Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Pedro Griguol de Mattos

# Folheações e Ergodicidade de Medidas Transversas

Campinas

2020

Pedro Griguol de Mattos

# Folheações e Ergodicidade de Medidas Transversas

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: José Régis Azevedo Varão Filho

Este trabalho corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Pedro Griguol de Mattos, e orientada pelo Prof. Dr. José Régis Azevedo Varão Filho.

Campinas
2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M436f

Mattos, Pedro Griguol de, 1995-
Folheações e ergodicidade de medidas transversas / Pedro Griguol de Mattos. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: José Régis Azevedo Varão Filho.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Teoria ergódica. 3. Medidas invariantes. I. Varão Filho, José Régis Azevedo, 1983-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Foliations and ergodicity of transverse measures
**Palavras-chave em inglês:**
Dynamical systems
Ergodic theory
Invariant measures
**Área de concentração:** Matemática
**Titulação:** Mestre em Matemática
**Banca examinadora:**
José Régis Azevedo Varão Filho [Orientador]
Eduardo Garibaldi
Fernando Nera Lenarduzzi
**Data de defesa:** 28-02-2020
**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-4630-7361
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/8843852724112001

**Dissertação de Mestrado defendida em 28 de fevereiro de 2020 e aprovada**

**pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). JOSÉ RÉGIS AZEVEDO VARÃO FILHO**

**Prof(a). Dr(a). EDUARDO GARIBALDI**

**Prof(a). Dr(a). FERNANDO NERA LENARDUZZI**

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Aos meus pais,

que me ensinaram a estudar por prazer e por ideal.

# Agradecimentos

Agradeço à minha família, aos meus amigos e ao meu orientador, sem cujo apoio emocional, material e intelectual eu não poderia ter elaborado esta dissertação.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pela bolsa de Mestrado/Fluxo contínuo, processo 2018/02616-2, período de 05/2018 a 02/2020.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de Mestrado, processo 131292/2018-8, período de 03/2018 a 04/2018.

# Resumo

Esta dissertação é um estudo do artigo *Unique ergodicity for horocycle foliations*, de Rufus Bowen e Brian Marcus [BM77]. O objetivo é apresentar a construção de medidas invariantes pelas folheações estável e instável de peças básicas de difeomorfismos Axioma A. Mostraremos que essas medidas são únicas em certo sentido, e para isso usamos uma conjugação com um espaço de símbolos e uma dinâmica de deslocamento para traduzir o problema para algo mais tratável. A conjugação existe graças à existência de partições de Markov.
Palavras-chave: sistemas dinâmicos; teoria ergódica; medidas invariantes.

# Abstract

This master's thesis is a study of the article *Unique ergodicity for horocycle foliations*, by Rufus Bowen and Brian Marcus [BM77]. The objective is to present the construction of invariant measures of the stable and unstable foliations of basic sets of Axiom A diffeomorphism. We show that these measures are unique in a certain sense, and for that we make use of a conjugacy to a symbolic space and a shift dynamics to translate the problem to something more manageable. The conjugacy exists thanks to the existence of Markov partitions.
Keywords: dynamical systems; ergodic theory; invariant measures.

# Sumário

# Introdução

Na seção 1, definimos o que é um sistema dinâmico tanto no caso contínuo como no discreto, e tanto revertível como irreversível. Definimos alguns conceitos básicos como periodicidade, invariância e conjugação.

Na seção 2, discutimos aspectos da categoria de sistemas dinâmicos topológicos, sistemas dinâmicos em que existe informação topológica Definimos conceitos análogos aos da categoria de sistema dinâmico, como conjugação topológica, minimalidade e portos não-errantes ('topologicamente periódicos'). Além disso, definimos os conceitos de conjuntos estável e instável.

Na seção 3, discutimos aspectos de medida e probabilísticos de sistemas dinâmicos. São brevemente apresentados os conceitos de conjugação que preserva medida, ergodicidade e sistemas misturadores. Como o foco deste relatório é estudar o artigo [BM77] especificamente, esses conceitos são somente definidos.

A seção 4 apresenta um dos principais objetos de estudo deste trabalho, o espaço de símbolos e a dinâmica de deslocamento. Esse sistema dinâmico é introduzido com detalhes, e são apresentados em subseções sua estrutura topológica, métrica e de medida. A última subseção reproduz um teorema enunciado e um lema demonstrado em [BM77].

Na seção seguinte, 5, o outro objeto principal de estudo é apresentado, os difeomorfismos axioma A, através da linguagem da dinâmica hiperbólica. Os principais conceitos são o de um conjunto hiperbólico — e, a partir dele, de difeomorfismos axioma A e Anosov —, o de partição de Markov, que nos permite construir uma conjugação com o espaço de símbolos, e o de variedades estável e instável.

As variedade estável e instável nesse contexto formam uma folheação da variedade estável/instável de cada peça básica. O conceito de folheação é apresentado na seção 6, e reproduz-se a demonstração de que essas variedades são folheações, achada em [BM77]. A seção seguinte apresenta os conceitos de medida invariante por folheações e de unicidade ergódica, que são o principal foco de [BM77] e também deste relatório. A definição de medida invariante é muito difícil de trabalhar, e portanto alguns lemas que permitem construí-las são reproduzidos. Finalmente, na subseção final, reproduzem-se os teoremas e lemas de [BM77] que levam à e unicidade ergódica. De fato, a medida unicamente ergódica não é construída, somente mostra-se sua unicidade.

# 1 Sistemas Dinâmicos

O conjunto dos números inteiros será denotado $\mathbb{Z}$ e o conjunto dos números naturais, ou inteiros positivos incluindo o 0, será denotado $\mathbb{Z}^+$ (ou $\mathbb{N}$). O conjunto dos números reais será denotado $\mathbb{R}$ e o conjunto dos números reais positivos, incluindo o 0, será denotado $\mathbb{R}^+$.

## 1.1 Sistemas Dinâmicos, Órbitas e Periodicidade

**Definição 1.1.** Um *sistema dinâmico* é uma dupla $\mathcal{S} = (X, f)$ em que

1. $X$ é um conjunto, o *espaço de estados* do sistema;

2. $f\colon \boldsymbol{T} \curvearrowright X$ é uma ação de monoides em $X$, a *dinâmica* do sistema, e $\boldsymbol{T}$ é um monoide, o *espaço temporal* do sistema, que pode ser[1] $(\mathbb{Z}^+, +, 0)$, $(\mathbb{R}^+, +, 0)$, $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ou $(\mathbb{R}, +, 0)$.

   Um sistema dinâmico é

   (a) *revertível* se $\boldsymbol{T}$ é um grupo, ou seja, se $\boldsymbol{T} = (\mathbb{Z}, +, 0)$ ou $\boldsymbol{T} = (\mathbb{R}, +, 0)$;
   *irreversível* caso contrário, ou seja, se $\boldsymbol{T} = (\mathbb{Z}^+, +, 0)$ ou $\boldsymbol{T} = (\mathbb{R}^+, +, 0)$.

   (b) *discreto* se $\boldsymbol{T} = (\mathbb{Z}^+, +, 0)$ ou $\boldsymbol{T} = (\mathbb{Z}, +, 0)$;
   *contínuo* se $\boldsymbol{T} = (\mathbb{R}^+, +, 0)$ ou $\boldsymbol{T} = (\mathbb{R}, +, 0)$.

Estudaremos principalmente **sistemas dinâmicos discretos**, ou seja, sistemas cujo espaço temporal é $\mathbb{Z}^+$ ou $\mathbb{Z}$. Nesse caso, identificamos a dinâmica $f\colon \boldsymbol{T} \curvearrowright X$ com a função $f^1\colon X \longrightarrow X$, já que todas funções da ação podem ser representadas como composições de $f^1$, e também de $(f^1)^{-1}$ caso o sistema seja revertível.

**Definição 1.2** (Iterados, Órbitas e Periodicidade)**.** Seja $\mathcal{S} = (X, f)$ um sistema dinâmico.

1. O *t-ésimo iterado* de um ponto $x \in X$, para $t \in T$, é o ponto $f^t(x)$;

2. A *órbita* de um ponto $x \in X$ é o conjunto

$$\mathcal{O}(x) := \left\{ f^t(x) \;\middle|\; t \in T \right\},$$

[1] Pode-se se considerar a ação de monoides/grupos mais gerais, mas não abordaremos esses casos aqui. O grupo considerado pode ou não ter uma relação de ordem, e nesse caso o que será discutido aqui sobre tempo positivo e negativo não procederá.

a órbita de $x$ sob a ação de $f$; a *(semi)órbita positiva* de $x$ é o conjunto $\mathcal{O}^+(x) := \{f^t(x) \mid t \in T^+\}$ (em que $T^+$ é o monoide positivo associado a $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$);

3. Um ponto *periódico* é um ponto $x \in X$ que satisfaz, para algum $t \in T$, $f^t(x) = x$, e $t$ é um *período* de $x$; sua órbita é uma *órbita periódica* (ou $t$-periódica). O conjunto dos pontos periódicos é denotado[2] $\mathrm{P}$ e o conjunto dos pontos $t$-periódicos é denotado $\mathrm{P}_t$.

Quando um sistema é irreversível, cada órbita de um ponto do sistema é igual a sua (semi)órbita positiva. Se o sistema é revertível, pode-se definir a *(semi)órbita negativa* de $x$ como o conjunto $\mathcal{O}^-(x) := \{f^{-t}(x) \mid t \in T^+\}$, mas não faremos uso dessa estrutura nestas notas.

## 1.2 Conjuntos Invariantes

**Definição 1.3.** Seja $\mathcal{S} = (X, f)$ um sistema dinâmico. Um conjunto *invariante* de $\mathcal{S}$ é um conjunto $C \subseteq X$ tal que $f^t(C) \subseteq C$ para todo $t \in T$. Um conjunto *positivamente invariante* de $\mathcal{S}$ é um conjunto $C \subseteq X$ tal que $f^t(C) \subseteq C$ para todo $t \in T^+$. Um conjunto *negativamente invariante* de $\mathcal{S}$ é um conjunto $C \subseteq X$ tal que $f^{-t}(C) \subseteq C$ para todo $t \in T^+$.

Para estudar melhor o conceito de conjunto invariante e entender a diferença entre os conjuntos positivamente e negativamente invariantes, definimos os seguintes objetos.

**Definição 1.4.** Sejam $\mathcal{S} = (X, f)$ um sistema dinâmico e $C \subseteq X$. O *fecho positivamente invariante* de $C$ é o conjunto

$$\mathcal{O}^+(C) := \bigcup_{t \in T^+} f^t(C),$$

o *fecho negativamente invariante* de $C$ é o conjunto

$$\mathcal{O}^-(C) := \bigcup_{t \in T^+} f^{-t}(C)$$

e o *fecho invariante* de $C$ é o conjunto $\mathcal{O}(C) := \mathcal{O}^+(C) \cup \mathcal{O}^-(C)$.

Primeiro justificamos a nomenclatura de fecho para esses operadores. As propriedades valem para os três operadores $\mathcal{O}^+$, $\mathcal{O}^-$ e $\mathcal{O}$.

[2] Denotam-se $\mathrm{P}(\mathcal{S})$ ou $\mathrm{P}(f)$ caso se queira ressaltar o sistema ou a dinâmica, respectivamente.

**Proposição 1.1.** *Seja $\mathcal{S} = (X, f)$ um sistema dinâmico.*

1. *Os operadores $\mathcal{O}^+, \mathcal{O}^-, \mathcal{O} \colon \wp(X) \longrightarrow \wp(X)$ são operadores de fecho que preservam união qualquer;*

2. $\mathcal{O}^+(C)^\complement \subseteq \mathcal{O}^+(C^\complement)$.

*Demonstração.* 1. Demonstraremos as propriedades somente para o operador $\mathcal{O}^+$, pois para os outros as contas são análogas.

$(C \subseteq \mathcal{O}^+(C))$ Basta notar que $f^0(C) = C$, portanto $C \subseteq \mathcal{O}^+(C)$.

$(\mathcal{O}^+(\mathcal{O}^+(C)) = \mathcal{O}^+(C))$ Basta notar que

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^+(\mathcal{O}^+(C)) &= \mathcal{O}^+\left(\bigcup_{t\in T^+} f^t(C)\right)\\
&= \bigcup_{s\in T^+} f^s\left(\bigcup_{t\in T^+} f^t(C)\right)\\
&= \bigcup_{s\in T^+}\bigcup_{t\in T^+} f^{s+t}(C)\\
&= \bigcup_{t\in T^+} f^t(C)\\
&= \mathcal{O}^+(C).
\end{aligned}$$

$(C \subseteq D \implies \mathcal{O}^+(C) \subseteq \mathcal{O}^+(D))$ Para todo $t \in T^+$, $f^t(C) \subseteq f^t(D)$, portanto $\mathcal{O}^+(C) \subseteq \mathcal{O}^+(D)$.

$(\mathcal{O}^+(\emptyset) = \emptyset)$ Segue de $f^t(\emptyset) = \emptyset$ para todo $t \in T^+$.

$(\mathcal{O}^+(\bigcup_{i\in I} C_i) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}^+(C_i))$ Basta notar que

$$\mathcal{O}^+\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) = \bigcup_{t\in T^+} f^t\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{t\in T^+} f^t(C_i) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}^+(C_i).$$

2. Segue de

$$X = \mathcal{O}^+(X) = \mathcal{O}^+(C \cup C^\complement) = \mathcal{O}^+(C) \cup \mathcal{O}^+(C^\complement).$$ ∎

A proposição a seguir dá um significado mais fácil de imaginar para os fechos invariantes.

**Proposição 1.2.** *Sejam $\mathcal{S} = (X, f)$ um sistema dinâmico e $C \subseteq X$.*

1. *O conjunto* $\mathcal{O}^+(C)$ *é o conjunto das órbitas positivas dos pontos de* $C$*:*

$$\mathcal{O}^+(C) = \bigcup_{x \in C} \mathcal{O}^+(x);$$

2. *O conjunto* $\mathcal{O}^-(C)$ *é o conjunto dos pontos cujas órbitas positivas passam por* $C$*:*

$$\mathcal{O}^-(C) = \left\{ x \in X \;\middle|\; \mathcal{O}^+(x) \cap C \neq \emptyset \right\};$$

*Demonstração.* 1. Para a primeira igualdade, basta notar que

$$\mathcal{O}^+(C) = \bigcup_{t \in T^+} f^t(C) = \bigcup_{t \in T^+} \bigcup_{x \in C} \{f^t(x)\} = \bigcup_{x \in C} \bigcup_{t \in T^+} \{f^t(x)\} = \bigcup_{x \in C} \mathcal{O}^+(x).$$

2. Para a segunda igualdade, basta notar que

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{t \in T^+} f^{-t}(C) &\Leftrightarrow \exists t \in T^+ \; x \in f^{-t}(C) \\ &\Leftrightarrow \exists t \in T^+ \; f^t(x) \in C \\ &\Leftrightarrow \mathcal{O}^+(x) \cap C \neq \emptyset. \end{aligned}$$

■

Agora, relacionamos os fechos invariantes com conjuntos invariantes.

