

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica

Dissertação de Mestrado

**Preservação da amplitude na migração da equação
da onda**

Autor: **Maria Gabriela Melo Silva**

Orientador: **Prof. Dr. Jörg Schleicher**

Co-orientadora: **Profa. Dra. Amélia Novais**

Campinas, SP

Julho 2006

Preservação da amplitude na migração da equação da onda

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Maria Gabriela Melo Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 21 de Julho de 2006.



Prof. Dr. Jörg Schleicher

Orientador



Profa. Dra. Amélia Novais

Co-orientadora

Banca Examinadora

Prof. Dr. Jörg Schleicher

Prof. Dr. Marcelo de Sousa Assumpção

Prof. Dr. Margarida Pinheiro Mello

Dissertação de Mestrado apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues - CRB8a / 2116

Silva, Maria Gabriela Melo

Si38p Preservação da amplitude na migração da equação da onda / Maria
Gabriela Melo Silva -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientadores : Jorg Schleicher; Maria Amélia Novais Schleicher

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Migração. 2. Sismologia. 3. Geofísica – Modelos matemáticos.
I. Schleicher, Jorg. II. Schleicher, Maria Amélia Novais. III.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Titulo em inglês: Amplitude preservation in wave equation migration.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Migration. 2. Seismology. 3. Geophysics –
Mathematics models.

Área de concentração: Geofísica

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Jorg Schleicher (IMECC-UNICAMP)
 Prof. Dra. Margarida Pinheiro Mello (IMECC-UNICAMP)
 Prof. Dr. Marcelo de Sousa Assumpção (IAG-USP)

Data da defesa: 21/07/2006

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 21 de julho de 2006 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). JOERG DIETRICH WILHELM SCHLEICHER



Prof. (a). Dr (a). MARGARIDA PINHEIRO MELLO



Prof. (a). Dr (a). MARCELO SOUSA DE ASSUMPCÃO

Resumo

Em meios homogêneos, o operador diferencial da equação da onda cheia pode ser substituído pelo produto de dois operadores diferenciais. Cada um destes operadores gera uma equação da onda de sentido único. As soluções destas equações descrevem a propagação de uma onda para baixo e uma para cima, respectivamente. Estas soluções possuem os mesmos tempos de trânsito e amplitudes que a onda cheia, uma vez que satisfazem as mesmas equações iconal e de transporte. No entanto, em meios heterogêneos, estas ondas de sentido único satisfazem somente a mesma equação iconal que a onda cheia. Zhang et al. (2003) mostraram como obter equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira de modo que estas possuam tanto os mesmos tempos de trânsito como as mesmas amplitudes da onda cheia. Com base nestas equações, desenvolveram uma migração da equação da onda de amplitude verdadeira para seções de fonte comum. Nosso objetivo neste trabalho é modificar a migração de Gazdag (1980), de tal maneira que esta passe a utilizar as equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira ao invés das equações de sentido único padrão, para realizar uma migração da equação da onda em amplitude verdadeira para seções de afastamento nulo.

Palavras-chave: Migração, Teoria dos Raios, Amplitude Verdadeira.

Abstract

In homogeneous media, the two-way wave operator can be substituted by the product of two one-way wave operators each of which generates a one-way wave equation. One of these equations has a downgoing wave and the other has an upgoing wave as a solution. Those one-way waves have the same traveltimes and amplitudes as the full wave since they satisfy the same eikonal and transport equation. However, in heterogeneous media, the standard one-way waves satisfy only the same eikonal equation as the full wave. Thus, in this case, the amplitudes of the migrated section obtained through a migration method based on the standard wave equations are incorrect. Zhang et al. (2003) described how to modify the standard one-way waves in order to produce the true amplitude one-way waves, which not only have the same traveltimes but also the same amplitudes as the full wave. They use these true amplitudes one-way wave equations to preserve the amplitudes in common-shot wave-equation migration. Our goal is to modify Gazdag migration (Gazdag, 1980) in such a way that it uses the true amplitude one-way wave equations instead of the standard ones, in order to realize a true amplitude wave equation migration for zero-offset data.

Keywords: Migration, Ray Theory, True Amplitude.

“Ride the sky”

“Much too long I’ve been a prisoner here

The hour has come to break out

Shackled and chained almost goin’ insane

It’s better to live on the run

Set me free, set me free

Send me a sign, wanna leave it all behind

I’ll be leaving the hands of doom

Rearrange the master plan, take the future in my hands

To be free and not trapped anymore

Ride the sky, ride the sky

Give me wings to fly, ride the sky

I have to think for myself and then act

In conformity of my own thoughts

No one should tell me what’s wrong and what’s right

Why don’t you leave me alone

Set me free, set me free”

(Kai Hansen)

Agradecimentos

Ao meu orientador, Jörg, e minha co-orientadora, Amélia, pela imensa ajuda acadêmica, confiança, apoio e paciência. Ao Jörg, em particular, por sempre interromper seu trabalho pra me atender e por passar horas à fio tentando enfiar Geofísica na minha cabeça, e a Amélia por todas nossas conversas, carinho e compreensão.

Ao Lúcio, por ter aberto as portas não somente de sua sala no Imecc, mas também de sua casa. Agradeço pela amizade e, é claro, pelos DVD's.

Ao Chico, por todo seu apoio desde a graduação e que há muito deixou de ser somente professor e tornou-se amigo. Agradeço também à sua esposa Talita e sua linda filhinha Luísa. A esta família, obrigada pelos jantares, paçocas e pães de queijo.

À Chetti pelo carinho durante a graduação e porque mesmo não tendo muito contato durante o mestrado, é impossível deixar de agradecer-lá.

Ao mais novo amigo e professor, Ricardo, que chegou chegando e dando o maior apoio na etapa final do mestrado. Agradeço também pelo incentivo para que eu continue em frente.

À querida Fátima por deixar a burocracia o mais longe possível de nossas vidas, à Tânia por sempre me desculpar por eu não ler email e ao pessoal do lab que sempre me aguentou sem reclamar muito.

À querida Valéria (mamãe do Mirko) que sempre ofereceu ajuda mesmo antes que eu tivesse que pedir, pela amizade, pelo carinho.

Aos queridos, corajosos e perseverantes mestres em Matemática Aplicada á Geofísica, Alessandra, Ana Carol e Fernando, e ao quase mestre Aleixo (por enquanto) pela amizade durante a

graduação e mestrado. Sem vocês a caminhada teria sido bem mais árdua e certamente menos divertida.

Às minhas amigas-mamães, a super fôfis Mari Aiub (mamãe da Maria Clara) e a querida Ana Letícia (mamãe do Arthur e da Helena). Obrigada pela amizade e pela hospedagem.

Aos meus amigos de graduação que eu pude manter contato e aos que eu não pude (e que vão me perdoar agora que coloquei os nomes deles na dissertação), Flávia, Heid, Márcio, Mau, Mauro, Mary Jane, Priscila e Ricardinho. Em especial, ao querido Rafa, cuja amizade só cresceu durante o mestrado e a quem prometi (e merece) uma frase exclusiva nesta página.

Aos amigos do Cofil, meus amigos de mais longa data, Ângela, Cordeiro, Diego, Diogo, Luciano, Renata, Ogata e tantos outros.

À minha mãe, Lourdes, ao meu pai, Saraiva, à minha irmã Carol, às minhas avós Antônia e Dinha, às minhas tias Maria, Dita, Ilodi e Neide e ao meu namorado Rodrigo, por tomarem o tempo mais bem gasto da minha vida e por me perdoarem por não ter podido dar mais atenção ainda.

À aqueles que possivelmente esqueci de citar.

Ao heavy metal.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Sumário

1	Introdução	1
2	Equações da onda de sentido único	8
2.1	Teoria dos Raios	8
2.1.1	Alta frequência	9
2.1.2	Aproximação de Teoria dos Raios	9
2.1.3	Caso 1D	13
2.1.4	Caso 2D	14
2.1.5	Caso 3D	16
2.2	Equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira	18
2.2.1	Equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira em uma dimensão	19
2.2.2	Equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira em duas dimensões	23
2.2.3	Equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira em três dimensões	26
2.3	Domínio (x, y, z, ω)	29
3	Migração	33
3.1	Introdução à migração	33
3.2	Método de Gazdag	35

3.2.1	Velocidade constante	37
3.2.2	Variação vertical da velocidade	41
3.3	Migração de amplitude verdadeira	42
3.3.1	Velocidade Constante	43
3.3.2	Variação Vertical da Velocidade	44
4	Refletor explosivo	46
4.1	Caso 2D	47
4.2	Caso 3D	50
4.3	Simetria Cilíndrica (2.5D)	51
5	Testes numéricos	57
5.1	Meio homogêneo	57
5.1.1	Dados de refletor explosivo	58
5.1.2	Dados de afastamento nulo	60
5.2	Meio verticalmente heterogêneo	64
6	Conclusões	71
	Referências bibliográficas	73
A	Dedução de $\lambda = ik_z$	75
B	Funções de Green	79
B.1	Função de Green 3D	79
C	Aproximação de Kirchhoff	83
C.1	Representação integral de Kirchhoff	84
C.2	Aproximação de Kirchhoff	88
D	Método da fase estacionária	90

Capítulo 1

Introdução

A *sísmica de reflexão* é uma área da Geofísica que utiliza informações obtidas através de campos de onda refletidos para estudar e mapear estruturas geológicas localizadas no subsolo da Terra, abaixo de uma determinada área de interesse. Os métodos da sísmica de reflexão são amplamente utilizados na indústria de prospecção de petróleo. Um dos principais objetivos destes métodos é a construção de imagens do subsolo que mostram as posições e as formas das diferentes camadas geológicas ali presentes. A partir destas imagens, pode-se identificar a possível presença de reservatórios de hidrocarbonetos.

Fontes sísmicas situadas próximas à superfície, ou sobre a mesma, geram campos de onda (acústicas ou elásticas) que se propagam no interior da Terra e incidem em interfaces que separam meios de diferentes propriedades geológicas. Estas interfaces são chamadas de *refletores*, pois refletem parte do campo de onda que nelas incide, gerando assim um campo de onda refletido que é registrado por aparelhos chamados geofones (*receptores*) geralmente localizados na superfície ou próximos a ela.

Cada receptor fornece um *sismograma* (traço sísmico) que é o registro temporal do sinal captado. Um conjunto de sismogramas dispostos lado a lado forma uma *seção de sismogramas*. Dependendo da configuração das fontes e receptores, uma seção de sismogramas referente a uma mesma região pode aparecer de maneira diferente. Existem várias configurações de aquisição de

dados possíveis, e cada uma delas gera seções de sismogramas particulares e diferentes. Um levantamento sísmico utiliza um grande número de fontes e receptores, e a disposição no espaço desses aparelhos depende das características da região de interesse. Em geral, cada traço sísmico está relacionado a um par fonte-receptor e, portanto, uma seção de sismogramas é uma coleção de dados fonte-receptor. A distância entre uma determinada fonte e um determinado receptor é chamada de *afastamento* (*offset*). As principais configurações de aquisição de dados são:

- *Afastamento nulo* (ZO - *zerooffset*): a distância entre a fonte e o receptor é zero, ou seja, fonte e receptor se localizam no mesmo lugar no espaço. Esta configuração é fisicamente impossível, porém, muitas vezes, dados coletados a partir de outras configurações são reorganizados e dispostos de maneira a simular uma coleta de afastamento nulo, pois esta configuração facilita em muitos casos a análise de dados. A energia registrada em cada receptor segue o caminho de incidência normal ao receptor (i.e., as energias incidente e refletida percorrem o mesmo caminho em sentidos opostos ao longo do chamado raio normal);
- *Fonte comum* ou tiro comum (CS - *common shot*): a posição da fonte é fixa e o afastamento em relação aos receptores cresce linearmente;
- *Receptor comum* (CR - *common receiver*): a posição dos receptores é fixa e as fontes se movem de maneira que o afastamento cresça linearmente;
- *Afastamento comum* (CO - *common offset*): o conjunto de fontes e receptores se movem de maneira que o afastamento seja constante.
- *Ponto médio comum* (CMP - *common mid-point*): os pares fonte-receptor são dispostos simetricamente em torno de um ponto médio fixo, de forma que o afastamento aumente linearmente.

Para uma determinada região de interesse fixa, configurações de coleta de dados diferentes geram seções de sismogramas diferentes. O objetivo da *migração* é, dada uma seção de sismo-

gramas, obter um *mapa refletor* (uma imagem do subsolo) com as posições e as formas corretas dos refletores. Esta imagem do subsolo obtida migrando-se uma seção de sismogramas também é chamada de *seção migrada*. Dentre as configurações de coleta de dados citadas, a de afastamento nulo é a que, em meios com variação lateral fraca de velocidade, gera seções de sismogramas mais parecidas com as seções migradas, ou seja, as curvas na seção de sismogramas, que são as chegadas dos sinais, possuem formas parecidas com as dos refletores. Uma introdução sobre estes e outros tópicos básicos de Geofísica podem ser encontrados em Yilmaz (1987).

Muitos dos métodos de migração utilizados atualmente cuidam apenas do aspecto cinemático (posições e formas dos refletores), sem tratar corretamente a parte dinâmica (relacionada à energia do campo de onda). Porém, é justamente a dinâmica do campo de onda que fornece informações sobre amplitudes que, por sua vez, estão diretamente ligadas às propriedades físicas e geológicas do meio. Devido à evidente importância de se obter valores corretos das amplitudes, ultimamente têm-se desenvolvido e utilizado métodos de migração que tratem corretamente não só do aspecto cinemático, mas também do dinâmico.

Neste trabalho, estudamos o método de migração chamado migração da equação da onda. Este método é baseado em equações da onda de sentido único, cujas formas unidimensionais são também conhecidas em outras aplicações como equações de advecção. Aqui, estamos interessados em equações da onda de sentido único, cujas soluções possuem os mesmos tempos de trânsito e as mesmas amplitudes que a solução da equação da onda, e que possam ser usadas na migração da equação da onda. O método de migração e as equações da onda de sentido único que satisfazem os requisitos acima são chamados, respectivamente, migração da equação da onda de amplitude verdadeira e equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira.

Às vezes, nos referimos à equação da onda como equação da onda cheia, apenas para melhor distinguir entre esta e as equações da onda de sentido único. A principal diferença entre as soluções destas duas equações é que, enquanto a equação da onda cheia descreve ondas que se propagam nos dois sentidos de uma determinada direção, as soluções de uma equação da onda de sentido único são ondas que se propagam em somente um sentido. Aqui, a direção de

propagação é a profundidade, ou seja, o eixo z . Sempre falamos em equações da onda de sentido único no plural porque temos duas destas equações de sentido único distintas, uma cuja solução é uma onda que se propaga somente para cima, e outra cuja solução é uma onda que se propaga somente para baixo. Como de costume na geofísica, tomamos a profundidade z como direção de propagação e o sentido positivo como sendo para baixo.

Em meios homogêneos, o “produto” dos operadores diferenciais das equações da onda de sentido único, que são equações diferenciais parciais de primeira ordem, fornece o operador diferencial da própria equação da onda cheia, que é uma equação diferencial parcial de segunda ordem. Este produto é conhecido como fatoração padrão da equação da onda. Os operadores diferenciais das equações da onda de sentido único usados na fatoração padrão da equação da onda nos permitem separar as soluções da equação da onda (ondas que se propagam para cima e para baixo) em ondas que se propagam em somente um sentido (ondas de sentido único). Estes operadores de sentido único são ferramentas muito utilizadas em modelagem e, principalmente, em migração sísmica.

Em um meio homogêneo, os tempos de trânsito e as amplitudes das ondas de sentido único são os mesmos da onda cheia, uma vez que estas ondas satisfazem às mesmas equações diferenciais. Estas equações diferenciais são as conhecidas equações iconal e de transporte, que fornecem os tempos de trânsito e as amplitudes, respectivamente. Quando tratamos da equação da onda em um meio heterogêneo, as amplitudes das ondas de sentido único passam a ser diferentes das amplitudes da onda cheia, enquanto os tempos de trânsito permanecem os mesmos. Mesmo não produzindo amplitudes corretas, as equações da onda de sentido único são usadas na migração da equação da onda. Recentemente, Zhang et al. (2003) mostraram como modificar os operadores diferenciais das equações da onda de sentido único para que estas novas ondas de sentido único tenham as mesmas amplitudes e tempos de trânsito da onda cheia. Aqui, apresentamos esta modificação para os casos uni, bi e tridimensional, sempre começando com o caso do meio homogêneo, seguindo pela variação vertical da velocidade e, finalmente, considerando meios completamente heterogêneos (com variação da velocidade em todas as direções). Por uma

questão de simplicidade, a partir do caso bidimensional, o domínio do problema é mudado através da transformada de Fourier no tempo e nas coordenadas espaciais transversais (x, y) . Deste modo, trabalhamos no domínio da frequência/número de onda, pois as expressões dos operadores no domínio tempo/espaço são muito mais complicadas, uma vez que a equação da onda, que neste domínio é uma equação diferencial parcial, passa a ser uma equação diferencial ordinária no domínio da frequência/número de onda.

A implementação dos operadores de sentido único modificados em um meio heterogêneo exige que apliquemos um tipo especial de operador, chamado operador pseudo-diferencial. O operador pseudo-diferencial presente nas equações da onda de sentido único modificadas, consiste na raiz quadrada de um operador diferencial. Este operador raiz quadrada pode ser representado como uma integral onde uma função racional do Laplaciano transversal aparece no integrando. Além de apresentar as equações da onda de sentido único modificadas, Zhang et al. (2003) também mostraram que as soluções destas equações possuem tempos de trânsito e amplitudes assintoticamente consistentes com a solução da equação da onda cheia correspondente. É neste sentido que estas equações da onda de sentido único modificadas são chamadas de equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira.

Baseando-se nas equações de sentido único de amplitude verdadeira, Zhang et al. (2003) desenvolveram um método de migração da equação da onda de amplitude verdadeira, baseado em esquemas de diferenças finitas. Este método possui algumas limitações. Os dados a serem migrados precisam ser soluções de uma única equação da onda. Em consequência disto, os dados precisam ser coletados a partir de um experimento com configuração de fonte comum (common-shot). Nota-se, que dados organizados a partir de outras coletas de dados como, por exemplo, afastamento comum, não satisfazem este pré-requisito. Nestas coletas, cada traço sísmico é solução de uma equação da onda individual, diferente das dos traços vizinhos, uma vez que o termo da fonte varia de traço para traço.

A fim de realizar numericamente a migração, escolhemos implementar o método descrito por Gazdag (1980). Este método de migração é baseado no método ASD (*Accurate Space De-*

rivative) descrito também pelo próprio Gazdag (1973, 1976). Este método calcula as derivadas espaciais através da transformada de Fourier, ao invés de usar fórmulas de diferenças finitas. Deste modo, aumentamos significativamente a precisão no cálculo das derivadas. Nosso objetivo é usar o método de migração de Gazdag fazendo uma simples adaptação do algoritmo descrito em seu artigo, de modo que este passe a utilizar as equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira ao invés das equações de sentido único padrão. Restringimos a nossa análise ao caso verticalmente inomogêneo.

A princípio, não podemos simplesmente trocar as equações de sentido único padrões pelas de amplitude verdadeira, pois o método de Gazdag foi criado para migrar dados de afastamento nulo, enquanto as equações de amplitude verdadeira somente corrigem amplitudes de dados de fonte comum. Assim, para que possamos introduzir estas equações no método de Gazdag, precisamos de dados que sejam “ao mesmo tempo” de afastamento nulo e fonte comum. Um tipo de coleta de dados que satisfaz este requisito é a chamada configuração de *refletor explosivo*. Esta é uma configuração de coleta de dados hipotética onde supostamente as fontes estão dispostas sobre o refletor e explodem ao mesmo tempo. Desta maneira, temos uma única fonte com o formato de refletor, daí o nome refletor explosivo. Dados provenientes de uma configuração de refletor explosivo são cinematicamente equivalentes a dados de afastamento nulo, e a dinâmica de dados de afastamento nulo pode ser transformada para assemelhar-se à dinâmica dos dados de refletor explosivo (Bleistein, 2001). Desta maneira, os dados de afastamento nulo podem ser migrados com o método de Gazdag com as equações de sentido único de amplitude verdadeira.

Esta dissertação está organizada em 5 capítulos. Procuramos inserir nesta dissertação a maior parte do material teórico utilizado, de maneira a evitar ao máximo que o leitor tenha de buscar referências fora deste texto para compreender o desenvolvimento deste trabalho.

No Capítulo 2 discutimos Teoria dos Raios e as equações de sentido único e amplitude verdadeira. Fazemos uma breve introdução sobre os principais conceitos de Teoria dos Raios, discutimos as hipóteses sob as quais a aproximação de Teoria dos Raios é uma boa aproximação da solução da equação da onda (alta frequência). Além disso, mostramos como obter as equa-

ções iconal e de transporte para os casos 1D, 2D e 3D nos domínios em que as equações de sentido único de amplitude verdadeira são utilizadas. Estudamos também o desenvolvimento das equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira para os casos 1D, 2D e 3D. A seguir, obtemos as expressões das equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira no domínio do espaço/tempo.

No Capítulo 3 fazemos uma breve discussão sobre migração e seus principais conceitos. Descrevemos a migração de Gazdag baseada no método da derivada espacial precisa, e como transformá-la em uma migração de amplitude verdadeira.

No Capítulo 4 discutimos os conceitos do modelo refletor explosivo para o meio 2D e em um meio com variação cilíndrica (2.5D), e descrevemos como transformar dados de afastamento nulo em dados que correspondem à situação de refletor explosivo.

No Capítulo 5, apresentamos exemplos e resultados numéricos. A implementação dos algoritmos e os testes foram todos feitos para o caso 2D. Finalmente, no Capítulo 6, discutimos os principais resultados e as devidas conclusões.

A dissertação conta com a ajuda de 4 Apêndices que apresentam breves deduções de resultados auxiliares.

Capítulo 2

Equações da onda de sentido único

Neste Capítulo, discutimos brevemente alguns aspectos da Teoria dos Raios utilizados neste trabalho e, a seguir, apresentamos o desenvolvimento das equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira desenvolvidas por Zhang et al. (2003).

2.1 Teoria dos Raios

Através do uso da Geometria Óptica na sísmica, também chamada de Teoria dos Raios de ordem zero, é possível fazer um tratamento assintótico separado de tempos de trânsito e amplitudes com a finalidade de entender as amplitudes das expressões das ondas de sentido único. Neste capítulo, apresentamos a aproximação de Teoria dos Raios como candidata à solução da equação da onda, e discutimos as condições sob as quais esta aproximação é válida (condição de alta frequência). Fazemos ainda, para os casos 1D, 2D e 3D, o desenvolvimento detalhado que nos leva às equações iconal e de transporte, que descrevem a cinemática e a dinâmica, respectivamente, da propagação de ondas.

2.1.1 Alta frequência

Intuitivamente, dados registrados por receptores referentes à reflexões provenientes de um refletor localizado no interior da Terra, podem ser esboçados com base em propriedades da geometria óptica.

Como uma primeira aproximação, pode-se considerar que as regras ou leis que governam o espalhamento de ondas provenientes de fronteiras no interior da Terra são as mesmas regras e leis que governam o espalhamento de ondas planas provenientes de fronteiras planas em meios acústicos com velocidade de propagação constante. Esta aproximação que usa conceitos de reflexão e refração de ondas planas, pode ser usada em meios heterogêneos com refletores não planos somente sob a hipótese de que as ondas tenham um conteúdo de alta frequência. A expressão “alta frequência” utilizada aqui não se refere a valores absolutos das frequências que compõem as ondas (Bleistein, 2001). O que se considera é a relação entre os números de onda (ou frequências espaciais) disponíveis nos dados, e o tamanho natural da escala do meio de propagação (i.e., a distância sobre a qual ocorrem variações significativas). Na prática, para que um determinado dado possa ser considerado de alta frequência, os comprimentos de onda envolvidos devem ser no mínimo 3 ou π vezes maiores que o comprimento de onda da variação de parâmetros relevantes do meio. A grosso modo, a frequência da onda que se propaga deve ser em torno de três vezes maior que a frequência de variação de parâmetros relevantes do meio, para que o campo de onda possa conter informações suficientemente precisas do meio. Contudo, mesmo quando a condição de alta frequência não é satisfeita, a aproximação usando regras para ondas planas e refletores planos pode não falhar totalmente. Estas falhas, quando existem, aparecem principalmente como erros nos valores das amplitudes e, em casos mais graves, até nos posicionamentos dos refletores (Bleistein, 2001).

