THIAGO PINGUELLO DE ANDRADE

EQUAÇÕES DISPERSIVAS: ESTABILIDADE ORBITAL DE ONDAS VIAJANTES PERIÓDICAS

CAMPINAS

2014

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

THIAGO PINGUELLO DE ANDRADE

EQUAÇÕES DISPERSIVAS: ESTABILIDADE ORBITAL DE ONDAS VIAJANTES PERIÓDICAS

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. ADEMIR PASTOR FERREIRA

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO THIAGO PINGUELLO DE ANDRADE, E ORIENTADA PELO PROF. DR. ADEMIR PASTOR FERREIRA.

Assinatura do Orientador

Ademir Pastor

Campinas
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

An24e

Andrade, Thiago Pinguello de, 1985-
Equações dispersivas : estabilidade orbital de ondas viajantes perióricas / Thiago Pinguello de Andrade. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Ademir Pastor Ferreira.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações dispersivas. 2. Estabilidade orbital. 3. Ondas viajantes periódicas. 4. Benjamin-Bona-Mahony, Equações de. 5. Equação de Korteweg-de Vries modificada. 6. Gardner, Equações de. I. Ferreira, Ademir Pastor,1982-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Dispersive equations : orbital stability of periodic traveling waves
Palavras-chave em inglês:
Dispersive equations
Orbital stability
Periodic traveling waves
Benjamin-Bona-Mahony equation
Modified Korteweg-de Vries equation
Gardner equations
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Ademir Pastor Ferreira [Orientador]
Jaime Angulo Pava
Fabio Matheus Amorin Natali
Mahendra Prasad Panthee
Aloisio José Freiria Neves
Data de defesa: 08-09-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 08 de setembro de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Adimir Pastor

Prof(a). Dr(a). ADEMIR PASTOR FERREIRA

Prof(a). Dr(a). JAIME ANGULO PAVA

Prof(a). Dr(a). FABIO MATHEUS AMORIN NATALI

Prof(a). Dr(a). MAHENDRA PRASAD PANTHEE

Prof(a). Dr(a). ALOISIO JOSÉ FREIRIA NEVES

Abstract

In this thesis we study the orbital stability of periodic traveling waves for dispersive models. The study of traveling waves started in the mid-18th century when John S. Russel established that the flow of water waves in a shallow channel has constant evolution. The general strategy to obtain stability consists in proving that the traveling wave in question minimizes a conserved functional restricted to a certain manifold. In our context, following such ideas, we minimize such a functional restricted to a new manifold.

Although we believe our theory can be applied to other models, we deal with the Benjamin-Bona-Mahony (BBM) equation with fractional nonlinear terms and modified Korteweg-de Vries (mKdV) equation. Besides, similar stability results for the Gardner equation are obtained, using a close relation between this equation and the mKdV.

Keywords: Dispersive equations, orbital stability, periodic traveling waves, Benjamin-Bona-Mahony equation, modified Korteweg-de Vries equation and Gardner equation.

Resumo

Nesta tese estudamos estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas para modelos dispersivos. O estudo de ondas viajantes iniciou-se em meados do século XVIII quando John S. Russell estabeleceu que ondas de água em um canal raso possui evolução constante. A estratégia geral para se obter a estabilidade consiste em provar que a onda viajante em questão minimiza um funcional conservado restrito a uma certa variedade. No nosso contexto, seguindo tais ideias, minimizamos o funcional restrito a uma nova variedade.

Embora acreditamos que a teoria possa ser aplicada a outros modelos, nos restringimos às equações de Benjamin-Bona-Mahony (BBM) com termo não linear fracionário e Korteweg-de Vries modificada (mKdV). Além disso, resultados similares para a equação de Gardner são obtidos, usando uma estreita relação que esta possui com a mKdV.

Palavras-chave: Equações dispersivas, estabilidade orbital, ondas viajantes periódicas, equação de Benjamin-Bona-Mahony, equação de Korteweg-de Vries modificada e equação de Gardner.

SUMÁRIO

À minha mãe Laura Pinguello de Andrade ....

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer meu orientador Ademir Pastor pela excelente orientação e também ao professor Fábio Natali pelos importantes comentários.

Gostaria de agradecer também a UNICAMP e ao IMECC, juntamente com seus professores e funcionários pelo suporte, pelas matérias oferecidas e por toda a infraestrura disponibilizada para a minha formação.

Queria agradecer todos os meus amigos e minha familia, meu pai Jesus Carlos, minha segunda mãe Delmita e meus irmãos João Paulo e Lucas, que sempre estiveram ao meu lado durante o doutorado, sempre dando suporte a ajudando na medida do possivel.

Agradeço a minha namorada Débora, pelo apoio e pela companhia e por sempre estar ao meu lado.

Queria expressar minha gratidão a UEM, juntamente com seus professores, que me propiciaram a formação necessária no mestrado para eu entrar neste doutorado. Sou grato também aos professores de graduação, Adilandri, Magda e Marcio e aos professores do Colégio Nestor Victor, em especial, Sonia, Picirillo, Irene, Valdir e José Maria, que sempre me incentivaram para que eu seguisse firme nos estudos.

Finalmente agradeço a CAPES e ao CNPq pelo suporte financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

Lista de Símbolos

$C^p(I)$ Conjunto das funções de classe C^p no intervalo I, $p \in \mathbb{N}$.

$C^p_{per}([0,L])$ Conjunto das funções L-periódicas de classe C^p, $p \in \mathbb{N}$ e $p \geq 0$.

$C^\infty_{per}([0,L])$ Conjunto das funções L-periódicas de classe C^∞.

$L^2_{per}([0,L])$ Conjunto das funções u, L-periódicas, tais que $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(k)|^2 < \infty$.

$H^1_{per}([0,L])$ Conjunto das funções u, L-periódicas, tais que $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)|\hat{u}(k)|^2 < \infty$.

$C^p(I, H^1_{per}([0,L]))$ Espaço das funções $u(x,t)$ tais que $u(t) \in H^1_{per}([0,L])$ para todo $t \in I$ e a aplicação $t \mapsto u(t)$ é de classe C^p em I.

$\|u\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |u(x)|$.

$$\|u\| := \|u\|_{L^2_{per}} = \left(L \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\|u\|_1 := \|u\|_{H^1_{per}} = \left(L \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)|\hat{u}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\rho(u,v) := \inf\limits_{r\in\mathbb{R}} \|u - v(\cdot + r)\|_1$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Par dualidade entre $H^{-1}_{per}([0,L])$ e $H^{1}_{per}([0,L])$.
$K(k)$	Integral elíptica completa de primeiro tipo com módulo $k \in (0,1)$.
$E(k)$	Integral elíptica completa de segundo tipo com módulo $k \in (0,1)$.
$\mathrm{CN}(x,k)$	Função elíptica de Jacobi do tipo Cnoidal com módulo $k \in (0,1)$.
$\mathrm{DN}(x,k)$	Função elíptica de Jacobi do tipo Dnoidal com módulo $k \in (0,1)$.
$\mathrm{SN}(x,k)$	Função elíptica de Jacobi do tipo Senoidal com módulo $k \in (0,1)$.

Capítulo 1

Introdução

Os objetos de estudo desta tese são as equações diferenciais de evolução do tipo dispersivas, especialmente aquelas que pertencem à classe de equações

$$\mathcal{M}(\partial_t, \partial_x)u(x,t) + f(u)_x = 0 \tag{1.1}$$

onde $u = u(x,t)$ é uma função à valores reais, x, $t \in \mathbb{R}$, f uma função real não linear ao menos de classe C^1 e $\mathcal{M}$ um polinômio nas derivadas parciais. Equações deste tipo modelam uma grande quantidade de fenômenos presentes na natureza, entre eles, fluxos de água, ions e ondas eletromagnéticas.

Uma das primeiras equações dispersivas amplamente estudada foi a equação de Korteweg-de Vries (KdV daqui em diante),

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0, \tag{1.2}$$

que modela o fluxo de ondas de águas rasas. A motivação para D. Korteweg e G. de Vries [47] estabelecerem esse modelo era descrever um fenômeno observado anteriormente por J. Russell [65]. Na verdade, Russell havia observado o deslocamento de uma onda de água em um canal e constatado que a forma dessa onda não mudava conforme a onda se deslocava (onda de translação ou onda solitária). Após a observação de Russell, J. Boussinesq e Lord Rayleigh em [28] e [64], respectivamente, obtiveram uma representação para a onda observada por Russell como sendo da forma $u(x,t) = \alpha sech^2(\beta(x-ct))$ e depois de alguns anos, Korteweg e de Vries estabeleceram a equação KdV, como sendo o modelo que tem como solução a onda descrita por Boussinesq e Rayleigh e que regia o fenômeno observado por Russell.

Desde que a equação KdV foi estabelecida, descobriu-se que muitos outros fenômenos físicos são modelados por essa equação, por exemplo, a propagação longitudinal de ondas em um reticulado (Fermi-Pasta-Ulam [32] e Kruskal e Zabusky [48]), propagação de ondas de íons e acústica em um plasma frio (Taniuti e Whashini [69]), a rotação de um fluxo em um tubo (Leibovich [50]) e a propagação de ondas dispersivas longitudinal em hastes elásticas (Nariboli [54]). Mais aplicações podem ser encontradas em Dodd [31], Jeffrey e Kakutani [42] e Miura [53].

Entre as equações dispersivas que são estudadas hoje, além da KdV, destacamos as que abordaremos aqui.

i) Equação KdV modificada (mKdV),

$$u_t + u_{xxx} + u^2 u_x = 0. \tag{1.3}$$

ii) Equação de Benjamin-Bona-Mahony com não linearidade fracionária (nf-BBM),

$$u_t - u_{xxt} + (u + |u|^{\frac{3}{2}})_x = 0. \tag{1.4}$$

iii) Equação de Gardner,

$$u_t + u_{xxx} + auu_x + bu^2 u_x = 0. \tag{1.5}$$

Uma das motivações para se estudar a equação nf-BBM é matemática uma vez que esta faz parte da classe de equações proposta por Souganidis e Strauss em [66]. Além disso, ela possui também uma motivação física uma vez que corresponte a versão regularizada da equação de Shamel que modela o fluxo de ions em plasma com presença de eletros ressonantes (ou presos).

Do ponto de vista matemático a equação de Gardner aparece como uma combinação das equações KdV e mKdV. Já do ponto de vista físico, as equações de Gardner e mKdV modelam, por exemplo, ondas em meios plasmáticos e sólidos e campos quânticos. Ver [46], [67] e [68].

A descoberta feita por Russel, deu origem às ondas viajantes e ao que hoje conhecemos como Estabilidade Orbital (ou não linear) de uma onda. Note que, as equações (1.3)–(1.5), bem como a KdV, são equações invariantes pela ação do grupo $\mathbb{R}$ das translações. Neste contexto, as ondas viajantes são soluções da forma

$$u(x,t) = \phi_c(x - ct), \tag{1.6}$$

onde $c \in \mathbb{R}$ e ϕ_c é uma função em algum espaço conveniente. As ondas viajantes são classificadas basicamente em três grupos:

i) **Ondas Viajantes Solitárias.** São as ondas do tipo (1.6) cujo perfil ϕ_c satisfaz as seguintes condições de fronteira

$$\lim_{x\to\pm\infty} \phi_c^{(n)}(x) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $\phi_c^{(n)}(x)$ denota a n-ésima derivada de $\phi_c(x)$.

ii) **Ondas Viajantes do tipo Kink.** São as ondas do tipo (1.6) tais que

$$\lim_{x\to+\infty}\phi_c^{(n)}(x)=\alpha,\qquad \lim_{x\to-\infty}\phi_c^{(n)}(x)=\beta,\quad \forall n\in\mathbb{N},$$

onde α e β são constantes, $\alpha\neq\beta$ e $\phi_c^{(n)}(x)$ novamente denota a n-ésima derivada de $\phi_c(x)$.

iii) **Ondas Viajantes Periódicas:** São as ondas do tipo (1.6) cujo perfil ϕ_c é periódico com período fixado $L>0$, ou seja, que satisfaz as condições

$$\phi_c(0)=\phi_c(L)\quad \text{e}\quad \phi_c'(0)=\phi_c'(L).$$

O processo de encontrar ondas viajantes, inclui em geral, obter soluções de uma EDO da forma,

$$\mathsf{F}(\phi^{(n)},...,\phi,c,A)=0, \tag{1.7}$$

onde $c>0$ e A são parâmetros reais. No caso da equação KdV por exemplo, supondo que $u(x,t)=\phi_c(x-ct)$ seja uma solução, obtemos que o perfil ϕ_c deve satisfazer a EDO,

$$-\phi''+c\phi-\frac{1}{2}\phi^2=A, \tag{1.8}$$

onde A é uma constante de integração. Se assumirmos condições de fronteira, $\phi(\pm\infty)=0$, A é igual a zero. Este é o caso da onda viajante

$$\phi_c(x)=\alpha(c)\text{sech}^2(\beta(c)x) \tag{1.9}$$

estabelecida em [28] e [64] para descrever a onda observada por Russell. Após esta onda viajante ter sido apresentada, Korteweg e de Vries em [47] deduziram as ondas periódicas do tipo Cnoidal, mais precisamente

$$\phi_c(x)=\beta_1+(\beta_3-\beta_2)CN^2\left(\sqrt{\frac{\beta_3-\beta_1}{12}}x,k\right), \tag{1.10}$$

onde CN denota a função elíptica de Jacobi chamada Cnoidal, $k\in(0,1)$ é o módulo da função elíptica (ver Apêndice) e β_i são parâmetros reais, $i=1,2,3$.

Quando se olha para as ondas viajantes das equações dispersivas, a pergunta natural que surge é se elas são orbitalmente (ou não linearmente) estáveis ou não. Formalmente, dizemos que uma onda viajante do tipo (1.6) é orbitalmente estável em um espaço de Banach $(X,\|\cdot\|_X)$, se para cada $\varepsilon>0$ existe um $\delta>0$ tal que, se $\|u_0-\phi_c\|_X<\delta$ e $u(x,t)$ é uma solução da equação com $u(x,0)=u_0(x)$, então $u(x,t)$ existe para todo $t\in\mathbb{R}$ e

$$\inf_{y\in\mathbb{R}}\|u(t)-\phi_c(\cdot+y)\|_X<\varepsilon,\quad \text{para todo } t\in\mathbb{R}.$$

Caso contrário, dizemos que a onda viajante é orbitalmente instável.

Note que, a noção de estabilidade acima, é referente as equações que possuem invariâncias por translações. Para invariâncias em geral, ver [36] e [37].

Uma prova matemática de que a onda (1.9) era orbitalmente estável, foi apresentada um século após sua formulação por T. Benjamim em [22] e J. Bona [26], confirmando finalmente as observações feitas por Russell. Já a prova de que a onda (1.10) era orbitalmente estável foi obtida por Benjamin em [23] e Angulo, Bona e Scialom em [15]. A prova conclusiva obtida por [15] foi possível graças a uma adaptação ao caso periódico da teoria moderna para estabilidade não linear desenvolvida por Weinstein em [70] e [71] e por Grillakis, Shatah e Strauss em [36].

Após esse trabalho em [15], muitos outros resultados de estabilidade surgiram abordando a estabilidade de diversas ondas viajantes periódicas para diversos modelos dispersivos. Ver por exemplo, [6]- [14], [16]-[18], [56], [57], [58], [61] e [62].

O cerne da teoria desenvolvida por Weinstein, Grillakis, Shatah e Strauss para obtenção de estabilidade, consiste em usar quantidades conservadas. Mais precisamente, é necessário encontrar um funcional conservado $\mathcal{F} : X \longrightarrow X$ para o fluxo da equação (1.1), de tal modo que a solução da EDO (1.7) seja um ponto crítico de $\mathcal{F}$, isto é, $\mathcal{F}'(\phi) = 0$. No caso em que $A = 0$, tal funcional em geral é escrito como

$$\mathcal{F} = E + cQ, \tag{1.11}$$

onde E e Q são funcionais conservados que não dependem de c e nem de A. Em seguida, obtém-se a estabilidade mostrando que a onda viajante ϕ é um minimo local do funcional E restrito ao vínculo Q. Neste processo, a análise do espectro do operador

$$\mathcal{L} := \mathcal{F}''(\phi) \tag{1.12}$$

surge como um ingrediente principal, uma vez que a minimização é obtida via método variacional.

É importante observar, que se a constante A na EDO (1.7) é diferente de zero, então ϕ_c não pode ser ponto crítico do funcional dado em (1.11) (a menos que se imponha alguma restrição sobre a onda viajante, como por exemplo em [15] e [19]). Como originalmente a teoria desenvolvida por Weinstein, Grillakis, Shatah e Strauss foi usada para se obter estabilidade de ondas viajantes do tipo solitárias e neste caso A em (1.7) é sempre igual a zero, essa constante A nunca foi um problema.

Quando se lida com o caso periódico, A não é necessariamente zero. Assim, quando a estabilidade da onda viajante dada em (1.10) foi estudada em [15], os autores logo se depararam com essa dificuldade, a qual foi contornada impondo a condição de que a onda viajante tivesse média zero.

Nos trabalhos seguintes (ver [6]- [14], [16]-[18], [56], [57], [58], [61] e [62]), foram abordados os casos em que a onda viajante periódica é obtida assumindo-se que $A = 0$, pois nesse caso ainda é possível obter ondas viajantes periódicas e o funcional conservado $\mathcal{F}$ continua possuindo a forma dada em (1.11).

Recentemente, o caso $A \neq 0$ está sendo abordado e a estratégia usada para contornar esse problema, consiste em fazer adaptações da teoria desenvolvida por Weinstein, Grillakis, Shatah e Strauss, permitindo que o funcional $\mathcal{F}$ possa ser escrito em uma forma mais geral,

$$\mathcal{F} = E + cQ + AV, \tag{1.13}$$

onde E, Q e V são quantidades conservadas não dependentes de c e A. O primeiro trabalho nessa direção, devido a Johnson em [43], lida com o caso $A \neq 0$ no caso da equação GKdV. Em sua abordagem, Johnson não utiliza a forma explicita da onda viajante em questão. Este fato, a princípio, é vantajoso pois aborda não somente uma onda viajante mas uma classe delas, bem como evita cálculos árduos que são necessários quando se trabalha com a forma explícita da onda viajante.

Embora Johnson não utilize a forma explícita da onda viajante, ele precisa saber os sinais dos menores da matriz Jacobiana de $(T(\phi), V(\phi), Q(\phi))$, onde $T(\phi)$ é o período de ϕ e as derivadas parciais são tomadas nos parâmetros que determinam tais ondas, $\phi = \phi_{(c,A,B)}$, onde B é uma variável oriunda da forma da quadratura de (1.7). Contudo, mesmo no caso da KdV, tais condições são difíceis de serem verificadas.

Mais recentemente, Natali e Neves em [55], também abordaram o caso $A \neq 0$. Seguindo as ideias de Weinstein em [70] e [71], eles obtiveram resultados de estabilidade de ondas viajantes periódicas pares para as equações 3-KdV (GKdV, com p=3) e logarítmica Schödinger,

$$iu_t + u_{xx} + \log(|u|^2)u = 0,$$

onde $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $u(x,t)$ é uma função à valores complexos. Neste trabalho, também não foi utilizado a forma explícita da onda viajante e diferentemente de Johnson eles não ficaram presos a hipóteses sobre os menores da matriz Jacobiana que referimos acima.

Tanto em [55] quanto em [40], o qual é um trabalho mais recende de Hur e Johnson mas que segue as mesmas idéias de [43], a prova da estabilidade de uma onda viajante $\phi_{(c_0,A_0)}$, está condicionada a existência de uma superfície de ondas viajantes periódicas, com um período fixado

$L > 0$,

$$\begin{array}{rlcl} \mathcal{S}: & \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & X \\ & (c, A) & \longmapsto & \mathcal{S}(c, A) = \phi_{(c,A)}, \end{array}$$

onde $\mathcal{O}$ é uma vizinhança de (c_0, A_0). Contudo, em nenhum desses trabalhos a forma explícita para $\mathcal{S}$ foi apresentada.

Em [40], a prova da estabilidade de $\phi_{(c,A)}$ primeiro é obtida para pertubações na variedade

$$\Sigma_{(c,A)} = \left\{u \in X;\ \ Q(u) = Q(\phi_{(c,A)}) \ \text{ e } \ V(u) = V(\phi_{(c,A)})\right\},$$

para todo $(c, A) \in \mathcal{O}$. Em seguida, para pertubações u_0 em geral, é usado o fato da aplicação

$$\begin{array}{rlcl} \mathcal{B}: & \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (c, A) & \longmapsto & \mathcal{B}(c, A) = (Q(\phi_{(c,A)}), V(\phi_{(c,A)})) \end{array}$$

ser um difeomorfismo, para a obtenção de $(c_1, A_1) \in \mathcal{O}$ tal que o dado inicial $u_0 \in \Sigma_{(c_1,A_1)}$. Finalmente, como $\phi_{(c_1,A_1)}$ é estável por pertubações em $\Sigma_{(c_1,A_1)}$, o resultado segue por um argumento de desigualdade triangular.

Neste trabalho de tese, continuaremos abordando o caso $A \neq 0$ e aplicaremos nossa teoria para as equações (1.3)–(1.5). Ao invés de assumirmos hipóteses para existência da superfície $\mathcal{S}$ e da aplicação $\mathcal{B}$, exibiremos, usando o Teorema da função implícita, uma curva de soluções explícita para a equação (1.7), $k \longmapsto \phi_k := \phi_{(c(k),A(k))} = \phi_{r(k)}$, onde

$$\begin{array}{rlcl} \mathtt{r}: & (0,1) & \longrightarrow & \mathcal{O} \\ & k & \longmapsto & \mathtt{r}(k) = (c(k), A(k)). \end{array}$$

Também, não imporemos condições para que o operador $\mathcal{L}$ em (1.12) possua um único autovalor negativo simples e que 0 seja um autovalor simples. Condições essas essenciais em nossa análise. Obteremos tais propriedade a partir da forma explícita da onda viajante, das teorias desenvolvidas por Neves em [61] e [62] e Ince em [41]

Seguindo as ideias de [40], é possível obter estabilidade das ondas viajantes ϕ_k restrito a pertubações u_0 na variedade

$$\tilde{\Sigma}_k = \{u \in X;\ \ Q(u) = Q(\phi_k) \ \text{ e } \ V(u) = V(\phi_k)\}.$$

Contudo, o argumento de desigualdade triangular, agora no caso unidimensional, parece não funcionar uma vez que se u_0 não pertence a $\tilde{\Sigma}_k$ não conseguimos um k_1 tal que $u_0 \in \tilde{\Sigma}_{k_1}$.

Sendo assim, para obter o resultado de estabilidade para qualquer pertubação, ao invés de provarmos inicialmente estabilidade na variedade $\tilde{\Sigma}_k$, provaremos estabilidade em uma variedade mais geral Σ_k, a saber,

$$\Sigma_k := \left\{ u \in X; \;\; M_k(u) = M_k(\phi_k), \;\; \text{onde} \;\; M_k := \frac{\partial c}{\partial k} Q + \frac{\partial A}{\partial k} V \right\}. \tag{1.14}$$

De posse desse resultado, conseguiremos provar a estabilidade não linear das ondas ϕ_k, com pertubações gerais, usando um argumento de contradição conforme a demostração do Teorema 3.5 em [36].

Acreditamos, que esse nosso trabalho, fornece uma importante contribuição para se obter resultados de estabilidade, usando a curva explícita de ondas viajantes periódicas no caso em que a constante $A \neq 0$.

No capítulo 2, veremos alguns conceitos preliminares, faremos uma breve visita ao Teorema de Floquet e ao Teorema da Oscilação e veremos como, a partir desses resultados, Neves em [61] e [62], obteve teoremas que nos fornecem informações sobre o espectro do operador $\mathcal{L}_{(c,A)} := \mathcal{F}''(\phi_{(c,A)})$, que são cruciais em nossa análise.

No capítulo 3, provaremos a estabilidade das ondas viajantes periódicas da equação (1.4), da forma

$$\phi_k(\xi) = (\alpha + \beta CN^2(\gamma\xi, k))^2, \tag{1.15}$$

onde CN denota a função elíptica de Jacobi Cnoidal.

No capítulo 4, provaremos a estabilidade orbital das ondas viajantes periódicas da equação modificada KdV (mKdV) da forma

$$\phi_k(\xi) = \alpha \frac{DN^2(\gamma\xi, k)}{1 + \beta SN^2(\gamma\xi, k)}, \tag{1.16}$$

onde DN e SN denotam as funções elípticas de Jacobi Dnoidal e Snoidal, respectivamente. Para um melhor entendimento sobre as funções de Jacobi, ver apêndice. Neste caso, acreditamos ser possível obter estabilidade da onda viajante (1.16), aplicando a teoria desenvolvida em [55], pois esta onda é par. Embora provamos estabilidade para uma onda par, não precisamos em nenhum momento impor essa condição, o que nos leva a crer, que nossa teoria permite abordar casos mais gerais.

No capítulo 5, motivados pelo trabalho recente de Alejo em [4], que provou estabilidade de ondas viajantes solitárias para a equação de Gardner, provaremos também estabilidade de ondas viajantes periódicas da equação (1.5), da forma

$$\phi_k(x) = \tilde{\alpha}\frac{DN^2(\gamma\xi, k)}{1+\beta SN^2(\gamma\xi, k)} + \tilde{\beta}. \tag{1.17}$$

Assim como em [4], nossa estratégia para lidar com esse caso, consiste em usar uma estreita relação que a equação de Gardner possui com a modificada KdV. Veremos que no nosso caso existe um difeomorfismo que associa soluções da equação modificada KdV com a equação de Gardner (ver Capítulo 5, pg. 101). Constatamos, que no caso periódico, esse difeomorfismo preserva a noção de estabilidade não linear e dessa forma, estudar estabilidade para a equação de Gardner se torna equivalente a estudar estabilidade para a modificada KdV.

É importante observar, que o uso dessa transformação na obtenção de estabilidade, é mais direta no caso periódico, pois no caso de ondas solitárias, quando a constante $\tilde{\beta}$ em (1.17) é somada, a onda solitária deixa de pertencer ao espaço inicial e assim a transformação não leva soluções de um espaço nele mesmo. Dessa forma, para obter estabilidade de ondas viajantes solitárias que tende a zero no infinito para a equação de Gardner, Alejo teve que provar estabilidade de ondas solitárias que tendem a uma constante não nula no infinito para a equação modificada KdV.

Finalmente, no capitulo 6, faremos alguns comentários e exibiremos o que acreditamos ser os próximos tópicos a serem estudados após este nosso trabalho.

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

2.1 O Teorema de Floquet e o Teorema da Oscilação

Nesta seção, veremos brevemente o Teorema de Floquet, o Teorema da Oscilação e os resultados obtidos por Neves em [61], que relacionam a teoria Floquet com a estrutura espectral de um operador de Hill, a saber, um operador do tipo

$$\mathcal{L}(y) = -y'' + q(x)y, \tag{2.1}$$

definido em algum espaço de funções periódicas conveniente.

Consideraremos $\mathcal{Q} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) uma função de variável real x, contínua e periódica com período minimal π. Por simplicidade, usaremos o período π mas o que faremos aqui continua válido caso fixemos um outro período.

Pela teoria geral de EDO's, a equação

$$y'' + \mathcal{Q}(x)y = 0 \tag{2.2}$$

possui duas soluções continuamente diferenciáveis e linearmente independentes $y_1(x)$ e $y_2(x)$, as quais são univocamente determinada pelas condições

$$y_1(0) = 1, \;\; y_1'(0) = 0, \;\; y_2(0) = 0 \quad \text{e} \quad y_2'(0) = 1\,. \tag{2.3}$$

Além disso, a equação característica e o expoente característico α, associados à (2.2), são dados por

$$\rho^2 - [y_1(\pi) + y_2'(\pi)]\rho + 1 = 0, \tag{2.4}$$

e

$$e^{i\alpha\pi} = \rho_1 \qquad\qquad e^{-i\alpha\pi} = \rho_2, \tag{2.5}$$

respectivamente. Aqui, ρ_1 e ρ_2 são as raízes da equação característica (2.4). Nesse contexto, temos a seguinte versão para o Teorema de Floquet, que pode ser encontrado juntamente com sua demonstração, na referência [60].

Teorema 2.1 (Teorema de Floquet). *(i) Se as raízes ρ_1 e ρ_2 da equação característica* (2.4) *são distintas, então a equação de Hill* (2.2) *possui duas soluções linearmente independentes,*

$$f_1(x) = e^{i\alpha x} P_1(x), \qquad f_2(x) = e^{-i\alpha x} P_2(x)\,,$$

onde $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são periódicas com período π .

(ii) Se $\rho_1 = \rho_2$, então a equação (2.2) *possui uma solução não trivial a qual é periódica com período π (quando $\rho_1 = \rho_2 = 1$) ou 2π (quando $\rho_1 = \rho_2 = -1$). Se $p(x)$ for uma solução periódica e $y(x)$ for outra solução linearmente independente com $p(x)$, então*

$$y(x+\pi) = \rho_1 y(x) + \theta p(x), \qquad \textit{onde } \theta \textit{ é constante.} \tag{2.6}$$

Ainda, $\theta = 0$ é equivalente a

$$y_1(\pi) + y_2'(\pi) = \pm 2, \qquad y_2(\pi) = 0 \quad e \quad y_1'(\pi) = 0\,.$$

Fixando $\lambda \in \mathbb{C}$, consideremos a equação

$$y'' + [\lambda - q(x)]y = 0, \tag{2.7}$$

com $(\lambda - q(x)) = \mathcal{Q}(x)$, e sejam y_1 e y_2 duas soluções linearmente independentes determinadas pelas condições iniciais

$$y_1(0,\lambda) = 1,\;\; y_1'(0,\lambda) = 0,\;\; y_2(0,\lambda) = 0 \text{ e } y_2'(0,\lambda) = 1. \tag{2.8}$$

O seguinte teorema, devido a Liapounoff [51] e a Haupt [38], juntamente com sua demonstração podem ser encontradas em [60].

Teorema 2.2 (Teorema da Oscilação). *Existem duas sequências de números reais monótonas não decrescentes,*

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, ... \tag{2.9}$$

e

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, ... \tag{2.10}$$

tais que (2.7) *possui uma solução de período* π *se, e somente, se* $\lambda = \lambda_n$, $n = 0, 1, 2, 3, ...$ *e uma solução de período* 2π *se, e somente, se* $\lambda = \mu_n$, $n = 1, 2, 3, 4, ...$

Os λ_n*'s e* μ_n*'s satisfazem a desigualdade,*

$$\lambda_0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \mu_3 \leq \mu_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < ... \tag{2.11}$$

com

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} = 0 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu_n} = 0. \tag{2.12}$$

As soluções de (2.7) *são limitadas nos intervalos*

$$(\lambda_0, \mu_1), (\mu_2, \lambda_1), (\lambda_2, \mu_3), (\mu_4, \lambda_3), \dots . \tag{2.13}$$

Nos pontos finais desses intervalos, (2.7) *possui em geral soluções ilimitadas. Isto sempre é verdadeiro para* $\lambda = \lambda_0$. *As soluções de* (2.7) *são limitadas para* $\lambda = \lambda_{2n+1}$ *ou* $\lambda = \lambda_{2n+2}$ *se, e somente, se* $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$ *e elas são limitadas para* $\lambda = \mu_{2n+1}$ *ou* $\lambda = \mu_{2n+2}$ *se, e somente, se* $\mu_{2n+1} = \mu_{2n+2}$.

Para valores complexos de λ, (2.7) *sempre possui soluções ilimitadas. Os* λ_n*'s são as raízes da equação* $\Delta(\lambda) = 2$ *e os* μ_n*'s são as raízes da equação* $\Delta(\lambda) = -2$, *onde*

$$\Delta(\lambda) = y_1(\pi, \lambda) + y_2'(\pi, \lambda) .$$

Observe, que o teorema acima pode ser visto como um teorema espectral para os operadores de Hill da forma (2.1). Os λ_i's são os autovalores de $\mathcal{L}$. Além disso, como a equação (2.7) possui no máximo duas soluções linearmente independentes periódicas, temos que esses autovalores, podem no máximo, serem duplos. Na verdade, é uma consequência dos dois teoremas acima, que $\lambda = \lambda_{2n+1}$ é duplo se, e somente, se $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$. O mesmo vale para $\lambda = \mu_{2n+1}$.

Resumindo, o Teorema de Floquet e o Teorema da Oscilação, fornecem informações sobre o espectro de operadores do tipo $\mathcal{L}(y) = -y'' + q(x)y$.

Motivados por esses resultados, outros autores se aprofundaram no estudo da teoria Floquet e muitas outras informações sobre o espectro de tais operadores foram obtidas, algumas delas podem ser encontradas em [60]. Entre esses resultados, pontuaremos alguns, que é de interesse para este trabalho. O primeiro é um teorema devido à Haupt em [38], que relaciona a posição do autovalor no espectro e o número de zeros das respectivas autofunções.

Teorema 2.3 (Haupt)**.** *Seja* $y(x, \lambda)$ *uma solução periódica real e não trivial de* (2.7) *com período* π *ou* 2π.

(i) Se $\lambda = \lambda_0$*, então* $y(x, \lambda)$ *não possui zeros no intervalo* $0 \leq x < \pi$*,*

(ii) se $\lambda = \mu_{2n+1}$ *ou* $\lambda = \mu_{2n}$*, então* $y(x, \lambda)$ *possui exatamente* $2n+1$ *zeros no intervalo semi-aberto* $0 \leq x < 2\pi$ *e*

(iii) se $\lambda = \lambda_{2n-1}$ *ou* $\lambda = \lambda_{2n}$*, então* $y(x, \lambda)$ *possui exatamente* $2n$ *zeros no intervalo* $0 \leq x < \pi$*.*

Mais recentemente, Neves em [61], aprimorou o Teorema de Floquet e estabeleceu um teorema que permite saber a posição de um determinado autovalor no espectro conhecendo-se o número de zeros de sua autofunção e o sinal da constante θ que aparece no Teorema de Floquet.

Primeiramente, Neves obteve um resultado que apresenta uma caracterização para a solução y da equação de Hill que aparece no item (ii) do Teorema de Floquet.

Teorema 2.4. *Seja* $p(x)$ *uma solução periódica de período* π *de* (2.7)*. Então, para cada* $a \in \mathbb{R}$ *fixado,*

$$y(x) = -q(x) + \left(\sum_{x_i \in (a,x]} j(x_i) \right) p(x) + 2p(x) \int_a^x \frac{q'(t)}{p(t)} dt \,, \tag{2.14}$$

é solução de (2.7) *no intervalo* $[a, a+\pi)$*, onde*

$$q(x) = \frac{x - z_i}{p(x)}, \qquad x \in [x_{i-1}, x_i) \,,$$

com $i = 2, 3, ..., 2n+1$*,* $z_{2n+1} = z_1 + \pi$ *e* $x_{2n+1} = x_1 + \pi$*, e*

$$j(x_i) = \frac{z_i - z_{i+1}}{p^2(x_i)} \,.$$

Aqui, os z_i*'s e* x_i*'s são os zeros de* $p(x)$ *e* $p'(x)$*, respectivamente. Além disso,* $y(x)$ *satisfaz as condições iniciais*

$$y(a) = -q(a), \qquad y'(a) = q'(a)$$

e é linearmente independente com $p(x)$*, sendo que,* $W(p(x), y(x)) = 1$*.*

Em seguida, Neves obteve um resultado que caracteriza a constante θ.

Teorema 2.5. *Se* $p(x)$ *é uma solução periódica com período* π *de* (2.7) *e* $y(x)$ *é a solução linearmente independente com* $p(x)$ *apresentada no teorema anterior, então*

$$y(x + \pi) = y(x) + \theta p(x), \tag{2.15}$$

onde θ é dado por

$$\theta = \sum_{x_i \in (0,\pi]} j(x_i) + 2\int_0^{\pi} \frac{q'(t)}{p(t)} dt. \tag{2.16}$$

Em particular, $y(x)$ é periódica com período π se, e somente se $\theta = 0$.

Vale ressaltar, que Neves e Natali em [55], não usaram mais as caracterizações em (2.14) e (2.16) para obter o sinal de θ. Ao invés disto, enxergando θ como sendo,

$$\theta = \frac{y'(\pi)}{p'(0)}$$

eles encontraram uma maneira de obter uma aproximação de θ através de um método numérico. Isto pode ser visto nas seções sobre estabilidade orbital nos próximos capítulos.

Finalmente, o principal resultado de [61], nos fornece informações sobre a posição dos autovalores no espectro do operador $\mathcal{L}$.

Teorema 2.6. *Se $p(x)$ é autofunção de $\mathcal{L}$ associada ao autovalor λ_k, $k \geq 1$ e θ é a constante dada pelo Teorema 2.5, então*

(i) λ_k é simples se, e somente, se $\theta \neq 0$.

(ii) Se $p(x)$ possui $2n$ zeros no intervalo semi-aberto $[0, \pi)$, então

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda_{2n-1} & se \ \ \theta < 0, \\ \lambda_{2n} & se \ \ \theta > 0. \end{cases}$$

Demonstração: A primeira parte do teorema é uma consequência do Teorema de Floquet e do Teorema da Oscilação.

Concentremos-nos portanto, na prova da segunda parte. Para isso, consideremos as funções,

$$\xi(x,\lambda) = \frac{d}{d\lambda} y_1(x,\lambda) \ \text{ e } \ \eta(x,\lambda) = \frac{d}{d\lambda} y_2(x,\lambda)$$

onde $y_1(x,\lambda)$ e $y_2(x,\lambda)$ são as soluções linearmente independentes de (2.7) satisfazendo (2.8).

As funções $\xi(x,\lambda)$ e $\eta(x,\lambda)$ satisfazem, respectivamente, as equações

$$\begin{cases} \xi(x,\lambda)'' + (q(x) + \lambda)\xi(x,\lambda) = -y_1(x,\lambda), \\ \eta(x,\lambda)'' + (q(x) + \lambda)\eta(x,\lambda) = -y_2(x,\lambda) \end{cases} \tag{2.17}$$

e a condição inicial homogênea

$$\xi(0,\lambda)=\xi'(0,\lambda)=\eta(0,\lambda)=\eta'(0,\lambda)=0\,. \tag{2.18}$$

Por outro lado, seja $y(x)$ a solução de (2.7) linearmente independente com $p(x)$ dada pelo Teorema 2.4. Observe que, como $p(x)$ é autofunção de $\mathcal{L}$ associada ao autovalor λ_k, $y(x)$ é solução de (2.7) para $\lambda=\lambda_k$. Logo, existem constantes c_1 e c_2 tais que $y_2(x,\lambda_k)=c_1p(x)+c_2y(x)$ e constantes c_3 e c_4 tais que $y_1(x,\lambda_k)=c_3p(x)+c_4y(x)$.

