



Número: 311/2004

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

Pós-Graduação em Geociências  
Área de Administração e Política de Recursos Minerais

ROGÉRIO MENDES CARVALHO

A UTILIZAÇÃO CONJUGADA DE TÉCNICAS DE OPÇÕES REAIS E SIMULAÇÃO  
GEOESTATÍSTICA: METODOLOGIA PARA INTEGRAR MODELOS GEOLÓGICOS  
NA AVALIAÇÃO DE PROJETOS DE MINERAÇÃO

311/04-7860

Tese apresentada ao Instituto de Geociências como parte dos  
requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências,  
Área de Administração e Política de Recursos Minerais.

**Orientador:** Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre

Este exemplar corresponde à  
edição final da tese defendida  
por Rogério Mendes Carvalho  
e aprovada pela Comissão Julgadora  
em 15/02/2004  
  
ORIENTADOR

CAMPINAS – SÃO PAULO

FEVEREIRO – 2004

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTR  
SEÇÃO CIRCULAR

UNIDADE	PC
Nº CHAMADA	TIV/med C253u
V	EX
TOMBO BC/	58636
PROC.	16-112-04
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	24,00
DATA	29-06-04
Nº CPD	

CM0019B107-0

Bib id: 317265

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IG - UNICAMP

~~C273u~~

Carvalho, Rogério Mendes

A utilização conjugada de técnicas de opções reais e simulação geostatística: metodologia para integrar modelos geológicos na avaliação de projetos de mineração / Rogério Mendes Carvalho.- Campinas,SP.: [s.n.], 2004.

Orientador: Armando Zaupa Remacre

Tese (doutorado) Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Geociências.

1. Finanças. 2. Métodos de simulação. 3. Geoestatística.  
4. Avaliação de Projetos. I. Remacre, Armando Zaupa. II. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Geociências. III. Título.





Esta tese é dedicada à memória de minha esposa, Lísia Gabriel da Silva Carvalho. Ela sempre esteve ao meu lado e dedicou o máximo carinho à nossa filha, especialmente durante minhas ausências.

Lísia está em meu coração, em minha mente, em meus sonhos. Nossas almas estão juntas para sempre. Meus pensamentos e orações estarão sempre com ela.

This thesis is dedicated in loving memory of my wife, Lísia Gabriel da Silva Carvalho. She always accompanied me and devoted as much care as possible to our daughter, especially during my continuous absences.

Lísia is in my mind, in my dreams. I hold her in my heart. Our souls are joined forever. My thoughts and prayers continue to be with her.



“Não se pode ensinar tudo a alguém, pode-se apenas ajudá-lo a encontrar por si mesmo.”

Galileu Galilei

De longe penetraste os meus pensamentos;  
averiguaste os meus passos e o fio da minha  
carreira, e previste todos os meus caminhos.

Salmos 138, 3-4



## AGRADECIMENTOS

À Companhia Vale do Rio Doce – CVRD, pelo apoio para a conclusão do curso de Doutorado e por propiciar um ambiente de motivação e de inovação.

À Minerações Brasileiras Reunidas – MBR, empresa à qual estive ligado por vários anos e que me proporcionou grandes realizações, ensinamentos e evolução profissional.

Ao Professor Dr. Armando Zaupa Remacre, meu orientador, pelo contínuo apoio que recebi durante todas as fases e pela lição de estar sempre procurando um processo de aprendizagem contínua.

À Carla Mendes Carvalho, pela paciente leitura e revisão do texto e pelas constantes palavras de carinho e motivação.

Ao Frederico Augusto Rosa do Carmo, pela efetiva contribuição e contínuas discussões técnicas.

À Kátia M. C. Rocha, do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada - IPEA e da PUC-Rio, pela presteza em disponibilizar suas referências bibliográficas e seus desenvolvimentos de pesquisa.

À Lenir Gomes Gabriel da Silva, minha sogra, pessoa extraordinária e fonte de energia, apoio, exemplo e dedicação para todos da família.

Ao Marcelo Protázio, pelas valiosas discussões sobre os modelos matemáticos.

Ao Marco Antônio Guimarães Dias, da PETROBRAS e PUC-Rio, pela cordialidade e atenção dispensadas durante as visitas à Petrobras e pelas valiosas informações para inclusão no escopo dos trabalhos.

À Maria Carmen de Almeida, minha madrinha, que dedicou incansáveis horas para minha formação e sempre acompanhou de perto e de longe meus estudos. Ela compartilhou comigo cada vitória conseguida.

À Maria Helena Sabino de Castro, pelo suporte administrativo e pela boa vontade em ajudar nos processos internos da UNICAMP.

Ao Ricardo Alves Noronha, pela amizade, pelo espírito de irmão e pela abdicção de tempo em incontáveis situações.

Ao Prof. Dr. Saul Barisnick Suslick, pelas oportunidades de debates, discussões e troca de idéias.

Agradeço, de modo especial, à minha filha Laura pela paciência, persistência, luta diária e compreensão com todos os sentimentos que vivemos (saudade, ausência, solidão...).



Esta página é uma homenagem às empresas das quais o autor teve oportunidade de participar.

As ações implementadas por estas empresas permitem aprimoramento às pessoas, ajudando a compor vigas de sustentação de sólidos relacionamentos profissionais.

Esta homenagem e a admiração do autor se estendem a Célio Augusto Bandeira, da Magnesita S.A., Gregory Moseley, da São Bento Mineração – GENCOR, Juarez de Oliveira Rabello, da Minerações Brasileiras Reunidas – MBR, e Rogério Caporali, da Companhia Vale do Rio Doce – CVRD, que possuem uma profunda noção de cidadania e sempre agem para que cada um possa exercê-la com plenitude.



# SUMÁRIO

	<b>Página</b>
<b>AGRADECIMENTOS</b> .....	<b>IX</b>
<b>SUMÁRIO</b> .....	<b>XIII</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	<b>XVII</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	<b>XXIII</b>
<b>LISTA DE SIGLAS, ABREVIATURAS E SÍMBOLOS</b> .....	<b>XXV</b>
<b>RESUMO</b> .....	<b>XXXI</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>XXXIII</b>
<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
<b>1 A MOTIVAÇÃO</b> .....	<b>1</b>
<b>2 ENUNCIADO DO PROBLEMA</b> .....	<b>2</b>
<b>3 OBJETIVOS</b> .....	<b>2</b>
3.1 OBJETIVO GERAL .....	<b>2</b>
3.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	<b>3</b>
3.2 ÁREAS DA CIÊNCIA ENVOLVIDAS E INTERFACES ENTRE AS DISCIPLINAS DE AVALIAÇÃO DE RESERVAS E FINANÇAS.....	<b>3</b>
<b>4 FORMULAÇÃO DAS HIPÓTESES</b> .....	<b>4</b>
<b>5 ORGANIZAÇÃO DA TESE E METODOLOGIA</b> .....	<b>5</b>

**CAPÍTULO 1.....9**

**1 CONSIDERAÇÕES SOBRE SIMULAÇÃO E PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES .....9**

1.1	BREVES CONSIDERAÇÕES SOBRE SIMULAÇÃO GEOESTATÍSTICA.....	9
1.2	CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES.....	11
1.2.1	<i>O que são opções.....</i>	12
1.2.2	<i>Os aspectos de tempo e opções de investimento.....</i>	16
1.2.3	<i>Levando em consideração as oscilações cíclicas.....</i>	16
1.2.4	<i>A importância do tempo.....</i>	17
1.2.5	<i>Aplicando Opções Reais à mineração.....</i>	17
1.2.6	<i>Comentários sobre a metodologia de Brennan e Schwartz (1985) para a avaliação de minas.....</i>	18
1.3	UM GUIA PARA AVALIAÇÃO.....	20
1.3.1	<i>Introdução.....</i>	20
1.3.2	<i>Valoração de operações: Valor Presente Ajustado.....</i>	21
1.3.3	<i>Valoração de Oportunidades: Precificação de Opções.....</i>	23
1.3.4	<i>Valoração de Títulos de Propriedade.....</i>	29
1.4	EXPLICITAÇÃO DO QUADRO TEÓRICO.....	33
1.4.1	<i>Valoração de um recurso natural através de Precificação de Opções: um protótipo de um sistema computadorizado.....</i>	33
1.4.2	<i>A utilização da Equação de Black-Scholes.....</i>	36
1.4.3	<i>A utilização da Simulação de Monte Carlo.....</i>	39

**CAPÍTULO 2.....45**

**2 INVESTIMENTOS EM MÚLTIPLOS ESTÁGIOS .....45**

2.1	A ABORDAGEM DE OPÇÕES PARA A DECISÃO DE INVESTIR E OS PRINCIPAIS CONCEITOS.....	45
2.2	DETERMINANTES DA OPÇÃO DE INVESTIR.....	46
2.3	MODELO PARA INVESTIMENTOS EM UM ESTÁGIO.....	47
2.4	MODELO DE INVESTIMENTOS EM DOIS ESTÁGIOS.....	61
2.5	MODELO DE INVESTIMENTOS EM MÚLTIPLOS ESTÁGIOS.....	67
2.6	OPÇÕES IMBRICADAS EM UMA ESTRATÉGIA DE NEGÓCIOS.....	68

<b>CAPÍTULO 3.....</b>	<b>73</b>
<b>3 INVESTIMENTOS SEQUENCIAIS .....</b>	<b>73</b>
3.1 MODELO PARA VALOR DO PROJETO ESTOCÁSTICO E INVESTIMENTO DETERMINÍSTICO .....	73
3.1.1 <i>Estudo de caso.....</i>	84
3.1.2 <i>Análise dos resultados.....</i>	103
3.2 MODELO PARA VALOR DO PROJETO ESTOCÁSTICO E INVESTIMENTO DETERMINÍSTICO: INCORPORAÇÃO DE CONDIÇÃO DE OPTIMALIDADE .....	105
3.2.1 <i>Solução analítica para <math>f(V, K)</math> (caso <math>V &lt; V^*</math>).....</i>	107
3.2.2 <i>Solução numérica <math>F(V, K)</math> (caso <math>V \geq V^*</math>).....</i>	108
3.2.3 <i>Comentários sobre a solução de equações de diferenças finitas .....</i>	114
3.2.4 <i>Estudo de caso.....</i>	120
3.3 MODELO PARA INVESTIMENTOS DE CUSTOS INCERTOS .....	127
<b>CAPÍTULO 4.....</b>	<b>137</b>
<b>4 ESTRATÉGIAS DE OPÇÕES REAIS EM PROJETOS.....</b>	<b>137</b>
<b>CAPÍTULO 5.....</b>	<b>149</b>
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>149</b>
<b>ANEXO 1 .....</b>	<b>153</b>
<b>SIMULAÇÃO GEOESTATÍSTICA: O ALGORITMO DAS BANDAS ROTATIVAS .....</b>	<b>153</b>
<b>ANEXO 2 .....</b>	<b>155</b>
<b>DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DOS VALORES DE OPÇÃO <math>F(I, J)</math> COM O MODELO PARA VALOR DO PROJETO ESTOCÁSTICO E INVESTIMENTO DETERMINÍSTICO: INCORPORAÇÃO DE CONDIÇÃO DE OPTIMALIDADE .....</b>	<b>155</b>

<b>ANEXO 3</b> .....	<b>159</b>
<b>MODELO PARA INVESTIMENTOS DE CUSTOS INCERTOS APRESENTADO POR ROCHA (1996)</b>	<b>159</b>
SUPOSIÇÕES DO MODELO .....	159
DESENVOLVIMENTO DO MODELO .....	160
A EQUAÇÃO $F(K, V)$ .....	162
CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	165
SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $F(V, K)$ .....	167
<i>Caso <math>K &gt; K^*(V)</math> – Solução Analítica</i> .....	167
<i>Caso <math>K &lt; K^*</math> - Solução Numérica</i> .....	169
<i>Desenvolvimento do Algoritmo</i> .....	172
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>185</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	<b>189</b>

## LISTA DE FIGURAS

	<b>Página</b>
FIGURA 1-1 – GRÁFICOS EXEMPLIFICANDO CENÁRIOS DE OPÇÕES DE COMPRA E OPÇÕES DE VENDA .....	15
FIGURA 1-2 – METODOLOGIAS DE FCD: A RELAÇÃO ENTRE VALOR PRESENTE E VALOR FUTURO E A LÓGICA BÁSICA DA AVALIAÇÃO.....	22
FIGURA 1-3 – DIFERENÇA DE ENFOQUE NA AVALIAÇÃO DE ATIVOS E DE OPORTUNIDADES .....	26
FIGURA 1-4 – EXEMPLO DA VALORAÇÃO DE OPÇÃO DE COMPRA UTILIZANDO O MODELO DE BLACK&SCHOLES.....	28
FIGURA 1-5 – PARCELAS DE COMPOSIÇÃO DE UM FLUXO DE CAIXA .....	30
FIGURA 1-6 – GRÁFICO DO VALOR DA OPÇÃO OBTIDO A PARTIR DO MODELO DE BLACK-SCHOLES EM FUNÇÃO DO TEMPO DE EXPIRAÇÃO.....	35
FIGURA 1-7 – DADOS DE ENTRADA E DE SAÍDA DE UM PROGRAMA DE VALORAÇÃO DA OPÇÃO DE UM RECURSO NATURAL ATRAVÉS DO MODELO DE BLACK&SCHOLES.....	38
FIGURA 1-8 – GRÁFICO ILUSTRANDO O EFEITO DA DATA DE EXPIRAÇÃO E DA VOLATILIDADE ( $\sigma = DP =$ DESVIO PADRÃO) SOBRE O VALOR DA OPÇÃO DE UM RECURSO NATURAL.....	39
FIGURA 1-9 – GRÁFICO ILUSTRANDO O EFEITO DA VOLATILIDADE E DA DATA DE EXPIRAÇÃO SOBRE O VALOR DA OPÇÃO DE UM RECURSO NATURAL .....	39
FIGURA 1-10 – DADOS DE ENTRADA DE UM PROGRAMA PARA CÁLCULO DO VALOR DE UMA OPÇÃO DE COMPRA DE PADRÃO EUROPEU .....	42
FIGURA 1-11 – DADOS DE SAÍDA DE UM PROGRAMA PARA CÁLCULO DO VALOR DE UMA OPÇÃO DE COMPRA DE PADRÃO EUROPEU .....	42
FIGURA 1-12 – GRÁFICO DA VARIAÇÃO DO PREÇO DO ATIVO AO LONGO DO HORIZONTE DE TEMPO SIMULADO.....	43
FIGURA 1-13 – GRÁFICO DO PREÇO DO ATIVO NA DATA DE EXPIRAÇÃO DA OPÇÃO PARA 500 SIMULAÇÕES REALIZADAS .....	43
FIGURA 1-14 – GRÁFICO DO VALOR DA OPÇÃO NA DATA DE EXPIRAÇÃO PARA 500 SIMULAÇÕES REALIZADAS.....	43
FIGURA 2-1 – VALOR DO PROJETO (V) EM FUNÇÃO DE P (C=208, I=113, $\alpha=-0,8\%$ , $\mu=12\%$ A.A., R=8% A.A., $\lambda=18\%$ , SEM FINANCIAMENTO) .....	52
FIGURA 2-2 – VALOR DA OPÇÃO E DE V-I EM FUNÇÃO DE P (C=208, I=113, $\alpha=-0,8\%$ , $\mu=12\%$ A.A., R=8% A.A., $\lambda=18\%$ , SEM FINANCIAMENTO).....	53
FIGURA 2-3 – PREÇO E VALOR CRÍTICOS EM FUNÇÃO DE $\sigma$ (C=208, I=113, $\alpha=-0,8\%$ , $\mu=12\%$ A.A., R=8% A.A., $\lambda=18\%$ , SEM FINANCIAMENTO).....	54
FIGURA 2-4 – PREÇO CRÍTICO EM FUNÇÃO DA TAXA LIVRE DE RISCO (C=208, I=113, $\alpha=-0,8\%$ , $\mu=12\%$ A.A., R=8% A.A., $\lambda=18\%$ , SEM FINANCIAMENTO) .....	55
FIGURA 2-5 – VALOR DA OPÇÃO E DE V-I EM FUNÇÃO DE P (C=208, I=113, $\alpha=-0,8\%$ , $\mu=12\%$ A.A., R=8% A.A., $\lambda=18\%$ , COM FINANCIAMENTO).....	56

FIGURA 2-6 – PREÇO CRÍTICO EM FUNÇÃO DO PERCENTUAL DE FINANCIAMENTO DE LONGO PRAZO (C=208, I=113, $\alpha=-0,8\%$ , $\mu=12\%$ A.A., R=8% A.A., $\lambda=18\%$ ) .....	57
FIGURA 2-7 – RESULTADOS DA TRAJETÓRIA DE PREÇOS PARA 3 SIMULAÇÕES ( $\alpha=-0,8\%$ ) .....	58
FIGURA 2-8 – TRAJETÓRIA DE F(P) E V(P)-I PARA 3 SIMULAÇÕES (C=208, I=113, $\alpha=-0,8\%$ , $\mu=12\%$ A.A., R=8% A.A., $\lambda=18\%$ ).....	58
FIGURA 2-9 – RESULTADOS DA TRAJETÓRIA DE PREÇOS OBTIDOS A PARTIR DE 100 SIMULAÇÕES ( $\alpha=-0,8\%$ ) .....	59
FIGURA 2-10 – RESULTADOS DA TRAJETÓRIA DE F(P) E V(P)-I OBTIDOS A PARTIR DE 100 SIMULAÇÕES (C=208, I=113, $\alpha=-0,8\%$ , $\mu=12\%$ A.A., R=8% A.A., $\lambda=18\%$ ) .....	59
FIGURA 2-11 – TRAJETÓRIA DE F(P) E V(P)-I (C=208, I=113, $\alpha=-0,8\%$ , $\mu=12\%$ A.A., R=8% A.A., $\lambda=18\%$ E PARTICIPAÇÃO DOS FINANCIAMENTOS NO INVESTIMENTO $S$ DE 50%).....	60
FIGURA 2-12 – VALOR DA OPÇÃO E DE V-I EM FUNÇÃO DE P (C=208, $I_1=56,5$ , $I_2=56,5$ , $\alpha=-0,8\%$ , $\sigma=20\%$ A.A., $\mu=12\%$ A.A., R=8% A.A., $\lambda=18\%$ , SEM FINANCIAMENTO) PARA INVESTIMENTOS EM DOIS ESTÁGIOS.....	66
FIGURA 2-13 – VALOR DA OPÇÃO E DE V-I EM FUNÇÃO DE P (C=208, $I_1=56,5$ , $I_2=56,5$ , $\alpha=-0,8\%$ , $\sigma=40\%$ A.A., $\mu=12\%$ A.A., R=8% A.A., $\lambda=18\%$ , SEM FINANCIAMENTO) PARA INVESTIMENTOS EM DOIS ESTÁGIOS.....	66
FIGURA 2-14 – VALOR DA OPÇÃO E DE V-I EM FUNÇÃO DE P PARA UM PROJETO COM 10 ESTÁGIOS (C=208, $I_{1...10}=11,3$ , $\alpha=-0,8\%$ , $\sigma=40\%$ A.A., $\mu=12\%$ A.A., R=8% A.A., $\lambda=18\%$ , SEM FINANCIAMENTO).....	67
FIGURA 2-15 – PREÇO CRÍTICO EM FUNÇÃO DO NÚMERO DO ESTÁGIO PARA UM PROJETO COM 10 ESTÁGIOS (C=208, $I_{1...10}=11,3$ , $\alpha=-0,8\%$ , $\sigma=40\%$ A.A., $\mu=12\%$ A.A., R=8% A.A., $\lambda=18\%$ , SEM FINANCIAMENTO).....	68
FIGURA 2-16 – DIAGRAMA “ESPAÇO DE OPÇÕES” E REPRESENTAÇÃO DE ESTRATÉGIA DE OPÇÕES IMBRICADAS [LUEHRMAN (1998)].....	69
FIGURA 2-17 – REPRESENTAÇÃO DO EFEITO DE AUMENTO DE VOLATILIDADE NO VALOR DAS OPÇÕES EM UM DIAGRAMA DE “ESPAÇO DE OPÇÕES” .....	70
FIGURA 2-18 – DIAGRAMA “ESPAÇO DE OPÇÕES” E REPRESENTAÇÃO DE ESTRATÉGIA DE OPÇÕES NÃO IMBRICADAS .	72
FIGURA 2-19 – DIAGRAMA “ESPAÇO DE OPÇÕES” E VISUALIZAÇÃO DO RESULTADO DA ESTRATÉGIA.....	72
FIGURA 3-1 – ILUSTRAÇÃO DOS N ESTÁGIOS DO PROJETO DE EXPLOTAÇÃO.....	76
FIGURA 3-2 – DETERMINAÇÃO DOS VALORES DE OPÇÃO EM UM DIAGRAMA DE ESPAÇO DE OPÇÕES.....	83
FIGURA 3-3 – DIAGRAMA DE VALORES DE VPL (VALOR PRESENTE LÍQUIDO) E OS FATORES DE ADIÇÃO DE VALOR PELAS OPÇÕES .....	83
FIGURA 3-4 – FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO DA METODOLOGIA EMPREGADA PARA A OBTENÇÃO DE MÚLTIPLAS RESPOSTAS.....	84
FIGURA 3-5 – SEÇÃO VERTICAL ILUSTRANDO O SEQUENCIAMENTO DE EXTRAÇÃO E A SEQUÊNCIA DE INVESTIMENTO .	85
FIGURA 3-6 – HISTOGRAMAS DA RESERVA LAVRÁVEL E DO QUANTITATIVO DE ESTÉRIL DOS PROJETOS DE CAVA FINAL OBTIDOS A PARTIR DOS MODELOS SIMULADOS .....	85
FIGURA 3-7 – EXEMPLO NUMÉRICO DA REGRA DE INVESTIMENTO ÓTIMO. O GRÁFICO MOSTRA O VALOR DA OPÇÃO DE INVESTIMENTO F(V,K), ONDE V = VALOR DO PROJETO COMPLETO; K = INVESTIMENTO REMANESCENTE .....	86

FIGURA 3-8 – GRÁFICO ILUSTRANDO A DEFINIÇÃO DA FRONTEIRA LIVRE ( <i>FREE BOUNDARY</i> ) PARA $\sigma=20\%$ , $R=4\%$ , $\mu=12\%$ , $\alpha=6\%$ , DESVIO PADRÃO= $25\%$ .....	88
FIGURA 3-9 – GRÁFICO ILUSTRANDO A DEFINIÇÃO DA FRONTEIRA LIVRE ( <i>FREE BOUNDARY</i> ) PARA $\sigma=20\%$ , $R=4\%$ , $\mu=12\%$ , $\alpha=6\%$ , DESVIO PADRÃO= $50\%$ .....	89
FIGURA 3-10 – GRÁFICO ILUSTRANDO A DEFINIÇÃO DA FRONTEIRA LIVRE ( <i>FREE BOUNDARY</i> ) PARA $\sigma$ VARIANDO DE 10 A 40%, $\mu=12\%$ , $\alpha=6\%$ , DESVIO PADRÃO= $25\%$ .....	90
FIGURA 3-11 – GRÁFICO ILUSTRANDO A DEFINIÇÃO DA FRONTEIRA LIVRE ( <i>FREE BOUNDARY</i> ) PARA VARIAÇÕES NA TAXA LIVRE DE RISCO (R) COM $\sigma=10\%$ , $\mu=12\%$ , $\alpha=6\%$ , DESVIO PADRÃO= $25\%$ .....	91
FIGURA 3-12 – ILUSTRAÇÃO DO EFEITO DA TAXA LIVRE DE RISCO NA CONSTITUIÇÃO DO ESPAÇO DE OPÇÕES ( $\sigma=10\%$ , $\mu=12\%$ , $\alpha=6\%$ , DESVIO PADRÃO= $25\%$ ) .....	92
FIGURA 3-13 – DIAGRAMA DE VALORES DE VPL, OPÇÃO NO MOMENTO ZERO, INCREMENTOS DE OPÇÕES E VP DE OPÇÕES PARA UM PROJETO NOS CENÁRIOS $R=4\%$ E $R=3\%$ ( $\sigma=10\%$ , $\mu=12\%$ , $\alpha=6\%$ , DESVIO PADRÃO= $25\%$ )... ..	92
FIGURA 3-14 – ILUSTRAÇÃO DE UM GRÁFICO DE ESPAÇO DE OPÇÕES APRESENTANDO AS REGIÕES E MELHORES DECISÕES DE INVESTIMENTO SOB INCERTEZA .....	93
FIGURA 3-15 – INFLUÊNCIA DA TAXA LIVRE DE RISCO (R) NA DETERMINAÇÃO DAS FRONTEIRAS DAS REGIÕES NO ESPAÇO DE OPÇÕES ( (A)–MENOR VALOR DE R, (B)–MAIOR VALOR DE R ).....	94
FIGURA 3-16 – DIAGRAMA DE VALORES DE VPL, OPÇÃO NO MOMENTO ZERO, INCREMENTOS DE OPÇÕES E VP DE OPÇÕES PARA AS SIMULAÇÕES 1 A 25 ( $\sigma=10\%$ , $R=4\%$ , $\mu=12\%$ , $\alpha=6\%$ , DESVIO PADRÃO= $25\%$ ) .....	96
FIGURA 3-17 – DIAGRAMA DE VALORES DE VPL, OPÇÃO NO MOMENTO ZERO, INCREMENTOS DE OPÇÕES E VP DE OPÇÕES PARA AS SIMULAÇÕES 26 A 50 ( $\sigma=10\%$ , $R=4\%$ , $\mu=12\%$ , $\alpha=6\%$ , DESVIO PADRÃO= $25\%$ ) .....	97
FIGURA 3-18 – HISTOGRAMA DE VPL CONVENCIONAL PARA OS PROJETOS GERADOS .....	98
FIGURA 3-19 – VALOR DA OPÇÃO DE INVESTIMENTO $F(V,K)$ PARA $\sigma=10\%$ , $\sigma=20\%$ E $\sigma=30\%$ .....	98
FIGURA 3-20 – HISTOGRAMAS DE OPÇÃO NO MOMENTO ZERO PARA $\sigma=10\%$ , $\sigma=20\%$ E $\sigma=30\%$ .....	98
FIGURA 3-21 – HISTOGRAMAS DE VP DE OPÇÕES PARA $\sigma=10\%$ , $\sigma=20\%$ E $\sigma=30\%$ .....	99
FIGURA 3-22 – EVOLUÇÃO DO VPL CONVENCIONAL (VERDE), DA OPÇÃO NO MOMENTO ZERO (+ EM VERMELHO) E DO VP DE OPÇÕES (VIOLETA) AO LONGO DOS ANOS PARA $\sigma=10\%$ , $\sigma=20\%$ E $\sigma=30\%$ .....	99
FIGURA 3-23 – DIAGRAMAS CORRELACIONANDO VALOR / CUSTO MÉTRICO COM OPÇÃO NO MOMENTO ZERO E VP DE OPÇÕES PARA OS PROJETOS GERADOS E CONSIDERANDO-SE DIFERENTES VOLATILIDADES: $\sigma=10\%$ (x), $\sigma=20\%$ ( $\diamond$ ) E $\sigma=30\%$ (★).....	99
FIGURA 3-24 – GRÁFICOS DE ÍNDICES DAS RELAÇÕES $I_1=$ PRÊMIO DA OPÇÃO/VPL, $I_2=$ (VP(OPÇÃO)-VPL)/VPL, $I_3=$ PRÊMIO DA OPÇÃO/RECEITA BRUTA PARA OS PROJETOS GERADOS NOS CENÁRIOS $\sigma=10\%$ , $\sigma=20\%$ E $\sigma=30\%$ . ..	101
FIGURA 3-25 – ILUSTRAÇÃO DOS ÍNDICES DE RISCO OBTIDO A PARTIR DOS RESULTADOS DE VPL, OPÇÃO NO MOMENTO ZERO E VPL DE OPÇÕES PARA 3 CENÁRIOS ECONÔMICO-FINANCEIROS DIFERENTES ( $\sigma=10\%$ , $\sigma=20\%$ E $\sigma=30\%$ ) .....	103

FIGURA 3-26 – REPRESENTAÇÃO DA MATRIZ $\underline{A}$ DO SISTEMA PARA CÁLCULO DOS VALORES DAS OPÇÕES DE INVESTIMENTO $F_{i,j}$ .....	113
FIGURA 3-27 – DIAGRAMA DE VALORES DE VPL, OPÇÃO NO MOMENTO ZERO, INCREMENTOS DE OPÇÕES E VP DE OPÇÕES PARA AS SIMULAÇÕES 1 A 25 ( $\sigma=10\%$ , $r=4\%$ , $\mu=12\%$ , $\alpha=6\%$ ).....	122
FIGURA 3-28 – DIAGRAMA DE VALORES DE VPL, OPÇÃO NO MOMENTO ZERO, INCREMENTOS DE OPÇÕES E VP DE OPÇÕES PARA AS SIMULAÇÕES 25 A 50 ( $\sigma=10\%$ , $r=4\%$ , $\mu=12\%$ , $\alpha=6\%$ ).....	123
FIGURA 3-29 – VALOR DA OPÇÃO DE INVESTIMENTO $F(V,K)$ PARA $\sigma=10\%$ , $\sigma=20\%$ E $\sigma=30\%$ .....	124
FIGURA 3-30 – HISTOGRAMAS DE OPÇÃO NO MOMENTO ZERO PARA $\sigma=10\%$ , $\sigma=20\%$ E $\sigma=30\%$ .....	124
FIGURA 3-31 – HISTOGRAMAS DE VP DE OPÇÕES PARA $\sigma=10\%$ , $\sigma=20\%$ E $\sigma=30\%$ .....	124
FIGURA 3-32 – EVOLUÇÃO DO VPL CONVENCIONAL (VERDE), DA OPÇÃO NO MOMENTO ZERO (+ EM VERMELHO) E DO VP DE OPÇÕES (VIOLETA) AO LONGO DOS ANOS PARA $\sigma=10\%$ , $\sigma=20\%$ E $\sigma=30\%$ .....	124
FIGURA 3-33 – ILUSTRAÇÃO DOS ÍNDICES DE RISCO OBTIDO A PARTIR DOS RESULTADOS DE VPL, OPÇÃO NO MOMENTO ZERO E VPL DE OPÇÕES PARA 3 CENÁRIOS ECONÔMICO-FINANCEIROS DIFERENTES ( $\sigma=10\%$ , $\sigma=20\%$ E $\sigma=30\%$ ) .....	125
FIGURA 3-34 – DIAGRAMA DE VALORES DE VPL, OPÇÃO NO MOMENTO ZERO, INCREMENTOS DE OPÇÕES E VP DE OPÇÕES PARA AS SIMULAÇÕES 1 A 25 ( $\sigma=10\%$ , $r=4\%$ , $\mu=12\%$ , $\alpha=2\%$ , $\delta=10\%$ , $\beta=25\%$ E $\gamma=10\%$ ).....	130
FIGURA 3-35 – DIAGRAMA DE VALORES DE VPL, OPÇÃO NO MOMENTO ZERO, INCREMENTOS DE OPÇÕES E VP DE OPÇÕES PARA AS SIMULAÇÕES 26 A 50 ( $\sigma=10\%$ , $r=4\%$ , $\mu=12\%$ , $\alpha=2\%$ , $\delta=10\%$ , $\beta=25\%$ E $\gamma=10\%$ ).....	131
FIGURA 3-36 – VALOR DA OPÇÃO DE INVESTIMENTO $F(V,K)$ PARA $\sigma=10\%$ , $r=4\%$ , $\mu=12\%$ , $\alpha=2\%$ , $\delta=10\%$ , $\beta=15\%$ E $\gamma=15\%$ .....	132
FIGURA 3-37 – REPRESENTAÇÃO DOS VALORES MÉDIOS E DOS DESVIOS PADRÃO DOS VALORES DE OPÇÃO NO MOMENTO ZERO PARA DIFERENTES CENÁRIOS DE INCERTEZA TÉCNICA ( $\beta$ ) E INCERTEZA ECONÔMICA ( $\gamma$ ) E PARÂMETROS ( $\sigma=10\%$ , $r=4\%$ , $\mu=12\%$ , $\alpha=2\%$ , $\delta=10\%$ ).....	132
FIGURA 3-38 – REPRESENTAÇÃO DOS ÍNDICES DE RISCO OBTIDO A PARTIR DOS RESULTADOS DA OPÇÃO NO MOMENTO ZERO PARA DIFERENTES CENÁRIOS DE INCERTEZA TÉCNICA ( $\beta$ ) E INCERTEZA ECONÔMICA ( $\gamma$ ) E PARÂMETROS ( $\sigma=10\%$ , $r=4\%$ , $\mu=12\%$ , $\alpha=2\%$ , $\delta=10\%$ ).....	133
FIGURA 3-39 – CLASSIFICAÇÃO DAS OPÇÕES PARA DIFERENTES CENÁRIOS DE INCERTEZA TÉCNICA ( $\beta$ ) E INCERTEZA ECONÔMICA ( $\gamma$ ) E PARÂMETROS ( $\sigma=10\%$ , $r=4\%$ , $\mu=12\%$ , $\alpha=2\%$ , $\delta=10\%$ ).....	134
FIGURA 3-40 – COMPOSIÇÃO DO ÍNDICE DE RISCO E AS CONTRIBUIÇÕES DAS COMPONENTES DE INCERTEZA SOBRE A RESERVA, INCERTEZA TÉCNICA E INCERTEZA ECONÔMICA (PARA CENÁRIO ECONÔMICO-FINANCEIRO: $\sigma=10\%$ , $r=4\%$ , $\mu=12\%$ , $\alpha=2\%$ , $\delta=10\%$ ).....	135
FIGURA 4-1 – COMPONENTES DE VALOR EM FLUXOS DE CAIXA .....	143
FIGURA 4-2 – UM PONTO DE REFLEXÃO NA AVALIAÇÃO DE PROJETOS E NEGÓCIOS .....	147
FIGURA 5-1 – CLASSIFICAÇÃO DAS OPÇÕES PARA DIFERENTES VALORES DE PROJETO COMPLETO (V) E CONSIDERANDO UM DETERMINADO CENÁRIO ECONÔMICO-FINANCEIRO.....	150

FIGURA 5-2 – ESPAÇO DE OPÇÕES, FRONTEIRA LIVRE E AÇÕES SOB INCERTEZA..... 150



## LISTA DE TABELAS

	<b>Página</b>
TABELA 1-1 – EXEMPLOS DE CENÁRIOS DE OPÇÕES DE COMPRA E OPÇÕES DE VENDA.....	14
TABELA 1-2 – EXEMPLO DE ESTRUTURAÇÃO DE UM FLUXO DE CAIXA.....	31
TABELA 1-3 – EXEMPLO DE UM FLUXO DE CAIXA HIPOTÉTICO.....	34



## LISTA DE SIGLAS, ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

a.a.	ao ano.
APV	<i>Adjusted Present Value.</i>
B	Valor presente criado pela introdução dos financiamentos de longo prazo.
c	Prêmio de uma opção de compra.
C	Custo.
CAPM	<i>Capital Asset Pricing Model.</i>
CDF	<i>Cumulative Distribution Function.</i>
DCF	<i>Discounted Cash Flow.</i>
dp	desvio padrão.
E	Financiamentos de longo prazo.
EBITDA	<i>Earnings Before Income Tax, Depreciation and Amortization.</i>
ECF	<i>Equity Cash Flow.</i>
EDP	Equação Diferencial Parcial.
F	Valor da opção de investimento.
FA	Função Aleatória.
FCD	Fluxo de Caixa Descontado.
FCL	Fluxo de Caixa Livre.
FCO	Fluxo de Caixa Operacional.
I	Investimento.
IR	Imposto de Renda.
K	Investimento total remanescente para completar o projeto.
LAIR	Lucro antes do Imposto de Renda.
MDF	Método das Diferenças Finitas.
Mt	Milhões de toneladas.
NPV	<i>Net Present Value.</i>
OPEP	Organização de Países Exportadores de Petróleo.



p	Prêmio de uma opção de venda.
P	Preço.
P&D	Pesquisa e Desenvolvimento.
r	Taxa livre de risco ( <i>Riskless rate</i> ).
RAM	<i>Random Access Memory</i> .
$r_m$	Taxa de juros média do mercado.
RV	<i>Random Variable</i> .
S	Participação dos financiamentos de longo prazo no investimento total.
S	Preço do ativo subjacente.
SELA	Sistema de equações lineares algébricas.
SOR	<i>Successive over-relaxation</i> .
t ou T-t	Tempo de expiração ou tempo de maturidade ( <i>time to maturity</i> ).
V	Valor do projeto completo.
VP	Valor Presente.
VPL	Valor Presente Líquido.
X	Preço do exercício.
WACC	<i>Weighted-average cost of capital</i> .



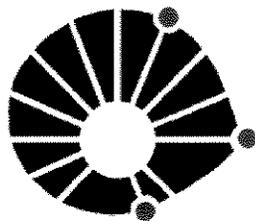
## LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

$\alpha$	Taxa de crescimento do projeto, deriva, ganhos de capital (parâmetro do movimento Browniano geométrico).
$\beta$	Variável em equação quadrática fundamental. $\beta_1$ e $\beta_2$ são as soluções da equação quadrática fundamental (raízes positiva e negativa, respectivamente).
$\beta$	Incerteza técnica.
$\beta$	Índice de risco da ação da empresa.
$\delta$	Taxa de conveniência, <i>convenience yield</i> , taxa de dividendos, custo de oportunidade de esperar ao invés de investir, custo de oportunidade de postergar a conclusão do projeto.
$\phi$	Preço de mercado do risco.
$\gamma$	Incerteza econômica.
$\lambda$	Taxa de depreciação.
$\mu$	Taxa de desconto ajustada ao risco (CAPM).
$\pi$	Fluxo de lucro.
$\rho$	Coefficiente de correlação.
$\sigma$	Desvio padrão (parâmetro do movimento Browniano), volatilidade.

## LETRAS CALIGRÁFICAS

$\upsilon$	Operador de variância.
------------	------------------------

/



**UNICAMP**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS**

**Pós-Graduação em Geociências**

**Área de Administração e Política de Recursos Minerais**

**A UTILIZAÇÃO CONJUGADA DE TÉCNICAS DE OPÇÕES REAIS E SIMULAÇÃO  
GEOESTATÍSTICA: METODOLOGIA PARA INTEGRAR MODELOS GEOLÓGICOS  
NA AVALIAÇÃO DE PROJETOS DE MINERAÇÃO**

**RESUMO**

**TESE DE DOUTORADO**

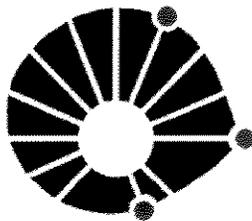
Rogério Mendes Carvalho

Opções Reais é um método utilizado para a avaliação de projetos. Esta técnica é originada da área de Finanças. Na sua forma mais comum, a metodologia incorpora o modelo de Black e Scholes para representar o valor de um projeto como uma equação diferencial. Esta tese descreve os princípios do método de fluxo de caixa descontado (FCD) e apresenta como a metodologia de Opções Reais incorpora incerteza e flexibilidade gerencial na avaliação.

Após uma introdução abordando investimentos em múltiplos estágios, são estudados três modelos de investimentos sequenciais: 1. modelo de investimento irreversível sob incerteza com valor de projeto estocástico, 2. modelo de investimento irreversível sob incerteza com valor de projeto estocástico e consideração de condição de optimalidade, 3. modelo de decisões de investimento irreversível com valor de projeto e investimento estocásticos, e sujeito a dois tipos de incerteza sobre o custo de conclusão (incerteza técnica sobre a quantidade de tempo, esforço, materiais e incerteza econômica sobre preços, quantidades de trabalho e materiais).

Esta tese apresenta regras de decisão que calculam o valor de negócios, mostra como os tipos de incerteza têm efeitos diferentes na decisão de investir e como os mesmos afetam o valor da oportunidade de investimento. A magnitude do prêmio de opção derivado da flexibilidade gerencial depende das características fundamentais do ativo subjacente que, nesse caso é a estrutura econômica e financeira da propriedade mineral que será gerenciada. Nos exemplos estudados, obteve-se prêmios de opção oscilando entre os níveis de 20 a 40%. Pode-se observar a possibilidade de obter valores expandidos (incluindo o prêmio de opção) bem superiores aos valores mensurados por VPL. As dispersões de valores de opção obtidas a partir dos modelos de investimentos sequenciais revelam índices de risco entre 10 e 16%, valores efetivamente muito superiores ao patamar de 5%, capturado pela variação de resultados de VPL.





**UNICAMP**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS**

**Pós-Graduação em Geociências**

**Área de Administração e Política de Recursos Minerais**

**THE JOINED UTILIZATION OF REAL OPTIONS TECHNIQUES AND  
GEOSTATISTICAL SIMULATION: A METHODOLOGY TO INTEGRATE  
GEOLOGICAL MODELS IN THE MINING EVALUATION PROJECTS**

**ABSTRACT**

**DOCTORAL THESIS**

Rogério Mendes Carvalho

Option Pricing is a method used for evaluating projects. This technique comes from the world of finance. In its most common form it incorporates Black and Scholes model for spot prices and expresses the value of the project as a stochastic differential equation. Starting out from the NPV (Net Present Value) method, this thesis shows how Real Options builds uncertainty and managerial flexibility into the evaluation methodology.

After an introduction of multiple stage investments, three models of sequential investments are studied: 1. model of irreversible investment under uncertainty with stochastic project value, 2. model of irreversible investment under uncertainty with stochastic project value and consideration of optimality condition, 3. model of irreversible investment decisions with stochastic project value and investment, and subject to two types of uncertainty over the cost of completion (technical uncertainty over the amount of time, effort, materials and economical uncertainty over the prices and quantities of labor and materials).