2.1.2 Aproximação de Teoria dos Raios

Os conceitos de Teoria dos Raios descritos aqui podem ser encontrados em maiores detalhes em Bleistein (2001). Usar as representações e conceitos de Teoria dos Raios significa dizer

que estamos interessados em modelagem no campo de alta frequência. Para começar, isto quer dizer que cada evento que ocorre em um determinado meio se propaga de maneira independente dos outros. Isto também implica que um evento de curta duração, como um pulso de banda limitada que possua largura estreita e amplitude grande, mantém sua forma aproximadamente por toda a sua propagação (i.e., a dispersão é negligenciada), podendo, porém, sofrer variações na amplitude.

Observando-se um evento de maneira isolada, percebe-se que a solução da equação da onda que governa a propagação do evento possui duas diferentes propriedades básicas, uma propriedade cinemática e outra dinâmica. A informação cinemática diz respeito à posição da onda durante a propagação. Ela é descrita pelas trajetórias de propagação (raios) e pelos tempos de trânsito e, portanto, está relacionada às formas dos refletores. A parte dinâmica trata da distribuição espacial da energia propagada, ou seja, traz informações sobre amplitudes, que estão relacionadas com os coeficientes de reflexão dos refletores.

Dado que a solução possui uma parte cinemática e outra dinâmica, a Teoria dos Raios propõe uma função que combine estas duas partes de maneira adequada. Esta função é uma candidata a solução da equação da onda. Porém, em geral, não fornece uma solução exata da equação da onda, mas uma solução aproximada. Contanto que a condição de alta frequência seja satisfeita, situação comum nas aplicações sísmicas, esta aproximação é bastante boa. Esta aproximação é chamada de solução ou aproximação de Teoria dos Raios. Substituindo esta aproximação na equação da onda, obtêm-se duas equações de maneira que resolver a equação da onda seja equivalente a resolver estas duas equações. Felizmente, estas novas equações são, de fato, mais simples que a equação da onda. Uma destas equações recebe o nome de *equação iconal* e a outra *equação de transporte*.

A equação iconal é responsável pela descrição da parte cinemática da solução da equação da onda. Portanto, através dela obtêm-se os caminhos de propagação e os tempos de trânsito ao longo deles. A equação de transporte rege a parte dinâmica da solução. Portanto, obtêm-se informações sobre as amplitudes através desta equação. A princípio, a equação de transporte

depende tanto do tempo de trânsito como das amplitudes. Porém, uma vez que o tempo de trânsito é obtido a através da equação iconal, ele pode ser substituído na equação de transporte, e esta equação passa a envolver somente as amplitudes. De modo geral, a partir da equação iconal deriva-se um sistema não linear de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, conhecidas como equações cinemáticas do raio. A solução deste sistema é o tempo de trânsito que, em seguida, é substituído na equação de transporte. Assim, a equação de transporte deixa de ser uma equação diferencial parcial (EDP) e passa a ser uma equação diferencial ordinária (EDO). Desta maneira, a equação de transporte passa a tratar somente as amplitudes. Todos estes conceitos e métodos de Teoria dos Raios são amplamente usados na área de modelamento sísmico, ou seja, na criação de dados sintéticos.

Fazemos a seguir o desenvolvimento que leva às equações iconal e de transporte. Descrevemos como obter as equações nos domínios (x, t) para o caso 1D, (k_x, z, ω) para o caso 2D e (k_x, k_y, z, ω) para o caso 3D. Aqui, k_x e k_y são as frequências espaciais relativas às dimensões x e y , e ω é a frequência temporal. Detalhamos as equações iconal e de transporte desta maneira para que tenhamos suas expressões nos domínios em que as utilizamos em cada uma das dimensões.

Começamos introduzindo as definições da transformada de Fourier e de sua inversa utilizadas neste trabalho, dadas respectivamente por

$$F(k_x, k_y, z, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy dt f(x, y, z, t) \exp\{i(-\omega t + k_x x + k_y y)\}, \quad (2.1)$$

$$f(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y d\omega F(k_x, k_y, z, \omega) \exp\{i(\omega t - k_x x - k_y y)\}, \quad (2.2)$$

onde supomos f bem comportada, i.e., satisfazendo todos os requisitos para que as integrais acima existam (Figueiredo, 1977). Aqui, k_x é o número de onda (frequência espacial) na direção x , k_y é o número de onda na direção y e ω é a frequência temporal. A equação da onda acústica,

usada neste trabalho, é

$$\mathcal{L}u = \nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2.3)$$

onde $u = u(x, y, z, t)$ é o campo de onda, x e y são as coordenadas transversais, z é a profundidade, t é o tempo, $c = c(x, y, z)$ é o campo de velocidade e ∇^2 é o operador Laplaciano definido em 3D por

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (2.4)$$

Aplicando a transformada de Fourier somente no tempo, t , à equação (2.3), temos

$$\mathcal{L}u = \nabla^2 u + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0, \quad (2.5)$$

onde ω é a frequência temporal. Esta equação também é conhecida como equação de Helmholtz.

Por questão de simplicidade não usamos símbolos diferentes para as quantidades no domínio original ou no domínio da frequência.

A Teoria dos Raios supõe que a solução da equação de Helmholtz tem uma forma assintótica do tipo

$$u(x, y, z, \omega) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} (-i\omega)^{-k} A_k(x, y, z) \exp\{-i\omega\tau(x, y, z)\}, \quad (2.6)$$

onde $\tau(x, y, z)$ é o tempo de trânsito e $A_k(x, y, z)$ são os coeficientes relacionados à amplitude. Na Teoria de Raios de ordem zero, o que se faz é considerar somente o primeiro termo da série, ou seja,

$$u(x, y, z, \omega) = A(x, y, z) \exp\{-i\omega\tau(x, y, z)\}, \quad (2.7)$$

onde, por conveniência, eliminamos o índice em A_0 .

2.1.3 Caso 1D

Supomos que temos um campo de onda unidimensional $u = u(z, t)$. Temos então o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_{zz} = \frac{1}{c^2} u_{tt} , \\ u(z, 0) = f(z) , \\ u_z(z, 0) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

onde $u = u(z, t)$ é o campo de onda acústica, $c = c(z)$ é a velocidade do meio, z é a profundidade e $f(z)$ é o campo de onda em $t = 0$, também conhecida como assinatura da fonte.

Para este caso, e considerando o domínio (z, t) , a aproximação de Teoria dos Raios de ordem zero é da forma

$$u(z, t) = A(z)f(t - \tau(z)) = A(z)f(\eta) , \quad (2.9)$$

onde $A(z)$ é a amplitude da onda e $\tau(z)$ é o seu tempo de trânsito da origem até um determinado ponto z .

Calculamos as derivadas da candidata

$$\frac{\partial u}{\partial z} = A_z f - A f_\eta \tau_z , \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = A_{zz} f - 2A_z f_\eta \tau_z + A f_{\eta\eta} \tau_z^2 - A f_\eta \tau_{zz} , \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A f_\eta , \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A f_{\eta\eta} , \quad (2.13)$$

e substituímos na equação da onda em (2.8), obtendo

$$A_{zz} f - 2A_z f_\eta \tau_z + A f_{\eta\eta} \tau_z^2 - A f_\eta \tau_{zz} - \frac{1}{c^2} A f_{\eta\eta} = 0 . \quad (2.14)$$

Supondo $A_{zz} \rightarrow 0$, quando $z \rightarrow \infty$ e, como f é limitada, então temos $A_{zz} f \rightarrow 0$. Portanto, para que a equação acima seja satisfeita assintoticamente, independentemente do pulso

f , basta, na verdade, satisfazer as equações abaixo, uma referente aos termos que contém $f_{\eta\eta}$ e outra referente aos que contém f_η . A equação referente aos termos com $f_{\eta\eta}$ é a equação iconal dada por

$$(f_{\eta\eta}) : \tau_z^2 - \frac{1}{c^2} = 0, \quad (2.15)$$

e a equação referente aos termos com f_η é a equação de transporte dada por

$$(f_\eta) : A\tau_{zz} + 2A_z\tau_z = 0. \quad (2.16)$$

O tempo de trânsito τ é obtido como solução da equação iconal (2.15). Tirando a raiz quadrada, obtemos

$$\tau_z = \pm \frac{1}{c}, \quad (2.17)$$

cujos dois sinais correspondem às duas soluções $\tau^\pm(z)$ que, por sua vez, representam os dois sentidos de propagação (para baixo e para cima). Usando a equação (2.17), bem como sua derivada, $\tau_{zz} = \mp \frac{1}{c^2}c_z$, na equação de transporte (2.16), esta pode ser reescrita como

$$A_z = \frac{1}{2c}c_z A, \quad (2.18)$$

desta forma se tornando uma equação diferencial ordinária com uma função incógnita, A .

Assim, resolver as equações (2.15) e (2.18) é aproximadamente equivalente a resolver a equação de Helmholtz (2.5).

2.1.4 Caso 2D

Suponha que temos um campo de onda em um meio bidimensional, i.e., $u = u(x, z, t)$. Como observado anteriormente, para os casos 2D e 3D trabalhamos no domínio da frequência/número de onda, pois neste domínio a equação da onda é uma equação diferencial ordinária ao invés de uma equação diferencial parcial como no domínio do tempo/espço. A transformada de Fourier bidimensional e sua inversa aqui usadas são análogas às definidas na equação (2.1) para o caso

tridimensional.

Supomos aqui que a velocidade depende da profundidade, ou seja, $c = c(z)$, pois este é o caso em que implementamos a migração de amplitude verdadeira. Introduzimos a vagarosidade horizontal p_x (que no caso 2D é um escalar) e vertical p_z

$$p_x = \frac{k_x}{\omega}, \quad p_z = \frac{k_z}{\omega} = \pm \frac{1}{c(z)} \sqrt{1 - (c(z)p_x)^2}, \quad (2.19)$$

onde k_x e k_z são as frequências espaciais relativas às variáveis x e z , respectivamente. Reescrevemos a equação de Helmholtz bidimensional como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \omega^2 p_z^2 u = 0. \quad (2.20)$$

A aproximação de Teoria dos Raios de ordem zero neste caso é

$$u = A(x, z) \exp\{-i\omega\tau(x, z)\}, \quad (2.21)$$

e a utilizamos como candidata à solução da equação da onda. Em um meio com velocidade $c = c(z)$, podemos reescrever esta equação no domínio (k_x, z, ω) como

$$u = A(p_x, z) \exp\{-i\omega\tau(p_x, z)\}, \quad (2.22)$$

e suas derivadas como

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial z} \exp\{-i\omega\tau\} - Ai\omega \frac{\partial \tau}{\partial z} \exp\{-i\omega\tau\}, \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \exp\{-i\omega\tau\} - 2 \frac{\partial A}{\partial z} i\omega \frac{\partial \tau}{\partial z} \exp\{-i\omega\tau\} - Ai\omega \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} \exp\{-i\omega\tau\} \\ &\quad - A\omega^2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)^2 \exp\{-i\omega\tau\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Substituindo esta solução e suas derivadas na equação de Helmholtz, temos

$$\left\{ -\omega^2 \left[\left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^2 - p_z^2 \right] A - i\omega \left[2 \frac{\partial \tau}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} A \right] + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right\} \exp\{-i\omega\tau\} = 0. \quad (2.25)$$

Da equação acima obtemos, no domínio do vetor vazarosidade como coeficientes das potências de ω , a equação iconal

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^2 = p_z^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = \pm p_z, \quad (2.26)$$

e de transporte

$$2 \frac{\partial \tau}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} A = 0. \quad (2.27)$$

Derivando a equação iconal (2.26) e usando $\frac{\partial p_x}{\partial z} = 0$ (Lei de Snell), temos $\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} = \pm \frac{\partial p_z}{\partial z} = \mp \frac{1}{c^3(z)p_z} \frac{\partial c(z)}{\partial z}$. Substituindo este resultado na equação de transporte (2.27), obtemos

$$\begin{aligned} \pm \left[2p_z \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{c^3(z)p_z} \frac{\partial c(z)}{\partial z} A \right] &= 0, \\ \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{2c^3(z)p_z^2} \frac{\partial c(z)}{\partial z} A &= 0 \quad (\text{equação de transporte utilizada}). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Observamos que na equação iconal o sinal superior corresponde à onda que se propaga para baixo e o sinal inferior corresponde à que se propaga para cima. No entanto, a equação de transporte é a mesma para as duas soluções uma vez que o termo p_z aparece elevado ao quadrado.

2.1.5 Caso 3D

Finalmente, suponhamos que $u = u(x, y, z, t)$ seja um campo de onda em um meio tridimensional. Novamente, trabalhamos no domínio da frequência/número de onda, ou seja, no domínio (k_x, k_y, z, ω) .

Supomos mais uma vez que a velocidade depende da profundidade, ou seja, $c = c(z)$. A

vagarosidade horizontal $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ e vertical p_z no caso 3D são

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{k}}{\omega}, \quad p_z = \frac{k_z}{\omega} = \frac{1}{c(z)} \sqrt{1 - (c(z)p)^2}, \quad (2.29)$$

onde

$$k_z = \text{sgn}(\omega) \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{(ck)^2}{\omega^2}} \quad (2.30)$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y), \quad p^2 = k^2/\omega^2, \quad (2.31)$$

onde o vetor \mathbf{k} acima é o vetor de onda transversal. Usando a vagarosidade vertical podemos reescrever a equação da onda como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \omega^2 p_z^2 u = 0, \quad (2.32)$$

e a aproximação de Teoria dos Raios como

$$u = A(\mathbf{p}, z) \exp\{-i\omega\tau(\mathbf{p}, z)\}. \quad (2.33)$$

A fim de encontrar as equações iconal e de transporte, devemos agora substituir a aproximação de Teoria dos Raios (2.33) e suas derivadas na equação de Helmholtz (2.32), similarmente ao caso 2D. Substituindo na equação da onda, temos

$$\left\{ -\omega^2 \left[\left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^2 - p_z^2 \right] A - i\omega \left[2 \frac{\partial \tau}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} A \right] + O(\omega^0) \right\} \exp\{-i\omega\tau\} = 0. \quad (2.34)$$

A equação acima fornece, no domínio do vetor vagarosidade transversal, as equações iconal

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^2 = p_z^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = \pm p_z, \quad (2.35)$$

e de transporte

$$2 \frac{\partial \tau}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} A = 0 . \quad (2.36)$$

Usando a equação iconal (2.35) na equação de transporte (2.36), obtemos

$$\pm \left[2p_z \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{c^3(z)p_z} \frac{\partial c(z)}{\partial z} A \right] = 0 ,$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{2c^3(z)p_z^2} \frac{\partial c(z)}{\partial z} A = 0 \quad (\text{equação de transporte utilizada}) . \quad (2.37)$$

Na equação iconal, a solução relativa ao sinal superior é aquela em que $\text{sgn}(p_z) = 1$ e corresponde à onda que se propaga para baixo. Da mesma maneira, o sinal inferior é relativo à solução onde $\text{sgn}(p_z) = -1$ e corresponde à onda que se propaga para cima. Vemos que a equação de transporte, no entanto, é a mesma para as duas soluções já que o termo p_z aparece nesta equação elevado ao quadrado.

Observa-se que as equações bi e tridimensionais, nesta formulação, têm a mesma aparência. Ressaltamos, porém, que não são idênticas, uma vez que o significado de p_z depende da dimensão do problema.

2.2 Equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira

Nesta seção, apresentamos o desenvolvimento detalhado das equações de sentido único de amplitude verdadeira para os casos 1D, 2D e 3D conforme proposto por (Zhang et al. 2003). Aqui, usamos as equações iconal e de transporte apresentadas na seção anterior para cada um dos casos. O ponto chave para a obtenção destas equações é notar que, em meios heterogêneos, ao substituirmos a aproximação de Teoria dos Raios de ordem zero na equação da onda cheia e na fatoração padrão da equação da onda, obtemos equações iconais iguais e equações de transporte diferentes. Comparando as equações de transporte, facilmente chegamos à modificação

necessária nos operadores diferenciais das equações de sentido único de modo que estas equações produzam uma equação de transporte igual à produzida pela equação da onda cheia (Zhang et al. 2003). Assim, as ondas de sentido único possuirão as mesmas amplitudes que a onda cheia.

2.2.1 Equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira em uma dimensão

Começamos nosso estudo com o caso unidimensional afim de dar uma motivação simples para nossos estudos. Nesta seção, estudamos a equação da onda em uma dimensão cuja solução é uma onda que se propaga nos dois sentidos do eixo z , ou seja, para baixo e para cima. Utilizamos aqui a fatoração padrão do operador diferencial da equação da onda, que consiste no produto de dois operadores diferenciais que geram duas equações da onda de sentido único, uma se propagando para baixo e outra para cima. Verificamos, em seguida, que estas ondas de sentido único são soluções da equação da onda cheia somente no caso em que a velocidade de propagação do meio é constante.

Velocidade constante

Suponha que a velocidade de propagação, c , do meio seja constante. A equação da onda em uma dimensão e as condições iniciais são dadas em (2.8). Neste caso, a equação da onda possui solução exata dada por

$$u(z, t) = \frac{1}{2}f(z - ct) + \frac{1}{2}f(z + ct), \quad (2.38)$$

onde $u^+ = f(z - ct)$ é uma onda que se propaga para baixo e satisfaz

$$\mathcal{L}_0^+ u^+ = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) u^+ = u_z^+ + \frac{1}{c} u_t^+ = 0, \quad (2.39)$$

e $u^- = f(z + ct)$ é uma onda que se propaga para cima e satisfaz

$$\mathcal{L}_0^- u^- = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) u^- = u_z^- - \frac{1}{c} u_t^- = 0. \quad (2.40)$$

Aqui \mathcal{L}_0^+ e \mathcal{L}_0^- são os operadores diferenciais das equações da onda de sentido único.

As equações (2.39) e (2.40) são conhecidas como equações da onda de sentido único, uma vez que suas soluções são ondas que se propagam em somente um sentido. Outro nome dado a estas equações na literatura é o de *equações de advecção*. Em contraposição, a equação (2.8) freqüentemente recebe a denominação equação da onda cheia, para melhor distingui-la das equações da onda de sentido único. Correspondentemente, referimo-nos às suas soluções como ondas cheias e ondas de sentido único, respectivamente. Os operadores \mathcal{L}_0^+ e \mathcal{L}_0^- são usados na fatoração padrão da equação da onda

$$\mathcal{L}_0^+ \mathcal{L}_0^- u = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) u = u_{zz} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = \mathcal{L}u = 0. \quad (2.41)$$

Vemos que, neste caso do meio homogêneo onde a velocidade de propagação é constante, esta fatoração nos fornece exatamente a equação da onda cheia. Logo, as ondas de sentido único, soluções de cada um dos fatores, são também soluções da equação da onda.

Observamos que \mathcal{L}_0^+ e \mathcal{L}_0^- comutam, i.e., $\mathcal{L}_0^+ \mathcal{L}_0^- u = \mathcal{L}_0^- \mathcal{L}_0^+ u$.

Variação vertical da velocidade

Supomos agora que a velocidade do meio depende da profundidade, ou seja, $c = c(z)$. Neste caso, a fatoração padrão acima fornece

$$\mathcal{L}_0^- \mathcal{L}_0^+ u = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) u = u_{zz} - \frac{1}{c^2} u_{tt} - \frac{1}{c^2} c_z u_t \neq \mathcal{L}u. \quad (2.42)$$

Observamos agora que \mathcal{L}_0^+ e \mathcal{L}_0^- não comutam mais, pois

$$\mathcal{L}_0^+ \mathcal{L}_0^- u = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) u = u_{zz} - \frac{1}{c^2} u_{tt} + \frac{1}{c^2} c_z u_t \neq \mathcal{L}_0^- \mathcal{L}_0^+ u . \quad (2.43)$$

Em outras palavras, as soluções das equações da onda de sentido único não são mais soluções da equação da onda cheia e, portanto, não obtemos mais a equação da onda a partir desta fatoração.

Para estudarmos esta diferença quantitativamente, resolvemos o problema (2.8) para $c = c(z)$ de maneira aproximada. Como este problema geralmente não possui solução analítica exata, usamos como candidata à solução, a aproximação da Teoria dos Raios (2.9).

Como vimos na seção anterior, as equações iconal e de transporte obtidas através da substituição da aproximação de Teoria dos Raios na equação da onda cheia são, respectivamente,

$$\tau_z^2 - \frac{1}{c^2} = 0 \quad \implies \quad \tau_z = \pm \frac{1}{c} , \quad (2.44)$$

e

$$A_z = \frac{1}{2c} c_z A . \quad (2.45)$$

Ao substituir a mesma candidata (2.9) nas equações de sentido único (2.39) e (2.40), obtemos as seguintes equações iconal e de transporte

$$\tau_z = \pm \frac{1}{c} \quad (\text{equação iconal}) \quad (2.46)$$

$$A_z = 0 \quad (\text{equação de transporte}) . \quad (2.47)$$

Vemos que, ao contrário da equação iconal, a equação de transporte é diferente da obtida através da equação da onda. Isto significa que, enquanto os tempos de trânsito das ondas de sentido único e da onda cheia são iguais, as amplitudes são diferentes.

Nosso objetivo agora é modificar os operadores de sentido único \mathcal{L}_0^\pm afim de que as soluções

$$u^\pm = A^\pm f(t - \tau^\pm(z)) , \quad (2.48)$$

sejam ondas de sentido único que possuam os mesmos tempos de trânsito e a mesma amplitude que a onda cheia, ou seja, queremos ondas de sentido único que satisfaçam às equações iconal (2.44) e de transporte (2.45) da onda cheia.

A idéia agora é adicionar termos $\alpha^\pm(z, t)$ aos operadores de sentido único, obter as novas equações iconal e de transporte e compará-las com as da onda cheia. Adicionando este novo termos aos operadores de sentido único, obtemos

$$\mathcal{L}^\pm u^\pm = \left(\frac{\partial}{\partial z} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha^\pm(z, t) \right) u^\pm = \left(\frac{\partial}{\partial z} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha^\pm(z, t) \right) A^\pm f(t - \tau^\pm), \quad (2.49)$$

que fornece as seguintes equações diferenciais

$$\tau_z^2 - \frac{1}{c^2} = 0 \quad (\text{equação iconal}) \quad (2.50)$$

e

$$A_z^\pm = -\alpha^\pm A^\pm \quad (\text{equação de transporte}) . \quad (2.51)$$

Como podemos ver, a equação iconal se manteve a mesma, e comparando as duas equações de transporte (2.45) e (2.51) concluímos que ambos os termos devem ser representados por

$$\alpha^\pm = -\frac{1}{2c} c_z . \quad (2.52)$$

Assim, obtemos os operadores de sentido único modificados

$$\mathcal{L}^\pm = \mathcal{L}_0^\pm - \frac{1}{2c} c_z , \quad (2.53)$$

que geram ondas de sentido único com mesmos tempos de trânsito e mesmas amplitudes que a onda cheia.

Observa-se que

$$\mathcal{L}^+ \mathcal{L}^- \neq \mathcal{L}^- \mathcal{L}^+ \neq \mathcal{L} . \quad (2.54)$$

Para reconstruir a equação da onda a partir dos operadores de sentido único, precisa-se de operadores alterados

$$\tilde{\mathcal{L}}^\pm = \mathcal{L}_0^\pm + \frac{1}{2c}c_z . \quad (2.55)$$

Com estes, temos

$$\tilde{\mathcal{L}}^+ \mathcal{L}^- = \tilde{\mathcal{L}}^- \mathcal{L}^+ = \mathcal{L} , \quad (2.56)$$

para variação linear da velocidade.

2.2.2 Equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira em duas dimensões

Supomos agora que temos um campo de onda em um meio bidimensional, i.e., $u = u(x, z, t)$. Queremos obter ondas de sentido único de amplitude verdadeira para os casos $c = \text{constante}$, $c = c(z)$ e $c = c(x, z)$. Como observado anteriormente, para os casos 2D e 3D trabalhamos no domínio da frequência/número de onda, pois neste domínio a equação da onda é uma equação diferencial ordinária ao invés de uma equação diferencial parcial como no domínio do tempo/espço.