A fim de encontrar c_1 e c_2, consideremos os dados iniciais sobre $y_1(x,\lambda)$ e $y_2(x,\lambda)$ para obtermos o seguinte sistema,

$$\begin{cases} 0=y_2(0,\lambda_k)=c_1p(0)+c_2y(0),\\ 1=y_2'(0,\lambda_k)=c_1p'(0)+c_2y'(0). \end{cases} \tag{2.19}$$

Daí, usando o Teorema 2.4, o determinante da matriz dos coeficientes é dado por

$$\det\begin{bmatrix} p(0) & y(0)\\ p'(0) & y'(0)\end{bmatrix}=W(p,y)(0)=1\,.$$

Logo, usando a Regra de Crammer, as soluções do sistema (2.19) são

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y(0)\\ 1 & y'(0)\end{vmatrix}}{1}=-y(0)\quad \text{e}\quad c_2=\frac{\begin{vmatrix} p(0) & 0\\ p'(0) & 1\end{vmatrix}}{1}=p(0)\,.$$

Assim,

$$y_2(x,\lambda_k)=-y(0)p(x)+p(0)y(x)\,. \tag{2.20}$$

Da mesma forma, obtemos

$$y_1(x,\lambda_k)=y'(0)p(x)-p'(0)y(x). \tag{2.21}$$

Portanto, usando (2.15), (2.20) e (2.21), segue que

$$\begin{aligned} &y_1(\pi,\lambda_k)=1-\theta p(0)p'(0), \qquad && y_1'(\pi,\lambda_k)=-\theta(p'(0))^2,\\ &y_2(\pi,\lambda_k)=\theta p^2(0) \qquad \text{e} && y_2'(\pi,\lambda_k)=1+\theta p(0)p'(0). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Agora, resolvendo o sistema não homogêneo (2.17) com condições iniciais (2.18) e usando (2.22) para avaliar as soluções em $x=\pi$ e $\lambda=\lambda_k$, encontramos

$$\begin{aligned} \xi(\pi,\lambda_k) &= y_1(\pi,\lambda_k)\int_0^\pi y_2(t)y_1(t)dt-y_2(\pi,\lambda_k)\int_0^\pi y_1^2(t)dt\\ &=(1-\theta p(0)p'(0))(y_1,y_2)_{L^2_{per}}-\theta p^2(0)\|y_1\|^2_{L^2_{per}}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\eta(\pi,\lambda_k) &= y_1(\pi,\lambda_k)\int_0^\pi y_2^2(t)dt - y_2(\pi,\lambda_k)\int_0^\pi y_1(t)y_2(t)dt\\
&= (1-\theta p(0)p'(0))\|y_2\|^2_{L^2_{per}} - \theta p^2(0)(y_1,y_2)_{L^2_{per}},\\
\xi'(\pi,\lambda_k) &= y_1'(\pi,\lambda_k)\int_0^\pi y_2(t)y_1(t)dt - y_2'(\pi,\lambda_k)\int_0^\pi y_1^2(t)dt\\
&= -\theta(p'(0))^2(y_2,y_1)_{L^2_{per}} - (1+\theta p(0)p'(0))\|y_1\|^2_{L^2_{per}}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\eta'(\pi,\lambda_k) &= y_1'(\pi,\lambda_k)\int_0^\pi y_2^2(t)dt - y_2(\pi,\lambda_k)\int_0^\pi y_1(t)y_2(t)dt\\
&= -\theta(p'(0))^2\|y_2\|^2_{L^2_{per}} - (1+\theta p(0)p'(0))(y_1,y_2)_{L^2_{per}}\,.
\end{aligned}
$$

Portanto, a derivada $\Delta'(\lambda)$ em $\lambda=\lambda_k$, é dada por

$$
\begin{aligned}
\Delta'(\lambda_k) &= \xi(\pi,\lambda_k)+\eta'(\pi,\lambda_k)\\
&= (1-\theta p(0)p'(0))(y_1,y_2)_{L^2_{per}} - \theta p^2(0)\|y_1\|^2_{L^2_{per}}\\
&\quad -\theta(p'(0))^2\|y_2\|^2_{L^2_{per}} - (1+\theta p(0)p'(0))(y_1,y_2)_{L^2_{per}}\\
&= -\theta\left[\|y_1\|^2_{L^2_{per}}p^2(0) + 2(y_1,y_2)_{L^2_{per}}p(0)p'(0) + \|y_2\|^2_{L^2_{per}}(p'(0))^2\right]\,.
\end{aligned}
$$

Observemos que o termo que aparece multiplicando θ acima é uma forma quadrática positiva de $\mathbb{R}^2$ avaliada em $(p(0),p'(0))$ e que $p(0)$ e $p'(0)$ não se anulam simultaneamente. Logo,

$$
\Delta'(\lambda_k)\theta < 0\,. \tag{2.23}
$$

A desigualdade (2.23) nos fornece a prova do teorema, pois se $\theta<0$, então $\Delta'(\lambda_k)>0$ e daí, $\lambda_k=\lambda_{2n-1}$. Se $\theta>0$, então $\Delta'(\lambda_k)<0$ e assim $\lambda_k=\lambda_{2n}$. A Figura 2.1 ilustra melhor este fato.

Como $\theta\neq 0$, λ_k não é raiz dupla da equação característica. □

Veremos nas Seções 3.4 e 4.3, pag. 47 e 91, respectivamente, que zero é um autovalor de um operador de Hill $\mathcal{L}$, associado à uma autofunção que possui dois zeros no intervalo $[0,L)$. Além disso, através de uma computação numérica, constataremos que a constante θ é negativa. Portanto, aliando estas condições com o Teorema 2.6, obteremos que o autovalor zero é simples e é o segundo autovalor no espectro de $\mathcal{L}$.

2.2 Famílias isonerciais de operadores autoadjuntos

Nesta seção abordaremos os conceitos de índice de inércia de um operador e famílias de operadores isonerciais. Além disso, demonstraremos um teorema desenvolvido por Neves em [62], que garante, sob certas condições, que uma família de operadores de Hill é isonercial.

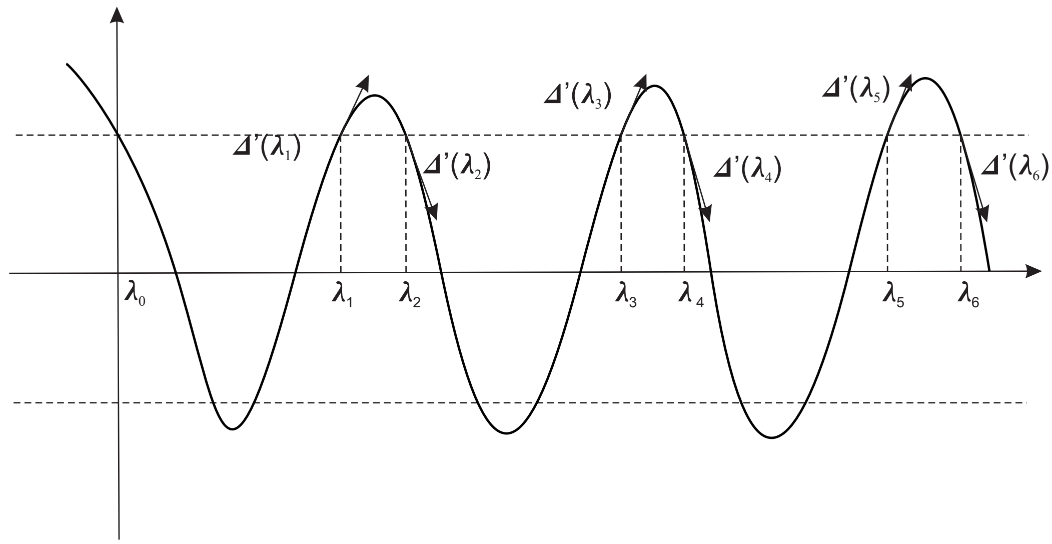

Figura 2.1: Gráfico da função $\Delta(\lambda)$.

Os operadores com o qual lidaremos neste trabalho são autoadjuntos, seu espectro coincide com o conjunto dos autovalores e satisfazem a seguinte propriedade.

$\mathcal{P}$: Existe $\gamma > 0$ tal que o espectro de $\mathcal{L}$ que fica a esquerda de γ consiste de um número finito de autovalores e o espaço gerado pelas respectivas autofunções possui dimensão finita.

Para estes operadores faz sentido estender a definição de inércia.

Definição 2.7. *Seja $\mathcal{L}$ um operador autoadjunto definido em um espaço de Hilbert H de dimensão infinita e que satisfaz a propriedade $\mathcal{P}$. Definimos o índice de inércia $In(\mathcal{L})$ como sendo o par (n, z), onde n é a dimensão do subespaço negativo de $\mathcal{L}$ (subespaço gerado pelas autofunções associadas aos autovalores negativos) e z é a dimensão do subespaço nulo de $\mathcal{L}$ (subespaço gerado pelas autofunções associados ao autovalor zero).*

Definimos também, família isonercial de operadores.

Definição 2.8. *Uma família de operadores autoadjuntos $\mathcal{L}_s := \mathcal{L}(s)$, que depende de um parâmetro s, é chamada isonercial se o índice $In(\mathcal{L}_s)$ não depende de s.*

O método utilizado para se obter famílias isonerciais de operadores é baseada na lei de inércia de Sylvester (cuja demonstração pode ser encontrada em [33]).

Lema 2.9. *(Lei da inércia de Sylvester generalizada) Se $\mathcal{L}$ é um operador autoadjunto e M é um operador limitado e inversível com adjunto M^*, então $In(M\mathcal{L}M^*) = In(\mathcal{L})$, onde $M\mathcal{L}M^*$ é um operador autoadjunto com domínio $M^*(D(\mathcal{L}))$.*

Veremos agora como este lema é útil para obtermos uma caracterização para as famílias de operadores isonerciais. Suponha que a familia de operadores $\mathcal{L}(s)$ depende suavemente do parâmetro s e satisfaz a seguinte equação

$$\frac{dT}{ds} = B(s)T(s) + T(s)B^*(s), \tag{2.24}$$

onde $B(s)$ é um operador dado. Suponha também, que $M(s)$ seja uma solução da equação

$$\frac{d}{ds}M(s) = B(s)M(s), \qquad M(s_0) = I\,. \tag{2.25}$$

Como $\mathcal{L}(s)$ satisfaz (2.24), temos

$$\mathcal{L}(s) = M(s)\mathcal{L}(s_0)M^*(s)\,. \tag{2.26}$$

De fato, podemos ver que $M(s)\mathcal{L}(s_0)M^*(s)$ é solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}T(s) & = B(s)T(s) + T(s)B^*(s), \\ \quad T(s_0) & = \mathcal{L}_0 = M(s_0)\mathcal{L}(s_0)M^*(s_0), \end{cases}$$

posto que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(M(s)\mathcal{L}(s_0)M^*(s)\right) &= M(s)\mathcal{L}(s_0)\frac{d}{ds}(M^*(s)) + \frac{d}{ds}(M(s))\mathcal{L}(s_0)M^*(s) \\ &= M(s)\mathcal{L}(s_0)M^*(s)B^*(s) + B(s)M(s)\mathcal{L}(s_0)M^*(s) \\ &= \left[M(s)\mathcal{L}(s_0)M^*(s)\right]B^*(s) + B(s)\left[M(s)\mathcal{L}(s_0)M^*(s)\right]\,. \end{aligned}$$

Uma vez que $M(s)$ é um operador inversível e limitado, temos pelo Lema 2.9, que

$$In\left(\mathcal{L}(s_0)\right) = In\left(M(s)\mathcal{L}(s_0)M^*(s)\right)\,. \tag{2.27}$$

Logo, por (2.26),

$$In\left(M(s)\mathcal{L}(s_0)M^*(s)\right) = In\left(\mathcal{L}(s)\right)\,. \tag{2.28}$$

Portanto, de (2.27) e (2.28), a familia $\mathcal{L}(s)$ é isonercial. *A equação* (2.24) *é conhecida como a equação que governa as famílias de operadores isonerciais.*

Estes conceitos foram usados, em [62], para estudar as famílias de operadores de Hill da forma

$$\mathcal{L}(s)(h) = -h'' + \mathcal{Q}(x,s)h\,, \tag{2.29}$$

com domínio $D(\mathcal{L}(s)) = H^2_{per}([0,\pi])$, para todo $s \in \mathbb{R}$. O potencial $\mathcal{Q}(x,s)$, é assumido ser periódico, com período π no espaço e continuamente diferenciável para $x \in \mathbb{R}$ e s em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Mas precisamente, em [62], o autor obteve o seguinte resultado.

Teorema 2.10. *Considere $\mathcal{L}(s)$ o operador de Hill,*

$$\mathcal{L}(s)(h) = -h''(x) + \mathcal{Q}(x,s)h(x)$$

com domínio $D(\mathcal{L}(s)) = H^2_{per}([0,\pi])$. Se

(H) $\quad$ *$\lambda = 0$ é um autovalor de $\mathcal{L}(s)$, para cada s no intervalo I*

e o potencial $\mathcal{Q}(x,s)$ é continuamente diferenciável, então a família de operadores $\mathcal{L}(s)$, $s \in I$, é isonercial.

Demonstração: A estratégia da demonstração consiste em exibir um operador $B(s)$ e então mostrar que o problema (2.25) admite uma solução inversível $M(s)$. Desta maneira, $\mathcal{L}(s)$ satisfará a equação (2.24) e portanto, será uma família isonercial de operadores.

Na demostração deste teorema, usaremos técnicas da teoria de Floquet (ver [60]). Observe que o núcleo de $\mathcal{L}(s)$ é constituído de todas as soluções periódicas da equação de Hill

$$-y'' + \mathcal{Q}y = 0\,. \tag{2.30}$$

Observe também, que a equação (2.30) é fechada com relação ao produto de duas soluções, no seguinte sentido, o produto de quaisquer duas soluções de (2.30) é solução da equação

$$-y''' + 4\mathcal{Q}y' + 2\mathcal{Q}'y = 0\,. \tag{2.31}$$

Além disso, se y_1 e y_2 são duas soluções linearmente independentes de (2.30) então y_1^2, y_1y_2 e y_2^2 são três soluções linearmente independentes de (2.31).

Por outro lado, a hipótese (H) é equivalente a equação de Hill (2.30) possuir solução não trivial.

Considerando então $T(s)$, com domínio $D(T(s)) = H^3_{per}([0,\pi])$, dado por

$$T(s)y = -y''' + 4\mathcal{Q}y' + 2\mathcal{Q}'y\,,$$

temos, pelo Lema 3.2 de [60], que se a hipótese (H) é satisfeita, então o núcleo de $T(s)$ possui dimensão 1 ou 3. Ademais, o caso de dimensão 3 ocorre se, e somente se, todas as soluções de (2.30) são periódicas com período π.

Sejam $y_1 = y_1(x,s)$ e $y_2 = y_2(x,s)$ duas soluções quaisquer de (2.30) linearmente independentes. Estas soluções são continuamente diferenciáveis em todas as variáveis. Diferenciando (2.30) com respeito à s, temos que

$$z_1 := \frac{dy_1}{ds}(x,s) \qquad \text{e} \qquad z_2 := \frac{dy_2}{ds}(x,s)\,,$$

devem satisfazer

$$-z_1'' + \mathcal{Q}z_1 + \frac{d\mathcal{Q}}{ds}y_1 = 0 \tag{2.32}$$

e

$$-z_2'' + \mathcal{Q}z_2 + \frac{d\mathcal{Q}}{ds}y_2 = 0\,, \tag{2.33}$$

respectivamente. Multiplicando (2.32) por y_2 e integrando de 0 à π, obtemos

$$\int_0^\pi \frac{d\mathcal{Q}}{ds}y_1y_2dx \;=\; \int_0^\pi -z_1(-y_2'' + \mathcal{Q}y_2)dx\,.$$

Porém, como $-y_2'' + \mathcal{Q}y_2 = 0$, vemos que

$$\int_0^\pi \frac{d\mathcal{Q}}{ds}y_1y_2dx = 0\,. \tag{2.34}$$

Similarmente, multiplicando (2.32) por y_1, encontramos

$$\int_0^\pi \frac{d\mathcal{Q}}{ds}y_1^2dx = 0\,. \tag{2.35}$$

Também, multiplicando (2.33) por y_2, deduzimos

$$\int_0^\pi \frac{d\mathcal{Q}}{ds}y_2^2dx = 0\,. \tag{2.36}$$

Portanto, agrupando (2.34), (2.35) e (2.36), temos

$$\frac{d\mathcal{Q}}{ds} \in [y_1^2, y_2^2, y_1y_2]^\perp\,.$$

Por outro lado, como y_1^2, y_2^2 e y_1y_2 são soluções linearmente independentes da equação (2.31) e esta equação é linear e homogênea, temos

$$[y_1^2, y_2^2, y_1y_2] = Ker(T(s))\,.$$

Consequentemente,

$$\frac{d\mathcal{Q}}{ds} \in Ker(T(s))^{\perp}. \tag{2.37}$$

Além disso, para todo $u \in D(T(s))$ e $v \in D(T^*(s))$, vale a igualdade

$$(T(s)(u), v)_{L^2_{per}} = (u, T^*(s)(v))_{L^2_{per}} \ ,$$

isto é,

$$(-u''' + 4\mathcal{Q}u' + 2\mathcal{Q}'u, v)_{L^2_{per}} = (u, T^*(s)(v))_{L^2_{per}} \ . \tag{2.38}$$

Logo, como u e v são periódicas com período π segue, de (2.38),

$$\begin{aligned} (u, T^*(s)(v))_{L^2_{per}} &= -\left(u''', v\right)_{L^2_{per}} + 4\left(\mathcal{Q}u', v\right)_{L^2_{per}} + 2\left(\mathcal{Q}'u, v\right)_{L^2_{per}} \\ &= (u, v''' - 4v'\mathcal{Q} - 2\mathcal{Q}'v)_{L^2_{per}} = (u, -T(s)(v))_{L^2_{per}} \ . \end{aligned}$$

Daí $T^*(s) = -T(s)$ e, por (2.37),

$$\frac{d\mathcal{Q}}{ds} \in Ker(T(s))^{\perp} = Ker(T^*(s))^{\perp} \, .$$

Agora, a equação $-y''' + 4\mathcal{Q}y' + 2\mathcal{Q}'y = 0$ pode ser reescrita na forma

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2\mathcal{Q}' + 4\mathcal{Q} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} ,$$

onde $u_1 = -y$, $u_1' = u_2$ e $u_2' = u_3$. Como a matriz acima é contínua, usando a alternativa de Fredholm temos que a equação

$$-y''' + 4\mathcal{Q}y' + 2\mathcal{Q}'y = \frac{d\mathcal{Q}}{ds} \tag{2.39}$$

possui pelo menos uma solução periódica de período π. Seja então $b = b(x, s)$ tal solução periódica. Considere o operador $B(s)$ definido por,

$$B(s)(h) = (2bh)' + b'h \tag{2.40}$$

onde $'$ denota a derivada em x. Ademais, o operador adjunto de $B(s)$ é dado por

$$B^*(s)(h) = -2bh' + b'h \, . \tag{2.41}$$

Mostremos agora que os operadores $\mathcal{L}(s)$, $B(s)$ e $B^*(s)$, apresentados em (2.29), (2.40) e (2.41), respectivamente, satisfazem a equação que governa as famílias de operadores isonerciais (2.24).

Com efeito, por um lado temos

$$\begin{aligned}\Big((B\mathcal{L}+\mathcal{L}B^*)(s)\Big)(h) &= B(s)\Big(\mathcal{L}(s)(h)\Big)+\mathcal{L}(s)\Big(B^*(s)(h)\Big)\\ &= -3b'h''+3b'\mathcal{Q}h-2bh'''+2b\mathcal{Q}'h+2b\mathcal{Q}h'+2\Big(b'h''+b''h'+bh'''\\ &\quad +b'h''\Big)-b'''h-b''h'-b'h''-b''h'-2\mathcal{Q}bh'+\mathcal{Q}b'h=h\frac{d}{ds}\mathcal{Q}\,,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\Big(B(s)\mathcal{L}(s)+\mathcal{L}(s)B^*(s)\Big)(h)=h\frac{d}{ds}\mathcal{Q}\,. \tag{2.42}$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}(h)=\frac{d}{ds}(-h''(x)+\mathcal{Q}(x,s)h(x))=h\frac{d}{ds}\mathcal{Q}\,. \tag{2.43}$$

Assim, agrupando (2.42) e (2.43), obtemos o desejado.

Resta agora, verificarmos que existe um operador $M(s)$, inversível e limitado tal que (2.25) ocorre. Note que, o problema de Cauchy,

$$\begin{cases}\dfrac{du}{ds} &= B(s)u(s)\\ u(s_0) &= u_0\end{cases} \tag{2.44}$$

é uma EDO linear de primeira ordem com coeficientes suaves. Portanto ele é solúvel para valores negativos e positivos de s e $u(s)$ é inversível e limitado. Portanto, $M(s)$ definido por (2.25) está bem definido, é inversível e limitado.

□

Capítulo 3

Estabilidade de Ondas Viajantes para BBM com termo não linear fracionário

Estudaremos neste capítulo a existência e a estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas para a equação BBM com termo não linear fracionário,

$$u_t - u_{xxt} + (u + |u|^{\frac{3}{2}})_x = 0, \tag{3.1}$$

onde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período L na variável espacial x. Além disso, como não se tem um resultado de boa colocação para esta equação, até onde temos conhecimento, provaremos tal resultado, o qual é necessário quando se fala em estabilidade de ondas viajantes.

No contexto da equação (3.1), as ondas viajantes periódicas são soluções da forma $u(x,t) = \phi(x - ct)$. Abordaremos aqui o caso em que ϕ é positiva. Esta condição é exigida, pois precisamos fazer uma determinada mudança de variável em (3.23), pag. 34, e precisamos que a função Q definida em (3.55), pag. 49, seja suave.

Substituindo $u(x,t) = \phi(x - ct)$ na equação (3.1), temos

$$-c\phi'(x-ct) + c\phi'''(x-ct) + (\phi(x-ct) + \phi^{\frac{3}{2}}(x-ct))' = 0.$$

Integrando esta última equação, obtemos a EDO que nos fornece ondas viajantes para a equação (3.1),

$$-c\phi'' + (c-1)\phi - \phi^{\frac{3}{2}} + A = 0, \tag{3.2}$$

onde A é uma constante de integração.

Dessa forma, para (c, A) fixados convenientemente, se $\phi = \phi_{(c,A)}$ é uma solução periódica e positiva para a equação (3.2), então $u(x,t) = \phi(x - ct)$ é uma solução periódica, na variável x, para a equação (3.1) com velocidade c.

Com o intuito de obter estabilidade para uma classe de soluções ondas viajantes periódica da equação (3.1), seguiremos as ideias desenvolvidas por Benjamin, [21]-[23], Bona, [26], e Weinstein, [70]-[71], e principalmente as ideias desenvolvidas por Grillakis, Shatah e Strauss em [36], fazendo as alterações necessárias. Para isso, consideraremos as seguintes quantidades conservadas

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(u_x^2 - \frac{4}{5}\mathrm{sgn}(u)|u|^{\frac{5}{2}}\right) dx, \quad Q(u) = \frac{1}{2}\int_0^L (u^2 + u_x^2)dx, \quad \text{e} \quad V(u) = \int_0^L u dx. \tag{3.3}$$

Provaremos que estas quantidades são conservadas mais a frente no Lema 3.2. Note que, (3.2) é na verdade a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional

$$F_{(c,A)}(u) := E(u) + (c-1)Q(u) + AV(u), \tag{3.4}$$

ou seja, $\phi_{(c,A)}$ é solução de (3.2) se, e só se, $\phi_{(c,A)}$ satisfaz a equação

$$E'(u) + (c-1)Q'(u) + AV'(u) = 0. \tag{3.5}$$

Um dos passos cruciais de nosso trabalho, consiste em mostrar que $\phi_{(c,A)}$ é um mínimo local do funcional $F_{(c,A)}$, restrito ao vínculo M_k, definido em (1.14). Tal minimização é importante, pois ela garante uma propriedade de positividade em um conjunto conveniente para o operador

$$\mathcal{L}_{(c,A)} := F''(\phi_{(c,A)}) = -cy'' + \left[(c-1) - \frac{3}{2}\phi^{\frac{1}{2}}\right] y, \tag{3.6}$$

o qual é útil para obtenção da estabilidade, conforme veremos na ultima seção deste capítulo. Nossa estratégia para obter a estabilidade orbital será provar que as condições, que citamos abaixo, são verdadeiras e em seguida, provar que elas implicam na estabilidade.

$$
\begin{cases}
(P_0) & \text{Existe uma curva suave não trivial de soluções periódicas para (3.2)} \\
& \text{da forma} \quad k \in J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \phi_k := \phi_{(c(k,L),A(k,L))} \in H^2_{per}([0,L]) \ \text{ onde } J \\
& \text{é um intervalo a ser determinado,} \\
\\
(P_1) & \text{o operador linearizado } \mathcal{L}_k := \mathcal{L}_{(c(k,L),A(k,L))} \text{ possui um único autovalor} \\
& \text{negativo, o qual é simples,} \\
\\
(P_2) & \text{o autovalor 0 é simples e está associado com a autofunção } \phi_k', \\
\\
(P_3) & \Phi := \left\langle \mathcal{L}_k \left(\dfrac{\partial \phi_k}{\partial k} \right), \dfrac{\partial \phi_k}{\partial k} \right\rangle = -\left\langle M_k'(\phi_k), \dfrac{\partial \phi_k}{\partial k} \right\rangle < 0, \ \text{ onde} \\
\\
& M_k(u) := \dfrac{\partial c}{\partial k} Q(u) + \dfrac{\partial A}{\partial k} V(u).
\end{cases}
\tag{3.7}
$$

A partir daqui, todas as vezes que nos referirmos as propriedades P_i's, estaremos nos referindo àquelas apresentadas no inicio do respectivo capítulo.

Na primeira seção deste capítulo, provaremos que o problema de Cauchy associado a equação (3.1) é globalmente bem colocado em $H^1_{per}([0,L])$. Nas duas seções seguintes, explicitaremos a curva de soluções mencionada em P_0. Na quarta seção, obteremos as propriedades espectrais sobre o operador $\mathcal{L}_k$, isto é, as propriedades P_1 e P_2. Finalmente, na quinta e última seção, garantiremos a propriedade P_3 e veremos como todas estas propriedades nos fornecem um resultado de estabilidade.

3.1 Boa Colocação Global

Nesta seção, provaremos que o problema de Cauchy periódico, associado à equação (3.1), dado por

$$
\begin{cases}
u_t - u_{xxt} + (u + |u|^{\frac{3}{2}})_x = 0, \\
u(x,0) = u_0(x),
\end{cases}
\tag{3.8}
$$

é globalmente bem colocado em $H^1_{per}([0,L])$. Observe que, sem perda de generalidade, podemos assumir que $L = 2\pi$.

Nossa estratégia para obter boa colocação, será usar argumentos de ponto fixo. Os argumentos que usaremos aqui são similares aos encontrados em [20].

Observe inicialmente, que a equação (3.1) pode ser escrita, de maneira formal, da seguinte forma

$$(1-\partial_x^2)u_t = -\partial_x(u+|u|^{\frac{3}{2}}). \tag{3.9}$$

Por outro lado, aplicando a transformada de Fourier, também formalmente, em ambos os lados de (3.9) na variável espacial x, obtemos

$$(1+k^2)\widehat{u}_t(k) = -ik(u+|u|^{\frac{3}{2}})^{\wedge}(k),\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

Logo,

$$\widehat{u}_t(k) = \frac{-ik}{1+k^2}(u+|u|^{\frac{3}{2}})^{\wedge}(k) = \left[\left(\frac{-i(\cdot)}{1+(\cdot)^2}\right)^{\vee}\right]^{\wedge}(k)(u+|u|^{\frac{3}{2}})^{\wedge}(k) = \left(K*(u+|u|^{\frac{3}{2}})\right)^{\wedge}(k),$$

onde K é tal que

$$\widehat{Ku}(k) = \frac{-ik}{1+k^2}\widehat{u}(k).$$

Assim,

$$u_t = K*(u+|u|^{\frac{3}{2}}). \tag{3.10}$$

Portanto, integrando (3.10) de 0 a t e usando que $u(x,0)=u_0(x)$, obtemos a forma de Duhamel

$$u(x,t) = u_0(x) + \int_0^t K*(u+|u|^{\frac{3}{2}})(x,\tau)d\tau, \tag{3.11}$$

associada ao problema de Cauchy (3.8).

Teorema 3.1. *Para cada $u_0\in H^1_{per}([0,2\pi])$, existe $T>0$ e uma única solução u de (3.11) tal que $u\in C([0,T];H^1_{per}([0,2\pi]))$. Além disso, para todo $T'<T$, existe uma vizinhança V de u_0 em $H^1_{per}([0,2\pi])$ tal que a aplicação dado-solução*

$$\begin{aligned} F:\ \ V &\longrightarrow C([-T',T'];H^1_{per}([0,2\pi])) \\ v_0 &\longmapsto F(v_0)=v(x,t) \end{aligned}$$

é contínua.

Demonstração: Nosso primeiro passo na demonstração será mostrar a existência e a unicidade local. Para isso, considere então um tempo $T>0$, à ser escolhido, e defina o espaço

$$X := C([0,T];H^1_{per}([0,2\pi])),$$

munido da norma, $\|u\|_X = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^1_{per}}$. Além disso, defina o operador A por

$$\begin{cases} A: & X \longrightarrow X \\ & u \longmapsto A(u) = u_0 + \displaystyle\int_0^t K*(u+|u|^{\frac{3}{2}})d\tau. \end{cases}$$

Existência Local: Com o intuito de usar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, verificaremos que existem $r_0 > 0$ e $T > 0$ tais que, $A(u) \in B_{r_0}$ sempre que $u \in B_{r_0}$, onde

$$B_{r_0} = \{u \in X; \|u\|_X \leq r_0\},$$

e que $A : B_{r_0} \longrightarrow B_{r_0}$ é uma contração.

Supondo que $w \in H^1_{per}([0, 2\pi])$, temos

$$\begin{aligned} \|K*w\|^2_{H^1_{per}} &= 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} (1+k^2)|\widehat{K}(k)|^2|\widehat{w}(k)|^2 = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} (1+k^2)\frac{k^2}{(1+k^2)^2}|\widehat{w}(k)|^2 \\ &\leq 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} (1+k^2)|\widehat{w}(k)|^2 = \|w\|^2_{H^1_{per}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|K*w\|_{H^1_{per}} \leq \|w\|_{H^1_{per}}. \tag{3.12}$$

Note que se $w \in L^2_{per}([0, 2\pi])$,

$$\begin{aligned} \|K*w\|^2_{H^1_{per}} &= 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} (1+k^2)\frac{k^2}{(1+k^2)^2}|\widehat{w}(k)|^2 = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^2}{(1+k^2)}|\widehat{w}(k)|^2 \\ &\leq 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{w}(k)|^2 = \|w\|^2_{L^2_{per}}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|K*w\|_{H^1_{per}} \leq \|w\|_{L^2_{per}}. \tag{3.13}$$

Além do mais, usando imersão de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned} \||u|^{\frac{3}{2}}\|^2_{H^1_{per}} &= \||u|^{\frac{3}{2}}\|^2_{L^2_{per}} + \|(|u|^{\frac{3}{2}})'\|^2_{L^2_{per}} = \||u|^{\frac{3}{2}}\|^2_{L^2_{per}} + \frac{9}{4}\||u|^{\frac{1}{2}}|u|'\|^2_{L^2_{per}} \\ &= \||u|^{\frac{3}{2}}\|^2_{L^2_{per}} + \frac{9}{4}\||u|^{\frac{1}{2}}u'\mathrm{sgn}(u)\|^2_{L^2_{per}} = \int_0^{2\pi} |u|^3 dx + \frac{9}{4}\int_0^{2\pi} |u||u'|^2 dx \\ &\leq \|u\|_\infty \int_0^{2\pi} |u|^2 dx + \frac{9}{4}\|u\|_\infty \int_0^{2\pi} |u'|^2 dx \leq C\|u\|^3_{H^1_{per}}. \end{aligned}$$

Resumindo,

$$\||u|^{\frac{3}{2}}\|_{H^1_{per}} \leq C_0\|u\|^{\frac{3}{2}}_{H^1_{per}}. \tag{3.14}$$

Portanto, fixando $u_0 \in H^1_{per}([0,2\pi])$ e agrupando (3.12) e (3.14), encontramos

$$\begin{aligned}
\|A(u)\|_{H^1_{per}} &\leq \|u_0\|_{H^1_{per}} + \int_0^t \|K*(u+|u|^{\frac{3}{2}})\|_{H^1_{per}} d\tau \\
&\leq \|u_0\|_{H^1_{per}} + \int_0^t \|u+|u|^{\frac{3}{2}}\|_{H^1_{per}} d\tau \\
&\leq \|u_0\|_{H^1_{per}} + \int_0^t \left(\|u\|_{H^1_{per}} + C_0\|u\|^{\frac{3}{2}}_{H^1_{per}}\right) d\tau \\
&\leq \|u_0\|_{H^1_{per}} + T\left(\|u\|_X + C_0\|u\|^{\frac{3}{2}}_X\right),
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$. Daí,

$$\|Au\|_X \leq \|u_0\|_{H^1_{per}} + T\left(\|u\|_X + C_0\|u\|^{\frac{3}{2}}_X\right). \tag{3.15}$$

Note que (3.15) nos permite concluir que $A: X \longrightarrow X$ está bem definido.

Por outro lado, usando (3.13) e o Teorema do Valor Médio, temos que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}
\|K*(|u|^{\frac{3}{2}} - |v|^{\frac{3}{2}})\|^2_{H^1_{per}} &\leq \|(|u|^{\frac{3}{2}} - |v|^{\frac{3}{2}})\|^2_{L^2_{per}} = \frac{9}{4}\||\theta v + (1-\theta)u|^{\frac{1}{2}}(u-v)\|^2_{L^2_{per}} \\
&= \frac{9}{4}\int_0^{2\pi} |\theta v + (1-\theta)u||u-v|^2 dx \leq \frac{9}{4}(\theta\|v\|_\infty + (1-\theta)\|u\|_\infty)\|u-v\|^2_{L^2_{per}} \\
&\leq C(\|v\|_{H^1_{per}} + \|u\|_{H^1_{per}})\|u-v\|^2_{H^1_{per}} \\
&\leq C(\|v\|_X + \|u\|_X)\|u-v\|^2_{H^1_{per}}
\end{aligned}$$

para todo $u, \ v \in X$, ou seja,

$$\|K*(|u|^{\frac{3}{2}} - |v|^{\frac{3}{2}})\|_{H^1_{per}} \leq C_1(\|v\|_X + \|u\|_X)^{\frac{1}{2}}\|u-v\|_{H^1_{per}}. \tag{3.16}$$

Logo, (3.12) e (3.16), nos fornece

$$\begin{aligned}
\|Au - Av\|_{H^1_{per}} &\leq \int_0^t \left(\|K * (u - v)\|_{H^1_{per}} + \|K * (|u|^{\frac{3}{2}} - |v|^{\frac{3}{2}})\|_{H^1_{per}} \right) d\tau \\
&\leq \int_0^t \left(\|u - v\|_{H^1_{per}} + C_1(\|v\|_X + \|u\|_X)^{\frac{1}{2}} \|u - v\|_{H^1_{per}} \right) d\tau \\
&= \int_0^t \|u - v\|_{H^1_{per}} \left(1 + C_1(\|v\|_X + \|u\|_X)^{\frac{1}{2}} \right) d\tau \\
&\leq T\|u - v\|_X \left(1 + C_1(\|v\|_X + \|u\|_X)^{\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|Au - Av\|_X \leq T\|u - v\|_X \left(1 + C_1(\|v\|_X + \|u\|_X)^{\frac{1}{2}} \right). \tag{3.17}$$

Finalmente, se $u, \; v \in B_{r_0}$, temos a partir de (3.15) e (3.17) que

$$\|Au\|_X \leq \|u_0\|_{H^1_{per}} + T\left(r_0 + C_0 r_0^{\frac{3}{2}} \right) \quad \text{e} \quad \|Au - Av\|_X \leq T\|u - v\|_X \left(1 + C_1(2r_0)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Escolhendo $r_0 := 2\|u_0\|_{H^1_{per}}$ e $T := \frac{1}{2}(1 + \tilde{C}\sqrt{r_0})^{-1}$, onde $\tilde{C} = \text{máx}\left\{C_0, \sqrt{2}C_1\right\}$, obtemos

$$\|Au\|_X \leq \frac{r_0}{2} + Tr_0\left(1 + C_0 r_0^{\frac{1}{2}} \right) \leq \frac{r_0}{2} + r_0\frac{1}{2}(1 + C_0\sqrt{r_0})^{-1}\left(1 + C_0 r_0^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{r_0}{2} + \frac{r_0}{2} = r_0$$

e

$$\|Au - Av\|_X \leq T\|u - v\|_X \left(1 + C_1(2r_0)^{\frac{1}{2}} \right) \leq \frac{1}{2} \frac{\left(1 + C_1(2r_0)^{\frac{1}{2}} \right)}{(1 + C_1\sqrt{2r_0})} \|u - v\|_X = \frac{1}{2}\|u - v\|_X.$$

Concluímos desta maneira que $A : B_{r_0} \longrightarrow B_{r_0}$ é uma contração e portanto existe uma única $u \in B_{r_0}$ tal que $Au(t) = u(t)$, para todo $t \in [0, T]$.

Unicidade: Suponha que u e v satisfaçam a forma de Duhamel (3.11), com dados iniciais u_0

e v_0, respectivamente. Usando (3.12) e (3.16), obtemos

$$\begin{aligned}
\|u(t)-v(t)\|_{H^1_{per}} &\le \|u_0-v_0\|_{H^1_{per}} + \int_0^t \left(\|K*(u-v)\|_{H^1_{per}} + \|K*(|u|^{\frac{3}{2}}-|v|^{\frac{3}{2}})\|_{H^1_{per}}\right) d\tau \\
&\le \|u_0-v_0\|_{H^1_{per}} + \int_0^t \left(\|u-v\|_{H^1_{per}} + C_1(\|v\|_X+\|u\|_X)^{\frac{1}{2}}\|u-v\|_{H^1_{per}}\right) d\tau \\
&= \|u_0-v_0\|_{H^1_{per}} + \int_0^t \|u-v\|_{H^1_{per}} \left(1+C_1(\|v\|_X+\|u\|_X)^{\frac{1}{2}}\right) d\tau \\
&= \|u_0-v_0\|_{H^1_{per}} + \left(1+C_1(\|v\|_X+\|u\|_X)^{\frac{1}{2}}\right) \int_0^t \|u(\tau)-v(\tau)\|_{H^1_{per}} d\tau.
\end{aligned}$$

Dessa maneira, usando a desigualdade de Gronwall, vemos que

$$\|u(t)-v(t)\|_{H^1_{per}} \le \|u_0-v_0\|_{H^1_{per}} \mathrm{e}^{\left(1+C_1(\|v\|_X+\|u\|_X)^{\frac{1}{2}}\right)t}, \tag{3.18}$$

para todo t, tal que u e v estão definidas. Portanto, se considerarmos $u_0 = v_0$, temos que $u(t) = v(t)$, para todo t tal que u e v estão definidas.

Dependência Contínua: Verificaremos que para todo $T' < T$, existe uma vizinhança V de u_0 em $H^1_{per}([0,2\pi])$, tal que a aplicação dado-solução F é contínua.

Note que, para a função F estar bem definida é preciso mostrar que a função $v_0 \mapsto T = T(v_0)$ é semicontínua inferiormente em u_0, onde $T_{v_0} := T(v_0)$ é o tempo de existência de solução com dado inicial v_0. Em outras palavras, precisamos provar que existe uma vizinhança V de u_0, de tal modo que, para qualquer v_0 que se escolha em V, a solução v, tal que $v(x,0) = v_0$, evoluirá até o tempo T'.