This thesis derives decision rules that calculate the business value and presents how the different types of uncertainty have very different effects on the decision to invest, and how they affect the value of the opportunity to invest. The magnitude of the option premium derived from managerial flexibility depends on the fundamental characteristics of the underlying asset that, in this case, is the economical and financial structure of the mineral property that will be managed. In the examples under analysis, it was obtained option premiums varying from 20 to 40%. Those figures show the possibility of obtaining expanded values (including the option premium) higher than the values measured by NPV. The dispersions of option values obtained from sequential investment models reveal risk indexes between 10 and 16%, values indeed higher than the level of 5%, captured by NPV variation.

# INTRODUÇÃO

## 1 A motivação

O desenvolvimento da Geoestatística e de técnicas de estimativa de reservas minerais forneceu aos profissionais de mineração a possibilidade de realizar estimativas de reserva de forma precisa. De outro lado, tais técnicas oferecem a analistas financeiros instrumentos excelentes para avaliação econômica e financeira de depósitos minerais e minas.

A estimativa de recursos ou reservas minerais constitui um passo fundamental na análise econômica de projetos. Os propósitos das empresas são a sobrevivência em um contexto de indústria de mineração global e competitiva e a mitigação dos riscos inerentes à atividade.

As novas regras na determinação ou definição de reservas minerais não se limitam à ferramentas para planejamento e projetos de mina, mas são também fatores críticos na área financeira e na avaliação de mercado de empresas de mineração.

Os desafios atuais são, principalmente, a minimização de recursos alocados em exploração, enquanto demonstrando mais reservas e a quantificação e otimização do risco associado com as reservas.

Estudos conduzidos por Glacken (1996) provaram ganhos 23% superiores em fluxo de caixa quando da aplicação adequada de novas metodologias nas atividades de avaliação de reservas e planejamento de lavra.

A maioria das aplicações publicadas limitam-se a estudar o valor adicional derivado das opções de gerenciamento da mina para parar, iniciar ou postergar as atividades de mineração. Na realidade, as empresas de mineração têm a seu dispor um intervalo muito maior de opções.

Existe um interesse crescente no uso de Opções Reais para avaliar investimentos sujeitos à incerteza, como minas e campos de petróleo.

O desenvolvimento dos estudos apresenta uma concepção de metodologia para integrar modelos geológicos e técnicas financeiras de avaliação que reconhecem a existência e efeitos de ciclos de preço e a habilidade da empresa para responder a mudanças inesperadas. A contribuição adicional fornece subsídios suficientes para influenciar decisões baseadas em análises por fluxos de caixas tradicionais.

A finalidade da realização do projeto de pesquisa pode ser sumarizado como um instrumento para integrar inovações tecnológicas no campo de avaliação de reservas através de técnicas de Geoestatística e metodologias e modelos utilizados na área de Finanças, visando melhorar o conhecimento das minas e depósitos minerais e gerar projetos mais rentáveis.

## 2 Enunciado do problema

Os métodos atuais de avaliação econômico-financeira são estáticos e não levam em consideração atuações gerenciais e evoluções tecnológicas.

## 3 Objetivos

### 3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral do projeto de pesquisa é o estabelecimento de uma metodologia, conjunto de procedimentos e interfaces, visando a geração de modelos geológicos por Simulação Geoestatística e a integração de incertezas geológicas e incertezas econômico-financeiras.

### 3.1 Objetivos específicos

Como objetivos específicos tem-se a discussão das potencialidades do uso de Simulação Geoestatística e sua utilidade como base ou fonte de informação para análise financeira e o estudo de evoluções nos modelos de Opções Reais, visando a avaliação de minas ou campos de petróleo e levando em consideração aspectos técnicos e práticos inerentes às Ciências da Terra.

Como a metodologia básica subjacente às técnicas de Opções Reais é baseada em processos estocásticos de preços e equações diferenciais parciais, ambos familiares a geoestatísticos, e em função de que a heterogeneidade espacial dos recursos ou reservas não é considerada nos modelos atuais, tem-se um vasto campo de pesquisa para a evolução das técnicas propostas.

### 3.2 Áreas da Ciência envolvidas e interfaces entre as disciplinas de Avaliação de Reservas e Finanças

O termo Precificação de Opções (*Option Pricing*)<sup>1</sup> refere-se a um método para avaliar opções e outros derivativos. É uma metodologia quase universalmente aceita no mundo das Finanças. Na sua forma usual, que é devida a Black e Scholes (1973), o modelo proposto por Brennan e Schwartz (1985) apresenta limitações e as únicas opções consideradas são de natureza parar / reiniciar a operação. De fato, os responsáveis pelas tomadas de decisão têm acesso a um número muito maior de opções tais como variar o teor de corte em resposta a tendências percebidas a longo prazo.

A Precificação de Opções tem se tornado mais acessível a usuários nos últimos anos e tem sido motivo de estudos de casos. Como exemplo pode-se citar a utilização desta metodologia pela empresa sul-africana JCI - Johannesburg Consolidated Investments para avaliar suas reservas de ouro a grandes profundidades. Essas aplicações vêm confirmar que a Precificação de Opções é uma metodologia promissora para avaliar projetos de mineração e reservatórios de petróleo.

---

<sup>1</sup> O termo original em Inglês (*Option Pricing*), bem como a tradução literal Precificação de Opções, são utilizados rotineiramente e de forma equivalente. Assim, optou-se por utilizar o nome em Português ao longo deste texto.

Esta tese contempla a criação de um conjunto de procedimentos e interfaces que permitem criar e analisar modelos geológicos definidos por Simulação Geoestatística. Desta forma, dois importantes fatores que degeneram as curvas de tonelagem x teor, o efeito de suporte e o efeito de informação estarão sendo tratados sob a ótica da Geoestatística. Tais informações servirão de base para o modelo de Precificação de Opções que deverá incorporar inovações no sentido de possibilitar a consideração de depósitos não homogêneos e de reservas não exatamente conhecidas. Esses últimos aspectos constituem limitações na metodologia de Brennan e Schwartz, e seu tratamento conjugado com técnicas de Simulação Geoestatística constituem o ponto principal da pesquisa.

O trabalho de pesquisa discute os objetivos e pontos principais da avaliação de um projeto, métodos de avaliação e os tipos de respostas dos investidores ao interpretar os resultados de avaliação. São descritos os procedimentos requeridos para avaliar um projeto, bem como os erros potenciais que analistas podem cometer em cada estágio crucial da investigação.

De forma geral, modelos mais sofisticados dão melhores resultados de avaliação que modelos simplistas. Modelos complexos fornecem estimativas mais precisas do valor real das oportunidades de investimento sob determinadas condições. Adicionalmente, modelos complexos também permitem um melhor conhecimento da interação de fatores complexos que determinam a viabilidade do projeto e dão aos investidores mais informações, sobre as quais as decisões serão baseadas.

O desenvolvimento de uma metodologia conjugada de técnicas de Opções Reais com Simulação Geoestatística visa fornecer uma metodologia para melhoramentos na precisão dos resultados de avaliação.

## 4 Formulação das hipóteses

Se o Modelo de Brennan e Schwartz (1985) é válido para taxas de juros constantes, custos conhecidos, minério perfeitamente homogêneo e quantidades de minério conhecidas, então pode-se extrapolar conceitos para estimativas de custos passíveis de variações, corpos de minério

heterogêneos e quantidades de minério dependentes de parâmetros geológicos, econômicos e tecnológicos, os quais não são estáticos.

## 5 Organização da tese e metodologia

Durante os últimos anos a simulação estocástica de depósitos minerais tem sido um tópico de rápido desenvolvimento nas pesquisas. O Capítulo 1 descreve a utilidade da Simulação Geoestatística e introduz os conceitos de opções financeiras e precificação de opções.

A abordagem de opções para a decisão de investir e os conceitos de irreversibilidade e incerteza são tratados no Capítulo 2, assim como a formulação matemática de modelo para investimentos em um, dois ou em múltiplos estágios. Uma série de exemplos numéricos é processada a partir de rotinas computacionais desenvolvidas em MATLAB<sup>®2</sup>. Os gráficos apresentados ilustram a correlação entre valores de projetos, valores de opções e preços para diversos cenários financeiros. Adicionalmente, os conceitos de opções imbricadas e o diagrama de espaço de opções são tratados.

O Capítulo 3 apresenta a conceituação de modelos de investimentos sequenciais em Opções Reais e três aplicações práticas são introduzidas. Valores de projetos obtidos por método convencional, prêmios de opção e índices de risco são quantificados e comparados para cenários econômico-financeiros diferentes. As aplicações foram estruturadas explorando-se a utilização dos seguintes modelos:

- modelo para valor do projeto estocástico e investimento determinístico,
- modelo para valor do projeto estocástico e investimento determinístico com incorporação de condição de optimalidade,
- modelo para investimentos de custos incertos (valor do projeto estocástico e investimento estocástico).

---

<sup>2</sup> MATLAB<sup>®</sup> The Language of Technical Computing, Release 12.1, Copyright 1984-2001 The Mathworks, Inc.

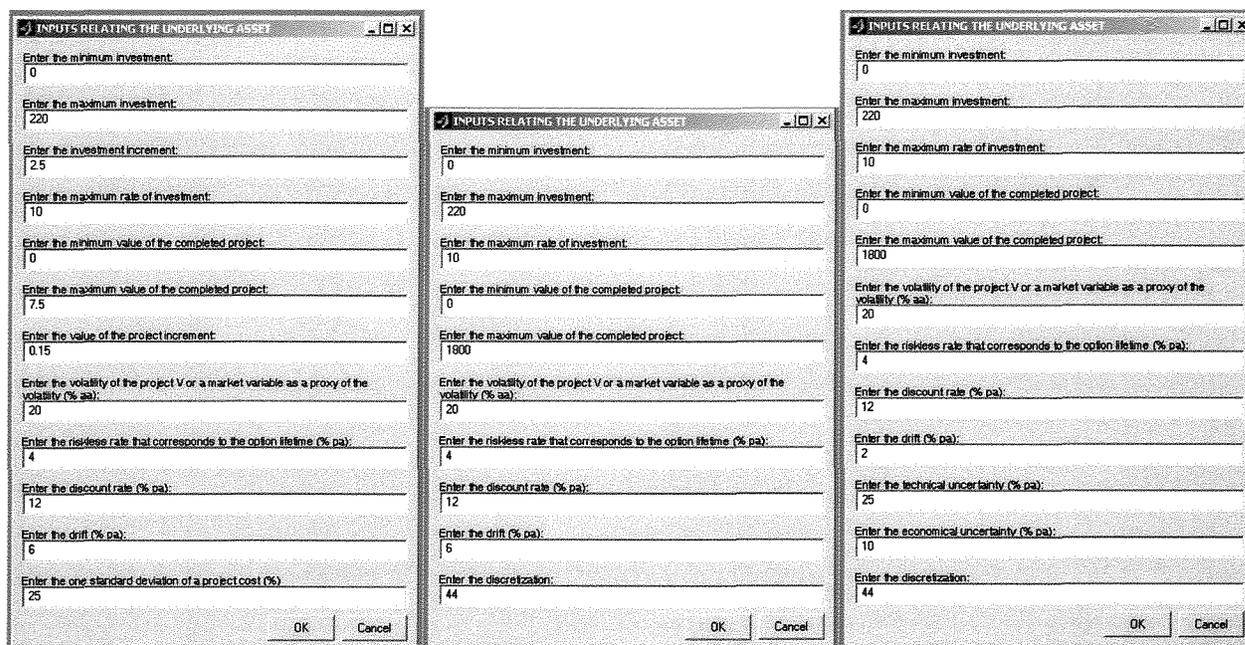
Para a avaliação dos modelos de investimentos sequenciais como um método de avaliação, considerou-se um conjunto de dados reais de uma mina de minério de ferro. O processo é conduzido seguindo as seguintes etapas:

- organização das bases de dados,
- análises estatísticas e geoestatísticas,
- simulação geoestatística para produzir diversas realizações possíveis (modelos) do depósito mineral utilizando-se o software ISATIS<sup>® 3</sup>,
- projetos de mina e sequenciamentos das operações para cada um dos modelos gerados por simulação,
- valoração dos projetos com seus respectivos históricos de investimentos através dos modelos de investimentos sequenciais. As análises, interpretações e ilustrações foram conduzidas através de implementações de rotinas em MATLAB<sup>®</sup> que são parte integrante dos desenvolvimentos desta tese.

Os parâmetros necessários para o processamento dos três modelos são exemplificados nas figuras abaixo (na sequência dos modelos apresentados) e são descritos detalhadamente no Capítulo 3.

---

<sup>3</sup> ISATIS<sup>®</sup> [Bleiner et al. (2000)] é um software de Geoestatística desenvolvido pela École des Mines de Paris e Geovariances (França) e distribuído pela Geovariances.



As aplicações desses modelos, discutidas nesse capítulo, pertencem à indústria de mineração. Entretanto, os métodos propostos são genéricos e podem ser aplicados para qualquer setor de negócio.

O Capítulo 4 descreve as questões referentes a estratégias de Opções Reais em projetos. A teoria das opções financeiras fornece um método que pode lidar com projetos com níveis de risco variáveis e contingências. Este capítulo apresenta um histórico das aplicações dos métodos de Opções Reais e as evoluções propostas por diversos autores.

Em todos os capítulos deste trabalho, admite-se que o leitor esteja familiarizado com a avaliação econômica de projetos de mineração.



# **CAPÍTULO 1**

## **1 CONSIDERAÇÕES SOBRE SIMULAÇÃO E PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES**

### **1.1 Breves considerações sobre Simulação Geoestatística**

O atual ambiente competitivo de negócios requer pensamentos inovadores e atitudes dinâmicas das empresas e dos profissionais.

Em mineração, um importante elemento para alcançar a realização com sucesso dos projetos é garantir que as tomadas de decisão sejam baseadas em modelos apropriados. Este objetivo é suportado pela crença das empresas de que, através de liderança tecnológica, alcançarão seus objetivos.

Como todos os envolvidos são forçados a extrair o máximo de rendimentos num mínimo de recursos aplicados nos atuais mercados de commodity, os processos de decisão tornam-se vitais.

A simulação pode ser entendida como uma realização possível de uma realidade desconhecida. Se os dados de amostras de um jazimento são disponíveis, um modelo de simulação deste jazimento condicionado aos dados têm as mesmas características matemáticas que o depósito.

Quando se está fazendo simulações, a primeira preocupação é determinar as características estatísticas e geoestatísticas do campo que se quer gerar, e então ajustar um algoritmo matemático que levará às especificações requeridas.

Uma simulação pode ser descrita de acordo com diversos critérios, como as características do campo resultante, o modelo ao qual ela corresponde, o algoritmo usado para gerá-la, a capacidade de honrar os dados.

Simulação Geoestatística é largamente usada e aceita como um método de geração de modelos estocásticos de depósitos minerais. Essa técnica é usada para a análise e solução de problemas nos quais a variabilidade é um fator crítico. Durante os últimos dez anos a simulação estocástica de depósitos minerais tem sido um tópico de desenvolvimento contínuo nas pesquisas, e existem muitas aplicações descritas na literatura usando um ou mais dos métodos atualmente disponíveis. Aspectos teóricos e aplicações podem ser encontrados em Armstrong e Dowd (1993), Chilès e Delfiner (1999), Armstrong et al. (2000), entre as várias publicações.

A maioria das aplicações descreve a simulação de uma ou mais variáveis quantitativas, tais como teores ou uma sequência de variáveis categóricas, como as litologias. Entretanto, muitas aplicações requerem a simulação simultânea de um número de variáveis quantitativas e qualitativas.

Modelos simulados de depósitos minerais devem incorporar todas as fontes de variabilidade, além de simplesmente a variabilidade modelada pelo variograma da variável de principal interesse.

Em termos de definições matemáticas têm-se os seguintes conceitos:

- Uma variável aleatória ( $RV$ )  $x$  é um princípio para atribuir a toda realização  $\zeta$  de um experimento  $\rho$  um número  $x(\zeta)$ .
- Um processo estocástico é uma família de funções temporais dependendo do parâmetro  $\zeta$  ou, equivalentemente uma função de  $t$  e  $\zeta$ . O domínio de  $\zeta$  é o conjunto de todas as realizações experimentais e o domínio de  $t$  é o conjunto  $R$  de números reais.

Atualmente, existe uma grande variedade de algoritmos de simulação estocástica disponíveis que diferem em suas hipóteses básicas, campo de aplicação, dados requeridos, implementação prática, complexidade e eficiência computacional.

A escolha de um método de simulação estocástica deve se basear na disponibilidade de tempo, recursos, bem como na complexidade requerida pelo estudo.

## 1.2 Considerações iniciais sobre Precificação de Opções

A Precificação de Opções é usada em Finanças para avaliar opções para comprar (ou vender) ações em alguma data futura, porque fornece uma metodologia conveniente para quantificar valores sujeitos à incerteza. Como uma das principais fontes de incerteza em mineração é o preço de venda do metal (ou do minério), esta técnica pode também ser usada para avaliar projetos de mineração.

Atualmente, a maioria das aplicações publicadas limitam-se a estudar o valor adicional derivado das opções de gerenciamento da mina para parar, iniciar ou postergar as atividades de mineração. Na realidade, as empresas de mineração têm a seu dispor um intervalo muito maior de opções. A Precificação de Opções fornece um interessante conjunto de métodos para a avaliação de projetos, mas a forma na qual as aplicações estão atualmente desenvolvendo não reflete integralmente a prática na indústria. Esta promissora metodologia necessita, portanto, ser adaptada para permitir outros tipos de opções de tomadas de decisão, incluindo aquelas mais realistas.

Antes de descrever o que são opções, breves considerações devem ser apresentadas sobre outros métodos para avaliar projetos. O mais conhecido é, indubitavelmente, a análise por fluxo de caixa descontado (*discounted cashflow analysis*). Smith (1995) forneceu uma revisão sobre o assunto. Este autor salientou que um ponto importante é a seleção de uma taxa de desconto apropriada e notou que, apesar de os textos entrarem em detalhe no cálculo do custo de capital, pouco é dito na literatura sobre como avaliar este parâmetro-chave para projetos de mineração.

Copeland et al. (1990) mencionam que “uma empresa que tem a opção de paralisar e reiniciar operações ou abandonar as mesmas é mais flexível e conseqüentemente tem mais valor que a mesma empresa sem estas opções”. Fluxo de caixa descontado (*discounted cash flow – DCF*) não é capaz de calcular esse valor que pode ser determinado quando usando Precificação de Opções. Esses autores

abordam que o adicional de flexibilidade pode acrescentar de 30% a 40% ao valor presente (VPL) da empresa.

A regra simples em VPL é investir quando o valor do projeto ( $V$ ) é maior que o custo do investimento ( $I$ ), mas como McDonald e Siegel (1986) demonstraram, este procedimento é incorreto. Devido ao fato de que os futuros valores de  $V$  são desconhecidos, existe um custo de oportunidade para investir hoje. A regra de investimento ótima é, portanto, investir quando  $V$  é pelo menos tão alto quanto um valor crítico  $V^*$  que excede  $I$ . Para valores de parâmetros usuais, este valor crítico pode ser duas ou três vezes maior que  $I$ . Então, a simples regra de VPL pode não somente estar incorreta, mas frequentemente ser bastante errada.

Estas citações mostram que existe um crescente interesse no uso de Precificação de Opções para avaliar investimentos sujeitos à incerteza, como minas e campos de petróleo.

### 1.2.1 O que são opções

Opções são contratos que conferem o direito (mas não a obrigação) de comprar ou vender um ativo que lhe está subjacente por um dado preço numa ou até uma determinada data.

Classificam-se em opção de compra (*call*), onde o comprador adquire o direito (mas não a obrigação) de comprar um ativo que lhe está subjacente por um determinado preço numa ou até uma determinada data e opção de venda (*put*), onde o comprador adquire o direito (mas não a obrigação) de vender um ativo que lhe está subjacente por um determinado preço numa ou até uma determinada data.

O ato de conduzir a transação é chamado exercício da opção; o preço citado no contrato é chamado preço de exercício. O preço de exercício (*exercise price* ou *strike price*) é aquele segundo o qual o detentor de uma posição longa numa opção tem direito a comprar ou a vender, dependendo se se trata de uma opção de compra ou venda.

Em resumo, pode-se definir três estilos de exercício de opções: *opção Americana*, onde o exercício pode fazer-se ao longo da vida da opção; *opção Européia*, onde o exercício só pode realizar-se no vencimento da opção e *opções Mistas*, onde o exercício pode fazer-se em algumas datas até a maturidade.

A data de expiração (*Expiry date*, *Expiration date* ou *Maturity date*) refere-se à data limite para o exercício (opções Americanas) ou de exercício (opções Européias) da opção. O prazo até a maturidade (*Time to Maturity*) refere-se à vida remanescente da opção e corresponde ao tempo remanescente para a data de maturidade da opção.

O Prêmio (*Premium*) é o preço de uma opção, pago pelo comprador ao vendedor, normalmente no momento em que o contrato de opção se estabelece.

A Margem (*Margin*) é o montante exigido em depósito ao vendedor de uma opção como garantia da execução do seu compromisso. Esta quantia pode ser entregue em dinheiro ou títulos especificados pela Câmara de Compensação.

Tabela 1-1 – Exemplos de cenários de opções de compra e opções de venda

### COMPRA DE OPÇÃO DE COMPRA

Preço de exercício (X)= 35  
Prêmio c = 8

Cenários-Preço da ação (valor do ativo subjacente)	25	30	35	40	45	50	55
Prêmio - Custo da Call	8	8	8	8	8	8	8
Payoff da Opção	0	0	0	5	10	15	20
<b>Ganho/Perda Líquida Potencial</b>	<b>-8</b>	<b>-8</b>	<b>-8</b>	<b>-3</b>	<b>2</b>	<b>7</b>	<b>12</b>

### VENDA DE OPÇÃO DE COMPRA

Preço de exercício (X)= 35  
Prêmio c = 8

Cenários-Preço da ação (valor do ativo subjacente)	25	30	35	40	45	50	55
Prêmio - Receita da Call	8	8	8	8	8	8	8
Payoff da Opção	0	0	0	-5	-10	-15	-20
<b>Ganho/Perda Líquida Potencial</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>3</b>	<b>-2</b>	<b>-7</b>	<b>-12</b>

### COMPRA DE OPÇÃO DE VENDA

Preço de exercício (X)= 35  
Prêmio p = 5

Cenários-Preço da ação (valor do ativo subjacente)	15	20	25	30	35	40	45
Prêmio - Custo da Put	5	5	5	5	5	5	5
Payoff da Opção	20	15	10	5	0	0	0
<b>Ganho/Perda Líquida Potencial</b>	<b>15</b>	<b>10</b>	<b>5</b>	<b>0</b>	<b>-5</b>	<b>-5</b>	<b>-5</b>

### VENDA DE OPÇÃO DE VENDA

Preço de exercício (X)= 35  
Prêmio p = 5

Cenários-Preço da ação (valor do ativo subjacente)	15	20	25	30	35	40	45
Prêmio - Receita da Put	5	5	5	5	5	5	5
Payoff da Opção	-20	-15	-10	-5	0	0	0
<b>Ganho/Perda Líquida Potencial</b>	<b>-15</b>	<b>-10</b>	<b>-5</b>	<b>0</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>

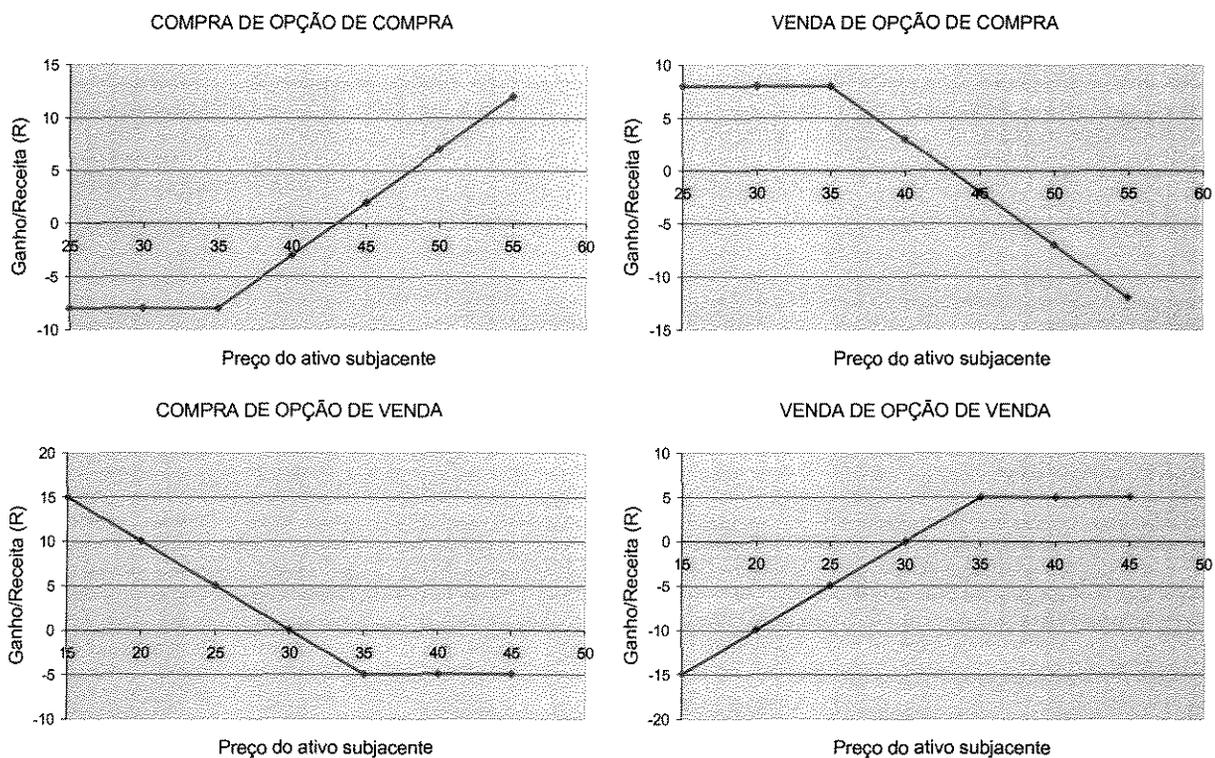


Figura 1-1 – Gráficos exemplificando cenários de opções de compra e opções de venda

Dependendo dos valores assumidos pelo preço do ativo subjacente e do preço de exercício pode-se ter a seguinte classificação para as opções:

*In-the-Money*<sup>4</sup>: Preço do exercício (X) abaixo do preço do ativo subjacente.

*At-the-Money*: Preço do exercício (X) próximo ao do ativo subjacente.

*Out-of-the-Money*: Preço do exercício (X) acima do preço do ativo subjacente.

<sup>4</sup> Os termos originais em Inglês (*in-the-money* e *out-of-the-money*) podem ser traduzidos, respectivamente, pelas expressões “dentro do preço” e “fora do preço”. Para preservar a integridade dos conceitos optou-se por utilizar a terminologia em Inglês ao longo deste texto.

### 1.2.2 Os aspectos de tempo e opções de investimento

Dois aspectos importantes em investimento são (1) estar apto a responder a flutuações de preços através de postergação de investimentos e (2) estar apto a exercer flexibilidade operacional. Preços cíclicos e flutuantes de bens minerais são frequentemente considerados como fonte indesejável de risco em investimentos em projetos de mineração, mas eles dão aos investidores oportunidades para ganhar grandes recompensas.

### 1.2.3 Levando em consideração as oscilações cíclicas

Preços de bens minerais, especialmente aqueles para metais, são sujeitos a variações. Desde que os preços foram cíclicos no passado, é razoável acreditar que esse padrão continuará no futuro. Flutuações de preços esperadas apresentam dificuldades particulares ao usar métodos de avaliação convencionais, como a análise por fluxo de caixa descontado (*discounted cash flow – DCF*). Um problema é que o avaliador pode não saber onde os preços atuais estão no ciclo ou onde o próximo ciclo irá ocorrer. Análise por fluxo de caixa descontado (FCD) necessita prever preços, e a previsão dos preços durante os primeiros 10 anos afeta fortemente o valor presente (VPL). Se a estimativa do ponto atual no ciclo de preço é incorreta, a análise de avaliação pode ser fatalmente falha e imperfeita.

Outro problema com análise por FCD convencional é que ela não faz nenhuma consideração para a possibilidade de fechar uma operação ou trocar métodos de operação durante tempos de preços baixos. Ignorar esta possibilidade na análise por fluxo de caixa descontado pode causar valores de projetos subestimados.

#### 1.2.4 A importância do tempo

Independente do método usado para avaliar um projeto de mineração, não existe melhor maneira de garantir sucesso do que fazer investimento corretamente definido no tempo. A obtenção de um crescimento do preço de uma commodity logo após a realização de um investimento pode causar imprecisões no fluxo de caixa relativamente pouco importantes. A razão, naturalmente, é que os fluxos de caixa mais altos nos anos iniciais do investimento são os mais significantes na determinação do valor presente e na rentabilidade do projeto. O contrário é também verdadeiro - um investimento mal definido no tempo produz resultados desastrosos.

O exato efeito que o tempo tem sobre o FCD depende da taxa de crescimento e decrescimento no ciclo, bem como da amplitude e frequência do ciclo. O aumento da taxa de desconto amplifica os efeitos da definição do tempo do investimento.

Desde que os preços dos bens minerais podem ser cíclicos, o método usado para avaliar um projeto mineiro é talvez de menor importância que a habilidade de reconhecer corretamente as quedas e picos no ciclo de preço. O fator tempo não representa um critério de decisão único a ser usado na avaliação de um investimento, mas é um entre vários que um investidor deve considerar.

#### 1.2.5 Aplicando Opções Reais à mineração

Brennan e Schwartz (1985) desenvolveram uma metodologia para valorar projetos de mineração através da valoração das opções gerenciais de iniciar a lavra, paralisar a lavra ou manter as operações em nível mínimo ou de manutenção. Eles usaram o modelo de Black e Scholes (1973) para modelar o preço do ativo subjacente da commodity e, seguindo o procedimento padrão de Precificação de Opções, desenvolveram um portfólio fictício para o valor da mina. Esses autores ilustraram estas idéias via um estudo de caso para uma mina de cobre hipotética.

### 1.2.6 Comentários sobre a metodologia de Brennan e Schwartz (1985) para a avaliação de minas

Apesar da metodologia de Brennan e Schwartz ser extremamente interessante, sua utilidade na prática é limitada por dois fatores:

- as hipóteses consideradas sobre o corpo de minério são irreais;
- poucas operações de mineração podem realmente parar e iniciar quando se deseja, devido a preços desfavoráveis da commodity.

Ao definir o modelo, Brennan e Schwartz (1985) assumiram quatro hipóteses para tornar o tratamento matemático mais facilmente controlável ou trabalhável: as taxas de juros são constantes; todos os custos são conhecidos; o minério é perfeitamente homogêneo; as quantidades de minério são conhecidas. Sob o ponto de vista de mineração, as últimas três hipóteses não são razoáveis. Normalmente, trabalha-se com estimativas de custos passíveis de variações. Com raras exceções, corpos de minério são sempre heterogêneos. As quantidades de minério são dependentes de parâmetros geológicos, econômicos e tecnológicos, os quais não são estáticos. Estas são as razões porque cuidado e atenção são requeridos na avaliação de reservas e na escolha de teores de corte. Existe, assim, uma natural indicação da necessidade de trabalho de pesquisa para tornar este lado do modelo mais realista.

Poucas operações de lavra podem realmente ser paralisadas e reiniciadas para acompanhar flutuações no preço de commodity. Grandes minas a céu aberto associadas a altos investimentos de capital e a maioria das minas subterrâneas não são flexíveis para parar e iniciar operações. Além disto, os custos de paralisação e retomada são muito altos. É necessário, portanto, um trabalho criterioso para determinar estes custos de forma a incorporá-los no modelo de Brennan e Schwartz.

A política de paralisar / reiniciar as operações encontra graves problemas. As relações trabalhistas tornam-se mais difíceis. Não é fácil recrutar pessoal qualificado rapidamente, particularmente se os profissionais têm conhecimento que podem ser afastados a qualquer tempo. Se as operações são suspensas por longo tempo, os organismos reguladores podem requerer dispendiosos trabalhos de recuperação das áreas, tornando impossível o reinício das operações. Além disto, licenças ambientais podem não mais estar válidas. Algumas operações apresentam longo tempo de retomada antes que qualquer venda seja realmente realizada. Minas com contratos de vendas de longo prazo têm que cumprir estas obrigações mesmo que elas prefiram não fazê-las. De forma similar, durante o período de *payback*, operações não podem parar devido ao pagamento dos empréstimos. Mesmo que uma mina esteja com fluxo de caixa negativo, a maioria das instituições financeiras prefere que ela continue produzindo de forma a gerar fluxo de caixa colateral<sup>5</sup> e honrar o serviço da dívida (pagamento dos juros e amortização do principal).

---

<sup>5</sup> Ativos com valor monetário, tais como ações, título de dívida (*bonds*), bens imóveis, que são usados para garantir um empréstimo são considerados colaterais. Se o tomador de empréstimo falha no cumprimento dos termos do acordo do empréstimo, o colateral, ou alguma parte do mesmo, torna-se propriedade do prestador.

## 1.3 UM GUIA PARA AVALIAÇÃO

### 1.3.1 Introdução

Em suporte a toda decisão de alocação de recursos, uma empresa deve realizar cálculos para saber se aquela posição ou postura é válida. Independentemente se a decisão é lançar um novo produto, entrar em uma parceria estratégica, investir em pesquisa e desenvolvimento ou construir novas facilidades, a forma de como a empresa estima valor é um determinante crítico de como ela aloca recursos. A alocação de recursos, por sua vez, é o direcionamento chave da performance global da empresa.

A maioria das empresas usa um conjunto de métodos para estimar valor. Algumas metodologias são formais, compreendendo uma teoria e um modelo; outras são informais, operando por sistemas sem rigor científico.

Apesar de os administradores estimarem valor de muitas formas diferentes, nota-se, a partir dos anos 80, uma clara tendência em direção aos métodos que são mais formais, explícitos e institucionalizados. Nos anos 70, análises por FCD surgiram como a melhor prática para avaliar ativos corporativos. Uma versão particular de FCD tornou-se padrão. De acordo com este método, o valor de um negócio é igual aos seus fluxos de caixa futuros descontados ao valor presente pelo custo de capital médio ponderado (*WACC: weighted-average cost of capital*). Esse marco no tempo coincidiu com o crescimento da utilização de derivativos após o colapso da fixação da taxa de câmbio ouro-dólar de Bretton Woods<sup>6</sup>, o primeiro choque do petróleo da OPEP (Organização de Países Exportadores de Petróleo) em 1973 e a elevação abrupta na volatilidade das moedas, taxas de juros, bolsas de valores e de mercadorias.

---

<sup>6</sup> A “*United Nations Monetary and Financial Conference*” aconteceu em julho de 1944 em *Bretton Woods, New Hampshire*, Estados Unidos da América. Os acordos de Bretton Woods procuraram retomar as vantagens do padrão ouro – moedas que fossem trocáveis em taxas estáveis e previsíveis em ouro e então em taxas estáveis e previsíveis umas nas outras. O padrão ouro é um sistema monetário, há muito abandonado pelo mundo todo, em que cada unidade da moeda corrente de um país tinha um lastro equivalente em ouro, podendo ser resgatada em espécie.

Atualmente, a prática baseada em *WACC* não é tão utilizada como antes, já que os avanços tecnológicos, em conjunto com novos conhecimentos teóricos, possibilitaram a adoção de outros métodos. Um efeito da redução dos custos de computação é a realização de muito mais análise por parte das empresas. Outro efeito é a possibilidade de usar metodologias de avaliação que são mais bem ajustadas aos tipos de decisão com que as empresas se deparam.

O processo de alocação de recursos apresenta não somente um, mas três tipos básicos de problemas de avaliação. Os gerentes necessitam estar aptos para valorizar operações, oportunidades e direitos de posse. A prática comum é aplicar o mesmo conjunto de avaliação a todos os problemas. Apesar de que a avaliação é sempre uma função de três fatores fundamentais – *fluxo de caixa, tempo e risco* – cada tipo de problema tem características estruturais que os mantêm separados uns dos outros e apresentam desafios distintos. Os computadores fazem com que uma metodologia que se ajusta a todos os casos seja desnecessária. Três ferramentas complementares – uma para cada tipo de problema de avaliação – darão melhores resultados que uma ferramenta única (eg. *WACC* – baseada em FCD).

### 1.3.2 Valoração de operações: Valor Presente Ajustado

O problema mais básico de avaliação é a valoração de operações ou ativos reais. Frequentemente se faz necessário estimar o valor de um negócio em andamento ou de alguma parte do mesmo – um produto particular, mercado ou linha de negócio. Ou pode-se estar considerando a compra de um novo equipamento, uma troca de fornecedores, uma aquisição. Em cada caso, independente se a operação em questão é grande ou pequena, se é um negócio completo ou somente parte do mesmo, a empresa já investiu na atividade ou está decidindo se deve fazê-lo. A questão é: quanto vale os futuros fluxos de caixa esperados, se a empresa já realizou todos os grandes investimentos (dezenas ou centenas de milhões de dólares) necessários?

Este é precisamente o problema para o qual os métodos de fluxos de caixa descontado (FCD) são projetados. Uma análise por FCD trata negócios como uma série de fluxos de caixa com risco estendendo-se no futuro. A tarefa do analista é, primeiramente, prever os futuros fluxos de caixa esperados, período por período. A seguir, descontar as previsões para valor presente, considerando um custo de oportunidade<sup>7</sup>. O custo de oportunidade é o retorno que uma empresa poderia esperar ganhar em investimento alternativo envolvendo o mesmo risco.

O custo de oportunidade consiste parcialmente de valor do tempo – o retorno sobre investimento livre de risco. O custo de oportunidade também inclui um prêmio de risco – o retorno extra que se pode esperar correspondente (ou proporcional) ao risco que se escolhe ter. As previsões de fluxo de caixa e o custo de oportunidade são combinados na relação de FCD (Figura 1-2).

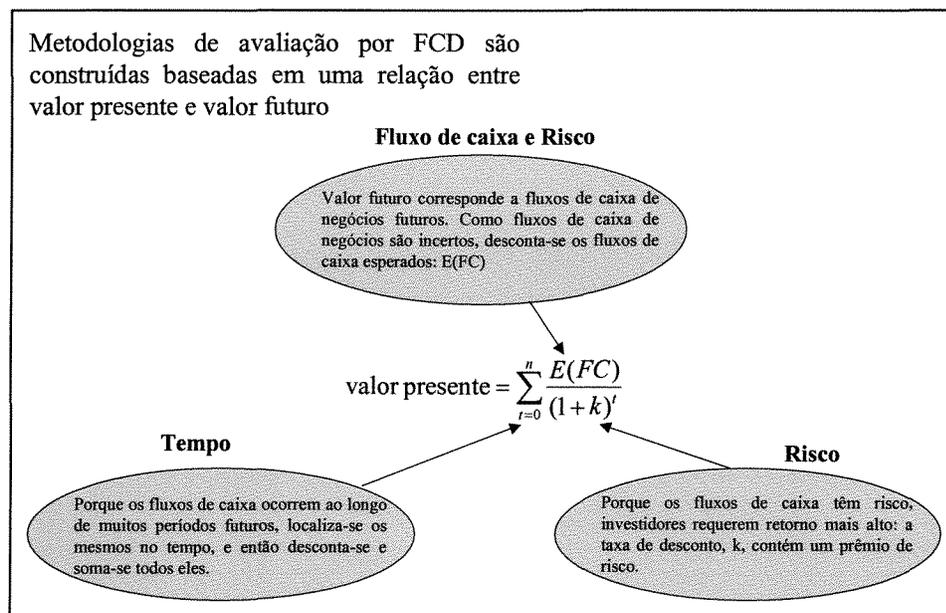


Figura 1-2 – Metodologias de FCD: a relação entre valor presente e valor futuro e a lógica básica da avaliação

<sup>7</sup> O custo de oportunidade de capital (*opportunity cost of capital*) é o retorno que poderia ser feito se o capital tivesse sido investido no melhor projeto alternativo. O custo de oportunidade de capital é a escolha correta para uso como uma taxa de desconto em cálculos de VPL, mas pode ser difícil de ser determinado.

A melhor alternativa atual para avaliar uma operação é aplicar a relação básica de FCD ao fluxo de caixa de cada uma das várias unidades de negócio e, então, adicionar os valores presentes. Esta metodologia é mais frequentemente chamada de valor presente ajustado (*adjusted present value – APV*<sup>8</sup>). Ela foi primeiramente sugerida por Myers (1974), que focou sobre duas categorias principais de fluxos de caixa: fluxos de caixa “reais” (receitas, custos operacionais e desembolsos de capital) associados com a operação e “efeitos laterais” associados a seu programa de financiamento. Mais genericamente, *APV* baseia-se no princípio de *aditividade de valor*, isto é, o correto é dividir um projeto em partes, valorar cada parte e, então somá-las de volta.

*APV* ajuda quando se deseja saber mais do que meramente a questão “O VPL é maior que zero?”. Já que a idéia básica atrás de *APV* é a aditividade de valor, pode-se usá-la para fragmentar um problema em partes que fazem sentido gerencial. Neste caso, pessoas diferentes serão responsáveis por realizar valoração individual das partes.

### 1.3.3 Valoração de Oportunidades: Precificação de Opções

Oportunidades – o segundo tipo de problema de avaliação comumente encontrado – podem ser entendidas como possíveis operações futuras. Quando se decide quanto desembolsar em pesquisa e desenvolvimento, ou por qual tipo de pesquisa e desenvolvimento, está se avaliando oportunidades. Realizar o desembolso agora não cria, de fato, fluxo de caixa a partir de operações, mas a oportunidade de investir outra vez mais tarde, dependendo dos resultados obtidos. Muitas despesas de marketing têm as mesmas características. A realização de investimento para criar uma marca nova provavelmente acarreta algum lucro imediato. Tal investimento também cria oportunidade para futuras expansões posteriores. A oportunidade pode ou não ser explorada posteriormente; mas apesar disto, ela tem um valor. Empresas com novas tecnologias, idéias de desenvolvimento de produtos, posições de defesa em mercados de rápido crescimento ou acesso a novos mercados potenciais possuem oportunidades de valor. Para algumas empresas, oportunidades são os produtos de maior valor que elas possuem.