**Proposição 1.3.** *Sejam* $\mathcal{S} = (X, f)$ *um sistema dinâmico e* $C \subseteq X$*.*

1. $C$ *é positivamente invariante se, e somente se,* $\mathcal{O}^+(C) \subseteq C$ *(as órbitas positivas dos pontos de* $C$ *estão em* $C$*);*

2. $C$ *é negativamente invariante se, e somente se,* $\mathcal{O}^-(C) \subseteq C$ *(os pontos cujas órbitas positivas passam por* $C$ *estão em* $C$*);*

3. $C$ *é positivamente invariante se, e somente se,* $C^\complement$ *é negativamente invariante:*

$$\mathcal{O}^+(C) \subseteq C \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{O}^-(C^\complement) \subseteq C^\complement.$$

4. *O menor conjunto positivamente invariante que contém* $C$ *é* $\mathcal{O}^+(C)$*;*

5. *O menor conjunto negativamente invariante que contém $C$ é $\mathcal{O}^-(C)$.*

6. *$C$ é invariante se, e somente se, para todo $t \in T^+$, $f^{-t}(C) = C$;*

7. *Se $C$ é invariante e, para todo $t \in T^+$, $f^t$ é sobrejetiva, então $f^t(C) = C$;*

8. *Se, para todo $t \in T^+$, $f^t$ é injetiva e $f^t(C) = C$, então $C$ é invariante.*

*Demonstração.* 1. Segue diretamente da definição.

2. Análogo ao item anterior.

3. Se $C$ é positivamente invariante, então para todo $t \in T^+$ vale $f^t(C) \subseteq C$, logo $f^{-t}(f^t(C)) \subseteq f^{-t}(C)$. Como $C \subseteq f^{-t}(f^t(C))$, segue que $C \subseteq f^{-t}(C)$. Portanto $f^{-t}(C)^\complement \subseteq C^\complement$. Como $f^{-t}(C)^\complement = f^{-t}(C^\complement)$, segue que $f^{-t}(C^\complement) \subseteq C^\complement$. Isso significa que $C^\complement$ é negativamente invariante.

   Se $C$ é negativamente invariante, então para todo $t \in T^+$ vale $f^{-t}(C) \subseteq C$, logo $C^\complement \subseteq f^{-t}(C)^\complement = f^{-t}(C^\complement)$, portanto $f^t(C^\complement) \subseteq f^t(f^{-t}(C^\complement)) \subseteq C^\complement$. Isso significa que $C^\complement$ é positivamente invariante.

4. Como $\mathcal{O}^+(\mathcal{O}^+(C)) = \mathcal{O}^+(C)$, ele é positivamente invariante. Para notar que é o menor, suponhamos que $D \subseteq X$ é positivamente invariante e $C \subseteq D$. Então $\mathcal{O}^+(D) \subseteq D$ e $\mathcal{O}^+(C) \subseteq \mathcal{O}^+(D)$, logo $\mathcal{O}^+(C) \subseteq D$.

5. Análogo ao item anterior.

6. ($\Rightarrow$) Como $C$ é positivamente invariante, para todo $t \in T^+$ vale $f^t(C) \subseteq C$, logo $f^{-t}(f^t(C)) \subseteq f^{-t}(C)$. Mas para qualquer função vale que $C \subseteq f^{-t}(f^t(C))$, portanto $C \subseteq f^{-t}(f^t(C)) \subseteq f^{-t}(C)$. Como $C$ é negativamente invariante, $f^{-t}(C) \subseteq C$, o que mostra que $f^{-t}(C) = C$.

   ($\Leftarrow$) Como para todo $t \in T^+$ vale $f^{-t}(C) = C$, segue que $C$ é negativamente invariante. Também dessa relação segue que $f^t(C) = f^t(f^{-t}(C))$ e, como $f^t(f^{-t}(C) \subseteq C$ para qualquer função, segue que $f^t(C) \subseteq C$, portanto $C$ é positivamente invariante, o que mostra que ele é invariante.

7. Como, para todo $t \in T^+$, $f^t$ é sobrejetiva, $f^t(f^{-t}(C)) = C$. Da invariância negativa de $C$, segue que $f^{-t}(C) \subseteq C$, portanto $f^t(f^{-t}(C)) \subseteq f^t(C)$. Mas então $C \subseteq f^t(C)$. Da invariância positiva de $C$, segue que $f^t(C) \subseteq C$ e, portanto, $f^t(C) = C$.

8. Como $f^t(C) = C$, segue que $f^{-t}(C) = f^{-t}(f^t(C))$ e, como $f^{-t}(f^t(C)) = C$ para função injetiva, segue que $f^{-t}(C) = C$, portanto $C$ é invariante pela proposição acima. ∎

Essa proposição mostra, basicamente, que invariância positiva quer dizer que órbitas não saem do conjunto e que invariância negativa quer dizer que órbitas não entram no conjunto.

No caso de sistemas dinâmicos discretos, pode-se mostrar por indução que invariância positiva e negativa são respectivamente equivalentes a exigir que $f(C) \subseteq C$ e $f^{-1}(C) \subseteq C$. Além disso, valem mais algumas propriedades.

**Proposição 1.4.** *Sejam $\mathcal{S} = (X, f)$ um sistema dinâmico discreto e $C \subseteq X$.*

1. *Se $f(C) \subseteq C$, então $C$ é positivamente invariante;*

2. *Se $f^{-1}(C) \subseteq C$, então $C$ é negativamente invariante;*

*Demonstração.* 1. Mostraremos por indução que, para todo $t \in \mathbb{Z}^+$, $f^t(C) \subseteq C$. Para $t = 0$, temos que $f^0(C) = C \subseteq C$. Agora seja $t \in \mathbb{Z}^+_*$ e suponha que $f^{t-1}(C) \subseteq C$. Então, como $f(C) \subseteq C$,

$$f^t(C) = f^{t-1}(f(C)) \subseteq f(C) \subseteq C.$$

2. A mesma demonstração vale ao substituir $f^t$ por $f^{-t}$.

∎

**Definição 1.5.** Sejam $\mathcal{S} = (X, f)$ um sistema dinâmico e $C \subseteq X$. Definem-se

$$I^+(C) := \bigcap_{t \in T^+} f^t(C) \qquad \text{e} \qquad I^-(C) := \bigcap_{t \in T^+} f^{-t}(C).$$

**Proposição 1.5.** *Seja $\mathcal{S} = (X, f)$ um sistema dinâmico.*

1. *O operador $I^- \colon \wp(X) \longrightarrow \wp(X)$ é um operador de interior; se $f$ é injetiva, o operador $I^+ \colon \wp(X) \longrightarrow \wp(X)$ é um operador de interior.*

2. *Se $C$ é positivamente invariante, então $I^+(C)$ é positivamente invariante.*

3. *Se $C$ é negativamente invariante, então $I^-(C)$ é invariante.*

*também é.*

*Demonstração.* 1. Como $C$ é positivamente invariante, para todo $t' \in^+$ vale que $f^{t'}(C) \subseteq C$, logo $\bigcap_{t=0}^{t'} f^t(C) = f^{t'}(C)$, o que implica

$$f^{t'}\left(\bigcap_{t \in T^+} f^t(C)\right) \subseteq \bigcap_{t \in T^+} f^{t+t'}(C) = \bigcap_{t \in T^+} f^t(C).$$

2. Como $C$ é negativamente invariante, para todo $t' \in^+$ vale que $f^{-t'}(C) \subseteq C$, logo $\bigcap_{t=0}^{t'} f^{-t}(C) = f^{-t'}(C)$, o que implica

$$f^{-t'}\left(\bigcap_{t \in T^+} f^{-t}(C)\right) = \bigcap_{t \in T^+} f^{-(t+t')}(C) = \bigcap_{t \in T^+} f^{-t}(C).$$

■

**Definição 1.6.** Um *conjunto invariante mínimo* é um conjunto invariante que não tem subconjuntos invariantes próprios e não vazios.

O espaço de estados sempre pode ser particionado em partes invariantes, embora o conjunto dessas partes possa ter qualquer cardinalidade. Para ver que isso é verdade, basta considerar o conjunto de órbitas $\{\mathcal{O}(x) \mid x \in X\}$. Cada órbitas é um conjunto invariante.

Ressaltamos na proposição a seguir algumas equivalências para um conjunto bem importante na teoria de sistemas dinâmicos.

**Proposição 1.6.** *Sejam $\mathcal{S} = (X, f)$ um sistema dinâmico discreto e $C \subseteq X$. O limite superior de $\{f^{-t}(C)\}_{t \in \mathbb{Z}^+}$ é o conjunto dos pontos cujas órbitas positivas passam infinitamente por $C$:*

$$\limsup_{t \in \mathbb{Z}^+} f^{-t}(C) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{t=n}^{\infty} f^{-t}(C) = \bigcap_{t \in T^+} \mathcal{O}^-(f^{-t}(C)) = \left\{x \in X \;\middle|\; \left|\mathcal{O}^+(x) \cap C\right| = |\mathbb{N}|\right\}.$$

*Demonstração.* O conjunto $\limsup_{t \in \mathbb{Z}^+} f^{-t}(C)$ é o conjunto dos pontos que pertencem a infinitos dos conjuntos $f^{-t}(C)$, ou seja, os pontos cujas órbitas intersecionam $C$ infinitas vezes. ■

## 1.3 Conjugação de Sistemas Dinâmicos

**Definição 1.7.** Sejam $\mathcal{S}_1 = (X_1, f_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (X_2, f_2)$ sistemas dinâmicos. Uma *semi-conjugação* (morfismo de sistemas dinâmicos) de $\mathcal{S}_1$ para $\mathcal{S}_2$ é uma função sobrejetiva $\phi : X_1 \longrightarrow X_2$ que satisfaz $\phi \circ f_1 = f_2 \circ \phi$ (o diagrama comuta).

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\phi"'] & X_1 \arrow[d, "\phi"] \\
X_2 \arrow[r, "f_2"'] & X_2
\end{tikzcd}$$

Denota-se $\phi : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$. Uma *conjugação* (isomorfismo de sistemas dinâmicos) de $\mathcal{S}_1$ para $\mathcal{S}_2$ é uma semiconjugação $\phi : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$ que é invertível.

Sempre que temos uma função sobrejetiva $\phi : X_1 \longrightarrow X_2$, para todo $y \in X_2$ existe $x \in X_1$ tal que $y = \phi(x)$. Assim podemos induzir a dinâmica de $(X_1, f_1)$ em $X_2$, definindo $f_2(y) := \phi(f_1(x))$, de modo que a dinâmica $f_2$ é uma função de $X_2$ para $X_2$ e vale $f_2 \circ \phi = \phi \circ f_1$. Isso faz com que os sistemas $(X_1, f_1)$ e $(X_2, f_2)$ sejam semiconjugados.

A partir das propriedade da conjugação, vamos deduzir alguns resultados imediatos. Podemos notar que as funções compostas ${f_1}^n$ e ${f_2}^n$ ainda satisfazem a propriedade comutativa que $f_1$ e $f_2$ satisfazem. Isso basicamente diz que em sistemas discretos, preservar a função $f$ é preservar a ação da dinâmica. Segue a proposição.

**Proposição 1.7.** *Sejam $(X_1, f_1)$ e $(X_2, f_2)$ sistemas dinâmicos e $\phi : X_1 \longrightarrow X_2$ uma semiconjugação. Então, para todo natural $n \geq 1$, vale $\phi \circ {f_1}^n = {f_2}^n \circ \phi$ (o diagrama comuta).*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "{f_1}^n"] \arrow[d, "\phi"'] & X_1 \arrow[d, "\phi"] \\
X_2 \arrow[r, "{f_2}^n"'] & X_2
\end{tikzcd}$$

*Demonstração.* Vamos provar a proposição acima usando indução. Primeiro, notamos que a propriedade vale para $n = 1$ por definição. Agora, supondo que valha $\phi \circ {f_1}^{n-1} = {f_2}^{n-1} \circ \phi$, temos que

$$\begin{aligned}
\phi \circ {f_1}^n &= \phi \circ ({f_1}^{n-1} \circ f_1) \\
&= (\phi \circ {f_1}^{n-1}) \circ f_1 \\
&= ({f_2}^{n-1} \circ \phi) \circ f_1 \\
&= {f_2}^{n-1} \circ (\phi \circ f_1) \\
&= {f_2}^{n-1} \circ (f_2 \circ \phi) \\
&= ({f_2}^{n-1} \circ f_2) \circ \phi \\
&= {f_2}^n \circ \phi,
\end{aligned}$$

o que conclui a indução. ■

Ainda, podemos ver que a semiconjugação preserva órbitas periódicas, no sentido em que, se algum elemento do conjunto inicial tem órbita periódica, então sua imagem pela semiconjugação terá, também, órbita periódica.

**Proposição 1.8** (Semiconjugação preserva periodicidade da órbita.)**.** *Sejam* $(X_1, f_1)$ *e* $(X_2, f_2)$ *sistemas dinâmicos e* $\phi : X_1 \longrightarrow X_2$ *uma semiconjugação. Para todo* $x \in X$*, se* $x$ *é um ponto n-periódico, então* $\phi(x)$ *é um ponto n-periódico. Ainda, o período mínimo de* $\phi(x)$ *divide o período mínimo de* $x$*.*

*Demonstração.* Seja $x \in X$ tal que $x = {f_1}^n(x)$. Pela propriedade da semiconjugação,

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \phi({f_1}^n(x)) \\
&= (\phi \circ {f_1}^n)(x) \\
&= ({f_2}^n \circ \phi)(x) \\
&= {f_2}^n(\phi(x)).
\end{aligned}$$

Como $\phi(x)$ é $n$-periódico, segue que seu período mínimo divide $n$. ■

# 2 Dinâmica Topológica

**Definição 2.1.** Um *sistema dinâmico topológico* é uma dupla $\boldsymbol{\mathcal{S}} = (\boldsymbol{X}, f)$ em que $\boldsymbol{X}$ é um espaço topológico, $(X, f)$ é um sistema dinâmico e $f$ é uma ação contínua em $\boldsymbol{X}$.

## 2.1 Conjugação Topológica

**Definição 2.2.** Sejam $\boldsymbol{\mathcal{S}_1} = (\boldsymbol{X_1}, f_1)$ e $\boldsymbol{\mathcal{S}_2} = (X_2, f_2)$ sistemas dinâmicos topológicos. Uma *semiconjugação topológica* (morfismo de sistemas dinâmicos topológico) de $\boldsymbol{\mathcal{S}_1}$ para $\boldsymbol{\mathcal{S}_2}$ é uma semiconjugação $\phi : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$ que é uma função contínua de $\boldsymbol{X_1}$ para $\boldsymbol{X_2}$. Denota-se $\phi : \boldsymbol{\mathcal{S}_1} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}_2}$. Uma *conjugação topológica* (isomorfismo de sistemas dinâmicos topológicos) de $\boldsymbol{\mathcal{S}_1}$ para $\boldsymbol{\mathcal{S}_2}$ é uma semiconjugação topológica $\phi : \boldsymbol{\mathcal{S}_1} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}_2}$ que é um homeomorfismo de $\boldsymbol{X_1}$ para $\boldsymbol{X_2}$.

## 2.2 Transitividade Topológica e Minimalidade

**Proposição 2.1.** *Seja $\boldsymbol{\mathcal{S}} = (\boldsymbol{X}, f)$ um sistema dinâmico topológico. São equivalentes*

1. *Não existe partição $X = P \cup P'$ cujas partes têm interior vazio e umas delas é positivamente invariante;*

2. *Para todos abertos não vazios $A, A' \subseteq X$, existe $t \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^t(A) \cap A' \neq \emptyset$;*

3. *Para todo aberto não vazio $A \subseteq X$,*

$$\overline{\mathcal{O}^+(A)} = X;$$

4. *Para todo aberto não vazio $A \subseteq X$,*

$$\overline{\mathcal{O}^-(A)} = X.$$

Essas propriedades são importantes e recebem o nome de transitividade topológica.