Para isto, defina V por

$$V := \left\{ v_0 \in H^1_{per}([0,2\pi]); \|v_0-u_0\|_{H^1_{per}} < \delta, \quad \text{onde } 0<\delta<\frac{1}{8\tilde{C}^2}\left(\frac{1}{T'}-\frac{1}{T}\right)^2 \right\}.$$

Observe que, se $v_0 \in V$, então

$$\|v_0\|_{H^1_{per}} \le \|v_0-u_0\|_{H^1_{per}} + \|u_0\|_{H^1_{per}} \le \delta + \|u_0\|_{H^1_{per}}.$$

Daí, considerando $s_0 := 2\|v_0\|_{H^1_{per}}$ temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2T_{v_0}} = 1 + \tilde{C}\sqrt{s_0} \quad &= 1 + \tilde{C}\sqrt{2\|v_0\|_1} \leq 1 + \tilde{C}\sqrt{2\delta + 2\|u_0\|_1} \leq 1 + \tilde{C}\sqrt{2\delta} + \tilde{C}\sqrt{2\|u_0\|_1} \\ &= 1 + \tilde{C}\sqrt{r_0} + \tilde{C}\sqrt{2\delta} = \frac{1}{2T} + \tilde{C}\sqrt{2\delta} < \frac{1}{2T} + \sqrt{2}\tilde{C}\sqrt{\frac{1}{8\tilde{C}^2}\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)^2} \\ &\leq \frac{1}{2T} + \sqrt{2}\tilde{C}\frac{1}{2\sqrt{2}\tilde{C}}\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right) = \frac{1}{2T'}.\end{aligned}$$

Portanto, o tempo de existência T_{v_0} satisfará

$$T_{v_0} > T'.$$

Desta maneira, v evolui até T_{v_0} que está além de T' e portanto a função F fica bem definida.

A continuidade da função F segue de (3.18). $\square$

Lema 3.2. *Os funcionais E, Q e V, definidos em* (3.3)*, são conservados.*

Demonstração: Definindo $\Lambda = (1 - \partial_x^2)^{\frac{1}{2}}$ e usando que $u \in C([0,T], H^1_{per})$ juntamente com a forma de Duhamel (3.11), podemos escrever

$$u_t = -\Lambda^{-2}\partial_x(u + |u|^{\frac{3}{2}}). \tag{3.19}$$

Por outro lado, como $\Lambda^{-2} \in \mathcal{B}(L^2_{per}, H^2_{per})$ e u e $|u|^{\frac{3}{2}}$ estão em H^1_{per}, temos $\Lambda^{-2}\partial_x(u + |u|^{\frac{3}{2}}) \in H^1_{per}$ e assim $u_t \in H^1_{per}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\|u(t)\|^2_{H^1_{per}} \quad &= 2(u, u_t)_{H^1_{per}} \\ &= -2(u, \Lambda^{-2}\partial_x(u + |u|^{\frac{3}{2}}))_{H^1_{per}} \\ &= -2\int_0^L \Lambda u \Lambda\Lambda^{-2}\partial_x(u + |u|^{\frac{3}{2}})dx,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\|u(t)\|^2_{H^1_{per}} &= -2\int_0^L \Lambda u \Lambda^{-1}\partial_x(u+|u|^{\frac{3}{2}})dx \\ &= -2\int_0^L u\Lambda\Lambda^{-1}\partial_x(u+|u|^{\frac{3}{2}})dx \\ &= -2\int_0^L u\partial_x(u+|u|^{\frac{3}{2}})dx.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u(t)\|^2_{H^1_{per}} = \int_0^L \partial_x\left(u^2+\frac{4}{5}\text{sgn}(u)|u|^{\frac{5}{2}}\right)dx = 0.$$

Isto implica que Q é conservado.

Para provar que E é conservado, provaremos primeiro que

$$P(u) := \frac{1}{2}\int_0^L u^2+\frac{4}{5}\text{sgn}(u)|u|^{\frac{5}{2}}dx$$

é conservado. De fato,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P(u) &= \int_0^L (u+|u|^{\frac{3}{2}})u_t dx \\ &= \int_0^L (u+|u|^{\frac{3}{2}})\Lambda^{-2}\partial_x(u+|u|^{\frac{3}{2}})dx \\ &= -\int_0^L \Lambda^{-1}(u+|u|^{\frac{3}{2}})\partial_x\Lambda^{-1}(u+|u|^{\frac{3}{2}})dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t}P(u) = -\frac{1}{2}\int_0^L \partial_x(\Lambda^{-1}(u+|u|^{\frac{3}{2}}))^2dx = 0.$$

Dessa maneira, como $E = Q - P$, temos que E é conservado.

Para ver que V é conservado, basta integrar (3.19). □

Teorema 3.3. *Para cada $u_0 \in H^1_{per}([0,L])$, o problema de Cauchy* (3.8) *é globalmente bem colocado em $H^1_{per}([0,L])$, com $u \in C(\mathbb{R}; H^1_{per}([0,L]))$.*

Demonstração: Verificaremos primeiro que a solução u de (3.11), com dado inicial u_0, pode ser estendida para $\mathbb{R}$. De fato, considerando $v_0 = u(T)$ e a equação integral

$$v(t) = v_0 + \int_0^t K*(v+|v|^{\frac{3}{2}})(\tau)d\tau, \tag{3.20}$$

temos pela teoria local que existem $\tilde{T} > 0$ e uma única solução v para a equação (3.20) tal que $v \in C([0,\tilde{T}]; H^1_{per})$. Definindo então

$$w(x,t) := \begin{cases} u(x,t) \ \text{ se } \ 0 \leq t \leq T, \\ v(x,t-T) \ \text{ se } \ T \leq t \leq T+\tilde{T}, \end{cases}$$

constatamos que para todo $T < s \leq \tilde{T}$,

$$\begin{aligned} w(T+s) &= v(T+s-T) = v(s) \\ &= v_0 + \int_0^s K * (v + |v|^{\frac{3}{2}})(x,\tau)d\tau \\ &= u_0 + u(T) - u_0 + \int_0^s K * (v + |v|^{\frac{3}{2}})(x,\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Mudando a variável $\xi - T = \tau$, temos

$$\begin{aligned} w(T+s) &= u_0 + u(T) - u_0 + \int_T^{T+s} K * (v + |v|^{\frac{3}{2}})(x,\xi - T)d\xi \\ &= u_0 + \int_0^T K * (u + |u|^{\frac{3}{2}})(x,\tau)d\tau + \int_T^{T+s} K * (v + |v|^{\frac{3}{2}})(x,\xi - T)d\xi \\ &= u_0 + \int_0^{T+s} K * (w + |w|^{\frac{3}{2}})(x,\tau)d\tau, \end{aligned}$$

para todo $T < s \leq \tilde{T}$, isto é, w é a extensão única da solução u de (3.11) ao intervalo $[0, T+\tilde{T}]$. Disso segue que

$$\tilde{T} = \frac{1}{1 + \tilde{C}\sqrt{2\|v_0\|_{H^1_{per}}}}.$$

Como w é uma solução de (3.8) a norma H^1_{per} de w é conservada no tempo, isto é,

$$\|w(t)\|_{H^1_{per}} = \|u(T)\|_{H^1_{per}} = \|u_0\|_{H^1_{per}}, \quad \forall t \in [0,\tilde{T}].$$

Daí,

$$\tilde{T} = \frac{1}{1 + \tilde{C}\sqrt{2\|v_0\|_{H^1_{per}}}} = \frac{1}{1 + \tilde{C}\sqrt{2\|u(T)\|_{H^1_{per}}}} = \frac{1}{1 + \tilde{C}\sqrt{2\|u_0\|_{H^1_{per}}}} = T.$$

Portanto, concluímos que a solução u de (3.11), pode ser estendida à $C([0,2T], H^1_{per}([0,2\pi]))$. Repetindo este processo, constatamos que u pode ser estendida à $C([0,\infty), H^1_{per}([0,2\pi]))$. Além do mais, como K não depende de t, a forma de Duhamel (3.11) é reversível no tempo e assim u pode ser estendida para toda a reta, isto é, $u \in C(\mathbb{R}, H^1_{per}([0, 2\pi]))$. $\square$

3.2 Soluções explícitas por quadratura

Nesta seção, explicitaremos soluções para a equação (3.2) em função das funções elípticas de Jacobi, utilizando o método da quadratura.

Multiplicando (3.2) por ϕ', temos

$$(1-c)\phi\phi' + c\phi''\phi' + \phi^{\frac{3}{2}}\phi' - A\phi' = 0.$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$\frac{(1-c)}{2}(\phi^2)' + \frac{c}{2}((\phi')^2)' + \frac{2}{5}\left[(\phi)^{\frac{5}{2}}\right]' - A\phi' = 0.$$

Logo, após integração, obtemos

$$\frac{(1-c)}{2}\phi^2 + \frac{c}{2}(\phi')^2 + \frac{2}{5}(\phi)^{\frac{5}{2}} - A\phi = B, \tag{3.21}$$

onde B é outra constante de integração. Escolhendo $B = 0$, (3.21) se torna

$$(\phi')^2 = -\frac{4}{5c}\phi^{\frac{5}{2}} + \frac{c-1}{c}\phi^2 + \frac{2A}{c}\phi. \tag{3.22}$$

Mudando a variável $\phi = \psi^2$ em (3.22) e dividindo ambos os lados por $4\psi^2$ ($\phi > 0$), temos

$$(\psi')^2 = \frac{1}{5c}\left(-\psi^3 + \frac{5(c-1)}{4}\psi^2 + \frac{5A}{2}\right) = \frac{1}{5c}P(\psi). \tag{3.23}$$

Como procuramos solução explicita $\phi > 0$, precisamos de ψ positiva ou negativa (ψ não pode mudar de sinal). Para isso é suficiente que o Polinômio $P(\psi)$ tenha três raízes reais, β_1, β_2 e β_3 tais que $0 < \beta_2 < \beta_3$. Ver Figura 3.1.

Por outro lado, o polinômio $P = P(\psi)$ pode ser escrito na forma

$$P(\psi) = (\psi - \beta_1)(\psi - \beta_2)(\beta_3 - \psi).$$

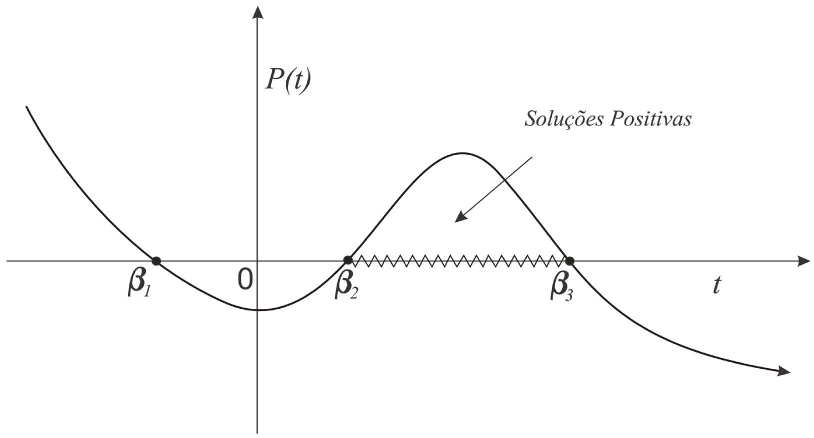

Figura 3.1: Gráfico do Polinômio $P(t) = -t^3 + \frac{5(c-1)}{4}t^2 + \frac{5A}{2}$.

Isto nos leva a estudarmos o sistema

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \dfrac{5(c-1)}{4}, \\ \\ \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 = 0, \\ \\ \beta_1\beta_2\beta_3 = \dfrac{5A}{2}. \end{cases} \tag{3.24}$$

Suponha, que o sistema (3.24) admite solução $S = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, onde os β_i's são reais e $0 < \beta_2 < \beta_3$ (veremos adiante condições necessárias e suficientes para a existência de solução). Usando a primeira equação, temos

$$\frac{1}{5c} = \frac{1}{4(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + 5}.$$

Logo, (3.23) pode ser reescrito como

$$(\psi^2)' = \frac{1}{5c}P(\psi) = \frac{1}{4(\beta_2 + \beta_2 + \beta_3) + 5}(\psi - \beta_1)(\psi - \beta_2)(\beta_3 - \psi). \tag{3.25}$$

Definindo $\rho = \dfrac{\psi}{\beta_3}$, obtemos

$$(\rho')^2 = \frac{\beta_3}{\alpha}(\rho - \eta_1)(\rho - \eta_2)(1 - \rho), \tag{3.26}$$

onde $\alpha = 4(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + 5$ e $\eta_i = \frac{\beta_i}{\beta_3}$, $\ i = 1, 2$. Note que $\rho \in (\eta_2, 1)$.

Consideremos agora a mudança de variável

$$\rho = 1 + (\eta_2 - 1)\text{sen}^2(\xi), \tag{3.27}$$

onde $\xi(0) = 0$ e $\xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Após alguns cálculos, vemos que

$$(\xi')^2 = \frac{\beta_3}{\alpha}(1-\eta_1)\left[1 - \frac{1-\eta_2}{1-\eta_1}\text{sen}^2(\xi)\right].$$

Defina agora

$$k^2 := \frac{1-\eta_2}{1-\eta_1} = \frac{\beta_3-\beta_2}{\beta_3-\beta_1} \qquad \text{e} \qquad \lambda := \frac{\beta_3}{4\alpha}(1-\eta_1). \tag{3.28}$$

Observe que, $0 < k^2 < 1$ e

$$(\xi')^2 = \lambda(1 - k^2\text{sen}^2(\xi)). \tag{3.29}$$

Além disso,

$$\lambda = \frac{\beta_3}{4\alpha}(1-\eta_1) = \frac{\beta_3-\beta_1}{4\alpha} = \frac{\beta_3-\beta_1}{4[4(\beta_1+\beta_2+\beta_3)+5]} > 0.$$

Dessa maneira, podemos reescrever a equação (3.29) como

$$1 = \frac{\xi'}{\sqrt{\lambda}\sqrt{1-k^2\text{sen}^2(\xi)}}. \tag{3.30}$$

Integrando (3.30) de 0 à z, segue que

$$z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-k^2\text{sen}^2(\xi(s))}}\xi'(s)ds,$$

e por mudança de variáveis,

$$\sqrt{\lambda}z = \int_0^\xi \frac{dy}{\sqrt{1-k^2\text{sen}^2(y)}} =: F(\xi, k). \tag{3.31}$$

Contudo, o lado direito de (3.31) é justamente uma integral elíptica de primeiro tipo. Logo, por propriedades de funções de elípticas, ver apêndice,

$$\text{sen}(\xi) = \text{SN}(\sqrt{\lambda}z; k). \tag{3.32}$$

Substituindo (3.31) em (3.26) e usando o fato que $\text{SN}^2 + \text{CN}^2 = 1$, obtemos

$$\rho = \eta_2 + (1-\eta_2)\text{CN}^2(\sqrt{\lambda}z; k).$$

Das definições de ρ, λ, η_i e α, segue que

$$\psi(z) = \beta_2 + (\beta_3-\beta_2)\text{CN}^2\left(\sqrt{\frac{\beta_3-\beta_1}{16(\beta_1+\beta_2+\beta_3)+20}}\; z; k\right),$$

onde k é definido em (3.28).

Finalmente, como $\phi = \psi^2$, encontramos

$$\phi(z) = \left[\beta_2 + (\beta_3 - \beta_2)\mathrm{CN}^2\left(\sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_1}{16(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + 20}}\ z; k\right)\right]^2, \tag{3.33}$$

como sendo uma solução positiva para a equação (3.2).

Na verdade, podemos expressar o que acabamos de fazer, através da seguinte proposição.

Proposição 3.4. *Seja* $S = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ *solução do sistema* (3.24)*, com* $0 < \beta_2 < \beta_3$*. Então,*

$$\phi(z) = \left[\beta_2 + (\beta_3 - \beta_2)\mathrm{CN}^2\left(\sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_1}{16(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + 20}}\ z; k\right)\right]^2, \quad k^2 = \frac{\beta_3 - \beta_2}{\beta_3 - \beta_1},$$

é uma solução positiva para a equação (3.2).

Veremos agora, algumas condições necessárias e suficientes para que o sistema (3.24) admita tal solução.

Para isso, considere um novo sistema, formado apenas pelas duas primeiras equações do sistema (3.24), isto é,

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \dfrac{5(c-1)}{4} \\ \\ \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 = 0. \end{cases} \tag{3.34}$$

A principio, estudaremos esse sistema e veremos sob quais condições, ele admitirá solução real, satisfazendo a condição $0 < \beta_2 < \beta_3$. Basicamente, explicitaremos β_1 e β_3 como funções das variáveis β_2 e c. Assim, se escolhermos $A = \beta_1\beta_2\beta_3$ no sistema (3.24), o mesmo admitirá a solução desejada.

Proposição 3.5. *Se o sistema (3.34) admite solução* $S = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$*, com* $0 < \beta_2 < \beta_3$*. Então,*

$$c > 1 \qquad e \qquad 0 < \beta_2 < \frac{5(c-1)}{6} < \beta_3 < \frac{5(c-1)}{4}.$$

Reciprocamente, se β_2 *satisfaz*

$$0 < \beta_2 < \frac{5(c-1)}{6} \qquad com \qquad c - 1 > 0,$$

então o sistema (3.34) admite solução $S = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$*, com* $0 < \beta_2 < \beta_3$*.*

Além disso, podemos expressar

$$\beta_3(\beta_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{5(c-1)}{4} - \beta_2\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_c(\beta_2)},$$

onde

$$\Delta_c(x) = \left(x - \frac{5(c-1)}{4}\right)^2 - 4\left(x^2 - \frac{5(c-1)}{4}x\right).$$

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Isolando β_1 na primeira equação de (3.34), temos

$$\beta_1 = \frac{5(c-1)}{4} - \beta_2 - \beta_3.$$

Por outro lado, multiplicando a primeira equação de (3.34) por β_2, obtemos

$$\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 = \frac{5(c-1)}{4}\beta_2 - \beta_2^2.$$

Assim, substituindo estas duas últimas equações na segunda equação do sistema (3.34), encontramos

$$\frac{5(c-1)}{4}(\beta_2 + \beta_3) = \beta_2^2 + \beta_2\beta_3 + \beta_3^2. \tag{3.35}$$

Dessa maneira, como $0 < \beta_2 < \beta_3$, obtemos de (3.35), que $(c-1) > 0$.

Provaremos agora, a segunda afirmação, isto é,

$$0 < \beta_2 < \frac{5(c-1)}{6} < \beta_3 < \frac{5(c-1)}{4}.$$

Resolvendo a equação quadrática (3.35) para β_3, vemos que

$$\beta_3(\beta_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{5(c-1)}{4} - \beta_2\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_c(\beta_2)}, \tag{3.36}$$

onde

$$\Delta_c(\beta_2) = \left(\beta_2 - \frac{5(c-1)}{4}\right)^2 - 4\left(\beta_2^2 - \frac{5(c-1)}{4}\beta_2\right).$$

Como os β_i's são reais por hipótese, obrigatóriamente devemos ter $\Delta_c(\beta_2) \geq 0$. Contudo, os zeros de $\Delta_c(\beta_2)$ são $-\frac{5(c-1)}{12}$ e $\frac{5(c-1)}{4}$. Além disso, se $\beta_2 = \frac{5(c-1)}{4}$, então de (3.36) temos que $\beta_3 = 0$, o que contraria $0 < \beta_2 < \beta_3$. Portanto, β_2 deve estar no intervalo $\left(0, \frac{5(c-1)}{4}\right)$. Ver Figura 3.2.

Uma outra questão que surge, é se devemos considerar o caso positivo ou negativo em (3.36). Note que, se $\beta_2 = \beta_{20} := \frac{5(c-1)}{12} \in \left(0, \frac{5(c-1)}{4}\right)$, então no caso negativo, teremos

$$\beta_3(\beta_{20}) = \frac{5(c-1)}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0,$$

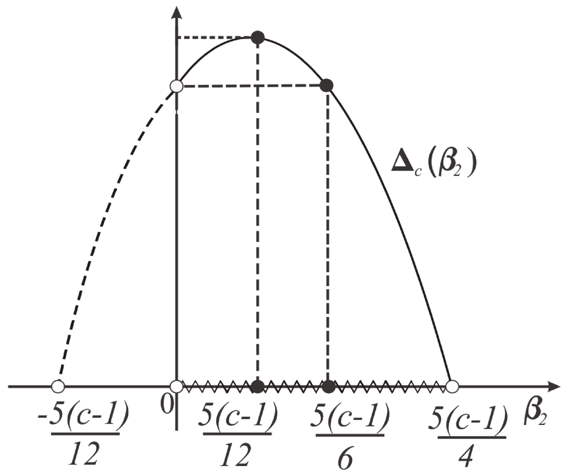

Figura 3.2: Gráfico da função $\Delta_c(\beta_2)$.

o que também contraria $0 < \beta_2 < \beta_3$. Portanto, devemos ter o caso positivo, isto é,

$$\beta_3(\beta_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{5(c-1)}{4} - \beta_2\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_c(\beta_2)}.$$

Como β_3 é decrescente como função de β_2 no intervalo $\left(0, \frac{5(c-1)}{4}\right)$ e $\beta_2 = \frac{5(c-1)}{6}$ é um ponto fixo para $\beta_3(\beta_2)$, a relação $0 < \beta_2 < \beta_3$ implica que $0 < \beta_2 < \frac{5(c-1)}{6}$. Consequentemente, devemos ter $\frac{5(c-1)}{6} < \beta_3 < \frac{5(c-1)}{4}$. Ver Figura 3.3.

Concluímos disso, que

$$0 < \beta_2 < \frac{5(c-1)}{6} < \beta_3 < \frac{5(c-1)}{4}. \tag{3.37}$$

($\Leftarrow$) Se $\beta_2 \in \left(0, \frac{5(c-1)}{6}\right)$ com $c - 1 > 0$, então $\Delta_c(\beta_2) > 0$ e daí

$$\beta_3 = \beta_3(\beta_2) := \frac{1}{2}\left(\frac{5(c-1)}{4} - \beta_2\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_c(\beta_2)}$$

e

$$\beta_1 = \beta_1(\beta_2) := \frac{5(c-1)}{4} - \beta_2 - \beta_3(\beta_2)$$

são reais e satisfazem o sistema (3.34).

Através da expressão de β_3 como função de β_2 acima, temos

$$0 < \beta_2 < \frac{5(c-1)}{6} < \beta_3 < \frac{5(c-1)}{4}.$$

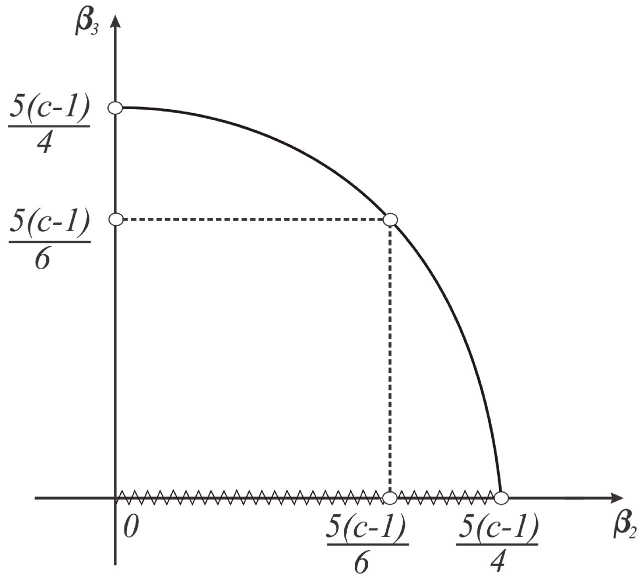

Figura 3.3: Gráfico de β_3 como função de β_2.

Logo,

$$0 < \beta_2 < \beta_3.$$

□

Corolário 3.6. *Para cada* $(c, \beta_2) \in P$, *onde*

$$P = \left\{ (c, \beta_2) \in \mathbb{R}^2; \;\; c > 1 \quad e \quad 0 < \beta_2 < \frac{5(c-1)}{6} \right\},$$

a função $\phi_{(c,\beta_2)}$, *dada por*

$$\phi(z) = \left[\beta_2 + (\beta_3 - \beta_2)\mathrm{CN}^2 \left(\sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_1}{16(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + 20}} \; z; k \right) \right]^2,$$

com β_1 *e* β_3 *como na proposição anterior, é solução da equação* (3.2).

A Figura 3.4 ilustra a região P.

3.3 Curva de soluções periódicas

Vimos na seção anterior a existência de uma região P, onde para cada (c, β_2) nessa região, temos definida explicitamente uma solução $\phi_{(c,\beta_2)}$ para a equação (3.2). Nosso objetivo nesta seção, será

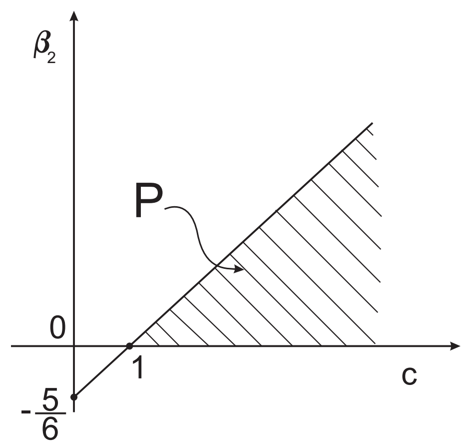

Figura 3.4: Região P.

encontrar uma curva $c(\beta_2)$ na região P, via Teorema da Função Implícita, tal que nessa curva a solução explicita tenha sempre o mesmo período.

Aqui, quando escrevermos β_1 e β_3, estaremos considerando-os como funções de (c, β_2) tal como descrito na seção anterior.

A função $\phi_{(c,\beta_2)}$ definida em (3.33), depende da função elíptica de Jacobi CN^2, a qual possui período $2K(k)$, onde $K(k)$ é a integral elíptica completa de primeiro tipo (ver apêndice) e k está definido em (3.28). Portanto, $\phi_{(c,\beta_2)}$ tem período $T_{\phi_{(c,\beta_2)}}$ dado por

$$T_{\phi_{(c,\beta_2)}} = 2\sqrt{\frac{16(\beta_1+\beta_2+\beta_3)+20}{\beta_3-\beta_1}}K(k).$$

Usando as expressões de β_1 e β_3 como funções de (c, β_2), conforme vimos na Proposição 3.5, temos

$$T_{\phi_{(c,\beta_2)}} = \frac{4\sqrt{5c}}{(\Delta_c(\beta_2))^{\frac{1}{4}}}K(k(c,\beta_2)). \tag{3.38}$$

Analisemos agora, quais são os possíveis períodos para $\phi_{(c,\beta_2)}$, quando variamos (c, β_2) na região P. Para isso, fixaremos $c > 1$ arbitrariamente e estudaremos o comportamento do período $T_{\phi_{(c,\beta_2)}}$ quando β_2 varia no intervalo $\left(0, \frac{5(c-1)}{6}\right)$.

Quando $\beta_2 \longrightarrow 0$, $\Delta_c(\beta_2) \longrightarrow \left(\frac{5(c-1)}{4}\right)^2$, $k \longrightarrow 1$ e assim $K(k) \longrightarrow +\infty$. Portanto,

$$T_{\phi_c}(\beta_2) \longrightarrow +\infty,$$

onde $T_{\phi_c}(\beta_2)$ denota $T_{\phi_{(c,\beta_2)}}$ como função de β_2 para um c fixo.

Por outro lado, quando $\beta_2 \longrightarrow \left(\frac{5(c-1)}{6}\right)$, $\Delta_c(\beta_2) \longrightarrow \left(\frac{5(c-1)}{4}\right)^2$, $k \longrightarrow 0$ e então $K(k) \longrightarrow \frac{\pi}{2}$. Portanto,

$$T_{\phi_c}(\beta_2) \longrightarrow \frac{4\sqrt{5c}}{\left(\frac{5(c-1)}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \; \frac{\pi}{2} = 8\sqrt{\frac{5c}{5(c-1)}} \; \frac{\pi}{2} = 4\pi\sqrt{\frac{c}{c-1}}.$$

A próxima proposição, fornecerá o ingrediente principal para a obtenção da curva suave de soluções de mesmo período para (3.2), isto é, $\frac{\partial}{\partial \beta_2} T_{\phi_{(c,\beta_2)}} < 0$, para todo $(c, \beta_2) \in P$. A Figura 3.5 ilustra o comportamento de $T_{\phi_c}(\beta_2)$.

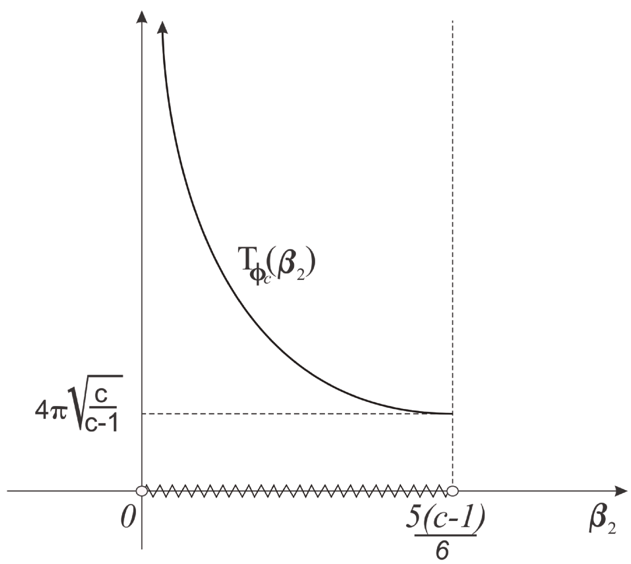

Figura 3.5:

Antes, observemos que substituindo as expressões de β_3 e β_1, como funções de (c, β_2), na fórmula de k^2 em (3.28), obtemos

$$k^2 = \frac{\beta_3 - \beta_2}{\beta_3 - \beta_1} = \frac{5(c-1) - 12\beta_2}{8\Delta_c(\beta_2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}. \tag{3.39}$$

Além disso, derivando esta equação com relação a β_2, vemos que

$$\frac{\partial k}{\partial \beta_2} = \gamma_1 \left[-24\Delta_c(\beta_2) - \frac{1}{2}(5(c-1) - 12\beta_2)^2 \right], \tag{3.40}$$

onde $\gamma_1 := \dfrac{4\Delta_c(\beta_2)^{\frac{1}{2}}}{2k8^2\Delta_c(\beta_2)}$.

Proposição 3.7. *Seja Ψ a função que associa a cada $(c,\beta_2)\in P$, o período de $\phi_{(c,\beta_2)}$, isto é,*

$$\begin{array}{rcl}\Psi: \; P & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (c,\beta_2) & \longmapsto & \Psi(c,\beta_2)=T_{\phi_{(c,\beta_2)}},\end{array}$$

onde $T_{\phi_{(c,\beta_2)}}$ está definido em (3.38). Então, $\dfrac{\partial\Psi}{\partial\beta_2}(c,\beta_2)<0$, para todo $(c,\beta_2)\in P$.

Demonstração: Inicialmente, observe que (3.39) nos fornece duas relações, que serão úteis no decorrer da demonstração,

$$16\Delta_c(\beta_2)(2k^2-1)^2=(5(c-1)-12\beta_2)^2 \tag{3.41}$$

e

$$2\Delta_c(\beta_2)^{\frac{1}{2}}(2k^2-1)=\frac{5(c-1)}{2}-6\beta_2. \tag{3.42}$$

Derivando Ψ com relação a β_2, temos

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2}=\gamma_2\left[4\Delta_c(\beta_2)\frac{\partial K}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial\beta_2}-K(k)\frac{\partial}{\partial\beta_2}\Delta_c(\beta_2)\right],$$

onde $\gamma_2:=\dfrac{\Delta_c(\beta_2)^{-\frac{3}{4}}\sqrt{5c}}{\Delta_c(\beta_2)^{\frac{1}{2}}}$. Logo, substituindo $\dfrac{\partial k}{\partial\beta_2}$, dada em (3.40), na expressão acima, temos

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2}=\gamma_2\left[4\Delta_c(\beta_2)\frac{\partial K}{\partial k}\left(\gamma_1\left[-24\Delta_c(\beta_2)-\frac{1}{2}(5(c-1)-12\beta_2)^2\right]\right)-K(k)\frac{\partial}{\partial\beta_2}\Delta_c(\beta_2)\right].$$

Usando as relações (3.41) e (3.42) e o fato que $\dfrac{\partial K}{\partial k}=\dfrac{E(k)-(1-k^2)K(k)}{k(1-k^2)}$, obtemos

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2}=\gamma_3\left[(-4k^4+4k^2-4)E(k)+(2k^4-6k^2+4)K(k)\right]=:\gamma_3 s(k),$$

onde $\gamma_3=\dfrac{\gamma_2\Delta_c(\beta_2)^{\frac{1}{2}}}{k^2(1-k^2)}$.

Portanto, para provarmos que $\dfrac{\partial\Psi}{\partial\beta_2}<0$, basta mostrarmos que $s(k)<0$, pois $\gamma_3>0$. Porém, observe que $s(k)\longrightarrow 0$, quando $k\longrightarrow 0$. Logo é suficiente mostrar que $s'(k)<0$, para todo $k\in(0,1)$.

Por um lado, veja que

$$s'(k)=\frac{10k^2}{k}[(1-2k^2)E(k)+(k^2-1)K(k)].$$

Logo, $s'(k) < 0$ se, e somente, se $(1-2k^2)E(k) + (k^2-1)K(k) < 0$, o que é equivalente à $(1-2k^2)E(k) < (1-k^2)K(k)$.

Por outro, como $1-2k^2 = 1-k^2-k^2 < 1-k^2$, $(1-k^2) > 0$, $E(k) > 0$, $K(k) > 0$ e $E(k) < K(k)$, encontramos que $(1-2k^2)E(k) < (1-k^2)K(k)$. Daí, segue o resultado.

$\square$

A Proposição 3.7, mostra que de fato, $T_{\phi_c}(\beta_2)$ tem a forma conforme ilustrado na Figura 3.5. Concluímos também, que

$$T_{\phi_c}(\beta_2) > 4\pi\sqrt{\frac{c}{c-1}} > 4\pi.$$

Ademais, temos o seguinte Corolário.

Corolário 3.8. *Seja $L > 4\pi$ fixado arbitrariamente. Então, para cada $c > \frac{L^2}{L^2-16\pi^2}$, existe um único $\beta_2 \in \left(0, \frac{5(c-1)}{6}\right)$ tal que $T_{\phi_c}(\beta_2) = L$. Em outras palavras, existe uma curva*

$$\begin{array}{rccc} \delta : & \left(\frac{L^2}{L^2-16\pi^2}, \infty\right) & \longrightarrow & C^\infty_{per}([0,L]) \\ & c & \longmapsto & \phi_{(c,\beta_2(c))}, \end{array} \tag{3.43}$$

tal que, para cada $c \in \left(\frac{L^2}{L^2-16\pi^2}, \infty\right)$, $\phi_{(c,\beta_2(c))}$ possui período L.

O próximo teorema, que é uma aplicação do Teorema da Função Implícita, mostra que a curva δ do Corolário (3.8) é suave.

Teorema 3.9. *Seja $L > 4\pi$ arbitrário mas fixado. Considere $c_0 > \frac{L^2}{L^2-16\pi^2}$ e o único $\beta_2^0 := \beta_2(c_0) \in \left(0, \frac{5(c-1)}{6}\right)$ tal que $T_{(\phi_{c_0,\beta_2^0})} = L$. Então,*

(i) Existem intervalos $J(c_0)$ e $B(\beta_2^0)$ com c_0 e β_2^0 em seus interiores, respectivamente, e existe uma única função Λ tal que $\Lambda(c_0) = \beta_2^0$ e

$$\Psi(c,\beta_2) = T_{\phi_{(c,\beta_2)}} = \frac{4\sqrt{5c}}{(\Delta_c(\beta_2))^{\frac{1}{4}}}K(k) = L,$$

onde $c \in J(c_0)$, $\beta_2 = \Lambda(c)$ e $k^2 = k^2(c,\beta_2) = k^2(c,\Lambda(c)) \in (0,1)$. ($k^2$ esta definido em (3.39)).

(ii) A solução onda Cnoidal para (3.2) definida em (3.33), determinada agora por $\beta_1(c)$, $\beta_2(c)$ e $\beta_3(c)$, possui período fundamental L para todo $c \in J(c_0)$. Além disso, a aplicação

$$c \in J(c_0) \longmapsto \phi_c \in C^\infty_{per}([0,L]),$$

é uma função suave.

(iii) $J(c_0)$ *pode ser estendido a* $\left(\dfrac{L^2}{L^2-16\pi^2},\infty\right)$.

Demonstração: Vimos na Proposição 3.7, que se $(c_0,\beta_2^0)\in P$, então

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2}(c_0,\beta_2^0)<0.$$

Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, temos que existe uma única função suave Λ definida numa vizinhança $J(c_0)$, tal que,

$$\Psi(c,\Lambda(c))=L,\quad\forall\quad c\in J(c_0).$$

Além disso, como $\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2}(c_0,\beta_2^0)<0$ para todo c_0 no intervalo $J=\left(\frac{L^2}{L^2-16\pi^2},\infty\right)$ segue, por unicidade, que Λ pode ser estendida a todo $J(c_0)$. $\square$

Até o momento, garantimos a existência de uma curva suave $\delta(c)$ de soluções para a equação (3.2), para cada período $L>4\pi$ fixado. Contudo, como não temos uma forma explicita para $\Lambda(c)$, não temos também uma forma explícita para δ como função c.

Para obtermos uma forma explícita para a curva δ, reparametrizaremos tanto c quanto $\beta_2=\beta_2(c)=\Lambda(c)$ como funções das variáveis k e L.

Fixando $L>4\pi$, temos que c e $\beta_2=\beta_2(c)$, obtidos no teorema anterior, satisfazem as relações

$$\begin{cases} L=\dfrac{4\sqrt{5c}}{\Delta_c(\beta_2)^{\frac{1}{4}}}K(k), \\[2ex] k^2=\dfrac{5(c-1)-12\beta_2}{8\Delta_c(\beta_2)^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{2}, \\[2ex] \Delta_c(\beta_2)=\left(\beta_2-\dfrac{5(c-1)}{4}\right)^2-4\left(\beta_2^2-\dfrac{5(c-1)}{4}\beta_2\right). \end{cases} \tag{3.44}$$

Este sistema, pode ser resolvido algebricamente nas variáveis c e β_2, ou seja, é possível obter c e β_2 como funções de k e L. De fato, isolando β_2 na segunda equação e substituindo na terceira, obtemos

$$\Delta_c(\beta_2)^{\frac{1}{2}}=\frac{5(c-1)}{4\sqrt{k^4-k^2+1}}.$$

Substituindo este $\Delta_c(\beta_2)^{\frac{1}{2}}$ na primeira equação, após eleva-la ao quadrado, e isolando c, encontramos

$$c=c(k,L)=\frac{L^2}{L^2-64K^2(k)\sqrt{k^4-k^2+1}}. \tag{3.45}$$

Como a curva δ é obtida considerando-se $c > 1$, devemos considerar $k \in (0, k_L)$, onde k_L é o zero de $L^2 - 64K^2(k)\sqrt{k^4 - k^2 + 1}$. Com efeito, se tivéssemos $k > k_L$, teríamos $L^2 - 64K^2(k)\sqrt{k^4 - k^2 + 1} < 0$, pois $m(k) := 64K^2(k)\sqrt{k^4 - k^2 + 1} < 0$ é crescente, e daí $c < 0$, o que não pode ocorrer. Ver Figura 3.6 para mais detalhes.