---

<sup>8</sup> *APV* é também chamada valoração em partes ou valoração por componentes.

Como as corporações tipicamente avaliam oportunidades? Um método comum é não valorizá-las formalmente até que atinjam o ponto onde uma decisão de investimento não possa mais ser protelada. Nesse tempo, elas se juntam à fila de outros investimentos sob consideração para empréstimos. Esta prática tem sido considerada “míope” pelos críticos. O argumento é de que ela conduz as empresas a sub-avaliar o futuro e conseqüentemente, a sub-investir.

Algumas empresas usam um processo baseado em fluxo de caixa descontado formal, mas avaliam projetos estratégicos com regras especiais. Uma dessas regras é a atribuição de taxas mais baixas do que aquelas utilizadas em investimentos de rotina para compensar a tendência do fluxo de caixa descontado de sub-avaliar opções estratégicas. Infelizmente, em muitos casos o viés negativo do fluxo de caixa descontado não é somente ultrapassado, mas também envolvido por tais ajustes. Pode ocorrer, portanto, um sobre-investimento onde a teoria preliminarmente, sugeria sub-investimento.

Em geral, o direito para iniciar, parar ou modificar uma atividade de negócio em algum ponto no futuro é diferente do direito de operá-lo agora. Uma decisão importante específica – se explorar ou não a oportunidade – tem ainda que ser feita e pode ser adiada. O direito de tomar a decisão de forma otimizada, isto é, de fazer o que é melhor no tempo apropriado, apresenta um valor.

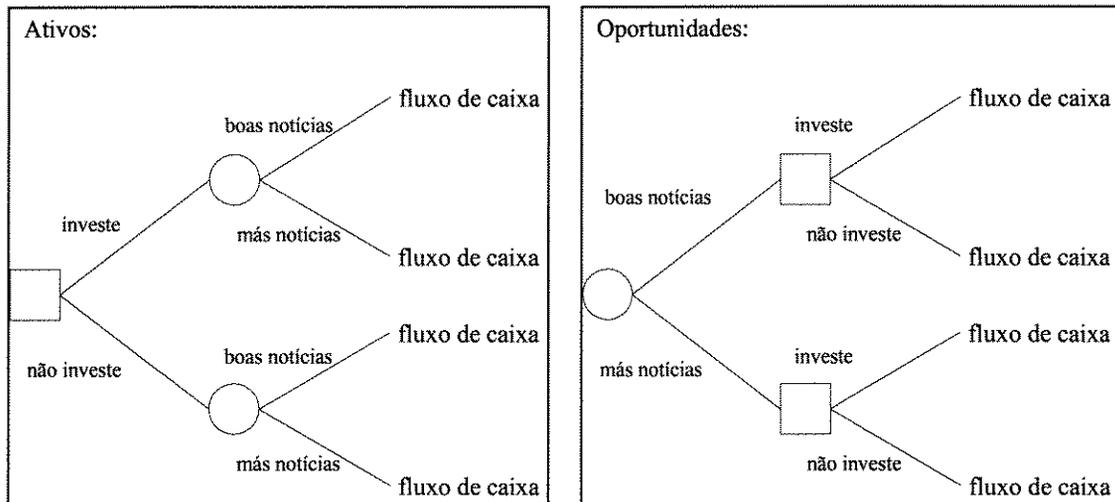
A decisão crucial para investir ou não será feita após alguma incerteza ser resolvida ou quando o tempo se extingue. Em termos financeiros, uma oportunidade é análoga a uma opção. Com uma opção tem-se o direito (mas não a obrigação) de comprar ou vender algo a um preço especificado na data ou até uma determinada data no futuro.

Uma opção tem um valor, e seu valor claramente depende do valor do ativo subjacente: o preço da ação. A posse da opção ainda não é o mesmo que a posse da ação. Uma deve ser avaliada diferentemente da outra.

Ao considerar oportunidades, os itens *fluxo de caixa*, *valor do tempo* e *risco* são importantes, e cada um destes fatores entra na análise de duas formas. Dois tipos de fluxo de caixa são relevantes: caixa advindo do negócio e caixa necessário para entrar no mesmo, no caso de escolha de fazê-lo. O tempo contribui de duas formas: tempo dos fluxos eventuais e o total de tempo que a decisão de investir pode ser postergada. Similarmente, o risco contribui de dois modos: a exposição ao risco do negócio, assumindo que invista-se no mesmo, e o risco de mudanças (para melhor ou para pior) antes da decisão. Mesmo em casos simples, os modelos de Precificação de Opções devem conter pelo menos cinco ou seis variáveis para capturar a informação sobre fluxo de caixa, tempo e risco e organizá-la para manipular as contingências com que os responsáveis pelo gerenciamento se deparam durante a evolução do negócio.

A Figura 1-3 sintetiza a diferença de enfoque na avaliação de ativos e de oportunidades e mostra para cada cenário os momentos e alternativas de decisão e as consequências.

## O que faz Oportunidades serem diferentes ?



Aqui toma-se a decisão, e então descobre-se o que acontece. Fluxos de caixa tradicionais são projetados para este tipo de questão.

Aqui descobre-se o que acontece antes de se tomar a decisão. Fluxos de caixa tradicionais trabalham de forma pobre neste tipo de questão.

Estes dois cenários devem ter valores diferentes; eles devem ser gerenciados de forma diferente.

Figura 1-3 – Diferença de enfoque na avaliação de ativos e de oportunidades

A técnica de Precificação de Opções tem sido referenciada desde os anos 70 como uma metodologia promissora para avaliar oportunidades de negócio. Isto se deve ao fato de que esta técnica considera contingências simples de uma forma melhor que os modelos de FCD padrão. Entretanto, os negócios reais são muito mais complicados do que simples opções de compra e venda. Uma combinação de fatores – competidores grandes e ativos, incertezas que não se ajustam a distribuições de probabilidades precisas e o grande número de variáveis relevantes – torna difícil a análise de oportunidades reais formalmente. O simples fato de ajustar o problema de avaliação, não importa se com objetivo de resolvê-lo, pode se tornar desencorajador.

O interesse em Precificação de Opções tem crescido nos últimos anos pelo fato de que computadores mais potentes permitiram a construção de modelos sofisticados. Enquanto os especialistas buscam a verdade absoluta – eles querem a resposta “correta”, os generalistas, com um negócio para administrar, querem simplesmente fazer um trabalho melhor a partir das técnicas disponíveis. Chegar mais próximo da verdade é bom, mesmo que não se esteja estritamente lá. Desta forma, a análise de valor baseada em opções não necessita ser perfeita para melhorar a prática atual.

A chave para avaliar uma oportunidade de investimento corporativo como uma opção é a habilidade para discernir a correspondência entre as características de projeto e as características das opções. O investimento potencial a ser feito corresponde ao preço de exercício da opção (*exercise price*). Os ativos operacionais que a empresa possuiria, assumindo que ela realizou o investimento, são como o ativo que ela teria após exercer a opção de compra. O total de tempo que a empresa pode esperar antes que ela tenha que decidir assemelha-se ao tempo de expiração da opção de compra.

A incerteza sobre o valor futuro dos ativos operacionais é capturada pela variância dos retornos sobre os mesmos, isto é análogo à variância dos retornos do ativo para opções de compra. A tática analítica é realizar este “mapeamento” entre o projeto real e uma opção, tal como uma opção de compra Européia (uma opção de compra Européia pode ser exercida somente na data de expiração, fazendo a mesma ser a mais simples de todas as opções). Se a opção simples capta a natureza de contingência do projeto, ganha-se ao determinar o valor da opção, compreensão adicional do valor do projeto.

Para ilustrar, suponha que uma empresa esteja considerando a possibilidade de investir \$ 1 milhão para modificar um produto existente para um mercado emergente. Uma análise por (FCD) dos fluxos de caixa esperados mostra que eles valem somente \$900 mil. Entretanto, como o mercado é volátil, o valor é passível de mudança. Uma combinação de patentes e *know-how* protegerão a oportunidade da empresa para realizar este investimento, pelo menos por mais dois anos. Após este prazo, a oportunidade pode ser perdida. Sob o ponto de vista convencional, este FCD proposto é negativo e de valor igual a \$100 mil, mas a oportunidade de esperar alguns anos e verificar o que acontece tem valor. Como resultado, a empresa possui uma opção de compra com prazo de expiração de dois anos, com um preço de exercício de \$1 milhão sobre um ativo subjacente que vale \$900 mil. Necessita-se somente mais duas informações para valorizar esta oportunidade como uma opção de compra Européia: a taxa de retorno livre de risco (suponha-se 7%); e alguma medida de risco sobre os fluxos de caixa. Suponha-se que as mudanças anuais no valor destes fluxos de caixa tenham um desvio padrão de 30% por ano, um número moderado para fluxos de caixa de negócios. Um modelo de Precificação de Opções, tal como Black&Scholes, dá o valor desta opção de compra como sendo de cerca de \$160 mil (Figura 1-4).

#### DADOS DE ENTRADA RELATIVOS AO ATIVO SUBJACENTE

Preço do ativo subjacente à opção-*Net Stock Price S* ->900000

Preço do exercício-*Exercise Price X* ->1000000

Prazo até ao Vencimento-*Time to maturity (days)*->730

Taxa de Juro sem risco-*Interest rate (in %)*->7

Volatilidade-*volatility (in %)*->30

Valor da OPÇÃO DE COMPRA = 1.6443e+005

Valor da OPÇÃO DE VENDA = 1.3379e+005

Figura 1-4 – Exemplo da valoração de opção de compra utilizando o modelo de Black&Scholes

O que a empresa aprendeu a partir do modelo de Precificação de Opções? O valor da oportunidade é positivo, ao contrário do valor demonstrado por VPL. Este resultado é válido desde que os aspectos de tempo e incerteza sejam mantidos. A empresa não deveria investir \$1 milhão agora – se o fizesse perderia \$ 100 mil – mas também não deveria esquecer do investimento para sempre. De fato, as vantagens são boas para um investimento dois anos no futuro. Ao longo deste tempo, a empresa monitora o desenvolvimento. O foco de atenção não é, portanto, somente o VPL, mas também o momento apropriado de se efetuar o investimento. Alternativamente, se a empresa não quer esperar, ela pode pensar em como capturar o valor da oportunidade agora. O valor da opção fornece uma idéia do valor a ser pago agora pela licença de introduzir o novo produto. Da mesma forma, o valor da opção pode ajudar uma empresa a pensar sobre quanto pagar para adquirir tal licença ou adquirir um pequeno negócio, cujo ativo de interesse maior é uma oportunidade.

Oportunidades de longa duração em ambientes de negócios voláteis são consideradas de forma tão pobre por métodos de avaliação por FCD que uma análise por Precificação de Opções não precisa ser muito sofisticada para produzir contribuições positivas. Uma forma pragmática de usar Precificação de Opções é como suplemento, não uma substituição, para a metodologia de avaliação já em uso. A contribuição extra pode ser suficiente para mudar, ou desafiar, decisões sugeridas pelas análises tradicionais por FCD.

Normalmente, o que os usuários finais necessitam é de uma ferramenta de fácil utilização que pode ser usada para sintetizar e avaliar opções simples. Além disto, visto que o objetivo principal é complementar, e não substituir os métodos existentes, uma ferramenta que compartilhe dados com análises por FCD ou ainda use parâmetros de saída de FCD como parâmetros de entrada para um modelo de Precificação de Opções pode ser de grande utilidade. As habilidades cruciais para o usuário são saber como reconhecer opções reais e como sintetizá-las em opções simples, e não particularmente resolver modelos complexos.

#### 1.3.4 Valoração de Títulos de Propriedade

Os títulos que as empresas emitem com relação às suas operações e oportunidades constituem a última categoria de problema de avaliação. Quando uma empresa participa de *joint ventures*, parcerias, alianças estratégicas, ou realiza grandes investimentos usando financiamento, ela compartilha o direito de posse com outras partes. É necessário compreender não simplesmente o valor da participação como um todo, mas também o valor do interesse da empresa sobre o mesmo. Este entendimento é essencial para decidir se se participa ou não e também estruturar os direitos de propriedade e escrever bons contratos.

Uma forma direta para valorar os direitos de uma empresa é estimar sua participação em fluxos de caixa futuros esperados e, então, descontar esses fluxos a um custo de oportunidade que compensa o risco envolvido. Isto é normalmente referenciado como o método *equity cash flow (ECF)* ou fluxo de caixa aos acionistas. Ele é, ainda, uma metodologia de FCD, mas os fluxos de caixa e a taxa de desconto são diferentes daqueles usados em APV ou método baseado em *WACC*.

As definições básicas das parcelas que compõem o fluxo de caixa são dadas na Figura 1-5.

	Vendas Líquidas
(-)	Custos e despesas operacionais (*)
=	EBITDA ( <i>Earnings Before Income Tax, Depreciation and Amortization</i> ) ou Lucro antes do Imposto de Renda (LAIR)
(-)	Imposto de Renda padrão (IR)
=	Lucro depois do Imposto de Renda
(+)	Depreciação e Amortização
=	Fluxo de Caixa Operacional (FCO)
(-)	Investimentos líquidos (fixo + giro) (**)
(-)	Fluxo de Caixa para pagamentos de empréstimos
=	Fluxo de Caixa livre (FCL)

- O Fluxo de Caixa Operacional é o decorrente exclusivamente da atividade operacional.
- (\*) Os custos e despesas operacionais não incluem depreciação, amortização, despesas e receitas financeiras.
- (\*\*) É o investimento no ativo permanente (menos participações societárias) e no capital de giro, no período, deduzido do valor recebido pela venda de imobilizado.

Figura 1-5 – Parcelas de composição de um fluxo de caixa

O fluxo de caixa livre (FCL) ou fluxo de caixa aos acionistas pode ser definido simplificadaamente como:

$$FCL = \text{Fluxo de Caixa Operacional (FCO)} - \text{Investimentos} - FC \text{ para pagamentos de empréstimos},$$

onde:

*FC para pagamentos de empréstimos* corresponde ao fluxo de caixa para pagamentos das instituições de financiamento.

A Tabela 1-2 ilustra um exemplo de estruturação de um fluxo de caixa apresentando as parcelas de composição do mesmo.

Tabela 1-2 – Exemplo de estruturação de um fluxo de caixa

	Equação	FLUXO DE CAIXA	CASH FLOW STATEMENT
1		Receitas Operacionais Líquidas	Net Operating Revenues
2		Custo de produtos e serviços	Cost of goods sold and services
3		Depreciação e Amortização	Depreciation and Amortization
4	= (1-2-3)	<b>Lucro Bruto</b>	<b>Gross Profit</b>
5		Despesas de Vendas	Sales Expenses
6		Despesas administrativas	Administrative Expenses
7		Outras despesas operacionais	Other Operating Expenses (Incomes)
8	= (4-5-6-7)	<b>LAIR (Lucro antes Imposto de Renda-IR)</b>	<b>EBIT</b>
9		Imposto de Renda sobre Lucro Operacional	Income tax on Operating Income
10		Itens extraordinários	Extraordinary Items
11	= (8-9+10)	Lucro operacional após IR	<b>Operating Income after Income Tax</b>
12		Depreciação e Amortização	Depreciation and Amortization
13	= (11+12)	Fluxo de Caixa Operacional	<b>Gross Cash flow</b>
14	$\Sigma$ (14.1 a 14.5)	<b>Investimentos</b>	<b>Investments</b>
14.1		Redução (Aumento) em Capital de Giro	Decrease (Increase) in Working Capital
14.2		Investimentos	Investments
14.3		Investimento de Capital	Capital Expenditure
14.4		Aumento em Ativos Operacionais	Increase in Operating Assets
14.5		Reduções em outros passivos	Decrease in Other Current Liabilities
15	= (13-14)	<b>Fluxo de Caixa Livre (FCL)</b>	<b>Operating Cash Flow</b>
16	$\Sigma$ (16.1 a 16.3)	<b>Fluxo de Caixa não operacional</b>	
16.1		Redução em ativos não operacionais	Decrease in Non Operating Assets
16.2		Fluxo de caixa de receitas não operacionais	Cash Flow of Non Operating Revenues
16.3		Imposto sobre receitas não operacionais	Tax on Non Operating Revenues
17	= (17.1-17.2+17.3)	<b>Fluxo de Caixa de financiamento</b>	<b>Financing Cash Flow</b>
17.1		Empréstimos e financiamento	Loans and Financing
17.2		Despesas com juros	Interest Expenses
17.3		Benefícios fiscais	Tax Benefits
18		Aporte de capital / Valor líquido	Change in Capital / Net worth
19		Reserva de ágio / Valor líquido	Goodwill Reserves
20	= (15+16+17+18+19)	<b>Fluxo de Caixa líquido sem dividendos</b>	<b>Net Cash Flow without dividends</b>
21		<b>Dividendos</b>	<b>Dividends</b>
22	= (20-21)	<b>Fluxo de Caixa líquido</b>	<b>Net Cash Flow</b>

Os fluxos de caixa do negócio devem ser ajustados para direitos financeiros fixos (por exemplo, pagamentos do principal e dos juros), e a taxa de desconto deve ser ajustada para o risco associado em manter os direitos de empréstimos financeiros (ex.: compra de uma empresa feita com recursos emprestados segurados pelos ativos da companhia comprada).

## 1.4 EXPLICITAÇÃO DO QUADRO TEÓRICO

### 1.4.1 Valoração de um recurso natural através de Precificação de Opções: um protótipo de um sistema computadorizado

Para ilustrar as implicações da teoria de opções de investimento e os problemas inerentes ao método de valor presente tradicional, apresenta-se um caso hipotético de tomada de decisão de investimento de capital na indústria de mineração.

Suponha-se que uma empresa considere o desenvolvimento e a produção a partir de um novo depósito mineral. Os custos e as receitas advindas da venda dos produtos são altamente incertos. Os custos dependerão, entre outros parâmetros, da qualidade final requerida para os produtos. As receitas dependerão da habilidade da empresa para encontrar um mercado principal, da possibilidade de se descobrir um mercado secundário e da conjuntura em relação à atuação de competidores.

Essa empresa deve decidir pela realização ou não de um investimento inicial de \$ 1 milhão para o desenvolvimento da área. De forma a simplificar o problema considere-se que exista somente um cenário possível para os custos de produção e receita, os quais totalizam \$ 1 milhão e \$ 2,25 milhões respectivamente.

Analisando a questão de como a incerteza e os valores de opção modificam as análises usuais por VPL, duas situações serão apresentadas:

1. A primeira situação considera que o intervalo de tempo em que o projeto se desenvolverá é pequeno o suficiente para que a taxa de desconto que reflete o valor do dinheiro no tempo possa ser ignorada.
2. A segunda situação leva em consideração o valor do dinheiro no tempo e utiliza uma taxa de desconto de 8%.

Deve-se realizar o investimento de \$ 1 milhão para o desenvolvimento de depósito?

Ora, o valor esperado de lucro operacional é \$ 1,25 milhão, o que justificaria o desembolso de \$ 1 milhão em investimento, se o valor do dinheiro no tempo não fosse considerado (situação 1). Entretanto, ao admitir-se uma taxa de desconto de 8%, conforme apresentado na situação 2, obtém-se um valor *negativo* de VPL de \$ 161 mil. Por questões de simplificação o exemplo apresentado na Tabela 1-3 não considera tributação. O pensamento convencional poderia, assim, descartar o projeto no seu primeiro estágio de desenvolvimento.

Tabela 1-3 – Exemplo de um fluxo de caixa hipotético

Ano	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Produção (unidades)	0	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	
Receita (22.50\$/unidade)	0	225000	225000	225000	225000	225000	225000	225000	225000	225000	225000	2250000
Custo (10\$/unidade)	0	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	1000000
VP do custo de desenvolvimento	1000000											
Caixa após taxas, após desenv.	-1000000	125000	125000	125000	125000	125000	125000	125000	125000	125000	125000	250000
VPL (\$) @ 0%	250000											
VPL (\$) @ 8%	(161240)											

Entretanto, suponha que, com a realização do investimento para desenvolvimento, tenha-se estreitado a incerteza sobre os custos de produção. Após aprender mais sobre a estrutura de custo, poder-se-ia tomar a decisão de ir em frente e continuar o projeto, ou desistir do mesmo. A quantia de \$1 milhão investida cria, portanto, uma *opção*, o direito sem obrigação de continuar com a produção e comercialização. Nesse caso, o investimento poderia ser justificado (por exemplo, por efeito da redução de custo ou eventual incremento de reserva).

A lógica mostra que uma ação para criar uma opção deveria ser valorizada em um patamar mais alto do que o método de VPL sugeriria. A lacuna entre os valores obtidos a partir dos dois cálculos aparece porque a própria opção tem valor. Pode-se exercê-la seletivamente quando se tem uma vantagem e pode-se abandoná-la no caso de não ser lucrativa. O adicional de valor da opção em relação ao lucro operacional esperado de \$ 1,25 milhão depende do tamanho e das probabilidades de perdas que se pode evitar.

Suponha que se possa postergar a decisão de produção até que se tenha descoberto o verdadeiro potencial de mercado. Em função da espera, pode-se escolher ir adiante somente se a receita é alta, evitando perdas, no caso em que a receita tende a ser baixa.

A oportunidade para prosseguir com a produção é como uma opção de compra. Tomar a decisão de continuar ou não consiste em exercer aquela opção. Se é possível identificar algumas eventualidades que causariam a reanálise da decisão de continuar (tal como uma queda na demanda pelo produto), então a habilidade para esperar e evitar tais eventualidades tem valor.

A opção tem um “valor de tempo” ou um “prêmio de espera” (*holding premium*). O fato da opção ser “*in the money*” (continuar o projeto levaria a um VPL positivo) não significa, necessariamente, que a opção deveria ser exercida (nesse caso, continuar com a produção). Ao contrário, deve-se esperar até que a opção seja “*deeper in the money*”, isto é, até que o valor presente líquido de continuar a produzir seja alto o suficiente para a perda do valor da opção.

A Figura 1-6 apresenta os resultados de valores de opção obtidos a partir do modelo de Black-Scholes em função do tempo de expiração e para um dado cenário econômico hipotético.

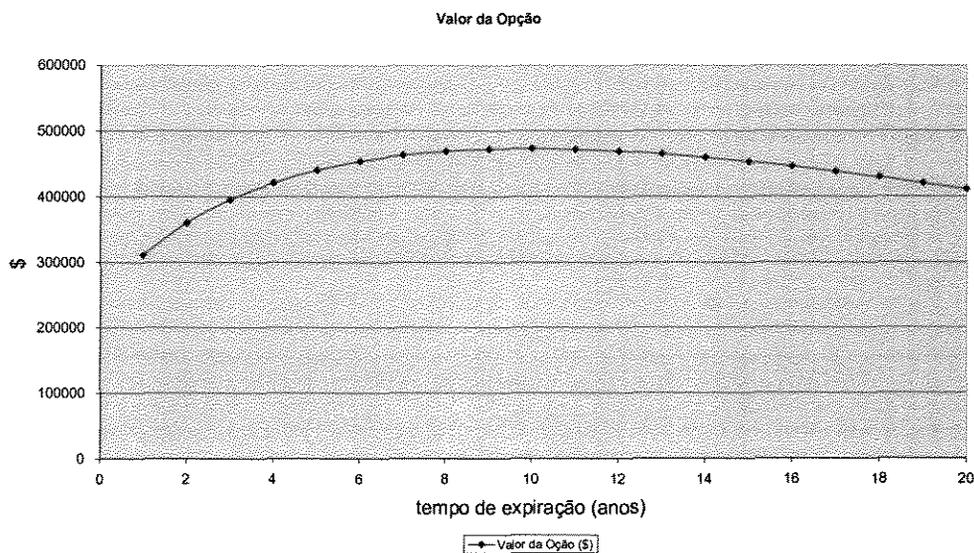


Figura 1-6 – Gráfico do Valor da Opção obtido a partir do modelo de Black-Scholes em função do tempo de expiração

### 1.4.2 A utilização da Equação de Black-Scholes

A aplicação da equação de Black-Scholes (1973) tem os seguintes pressupostos:

1. Opção de compra Européia.
2. Não há pagamento de dividendos até a maturidade.
3. Preço do ativo subjacente é uma variável contínua que segue um processo estocástico.
4. Os mercados não têm custo de transação e existem em permanência.
5. Empréstimos podem ser feitos sem limite à taxa sem risco.
6. A taxa de juros e a volatilidade são supostas constantes até a maturidade.
7. Existe livre acesso a toda a informação.
8. Preço não depende do perfil de risco do investidor.

As variáveis independentes do modelo são:

1.  $S$  – Preço do ativo subjacente (*Price of the underlying asset*)
2.  $X$  – Preço do Exercício (*Exercise Price*)
3.  $T-t$  – Tempo de expiração ou tempo de maturidade (*Time to maturity*)
4.  $r$  – Taxa livre de risco (*Riskless rate*)
5.  $\sigma$  – Volatilidade (*Volatility*)

Pela equação de Black-Scholes o valor teórico de uma opção de compra Européia é:

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (1-1)$$

onde:

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (1-2)$$

e

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \quad (1-3)$$

e  $N(d_1)$ ,  $N(d_2)$  são as respectivas funções de distribuição acumuladas (cdf – cumulative distribution function).

O valor teórico de uma opção de venda Européia pode ser obtida pela Relação de Paridade Put-Call:

$$c + Xe^{-r(T-t)} = p + S, \quad (1-4)$$

e para opções Americanas:

$$c + Xe^{-r(T-t)} \leq p + S. \quad (1-5)$$

A Figura 1-7 apresenta um exemplo de dados de entrada e de saída de um programa de valoração da opção de um recurso natural através do modelo de Black e Scholes. A partir dos valores adotados na Tabela 1-2 e de parâmetros assumidos para as variáveis econômico-financeiras independentes (taxa livre de risco, taxa de dividendos, volatilidade e tempo de expiração) pode-se determinar o valor da opção.

As Figuras 1-8 e 1-9 ilustram o efeito da data de expiração e da volatilidade sobre o valor da opção de um recurso natural. Pode-se verificar o evidente crescimento do valor da opção em função do aumento de valores nas variáveis tempo de expiração e volatilidade.

This program calculates the value of a natural resource option

#### Assumptions

1. All the assumptions underlying the Black-Scholes model apply
2. The estimated reserves of the natural resource are known

---

#### THE USER HAS TO INPUT THE FOLLOWING VARIABLES

1. Present value of estimated reserves, current price and marginal costs
2. Variance in the price of the natural resource
3. Present value of the cost of developing the natural resource
4. Expected annual AFTER-TAX cashflow from resource after it is developed
5. Riskless interest rate that corresponds to relinquishment period
6. Length of the relinquishment period on resource/reserve

#### INPUTS RELATING THE UNDERLYING ASSET

Enter the estimated reserves of the natural resource (in units) ->100000

Enter the current price of the natural resource, per unit (in currency) ->22.50

Enter the marginal cost per unit of extracting the natural resource (in currency) ->10.00

Enter the standard deviation in the price of the natural resource (in %) ->30

Enter the estimated annual after-tax cashflow after developing resource (in currency)->50000

#### INPUTS RELATING TO THE OPTION

Enter the present value of the cost of developing the resource option (in currency) ->1000000

Enter when the rights to resource will be relinquished (in years) ->10

#### GENERAL INPUTS

Enter the riskless rate that corresponds to the option lifetime (in %) ->8

#### VALUING A LONG TERM OPTION/WARRANT

Stock Price	= 1250000
Strike Price	= 1000000
Expiration (in years)	= 10
T.Bond rate (%)	= 8
Variance in price	= 0.09
Annualized dividend yield (%)	= 4
Value of the natural resource option	= 4.7262e+005

Figura 1-7 – Dados de entrada e de saída de um programa de valoração da opção de um recurso natural através do modelo de Black&Scholes

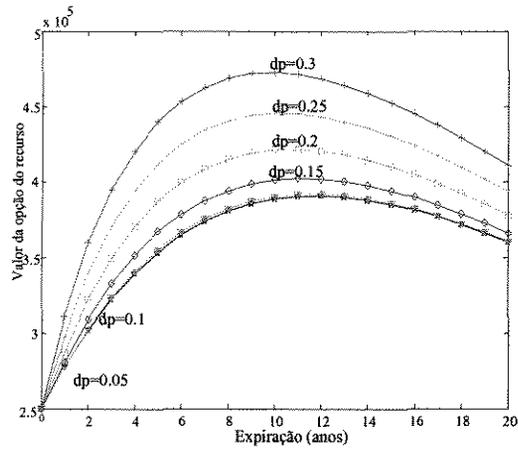


Figura 1-8 – Gráfico ilustrando o efeito da data de expiração e da volatilidade ( $\sigma = dp =$  desvio padrão) sobre o valor da opção de um recurso natural

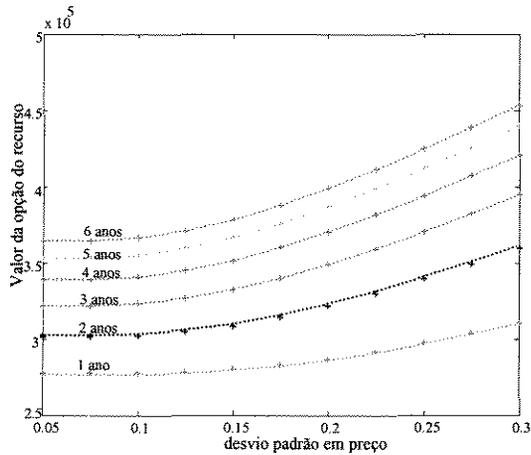


Figura 1-9 – Gráfico ilustrando o efeito da volatilidade e da data de expiração sobre o valor da opção de um recurso natural

### 1.4.3 A utilização da Simulação de Monte Carlo

A Simulação de Monte Carlo é a técnica que consiste em simular por tentativas o comportamento do ativo subjacente ou deste e de outra variável que não se assuma constante durante o processo. O valor do instrumento derivado é, pois, o resultado do valor atual do seu valor esperado no vencimento.

Considere-se um instrumento derivado que paga  $f_T$  no momento T.

O seu valor no momento  $t$  é:

$$f_T = \hat{E}[f_T e^{-\bar{r}(T-t)}]. \quad (1-6)$$

$\hat{E}$  = a expectativa num mundo livre de risco,

$\bar{r}$  = taxa de juros instantânea sem risco média entre  $t$  e  $T$ .

A equação anterior pode simplificar-se em:

$$f_T = e^{-\bar{r}(T-t)} \hat{E}[f_T]. \quad (1-7)$$

O procedimento pode ser assim simplificado:

1. Simular um caminho aleatório em um mundo livre de risco para a variável aleatória correspondente ao ativo subjacente (usar como declive a taxa sem risco  $\mu = r_f$ ).
2. Determinar, caso tivesse sido este o verdadeiro percurso da variável aleatória, qual o valor no vencimento do instrumento derivado ( $f_T$ ).
3. Repetir os passos 1 e 2  $N$  vezes (v.g. 10000 vezes).
4. Calcular o Valor Esperado do instrumento derivado no vencimento (em  $T$ ) através de uma média aritmética simples.
5. Atualizar para  $t$  o valor encontrado em 4.

As vantagens desta técnica são as seguintes:

1. É uma técnica numérica bastante eficiente.
2. Pode ser usada com mais que uma variável aleatória.
3. Permite apurar o erro padrão das estimativas realizadas.
4. Permite avaliar opções com pressuposto de volatilidade estocástica.
5. Pode-se calcular os parâmetros para cobertura dinâmica.

A principal desvantagem é que a técnica só pode ser usada para opções de padrão Europeu.

A Figura 1-10 apresenta um exemplo de dados de entrada de um programa de valoração da opção de um recurso natural através da Simulação de Monte Carlo. Utilizou-se os mesmos parâmetros adotados na Tabela 1-2 e Figura 1-6. O programa desenvolvido em MATLAB<sup>®</sup> solicita parâmetros relativos ao ativo subjacente, ao tempo de expiração, a taxa livre de risco e ao número de simulações a serem realizadas e representadas de forma gráfica.

A Figura 1-11 mostra os dados de saída do programa para cálculo do valor de uma opção de compra de padrão Europeu, conforme referenciado acima. O processo é realizado tantas vezes quanto o número de simulações requeridas pelo usuário. Após o processamento de todas as simulações é possível calcular o valor médio da opção na data de expiração bem como o VPL do valor médio da opção.

A Figura 1-12 ilustra a variação do preço do ativo ao longo do horizonte de tempo simulado. O preço inicial corresponde ao valor de 1250000, que é o preço atual do ativo informado na Figura 1-9. A representação é feita para as simulações 1, 10, 100, 200, 300, 400 e que correspondem aos números de simulações solicitadas para representação.

A Figura 1-13 mostra o comportamento do preço do ativo na data de expiração da opção para as 500 simulações realizadas.

A Figura 1-14 sumariza o valor da opção na data de expiração para as 500 simulações realizadas.

This program calculates the value of an option by using Monte Carlo simulation

#### INPUTS RELATING THE UNDERLYING ASSET

Enter the current stock price (in currency) ->1250000

Enter the exercise price (in currency) ->1000000

Enter the volatility (in % per year) ->30

#### INPUTS RELATING TO THE OPTION

Enter time to maturity (in working days)->2500

#### GENERAL INPUTS

Enter the number of working days per year ->250

Enter the number of simulations ->500

Enter the maximum step size (in days) ->50

Enter the simulation number to be plotted (max 6)->1

Enter the simulation number to be plotted (max 6)->10

Enter the simulation number to be plotted (max 6)->100

Enter the simulation number to be plotted (max 6)->200

Enter the simulation number to be plotted (max 6)->300

Enter the simulation number to be plotted (max 6)->400

Enter the riskless rate that corresponds to the option lifetime (in %) ->8

Figura 1-10 – Dados de entrada de um programa para cálculo do valor de uma opção de compra de padrão Europeu

#### VALUING A CALL OPTION

Running simulation # 1

.

.

Running simulation # 499

Running simulation # 500

Average Stock Price value = 1.3858e+006

NPV of Average Stock Price value = 6.4187e+005

Average Value of the option = 4.1153e+005

NPV of Average Value of the option = 1.9062e+005

Figura 1-11 – Dados de saída de um programa para cálculo do valor de uma opção de compra de padrão Europeu

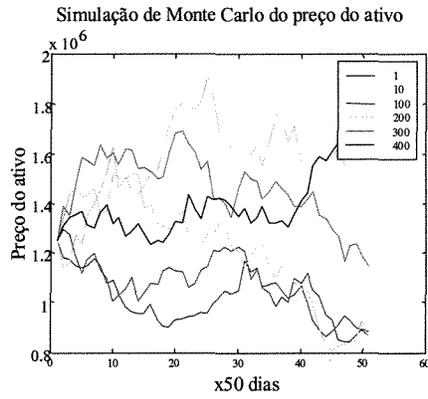


Figura 1-12 – Gráfico da variação do preço do ativo ao longo do horizonte de tempo simulado

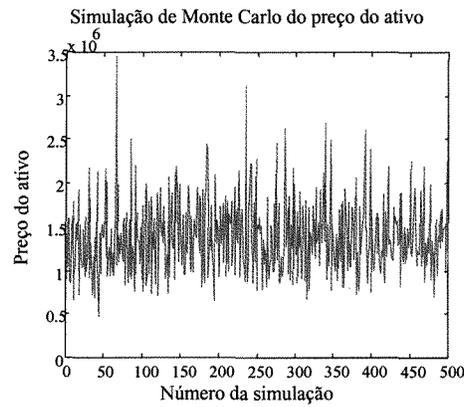


Figura 1-13 – Gráfico do preço do ativo na data de expiração da opção para 500 simulações realizadas

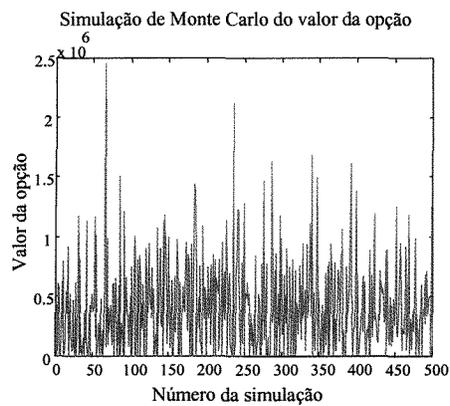


Figura 1-14 – Gráfico do valor da opção na data de expiração para 500 simulações realizadas



# CAPÍTULO 2

## 2 INVESTIMENTOS EM MÚLTIPLOS ESTÁGIOS

O objetivo deste capítulo é apresentar a terminologia, os modelos e mostrar como a abordagem de opções permite que a análise se beneficie de um conjunto de informações mais amplo.

Os exemplos e discussões são úteis para introduzir os principais conceitos, mas a análise de projetos requer um instrumental mais sofisticado.

### 2.1 A abordagem de opções para a decisão de investir e os principais conceitos

Irreversibilidade, incerteza e possibilidade de adiamento são três características importantes das decisões de investimento. Na prática, as decisões dos investidores levam em conta cada uma destas características e as suas interações. A abordagem de opções é uma tentativa de modelar teoricamente as decisões, e seu entendimento requer uma análise cuidadosa dessas características (Dixit e Pindyck, 1993).

Uma despesa de investimento é um custo afundado e, portanto, irreversível. Investimentos específicos de uma empresa ou de uma indústria são, em grande parte, custos afundados. São específicos de cada firma e irrecuperáveis nesse sentido. Mesmo investimentos não específicos de empresas são parcialmente irreversíveis, e a irreversibilidade pode ser produzida pela regulação ou por arranjos institucionais.

A incerteza sobre o futuro é a segunda característica importante da decisão de investir. Os valores do projeto e da opção de investir e a própria decisão de investir são afetados pela incerteza associada a variáveis relevantes, como o preço do produto, o custo dos insumos, a taxa de juros, a taxa de câmbio, a oferta de crédito e a regulação.

A terceira característica é a possibilidade de adiamento do investimento. As empresas nem sempre têm essa possibilidade. Considerações estratégicas podem forçá-las a antecipar investimentos para inibir o crescimento dos competidores efetivos ou a entrada de competidores potenciais na indústria. O adiamento dos projetos é, entretanto, factível. A empresa deve sempre comparar o custo de adiar com os benefícios de esperar informação nova para subsidiar a decisão de investir.

Estas características - irreversibilidade, incerteza e possibilidade de adiamento - podem ser sintetizadas na seguinte analogia entre a oportunidade de investimento e a opção financeira (Dixit e Pindyck, 1993): uma empresa com uma oportunidade de investimento irreversível carrega uma opção de investir no futuro (ou de esperar); ela tem o direito - mas não a obrigação - de comprar um ativo (o projeto) no futuro, a um preço de exercício (o investimento). Quando a empresa investe, ela exerce a opção e paga um custo de oportunidade igual ao seu valor. O exercício da opção (o investimento) é irreversível, mas a firma sempre tem a possibilidade de preservar o valor de sua opção (adiar o investimento) até que as condições de mercado se tornem mais favoráveis.

## 2.2 Determinantes da opção de investir

O valor da opção de investir é afetado por variáveis como o preço do produto, a taxa de juros, a taxa de câmbio, o custo do investimento, a oferta de crédito e a regulação. A incerteza sobre o comportamento dessas variáveis no futuro também afeta o valor da opção. Neste capítulo, alguns exemplos serão apresentados para mostrar como o valor da opção ( $F$ ) e a decisão de investir dependem do comportamento do preço do produto, do custo do investimento e da incerteza associada com essas variáveis.

## 2.3 Modelo para investimentos em um estágio

O modelo usado nas apresentações desta seção é baseado em Dixit e Pindyck (1993) e as inovações no modelo original, descritas nas equações, são a inclusão das variáveis de financiamento de longo prazo ( $B$  e  $E$ ) e os ajustes requeridos para o estudo de projetos com horizonte finito (incorporação da variável  $\lambda$ ).

O preço  $P$  (equação 2-1) é uma variável aleatória que segue um movimento Browniano geométrico, com tendência  $\alpha$  e desvio padrão  $\sigma$ .