**Definição 2.3.** Um sistema dinâmico *topologicamente transitivo* é um sistema dinâmico topológico $\boldsymbol{\mathcal{S}} = (\boldsymbol{X}, f)$ tal que, para todos abertos não vazios $A, A' \subseteq X$, existe $t \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^t(A) \cap A' \neq \emptyset$.

**Proposição 2.2.** *Seja $\boldsymbol{\mathcal{S}} = (\boldsymbol{X}, f)$ um sistema dinâmico topológico revertível. Então $(\boldsymbol{X}, f)$ é topologicamente transitivo se, e somente se, $(\boldsymbol{X}, f^{-1})$ o é.*

*Demonstração.* Segue diretamente das últimas equivalências da proposição anterior. ■

**Proposição 2.3.** *Sejam $\boldsymbol{X}$ um espaço métrico sem pontos isolados e $\boldsymbol{\mathcal{S}} = (\boldsymbol{X}, f)$ um sistema dinâmico topológico.*

1. *Se $x \in X$ tem órbita densa, então, para todo $t \in \mathbb{Z}^+$, $f^t(x)$ também tem;*

2. *Se existe $x \in X$ cuja órbita é densa em $X$, então $\mathcal{S}$ é topologicamente transitivo.*

A propriedade de órbita densa nem sempre é equivalente à transitividade topológica, e recebe o nome de transitividade por órbitas.

**Definição 2.4.** Um sistema dinâmico *transitivo por órbitas* é um sistema dinâmico topológico $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ em que existe ponto $x \in X$ cuja órbita é densa em $X$.

Em um caso clássico, pode-se mostrar que transitividade por órbitas implica transitividade topológica. Esse teorema foi provado por Birkhoff para $\mathbb{R}^d$, mas pode ser enunciado como segue.

**Proposição 2.4.** *Sejam $\boldsymbol{X}$ um espaço métrico completo separável e $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ um sistema dinâmico topológico. Se $\mathcal{S}$ é topologicamente transitivo, então é transitivo por órbitas.*

**Definição 2.5.** Um sistema dinâmico *mínimo* é um sistema dinâmico topológico $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ cujos pontos têm órbita densa em $X$.

**Proposição 2.5.** *Seja $\boldsymbol{G}$ um grupo topológico, $\alpha \in G$ e $E_\alpha \colon G \longrightarrow G$ a translação à esquerda por $\alpha$. Se o sistema $(\boldsymbol{G}, E_\alpha)$ é topologicamente transitivo, então ele é mínimo.*

## 2.3 Pontos Errantes, Conjuntos Limites e Pontos Recorrentes

**Definição 2.6.** Seja $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ um sistema dinâmico topológico. Um ponto *errante* do sistema é um ponto $p \in X$ para o qual existe vizinhança $V \subseteq X$ de $p$ satisfazendo

$$V \cap \bigcup_{t \in \mathbb{Z}^+_*} f^t(V) = \emptyset.$$

Um ponto *não-errante* do sistema é um ponto $p \in X$ que não é errante: para toda vizinhança $V \subseteq X$ de $p$,

$$V \cap \bigcup_{t \in \mathbb{Z}^+_*} f^t(V) \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos não-errantes do sistema $\mathcal{S}$ é denotado $\Omega(\mathcal{S})$ (ou $\Omega$, ou ainda $\Omega(f)$, de acordo com o que for mais relevante ressaltar).

Um ponto errante é um ponto para o qual, em alguma vizinhança, nenhuma semiórbita positiva da vizinhança retorna para a vizinhança, e um não-errante é um ponto para o qual, em toda vizinhança, alguma semiórbita positiva da vizinhança retorna para a vizinhança.

Essa propriedade é, de certa forma, um tipo de periodicidade topológica. Por isso, pode-se esperar que pontos periódicos sejam não-errantes.

**Proposição 2.6.** *Seja $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ um sistema dinâmico topológico. Todo ponto periódico do sistema é não-errante:*

$$\mathrm{P}(f) \subseteq \Omega(f).$$

*Demonstração.* Seja $p \in X$ um ponto $t$-periódico. Para toda vizinhança de $V$ de $p$, segue que $V \cap f^t(V) \neq \emptyset$, pois $p = f^t(p) \in f^t(V)$, logo $p$ é não-errante. ∎

**Proposição 2.7.** *Seja $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ um sistema dinâmico topológico.*

1. *O conjunto dos pontos não-errantes $\Omega$ é fechado;*
2. *O conjunto dos pontos não-errantes $\Omega$ é positivamente invariante ($f(\Omega) \subseteq \Omega$);*
3. *Se $\mathcal{S}$ é revertível, $\Omega(f^{-1}) = \Omega(f)$ e $\Omega$ é invariante ($f^{-1}(\Omega) = \Omega$).*

*Demonstração.*

1. O conjunto de pontos errantes é aberto, pois se $p$ é um ponto não-errante, existe vizinhança $V$ de $p$ tal que

$$V \cap \bigcup_{t \in \mathbb{Z}_*^+} f^t(V) = \emptyset,$$

logo todo $q \in V^\circ$ também é não-errante. Isso implica que o complementar desse conjunto, o conjunto $\Omega$, é fechado.

2. Sejam $p \in \Omega$. Para toda vizinhança $V$ de $f(p)$, $V' := f^{-1}(V)$ é vizinhança de $p$. Como $p$ é não-errante, existe $t \in \mathbb{Z}_*^+$ tal que $V' \cap f^t(V') \neq \emptyset$. Disso segue que

$$\emptyset \neq f(V' \cap f^t(V')) \subseteq f(V') \cap f(f^t(V')) = f(V') \cap f^t(f(V')) \subseteq V \cap f^t(V),$$

portanto $f(p)$ é não-errante, o que mostra que $f(\Omega) \subseteq \Omega$.

3. Seja $p \in \Omega(f)$. Para toda vizinhança $V$ de $p$, existe $t \in \mathbb{Z}_*^+$ tal que $V \cap f^t(V) \neq \emptyset$. Assim, segue da injetividade de $f$(usada na segunda contenção) que

$$\emptyset \neq f^{-t}(f^t(V) \cap V) \subseteq f^{-t}(f^t(V)) \cap f^{-t}(V) \subseteq V \cap f^{-t}(V),$$

logo $p \in \Omega(f^{-1})$. A contenção contrária segue ao trocar os papéis de $f$ e $f^{-1}$, portanto $\Omega(f^{-1}) = \Omega(f)$. Dessa igualdade, tem-se do item 1 que $f(\Omega) \subseteq \Omega$ e $f^{-1}(\Omega) \subseteq \Omega$. Usando essa segunda contenção, segue da sobrejetividade de $f$ que

$$\Omega = f(f^{-1}(\Omega)) \subseteq f(\Omega),$$

portanto $\Omega = f(\Omega)$, e conclui-se da injetividade de $f$ que $\Omega$ é invariante. ■

**Definição 2.7.** Sejam $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ um sistema dinâmico topológico e $p \in X$. O *conjunto limite positivo*[3] de $p$ é o conjunto de pontos limites[4] de $\mathcal{O}^+(p)$, dado por

$$\mathrm{L}_f^+(p) := \bigcap_{t \in \mathbb{Z}^+} \overline{\{f^{t'}(p) \mid t' > t\}}.$$

Se $\mathcal{S}$ é revertível, então o *conjunto limite negativo*[5] de $p$ é o conjunto $\mathrm{L}_f^-(p) := \mathrm{L}_{f^{-1}}^+(p)$.

O *conjunto limite positivo* do sistema é o conjunto

$$\mathrm{L}^+(f) := \overline{\bigcup_{p \in X} \mathrm{L}_f^+(p)},$$

o *conjunto limite negativo* é o conjunto $\mathrm{L}^-(f) := \mathrm{L}^+(f^{-1})$ e o *conjunto limite* é o conjunto

$$\mathrm{L}(f) := \mathrm{L}^+(f) \cup \mathrm{L}^-(f).$$

Ou seja, os pontos de $\mathrm{L}_f^+(p)$ são aqueles que são limites de $(f^{t_n}(p))_{n \in \mathbb{N}}$ para alguma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{Z}^+)^{\mathbb{N}}$ que tende ao infinito.

**Proposição 2.8.** *Sejam $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ um sistema dinâmico topológico e $p \in X$. Então*

1. *O conjunto limite positivo $\mathrm{L}^+(p)$ é não-vazio, fechado e positivamente invariante*

**Proposição 2.9.** *Seja $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ um sistema dinâmico topológico. Todo ponto periódico do sistema é um ponto limite e todo ponto limite é um ponto não-errante:*

$$\mathrm{P}(f) \subseteq \mathrm{L}(f) \subseteq \Omega(f).$$

[3] Chamado comumente de $\omega$-limite e denotado $\omega_f(p)$.
[4] O conjunto de pontos limites de um conjunto é às vezes chamado de o *derivado* do conjunto.
[5] Chamado comumente de $\alpha$-limite e denotado $\alpha_f(p)$.

*Demonstração.* Para a primeira inclusão, seja $p \in X$ um ponto periódico. Então existe $t \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^t(p) = p$. Tomando a sequência $(nt)_{n\in\mathbb{N}}$, segue que $f^{nt}(p) = p$, logo $f^{nt}(p) \to p$, o que mostra que $p \in \mathrm{L}(f)$.

Agora, seja $q \in \mathrm{L}(f)$. Consideraremos o caso em que $q \in \mathrm{L}^+(f)$. Existe $p \in X$ tal que $q \in \mathrm{L}_f^+(p)$. Assim, para toda vizinhança $V$ de $q$, existem $t, t' \in \mathbb{Z}^+$, $t' > t$, tais que $f^t(p) \in V$ e $f^{t'}(p) \in V$. Como $f^{t'-t}(f^t(p)) = f^t(p)$, isso implica que

$$V \cap f^{t'-t}(V) \neq \emptyset,$$

logo $q \in \Omega(f)$. ∎

**Proposição 2.10.** *Seja* $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ *um sistema dinâmico topológico.*

1. *O conjunto dos pontos limite* $\mathrm{L}(f)$ *é fechado;*

2. *O conjunto dos pontos limite* $\mathrm{L}$ *é positivamente invariante (*$f(\mathrm{L}) \subseteq \mathrm{L}$*);*

3. *Se* $\mathcal{S}$ *é revertível,* $\mathrm{L}$ *é invariante (*$f^{-1}(\mathrm{L}) = \mathrm{L}$*).*

**Definição 2.8.** Seja $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ um sistema dinâmico topológico. Um ponto *(positivamente) recorrente* é um ponto $p \in X$ tal que $p \in \mathrm{L}^+(p)$. O conjunto dos pontos recorrentes do sistema é denotado $R(f)$.

## 2.4 Conjuntos Estável e Instável

**Definição 2.9.** Sejam $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ um sistema dinâmico topológico e $C \in X$ um conjunto positivamente invariante. O *conjunto estável* de $C$ é o conjunto

$$W_f^+(C) := \left\{ p \in X \;\middle|\; f^t(p) \to C,\ t \to \infty \right\}.$$

Se o sistema é revertível, o *conjunto instável* de $C$ é $W_f^-(C) := W_{f^{-1}}^+(C)$. Quando $p \in X$ é um ponto fixo, denotam-se $W_f^+(p) := W_f^+(\{p\})$ e $W_f^-(p) := W_f^-(\{p\})$.

Os superíndices '+' e '−' podem gerar certa confusão, pois o índice '+' poderia tanto indicar que a *distância* entre os pontos $q$ e o ponto $p$ *aumenta* ou que no tempo *futuro* os pontos $q$ tendem ao ponto $p$; problema análogo ocorre para o índice '− '. Escolhemos aqui a segunda opção porque ela segue o padrão que de outras notações, em que '+' indica a evolução positiva (futura) do sistema e '−' indica sua evolução negativa (passada).

**Proposição 2.11.** *Sejam* $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ *um sistema dinâmico topológico e* $C \subseteq X$ *um conjunto positivamente invariante. Então* $W^+(C)$ *é invariante.*

*Demonstração.* Seja $p \in W^+(C)$. Para todo $s \in T^+$, temos que $f^t(f^s(p)) = f^{t+s}(p) \to C$ quando $t \to \infty$, portanto $f^s(p) \in W^+(C)$, o que mostra que o conjunto é positivamente invariante. Para mostrar que é negativamente invariante, basta notar que se $q \in f^{-s}(p)$, então $f^s(q) = p$, logo $f^t(q) \to C$. ■

**Definição 2.10.** Sejam $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ um sistema dinâmico topológico, $\boldsymbol{X}$ metrizável, com distância $d$, e $p \in X$. O *conjunto estável* de $p$ é o conjunto

$$W_f^+(p) := \left\{ q \in X \;\middle|\; d(f^t(p), f^t(q)) \to 0,\ t \to \infty \right\}.$$

Se o sistema é revertível, o *conjunto instável* de $p$ é o conjunto $W_f^-(p) := W_{f^{-1}}^+(p)$.

Em geral, denotamos somente $W^+(p)$ e $W^-(p)$. As $\varepsilon$-bolas estável e instável são as $\varepsilon$-bolas em $W^+(p)$ e $W^-(p)$ induzidas pela métrica, e são denotadas $B_\varepsilon^+(p)$ e $B_\varepsilon^-(p)$, respectivamente.

**Definição 2.11.** Sejam $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ um sistema dinâmico contínuo metrizável e $p \in X$. O *conjunto estável fraco* de $p$ é o conjunto

$$W_f^{++}(p) := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W_f^+(f^t(p)) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} f^t(W_f^+(p)).$$

Se o sistema é revertível, o *conjunto instável fraco* de $p$ é o conjunto $W_f^{--}(p) := W_{f^{-1}}^{++}(p)$.

Em geral, denotamos somente $W^{++}(p)$ e $W^{--}(p)$. As $\varepsilon$-bolas em $W^{++}(p)$ e $W^{--}(p)$ induzidas pela métrica, e são denotadas $B_\varepsilon^{++}(p)$ e $B_\varepsilon^{--}(p)$ e chamadas $\varepsilon$-bolas estável e instável fracas, respectivamente. Note que os conjuntos estável e instável fracos são o fecho invariante dos conjuntos estável e instável.

# 3 Dinâmica com Medida

**Definição 3.1.** Um *sistema dinâmico que preserva medida* é uma dupla $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ em que $\boldsymbol{X}$ é um espaço de medida, $(X, f)$ é um sistema dinâmico e $f$ é uma ação que preserva medida em $\boldsymbol{X}$.

Como estudaremos somente o caso **discreto**, a função $f$ é no caso um morfismo de medida, uma função que preserva a medida do espaço. Ainda, estudaremos somente **espaços de probabilidade**. Introduzimos agora noções de morfismo de sistemas dinâmicos de probabilidade. Em geral, quando tratamos da teoria da medida, podemos considerar funções que são iguais a menos de um conjunto de medida nula.