Velocidade constante

Primeiramente supomos que $c = \text{constante}$. Aplicando a transformada de Fourier na equação da onda nas variáveis x e t , obtemos

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 \right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k_z^2 u = 0 , \quad (2.57)$$

onde

$$k_z = \text{sgn}(\omega) \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{(ck_x)^2}{\omega^2}} . \quad (2.58)$$

A partir da equação (2.57) obtemos a fatoração padrão da equação da onda

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \pm ik_z \right] \left[\frac{\partial}{\partial z} \mp ik_z \right] u = \mathcal{L}_0^\pm \mathcal{L}_0^\mp u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k_z^2 u = 0, \quad (2.59)$$

onde

$$\mathcal{L}_0^+ = \left[\frac{\partial}{\partial z} + ik_z \right], \quad \mathcal{L}_0^- = \left[\frac{\partial}{\partial z} - ik_z \right], \quad (2.60)$$

são os operadores diferenciais da onda de sentido único. Como no caso unidimensional, estes operadores geram duas equações da onda de sentido único

$$\mathcal{L}_0^\pm u = \left[\frac{\partial}{\partial z} \pm ik_z \right] u = 0, \quad (2.61)$$

cujas soluções são duas ondas de sentido único da forma

$$u^\pm = A^\pm \exp\{\mp ik_z z\}, \quad (2.62)$$

onde os sinais superiores e inferiores se referem à propagação para baixo e para cima, respectivamente.

Como as soluções (2.62) das equações da onda de sentido único constituem a solução da equação da onda, elas obedecem às mesmas equações diferenciais (iconal e de transporte) e, portanto, possuem os mesmos tempos de trânsito e amplitudes. Portanto, as equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira para o caso 2D e velocidade constante são dadas pelas equações (2.61).

Como no caso unidimensional, observamos que os operadores \mathcal{L}_0^+ e \mathcal{L}_0^- comutam, i.e., $\mathcal{L}_0^+ \mathcal{L}_0^- u = \mathcal{L}_0^- \mathcal{L}_0^+ u$ e geram a equação da onda cheia, i.e., $\mathcal{L}_0^+ \mathcal{L}_0^- u = \mathcal{L}u$.

Varição vertical da velocidade

Supomos agora que a velocidade depende da profundidade, ou seja, $c = c(z)$. Como feito no Capítulo 2, usamos aqui a vagarosidade horizontal p_x e vertical p_z definidos na equação (2.19).

Como vimos na seção anterior, as equações iconal e de transporte obtidas através da substituição da aproximação de Teoria dos Raios na equação da onda são, respectivamente, dadas por (2.26) e (2.28). Vejamos agora como são as equações iconal e de transporte obtidas através das equações da onda de sentido único. Usando os operadores da fatoração padrão e a aproximação de Teoria dos Raios, obtemos as seguintes equações da onda de sentido único

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \pm ik_z \right] u = \left[\frac{\partial}{\partial z} \pm ik_z \right] A^\pm \exp\{-i\omega\tau^\pm\}, \quad (2.63)$$

cujas equações iconal e de transporte são, respectivamente,

$$\frac{\partial \tau^\pm}{\partial z} = \pm p_z, \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial A^\pm}{\partial z} = 0. \quad (2.65)$$

Vemos então que a equação iconal para as ondas de sentido único é a mesma para a equação da onda cheia, porém, as equações de transporte são diferentes. Então, enquanto os tempos de trânsito de ambas ondas concordam, as amplitudes são diferentes. Para igualar estas amplitudes é necessária uma mudança nos operadores diferenciais de sentido único. Para isto, como no caso unidimensional, adicionamos novos termos α^\pm aos operadores, obtemos as respectivas equações diferenciais e as comparamos com as da onda cheia. Adicionando estes novos termos, obtemos as equações

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \pm ik_z + \alpha^\pm \right] u = 0. \quad (2.66)$$

Assim, obtemos as equações diferenciais

$$\frac{\partial \tau^\pm}{\partial z} = \pm p_z, \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial A^\pm}{\partial z} + \alpha^\pm A^\pm = 0. \quad (2.68)$$

Comparando com as equações da onda cheia, concluimos que

$$\alpha^{\pm} = -\frac{1}{2c^3(z)p_z^2} \frac{\partial c(z)}{\partial z}, \quad (2.69)$$

e obtemos as equações da onda de sentido único modificadas

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \mp i\omega p_z - \frac{1}{2c^3(z)p_z^2} \frac{\partial c(z)}{\partial z} \right\} u = 0, \quad (2.70)$$

que, por construção, possuem mesmos tempos de trânsito e amplitudes que a onda cheia.

Quanto à comutatividade dos operadores, valem as mesmas relações estabelecidas em (2.54) e (2.56).

Caso geral

Por fim, suponhamos que $c = c(x, z)$. Neste caso, a transformada de Fourier não facilitaria muito os cálculos, pois apareceria uma convolução no termo que envolve a velocidade na equação da onda. Tentamos então fazer uma aproximação substituindo $c(z)$ por $c = c(x, z)$ nas equações acima obtendo

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \pm ik_z - \frac{\omega^2}{2c^3(x, z)k_z^2} \frac{\partial c(x, z)}{\partial z} \right\} u = 0. \quad (2.71)$$

Esta aproximação será melhor discutida depois de tratarmos o caso 3D.

2.2.3 Equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira em três dimensões

Dividimos o caso tridimensional também em três partes, de acordo com a velocidade: $c = \text{constante}$, $c = c(z)$ e $c = c(x, y, z)$. Seguimos os mesmos passos dos desenvolvimentos das seções anteriores.

Velocidade constante

Para velocidade de propagação constante, podemos escrever a equação da onda no domínio da frequência/vetor de onda como

$$\mathcal{L}u = \left[\frac{\partial}{\partial z} \pm ik_z \right] \left[\frac{\partial}{\partial z} \mp ik_z \right] u, \quad (2.72)$$

onde \mathcal{L} é o operador diferencial da equação da onda cheia, e k_z é dado pela equação (2.30). O “produto” dos operadores no lado direito de (2.72) é a fatoração padrão da equação da onda.

Neste caso, as soluções da equação da onda cheia são as soluções das duas equações da onda de sentido único

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \pm ik_z \right] u = \left[\frac{\partial}{\partial z} \pm ik_z \right] A^\pm \exp\{\mp ik_z z\} = 0, \quad (2.73)$$

com os sinais superiores representando a onda que se propaga para baixo e os inferiores representando a onda que se propaga para cima. Portanto, neste caso, as equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira são as equações

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \pm ik_z \right] u = 0. \quad (2.74)$$

Varição vertical da velocidade

Queremos agora obter ondas de sentido único, cada uma se propagando em um sentido de z , para separarmos a solução da equação da onda cheia no caso heterogêneo. Continuamos usando a solução de Teoria dos Raios como candidata à solução.

Novamente, começamos pelo caso heterogêneo mais simples, onde $c = c(z)$. Tomamos agora as duas equações da onda de sentido único provenientes da fatoração padrão da equação da onda

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \pm ik_z \right] u = \left[\frac{\partial}{\partial z} \pm ik_z \right] A^\pm \exp\{-i\omega\tau^\pm\}$$

$$\begin{aligned}
 &= i\omega \left[-\frac{\partial \tau^\pm}{\partial z} \pm p_z \right] A_\pm \exp\{-i\omega\tau^\pm\} + \frac{\partial A_\pm}{\partial z} \exp\{-i\omega\tau^\pm\} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

Essas equações fornecem as seguintes equações iconal e de transporte

$$\frac{\partial \tau^\pm}{\partial z} = \pm p_z, \tag{2.76}$$

$$\frac{\partial A_\pm}{\partial z} = 0. \tag{2.77}$$

Vemos que esta equação iconal coincide com a equação iconal da onda cheia (2.35). Porém, as equações de transporte são diferentes. Portanto, enquanto os tempos de trânsito da onda cheia e das duas ondas de sentido único são os mesmos, as amplitudes são diferentes. A fim de igualar estas amplitudes, como no caso unidimensional, modificamos os operadores diferenciais das ondas de sentido único de maneira que as ondas correspondentes às suas soluções passem a ter também as mesmas amplitudes da onda cheia. Para isso, novamente adicionamos um termo a estes operadores direcionais, substituímos as aproximações de Teoria dos Raios como candidatas à solução e comparamos as equações iconal e de transporte assim obtidas com as da onda cheia. Após os cálculos, os quais são praticamente idênticos ao caso 2D, chegamos às seguintes equações de sentido único

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \mp i\omega p_z - \frac{1}{2c^3(z)p_z^2} \frac{\partial c(z)}{\partial z} A \right\} u = 0. \tag{2.78}$$

Por construção vemos que, de fato, essas novas equações da onda de sentido único produzem as mesmas equações iconal e de transporte que a equação da onda cheia.

Novamente, valem as relações entre os operadores dadas pelas equações (2.54) e (2.56).

Caso geral

Queremos agora obter operadores diferenciais que produzam ondas de sentido único com os mesmos tempos de trânsito e amplitudes da onda cheia em um meio completamente heterogêneo, ou seja, onde $c = c(x, y, z)$. Neste caso, a transformada de Fourier não facilitará o problema, pois teríamos que fazer uma convolução no primeiro termo da equação da onda. Como feito anteriormente, nossa tentativa foi então trabalhar a partir dos últimos operadores obtidos, simplesmente trocando $c = c(z)$ por $c = c(x, y, z)$. Reescrevemos então estes operadores como originais

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \pm ik_z - \frac{\omega^2}{2c^3(x, y, z)k_z^2} \frac{\partial c(x, y, z)}{\partial z} \right\} u = 0. \quad (2.79)$$

Observamos que

$$\frac{\omega^2}{2c^3(x, y, z)k_z^2} \frac{\partial c(x, y, z)}{\partial z} = \frac{1}{2c(x, y, z)} \frac{\partial c(x, y, z)}{\partial z} \left[1 + \frac{c(x, y, z)k^2}{\omega^2 - (c(x, y, z)k)^2} \right], \quad (2.80)$$

e por razões que posteriormente ficarão claras, reescrevemos os operadores da seguinte maneira

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \mp ik_z - \frac{1}{2c(x, y, z)} \frac{\partial c(x, y, z)}{\partial z} \left[1 + \frac{(c(x, y, z)k)^2}{\omega^2 - (c(x, y, z)k)^2} \right] \right\} u = 0. \quad (2.81)$$

2.3 Domínio (x, y, z, ω)

A implementação dos operadores da onda de sentido único modificados em um meio completamente heterogêneo, ou seja, onde $c = c(x, y, z)$, envolve aplicar a raiz quadrada de um operador diferencial como um operador pseudo-diferencial. Este operador raiz quadrada pode ser representado como uma integral onde uma função racional do Laplaciano transversal aparece no integrando.

Estas equações da onda de sentido único modificadas foram recentemente apresentadas por Zhang et al. (2003), que também mostraram que as soluções destas equações possuem tempos de trânsito e amplitudes assintoticamente consistentes com as das respectivas soluções da equação

Domínio de Fourier	Domínio Original
$-i\omega$	$\frac{\partial}{\partial t}$
ik_x	$\frac{\partial}{\partial x}$
$-k_x^2$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$
$-k^2 = -(k_x^2 + k_y^2)$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$
$(c(x, y, z)k)^2$	$\left[c \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \cdot \left[c \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \right]$

Tab. 2.1: Fatores no domínio da frequência e seus operadores correspondentes.

da onda cheia. É neste sentido que são chamadas de equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira.

Usando estas equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira descrevemos uma migração da equação da onda de amplitude verdadeira, que produz um mapa refletor e amplitudes que concordam com as soluções da equação da onda cheia.

O próximo passo agora é dar significado à expressão $(c(x, y, z)k)^2$. Notamos que, nas expressões usadas até então, $i\omega$ aparece no domínio de Fourier no lugar de $\frac{\partial}{\partial t}$ nas variáveis originais, ik_x aparece no lugar de $\frac{\partial}{\partial x}$ e ik_y aparece no lugar de $\frac{\partial}{\partial y}$. Veja a Tabela 2.1. Logo, é razoável fazer a seguinte relação

$$(c(x, y, z)k)^2 \Rightarrow \left[c \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \cdot \left[c \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \right], \quad (2.82)$$

onde \cdot denota o produto interno.

Em seguida tratamos de k_z , cuja expressão envolve a raiz quadrada de um operador diferencial. E por fim, damos significado à razão

$$\frac{(c(x, y, z)k)^2}{\omega^2 - (c(x, y, z)k)^2} . \quad (2.83)$$

Seguimos tomando as equações de sentido único (2.81) para o caso do meio completamente heterogêneo onde $c = c(x, y, z)$. Fazemos a seguir uma breve discussão sobre operadores pseudo-diferenciais para resolver os problemas citados acima e, assim, entendermos melhor as próprias equações de sentido único.

Reescrevemos as equações de sentido único na forma simplificada

$$\mathcal{L}^\pm u = \left[\frac{\partial}{\partial z} \pm \Lambda \right] u - \Gamma u = 0 , \quad (2.84)$$

onde Λ e Γ são operadores diferenciais nas variáveis originais relativos aos fatores λ e γ , respectivamente, no domínio de Fourier, i.e.,

$$\lambda = ik_z = \frac{i\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{(c(x, y, z)k)^2}{\omega^2}} , \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2c} \frac{\partial c}{\partial z} \left(1 + \frac{(c(x, y, z)k)^2}{\omega^2 - (c(x, y, z)k)^2} \right) \\ &= \frac{c_z}{2c} \left(1 + \frac{(c(x, y, z)k)^2}{\omega^2 - (c(x, y, z)k)^2} \right) . \end{aligned} \quad (2.86)$$

Aqui, $(c(x, y, z)k)^2$ é a representação no domínio de Fourier do operador

$$\begin{aligned} -(c\nabla)^2 &= -(c(x, y, z)\nabla)^2 = - \left(c(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \left(c(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \\ &= -c^2(x, y, z) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \\ &\quad -c(x, y, z) \left[\frac{\partial c(x, y, z)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial c(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right] . \end{aligned} \quad (2.87)$$

Usando integração complexa (Churchill, 1975), pode-se obter uma representação exata para λ de tal maneira que no operador correspondente, Λ , não se tenha um operador diferencial dentro

de uma raiz quadrada (veja Apêndice A)

$$\lambda = ik_z = \frac{i\omega}{c} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} \frac{(c(x,y,z)k)^2}{\omega^2 - s^2(c(x,y,z)k)^2} ds \right\}, \quad \text{para } \omega^2 > (ck)^2. \quad (2.88)$$

Podemos então dizer que $-\left[\omega^2 - s^2(ck)^2\right]$ no domínio de Fourier representa o operador

$$\mathcal{L}_T(s; x, y, z, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - s^2(c\nabla)^2. \quad (2.89)$$

Temos então os subsídios necessários para obtermos uma expressão para os operadores Λ e Γ

$$\Lambda = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ I - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} \mathcal{L}_T^{-1}(s; x, y, z, t) (c\nabla)^2 ds \right\}, \quad (2.90)$$

$$\Gamma = \frac{c_z}{2c} (I + \mathcal{L}_T^{-1}(1; x, y, z, t) (c\nabla)^2). \quad (2.91)$$

Afim de melhor a expressão dos operadores, Zhang et al. (2003) introduziram a função $q = q(s; x, y, z, t)$ que satisfaz

$$\mathcal{L}_T(s; x, y, z, t)q = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - s^2(c\nabla)^2 \right\} q = (c\nabla)^2 u, \quad z > 0, t > 0. \quad (2.92)$$

Usando esta função podemos escrever Λu e Γu como

$$\Lambda u = \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} q ds \quad (2.93)$$

$$\Gamma u = \frac{c_z}{2c} [u + q(1; x, y, z, t)]. \quad (2.94)$$

Mantendo a notação usada, escrevemos os argumentos de u como (x, y, z, t) , e, portanto, $u = u(x, y, z, t)$. Finalmente, podemos agora reescrever as equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira na forma expandida como

$$\mathcal{L}^\pm u = \frac{\partial u}{\partial z} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \mp \frac{1}{\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} q ds + \frac{c_z}{2c} [u + q(1; x, y, z, t)] = 0. \quad (2.95)$$

Capítulo 3

Migração

3.1 Introdução à migração

Chamamos de migração o processamento aplicado a uma seção de sismogramas que fornece, a partir desta, uma imagem do subsolo de uma determinada área de interesse. Se construída com a distribuição correta das velocidades de propagação no subsolo, esta imagem nos mostra as formas e as posições corretas de refletores na subsuperfície investigada.

A migração pode ser classificada em várias categorias. Em primeiro lugar, temos que distinguir entre os possíveis domínios da migração. O ideal seria que todas migrações fossem feitas na profundidade, assim teríamos as posições corretas dos refletores. No entanto, é comum que o eixo vertical seja reescalado com a metade da velocidade, assim obtendo uma dimensão temporal, situação na qual se fala de *migração no tempo*. Uma das razões pelas quais isto ocorre é que, as velocidades estimadas usadas na migração possuem precisão limitada e, deste modo, uma conversão do tempo para a profundidade pode ser inconvenientemente imprecisa. Outro motivo é que, às vezes, prefere-se avaliar a qualidade da seção migrada comparando-a com a seção empilhada (seção de sismogramas cujos dados foram reorganizados e somados (empilhados) para simular uma seção de afastamento nulo). A migração estudada neste trabalho é um tipo de *migração na profundidade*.

Nem sempre a suposição de que uma seção empilhada é equivalente a uma seção de afastamento nulo é válida como, por exemplo, no caso de variação lateral de velocidade muito forte. Assim, embora a migração de dados empilhados seja relativamente mais simples, nem sempre é adequada. Nesses casos, se faz migração na seção de sismogramas original. Assim, ainda podemos classificar a migração em migração *pré* ou *pós-empilhamento*.

Pode-se estimar aproximadamente a aparência do campo de onda registrado através de conceitos da óptica geométrica, que descreve uma onda através da construção geométrica dos caminhos dos raios e superfícies das frentes de onda. Assim, é possível perceber que reflexões provenientes de partes suaves são muito diferentes das reflexões de ondas provenientes de “quinas” ou discontinuidades na superfície do refletor. Da geometria óptica temos também que os ângulos de incidência são iguais aos respectivos ângulos de reflexão. Então, para dados de afastamento nulo, temos somente incidência normal. Para as partes suaves do refletor esta incidência normal gera reflexões que seguem o mesmo caminho do raio de incidência. Porém, falhas, quinas, cantos e pontos isolados ou discontinuidades em geral, geram reflexões espalhando a energia ao longo de todos os possíveis caminhos que incidem naquele ponto. Tais pontos são chamados de pontos de difração ou pontos difratores.

As amplitudes de um campo de onda em um determinado ponto são uma medida da energia naquele ponto. As únicas ondas que não perdem energia durante a propagação são as ondas planas, assim chamadas por possuírem frentes de onda planas. Então, somente reflexões de ondas planas em refletores planos não espalham energia. Quanto mais forte for a curvatura do refletor, mais complexa é a forma com que a energia é espalhada. Espalhar neste sentido não quer dizer necessariamente que a energia diminui durante a propagação. Dependendo da forma do refletor, ao invés da energia diminuir, ela pode ser focada em um ponto, o que também é uma forma de espalhamento.

Outros conceitos bastante usados na Geofísica são o *one-way* e o *two-way*, usados para diferenciar ondas que se propagam em dois (*two-way*) ou em somente um (*one-way*) sentido de uma certa direção de propagação. São também usados para distinguir os tempos de trânsito de ida ou

volta (da fonte ao refletor ou do refletor ao receptor) e de ida e volta (da fonte ao refletor e do refletor ao receptor).

3.2 Método de Gazdag

Zhang et al. (2003) propõem um método de migração da equação da onda de amplitude verdadeira baseado em esquemas de diferenças finitas. Como as equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira possuem uma expressão relativamente simples no domínio (k_x, k_y, z, ω) , decidimos verificar o comportamento destas equações em outro tipo de migração, o método proposto por Gazdag (1980), que é desenvolvido neste domínio. Então, adaptamos este método para que, ao invés de usar as equações da onda de sentido único padrão, este passe a usar as equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira.

A maneira mais fácil de realizar a migração de Gazdag é para dados de afastamento nulo. Apesar destes dados constituírem uma coleção de dados que não é solução de uma única equação da onda, como exigido pelo nosso método, podem ser tratados como se fossem. A razão é que, dados de afastamento nulo são cinematicamente equivalentes a dados provenientes de um experimento hipotético no qual as fontes são distribuídas ao longo do refletor e explodem simultaneamente, o chamado modelo “*exploding reflector*” (refletor explosivo). A dinâmica dos dados de afastamento nulo não é a mesma dos dados do refletor explosivo, mas pode facilmente ser corrigida em meios horizontalmente homogêneos.

Para fazer a migração começamos com a implementação do método descrito por Gazdag (1980). Antes de tratarmos do método numérico usado, é importante discutirmos alguns tópicos. Supomos que tratamos somente dados empilhados, e que esta seção empilhada corresponde aproximadamente a dados obtidos através de uma coleta de dados de afastamento nulo, ou seja, a distância entre a fonte e o receptor é zero. Supomos que a malha que representa os eixos, no caso 2D os eixos (x, z) , por exemplo, é igualmente espaçada. O objetivo da migração então é transformar estes dados coletados em um mapa refletor. O método de migração de Gazdag (1980) foi desenvolvido em resposta aos problemas apresentados pelas técnicas de migração existentes na

época.

Na década de 70, Claerbout e seus colaboradores desenvolveram técnicas de migração baseadas em aproximações numéricas da equação da onda através de métodos de diferenças finitas (Claerbout, 1971). Métodos de migração baseados em diferenças finitas são muito utilizados hoje em dia. Porém, a solução obtida através destes métodos está sujeita a grandes erros quando são usados poucos pontos da malha a cada passo. A maioria dos operadores de diferenças finitas produzem bons resultados ao tratar de ondas com grandes comprimentos de onda mas não são muito adequados para ondas com comprimento de onda pequenos. Estes operadores também conseguem tratar adequadamente ângulos de incidência pequenos, enquanto que, à medida que o ângulo de incidência aumenta, fica mais complicado trabalhar com estes operadores.

O método de migração de Gazdag (1980) baseia-se no método (*Accurate Space Derivative*) desenvolvido por Gazdag (1973). O principal ponto deste método é que, ao invés de aplicar operadores de diferenças finitas, usa-se a transformada de Fourier para calcular as derivadas espaciais. Estas derivadas são calculadas com grande precisão, pois, enquanto os operadores de diferenças finitas usam informações de um número pequeno de pontos da malha para calcular as aproximações, as derivadas obtidas através da transformada de Fourier utilizam informações de todos os pontos e são mais precisas. Assim, os erros de truncamento do método ASD, principalmente para ondas com comprimento de onda pequeno, geralmente são significativamente menores que os erros resultantes de métodos de diferenças finitas. Outro benefício de se trabalhar no domínio da frequência/número de onda é que podemos evitar o processamento de ondas evanescentes, como é discutido no método a seguir. Uma desvantagem do método de Gazdag é que, por ele ser baseado na transformada de Fourier, os dados são tratados como sendo periódicos e precisam ter condições de contorno periódicas. De outra maneira, surgem erros de bordas.

Stolt (1978) desenvolveu o método chamado “Migração f-k” que é feito totalmente no domínio da frequência/número de onda. Tanto Claerbout quanto Stolt usavam sistemas de coordenadas dinâmicos que se moviam para dentro da terra (sentido positivo do eixo z) para derivar as equações de migração e separar a solução da equação da onda em uma onda que se propaga

para baixo e outra para cima. Gazdag, no entanto, deriva sua equação de migração a partir de um sistema de coordenadas estacionário, o que ajuda a preservar a clareza do problema. Mesmo usando este sistema de coordenadas estacionário, o método de Gazdag chega à mesma equação de migração que Stolt.

Apresentamos a seguir a teoria em duas dimensões na qual o método de Gazdag (1980) se baseia. Começamos tratando do caso mais simples onde o meio é homogêneo, e passamos para meios heterogêneos em seguida.