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz, \quad (2-1)$$

$$\text{onde } dz = \varepsilon_t \sqrt{dt}, \quad (2-2)$$

$$\mu = r + \phi \rho_{pm} \sigma, \quad (2-3)$$

onde:

$r$  taxa de juros do ativo sem risco ,

$\phi \rho_{pm} \sigma$  prêmio de risco ,

$\phi$  preço de mercado do risco ,

$\rho_{pm}$  correlação do valor do projeto com o portfólio de mercado ,

$$\delta = \mu - \alpha, \quad (2-4)$$

$$\pi(P) = \max[P - C, 0], \quad (2-5)$$

$$V(P) = K_1 P^{\beta_1} + B, \text{ se } P < C, \quad (2-6)$$

$$V(P) = B_2 P^{\beta_2} + P/(\delta + \lambda) - C/(r + \lambda) + B, \text{ se } P > C, \quad (2-7)$$

onde:

$B_2 P^{\beta_2}$  valor da opção de suspender a produção ,

$P/(\delta + \lambda)$  preço descontado ,

$C/(r + \lambda)$  custo descontado ,

$$V(P) \cong (P - C)/(\delta + \lambda), \text{ se } \sigma = 0, \quad (2-8)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - (r - \delta)/\sigma^2 + \sqrt{\left[ (r - \delta)/\sigma^2 - \frac{1}{2} \right]^2 + 2r/\sigma^2}, \quad (2-9)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} - (r - \delta)/\sigma^2 - \sqrt{\left[ (r - \delta)/\sigma^2 - \frac{1}{2} \right]^2 + 2r/\sigma^2}, \quad (2-10)$$

$$K_1 = \frac{C^{1-\beta_1}}{\beta_1 - \beta_2} \left( \frac{\beta_2}{r + \lambda} - \frac{\beta_2 - 1}{\delta + \lambda} \right), \quad (2-11)$$

$$B_2 = \frac{C^{1-\beta_2}}{\beta_1 - \beta_2} \left( \frac{\beta_1}{r + \lambda} - \frac{\beta_1 - 1}{\delta + \lambda} \right), \quad (2-12)$$

$$F(P) = A_1 P^{\beta_1}, \quad (2-13)$$

$$(\beta_1 - \beta_2)B_2 (P^*)^{\beta_2} + (\beta_1 - 1)P^*/(\delta + \lambda) - \beta_1 [C/(r + \lambda) + I - E] = 0, \quad (2-14)$$

$$A_1 = B_2 (P^*)^{\beta_2 - \beta_1} + (P^*)^{1 - \beta_1} / (\delta + \lambda) - C (P^*)^{-\beta_1} / (r + \lambda) - I (P^*)^{-\beta_1} + E (P^*)^{-\beta_1}. \quad (2-15)$$

Na equação (2-1), o preço  $P$  é uma variável aleatória que segue um movimento Browniano geométrico, com tendência  $\alpha$  e desvio padrão  $\sigma$ .  $dz$ , o incremento de um processo de Wiener em tempo contínuo, é dado pelo produto de  $\varepsilon_t$ , uma variável aleatória retirada de uma distribuição normal padrão, não correlacionada serialmente, e da raiz quadrada de  $dt$ , o diferencial do tempo. Isso faz com que as variações  $dz$  sejam independentes, normalmente distribuídas e com variância que aumenta linearmente com o tempo.

Para investir no projeto, a empresa requer uma taxa de retorno pelo menos igual à taxa de desconto  $\mu$ . Na equação (2-3),  $\mu$  é definida como a soma da taxa de juros do ativo sem risco ( $r$ ) e de um prêmio de risco que depende do preço de mercado do risco ( $\phi$ ), da correlação do valor do projeto com o portfólio de mercado ( $\rho_{pm}$ ) e do desvio padrão  $\sigma$ .  $\mu$  também é igual à soma dos ganhos de capital ( $\alpha$ ) e da taxa de dividendos ( $\delta$ ) (equação 2-4).  $\phi$  e  $\rho_{pm}$  são tratados como parâmetros estruturais dados pelo mercado. Desse modo, não há necessidade de conhecê-los separadamente. Para verificação em detalhes sobre a taxa de desconto e sua determinação de acordo com a teoria do *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), ver Dixit e Pindyck (1993), Brealey e Myers (1992) e Blanchard e Fischer (1989). A condição fundamental de equilíbrio do modelo CAPM diz que  $\mu = r + \phi\rho_{pm}\sigma$  (equação 2-3). De acordo com o modelo CAPM  $\mu$  deve refletir o risco (não diversificável) sistemático do ativo. O custo do capital próprio ( $\mu$ ) pode ser obtido a partir do modelo de avaliação de ativos financeiros em equilíbrio (CAPM) através da relação  $\mu = r + \beta(r_m - r)$ , onde  $\beta$  é o índice de risco da ação da empresa e  $r_m$  é a taxa de juros média do mercado.

As unidades de medida são escolhidas de modo que o projeto, uma vez concluído, produza uma unidade de produto por ano, a um custo operacional anual  $C$ . Por hipótese, a produção poderá ser temporariamente suspensa, sem custos, se  $P$  ficar abaixo de  $C$ , e reativada posteriormente, igualmente sem custos, quando  $P$  voltar a ultrapassar  $C$ . Consequentemente, o lucro do projeto em cada instante  $t(\pi)$  é dado pela equação (2-5).

As equações (2-6) e (2-7) mostram o valor do projeto,  $V$ , nas regiões de lucro zero ( $P < C$ ) e de lucro positivo ( $P > C$ ). A função  $V$  é continuamente diferenciável no ponto  $P = C$  e, portanto, ambas as equações são válidas nesse ponto. Na equação (2-6),  $V$  é uma função de  $P$ , o preço do produto, de  $B$ , o valor presente criado pela introdução dos financiamentos de longo prazo, e de uma combinação de parâmetros. Na região de lucro zero, uma parte do valor do projeto  $K_1 P^{\beta_1}$  se deve inteiramente à possibilidade de reativar a produção no futuro. As expressões dos parâmetros  $\beta_1$  e  $K_1$ , necessários para calcular  $V$ , estão explicitados, respectivamente, nas equações (2-9) e (2-11).

Na equação (2-7),  $V$  é igual à soma dos lucros futuros descontados  $P/(\delta + \lambda) - C/(r + \lambda)$ , do valor presente criado pelos financiamentos ( $B$ ) e do valor da opção de suspender a produção ( $B_2 P^{\beta_2}$ ). As expressões dos parâmetros  $\beta_2$  e  $B_2$ , necessários para calcular  $V$ , estão descritas, respectivamente nas equações (2-10) e (2-12).

O parâmetro  $\lambda$ , que aparece nas expressões dos lucros futuros descontados – equações 2-7 e 2-8 –, é um artifício que permite tratar projetos de horizonte finito como se fossem de horizonte infinito. Em Dixit e Pindyck (1993), ele é apresentado como uma taxa de depreciação capaz de igualar os valores presentes do projeto sob as hipóteses de horizonte finito ou infinito. Com  $\lambda$  incorporado na taxa de desconto, o modelo se aplica integralmente à análise de projetos com horizonte finito.

As equações (2-13) a (2-15) definem o valor da opção de investir e a regra de investimento ótima. Na equação (2-13), o valor da opção de investir  $F$  é uma função de  $P$ , o preço do produto, e de uma combinação de parâmetros. A equação (2-14) é a regra de investimento ótima. Ela permite calcular o preço crítico  $P^*$  como uma função implícita do valor do investimento  $I$ , do custo operacional  $C$ , dos financiamentos ( $E$ ), da taxa de juros  $r$  e de uma combinação de parâmetros. Dado  $P^*$ , a equação (2-15) define o valor do parâmetro  $A_1$ , necessário para calcular a trajetória de  $F$ .

Um exemplo numérico ajuda a ilustrar a solução. Admita-se um projeto que tem um horizonte de sete anos. A produção de uma unidade de produto por ano requer um investimento  $I = 113$  no ano. O custo operacional anual  $C$  é igual a 208. A empresa espera que o preço  $P$  diminua à taxa de 0,8% a.a.. A taxa de desconto do projeto ( $\mu$ ) é igual a 12% a.a. e tem dois componentes: os ganhos de capital ( $\alpha$ ) e a taxa de dividendos  $\delta$ . Tem-se que  $\alpha$  é igual a tendência de redução de  $P$  (-0,8% a.a.), o que faz com que  $\delta = \mu - \alpha$  seja igual a 12,8% a.a.. A taxa de juros do ativo sem risco ( $r$ ) é de 8%.

A produção poderá ser temporariamente suspensa, sem custos, se  $P$  cair abaixo de  $C$ , podendo ser reativada depois, igualmente sem custos, se  $P$  voltar a ultrapassar  $C$ . Portanto, o lucro anual será, no mínimo, igual a zero (quando  $P$  for menor do que  $C$ ) e, no máximo, igual a  $P - C$ .

A incerteza básica se refere ao comportamento da demanda pelo produto. Dada a escala de produção, essa incerteza se reflete inteiramente no comportamento do preço  $P$ . Consequentemente, o valor do projeto ( $V$ ) e o valor da opção de investir ( $F$ ) são determinados pela trajetória esperada para  $P$ . Um parâmetro importante dessa trajetória é  $\sigma$ , o desvio padrão anual de  $P$ . O outro é a tendência ou deriva  $\alpha$ .

A Figura 2-1 mostra o valor do projeto ( $V$ ) como função de  $P$ . O valor esperado do fluxo de lucros do projeto ( $V$ ) é monotonicamente crescente em  $P$ . Quanto maior for a incerteza sobre o comportamento de  $P$  no futuro (maior for  $\sigma$ ), maiores serão os lucros esperados no futuro e maior será o valor do projeto.

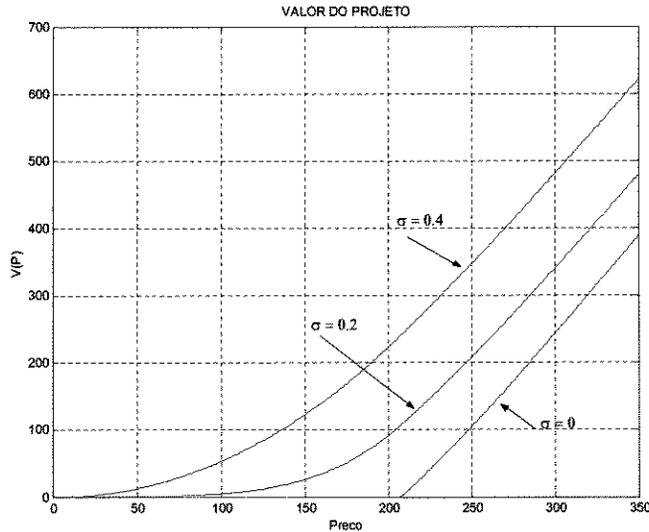


Figura 2-1 – Valor do projeto (V) em função de P (C=208, I=113,  $\alpha=-0,8\%$ ,  $\mu=12\%$  a.a.,  $r=8\%$  a.a.,  $\lambda=18\%$ , sem financiamento)

A irreversibilidade do investimento e a incerteza sobre o futuro criam uma opção de investir no futuro. A decisão de investir agora ou esperar depende da comparação entre o valor da opção de investir ( $F$ ) e o valor presente líquido do projeto ( $V - I$ ). A Figura 2-2 representa  $F$  e  $V - I$  como funções de  $P$ , para  $\sigma = 0$ ,  $\sigma = 0,2$  (20% a.a.),  $\sigma = 0,4$  (40% a.a.) e  $r = 8\%$  a.a. O preço crítico ( $P^*$ ) para  $\sigma = 0,2$ , acima do qual a firma deve investir imediatamente, é igual a 280,4. Para  $P < 280,4$ ,  $F$  é maior do que  $V - I$  e a melhor estratégia é adiar o investimento. Para  $P = 280,4$ ,  $F = V - I$  e é indiferente para a empresa esperar ou investir imediatamente. Finalmente, para  $P > 280,4$ ,  $V - I$  eventualmente ultrapassaria  $F$ . O benefício marginal de investir agora ( $V - I$ ) é maior do que o benefício marginal de esperar ( $F$ ). Neste caso, a empresa deve investir imediatamente e se apropriar do VPL do projeto.

A opção de investir introduz uma cunha entre o valor do projeto ( $V$ ) e o custo do investimento ( $I$ ). Isto significa que a empresa só deve investir quando  $V$  for pelo menos tão grande quanto um valor crítico  $V^* = V(P^*)$ , que é estritamente maior do que  $I$ . No exemplo da Figura 2-2 e para  $\sigma = 0,2$ ,  $V^* = 286$ , mais de duas vezes e meia o investimento  $I$ . Em contraste, a regra tradicional do VPL induziria a empresa a investir assim que  $V$  fosse maior do que  $I = 113$ , ou seja, a contentar-se com um valor do projeto e com uma taxa interna de retorno substancialmente menores.

Os efeitos da incerteza sobre a decisão de investir estão sintetizados nas Figuras 2-2 e 2-3. A Figura 2-2 mostra que a decisão de investir depende do comportamento de  $F(P)$  e  $V(P) - I$  para diferentes valores de  $\sigma$ . Quando  $\sigma = 0$ ,  $P^* = 242,8$  e o valor do projeto  $V$  é igual ao investimento  $I$  (nesse caso, que não leva em conta a incerteza, a regra tradicional do VPL se aplica). Quando  $\sigma$  aumenta, as curvas  $F(P)$  e  $V(P) - I$  se deslocam para a esquerda. Mas o deslocamento de  $F$  é maior do que o de  $V - I$ , o que resulta em aumentos significativos de  $P^*$  e  $V^*$ .

Com  $\sigma = 0,4$ ,  $P^* = 327$  e  $V^* = 555,6$ , a empresa só deve investir se o valor do projeto for igual a pelo menos cinco vezes o investimento  $I$ . Esses efeitos da incerteza sobre a decisão de investir estão representados na Figura 2-3, que mostra os valores de  $P^*$  e de  $V^*$  para  $\sigma$  variando de zero a um (de zero a 100% a.a.).

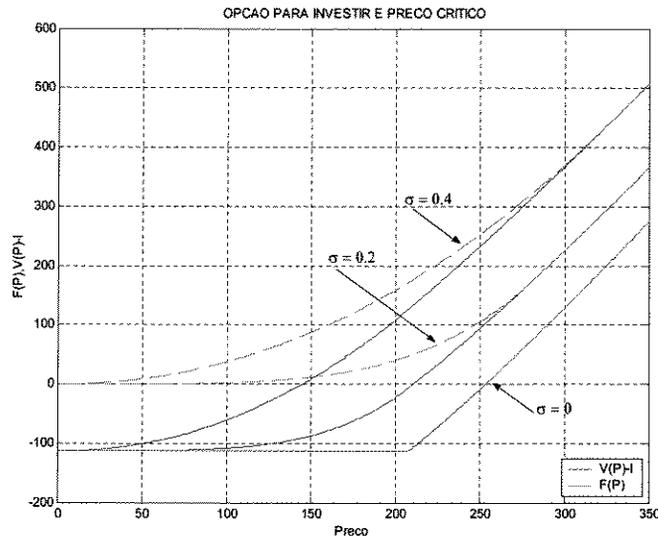


Figura 2-2 – Valor da Opção e de V-I em função de P ( $C=208$ ,  $I=113$ ,  $\alpha=-0,8\%$ ,  $\mu=12\%$  a.a.,  $r=8\%$  a.a.,  $\lambda=18\%$ , sem financiamento)

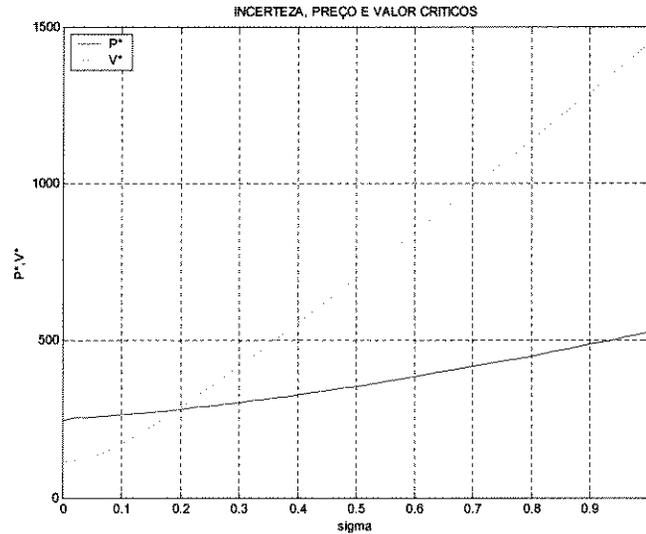


Figura 2-3 – Preço e Valor Críticos em função de  $\sigma$  ( $C=208$ ,  $I=113$ ,  $\alpha=-0,8\%$ ,  $\mu=12\%$  a.a.,  $r=8\%$  a.a.,  $\lambda=18\%$ , sem financiamento)

A Figura 2-4 mostra os efeitos de variações da taxa de juros do ativo sem risco ( $r$ ) sobre o preço crítico  $P^*$  do projeto estudado para  $\sigma = 0,2$  e  $0,4$ . Nas vizinhanças do preço crítico, uma redução na taxa de juros aumenta o valor do projeto ( $V$ ) e diminui o valor da opção de investir ( $F$ ). O resultado é uma redução do preço crítico  $P^*$  (acima do qual a empresa decide investir) e um estímulo ao investimento. Por exemplo, para  $\sigma = 0,2$ , uma redução da taxa de juros real de  $8\%$  a.a. para  $5\%$  a.a. diminui o preço crítico de  $280$  para  $265$ . Já com  $\sigma = 0,4$ , a mesma redução da taxa de juros diminui o preço crítico de  $327$  para  $298,5$ . Quanto maior for a incerteza, maior será o impacto da redução da taxa de juros no investimento. Os incentivos dessa política serão menos eficazes se persistir uma incerteza elevada sobre o nível da taxa de juros no futuro.

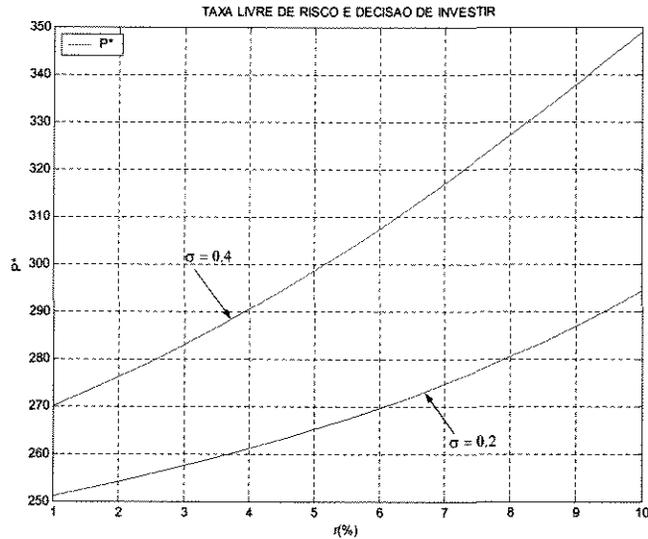


Figura 2-4 – Preço crítico em função da taxa livre de risco ( $C=208$ ,  $I=113$ ,  $\alpha=-0,8\%$ ,  $\mu=12\%$  a.a.,  $r=8\%$  a.a.,  $\lambda=18\%$ , sem financiamento)

No que diz respeito aos impactos dos financiamentos de longo prazo na decisão de investir, há dois efeitos que devem ser considerados. Por um lado, dadas as condições de crédito (níveis da taxa de juros e do *spread*, prazos de carência e de amortização, participação dos financiamentos no investimento total) e a taxa de desconto, os financiamentos aumentam o valor presente do projeto ( $V$ ). Esse aumento será tanto maior quanto mais favoráveis forem as condições do crédito. Mas, por outro lado, os financiamentos também aumentam o valor da opção de investir no futuro ( $F$ ). Esse efeito, isoladamente, incentiva o adiamento do investimento. Portanto, as expectativas da empresa sobre a disponibilidade do crédito de longo prazo no futuro são importantes para determinar em que medida  $V$  e  $F$  serão afetados.

No exemplo apresentado, foi adotada a hipótese de que a empresa continuaria a ter acesso aos financiamentos no futuro nas mesmas condições. Os efeitos da introdução dos financiamentos podem ser visualizados pela comparação entre as Figuras 2-2 e 2-5. No primeiro caso, não há financiamento (o projeto é financiado integralmente com recursos próprios). No segundo, os empréstimos participam com 29% do investimento total. O aumento de  $V$ , devido à introdução dos financiamentos, é igual a 1,4 vezes. O aumento de  $F$  depende dos níveis de  $P$  e de  $\sigma$ , mas é sempre inferior ao aumento de  $V$ . O resultado é que, na Figura 2-5, as curvas  $V - I$  são deslocadas para a

esquerda vis-à-vis a Figura 2-2. Mas, como o deslocamento da curva  $V - I$  é maior, há uma redução dos preços críticos para diferentes níveis de  $\sigma$ .

Quando  $\sigma = 0,2$ , a introdução dos financiamentos permite uma redução do preço crítico  $P^*$  (acima do qual a firma deve investir) de 280,4 para 276,2. Quando  $\sigma = 0,4$ ,  $P^*$  diminui de 327,1 para 313,3. A capacidade de incentivo ao investimento também depende das condições dos financiamentos. Quanto maior for a participação dos financiamentos no investimento total, por exemplo, maior será o estímulo ao investimento. Defina-se a variável  $S$  como a participação dos financiamentos de longo prazo no investimento total. A Figura 2-6 mostra o preço crítico  $P^*$  como função de  $S$  para diferentes níveis de incerteza. Quando  $\sigma = 0,2$ , um aumento de  $S$  de 30% para 70% reduz  $P^*$  de 276 para 270,1. Quando  $\sigma = 0,4$ , o mesmo aumento de  $S$  permite que  $P^*$  caia de 312,8 para 292,9. Assim como no caso da redução de juros, o incentivo dos financiamentos ao investimento aumenta com a incerteza: a elasticidade de  $P^*$  com relação a  $S$  passa de 0,05 (quando  $\sigma = 0,2$ ) para 0,15 (quando  $\sigma = 0,4$ ).<sup>9</sup>

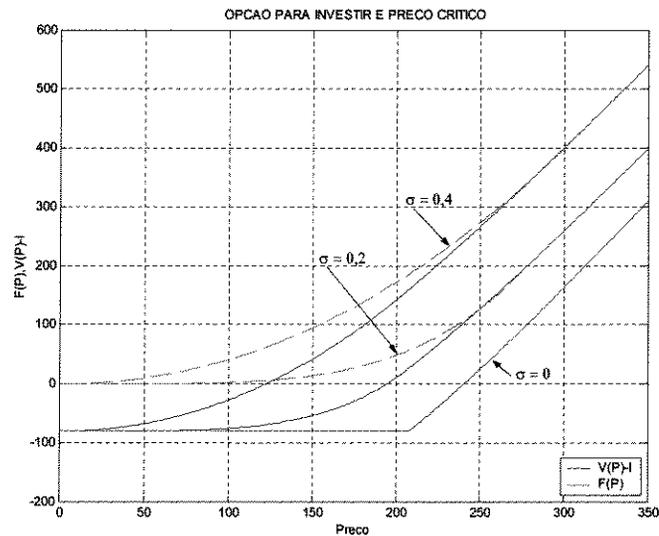


Figura 2-5 – Valor da Opção e de V-I em função de P (C=208, I=113,  $\alpha=-0,8\%$ ,  $\mu=12\%$  a.a.,  $r=8\%$  a.a.,  $\lambda=18\%$ , com financiamento)

<sup>9</sup> Isso significa que um aumento de um ponto percentual em  $S$  reduz o preço crítico em 0,05% quando  $\sigma = 0,2$ , mas essa redução passa para 0,15% quando  $\sigma = 0,4$ .

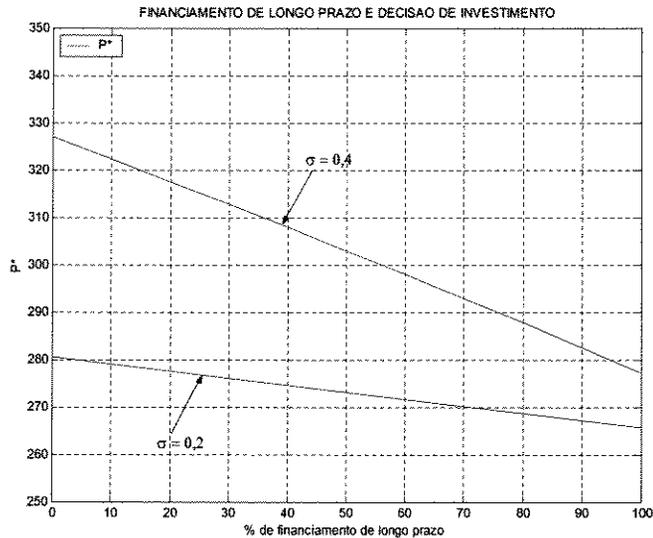


Figura 2-6 – Preço crítico em função do percentual de financiamento de longo prazo ( $C=208$ ,  $I=113$ ,  $\alpha=-0,8\%$ ,  $\mu=12\%$  a.a.,  $r=8\%$  a.a.,  $\lambda=18\%$ )

Uma simulação envolvendo as principais variáveis que afetam a decisão de investir é útil para conferir uma perspectiva dinâmica à discussão. Suponha-se que o horizonte relevante de decisão da empresa se inicie no mês 1 do ano 1. Dado um preço inicial  $P_0$ , a trajetória do preço  $P$  depende da tendência ( $\alpha$ ) e do desvio padrão  $\sigma$ . No exemplo apresentado,  $\alpha = -0,8\%$  a.a.. Considere-se  $\sigma = 20\%$  a.a.. Dados esses parâmetros, a Figura 2-7 mostra três trajetórias possíveis para  $P$  entre o mês 1 do ano 1 e o mês 6 do ano 8, a partir de um  $P_0$  igual a 243.

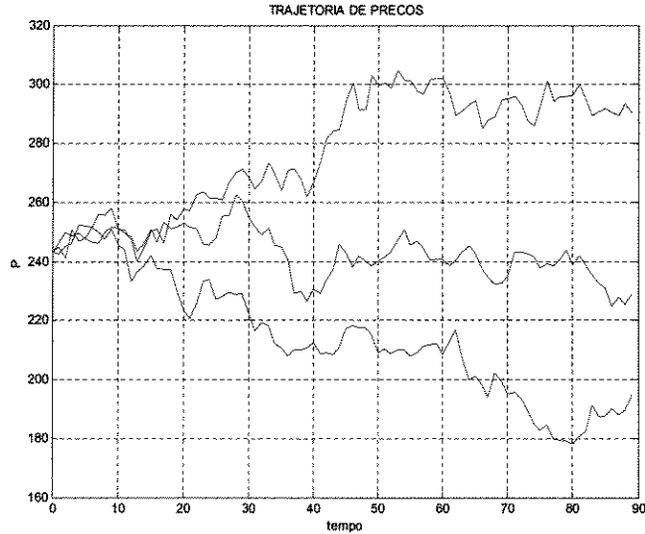


Figura 2-7 – Resultados da trajetória de preços para 3 simulações ( $\alpha=-0,8\%$ )

A Figura 2-8 descreve o comportamento da opção de investir  $F(P)$  e do valor presente líquido  $V(P) - I$  entre o mês 1 do ano 1 e o mês 6 do ano 8, para uma taxa de juros real  $r$  de 8% a.a. e uma participação dos financiamentos no investimento  $S$  de 29%. Como  $F(P)$  é sempre maior do que  $V(P) - I$ , a empresa não tem incentivo a investir nesse período.

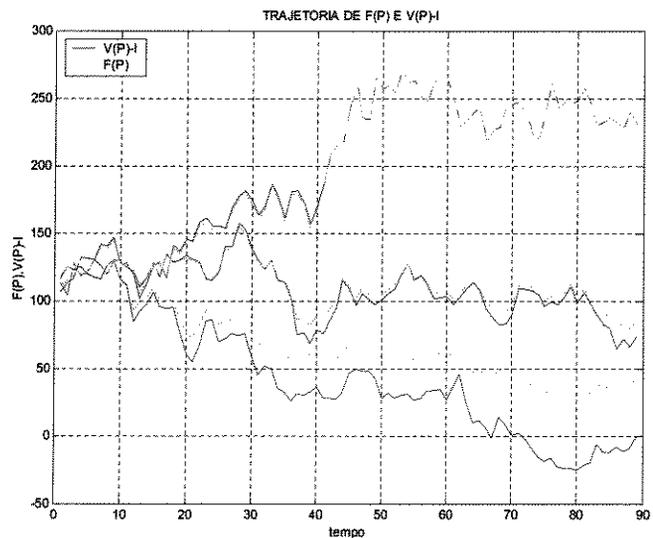


Figura 2-8 – Trajetória de  $F(P)$  e  $V(P)-I$  para 3 simulações ( $C=208$ ,  $I=113$ ,  $\alpha=-0,8\%$ ,  $\mu=12\%$  a.a.,  $r=8\%$  a.a.,  $\lambda=18\%$ )

A Figura 2-9 mostra os resultados da trajetória de preços obtidos a partir de 100 simulações. A Figura 2-10 apresenta os resultados da trajetória do valor da opção F(P) e V(P)-I obtidos a partir de 100 simulações.

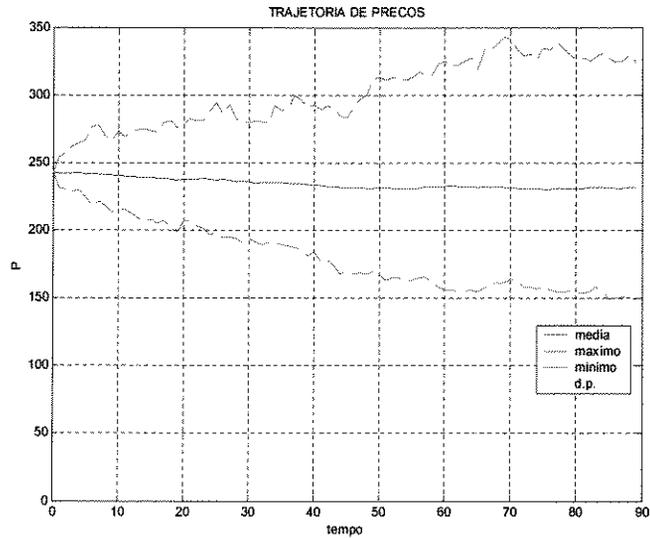


Figura 2-9 – Resultados da trajetória de preços obtidos a partir de 100 simulações ( $\alpha=-0,8\%$ )

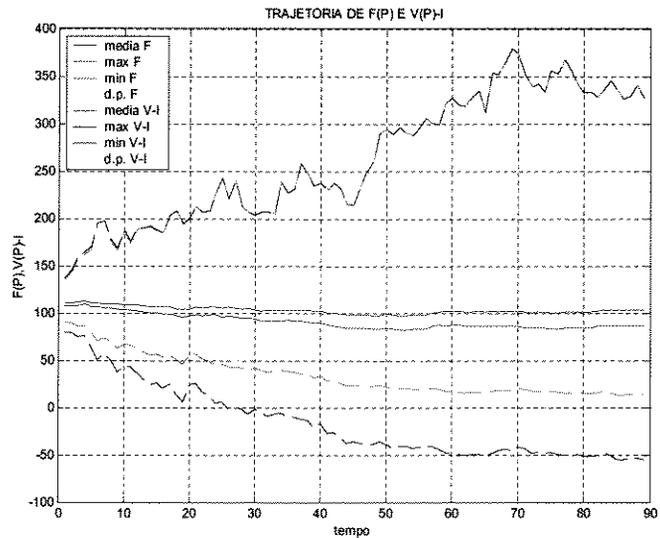


Figura 2-10 – Resultados da trajetória de F(P) e V(P)-I obtidos a partir de 100 simulações ( $C=208$ ,  $I=113$ ,  $\alpha=-0,8\%$ ,  $\mu=12\%$  a.a.,  $r=8\%$  a.a.,  $\lambda=18\%$ )

A Figura 2-11 mostra os efeitos de um aumento de  $S$  de 29% para 50%. O preço crítico é reduzido, o que incentiva a empresa a investir e faz com que  $V(P) - I$  seja superior a  $F(P)$ .

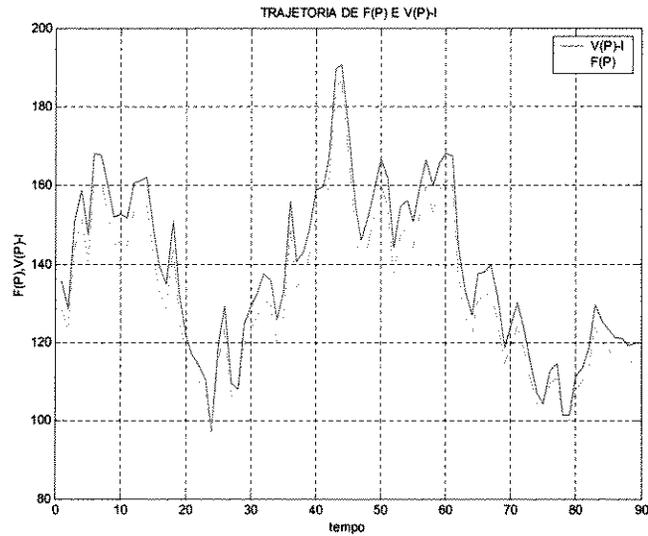


Figura 2-11 – Trajetória de  $F(P)$  e  $V(P)-I$  ( $C=208$ ,  $I=113$ ,  $\alpha=-0,8\%$ ,  $\mu=12\%$  a.a.,  $r=8\%$  a.a.,  $\lambda=18\%$  e participação dos financiamentos no investimento  $S$  de 50%)

## 2.4 Modelo de investimentos em dois estágios

O produto pode ser vendido a um preço  $P$ , o qual segue um movimento Browniano geométrico:

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz. \quad (2-16)$$

O projeto é um ativo derivado<sup>10</sup>, cujos lucros dependem do valor do ativo básico  $P$ . Pode-se então derivar o valor do projeto como uma função  $V(P)$  do preço do ativo básico. Constrói-se um portfólio livre de risco tomando-se combinações satisfatórias do ativo a ser avaliado (o projeto) e do ativo básico  $P$ . Desde que esse portfólio é livre de risco, ele deve ter uma taxa de retorno livre de risco. Esta condição leva a uma equação diferencial para o valor desconhecido do projeto. A equação pode, então, ser resolvida dadas as condições apropriadas de fronteira.

Admita a construção de um portfólio no tempo  $t$  que contenha uma unidade do projeto, e uma posição curta de  $n$  unidades de produção, onde se escolhe  $n$  para tornar o portfólio livre de risco. Considera-se a propriedade desse portfólio em um intervalo de tempo pequeno  $(t, t + dt)$ .

O proprietário do projeto obterá o fluxo de receita ou lucro  $P dt$  em um intervalo de tempo de  $dt$ . Também, o proprietário de cada unidade de posição curta deve pagar ao proprietário da correspondente posição de longo prazo uma quantidade igual a taxa de dividendos ou *convenience yield*, isto é,  $\delta P dt$ . A manutenção do portfólio resulta um dividendo líquido  $(P - n\delta P) dt$  e produz um ganho de capital (estocástico) igual a

$$dV - n dP = dV - n(\alpha P dt + \sigma P dz).$$

---

<sup>10</sup> Diz-se de operação financeira baseada em expectativas quanto ao comportamento futuro de um dado mercado; derivativo.

Utilizando-se o Lema de Ito para expressar  $dV$  em termos do processo de preço tem-se:

$$dV = \left\{ \alpha P V'(P) + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) \right\} dt + P V'(P) \sigma dz .$$

Substituindo  $dV$  em  $(dV - n dP)$  tem-se

$$\begin{aligned} dV - n dP &= \left\{ \alpha P V'(P) + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) \right\} dt + P V'(P) \sigma dz - n(\alpha P dt + \sigma P dz) \\ &= \left\{ \alpha P V'(P) + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) \right\} dt - n \alpha P dt + P V'(P) \sigma dz - n \sigma P dz \\ &= \left\{ \alpha P [V'(P) - n] + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) \right\} dt + P [V'(P) - n] \sigma dz . \end{aligned}$$

Escolhe-se  $n = V'(P)$  de forma que os termos em  $dz$  desapareçam e o portfólio se torne livre de risco. O retorno total para o portfólio é então

$$\begin{aligned} dV - n dP &= \left\{ \alpha P [V'(P) - n] + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) \right\} dt \\ &= \left[ P - \delta P V'(P) + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) \right] dt . \end{aligned}$$

Igualando a última expressão ao retorno livre de risco  $r[V(P) - nP]dt$  e simplificando os termos tem-se a equação diferencial

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''(P) + (r - \delta)PV'(P) - rV(P) + P = 0.$$

O valor do projeto  $V(P)$  deve, então, satisfazer a seguinte equação diferencial:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''(P) + (r - \delta)PV'(P) - rV(P) + \pi(P) = 0, \quad (2-17)$$

cuja solução é

$$V(P) = \begin{cases} A_1 P^{\beta_1} & \text{se } P < C \\ B_2 P^{\beta_2} + P/\delta - C/r & \text{se } P > C \end{cases} \quad (2-18)$$

As constantes  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são as soluções da equação quadrática fundamental e são funções de  $r, \delta, \sigma$ .

As constantes  $A_1$  e  $B_2$  são determinadas a partir da continuidade de  $V(P)$  e  $V'(P)$  em  $P = C$  e são iguais a:

$$A_1 = \frac{C^{1-\beta_1}}{\beta_1 - \beta_2} \left( \frac{\beta_2}{r} - \frac{\beta_2 - 1}{\delta} \right), \quad (2-19)$$

$$B_2 = \frac{C^{1-\beta_2}}{\beta_1 - \beta_2} \left( \frac{\beta_1}{r} - \frac{\beta_1 - 1}{\delta} \right). \quad (2-20)$$

O 2º Estágio do Investimento

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F_2 V''(P) + (r - \delta) P F_2'(P) - r F_2(P) = 0, \quad (2-21)$$

$$F_2(P) = D_2 P^{\beta_1}. \quad (2-22)$$

A partir das equações de fronteira determina-se que:

$$D_2 = \frac{\beta_2 B_2}{\beta_1} (P_2^*)^{(\beta_2 - \beta_1)} + \frac{1}{\delta \beta_1} (P_2^*)^{(1 - \beta_1)}, \quad (2-23)$$

e  $P_2^*$  é a solução para a equação

$$(\beta_1 - \beta_2) B_2 (P_2^* / \delta - \beta_1 (C / r + I_2)) = 0, \quad (2-24)$$

$$F_2(P) = \begin{cases} D_2 P^{\beta_1} & \text{para } P < P_2^* \\ V(P) - I_2 & \text{para } P \geq P_2^* \end{cases}. \quad (2-25)$$

O 1º Estágio do Investimento

Dado  $F_2(P)$  e  $P_2^*$ , pode-se voltar ao primeiro estágio do projeto e encontrar o valor da opção de investir,  $F_1(P)$ , e o preço crítico  $P_1^*$ .

Através dos passos usuais, pode-se determinar que  $F_1(P)$  satisfará também a equação diferencial do segundo estágio do investimento, mas agora sujeita às condições de fronteira:

$$F_1(0) = 0, \quad (2-26)$$

$$F_1(P_1^*) = F_2(P_1^*) - I_1, \quad (2-27)$$

$$F_1''(P_1^*) = F_2''(P_1^*). \quad (2-28)$$

A solução tem a forma usual:

$$F_1(P) = D_1 P^{\beta_1}, \quad (2-29)$$

$$D_1 = \frac{\beta_2 B_2}{\beta_1} (P_1^*)^{(\beta_2 - \beta_1)} + \frac{1}{\delta \beta_1} (P_1^*)^{(1 - \beta_1)}, \quad (2-30)$$

e que  $P_1^*$  é a solução para a equação

$$(\beta_1 - \beta_2) B_2 (P_1^*)^{\beta_2} + (\beta_1 - 1) P_1^* / \delta - \beta_1 (C/r + I_2 + I_1) = 0. \quad (2-31)$$

A título de exemplo, admita-se um investimento  $I = 113$  sendo realizado em dois estágios, de valores iguais a  $I_1 = I_2 = 56,5$ . As Figuras 2-12 e 2-13 representam  $F$  e  $V - I$  como funções de  $P$ , respectivamente para  $\sigma = 0,2$  (20% a.a.) e  $\sigma = 0,4$  (40% a.a.) com  $r = 8\%$  a.a. . O preço crítico ( $P_1^*$ ) para  $\sigma = 0,2$ , acima do qual a firma deve investir imediatamente, é igual a 280,4. Para  $P < 280,4$ ,  $F$  é maior do que  $V - I$ , e a melhor estratégia é adiar o investimento. Para  $P = 280,4$ ,  $F = V - I$ , e para a empresa é indiferente esperar ou investir imediatamente. Finalmente, para  $P > 280,4$ ,  $V - I$  eventualmente ultrapassaria  $F$ . O benefício marginal de investir agora ( $V - I$ ) é maior do que o benefício marginal de esperar ( $F$ ). Neste caso, a empresa deve investir imediatamente e se apropriar do VPL do projeto. A realização do investimento em dois estágios flexibiliza a realização do segundo estágio e acarreta uma redução do preço crítico para a implementação do mesmo. O preço crítico ( $P_2^*$ ) para  $\sigma = 0,2$ , acima do qual a firma deve continuar a investir, é igual a 247,3.

Quando  $\sigma$  aumenta, as curvas  $F(P)$  e  $V(P) - I$  se deslocam para a esquerda. Mas o deslocamento de  $F$  é maior do que o de  $V - I$ , o que resulta em aumentos significativos de  $P^*$ . Com  $\sigma = 0,4$ ,  $P_1^* = 327$  e  $P_2^* = 274,9$ .