## 3.1 Conjugação que Preserva Medida

**Definição 3.2.** Sejam $\mathcal{S}_\mathbf{1} = (\boldsymbol{X}_\mathbf{1}, f_1)$ e $\mathcal{S}_\mathbf{2} = (\boldsymbol{X}_\mathbf{2}, f_2)$ sistemas que preservam medida. Uma *semiconjugação de medida* de $\mathcal{S}_\mathbf{1}$ para $\mathcal{S}_\mathbf{2}$ é uma semiconjugação $\phi : C_1 \longrightarrow C_2$ que preserva medida, definida em conjuntos mensuráveis $C_1 \in \mathcal{M}_1$ e $C_2 \in \mathcal{M}_2$ que satisfazem $f_1(C_1) \subseteq C_1$, $f_2(C_2) \subseteq C_2$ e $m_1(C_1) = m_2(C_2) = 1$. Nesse caso, o sistema $\mathcal{S}_\mathbf{2}$ é um *fator* do sistema $\mathcal{S}_\mathbf{1}$. Uma *conjugação de medida* de $\mathcal{S}_\mathbf{1}$ para $\mathcal{S}_\mathbf{2}$ é uma semiconjugação de medida que é uma conjugação.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\phi"'] & X_1 \arrow[d, "\phi"] \\
X_2 \arrow[r, "f_2"'] & X_2
\end{tikzcd}$$

Como comentado anteriormente, podemos considerar $\phi$ como definida de $X_1$ para $X_2$ sem problemas, pois só não está definida em um conjunto de medida nula.

## 3.2 Ergodicidade

Nesta seção, introduziremos o conceito de ergodicidade. A definição de transformação em sistemas ergódicos virá seguida de uma proposição que mostra várias equivalências de propriedades que caracterizam a ergodicidade. Essas equivalências são importantes não só como resultados teóricos interessantes e importantes ferramentas da teoria, mas também como embasamento intuitivo da ideia de ergodicidade. Relembramos que um conjunto é quase vazio quando tem medida 0 e quase total quando seu complementar tem medida 0.

**Definição 3.3.** Um *sistema dinâmico ergódico* é um sistema dinâmico que preserva medida $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ tal que todo conjunto mensurável invariante de $\mathcal{S}$ é quase vazio ou quase total:

para todo $M \in \mathcal{M}$ tal que $f^{-1}(M) = M$, $m(M) = 0$ ou $m(M) = 1$. A dinâmica $f$ é uma *dinâmica ergódica.*

## 3.3 Sistemas Misturadores

Nesta seção consideraremos duas noções de um sistema misturador: a de *misturador* e de *fracamente misturador*. Um sistema misturador também é conhecido como fortemente misturador para distingui-lo dos fracamente misturadores. Existem, de fato, outras noções de misturador, que generalizam a ideia de misturador, como *misturador de ordem k* [EW11], mas aqui consideraremos apenas essas duas. Antes de introduzir a definição, vale ressaltar uma outra definição equivalente de sistema ergódico, enunciada abaixo, cuja demonstração pode ser achada em [EW11]. Essa classificação é uma consequência do teorema da média ergódica.

**Proposição 3.1.** *Um sistema $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ é ergódico se, e somente se, para todos $M, N \in \mathcal{M}$,*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} m(M \cap f^{-i}(N)) \to m(M)m(N)$$

*quando $n \to \infty$.*

A definição a seguir, de um sistema misturador, destaca a seguinte ideia. Em alguns sistema, se tomamos dois subconjuntos mensuráveis quaisquer dos espaços, notamos que sempre ocorre que um deles é independente da $n$-ésima imagem inversa do outro quando $n$ é grande. O sentido de independência empregado é que, em espaços de probabilidade, eventos são pensados como conjuntos mensuráveis e dois eventos $E, F$ são independentes quando $m(E \cap F) = m(E)m(F)$; ou seja, a probabilidade dos dois ocorrerem é o produto das probabilidades de cada um deles ocorrer separadamente. Pensando em conjuntos, e agora considerando uma ideia geométrica que motiva o nome *misturador*, essa ideia é equivalente a pensar que os conjuntos, quando iterados, estão muito bem separados no sistema, misturados, de modo que se fixamos um deles, o primeiro, a medida das imagens inversas do segundo que estão nesses primeiro conjunto dividida pela medida desse primeiro é igual à medida do segundo; ou seja, a quantidade do segundo que está no primeiro é proporcionalmente igual à quantidade desse segundo no espaço todo. A definição a seguir formaliza o que foi aqui explicado.

**Definição 3.4.** Um sistema *misturador* é um sistema $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ que preserva medida tal que, para todos $M, N \in \mathcal{M}$,

$$m(M \cap f^{-n}(N)) \to m(M)m(N)$$

quando $n \to \infty$

# 4 Dinâmica Simbólica

Adotaremos a convenção de que o natural $N \in \mathbb{N}$ é o conjunto dos naturais menores que ele, seguindo a construção de ordinais do Von Neumann. Isso simplificará a notação. Assim temos que $N = \{0, \cdots, N-1\}$. Nesta seção consideraremos duas dinâmicas semelhantes, pois ambas agem em sequências, mas diferentes, pois uma considera sequências unilaterais e outra, bilaterais.

## 4.1 Deslocamento Unilateral

Consideremos o conjunto

$$\Sigma^+ := N^{\mathbb{Z}^+} = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}^+} \mid \forall_{i \in \mathbb{Z}^+}\ x_i \in N\}$$

das *sequências unilaterais* em $N$ símbolos, as funções do tipo

$$\begin{aligned} x \colon \mathbb{Z}^+ &\longrightarrow N \\ i &\longmapsto x_i. \end{aligned}$$

**Definição 4.1.** O *deslocamento unilateral*[6] em $\Sigma^+$ é a função

$$\begin{aligned} \sigma \colon \Sigma^+ &\longrightarrow \Sigma^+ \\ (x_i)_{i \in \mathbb{Z}^+} &\longmapsto (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}^+}. \end{aligned}$$

Basicamente, a dinâmica desloca cada entrada de uma sequência $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ à esquerda, levando-a para sequência $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Claramente essa função não é invertível,

[6]Essa dinâmica é conhecida como 'deslocamento de Bernoulli' em homenagem ao matemático suíço *Jacob Bernoulli* (27/12/1654 – 16/08/1705). `https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_scheme`.

logo o sistema dinâmico formado por ela não é invertível. Ressaltamos isso na proposição a seguir.

**Proposição 4.1.** *A dupla* $(\Sigma^+, \sigma)$ *é um sistema dinâmico discreto irreversível.*

**Proposição 4.2.** *Seja* $k \in \mathbb{Z}^+$. *Uma sequência unilateral* $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}^+} \in \Sigma^+$ *é um ponto* $k$*-periódico de* $(\Sigma^+, \sigma)$ *se, e somente se, para todo* $i \in \mathbb{Z}^+$, *vale* $x_i = x_{i+k}$.

*Demonstração.* Se vale $x_i = x_{i+k}$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$, a sequência $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}$ claramente será $k$-periódica, pois

$$\sigma^k((x_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}) = (x_{i+k})_{i\in\mathbb{Z}^+} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}.$$

Por outro lado, se $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}$ tiver órbita periódica, valerá $\sigma^k((x_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}) = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}$ para algum $k$. Nesse caso, teremos que $x_i = x_{i+k}$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$. ■

**Proposição 4.3.** *A função*

$$\begin{aligned} \phi\colon \Sigma^+ &\longrightarrow \mathbb{T}^1 \\ (x_i)_{i\in\mathbb{Z}^+} &\longmapsto \left[\sum_{i\in\mathbb{Z}^+} \frac{x_i}{N^{i+1}}\right] \end{aligned}$$

*é uma semiconjugação de* $(\Sigma^+, \sigma)$ *para* $(\mathbb{T}^1, E_N)$.

*Demonstração.* Seja $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}^+} \in \Sigma^+$. Então

$$\begin{aligned} \phi \circ \sigma((x_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}) &= \phi((x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}^+}) \\ &= \left[\sum_{i\in\mathbb{Z}^+} \frac{x_{i+1}}{N^{i+1}}\right] \\ &= \left[N \sum_{i\in\mathbb{Z}^+} \frac{x_{i+1}}{N^{i+2}}\right] \\ &= \left[N\left(\frac{x_0}{N} + \sum_{i\in\mathbb{Z}^+\setminus\{0\}} \frac{x_i}{N^{i+1}}\right)\right] \\ &= \left[N \sum_{i\in\mathbb{Z}^+} \frac{x_i}{N^{i+1}}\right] \\ &= E_N \circ \phi((x_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}). \end{aligned}$$

Somamos $x_0$ na quarta linha pois é um inteiro, não altera a classe de equivalência. ■

Notemos que a função $\phi$ não é uma conjugação porque não é invertível — existe mais de uma representação $N$-ária para alguns números reais em $[0,1]$, portanto mais de uma sequência em $\Sigma^+$ que o representa. No entanto, veremos mais à frente que isso não será problema quando considerarmos sistemas dinâmicos de medida, pois o conjunto desses pontos problemáticos terá medida nula e, portanto, a conjugação poderá ser definida. Isso será importante pois significa que os dois sistemas são o mesmo sob a ótica de sistemas dinâmicos de medida.

## 4.2 Deslocamento Bilateral

Consideremos o conjunto

$$\Sigma := N^{\mathbb{Z}} = \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mid \forall_{i\in\mathbb{Z}}\ x_i \in N\}$$

das *sequências bilaterais* em $N$ símbolos, as funções do tipo

$$\begin{aligned} x\colon \mathbb{Z} &\longrightarrow N \\ i &\longmapsto x_i. \end{aligned}$$

Nesse contexto, os elementos $x \in \Sigma$, quando restritos a $\Sigma^+$, são denotados $x^+ \in \Sigma^+$, e para $x, y \in \Sigma$ tais que $x_0 = y_0$, escrevemos $z = y^-.x^+$ para $z_i = x_0$ para $i \geq 0$ e $z_i = y_i$ para $i \leq 0$.

**Definição 4.2.** O *deslocamento bilateral (à esquerda)* em $\Sigma$ é a função

$$\begin{aligned} \sigma\colon \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} &\longmapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

O *deslocamento bilateral à direita* é $\sigma^{-1}$.

**Proposição 4.4.** *A dupla $(\Sigma, \sigma)$ é um sistema dinâmico discreto revertível.*

## 4.3 Subdeslocamentos

Os deslocamentos definidos anteriormente são deslocamentos completos, no sentido de que todas as sequências são consideradas no sistema. É possível, porém, selecionar subconjuntos dessas sequências tal que o deslocamento ainda está bem definido nelas. Definimos que cada entrada de uma sequência $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma$ tem entradas em $\{0,\dots,N-1\}$. Esses subconjuntos são escolhidos a partir de uma regra que indica qual entrada de uma sequência pode ser seguida de qual outra entra — por exemplo, para $N = 9$, sequências em que uma entrada 4 só pode ser seguida de uma entrada 2 ou uma entrada 8. Para ter toda a informação necessária, essas sequências são definidas a partir de uma *matriz de adjacência*, uma matriz que indica qual entrada pode ser adjacente a qual outra.

**Definição 4.3.** Uma *matriz de adjacência* de ordem $N$ é uma matriz $A \in \mathbb{M}_N(\mathbb{Z})$ tal que, para todos $(i,j) \in N \times N$, $a_{i,j} \in \{0,1\}$.

A matriz de adjacência tem entradas 0 ou 1 de tal forma que $a_{i,j} = 0$ se uma entrada com valor $i$ da sequência não pode ser seguida de uma entrada com valor $j$ e $a_{i,j} = 1$ se uma entrada com valor $i$ da sequência pode ser seguida de uma entrada de valor $j$.

**Definição 4.4.** Sejam $N \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$ e $A$ uma matriz de adjacência de ordem $N$. O conjunto das sequências de $\Sigma$ *admissíveis* por $A$ é o conjunto

$$\Sigma_A := \left\{ x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma \;\middle|\; \forall_{i\in\mathbb{Z}}\ a_{x_i,x_{i+1}} = 1 \right\}.$$

O conjunto das sequências de $\Sigma^+$ restritas por $A$ é o conjunto

$$\Sigma_A^+ := \left\{ (x_i)_{i\in\mathbb{Z}^+} \;\middle|\; \forall_{i\in\mathbb{Z}^+}\ a_{x_i,x_{i+1}} = 1 \right\}.$$

O *subdeslocamento bilateral* com *matriz de adjacência* $A$ é a função $\sigma|_A := \sigma|_{\Sigma_A}$ e o *subdeslocamento unilateral* com *matriz de adjacência* $A$ é a função $\sigma|_A := \sigma|_{\Sigma_A^+}$. Os sistemas $(\Sigma_A, \sigma|_A)$ e $(\Sigma_A^+, \sigma|_A)$ são *sistemas de deslocamento parcial bilateral* e *unilateral*, respectivamente[7], e a matriz $A$ é a *matriz de adjacência* dos sistemas.

Nesse contexto, para $a_0 \cdots a_{n-1} \in [N]^n$ admissível e $x^+ \in \Sigma^+$, escrevemos $z^+ = a_0 \cdots a_{n-1}x^+$ quando $z_i = a_i$ para todo $i \in [n]$ e $z_i = x_{i-n+1}$ para $i > n$.

**Proposição 4.5.** *Sejam $N \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$ e $A$ uma matriz de adjacência de ordem $N$. A inclusão $\iota : \Sigma_A \longrightarrow \Sigma$ é uma semiconjugação do sistema $(\Sigma_A, \sigma|_A)$ para o sistema $(\Sigma_A, \sigma|_A)$.*

[7]Esses sistemas também são conhecidos como 'cadeias de Markov', em homenagem ao matemático russo *Andrei Andreyevich Markov* (14/06/1856 – 20/07/1922). `https://en.wikipedia.org/wiki/Markov_chain`.

*Demonstração.* Queremos mostrar que $\iota \circ \sigma|_A = \sigma \circ \iota$. Seja $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_A$. Então

$$\begin{aligned}\iota \circ \sigma|_A((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}) &= \iota(\sigma|_A((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}))\\ &= \iota((x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}})\\ &= (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}\\ &= \sigma((x_i)_{i\in\mathbb{Z}})\\ &= \sigma(\iota((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}))\\ &= \sigma \circ \iota((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}).\end{aligned}$$

■

O mesmo vale para os sistemas unilaterais. A partir da matriz da matriz de adjacência podemos determinar quantos pontos periódicos de um determinado período existem.

**Proposição 4.6.** *Sejam $p \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$ e $(\Sigma_A, \sigma|_A)$ um sistema de subdeslocamento com matriz de adjacência $A$. A quantidade de pontos $p$-periódicos de $(\Sigma_A, \sigma|_A)$ é $\operatorname{tr}(A^p)$.*

*Demonstração.* Sabemos que $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ é $p$-periódico se, e somente se, para todo $i \in \mathbb{Z}$ vale $x_i = x_{i+p}$. Sendo assim, procuramos os pontos da forma

$$(\dots, x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{p-2}}, x_{p-1}, \dots)$$

e portanto devemos achar as sequências finitas $(i_0, \dots, i_{p-1}) \in N^p$ tais que a sequência de entradas

$$i_0 \to i_1 \to \cdots i_{p-2} \cdots i_{p-1}$$

é uma sequência permitida pela matriz de adjacência, ou seja, para todo $k \in [p-1]$, $a_{i_k,i_{k+1}} = 1$. Isso é equivalente a termos

$$\bigtimes_{k=0}^{p-2} a_{i_k,i_{k+1}} = a_{i_0,i_1} a_{i_1,i_2} \cdots a_{i_{p-3},i_{p-2}} a_{i_{p-2},i_{p-1}} = 1,$$

pois esse produto é 1 se, e somente se todos os fatores são 1. Assim, a quantidade de pontos periódicos é a soma de todos esses produtos

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{P}_p(\sigma_A)| &= \sum_{(i_0,\dots,i_{p-1})\in N^p} \bigtimes_{k=0}^{p-2} a_{i_k,i_{k+1}} \\
&= \sum_{i_0=0}^{N-1} \sum_{(i_1,\dots,i_{p-1})\in N^{p-1}} \bigtimes_{k=0}^{p-2} a_{i_k,i_{k+1}} \\
&= \sum_{i_0=0}^{N-1} (A^p)_{i_0,i_0} = \mathrm{tr}(A^p).
\end{aligned}
$$

■

## 4.4 Topologia dos Deslocamentos

Queremos definir uma topologia para os espaços de sequências $\Sigma^+ = N^{\mathbb{Z}^+}$ e $\Sigma = N^{\mathbb{Z}}$ de modo que os deslocamentos $\sigma$ neles definidos sejam contínuos. Para isso, vamos induzir o espaço produto $\Sigma$ com a topologia discreta de $N$, pois essa é uma abordagem bem natural. A princípio, não sabemos se isso garantirá que o deslocamento $\sigma$ é contínuo, mas veremos que ele de fato será. Construiremos a seguir a topologia de $\Sigma$, mas o caso de $\Sigma^+$ é análogo.