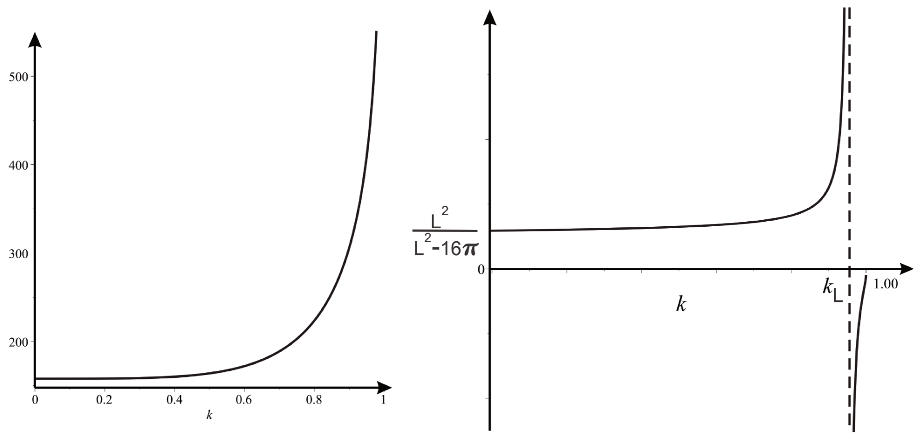

Figura 3.6: À esquerda $m(k)$ e à direita $c(k, L)$ com $L > 4\pi$ fixado.

Ainda usando o sistema (3.44), podemos verificar que

$$\begin{aligned} \beta_2 \;&= \beta_2(c) \;= \frac{L^2}{L^2 - 64K^2(k)\sqrt{k^4 - k^2 + 1}}\left[\frac{5}{12} - \frac{80}{3L^2}(2k^2 - 1)K^2(k)\right] - \frac{5}{12} \\ &= \frac{5}{12}\left[\frac{L^2 - 64(2k^2 - 1)K^2(k)}{L^2 - 64K^2(k)\sqrt{k^4 - k^2 + 1}} - 1\right]. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Uma vez que conseguimos explicitar c e β_2, como funções de k e L, podemos também explicitar

$$\beta_3 - \beta_1, \quad \beta_3 - \beta_2 \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_1}{16(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + 20}}$$

como funções dessas variáveis. De fato, usando as expressões de β_3 e β_1, como funções de β_2 e c, apresentadas na Proposição 3.5, e a definição de k^2 em (3.28), obtemos

$$\beta_3 - \beta_1 = \frac{5(c - 1) - 12\beta_2}{4(2k^2 - 1)}, \tag{3.47}$$

$$\beta_3 - \beta_2 = \frac{[5(c - 1) - 12\beta_2]k^2}{4(2k^2 - 1)} \tag{3.48}$$

e

$$\sqrt{\frac{\beta_3-\beta_1}{16(\beta_1+\beta_2+\beta_3)+20}}=\frac{5(c-1)-12\beta_2}{80c(2k^2-1)}. \tag{3.49}$$

Portanto, agrupando (3.45)-(3.49), obtemos

$$\beta_3-\beta_2=\frac{80k^2K^2(k)}{L^2-64K^2(k)\sqrt{k^4-k^2+1}}, \tag{3.50}$$

$$\sqrt{\frac{\beta_3-\beta_1}{16(\beta_1+\beta_2+\beta_3)+20}}=\frac{2K(k)}{L}, \tag{3.51}$$

e

$$A_{(k,L)}=\frac{-204800K^6(k)}{27\tilde{m}^3(k)}\left[\left(\sqrt{k^4-k^2+1}-(2k^2-1)\right)^2\left(2\sqrt{k^4-k^2+1}+(2k^2-1)\right)\right], \tag{3.52}$$

onde $A_{(k,L)}=A$ é a constante de integração da equação (3.2).

Proposição 3.10. *Seja $L>4\pi$. Então a curva*

$$\begin{array}{rccc}\tilde{\delta}_L: & (0,k_L) & \longrightarrow & C^{\infty}_{per}([0,L])\\ & k & \longmapsto & \phi_{(k,L)},\end{array}$$

definida por

$$\tilde{\delta}_L(k)(x)=\phi_{(k,L)}(x)=\left[\frac{5}{12}\left(\frac{L^2-64(2k^2-1)K^2(k)}{\tilde{m}(k)}-1\right)+\frac{80k^2K^2(k)}{\tilde{m}(k)}\mathrm{CN}^2\left(\frac{2K(k)}{L}x,k\right)\right]^2, \tag{3.53}$$

com $\tilde{m}(k)=L^2-64K^2(k)\sqrt{k^4-k^2+1}$, é uma curva suave de soluções para a equação (3.2).

Demonstração: O resultado segue após substituir (3.50), (3.51) e (3.46) em (3.33). □

A Figura 3.7, ilustra as soluções $\phi_{(k,L)}$.

3.4 Propriedades Espectrais

Entendemos por propriedades espectrais, as propriedades P_1 e P_2 em (3.7), isto é, para todo $k\in(0,k_L)$ o operador $\mathcal{L}_k$ definido em (3.7), possui um único autovalor negativo o qual é simples e 0 é um autovalor simples associado a autofunção $\phi'_{(k,L)}$. Nosso objetivo nessa seção é provar que essas propriedades são validas.

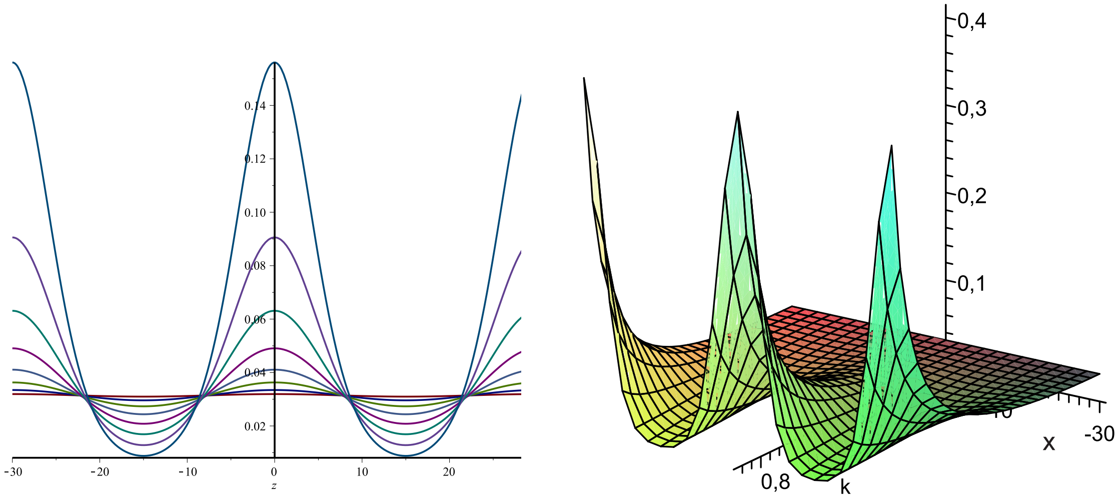

Figura 3.7: À esquerda o gráfico de $x \longmapsto \phi_{(k_0,30)}(x)$, para $k_0 = 0.1$, $k_0 = 0.2$, $k_0 = 0.3$, $k_0 = 0.4$, $k_0 = 0.5$, $k_0 = 0.6$, $k_0 = 0.7$ e $k_0 = 0.8$. À direita o gráfico de $(k, x) \longmapsto \phi_{(k,30)}(x)$.

Usando a teoria Floquet, mais precisamente o Teorema 2.2, obtemos que o espectro do operador de $\mathcal{L}_k$ é formado por uma sequência ilimitada de números reais,

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < ... < \lambda_{2n-1} \leq \lambda_{2n}..., \tag{3.54}$$

onde a igualdade significa que $\lambda_{2n-1} = \lambda_{2n}$ é um autovalor duplo. Para maiores detalhes, ver a Seção 2.1.

As propriedades P_1 e P_2 podem ser obtidas de duas maneiras. A primeira é usar os Teoremas 2.6 e 2.10. A segunda é fazer uma mudança de variável no problema de autovalores a fim de obter um problema periódico associado à equação de Lamé. Este, por sua vez, permite obter explicitamente os primeiros autovalores e autofunções.

Nas próximas duas subseções, obteremos tais propriedades utilizando estes dois métodos.

3.4.1 Propriedades Espectrais via Teoremas 2.10 e 2.6

O Teorema 2.10, nos diz que é suficiente provar as propriedades P_1 e P_2 apenas para um valor arbitrário de $k_0 \in (0, k_L)$, enquanto que o Teorema 2.6, nos fornece uma maneira de obte-las para um k_0 fixo.

A função $\phi_k := \phi_{(k,L)}$, definida em (3.53), é positiva e suave em todas suas variáveis. Logo, a função

$$\mathcal{Q}(x,k) := c(k) - 1 - \frac{3}{2}\phi_k^{\frac{1}{2}}(x) \tag{3.55}$$

é continuamente diferenciável e assim pelo Teorema 2.10, a família $\mathcal{L}_k$ é isonercial. Em outras palavras, $In(\mathcal{L}_k) = In(\mathcal{L}_{k_0})$ para todo $k \in (0, k_L)$. Isto implica que o operador $\mathcal{L}_k$ possui a mesma estrutura espectral para todo $k \in (0, k_L)$.

Por outro lado, para todo $k \in (0, k_L)$, sabemos que ϕ_k' é sempre autofunção associada ao autovalor 0, pois

$$\mathcal{L}_k(\phi_k') = -c(k)\phi_k''' + \left[(c(k)-1) - \frac{3}{2}\phi^{\frac{1}{2}}\right]\phi_k' = \left(-c(k)\phi_k'' + (c(k)-1)\phi_k - \phi_k^{\frac{3}{2}}\right)' = (-A(k))' = 0.$$

Daí, $\mathcal{L}_k$ satisfará as propriedades P_1 e P_2 para todo $k \in (0, k_L)$ se, e somente, se $In(\mathcal{L}_k) = (1,1)$ para algum $k_0 \in (0, k_L)$.

Provaremos agora, que $In(\mathcal{L}_k) = (1,1)$ para algum $k_0 \in (0, k_L)$. Para isso, consideremos o PVI

$$\begin{cases} -y'' + \dfrac{1}{c(k_0)}\left[(c(k_0)-1) - \dfrac{3}{2}\phi_{k_0}^{\frac{1}{2}}\right] y = 0 \\ y(0) = -\frac{1}{\phi_{k_0}''(0)} \\ y'(0) = 0, \end{cases} \tag{3.56}$$

com $k_0 = 0.4$ e também a constante θ definida por

$$\theta = \frac{y'(L)}{\phi_{k_0}''(0)}. \tag{3.57}$$

Pelo Teorema 3.1 em [55], é suficiente escolhermos um valor arbitrário de L, digamos $L = 30$. Na verdade, neste resultado, os autores estabeleceram uma relação entre os conjuntos resolventes dos operadores quando muda-se o período. Tal relação mantém a propriedade isonercial.

Portanto, obtemos numericamente, usando o software Wolfran mathematica 7 ou maple 17, que

$$\theta = -1.02009 \times 10^6.$$

Além disso, usando a forma explicita de ϕ_{k_0}, podemos constatar que ϕ_{k_0}' possui exatamente dois zeros no intervalo $[0, 30)$ (Ver Figura 3.7).

Finalmente, usando o Teorema 2.6, obtemos que 0 é um autovalor simples e $0 = \lambda_1$, isto é, 0 é o segundo autovalor e é simples. Ou seja, $In(\mathcal{L}_{k_0}) = (1,1)$.

Provamos dessa forma as propriedades P_1 e P_2. A tabela abaixo ilustra os valores de θ para diferentes valores de L.

Valores para θ com $k_0 = 0.4$.			
$L = 50$	$L = 500$	$L = 1000$	$L = 10000$
$\theta = -4.724 \times 10^8$	$\theta = -6.141 \times 10^{19}$	$\theta = -1.260 \times 10^{23}$	$\theta = -1.270 \times 10^{34}$

3.4.2 Propriedades Espectrais via Equação de Lamé

Para facilitar nossa análise, consideraremos o operador $\tilde{\mathcal{L}}_k$ definido por

$$\tilde{\mathcal{L}}_k := \frac{1}{c}\mathcal{L}_k,$$

onde $c = c(k, L)$ está definido em (3.45). Neste caso, note que α é autovalor de $\tilde{\mathcal{L}}_k$ se, e somente se, $c\alpha$ é autovalor de $\mathcal{L}_k$.

Considerando $\tilde{\mathcal{L}}_k$ temos então o seguinte problema de autovalores:

$$\begin{cases} -\chi''(x) + \left[\dfrac{(c-1)}{c} - \dfrac{3}{2c}\phi_k^{\frac{1}{2}}\right]\chi(x) = \alpha\chi(x), \\ \chi(0) = \chi(L), \quad \chi'(0) = \chi'(L), \end{cases} \tag{3.58}$$

onde ϕ_k está definido em (3.53).

Para facilitar as notações, reescreveremos ϕ_k na forma

$$\phi_k(x) = a^2\left[b + \mathrm{CN}^2\left(\frac{2K(k)}{L}x, k\right)\right]^2,$$

onde

$$a = a(k, L) := \frac{80k^2K^2(k)}{L^2 - 64K^2(k)\sqrt{k^4 - k^2 + 1}} \tag{3.59}$$

e

$$b = b(k) := \frac{\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - 2k^2 + 1}{3k^2}. \tag{3.60}$$

Logo, o problema de autovalor (3.58) se torna

$$\begin{cases} -\chi''(x) + \left[\dfrac{(c-1)}{c} - \alpha - \dfrac{3}{2c}\left(a\left\{b + \mathrm{CN}^2\left(\dfrac{2K(k)}{L}x, k\right)\right\}\right)\right]\chi(x) = 0, \\ \chi(0) = \chi(L), \quad \chi'(0) = \chi'(L). \end{cases}$$

Mudando a variável $x = \eta y$, onde $\eta := \frac{L}{2K(k)}$, obtemos

$$\begin{cases} -\chi''(\eta y) + \left[\dfrac{(c-1)}{c} - \alpha - \dfrac{3}{2c}\left(a\left\{b + \mathrm{CN}^2(y, k)\right\}\right)\right]\chi(\eta y) = 0, \\ \chi(0) = \chi(2K(k)\eta), \quad \chi'(0) = \chi'(2K(k)\eta). \end{cases}$$

Definindo $\Lambda(y) = \chi(\eta y)$, este problema se torna

$$\begin{cases} -\Lambda''(y) + \left[\dfrac{\eta^2(c-1)}{c} - \eta^2\alpha - \dfrac{3ab\eta^2}{2c} - \dfrac{3a\eta^2}{2c}\mathrm{CN}^2\left(y,k\right)\right]\Lambda(y) = 0, \\ \Lambda(0) = \Lambda(2K(k)), \quad \Lambda'(0) = \chi'(2K(k)). \end{cases} \tag{3.61}$$

Por outro lado, usando as definições de c, a e b em (3.45), (3.59) e (3.60), respectivamente, constatamos que

$$\begin{aligned} \frac{3a\eta^2}{2c} &= \frac{3}{2}\left(\frac{80k^2K^2(k)}{L^2 - 64K^2\sqrt{k^4-k^2+1}}\right)\left(\frac{L^2}{4K^2(k)}\right)\left(\frac{L^2 - 64K^2(k)\sqrt{k^4-k^2+1}}{L^2}\right) \\ &= 5\cdot 6\cdot k^2, \end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta^2(c-1)}{c} &= \frac{L^2}{4K^2(k)}\left(\frac{64K^2\sqrt{k^4-k^2+1}}{L^2 - 64K^2(k)\sqrt{k^4-k^2+1}}\right)\left(\frac{L^2 - 64K^2(k)\sqrt{k^4-k^2+1}}{L^2}\right) \\ &= 16\sqrt{k^4-k^2+1}, \end{aligned} \tag{3.63}$$

e

$$\frac{3ab\eta^2}{2c} = 30k^2b = 10(\sqrt{k^4-k^2+1} - 2k^2 + 1). \tag{3.64}$$

Finalmente, substituindo (3.62)-(3.64) em (3.61) e usando a relação, $\mathrm{SN}^2 + \mathrm{CN}^2 = 1$, obtemos um problema de autovalor associado a uma equação de Lamé:

$$\begin{cases} \Lambda''(y) = \left[5\cdot 6\cdot k^2\mathrm{SN}^2\left(y,k\right) - h\right]\Lambda(y) = 0, \\ \Lambda(0) = \Lambda(2K(k)), \quad \Lambda'(0) = \Lambda'(2K(k)), \end{cases} \tag{3.65}$$

onde

$$h = 10(k^2+1) + \eta^2\alpha - 6\sqrt{k^4-k^2+1}. \tag{3.66}$$

Explicitaremos agora, os 5 primeiros autovalores do problema de Lamé (3.65), juntamente com suas respectivas autofunções. Para isso, usaremos o trabalho de Ince em [41] juntamente com a teoria Floquet.

Conforme Ince, pg. 53, a função

$$\Lambda(x) = \mathrm{CN}(x,k)\mathrm{DN}(x,k)\left(D_1\mathrm{SN}(x,k) + D_3\mathrm{SN}^3(x,k)\right),$$

com

$$D_1 = 1 \quad \text{e} \quad D_3 = \frac{1}{6}(4k^2 + 4 - h)$$

é uma autofunção associada ao autovalor h para (3.65), desde que h satisfaça a equação quadrática

$$h^2 - 20(1+k^2)h + 64(1+k^2)^2 + 108k^2 = 0.$$

Portanto, como esta equação possui raízes

$$h_1 = 10(1+k^2) + 6\sqrt{k^4 - k^2 + 1} \tag{3.67}$$

e

$$h_2 = 10(1+k^2) - 6\sqrt{k^4 - k^2 + 1}, \tag{3.68}$$

temos que estes são autovalores para (3.65) associados as autofunções

$$\Lambda_1(x) = \mathrm{CN}(x,k)\mathrm{DN}(x,k)\left(\mathrm{SN}(x,k) - \left(\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + (1+k^2)\right)\mathrm{SN}^3(x,k)\right) \tag{3.69}$$

e

$$\Lambda_2(x) = \mathrm{CN}(x,k)\mathrm{DN}(x,k)\left(\mathrm{SN}(x,k) + \left(\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - (1+k^2)\right)\mathrm{SN}^3(x,k)\right), \tag{3.70}$$

respectivamente.

Além do mais, ainda por Ince, pg. 49, a função

$$\Lambda(x) = \mathrm{DN}(x,k)\left(C_0 + C_2\mathrm{SN}^2(x,k) + C_4\mathrm{SN}^4(x,k)\right),$$

com

$$C_0 = 1, \quad C_2 = \frac{1}{2}(h - k^2) \quad \text{e} \quad C_4 = \frac{1}{12}\left(28k^2 - C_2(h - 4 - 9k^2)\right)$$

também é uma autofunção para (3.65) associada ao autovalor h, sempre que h satisfaz a equação cúbica

$$h^3 - (20 + 35k^2)h^2 + (64 + 576k^2 + 259k^4)h - 225k^6 - 1860k^4 - 960k^2 = 0. \tag{3.71}$$

Com o objetivo de encontrarmos os autovalores e as respectivas autofunções para este caso, encontraremos as raízes, h_3, h_4 e h_5 desta equação.

Para simplificar a notação, denotaremos

$$\begin{cases} z_1 = -20 - 35k^2, \\ z_2 = 64 + 576k^2 + 259k^4, \\ z_3 = -225k^6 - 1860k^4 - 960k^2. \end{cases}$$

Daí, a equação (3.71) pode ser escrita como

$$h^3 + z_1 h^2 + z_2 h + z_3 = 0.$$

Nossa estratégia para encontrar as raízes de (3.71) será usar o método trigonométrico, cf. [59]. Para isso, mudemos a variável $h = t - \dfrac{z_1}{3}$, para obtermos a equação "Depressed Cubic", isto é,

$$t^3 + pt + q = 0, \tag{3.72}$$

onde

$$\begin{cases} p = \dfrac{3z_2 - z_1^2}{3}, \\ \\ q = \dfrac{2z_1^3 - 9z_1 z_2 + 27z_3}{27}. \end{cases}$$

O método trigonométrico consiste em escrever $t = u\cos(\theta)$ e procurar u e θ tais que a equação (3.72) coincida com a identidade trigonométrica

$$4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) - \cos(3\theta) = 0.$$

Substituindo $t = u\cos(\theta)$ em (3.72), temos

$$u^3\cos^3(\theta) + pu\cos(\theta) + q = 0.$$

Agora, multiplicando esta equação por $\dfrac{4}{u^3}$, segue que

$$4\cos^3(\theta) + \frac{4p}{u^2}\cos(\theta) + \frac{4q}{u^3} = 0.$$

Assim, se escolhermos u tal que $\dfrac{4p}{u^2} = -3$, vemos que

$$u = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

e portanto

$$4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) + \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}} = 0.$$

Finalmente, se existe θ tal que

$$\cos(3\theta) = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}} =: \tilde{f},$$

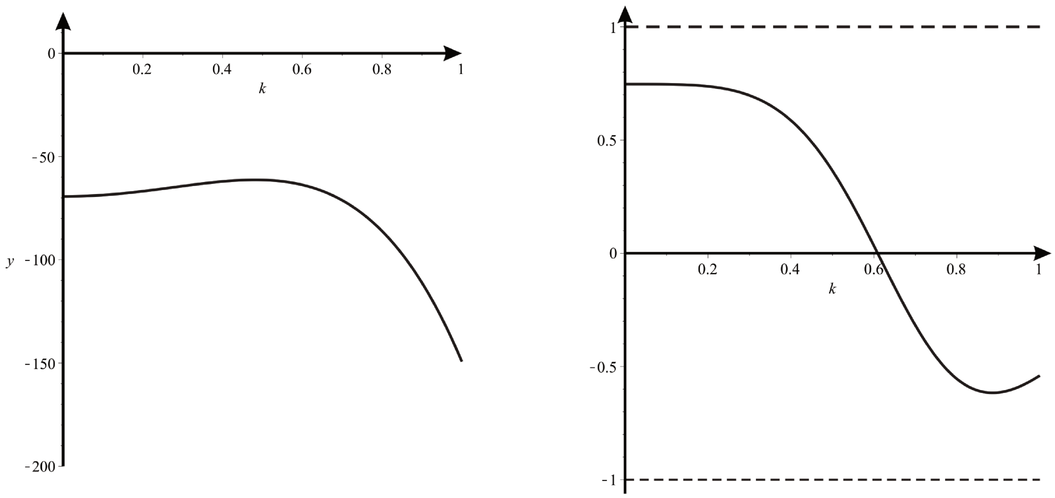

Figura 3.8: À esquerda o gráfico de $p = p(k)$. À direita o gráfico de $\tilde{f} = \tilde{f}(k)$.

obtemos a identidade trigonométrica descrita acima. De fato, como $p = p(k) < 0$ e $\tilde{f} = \tilde{f}(k) \in (0,1)$ para todo $k \in (0,1)$, ver Figura 3.8, então u é real e existe o θ mencionado acima.

Além disso, note que

$$\cos(3\theta + 2\pi z) = \cos(3\theta) = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}, \quad \text{para} \quad z = 0,1,2.$$

Daí,

$$3\theta + 2\pi z = \arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right), \quad \text{para} \quad z = 0,1,2,$$

isto é,

$$\theta = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) - \frac{2\pi}{3}z, \quad \text{para} \quad z = 0,1,2.$$

Portanto, as raízes de (3.72), são

$$t_z = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) - \frac{2\pi}{3}z\right), \quad \text{para} \quad z = 0,1,2. \tag{3.73}$$

Agora, podemos exibir as raízes de (3.71). De fato,

$$h_3 = 2\sqrt{\frac{3z_2 - z_1^2}{-9}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{2z_1^3 - 9z_1z_2 + 27z_3}{6(3z_2 - z_1^2)}\sqrt{\frac{-9}{3z_2 - z_1^2}}\right) - \frac{4\pi}{3}\right) - \frac{z_1}{3},$$

$$h_4 = 2\sqrt{\frac{3z_2 - z_1^2}{-9}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{2z_1^3 - 9z_1z_2 + 27z_3}{6(3z_2 - z_1^2)}\sqrt{\frac{-9}{3z_2 - z_1^2}}\right) - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{z_1}{3}$$

e

$$h_5 = 2\sqrt{\frac{3z_2 - z_1^2}{-9}}\cos\left(\frac{1}{3}\text{arccos}\left(\frac{2z_1^3 - 9z_1z_2 + 27z_3}{6(3z_2 - z_1^2)}\sqrt{\frac{-9}{3z_2 - z_1^2}}\right)\right) - \frac{z_1}{3}.$$

Concluímos então que estes h_3, h_4 e h_5, são autovalores para o problema (3.65), cujas autofunções são, respectivamente,

$$\Lambda_3(x) = \text{DN}(x,k)\left(1 + \frac{1}{2}(h_3 - k^2)\text{SN}^2(x,k) + \frac{1}{12}\left(28k^2 - \frac{1}{2}(h_3 - k^2)(h_3 - 4 - 9k^2)\right)\text{SN}^4(x,k)\right),$$

$$\Lambda_4(x) = \text{DN}(x,k)\left(1 + \frac{1}{2}(h_4 - k^2)\text{SN}^2(x,k) + \frac{1}{12}\left(28k^2 - \frac{1}{2}(h_4 - k^2)(h_4 - 4 - 9k^2)\right)\text{SN}^4(x,k)\right)$$

e

$$\Lambda_5(x) = \text{DN}(x,k)\left(1 + \frac{1}{2}(h_5 - k^2)\text{SN}^2(x,k) + \frac{1}{12}\left(28k^2 - \frac{1}{2}(h_5 - k^2)(h_5 - 4 - 9k^2)\right)\text{SN}^4(x,k)\right).$$

Como obtemos explicitamente os autovalores e as autofunções do problema de autovalores (3.65), podemos verificar a ordenação dos autovalores e o número de zeros das autofunções no intervalo $[0, 2K(k))$. Não é difícil verificar que

$$h_3 < h_2 < h_4 < h_1 < h_5.$$

Além disso, em $[0, 2K(k))$, Λ_3 não possui zeros, Λ_2 e Λ_4 possuem dois zeros e Λ_1 e Λ_5 possuem quatro zeros. A Figura 3.9 ilustra esses autovalores e autofunções.

Uma vez que encontramos os primeiros autovalores e autofunções para o problema de Lamé (3.65), podemos obter os respectivos autovalores e autofunções do operador $\mathcal{L}_k$. De fato, de (3.66), temos

$$\alpha = \frac{1}{\eta^2}\left(h + 6\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - 10(k^2 + 1)\right).$$

Daí, os autovalores de $\mathcal{L}_k$, são da forma

$$\begin{aligned}\lambda &= c\frac{1}{\eta^2}\left(h + 6\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - 10(k^2 + 1)\right) \\ &= \frac{L^2}{L^2 - 64K^2\sqrt{k^4 - k^2 + 1}}\frac{4K^2(k)}{L^2}\left(h + 6\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - 10(k^2 + 1)\right),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lambda = \frac{4K^2(k)}{L^2 - 64K^2\sqrt{k^4 - k^2 + 1}}\left(h + 6\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - 10(k^2 + 1)\right). \tag{3.74}$$

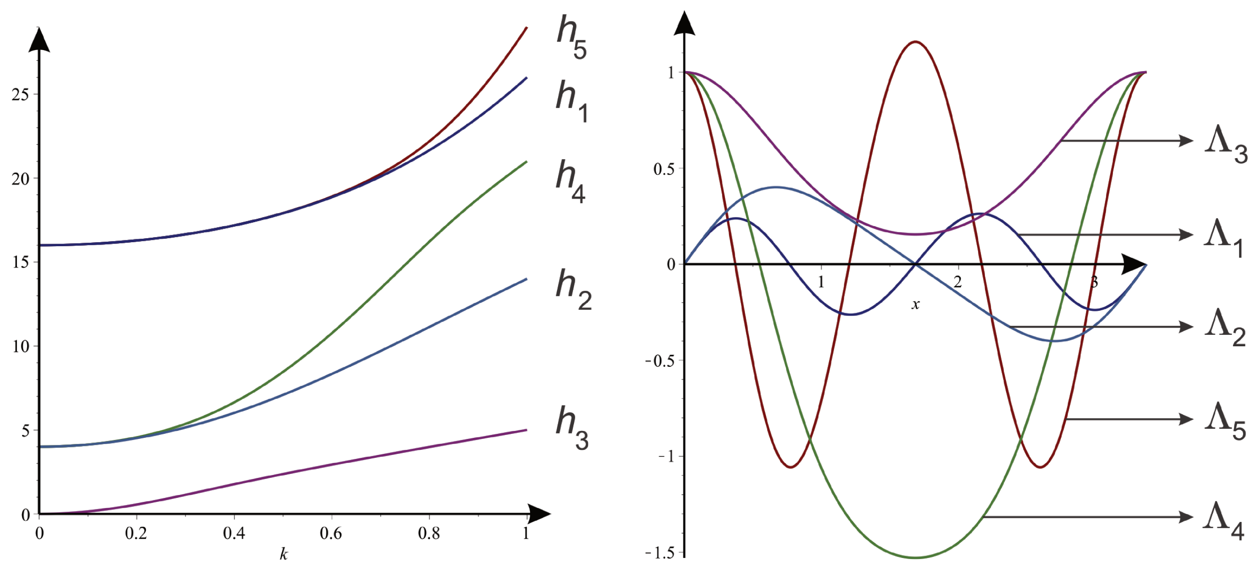

Figura 3.9: À esquerda, os autovalores como funções de k. À direita, um esboço das autofunções no caso $k = 0.5$.

Portanto, substituindo os autovalores h_i's em (3.74), e indexando os λ's conforme sua ordem, obtemos que

$$\lambda_1 = \frac{4K^2(k)}{L^2 - 64K^2\sqrt{k^4 - k^2 + 1}}\left(h_2 + 6\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - 10(k^2 + 1)\right) = 0.$$

Além disso,

$$\lambda_0 = \frac{4K^2(k)}{L^2 - 64K^2\sqrt{k^4 - k^2 + 1}}\left(h_3 + 6\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - 10(k^2 + 1)\right),$$

$$\lambda_2 = \frac{4K^2(k)}{L^2 - 64K^2\sqrt{k^4 - k^2 + 1}}\left(h_4 + 6\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - 10(k^2 + 1)\right),$$

$$\lambda_3 = \frac{4K^2(k)}{L^2 - 64K^2\sqrt{k^4 - k^2 + 1}}\left(h_1 + 6\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - 10(k^2 + 1)\right) = \frac{48K^2(k)\sqrt{k^4 - k^2 + 1}}{L^2 - 64K^2\sqrt{k^4 - k^2 + 1}}$$

e

$$\lambda_4 = \frac{4K^2(k)}{L^2 - 64K^2\sqrt{k^4 - k^2 + 1}}\left(h_5 + 6\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - 10(k^2 + 1)\right).$$

Além do mais, temos que a autofunção associada ao autovalor λ_1 é dada por

$$\chi_1(x) = \Lambda_2\left(\frac{1}{\eta}x\right) = \Lambda_2\left(\frac{2K(k)}{L}x\right),$$

isto é,

$$\chi_1(x) = \mathrm{CN}\left(\tfrac{2K(k)}{L}x, k\right)\mathrm{DN}\left(\tfrac{2K(k)}{L}x, k\right)\left[\mathrm{SN}\left(\tfrac{2K(k)}{L}x, k\right) + \left(\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - (1 + k^2)\right)\mathrm{SN}^3\left(\tfrac{2K(k)}{L}x, k\right)\right]$$

$$= \frac{-L}{8a^2(b+1)K(k)}\phi' =: C_0\phi'.$$

A Figura 3.10, ilustra os autovalores λ's e as respectivas autofunções.

Portanto, ϕ' é uma autofunção associada ao autovalor $\lambda_1 = 0$, o qual é simples e é o segundo autovalor. Isto prova as propriedades P_1 e P_2.

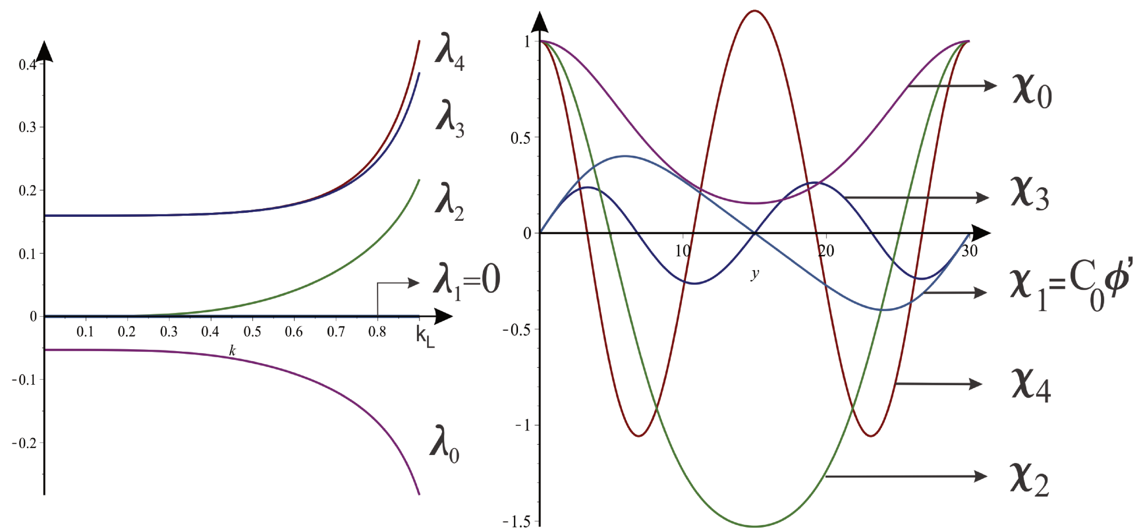

Figura 3.10: À esquerda, os autovalores como funções de k. À direita, um esboço das autofunções no caso $k = 0.5$. Em ambos os casos $L = 30$.

3.5 Estabilidade Orbital

Nesta seção, temos como objetivo obter estabilidade no sentido orbital para a curva de soluções ϕ_k dada em (3.53).

Antes de enunciarmos o teorema de estabilidade, provaremos alguns lemas úteis. O primeiro deles garante a propriedade P_3.

Lema 3.11. *Seja M_k a quantidade conservada definida em (3.7) e sejam $c(k, L)$ e $A(k, L)$ dadas* *em* (3.45) *e* (3.52), *respectivamente. Então,*

$$\Phi := \left\langle \mathcal{L}_k \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial k} \right), \frac{\partial \phi_k}{\partial k} \right\rangle = -\left(M_k'(\phi_k), \frac{\partial \phi_k}{\partial k} \right) < 0. \tag{3.75}$$

Demonstração: Para simplificar a notação, escreveremos ϕ_k ao invés de $\phi_{(k,L)}$. Derivando as quantidades conservadas Q e V em (3.3), no sentido de Fréchet, temos

$$Q'(\phi_k) = \phi_k - \phi_k'' \qquad \text{e} \qquad V'(\phi_k) = 1. \tag{3.76}$$

Por outro lado, derivando a equação de Euller-Lagrange (3.2) com relação a k, obtemos

$$-\frac{\partial c}{\partial k}(\phi_k)'' - c\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial k}\right)'' + \frac{\partial c}{\partial k}\phi_k + (c-1)\frac{\partial \phi_k}{\partial k} - \frac{3}{2}\phi_k^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \phi_k}{\partial k} + \frac{\partial A}{\partial k} = 0,$$

isto é,

$$\mathcal{L}_k \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial k} \right) + \frac{\partial c}{\partial k}(-\phi_k'' + \phi_k) + \frac{\partial A}{\partial k} = 0. \tag{3.77}$$

Portanto, agrupando (3.76) e (3.77), constatamos que

$$\mathcal{L}_k \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial k} \right) = -\left(\frac{\partial c}{\partial k} Q'(\phi_k) + \frac{\partial A}{\partial k} V'(\phi_k) \right) = -M_k'(\phi_k).$$

Desta maneira, Φ é dado por

$$\begin{aligned}
\Phi = & -\left(M_k'(\phi_k), \frac{\partial \phi_k}{\partial k} \right) = -\left(\frac{\partial c}{\partial k}(-\phi_k'' + \phi_k) + \frac{\partial A}{\partial k}, \frac{\partial \phi_k}{\partial k} \right) \\
= & -\int_0^L -\frac{\partial c}{\partial k}\phi_k''\frac{\partial \phi_k}{\partial k} + \frac{\partial c}{\partial k}\phi_k\frac{\partial \phi_k}{\partial k} + \frac{\partial A}{\partial k}\frac{\partial \phi_k}{\partial k}dx \\
= & -\int_0^L \frac{\partial c}{\partial k}\phi_k'\frac{\partial \phi_k'}{\partial k} + \frac{\partial c}{\partial k}\phi_k\frac{\partial \phi_k}{\partial k} + \frac{\partial A}{\partial k}\frac{\partial \phi_k}{\partial k}dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\Phi = & -\left(\int_0^L \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial k}\frac{\partial}{\partial k}\left((\phi_k')^2 + \phi_k^2 \right) + \frac{\partial A}{\partial k}\frac{\partial \phi_k}{\partial k} \right) dx \\
= & -\left(\frac{\partial c}{\partial k}\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{1}{2}\int_0^L (\phi_k')^2 + \phi_k^2 \right) dx + \frac{\partial A}{\partial k}\frac{\partial}{\partial k}\int_0^L \phi_k dx \right).
\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\Phi = -\left(\frac{\partial c}{\partial k}\frac{\partial}{\partial k}Q(\phi_k) + \frac{\partial A}{\partial k}\frac{\partial}{\partial k}V(\phi_k) \right). \tag{3.78}$$

Com o objetivo de encontrarmos o sinal de Φ, calcularemos $Q(\phi_k)$ e $V(\phi_k)$. Relembremos que

$$\phi_k(x) = a^2 \left[b + \mathrm{CN}^2 \left(\frac{2K(k)}{L} x, k \right) \right]^2,$$

onde a e b estão dados em (3.59) e (3.60), respectivamente.

Derivando ϕ_k com relação a x e elevando ao quadrado, obtemos

$$\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x} \right)^2 = \frac{64 a^4 K^2}{L^2} \left(b + \mathrm{CN}^2 \right)^2 \left(\mathrm{CN}^2 \mathrm{SN}^2 \mathrm{DN}^2 \right), \tag{3.79}$$

onde denotamos $\mathrm{CN}^2 := \mathrm{CN}^2 \left(\frac{2K(k)}{L} x, k \right)$, $\mathrm{SN}^2 := \mathrm{SN}^2 \left(\frac{2K(k)}{L} x, k \right)$, $\mathrm{DN}^2 := \mathrm{DN}^2 \left(\frac{2K(k)}{L} x, k \right)$ e $K^2 := K^2(k)$ para simplificar a notação.