3.2.1 Velocidade constante

Vejamos novamente a equação da onda acústica bidimensional

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (3.1)$$

relembrando que u é o campo de onda, t é o tempo, x é a coordenada horizontal e z é a profundidade. A sua solução no tempo t depende do campo inicial $u(x, z, t = 0)$. Sendo $U(k_x, k_z, t = 0)$ este campo no domínio do número de onda, o dado inicial pode ser representado pela transformada de Fourier discreta como

$$u(x, z, t = 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_x} \sum_{k_z} U(k_x, k_z, t = 0) \exp\{i(k_x x + k_z z)\} \Delta k_x \Delta k_z. \quad (3.2)$$

Sendo $U(k_x, k_z, \omega)$ a representação do campo $u(x, z, t)$ no domínio da frequência, temos

$$u(x, z, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \sum_{k_x} \sum_{k_z} \sum_{\omega} U(k_x, k_z, \omega) \exp\{i(k_x x + k_z z + \omega t)\} \Delta k_x \Delta k_z \Delta \omega. \quad (3.3)$$

Fazendo $t = 0$ na equação (3.3), temos

$$u(x, z, t = 0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \sum_{k_x} \sum_{k_z} \sum_{\omega} U(k_x, k_z, \omega) \exp\{i(k_x x + k_z z)\} \Delta k_x \Delta k_z \Delta \omega. \quad (3.4)$$

Comparando a equação (3.2) com a equação (3.4), concluímos que

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \sum_{\omega} U(k_x, k_z, \omega) \Delta\omega = U(k_x, k_z, t = 0) . \quad (3.5)$$

Assim, para uma velocidade de propagação, $c = \text{constante}$, a solução da equação da onda pode ser aproximada da forma

$$u(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_x} \sum_{k_z} U(k_x, k_z, t = 0) \exp\{i(k_x x + k_z z + \omega t)\} \Delta k_x \Delta k_z , \quad (3.6)$$

onde k_x e k_z são os números de onda, ou freqüências espaciais, e ω é a freqüência temporal. A equação (3.6) é uma representação discreta da transformada de Fourier bidimensional em x e z da solução na forma da equação (3.1) no domínio de Fourier. Aplicando a fórmula de Fourier à equação (3.1), obtemos sua relação de dispersão

$$\omega = \pm \sqrt{c^2(k_x^2 + k_z^2)} . \quad (3.7)$$

Desta relação, vemos que para cada vetor de onda (k_x, k_z) temos duas soluções, uma para cada sinal de ω . Ondas com ω negativo se propagam na direção do vetor de onda (k_x, k_z) , e ondas com ω positivo se propagam na direção oposta. Gostaríamos de tratar somente do campo de onda refletido para cima, que é o registrado nos receptores, evitando reflexões múltiplas. Logo, durante a propagação destas ondas, o valor de z diminui conforme o tempo aumenta, uma vez que convencionamos o eixo z crescendo para baixo. Considere um ponto de fase fixa, por exemplo $(k_x x + k_z z + \omega t = 0)$. Notamos que este ponto se propaga na profundidade (em relação ao tempo) com velocidade dada por

$$\frac{\omega}{k_z} = \pm c \sqrt{1 + \left(\frac{k_x}{k_z}\right)^2} . \quad (3.8)$$

Portanto, se tomarmos o sinal positivo na equação acima, temos uma propagação no sentido

decrecente de z (para cima) e, se tomarmos o sinal negativo, a propagação se dá no sentido crescente (para baixo). Assim, se tomarmos somente ondas com ω do tipo

$$\omega = c k_z \sqrt{1 + \left(\frac{k_x}{k_z}\right)^2}, \quad (3.9)$$

temos ondas que se propagam somente para cima. Em meios homogêneos, estas ondas satisfazem à equação diferencial

$$\frac{\partial U}{\partial t} = i c k_z \sqrt{1 + \left(\frac{k_x}{k_z}\right)^2} U. \quad (3.10)$$

Migração

O objetivo da migração é obter um mapa refletor, i.e., reconstruir o campo inicial, $u(x, z, t = 0)$, a partir do campo de onda registrado em $z = 0$, ou seja, $u(x, z = 0, t)$. Ao substituirmos $z = 0$ em (3.6), temos

$$u(x, z = 0, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_x} \sum_{k_z} U(k_x, k_z, t = 0) \exp\{i(k_x x + \omega t)\} \Delta k_x \Delta k_z. \quad (3.11)$$

Como estamos trabalhando com ondas que se propagam somente para cima, supomos que o tempo t seja *one-way* (i.e., corresponde ao trecho do refletor até a superfície).

Usando o campo registrado $u(x, z = 0, t)$ ao invés do campo inicial $u(x, z, t = 0)$, a solução de (3.1) pode ser escrita como

$$u(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_x} \sum_{\omega} U(k_x, z = 0, \omega) \exp\{i(k_x x + k_z z + \omega t)\} \Delta k_x \Delta \omega. \quad (3.12)$$

Fazendo $z = 0$ na equação (3.12), temos

$$u(x, z = 0, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_x} \sum_{\omega} U(k_x, z = 0, \omega) \exp\{i(k_x x + \omega t)\} \Delta k_x \Delta \omega. \quad (3.13)$$

Comparando (3.6) com (3.13), concluímos que

$$\sum_{\omega} U(k_x, z = 0, \omega) \Delta\omega = \sum_{k_z} U(k_x, k_z, t = 0) \Delta k_z, \quad (3.14)$$

e, portanto, para $t = 0$, temos

$$\begin{aligned} u(x, z, t = 0) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k_x} \sum_{k_z} U(k_x, k_z, t = 0) \exp\{i(k_x x + k_z z)\} \Delta k_x \Delta k_z \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k_x} \sum_{\omega} U(k_x, z = 0, \omega) \exp\{i(k_x x + k_z z)\} \Delta k_x \Delta\omega. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Substituindo k_z na expressão acima por seu valor positivo dado em (3.7) temos

$$u(x, z, t = 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_x} \sum_{\omega} U(k_x, z = 0, \omega) \exp\left\{i \left[k_x x + \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{k_x c}{\omega}\right)^2} z \right]\right\} \Delta k_x \Delta\omega. \quad (3.16)$$

Esta equação corresponde à equação de migração encontrada por Stolt (1978) para meios homogêneos.

Com a escolha de k_z que fizemos, (3.16) é solução da equação da onda de sentido único

$$\frac{\partial U(k_x, z, \omega)}{\partial z} = i \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{k_x c}{\omega}\right)^2} U(k_x, z, \omega), \quad (3.17)$$

em $t = 0$.

O algoritmo para implementação da equação (3.16) segue os seguintes passos:

1. Fazer a transformada de Fourier na dimensões x e t nos dados iniciais $u(x, z = 0, t) \equiv u(x, t)$ para obter $U(k_x, z = 0, \omega) \equiv u(k_x, \omega)$;
2. Calcular $U(k_x, z, \omega)$

$$U(k_x, z, \omega) = U(k_x, z = 0, \omega) \exp\left\{i \left[\frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{k_x c}{\omega}\right)^2} z \right]\right\}; \quad (3.18)$$

para $k_x c \leq \omega$ (i.e., desconsiderando ondas evanescentes).

3. Somar sobre a dimensão ω , obtendo $U(k_x, z, t = 0)$;
4. Por fim, aplicar a transformada de Fourier inversa na dimensão k_x para obter $u(x, z, t = 0)$ ou simplesmente $u(x, z)$, i.e.,

$$u(x, z, t = 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_x} \sum_{\omega} U(k_x, z = 0, \omega) \exp\{ik_x x\} \Delta k_x \Delta \omega . \quad (3.19)$$

Uma vez que o algoritmo de Gazdag realmente não objetiva tratar as amplitudes precisamente, o autor não se preocupa em carregar as constantes ou fatores de escala que aparecem no desenvolver do algoritmo, como no caso das transformadas e dos somatórios onde não aparecem, por exemplo, os fatores Δx , $\Delta \omega$, etc. (que adicionamos aqui). Como nosso objetivo é tratar as amplitudes corretamente, devemos tomar o cuidado de acrescentar todas as constantes e fatores escala, assim como as correções de espalhamento geométrico para o caso de dados de afastamento nulo.

Neste ponto, devemos diferenciar o tratamento que deve ser dado a dados de afastamento nulo e de refletor explosivo, com relação às amplitudes. Cinematicamente, o método de Gazdag pode migrar corretamente os dois tipos de dados. Dinamicamente, o método tal como apresentado, trata corretamente somente as amplitudes de dados de refletor explosivo. No entanto, para o caso do meio homogêneo, as amplitudes de dados de afastamento nulo podem ser corrigidas multiplicando-se os dados pelo fator de espalhamento geométrico $4\pi ct$, que elimina o espalhamento geométrico da onda esférica em meios homogêneos, quando esta é refletida por um refletor plano.

3.2.2 Variação vertical da velocidade

Passamos agora ao caso onde somente ocorre variação vertical da velocidade ($c = c(z)$). Dividimos o meio em camadas de forma que cada camada possua velocidade constante. Então,

o eixo z é dividido em N_z intervalos de modo que

$$I_j = \{z | z_j < z < z_{j+1}; j = 1, 2, \dots, N_z\} . \quad (3.20)$$

Supondo que a velocidade c_j seja constante em cada camada, podemos expressar a equação de migração como

$$U(k_x, z_{j+1}, \omega) = U(k_x, z_j, \omega) \exp \left\{ \frac{i\omega}{c_j} \sqrt{1 - \left(\frac{k_x c_j}{\omega} \right)^2} (z_{j+1} - z_j) \right\} . \quad (3.21)$$

Basta, agora, aplicar a equação acima às diferentes camadas de velocidade.

Como as camadas podem ser escolhidas arbitrariamente finas, este procedimento, apesar de aproximado, pode ter qualquer precisão desejada.

3.3 Migração de amplitude verdadeira

O objetivo deste trabalho é a adaptação do método de Gazdag conforme descrito acima para que este passe a usar a equação da onda de sentido único de amplitude verdadeira (2.70)

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} - i\omega p_z - \frac{1}{2c^3(z)p_z^2} \frac{dc(z)}{dz} \right\} u = \left\{ \frac{\partial}{\partial z} - i\omega p_z - \alpha \right\} u = 0 , \quad (3.22)$$

ao invés da equação de sentido único padrão (3.10). Relembramos que p_z é dado por

$$p_z = \frac{1}{c(z)} \sqrt{1 - \left(\frac{c(z)k_x}{\omega} \right)^2} . \quad (3.23)$$

O primeiro passo é encontrar o campo de onda $u = u(k_x, z, \omega)$ solução da equação (2.70) que pode ser reescrita como

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (i\omega p_z + \alpha) u . \quad (3.24)$$

Esta é uma equação diferencial de primeira ordem que pode ser resolvida por separação de va-

riáveis. Deste modo, temos

$$\int_{z_0}^{z_f} \frac{du}{u} = \int_{z_0}^{z_f} (i\omega p_z + \alpha) dz \Rightarrow \ln\left(\frac{u_f}{u_0}\right) = \int_{z_0}^{z_f} (i\omega p_z) dz + \int_{z_0}^{z_f} \alpha dz, \quad (3.25)$$

e, portanto, u é dado por

$$\begin{aligned} u_f &= u_0 \exp \left\{ \int_{z_0}^{z_f} (i\omega p_z) dz + \int_{z_0}^{z_f} \alpha dz \right\} \\ &= u_0 \exp \left\{ \int_{z_0}^{z_f} (i\omega p_z) dz \right\} \exp \left\{ \int_{z_0}^{z_f} \alpha dz \right\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Observamos que o primeiro fator exponencial em (3.26) é a correção de fase da migração de Gazdag convencional, enquanto o segundo fator exponencial é a correção de amplitude devido ao uso da equação da onda de sentido único e amplitude verdadeira.

3.3.1 Velocidade Constante

Neste ponto, devemos analisar u separadamente para os casos do meio homogêneo e heterogêneo. Começamos tratando do meio homogêneo. Neste caso, temos $\alpha = 0$, pois $\frac{dc(z)}{dz} = 0$. Chamando a velocidade de $c = c_0$, temos

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_f} (i\omega p_z) dz &= \int_{z_0}^{z_f} \left(i \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 - \left(\frac{c_0 k_x}{\omega} \right)^2} \right) dz \\ &= \left(i \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 - \left(\frac{c_0 k_x}{\omega} \right)^2} \right) (z_f - z_0). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Tomando $z_0 = 0$ e $z_f = z$ na equação acima e substituindo em (3.26), temos

$$u = u_0 \exp \left\{ \left(i \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 - \left(\frac{c_0 k_x}{\omega} \right)^2} \right) z \right\}, \quad (3.28)$$

onde $u = u(k_x, z, \omega)$. Esta equação corresponde exatamente à equação (3.19) do método de Gazdag para meios homogêneos.

3.3.2 Variação Vertical da Velocidade

Suponhamos agora que o meio seja heterogêneo. Considere a primeira exponencial em (3.26). Para implementar a integral que é argumento da primeira exponencial, dividimos o intervalo (z_0, z) em subintervalos do tipo $I_j = \{z | z_j < z < z_{j+1}; j = 1, 2, \dots, N_z\}$, de maneira que a velocidade de propagação, $c_j = c(z_j)$, seja constante em cada um dos intervalos. Deste modo, podemos dividir o campo u em camadas fazendo $u_j = u(k_x, z_j, \omega)$. Assim, temos

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{du}{u} = \int_{z_j}^{z_{j+1}} (i\omega p_z + \alpha) dz \Rightarrow \ln \left(\frac{u_{j+1}}{u_j} \right) = \int_{z_j}^{z_{j+1}} (i\omega p_z) dz + \int_{z_j}^{z_{j+1}} \alpha dz, \quad (3.29)$$

e, portanto, u_{j+1} é dado por

$$\begin{aligned} u_{j+1} &= u_j \exp \left\{ \int_{z_j}^{z_{j+1}} (i\omega p_z) dz + \int_{z_j}^{z_{j+1}} \alpha dz \right\} \\ &= u_j \exp \left\{ \int_{z_j}^{z_{j+1}} (i\omega p_z) dz \right\} \exp \left\{ \int_{z_j}^{z_{j+1}} \alpha dz \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Usando o Teorema do Valor Médio para integrais, podemos avaliar a integral na primeira função exponencial como

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} (i\omega p_z) dz = i\omega p_z(\xi)(z_{j+1} - z_j), \quad \text{onde } \xi \in [z_j, z_{j+1}]. \quad (3.31)$$

Como supomos que o intervalo (z_j, z_{j+1}) é pequeno, podemos aproximar $p_z(\xi)$ pela média da vagarosidade vertical, p_z , neste intervalo. Assim, obtemos

$$u_{j+1} = u_j \exp \{ i\omega p_z(z_{j+1} - z_j) \} \exp \left\{ \int_{z_j}^{z_{j+1}} \alpha dz \right\}. \quad (3.32)$$

Devemos agora analisar o argumento da segunda exponencial em (3.32). Para isso, observa-

mos que

$$\begin{aligned} \ln(p_z) &= \ln \left(\frac{1}{c(z)} \sqrt{1 - \left(\frac{c(z)k_x}{\omega} \right)^2} \right) \Rightarrow \\ \frac{d \ln(p_z)}{dz} &= -\frac{1}{c^3(z)p_z^2} \frac{dc(z)}{dz} dz = -2\alpha . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Portanto, temos

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} \alpha dz = \int_{z_j}^{z_{j+1}} \left(\frac{1}{2c^3(z)p_z^2} \frac{dc(z)}{dz} \right) dz = -\frac{1}{2} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{d \ln(p_z)}{dz} dz \quad (3.34)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{z_{j+1}}^{z_j} \frac{d \ln(p_z)}{dz} dz = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p_{z_j}}{p_{z_{j+1}}} \right) , \quad (3.35)$$

logo,

$$\exp \left\{ \int_{z_{j+1}}^{z_j} \alpha dz \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p_{z_j}}{p_{z_{j+1}}} \right) \right\} = \sqrt{\frac{p_{z_j}}{p_{z_{j+1}}}} . \quad (3.36)$$

Assim, temos a nova expressão para equação de migração de Gazdag de amplitude verdadeira,

$$u_{j+1} = u_j \sqrt{\frac{p_{z_j}}{p_{z_{j+1}}}} \exp \{ i\omega p_z (z_{j+1} - z_j) \} , \quad (3.37)$$

onde p_z é calculado através da equação (2.29).

Capítulo 4

Refletor explosivo

As equações da onda de sentido único de amplitude verdadeira podem ser aplicadas somente a dados que sejam solução de uma única equação da onda, ou seja, dados provenientes de uma fonte comum. A migração de Gazdag, no entanto, é feita para migrar dados de afastamento nulo, ou seja, uma seção de traços sísmicos onde cada qual foi resultado de uma propagação de ondas com uma fonte em lugar individual. Logo, precisamos de uma adaptação para fazer com que estes dados possam ser descritos pelas equações de sentido único de amplitude verdadeira e ao mesmo tempo possam ser migrados com o método de Gazdag.

Refletor explosivo (exploding reflector) é um tipo de coleta de dados hipotética onde as fontes são colocadas no refletor e emitem ondas que propagam ao longo de raios normais e são captadas por receptores na superfície. Obviamente, não é uma configuração fisicamente possível. O que fazemos aqui, é uma aproximação supondo que as fontes sobre o refletor formam uma única fonte. Estes dados hipotéticos equivalem cinematicamente a um experimento de afastamento nulo com metade da velocidade original. Assim, os dados seriam “ao mesmo tempo” de afastamento nulo e fonte comum.

Uma vez que na época de Gazdag (1980), o processador sísmico não se interessava pelas amplitudes, a equivalência cinemática era tudo que era preciso para se aplicar a migração a dados de afastamento nulo, já que esta equivalência garante o posicionamento correto das imagens

dos refletores. Porém, como estamos interessados em amplitudes verdadeiras, a equivalência cinemática por si só não é suficiente.

Apesar de dados de refletor explosivo serem cinematicamente equivalentes a dados de afastamento nulo, a dinâmica é diferente. Portanto, as amplitudes não são as mesmas. Bleistein et al. (2001) mostrou como filtrar dados de afastamento nulo em 3D para transformá-los em dados de refletor explosivo. O sugerido é que se tome a expressão da aproximação de Kirchhoff adaptada para o caso de afastamento nulo e se faça algumas transformações de modo que apareça a expressão da função de Green com velocidade igual a metade da velocidade original. Assim, esta função de Green é equivalente a um campo de onda de refletor explosivo.

Neste capítulo, mostramos como filtrar dados de afastamento nulo para meios 2D, 3D e 2.5D, com base na filtragem desenvolvida por Bleistein et al. (2001) para o caso 3D.

4.1 Caso 2D

Como neste trabalho somente realizamos testes numéricos para o caso bidimensional, mostramos agora a filtragem que deve ser feita num campo de onda de afastamento nulo 2D, a fim de obter o respectivo campo de refletor explosivo. Frizamos que esta filtragem em campos de ondas bidimensionais têm fim somente teórico, uma vez que, na prática, mesmo nos casos de simetria cilíndrica, as amplitudes sofrem espalhamento geométrico tridimensional. Devido à dificuldade em se obter dados de refletor explosivo para os casos 2.5D e 3D, nossos testes numéricos foram realizados no caso 2D.

Nesta seção, u_S é um campo de onda bidimensional, disposto em forma de matriz, cujos dados possuem espalhamento geométrico 2D, ou seja, toda a energia fica contida no plano xz . Começamos introduzindo a aproximação de Kirchhoff bidimensional para meios homogêneos,

$$u_S(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s, \omega) = i\omega F(\omega) \exp\{i \operatorname{sgn}(\omega)\pi/2\} \int_C RA(\mathbf{x}_g, \mathbf{x})A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)\mathbf{n} \cdot \nabla[\tau(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}) + \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)] \exp\{i\omega(\tau(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}) + \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s))\}dC, \quad (4.1)$$

onde $u_S = u_S(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s, \omega)$ é o campo de onda espalhado registrado em \mathbf{x}_g , \mathbf{x}_g é a coordenada do receptor, \mathbf{x}_s é a coordenada da fonte, R é o coeficiente de reflexão, \mathbf{n} é o vetor unitário normal à interface S onde ocorre a reflexão, $F(\omega)$ a função da fonte no domínio da frequência. Além disso, $\tau(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ e $A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ são o tempo de trânsito e a amplitude, respectivamente, de uma onda propagando de \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 , a seguir aproximados pela Teoria dos Raios.

Queremos avaliar a aproximação (4.1) para o caso de velocidade constante, c_0 , e afastamento nulo. A primeira observação a ser feita é que $\mathbf{x}_g = \mathbf{x}_s$ e, daqui pra frente, passaremos a chamar de ξ , i.e., $\mathbf{x}_g = \mathbf{x}_s = \xi$. Então, definimos

$$r = |\mathbf{x} - \xi| , \quad (4.2)$$

onde \mathbf{x} é um ponto sobre o refletor. As expressões das amplitudes e dos tempos de trânsito são, respectivamente,

$$A(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c_0}{2\pi|\omega|r}} , \quad \tau_s(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}) = \frac{r}{c_0} . \quad (4.3)$$

Fazendo as considerações de afastamento nulo e substituindo as expressões das amplitudes e dos tempos de trânsito em (4.1), temos

$$u_S(\xi, \omega) = \frac{-F(\omega)}{4\pi} \int_C R \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \exp \left\{ \frac{2i\omega r}{c_0} \right\} dC , \quad (4.4)$$

que é a expressão da aproximação de Kirchhoff bidimensional para o campo de onda espalhado para cima pelo refletor C , registrado em ξ e para o caso de afastamento nulo.

Introduzimos agora a expressão da função de Green 2D com velocidade $c_0/2$

$$g(\xi, \omega) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{c_0}{\pi|\omega|r}} \exp \left\{ \frac{2i\omega r}{c_0} + i\frac{\pi}{4} \text{sgn}(\omega) \right\} . \quad (4.5)$$

Podemos observar que, na equação (4.4), u_S depende de r . Se esta dependência fosse de \sqrt{r} , poderíamos rearranjar os termos e acrescentar constantes necessárias de maneira a identificar a expressão da função de Green com velocidade $c_0/2$. Podemos obter esta dependência desejada

realizando “meia derivada” no campo u_S com respeito a ω . Para que isto seja facilmente realizável, devemos, primeiramente, eliminar do campo u_S os termos dependentes de ω . Fazendo isto, temos

$$\begin{aligned}\tilde{u}_S &= \frac{u_S}{F(\omega)} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_C R \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \exp\left\{\frac{2i\omega r}{c_0}\right\} dC .\end{aligned}\quad (4.6)$$

Agora, podemos facilmente realizar a meia derivada, obtendo

$$\frac{\partial^{1/2}\tilde{u}_S}{\partial\omega^{1/2}} = \frac{1}{4\pi} \int_C R \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \sqrt{\frac{2i}{c_0 r}} \exp\left\{\frac{2i\omega r}{c_0}\right\} dC .\quad (4.7)$$

Definindo,

$$v_S = \frac{\sqrt{\pi}c_0 \exp\{i\text{sgn}(\omega)\pi/4\}}{\sqrt{2i|\omega|}} \frac{\partial\tilde{u}_S}{\partial\omega} ,\quad (4.8)$$

observamos que

$$v_S = \int_C R \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{c_0}{\pi|\omega|r}} \exp\{2i\omega r/c_0 + i\text{sgn}(\omega)\pi/4\} ,\quad (4.9)$$

e podemos claramente visualizar a função de Green 2D no integrando acima.

O campo de onda v_S é o campo de onda de refletor explosivo relativo ao campo de afastamento nulo u_S . O campo v_S é solução da equação da onda (Bleistein et al., 2001)

$$\left[\nabla_{\xi}^2 + \frac{2\omega^2}{c_0}\right] v_S(\xi, \omega) = \delta(s)R ,\quad (4.10)$$

onde $\delta(s)$ é a função singular da superfície refletora S .

Portanto, através da filtragem de uma filtragem de u_S , obtemos um campo de onda de refletor explosivo, v_S , cinematicamente e dinamicamente consistente com o campo de afastamento nulo.

4.2 Caso 3D

A filtragem de dados de afastamento nulo 3D para dados de refletor explosivo 3D segue basicamente os mesmos passos da seção 2D. Para evitar repetições óbvias, destacamos aqui somente as principais diferenças entre as filtragens 2D e 3D. O desenvolvimento completo 3D é feito em Bleistein et al. (2001).