A topologia discreta em $N$ é a topologia em que todo subconjunto de $N$ é aberto. Uma base para essa topologia é o conjunto dos conjuntos da forma $\{k\}$, com $k \in N = \{0, \dots, N-1\}$. Essa topologia é o conjunto $\wp(N)$. A topologia induzida em $\Sigma$ é a topologia produto (também descrita como topologia inicial com respeito às projeções). Essa é a topologia puxada pelas projeções na $t$-ésima entrada $\pi_t \colon \Sigma \longrightarrow N$ , ou seja,

$$\left\langle \bigcup_{t\in\mathbb{Z}} {\pi_t}^{\star}(\wp(N)) \right\rangle .$$

Uma sub-base da topologia produto de $\Sigma$ são os conjuntos

$$C_t[k] := {\pi_t}^{-1}(\{k\}) = \{x \in \Sigma \mid x_t = k\}$$

para cada $t \in \mathbb{Z}$ e $k \in N$ (chamados às vezes de *cilindros abertos*). Uma base para essa topologia são interseções finitas de conjuntos da sub-base, ou seja, conjuntos da forma

$$C_{t_0,\dots,t_n}[k_0, \dots, k_n] := \bigcap_{i=0}^{n} C_{t_i}[k_i] = \{x \in \Sigma \mid x_{t_0} = k_0, \dots, x_{t_n} = k_n\}$$

para cada $t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}$ e $k_0, \ldots, k_n \in N$, chamados de *cilindros*.

**Definição 4.5.** Vamos nos referir aos cilindros $C_{t_0,\ldots,t_n}[k_0, \ldots, k_n]$ da base como *cilindros básicos*, ou *cilindros*, e aos cilindros $C_t[k]$ da sub-base como *cilindros geradores*.

Estando assim definida a topologia de $\Sigma$, vamos agora mostrar que $\sigma$ é contínua.

**Proposição 4.7.** *Os sistemas* $(\Sigma^+, \sigma)$ *e* $(\Sigma, \sigma)$ *são sistemas dinâmicos topológicos.*

*Demonstração.* Seja $C_t[k]$ um cilindro gerador. Então

$$\sigma^{-1}(C_t[k]) = \sigma^{-1}({\pi_t}^{-1}(\{k\})) = (\pi_t \circ \sigma)^{-1}(\{k\}) = {\pi_{t-1}}^{-1}(\{k\}) = C_{t-1}[k],$$

que é aberto pois é um cilindro gerador. Isso mostra que $\sigma$ é contínua. ∎

Essa demonstração deixa claro, em particular, que

$$\sigma^{-\alpha}(C_{t_0,\ldots,t_n}[k_0, \ldots, k_n]) = C_{t_0-\alpha,\ldots,t_n-\alpha}[k_0, \ldots, k_n].$$

## 4.5 Distância no Espaços de Símbolos

Uma distância pode ser definida em $\Sigma^+$ e $\Sigma$ de modo a gerar a mesma topologia definida na seção anterior. Com essa distância, esses espaços são compactos.

**Definição 4.6.** A *distância* em $\Sigma$ é a função

$$\begin{aligned} d\colon \Sigma \times \Sigma &\longrightarrow [0, \infty[ \\ (x, x') &\longmapsto \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|x_i - x'_i|}{2^{|i|}}. \end{aligned}$$

## 4.6 Medida dos Deslocamentos

Definimos nos conjuntos $\Sigma^+ = N^{\mathbb{Z}^+}$ e $\Sigma = N^{\mathbb{Z}}$ uma topologia, a topologia produto, de modo que os sistemas $(\Sigma^+, \sigma)$ e $(\Sigma, \sigma)$ se tornaram sistemas dinâmicos topológicos. Temos agora dois modos de definir uma $\sigma$-álgebra nesses conjuntos. A primeira é definirmos uma $\sigma$-álgebra de conjuntos mensuráveis em $\Sigma^+$ ou $\Sigma$ da mesma forma que definimos sua topologia, usando a $\sigma$-álgebra discreta em $N$, que é gerada pelos conjuntos da forma $\{k\}$ com $k \in N$, e tomando a $\sigma$-álgebra produto. A segunda maneira é consideramos a $\sigma$-álgebra gerada pela topologia de $\Sigma^+$ ou $\Sigma$, a $\sigma$-álgebra topológica ou $\sigma$-álgebra de

Borel. Esse dois métodos, a princípio, não são equivalentes, pois ser gerado pelos cilindros geradores é ser uma união qualquer de interseções finitas de cilindros geradores, enquanto que conjuntos mesuráveis gerados pelos cilindros geradores não são uniões quaisquer e sua forma é mais delicada de se descrever. Não discutiremos por ora mais detalhes sobre essa $\sigma$-álgebras, mas o que podemos dizer é que a $\sigma$-álgebra produto está contida na $\sigma$-álgebra topológica. Adotaremos, no momento, a primeira construção, pois estudaremos somente a estrutura mensurável desses sistemas a princípio. Como anteriormente, a seguir consideraremos o conjunto $\Sigma$, mas a construção é análoga para $\Sigma^+$.

Para definirmos uma probabilidade no conjunto $\Sigma$ com a $\sigma$-álgebra produto, consideramos antes um vetor de probabilidade $p = (p_0, \cdots, p_{N-1}) \in \Delta^{N-1}$ (ou seja, $p_i \in [0,1]$ e $\sum_{i \in N} p_i = 1$), e definimos a medida $m_p$ na $\sigma$-álgebra de $N$ como $m(\{k\}) := p_k$ para todo $k \in N$. Essa medida é uma probabilidade em $N$. A partir dessa probabilidade, definimos uma probabilidade em $\Sigma$ como a medida produto, que é dada da seguinte forma. Para cada cilindro $C_{t_0,\ldots,t_n}[k_0, \ldots, k_n]$, definimos

$$m(C_{t_0,\ldots,t_n}[k_0, \ldots, k_n]) := m_p(\{k_0\}) \cdots m_p(\{k_n\}) = p_{k_0} \cdots p_{k_n} = \bigtimes_{i=0}^{n} p_i.$$

A partir dessa definição, a medida produto está definida para todo conjunto mensurável do jeito canônico.

**Proposição 4.8.** *Os sistemas* $(\Sigma^+, \sigma)$ *e* $(\Sigma, \sigma)$ *são sistemas dinâmicos de medida.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que a função $\sigma$ preserva medida. Primeiro, notemos que ela é mensurável. Seja $C_t[k]$ um cilindro gerador. Então

$$\sigma^{-1}(C_t[k]) = \sigma^{-1}({\pi_t}^{-1}(\{k\})) = (\pi_t \circ \sigma)^{-1}(\{k\}) = {\pi_{t-1}}^{-1}(\{k\}) = C_{t-1}[k],$$

que é mensurável pois $C_{t-1}[k]$ é um cilindro gerador. Isso mostra que $\sigma$ é mensurável. Agora, notemos que $m$ preserva medida. Seja $C_{t_0,\ldots,t_n}[k_0, \ldots, k_n]$ um cilindro. Então

$$m(\sigma^{-1}(C_{t_0,\ldots,t_n}[k_0, \ldots, k_n])) = m(C_{t_0-1,\ldots,t_n-1}[k_0, \ldots, k_n]) = \bigtimes_{i=0}^{n} p_i,$$

portanto $m$ preserva medida. ∎

## 4.7 Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius

Nesta subseção, enunciamos um importante teorema, o Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius, e reproduzimos o enunciado e demonstração de um lema de [BM77].

Seja $A$ uma matriz de adjacência de ordem $N$. A partir de agora, denotaremos $\Sigma_A$ e $\Sigma_A^+$ simplesmente como $\Sigma$ e $\Sigma^+$, respectivamente. Quando escrevemos $A^m > 0$, queremos dizer que todas entradas de $A^m$ são estritamente positivas.

O conjunto $\mathcal{F}_A$ denotará a família de funções contínuas $\varphi\colon \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ para as quais existem $c \in ]0, \infty[$ e $\alpha \in ]0, 1[$ tais que, para todos $x, y \in \Sigma$ tais que $x_i = y_i$ para todos $i \in [-n, n]$,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c\alpha^n.$$

Note que essas funções são, de certa maneira, funções Hölder: entendendo $2^n$ como uma distância $d(x, y)$ no espaço de símbolos, temos

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c\alpha^n = c\; d(x, y)^{\log_2 \alpha}.$$

O conjunto $\mathcal{F}_A^+ \subseteq \mathcal{F}_A$ é entendido como definido para $\Sigma^+$ com $\varrho(x) = \varrho(x^+)$.

**Teorema 4.9** (Ruelle-Perron-Frobenius)**.** *Seja $A$ uma matriz de adjacência de ordem $N$ tal que, para algum $m \in \mathbb{N}$, $A^m > 0$. Para todo $\varphi \in \mathcal{F}_A^+$. Defina*

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\colon \mathscr{C}(\Sigma^+) &\longrightarrow \mathscr{C}(\Sigma^+) \\ g &\longmapsto \mathscr{L}g\colon \Sigma^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad x^+ \longmapsto \sum_{y^+ \in \sigma^{-1}\{x^+\}} e^{\varphi(y^+)} g(y^+). \end{aligned}$$

*Existem $\lambda \in ]0, \infty[$, função positiva $h \in \mathscr{C}(\Sigma^+)^+$ e medida de probabilidade $\nu$ sobre $\Sigma^+$ não nula em abertos tais que*

$$\mathscr{L}h = \lambda h, \qquad \mathscr{L}^*\nu = \lambda\nu, \qquad \nu(h) = 1$$

*e, para toda $g \in \mathscr{C}(\Sigma^+)$,*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left\| \frac{\mathscr{L}g}{\lambda^n} - \nu(g)h \right\| = 0.$$

A medida $\mu = h\nu$ é uma medida de probabilidade sobre $\Sigma^+$ e é $\sigma$-invariante, porque $\mu$ define uma probabilidade $\sigma$-invariante $\tilde{\mu}$ sobre $\Sigma$. Em [Bow74], mostra-se que $\tilde{\mu}$ é misturadora (e Bernoulli).

**Lema 4.10.** *Sejam $M \subseteq \Sigma^+$ mensurável tal que $\sigma^n|_M$ é injetiva, e $g \in \mathscr{C}(\Sigma^+)$. Então*

$$\lambda^n \int_M g \mathrm{d}\nu = \int_{\sigma^n(M)} e^{S_n\varphi(\sigma^{-n}(x^+))} g(\sigma^{-n}(x^+)) \mathrm{d}\nu,$$

*em que $S_n\varphi(z^+) := \sum_{k\in[n]} \varphi(\sigma^k(z^+))$ e $\sigma^{-n}$ é a inversa de $\sigma^n\colon M \longrightarrow \sigma^n(M)$.*

*Demonstração.* Por indução, segue que

$$\mathscr{L}^n g(x^+) = \sum_{y^+\in\sigma^{-n}\{x^+\}} e^{S_n\varphi(y^+)} g(y^+).$$

Então

$$\mathscr{L}^n(g\mathbf{1}_M)(x^+) = \begin{cases} 0, & x^+ \notin \sigma^n(M) \\ e^{S_n\varphi(y^+)} g(y^+), & x^+ = \sigma^n(y^+),\ y^+ \in M. \end{cases}$$

Segue do teorema 4.9 que

$$\begin{aligned} \lambda^n \int_M g \mathrm{d}\nu &= \lambda^n \nu(g\mathbf{1}_M) \\ &= \mathscr{L}^{*n}\nu(g\mathbf{1}_M) \\ &= \nu(\mathscr{L}^n(g\mathbf{1}_M)) \\ &= \int_{\sigma^n(M)} e^{S_n\varphi(\sigma^{-n}(x^+))} g(\sigma^{-n}(x^+)) \mathrm{d}\nu. \end{aligned}$$

■

O caso em que $\varphi = 0$ é de maior interesse neste trabalho. Seja $V$ o subespaço $N$-dimensional de funções $g \in \mathscr{C}(\Sigma^+)$ tais que $g(x^+) = g(y^+)$ para $x_0 = y_0$. Então $\mathscr{L}(V) \subseteq V$ e então $h \in V$. Esse é um caso clássico do teorema de Perron-Frobenius (que segue de assumir que $\varphi(x^+)$ depende somente de $x_0$ e $x_1$). Defina $p_a := h(x^+)$ para $x_0 = a$ e $q_a := \nu(\{x^+ \in \Sigma^+ \mid x_0 = a\})$. Para toda sequência admissível $a_0 \cdots a_n$ e $M = \left\{x^+ \in \Sigma^+ \,\middle|\, \forall_{i\in[0,n]} x_i = a_i\right\}$, segue do lema que ($\varphi = 0$, $g = 1$)

$$\lambda^n \nu(M) = \nu(\sigma^n(M)) = q_{a_n},$$

logo

$$\mu(M) = \int_M h \mathrm{d}\nu = \frac{p_{a_0} q_{a_n}}{\lambda^n}. \tag{1}$$

# 5 Dinâmica Hiperbólica

## 5.1 Estrutura Hiperbólica

**Definição 5.1.** Um *sistema dinâmico diferencial* é uma dupla $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ em que $\boldsymbol{X}$ é uma variedade diferencial, $(X, f)$ é um sistema dinâmico e $f$ é uma ação diferencial em $\boldsymbol{X}$.

**Definição 5.2.** Seja $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ um sistema dinâmico diferencial discreto e revertível em que $\boldsymbol{X}$ é uma variedade diferencial compacta, conexa e métrica[8]. Um conjunto *(uniformemente) hiperbólico* de $\mathcal{S}$ é um conjunto invariante $H \subseteq X$ para o qual existem constantes reais $c \in \,]0, +\infty[$, $\lambda \in \,]0, 1[$ e uma decomposição de $\mathrm{T}X|_H$ em subfibrados vetoriais $E^+$ e $E^-$, isto é,

$$\mathrm{T}X|_H = E^+ + E^-,$$

invariantes por $\mathrm{D}f$, isto é, para todo $p \in X$,

$$\mathrm{D}f|_p(E^{+,-}|_p) = E^{+,-}|_{f(p)},$$

tais que, para todo $p \in H$, todo $t \in \mathbb{Z}^+$ e todos $v^+ \in E^+|_p$, $v^- \in E^-|_p$,

$$\left\|\mathrm{D}f^t|_p v^+\right\| \leq c\lambda^t \left\|v^+\right\| \qquad \text{e} \qquad \left\|\mathrm{D}f^{-t}|_p v^-\right\| \leq c\lambda^t \left\|v^-\right\|.$$

[9]

Os fibrados vetoriais $E^+$ e $E^-$ são os fibrados tangentes *estável* e *instável*[10] de $\boldsymbol{X}$, respectivamente, e, para todo $p \in H$, os espaços $E^+|_p$ e $E^-|_p$ são os espaços *estável* e *instável* tangentes a $p$, respectivamente.