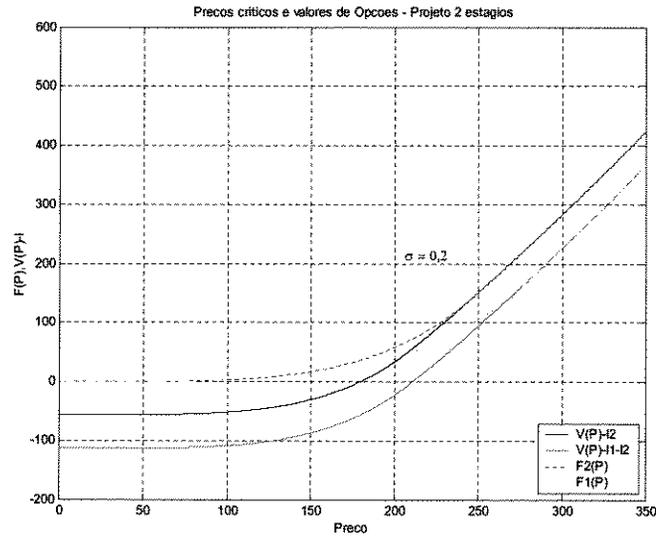


Figura 2-12 – Valor da Opção e de V-I em função de P ( $C=208$ ,  $I_1=56,5$ ,  $I_2=56,5$ ,  $\alpha=-0,8\%$ ,  $\sigma=20\%$  a.a.,  $\mu=12\%$  a.a.,  $r=8\%$  a.a.,  $\lambda=18\%$ , sem financiamento) para investimentos em dois estágios

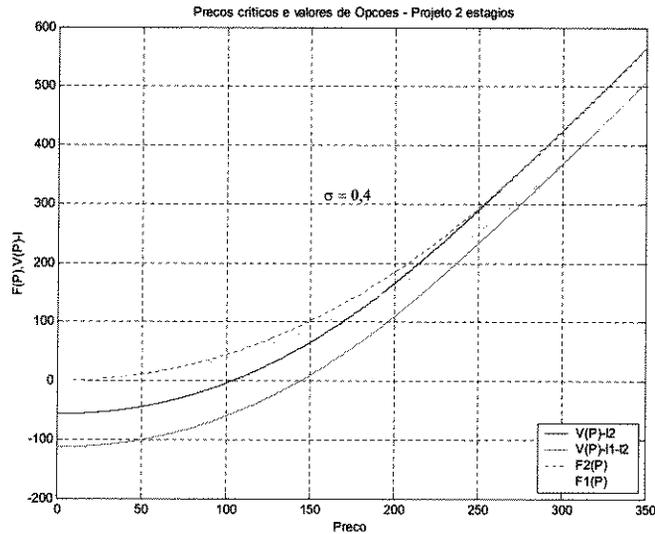


Figura 2-13 – Valor da Opção e de V-I em função de P ( $C=208$ ,  $I_1=56,5$ ,  $I_2=56,5$ ,  $\alpha=-0,8\%$ ,  $\sigma=40\%$  a.a.,  $\mu=12\%$  a.a.,  $r=8\%$  a.a.,  $\lambda=18\%$ , sem financiamento) para investimentos em dois estágios

## 2.5 Modelo de investimentos em múltiplos estágios

Os conceitos e equações apresentados no caso de investimentos em dois estágios podem ser generalizados para um número qualquer de estágios.

As Figuras 2-14 e 2-15 exemplificam um cenário com 10 estágios, onde os investimentos têm o mesmo valor para todos os estágios e são iguais a  $I_1 = I_2 = \dots = I_{10} = 11,3$ .

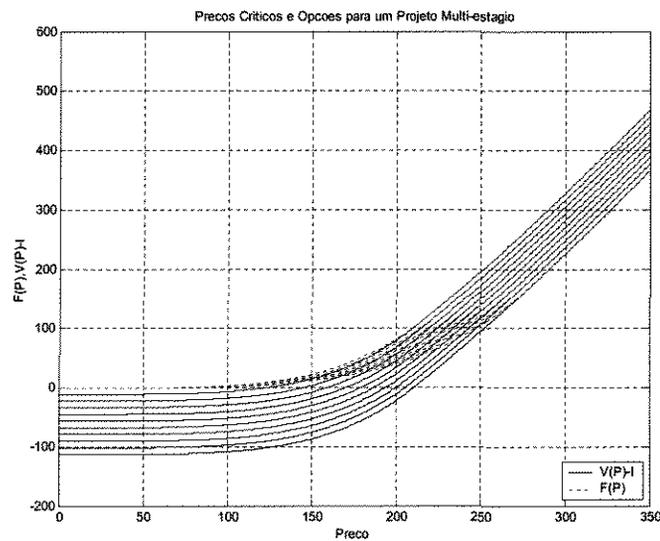


Figura 2-14 – Valor da Opção e de V-I em função de P para um projeto com 10 estágios ( $C=208$ ,  $I_{1,\dots,10}=11,3$ ,  $\alpha=-0,8\%$ ,  $\sigma=40\%$  a.a.,  $\mu=12\%$  a.a.,  $r=8\%$  a.a.,  $\lambda=18\%$ , sem financiamento)

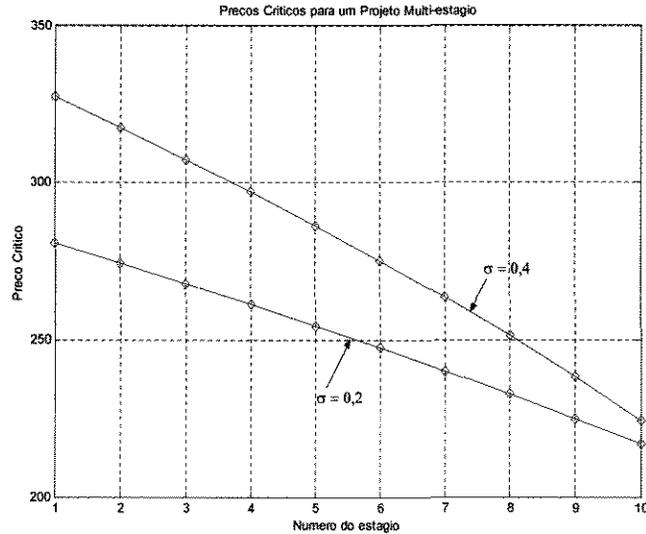


Figura 2-15 – Preço Crítico em função do número do estágio para um projeto com 10 estágios ( $C=208$ ,  $I_{1,\dots,10}=11,3$ ,  $\alpha=-0,8\%$ ,  $\sigma=40\%$  a.a.,  $\mu=12\%$  a.a.,  $r=8\%$  a.a.,  $\lambda=18\%$ , sem financiamento)

## 2.6 Opções imbricadas em uma estratégia de negócios

Desde que se permita que opções em um portfólio influenciem diretamente outras opções, existe a consideração de estratégias: série de opções explicitamente projetada para afetar umas às outras. Pode-se usar redes de opções para representar uma sequência de contingências em uma estrutura de negócios. A estratégia consiste de uma sequência particular de oportunidades de decisões.

Luehrman (1998) descreve que, em termos financeiros, uma estratégia de negócios é muito mais uma série de opções que uma série de fluxos de caixa estáticos.

Uma estratégia pode, então, ser representada em um diagrama de “Espaço de Opções”, conforme apresentado na Figura 2-16. Cada círculo representa uma opção cuja localização no espaço é determinada pela relação valor / custo e volatilidade métrica. O espaço de opções é caracterizado por duas métricas de valor. A primeira é chamada valor / custo métrico e é definida como o valor dos ativos subjacentes ( $S$ ) dividido pelo valor presente do investimento ( $X$ ). A segunda métrica é chamada volatilidade métrica e é expressa pela equação:  $volatilidade\ métrica = \sigma\sqrt{t}$ .

A dimensão de cada círculo sólido é proporcional ao valor do ativo subjacente (S) para cada opção. A área dentro do círculo tracejado é proporcional aos desembolsos requeridos (X). Desta forma um círculo tracejado dentro de um círculo sólido representa uma opção “*in-the-money*” ( $S > X$ ). Um círculo tracejado externo a um círculo sólido mostra uma opção “*out-of-the-money*”. Os segmentos de linha no diagrama indicam que as opções são imbricadas. A opção para expandir é adquirida se, e somente se, a opção para introdução do produto é exercida. Desta forma, o valor do ativo subjacente para a opção de introdução do produto inclui o valor dos fluxos de caixa operacional associado ao produto e ao valor presente da opção de expansão. Da mesma maneira, a opção para expandir a segunda vez é adquirida somente se houver a decisão para se exercer a primeira opção de expansão.

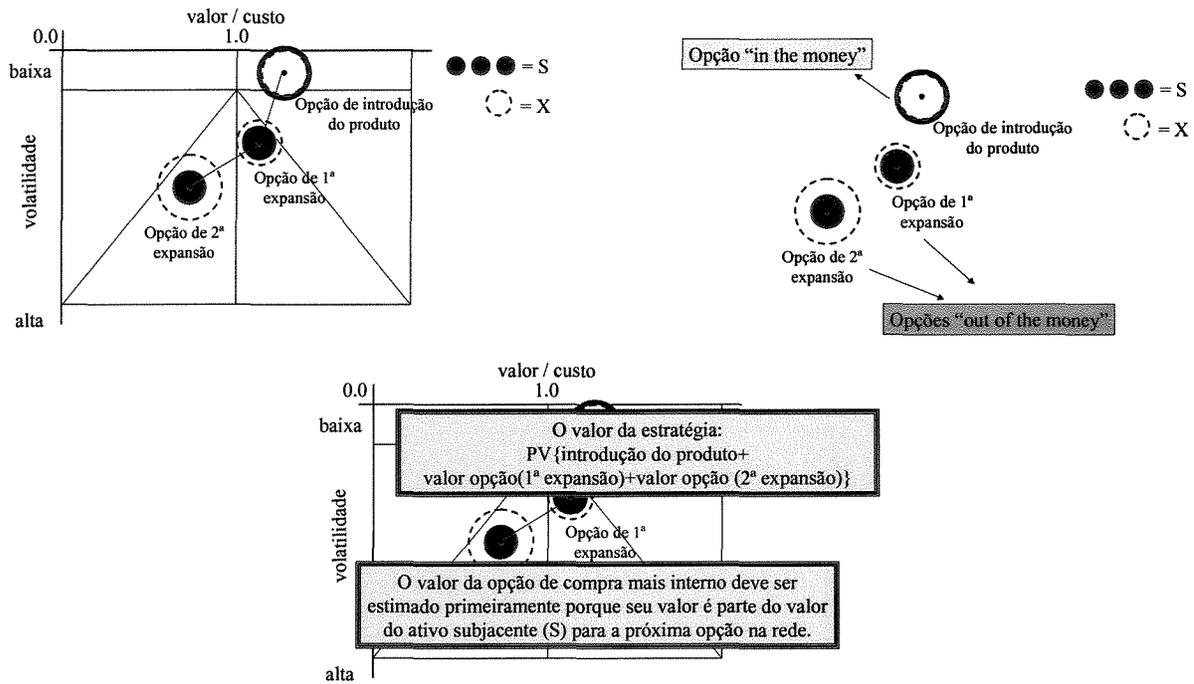


Figura 2-16 – Diagrama “Espaço de Opções” e representação de estratégia de opções imbricadas [Luehrman (1998)]

O valor da estratégia global pode ser expressa conforme a seguinte equação:

$$VP \left\{ \begin{array}{l} \text{introdução do produto} + \\ + \text{valor da opção} \left[ \begin{array}{l} \text{opção da primeira expansão} + \\ + \text{valor da opção (opção da segunda expansão)} \end{array} \right] \end{array} \right\}. \quad (2-32)$$

De fato, o que se tem é uma opção de compra (*call option*) sobre uma outra opção de compra.

A opção para introduzir o produto é opção “*in-the-money*” e próxima da data de expiração (a empresa poderá perder a oportunidade se não for adiante com o projeto). Tão logo esta opção é exercida, o cenário muda. O círculo superior desaparece, e os dois círculos inferiores permanecem conectados e começam a mover-se para cima. Um dos mais importantes fatores que determinam se os círculos inferiores movem para a direita ou para a esquerda em seu caminho é quão bem a empresa se posiciona no mercado. Entretanto, existem também outros fatores. Qualquer ação que aumenta o valor da segunda opção de expansão aumenta o valor da primeira também, porque o valor da segunda opção constitui parte do valor do ativo subjacente para a primeira opção.

Suponha-se, por exemplo, que o risco associado com os ativos ou produtos da empresa aumente. O efeito direto mais evidente é sobre a opção da segunda expansão, que move para baixo no espaço de opções, porque sua volatilidade métrica aumenta. A segunda expansão torna-se mais valiosa. Adicionalmente, o aumento do risco afeta também a opção da primeira expansão. Sua relação valor / custo métrico cresce porque a opção da segunda expansão é parte dos ativos subjacentes (S) da primeira expansão (Figura 2-17). De fato, a mudança de qualquer métrica da opção da segunda expansão deve mudar pelo menos a relação valor / custo métrico da primeira expansão.

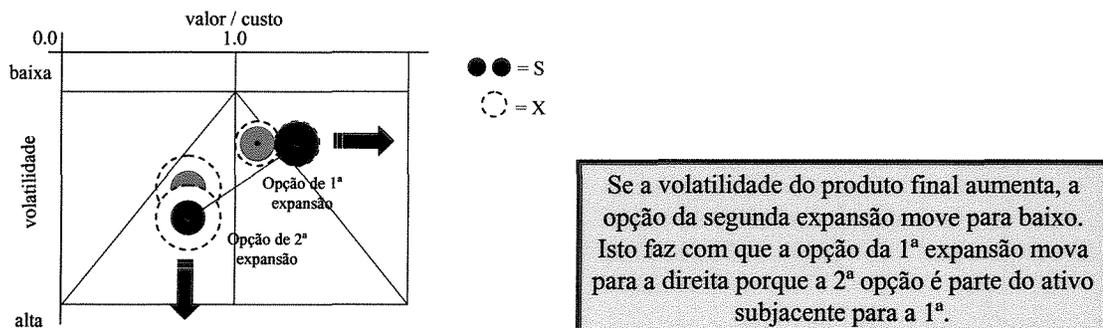


Figura 2-17 – Representação do efeito de aumento de volatilidade no valor das opções em um diagrama de “Espaço de Opções”

Como um outro exemplo, suponha que um competidor introduz um produto substituto no mesmo mercado que a empresa atua. A localização das opções e as dimensões dos círculos mudarão. O círculo sólido ou valor do ativo (S) da opção da segunda expansão poderá reduzir, e as opções da primeira e segunda expansão irão deslocar-se para a esquerda. Além disto, o valor do ativo subjacente da primeira expansão também deve diminuir.

A representação dos círculos no espaço de opções permite a comparação de estratégias. No exemplo citado, admitiu-se que a segunda expansão não seria introduzida sem a realização da primeira.

Em uma terceira situação hipotética, a empresa pode realizar qualquer uma das duas expansões primeiramente ou ambas simultaneamente. Neste caso, um investimento maior seria requerido para realizar a segunda expansão se a primeira expansão não fosse executada primeiramente. Pode-se assumir que as margens de lucro na segunda expansão seriam maiores se a empresa primeiramente ganhasse mais experiência com a primeira expansão.

Estas opções, apresentadas como uma estratégia alternativa, não são imbricadas e não estão mais nas mesmas localizações. O diagrama da Figura 2-18 representa esta nova estratégia. Pode-se notar que a segunda opção, a opção da 2ª expansão, localiza-se mais à esquerda. Seu círculo sólido ou valor do ativo subjacente (S) é menor, e seu círculo tracejado ou desembolso (X) é maior que seu valor original. A segunda opção é claramente “*out-of-the-money*”, mas está agora conectada diretamente à opção de introdução do produto. Dado que a opção da 2ª expansão está mais à esquerda sob esta nova estratégia e seu círculo sólido é menor, deve-se preferi-la? Sim, desde que ela também mova para baixo no espaço, isto é, se sua volatilidade aumenta. A precificação da opção no ambiente de Opções Reais pode dizer o quanto a volatilidade deve crescer para compensar qualquer movimento para a esquerda (diminuição da relação valor / custo). Finalmente, pode-se notar que, para a estratégia não imbricada, o valor de ambas as opções de expansão aumenta diretamente o valor do ativo subjacente associado à introdução do produto. Neste cenário não se tem mais o caso de que qualquer mudança na opção da 2ª expansão deve afetar a localização da opção da 1ª expansão: cada uma delas, de fato, move independentemente.

Embora as opções sejam não imbricadas, elas são muito correlacionadas. Suponha, por exemplo, que a opção da 2ª expansão se posicione como “*in-the-money*” e desta forma seja exercida primeiramente, antes da opção da 1ª expansão. O valor da 1ª expansão seria aumentado, porque o ativo subjacente associado a ela deveria produzir melhores margens – a relação valor / custo da 1ª expansão cresce.

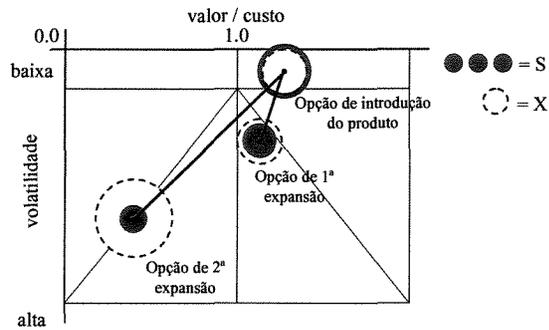


Figura 2-18 – Diagrama “Espaço de Opções” e representação de estratégia de opções não imbricadas

Para comparar diferentes estratégias, deve-se calcular o valor de cada opção de introdução do produto. Isto pode ser feito quantitativamente, utilizando-se as metodologias de Opções Reais. Em termos visuais, prefere-se a opção de introdução do produto que esteja o mais à direita possível e que tenha o maior círculo sólido. A estratégia que mais realiza esta função é a que tem mais valor (Figura 2-19).

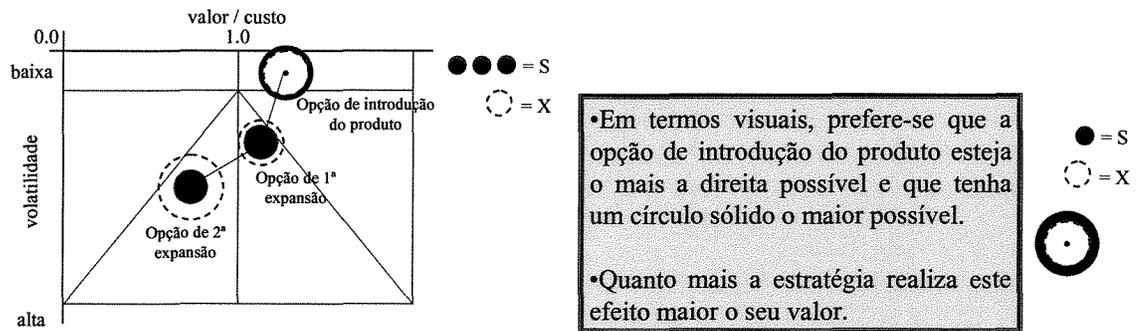


Figura 2-19 – Diagrama “Espaço de Opções” e visualização do resultado da estratégia

Uma aplicação do uso do Espaço das Opções é apresentada por Carvalho et al. (2000).

Os conceitos apresentados de opções imbricadas são importantes para o entendimento dos investimentos sequenciais e seus respectivos modelos apresentados no Capítulo 3.

## **CAPÍTULO 3**

### **3 INVESTIMENTOS SEQUENCIAIS**

#### **3.1 Modelo para valor do projeto estocástico e investimento determinístico**

Este capítulo apresenta uma revisão do modelo de investimentos sequenciais em Opções Reais e suas aplicações para a avaliação de projetos e mostra as diferenças deste método em relação aos métodos tradicionais adotados usualmente por empresas e bancos de investimento.

Um projeto de mineração é caracterizado por ser único, visto que uma jazida é uma anomalia natural, localizada (específica em termos de localização), com reservas limitadas e, geralmente, com grau de conhecimento não satisfatório.

As principais características de avaliação econômica na indústria de mineração, conforme Gentry e O'Neil (1984) são:

- Alto investimento na fase inicial;
- Opções de investimento;
- Critérios de avaliação;
- Alternativas de financiamento do projeto;
- Espiral inflacionária;
- Longo período de vida do empreendimento (flutuações);
- Quantificação do risco.

Como definição tem-se:

- Risco: refere-se a uma situação onde o resultado é incerto, mas onde a probabilidade de cada resultado possível é conhecida ou pode ser estimada;
- Incerteza: refere-se a uma situação onde essas probabilidades são desconhecidas.

Afirmações quantitativas sobre risco e incertezas são dadas como probabilidades numéricas ou probabilidades de ocorrência. Probabilidades são frações decimais no intervalo entre zero e 1. Um evento ou resultado certo de ocorrer tem uma probabilidade de ocorrência de 1 (um). Quanto mais a probabilidade se aproxima de 0 (zero) mais o evento ou resultado será menos provável de ocorrer. Um evento que não pode ocorrer tem uma probabilidade de ocorrência zero.

Segundo Dowd (1994), o risco tem dois aspectos básicos: incerteza e consequência. A relação entre eles pode ser expressa na forma da equação:

$$Risco = Incerteza \times Consequência . \quad (3-1)$$

A consequência pode ser medida pelo efeito de uma variável de projeto. Combinando consequência e incerteza pode-se medir o risco.

Em um projeto de mineração, o risco geológico está associado às estimativas de recurso e reserva, em termos de tonelagem e qualidade. O grau de conhecimento geológico aumenta à medida que se incrementa o nível de informação ou amostragem, subsidiando a modelagem numérica e, conseqüentemente, reduzindo os riscos.

Os riscos econômicos estão associados às expectativas futuras do preço da commodity, aos custos operacionais e à avaliação acurada da tonelagem de minério a ser produzida, ou seja, estão associados à probabilidade de realização do fluxo de caixa previsto.

Os riscos financeiros estão associados à capacidade de investimentos da empresa (capital exploratório), ao número de prospectos disponíveis, às ações não técnicas (políticas, sociais, ambientais) que podem embargar o processo exploratório, ao risco da probabilidade de sucesso estimada estar errada, etc.

A noção de risco varia de uma empresa para outra e de um indivíduo para outro em função de sua capacidade de assimilar perdas. O mesmo projeto pode ser “arriscado” para uma firma e atrativo para outra. O mesmo indivíduo pode avaliar um projeto de maneiras distintas, dependendo das circunstâncias. A apresentação do parâmetro risco pode ser expressa como um número que representa a probabilidade de ocorrência do valor mais provável de um evento.

As decisões de investimento podem ser avaliadas utilizando o retorno esperado e o desvio padrão da distribuição de retorno, em que o desvio padrão é visto como uma medida de risco. O índice de risco seria medido em função da divisão do desvio padrão pela média obtida do valor presente líquido (VPL).

Portanto, para a análise de risco, é clara a necessidade de alimentar as decisões exploratórias com os seguintes elementos:

- Risco geológico: avaliação de parâmetros associados ao insucesso geológico;
- Risco econômico: avaliação dos parâmetros associados às possíveis variações econômicas (potencialidade, preços, custos).

A quantificação da incerteza pode criar oportunidades e aumentar valor ao avaliar ativos e otimizar operações.

A exploração de recursos naturais envolve tipicamente diversos estágios, cada um com uma programação de investimento e com probabilidades associadas de sucesso e fracasso. Uma representação de n estágios de exploração é apresentada na Figura 3-1 com a seguinte notação:

- $X_j$  Valor do projeto de exploração no ponto inicial no estágio  $j$ .
- $I_j$  Valor presente do investimento durante o estágio  $j$ .
- $T_j$  Tempo de exploração do estágio  $j$ .
- $p_j$  Probabilidade de sucesso do estágio  $j$ .
- $V$  Valor do projeto no final dos estágios de exploração, condicionado ao sucesso.

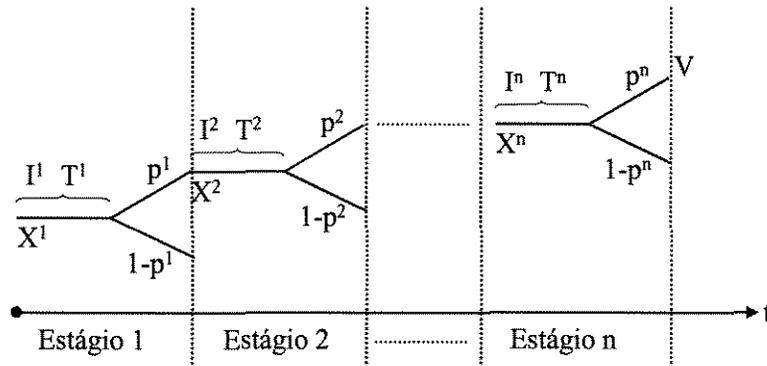


Figura 3-1 – Ilustração dos  $n$  estágios do projeto de exploração

Pode-se entender o projeto de exploração  $X$  como uma opção composta que pode ser continuamente exercida à medida que os investimentos de exploração são conduzidos. O modelo assume que, em qualquer ponto no tempo, o investimento pode ser paralisado ou reiniciado dependendo do valor esperado do projeto, que, por sua vez, depende dos dados geológicos e técnicos.

Utiliza-se o modelo desenvolvido por Majd e Pindyck (1987) e apresentado em Dixit e Pindyck (1993) no qual uma empresa investe continuamente (cada dólar gasto compra uma opção para gastar o próximo dólar) até que o projeto seja completado. O investimento pode ser parado e reiniciado, mais tarde, sem custo. Existe uma taxa máxima na qual os investimentos e a construção podem prosseguir, portanto, a solução do modelo fornece uma regra para investimento sequencial ótimo que leva em consideração o tempo requerido para realizar o investimento.

As equações básicas que regem o modelo são detalhadas em Dixit e Pindyck (1993) e apresentadas de forma sumariada a seguir.

Neste modelo não há recebimentos até que o projeto esteja completo. O pagamento após conclusão é  $V$ , o valor do projeto em operação. Assume-se que  $V$  siga um processo de movimento Browniano geométrico dado pela equação (3-2).

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dz . \quad (3-2)$$

A taxa de investimento  $I(t)$  deve se dar na forma  $0 \leq I(t) \leq k$  onde  $k$  é a máxima taxa na qual a empresa pode investir produtivamente. Define-se como  $K$  o investimento total remanescente requerido para completar o projeto. A dinâmica de  $K$  é dada por:

$$dK = -I dt . \quad (3-3)$$

Tem-se, então, duas variáveis de estado que afetam a decisão de investimento ótima.

- A primeira é o investimento remanescente requerido para completar o projeto,  $K$ , que segue a equação (3-3).
- A segunda é o valor de mercado atual do projeto completo,  $V$ , que segue a equação (3-2).

O problema é encontrar a regra de investimento ótima,  $I^*(V, K)$ . A regra de investimento ótima se reduz a um valor crítico para o projeto completo,  $V^*(K)$ , tal que quando  $V > V^*(K)$  a empresa investe à máxima taxa  $k$ . Do contrário, não há investimento.

Pode-se derivar uma equação diferencial para o valor da opção  $F(V, K)$ . Considere um portfólio contendo a opção para investir e uma posição  $F_V$  em unidades de  $V$ . O valor deste portfólio é  $\phi = F(V, K) - F_V V$ , e uma mudança instantânea neste valor é:

$$d\phi = dF - F_V dV , \quad (3-4)$$

$$d\phi = F_V dV + \frac{1}{2} F_{VV} (dV)^2 + F_K dK - F_V dV , \quad (3-5)$$

$$d\phi = \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 F_{VV} dt - I F_K dt . \quad (3-6)$$

A posição curta requer um fluxo de pagamento de  $\delta F_V V dt$ , e como o investimento está sendo realizado, um fluxo adicional de  $I dt$ . O retorno total sobre o portfólio é  $d\phi - I dt - \delta F_V V dt$ . Como o portfólio é livre de risco, deve igualar a  $r\phi dt$

$$d\phi - I dt - \delta F_V V dt = r\phi dt, \quad (3-7)$$

$$1/2\sigma^2 V^2 F_{VV} dt - IF_K dt - I dt - \delta F_V V dt = r\phi dt. \quad (3-8)$$

Dividindo todos os termos por  $dt$ :

$$1/2\sigma^2 V^2 F_{VV} - IF_K - I - \delta F_V V = r\phi, \quad (3-9)$$

$$1/2\sigma^2 V^2 F_{VV} - r(F - F_V V) - \delta F_V V - IF_K - I = 0, \quad (3-10)$$

$$1/2\sigma^2 V^2 F_{VV} + (r - \delta)VF_V - rF - IF_K - I = 0. \quad (3-11)$$

Quando não existe investimento, isto é,  $I = 0$ , o termo  $F_K$  desaparece, e a equação é simplificada para uma equação diferencial ordinária que pode ser resolvida analiticamente.

Entretanto, quando  $I = k$ , a equação deve ser resolvida numericamente para  $F(V, K)$  e a fronteira crítica  $V^*(K)$ .

A solução da equação (3-11) deve satisfazer as seguintes condições de fronteira:

$$F(V, 0) = V, \quad (3-12)$$

$$F(0, K) = 0, \quad (3-13)$$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} F_V(V, K) = e^{-\delta K/k}. \quad (3-14)$$

Quando  $K$  chega a zero, o projeto está completo, e a empresa recebe o pagamento  $V$ . Adicionalmente, quando  $V$  torna-se muito grande em relação ao total do investimento  $K$  torna-se muito improvável que o investimento seja paralisado antes da conclusão. Entretanto, o projeto ainda levará o tempo  $K/k$  para ser completado, e, durante este tempo, a taxa esperada de crescimento em  $V$  é  $\alpha = \mu - \delta$ . Desta forma, para valores muito altos de  $V$ , um aumento de \$1 em  $V$  leva a um aumento em  $F(V, K)$  igual a:

$$1 - \int_0^{K/k} \delta e^{(\mu-\delta)t} e^{-\mu t} dt = e^{-\delta K/k} . \quad (3-15)$$

A solução é, portanto:

Quando  $V < V^*$  e  $I = 0$ , a equação (3-11) tem uma solução analítica

$$F(V, K) = AV^{\beta_1} , \quad (3-16)$$

onde:

$$\beta_1 = 1/2 - (r - \delta) / \sigma^2 + \sqrt{[(r - \delta) / \sigma^2 - 1/2]^2 + 2r / \sigma^2} . \quad (3-17)$$

A variável  $A$  deve ser encontrada em conjunção com a fronteira  $V^* = V^*(K)$  e varia com  $K$ .

Quando  $V > V^*$  e  $I = k$  a equação (3-11) é uma equação diferencial parcial do tipo parabólica que deve ser resolvida numericamente.

Uma equação diferencial parcial (EDP) é uma equação envolvendo funções e suas derivadas parciais. Em geral, equações diferenciais parciais são mais difíceis de resolver analiticamente que as equações diferenciais ordinárias. Elas podem algumas vezes ser resolvidas usando métodos tais como transformação de Bäcklund, função de Green, separação de variáveis, ou quando os métodos falham (o que frequentemente ocorre), métodos numéricos tais como métodos de diferenças finitas (MDF).

As equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem são classificadas de acordo com as propriedades da matriz

$$Z \equiv \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

como elíptica, hiperbólica ou parabólica.

Se  $Z$  é uma matriz definida positiva, i.e., possui todos os autovalores (*eigenvalues*) positivos, a EDP é chamada elíptica. O autovalor (*eigenvalue*) e o autovetor (*eigenvector*) de uma matriz  $Z$  são respectivamente um escalar  $\lambda$  e um vetor não nulo  $v$  que satisfazem  $Zv = \lambda v$ . Uma matriz  $Z$  é definida positiva, se e somente se para qualquer vetor não nulo  $v$  a forma quadrática  $v^T Z v > 0$ . A transposta  $v^T$  da matriz  $v$  é obtida pela inversão da sequência de índices, tal que as linhas de  $v$  tornam-se as colunas de  $v^T$ . O produto dos autovalores (*eigenvalues*) é igual ao determinante da matriz  $\det(Z) = \prod_{p=1}^n \lambda_p$ . Tem-se, então,  $\det(Z) > 0$  para uma EDP elíptica.

Se  $\det(Z) < 0$  a EDP é chamada hiperbólica e se  $\det(Z) = 0$  a EDP é chamada parabólica.

De forma a introduzir alguns parâmetros, é útil fazer uma analogia com uma opção de compra. Se  $V$  fosse o preço de uma ação,  $\delta$  seria a taxa de dividendo da ação. O retorno esperado total sobre a ação seria  $\mu = \delta + \alpha$ , isto é, a taxa de dividendo mais a taxa esperada de ganho de capital. Se a taxa de dividendos fosse zero, a opção de compra da ação seria sempre segura até a maturidade e nunca exercida prematuramente. Neste caso, não existe nenhum custo para manter a opção viva. Se a taxa de dividendos é positiva, existe um custo de oportunidade de manter a opção viva ao invés de exercê-la. Este custo de oportunidade é o fluxo de dividendos que se renuncia ao manter a opção ao invés da ação. Como  $\delta$  é uma taxa de dividendos proporcional, quando mais alto o preço da ação, maior é o fluxo de dividendos. Para um preço suficientemente alto, o custo de oportunidade de dividendos futuros torna-se alto o bastante para fazê-lo valioso e justificar o exercício da opção.

Para o modelo de investimento,  $\mu$  é a taxa de retorno esperada de ter o projeto completo. Ela é a taxa de equilíbrio estabelecida pelo mercado de capital e inclui um prêmio de risco apropriado.  $\delta$  é um custo de oportunidade de postergar a construção do projeto e manter viva a opção de investir. Se  $\delta$  fosse zero, não existiria custo de oportunidade para manter a opção viva, e não haveria investimento. Esta é a razão porque assume-se que  $\delta > 0$ . Por outro lado, se  $\delta$  é muito alto, o valor da opção será muito pequeno, porque o custo de oportunidade de esperar é alto. Quando  $\delta \rightarrow \infty$ , o valor da opção vai para zero. As únicas escolhas são investir agora ou nunca investir e, desta forma, a regra do VPL padrão se aplica.

Tem-se que:

$$\delta = \mu - \alpha, \quad (3-18)$$

onde:

- $\delta$  é o custo de oportunidade de esperar ao invés de investir ou o custo de oportunidade de postergar a conclusão do projeto.
- $\mu$  é a taxa de desconto.
- $\alpha$  é a taxa de crescimento do projeto ou deriva.

Pode-se deduzir as seguintes relações a partir de (3-18):

- O crescimento de  $\delta$ , traduzido como abundância da commodity acarreta a elevação de  $\mu$  e a redução do valor do projeto.
- O decréscimo de  $\delta$ , traduzido como escassez da commodity acarreta a redução de  $\mu$  e a elevação do valor do projeto.

Como  $\alpha = \mu - \delta$  pode-se verificar:

- O crescimento de  $\delta$ , traduzido como um custo de oportunidade de esperar, acarreta a redução do crescimento antecipado de  $V$ , redução do valor crítico  $V^*$  que justifica o projeto e, conseqüentemente, um incentivo para investir no projeto.
- O decréscimo de  $\delta$ , traduzido como um custo de oportunidade de esperar, acarreta o aumento do crescimento antecipado de  $V$ , elevação do valor crítico  $V^*$  que justifica o projeto e, conseqüentemente, um incentivo para não investir no projeto.

O modelo considera uma taxa de distribuição de dividendos  $\delta$  relativa ao projeto e que pode também ser definida como *convenience yield*. Os detentores de uma commodity percebem que sua posse física pode gerar vantagens impossíveis de ser obtidas pelo detentor de um contrato futuro. Essas vantagens podem incluir a capacidade de obter lucro de escassez temporária ou a de manter o processo de produção em andamento. Refere-se a tais vantagens como *convenience yield* do produto.

O *convenience yield* mede simplesmente as expectativas do mercado quanto à disponibilidade futura de uma commodity. Quanto maior a possibilidade de ocorrer escassez durante a vida do contrato futuro, maior o *convenience yield*. Se os usuários da commodity possuírem estoques elevados, será pouco provável a ocorrência de escassez em um futuro próximo, e o *convenience yield* tenderá a ser baixo. Por outro lado, baixos estoques resultarão em um *convenience yield* elevado.

O que se propõe, então, é o cálculo e a construção do espaço de opções para um determinado cenário econômico-financeiro e o estabelecimento do valor do projeto completo ( $V$ ). A partir daí, e conforme ilustrado nas Figuras 3-2 e 3-3, pode-se efetuar a determinação dos valores de opção em diversos momentos associados à forma como ocorre a realização do investimento ( $I$ ).

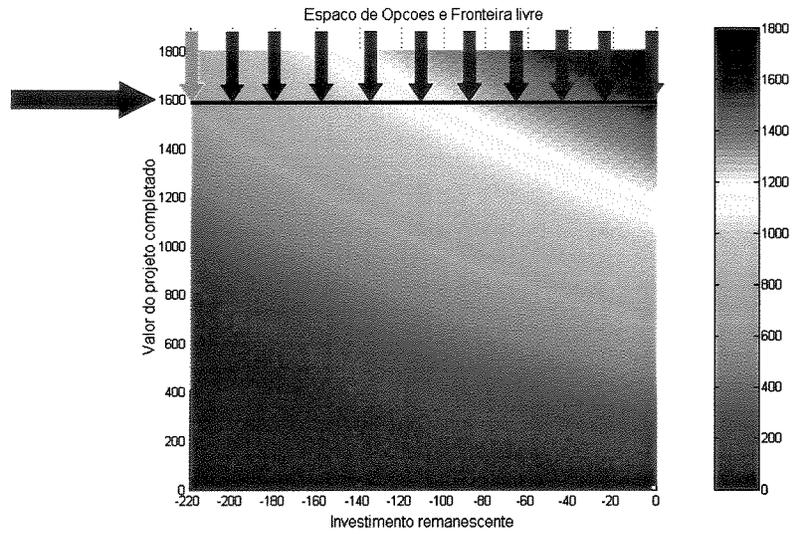


Figura 3-2 – Determinação dos valores de opção em um diagrama de espaço de opções

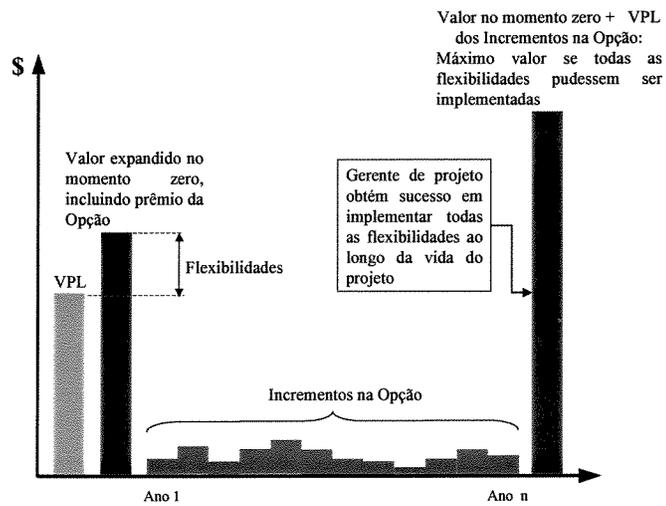


Figura 3-3 – Diagrama de valores de VPL (Valor Presente Líquido) e os fatores de adição de valor pelas Opções

### 3.1.1 Estudo de caso

De forma a avaliar a atuação do modelo de investimentos sequenciais como um método de avaliação, considerou-se um conjunto de dados reais de uma mina de minério de ferro.

A Figura 3-4 apresenta os principais passos usados na metodologia e a conexão entre o estágio de simulação geoestatística e o modelo de Opções Reais. O primeiro passo é produzir diversas realizações possíveis, necessárias para estimar as incertezas da reserva e que servem de entrada para o modelo de Opções Reais. A simulação foi realizada através de técnicas de Geoestatística Multivariável (Wackernagel (1995), Carvalho (1995), Ribeiro et al. (1996)) e com utilização do algoritmo de Bandas Rotativas (*Turning Bands*), apresentado no Anexo 1.

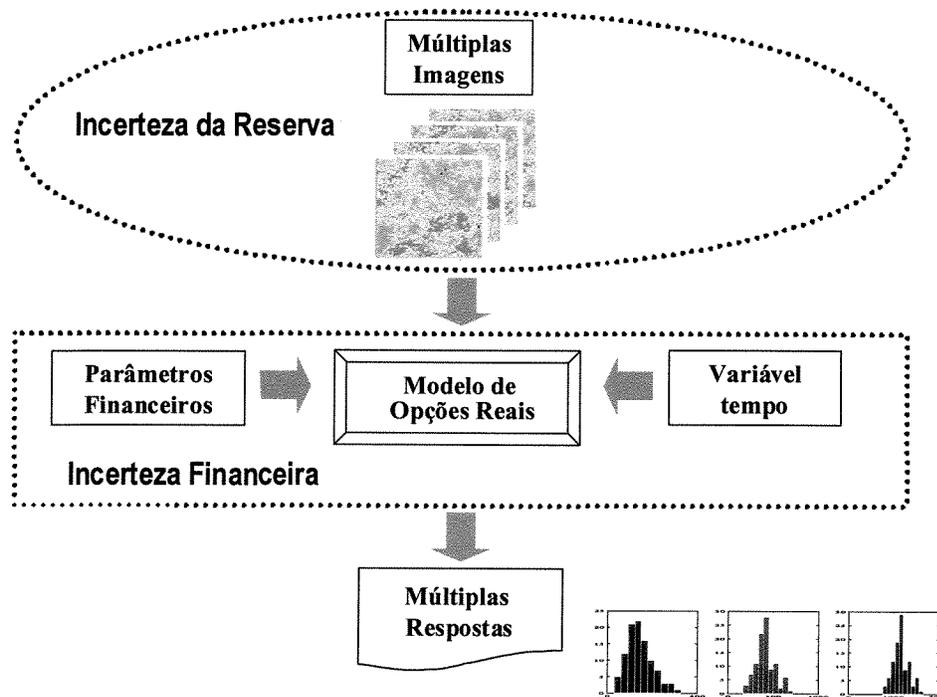


Figura 3-4 – Fluxograma simplificado da metodologia empregada para a obtenção de múltiplas respostas

Para cada uma das imagens geradas via simulação geoestatística um projeto é gerado, e a definição do sequenciamento da extração e dos investimentos é estabelecida (Figura 3-5).