A aproximação de Kirchhoff 3D (Apêndice C) é dada por

$$u_S(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s, \omega) = i\omega F(\omega) \int_S RA(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g) \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla[\tau(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})] + \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g]) \times \exp\{i\omega[\tau(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})] + \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g)]\} dS . \quad (4.11)$$

Fazendo as mesmas considerações da seção anterior para avaliarmos a expressão (4.11) para o caso de afastamento nulo, e substituindo A pela sua expressão dada pela Teoria dos Raios

$$A = \frac{1}{4\pi r} , \quad (4.12)$$

temos

$$u_S(\xi, \omega) = \frac{i\omega F(\omega)}{8\pi^2 c_0} \int_S R \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \exp\left\{\frac{2i\omega r}{c_0}\right\} dS , \quad (4.13)$$

que é a aproximação de Kirchhoff 3D para o caso de afastamento nulo.

A função de Green 3D (B.11), discutida no Apêndice B, é dada por

$$g(\xi, \omega) = \frac{1}{4\pi r} \exp\{i\omega r/c_0\} . \quad (4.14)$$

Desejamos então que u_S dependa de r e não de r^2 . A filtragem a ser feita em u_S para se obter o respectivo campo de refletor explosivo v_S é dada por

$$v_S = \frac{\pi c_0^2}{iF(\omega)} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{u_S}{i\omega} \right] . \quad (4.15)$$

Logo, o campo de refletor explosivo é dado por

$$v_S = \int_S R \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \cdot \frac{1}{4\pi r} \exp\left\{\frac{2i\omega r}{c_0}\right\} dS, \quad (4.16)$$

e é solução da equação Bleistein et al. (2001)

$$\left[\nabla_{\xi}^2 + \frac{2\omega^2}{c_0}\right] v_S(\xi, \omega) = \delta(s)R. \quad (4.17)$$

4.3 Simetria Cilíndrica (2.5D)

No passado, era usual que dados sísmicos fossem coletados ao longo de linhas. Supomos que estas linhas sejam paralelas ao eixo x . Assim, os dados coletados, $u = u(x, z = 0, t)$, podem ser chamados de 2D. No entanto, uma migração 2D não trata corretamente as amplitudes. Isto ocorre porque embora os dados sejam 2D, as amplitudes são resultado da propagação de ondas em um meio 3D, ou seja, mesmo que a propagação tenha sido restrita a um plano, a energia não permanece toda contida neste plano. A energia se “espalha” para fora do plano, i.e., a amplitude sofre espalhamento geométrico 3D. Uma migração 3D completa de uma única linha sísmica, também é não possível pois, neste caso, não se tem dados suficientes que permitam o uso desta migração. O mais adequado é aplicar um tratamento de amplitudes 3D, contudo, considerando uma técnica de migração 2D.

Mesmo hoje havendo tecnologia suficiente para coletar e processar dados tridimensionais correspondentes a uma área na superfície, o processamento de linhas sísmicas separadamente ainda é muito utilizado em virtude do baixo custo computacional em comparação com uma migração 3D. Embora não seja o caso geral, há muitas situações em que uma linha de dados sísmicos é suficiente para gerar uma imagem adequada do meio.

Para que uma migração 2D que trate corretamente as amplitudes 3D seja possível em uma determinada região, devemos ter uma simetria cilíndrica, i.e., uma variação aproximadamente bidimensional do meio. Por convenção, dizemos que este tipo de meio varia somente nas direções

x e z . Logo, se a linha de aquisição de dados é disposta paralelamente ao eixo x , não importa a coordenada do eixo y no espaço onde esta linha é colocada, os dados são iguais para todos os valores de y . Levando em consideração esta igualdade, é possível criar métodos de migração 2D com propriedades de amplitudes 3D corretas.

Deve ficar claro que, não se trata de um processamento 2D, pois o meio onde os dados foram coletados é tridimensional. A variação dos parâmetros do meio é que é bidimensional. Problemas desta natureza são chamados de problemas 2.5D Bleistein (1986).

No nosso caso, por exemplo, temos um campo de onda na situação 2.5D, ou seja, os dados são representados por uma matriz bidimensional, representando uma linha de coleta de dados onde a posição no eixo y é fixa (geralmente, $y = 0$), mas com espalhamento geométrico 3D, ou seja, há espalhamento de energia para fora do plano xz . Em seguida, esses dados são migrados com a equação da onda 2D. Precisamos, então, de uma representação da aproximação de Kirchhoff 2.5D para configuração de afastamento nulo. Para derivá-la, seguimos o desenvolvimento 3D de Bleistein et al. (2001).

Quando se objetiva obter a expressão de uma equação ou função para o caso 2.5D, normalmente o que se faz é, partir da expressão 3D da equação ou função fazendo algumas considerações a fim de simplificar a expressão para a situação 2.5D. O primeiro detalhe a se observar é que a velocidade do meio não depende mais de y , mas somente de x e z . A seguir, deve-se avaliar a expressão em $y = 0$ para eliminar totalmente a dependência desta coordenada. No entanto, nem sempre é tão simples eliminar esta dependência. Aqui, lançamos mão do método de fase estacionária para transformar a aproximação de Kirchhoff 3D em uma aproximação 2.5D.

Introduzimos a aproximação de Kirchhoff 3D para meios com densidade constante, descrita no Apêndice C,

$$u_S(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s, \omega) = i\omega F(\omega) \int_S RA(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g) \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla[\tau(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})] + \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g)) \cdot \exp\{i\omega[\tau(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})] + \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g)]\} dS, \quad (4.18)$$

onde $u_S = u_S(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s, \omega)$ é o campo de onda espalhado registrado em \mathbf{x}_g , \mathbf{x}_g é a coordenada do

receptor, \mathbf{x}_s é a coordenada da fonte, R é o coeficiente de reflexão, \mathbf{n} é o vetor unitário normal à interface S onde ocorre a reflexão, $F(\omega)$ a função da fonte no domínio da frequência. Além disso, $\tau(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ e $A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ são o tempo de trânsito e a amplitude, respectivamente, de uma onda propagando de \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 , a seguir aproximados pela Teoria dos Raios.

Queremos avaliar a aproximação (4.18) para o caso de velocidade constante, c_0 , e afastamento nulo. A primeira observação a ser feita é que $\mathbf{x}_g = \mathbf{x}_s$ e, daqui pra frente, passaremos a chamar de ξ , i.e., $\mathbf{x}_g = \mathbf{x}_s = \xi$. Então, definimos

$$r = |\mathbf{x} - \xi| , \quad (4.19)$$

onde \mathbf{x} é um ponto sobre o refletor. As expressões das amplitudes e dos tempos de trânsito são, respectivamente,

$$A(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r} , \quad \tau_s(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}) = \frac{r}{c_0} . \quad (4.20)$$

Considerando-se todos estes detalhes e substituindo-os em (4.18) podemos, agora, simplificar a expressão da aproximação de Kirchhoff para afastamento nulo, obtendo

$$u_S(\xi, \omega) = \int_S \frac{i\omega F(\omega)}{8\pi^2 c_0} R(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \exp \left\{ 2i\omega \frac{r}{c_0} \right\} dS . \quad (4.21)$$

A aproximação (4.21) é uma aproximação para o campo de onda espalhado registrado em ξ , refletido pela superfície S , para uma configuração de afastamento nulo em um meio tridimensional. Resta-nos encontrar uma aproximação equivalente para a situação 2.5D. Para isso, usamos o método da fase estacionária, descrito no Apêndice D, a fim de eliminar a dimensão y da aproximação. Este método aproxima integrais da forma abaixo da seguinte maneira

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int f(\eta) \exp\{i\lambda\Phi(\eta)\} d\eta \\ &\sim \sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda|\Phi''(\eta_0)}} f(\eta_0) \exp \left\{ i\lambda\Phi(\eta_0) + i\frac{\pi}{4} \text{sgn}(\lambda)\text{sgn}(\Phi''(\eta_0)) \right\} . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Primeiramente, observamos que a integração ao longo da interface S pode ser parametrizada da

forma $dS = dydC$, uma vez que a interface é constante na direção y . Aqui C representa a curva do refletor S ao longo do eixo x . Identificando $\eta = y$ e observando que

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{2}{c_0} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2}{c_0} \frac{y - \xi_2}{r}, \quad (4.23)$$

concluimos que o ponto estacionário η_0 onde $\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$ se encontra em $y = \xi_2$. Uma vez que

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r} - \frac{(y - \xi_2)^2}{r^3}, \quad (4.24)$$

temos no ponto estacionário

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r}, \quad (4.25)$$

e identificando

$$\lambda = \omega, \quad \Phi(\eta_0) = 2\tau, \quad \Phi'' = 2\tau'' = \frac{2}{c_0 r}, \quad (4.26)$$

podemos usar a fórmula (4.22) na integral em y da equação (4.21), obtendo

$$u_S = \frac{F(\omega) \sqrt{|\omega|}}{8c_0^{1/2} \pi^{3/2}} \exp \left\{ \frac{3\pi}{4} i \operatorname{sgn}(\omega) \right\} \int_C R(\mathbf{x}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \frac{\exp \left\{ 2i\omega \frac{r}{c_0} \right\}}{r^{3/2}} dC, \quad (4.27)$$

que é a aproximação de afastamento nulo desejada para a situação 2.5D em um meio homogêneo.

Observamos que a parte exponencial no integrando da equação (4.27) tem a mesma forma daquela da função de Green para meios 3D, discutida no Apêndice B, com a velocidade de propagação dividida por 2, i.e.,

$$g(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\exp \left\{ \frac{2i\omega r}{c_0} \right\}}{4\pi r}. \quad (4.28)$$

Observamos, na equação (4.27), que u_S depende de $r^{-3/2}$. Seria desejável que esta dependência fosse de r , pois assim poderíamos identificar facilmente a expressão da função de Green 3D nesta equação. Logo, precisamos de algumas modificações em (4.27) a fim de que possamos fazer com que esta passe a conter a expressão da função de Green 3D. Notamos que, é possível se obter a dependência desejada fazendo “meia derivada” em (4.27) com relação a ω . Antes,

porém, precisamos dividir u_S por $F(\omega)\sqrt{|\omega|} \exp\left\{\frac{3\pi}{4}i\text{sgn}(\omega)\right\}$. Primeiramente, notamos que

$$\exp\left\{\frac{3\pi}{4}i\text{sgn}(\omega)\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\text{sgn}(\omega)i - 1). \quad (4.29)$$

Substituindo (4.29) em (4.27) e rearranjando os termos de u_S de maneira a explicitar a função de Green, temos

$$u_S = \frac{F(\omega)\sqrt{|\omega|}}{2\pi^{1/2}c_0^{1/2}} \frac{\sqrt{2}}{2}(\text{sgn}(\omega)i - 1) \int_C R(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^{1/2}} \frac{\exp\left\{2i\omega \frac{r}{c_0}\right\}}{4\pi r} dC. \quad (4.30)$$

Queremos agora eliminar a dependência de $r^{1/2}$. Para isto, devemos dividir u_S pelos termos dependentes de ω e, a seguir, realizar “meia derivada” com relação à ω . Dividindo u_S pelos termos que são função de ω e pelas constantes restantes temos,

$$\tilde{u}_S = \left(u_S \cdot \frac{2\pi^{1/2}c_0^{1/2}}{F(\omega)\sqrt{|\omega|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}/2(\text{sgn}(\omega)i - 1)} \right) = \int_C R(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^{1/2}} \frac{\exp\left\{2i\omega \frac{r}{c_0}\right\}}{4\pi r} dC. \quad (4.31)$$

Aplicando a meia-derivada em \tilde{u}_S com relação a ω , temos

$$\frac{d^{1/2}\tilde{u}_S}{d\omega^{1/2}} = \int_C R(\mathbf{x}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \sqrt{\frac{2i}{c_0}} \frac{\exp\left\{2i\omega \frac{r}{c_0}\right\}}{4\pi r} dC. \quad (4.32)$$

Definindo

$$v_S = \sqrt{\frac{c_0}{2i}} \cdot \frac{d^{1/2}\tilde{u}_S}{d\omega^{1/2}}, \quad (4.33)$$

observamos que

$$v_S = \int_C R(\mathbf{x}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \frac{\exp\left\{2i\omega \frac{r}{c_0}\right\}}{4\pi r} dC. \quad (4.34)$$

O campo de onda v_S é o campo de onda de refletor explosivo relativo ao campo de afasta-

mento nulo u_S . O campo v_S é solução da equação da onda (Bleistein et al., 2001)

$$\left[\nabla_{\xi}^2 + \frac{2\omega^2}{c_0} \right] v_S(\xi, \omega) = \delta(s)R, \quad (4.35)$$

onde $\delta(s)$ é a função singular da superfície refletora S .

Capítulo 5

Testes numéricos

Neste capítulo, apresentamos os testes numéricos referentes à migração em amplitude verdadeira conforme descrita no capítulo anterior.

5.1 Meio homogêneo

Começamos com a apresentação dos testes numéricos realizados a fim de verificar a qualidade das seções migradas obtidas através do método de Gazdag (1980) para meios homogêneos no caso 2D. Utilizamos exemplos com refletores planos e não planos. Lembramos que, a fim de que a seção possa ser corretamente migrada em relação às amplitudes pelo método de Gazdag, os dados devem vir de uma configuração de refletor explosivo. Para fins de comparação, migramos alguns dados de afastamento nulo 2.5D através do método de Gazdag original e aplicamos a correção de espalhamento geométrico $4\pi vt$.

Para realizar os testes numéricos apresentados e discutidos aqui, geramos seções empilhadas sintéticas e implementamos todos os algoritmos usando o software Matlab. Todos os dados foram gerados de modo a terem amplitude igual a 1.

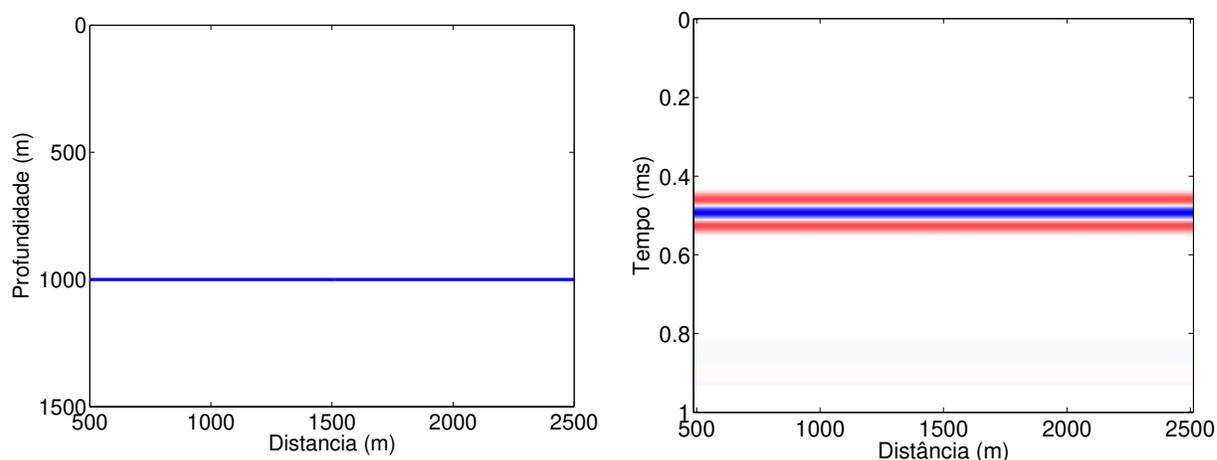


Fig. 5.1: Refletor explosivo plano: modelo (esquerda) e seção empilhada (direita).

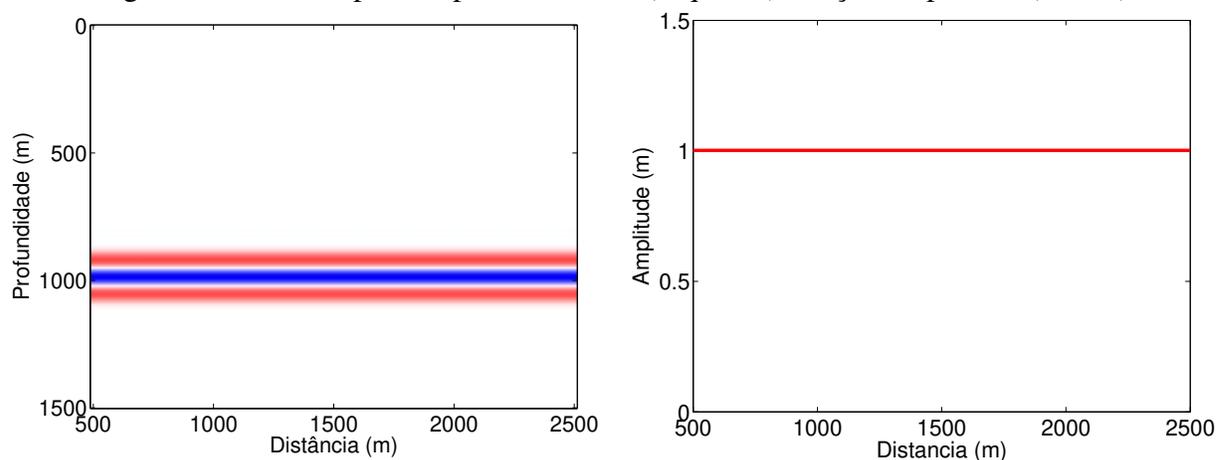


Fig. 5.2: Refletor explosivo plano: seção migrada (esquerda) e amplitudes (direita).

5.1.1 Dados de refletor explosivo

Nesta seção, utilizamos dados de refletor explosivo 2D modelados por diferenças finitas. Nosso primeiro modelo é um refletor localizado a 1000m de profundidade. O modelo refletor e a seção empilhada são exibidos na Figura 5.1 e as amplitudes obtidas são exibidas na Figura 5.2. A curva das amplitudes mostram os picos de amplitudes dos traços ao longo do eixo z . Vemos que a seção migrada está correta e as amplitudes foram preservadas corretamente.

Nosso segundo modelo é um refletor circular (parte de uma circunferência, mais exatamente). O modelo e a seção empilhada são mostrados na Figura 5.3. A seção migrada e as amplitudes são

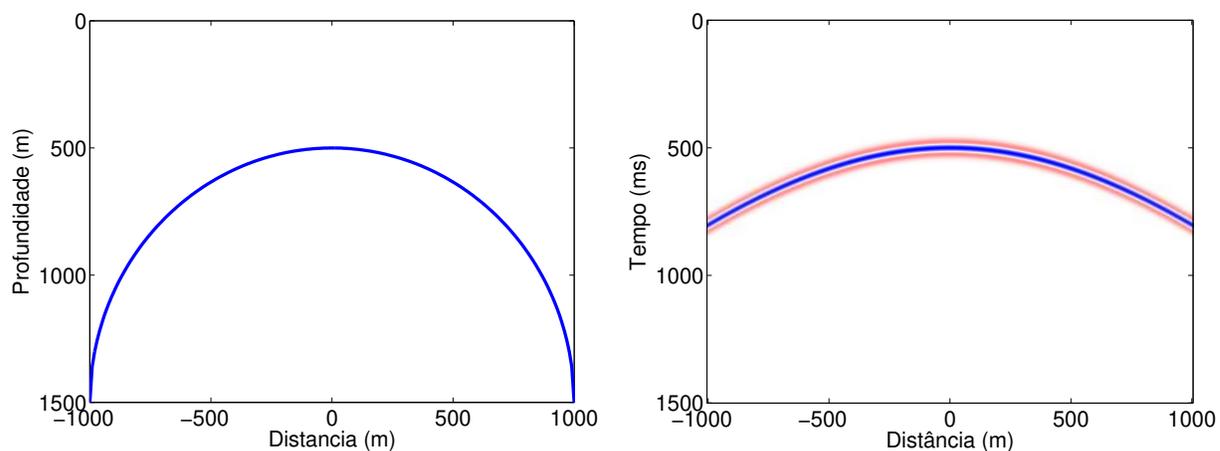


Fig. 5.3: Refletor explosivo circular: modelo (esquerda) e dados iniciais (direita).

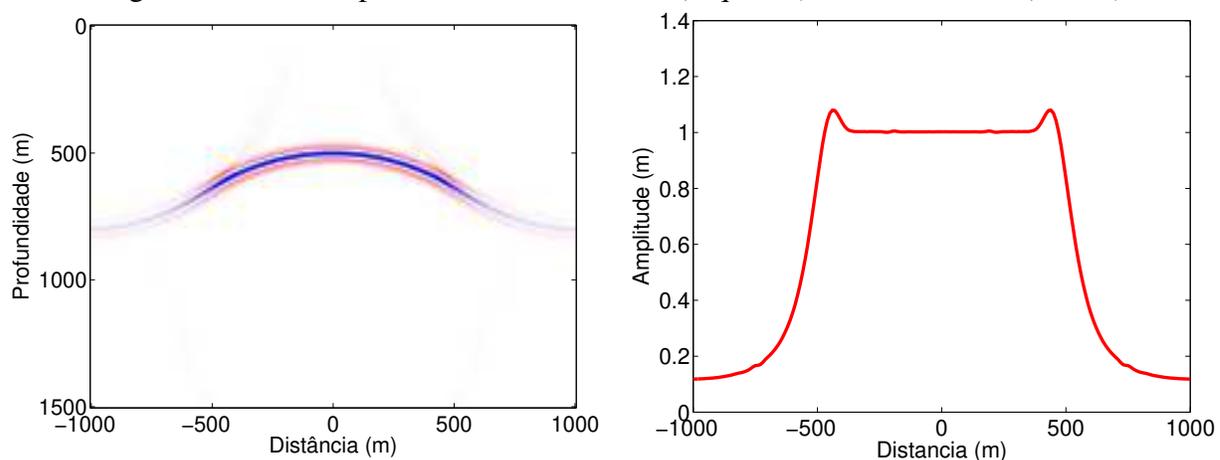


Fig. 5.4: Refletor explosivo circular: seção migrada (esquerda) e amplitudes (direita).

exibidas nas Figura 5.4. Note que, neste caso, como temos somente raios de incidência normal, temos informações aproximadamente no intervalo $x \in (-500, 500)$. Fora deste intervalo não temos informações sobre os refletores porque as ondas refletidas nesta parte do refletor não são registradas pela geometria de aquisição simulada. Logo, vemos que no local onde temos dados as amplitudes estão corretas. As amplitudes fora desta faixa devem ser desconsideradas, pois são referentes a locais não iluminados.

Nosso último exemplo desta seção é um refletor em forma de domo. A Figura 5.5 mostra o modelo e a seção empilhada deste exemplo. As amplitudes e a seção migrada são exibidas na Figura 5.6. Note como os efeitos de bordas da modelagem dos dados que aparecem na seção

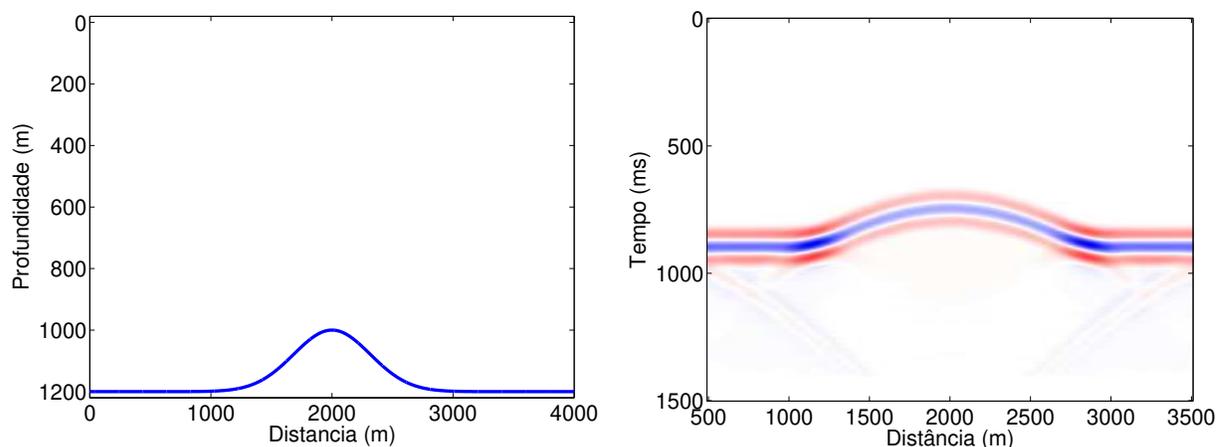


Fig. 5.5: Refletor explosivo domo: modelo (esquerda) e dados iniciais (direita).