Por outro lado, usando as identidades

$$\begin{cases} \mathrm{SN}^2 + \mathrm{CN}^2 = 1 \\ \\ \mathrm{DN}^2 + k^2 \mathrm{SN}^2 = 1, \end{cases} \tag{3.80}$$

conseguimos expressar (3.79) apenas como função de CN, isto é,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x} \right)^2 = \; & \frac{64 a^4 K^2}{L^2} \Big(\big[b^2 (1 - k^2) \big] \mathrm{CN}^2 + \big[2b(1 - k^2) + b^2 (2k^2 - 1) \big] \mathrm{CN}^4 \\ & + \big[(1 - k^2) - b^2 k^2 + 2b(2k^2 - 1) \big] \mathrm{CN}^6 \\ & + \big[(2k^2 - 1) - 2bk^2 \big] \mathrm{CN}^8 - k^2 \mathrm{CN}^{10} \Big). \end{aligned}$$

Integrando ϕ_k, ϕ_k^2 e $\left(\dfrac{\partial \phi_k}{\partial x} \right)^2$ de 0 a L, vemos que

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi_k(x) dx = \; & a^2 \left[b^2 L + 2b C_2 + C_4 \right], \\ \int_0^L \phi_k^2(x) dx = \; & a^4 \left[b^4 L + 4b^3 C_2 + 6b^2 C_4 + 4b C_6 + C_8 \right], \end{aligned} \tag{3.81}$$

e

$$\begin{aligned}\int_0^L\left(\frac{\partial\phi_k}{\partial x}\right)^2(x)dx = \quad & \frac{64a^4K^2}{L^2}\Big(\big[b^2(1-k^2)\big]C_2+\big[2b(1-k^2)+b^2(2k^2-1)\big]C_4\\ & +\big[(1-k^2)-b^2k^2+2b(2k^2-1)\big]C_6\\ & +\big[(2k^2-1)-2bk^2\big]C_8-k^2C_{10}\Big),\end{aligned} \tag{3.82}$$

onde

$$C_{2n}=\int_0^L \mathrm{CN}^{2n}\left(\frac{2K(k)}{L}x,k\right)dx.$$

Mudando a variável $\xi=\frac{2K(k)}{L}x$ e usando que CN^{2n} é par, temos

$$C_{2n}=\frac{L}{K(k)}\int_0^{K(k)}\mathrm{CN}^{2n}(\xi,k)d\xi=\frac{L}{K(k)}\tilde{C}_{2n}. \tag{3.83}$$

Usando as fórmulas de integrais elípticas apresentadas nos parágrafos §312.02, §312.04 e §312.05) de [25], obtemos

$$\tilde{C}_2=\frac{E(k)-(1-k^2)K(k)}{k^2},$$

$$\tilde{C}_4=\frac{(2-3k^2)(1-k^2)K(k)+2(2k^2-1)E(k)}{3k^4}$$

e

$$\tilde{C}_{2n+2}=\frac{2n(2k^2-1)\tilde{C}_{2n}+(2n-1)(1-k^2)\tilde{C}_{2n-2}}{(2n+1)k^2}.$$

Portanto, $\tilde{C}_2$, $\tilde{C}_4$ e $\tilde{C}_{2n+2}$, com $n=1,...,4$, nos fornece uma forma explicita para $Q(\phi_k)$ e $V(\phi_k)$ como funções de k e L. Logo, podemos escrever $\Phi=-n(k,L)$ onde $n(k,L)$ é uma função positiva. Devido ao fato de $n(k,L)$ possuir uma expressão extensa, não à explicitamos aqui, bem como recorremos ao software Maple 17 para concluir a positividade da mesma. Contudo, tal expressão pode ser obtida a partir de (3.78), (3.59), (3.60), (3.81), (3.82), (3.83) e dos valores $\tilde{C}_i$'s mencionados acima. Ver Figuras 3.11 e 3.12. Isso completa a prova do lema. □

Em (3.4), definimos um funcional conservado F cuja derivada nos fornece a equação de Euler-Lagrange (3.5). Tal funcional a princípio depende de c e de A, mas como lidaremos com $\phi_{(c,A)}$, onde c e A dependem da variável k, consideraremos o funcional $F_k:=F_{(c(k,L),A(k,L))}$, isto é,

$$F_k=E+(c(k)-1)Q+A(k)V. \tag{3.84}$$

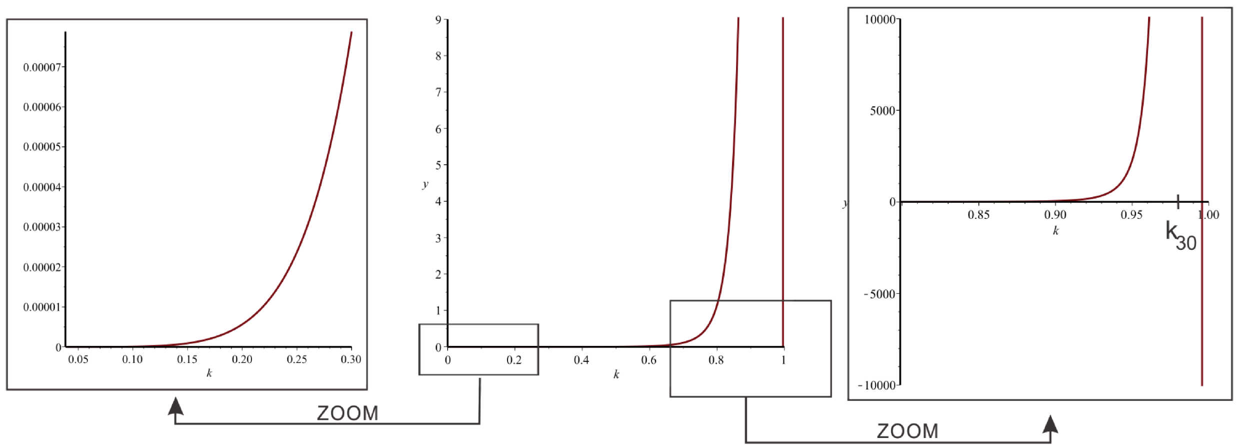

Figura 3.11: Gráfico de $k \mapsto n(k, L)$, com $L = 30$ fixado.

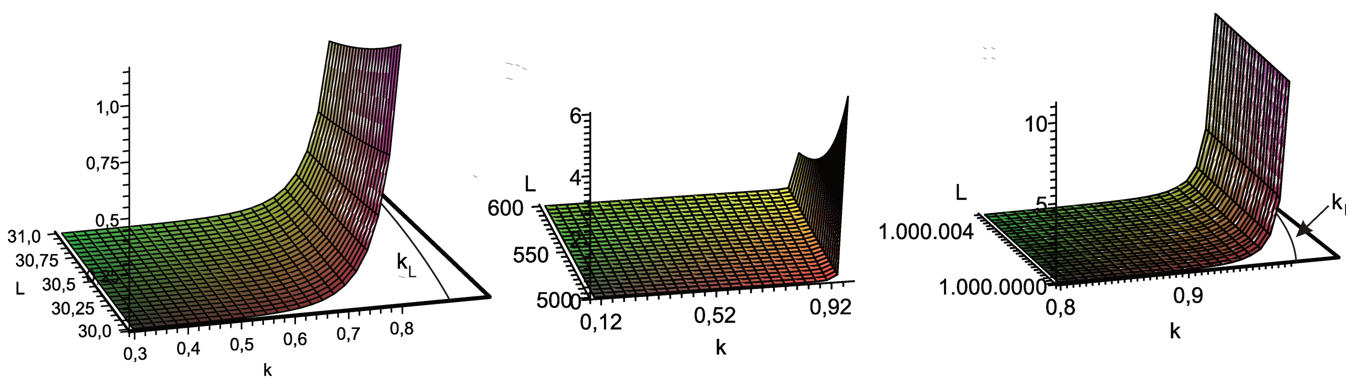

Figura 3.12: Gráficos de $(k, L) \mapsto n(k, L)$ com $L \in (30, 31)$, $L \in (500, 600)$ e $L \in (1000000, 1000004)$, respectivamente.

Consideraremos também $\rho(u, \phi_k)$ definido por

$$\rho(u, \phi_k) := \inf_{r\in\mathbb{R}} \|u - \phi_k(\cdot + r)\|_{H^1_{per}},$$

como sendo a distância de u até a órbita de ϕ_k e Σ_k como sendo a variedade

$$\Sigma_k := \{u \in H^1_{per}([0, L]), \text{ tal que } M_k(u) = M_k(\phi_k)\}.$$

Lema 3.12. *Existem $\varepsilon > 0$ e uma aplicação $\omega : U_\varepsilon(\phi_k) \longmapsto \mathbb{R}$, de classe C^1, tal que para todo $u \in U_\varepsilon(\phi_k)$,*

$$(u(\cdot + \omega(u)), \phi_k') = 0.$$

Demonstração: A demonstração deste lema, que é conhecido como condição de compatibilidade, pode ser encontrada no Lema 4.1 em [27]. Aqui, desenvolvemos a demostração com o objetivo de mostrar todos os seus detalhes. A demonstração consiste de uma aplicação do Teorema da Função Implícita sobre o funcional

$$G(u,\omega)=\int_0^L u(x+\omega)\phi_k'(x)dx,$$

onde $(u,\omega)\in H^1_{per}\times\mathbb{R}$. Como $G(\phi_k,0)=0$ e

$$\partial_\omega G(\phi_k,0)=\|\phi_k'\|^2\neq 0,$$

pelo Teorema da Função Implícita, temos que existe uma única curva $\omega(u)$, de classe C^1, tal que

$$G(u,\omega(u))=0,\qquad \text{para todo } u\in B_\varepsilon(\phi_k).$$

Agora, precisamos estender ω para todo U_ε. Note que, se $u\in B_\varepsilon(\phi_k)$ e $\eta\in\mathbb{R}$ é tal que $\tau_\eta u := u(\cdot+\eta)\in B_\varepsilon(\phi_k)$, então

$$\begin{aligned}0 &= G(u,\omega(u))=\int_0^L u(x+\omega(u))\phi_k'(x)dx=\int_0^L u(x+\omega(u)+\eta-\eta)\phi_k'(x)dx\\ &=\int_0^L \tau_\eta u(x+\omega(u)-\eta)\phi_k'(x)dx=G(\tau_\eta u,\omega(u)-\eta).\end{aligned}$$

Como $\tau_\eta u\in B_\varepsilon(\phi_k)$, por unicidade temos que

$$\omega(\tau_\eta u)=\omega(u)-\eta. \tag{3.85}$$

Por outro lado, se $u\in U_\varepsilon$, então para algum $s_0>0$, temos que $\|u-\tau_{s_0}\phi_k\|_{H^1_{per}}<\varepsilon$. Portanto, para $u\in U_\varepsilon$, basta definirmos a extensão para ω,

$$\tilde{\omega}(u):=\omega(\tau_{-s_0}u)-s_0. \tag{3.86}$$

Mostremos agora, que esta definição não depende de s_0. De fato, se para algum outro s_1, temos $\|u-\tau_{s_1}\phi_k\|_{H^1_{per}}<\varepsilon$, então $\tau_{-s_1}u\in B_\varepsilon(\phi_k)$. Além disso, como $\|u-\tau_{s_0}\phi_k\|_{H^1_{per}}<\varepsilon$, temos também que $\tau_{-s_0}u\in B_\varepsilon(\phi_k)$. Assim, de (3.85), obtemos

$$\omega(\tau_{-s_1}u)-s_1=\omega(\tau_{s_0-s_1}\tau_{-s_0}u)-s_1=\omega(\tau_{-s_0}u)-(s_0-s_1)-s_1=\omega(\tau_{-s_0}u)-s_0.$$

Finalmente, se $u \in U_\varepsilon$, então existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\tau_{-s}u \in B_\varepsilon(\phi_k)$ e $G(\tau_{-s}u, \omega(\tau_{-s}u)) = 0$. Daí, usando (3.85) e (3.86), vemos que

$$\begin{aligned} 0 &= G(\tau_{-s}u, \omega(\tau_{-s}u)) = \int_0^L \tau_{-s}u(x + \omega(\tau_{-s}u))\phi_k'(x)dx \\ &= \int_0^L u(x + \omega(\tau_{-s}u) - s)\phi_k'(x)dx = \int_0^L u(x + \tilde{\omega}(u))\phi_k'(x)dx \\ &= G(u, \tilde{\omega}(u)). \end{aligned}$$

□

No lema a seguir, cuja demonstração é uma adaptação do Lema 7.8 em [8], exibiremos um subconjunto de H^1_{per} onde o operador $\mathcal{L}_k$ é positivo definido. Note que, neste lema a propriedade P_3 aparece como elemento principal da demonstração.

Lema 3.13. *Considerando as propriedades P_0 até P_3, em (3.7), e o conjunto*

$$\mathcal{A} = \left\{\psi \in H^1_{per}; (\psi, M_k'(\phi_k)) = (\psi, \phi_k') = 0\right\},$$

existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\langle \mathcal{L}_k\psi, \psi\rangle \geq C\|\psi\|_1^2, \quad \forall\psi \in \mathcal{A}.$$

Demonstração: Primeiro, provaremos que

$$inf\{\langle \mathcal{L}_k\psi, \psi\rangle; \psi \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}\} =: \zeta > 0,$$

onde

$$\mathcal{S} = \{\psi \in \mathcal{A}, \quad \text{tal que} \quad (\psi, \psi) = 1\}$$

Como $\mathcal{L}_k$ é um operador linear, autoadjunto, fechado, ilimitado, definido em um domínio denso em L^2_{per} e goza das propriedades espectrais P_1, P_2 e (3.54), temos pelo Teorema da Decomposição Espectral, cf. [44] pg. 178,

$$L^2_{per} = [\xi_k] \oplus [\phi_k'] \oplus P,$$

onde $\xi_k \in D(\mathcal{L}_k)$, satisfaz $\|\xi_k\| = 1$ e $\mathcal{L}_k(\xi_k) = -\lambda^2\xi_k$ com $\lambda > 0$. O subespaço $P_k := D(\mathcal{L}_k) \cap P$ é chamado de subespaço positivo de $\mathcal{L}_k$ e como pela teoria Floquet existe $\gamma > 0$ tal que todo autovalor λ_z não negativo e não nulo de $\mathcal{L}_k$ satisfaz $\lambda_z > \gamma$, temos por [44], pg. 278, que existe uma constante $\eta > 0$ tal que

$$\langle \mathcal{L}_k p, p\rangle \geq \eta\|p\|^2 \quad \forall p \in P_k.$$

Consideremos agora a decomposição espectral da função $\dfrac{\partial \phi_k}{\partial k}$, isto é,

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial k} = a_0 \xi_k + b_0 \phi_k' + p_0,$$

onde $p_0 \in P_k$ e a_0, $b_0 \in \mathbb{R}$. Note que, de fato $p_0 \in P_k$, pois $\dfrac{\partial \phi_k}{\partial k}$, ξ_k e ϕ_k' pertencem a $D(\mathcal{L}_k)$. Como $\phi_k' \in Ker(\mathcal{L}_k)$, temos

$$\langle \mathcal{L}_k p_0, p_0 \rangle = \left\langle \mathcal{L}_k \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial k} - a_0 \xi_k - b_0 \phi_k' \right), \frac{\partial \phi_k}{\partial k} - a_0 \xi_k - b_0 \phi_k' \right\rangle = \left\langle \mathcal{L}_k \frac{\partial \phi_k}{\partial k} + a_0 \lambda^2 \xi_k, \frac{\partial \phi_k}{\partial k} - a_0 \xi_k - b_0 \phi_k' \right\rangle,$$

isto é,

$$\langle \mathcal{L}_k p_0, p_0 \rangle = \left\langle \frac{\partial \phi_k}{\partial k}, \mathcal{L}_k \frac{\partial \phi_k}{\partial k} \right\rangle + 2a_0^2 \lambda^2 - a_0^2 \lambda^2 = \left\langle \frac{\partial \phi_k}{\partial k}, \mathcal{L}_k \frac{\partial \phi_k}{\partial k} \right\rangle + a_0^2 \lambda^2.$$

Portanto, usando a propriedade P_3, obtemos que $\langle \mathcal{L}_k p_0, p_0 \rangle < a_0^2 \lambda^2$.

Considerando agora, $\psi \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$, podemos escrever $\psi = a\xi_k + p$, onde $p \in P$. Além disso, como $\psi \in H^1_{per}$ e $\xi_k \in D(\mathcal{L}_k) \subset H^1_{per}$, temos que $p \in H^1_{per}$. Desta maneira, usando que $\mathcal{L}_k \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial k}\right) = -M_k'(\phi_k)$, temos

$$0 = -\langle M_k'(\phi_k), \psi \rangle = \left\langle \mathcal{L}_k \frac{\partial \phi_k}{\partial k}, \psi \right\rangle = \langle -a_0 \lambda^2 \xi_k + \mathcal{L}_k p_0, a\xi_k + p \rangle = -a_0 a \lambda^2 + \langle \mathcal{L}_k p_0, p \rangle.$$

Assim, como $\langle \mathcal{L}_k p, \xi_k \rangle = \langle p, \mathcal{L}_k \xi_k \rangle = -\lambda^2 \langle p, \xi_k \rangle = 0$, obtemos

$$\langle \mathcal{L}_k \psi, \psi \rangle = -a^2 \lambda^2 + \langle \mathcal{L}_k p, p \rangle \geq -a^2 \lambda^2 + \frac{|\langle \mathcal{L}_k p_0, p \rangle|^2}{\langle \mathcal{L}_k p_0, p_0 \rangle} > -a^2 \lambda^2 + \frac{(a_0 a \lambda^2)^2}{a_0^2 \lambda^2} = 0, \tag{3.87}$$

onde usamos que a função $\Phi(f, g) := \langle \mathcal{L}_k f, g \rangle$, definida para f, $g \in H^1_{per} \cap P$, é uma forma sesquilinear não negativa em P. Note que, para todo $r \in \mathbb{R}$ e f, $g \in H^1_{per} \cap P$,

$$\langle \mathcal{L}_k (rf - g), rf - g \rangle \geq \eta \|rf - g\|^2 \geq 0.$$

Daí,

$$r^2 \langle \mathcal{L}_k f, f \rangle - 2r \langle \mathcal{L}_k f, g \rangle + \langle \mathcal{L}_k g, g \rangle \geq 0, \ \ \forall r \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$|\Phi(f, g)|^2 \leq \langle \mathcal{L}_k f, f \rangle \langle \mathcal{L}_k g, g \rangle.$$

Note também, que podemos assumir, sem perda de generalidade, que $p_0 \neq 0$. Com efeito, supondo que $p_0 = 0$, temos que $-a_0 \lambda^2 \xi_k = \mathcal{L}_k \left(\dfrac{\partial \phi_k}{\partial k} \right) = -M_k'(\phi_k) \neq 0$ e $0 = \mathcal{L}_k(p_0, p) = a_0 a \lambda^2$. Porém, isto implica que $a = 0$. Logo, $\psi = p$ e daí (3.87) ocorre.

A desigualdade (3.87), por sua vez, nos permite concluir que $\zeta \geq 0$.

Provaremos agora, que $\zeta > 0$. Para isso, suponha que $\zeta = 0$. Assim, existe uma sequência $\{\psi_n\} \subset \mathcal{A}$ tal que, $\langle \mathcal{L}_k \psi_n, \psi_n \rangle \longrightarrow 0$. Daí, escrevendo $\psi_n = a_n \xi_k + p_n$, com $p_n \in P$ e $\langle \mathcal{L}_k p_n, p_0 \rangle = a_0 a_n \lambda^2$, obtemos de (3.87), que

$$\langle \mathcal{L}_k \psi_n, \psi_n \rangle \geq -a_n^2 \lambda^2 + a_n^2 \frac{a_0^2 \lambda^4}{\langle \mathcal{L}_k p_0, p_0 \rangle} = a_n^2 \left(\frac{a_0^2 \lambda^4}{\langle \mathcal{L}_k p_0, p_0 \rangle} - \lambda^2 \right) > 0.$$

Esta última desigualdade aliada ao fato que $\langle \mathcal{L}_k \psi_n, \psi_n \rangle \longrightarrow 0$, implica que $a_n^2 \longrightarrow 0$. Logo, $\langle \mathcal{L}_k p_n, p_n \rangle \longrightarrow 0$ e como $\langle \mathcal{L}_k p_n, p_n \rangle \geq \eta \|p_n\|^2$, onde η não depende de n, temos $\|p_n\| \longrightarrow 0$. Dessa maneira,

$$1 = \|\psi_n\|^2 = a_n^2 \|\xi_k\|^2 + \|p_n\|^2 \longrightarrow 0,$$

o que é uma contradição.

Agora, se $\psi \in \mathcal{A}$, então $\dfrac{\psi}{\|\psi\|} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. Daí,

$$\left\langle \mathcal{L}_k \left(\frac{\psi}{\|\psi\|} \right), \frac{\psi}{\|\psi\|} \right\rangle \geq \zeta,$$

ou seja,

$$\langle \mathcal{L}_k \psi, \psi \rangle \geq \zeta \|\psi\|^2. \tag{3.88}$$

Finalmente, usando a forma especifica do operador $\mathcal{L}_k$, isto é, $\mathcal{L}_k = -\partial_x^2 + q_k(x)$, vemos que para qualquer $b > 0$,

$$\begin{aligned}
\|\psi\|^2 + b\|\psi'\|^2 &\leq \frac{1}{\zeta} \langle \mathcal{L}_k \psi, \psi \rangle + b\|\psi'\|^2 \\
&= \frac{1}{\zeta} \langle \mathcal{L}_k \psi, \psi \rangle + b \int_0^L (\psi'(x))^2 + q_k(x) \psi^2(x) dx - b \int_0^L q_k(x) \psi^2(x) dx \\
&= \left(\frac{1}{\zeta} + b \right) \langle \mathcal{L}_k \psi, \psi \rangle - b \int_0^L q_k(x) \psi^2(x) dx \\
&\leq \left(\frac{1}{\zeta} + b \right) \langle \mathcal{L}_k \psi, \psi \rangle + b \|q_k\|_\infty \|\psi\|^2.
\end{aligned}$$

Escolhendo $b > 0$, tal que $(1 - b\|q_k\|_\infty) > 0$, obtemos

$$(1 - b\|q_k\|_\infty) \|\psi\|^2 + b\|\psi'\|^2 \leq \left(\frac{1}{\zeta} + b \right) \langle \mathcal{L}_k \psi, \psi \rangle.$$

Esta desigualdade, permite substituir a norma L^2_{per} do lado direito de (3.88) pela norma H^1_{per}, o que completa a prova do lema. □

No próximo lema provaremos que ϕ_k é um mínimo local para o funcional F_k, restrito ao vínculo M_k. Ressaltamos, que na demonstração do lema a seguir, seguimos em alguns momentos, o espírito da demonstração do Lema 4.6 em [43].

Lema 3.14. *Fixe $k \in (0, k_L)$ e seja F_k o funcional conservado definido em* (3.84)*. Então, existem $\varepsilon > 0$ e uma constante $C = C(\varepsilon)$ tais que*

$$F_k(u) - F_k(\phi_k) \geq C\rho(u, \phi_k)^2, \tag{3.89}$$

para todo $u \in U_\varepsilon(\phi_k)$ que satisfaz $M_k(u) = M_k(\phi_k)$.

Demonstração: Como F_k é invariante por translações, temos que $F_k(u) = F_k(u(\cdot + r))$, para todo $r \in \mathbb{R}$. Assim, é suficiente mostrarmos que

$$F_k(u(\cdot + \omega(u))) - F_k(\phi_k) \geq C\rho(u, \phi_k)^2,$$

onde ω é dado no Lema 3.12. Neste lema, u é visto como função apenas da variável espacial x, de tal modo que estas translações são nesta variável.

Fixando $u \in H^1_{per} \cap \Sigma_k$ e usando o Lema 3.12, temos que existe uma constante $C_1 \in \mathbb{R}$ tal que,

$$v := u(\cdot + \omega(u)) - \phi_k = C_1 M_k'(\phi_k) + y,$$

onde $y \in \mathcal{T}_k = \{M_k'(\phi_k)\}^\perp \cap \{\phi_k'\}^\perp$. Note que, estando u em U_ε, podemos assumir a menos de uma translação em ϕ_k, que $v = u(\cdot + \omega(u)) - \phi_k$ satisfaz $\|v\|_1 < \varepsilon$.

Mostraremos inicialmente que $C_1 = O(\|v\|^2)$. De fato, usando que M_k é invariante por translações e a Fórmula de Taylor, obtemos

$$M_k(u) = M_k(u(\cdot + \omega(u))) = M_k(\phi_k) + \langle M_k'(\phi_k), v\rangle + O(\|v\|^2). \tag{3.90}$$

Por outro lado, como $y \in \mathcal{T}_k$, temos que $\langle M_k'(\phi_k), y\rangle = 0$ e assim

$$\langle M_k'(\phi_k), v\rangle = \langle M_k'(\phi_k), C_1 M_k'(\phi_k) + y\rangle = C_1\langle M_k'(\phi_k), M_k'(\phi_k)\rangle = C_1 N, \tag{3.91}$$

onde N é uma constante que depende apenas de k e L. Portanto, como $M_k(u) = M_k(\phi_k)$, temos por (3.90) e (3.91) que

$$C_1 = O(\|v\|^2). \tag{3.92}$$

Agora, como $\phi_k \neq 0$ e F_k é suficientemente regular longe de zero, podemos fazer o desenvolvimento de Taylor de F_k no ponto $u(\cdot + \omega(u)) = \phi_k + v$, ou seja,

$$F_k(u) = F_k(u(\cdot + \omega(u))) = F_k(\phi_k) + \langle F_k'(\phi_k), v\rangle + \frac{1}{2}\langle F_k''(\phi_k)v, v\rangle + o(\|v\|^2).$$

Ademais, como $F_k'(\phi_k) = 0$ e $F_k''(\phi_k) = \mathcal{L}_k$, segue que

$$F_k(u) - F_k(\phi_k) = \frac{1}{2}\langle \mathcal{L}_k v, v\rangle + o(\|v\|^2). \tag{3.93}$$

Paralelo a isto, como $v = C_1 M_k'(\phi_k) + y$, vemos que

$$\langle \mathcal{L}_k v, v\rangle = C_1^2\langle \mathcal{L}_k M_k'(\phi_k), M_k'(\phi_k)\rangle + 2C_1\langle \mathcal{L}_k M_k'(\phi_k), y\rangle + \langle \mathcal{L}_k y, y\rangle.$$

Além disso, como $C_1 = O(\|v\|^2)$,

$$|C_1^2\langle \mathcal{L}_k M_k'(\phi_k), M_k'(\phi_k)\rangle| \leq C_2\|v\|^4$$

e

$$\begin{aligned} |2C_1\langle \mathcal{L}_k M_k'(\phi_k), y\rangle| &\leq 2|C_1|\|\mathcal{L}_k M_k'(\phi_k)\|\|y\| \\ &\leq 2|C_1|\|\mathcal{L}_k M_k'(\phi_k)\|\left(\|y + C_1 M_k'(\phi_k)\| + \|C_1 M_k'(\phi_k)\|\right) \\ &= 2|C_1|\|\mathcal{L}_k M_k'(\phi_k)\|\left(\|v\| + \|C_1 M_k'(\phi_k)\|\right) \\ &\leq C_3\|v\|^3 + C_4\|v\|^4. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$\langle \mathcal{L}_k v, v\rangle = \langle \mathcal{L}_k y, y\rangle + o(\|v\|^2). \tag{3.94}$$

Daí, de (3.93) e (3.94), obtemos

$$F_k(u) - F_k(\phi_k) = \frac{1}{2}\langle \mathcal{L}_k y, y\rangle + o(\|v\|^2).$$

Além disso, como $y \in \mathcal{T}_k$, temos que $y \in \mathcal{A}$ e assim podemos aplicar o Lema 3.13 e obtermos

$$\langle \mathcal{L}_k y, y\rangle \geq C\|y\|_1^2.$$

Desta maneira,

$$F_k(u) - F_k(\phi_k) \geq C\|y\|_1^2 + o(\|v\|^2). \tag{3.95}$$

Nosso objetivo agora, é mostrar que

$$\|y\|_1^2 \geq \|v\|_1^2 + o(\|v\|_1^2). \tag{3.96}$$

Com efeito, como $v = C_1 M_k'(\phi_k) + y$ temos

$$\|v\|_1 \leq \|C_1 M_k'(\phi_k)\|_1 + \|y\|_1$$

e daí,

$$\|y\|_1 \geq -\|C_1 M_k'(\phi_k)\|_1 + \|v\|_1. \tag{3.97}$$

Também, como $\|C_1 M_k'(\phi_k)\| = O(\|v\|^2)$, temos

$$\|C_1 M_k'(\phi_k)\| \leq C\|v\|^2 \leq C\|v\|_1^2$$

o que implica que

$$-\|C_1 M_k'(\phi_k)\|_1 \geq -C\|v\|_1^2. \tag{3.98}$$

Agrupando (3.97) e (3.98), encontramos

$$\|y\|_1 \geq \|v\|_1 - C\|v\|_1^2.$$

Logo, para $\|v\|_1$ suficientemente pequeno, temos $\|y\|_1 \geq \|v\|_1 - C\|v\|_1^2 > 0$, que elevado ao quadrado, nos fornece

$$\|y\|_1^2 \geq \|v\|_1^2 - 2C\|v\|_1^3 + C^2\|v\|_1^4 = \|v\|_1^2 + o(\|v\|_1^2).$$

Isto assegura o afirmado em (3.96).

Finalmente, de (3.95) e (3.96), constatamos que

$$F_k(u) - F_k(\phi_k) \geq C\|v\|_1^2 + o(\|v\|_1^2) + o(\|v\|^2) = C\|v\|_1^2 + o(\|v\|_1^2).$$

Ademais, para $\|v\|_1$ suficientemente pequeno,

$$C\|v\|_1^2 + o(\|v\|_1^2) \geq C\|v\|_1^2 - \varepsilon\|v\|_1^2.$$

Esta última desigualdade implica que existe um $\varepsilon > 0$, tal que $C(\varepsilon) := C - \varepsilon > 0$. Portanto,

$$F_k(u) - F_k(\phi_k) \geq C(\varepsilon)\|v\|_1^2 \geq C(\varepsilon)\rho(u, \phi_k)^2.$$

□

Finalmente, estamos em condições de provar nosso teorema principal.

Teorema 3.15. *Para cada $k \in (0, k_L)$, a onda viajante periódica $\phi_k(x - c(k)t)$, com ϕ_k dada em* (3.53) *e $c(k)$ dado em* (3.45)*, é orbitalmente estável pelo fluxo da equação* (3.1) *em $H^1_{per}([0, L])$.*

Demonstração: Suponhamos que ϕ_k seja H^1_{per}-instável. Assim, podemos escolher dados iniciais $w_n := u_n(0) \in U_{\frac{1}{n}}$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\rho(w_n, \phi_k) \to 0, \quad \text{mas} \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \rho(u_n(t), \phi_k) \geq \varepsilon,$$

onde $u_n(t)$ é a solução da equação (3.1) com dado inicial w_n. Aqui, escolheremos o $\varepsilon > 0$ do Lema 3.14. Por continuidade em t, podemos escolher também, o primeiro tempo t_n, tal que

$$\rho(u_n(t_n), \phi_k) = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.99}$$

Nossa estratégia será obter uma contradição com a igualdade (3.99). Para isso, definamos a função f_n,

$$f_n(\alpha) = M_k(\alpha u_n(t_n)) = \alpha^2 \frac{\partial c}{\partial k} \int_0^L |u_n(t_n)|^2 + |u_n'(t_n)|^2 dx + \alpha \frac{\partial A}{\partial k} \int_0^L u_n(t_n) dx =: \alpha^2 a_n + \alpha b_n.$$

Note que, como $f_n(0) = 0$, $\frac{\partial c}{\partial k} \int_0^L |u_n(t_n)|^2 + |u_n'(t_n)|^2 dx > 0$ e $M_k(\phi_k) > 0$, temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\alpha_n > 0$ tal que $f_n(\alpha_n) = M_k(\phi_k)$. Devido a extensa expressão de $M_k(\phi_k)$ recorremos ao recurso computacional para concluir que $M_k(\phi_k) > 0$ (ver Figura 3.13). A Figura 3.14 ilustra o comportamento da função f_n.

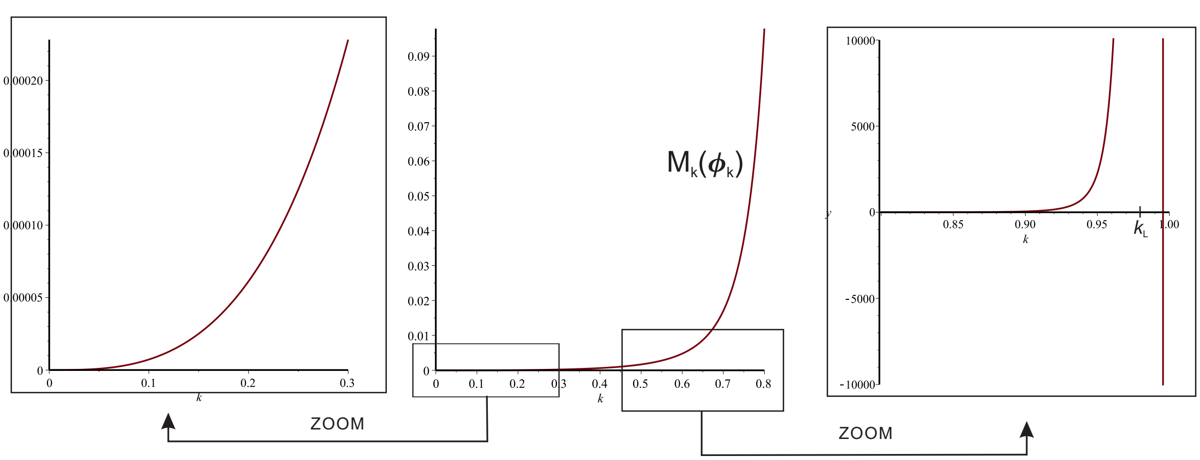

Figura 3.13: Gráfico de $k \mapsto M_k(\phi_k)$.

Daí, existe uma sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$M_k(\alpha_n u_n(t_n)) = M_k(\phi_k), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.100}$$

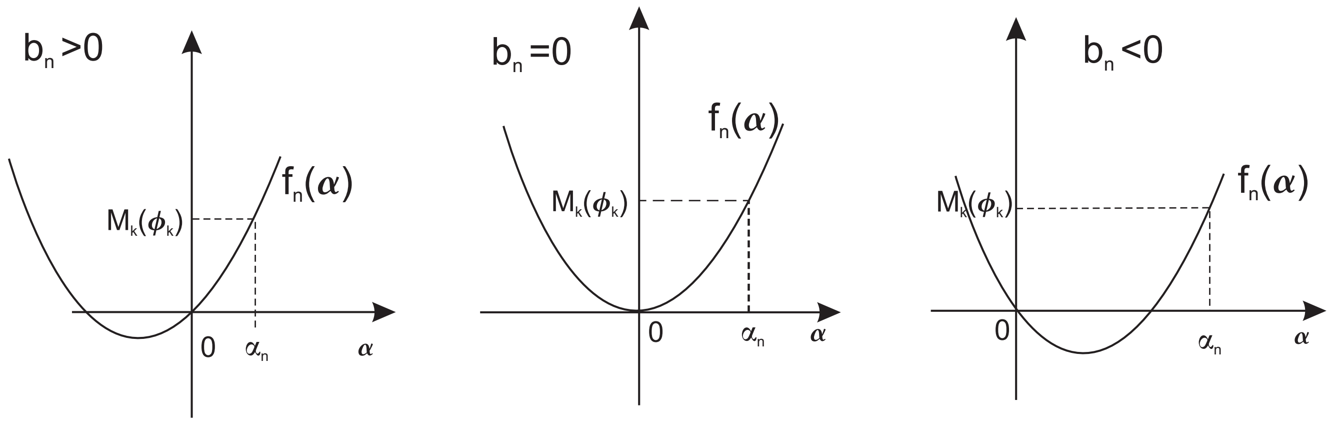

Figura 3.14: Gráfico de $f_n(\alpha)$ nos casos $b_n > 0$, $b_n = 0$ e $b_n < 0$, respectivamente.

Portanto, construímos uma sequência $(\alpha_n u_n(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ que está contida na variedade Σ_k. Esta sequência será o ingrediente principal para obtermos uma contradição.

O próximo passo, será mostrar que a sequência real $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, admite ao menos uma subsequência que converge a 1.

Para facilitar as notações, denotaremos

$$Q_k := \frac{\partial c}{\partial k}Q \quad \text{e} \quad V_k := \frac{\partial A}{\partial k}V.$$

Usando a continuidade de Q e V, temos

$$\begin{aligned} &Q_k(w_n) \longrightarrow Q_k(\phi_k) =: a,\\ &V_k(w_n) \longrightarrow V_k(\phi_k) =: b,\\ &M_k(w_n) \longrightarrow M_k(\phi_k) \end{aligned} \tag{3.101}$$

e como Q e V são conservados,

$$\begin{aligned} \varrho &:= |\alpha_n^2 Q_k(w_n) + \alpha_n V_k(w_n) - (Q_k(w_n) + V_k(w_n))|\\ &= |\alpha_n^2 Q_k(u_n(t_n)) + \alpha_n V_k(u_n(t_n)) - (Q_k(w_n) + V_k(w_n))|\\ &= |Q_k(\alpha_n u_n(t_n)) + V_k(\alpha_n u_n(t_n)) - (Q_k(w_n) + V_k(w_n))|\\ &= |M_k(\alpha_n u_n(t_n)) - M_k(w_n)| \longrightarrow 0, \quad (n \to \infty). \end{aligned} \tag{3.102}$$

Dessa maneira, usando (3.100) e (3.101), podemos verificar que

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\alpha_n^2 Q_k(w_n) + \alpha_n V_k(w_n) - (a+b)|\\ &\leq |\alpha_n^2 Q_k(w_n) + \alpha_n V_k(w_n) - (Q_k(w_n) + V_k(w_n))|\\ &\quad + |(Q_k(w_n) + V_k(w_n)) - (a+b)|\\ &\leq \varrho + |Q_k(w_n) - a| + |V_k(w_n) - b| \longrightarrow 0, \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Daí, concluímos que

$$z_n := \alpha_n^2 Q_k(w_n) + \alpha_n V_k(w_n) \longrightarrow a + b, \quad (n \to \infty). \tag{3.103}$$

Por outro lado, se supormos que a sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada, obtemos ao menos uma subsequência tal que

$$z_n = \alpha_n(\alpha_n Q_k(w_n) + V_k(w_n)) \longrightarrow +\infty, \quad (n \to \infty),$$

pois, $Q_k(w_n) > 0$, $Q_k(w_n)$ e $V_k(w_n)$ são limitados e $\alpha_n > 0$ por construção. Porém, isto é uma contradição com (3.103).

Portanto, a sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e então admite uma subsequência convergente,

$$\alpha_n \longrightarrow \alpha_0, \quad (n \to \infty).$$

Continuaremos denotando essa subsequência por $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Além disso, de (3.103) temos que

$$\alpha_0^2 a + \alpha_0 b = a + b,$$

isto é,

$$(1 - \alpha_0)[(1 + \alpha_0)a + b] = 0.$$

Logo,

$$\alpha_0 = 1 \quad \text{ou} \quad \alpha_0 = -\frac{b+a}{a} = -\left(\frac{b}{a} + 1\right).$$

Observe que obteremos $\alpha_0 = 1$ se mostrarmos que $\dfrac{b}{a} + 1 > 0$, pois por construção, sabemos que α_0 é sempre maior ou igual a zero. De fato, como $M_k(\phi_k) > 0$, temos

$$M_k(\phi_k) = \frac{\partial c}{\partial k} Q(\phi_k) + \frac{\partial A}{\partial k} V(\phi_k) > 0. \tag{3.104}$$

Além disso, como $c(k)$ é crescente e $Q(\phi_k) > 0$, podemos dividir (3.104) por $\frac{\partial c}{\partial k} Q(\phi_k)$ e obter

$$1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{\frac{\partial A}{\partial k} V(\phi_k)}{\frac{\partial c}{\partial k} Q(\phi_k)} > 0.$$

Portanto, $\alpha_0 = 1$.

Verificamos assim, que a sequência real $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite ao menos uma subsequência que converge para 1.

Agora, usaremos a sequência $(\alpha_n u_n(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ e suas propriedades, para provarmos duas afirmações que implicam em uma contradição com (3.99).

Afirmação 1: $\rho(u_n(t_n), \alpha_n u_n(t_n)) \longrightarrow 0$, quando $n \to \infty$.