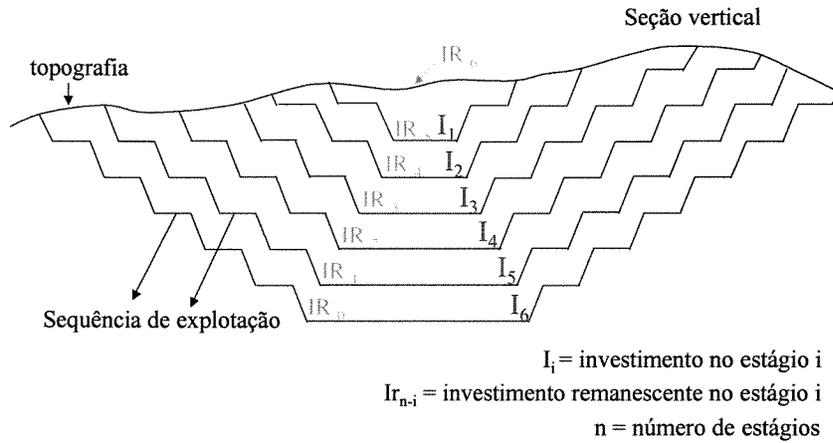


Figura 3-5 – Seção vertical ilustrando o sequenciamento de extração e a sequência de investimento

A Figura 3-6 ilustra os histogramas da reserva lavrável e dos quantitativos de estéril dos projetos de cava final obtidos a partir dos modelos simulados. A reserva ficou entre 135,8 Mt e 172,7 Mt, com um valor médio de 163,9 Mt e com uma diferença máxima de 36,9 Mt. A variância é 92,5 (Mt)<sup>2</sup> e o coeficiente de variação<sup>11</sup> é 5,9%. O estéril ficou entre 137,7 Mt e 178,3 Mt, com um valor médio de 164,5 Mt e com uma diferença máxima de 40,6 Mt. A variância foi de 125,5 (Mt)<sup>2</sup>, o que implica em coeficiente de variação de 6,8%.

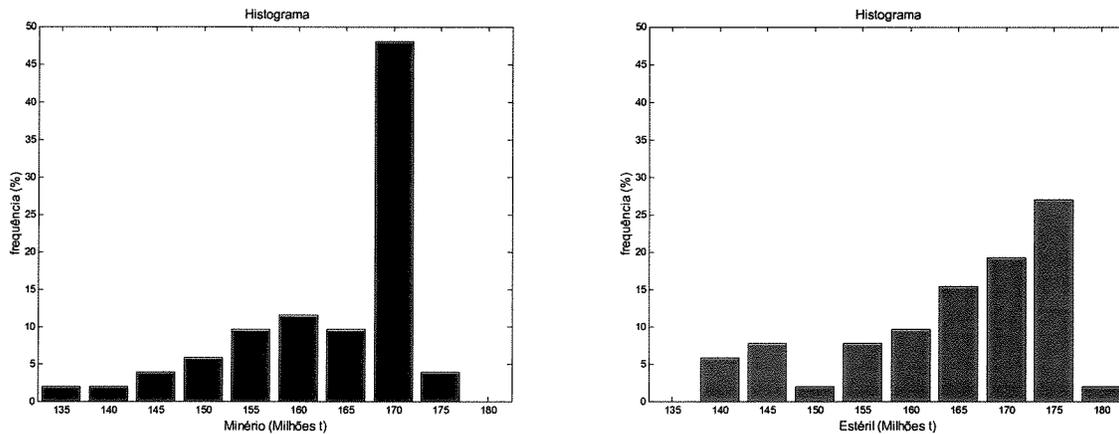


Figura 3-6 – Histogramas da reserva lavrável e do quantitativo de estéril dos projetos de cava final obtidos a partir dos modelos simulados

<sup>11</sup> *coeficiente de variação* =  $(\sqrt{\text{variância}} / \text{média}) \times 100$

A Figura 3-7 ilustra um formato para representação do valor da opção de investimento  $F(V,K)$  para um dado cenário financeiro. Quaisquer valores de opção podem ser determinados para projetos nos intervalos  $[0,1800]$  e  $[0,220]$ , respectivamente para valor de projeto completo ( $V$ ) e investimento remanescente ( $K$ ). Para cada par  $(V,K)$  o valor da opção de investimento é dado pela cor do pixel.

A regra do investimento ótimo reduz-se à determinação do valor de *cutoff* crítico para o valor do projeto completo,  $V^*(K)$ , tal que, quando  $V \geq V^*(K)$ , a empresa investe à máxima taxa, e caso contrário nenhum investimento é realizado. A definição da fronteira livre (*free boundary*) é ilustrada nas Figuras 3-8, 3-9 e 3-10.

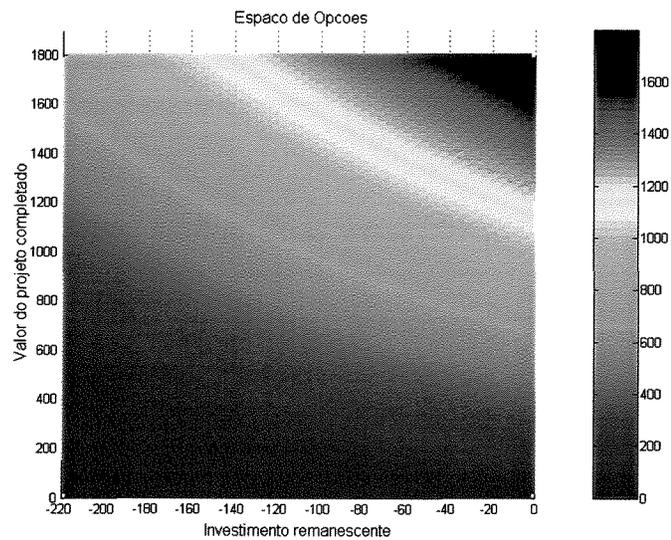


Figura 3-7 – Exemplo numérico da Regra de Investimento Ótimo. O gráfico mostra o valor da opção de investimento  $F(V,K)$ , onde  $V$  = valor do projeto completo;  $K$  = investimento remanescente

Um parâmetro importante na definição da fronteira livre é a incerteza sobre o investimento total  $I$ . Em Dixit e Pindyck (1993) e Pindyck (1992) pode-se verificar a relação entre o parâmetro  $\beta$  (incerteza técnica) e o desvio padrão do custo do projeto. Para estimar  $\beta$  pode-se fazer uso do fato que, se  $\gamma$  (incerteza econômica) é igual a zero, a variância do custo para se completar o projeto é dada por:

$$v(K) = \left( \frac{\beta^2}{2 - \beta^2} \right) K^2. \quad (3-19)$$

Desde que

$$v(K) = (\text{desvio padrão} \times K)^2, \quad (3-20)$$

pode-se deduzir que:

$$\beta = \sqrt{2 \times \text{desvio padrão}^2 / (1 + \text{desvio padrão}^2)}. \quad (3-21)$$

Para *desvio padrão* = 0,25 (25%), tem-se que  $\beta = 0,343$  e para *desvio padrão* = 0,50 (50%) tem-se  $\beta = 0,632$ . Usando 3-19 e uma estimativa inicial do custo esperado,  $K(0)$ , o valor para  $\beta$  pode ser baseado na estimativa do desvio padrão (independente de tempo) de  $K$ .

A definição da posição da fronteira livre (*free boundary*) é determinada quando a seguinte relação é obedecida:

$$G_{i,j} - \frac{1}{\beta \Delta X + 1} G_{i+1,j} \leq \varepsilon, \quad (3-22)$$

onde:  $\varepsilon = \Delta X / 2$  ( $\Delta X$  corresponde à discretização utilizada para a variável  $V$  - valor do projeto completo).

O aumento de  $\beta$  faz com que a diferença entre os dois termos da equação (3-22) seja maior, dificultando que a relação seja encontrada e, conseqüentemente, abaixando a posição da fronteira livre.

A elevação da incerteza acarreta um rebaixamento da fronteira livre, facilitando a justificativa do investimento. Isso pode ser traduzido como uma flexibilização da regra do investimento de forma a permitir que se inicie o processo de aprendizado em um cenário de maior incerteza.

A incerteza técnica faz com que o investimento seja mais atrativo. A razão é que o investimento revela informação sobre o custo e, portanto, tem um valor sombra (*shadow value*), além da sua contribuição direta para a finalização do projeto. O valor sombra diminui o custo total esperado do investimento.

O aumento do valor da incerteza técnica faz com que projetos completos de menores valores fiquem acima da fronteira livre e apresentem condições para se iniciar, representando um incentivo para o investimento.

A incerteza técnica, relativa às dificuldades técnicas e aos problemas físicos do projeto, torna a oportunidade de investimento mais atrativa. Mesmo em situações onde o valor presente líquido - VPL do projeto for negativo, ainda assim pode ser econômico começar o investimento, pois o início do investimento revela informações importantes sobre os custos internos (técnicos) e, portanto, apresenta um *shadow value* que se traduz em uma redução do custo total esperado, além da contribuição direta para a finalização do projeto. Como as informações chegam assim que os investimentos são realizados, não existe valor na espera.

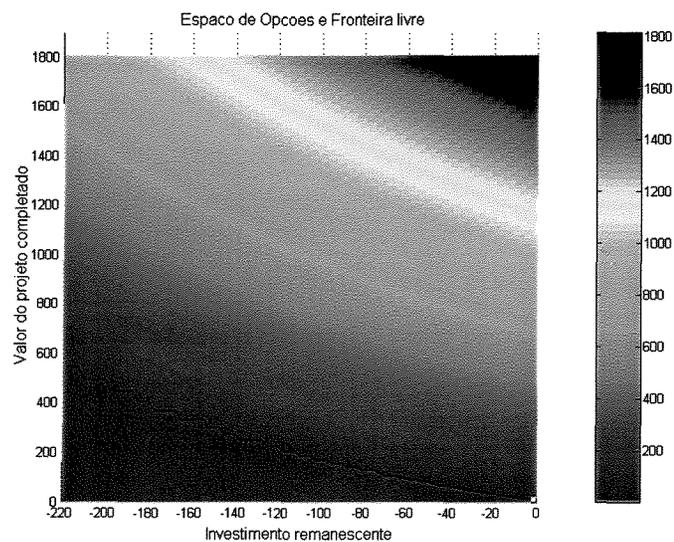


Figura 3-8 – Gráfico ilustrando a definição da fronteira livre (*free boundary*) para  $\sigma=20\%$ ,  $r=4\%$ ,  $\mu=12\%$ ,  $\alpha=6\%$ , desvio padrão=25%

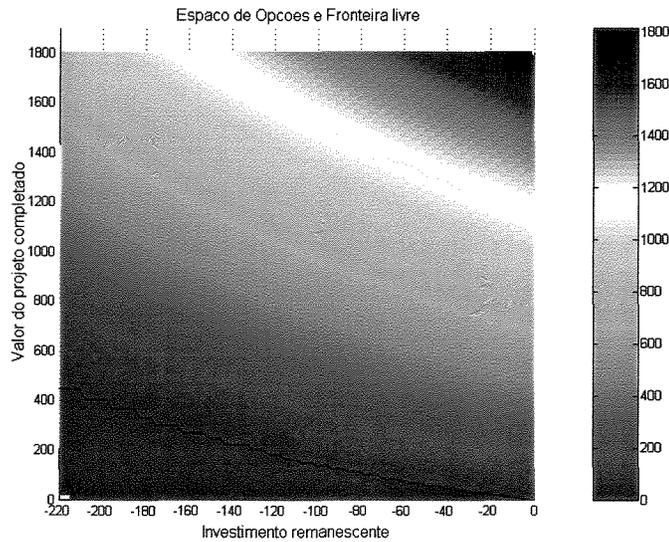


Figura 3-9 – Gráfico ilustrando a definição da fronteira livre (*free boundary*) para  $\sigma=20\%$ ,  $r=4\%$ ,  $\mu=12\%$ ,  $\alpha=6\%$ , desvio padrão=50%

O valor crítico para o projeto completo  $V^*(K)$  aumenta quando a volatilidade ( $\sigma$ ) cresce e pode aumentar drasticamente quando  $\sigma$  atinge valores acima de 0,2 ( $\sigma = 20\%$ ). Desta forma o investimento é altamente sensível à volatilidade, independente das preferências de risco de investidores ou gerentes. As empresas podem ser neutras ao risco, e mudanças aleatórias em  $V$  podem ser completamente diversificáveis; um aumento em  $\sigma$  aumentará  $V^*$  e, então, tenderá a deprimir o investimento. O efeito da variação da volatilidade na definição da fronteira livre (*free boundary*) pode ser visualizado na Figura 3-10.

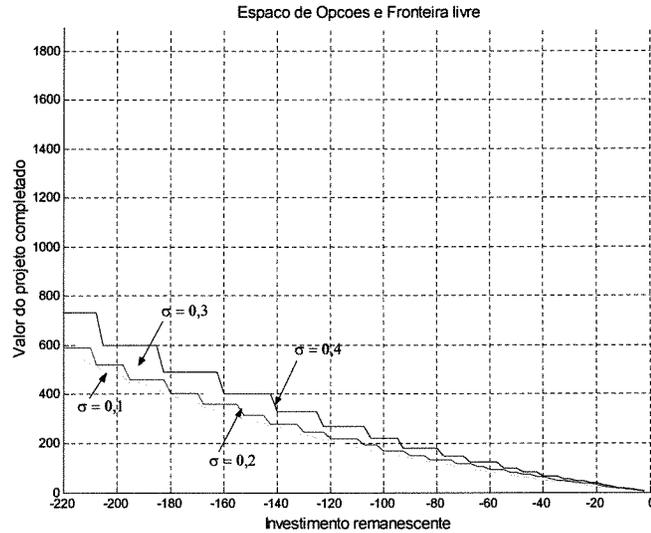


Figura 3-10 – Gráfico ilustrando a definição da fronteira livre (*free boundary*) para  $\sigma$  variando de 10 a 40%,  $\mu=12\%$ ,  $\alpha=6\%$ , desvio padrão=25%

No contexto de juros internacionais baixos a expansão econômica mundial produz maiores fluxos financeiros e o impacto positivo no cenário externo preserva um risco global mais baixo. Nos modelos de Opções, se  $\delta$  é fixo, um aumento na taxa livre de risco ( $r$ ) reduz o valor presente do custo do investimento mas não reduz o valor do projeto (o valor presente do projeto que se recebe em retorno ao desembolso é  $Ve^{-\delta T}$ , onde  $T$  é o tempo). Assim, nota-se que uma elevação em  $r$  aumenta o valor das opções de investimento da empresa, resultando porém em menos opções sendo exercidas. Consequentemente taxas de juros mais altas reduzem investimentos, mas por uma razão diferente que no modelo padrão. Em um modelo padrão, o aumento da taxa de juros reduz os investimento devido à elevação do custo de capital. Nos modelos de Opções a elevação da taxa de juros aumenta o valor da opção de investir e aumenta o custo de oportunidade de investir agora.

Por outro lado se se mantém  $\alpha$  fixo, então  $\delta$  aumenta com o aumento de  $r$  ( $\alpha + \delta = r + \text{prêmio}$  ou  $\alpha + \delta = r + \phi \rho_{pm} \sigma$ ). Neste caso, a redução de valor da taxa livre de risco ( $r$ ) eleva a posição da fronteira livre (*free boundary*) dificultando a justificativa de se iniciar o investimento (Figura 3-11). Valores mais baixos de  $r$  aumentam o valor do parâmetro  $\beta_1$  e aumentam o nível do valor crítico de  $V^*$ . Esta é uma manifestação pura da idéia de opção: uma taxa de juros baixa faz o futuro relativamente mais importante e, então, ela aumenta o custo de oportunidade de exercer a opção de investir. O efeito da taxa livre de risco na constituição do espaço de opções é representado na Figura 3-12.

A utilização de menores valores de taxa livre de risco acarreta uma diminuição do valor da opção no estágio inicial (momento em que nenhum investimento foi ainda realizado) e transfere uma porção maior do valor total do projeto para os estágios posteriores e correlacionados às futuras flexibilidades a serem capturadas (Figura 3-13).

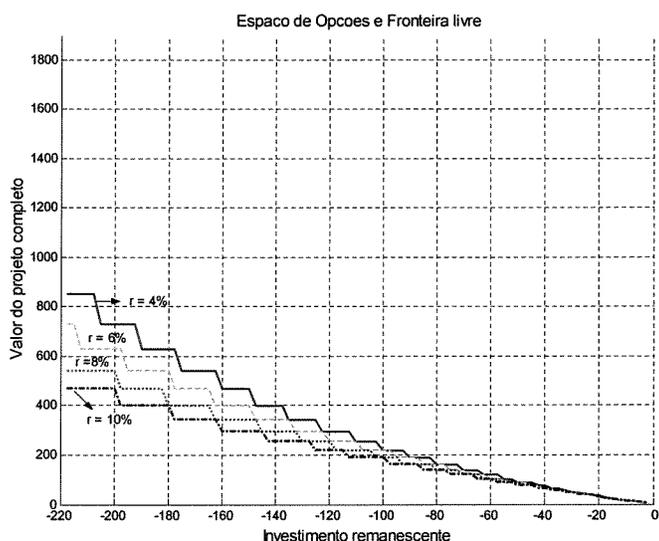


Figura 3-11 – Gráfico ilustrando a definição da fronteira livre (*free boundary*) para variações na taxa livre de risco ( $r$ ) com  $\sigma=10\%$ ,  $\mu=12\%$ ,  $\alpha=6\%$ , desvio padrão=25%

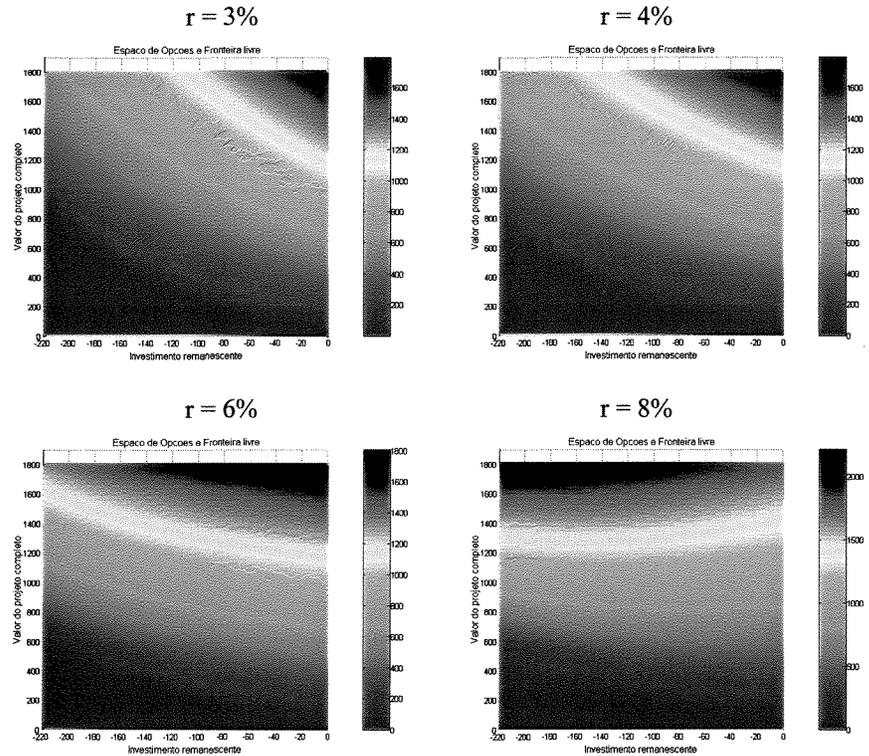


Figura 3-12 – Ilustração do efeito da taxa livre de risco na constituição do espaço de opções ( $\sigma=10\%$ ,  $\mu=12\%$ ,  $\alpha=6\%$ , desvio padrão=25%)

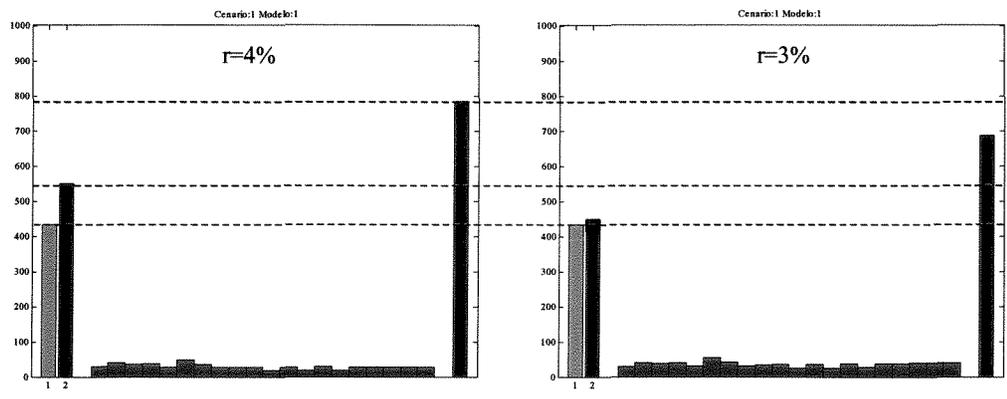


Figura 3-13 – Diagrama de valores de VPL, Opção no momento zero, Incrementos de Opções e VP de Opções para um projeto nos cenários  $r=4\%$  e  $r=3\%$  ( $\sigma=10\%$ ,  $\mu=12\%$ ,  $\alpha=6\%$ , desvio padrão=25%)

Luehrman (1998) descreve uma maneira efetiva para visualizar os valores de opção e suas dependências com quatro parâmetros (Preço do ativo subjacente- $S$ , preço do exercício- $X$ , volatilidade- $\sigma$  e tempo de expiração- $t$ ) combinado dois a dois. Ele dá o nome de espaço de opções para o gráfico final em forma de retângulo. O espaço de opções é caracterizado por duas métricas de valor. A primeira é chamada valor / custo métrico e é definida como o valor dos ativos subjacentes ( $S$ ) dividido pelo valor presente do investimento ( $X$ ). A segunda métrica é chamada volatilidade métrica e é expressa pela equação:  $\text{volatilidade métrica} = \sigma\sqrt{t}$ .

O formato de um gráfico de espaço de opções é ilustrado na Figura 3-14. Seis regiões são selecionadas no espaço de opções para dar ao empreendedor a flexibilidade necessária para visualizar o momento dos investimentos. Por exemplo, a região 1 corresponde a valor / investimento maior que 1.0 e baixa volatilidade. Contrariamente, a região 6 é associada a baixa volatilidade mas valor / investimento abaixo de 1.0 (custo do projeto é maior que o benefício potencial). As outras regiões apresentam as variáveis valor / investimento e volatilidade entre aqueles dois extremos. A melhor decisão sob incerteza deve variar para cada região particular.

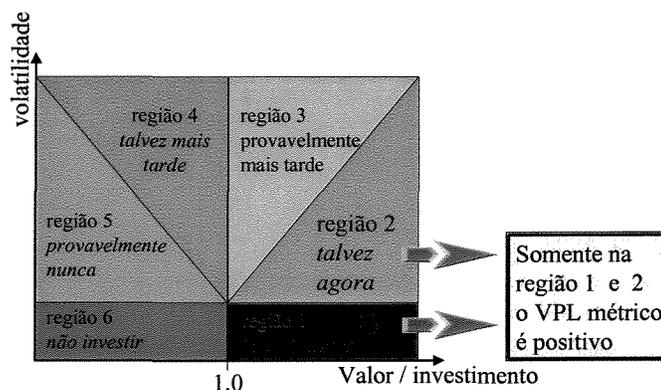


Figura 3-14 – Ilustração de um gráfico de espaço de opções apresentando as regiões e melhores decisões de investimento sob incerteza

O aumento da taxa livre de risco ( $r$ ) altera particularmente a inclinação da curva que define a fronteira entre as regiões 2 e 3, fazendo com que a mesma se dobre para a direita. Este efeito pode modificar a posição de um projeto no espaço de opções e, conseqüentemente, pode influenciar na melhor ação sob incerteza (Figura 3-15).

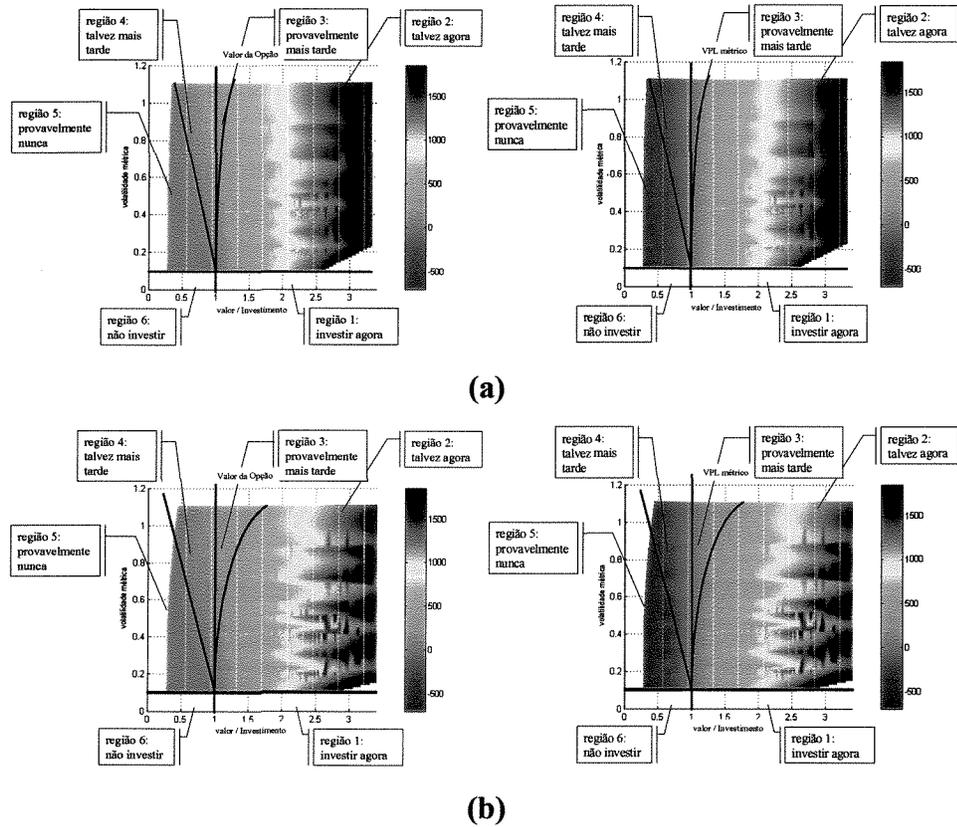


Figura 3-15 – Influência da taxa livre de risco ( $r$ ) na determinação das fronteiras das regiões no espaço de opções (a)–menor valor de  $r$ , (b)–maior valor de  $r$ )

O prêmio de opção capturado pelo valor da opção no momento zero situa-se no nível de 25%. Os diagramas de valores de VPL, Opção no momento zero e VP de Opções são representados nas Figuras 3-16 e 3-17 para 50 possíveis projetos definidos a partir dos modelos obtidos por simulação.

A Figura 3-18 apresenta o histograma de VPL convencional para os projetos gerados.

A Figura 3-19 ilustra o Espaço de Opções para três cenários com  $\sigma=10\%$ ,  $\sigma=20\%$  e  $\sigma=30\%$ . O posicionamento e a inclinação das classes de valores das opções de investimento  $F(V,K)$ , representadas pela gradação de cores entre azul e vermelho mostram o crescimento do valor da opção com o aumento do valor da volatilidade  $\sigma$ .

Os histogramas de opção (Figuras 3-20 e 3-21) mostram diferenças evidentes nos valores médios e nas classes de frequência quando comparados com histograma de VPL convencional (Figura 3-18).

O crescimento da dispersão de resultados (incremento da variância de valores financeiros) é claramente constatado pela observação dos gráficos de evolução do VPL convencional e das opções ao longo dos anos (Figura 3-22). A representação das linhas de evolução do VP de Opções na Figura 3-22 assume que todos os incrementos de opções (flexibilidades) podem ser capturados ao longo da vida do empreendimento. Assim, não há convergência dos resultados com a evolução dos anos e as dispersões constatadas no ano 20 correspondem aos cenários representados nos histogramas da Figura 3-21.

A Figura 3-23 apresenta os diagramas correlacionando Valor / Custo métrico <sup>8</sup> com Opção no momento zero e VP de Opções para os projetos gerados e considerando-se diferentes volatilidades.

---

<sup>8</sup> Valor / Custo métrico = Valor do projeto completo / Valor Presente (VP) dos Investimentos.

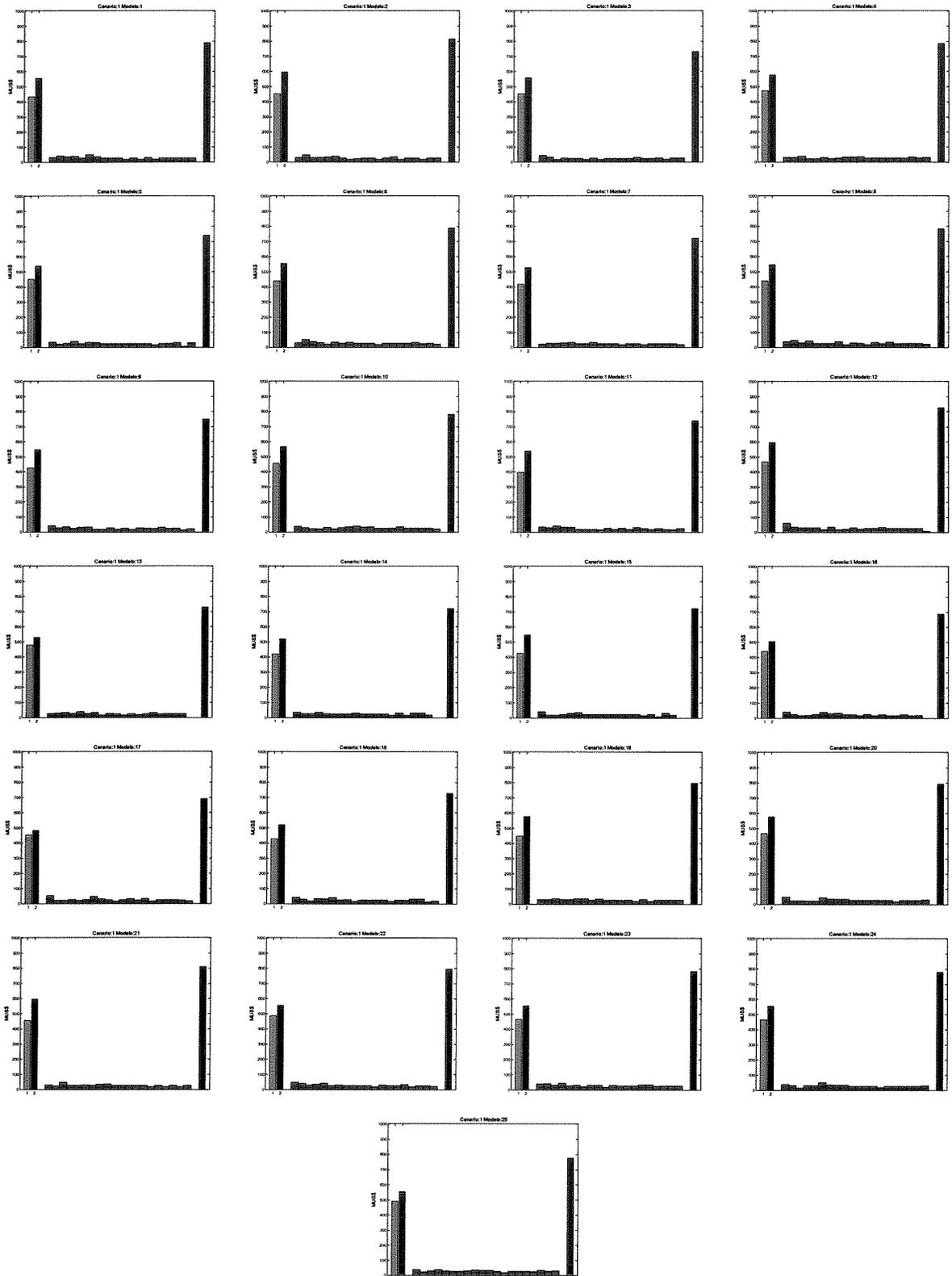


Figura 3-16 – Diagrama de valores de VPL, Opção no momento zero, Incrementos de Opções e VP de Opções para as simulações 1 a 25 ( $\sigma=10\%$ ,  $r=4\%$ ,  $\mu=12\%$ ,  $\alpha=6\%$ , desvio padrão=25%)

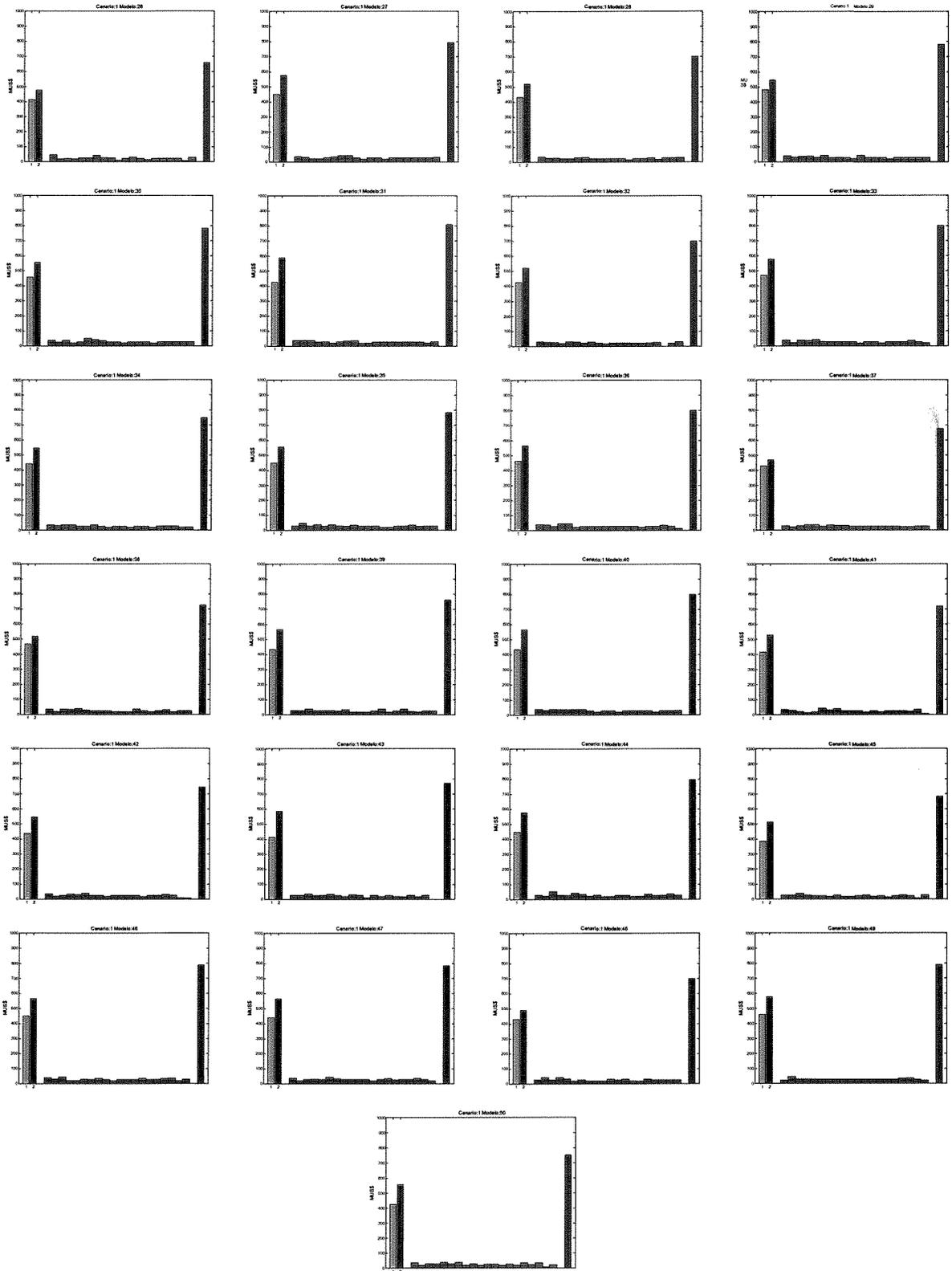


Figura 3-17 – Diagrama de valores de VPL, Opção no momento zero, Incrementos de Opções e VP de Opções para as simulações 26 a 50 ( $\sigma=10\%$ ,  $r=4\%$ ,  $\mu=12\%$ ,  $\alpha=6\%$ , desvio padrão=25%)

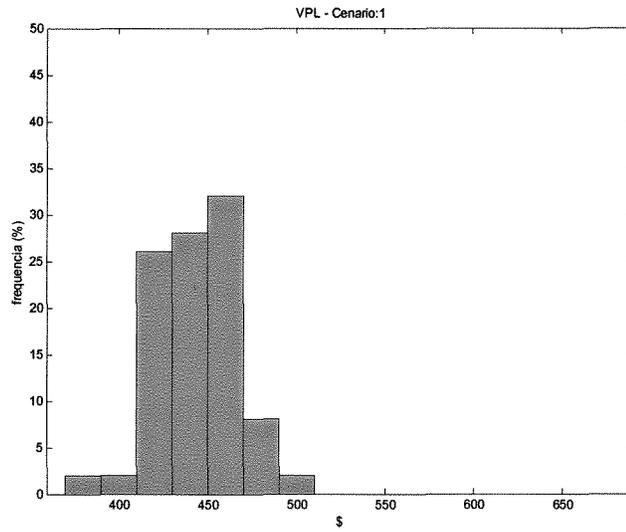


Figura 3-18 – Histograma de VPL convencional para os projetos gerados

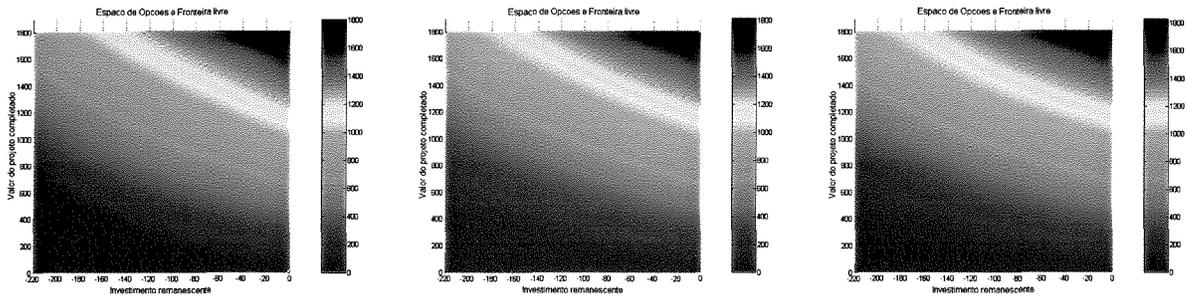


Figura 3-19 – Valor da opção de investimento  $F(V,K)$  para  $\sigma=10\%$ ,  $\sigma=20\%$  e  $\sigma=30\%$

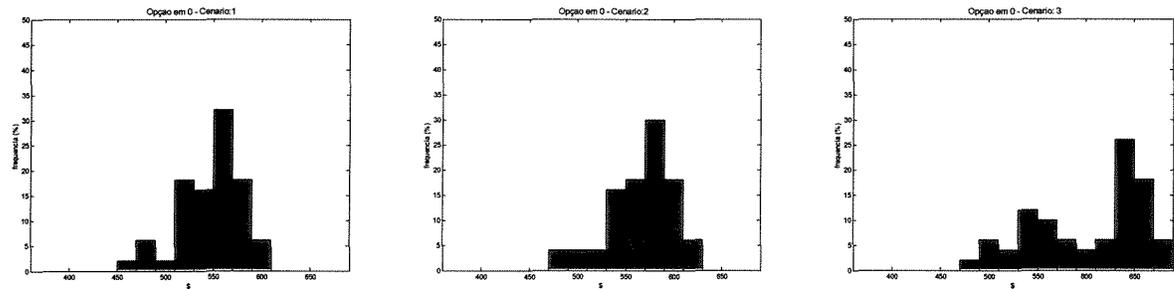


Figura 3-20 – Histogramas de Opção no momento zero para  $\sigma=10\%$ ,  $\sigma=20\%$  e  $\sigma=30\%$

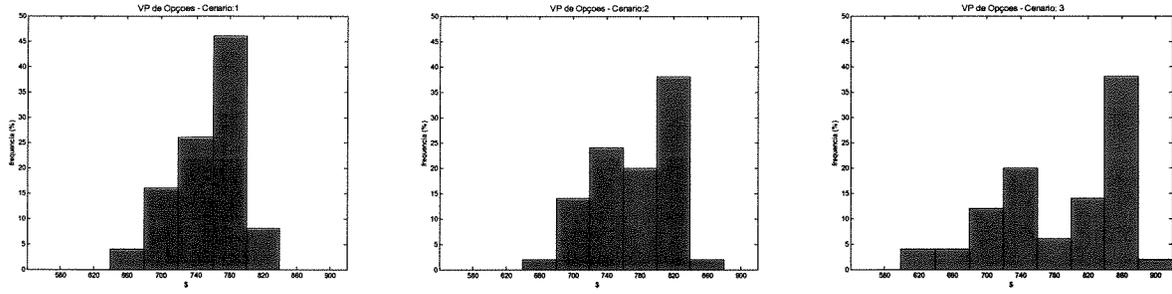


Figura 3-21 – Histogramas de VP de Opções para  $\sigma=10\%$ ,  $\sigma=20\%$  e  $\sigma=30\%$

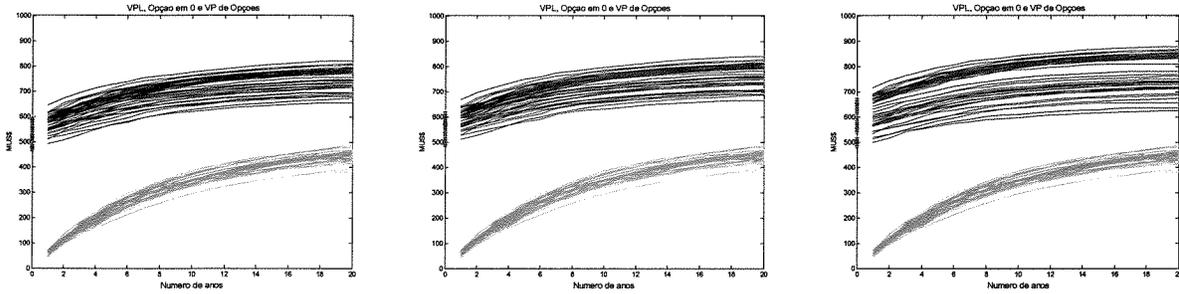


Figura 3-22 – Evolução do VPL convencional (verde), da Opção no momento zero (+ em vermelho) e do VP de Opções (violeta) ao longo dos anos para  $\sigma=10\%$ ,  $\sigma=20\%$  e  $\sigma=30\%$

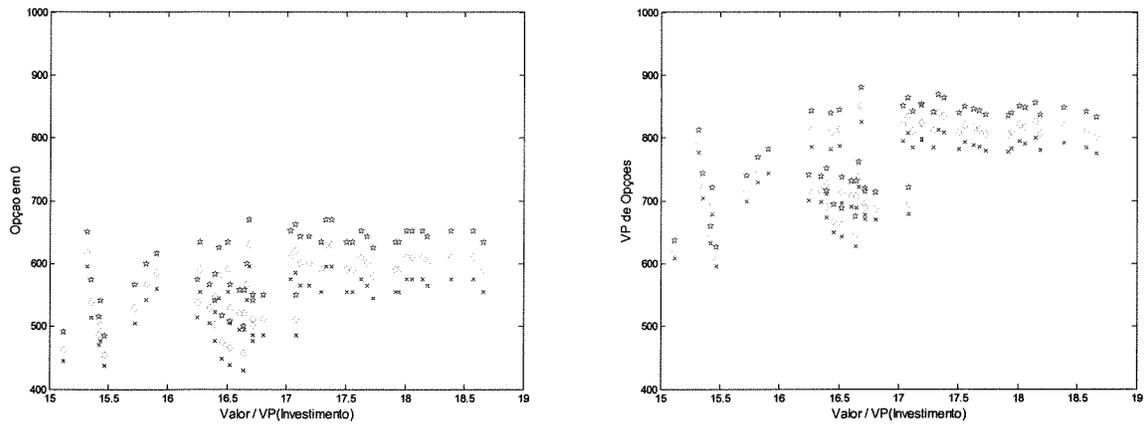


Figura 3-23 – Diagramas correlacionando Valor / Custo métrico com Opção no momento zero e VP de Opções para os projetos gerados e considerando-se diferentes volatilidades:  $\sigma=10\%$  (x),  $\sigma=20\%$  (◇) e  $\sigma=30\%$  (☆)

Davis (1994) menciona que ativos minerais são negociados a valores de mercado significativamente maiores que seus valores de fluxo de caixa descontado (FCD). Uma possível explicação é que a análise por FCD não incorpora adequadamente o valor gerado pela flexibilidade gerencial. Segundo Davis (1994), o prêmio da opção gerado pela flexibilidade gerencial explica pelo menos metade da diferença entre o valor do FCD e o valor de mercado. As reações estratégicas às circunstâncias de mudanças adicionam valor ao ativo além do valor calculado pelas técnicas de FCD.