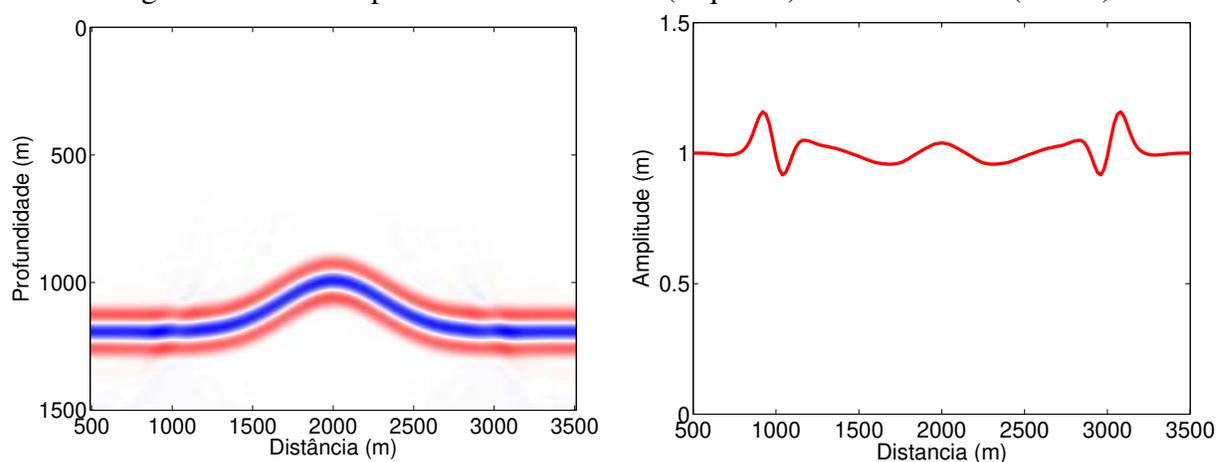


Fig. 5.6: Refletor explosivo domo: seção migrada (esquerda) e amplitudes (direita).

empilhada afetam as amplitudes. Porém, isto é um erro numérico do gerador de dados sintéticos. Na prática, dados reais não possuem este tipo de erro. Portanto, as amplitudes foram preservadas corretamente também neste caso.

5.1.2 Dados de afastamento nulo

Nesta seção, utilizamos dados de afastamento nulo 2.5D. Lembramos novamente que, para seções de afastamento nulo, devemos multiplicar os dados por $4\pi vt$ para corrigir as amplitudes na migração de Gazdag. Usamos também o método de Kirchhoff de amplitude verdadeira (Hubral

et al., 1991), com o objetivo de compararmos os resultados obtidos através dos dois métodos.

O primeiro exemplo é um refletor plano, localizado a uma profundidade de 700m. A Figura 5.7 mostra o modelo do refletor e a seção empilhada para o primeiro exemplo. As seções migradas, obtidas a partir dos dados de afastamento nulo, que resultaram da migração de Gazdag e Kirchhoff, respectivamente, são exibidas na Figura 5.8. Observamos que seções migradas são bastante parecidas. Nota-se que na migração de Kirchhoff os efeitos de borda são mais visíveis.

A Figura 5.9 mostra os picos de amplitude dos traços ao longo do eixo x . Logo, vemos que os dois métodos preservam as amplitudes de maneira correta. Neste caso, porém, o traço das amplitudes obtidas através de Gazdag são visivelmente melhores, pois não sofrem o efeito de borda. No entanto, é importante observar que o método de Gazdag, por se basear na transformada de Fourier discreta, impõe condições de fronteira periódicas que podem causar problemas em situações onde o refletor não apresenta esta simetria.

Nosso segundo modelo é um refletor circular (parte de uma circunferência, mais exatamente). O modelo e a seção empilhada são mostrados na Figura 5.10. A Figura 5.11 mostra as seções migradas por Gazdag e Kirchhoff. Novamente, as seções migradas são bastante parecidas. Note que, temos informações somente no intervalo $x \in (-500, 500)$, por isso, as seções migradas estão corretas. Fora deste intervalo não temos informações sobre os refletores.

A Figura 5.12 mostra as amplitudes obtidas por cada método e a Figura 5.13 mostra as amplitudes sobrepostas para este exemplo. Neste caso, as amplitudes na região “iluminada”, ou seja, no local onde temos dados, que é para $x \in (-500, 500)$, estão corretas em ambas as migrações. As amplitudes fora desta faixa devem ser desconsideradas, pois são referentes a locais não iluminados. Mesmo sendo bastante parecidas quando sobrepostas, podemos notar pelas figuras individuais de amplitudes que as amplitudes de Gazdag são ligeiramente mais suaves.

Nosso último modelo para afastamento nulo é a lateral de um domo. A Figura 5.14 mostra o modelo e os dados de afastamento nulo modelados pela aproximação de Kirchhoff em 2.5D. A Figura 5.15 mostra as seções migradas obtidas pelos métodos de Gazdag e de Kirchhoff.

A Figura 5.16 e 5.17 mostra as amplitudes de cada uma das seções migradas. Observando

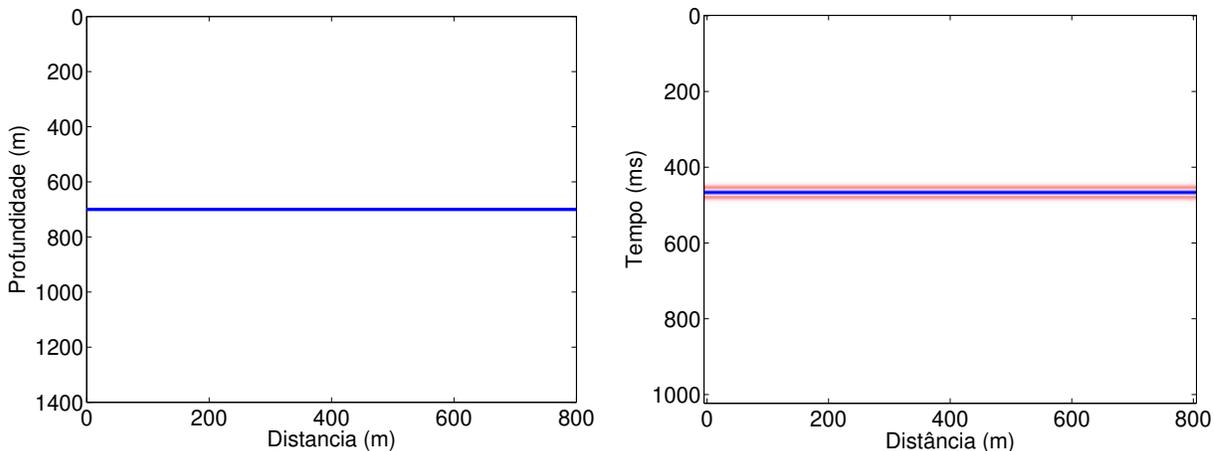


Fig. 5.7: Afastamento nulo plano: modelo (esquerda) e dados iniciais (direita).

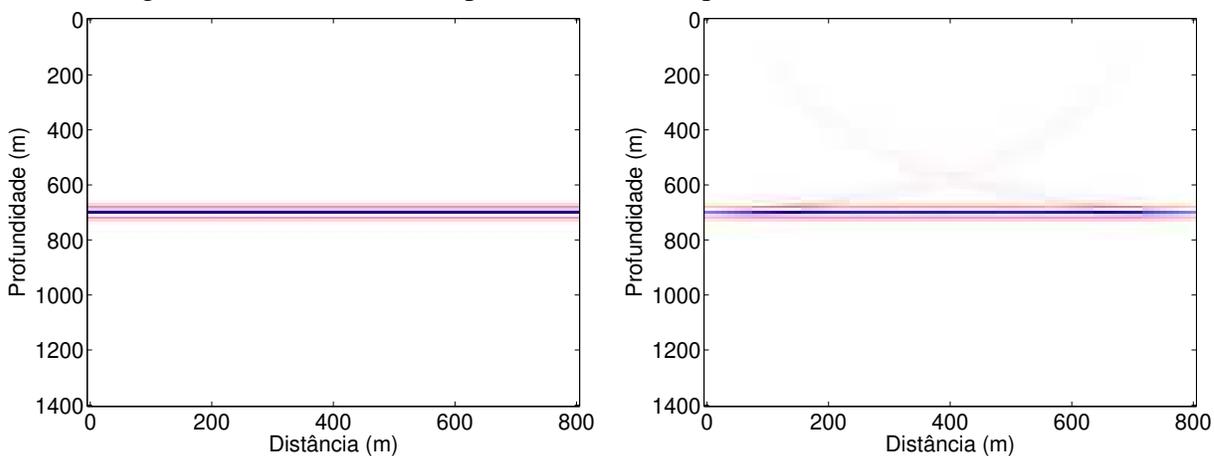


Fig. 5.8: Afastamento nulo plano: seção migrada Gazdag (esquerda) e Kirchhoff (direita).

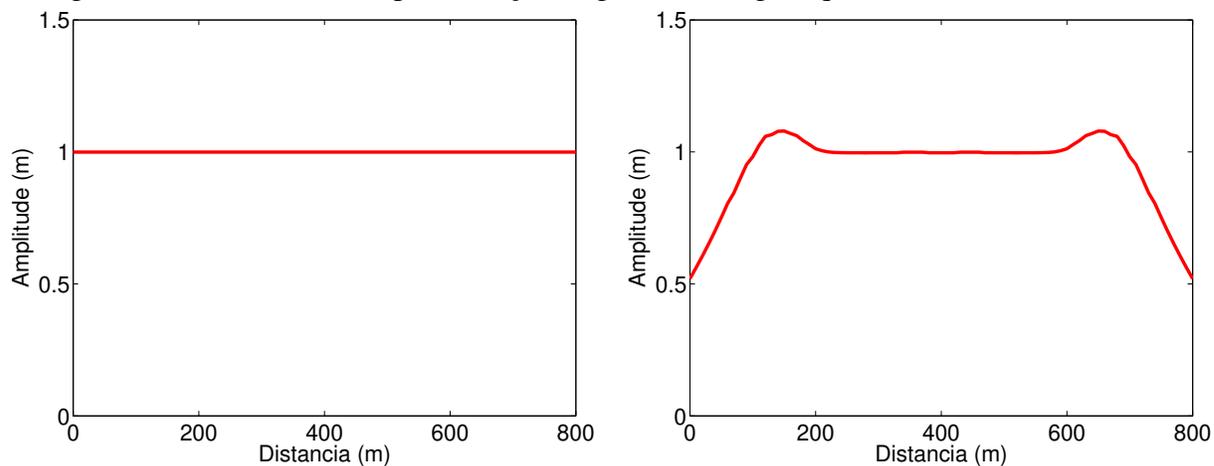


Fig. 5.9: Afastamento nulo plano: amplitudes Gazdag (esquerda) e Kirchhoff (direita).

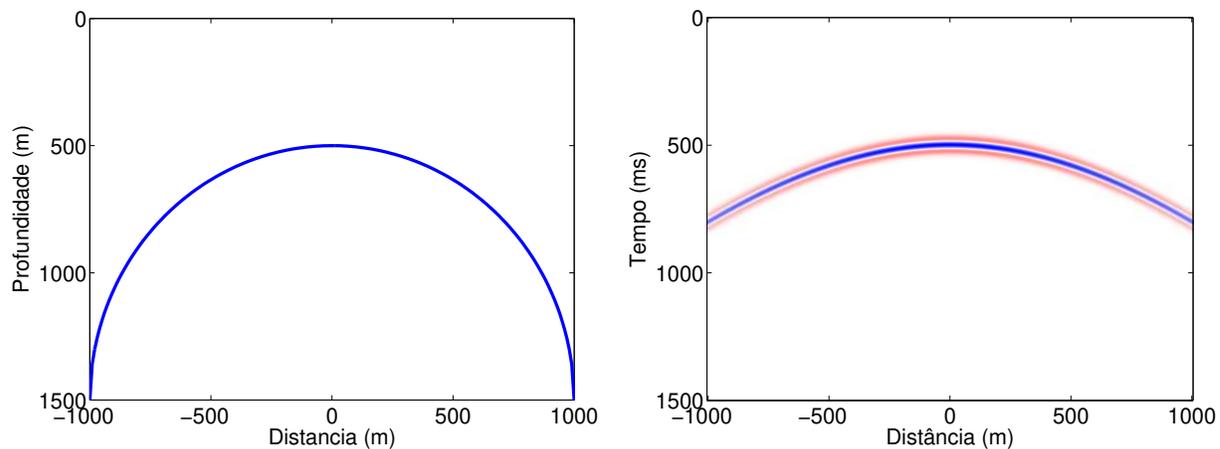


Fig. 5.10: Afastamento nulo circular: modelo (esquerda) e dados iniciais (direita).

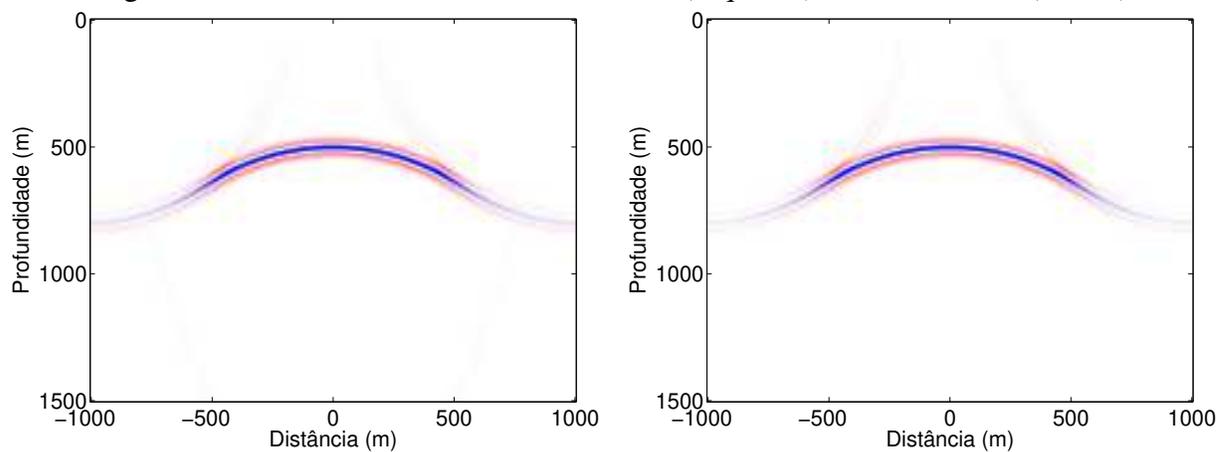


Fig. 5.11: Afastamento nulo circular: seção migrada Gazdag (esquerda) e Kirchhoff (direita).

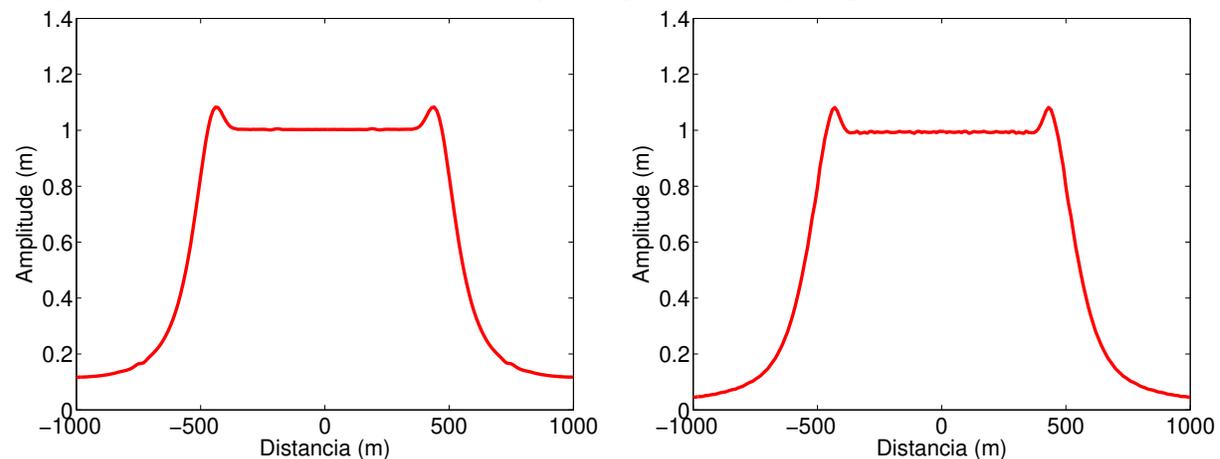


Fig. 5.12: Afastamento nulo circular: amplitudes Gazdag (esquerda) e Kirchhoff (direita).

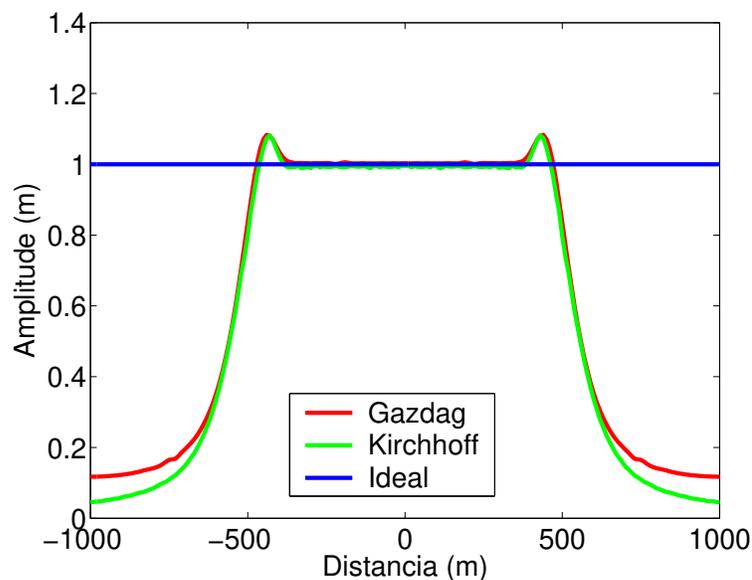


Fig. 5.13: Afastamento nulo circular: picos de amplitudes dos dados migrados pelos métodos de Gazdag e Kirchhoff.

esta figura, vemos que as amplitudes fornecidas por ambas migrações são bastante próximas. Observamos também, que os pontos onde as amplitudes mais se diferem (logo no começo do eixo x) correspondem ao local onde se encontra a parte curva do refletor. Logo, concluímos que a migração de Gazdag não corrigiu corretamente as amplitudes neste trecho, uma vez que o ideal é que a amplitude fosse igual a 1 ao longo de todo o eixo x . Logo, já era de se esperar que as amplitudes não fossem corretamente corrigidas na parte curva do refletor, uma vez que a correção da amplitude usada no método de Gazdag é baseada na hipótese de um refletor plano.

Observa-se que, neste último exemplo, até os efeitos de borda nos dois métodos de migração são praticamente iguais.

5.2 Meio verticalmente heterogêneo

Todos os modelos desta seção são bidimensionais e de refletor explosivo. Criamos, novamente, modelos baseados em um refletor plano, um refletor circular e um domo. Migramos os 3

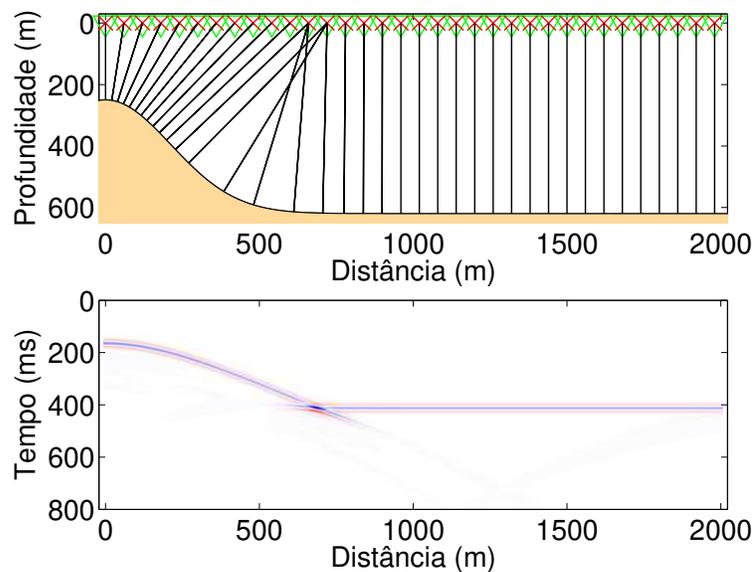


Fig. 5.14: Afastamento nulo domo: modelo (esquerda) e dados iniciais (direita).

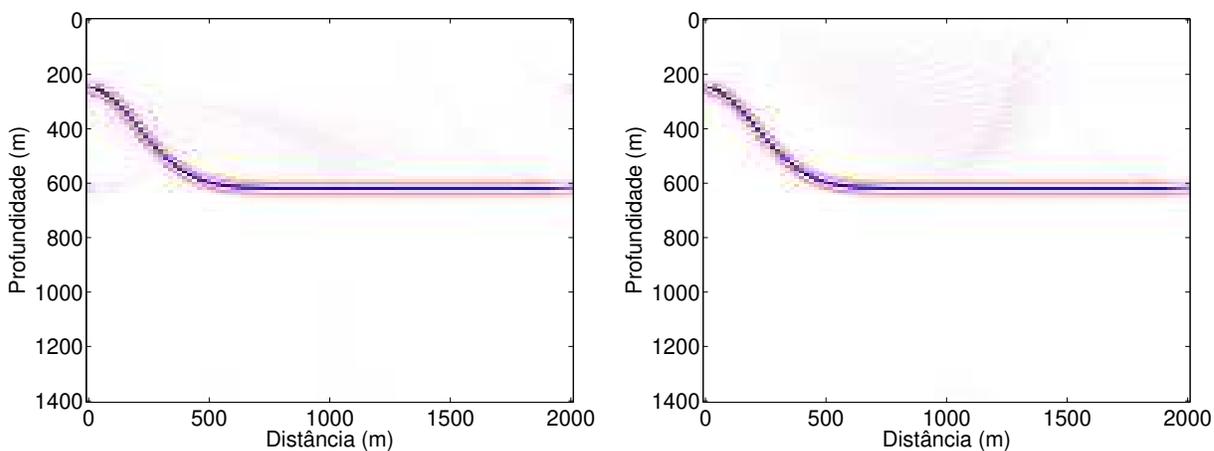


Fig. 5.15: Afastamento nulo domo: seção migrada Gazdag (esquerda) e Kirchhoff (direita).

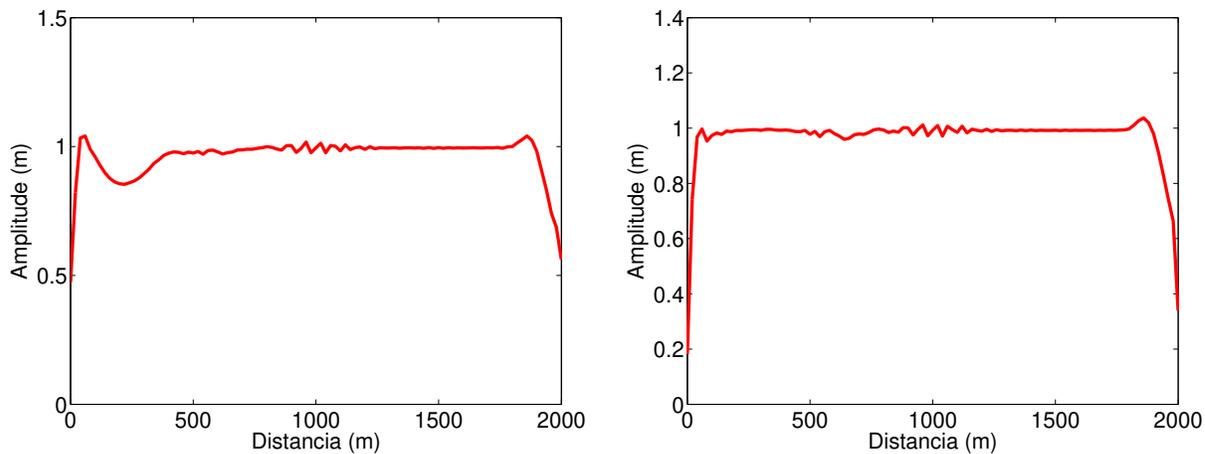


Fig. 5.16: Afastamento nulo domo: amplitudes Gazdag (esquerda) e Kirchhoff (direita).