De fato,

$$\begin{aligned} \rho(u_n(t_n), \alpha_n u_n(t_n)) &= \inf_{r\in\mathbb{R}} \|u_n(\cdot, t_n) - \alpha_n u_n(\cdot + r, t_n)\|_1 \\ &\leq \|u_n(t_n) - \alpha_n u_n(t_n)\|_1 = |(1-\alpha_n)|\|u_n(t_n)\|_1. \end{aligned} \tag{3.105}$$

Por outro lado, como $\rho(u_n(t_n), \phi_k) = \dfrac{\varepsilon}{2}$, temos que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|u_n(t_n)\|_1 \leq \|u_n(t_n) - \phi_k(\cdot + r)\|_1 + \|\phi_k(\cdot + r)\|_1 < \varepsilon + \|\phi_k(\cdot + r)\|_1 = C.$$

Em outras palavras, podemos dizer que $\|u_n(t_n)\|_1$ é limitada. Portanto, como $\alpha_n \longrightarrow 1$, temos de (3.105), que

$$\rho(u_n(t_n), \alpha_n u_n(t_n)) \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

o que mostra a Afirmação 1.

Afirmação 2: $\rho(\alpha_n u_n(t_n), \phi_k) \longrightarrow 0$, quando $n \to \infty$.

Com efeito, a partir da Afirmação 1 e de (3.99), obtemos que

$$\rho(\alpha_n u_n(t_n), \phi_k) \leq \rho(\alpha_n u_n(t_n), u_n(t_n)) + \rho(u_n(t_n), \phi_k) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{5\varepsilon}{6} < \varepsilon,$$

para n suficientemente grande. Em outras palavras, para n grande, temos que $\alpha_n u_n(t_n) \in U_\varepsilon(\phi_k)$. Além disso, já vimos em (3.100) que $\alpha_n u_n(t_n) \in \Sigma_k$. Estes dois fatos, nos dizem que $\alpha_n u_n(t_n) \in \Sigma_k \cap U_\varepsilon(\phi_k)$. Portanto, usando o Lema 3.14, a continuidade de F_k e a limitação de $(\alpha_n u_n(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$, obtemos

$$\begin{aligned} \rho(\alpha_n u_n(t_n), \phi_k)^2 &\leq C|F_k(\alpha_n u_n(t_n)) - F_k(\phi_k)| \\ &\leq C|F_k(\alpha_n u_n(t_n)) - F_k(u_n(t_n))| + C|F_k(u_n(t_n)) - F_k(\phi_k)| \\ &= C|F_k(\alpha_n u_n(t_n)) - F_k(u_n(t_n))| + C|F_k(w_n) - F_k(\phi_k)| \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Isto mostra a Afirmação 2.

Finalmente, usando as Afirmações 1 e 2, concluímos que

$$\frac{\varepsilon}{2} = \rho(u_n(t_n), \phi_k) \leq \rho(u_n(t_n), \alpha_n u_n(t_n)) + \rho(\alpha_n u_n(t_n), \phi_k) \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

o que é uma contradição.

$\square$

Capítulo 4

Estabilidade de Ondas Viajantes para modificada KdV

A equação KdV modificada (mKdV) tem sido objeto de estudo de muitos autores, conforme vimos na introdução, e muitos resultados de estabilidade já foram obtidos. Contudo, em nenhum dos trabalhos, o qual temos conhecimento, foi mencionado a estabilidade da onda viajante periódica,

$$\phi_k(\xi) = \alpha \frac{DN^2(\gamma\xi, k)}{1 + \beta SN^2(\gamma\xi, k)}.$$

Relembrando, a equação mKdV é dada por

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \tag{4.1}$$

e as ondas viajantes periódicas são aquelas soluções da forma $u(x,t) = \phi(x - ct)$, com ϕ periódica. Neste contexto, ϕ satisfaz a EDO

$$\phi'' - c\phi + 2\phi^3 - A = 0, \tag{4.2}$$

onde A é uma constante de integração.

A onda viajante que explicitamos acima é obtida no caso $A \neq 0$ e justamente nesse ponto as teorias para estabilidade envolvendo a forma explícita da onda viajante, no caso da mKdV, não eram aplicáveis. Nossa teoria visa abordar esta situação.

Em geral, a estratégia para obter soluções de (4.2) é utilizar o método da quadratura. Multiplicando (4.2) por ϕ' e integrando, obtemos

$$(\phi')^2 = -\phi^4 + c\phi^2 + 2A\phi + B,$$

onde B é outra constante de integração. Ou ainda,

$$(\phi')^2 = P(\phi), \tag{4.3}$$

com $P(\phi) = -\phi^4 + c\phi^2 + 2A\phi + B$.

Observe que, quando $A = 0$, o polinômio $P(\phi)$ se torna par. Dessa maneira, se assumirmos que P admite raízes reais, ele pode possuir quatro raízes reais ou duas raízes reais e duas complexas, sendo estas raízes simétricas. Estes dois casos foram estudados em [14], [30] e [5]. Em [14], Angulo obteve uma solução do tipo $\phi(x) = a\mathrm{DN}(ax; k)$, o qual ele provou ser orbitalmente estável. Já em [30] e [5], os autores obtiveram solução do tipo $\phi(x) = b\mathrm{CN}(\beta x; k)$ o qual provaram ser orbitalmente instável.

Para obtermos um resultado de estabilidade para uma curva de soluções da equação (4.1), no caso $A \neq 0$, usaremos as técnicas desenvolvidas por Grillakis, Shatah e Strauss em [36], fazendo contudo, as adaptações necessárias. Para isso, consideraremos as quantidades conservadas

$$E(u) = \int_0^L \left(\frac{u_x^2}{2} - \frac{u^4}{2} \right) dx, \quad Q(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2(x) dx \;\text{ e }\; V(u) = \int_0^L u dx. \tag{4.4}$$

Desse modo, podemos definir o funcional conservado

$$F_{(c,A)} = E(u) + cQ(u) + AV(u), \tag{4.5}$$

cujos pontos críticos, são soluções da equação (4.2). Na verdade, temos que a equação de Euler-Lagrange

$$E'(u) + cQ'(u) + AV'(u) = 0, \tag{4.6}$$

coincide com a equação (4.2). Temos também o operador

$$\mathcal{L}_{(c,A)}(y) := F''(\phi_{(c,A)})(y) = -y'' + cy - 6\phi^2 y. \tag{4.7}$$

Como no capítulo anterior, nossa estratégia para obter a estabilidade orbital, será provar que as condições citadas abaixo são verdadeiras e em seguida provar que elas implicam na estabilidade.

$$\begin{cases} (P_0) & \text{Existe uma curva suave não trivial de soluções periódicas para (4.2)} \\ & \text{da forma} \quad k \in J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \phi_{(c(k,L),A(k,L))} =: \phi_k \in H^2_{per}([0,L]), \text{ onde } J \\ & \text{é um intervalo a ser determinado,} \\ \\ (P_1) & \text{o operador linearizado } \mathcal{L}_{(c(k,L),A(k,L))} =: \mathcal{L}_k \text{ possui um único autovalor} \\ & \text{negativo o qual é simples,} \\ \\ (P_2) & \text{o autovalor 0 é simples e está associado com a autofunção } \phi_k', \\ \\ (P_3) & \Gamma := \left\langle \mathcal{L}_k\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial k}\right), \frac{\partial \phi_k}{\partial k} \right\rangle = -\left(M_k'(\phi_k), \frac{\partial \phi_k}{\partial k}\right) < 0, \text{ onde} \\ \\ & M_k(u) := \frac{\partial c}{\partial k} Q(u) + \frac{\partial A}{\partial k} V(u). \end{cases} \tag{4.8}$$

Nas próximas duas seções, provaremos a propriedade P_0. Na terceira, provaremos as propriedades espectrais do operador $\mathcal{L}_k$, ou seja, as propriedades P_1 e P_2 e finalmente, na ultima seção, provaremos a propriedade P_3 e o resultado de estabilidade.

4.1 Soluções explícitas por quadratura

Nesta seção, explicitaremos soluções para (4.2), com $A \neq 0$, usando o método da quadratura. Escrevendo o polinômio P, dado em (4.3), sob a forma

$$P(\phi) = (\phi - \alpha_1)(\phi - \alpha_2)(\phi - \alpha_3)(\alpha_4 - \phi),$$

obtemos o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2, + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 = -c, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 2A, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -B. \end{cases} \tag{4.9}$$

Assim, estudar as raízes do polinômio P se torna equivalente a estudar soluções para o sistema (4.9). Esta equivalência é útil, pois veremos que se o sistema (4.9) admite solução $S =$

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ com os α_i's reais, $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$ e $\alpha_1 \neq -\alpha_4$ ou $\alpha_2 \neq -\alpha_3$, então (4.3) admite solução, com $A \neq 0$. Mais precisamente, obteremos uma solução para (4.3) da forma

$$\phi = \frac{\alpha \mathrm{DN}^2}{\beta + \gamma \mathrm{SN}^2},$$

onde α, β e γ são constantes. A Figura 4.1 ilustra algumas possibilidades para o polinômio P, quando $A = 0$ e $A \neq 0$.

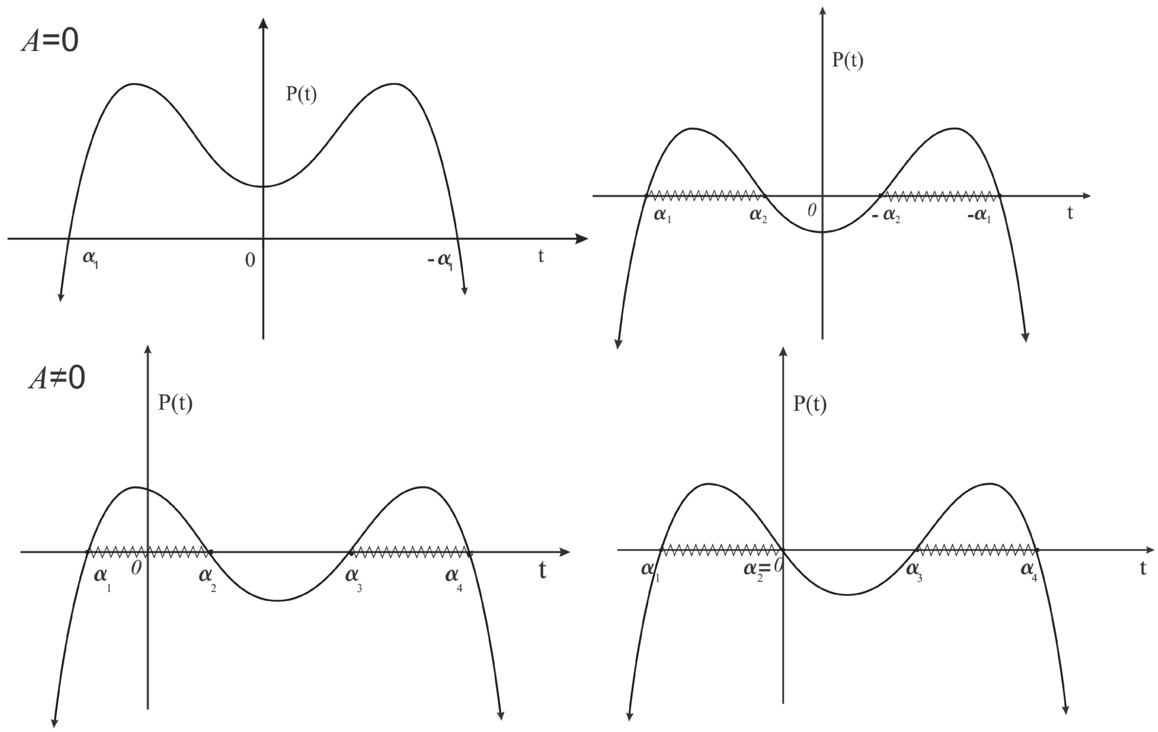

Figura 4.1: Possibilidades para o polinômio $P(t)$.

Suponhamos então que o sistema (4.9) admita tal solução. Note que, a equação (4.3), pode ser reescrita como

$$\frac{\phi'}{\sqrt{P(\phi)}} = 1.$$

Vamos procurar soluções tais que $\phi(0) = \alpha_4$ e $\phi(x) \in [\alpha_3, \alpha_4]$. Após integrar esta última equação de ξ a 0, temos

$$\int_{\xi}^{0} \frac{\phi'}{\sqrt{P(\phi)}} dx = -\xi.$$

Mudando de variável, segue que

$$\int_{\phi(\xi)}^{\alpha_4} \frac{dt}{\sqrt{(\alpha_4 - t)(t - \alpha_3)(t - \alpha_2)(t - \alpha_1)}} = -\xi.$$

Usando a fórmula 257.00 em [25], obtemos

$$-\xi = g\mathrm{SN}^{-1}(\mathrm{sen}(\varphi), k),$$

onde

$$g = \frac{2}{\sqrt{(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)}}, \quad k^2 = \frac{(\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_1)}{(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}(\varphi) = \sqrt{\frac{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \phi)}{(\alpha_4 - \alpha_3)(\phi - \alpha_1)}}.$$

Assim,

$$\mathrm{sen}(\varphi) = \mathrm{SN}\left(-\frac{\xi}{g}, k\right) = -\mathrm{SN}\left(\frac{\xi}{g}, k\right)$$

e portanto

$$\frac{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \phi)}{(\alpha_4 - \alpha_3)(\phi - \alpha_1)} = \mathrm{SN}^2\left(\frac{1}{g}\xi, k\right).$$

Isolando ϕ, vemos que

$$\phi(\xi) = \frac{\alpha_4(\alpha_3 - \alpha_1) + \alpha_1(\alpha_4 - \alpha_3)\mathrm{SN}^2\left(\frac{\xi}{g}, k\right)}{(\alpha_3 - \alpha_1) + (\alpha_4 - \alpha_3)\mathrm{SN}^2\left(\frac{\xi}{g}, k\right)}. \tag{4.10}$$

Portanto, se o sistema (4.9) admite solução $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, com os α_i's reais, $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$ e $\alpha_1 \neq -\alpha_4$ ou $\alpha_2 \neq -\alpha_3$, a função ϕ em (4.10) é uma solução periódica para a EDO (4.2), cujo período é dado por

$$T_\phi = \frac{4K(k)}{\sqrt{(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)}}. \tag{4.11}$$

Além disso, nestes casos, temos que $A \neq 0$.

Temos aqui muitas soluções possíveis para a EDO (4.2) tais que $A \neq 0$. Basta escolhermos α_i's que satisfaçam o sistema (4.9) e as condições $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$ e $\alpha_1 \neq -\alpha_4$ ou $\alpha_2 \neq -\alpha_3$. Para simplificar, trataremos aqui o caso em que $\alpha_2 = 0$. Porém, outros casos podem ser considerados seguindo a mesma ideia. Note que neste caso, devemos ter necessariamente $B = 0$. Quando $\alpha_2 = 0$, o sistema (4.9), a solução ϕ em (4.10) e o período T_ϕ em (4.11), se tornam

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \\ \alpha_1\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3 = -c, \\ \alpha_1\alpha_3\alpha_4 = 2A, \end{cases} \tag{4.12}$$

$$\phi(\xi) = \frac{\alpha_4(\alpha_3 - \alpha_1) + \alpha_1(\alpha_4 - \alpha_3)\mathrm{SN}^2\left(\frac{\xi}{g}, k\right)}{(\alpha_3 - \alpha_1) + (\alpha_4 - \alpha_3)\mathrm{SN}^2\left(\frac{\xi}{g}, k\right)},$$

e

$$T_\phi = \frac{4K(k)}{\sqrt{\alpha_4(\alpha_3-\alpha_1)}}, \tag{4.13}$$

onde

$$g = \frac{2}{\sqrt{\alpha_4(\alpha_3-\alpha_1)}} \quad \text{e} \quad k^2 = \frac{-\alpha_1(\alpha_4-\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_3-\alpha_1)}. \tag{4.14}$$

Além disso, $\phi(\xi)$ pode ser simplificada tal que

$$\phi(\xi) = \frac{\alpha_4(\alpha_3-\alpha_1)\mathrm{DN}^2\left(\frac{\xi}{g}, k\right)}{(\alpha_3-\alpha_1)+(\alpha_4-\alpha_3)\mathrm{SN}^2\left(\frac{\xi}{g}, k\right)}. \tag{4.15}$$

Mais precisamente, o que acabamos de fazer prova a seguinte proposição.

Proposição 4.1. *Seja $S = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$ solução do sistema* (4.12)*, com α_i's reais e $\alpha_1 < 0 < \alpha_3 < \alpha_4$. Então,*

$$\phi(\xi) = \frac{\alpha_4(\alpha_3-\alpha_1)\mathrm{DN}^2\left(\frac{\sqrt{\alpha_4(\alpha_3-\alpha_1)}}{2}\xi, k\right)}{(\alpha_3-\alpha_1)+(\alpha_4-\alpha_3)\mathrm{SN}^2\left(\frac{\sqrt{\alpha_4(\alpha_3-\alpha_1)}}{2}\xi, k\right)}, \quad k^2 = \frac{-\alpha_1(\alpha_4-\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_3-\alpha_1)},$$

é uma solução para a equação (4.2).

Observe que, se $\alpha_3 \longrightarrow 0$, então $k \longrightarrow 1$ e assim T_ϕ tende para infinito. Logo

$$\phi(\xi) \longrightarrow \frac{-\alpha_4\alpha_1 \mathrm{sech}^2(\xi)}{-\alpha_1 + \alpha_4 \tanh^2(\xi)},$$

isto é,

$$\phi(\xi) \longrightarrow \phi_0 := \frac{-\alpha_1\alpha_4}{-\alpha_4 + \frac{(\alpha_4-\alpha_1)}{2} + \frac{(\alpha_4-\alpha_1)}{2}\cosh(2\xi)}.$$

A função ϕ_0 é uma onda solitária para a equação mKdV. Em [4], Alejo provou que esta onda é orbitalmente estável em $H^1(\mathbb{R})$.

Veremos agora, condições necessárias e suficientes para que o sistema (4.12) admita solução $S = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$, com α_i's reais e $\alpha_1 < 0 < \alpha_3 < \alpha_4$. Para isso, consideraremos o sistema auxiliar formado apenas pelas duas primeiras equações, isto é,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = -c. \end{cases} \tag{4.16}$$

Nossa estratégia, será obter condições necessárias e suficientes para que o sistema (4.16) admita solução $S = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$, com α_i's reais e $\alpha_1 < 0 < \alpha_3 < \alpha_4$. Isto nos permitirá explicitar α_1 e α_3 como funções das variáveis α_4 e c. Dessa forma, para os valores de A tais que

$$A = \alpha_1\alpha_3\alpha_4,$$

as soluções de (4.16) também serão soluções de (4.12).

Proposição 4.2. *Se o sistema* (4.16) *admite solução* $S = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$, *com* α_i*'s reais e* $\alpha_1 < 0 < \alpha_3 < \alpha_4$, *então*

$$c > 0 \qquad e \qquad 0 < \alpha_3 < \frac{\sqrt{3c}}{3} < \alpha_4 < \sqrt{c}.$$

Reciprocamente, se α_4 *satisfaz*

$$\frac{\sqrt{3c}}{3} < \alpha_4 < \sqrt{c}, \qquad com \quad c > 0,$$

então o sistema (4.16) *admite solução* $S = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$, *com* α_i*'s reais e* $\alpha_1 < 0 < \alpha_3 < \alpha_4$. *Além disso,*

$$\alpha_1 = \alpha_1(c, \alpha_4) = \frac{-\alpha_4 - \sqrt{\Delta_c(\alpha_4)}}{2} \quad e \quad \alpha_3 = \alpha_3(c, \alpha_4) = \frac{-\alpha_4 + \sqrt{\Delta_c(\alpha_4)}}{2}, \tag{4.17}$$

onde $\Delta_c(\alpha_4) = -3\alpha_4^2 + 4c$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Isolando α_1 na primeira equação de (4.16) e o substituindo na segunda, obtemos

$$\alpha_4^2 + \alpha_4\alpha_3 + \alpha_3^2 - c = 0.$$

Logo, $c > 0$ e

$$\alpha_3 = \frac{-\alpha_4 \pm \sqrt{\Delta_c(\alpha_4)}}{2},$$

onde $\Delta_c(\alpha_4) = -3\alpha_4^2 + 4c$. Ademais, como $\alpha_1 < 0 < \alpha_3 < \alpha_4$ e os α_i's são reais, $\Delta_c(\alpha_4) > 0$ e

$$\alpha_3 = \frac{-\alpha_4 + \sqrt{\Delta_c(\alpha_4)}}{2}.$$

Portanto,

$$0 < \alpha_3 < \frac{\sqrt{3c}}{3} < \alpha_4 < \sqrt{c}.$$

A Figura 4.2 ilustra melhor este fato.

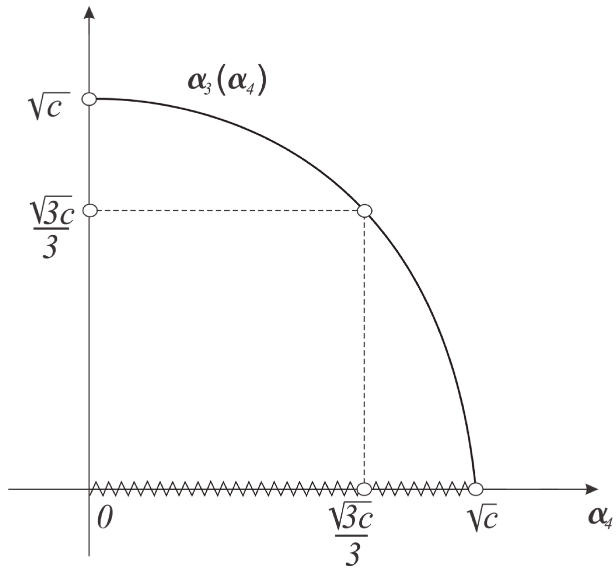

Figura 4.2: Gráfico de $\alpha_4 \mapsto \alpha_3(\alpha_4)$.

($\Leftarrow$) Se $\alpha_4 \in \left(\frac{\sqrt{3c}}{3}, \sqrt{c}\right)$, com $c > 0$, então $\Delta_c(\alpha_4) > 0$. Assim,

$$\alpha_3 := \frac{-\alpha_4 + \sqrt{\Delta_c(\alpha_4)}}{2}$$

e

$$\alpha_1 := \frac{-\alpha_4 - \sqrt{\Delta_c(\alpha_4)}}{2}$$

são reais e satisfazem o sistema (4.16). Além disso, usando as expressões de α_1 e α_3 como funções de α_4, obtemos

$$\alpha_1 < 0 < \alpha_3 < \frac{\sqrt{3c}}{3} < \alpha_4 < \sqrt{c}.$$

Logo,

$$\alpha_1 < 0 < \alpha_3 < \alpha_4.$$

$\square$

Portanto, garantimos a existência de uma aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : Q &\longrightarrow \quad C^\infty(\mathbb{R}) \\ (c, \alpha_4) &\longmapsto \quad \mathcal{J}(c, \alpha_4) = \phi_{(c,\alpha_4)}, \end{aligned}$$

que a cada $(c,\alpha_4) \in Q$ associa uma solução periódica, $\phi_{(c,\alpha_4)}$, da equação (4.2), onde a região Q é definida por

$$Q = \left\{ (c,\alpha_4) \in \mathbb{R}^2; \;\; c > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{3c}}{3} < \alpha_4 < \sqrt{c} \right\}.$$

A Figura 4.3 ilustra a região Q.

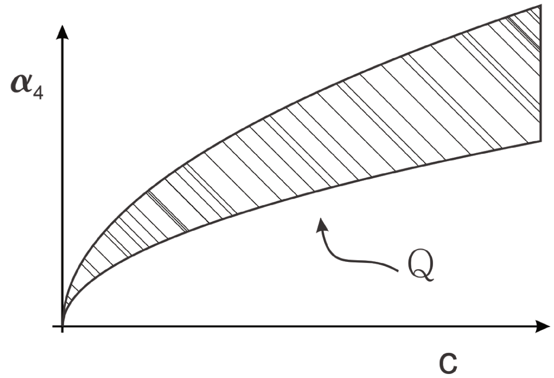

Figura 4.3: Região Q

4.2 Curva de soluções periódicas

Vimos na seção anterior, a existência de uma família de soluções explícitas para a equação (4.2), definida em uma região Q do $\mathbb{R}^2$. Além disso, para cada (c,α_4) escolhido nessa região, a solução $\phi_{(c,\alpha_4)}$ possui período dado por

$$T_{\phi_{(c,\alpha_4)}} = \frac{4K(k)}{\sqrt{\alpha_4}\Delta_c(\alpha_4)^{\frac{1}{4}}}, \quad \text{com} \quad k^2 = \frac{6\alpha_4^2 - 4c}{4\alpha_4\sqrt{\Delta_c(\alpha_4)}} + \frac{1}{2}. \tag{4.18}$$

Estas relações podem ser obtidas, substituindo em (4.13) e (4.14), as expressões de α_1 e α_3 como funções de α_4 e c, obtidas na Proposição 4.1. Nosso objetivo nesta seção, é obter, via o Teorema da Função Implícita, uma curva $\alpha_4(c)$, na região Q, tal que para cada $(c,\alpha_4(c))$ nessa curva, a solução $\phi_{(c,\alpha_4(c))}$ da EDO (4.2) tem sempre o mesmo período.

Analisemos agora, o comportamento do período $T_{\phi_{(c,\alpha_4)}}$ na região Q. Para isso, fixaremos um valor de $c > 0$, arbitrário, e estudaremos o comportamento do período quando α_4 varia no intervalo $\left(\frac{\sqrt{3c}}{3}, \sqrt{c}\right)$.

Quando $\alpha_4 \longrightarrow \frac{\sqrt{3c}}{3}$, de (4.1), temos que

$$k^2 \longrightarrow \frac{6\frac{3c}{9} - 4c}{4\frac{\sqrt{3c}}{c}\sqrt{-3\frac{3c}{9} + 4c}} + \frac{1}{2} = \frac{2c - 4c}{4\frac{\sqrt{3c}}{3}\sqrt{3c}} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

e assim

$$T_{\phi_c}(\alpha_4) \longrightarrow \frac{4\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\sqrt{3c}}{3}}\left(-3\frac{c}{3} + 4c\right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{c}},$$

onde $T_{\phi_c}(\alpha_4)$ denota $T_{\phi_{(c,\alpha_4)}}$ como função de α_4 com c fixo.

Por outro lado, quando $\alpha_4 \longrightarrow \sqrt{c}$, temos

$$k^2 \longrightarrow \frac{6c - 4c}{4\sqrt{c}\sqrt{-3c + 4c}} + \frac{1}{2} = \frac{2c}{4c} + \frac{1}{2} = 1$$

e daí $K(k) \longrightarrow \infty$. Portanto, $T_{\phi_c}(\alpha_4) \longrightarrow \infty$, quando $\alpha_4 \longrightarrow \sqrt{c}$.

Na verdade, conforme provaremos na próxima proposição, $T_{\phi_c}(\alpha_4)$ é estritamente crescente. A Figura 4.4 ilustra o comportamento de T_{ϕ_c}.

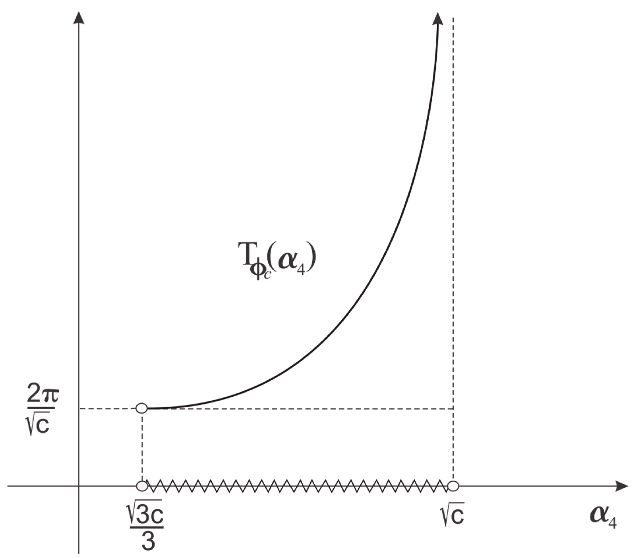

Figura 4.4: Gráfico do período como função de α_4.

Proposição 4.3. *Seja Υ a função que associa a cada $(c, \alpha_4) \in Q$ o período de $\phi_{(c,\alpha_4)}$, isto é,*

$$\begin{aligned} \Upsilon : \ & Q \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (c, \alpha_4) \longmapsto \Upsilon(c, \alpha_4) = T_{\phi_{(c,\alpha_4)}}, \end{aligned}$$

onde $T_{\phi_{(c,\alpha_4)}}$ está definido em (4.18). Então, $\frac{\partial \Upsilon}{\partial \alpha_4}(c, \alpha_4) > 0$, para todo $(c, \alpha_4) \in Q$.

Demonstração: Primeiramente, determinaremos a derivada, com relação a α_4, do modulo $k = k(c, \alpha_4)$, definido em (4.18). Derivando a expressão de k com relação a α_4, em ambos os lados de (4.18), obtemos

$$2k\frac{\partial k}{\partial \alpha_4} = \frac{48\alpha_4\sqrt{\Delta_c(\alpha_4)} - (4\sqrt{\Delta_c(\alpha_4)} + 4\alpha_4\partial_{\alpha_4}\sqrt{\Delta_c(\alpha_4)})(6\alpha_4^2 - 4c)}{16\alpha_4^2\Delta_c(\alpha_4)}.$$

Logo,

$$\frac{\partial k}{\partial \alpha_4} = \frac{1}{\gamma}\left[48\alpha_4^2(-3\alpha_4^2 + 4c) - 4(-3\alpha_4^2 + 4c)(6\alpha_4^2 - 4c) + 12\alpha_4^2(6\alpha_4^2 - 4c)\right],$$

onde $\gamma = 32k\alpha_4^2\Delta_c^{\frac{3}{2}}(\alpha_4)$. Daí,

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial \alpha_4} &= \frac{1}{\gamma}\left[-144\alpha_4^4 + 192\alpha_4^2c + 72\alpha_4^4 - 48\alpha_4^2c - 96\alpha_4^2c + 64c^2 + 72\alpha_4^4 - 48\alpha_4^2c\right] \\ &= \frac{1}{\gamma}64c^2.\end{aligned}$$

Resumindo,

$$\frac{\partial k}{\partial \alpha_4} = \frac{2c^2}{\alpha_4^2k\Delta_c^{\frac{3}{2}}(\alpha_4)} > 0. \tag{4.19}$$

Para simplificar as notações, denotaremos por Δ, K, k e Υ, as quantidades, $\Delta_c(\alpha_4)$, $K(k)$, $k(c, \alpha_4)$ e $\Upsilon(c, \alpha_4)$, respectivamente.

Derivando Υ com relação a α_4, obtemos

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial \alpha_4} = \frac{1}{\alpha_4\Delta^{\frac{1}{2}}}\left[4\alpha_4^{\frac{1}{2}}\Delta^{\frac{1}{4}}\frac{\partial K}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial \alpha_4} - \left(\frac{1}{2}\alpha_4^{-\frac{1}{2}}\Delta^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\alpha_4^{\frac{1}{2}}\Delta^{-\frac{3}{4}}(-6\alpha_4)\right)4K(k)\right],$$

isto é,

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial \alpha_4} = \frac{1}{\alpha_4\Delta^{\frac{1}{2}}}\left[4\alpha_4^{\frac{1}{2}}\Delta^{\frac{1}{4}}\frac{\partial K}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial \alpha_4} - \frac{2K\Delta^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\alpha_4}} + \frac{6\sqrt{\alpha_4^3}K}{\sqrt[4]{\Delta^3}}\right].$$

Substituindo $\dfrac{\partial k}{\partial \alpha_4}$, obtido em (4.19), e colocando $1/\Delta^{\frac{3}{4}}\sqrt{\alpha_4}$ em evidência, vemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \alpha_4} &= \frac{1}{\alpha_4\Delta^{\frac{5}{4}}\sqrt{\alpha_4}}\left[4\frac{\partial K}{\partial k}\frac{2c^2\alpha_4\Delta}{k\alpha_4^2\Delta^{\frac{3}{2}}} - 2K\Delta + 6\alpha_4^2K\right] \\ &= \frac{1}{\alpha_4\Delta^{\frac{5}{4}}\sqrt{\alpha_4}}\left[4\frac{\partial K}{\partial k}\frac{2c^2}{k\alpha_4\Delta^{\frac{1}{2}}} - 2(-3\alpha_4^2 + 4c)K + 6\alpha_4^2K\right] \\ &= \frac{1}{\alpha_4\Delta^{\frac{5}{4}}\sqrt{\alpha_4}}\left[4\frac{\partial K}{\partial k}\frac{2c^2}{k\alpha_4\Delta^{\frac{1}{2}}} - (-12\alpha_4^2 + 8c)K\right],\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial \alpha_4} = \frac{2}{\alpha_4^2 k^2 \Delta^{\frac{7}{4}} \sqrt{\alpha_4}} \left[4c^2 k \frac{\partial K}{\partial k} - \alpha_4 \Delta^{\frac{1}{2}} (4c - 6\alpha_4^2) k^2 K \right].$$

Agora, isolando $6\alpha_4^2 - 4c$ na expressão de k^2 em (4.18), temos

$$4c - 6\alpha_4^2 = 2(1 - 2k^2)\alpha_4 \sqrt{\Delta}. \tag{4.20}$$

Daí,

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial \alpha_4} = \gamma_2 \left[4c^2 k \frac{\partial K}{\partial k} - 2\alpha_4^2 \Delta [1 - 2k^2] k^2 K \right],$$

onde $\gamma_2 = \dfrac{2}{\alpha_4^2 k^2 \Delta^{\frac{7}{4}} \sqrt{\alpha_4}}$. Ainda por (4.18), temos

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial \alpha_4} = \gamma_2 \left[4c^2 k \frac{\partial K}{\partial k} - 2\frac{16^2 K^4(k)}{\Upsilon^4} [1 - 2k^2] k^2 K \right].$$

Por outro lado, elevando a expressão para o período em (4.18) à quarta e substituindo $\Delta = -3\alpha_4^2 + 4c$, obtemos

$$-3\alpha_4^4 + 4c\alpha_4^2 - \frac{256 K^4(k)}{\Upsilon^4} = 0.$$

Isolando α_4 nesta expressão, constatamos que

$$\alpha_4^2 = \frac{4c \pm 4\sqrt{c^2 - \frac{192 K^4(k)}{\Upsilon^4}}}{6}, \tag{4.21}$$

isto é,

$$6\alpha_4^2 - 4c = \pm 4\sqrt{c^2 - \frac{192 K^4(k)}{\Upsilon^4}}. \tag{4.22}$$

Assim, usando (4.18), (4.20) e (4.22), vemos que

$$(2k^2 - 1) = \frac{\pm 4\sqrt{c^2 - \frac{192 K^4(k)}{\Upsilon^4}}}{\frac{32 K^2(k)}{\Upsilon^2}},$$

ou seja,

$$\frac{32 K^2(k)}{\Upsilon^2}(2k^2 - 1) = \pm 4\sqrt{c^2 - \frac{192 K^4(k)}{\Upsilon^4}}.$$

Elevando ambos os lados desta equação ao quadrado, obtemos

$$\frac{32.32 K^4(k)}{\Upsilon^4}(2k^2 - 1)^2 = 16\left(c^2 - \frac{192 K^4(k)}{\Upsilon^4}\right).$$

Portanto,

$$c^2 = \frac{16^2 K^4(k)}{\Upsilon^4}(k^4 - k^2 + 1) \tag{4.23}$$

e assim

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial \alpha_4} = 2\gamma_2 \frac{16^2 K^4(k)}{\Upsilon^4}\left[2(k^4 - k^2 + 1)k\frac{\partial K}{\partial k} - (1 - 2k^2)k^2 K\right] > 0.$$

□

A Proposição 4.3 nos fornece o seguinte corolário.

Corolário 4.4. *Seja $L > 0$ fixado arbitrariamente. Então, para cada $c > \dfrac{4\pi^2}{L^2}$, existe um único $\alpha_4 \in \left(\dfrac{\sqrt{3c}}{3}, \sqrt{c}\right)$ tal que $T_{\phi_c}(\alpha_4) = L$. Em outras palavras, existe uma curva*

$$\begin{aligned} \rho: \quad \left(\frac{4\pi^2}{L^2}, \infty\right) &\longrightarrow C^\infty_{per}([0, L]) \\ c \quad &\longmapsto \quad \phi_{(\alpha_4(c), c)}, \end{aligned} \tag{4.24}$$

tal que, para todo $c \in \left(\dfrac{4\pi^2}{L^2}, \infty\right)$, $\phi_{(\alpha_4(c),c)}$ possui período L.

O próximo teorema mostra que de fato, a curva ρ do corolário (4.4) é suave.

Teorema 4.5. *Seja $L > 0$ fixado. Considere $c_0 > \dfrac{4\pi^2}{L^2}$ e o único $\alpha_4^0 := \alpha_4(c_0) \in \left(\frac{\sqrt{3c}}{3}, \sqrt{c}\right)$ tal que $T_{(\phi_{\alpha_4^0, c_0})} = L$. Então,*

(i) existem intervalos $J(c_0)$ e $B(\alpha_4^0)$, com c_0 e α_4^0 em seus interiores, respectivamente, e uma única função Λ, tal que $\Lambda(c_0) = \alpha_4^0$ e

$$\Upsilon(c, \alpha_4) = T_{\phi_{(c,\alpha_4)}} = \frac{4K(k)}{\sqrt{\alpha_4}\Delta_c(\alpha_4)^{\frac{1}{4}}} = L, \tag{4.25}$$

onde $c \in J(c_0)$, $\alpha_4 = \Lambda(c)$ e $k^2 = k^2(c, \alpha_4) = k^2(c, \Lambda(c)) \in (0, 1)$. ($k^2$ como definido em (4.18)),

(ii) a solução de (4.2) definida em (4.15), determinada agora por $\alpha_1(c)$, $\alpha_3(c)$ e $\alpha_4(c)$, possui período fundamental L para todo $c \in J(c_0)$. Além disso, a aplicação

$$c \in J(c_0) \longmapsto \phi_c \in C^\infty_{per}([0, L]),$$

é uma função suave,

(iii) $J(c_0)$ *pode ser estendido a* $\left(\dfrac{4\pi^2}{L^2}, \infty\right)$.

Demonstração: Vimos na Proposição 4.3, que se $(\alpha_4^0, c_0) \in Q$, então

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial \alpha_4}(c_0, \alpha_4^0) > 0.$$

Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, temos que existe uma única função suave Λ definida numa vizinhança $J(c_0)$, tal que,

$$\Upsilon(c, \Lambda(c)) = L, \quad \forall \quad c \in J(c_0).$$

Além disso, como $\frac{\partial \Upsilon}{\partial \alpha_4}(c_0, \alpha_4^0) > 0$ para todo c_0 no intervalo $J = \left(\frac{4\pi^2}{L^2}, \infty\right)$, segue por unicidade que Λ pode ser estendida a todo J. $\square$

Portanto, garantimos a existência de uma curva suave de soluções para a equação (4.2), para cada $L > 0$ fixado. Contudo, ainda não obtemos tal curva na forma explicita. Isso seria possível se conhecêssemos, explicitamente, a função $\Lambda(c) = \alpha_4(c)$.

Nossa estratégia para obter uma curva explícita de tais soluções, será considerar uma reparametrização para a curva ρ. Basicamente, explicitaremos c e os α_i's como funções das variáveis k e L.