Bhappu e Guzman *apud* Davis (1994) descrevem que FCD é a prática da indústria mineral para a avaliação de ativos e citam que as técnicas de FCD subestimam o valor do ativo mineral, tanto na fase de projeto como no valor da empresa.

Davis (1994) diz que os dados são ainda superficiais ou incompletos, mas que existe alguma documentação. Este autor descreve que, por exemplo, o valor presente líquido (VPL) dos dez maiores ativos de empresas de ouro americanas e canadenses, calculado a partir de técnicas de desconto ajustado ao risco e um custo médio ponderado de capital (*WACC – weighted average cost of capital*) é, em média, 30% abaixo da estimativa ajustada ao valor de mercado.<sup>12</sup> Isso significa que tem-se que aumentar o valor do FCD em 43%, em média, para obter o valor de mercado dos ativos de propriedade dessas empresas.

O valor do prêmio da opção é de grande relevância quando comparado à escala do projeto. Os gráficos apresentados na Figura 3-24 ilustram o valor do prêmio da opção e o valor presente (VP) das opções comparado com dois fluxos financeiros: o valor do FCD e o valor presente (VP) das receitas brutas de vendas. A comparação com o VPL permite calcular o percentual pelo qual o mesmo é aumentado pelo prêmio da opção e determinar a lacuna entre o VPL e o valor de mercado. A medida definida pelo terceiro índice ( $I_3$ ) informa o valor da flexibilidade comparada com as receitas do projeto. Essa comparação com o valor presente (VP) das receitas brutas oriundas das vendas é interessante, porque ela ressalta o “equivalente de receitas” derivado das flexibilidades.

---

<sup>12</sup> Estimativa ajustada ao valor de mercado = Valor de mercado total + Endividamento de longo prazo – Capital de giro – Investimentos (em ativos) – Ativos financeiros (exceto ouro)

Os índices representados nos gráficos da Figura 3-24 podem ser definidos pelas seguintes relações:

$$I_1 = \left( \frac{\text{Opção no momento } 0}{VPL} - 1 \right) \times 100, \quad (3-23)$$

$$I_2 = \left( \frac{VP(\text{Opções})}{VPL} - 1 \right) \times 100, \quad (3-24)$$

$$I_3 = \left( \frac{\text{Opção no momento } 0 - VPL}{VP(\text{Receitas brutas de vendas})} \right) \times 100. \quad (3-25)$$

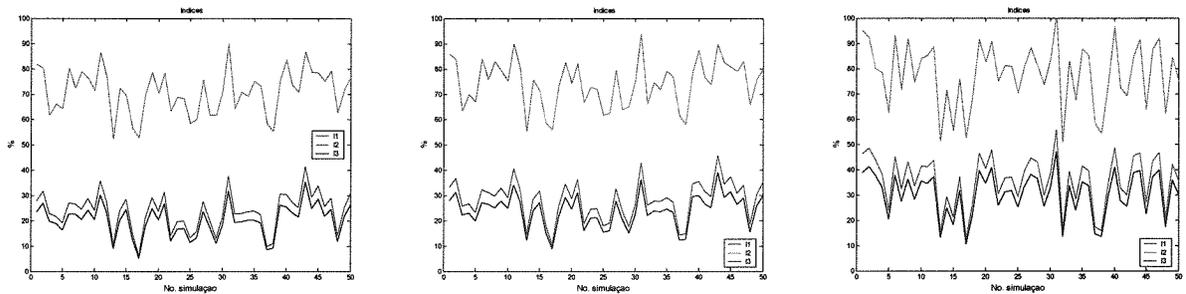


Figura 3-24 – Gráficos de índices das relações  $I_1 = \text{Prêmio da Opção}/VPL$ ,  $I_2 = (VP(\text{Opção}) - VPL)/VPL$ ,  $I_3 = \text{Prêmio da Opção}/\text{Receita bruta}$  para os projetos gerados nos cenários  $\sigma=10\%$ ,  $\sigma=20\%$  e  $\sigma=30\%$

Os valores médios dos índices  $I_1$  são 23,4%, 28,3% e 35,8%, respectivamente para  $\sigma=10\%$ ,  $\sigma=20\%$  e  $\sigma=30\%$ . A consideração do valor total de todos os incrementos de opções eleva os valores médios dos índices  $I_2$  para 71,1%, 74,3% e 77,8% respectivamente para  $\sigma=10\%$ ,  $\sigma=20\%$  e  $\sigma=30\%$ .

Admitindo o percentual de 43% citado por Davis (op.cit.) como limite superior do diferencial entre VPL e valor de mercado, verifica-se que o prêmio de opção medido pelo índice  $I_1$  consegue capturar uma grande porção daquele valor.

Em relação ao prêmio de opção medido pelo índice  $I_2$ , não é razoável assumir que todas as flexibilidades podem ser capturadas ao longo da vida do projeto. Somente uma percentagem dos incrementos futuros nos valores da opção deveria ser considerada. Esses valores percentuais variam de acordo com a volatilidade considerada. A título de exemplo, considerando os valores médios de  $I_1$  e  $I_2$  ( $\bar{I}_1$  e  $\bar{I}_2$ ) e o limite superior de 43% já descrito, tem-se percentuais de adição de incrementos futuros na opção de 41%, 32% e 17%, respectivamente para volatilidades de 10%, 20% e 30% ( $[\bar{I}_1 + 41\%(\bar{I}_2 - \bar{I}_1)]$  para  $\sigma=10\%$ ;  $[\bar{I}_1 + 32\%(\bar{I}_2 - \bar{I}_1)]$  para  $\sigma=20\%$ ;  $[\bar{I}_1 + 17\%(\bar{I}_2 - \bar{I}_1)]$  para  $\sigma=30\%$ ).

Ao comparar os resultados obtidos através de VPL convencional com parâmetros determinísticos contra o modelo de Opções Reais, o qual inclui flexibilidades operacionais, pode-se ver que o último reavalia os recursos minerais, fornecendo um maior valor econômico para o recurso extraído. As diferenças nos cálculos fornecem o valor da flexibilidade considerada.

Dowd (1994) define fator de risco como o coeficiente de variação de uma distribuição de valores monetários, medido em porcentagem. Este conceito pode ser aplicado ao caso-estudo em questão. Na aplicação considerada no presente capítulo, as variações na reserva foram levadas em consideração e os resultados são apresentados para variações em volatilidade.

A Figura 3-25 mostra os gráficos de índice de risco, cada um gerado a partir de 50 simulações. Os gráficos não apresentam variações consideráveis na escala do fator de risco em função de variações na volatilidade. Pode-se observar que não há um aumento do índice de risco com o aumento da volatilidade. Isso se deve ao fato de que, apesar do aumento da variância dos resultados, há também o aumento do valor médio do valor da opção, fazendo com que o índice de risco se mantenha nos mesmos patamares. Em outras palavras, o efeito do aumento da opção (*upside potential*) causado pelo aumento da volatilidade compensa o aumento da dispersão dos resultados, mantendo os coeficientes de risco nos mesmos níveis.

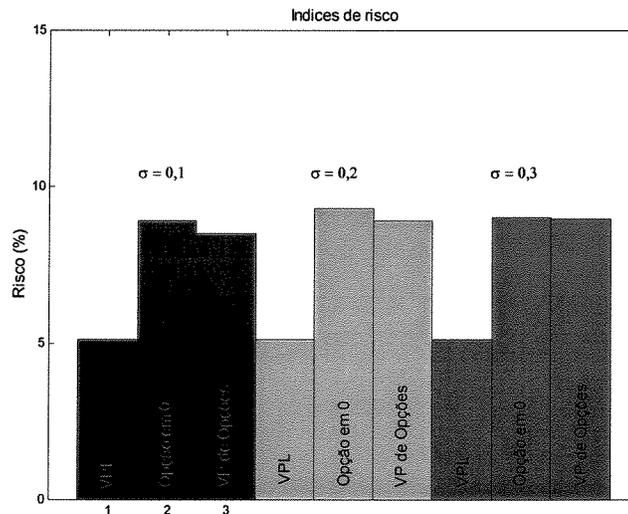


Figura 3-25 – Ilustração dos Índices de Risco obtido a partir dos resultados de VPL, Opção no momento zero e VPL de Opções para 3 cenários econômico-financeiros diferentes ( $\sigma=10\%$ ,  $\sigma=20\%$  e  $\sigma=30\%$ )

### 3.1.2 Análise dos resultados

O sumário do estudo apresentado demonstra como os modelos de Opções Reais podem ser úteis para avaliar valores de propriedades durante as fases de viabilidade e planejamento de projetos bem como para avaliar estratégias operacionais e riscos associados em minas em operação.

A implementação computacional do modelo de investimentos sequenciais mostra que uma fração significativa do valor total do projeto está relacionada a opções operacionais disponíveis aos gerentes durante a fase de extração.

O valor adicionado e não percebido na análise por FCD vem não da volatilidade do preço do mineral propriamente dita, mas de dois tipos de flexibilidade gerencial que consideram as vantagens desses movimentos de preços – flexibilidade operacional e flexibilidade de investimento. A flexibilidade operacional inclui a opção de variar os parâmetros de operação, tais como fechamento, reabertura, expansão, contração, abandono, otimização de teores de corte e variação das taxas de produção. A flexibilidade de investimento é a habilidade de postergar o início do desenvolvimento do projeto caso os preços estejam baixos, estabelecendo o melhor momento para o desenvolvimento de novas propriedades.

A magnitude do prêmio de opção derivado da flexibilidade depende das características fundamentais do ativo subjacente que, neste caso, é a estrutura econômico-financeira do projeto de mineração a ser gerenciado.

### 3.2 Modelo para valor do projeto estocástico e investimento determinístico: incorporação de condição de optimalidade

Majd e Pindyck (1987) consideram um modelo de investimento irreversível sob incerteza com uma taxa máxima de investimento, de tal forma que o projeto tem um tempo de construção, e existe a possibilidade de suspensão sem custo e retomada do investimento antes da finalização. Milne e Whalley (2000) e Milne e Whalley (2001) demonstram que a formulação de Majd e Pindyck (1987) e a solução numérica descrita em Dixit e Pindyck (1993) omitem uma condição de optimalidade essencial: no limite inferior (*threshold*) do investimento, o benefício marginal para investir (aumento marginal no valor do programa de investimento) deveria ser igual ao custo marginal.

O valor do programa de investimento antes de completado,  $F$ , é um direito sobre o valor do projeto completo,  $V$ . Dado que o projeto não aumenta o conjunto de oportunidades disponíveis ao investidor nos mercados de capital, pode-se usar um argumento de reprodução ou, no caso de um investidor neutro ao risco, programação dinâmica para derivar o a equação de avaliação satisfeita pelo programa de investimento:

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2F_{VV} + (r - \delta)VF_V - rF + \max_{0 \leq I \leq k} \{I(-F_K - 1), 0\} = 0. \quad (3-26)$$

A consideração do termo final mostra que a política de investimento optimal é:

$$I = k \quad \text{se} \quad -F_K - 1 \geq 0, \quad (3-27)$$

$$I = 0 \quad \text{se} \quad -F_K - 1 < 0, \quad (3-28)$$

i.e., investimento prossegue à máxima taxa se o benefício marginal para investir ( $-F_K$ ) é maior ou igual ao custo marginal (-1). Se o benefício marginal líquido para investir (benefício marginal + custo marginal) é negativo, nenhum investimento ocorre.

Isto resulta em um limite de investimento ótimo  $V^*(K)$ , ou valor do projeto completo, acima do qual o investimento deveria prosseguir à máxima taxa. Em  $V^*$ , dado que a função satisfaz as condições de atenuação (assume-se que a função é continuamente 2 vezes diferenciável em  $V$  e uma em  $K$ ), o benefício marginal de investir deve ser zero, i.e.,

$$F_K|_{V=V^*} + 1 = 0. \quad (3-29)$$

Esta condição de optimalidade é omitida por Majd e Pindyck (1987).

Vai-se definir como  $F$  a solução para o caso quando  $V \geq V^*$  e  $f$  para o caso onde  $V < V^*$ .  $F$  e  $f$  satisfazem as seguintes equações diferenciais parciais:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + (r - \delta)VF_V - rF = k(F_K + 1), \quad (3-30)$$

e

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 f_{VV} + (r - \delta)Vf_V - rf = 0, \quad (3-31)$$

sujeitas a

$$F(V, 0) = V, \quad (3-32)$$

$$f(0, K) = 0, \quad (3-33)$$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} F(V, K) = Ve^{-\delta K/k} + \frac{k}{r}(e^{-rK/k} - 1), \quad (3-34)$$

$$F(V^*, K) = f(V^*, K), \quad (3-35)$$

$$F_V(V^*, K) = f_V(V^*, K), \quad (3-36)$$

$$F_K(V^*, K) = f_K(V^*, K) = -1. \quad (3-37)$$

Substituindo  $a = \frac{1}{2}\sigma^2$  e  $b = r - \delta$  nas equações (3-30) e (3-31), tem-se

$$aV^2 F_{VV} + bVF_V - rF = k(F_K + 1), \quad (3-38)$$

$$aV^2 f_{VV} + bVf_V - rF = 0. \quad (3-39)$$

### 3.2.1 Solução analítica para $f(V, K)$ (caso $V < V^*$ )

Para encontrar a solução analítica da equação basta assumir que a solução geral da mesma é da forma

$$f(V, K) = AV^\alpha. \quad (3-40)$$

Tem-se que:

$$f_V(V, K) = \alpha AV^{\alpha-1}, \quad (3-41)$$

e

$$f_{VV}(V, K) = \alpha(\alpha - 1)AV^{\alpha-2}. \quad (3-42)$$

Substituindo agora as equações (3-40), (3-41) e (3-42) na equação (3-39) tem-se

$$aV^2\alpha(\alpha - 1)AV^{\alpha-2} + bV\alpha AV^{\alpha-1} - rAV^\alpha = 0, \quad (3-43)$$

e rearranjando os termos na equação (3-43) tem-se

$$(a\alpha^2 + (b - a)\alpha - r)AV^\alpha = 0. \quad (3-44)$$

A solução trivial  $V = 0$  não interessa; portanto, deve-se encontrar  $\alpha$  resolvendo a equação de segundo grau

$$a\alpha^2 + (b - a)\alpha - r = 0. \quad (3-45)$$

Pela equação (3-45), tem-se

$$\Delta = (b - a)^2 + 4ar, \quad (3-46)$$

que leva a solução dada por

$$\alpha_{1,2} = \frac{-(b - a) \pm \sqrt{(b - a)^2 + 4ar}}{2a}. \quad (3-47)$$

Como a solução que interessa exige que  $\alpha > 0$ , tem-se, então,

$$\alpha = \frac{-(b-a) + \sqrt{(b-a)^2 + 4ar}}{2a}. \quad (3-48)$$

Logo, a solução geral para o caso analítico ( $V < V^*$ ) é da forma

$$f(V, K) = AV^{\frac{-(b-a) + \sqrt{(b-a)^2 + 4ar}}{2a}}. \quad (3-49)$$

### 3.2.2 Solução numérica $F(V, K)$ (caso $V \geq V^*$ )

Para a obtenção da solução do caso numérico será utilizado o método das diferenças finitas (MDF).

Com isso pode-se utilizar as seguintes aproximações

$$F_{VV}(V, K) \approx \frac{F(V + \Delta V, K) - 2F(V, K) + F(V - \Delta V, K)}{\Delta V^2}, \quad (3-50)$$

$$F_V(V, K) \approx \frac{F(V + \Delta V, K) - F(V - \Delta V, K)}{2\Delta V}, \quad (3-51)$$

e

$$F_K(V, K) \approx \frac{F(V, K + \Delta K) - F(V, K - \Delta K)}{2\Delta K}. \quad (3-52)$$

Usando a notação  $F_{i,j} = F(i\Delta V, j\Delta K)$ , pode-se simplificar as equações (3-50), (3-51) e (3-52), e com isso obter-se

$$F_{VV} \approx \frac{F_{i+1,j} - 2F_{i,j} + F_{i-1,j}}{\Delta V^2}, \quad (3-53)$$

$$F_V \approx \frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2\Delta V}, \quad (3-54)$$

$$F_K \approx \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j-1}}{2\Delta K}. \quad (3-55)$$

Substituindo as equações (3-53), (3-54) e (3-55) na equação (3-30), tem-se:

$$\frac{aV_i^2}{\Delta V^2}(F_{i+1,j} - 2F_{i,j} + F_{i-1,j}) + \frac{bV_i}{2\Delta V}(F_{i+1,j} - F_{i-1,j}) - rF_{i,j} - \frac{k}{2\Delta K}(F_{i,j+1} - F_{i,j-1}) - k = 0. \quad (3-56)$$

Definindo  $\frac{V_i}{\Delta V} = \xi_i$  e  $\frac{k}{2\Delta K} = \beta$  e reagrupando os termos da equação, tem-se:

$$(a\xi_i^2 + 0.5b\xi_i)F_{i+1,j} - (2a\xi_i^2 + r)F_{i,j} + (a\xi_i^2 - 0.5b\xi_i)F_{i-1,j} - \beta F_{i,j+1} + \beta F_{i,j-1} = k. \quad (3-57)$$

Os elementos que deverão ser compostos na matriz para se encontrar as soluções em todos os pontos  $F_{i,j}$  podem ser sumarizados segundo as equações:

$$A = (a\xi_i^2 + 0.5b\xi_i) \quad , \text{ que corresponde a solução } F_{i+1,j}, \quad (3-58)$$

$$B = -(2a\xi_i^2 + r) \quad , \text{ que corresponde a solução } F_{i,j}, \quad (3-59)$$

$$C = a\xi_i^2 - 0.5b\xi_i \quad , \text{ que corresponde a solução } F_{i-1,j}, \quad (3-60)$$

$$D = \beta. \quad (3-61)$$

Simplificando a equação (3-56) tem-se:

$$AF_{i+1,j} + BF_{i,j} + CF_{i-1,j} - DF_{i,j+1} + \beta F_{i,j-1} = k. \quad (3-62)$$

A análise para a determinação das equações que regem a pseudo fronteira conduz às deduções apresentadas a seguir.

$$\text{Se } \lim_{V \rightarrow \infty} F(V, K) = Ve^{-\delta K/k} + \frac{k}{r}(e^{-rK/k} - 1), \text{ logo } \lim_{V \rightarrow \infty} F_V(V, K) = e^{-\delta j\Delta k/k}.$$

Como  $F_V \approx \frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2\Delta V}$ , isto implica que

$$e^{-\delta j\Delta k/k} = \frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2\Delta V}. \quad (3-63)$$

Portanto,

$$F_{i+1,j} = 2\Delta V e^{-\delta j\Delta k/k} + F_{i-1,j}. \quad (3-64)$$

Assim, tem-se a equação:

$$A(2\Delta V e^{-\delta j\Delta k/k} + F_{i-1,j}) + BF_{i,j} + CF_{i-1,j} - DF_{i,j+1} + \beta F_{i,j-1} = k. \quad (3-65)$$

Reagrupando:

$$BF_{i,j} + (A + C)F_{i-1,j} - DF_{i,j+1} + DF_{i,j-1} = k - 2A\Delta V e^{-\delta j\Delta k/k}. \quad (3-66)$$

Pelas condições de contorno:

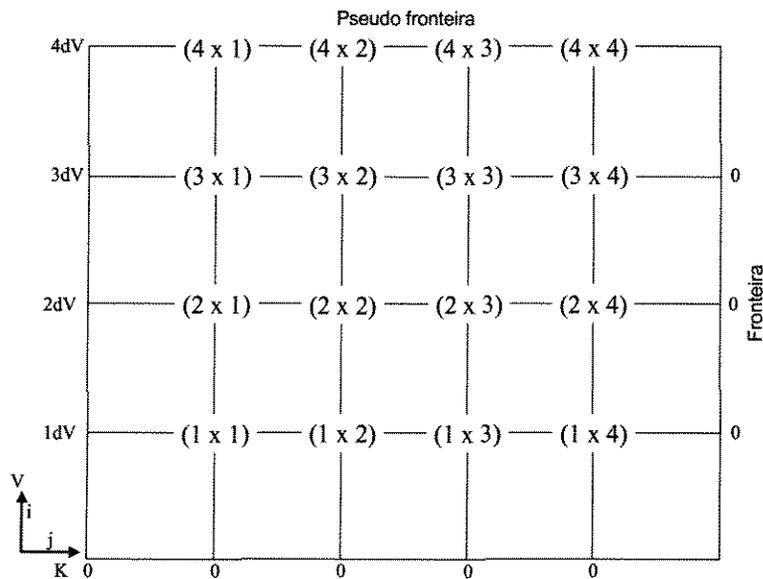
$$F_{0,j} = 0, \quad (3-67)$$

$$F_{i,0} = i\Delta V, \quad (3-68)$$

$$F_{i,n+1} = 0, \quad (3-69)$$

$$F_V(n\Delta V, j\Delta K) = e^{-\delta j\Delta k/k}. \quad (3-70)$$

Um exemplo ilustrativo é mostrar a constituição de uma matriz 4 x 4. A matriz pode ser mostrada da forma:



As deduções das equações relativas aos pares  $(i,j)$  definidos na malha acima são apresentadas no Anexo 2. As equações definem um sistema linear com dezesseis incógnitas que representam os valores da opção de investimento  $F_{i,j}$  da malha 4x4 analisada.

Colocando o sistema em forma matricial,  $\underline{Ax} = \underline{b}$ , obtém-se:

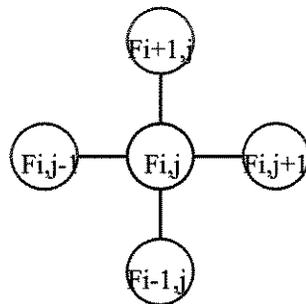
$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & -D_{11} & 0 & 0 & A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & B_{12} & -D_{12} & 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{13} & B_{13} & -D_{13} & 0 & 0 & A_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{14} & B_{14} & 0 & 0 & 0 & A_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & 0 & 0 & 0 & B_{21} & -D_{21} & 0 & 0 & A_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 & D_{22} & B_{22} & -D_{22} & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{23} & 0 & 0 & D_{23} & B_{23} & -D_{23} & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{24} & 0 & 0 & D_{24} & B_{24} & 0 & 0 & 0 & A_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{31} & 0 & 0 & 0 & B_{31} & -D_{31} & 0 & 0 & A_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{32} & 0 & 0 & D_{32} & B_{32} & -D_{32} & 0 & 0 & A_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 & D_{33} & B_{33} & -D_{33} & 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{34} & 0 & 0 & D_{34} & B_{34} & 0 & 0 & 0 & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (A_{41} + C_{41}) & 0 & 0 & 0 & B_{41} & -D_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (A_{42} + C_{42}) & 0 & 0 & D_{42} & B_{42} & -D_{42} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (A_{43} + C_{43}) & 0 & 0 & D_{43} & B_{43} & -D_{43} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (A_{44} + C_{44}) & 0 & 0 & D_{44} & B_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{14} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{24} \\ F_{31} \\ F_{32} \\ F_{33} \\ F_{34} \\ F_{41} \\ F_{42} \\ F_{43} \\ F_{44} \end{bmatrix} =$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} k - \Delta VD_{11} \\ k \\ k \\ k \\ k - 2\Delta VD_{21} \\ k \\ k \\ k \\ k - 3\Delta VD_{31} \\ k \\ k \\ k \\ k - 2A_{41}\Delta Ve^{-\delta \Delta t/k} - 4\Delta VD_{41} \\ k - 2A_{42}\Delta Ve^{-2\delta \Delta t/k} \\ k - 2A_{43}\Delta Ve^{-3\delta \Delta t/k} \\ k - 2A_{44}\Delta Ve^{-4\delta \Delta t/k} \end{bmatrix}$$

Uma vez resolvido o sistema, o que implica encontrar a matriz inversa  $\underline{A}^{-1}$ , todos os pontos da malha, pares (i,j) correspondentes à opção de investimento  $F_{i,j}$ , são obtidos.

Como em uma EDP elíptica cada elemento pode ser calculado dependendo dos quatro elementos adjacentes, tem-se, para cada elemento a ser calculado, o máximo de quatro outros elementos disponíveis, como mostra a célula representativa abaixo. O processo de discretização das EDPs resulta em um sistema de equações lineares algébricas (SELA). O método de discretização empregado, MDF, usa um estêncil de cinco pontos, que pode ser visto na representação abaixo. As matrizes geradas são do tipo banda, que apresentam todos os elementos não nulos distribuídos regularmente em diagonais próximas à diagonal principal.



Observe-se o elemento central da célula  $F_{i,j}$ . Este elemento é calculado baseado nos valores dos quatro elementos adjacentes, no caso os elementos em vermelho,  $F_{i+1,j}$ ,  $F_{i-1,j}$ ,  $F_{i,j+1}$  e  $F_{i,j-1}$ . Cada linha da matriz contém, no máximo, cinco elementos não nulos - o próprio e mais seus quatro elementos adjacentes. Se o elemento a ser calculado estiver perto da fronteira da malha, o elemento pode ser representado apenas por dois (menor caso), ou três elementos adjacentes. Na figura acima, este seria o caso onde um ou dois elementos em vermelho seriam conhecidos pelas condições de contorno e, portanto, não representariam variáveis do sistema.

Portanto, cada linha ou coluna da matriz do sistema contém no máximo cinco elementos não nulos. A própria estrutura de uma EDP elíptica ajuda bastante na redução de variáveis necessárias ao armazenamento. Uma matriz dessa forma, com apenas poucos elementos não nulos por linha ou coluna, é chamada de matriz esparsa.

A matriz  $\underline{A}$  segue um padrão de formação e pode-se individualizar a constituição de blocos conforme apresentado na Figura 3-26.

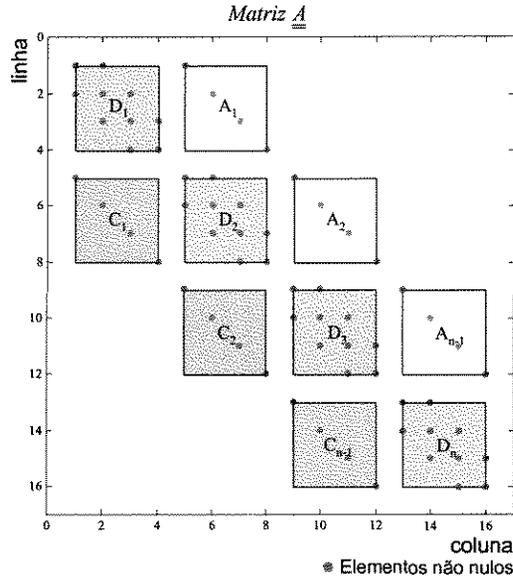


Figura 3-26 – Representação da matriz  $\underline{A}$  do sistema para cálculo dos valores das opções de investimento  $F_{i,j}$

As matrizes  $\underline{A}$  e  $\underline{b}$  podem ser reescritas utilizando-se as seguintes notações simplificadas:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} D_1 & A_1 & 0 & 0 \\ C_1 & D_1 & A_2 & 0 \\ 0 & C_2 & D_3 & A_{n-1} \\ 0 & 0 & C_{n-1} & D_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_n \end{bmatrix},$$

onde  $D_1, A_1, C_1, \dots, D_n, A_{n-1}, C_{n-1}$  são os blocos representados na Figura 3-26, cada um deles com seus respectivos elementos da matriz.

Os blocos da matriz  $\underline{b}$  podem ser explicitados da seguinte forma:

$$b_1 = \begin{bmatrix} k - 2\Delta VD_{11} \\ k \\ k \\ k \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} k - 2\Delta VD_{21} \\ k \\ k \\ k \end{bmatrix} \quad b_3 = \begin{bmatrix} k - 3\Delta VD_{31} \\ k \\ k \\ k \end{bmatrix} \quad b_4 = \begin{bmatrix} k - 2A_{41}\Delta Ve^{-\delta \Delta k/k} - 4\Delta VD_{41} \\ k - 2A_{42}\Delta Ve^{-2\delta \Delta k/k} \\ k - 2A_{43}\Delta Ve^{-3\delta \Delta k/k} \\ k - 2A_{44}\Delta Ve^{-4\delta \Delta k/k} \end{bmatrix}.$$

### 3.2.3 Comentários sobre a solução de equações de diferenças finitas

Um método de diferenças finitas com aproximação de valor de fronteira conduz a um sistema de equações algébricas. Para problemas de valor de fronteira linear estas equações são lineares e o número delas é geralmente grande. Os métodos de solução pertencem, essencialmente, à classe de métodos diretos ou à classe de métodos iterativos.

Os métodos diretos resolvem o sistema de equações em um número conhecido de operações aritméticas, e os erros na solução surgem inteiramente de erros de arredondamento introduzidos durante os cálculos computacionais. Basicamente, esses métodos diretos são métodos de eliminação, dos quais os exemplos mais conhecidos são o método de eliminação Gaussiano sistemático e o método de decomposição triangular que fatora a matriz  $\underline{A}$  das equações  $\underline{Ax} = \underline{b}$  em  $\underline{A} = \underline{LU}$ , onde  $L$  e  $U$  são as matrizes triangular inferior e superior respectivamente. No último método, uma vez que a decomposição foi determinada, a solução é calculada de  $\underline{LUx} = \underline{b}$  colocando  $\underline{Ux} = \underline{y}$  e, então, resolvendo  $\underline{Ly} = \underline{b}$  para  $\underline{y}$  por substituição e  $\underline{Ux} = \underline{y}$  para  $\underline{x}$  por substituição reversa. Com ambos os métodos é usualmente necessário empregar pivotamento parcial para controlar o crescimento dos erros de arredondamento.

Pode-se notar que, quando a aritmética desses métodos é conduzida em computadores, os erros de arredondamento introduzidos durante os cálculos frequentemente têm menos efeito sobre a solução que os erros de arredondamento nos coeficientes e constantes das equações. Em outras palavras, a solução é tão acurada quanto os dados autorizem. Isto não implica que o número de dígitos significativos na solução seja o mesmo que nos dados. Se esse número é menor, a perda de precisão ocorre não através do método de solução, mas porque as equações são mal condicionadas no sentido de que pequenas mudanças nos coeficientes produzem grandes mudanças na solução.

Apesar de que os métodos de eliminação Gaussiana e decomposição LU são matematicamente equivalentes, os erros globais do método LU podem ser menores que aqueles da eliminação Gaussiana se os produtos internos são acumulados em aritmética de dupla precisão. Sem a acumulação em dupla precisão, os dois métodos são numericamente e matematicamente equivalentes.

Se a matriz de coeficientes pode ser armazenada diretamente na memória RAM do computador, então os métodos diretos, em geral, são mais rápidos e mais precisos que os métodos iterativos. Adicionalmente, se a matriz de coeficientes tem alguma estrutura ou propriedade especial é usualmente possível aumentar o número de equações que podem ser resolvidas através de uma programação eficiente.

Os métodos diretos são certamente preferíveis aos métodos iterativos quando:

- i) Diversos conjuntos de equações com a mesma matriz de coeficientes ( $\underline{A}$ ) mas com diferentes lados direitos ( $\underline{b}$ ) têm que ser resolvidos.
- ii) A matriz é quase singular. Neste caso, pequenos resíduos não implicam erros pequenos na solução.

Além do problema de instabilidade numérica que decorre da propagação dos erros de arredondamento, podem também ocorrer problemas de mau condicionamento das matrizes. Para se analisar convenientemente o problema do condicionamento, é necessário introduzir a noção de normas vetoriais e matriciais.

Na prática, raramente é necessário calcular a matriz inversa de  $\underline{A}$ . Uma melhor forma, sob o ponto de vista de precisão numérica e de tempo de execução, é usar o operador de divisão de matriz  $\underline{x} = \underline{A} \backslash \underline{b}$ . Isto produz a solução usando eliminação Gaussiana, sem a necessidade de formar a matriz inversa. A solução direta produz resíduos da ordem da precisão do computador, mesmo que o sistema seja mal condicionado. Considerando-se  $\underline{x} = \underline{A} \backslash \underline{b}$  pode-se definir o resíduo como:  $resíduo = norma(\underline{A} * \underline{x} - \underline{b})$ . A norma da matriz é um escalar que dá uma medida da ordem de grandeza dos elementos da matriz.

Como pode ser visto neste capítulo, as matrizes associadas com equações de diferenças finitas aproximando equações diferenciais parciais são matrizes bandadas, i.e., matrizes com elementos não nulos posicionados em duas sub-diagonais paralelas e superiores à diagonal principal e duas

sub-diagonais paralelas e inferiores à diagonal principal. Essas matrizes são também usualmente esparsas, i.e., o número de elementos nulos na matriz é muito maior que o número de elementos não nulos. Para este tipo de matriz o método de eliminação Gaussiana padrão é ineficiente no sentido que ele insere elementos nulos (zeros) entre as “bandas” (diagonais) com elementos não nulos e que têm de ser armazenados e usados nos estágios subsequentes do processo de eliminação.

Entretanto, com os métodos iterativos nenhuma aritmética é associada com coeficientes nulos. Assim, poucos números têm que ser armazenados em computador. Como consequência, os métodos iterativos podem ser usados para resolver sistemas de equações considerados muito grandes para o uso dos métodos diretos. Outra vantagem, não possuída pelos métodos diretos, é sua extensão para a solução de conjuntos de equações não lineares.

O uso eficiente dos métodos iterativos é muito dependente do cálculo ou estimativa de valor ou valores de parâmetro de aceleração, e do fato dos coeficientes da matriz serem bem condicionados. Caso contrário, a convergência será lenta e o volume de cálculo será muito grande. Com parâmetros de aceleração o volume de cálculos matemáticos dos métodos iterativos para grandes conjuntos de equações pode ser menor que para métodos diretos.

Um método iterativo para a resolução de equações é aquele no qual uma primeira aproximação é usada para calcular uma segunda aproximação que, por sua vez, é usada para calcular uma terceira e assim sucessivamente. O procedimento é convergente quando as diferenças entre a solução exata e as aproximações sucessivas tendem a zero quando o número de iterações aumenta. Em geral, a solução exata nunca é obtida em um número finito de passos, mas isso não importa. O que é importante é que as iterações sucessivas convirjam rapidamente para valores que sejam corretos para uma precisão especificada.

Como mencionado anteriormente, considera-se o uso de métodos iterativos quando um método direto requer mais espaço de armazenamento em computador (memória RAM) que o disponível e a matriz de coeficientes é esparsa, porém bem condicionada. Essa é uma situação que frequentemente surge com as equações de diferenças finitas aproximando EDP elípticas e com condições de fronteira.

Os métodos iterativos clássicos são: Jacobi, Gauss-Seidel e SOR (*Successive over-relaxation*). Uma descrição pormenorizada de métodos iterativos é dada em Young (1971).

Ames (1977) expõe que para uma equação elíptica linear, cujos coeficientes das derivadas segundas nas duas dimensões são positivos e o termo independente é negativo ou zero e existe fronteira fechada definida com condições de Dirichlet<sup>13</sup> (como é o caso da maioria das EDP em finanças) então o sistema  $\underline{Ax} = \underline{b}$  é único. Tem-se, então, a garantia da unicidade da solução.

Os métodos numéricos para a solução de EDP que surgem nos modelos de Opções Reais são discutidos em Brennan e Schwartz (1978), Geske e Shastri (1985) e Hull e White (1990). Os leitores que desejam desenvolver habilidades na resolução de EDP podem fazer referência a Smith (1971) e Strikwerda (1989).

Uma importante questão relacionada com o tratamento prático das equações algébricas provenientes do MDF é a estabilidade. O sistema de equações algébricas necessita ser resolvido numericamente, o que significa que alguns erros de arredondamento são introduzidos a cada passo. Além disso, não se pode considerar as condições de fronteira como exatas - elas são sujeitas a pequenas perturbações como resultado de qualquer implementação numérica.

A idéia essencial ao definir estabilidade é que um processo numérico confiável deveria limitar a amplificação das componentes das condições de fronteira. Suponha que no passo inicial  $n = 0$  se introduz um pequeno erro nos valores da função ao discretizá-la na malha. O método deveria garantir que a influência desse erro diminui quando se move ao longo da linha do tempo na solução da equação de diferenças finitas. O teorema de equivalência de LAX estabelece que, para equações lineares, as propriedades de estabilidade e consistência são equivalentes àquela de convergência. Suponha que um MDF seja consistente com a equação original. Para que o método convirja para a solução real de uma EDP quando o intervalo de discretização diminui, ele tem que ser estável com

---

<sup>13</sup> As condições de fronteira de Dirichlet são as condições de fronteira de EDP que dão o valor da função sobre uma superfície.

relação a pequenas perturbações. Além disso, a estabilidade é a condição suficiente e necessária para a convergência.

O MDF é uma das primeiras ferramentas matemáticas empregadas para resolver EDP. A metodologia de MDF foi utilizada pioneiramente para valorar derivativos por Schwartz (1977), Brennan e Schwartz (1978), e foi estendida por Courtadon (1982).

Existem duas implementações para o MDF: método explícito e método implícito. O MDF explícito calcula o valor de uma opção no tempo  $t + \Delta t$  como uma função de valores no tempo  $t$ . Os cálculos desenvolvem-se recursivamente do tempo 0 ( $t = 0$  ou data de expiração) para o tempo  $T$  (data atual). O MDF implícito calcula o valor de uma opção no tempo  $t$  como uma função de valores no tempo  $t + \Delta t$ . O método implícito requer a resolução de sistemas de equações lineares para desenvolver os cálculos a partir do tempo  $t$  para o tempo  $t + \Delta t$ .

O procedimento utilizado na elaboração das rotinas do Capítulo 3.1 é uma variante da forma explícita do MDF. A implementação computacional do modelo do Capítulo 3.2 é realizada utilizando-se o método implícito.

Para comparar os métodos de diferenças finitas pode-se classificá-los como instável, condicionalmente estável ou incondicionalmente estável.

O MDF instável obtém grandes mudanças nos valores de opções para pequenas mudanças nas condições iniciais. Ele acumula grandes erros de cálculos. O MDF instável não converge para a solução da EDP.

O MDF condicionalmente estável obtém pequenas mudanças nos valores de opções para pequenas mudanças nas condições iniciais. Ele converge para a solução da EDP, mas os erros de cálculo flutuam em função das discretizações das variáveis. Neste caso há uma diminuição dos erros de cálculo quando o número de intervalos de partição aumenta.

Para implementar o MDF constrói-se uma malha onde a dimensão horizontal representa os valores discretos da variável  $K$  com passos constantes  $\Delta K$  e a dimensão vertical representa pontos discretos no valor do projeto completo  $V$  com passo constante  $\Delta V$ . Em qualquer nó  $(i,j)$  da malha pode-se calcular o valor das variáveis  $V$  e  $K$  como  $V = i\Delta V$  e  $K = K_{\min} + j\Delta K$ .

A partir de resultados encontrados em Berezin e Zidkov (1960) verifica-se que uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de MDF explícito é que  $\alpha = \Delta V / \Delta K^2 \leq 1$ .

Então, a condição  $\alpha = 1$  estabelece a fronteira de estabilidade para o MDF explícito. O MDF explícito é condicionalmente estável se  $\alpha = 1$  e é incondicionalmente estável se  $\alpha < 1$ .