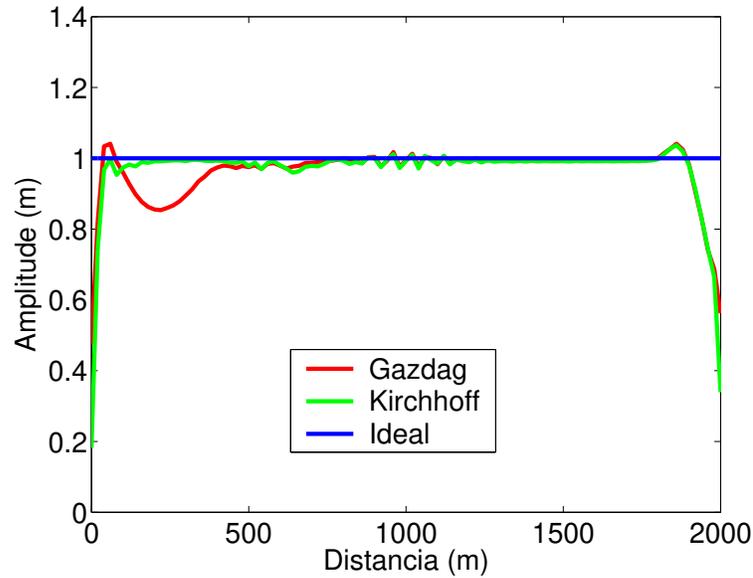


Fig. 5.17: Afastamento nulo domo: picos de amplitudes dos dados migrados pelos métodos de Gazdag e Kirchhoff.

exemplos utilizando o método de Gazdag com e sem correção de amplitudes para compararmos os resultados. Novamente, relembramos que os dados migrados devem ter amplitude igual a 1.

O primeiro exemplo desta seção é um refletor plano localizado a 1000m de profundidade, como o modelo de refletor plano para o caso homogêneo de refletor explosivo. As seções empilhada e migrada e as amplitudes são mostradas nas Figuras 5.18 e 5.19 respectivamente. Como o valor correto das amplitudes é 1, vemos então que as amplitudes foram corretamente preservadas com o método de Gazdag modificado.

O próximo exemplo é um refletor circular parecido com o da seção anterior. As diferenças são que, neste caso, o círculo está centralizado em $x = 1500m$. As seções empilhada e migrada e as amplitudes são mostradas nas Figuras 5.20 e 5.21 respectivamente.

A região circular iluminada corresponde à região entre $1000m < x < 2000m$. Deste modo, vemos que a seção migrada está correta. Através do gráfico das amplitudes, vemos que o método preservou as amplitudes corretamente na região iluminada. Fora desta região não temos informações sobre as amplitudes e nem sobre o refletor. Próximo às bordas, ou seja, onde $x = 1000m$

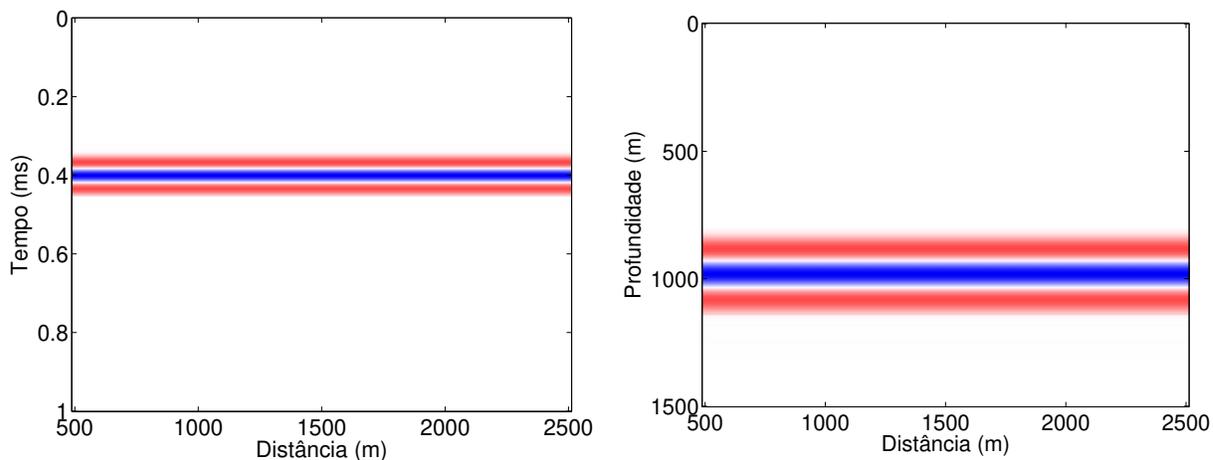


Fig. 5.18: Refletor plano ($c = c(z)$): seção empilhada (esquerda) e seção migrada (direita).

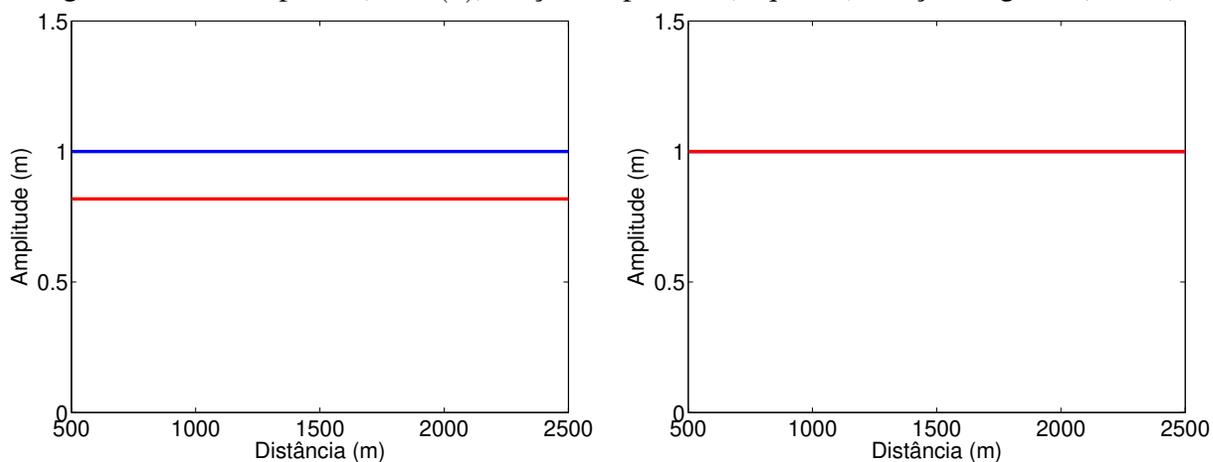


Fig. 5.19: Refletor plano ($c = c(z)$): picos de amplitudes dos dados migrados pelo método de Gazdag sem correção e com correção. Comparação do resultado da migração (curva vermelha) com o resultado ideal (linha azul).

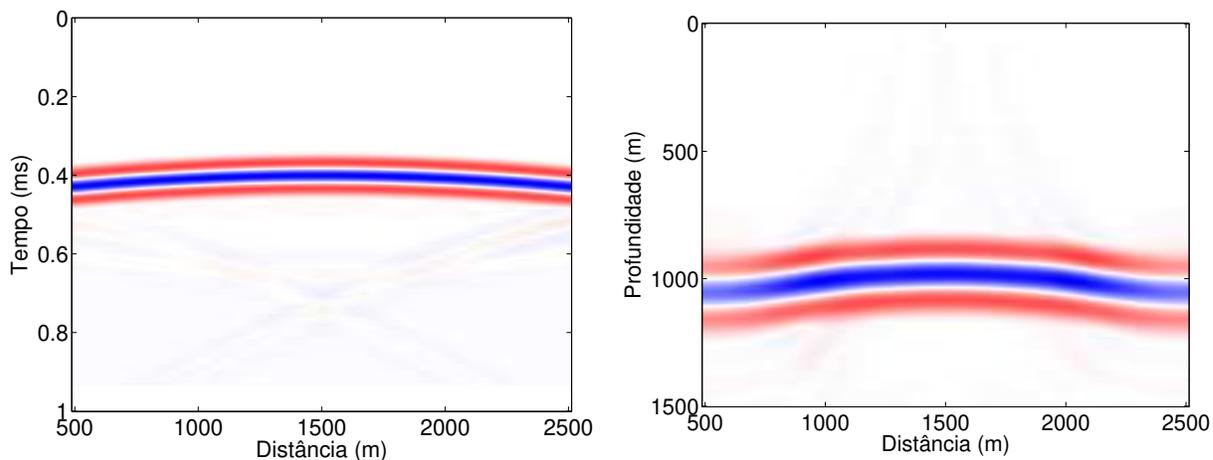


Fig. 5.20: Refletor circular ($c = c(z)$): seção empilhada (esquerda) e seção migrada (direita).

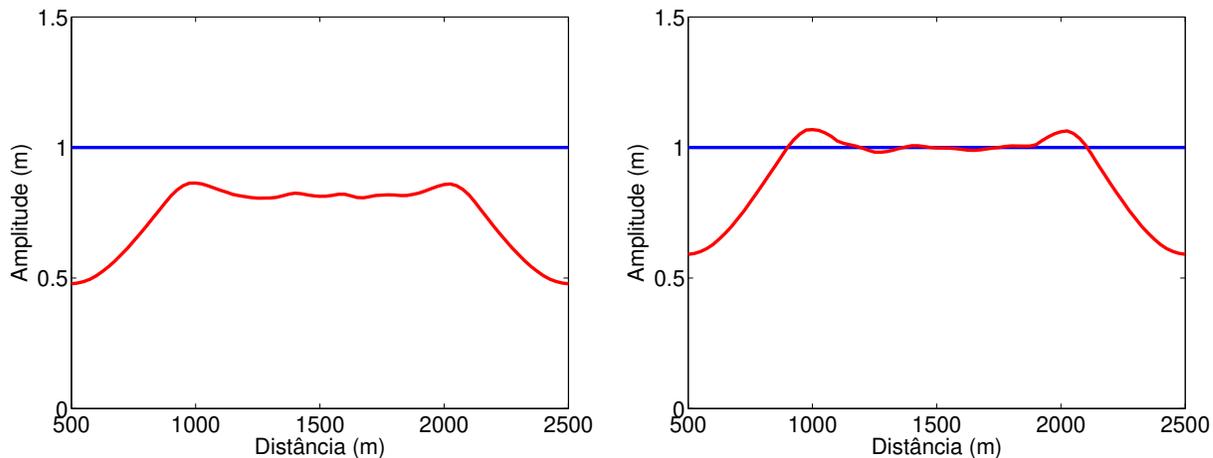


Fig. 5.21: Refletor circular ($c = c(z)$): picos de amplitudes dos dados migrados pelo método de Gazdag sem correção e com correção. Comparação do resultado da migração (curva vermelha) com o resultado ideal (linha azul).

e $x = 2000\text{m}$, observamos erros na amplitude devido a erros numéricos de borda.

Por fim, nosso último exemplo é um refletor em forma de domo. A Figura 5.22 mostra a seção empilhada e a seção migrada. As amplitudes são exibidas na Figura 5.23. Note, novamente, como os efeitos de bordas que aparecem na seção empilhada afetam as amplitudes. Como isto é um erro numérico do gerador de dados sintéticos, dados reais não possuem este tipo de erro. Portanto, as amplitudes foram preservadas corretamente também neste caso.

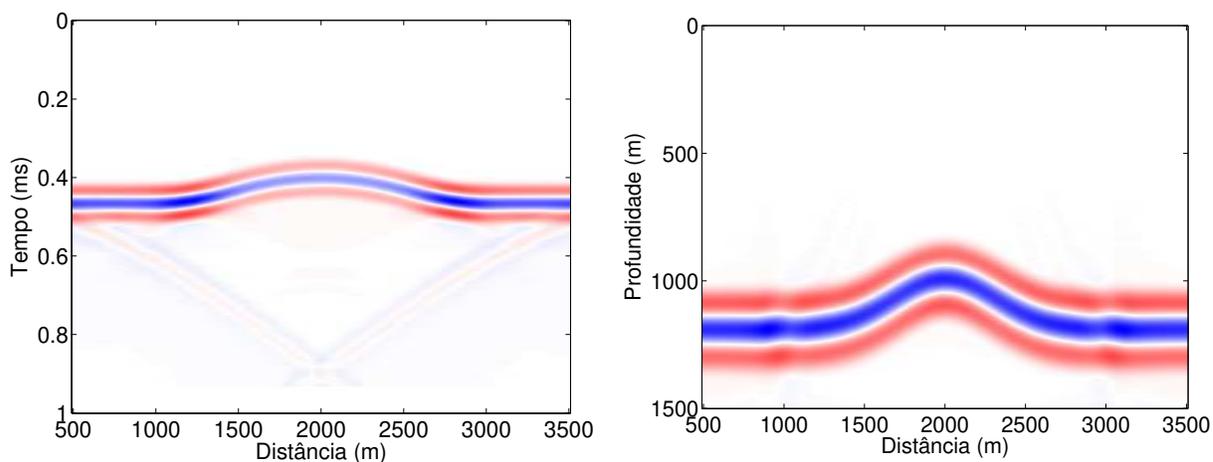


Fig. 5.22: Refletor domo ($c = c(z)$): seção empilhada (esquerda) e seção migrada (direita).

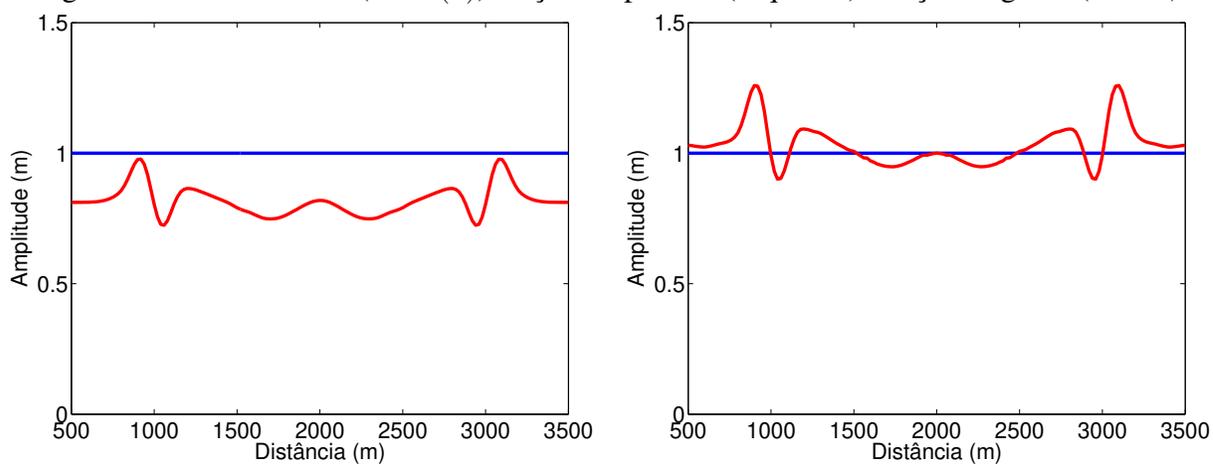


Fig. 5.23: Refletor domo ($c = c(z)$): picos de amplitudes dos dados migrados pelo método de Gazdag sem correção e com correção. Comparação do resultado da migração (curva vermelha) com o resultado ideal (linha azul).

Capítulo 6

Conclusões

Em meios homogêneos, podemos separar a solução da equação da onda em duas ondas de sentido único, uma propagando para cima e outra para baixo, sendo que estas ondas preservam as mesmas propriedades cinemáticas e dinâmicas que a onda cheia, ou seja, os mesmos tempos de trânsito e amplitudes. As equações diferenciais que governam a propagação destas ondas chamam-se equações de sentido único padrão. Em meios heterogêneos, estas ondas continuam possuindo os mesmos tempos de trânsito que a onda cheia, porém, as amplitudes passam a ser diferentes. Neste trabalho, com o auxílio da Teoria de Raios de ordem zero, estudamos o desenvolvimento das equações de sentido único de amplitude verdadeira criadas por Zhang et al. (2003). Estas equações são obtidas acrescentando-se um termo corretor de amplitudes nos operadores diferenciais das equações de sentido único padrão. Zhang et al. (2003) testaram o comportamento destas equações em um método de migração da equação da onda baseado em métodos de diferenças finitas, no domínio espacial/temporal. Porém, estas equações foram desenvolvidas no domínio da frequência/número de onda, domínio no qual estas equações possuem expressões significativamente mais simples que no domínio espacial/temporal. Estas equações somente preservam as amplitudes de dados de fonte comum.

Como as equações de sentido único de amplitude verdadeira funcionaram bem no domínio espaço/temporal, decidimos verificar seu comportamento em um migração realizada no domínio

da frequência, como o método de migração de Gazdag (1980). Este é um método de migração da equação da onda, feito no domínio da frequência, e que utiliza a transformada de Fourier para calcular as derivadas ao invés de aproximações de diferenças finitas. Por este motivo, as derivadas são calculadas com grande precisão, uma vez que utilizam informações da malha toda para serem calculadas e não somente alguns pontos. Este método de Gazdag se baseia em uma equação da onda de sentido único padrão tanto para a migração em meios homogêneos como heterogêneos, e é feita para migrar dados de afastamento nulo.

Nosso primeiro problema então era tornar possível o uso de equações que governam dados de fonte comum em um método de migração para dados de afastamento nulo. Para resolver este problema, estudamos a configuração hipotética de coleta de dados de refletos explosivo, uma coleta ao mesmo tempo de afastamento nulo e fonte comum. Estudamos a relação cinemática e dinâmica entre dados de afastamento nulo e refletor explosivo. Vimos também como filtrar dados de afastamento nulo para transformá-los em dados de refletor explosivo (Bleistein et al., 2001), com o auxílio das aproximações de Kirchhoff e funções de Green.

Inserimos as equações de sentido único de amplitude verdadeira no método de Gazdag. Para que este método preserve corretamente as amplitudes, os dados devem ser de refletor explosivo. Realizamos testes numéricos em 2D verificando a boa qualidade das seções migradas por este método. Comparamos as amplitudes das seções migradas com o método tradicional e com o modificado e verificamos claramente a melhora no valores das amplitudes.

Referências Bibliográficas

- N. Bleistein. Two-and-one-half dimensional in-plane wave propagation. *Geophys. Prosp.*, 34: 686–703, 1986.
- N. Bleistein, J. K. Cohen, and J. W. Stockwell Jr. *Mathematics of Multidimensional Seismic Migration, Imaging, and Inversion*. Springer, New York, 2001.
- R. V. Churchill. *Variáveis complexas e suas aplicações*. McGraw-Hill, 1975.
- J. F. Claerbout. Toward a unified theory of reflector mapping. *Geophysics*, 36(3):467–481, 1971.
- D. G. de Figueiredo. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Projeto Euclides, 1977.
- J. Gazdag. Numerical convective schemes based on the accurate computation of space derivatives. *Journal of Computational Physics*, 13, 1973.
- J. Gazdag. Wave equation migration with the accurate space derivative method. *Geophys. Prosp.*, 28(01):60–70, 1980.
- P. Hubral, M. Tygel, and H. Zien. Three-dimensional true-amplitude zero-offset migration. *Geophysics*, 56(01):18–26, 1991.
- J. Schleicher, M. Tygel, and P. Hubral. *True-amplitude Seismic Imaging*. Society of Exploration Geophysicists, 2006. in print.
- R. H. Stolt. Migration by Fourier transform. *Geophysics*, 43(1):23–48, 1978.

- Ö. Yilmaz. *Seismic Data Processing*. Number 2 in Investigations in Geophysics. SEG, Tulsa, OK, 1987. (Doherty, S.M., Ed.).
- G. Zhang, J. Sun, S. H. Gray, and C. Notfors, N. Bleistein. Towards accurate amplitudes for one-way wavefield extrapolation of 3d common-shot records. *Soc. Expl. Geophys*, 2001.
- Y. Zhang, G. Zhang, and N. Bleistein. True amplitude wave equation migration arising from true amplitude one-way wave equations. *Inverse Problems*, 19:1113–1138, 2003.

Apêndice A

Dedução de $\lambda = ik_z$

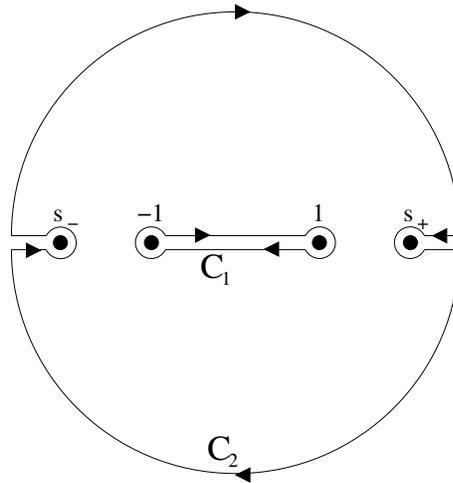


Fig. A.1: Contornos de integração.

Neste apêndice apresentamos os cálculos que nos levam à expressão para $\lambda = ik_z$ (Zhang et al., 2003). Começamos considerando a integral,

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} \frac{(ck)^2}{\omega^2 - s^2(ck)^2} ds, \quad (\text{A.1})$$

Supomos que s seja uma variável complexa e substituímos o contorno de -1 até 1 pelo contorno

“barbell” C_1 , veja figura A.1. Este contorno consiste em uma reta de $-1 + \epsilon$ até $1 - \epsilon$, seguida por uma curva circular passando em volta do ponto de ramo em $s = 1$ no sentido horário, seguindo para $-1 + \epsilon$ e contornando o ponto de ramo em $s = -1$ também em sentido horário completando o caminho fechado de integração. Seja o caminho C_{1a} a curva composta pelo semicírculo superior de $-1 + \epsilon$ até $-1 + \epsilon$, seguida pela reta de $-1 + \epsilon$ até $1 - \epsilon$, juntamente com o semicírculo de $1 - \epsilon$ até $1 + \epsilon$, ou seja, C_{1a} é a parte superior de C_1 . Seja C_{1b} a parte inferior de C_1 . Assim, a raiz quadrada é positiva em C_{1a} e negativa em C_{1b} . Porém, o sentido do caminho de integração de $1 - \epsilon$ até $-1 + \epsilon$ é o oposto de sentido de $-1 + \epsilon$ até $1 - \epsilon$. Assim, temos duas trocas de sinal e, portanto, a integral nestes dois caminhos é igual. Como a integral nos dois círculos tende a zero quando ϵ tende a zero, precisamos somente introduzir um fator $1/2$ para igualar a integral em C_1 ao seu valor original no intervalo $(-1, 1)$. Assim, obtemos,

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} \frac{(ck)^2}{\omega^2 - s^2(ck)^2} ds . \quad (\text{A.2})$$

Observamos que o integrando possui dois polos em $s_{\pm} = \pm|\omega|/(v|k|)$. Calculamos então a integral como a soma dos resíduos nestes pólos mais uma integral num círculo de raio $r > |\omega|/(v|k|)$. Reescrevemos o integrando como,

$$\sqrt{1-s^2} \frac{(ck)^2}{\omega^2 - s^2(ck)^2} = -i\sqrt{s^2-1} \frac{(ck)^2}{\omega^2 - s^2(ck)^2} , \quad (\text{A.3})$$

onde

$$\sqrt{s^2-1} \approx s \quad (\text{A.4})$$

para $|s|$ suficientemente “grande”.

Neste ponto, podemos considerar I como uma integral no contorno de raio r mais os resíduos

nos pólos, ou seja, a integral no caminho C_2 , como ilustrado na figura A.1, pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{i}{2\pi} \int_{C_2} \sqrt{s^2 - 1} \frac{(ck)^2}{\omega^2 - s^2(ck)^2} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \sqrt{s^2 - 1} \frac{(ck)^2}{\omega^2 - s^2(ck)^2} ds \\
 &= \sum (\text{Resíduos, } s = s_{\pm}) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=r} \sqrt{s^2 - 1} \frac{(ck)^2}{\omega^2 - s^2(ck)^2} ds .
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Na última linha, observamos que a deformação do contorno C_1 para o círculo em C_2 leva a dois contornos anti-horários em torno dos pólos. Na última integral, revertemos os sinais para o caso padrão onde uma integral em um contorno calculada no sentido anti-horário é positiva e no sentido horário é negativa.