Pode-se escolher uma métrica em que $c = 1$.

## 5.2 Axioma A e Anosov

**Definição 5.3.** Um sistema dinâmico *Axioma A* é um sistema dinâmico diferencial discreto e revertível $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ tal que

[8] Tem métrica riemanniana.

[9] A notação $\mathrm{D}f^t$ não é ambígua, pois $\mathrm{D}(f^t) = (\mathrm{D}f)^t$.

[10] Os superíndices podem novamente gerar confusão. A mesma definição para os conjuntos estável e instável é usada.

1. $\overline{\mathrm{P}(f)} = \Omega(f)$; isto é, o conjunto dos pontos periódicos de $f$ é denso no conjunto dos pontos não-errantes;

2. $\Omega(f)$ é um conjunto hiperbólico.

**Teorema 5.1** (Decomposição Espectral de Smale)**.** *Seja $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ um sistema dinâmico Axioma A. O conjunto não-errante $\Omega$ pode ser particionado em uma quantidade finita $n$ de conjuntos compactos $(\Omega_i)_{i\in N}$ topologicamente transitivos:*

$$\Omega = \bigcup_{i\in[n]} \Omega_i.$$

*Para cada $i \in [n]$, $\Omega_i$ pode ser particionado em $m_i$ conjuntos compactos $(\Omega_{i,j})_{j\in[m_i]}$ tais que $f(\Omega_{i,j}) = \Omega_{i,j+1}$ (com $j+1$ interpretado $\mod m_i$) e $\Omega_{i,j}$ topologicamente misturador com respeito a $f^{m_i}$.*

Os conjuntos $\Omega_i$ são chamados de *peças básicas*.

**Definição 5.4.** Um sistema dinâmico *de Anosov* é um sistema dinâmico diferencial discreto e revertível $\mathcal{S} = (\boldsymbol{X}, f)$ em que $X$ é hiperbólico.

## 5.3 Partição de Markov

Essa subseção é baseada no artigo [BM77]. Descrevemos o que é e em que caso se aplica uma partição de Markov. Essas partições são importantes para se construir uma semiconjugação entre peças básicas de difeomorfismos axioma A e sub-deslocamentos, o que nos permitirá resolver os problemas complexos que emergem para difeomorfismos desse tipo passando-os para o espaço de símbolos.

Para uma peça básica $\Omega_k$ de um difeomorfismo axioma A, podemos achar uma cobertura finita de $\Omega_k$ por conjuntos fechados que se intersecionam somente em suas fronteiras. Essa cobertura é uma *partição de Markov*. Como a cobertura é finita, seja $N \in \mathbb{N}$ sua cardinalidade. Então escolhemos uma bijeção desse conjunto com $N$ e a partir de agora o tratamos como $[N] = \{0, \ldots, N-1\}$. Podem-se definir uma matriz de transição $A\colon [N]\times[N] \longrightarrow \{0,1\}$ e uma sobrejeção contínua $\pi\colon \Sigma \longrightarrow \Omega_k$ tal que $\pi$ é uma conjugação e $\{\pi(x)\} = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(x_i)$. Garantindo que $f|_{\Omega_k}$ seja topologicamente misturadora (para abertos não vazios $U, V \subseteq \Omega_k$, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todos $n$ suficientemente grandes), tem-se que $A^m > 0$ para algum $m > 0$. Essa é uma condição necessária no teorema de Ruelle-Perron-Frobenius (4.9).

## 5.4 Variedade Estável e Instável

Lembremos que, dados $\boldsymbol{\mathcal{S}} = (\boldsymbol{X}, f)$ um sistema dinâmico metrizável e $p \in X$, o conjunto estável de $p$ é o conjunto

$$W_f^+(p) := \left\{ q \in X \;\middle|\; d\left(f^t(p), f^t(q)\right) \to 0, t \longrightarrow \infty \right\}.$$

e, se o sistema é revertível, o *conjunto instável* de $p$ é o conjunto $W_f^-(p) := W_{f^{-1}}^+(p)$.

No caso em que $\boldsymbol{X}$ é uma variedade riemanniana e a dinâmica é discreta, esses conjuntos são subvariedades de $X$ para $p \in \Omega$ [HCP69] cuja dimensão é constante em cada peça básica [HPPS70]. Para dinâmica contínua isso também é verdade [PS70].

# 6 Teorema Principal

## 6.1 Folheações

O conjunto $\mathbb{B}^n$ é a $n$-bola fechada:

$$\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}.$$

**Definição 6.1.** Sejam $X$ uma variedade topológica $d$-dimensional, $x \in X$ e $\mathcal{F}$ uma partição de $X$ em subvariedades conexas de $X$. Um conjunto *$k$-transversal* a $\mathcal{F}$ em $x$ é uma vizinhança compacta $K$ de $x$ (de $\dim^{\complement}{}_X(K) = n = d - k$) satisfazendo que

1. Existe uma função contínua injetiva $\phi\colon K \times \mathbb{B}^n \longrightarrow X$ tal que $\phi(K \times \mathbb{B}^n)$ é uma vizinhança[11] de $x$;
2. Para todo $y \in K$, existe folha $F \in \mathcal{F}$ tal que $\phi(y, 0) = y$ e $\phi(\{y\} \times \mathbb{B}^n) \subseteq F$.

Denota-se $K \pitchfork \mathcal{F}$.

**Definição 6.2.** Seja $X$ uma variedade $d$-dimensional. Uma *folheação* $k$-dimensional de $X$ é uma partição $\mathcal{F}$ de $X$ em subvariedades conexas de $X$ tal que, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança compacta $K$ de $x$ $(d-k)$-transversal a $\mathcal{F}$ em $x$. As *folhas* de $\mathcal{F}$ são as partes de $\mathcal{F}$ e, para cada $x \in X$, denotamos a folha a que $x$ pertence como $\mathcal{F}_x$.

A proposição a seguir apresenta as folheações com que trabalharemos, as folheações estável e instável de um conjunto hiperbólico. Reproduzimos aqui a demonstração de [BM77]; ela se baseia em resultados anteriores de [HCP69], [HPPS70], [Bow71], [Bow75] e [Nit71].

**Proposição 6.1.** *Sejam $(\boldsymbol{M}, f)$ um sistema dinâmico axioma A e consideremos o espaço $X := W^+(\Omega_k) = \bigcup_{p \in \Omega_k} W^+(p)$ com a topologia induzida. Os conjuntos $\{W^+(x)\}_{x \in X}$ e $\{W^-(x)\}_{x \in X}$ são folheações de $X$, as folheações* estável *e* instável.

*Demonstração.* Vamos demonstrar para $W^+$, pois o caso para $W^-$ segue de $W^-_f = W^+_{f^{-1}}$. Ainda, basta achar transversais para pontos de $\Omega_k$, pois elas são transversais em vizinhanças desses pontos e, como a dinâmica leva os pontos de $X$ para $\Omega_k$, as transversais podem ser puxadas para os outros pontos de $X$ através da dinâmica.

[11] Aqui aparece a dimensão $n = d - k$ das subvariedades.

Seja $x \in \Omega_k$ e $\varepsilon \in \,]0, \infty[$ tal que a teoria de variedade estável [HCP69] valha. Mostraremos que $K := B_\varepsilon^-(x) \cap \Omega_k$ é uma transversal em $x$. Da teoria de variedade estável existe função contínua injetiva $\varphi\colon K \times \mathbb{B}^n \longrightarrow X$ $(n = \dim W^+(x))$ tal que $\varphi(\{y\} \times \mathbb{B}^n) = B_\varepsilon^+(y)$ e $\varphi(y, 0) = y$. Precisamos saber que a imagem de $\varphi$ é uma vizinhança de $x$ em $X$, e para isso basta mostrar, para algum $\varepsilon \in \,]0, \infty[$ e alguma vizinhança $U$ de $\Omega_k$ em $M$, que

$$W^+(\Omega_k) \cap U \subseteq B_\varepsilon^+(\Omega_k)$$

$(B_\varepsilon^+(\Omega_k) := \bigcup_{y \in \Omega_k} B_{\varepsilon/2}^+(y))$, pois disso segue que da estrutura de produto local [HPPS70] que, para algum $\delta \in \,]0, \infty[$,

$$\{y \in M \mid d\,(y, x) < \delta\} \cap B_{\varepsilon/2}^+(\Omega_k) \subseteq B_\varepsilon^+(K).$$

Para demonstrar 6.1, primeiro note que em [HPPS70] mostrou-se a existência de um compacto $D \subseteq W^-(\Omega_k) \setminus \Omega_k$ tal que, para toda vizinhança $N$ de $D$, o conjunto $B^+(\Omega_k) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(N)$ é vizinhança de $\Omega_k$ em $M$. Se $D = \emptyset$, então 6.1 vale. Se $D \neq \emptyset$ e 6.1 não vale, então $W^+(\Omega_k) \cap N \neq \emptyset$ para qualquer vizinhança $N$ de $D$. Então existe $x \in \overline{W^+(\Omega_k)} \cap D$ e, por definição de $D$, $x \in \overline{W^+(\Omega_k)} \cap W^-(\Omega_k) \setminus \Omega_k$. Mas isso contradiz

$$\overline{W^+(\Omega_k)} \cap W^-(\Omega_k) = \Omega_k,$$

que pode ser provado como segue: pelo teorema de decomposição basta provar que $\overline{W^+(\Omega_k)} \cap W^-(\Omega_k) \subseteq \Omega$. Se $V$ é uma vizinhança de um ponto de $\overline{W^+(\Omega_k)} \cap W^-(\Omega_k)$, então do teorema de especificação de Bowen [Bow71], [Bow75] podemos assumir que existem pontos periódicos $p, q \in \Omega_k$ na mesma órbita tais que

$$W^+(p) \cap V \neq \emptyset \qquad \text{e} \qquad W^-(q) \cap V \neq \emptyset.$$

Um argumento do lema da nuvem [Nit71] termina a demonstração. ■

No caso de um sistema dinâmico contínuo, as variedades estável e instável também são folheações, mas as transversais são as $\varepsilon$-bolas estável e instável fracas, $B_\varepsilon^{++}(p)$ e $B_\varepsilon^{--}(p)$. As folheações estável e instável fracas, por sua vez, também são folheações, cujas transversais são $B_\varepsilon^-(x) \cap \Omega_k$ e $B_\varepsilon^+(x) \cap \Omega_k$, respectivamente, mas elas não admitem medida invariante [BM77] como definiremos a seguir.

## 6.2 Medida Invariante

**Definição 6.3.** Sejam $X$ uma variedade $d$-dimensional e $\mathcal{F}$ uma folheação $k$-dimensional de $X$. Uma *medida $\mathcal{F}$-invariante* é uma família $\{m_K\}_{\{K \pitchfork \mathcal{F} \text{ compacto}\}}$ tal que

1. Para todo compacto $K$ transversal a $\mathcal{F}$, $m_K$ é uma medida (positiva) finita sobre a $\sigma$-álgebra topológica[12] de $K$;

2. Para todos compactos $K, K'$ transversais a $\mathcal{F}$ e todos $A \subseteq K$, $A' \subseteq K'$ abertos em $K$ e $K'$, respectivamente, e todo isomorfismo mensurável $h\colon A \longrightarrow A'$ que preserva folhas[13] (para todo $x \in A$ cuja folha é $F$, $h(x) \in F$),
$$m_K(A) = m_{K'}(A');$$

3. Existe compacto $K$ transversal a $\mathcal{F}$ tal que
$$m_K(K) > 0.$$

Duas medidas $\mathcal{F}$-invariantes $\{m_K\}_{\{K \pitchfork \mathcal{F}\}}$ e $\{m'_K\}_{\{K \pitchfork \mathcal{F}\}}$ são equivalentes se existe $c \in ]0, \infty[$ tal que, para todo compacto $K$ transversal a $\mathcal{F}$,
$$m'_K = c m_K$$

Isso basicamente quer dizer que uma medida invariante pela folheação é uma família não trivial (condição 3) de medidas definidas nos compactos transversais à folheação que são finitas (condição 1) e que são invariantes por isomorfismos que preservam folhas (condição 2).

**Definição 6.4.** Uma folheação *unicamente ergódica* é uma folheação que admite somente uma (classe de equivalência de) medida invariante por folheação.

Essas definições são difíceis de trabalhar e parece inviável construir medidas invariantes

[12] De Borel.

[13] Os conjuntos $A$ e $A'$ são chamados $\mathcal{F}$-conjugados.

assim. Alguns lemas de [BM77] ajudam nessa tarefa, reduzindo a casos mais simples as definições e condições. Reproduzimo-os abaixo.

Para uma transversal $K$, seja $K^* := \{x \in K \mid x \in \varphi(K \times \mathbb{B}^n)^\circ\}$. Então $K^*$ não depende de uma $\varphi$ particular e, por definição, $K \neq \emptyset$.

**Lema 6.2.** *Seja $\mathcal{A}$ uma subfamília de compactos transversais à folheação $\mathcal{F}$ com $X = \bigcup\{\mathcal{F}_x \mid x \in \bigcup_{K\in\mathcal{A}} K^*\}$. Então*

$$\{m_K\}_{K \pitchfork \mathcal{F}} \longmapsto \{m_K\}_{K\in\mathcal{A}}$$

*é uma bijeção entre medidas $\mathcal{F}$-invariantes e famílias de medidas em $\{K \in \mathcal{A}\}$ satisfazendo as condições de medida invariante nesses conjuntos.*

*Demonstração.* Como a injetividade é direta, pois basta restringir a medida invariante, devemos mostrar a sobrejetividade. Seja $\{m_K\}_{K\in\mathcal{A}}$ uma dessas famílias de medidas. Queremos definir $m_K$ para um compacto $K \pitchfork \mathcal{F}$ qualquer. Seja $x \in K$. Então $x \in \mathcal{F}_{x'}$ para algum $x' \in \tilde{K}^*$ com $\tilde{K} \in \mathcal{A}$. Seja $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathcal{F}_x$ um caminho contínuo com $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = x'$. Para cada $t \in [0,1]$ pode-se achar compacto $K_t \pitchfork \mathcal{F}$ tal que $\gamma(t) \in K_t$ e homeomorfismo $\varphi_t\colon K_t \times \mathbb{B}^n \longrightarrow X$ com $\gamma(t) \in K_t^*$. assumimos que $K_0$ contém uma vizinhança de $x$ em $K$ e que $K_1 = \tilde{K}$. Pela compacidade de $[0,1]$ podem-se achar $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ e $\{s_i, u_i\}$ satisfazendo

$$t_i < s_{i+1} < u_i < t_{i+1}$$

tais que $\gamma\,[s_i, u_i] \subseteq \varphi_t(\{\gamma(t_i)\} \times \mathbb{B}^n)^\circ$ (interior relativo a $\mathcal{F}_x$). Existem vizinhanças $U_i$ e $V_i$ de $\gamma(t_i)$ e $\gamma(t_{i+1})$, respectivamente, e homeomorfismo $F_i\colon U_i \longrightarrow V_i$ tal que $F_i(z) \in \mathcal{F}_z$. Por indução, temos vizinhanças $U$ de $x$ em $K_0$ e $V$ de $x'$ em $\tilde{K}$ e homeomorfismo $F\colon U \longrightarrow V$ com $F(z) \in \mathcal{F}_z$, e então homeomorfismo $F_x\colon U_x \longrightarrow V_x$ com $F(z) \in \mathcal{F}_z$, em que $U_x$ é vizinhança de $x$ em $K$ e $V_x$ mensurável em $\tilde{K}$. Por compacidade, sejam $U_{x_1}, \ldots, U_{x_m}$ cobertura de $K$ e escolha mensuráveis $L_j \subseteq U_{x_j}$ com $K = L_1 \cup \cdots \cup L_m$. Defina (em que $K_j$ é $K^*$ para $x_j$)

$$m_K := \sum_j {F_{x_j}}^{-1}(m_{K_j}|_{F_{x_j}(L_j)}).$$

É direto conferir que $\{m_K\}$ é uma medida $\mathcal{F}$-invariante. A $\mathcal{F}$-invariância garante a definição acima de $m_K$ e portanto temos uma bijeção. ∎