Seja $L > 0$ um período arbitrário mas fixado e seja $\alpha_4 = \alpha_4(c) = \Lambda(c)$ a curva obtida no Teorema 4.5. Temos as seguintes relação,

$$\begin{cases} L^2 = \dfrac{16K^2(k)}{\alpha_4\sqrt{\Delta}}, \\ \\ k^2 = \dfrac{6\alpha_4^2 - 4c}{4\alpha_4\sqrt{\Delta}} + \dfrac{1}{2}, \\ \\ \Delta = -3\alpha_4^2 + 4c. \end{cases} \tag{4.26}$$

Conforme vimos em (4.23), c pode ser escrito como

$$c = c(k, L) = \frac{16K^2(k)}{L^2}\sqrt{k^4 - k^2 + 1}. \tag{4.27}$$

A Figura 4.5 ilustra o comportamento de $c = c(k, L)$. Note que c como função de k, com L fixo, é uma função crescente.

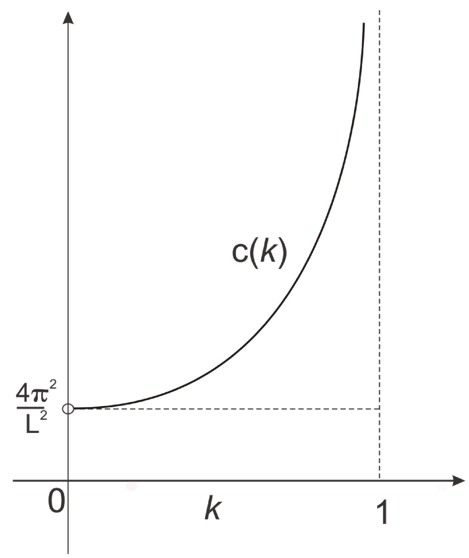

Figura 4.5:

Para simplificar nossas notações, definamos a função

$$f^{\pm}(k) := \sqrt{\sqrt{k^4 - k^2 + 1} \pm \sqrt{k^4 - k^2 + \frac{1}{4}}}.$$

Substituindo (4.27) em (4.21), obtemos

$$\alpha_4^2 = \frac{4}{6}\left(\frac{16K^2(k)}{L^2}\sqrt{k^4 - k^2 + 1} \pm \sqrt{\frac{16.16.K^4(k)}{L^4}(k^4 - k^2 + 1) - \frac{12.16.K^4(k)}{L^4}}\right),$$

ou seja,

$$\alpha_4(k) = \frac{4\sqrt{2}K(k)}{\sqrt{3}L} f^{\pm}. \tag{4.28}$$

Note que temos duas possibilidades a considerar em (4.28): $+$ ou $-$. Entretanto, uma vez determinado o sinal em α_4, os sinais em α_1, α_3, e Δ estarão completamente definidos. De fato, de (4.27) e (4.28), temos

$$\begin{aligned} -3\alpha_4^2 + 4c &= -32\frac{K^2(k)}{L^2}\left(\sqrt{k^4 - k^2 + 1} \pm \sqrt{k^4 - k^2 + \frac{1}{4}}\right) + 4\frac{16K^2(k)}{L^2}\sqrt{k^4 - k^2 + 1} \\ &= \frac{32K^2(k)}{L^2}\left(\sqrt{k^4 - k^2 + 1} \mp \sqrt{k^4 - k^2 + \frac{1}{4}}\right), \end{aligned}$$

isto é,

$$\sqrt{\Delta} = \frac{4\sqrt{2}K(k)}{L} f^{\mp}(k). \tag{4.29}$$

Portanto, substituindo (4.29) e (4.28) em (4.17), encontramos

$$\alpha_1 = -\frac{2\sqrt{2}K(k)}{L}\left(f^{\mp} + \frac{1}{\sqrt{3}} f^{\pm}\right) \quad \text{e} \quad \alpha_3 = \frac{2\sqrt{2}K(k)}{L}\left(f^{\mp} - \frac{1}{\sqrt{3}} f^{\pm}\right). \tag{4.30}$$

Agora, resta analisarmos quais das possibilidades, + ou -, devemos considerar em (4.28). Sabemos por (4.14), que os α_i's devem satisfazer

$$k^2 = \frac{-\alpha_1(\alpha_4 - \alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_3 - \alpha_1)}. \tag{4.31}$$

Por outro lado, usando (4.28) e (4.30), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{-\alpha_1(\alpha_4 - \alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_3 - \alpha_1)} &= \frac{\frac{2\sqrt{2}K(k)}{L}\left(f^{\mp}(k) + \frac{1}{\sqrt{3}} f^{\pm}(k)\right)\frac{2\sqrt{2}K(k)}{L}\left(\sqrt{3}f^{\pm}(k) - f^{\mp}(k)\right)}{\frac{4\sqrt{2}K(k)}{\sqrt{3}L} f^{\pm}(k)\left(\frac{4\sqrt{2}K(k)}{L} f^{\mp}(k)\right)} \\
&= \frac{\sqrt{3}\left(f^{\mp}(k) + \frac{1}{\sqrt{3}} f^{\pm}(k)\right)\left(\sqrt{3}f^{\pm}(k) - f^{\mp}(k)\right)}{4 f^{\pm}(k) f^{\mp}(k)} \\
&= \frac{1}{4}\frac{\left(\sqrt{3}f^{\mp}(k) + f^{\pm}(k)\right)\left(\sqrt{3}f^{\pm}(k) - f^{\mp}(k)\right)}{f^{\pm}(k) f^{\mp}(k)} \\
&= \frac{1}{4}\frac{\left(3f^{\mp}(k)f^{\pm}(k) - \sqrt{3}(f^{\mp}(k))^2 + \sqrt{3}(f^{\pm}(k))^2 - f^{\pm}(k)f^{\mp}(k)\right)}{f^{\pm}(k) f^{\mp}(k)}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{-\alpha_1(\alpha_4 - \alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_3 - \alpha_1)} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}\sqrt{k^4 - k^2 + \frac{1}{4}}\right) \\
&= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1-2k^2)^2} \\
&= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}|1 - 2k^2|.
\end{aligned}$$

Dessa maneira, devemos ter

$$\frac{-\alpha_1(\alpha_4-\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_3-\alpha_1)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}(1-2k^2) \quad \text{se} \quad k \in \left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right], \\ \\ \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}(-1+2k^2) \quad \text{se} \quad k \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right). \end{cases}$$

Portanto, por (4.31), devemos considerar, em (4.28), o caso $+$ no intervalo $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e o caso $-$ no intervalo $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

Por outro lado, no intervalo $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, temos

$$\begin{aligned} f^-(k) &= \sqrt{\sqrt{k^4-k^2+1} - \frac{1}{2}\sqrt{(-1+2k^2)^2}} \\ &= \sqrt{\sqrt{k^4-k^2+1} - \frac{1}{2}|-1+2k^2|} \\ &= \sqrt{\sqrt{k^4-k^2+1} + k^2 - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e

$$f^+(k) = \sqrt{\sqrt{k^4-k^2+1} - k^2 + \frac{1}{2}}$$

e no intervalo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$,

$$\begin{aligned} f^+(k) &= \sqrt{\sqrt{k^4-k^2+1} + \frac{1}{2}\sqrt{(-1+2k^2)^2}} \\ &= \sqrt{\sqrt{k^4-k^2+1} + \frac{1}{2}|-1+2k^2|} \\ &= \sqrt{\sqrt{k^4-k^2+1} + k^2 - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e

$$f^-(k) = \sqrt{\sqrt{k^4-k^2+1} - k^2 + \frac{1}{2}}.$$

Dessa forma, as funções f e g definidas por

$$f(k) := \sqrt{\sqrt{k^4-k^2+1} + k^2 - \frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad g(k) := \sqrt{\sqrt{k^4-k^2+1} - k^2 + \frac{1}{2}},$$

satisfazem,

$$f(k)=\begin{cases} f^{-}(k) & \text{se} \quad k\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \\ f^{+}(k) & \text{se} \quad k\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right) \end{cases} \quad \text{e} \quad g(k)=\begin{cases} f^{+}(k) & \text{se} \quad k\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \\ f^{-}(k) & \text{se} \quad k\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right), \end{cases}$$

respectivamente. Logo, podemos concluir que

$$\alpha_4(k)=\frac{4\sqrt{2}K(k)}{\sqrt{3}L}f(k), \quad \sqrt{\Delta}=\frac{4\sqrt{2}K(k)}{L}g(k), \quad \alpha_1(k)=-\frac{2\sqrt{2}K(k)}{L}\left(g(k)+\frac{1}{\sqrt{3}}f(k)\right)$$

e

$$\alpha_3(k)=\frac{2\sqrt{2}K(k)}{L}\left(g(k)-\frac{1}{\sqrt{3}}f(k)\right).$$

Além disso, como $A=\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_3\alpha_4$, obtemos também, A como função das variáveis k e L, isto é,

$$A(k,L)=\frac{-32K^3(k)}{3\sqrt{3}L^3}\left(\sqrt{k^4-k^2+1}-2k^2+1\right)\sqrt{2\sqrt{k^4-k^2+1}+2k^2-1}. \tag{4.32}$$

Resumindo, obtemos as seguintes parametrizações em função das variáveis k e L:

(i) $c(k,L)=\dfrac{16K^2(k)}{L^2}\sqrt{k^4-k^2+1}$,

(ii) $\sqrt{\Delta}=\dfrac{4K(k)}{L}\sqrt{2\sqrt{k^4-k^2+1}+1-2k^2}$,

(iii) $\alpha_4(k,L)=\dfrac{4K(k)}{\sqrt{3}L}\sqrt{2\sqrt{k^4-k^2+1}-1+2k^2}$,

(iv) $\alpha_3(k,L)=\dfrac{2K(k)}{L}\left(\sqrt{2\sqrt{k^4-k^2+1}+1-2k^2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2\sqrt{k^4-k^2+1}-1+2k^2}\right)$,

(v) $\alpha_1(k,L)=\dfrac{-2K(k)}{L}\left(\sqrt{2\sqrt{k^4-k^2+1}+1-2k^2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2\sqrt{k^4-k^2+1}-1+2k^2}\right)$,

(vi) $A(k,L)=\dfrac{-32K^3(k)}{3\sqrt{3}L^3}\left(\sqrt{k^4-k^2+1}-2k^2+1\right)\sqrt{2\sqrt{k^4-k^2+1}+2k^2-1}$.

Finalmente, obtemos a curva suave e explícita de soluções para (4.2),

$$\begin{array}{rccl} \tilde{\rho}_L: & (0,1) & \longrightarrow & C^{\infty}_{per}([0,L]) \\ & k & \longmapsto & \phi_{(k,L)}, \end{array} \tag{4.33}$$

onde $\phi_{(k,L)}$ é dado por,

$$\phi_{(k,L)}(\xi) = \frac{\alpha_4(k)\,(\alpha_3(k) - \alpha_1(k))\,\mathrm{DN}^2\left(\frac{2K(k)}{L}\xi, k\right)}{(\alpha_3(k) - \alpha_1(k)) + (\alpha_4(k) - \alpha_3(k))\,\mathrm{SN}^2\left(\frac{2K(k)}{L}\xi, k\right)}.$$

Após algumas simplificações, podemos escrever $\phi_{(k,L)}$ da forma

$$\phi_k(\xi) := \phi_{(k,L)}(\xi) = \frac{4K(k)}{\sqrt{2}g(k)L}\left(\frac{\mathrm{DN}^2\left(\frac{2K(k)}{L}\xi, k\right)}{1+\beta^2\mathrm{SN}^2\left(\frac{2K(k)}{L}\xi, k\right)}\right), \tag{4.34}$$

onde $\beta^2 = \sqrt{k^4 - k^2 + 1} + k^2 - 1$. Na Figura 4.6, ilustramos $\phi_{(k,L)}(x)$.

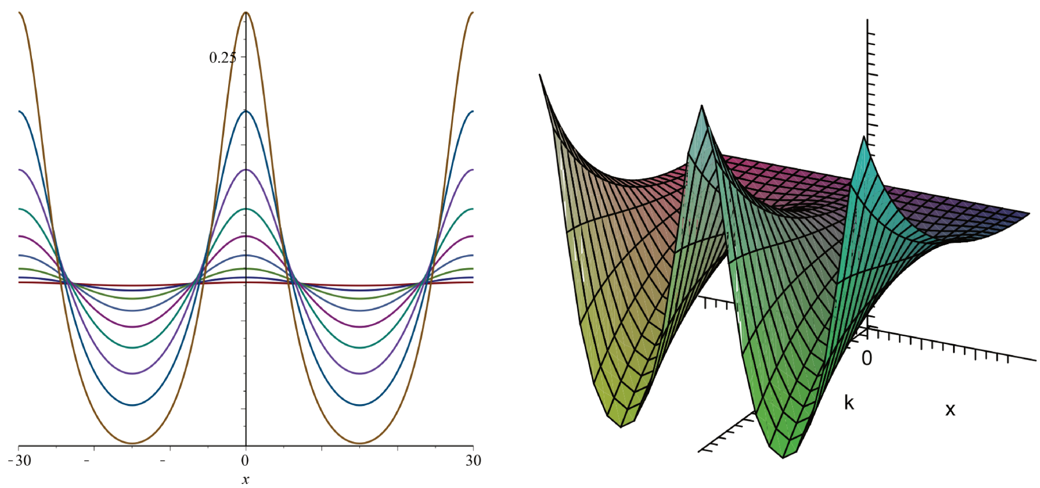

Figura 4.6: À esquerda, a função $x \mapsto \phi_{(k,L)}(x)$, com $L = 30$ e $k = 0.1$, $k = 0.2$, ..., $k = 0.9$. À direita, a função $(x, k) \mapsto \phi_{(k,L)}(x)$, com $L = 30$.

4.3 Propriedade Espectral

Com o intuito de obtermos as propriedades P_1 e P_2 em (4.8), recorreremos aos Teoremas 2.6 e 2.10. Fixando $L > 0$, a função $\phi_k := \phi_{(k,L)}$, dada em (4.34), é continuamente diferenciável em todas as suas variáveis. Logo,

$$\mathcal{Q}(x,k) := c(k) - 6\phi_k^2(x),$$

também o é. Assim, usando o Teorema 2.10, podemos constatar que a família $\mathcal{L}_k$ é isonercial. Em outras palavras, $In(\mathcal{L}_k)$ é o mesmo para todo $k \in (0,1)$.

Por outro lado, sabemos que ϕ_k' é autofunção associada ao autovalor 0 para todo $k \in (0,1)$, pois

$$\mathcal{L}_k(\phi_k') = -\phi''' + c\phi' - 6\phi^2\phi', = \left(-\phi_k'' + c(k)\phi - 2\phi^3\right)' = (-A(k))' = 0.$$

Portanto, $\mathcal{L}_k$ satisfará P_1 e P_2 para todo $k \in (0,1)$ se, e somente se, $In(\mathcal{L}_k) = (1,1)$ para algum $k_0 \in (0,1)$.

Provaremos agora, que $In(\mathcal{L}_k) = (1,1)$ para algum $k_0 \in (0,1)$. Para isso, usaremos o Teorema 2.6. Considere o PVI

$$\begin{cases} -y'' + \left[c(k_0) - 6\phi_{k_0}^2\right] y = 0, \\ y(0) = -\frac{1}{\phi_{k_0}''(0)}, \\ y'(0) = 0, \end{cases} \tag{4.35}$$

com $k_0 = 0.5$ e também a constante θ definida por

$$\theta = \frac{y'(L)}{\phi_{k_0}''(0)}. \tag{4.36}$$

Pelo Teorema 3.1 em [55], é suficiente escolhermos um valor arbitrário de L, digamos $L = 30$. Dessa forma, obtemos numericamente, usando o software Wolfran mathematica 7 ou Maple 17, que

$$\theta \cong -1.382078401 \times 10^5.$$

Além disso, vimos explicitamente, que ϕ_{k_0}' possui exatamente dois zeros no intervalo $[0,30)$. Ver Figura 4.6. Finalmente, usando o Teorema 2.6, obtemos que 0 é um autovalor simples e $0 = \lambda_1$, isto é, 0 é o segundo autovalor e é simples. Logo $In(\mathcal{L}_{k_0}) = (1,1)$.

Portanto, provamos as propriedades P_1 e P_2. A tabela abaixo ilustra os valores de θ para diferentes valores de L.

Valores para θ com $k_0 = 0.5$.				
$L = 20$	$L = 50$	$L = 200$	$L = 1000$	$L = 1000000$
$\theta \cong -18200$	$\theta \cong -1.77 \times 10^6$	$\theta \cong -1.82 \times 10^9$	$\theta \cong -5.68 \times 10^{12}$	$\theta \cong -5.68 \times 10^{27}$

4.4 Estabilidade Orbital

Nesta seção, obteremos o resultado de estabilidade orbital para a curva de ondas viajantes periódicas ϕ_k dada em (4.34).

Primeiramente, vamos demonstrar um lema que prova a propriedade P_3.

Lema 4.6. *Seja* M_k *a quantidade conservada definida em* (4.8) *e sejam* $c(k,L)$ *e* $A(k,L)$ *dadas em* (4.27) *e* (4.32), *respectivamente. Então,*

$$\Gamma := \left\langle \mathcal{L}_k\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial k}\right), \frac{\partial \phi_k}{\partial k}\right\rangle = -\left\langle M_k'(\phi_k), \frac{\partial \phi_k}{\partial k}\right\rangle < 0. \tag{4.37}$$

Demonstração: Observe que no caso da mKdV,

$$Q'(\phi_k) = \phi_k, \qquad \text{e} \qquad V'(\phi_k) = 1.$$

Além disso, derivando a equação de Euler-Lagrange (4.2) com relação a k, obtemos

$$\mathcal{L}_k\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial k}\right) = -\frac{\partial c}{\partial k}\phi_k - \frac{\partial A}{\partial k}.$$

Daí, Γ é dado por

$$\begin{aligned}
\Gamma = & -\left\langle \frac{\partial c}{\partial k}\phi_k + \frac{\partial A}{\partial k}, \frac{\partial \phi_k}{\partial k}\right\rangle = -\left\langle M_k'(\phi_k), \frac{\partial \phi_k}{\partial k}\right\rangle \\
= & -\int_0^L \frac{\partial c}{\partial k}\phi_k\frac{\partial \phi_k}{\partial k} + \frac{\partial A}{\partial k}\frac{\partial \phi_k}{\partial k}dx \\
= & -\int_0^L \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial k}\frac{\partial}{\partial k}\phi_k^2 + \frac{\partial A}{\partial k}\frac{\partial \phi_k}{\partial k}dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\Gamma = & -\frac{\partial c}{\partial k}\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{1}{2}\int_0^L \phi_k^2 dx\right) - \frac{\partial A}{\partial k}\frac{\partial}{\partial k}\int_0^L \phi_k dx \\
= & -\frac{\partial c}{\partial k}\frac{\partial}{\partial k}Q(\phi_k) - \frac{\partial A}{\partial k}\frac{\partial}{\partial k}V(\phi_k)dx.
\end{aligned}$$

Como conhecemos ϕ_k explicitamente, podemos calcular os valores de $Q(\phi_k)$ e $V(\phi_k)$ para obtermos o sinal de Γ.

Usando a forma explicita de ϕ_k, dada em (4.34), constatamos que

$$\begin{aligned}
V(\phi_k) = \int_0^L \phi_k(x)dx \; & = \int_0^L \frac{4K(k)}{\sqrt{2}g(k)L}\left(\frac{\mathrm{DN}^2\left(\frac{2K(k)}{L}x, k\right)}{1+\beta^2\mathrm{SN}^2\left(\frac{2K(k)}{L}x, k\right)}\right)dx \\
& = \frac{4K(k)}{\sqrt{2}g(k)L}\int_0^L \frac{\mathrm{DN}^2\left(\frac{2K(k)}{L}x, k\right)}{1+\beta^2\mathrm{SN}^2\left(\frac{2K(k)}{L}x, k\right)}dx,
\end{aligned}$$

onde $\beta^2 = \sqrt{k^4-k^2+1}+k^2-1$ e $g(k) = \sqrt{\sqrt{k^4-k^2+1}-k^2+\frac{1}{2}}$. Mudando a variável $y = \dfrac{2K(k)}{L}x$, obtemos

$$V(\phi_k) = \frac{4K(k)}{\sqrt{2}g(k)L}\frac{L}{2K(k)}\int_0^{2K(k)} \frac{\mathrm{DN}^2(y,k)}{1+\beta^2\mathrm{SN}^2(y,k)}dy,$$

isto é,

$$V(\phi_k) = \frac{4}{\sqrt{2}g(k)}\int_0^{K(k)} \frac{\mathrm{DN}^2(y,k)}{1+\beta^2\mathrm{SN}^2(y,k)}dy =: \frac{4}{\sqrt{2}g(k)}I_1.$$

Com os mesmos argumentos, obtemos

$$Q(\phi_k) = \frac{4K(k)}{g^2(k)L}\int_0^{K(k)} \frac{\mathrm{DN}^4(y,k)}{(1+\beta^2\mathrm{SN}^2(y,k))^2}dy =: \frac{4K(k)}{g^2(k)L}I_2.$$

Agora, considere α^2 tal que $-\alpha^2 = \beta^2$. Como $0 < -\alpha^2 < k^2$, usando a fórmula 410.04 em [25], encontramos

$$I_1 = \frac{(k^2-\alpha^2)G(w,k)}{\sqrt{\alpha^2(1-\alpha^2)(\alpha^2-k^2)}},$$

onde

$$G(w,k) = K(k)E(w,k') - K(k)F(w,k') + E(k)F(w,k') = \frac{\pi}{2}\Lambda_0(w,k)$$

e

$$w = sen^{-1}\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2-k^2}} = sen^{-1}\frac{\beta}{\sqrt{k^2+\beta^2}}.$$

A função $\Lambda_0(w,k)$ é conhecida como função de Heuman.

Usando a expressão de $\beta^2 = \sqrt{k^4-k^2+1}+k^2-1$, podemos escrever

$$I_1 = \frac{\sqrt{\sqrt{k^4-k^2+1}+2k^2-1}\,G(w,k)}{\sqrt{2k^4-2k^2+1+(2k^2-1)\sqrt{k^4-k^2+1}}},$$

onde

$$w = sen^{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{k^4-k^2+1}+k^2-1}{\sqrt{k^4-k^2+1}+2k^2-1}}.$$

Por outro lado, usando a relação $\mathrm{DN}^2 = 1-k^2\mathrm{SN}^2$, vemos que

$$I_2 = \int_0^{K(k)} \frac{(1-k^2\mathrm{SN}^2(y))^2}{(1+\beta^2\mathrm{SN}^2(y))^2}dy.$$

Logo, usando a fórmula 410.8 em [25], obtemos

$$I_2 = \frac{1}{\alpha^4}\left(k^4K(k) + 2k^2(\alpha^2-k^2)\Pi(\alpha^2,k) + (\alpha^2-k^2)^2V_2\right),$$

onde

$$\Pi(\alpha^2,k)=\frac{k^2K(k)}{k^2-\alpha^2}-\frac{\alpha^2G(w,k)}{\sqrt{\alpha^2(1-\alpha^2)(\alpha^2-k^2)}}$$

e

$$V_2=\eta_0\left(\alpha^2E(k)+\frac{2k^4\alpha^2-2k^4+\alpha^4(k')^2}{k^2-\alpha^2}K(k)-\frac{\alpha^2(2\alpha^2k^2+2\alpha^2-\alpha^4-3k^2)G(w,k)}{\sqrt{\alpha^2(1-\alpha^2)(\alpha^2-k^2)}}\right),$$

com $\eta_0=1/(2(\alpha^2-1)(k^2-\alpha^2))$ e w como antes.

Estas relações para I_1 e I_2, nos permitem escrever

$$\Gamma=\ -\frac{\partial c}{\partial k}\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{4K(k)}{g^2(k)L}I_2\right)-\frac{\partial A}{\partial k}\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{4}{\sqrt{2}g(k)}I_1\right).$$

Além do mais,

$$\frac{\partial c}{\partial k}=\frac{1}{L^2}\frac{\partial}{\partial k}\left(16K^2(k)\sqrt{k^4-k^2+1}\right)=:\frac{1}{L^2}m_1(k)$$

e

$$\frac{\partial A}{\partial k}=\frac{1}{L^3}\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{-32K^3(k)\left(\sqrt{k^4-k^2+1}-2k^2+1\right)}{3\sqrt{3}}\sqrt{2\sqrt{k^4-k^2+1}+2k^2-1}\right)=:\frac{1}{L^3}m_2(k).$$

Portanto,

$$\Gamma=\ -\frac{1}{L^2}m_1(k)\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{4K(k)}{g^2(k)L}I_2\right)-\frac{1}{L^3}m_2(k)\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{4}{\sqrt{2}g(k)}I_1\right)$$

e finalmente,

$$\Gamma=-\frac{1}{L^3}m_3(k),$$

onde

$$m_3(k)=m_1(k)\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{4K(k)}{g^2(k)}I_2\right)+m_2(k)\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{4}{\sqrt{2}g(k)}I_1\right).$$

Como $m_3(k)$ depende somente de k, podemos plotar seu gráfico, usando o software Maple 17, e constatar que $m_3(k)>0$, para todo $k\in(0,1)$. Ver Figura 4.7. Concluímos assim que $\Gamma<0$. $\square$

Agora que já provamos as propriedades P_0 até P_3, em (4.8), vamos usá-las para provar nosso resultado de estabilidade. Iniciaremos vendo alguns conceitos e lemas necessários.

Seja $F_k:=F_{(c(k,L),A(k,L))}$ o funcional conservado já definido em (4.5), contudo com c e A dependendo agora somente de k, isto é,

$$F_k=E+c(k)Q+A(k)V. \tag{4.38}$$

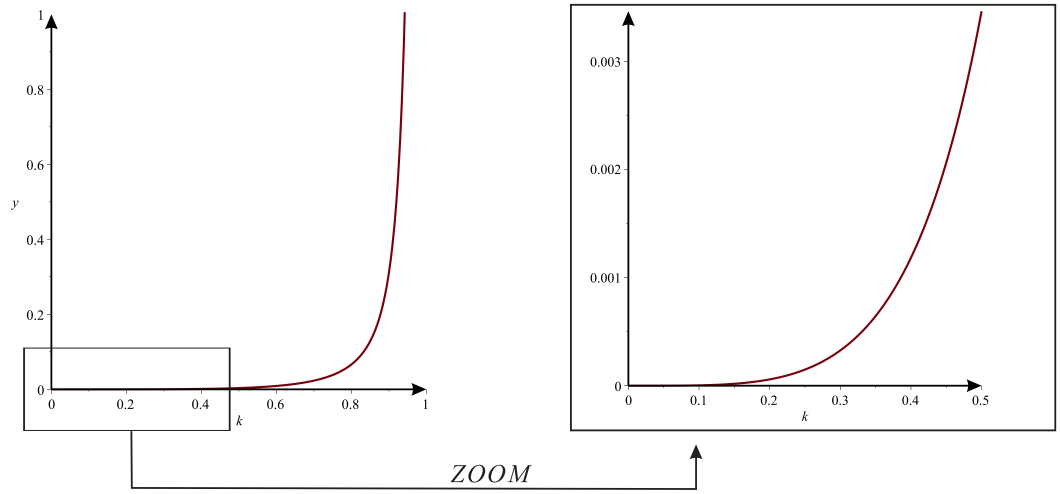

Figura 4.7: Gráfico da função $k \mapsto m_3(k)$.

Consideraremos $\rho(u, \phi_k)$, definido por

$$\rho(u, \phi_k) := \inf_{r \in \mathbb{R}} \|u - \phi(\cdot + r)\|_{H^1_{per}},$$

como sendo a distância de u até a órbita de ϕ_k e Σ_k como sendo a variedade

$$\Sigma_k := \{u \in H^1_{per}([0, L]), \ \text{tal que} \ M_k(u) = M_k(\phi_k)\}.$$

As demonstrações dos próximos lemas são similares à aquelas feitas no capítulo anterior e por esta razão as omitiremos.

Lema 4.7. *Existem $\varepsilon > 0$ e uma aplicação $\omega : U_\varepsilon(\phi_k) \longmapsto \mathbb{R}$, de classe C^1, tal que para todo $u \in U_\varepsilon(\phi_k)$,*

$$(u(\cdot + \omega(u)), \phi_k') = 0.$$

Lema 4.8. *Considerando as propriedades P_0 até P_3, em (4.8), e o conjunto*

$$\mathcal{A} = \left\{\psi \in H^1_{per}; (\psi, M_k'(\phi_k)) = (\psi, \phi_k') = 0\right\},$$

existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\langle \mathcal{L}_k \psi, \psi \rangle \geq C \|\psi\|_1^2, \quad \forall \psi \in \mathcal{A}.$$

Lema 4.9. *Seja F_k o funcional conservado definido em* (4.38). *Então, existem $\varepsilon > 0$ e uma constante $C = C(\varepsilon)$, tais que*

$$F_k(u) - F_k(\phi_k) \geq C\rho(u, \phi_k)^2, \tag{4.39}$$

para todo $u \in U_\varepsilon(\phi_k)$ que satisfaz $M_k(u) = M_k(\phi_k)$.

Provaremos agora o teorema principal deste capítulo.

Teorema 4.10. *Para cada $k \in (0,1)$, a onda viajante periódica ϕ_k, dada em* (4.34), *é orbitalmente estável pelo fluxo da equação mKdV em $H^1_{per}([0,L])$.*

Demonstração: Suponhamos que ϕ_k seja H^1_{per}-instável. Logo, podemos escolher dados iniciais $w_n := u_n(0) \in U_{\frac{1}{n}}$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\rho(w_n, \phi_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{mas} \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \rho(u_n(t), \phi_k) \geq \varepsilon,$$

onde $u_n(t)$ é a solução da equação (4.1) com dado inicial w_n. Aqui, escolheremos o $\varepsilon > 0$ do Lema 4.9. Por continuidade em t, podemos escolher o primeiro tempo t_n, tal que

$$\rho(u_n(t_n), \phi_k) = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.40}$$

Assim como no capítulo anterior, nossa estratégia será obter uma contradição com a igualdade (4.40). Para isso, definamos a função

$$f_n(\alpha) = M_k(\alpha u_n(t_n)) = \alpha^2 \frac{\partial c}{\partial k} \int_0^L |u_n(t_n)|^2 dx + \alpha \frac{\partial A}{\partial k} \int_0^L u_n(t_n) dx =: \alpha^2 a_n + \alpha b_n.$$

Como $f_n(0) = 0$, $\frac{\partial c}{\partial k} \int_0^L |u_n(t_n)|^2 dx > 0$ e $M_k(\phi_k) > 0$ (ver Figura 4.8), temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\alpha_n > 0$ tal que $f_n(\alpha_n) = M_k(\phi_k)$.

Daí, existe uma sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$M_k(\alpha_n u_n(t_n)) = M_k(\phi_k), \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.41}$$

Portanto, construímos uma sequência $(\alpha_n u_n(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ que está contida na variedade Σ_k.

Usando as mesmas argumentações da prova do Teorema 3.15, temos que a sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e então admite uma subsequência convergente,

$$\alpha_n \longrightarrow \alpha_0, \quad (n \to \infty).$$

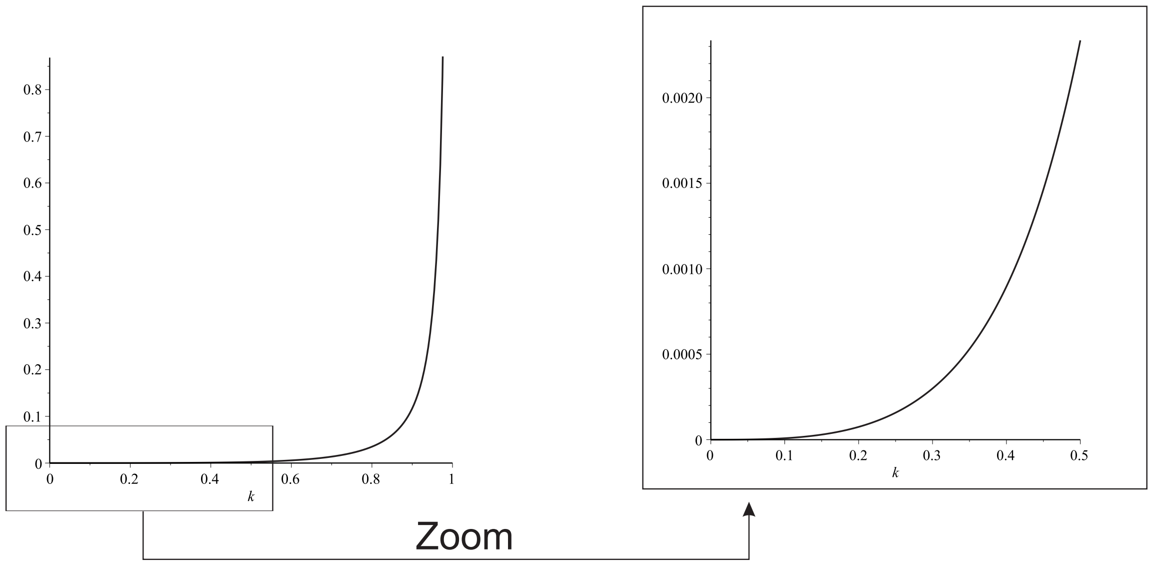

Figura 4.8: Gráfico da função $k \mapsto M_k(\phi_k)$.

Além disso,

$$\alpha_0^2 a + \alpha_0 b = a + b,$$

onde

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial k} Q(w_n) \longrightarrow \frac{\partial c}{\partial k} Q(\phi_k) =: a, \\ \\ \frac{\partial A}{\partial k} V(w_n) \longrightarrow \frac{\partial A}{\partial k} V(\phi_k) =: b. \end{cases}$$

Daí,

$$(1 - \alpha_0)[(1 + \alpha_0)a + b] = 0.$$

Logo,

$$\alpha_0 = 1 \quad \text{ou} \quad \alpha_0 = -\frac{b + a}{a} = -\left(\frac{b}{a} + 1\right).$$

Por outro lado, como $M_k(\phi_k) > 0$, temos

$$M_k(\phi_k) = \frac{\partial c}{\partial k} Q(\phi_k) + \frac{\partial A}{\partial k} V(\phi_k) > 0. \tag{4.42}$$

Além disso, como $c(k)$ é crescente e $Q(\phi_k) > 0$, podemos dividir (4.42) por $\frac{\partial c}{\partial k} Q(\phi_k)$ e obter

$$1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{\frac{\partial A}{\partial k} V(\phi_k)}{\frac{\partial c}{\partial k} Q(\phi_k)} > 0.$$

Portanto, $\alpha_0 = 1$.

Provamos desta maneira, que a sequência real $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite ao menos uma subsequência que converge para 1. Isto, assim como no capítulo anterior, pag. 72, implica que as Afirmações 1 e 2 são verdadeiras, isto é,

$$\rho(u_n(t_n), \alpha_n u_n(t_n)) \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \rho(\alpha_n u_n(t_n), \phi_k) \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Portanto,

$$\frac{\varepsilon}{2} = \rho(u_n(t_n), \phi_k) \leq \rho(u_n(t_n), \alpha_n u_n(t_n)) + \rho(\alpha_n u_n(t_n), \phi_k) \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

o que é uma contradição. $\square$

Capítulo 5

Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para equação de Gardner

Nosso objetivo neste capítulo, é estudar estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas da equação de Gardner,

$$v_t + v_{xxx} + avv_x + bv^2 v_x = 0, \tag{5.1}$$

onde a e b são parâmetros reais e $b \neq 0$. Estabilidade orbital de ondas viajantes do tipo soliton para esta equação foram estudadas por Alejo em [4]. Na ocasião, ele lidou com o caso $a = 6\sigma$ e $b = 6$ e provou estabilidade de ondas da forma

$$\phi_{(\sigma,c_0)}(x - c_\sigma t) = \frac{c_0}{2\sigma + \sqrt{4\sigma^2 + c_0}\cosh(\sqrt{c_0}(x - c_\sigma t))}, \tag{5.2}$$

onde $c_\sigma = 6\sigma^2 + c_0$ e $c_0 \in (0, \infty)$, quando $b > 0$, e $c_0 \in (0, 4\sigma^2)$, quando $b < 0$.

Uma das estratégias para se estudar a estabilidade de ondas viajantes periódicas da equação de Gardner (5.1), bem como outras propriedades, é usar sua estreita relação com a equação Focusing ou Defocusing Korteweg-de Vries modificada, ou simplesmente F-mKdV ou D-mKdV,

$$u_t + u_{xxx} + \gamma 6u^2 u_x = 0, \tag{5.3}$$

onde $\gamma = \mathrm{sgn}(b)$. Note que, existe um difeomorfismo $\mathcal{T}$ entre espaços convenientes (cf. Kudryashov, Nikolay, Sinelshchikov e Dmitry [49]), que relaciona as soluções de (5.1) com as de (5.3). Isto é,

$$\begin{cases} \mathcal{T} : \begin{pmatrix} \text{Soluções} \\ \text{da equação} \\ \text{Gardner} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{Soluções da} \\ \text{equação F-mKdV} \\ \text{ou D-mKdV} \end{pmatrix} \\ \\ (\mathcal{T}v)(x,t) := \sqrt{\dfrac{b}{6\gamma}} \left[v\left(x - \dfrac{a^2}{4b}t, t\right) + \dfrac{a}{2b} \right]. \end{cases} \tag{5.4}$$

A imagem de uma solução da equação de Gardner do tipo soliton, $\mathcal{T}\phi$, com $\phi \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R})$, é uma solução da equação F-mKdV ou D-mKdV da forma $\alpha + \beta\phi$, e portanto não pertence ao espaço $C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R})$. Dessa maneira, para obter a estabilidade dos solitons (5.2), Alejo teve que provar a estabilidade de soluções da forma, $\psi = \alpha + \beta\phi$, com $\phi(\pm\infty) = 0$, para a equação (5.3).

Observe que no caso periódico, o espaço $C(\mathbb{R}, H^1_{per}([0, L]))$ é invariante por $\mathcal{T}$, isto é, se $f \in C(\mathbb{R}, H^1_{per}([0, L]))$ então $\mathcal{T}(f) \in C(\mathbb{R}, H^1_{per}([0, L]))$. Portanto, as soluções ondas viajantes periódicas de (5.1) se relacionam de uma forma mais direta com as soluções ondas viajantes periódicas de (5.3). Conforme veremos no decorrer deste capítulo, este fato facilita a obtenção da estabilidade.

Além de relacionar soluções de dois problemas, veremos que $\mathcal{T}$ satisfaz a propriedade,

$$\mathbf{P} : \left\{ \rho(u, v) = C\rho(\mathcal{T}u, \mathcal{T}v), \ \ \forall\, u, v \in C(\mathbb{R}, H^1_{per}([0, L])); \ \ \rho(u, v) = \inf_{r \in \mathbb{R}} \|u - v(\cdot + r)\|_{H^1_{per}} \right\}.$$

Esta propriedade é útil pois ela relaciona a geometria dos dois problemas e portanto a torna o ingrediente principal de nossa análise.

O difeomorfismo $\mathcal{T}$ não apenas associa soluções da equação (5.1) com as de (5.3), mas também controla a distância entre duas soluções, com relação a norma de $H^1_{per}([0, L])$ módulo translações. Portanto, todos os resultados de estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas para F-mKdV e D-mKdV, são transportados para a equação de Gardner e vice e versa.