Calculando os resíduos, temos

$$\text{Resíduo em } s_+ = \text{Resíduo em } s_- = -\frac{\sqrt{s^2 - 1}}{2\omega/ck} , \tag{A.6}$$

e, portanto,

$$\sum (\text{Resíduos, } s = s_{\pm}) = -\sqrt{1 - \frac{(ck)^2}{\omega^2}} ds . \tag{A.7}$$

O próximo passo é avaliar a integral sobre $|s| = r$ no limite quando $r \rightarrow \infty$. Para r grande, temos

$$\sqrt{s^2 - 1} \approx s \quad \text{e} \quad \frac{(ck)^2}{\omega^2 - s^2(ck)^2} \approx -\frac{1}{s^2} , \tag{A.8}$$

e, a partir daí, obtemos

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=r} \sqrt{s^2 - 1} \frac{(ck)^2}{\omega^2 - s^2(ck)^2} ds \approx \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=r} \frac{ds}{s} \tag{A.9}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i d\theta = 1 \tag{A.10}$$

$$\text{com } s = r \exp i\theta, ds = ir \exp i\theta. \quad (\text{A.11})$$

Combinando os resultados em A.5 e A.7 concluímos que

$$I = 1 - \sqrt{1 - \frac{(ck)^2}{\omega^2}}. \quad (\text{A.12})$$

Este resultado confirma a identidade apresentada na equação (2.88).

Apêndice B

Funções de Green

Suponha que temos um problema consistindo da equação de Helmholtz com velocidade de propagação constante $c = \text{constante}$, um conjunto de condições de contorno ou condições de radiação (condições de contorno no infinito para o caso de um problema ilimitado) e o princípio da causalidade (uma função $f(x)$ é causal, se $f(x) = 0$ para todo $x < 0$). Se a função que corresponde à fonte na equação de Helmholtz for uma função delta, a função solução desta equação é a chamada função de Green.

B.1 Função de Green 3D

Deduzimos neste apêndice a função de Green para um meio tridimensional, acústico e homogêneo. Nestes meios, a função de Green g é solução da seguinte equação da onda

$$\nabla^2 g - (1/c^2) \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(t - t_0), \quad (\text{B.1})$$

onde $g = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0; t, t_0)$, e t_0 é o tempo inicial. No domínio da frequência, esta equação pode ser escrita como

$$\nabla^2 g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \omega, t_0) + (\omega^2/c^2)g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \omega, t_0) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \exp\{i\omega t_0\}. \quad (\text{B.2})$$

Aqui, usamos g tanto na frequência como no tempo.

Para obter a função de Green, g , devemos resolver a equação (B.2). Para isto, reescrevemos esta equação em coordenadas esféricas ($x = r \cos \theta \sin \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$) levando em conta a simetria esférica. Deste modo, obtemos a equação diferencial ordinária

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dG}{dr} \right) + (\omega^2/c^2)G = -\delta(r) \exp\{i\omega t_0\}, \quad (\text{B.3})$$

onde $G = G(r, \omega, t_0) = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \omega, t_0)$ e $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$. Podemos ainda reescrever esta equação na forma

$$\frac{1}{r} \left(\frac{d^2}{dr^2} [rG] \right) + (\omega^2/c^2)G = -\delta(r) \exp\{i\omega t_0\}, \quad (\text{B.4})$$

cuja solução pode ser escrita como (veja, e.g., Butkov, 1983)

$$G(r, \omega, t_0) = \frac{G_1}{r} \exp\{i\omega r/c\} + \frac{G_2}{r} \exp\{-i\omega r/c\}, \quad (\text{B.5})$$

onde G_1 e G_2 são constantes que dependem de t_0 .

Podemos interpretar esta solução como sendo duas ondas esféricas. No domínio do tempo, é possível ver que a primeira parcela da direita de (B.5) representa uma onda esférica que se propaga da origem para o infinito (*outgoing wave*). A segunda parcela, representa uma onda que se propaga em direção à origem (*ingoing wave*). Neste caso, somente as ondas do primeiro tipo nos interessam. Portanto, fazemos $G_2 = 0$ e precisamos apenas calcular G_1 . Se $r \neq 0$, G_1 não pode ser determinado, pois não temos informações suficientes. Se $r = 0$, é impossível determinar G_1 , pois $r = 0$ é uma singularidade da solução. Assim, para determinarmos G_1 integramos a equação (B.2) sob a esfera V_ϵ centrada na origem (portanto, x_0 está na origem) e de raio ϵ , obtendo

$$\iiint_{V_\epsilon} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_3^2} \right) dV + (\omega^2/c^2) \iiint_{V_\epsilon} G dV = -\exp\{i\omega t_0\}. \quad (\text{B.6})$$

Aplicando o Teorema de Gauss no primeiro termo da equação (B.6) e usando (B.5) com $G_2 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \iiint_{V_\epsilon} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_3^2} \right) dV &= \iint_{S_\epsilon} \left(\frac{\partial G}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} n_2 + \frac{\partial G}{\partial x_3} n_3 \right) dS \\ &= \iint_{S_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial r} dS \\ &= \iint_{S_\epsilon} \left(-\frac{G_1}{r^2} + \frac{G_1}{r} i(\omega/c) \right) \exp\{i(\omega/c)r\} dS . \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

onde S_ϵ é a superfície de V_ϵ e $n_i, i = 1, 2, 3$ são os componentes do vetor normal à S_ϵ , \mathbf{n} . Fazendo $r = \epsilon$ e resolvendo a integral acima obtemos,

$$\begin{aligned} \iint_{S_\epsilon} \left(-\frac{G_1}{\epsilon^2} + \frac{G_1}{\epsilon} i(\omega/c) \right) \exp\{i(\omega/c)\epsilon\} dS \\ = 4\pi\epsilon^2 \left(-\frac{G_1}{\epsilon^2} + \frac{G_1}{\epsilon} i(\omega/c) \right) \exp\{i(\omega/c)\epsilon\} \\ = 4\pi(-G_1 + i(\omega/c)\epsilon G_1) \exp\{i(\omega/c)\epsilon\} , \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Usando (B.8), podemos reescrever (B.6) como

$$\begin{aligned} 4\pi(-G_1 + i(\omega/c)\epsilon G_1) \exp\{i(\omega/c)\epsilon\} + (\omega^2/c^2) \iiint_{V_\epsilon} \frac{G_1}{r} \exp\{i\omega r/c\} dV = \\ - \exp\{i\omega t_0\} . \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ em (B.9) a integral de volume vai para zero uma vez que temos um polo de ordem 1 e, portanto,

$$G_1 = \frac{1}{4\pi} \exp\{i\omega t_0\} . \quad (\text{B.10})$$

Logo, a função de Green para um meio acústico com velocidade de propagação constante é dada

por

$$G(r, \omega, t_0) = \frac{1}{4\pi r} \exp\{i\omega(t_0 + r/c)\}. \quad (\text{B.11})$$

Usando a transformada de Fourier inversa podemos escrever esta equação no domínio do tempo como

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t, t_0) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t - (t_0 + r/c)). \quad (\text{B.12})$$

Apêndice C

Aproximação de Kirchhoff

Neste Apêndice, deduzimos a representação integral de Kirchhoff e a aproximação de Kirchhoff usando o Teorema e as funções de Green. A representação integral depende de informações do próprio campo de onda e da derivada normal à superfície. A aproximação é uma fórmula integral, derivada da representação integral, onde os valores do campo de onda foram substituídos por quantidades conhecidas.

A aproximação de Kirchhoff é uma solução aproximada do campo de onda espalhado para cima (que é uma aproximação do campo de onda refletido). O ponto chave desta aproximação é a substituição dos valores desconhecidos do campo de onda espalhado e suas derivadas, por elementos correspondentes do campo de onda incidente (supostamente conhecido) na interface. Uma característica importante da aproximação de Kirchhoff é que ela pode ser utilizada para representar campos de onda em cáusticas (pontos de focagem de energia), locais onde a Teoria dos Raios falha.

As aproximações aqui apresentadas foram desenvolvidas de modo a tratar corretamente os aspectos cinemático e dinâmico do campo de onda espalhado (veja, por exemplo, Zhang et al. (2001) e Schleicher et al. (2006)).

C.1 Representação integral de Kirchhoff

Suponhamos que temos uma fonte localizada acima de uma interface infinita S em um meio com velocidade de propagação $c(\mathbf{x})$ e densidade constante. Esta interface divide o meio em dois domínios com propriedades geológicas diferentes (o que caracteriza S como refletor), sendo um acima outro abaixo de S . Usamos aqui os sinais $+$ e $-$ para distinguir elementos acima e abaixo de S , respectivamente. Supomos também que o campo de onda total, $u = u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) = u(r, \omega)$, satisfaz as condições de radiação de Sommerfeld,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} ru = \text{número finito}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{i\omega}{c} u \right] = 0, \quad (\text{C.1})$$

onde $r = |x - x_s|$. Os campos de onda acima e abaixo de S em um meio com densidade constante satisfazem as seguintes equações da onda

$$\text{acima de } S : \quad \mathcal{L}_- u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) = -F(\omega) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s), \quad (\text{C.2})$$

$$\text{abaixo de } S : \quad \mathcal{L}_+ u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) = 0, \quad (\text{C.3})$$

onde $\mathcal{L}_\pm = \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c_\pm^2(\mathbf{x})}$.

Seja u_I o campo de onda incidente, u_S o campo de onda espalhado para cima e u_T o campo de onda transmitido. Suponha que o campo de onda total u pode ser escrito como

$$u = \begin{cases} u_I + u_S, & \text{acima de } S, \\ u_T, & \text{abaixo de } S. \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Logo, temos as seguintes condições

$$\mathcal{L}_- u_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) = -F(\omega) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s), \quad \mathcal{L}_- u_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) = 0, \quad \text{acima de } S, \quad (\text{C.5})$$

$$\mathcal{L}_+ u_T(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) = 0, \quad \text{abaixo de } S. \quad (\text{C.6})$$

Podemos encontrar uma solução para a primeira das equações em (C.5) usando a função de Green adjunta que satisfaz

$$\mathcal{L}g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g, \omega) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_g) . \tag{C.7}$$

Uma vez que a solução de (C.7) é conhecida, temos a seguinte relação,

$$u_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) = F(\omega)g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) . \tag{C.8}$$

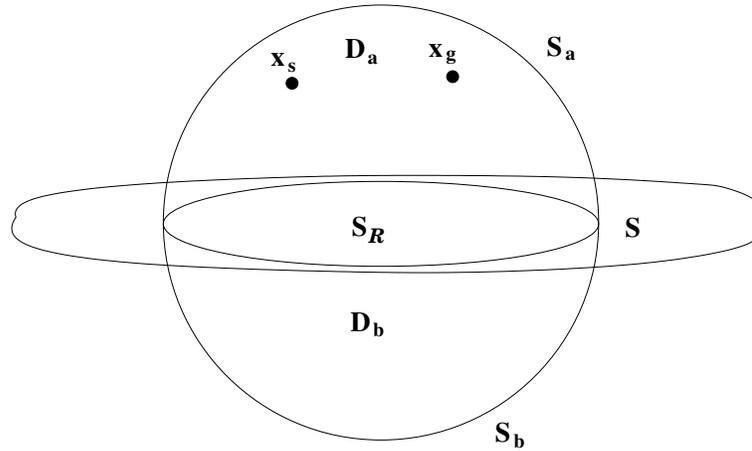


Fig. C.1: Diagrama mostrando domínios usados na dedução da aproximação de Kirchhoff.

A fim de utilizarmos o Teorema de Green para encontrar a expressão aproximada do campo espalhado u_S , introduzimos a esfera de raio \mathcal{R} e domínio D que corta S de tal maneira que os domínios da esfera acima e abaixo de S , digamos D_a e D_b , sejam semiesféricos. Veja a Figura C.1. Chamamos de $S_{\mathcal{R}}$ a parte de S que está dentro de D , desta maneira $D = D_a \cup S_{\mathcal{R}} \cup D_b$ e $S_{\mathcal{R}}$ limita D_a e D_b , porém não faz parte destes volumes. Temos ainda S_a e S_b que são as partes da superfície de D acima e abaixo de $S_{\mathcal{R}}$, respectivamente.

O Teorema de Green pode ser escrito como

$$\int_V \{g\mathcal{L}u - u\mathcal{L}g\}dV = \int_{\partial V} \left\{ g \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial g}{\partial n} \right\} dS, \quad (\text{C.9})$$

onde V é um volume qualquer com superfície ∂V , e g^* é a respectiva função de Green adjunta.

Em (C.9) fazemos $V = D_a$. Neste domínio, usamos (C.2) e (C.7) e reescrevemos (C.9) como

$$\begin{aligned} \int_{D_a} \{g\mathcal{L}u - u\mathcal{L}g\}dV &= \int_{D_a} \{-F(\omega)g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g, \omega)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) + u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_g)\}dV \\ &= u(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s, \omega) - F(\omega)g(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, \omega) \\ &= u_I(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s, \omega) + u_S(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s, \omega) - F(\omega)g(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, \omega) \\ &= \int_{S_{\mathcal{R}}+S_a} \left\{ g \frac{\partial(u_I + u_S)}{\partial n} - (u_I + u_S) \frac{\partial g}{\partial n} \right\} dS. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

A identidade (C.9) pode ser usada com u_I e g , o que nos leva a

$$\begin{aligned} \int_{D_a} \{g\mathcal{L}u_I - u_I\mathcal{L}g\}dV &= u_I(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s, \omega) - F(\omega)g(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, \omega) \\ &= \int_{S_{\mathcal{R}} \cup S_a} \left\{ g \frac{\partial u_I}{\partial n} - u_I \frac{\partial g}{\partial n} \right\} dS. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Usando (C.11) em (C.10), obtemos

$$u_S(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s, \omega) = \int_{S_{\mathcal{R}} \cup S_a} \left\{ g \frac{\partial u_S}{\partial n} - u_S \frac{\partial g}{\partial n} \right\} dS. \quad (\text{C.12})$$

Estendendo as superfícies $S_{\mathcal{R}}$ e S_a para o infinito por todos lugares de modo a não atravessar S , vemos a seguir que é possível reduzir o cálculo de u_S somente à superfície S . Para isso, precisamos analisar o comportamento da integral em (C.12) no limite quando \mathcal{R} tende ao infinito. Neste caso, $S_{\mathcal{R}}$ se aproxima de S , e precisamos calcular a integral sobre uma superfície de extensão infinita $S \cup S_a$. Considerando a integral sobre S_a e sendo $d\Omega$ o ângulo sólido diferencial

na superfície da esfera, podemos fazer

$$dS = \mathcal{R}^2 d\Omega . \quad (\text{C.13})$$

Conforme o raio cresce, o vetor normal a $S_{\mathcal{R}}$ se aproxima do vetor unitário na direção radial Cartesiana. Então, temos

$$\left\{ g \frac{\partial u_S}{\partial n} - u_S \frac{\partial g}{\partial n} \right\} dS = \left\{ g \left[\frac{\partial du_S}{\partial \mathcal{R}} - \frac{i\omega}{c} u_S \right] - u_S \left[\frac{\partial g}{\partial \mathcal{R}} - \frac{i\omega}{c} g \right] \right\} \mathcal{R}^2 d\Omega . \quad (\text{C.14})$$

Aqui, a direção normal é a direção de crescimento \mathcal{R} . Além disso, a expressão $i\omega u_S g/c$ foi subtraída e adicionada a fim de produzir uma combinação linear da função e da derivada que aparece na segunda condição de Sommerfeld.

Em cada uma das expressões à direita em (C.14), combinamos os termos de forma a obtermos dois fatores da forma $\mathcal{R}u_S$ e $\mathcal{R}g$, e dois fatores da forma \mathcal{R} vezes cada uma das expressões em colchetes,

$$\left\{ g \frac{\partial u_S}{\partial n} - u_S \frac{\partial g}{\partial n} \right\} dS = \left\{ (\mathcal{R}g) \left[\mathcal{R} \left(\frac{\partial du_S}{\partial \mathcal{R}} - \frac{i\omega}{c} u_S \right) \right] - (\mathcal{R}u_S) \left[\mathcal{R} \left(\frac{\partial g}{\partial \mathcal{R}} - \frac{i\omega}{c} g \right) \right] \right\} d\Omega . \quad (\text{C.15})$$

De acordo com as condições de Sommerfeld, os fatores $\mathcal{R}g$ e $\mathcal{R}u_S$ permanecem limitados quando $\mathcal{R} \rightarrow \infty$, enquanto os fatores dentro dos colchetes vão para zero neste limite. Logo, em (C.12), o integrando da integral sobre S_a quando esta é escrita como uma integral em Ω se aproxima de zero conforme \mathcal{R} cresce, enquanto o domínio de integração permanece limitado em Ω por 4π . Então, no limite quando $\mathcal{R} \rightarrow \infty$, a integral sobre S_a é zero e, assim, podemos escrever

$$u_S(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s, \omega) = \int_S \left\{ g \frac{\partial u_S}{\partial n} - u_S \frac{\partial g}{\partial n} \right\} dS . \quad (\text{C.16})$$

Na identidade de Green (C.9), a direção normal aponta para fora do domínio de integra-

ção, logo, S é direcionado para baixo. Como queremos uma representação do campo de onda espalhado para cima, fazemos então uma última troca de sinais, obtendo

$$u_S(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s, \omega) = \int_S \left\{ u_S \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial u_S}{\partial n} \right\} dS . \quad (\text{C.17})$$

Agora, \mathbf{n} é um vetor normal apontando para cima e u_S representa o campo de onda espalhado para cima sobre uma interface S . Esta é a conhecida representação integral de Kirchhoff para o campo de onda espalhado para cima.

C.2 Aproximação de Kirchhoff

Sendo $u_I = u_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)$ o campo de onda incidente conhecido, que incide na subsuperfície S , podemos dizer que a relação entre o campo de onda incidente u_I e o campo de onda refletido u_R na superfície S é

$$u_R = Ru_I , \quad \text{em } S , \quad (\text{C.18})$$

onde R é o coeficiente de reflexão.

Observando que, a derivada normal de uma onda refletida é o negativo da derivada normal da onda incidente e, considerando a ordem principal dos valores envolvidos, podemos fazer a seguinte relação,

$$\frac{\partial u_R}{\partial n} = -R \frac{\partial u_I}{\partial n} , \quad \text{em } S . \quad (\text{C.19})$$

A representação (C.17), do campo de onda espalhado para cima é nossa aproximação do campo de onda refletido. Supomos então que $u_S \approx u_R$ e obtemos as duas condições de aproximação de Kirchhoff

$$u_S = Ru_I , \quad \frac{\partial u_S}{\partial n} = -R \frac{\partial u_I}{\partial n} , \quad \text{em } S , \quad (\text{C.20})$$

que é justamente o que queríamos, i.e., substituir os valores do campo de onda espalhado e suas derivadas por expressões que dependam de elementos do campo de onda incidente.

Agora, a partir da representação (C.17) e usando as condições(C.20), obtemos uma expressão para a solução aproximada de Kirchhoff, que pode ser escrita como,

$$u_S(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s, \omega) = \int_S R \left\{ u_I \frac{\partial g}{\partial n} + g \frac{\partial u_I}{\partial n} \right\} dS = \int_S R \frac{\partial(u_I g)}{\partial n} dS . \quad (C.21)$$

Usando aproximações de Teoria dos Raios, podemos escrever expressões para u_I e g , respectivamente, como

$$g(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}, \omega) = A(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}) \exp\{i\omega\tau(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})\} , \quad (C.22)$$

$$u_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g, \omega) = F(\omega)g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g, \omega) = F(\omega)A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g) \exp\{i\omega\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g)\} , \quad (C.23)$$

onde $F(\omega)$ é a função da fonte no domínio da frequência.

Substituindo as expressões acima em (C.21), e lembrando que $\partial/\partial n = \mathbf{n} \cdot \nabla$, obtemos nossa expressão final para a aproximação do campo de onda espalhado,

$$u_S(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s, \omega) = i\omega F(\omega) \int_S RA(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g) \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla[\tau(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})] + \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g)) \cdot \exp\{i\omega[\tau(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})] + \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g)]\} dS , \quad (C.24)$$

onde $\tau(x_1, x_2)$ e $A(x_1, x_2)$ são o tempo de trânsito e a amplitude de uma onda propagando de x_1 a x_2 .

Apêndice D

Método da fase estacionária

O método da fase estacionária é uma ferramenta que permite calcular aproximações para integrais do tipo

$$I(\lambda) = \int f(\eta) \exp\{i\lambda\Phi(\eta)\} d^n \eta, \quad (\text{D.1})$$

onde o parâmetro λ é suficientemente grande. Na realidade, o formalismo matemático diz que a aproximação que fazemos para esta integral somente é válida em ordem principal e com a condição de que $|\lambda| \rightarrow \infty$. Mas, na prática, conseguimos aproximações suficientemente boas para valores finitos de $|\lambda|$.

Para que este método funcione bem, o valor da integral deve ser principalmente constituído de valores do integrando na vizinhança de certos pontos críticos chamados *pontos estacionários*. Em um ponto estacionário, η_0 , todas as primeiras derivadas da função de fase Φ devem ser nulas, ou seja,

$$\nabla\Phi(\eta) = 0 \quad \text{em} \quad \eta = \eta_0. \quad (\text{D.2})$$

Se existe tal ponto no domínio de integração, então o método diz que a integral (D.1) pode ser aproximada como

$$I(\lambda) \sim \left[\frac{2\pi}{|\lambda|} \right]^{n/2} \frac{f(\eta_0) \exp\{i\lambda\Phi(\eta_0) + i\frac{\pi}{4}\text{sgn}(\lambda)\text{sig}(\Phi_{ij})\}}{\sqrt{|\det \Phi_{ij}|}}, \quad (\text{D.3})$$

onde

$$\Phi_{ij} \equiv \left[\frac{\partial^2 \Phi(\eta_0)}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \right]. \quad (\text{D.4})$$

Aqui, a matriz Φ_{ij} é a matriz *Hessiana* da função de fase Φ e $\text{sig}(\Phi_{ij})$ é a *assinatura* (*signature*) da matriz Φ_{ij} , ou seja, o número de autovalores positivos menos o número de autovalores negativos. O símbolo \sim deve ser lido como “assintoticamente igual a”. Para maiores detalhes sobre esta aproximação, veja Bleistein (1984) e Bleistein and Handelsman (1986).

Se existirem mais pontos estacionários, a aproximação passa a ser a soma da contribuição de cada um dos pontos. Para que a aproximação esteja bem definida, a matriz Φ_{ij} não deve ser singular, i.e., todos os seus autovalores são não nulos. Este caso e o caso em que não existem pontos estacionários são discutidos em Bleistein (1984) e Bleistein and Handelsman (1986). Nos casos onde a aproximação está bem definida, o seguinte resultado é válido,

$$\left\| I(\lambda) - \left[\frac{2\pi}{|\lambda|} \right]^{n/2} \frac{f(\eta_0) \exp\{i\lambda\Phi(\eta_0) + i\frac{\pi}{4}\text{sgn}(\lambda)\text{sig}(\Phi_{ij})\}}{\sqrt{|\det \Phi_{ij}|}} \right\| \rightarrow 0, \text{ quando } |\lambda| \rightarrow \infty, \quad (\text{D.5})$$

uma vez que a diferença entre $I(\lambda)$ e a aproximação decai a uma razão de $1/|\lambda|^{n/2}$.

Para o caso unidimensional, pode-se escrever a expressão de $I(\lambda)$ e sua aproximação como,

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int f(\eta) \exp\{i\lambda\Phi(\eta)\} d^n \eta \\ &\sim \sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda||\Phi''(\eta_0)|}} f(\eta_0) \exp\{i\lambda\Phi(\eta_0) + i\frac{\pi}{4}\text{sgn}(\lambda)\text{sgn}(\Phi''(\eta_0))\}. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Teoricamente, a aproximação converge quando $|\lambda| \rightarrow \infty$. Porém, na prática, usamos esta aproximação para valores finitos de λ . Para maiores detalhes sobre a convergência desta aproximação veja Bleistein (1984) e Bleistein and Handelsman (1986) e Bleistein (2001).