**Lema 6.3.** *Sejam $K_1$ e $K_2$ compactos transversais a $\mathcal{F}$ e $m_1, m_2$ medidas finitas (borelianas) sobre $K_1, K_2$, respectivamente. Suponha que existe conjunto $N_1 \subseteq K_1$ tal que*

1. $m_1(N_1) = 0$;
2. $m_2(\bigcup_{x \in N_1} \mathcal{F}_x \cap K_2) = 0$;
3. $x \in K_1 \setminus N_1$ *implica* $\mathcal{F}_x \cap K_2 = \{F_n(x) \mid B_n \ni x\}$;

*em que $\{F_n \colon B_n \longrightarrow C_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ uma família contável de isomorfismo de medida, $B_n \subseteq K_1$, $C_m \subseteq K_2$. Então qualquer isomorfismo mensurável $T$ entre um subconjunto de $K_1$ e um de $K_2$ que preserva folhas ($T(z) \in \mathcal{F}_z$) preserva medida.*

*Demonstração.* Seja $T \colon A \longrightarrow A'$ tal isomorfismo. Definamos

$$A(n) := \{x \in A \cap B_n \mid T(x) = F_n(x)\}$$

$$A^*(n) := A(m) \setminus \bigcup_{k<m} A(k).$$

O conjunto $A(n)$ (e portanto $A^*(n)$) é mensurável já que a $\sigma$-álgebra de Borel de $K_1$ tem base contável $\{D_j\}$ e

$$A(n) = \bigcap_j (T^{-1}(D_j) \cap {F_n}^{-1}(D_j)) \cap (T^{-1}({D_j}^{\complement}) \cap {F_n}^{-1}({D_j}^{\complement})).$$

Então, finalmente,

$$\begin{aligned} m_1(A) &= \sum_n m_1(A^*(n) \cap (K_1 \setminus N_1)) \\ &= \sum_n m_2(F_n(A^*(n) \cap (K_1 \setminus N_1))) \\ &= \sum_n m_2(T(A^*(n) \cap (K_1 \setminus N_1))) \\ &= m_2(T(A \cap (K_1 \setminus N_1))) \\ &= m_2(A'), \end{aligned}$$

em que a última igualdade vale porque $m_2(T(A \cap N_1)) = 0$. ∎

## 6.3 O Caso dos Difeomorfismos

**Teorema 6.4.** *Seja $\Omega_k$ uma peça básica topologicamente misturadora de um difeomorfismo Axioma A. As folheações estável e instável de $\Omega_k$ são unicamente ergódicas.*

Antes de demonstrar o teorema, vamos restringi-lo um pouco, ressaltar alguns fatos e provar alguns lemas. Primeiro, notemos que, como $f$ é um difeomorfismo, podemos restringir nossa atenção para a folheação estável $W^+$, pois $W_f^- = W_{f^{-1}}^+$.

Para todo $x \in \Sigma$, definimos os conjuntos

$$\Sigma_{x^-} := \left\{ y \in \Sigma \,\middle|\, y^- = x^- \right\},$$

$$\Sigma_{x^+} := \left\{ y \in \Sigma \,\middle|\, y^+ = x^+ \right\}$$

e

$$\Sigma_{x_0}^+ = \left\{ y^+ \in \Sigma^+ \,\middle|\, y_0 = x_0 \right\}.$$

Existe uma bijeção

$$\begin{aligned} f\colon \Sigma_{x^-} &\longrightarrow \Sigma_{x_0}^+ \\ y = x^-.y^+ &\longmapsto y^+. \end{aligned}$$

Assim, temos uma sobrejeção

$$\begin{aligned} \pi'_x\colon \Sigma_{x_0}^+ &\longrightarrow \Omega_k \\ y^+ &\longmapsto \pi(x^-.y^+), \end{aligned}$$

em que $\pi\colon \Sigma \longrightarrow \Omega_k$ é a projeção da partição de Markov tal que $\pi \circ \sigma = f \circ \pi$ e $\{\pi(x)\} = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(x_i)$. Disso segue que a imagem de $\pi'_x$ é $W^-(\pi x, x_0) := B_\varepsilon^-(\pi x) \cap (x_0)$, em que $(x_0)$ indica a partição de Markov de $x_0$. Esse conjunto é uma vizinhança compacta em $B_\varepsilon^-(\pi x) \cap \Omega_k$, portanto uma transversal da folheação $W^+$.

Agora, pelo teorema de Ruelle-Perron-Frobenius, obtemos uma medida $\nu$, ao tomarmos $\phi = 0$. Ruelle and Sullivan [RS75] construíram uma medida $W^+$-invariante no sentido aqui definido, e sua medida, quando restrita a uma transversal apropriada, é $\pi'_x(\nu)$. Assumamos, portanto, que $\mu^+\{u_K\}$ é uma medida $W^+$-invariante e mostremos que ela é essa medida de Ruelle-Sullivan.

Ainda, notemos que se, para todo $j \geq n$, $y_j = z_j$, então $y$ e $z$ são positivamente assintóticos sob $\sigma$, logo $\pi(y) \in W^+(\pi(z))$. Agora, mostraremos em lema que restringe a forma que uma medida pode ter em $\Sigma_a^+$.

**Lema 6.5.** *Existe uma única medida $m_a$ em $\Sigma_a^+$ para a qual o seguinte é verdade: se $M \subseteq \Sigma_a^+$, $x \in \Sigma$ com $x_0 = a$ e $\pi'_x|_M$ é injetiva, então*

$$m_a(M) = \mu^+(\pi'_x M).$$

*Demonstração.* A projeção $\pi \colon \Sigma \longrightarrow \Omega_k$ leva finitos valores para um, isto é, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que, para todo $x \in \Omega_k$, $|\pi^{-1}(x)| \leq n$. Portanto, para um símbolo $a \in [N] = \{0, \ldots, N-1\}$, o mapa $\pi'_x \colon \Sigma_a^+ \longrightarrow W^-(\pi x, a)$ também leva finitos para um. Seja $x \in \Sigma_a^+$. Podem-se achar conjuntos mensuráveis disjuntos $\{C_j\}_{j\in[m]}$ que cobrem $\Sigma_a^+$ com $\pi'_x$ um homeomorfismo em cada $C_j$ ([Bou66]). Seja $M$ mensurável em $\Sigma_a^+$ e

$$m_{a,x}(M) = \sum_j \mu^+(\pi'_x(M \cap C_j)).$$

Vê-se que, se $\pi'_x|_M$ é injetiva, $m_{a,x}(M) = \mu^+(\pi'_x M)$, e essa propriedade caracteriza $m_{a,x}$.

Mostremos que essa medida independe de $x$: para todos $x, y \in \Sigma_a^+$, $m_{a,x} = m_{a,y}$. Sejam $\{C_j\}_{j\in[r]}$ conjuntos mensuráveis disjuntos que cobrem $\Sigma_a^+$ com $\pi'_x$ e $\pi'_y$ homeomorfismos em cada $C_j$ (basta refinar adequadamente as coberturas que existem para $x$ e $y$). Para cada $z^+ \in \Sigma_a^+$, temos

$$\pi'_y(z^+) \in W^+(\pi'_x(z^+)).$$

Logo, para cada $M \subseteq \Sigma_a^+$, os conjuntos $\pi'_x(M \cap C_j) \subseteq W^-(\pi x, a)$ e $\pi'_y(M \cap C_j) \subseteq W^-(\pi y, a)$ são $W^+$-conjugados pelo mapa $\pi'_y \circ {\pi'_x}^{-1}$. Portanto

$$m_{a,x}(M) = \sum_j \mu^+(\pi'_x(M \cap C_j)) = \sum_j \mu^+(\pi'_y(M \cap C_j)) = m_{a,y}(M).$$

Isso mostra que existe definida uma medida $m_a$ e, como comentado antes, $m_a(M) = \mu^+(\pi'_x M)$ se $\pi'_x|_M$ é injetiva. ■

**Definição 6.5.** Definimos a medida $m$ em $\Sigma^+$ por

$$m := \sum_a m_a.$$

**Lema 6.6.** *Suponha que $n \geq 0$ e que $C$ e $D$ são subconjuntos mensuráveis de $\Sigma^+$ para os quais $\sigma^n|_C$, $\sigma^n|_D$ são injetivos e $\sigma^n(C) = \sigma^n(D)$. Então $m(C) = m(D)$.*

*Demonstração.* Tome $x_a \in \Sigma_a$, sendo $a \in [N]$ um símbolo, tal que, para todo $a' \neq a$,

$$W^-(\pi x_a, a) \cap W^-(\pi x_{a'}, a') = \emptyset.$$

Construímos o mapa $\omega\colon \Sigma^+ \longrightarrow W = \bigcup_a W^-(\pi x_a, a)$ por $\omega|_{\Sigma_a^+} = \pi'_{x_a}$. A medida $\mu^+ = \sum_a \mu^+|_{W^-(\pi x_a, a)}$ está definida em $W$. Considere a bijeção $\alpha\colon C \longrightarrow D$ definida por $\alpha := (\sigma^n|_D)^{-1} \circ \sigma^n|_C$. Para todo $z^+ \in C$ e todo $j \geq n$, temos $\alpha(z^+)_j = z_j$, o que implica que $\omega(\alpha(z^+)) \in W^+(\omega(z^+))$. Como $\omega$ é finita para um, existem conjuntos mensuráveis disjuntos $\{C_i\}_{i\in[r]}$ que cobrem $C$ com $\omega|_{C_i}$ e $\omega|_{\alpha C_i}$ homeomorfismos. Então a bijeção $\beta_i\colon \omega(C_i) \longrightarrow \omega(\alpha C_i)$ definida por $\beta_i \omega(z^+) = \omega(\alpha z^+)$ satisfaz $\beta_i(p) \in W^+(p)$. Como $\mu^+$ é $W^+$-invariante, temos $\mu^+\omega(C_i) = \mu^+\omega(\alpha C_i)$ e

$$m(C) = \sum_i m(C_i) = \sum_i \mu^+(\omega(C_i)) = \sum_i \mu^+(\omega(\alpha C_i)) = \sum_i m(\alpha C_i) = m(D).$$

∎

Por fim, mostramos a unicidade de $m$. A medida $\nu$ é a medida do teorema de Ruelle-Perron-Frobenius para $\varphi = 0$.

**Lema 6.7.** *$m = \gamma\nu$ para algum $\gamma > 0$.*

*Demonstração.* Para $a^* = a_0 \cdots a_{n-1} \in [N]^n$ uma sequência admissível, consideremos o cilindro

$$C[a^*] := C_{0,\dots,n-1}[a_0, \cdots, a_{n-1}] = \left\{ z^+ \in \Sigma^+ \;\middle|\; \forall_{i\in[n]} z_i = a_i \right\}.$$

Pelo lema anterior, para todas sequências $a^*, b^* \in [N]^n$ admissíveis tais que $a_{n-1} = b_{n-1}$, $m(C[a^*]) = m(C[b^*])$. Sejam $m_n(s) := m(C[a^*])$, para $a^* \in [N]^n$ admissível com $a_{n-1} = s$ e

$$w_n(r,s) := \left|\{a^* \in [N]^n \mid a^* \text{ admissível com } a_0 = r,\ a_{n-1} = s\}\right|.$$

Para todo $b^* = b_0 \cdots b_t$ temos

$$C[b^*] = \bigcup_{a^* \in [N]^n \text{admissível},\ a_0 = b_t} C[b_0 \cdots b_{t-1} a_0 \cdots a_{n-1}]$$

e então, para todo $n$,

$$m(C[b^*]) = \sum_{s\in[N]} w_n(b_t, s)m_{n+t}(s).$$

Seja $\mu = h\nu$ e $\lambda$ como no teorema de Ruelle-Perron-Frobenius para $\varphi = 0$. Então, da equação (1), tem-se

$$\mu(C[b_0 \cdots b_{t-1}a_0 \cdots a_{n-1}]) = \frac{p_{b_0}q_{a_{n-1}}}{\lambda^{n+t-1}},$$

e segue que

$$\begin{aligned}\mu(C[b^*] \cap \sigma^{-n-t+1}C[s]) &= \mu\left(\bigcup_{a^*\in[N]^n\text{admissível},\ a_0=b_t} C[b_0 \cdots b_{t-1}a_0 \cdots a_{n-1}]\right)\\ &= \frac{w_n(b_t, s)p_{b_0}q_s}{\lambda^{n+t-1}},\end{aligned}$$

então igualando as duas expressões envolvendo $w_n(b_t, s)$,

$$m(C[b^*]) = \sum_{s\in[N]} \frac{\lambda^{n+t-1}}{p_{b_0}q_s}\mu(C[b^*] \cap \sigma^{-n-t+1}C[s])m_{n+t}(s).$$

Quando $n \to \infty$, $\mu(C[b^*] \cap \sigma^{-n-t+1}C[s]) \to \mu(C[b^*])\mu(C[s])$, pois $\mu$ é misturadora, então

$$m(C[b^*]) = \frac{\mu(C[b^*])}{p_{b_0}} \lim_{n\to\infty} \sum_{s\in[N]} \frac{\lambda^{n+t-1}\mu(C[s])m_{n+t}(s)}{q_s}.$$

Esse limite existe, portanto, e não depende de $b^*$; Denotando-o $\gamma_t$ e reescrevendo a equação anterior, temos, para todo $b^* \in [N]^{t+1}$ admissível,

$$m(C[b^*]) = \frac{\mu(C[b^*])}{p_{b_0}}\gamma_t = \nu(C[b^*])\gamma_t.$$

Como $\Sigma^+$ é união finita de cilindros $C[b^*]$, segue que

$$\gamma_t = \frac{m(\Sigma^+)}{\nu(\Sigma^+)},$$

logo $\gamma_t$ não depende de $t$. Denotando como $\gamma$, segue que, como a $\sigma$-álgebra é gerada pelos cilindros $C[b^*]$,

$$m = \gamma\nu.$$

$\blacksquare$

*Demonstração do Teorema 6.4.* Seja $x \in \Sigma$ e definamos os conjuntos

$$H^+ := \left\{ y^+ \in \Sigma^+_{x_0} \;\middle|\; \left| {\pi'_x}^{-1}(\pi'_x(y^+)) \right| > 1 \right\},$$

$$H := \left\{ y \in \Sigma_{x_0} \;\middle|\; y^+ \in H^+ \right\}$$

e

$$H^* := \left\{ y \in \Sigma \;\middle|\; \left| \pi^{-1}(\pi(y)) \right| > 1 \right\}.$$

Então $H \subseteq H^*$. Em [Bow70b], mostra-se que $\tilde{\mu}(H^*) = 0$, logo $\mu(H^+) = \tilde{\mu}(H) = 0$ e, como $\mu \sim \nu$, $\nu(H^+) = 0$. Segue disso que

$$\mu^+ \left\{ y \in W^-(\pi x, x_0) \;\middle|\; y^+ \in H^+ \right\} \leq m(H^+) = \gamma \nu(H^+) = 0,$$

e então

$$\mu^+|_{W^-(\pi x, x_0)} = \gamma \pi'_x(\nu|_{\Sigma^+_{x_0}}).$$

Da construção das partições de Markov ([Bow70b], [Bow70a]) segue que para cada $p \in \Omega_k$,

$$K_p := \bigcup_{x \in \pi^{-1}(p)} W^-(\pi x, x_0)$$

é uma vizinhança compacta de $p$ em $B^-_\varepsilon(p) \cap \Omega_k$. Mas então $K_p$ é uma transversal em $p$. Isso mostra que qualquer medida $W^+$-invariante é unicamente determinada pelas transversais $K_p$ a menos de uma constante, e pela caracterização de medidas invariantes por famílias de transversais, segue a unicidade. ■

## 6.4 O Caso dos Fluxos

Nesta subseção expomos alguns resultados sobre como estender a construção para o caso de fluxos. Não será feita a construção completa, somente alguns lemas principais.