Aqui, provaremos a estabilidade orbital das seguintes ondas viajantes periódicas:

(i)

$$\psi_k(x - c_1(k)t) = \frac{2\sqrt{6}K(k)}{\sqrt{b}L} \mathrm{DN}\left(\frac{2K(k)}{L}(x - c_1(k)t), k\right) - \frac{a}{2b}, \tag{5.5}$$

onde $c_1(k) = \frac{4K^2(k)}{L^2}(2 - k^2) - \frac{a^2}{4b}$ e

(ii)

$$\varphi_k(x - c_2(k)t) = \frac{4\sqrt{3}K(k)}{g(k)\sqrt{b}L}\left(\frac{\mathrm{DN}^2\left(\frac{2K(k)}{L}(x - c_2(k)t), k\right)}{1 + \beta^2 \mathrm{SN}^2\left(\frac{2K(k)}{L}(x - c_2(k)t), k\right)}\right) - \frac{a}{2b}, \tag{5.6}$$

onde

$$c_2(k) = \frac{16K^2(k)}{L^2}\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - \frac{a^2}{4b}, \quad \beta^2 = \sqrt{k^4 - k^2 + 1} + k^2 - 1$$

e

$$g(k) = \sqrt{\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - k^2 + \frac{1}{2}}.$$

Na primeira seção deste capítulo, analisaremos algumas das propriedades de $\mathcal{T}$, incluindo a propriedade **P**. Na segunda seção, estudaremos a estabilidade orbital das ondas viajantes (5.5) e (5.6). Ademais, veremos como a aplicação $\mathcal{T}$ às relacionam com as ondas periódicas estudadas no capítulo anterior e em [14].

5.1 Difeomorfismo entre Gardner e F-mKdV ou D-mKdV

Nesta seção, estudaremos as propriedades da aplicação $\mathcal{T}$ definida em (5.4).

Lema 5.1. *Seja $\mathcal{T}$ a aplicação definida em* (5.4). *Então, $\mathcal{T} : C(\mathbb{R}, H^1_{per}([0,L])) \longrightarrow C(\mathbb{R}, H^1_{per}([0,L]))$ é um difeomorfismo cujo inverso é dado por*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{-1}: \quad C(\mathbb{R}, H^1_{per}([0,L])) &\longrightarrow C(\mathbb{R}, H^1_{per}([0,L])) \\ u(x,t) &\longmapsto \mathcal{T}^{-1}(u(x,t)) := \sqrt{\frac{6\gamma}{b}}u\left(x+\frac{a^2}{4b}t,t\right)-\frac{a}{2b}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Além disso, $\mathcal{T}$ satisfaz a propriedade **P**.

Demonstração: Como $\mathcal{T}$ é uma composta de translação com homotetia, segue que $\mathcal{T}$ é um difeomorfismo. Além disso,

(i) $\mathcal{T}(\mathcal{T}^{-1}(u(x,t)) = u(x,t)$,

(ii) $\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{T}(v(x,t)) = v(x,t)$.

De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathcal{T}^{-1}u)(x,t) &= \mathcal{T}\left(\sqrt{\frac{6\gamma}{b}}u\left(x+\frac{a^2}{4b}t,t\right)-\frac{a}{2b}\right) \\ &= \sqrt{\frac{b}{6\gamma}}\left(\sqrt{\frac{6\gamma}{b}}u\left(x+\frac{a^2}{4b}t-\frac{a^2}{4b}t,t\right)-\frac{a}{2b}\right)+\sqrt{\frac{b}{6\gamma}}\frac{a}{2b} \\ &= u(x,t)-\sqrt{\frac{b}{6\gamma}}\frac{a}{2b}+\sqrt{\frac{b}{6\gamma}}\frac{a}{2b}=u(x,t) \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{T}v)(x,t) &= \mathcal{T}^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{6\gamma}}\left[v\left(x-\frac{a^2}{4b}t,t\right)+\frac{a}{2b}\right]\right)\\
&= \sqrt{\frac{6\gamma}{b}}\sqrt{\frac{b}{6\gamma}}\left(v\left(x-\frac{a^2}{4b}t+\frac{a^2}{4b}t,t\right)+\frac{a}{2b}\right)-\frac{a}{2b}\\
&= v(x,t).
\end{aligned}
$$

Mostraremos agora que $\mathcal{T}$ satisfaz a propriedade **P**. Com efeito, se $u,\ \ v\in C(\mathbb{R},H^1_{per}([0,L]))$, então

$$
\begin{aligned}
\rho(\mathcal{T}(u),\mathcal{T}(v)) &= \inf_{r\in\mathbb{R}}\left\|\sqrt{\frac{b}{6\gamma}}\left[u\left(x-\frac{a^2}{4b}t,t\right)+\frac{a}{2b}-v\left(x-\frac{a^2}{4b}t+r,t\right)-\frac{a}{2b}\right]\right\|_1\\
&= \sqrt{\frac{b}{6\gamma}}\inf_{r\in\mathbb{R}}\left\|u\left(x-\frac{a^2}{4b}t,t\right)-v\left(x-\frac{a^2}{4b}t+r,t\right)\right\|_1\\
&= C\rho(u,v),
\end{aligned}
$$

onde $C=\sqrt{\frac{b}{6\gamma}}$. □

Veremos no lema a seguir que $\mathcal{T}$ associa soluções da equação (5.1) às soluções da equação (5.3), bem como $\mathcal{T}^{-1}$ associa as soluções de (5.3) as de (5.1).

Lema 5.2. *Seja $\mathcal{T}:C(\mathbb{R},H^1_{per}([0,L]))\longrightarrow C(\mathbb{R},H^1_{per}([0,L]))$, o difeomorfismo definido em* (5.4)*. Então, $v(x,t)$ é solução de* (5.1) *se, e somente se, $u(x,t):=(\mathcal{T}v)(x,t)$ é solução de* (5.3)*.*

Demonstração: Como as equações (5.1) e (5.3) admitem soluções suaves (ver Observação 5.6), temos, por argumentos de densidade, que é suficiente provarmos o lema para tais soluções.

Primeiramente, vamos mostrar que se $v(x,t)$ é solução de (5.1), então $u(x,t):=(\mathcal{T}v)(x,t)$ é solução de (5.3). Temos que

$$
u(x,t):=(\mathcal{T}v)(x,t)=\sqrt{\frac{b}{6\gamma}}\left[v\left(x-\frac{a^2}{4b}t,t\right)+\frac{a}{2b}\right].
$$

Logo,

$$
u_t=\sqrt{\frac{b}{6\gamma}}\left(-\frac{a^2}{4b}v_x+v_t\right),
$$

$$u_{xxx} = \sqrt{\frac{b}{6\gamma}}v_{xxx}$$

e

$$\begin{aligned}6\gamma u^2 u_x &= 6\gamma\sqrt{\frac{b}{6\gamma}}\left(\frac{b}{6\gamma}v^2 + 2\frac{b}{6\gamma}v\frac{a}{2b} + \frac{b}{6\gamma}\frac{a^2}{4b^2}\right)v_x \\ &= \sqrt{\frac{b}{6\gamma}}\left(bv^2v_x + avv_x + \frac{a^2}{4b}v_x\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}u_t + u_{xxx} + 6\gamma u^2u_x &= \sqrt{\frac{b}{6\gamma}}\left(-\frac{a^2}{4b}v_x + v_t + v_{xxx} + bv^2v_x + avv_x + \frac{a^2}{4b}v_x\right) \\ &= \sqrt{\frac{b}{6\gamma}}\left(v_t + v_{xxx} + avv_x + bv^2v_x\right) = 0.\end{aligned}$$

Reciprocamente, sendo $u(x,t) := (\mathcal{T}v)(x,t)$, então $v(x,t) = (\mathcal{T}^{-1}u)(x,t)$ e v satisfaz

$$v_t = \sqrt{\frac{6\gamma}{b}}\left(\frac{a^2}{4b}u_x + u_t\right),$$

$$v_{xxx} = \sqrt{\frac{6\gamma}{b}}\left(u_{xxx}\right),$$

$$avv_x = a\left(\sqrt{\frac{6\gamma}{b}}u - \frac{a}{2b}\right)\sqrt{\frac{6\gamma}{b}}u_x = \sqrt{\frac{6\gamma}{b}}\left(a\sqrt{\frac{6\gamma}{b}}uu_x - \frac{a^2}{2b}u_x\right)$$

e

$$bv^2v_x = b\left(\frac{6\gamma}{b}u^2 - 2\sqrt{\frac{6\gamma}{b}}\frac{a}{2b}u + \frac{a^2}{4b^2}\right)\sqrt{\frac{6\gamma}{b}}u_x = \sqrt{\frac{6\gamma}{b}}\left(6\gamma u^2u_x - \sqrt{\frac{6\gamma}{b}}auu_x + \frac{a^2}{4b}u_x\right).$$

Daí, se $u(x,t) := (\mathcal{T}v)(x,t)$ é solução de (5.3) com $\gamma = \mathrm{sgn}(b)$, então

$$\begin{aligned}v_t + v_{xxx} + bv_x + avv_x + vv^2v_x = &\sqrt{\frac{6\gamma}{b}}\left(\frac{a^2}{4b}u_x + u_t + u_{xxx} + a\sqrt{\frac{6\gamma}{b}}uu_x\right. \\ &\left.-\frac{a^2}{2b}u_x + 6\gamma u^2u_x - a\sqrt{\frac{6\gamma}{b}}uu_x + \frac{a^2}{4b}u_x\right) \\ = &\sqrt{\frac{6\gamma}{b}}\left(u_t + u_{xxx} + 6\gamma u^2u_x\right) = 0.\end{aligned}$$

□

Observação 5.3. *Na verdade, a equação de Gardner* (5.1) *pode ser considerada em uma forma mais geral, isto é,*

$$v_t + \alpha_1 v_{xxx} + \alpha_2 v_x + \alpha_3 v v_x + \alpha_4 v^2 v_x = 0. \tag{5.8}$$

Neste caso os difeomorfismos $\mathcal{T}$ *e* $\mathcal{T}^{-1}$ *são dados por*

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{T}: & C(\mathbb{R}, H^1_{per}([0,L])) & \longrightarrow & C(\mathbb{R}, H^1_{per}([0,L])) \\ & v(x,t) & \longmapsto & (\mathcal{T}v)(x,t) := \sqrt{\dfrac{\alpha_4}{6\gamma\alpha_1}}\left[v\left(x + \dfrac{4\alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2}{4\alpha_4\alpha_1}t, \dfrac{1}{\alpha_1}t\right) + \dfrac{\alpha_3}{2\alpha_4}\right], \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{T}^{-1}: & C(\mathbb{R}, H^1_{per}([0,L])) & \longrightarrow & C(\mathbb{R}, H^1_{per}([0,L])) \\ & u(x,t) & \longmapsto & (\mathcal{T}^{-1}u)(x,t) := \sqrt{\dfrac{6\gamma\alpha_1}{\alpha_4}}u\left(x - \dfrac{4\alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2}{4\alpha_4}t, \alpha_1 t\right) - \dfrac{\alpha_3}{2\alpha_4}, \end{array}$$

respectivamente, onde $\gamma = sgn(\alpha_1\alpha_4)$. *Esta transformação* $\mathcal{T}$ *associa as soluções de* (5.8) *às de* (5.3). *Aqui, escolhemos lidar com o caso* $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = a$ *e* $\alpha_4 = b$ *para simplificar os cálculos. Contudo, todas as conclusões que obtemos continuam válidas caso considere-se este caso mais geral.*

5.2 Estabilidade de ondas periódicas para Gardner

Nesta seção, estudaremos a estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas para a equação de Gardner. Com o intuito de simplificarmos os cálculos e estabelecermos relações com as ondas viajantes estudadas no capítulo anterior e em [14], restringiremos nossa abordagem ao caso $b > 0$. Isto nos leva a relacionarmos a equação de Gardner somente com a equação F-mKdV. Porém, uma análise similar ao que fazemos pode ser feita no caso $b < 0$, comparando neste caso, a equação de Gardner com a equação D-mKdV.

Como a partir de agora lidaremos somente com a equação F-mKdV, vamos denota-la, como no capítulo anterior, apenas por mKdV.

As soluções ondas viajantes, $v(x,t) = \psi_{(\tilde{c},\tilde{A})}(x - \tilde{c}t)$, da equação de Gardner, são obtidas a partir de soluções da EDO

$$\psi'' - \tilde{c}\psi + \frac{a}{2}\psi^2 + \frac{b}{3}\psi^3 - \tilde{A} = 0 \tag{5.9}$$

e as ondas viajantes, $u(x,t) = \phi_{(c,A)}(x - ct)$, da equação mKdV, são obtidas a partir de soluções da EDO

$$\phi'' - c\phi + 2\phi^3 - A = 0. \tag{5.10}$$

Como $\mathcal{T}$ associa as soluções da equação de Gardner com as soluções da equação mKdV, então $\mathcal{T}$, também associa as soluções de (5.9) com as soluções de (5.10). Além disso, como ψ e ϕ dependem de $(\tilde{c}, \tilde{A})$ e (c, A), respectivamente, temos que $\mathcal{T}$ opera sobre estas constantes da seguinte maneira: se $\psi_{(\tilde{c},\tilde{A})}$ é solução de (5.9), então

$$\phi_{(c,A)}(x) := \mathcal{T}\psi_{(\tilde{c},\tilde{A})}(x) = \sqrt{\frac{b}{6\gamma}}\left[\psi_{(\tilde{c},\tilde{A})}(x) + \frac{a}{2b}\right]$$

é solução de (5.10), com

$$\begin{cases} c = \tilde{c} + \dfrac{a^2}{4b}, \\ \\ A = \sqrt{\dfrac{b}{6}}\left(-\tilde{c}\dfrac{a}{2b} - \dfrac{a^3}{12b^2} + \tilde{A}\right). \end{cases} \tag{5.11}$$

Reciprocamente, se $\phi_{(c,A)}$ é solução de (5.10), então

$$\psi_{(\tilde{c},\tilde{A})}(x) := \mathcal{T}^{-1}\phi_{(c,A)}(x) = \sqrt{\frac{6}{b}}\phi_{(c,A)}(x) - \frac{a}{2b}$$

é solução de (5.9), com

$$\begin{cases} \tilde{c} = c - \dfrac{a^2}{4b}, \\ \\ \tilde{A} = \sqrt{\dfrac{6}{b}}A + c\dfrac{a}{2b} - \dfrac{a^3}{24b^2}. \end{cases} \tag{5.12}$$

As caracterizações em (5.11) e em (5.12) são importantes, pois as constantes c, $\tilde{c}$, A e $\tilde{A}$ aparecem na forma explícita das ondas viajantes. Além disso, podemos ver o comportamento exato das velocidades c e $\tilde{c}$. Nos próximos dois teoremas, provaremos a estabilidade orbital das ondas viajantes ψ_k e φ_k, dadas em (5.5) e (5.6), respectivamente.

Teorema 5.4. *Seja $\psi_k(x - c_1(k)t)$ dada em (5.5). Então, $\psi_k(\xi)$ é solução de (5.9) com*

$$\begin{cases} \tilde{c} = c_1(k) = \dfrac{4K^2(k)}{L^2}(2 - k^2) - \dfrac{a^2}{4b}, \\ \\ \tilde{A} = A_1(k) = \dfrac{2aK^2(k)}{bL^2}(2 - k^2) - \dfrac{a^3}{24b^2}. \end{cases}$$

Além disso, $v(x,t) = \psi_k(x - c_1(k)t)$ é uma solução da equação de Gardner orbitalmente estável em $H^1_{per}([0, L])$.

Demonstração: A primeira afirmação segue do fato de

$$\phi_k(\xi) = \mathcal{T}(\psi_{(c_1(k),A_1(k))}(\xi)) = \frac{2K(k)}{L}\mathrm{DN}\left(\frac{2K(k)}{L}\xi, k\right) \tag{5.13}$$

ser solução de (5.10) com

$$\begin{cases} c(k) = \dfrac{4K^2(k)}{L^2}(2-k^2), \\ \\ A(k) = 0. \end{cases}$$

Ver [14].

Seja $v(x,t)$ uma solução da equação de Gardner com dado inicial v_0. Da propriedade **P**, segue

$$\rho(v, \psi_k) = C\rho(\mathcal{T}v, \mathcal{T}\psi_k), \ \text{ para todo } \ t \in \mathbb{R}. \tag{5.14}$$

Além disso, como $\mathcal{T}$ leva soluções da equação de Gardner em soluções da equação mKdV, temos que $\mathcal{T}v$ é solução da equação mKdV com dado inicial $\mathcal{T}v_0$.

Por outro lado, Angulo em [14], provou que a onda viajante (5.13) é orbitalmente estável pelo fluxo da mKdV em $H^1_{per}([0,L])$. Assim, dado $\varepsilon_1 > 0$, existe um $\delta_1 > 0$, tal que se $\rho(\mathcal{T}u_0, \phi_k) < \delta_1$, então

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \rho(\mathcal{T}(v(x,t)), \phi_k) < \varepsilon_1. \tag{5.15}$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, basta escolher $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{C}$ e $\delta > 0$ tal que $\delta < C\delta_1$. Daí, se $\rho(v_0, \psi_k) < \delta$, temos por (5.14),

$$\rho(\mathcal{T}(v_0), \phi_k) = \frac{1}{C}\rho(v_0, \psi_k) < \frac{1}{C}\delta < \frac{1}{C}C\delta_1 = \delta_1.$$

Logo, de (5.14) e (5.15), obtemos

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \rho(v(x,t), \psi_k) = C \sup_{t\in\mathbb{R}} \rho(\mathcal{T}(v(x,t)), \phi_k) < C\varepsilon_1 < C\frac{1}{C}\varepsilon = \varepsilon.$$

$\square$

Teorema 5.5. *Seja $\varphi_k(x - c_2(k)t)$ dada em (5.6). Então, $\varphi_k(\xi)$ é solução de (5.9) com*

$$\begin{cases} \tilde{c} = c_2(k) = \dfrac{16K^2(k)}{L^2}\sqrt{k^4-k^2+1} - \dfrac{a^2}{4b}, \\ \\ \tilde{A} = A_2(k) = \dfrac{8aK^2(k)}{bL^2}\sqrt{k^4-k^2+1} - \dfrac{32\sqrt{2}K^3(k)\sqrt{2\sqrt{k^4-k^2+1}+2k^2-1}}{3\sqrt{b}L^3\left(\sqrt{k^4-k^2+1}-2k^2+1\right)^{-1}} - \dfrac{a^3}{24b^2}\,. \end{cases}$$

Além disso, $v(x,t) = \varphi_k(x - c_2(k)t)$ é uma solução da equação de Gardner orbitalmente estável em $H^1_{per}([0,L])$.

Demonstração: A primeira afirmação segue do fato que

$$\phi_k(\xi) = \mathcal{T}(\varphi_k(\xi)) = \frac{4K(k)}{\sqrt{2}g(k)L}\left(\frac{\mathrm{DN}^2\left(\frac{2K(k)}{L}\xi, k\right)}{1+\beta^2\mathrm{SN}^2\left(\frac{2K(k)}{L}\xi, k\right)}\right)$$

é uma solução de (5.10), com

$$\begin{cases} c(k) = \dfrac{16K^2(k)}{L^2}\sqrt{k^4-k^2+1}, \\ \\ A(k) = -\dfrac{32K^3(k)}{3\sqrt{3}L^3}\left(\sqrt{k^4-k^2+1}-2k^2+1\right)\sqrt{2\sqrt{k^4-k^2+1}+2k^2-1}. \end{cases}$$

Ver (4.34).

Agora, note que provamos, no Teorema 4.10, que esta onda é orbitalmente estável em $H^1_{per}([0,L])$. Portanto, o resultado segue com a mesma argumentação do Teorema 5.4. $\square$

Observação 5.6 (GWP-Gardner)**.** *A boa colocação global para as equações Focusing e Defocusing mKdV podem ser encontras em [29]. Além disso, usando o Teorema 1.3 de Hu e Li em [39], obtemos a boa colocação local da equação de Gardner em $H^s_{per}([0,L])$, $s > \frac{1}{2}$. Note que, a conservação da energia*

$$E(u) = \frac{1}{2}\left(\int_0^L u_x^2 - \frac{a}{3}u^3 - \frac{b}{6}u^4 dx\right)$$

para a equação de Gardner, implica na boa colocação global em $H^1_{per}([0,L])$.

Capítulo 6

Estudos Futuros

Ainda existem várias ondas periódicas de várias equações a serem estudadas no que diz respeito a estabilidade orbital, especialmente no caso $A \neq 0$, uma vez que neste caso, todas as ondas viajantes periódicas para a equação em questão são englobadas. Conforme vimos na introdução e no desenvolver desta tese, poucos trabalhos tem abordado o caso $A \neq 0$. Embora estes trabalhos tenham objetivos em comum, e certas semelhanças, cada um faz uma abordagem diferente para lidar com um mesmo problema, o que desperta enorme curiosidade em buscar relações entre eles e verificar se é possível explorar o ponto forte de cada um em prol de uma teoria robusta que nos forneça um completo entendimento do assunto.

É importante mencionar, que as teorias desenvolvidas por Johnson em [43] e Natali e Neves em [55] vão além de apenas fornecer uma resposta para o que ocorre com a estabilidade de ondas viajantes periódicas no caso em que $A \neq 0$. Esses trabalhos apresentam resultados de estabilidade para ondas viajantes sem usar sua forma explícita. Estas razões, nos motivam a estudar e fornecer contribuições para essas teorias.

Um primeiro ponto interessante a se estudar, é ampliar as ideias do nosso trabalho para outras ondas viajantes periódicas, bem como para ondas viajantes periódicas de outras equações. Por exemplo, as ondas viajante dadas em (1.15) e (1.16) são positivas e pares (exceto para o caso da equação de Gardner, em que a onda viajante é uma variação de (1.16)) e para esses tipos de ondas viajantes periódicas a teoria de estabilidade em geral mostra-se menos trabalhosa. Assim é importante verificar o que ocorre com outras ondas viajantes que possuem características diferentes. Neste contexto, seria interessante estudar a estabilidade não linear das seguintes ondas viajantes periódica da equação modificada KdV, as quais não necessariamente são positivas,

$$\phi(\xi) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)\mathrm{SN}^2\left(\gamma \xi, k\right)}, \tag{6.1}$$

$$\phi(\xi) = \frac{\alpha_1\alpha_4 \mathrm{CN}^2(\gamma\xi, k)}{\alpha_4 - \alpha_1 \mathrm{SN}^2(\gamma\xi, k)}, \tag{6.2}$$

$$\phi(\xi) = \frac{\alpha_3\alpha_1 \mathrm{SN}^2(\gamma\xi, k)}{(\alpha_3 - \alpha_1) + \alpha_1 \mathrm{SN}^2(\gamma\xi, k)}, \tag{6.3}$$

e

$$\phi(\xi) = \frac{\alpha_2 \mathrm{DN}^2(\gamma\xi, k)}{1 - \beta \mathrm{SN}^2(\gamma\xi, k)}, \tag{6.4}$$

onde os α_i's são as raízes reais do polinômio $P(t) = -t^4 + ct^2 + 2At + B$, $\gamma = \gamma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ e $\beta = \beta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Além disso, caso obtenha-se estabilidade para estas ondas, seria interessante tentar estender os resultados de estabilidade, usando o difeomorfismo $\mathcal{T}$, para as ondas viajantes da equação de Gardner.

Outro ponto que desperta interesse, seria tentar obter as propriedades espectrais P_1 e P_2 sem recorrer a um método numérico. A teoria de Neves, até onde temos conhecimento, é a que mais se aproxima de uma resposta afirmativa, visto que bastaria obter o sinal de θ sem o uso de método numérico.

Capítulo 7

Apêndice

7.1 Funções elípticas de Jacobi.

Apresentamos agora algumas propriedades básicas das integrais elípticas e as funções elípticas de Jacobi, as quais são denotadas por $\mathrm{SN}(u)$, $\mathrm{CN}(u)$ e $\mathrm{DN}(u)$. Uma descrição mais detalhada pode ser encontrada nas referências [24] e [25]. A integral elíptica de primeiro tipo, é definida por

$$\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}} \equiv F(\varphi, k),$$

onde $y = \sin(\varphi)$. A integral elíptica de segundo tipo é

$$\int_0^y \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}d\theta \equiv E(\varphi, k)\,.$$

O número k é chamado *módulo* da integral elíptica e pertence ao intervalo $(0,1)$. O número $k' = \sqrt{1-k^2}$ é chamado de módulo complementar. O parâmetro φ é chamado o argumento das integrais elípticas. É usualmente entendido que $0 \leq y \leq 1$ ou ainda que $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$. Para $y = 1$, as integrais acima são ditas completas. Neste caso, escrevemos,

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}} \equiv F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv K(k) \equiv K,$$

e

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}d\theta \equiv E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv E(k) \equiv E\,.$$

Ademais, temos que $\lim\limits_{k\to 0^+} K(k) = \lim\limits_{k\to 0^+} E(k) = \dfrac{\pi}{2}$, enquanto que $\lim_{k\to 1^-} E(k) = 1$ e $\lim_{k\to 1^-} K(k) = +\infty$. Para $k \in (0,1)$, temos

$$\frac{dK}{dk} > 0, \quad \frac{d^2K}{dk^2} > 0, \quad \frac{dE}{dk} < 0, \quad \frac{d^2E}{dk^2} < 0, \quad \text{e} \quad E(k) < K(k)\,.$$

Além disso, $E(k)+K(k)$ e $E(k)K(k)$ são funções estritamente crescentes para $k \in (0,1)$. Podemos ainda deduzir algumas derivadas das funções K e E que são úteis,

$$\begin{cases} \dfrac{dK}{dk} & = \dfrac{E - k'^2 K}{kk'^2}\,, \\ \\ \dfrac{dE}{dk} & = \dfrac{E-K}{k}\,. \end{cases}$$

As funções elípticas de Jacobi são definidas como segue. Considere a integral elíptica,

$$u(y_1;k) \equiv u = \int_0^{y_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}} \equiv F(\varphi,k),$$

que é uma função estritamente crescente na variável y_1. Sua inversa é escrita como sendo $y_1 = \mathrm{sen}(\varphi) \equiv \mathrm{SN}(u;k)$ onde $\varphi = \mathrm{AM}(u;k)$ (a função $\mathrm{AM}(u;k)$ é chamada função amplitude de u). Podemos escrever ainda, $y_1 = \mathrm{SN}(u)$ quando não é necessário enfatizar o módulo k. As outras duas funções elípticas básicas, as funções cnoidal e dnoidal são definidas em termos de SN por,

$$\begin{cases} \mathrm{CN}(u;k) & = \sqrt{1-\mathrm{SN}^2(u;k)}\,, \\ \\ \mathrm{DN}(u;k) & = \sqrt{1-k^2y_1^2} = \sqrt{1-k^2\mathrm{SN}^2(u;k)}\,. \end{cases}$$

Notemos que estas funções são normalizadas fazendo-se uso de $\mathrm{SN}(0;k) = 0$, $\mathrm{CN}(0;k) = 1$ e $\mathrm{DN}(0;k) = 1$. A função SN é ímpar, enquanto que CN e DN são pares. Mais ainda, tais funções são periódicas com períodos reais $4K$, $4K$ e $2K$ respectivamente, isto é,

$$\mathrm{SN}(u+4K;k) = \mathrm{SN}(u;k),\;\; \mathrm{CN}(u+4K;k) = \mathrm{CN}(u;k),\;\; \mathrm{DN}(u+2K;k) = \mathrm{DN}(u;k)\,.$$

Temos também as relações

$$\begin{cases} \mathrm{SN}^2(u)+\mathrm{CN}^2(u) = 1,\;\; k^2\mathrm{SN}^2(u)+\mathrm{DN}^2(u) = 1,\;\; k'^2\mathrm{SN}^2(u)+\mathrm{CN}^2(u) = \mathrm{DN}^2(u), \\ \\ -1 \le \mathrm{SN}(u;k) \le 1, \quad -1 \le \mathrm{CN}(u;k) \le 1, \quad k'^2 \le \mathrm{DN}(u;k) \le 1\,, \\ \\ \mathrm{SN}(u+2K;k) = -\mathrm{SN}(u;k), \quad \mathrm{CN}(u+4K;k) = -\mathrm{CN}(u;k)\,, \end{cases}$$

para todo $k \in (0,1)$ e $u \in \mathbb{R}$. Além disso,

$$\mathrm{SN}(0) = 0, \quad \mathrm{CN}(0) = 1, \quad \mathrm{SN}(K) = 1, \quad \mathrm{CN}(K) = 0\,,$$

e

$$\mathrm{SN}(u;0)=\sin(u),\quad \mathrm{CN}(u;0)=\cos(u),\quad \mathrm{SN}(u;1)=\tanh(u),\quad \mathrm{CN}(u;1)=\mathrm{sech}(u)\,.$$

Finalmente, tem-se as fórmulas derivadas,

$$\frac{d}{du}\mathrm{SN}(u)=\mathrm{CN}(u)\mathrm{DN}(u),\quad \frac{d}{du}\mathrm{CN}(u)=-\mathrm{SN}(u)\mathrm{DN}(u),\quad \frac{d}{du}\mathrm{DN}(u)=-k^2\mathrm{CN}(u)\mathrm{SN}(u)\,.$$

Bibliografia

[1] ALBERT, J. P., BONA, J. L., Total positivity and the stability of internal waves in stratified fluids of finite depth. IMA J. Appl. Math. 46, p. 1-19, 1991.

[2] ALBERT, J. P., BONA, J. L., HENRY, D. B., Sufficient conditions for stability of solitary-wave solutions of model equations for long waves. Phys. D 24, p. 343-366, 1987.

[3] ALEJO, M., MUÑOZ, C., VEGA, L., The Gardner equation and the L^2-stability of the N-soliton solution of the Korteweg-de Vries equation. Trans. Amer. Math. Soc. 365, p. 195-212, 2013.

[4] ALEJO, A., Well-posedness and stability results for the Gardner equation. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 19, p. 503-520, 2012.

[5] Angulo, J., Natali, F., Instability of periodic travelling waves for dispersive models. Preprint, 2012.

[6] ALVAREZ, B. e ANGULO, J., Existence and stability of periodic travelling-wave solutions of the Benjamin equation. Commun. Pure Appl. Anal. 4, p. 367-388, 2005.

[7] ANGULO, J. e NATALI, F., Stability and instability of periodic travelling waves solutions for the critical Korteweg-de Vries and non-linear Schrödinger equations. Phys. D 238, p. 603-621, 2009.

[8] ANGULO, J., Nonlinear dispersive equations: Existence and stability of solitary and periodic travelling wave solutions. Math. Surveys Monogr. 156, 2009.

[9] ANGULO, J. e PASTOR, A., Stability of periodic optical solitons for a nonlinear Schrödinger system. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 139, p. 927-959, 2009.

[10] ANGULO, J., MATHEUS, C. e PILOD, D., Global well-posedness and non-linear stability of periodic traveling waves for a Schrödinger-Benjamin-Ono system. Commun. Pure Appl. Anal. 8, p. 815-844, 2009.

[11] ANGULO, J. e NATALI, F., Positivity properties of the Fourier transform and stability of periodic travelling waves solutions. SIAM J. Math. Anal. 40, p. 1123-1151, 2008.

[12] ANGULO, J. e QUINTERO, J., Existence and orbital stability of cnoidal waves for a 1D Boussinesq equation. Int. J. Math. Math. Sci., Art. ID 52020, 2007.

[13] ANGULO, J. e LINARES, F., Periodic pulses of coupled nonlinear Schrodinger equations in optics. Indiana Univ. Math. J. 56, p. 847-878, 2007.

[14] ANGULO, J., Nonlinear stability of periodic travelling wave solutions to the Schrödinger and modified Korteweg-de Vries equations. J. Differential Equations 235, p. 1-30, 2007.

[15] ANGULO, J., BONA, J.L. e SCIALOM, M., Stability of cnoidal waves. Adv. Differential Equations 11, p. 1321-1374, 2006.

[16] ANGULO, J., Stability of dnoidal waves to Hirota-Satsuma system. Differential Integral Equations 18, p. 611-645, 2005.

[17] ANGULO, J., Stability of cnoidal waves to Hirota-Satsuma systems. Mat. Contemp. 27, p. 189-223, 2004.

[18] ANGULO, J., Existence and stability of solitary wave solutions to nonlinear dispersive evolution equations. Publ. Mat. IMPA [24th Brazilian Mathematics Colloquium], 2003.

[19] ARRUDA, K., Orbital stability of periodic travelling wave solutions of the modified Boussinesq equation. Mat. Contemp. 40, p. 17-36, 2011.

[20] BANQUET, C., Existencia e estabilidade de ondas viajantes periodicas para alguns modelos dispersivos. Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática-Unicamp, 2009.

[21] BENJAMIN, T. B., Internal waves of permanent form in fluids of great depth. J. Fluid Mech. 29, p. 559-592, 1967.

[22] BENJAMIN, T. B., The stability of solitary waves. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 328, p. 153-183, 1972.

[23] BENJAMIN, T. B., Lectures on nonlinear wave motion. Lectures in Appl. Math. Amer. Math. Soc. 15, p. 3-47, 1974.

[24] BOWMAN, F., Introduction to elliptic functions with applications. Dover publications, NY, 1961.

[25] BYRD, P. F. e FRIEDMAN, M. D., Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists. 2nd ed., Springer, NY, 1971.

[26] BONA, J., On the stability theory of solitary waves. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 344, p. 363-374, 1975.

[27] BONA, J., SOUGANIDIS, P., STRAUSS, W., Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type. Proc. Roy. Soc. London Ser. A 411, p. 395?412, 1987.

[28] BOUSSINESQ, J., Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire. Comptes Rendus Acad. Sci (Paris) 72, p. 755-759, 1871.

[29] COLLIANDER, J., KEEL, M., STAFFILANI, G., TAKAOKA, H. e TAO, T., Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$. J. Amer. Math. Soc. 16, p. 705-749, 2003.

[30] DECONINCK, B., KAPITULA, T., On the orbital (in) stability of spatially periodic stationary solutions of generalized Korteweg-de Vries equations. Preprint, 2010.

[31] DODD, R. K., MORRIS, H. C., EILBECK, J. C. e GIBBON, J. D., Soliton and nonlinear wave equations. London and New York, Academic Press, 1, 1982.

[32] FERMI, E., PASTA, J., ULAM, S., Studies of nonlinear problems. I, Los Alamos Scientific Laboratory Report, LA-1940, 1955.

[33] GOLUB, G. H. e VAN LOAN, C.F., Matrix computations, Johns Hopkins University Press, 1989.

[34] GRILLAKIS, M. Linearized instability for nonlinear schrödinger and kleingordon equations. Comm. Pure Appl. Math. 41, p. 747-774, 1988.

[35] GRILLAKIS, M., Analysis of the linearization around a critical point of an infinite dimensional Hamiltonian system. Comm. Pure Appl. Math. 43, p. 299-333, 1990.

[36] GRILLAKIS, M., SHATAH, J. e STRAUSS, W., Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I, J. Functional Anal., 74 , p. 160-197, 1987.

[37] GRILLAKIS, M., SHATAH, J. e STRAUSS, W., Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II. J. Funct. Anal. 74, p. 308-348, 1990.

[38] HAUPT, O., Über eine methode zum beweis von oszillations theoremen. Math. Ann. 76, p. 67-104, 1914.

[39] Hu, Y., Li, X., Discrete Fourier restriction associated with KdV equations. Anal. PDE 6, p. 859?892, 2013.

[40] HUR, V. M. e JOHNSON, M. A., Stability of periodic travelling waves for nonlinear dispersive equations. arXiv:1303.4765v2, 2013.

[41] INCE, E. L., The periodic Lamé functions. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 60, p. 47-63, 1940.

[42] JEFFREY, A., KAKUTANI, T., Weak nonlinear dispersive waves: a discussion centered around the Korteweg-de Vries equation, SIAM Rev. 14, p. 582-643, 1972.

[43] JOHNSON, M. A., Nonlinear stability of periodic traveling wave solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation. SIAM J. Math. Anal. 41, p. 1921-1947, 2009.

[44] KATO,T., Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag Berlin, 1980.

[45] KENIG, C. E., PONCE, G., VEGA, L., A bilinear estimate with applications to the KdV equation. J. Amer. Math. Soc. 9, p. 573-603, 1996.

[46] KONNO, K., ICHIKAWA, HY., A modified Korteweg de Vries equation for ion acoustic waves. Journal of the Physical Society of Japan 37, p. 1631-1636, 1974.

[47] KORTEWEG, D. J., DE VRIES, G., On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 39, p. 422-443, 1895.

[48] KRUSKAL, M. D., ZABUSKY, N. J., Progress on the Fermi-Pasta-Ulam nonlinear string problem. Princeton Plasma Physics Laboratory Annual Report, MATTQ-21, Princeton, NJ, p. 301-308, 1963.

[49] KUDRYASHOV, N. A., SINELSHCHIKOV, D. I., A note on the Lie symmetry analysis and exact solutions for the extended mKdV equation. Acta Appl. Math. 113, p. 41-44, 2011.

[50] LEIBOVICH, S., Weakly non-linear waves in rotating fluids. J. Fluid Mech. 42, p. 803-822, 1970.

[51] LIAPOUNOFF, A., Problème général de la stabilité du movement, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse 9, p. 203-474, 1907.

[52] LOU, S. Y., TONG, B., Hu, H., TANG, X., Coupled KdV equations derived from two-layer fluids. J. Phys. A 39, p. 513-527, 2006.

[53] MIURA, R. M., The Korteweg-deVries equation: a survey of results. SIAM Rev.18, p. 412-459, 1976.

[54] NARIBOLI, G. A., Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods. J. Math. Phys. Sci. 4, p. 64-73, 1970.

[55] NATALI, F. e NEVES, A., Orbital stability of periodic waves, IMA J. Appl. Math., p. 1-19, 2013.

[56] NATALI, F. e PASTOR, A., Stability properties of periodic standing waves for the Klein-Gordon-Schrödinger system, Commun. Pure Appl. Anal. 9, p. 413-430, 2010.

[57] NATALI, F. e PASTOR, A., Stability and instability of periodic standing wave solutions for some Klein-Gordon equations, J. Math. Anal. Appl. 347, p. 428-441, 2008.

[58] NATALI, F., Propriedades de positividade e estabilidade de ondas viajantes periódicas. Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática-Unicamp, 2007.

[59] NICKALLS, R. W. D., Viète, Descartes and the cubic equation. The Mathematical Gazette, p. 203-208, 2006.

[60] MAGNUS, W. e Winkler, S., Hill's equation, Intersience Tracts in Pure and Applied Mathematics 20. Wiley, NY, 1966.

[61] NEVES, A., Floquet's Theorem and stability of periodic solitary waves. J. Dynam. Differential Equations 21, p. 555-565, 2009.

[62] NEVES, A., Isoinertial family of operators and convergence of KdV cnoidal waves to solitons. J. Differential Equations 244, p. 875-886, 2008.

[63] PEREIRA, J. M., Stability and instability of solitary waves for a system of coupled BBM equations. Appl. Anal. 84, p. 807-819, 2005.

[64] RAYLEIGH, Lord, On waves. Phil. Mag 1, p. 257-279, 1876.

[65] RUSSELL, J. S., Report on waves. In: 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, p. 311-390, 1844.

[66] SOUGANIDIS, P. E., STRAUSS, W. A., Instability of a class of dispersive solitary waves. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 114, p. 195-212, 1990.

[67] WADATI M., Wave propagation in nonlinear lattice I. J Phys Soc Jpn 38, p. 673-680, 1975.

[68] WADATI M., Wave propagation in nonlinear lattice II. J Phys Soc Jpn 38, p. 681-686, 1975.

[69] WASHIMI, H., TANIUTI, T., Propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitude. Phys. Rev. Lett. 17, p. 996-998, 1966.

[70] WEINSTEIN, M. I., Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations. Comm. Pure Appl. Math. 39, p. 51-67, 1986.

[71] WEINSTEIN, M. I., Existence and dynamic stability of solitary wave solutions of equations arising in long wave propagation. Comm. Partial Differential Equations 12, p. 1133-1173, 1987.

[72] ZHANG,H., TIAN, B., ZHANG, H., Li, L., Exact periodic and solitary-wave solutions of multi-component modified Korteweg-de Vries equations. Commun. Theor. Phys. (Beijing) 51, p. 588-594, 2009.