Lembremos que denotamos por $\mathcal{F}_A$ o conjunto das funções Hölder contínuas $\phi\colon \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$. O conjunto $\mathcal{F}^+_A \subseteq \mathcal{F}_A$ é entendido como definido para $\Sigma^+$ com $\varrho(x) = \varrho(x^+)$.

Dada $\phi \in \mathcal{F}_A$ positiva, podemos construir o conjunto

$$\{(x,t) \mid x \in \Sigma, t \in [0, \phi(x)[\} \subseteq \Sigma \times \mathbb{R}.$$

e podemos identificar os pontos $(x, \phi(x))$ do extremo superior da transversal baseada em $x$ do conjunto com os pontos $(\sigma(x), 0)$ do extremo inferior da transversal baseada em $\sigma(x)$, através da equivalência

$$(x,t) \sim (x',t') \quad \Longleftrightarrow \quad x' = \sigma(x),\ t' = 0,\ t = \phi(x).$$

Fazendo o quociente, obtemos o espaço de suspensão da dinâmica $(\Sigma, \sigma)$.

Para definir o fluxo, primeiro lembremos que definimos[14]

$$S_n\phi(x) := \sum_{k \in [n]} \phi(\sigma^k(x)).$$

Sendo assim, para todo $x \in \Sigma$, o conjunto de intervalos

$$\{[S_{n-1}\phi(x), S_n\phi(x)[\}_{n \in \mathbb{N}}$$

é uma partição de $[0, \infty[$. Isso significa que, dados $x \in \Sigma$, $s \in [0, \phi(x)[$ e $t \in [0, \infty[$, existe único $n \in \mathbb{N}$ tal que $s + t \in \{[S_{n-1}\phi(x), S_n\phi(x)[\}$. Definimos o fluxo $g^t_{A,\phi}$ nesse ponto por

$$g^t_{A,\phi}(x,s) := \Big(\sigma^n(x), s + t - S_{n-1}\phi(x)\Big).$$

Pode-se verificar facilmente que o espaço e o fluxo estão bem definidos.

**Definição 6.6.** Sejam $N \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$, $A$ uma matriz de adjacência de ordem $N$ e $\phi \in \mathcal{F}_A$ positiva.

O *espaço de suspensão* é o conjunto

$$\Lambda(A,\phi) := \{(x,t) \mid x \in \Sigma, t \in [0,\phi(x)[\} \big/ (x,\phi(x)) \sim (\sigma(x),0)$$

O *fluxo de suspensão* $g^t_{A,\phi}$ nesse espaço é obtido por

$$g^t_{A,\phi}(x,s) := \Big(\sigma^n(x), s + t - S_{n-1}\phi(x)\Big),$$

em que $n \in \mathbb{N}$ é o natural tal que $s + t \in \{[S_{n-1}\phi(x), S_n\phi(x)[\}$.

O sistema $(\Lambda(A,\phi), g^t_{A,\phi})$ é a *suspensão* do sistema $(\Sigma, \sigma)$ e, quando possível, denotare-

[14]Entende-se que o somatório para $n = 0$ é vazio e, portanto, seu resultado é 0.

mos por simplicidade $(\Lambda, g^t)$.

Para uma peça básica $\Omega_k$ de um fluxo $f^t$ de axioma A, existe uma partição de Markov ([Bow73]), uma matriz $A$, uma função positiva $\phi \in \mathcal{F}_A$ e uma sobrejeção contínua $\rho\colon \Lambda(A, \phi) \longrightarrow \Omega_k$ que conjuga os sistemas: $\rho \circ g^t = f^t \circ \rho$. Além disso, pode-se assumir ([BR75]) que, para algum $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A^m > 0$ e que $\phi \in \mathcal{F}_A^+$.

Analogamente, define-se $\Lambda^+$ como o quociente

$$\Lambda^+(A, \phi) := \{(x,t) \mid x \in \Sigma^+, t \in [0, \phi(x)[\} \big/ (x, \phi(x)) \sim (\sigma(x), 0)$$

e $g^t_{A,\phi}(x, s)$ ignorando as coordenadas da esquerda. Dado $a \in [N]$, os espaços $\Lambda_a$ e $\Lambda_a^+$ são os espaços das sequências $x$ de $\Lambda$ e $\Lambda^+$, respectivamente, tais que $x_0 = a$. Ainda, definimos $E_a := \rho\Lambda_a$ e, para $x \in E_a$,

$$W^{--}(x, E_a) := B_\varepsilon^{--}(x) \cap E_a,$$

e então temos a sobrejeção contínua

$$\begin{aligned} \rho'_x\colon \Lambda_a^+ &\longrightarrow W^{wu}(\rho(x,0), E_a) \\ (y^+, s) &\longmapsto (\rho(x^-.y^+, s)). \end{aligned}$$

Supondo que temos uma medida $W^-$-invariante, temos uma medida $\mu^+$ em cada transversal $W^{--}(x, E_a)$.

**Lema 6.8.** *Existe uma única medida $m_a$ em $\Lambda^+$ para a qual o seguinte é verdade: se $M \subseteq \Lambda_a^+$, $x \in \Lambda$ com $x_0 = a$ e $\rho'_x|_M$ é injetiva, então*

$$m_a(M) = \mu^+(\rho'_x M).$$

*Demonstração.* A demonstração desse lema é análoga à do lema 6.5 ao notar que $\rho'_x(x^+, s) \in W^+(\rho'_y(z^+, s))$ para $x_0 = y_0 = a$, já que $\phi \in \mathcal{F}_A^+$. ■

**Definição 6.7.** Definimos a medida $m$ em $\Lambda^+$ por

$$m := \sum_a m_a.$$

**Lema 6.9.** *Suponha que $t \geq 0$ e que $C$ e $D$ são subconjuntos mensuráveis de $\Lambda^+$ para os quais $g^t|_C$, $g^t|_D$ são injetivos e $g^t(C) = g^t(D)$. Então $m(C) = m(D)$.*

*Demonstração.* A demonstração desse lema é análoga à do lema 6.6 ao notar que $f^t(W^+(x)) = W^+(f^t(x))$. ∎

Para mostrar a unicidade de $m$ como no lema 6.7, precisamos primeiro construir a medida $\nu^*$ em $\Lambda^+$. Para isso, para cada $\tau \in \mathbb{R}$, do teorema de Ruelle-Perron-Frobenius 4.9 aplicada ao funcional $\tau\phi \in \mathcal{F}_A^+$, obtêm-se $\lambda_\tau \in \,]0, \infty[$, $h_\tau \in \mathscr{C}(\Sigma^+)^+$ e $\nu_\tau$.

**Lema 6.10.** *1. Para todos $n \in \mathbb{Z}^+$, $\tau, \tau' \in \mathbb{R}$ tais que $\tau' \leq \tau$ e $h \in \mathscr{C}(\Sigma^+)^+$,*

$$e^{n(\tau-\tau')(\inf\phi)}(\mathscr{L}_{\tau'})^n h \leq (\mathscr{L}_\tau)^n h \leq e^{n(\tau-\tau')(\sup\phi)}(\mathscr{L}_{\tau'})^n h.$$

*2. Para todos $\tau, \tau' \in \mathbb{R}$ tais que $\tau' \leq \tau$,*

$$e^{(\tau-\tau')(\inf\phi)}\lambda_{\tau'} \leq \lambda_\tau \leq e^{(\tau-\tau')(\sup\phi)}\lambda_{\tau'}.$$

*3. Existe único $\tau \in \,]-\infty, 0]$ tal que $\lambda_\tau = 1$.*

*Demonstração.* 1. Lembremos que segue indutivamente que

$$\mathscr{L}_\tau{}^n h(x^+) = \sum_{y^+ \in \sigma^{-n}\{x^+\}} e^{S_n\phi(y^+)} h(y^+).$$

Como $\inf\phi > 0$ e $\tau' \leq \tau$, para todo $y^+ \in \Sigma^+$ vale que

$$n(\tau-\tau')(\inf\phi) \leq \sum_{k\in[n]} (\tau-\tau')\phi(\sigma^k(y^+)) = S_n[(\tau-\tau')\phi](y^+),$$

o que implica que

$$(\tau-\tau')n(\inf\phi) + S_n[\tau'\phi](y^+) \leq S_n[\tau\phi](y^+),$$

portanto

$$e^{(\tau-\tau')n(\inf\phi)+S_n[\tau'\phi](y^+)} \leq e^{S_n[\tau\phi](y^+)}$$

e, então, para todos $h \in \mathscr{C}(\Sigma^+)^+$ e $y^+ \in \Sigma^+$,

$$
\begin{aligned}
e^{n(\tau-\tau')}(\mathscr{L}_{\tau'})^n h(y^+) &= \sum_{y^+\in\sigma^{-n}\{x^+\}} e^{(\tau-\tau')n(\inf\phi)+\tau' S_n\phi(y^+)} h(y^+) \\
&\leq \sum_{y^+\in\sigma^{-n}\{x^+\}} e^{\tau S_n\phi(y^+)} h(y^+) \\
&= (\mathscr{L}_\tau)^n h(y^+).
\end{aligned}
$$

A demonstração é análoga para $\sup\phi$.

2. Tomando $h = h_{\tau'}$ no item anterior, temos

$$
\begin{aligned}
e^{n(\tau-\tau')(\inf\phi)}(\lambda_{\tau'})^n h_{\tau'} &= e^{n(\tau-\tau')(\inf\phi)}(\mathscr{L}_{\tau'})^n h_{\tau'} \\
&\leq (\mathscr{L}_\tau)^n h_{\tau'}.
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\left(e^{(\tau-\tau')(\inf\phi)}\frac{\lambda_{\tau'}}{\lambda_\tau}\right)^n h_{\tau'} &= e^{n(\tau-\tau')(\inf\phi)}\frac{(\lambda_{\tau'})^n}{(\lambda_\tau)^n} h_{\tau'} \\
&\leq \frac{(\mathscr{L}_\tau)^n h_{\tau'}}{(\lambda_\tau)^n} \to \nu_\tau(h_{\tau'})h_\tau,
\end{aligned}
$$

então devemos ter

$$
e^{(\tau-\tau')(\inf\phi)}\frac{\lambda_{\tau'}}{\lambda_\tau} \leq 1,
$$

o que é equivalente a

$$
e^{(\tau-\tau')(\inf\phi)}\lambda_{\tau'} \leq \lambda_\tau.
$$

A demonstração é análoga para $\sup\phi$.

3. Para isso, notemos alguns fatos. Primeiro, do item anterior segue que $\lambda_\tau$ é uma função contínua e estritamente crescente de $\tau$, pois se $\tau' < \tau$, então $e^{(\tau-\tau')(\inf\phi)} > 1$, logo

$$
\lambda_{\tau'} < e^{(\tau-\tau')(\inf\phi)}\lambda_{\tau'} \leq \lambda_\tau.
$$

Além disso, $\lambda_\tau \to 0$ quando $\tau \to -\infty$, pois do item anterior segue que

$$
e^{\tau(\inf\phi)}\lambda_\tau = e^{(2\tau-\tau)(\inf\phi)}\lambda_\tau \leq \lambda_{2\tau},
$$

Também temos que $\lambda_0 \geq 1$, pois como $h_0 \geq 0$, então

$$\lambda_0 h_0(x^+) = \mathscr{L}_0 h_0(x^+) = \sum_{y^+ \in \sigma^{-1}\{x^+\}} e^{0\phi(y^+)} h_0(y^+) = \sum_{y^+ \in \sigma^{-1}\{x^+\}} h_0(y^+) \geq h_0(x^+).$$

Assim, segue da continuidade que existe $\tau \in\ ]-\infty, 0]$ tal que $\lambda_\tau = 1$ e segue da monotonicidade que esse $\tau$ é único.

$\blacksquare$

# Referências

[BM77] Rufus Bowen and Brian Marcus. Unique ergodicity for horocycle foliations. *Israel Journal of Mathematics*, 26(1):43 – 67, Mar 1977. 7, 8, 11, 37, 40, 42, 44, 45

[Bou66] Nicolas Bourbaki. *Elements of Mathematics: General Topology, Pt.2*. Springer / Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., 1966. 48

[Bow70a] Rufus Bowen. Markov partitions and minimal sets for axiom a diffeomorphisms. *American Journal of Mathematics*, 92(4):907 – 918, 1970. 51

[Bow70b] Rufus Bowen. Markov partitions for axiom a diffeomorphisms. *American Journal of Mathematics*, 92(3):725 – 747, 1970. 51

[Bow71] Rufus Bowen. Periodic points and measures for axiom a diffeomorphisms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 154:377 – 397, 1971. 42, 43

[Bow73] Rufus Bowen. Symbolic dynamics for hyperbolic flows. *American Journal of Mathematics*, 95(2):429–460, 1973. 53

[Bow74] Rufus Bowen. Bernoulli equilibrium states for axiom a diffeomorphisms. *Mathematical Systems Theory*, 8:289 – 294, 1974. 37

[Bow75] Rufus Bowen. $\omega$-limit sets for axiom a diffeomorphisms. *Journal of Differential Equations*, 18(2):333 – 339, 1975. 42, 43

[BR75] Rufus Bowen and David Ruelle. The ergodic theory of axiom A flows. *Inventiones mathematicae*, (29):181–202, 1975. 53

[EW11] Manfred Einsiedler and Thomas Ward. *Ergodic Theory*, volume 259 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag London, 1 edition, 2011. 28

[HCP69] Morris Hirsch and Charles C. Pugh. Stable manifolds for hyperbolic sets. *Bulletin of The American Mathematical Society - BULL AMER MATH SOC*, 75, 01 1969. 41, 42, 43

[HPPS70] Morris Hirsch, Jacob Palis, C Pugh, and M Shub. Neighborhoods of hyperbolic sets. *Inventiones Mathematicae*, 9:121 – 134, 06 1970. 41, 42, 43

[Nit71] Zbigniew Nitecki. *Differentiable Dynamics*. M.I.T. Press, 1971. 42, 43

[PS70] C. Pugh and M. Shub. The Ω-stability theorem for flows. *Inventiones mathematicae*, (11):150–158, 1970. 41

[RS75] David Ruelle and Dennis Sullivan. Currents, flows and diffeomorphisms. *Topology*, 14(4):319 – 327, 1975. 47