A condição  $\alpha \leq 1$  ilustra porque o MDF explícito pode produzir resultados instáveis quando usado para resolver equações com condições de fronteira.

A acurácia do MDF é proporcional a  $\Delta K^2$ . Portanto, valores muito pequenos de  $\Delta K$  podem ser necessários para obter a solução precisa. Para a obtenção da condição de estabilidade  $\Delta K$  requer um grande número de partições (discretizações) da variável  $V$  para satisfazer a condição  $\alpha < 1$ . Se o número de partições da variável  $V$  é insuficientemente grande, a condição  $\alpha < 1$  pode não ser satisfeita. Isso conduz a uma solução instável.

A partir de resultados obtidos em Berezin e Zidkov (op.cit.) verifica-se que uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de MDF implícito é que  $\alpha \geq 0$ . Dado que  $\alpha = \Delta V / \Delta K^2$ , essa condição é sempre verdadeira. Os parâmetros que definem o número de discretizações para  $V$  e  $K$  podem ser escolhidos independentemente, desta forma, soluções estáveis e precisas podem ser produzidas com um número prático de discretizações.

### 3.2.4 Estudo de caso

Similarmente ao apresentado em 3.1.1, procedeu-se à análise para avaliar o modelo para valor do projeto estocástico e investimento determinístico com incorporação de condição de optimalidade e mensurar os efeitos nos resultados, na determinação dos índices de risco e nos instrumentos de tomada de decisão.

A introdução da condição de optimalidade e obtenção da solução simultânea de todos os pontos da malha correspondentes à opção de investimento  $F_{i,j}$ , através método de diferenças finitas, leva a uma forte uniformização do valor da opção no momento zero (ponto onde ainda nenhum investimento foi realizado). Esta conclusão é derivada da observação direta das Figuras 3-29 a 3-32.

Contrariamente aos resultados obtidos pelo modelo para valor do projeto estocástico e investimento determinístico (Figura 3-19), o Espaço de Opções para três cenários com  $\sigma=10\%$ ,  $\sigma=20\%$  e  $\sigma=30\%$  não mostra diferenças significativas (Figura 3-29). O posicionamento e a inclinação das classes de valores das opções de investimento  $F(V,K)$ , representadas pela gradação de cores entre azul e vermelho, não sinalizam crescimento do valor da opção com o aumento do valor da volatilidade  $\sigma$ .

A constatação acima é também evidenciada pela observação dos histogramas de Opção no momento zero (Figura 3-30), Histogramas de VP de Opções (Figura 3-31) e gráficos de evolução do VPL convencional e das opções ao longo dos anos (Figura 3-32).

O prêmio de opção capturado pelo valor da opção no momento zero situa-se no nível de 25% e é da mesma ordem de grandeza fornecida pelo modelo para valor do projeto estocástico e investimento determinístico sem incorporação de condição de optimalidade. Os diagramas de valores de VPL, Opção no momento zero e VP de Opções são representados nas Figuras 3-27 e 3-28 para 50 possíveis projetos (realizações obtidas por simulação).

A baixa dispersão de resultados, caracterizada nos histogramas da Figura 3-30 e nas representações dos valores de opção da Figura 3-32, acarreta uma forte suavização na escala do fator de risco, independente do cenário econômico-financeiro analisado. A Figura 3-33 mostra os índices de risco obtidos a partir dos resultados de VPL, Opção no momento zero e VPL de Opções para 3 cenários econômico-financeiros diferentes. Os riscos obtidos pela dispersão dos valores de opção se situam no mesmo patamar do risco fornecido pela variância de resultados de VPL.

Similarmente ao que foi obtido no modelo anterior (sem incorporação da condição de optimalidade), o gráfico da Figura 3-33 não apresenta variações na escala do fator de risco em função de variações na volatilidade. Para este modelo, isso é atribuído à pequena dispersão dos valores de opção aliada ao não crescimento da opção com o aumento de volatilidade. Pode-se concluir que a incorporação da condição de optimalidade e as condições de fronteira introduzem uma componente de suavização no sistema, fazendo com que o modelo de opções dê resultados compatíveis com a análise por VPL no que se refere à mensuração de risco.

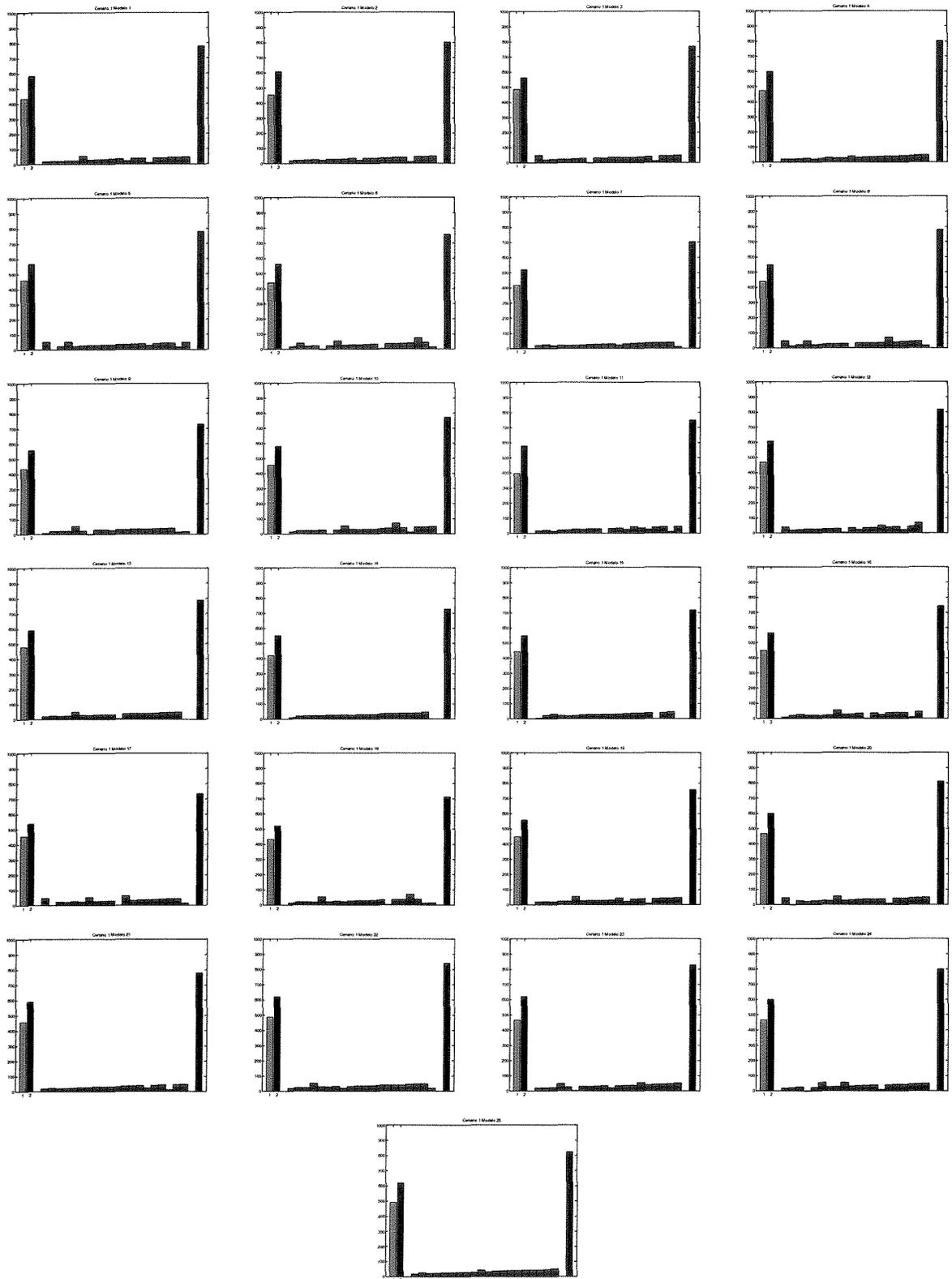


Figura 3-27 – Diagrama de valores de VPL, Opção no momento zero, Incrementos de Opções e VP de Opções para as simulações 1 a 25 ( $\sigma=10\%$ ,  $r=4\%$ ,  $\mu=12\%$ ,  $\alpha=6\%$ )

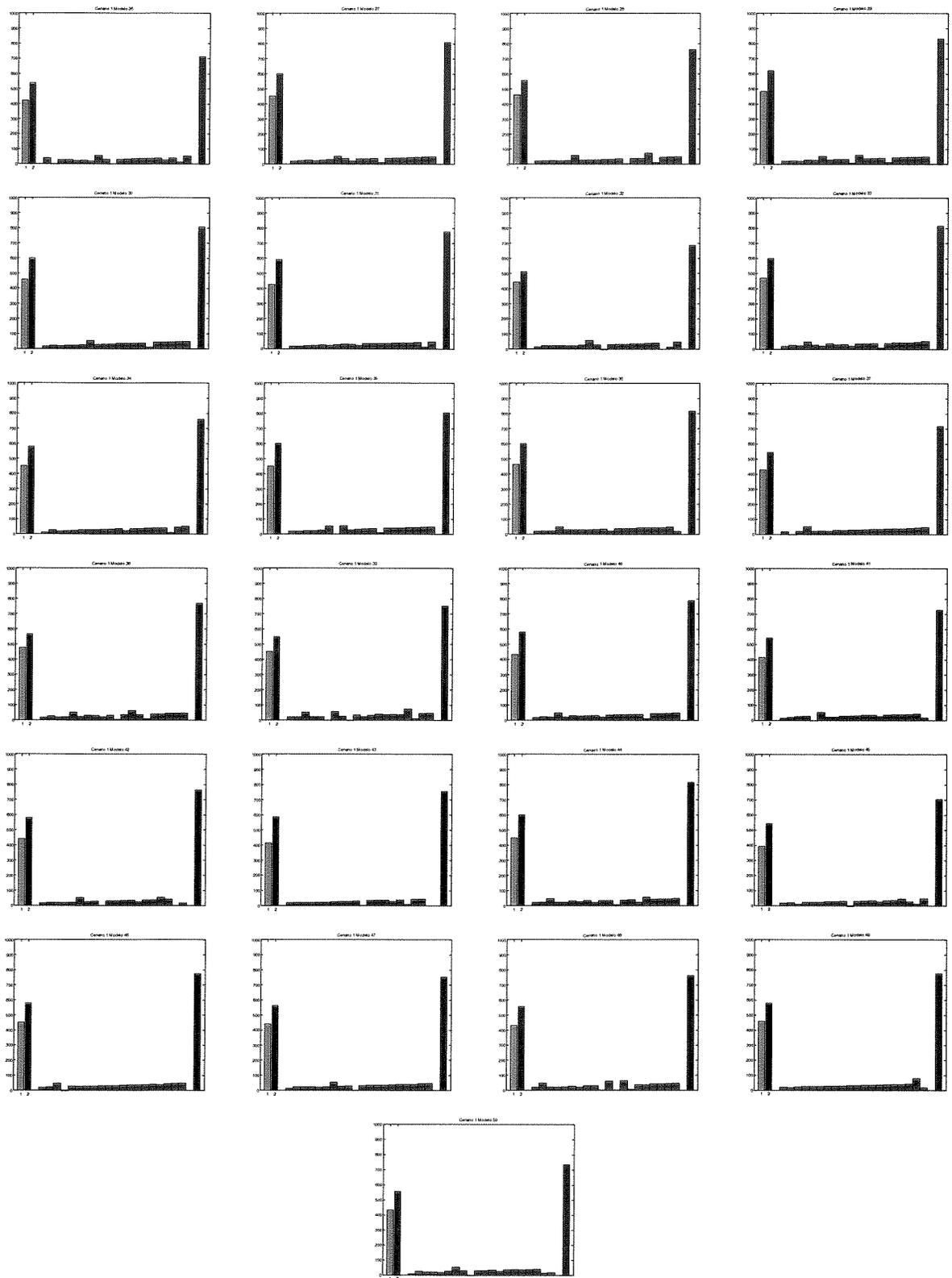


Figura 3-28 – Diagrama de valores de VPL, Opção no momento zero, Incrementos de Opções e VP de Opções para as simulações 25 a 50 ( $\sigma=10\%$ ,  $r=4\%$ ,  $\mu=12\%$ ,  $\alpha=6\%$ )

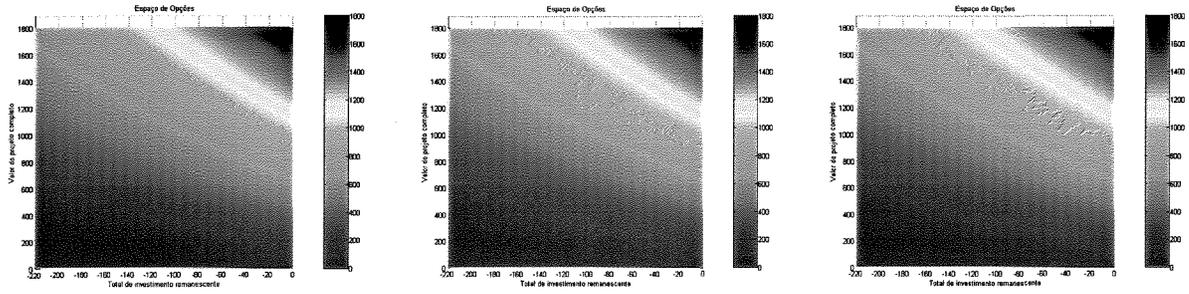


Figura 3-29 – Valor da opção de investimento  $F(V,K)$  para  $\sigma=10\%$ ,  $\sigma=20\%$  e  $\sigma=30\%$

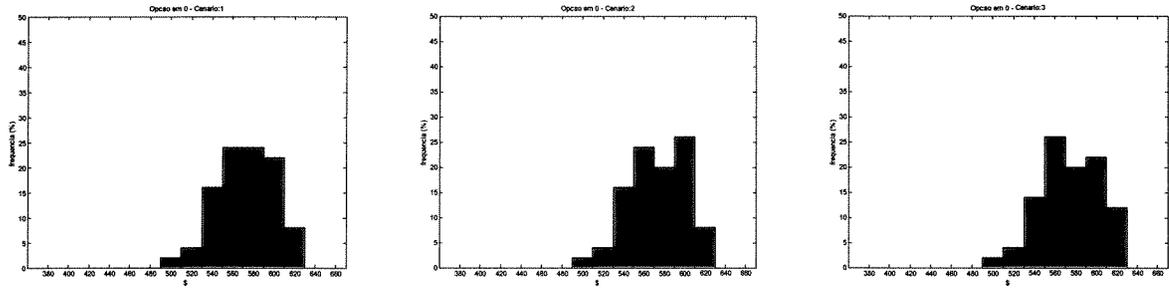


Figura 3-30 – Histogramas de Opção no momento zero para  $\sigma=10\%$ ,  $\sigma=20\%$  e  $\sigma=30\%$

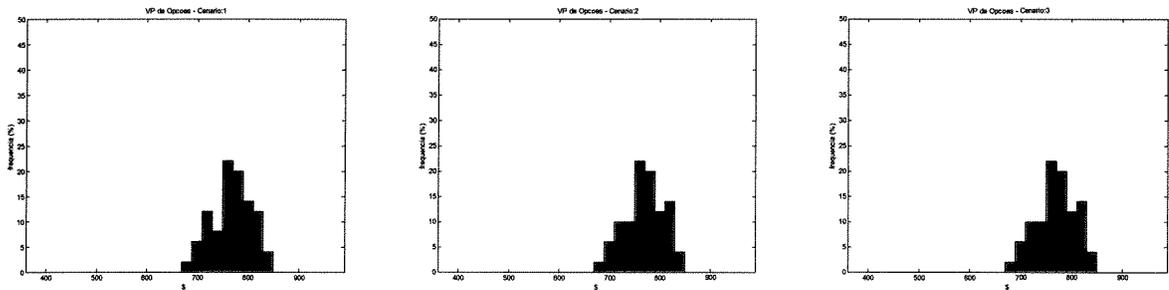


Figura 3-31 – Histogramas de VP de Opções para  $\sigma=10\%$ ,  $\sigma=20\%$  e  $\sigma=30\%$

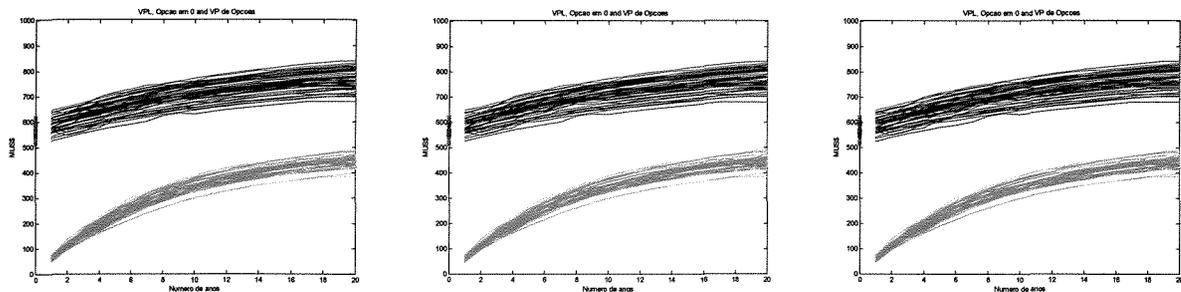


Figura 3-32 – Evolução do VPL convencional (verde), da Opção no momento zero (+ em vermelho) e do VP de Opções (violeta) ao longo dos anos para  $\sigma=10\%$ ,  $\sigma=20\%$  e  $\sigma=30\%$

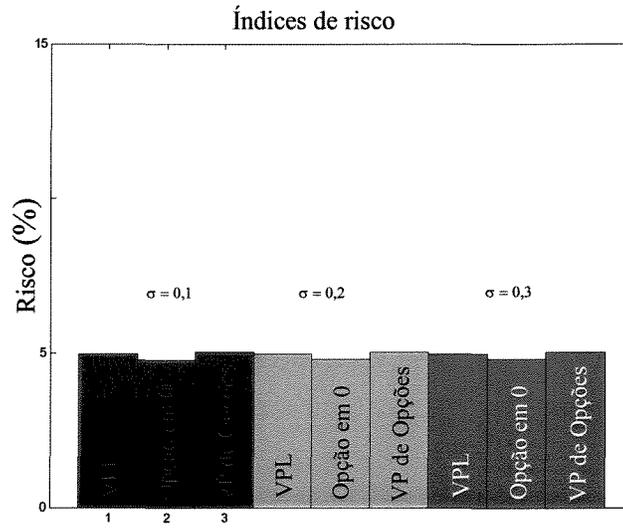


Figura 3-33 – Ilustração dos Índices de Risco obtido a partir dos resultados de VPL, Opção no momento zero e VPL de Opções para 3 cenários econômico-financeiros diferentes ( $\sigma=10\%$ ,  $\sigma=20\%$  e  $\sigma=30\%$ )



### 3.3 Modelo para investimentos de custos incertos

A importância do custo do investimento para a decisão de investir remete à questão correlacionada da incerteza sobre esse custo. Esse tipo de incerteza é especialmente relevante nos casos de grandes projetos que requerem um intervalo de tempo significativo para serem concluídos (usinas hidrelétricas, complexos petroquímicos, siderúrgicas, ferrovias, rodovias, projetos de mineração). As fontes da incerteza de custos são as flutuações imprevisíveis dos preços e das quantidades de insumos de capital e trabalho.

A incerteza de custos afeta a decisão de investimento de forma similar à incerteza de preços. Em particular, ela também cria uma opção de investir no futuro cujo valor é igual ao custo de oportunidade de investir no presente. Se a incerteza sobre a evolução dos custos no futuro for suficientemente alta, pode ser melhor para a empresa adiar o investimento. Não necessariamente a incerteza incentiva o adiamento dos investimentos. Se investir disponibiliza informação, pode ser desejável antecipar a execução do projeto. Este é o caso quando existe a incerteza técnica, ou seja, a incerteza sobre a dificuldade física de completar um projeto. Esse tipo de incerteza só pode ser resolvido com o início imediato da execução do projeto.

No modelo apresentado em Dixit e Pindyck (1993) e discutido no Capítulo 3.1, apesar de se ter duas variáveis de estado além do tempo, apenas o  $V$  é estocástico (Equação 3-11). O valor de  $K$  (investimento que falta para completar o projeto) é uma função determinística do tempo e da taxa de investimento  $I$ , sendo que  $I$  é variável de controle (escolhe otimamente  $I^*$  de forma a maximizar o valor da opção). Esse modelo (chamado de *time-to-build*) considera a taxa ótima de investimento ao longo da construção de  $V$ , dado que apenas  $V$  é estocástico.

Em diversas situações, o custo  $K$  é estocástico, sendo interessante estender para o caso em que tanto  $K$  como  $V$  são estocásticos. Esta extensão é discutida em Pindyck (1992).

O modelo considera as decisões de investimento irreversíveis onde os projetos levam tempo para serem completados e são sujeitos a dois tipos de incerteza sobre os custos. O primeiro é a incerteza

técnica, i.e., incerteza sobre a quantidade de tempo e materiais que serão requeridos para completar o projeto, e que somente é solucionada quando o investimento ocorre. O segundo é a incerteza dos custos de insumo, i.e., incerteza sobre os preços e quantidades de trabalho e materiais que serão requeridos, e que é externa à atividade de investimento da empresa.

Este modelo produz regras de decisão que maximizam o valor da empresa e mostra como os dois tipos de incerteza têm diferentes efeitos sobre a decisão de investir e como eles afetam o valor da oportunidade para investir.

Este modelo acha-se convenientemente descrito e apresentado por Pindyck (1992) e Rocha (1996). A exemplo do modelo para valor do projeto estocástico e investimento determinístico com incorporação de condição de optimalidade discutido em 3.2 as equações que regem o modelo e as deduções para implementação numérica são apresentadas no Anexo 3.

As raízes  $\omega_1$  e  $\omega_2$  dadas pela equação (14) no Anexo 3 devem ser retificadas conforme demonstrado pelo desenvolvimento apresentado a seguir.

Iniciando pela equação (13) do Anexo 3:

$$\frac{1}{2}\gamma^2[\omega^2 - \omega] - \alpha\omega + \frac{1}{2}\sigma^2[\omega^2 - \omega] - r = 0 \quad , \quad (13 - \text{Anexo 3})$$

$$\frac{1}{2}(\gamma^2 + \sigma^2)\omega^2 - \left[\frac{1}{2}(\gamma^2 + \sigma^2) + \alpha\right]\omega - r = 0 \quad , \quad (3-71)$$

$$2 \times \left( \frac{1}{2}(\gamma^2 + \sigma^2)\omega^2 - \left[\frac{1}{2}(\gamma^2 + \sigma^2) + \alpha\right]\omega - r \right) = 2 \times 0 \quad , \quad (3-72)$$

$$(\gamma^2 + \sigma^2)\omega^2 - [(\gamma^2 + \sigma^2) + 2\alpha]\omega - 2r = 0 \quad , \quad (3-73)$$

$$a\omega^2 - b\omega - 2r = 0 \quad . \quad (3-74)$$

Logo, as raízes da equação de segundo grau são:

$$\omega = \frac{(\gamma^2 + \sigma^2 + 2\alpha) \pm \sqrt{(-\gamma^2 - \sigma^2 - 2\alpha)^2 + 8(\gamma^2 + \sigma^2)r}}{2(\gamma^2 + \sigma^2)}, \quad (3-75)$$

$$\omega = \frac{(\gamma^2 + \sigma^2 + 2\alpha)}{2(\gamma^2 + \sigma^2)} \pm \sqrt{\frac{(-\gamma^2 - \sigma^2 - 2\alpha)^2 + 8(\gamma^2 + \sigma^2)r}{4(\gamma^2 + \sigma^2)^2}}. \quad (3-76)$$

Os diagramas de valores de VPL, Opção no momento zero e VP de Opções são representados nas Figuras 3-34 e 3-35 para 50 possíveis projetos gerados a partir dos modelos obtidos por simulação. Estes diagramas ilustram os diferenciais entre valores de VPL e valores de opção para um cenário econômico-financeiro particular com incerteza técnica  $\beta=25\%$  e incerteza econômica  $\gamma=10\%$ .

A Figura 3-36 ilustra o Espaço de Opções para um cenário econômico com incerteza técnica  $\beta=15\%$  e incerteza econômica  $\gamma=15\%$ .

De forma a mensurar os efeitos das variáveis incerteza técnica ( $\beta$ ) e incerteza econômica ( $\gamma$ ) sobre o valor médio das opções e desvios padrão dos valores de Opção, procedeu-se a uma série de cálculos para um espectro de combinações de incertezas ( $\beta, \gamma$ ) variando no intervalo  $[0\%, 50\%]$ . A representação destes resultados é ilustrada na Figura 3-37, admitindo-se a fixação das demais variáveis financeiras ( $\sigma, r, \mu, \alpha, \delta$ ).

Os índices de risco calculados para cada par de valor ( $\beta, \gamma$ ) e derivados da conceituação já definida de dispersão relativa (média /desvio padrão) são apresentados na Figura 3-38. Fica evidente que o nível de risco de 5% mensurado pelas variações de VPL somente se mantém para valores muito baixos de incertezas  $\beta, \gamma$ . Há um nítido aumento de índice de risco acarretado principalmente pela contribuição da variável incerteza econômica ( $\gamma$ ), que deve ser pertinentemente considerada nas análises de tomada de decisão e nos processos de otimização de portfólio.

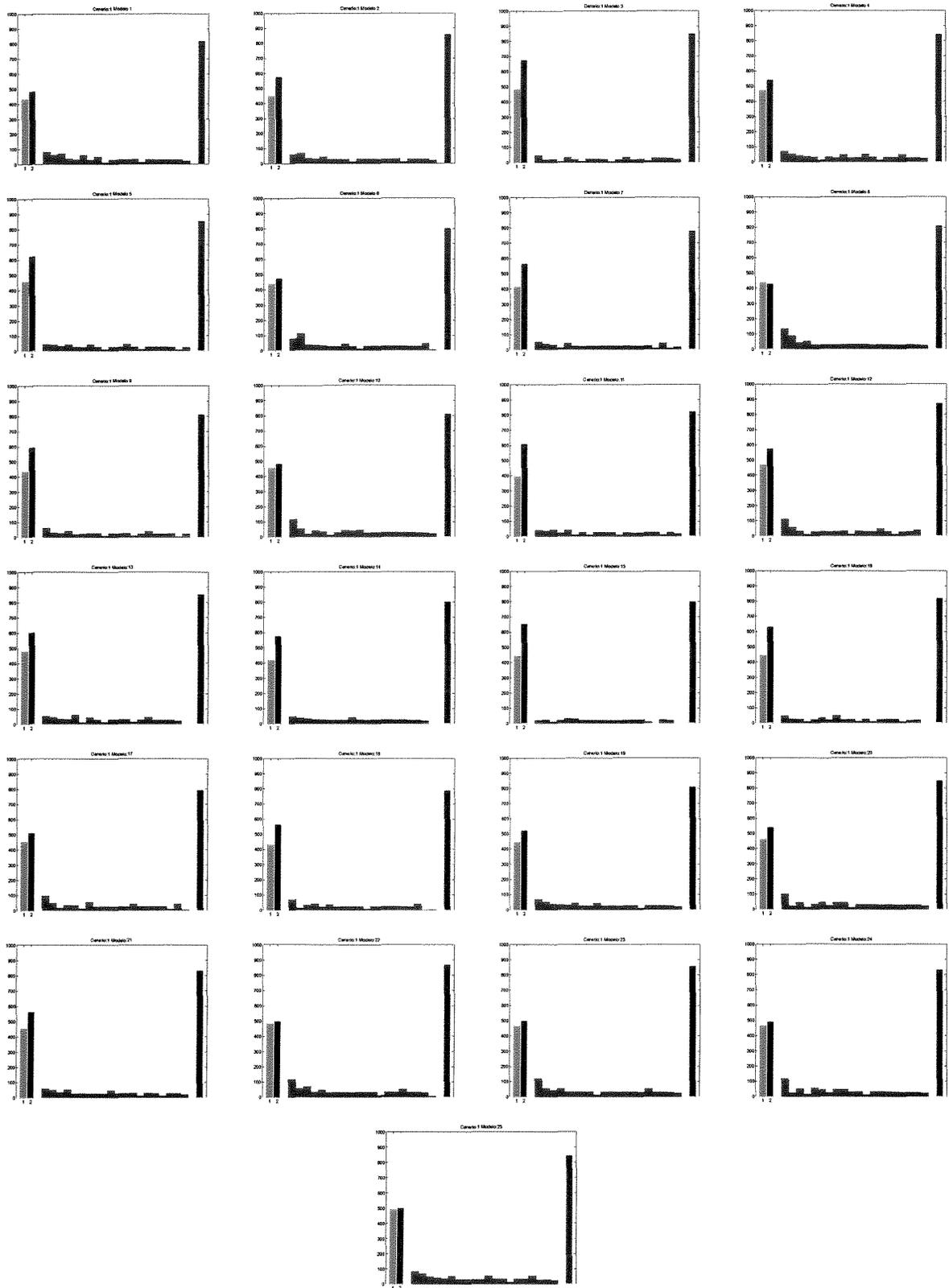


Figura 3-34 – Diagrama de valores de VPL, Opção no momento zero, Incrementos de Opções e VP de Opções para as simulações 1 a 25 ( $\sigma=10\%$ ,  $r=4\%$ ,  $\mu=12\%$ ,  $\alpha=2\%$ ,  $\delta=10\%$ ,  $\beta=25\%$  e  $\gamma=10\%$ )

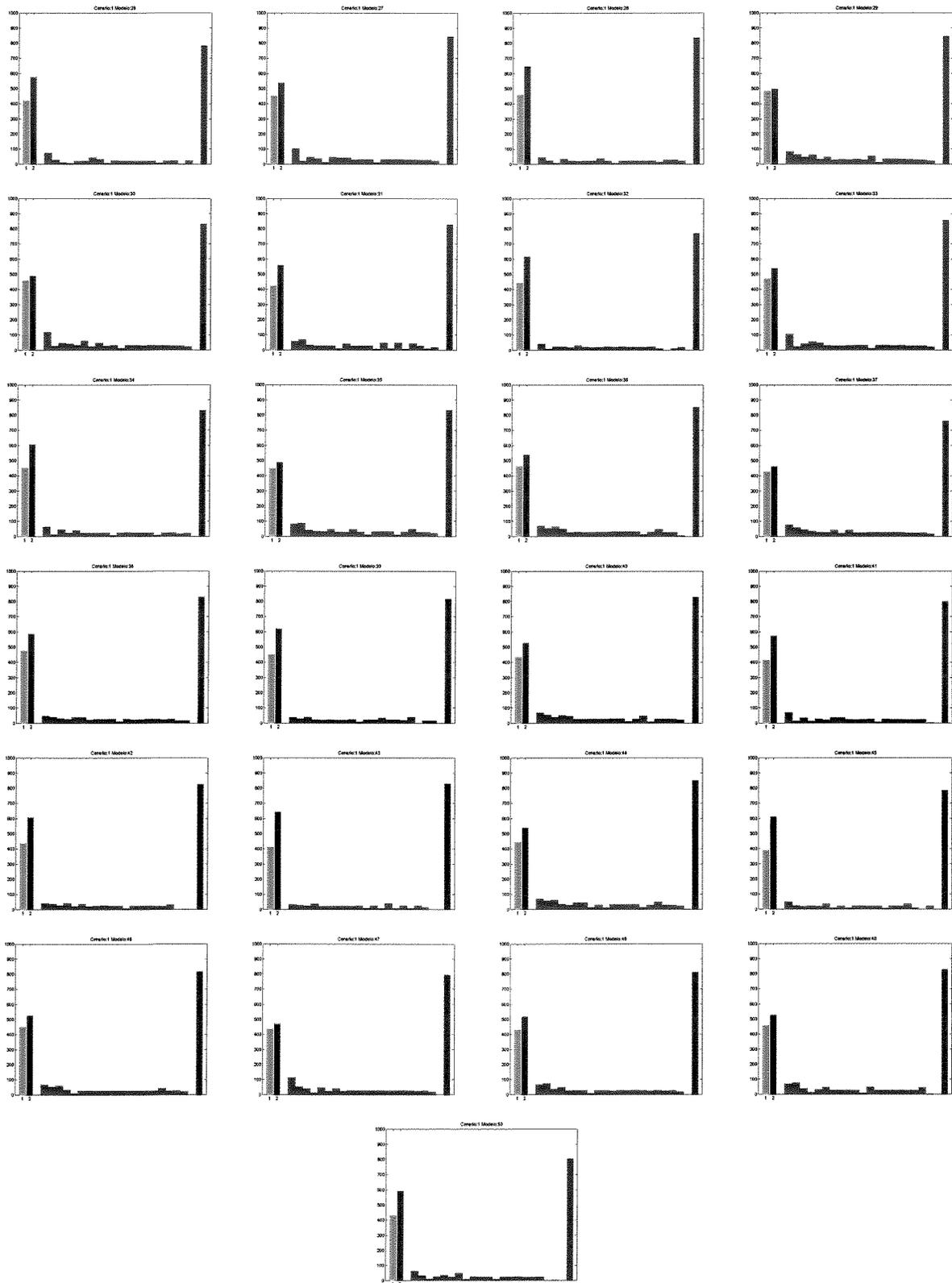


Figura 3-35 – Diagrama de valores de VPL, Opção no momento zero, Incrementos de Opções e VP de Opções para as simulações 26 a 50 ( $\sigma=10\%$ ,  $r=4\%$ ,  $\mu=12\%$ ,  $\alpha=2\%$ ,  $\delta=10\%$ ,  $\beta=25\%$  e  $\gamma=10\%$ )

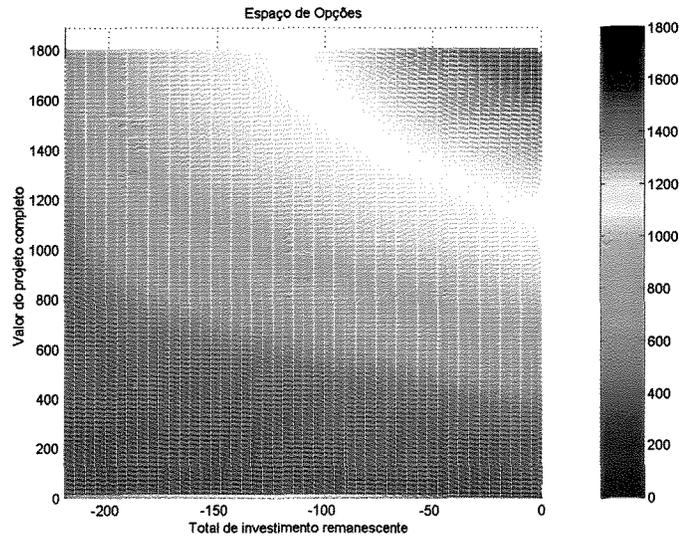


Figura 3-36 – Valor da opção de investimento  $F(V,K)$  para  $\sigma=10\%$ ,  $r=4\%$ ,  $\mu=12\%$ ,  $\alpha=2\%$ ,  $\delta=10\%$ ,  $\beta=15\%$  e  $\gamma=15\%$

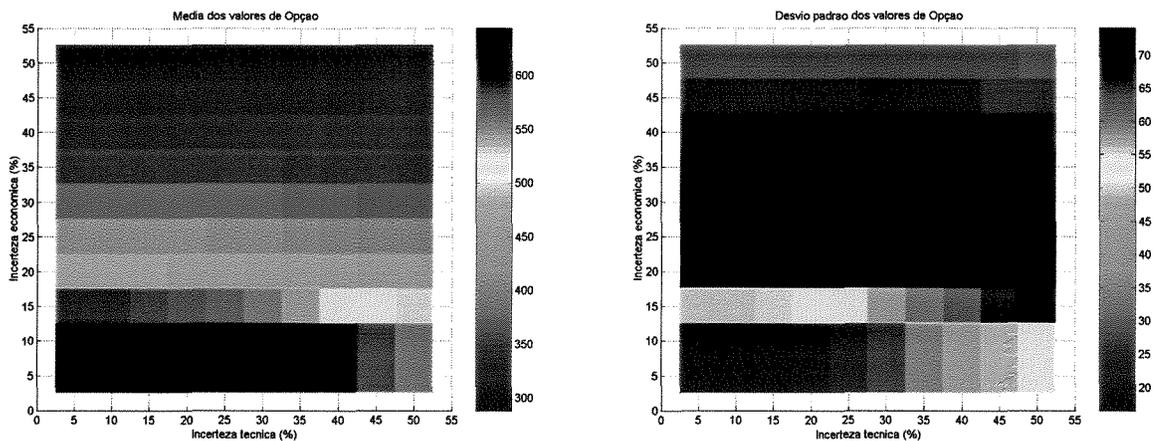


Figura 3-37 – Representação dos valores médios e dos desvios padrão dos valores de Opção no momento zero para diferentes cenários de incerteza técnica ( $\beta$ ) e incerteza econômica ( $\gamma$ ) e parâmetros ( $\sigma=10\%$ ,  $r=4\%$ ,  $\mu=12\%$ ,  $\alpha=2\%$ ,  $\delta=10\%$ )

As fontes e níveis de incerteza podem variar significativamente para diferentes projetos. Entretanto, baseado nos intervalos de valores de parâmetros que se aplicam a investimentos de capital expressivos, a incerteza econômica é provavelmente mais importante que a incerteza técnica em termos do seu efeito sobre a regra do investimento e sobre o valor da oportunidade de investimento. O oposto pode ser o caso de alguns projetos de pesquisa e desenvolvimento (P&D).

Para muitos investimentos e, particularmente, para grandes projetos industriais onde os custos de investimento flutuam, o efeito causado pelo aumento da incerteza econômica é, geralmente, a depressão do investimento. Conforme mencionado anteriormente, uma situação oposta pode ser o caso para investimentos em P&D, para os quais a incerteza técnica é muito mais relevante.

A visualização desse efeito pode ser feita de forma imediata nas Figuras 3-37 e 3-38. A incerteza econômica ( $\gamma$ ) exerce um efeito mais acentuado sobre a mudança de valor de Opção no momento zero, sobre o desvio padrão do valor de Opção e, conseqüentemente, sobre os índices de risco do que a incerteza técnica ( $\beta$ ). Em outras palavras, tanto os valores de Opção no momento zero quanto os índices de risco não são muito sensíveis ao parâmetro  $\beta$ .

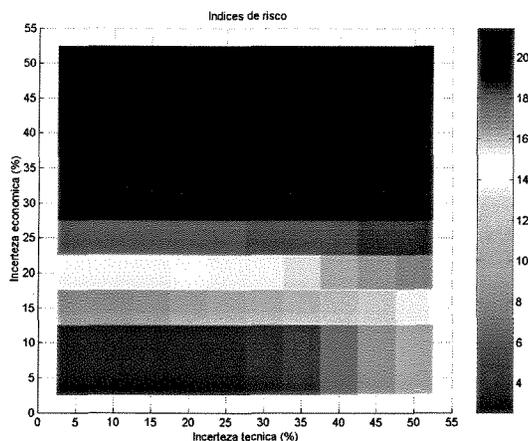


Figura 3-38 – Representação dos Índices de Risco obtido a partir dos resultados da Opção no momento zero para diferentes cenários de incerteza técnica ( $\beta$ ) e incerteza econômica ( $\gamma$ ) e parâmetros ( $\sigma=10\%$ ,  $r=4\%$ ,  $\mu=12\%$ ,  $\alpha=2\%$ ,  $\delta=10\%$ )

Para os parâmetros adotados no exemplo tem-se, a partir do valor de incerteza técnica  $\beta=40\%$  e incerteza econômica  $\gamma=15\%$ , uma estabilização do valor da opção em torno do valor do VPL. Para pares de valores superiores não se deve esperar nenhum prêmio de opção e, desta forma, o índice de risco normalizado deve se situar no patamar de 16%.

A Figura 3-39 ilustra o efeito final da incerteza técnica e da incerteza econômica sobre a classificação das opções. Tem-se dois campos ou domínios distintos: 1. opções *in the money* - quando o valor da opção é maior que o VPL e representado pela área verde; 2. opções *out of the money* - quando o valor

da opção é menor que o VPL e representado pela área vermelha. Deve-se ressaltar que para cada “*pixel*” ou par de valor incerteza técnica ( $\beta$ ) e incerteza econômica ( $\gamma$ ), leva-se em consideração as 50 possíveis reservas, projetos de mina e sequenciamentos de operação. Pode-se observar que a incerteza econômica realiza um grande efeito no valor da opção, na dispersão, no risco e, conseqüentemente, na tomada de decisão.

Para o caso do domínio de opções *out of the money* deve-se esperar somente a captura do valor do VPL e, neste caso, nenhum prêmio de opção deve ser considerado. No zoneamento definido para as opções *in the money*, pode-se esperar um prêmio de opção (representado por um delta positivo de valor em relação ao VPL) conforme ilustrado nos diagramas de valores das Figuras 3-34 e 3-35.

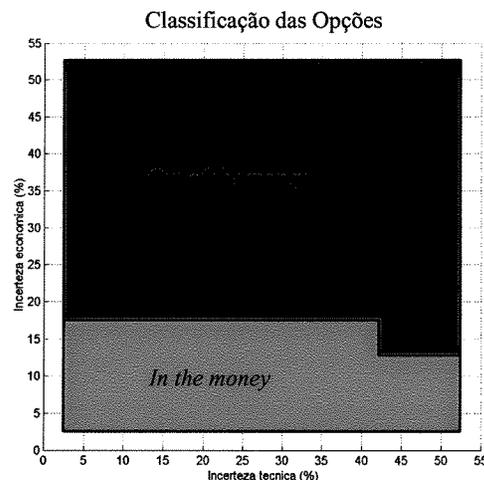


Figura 3-39 – Classificação das Opções para diferentes cenários de incerteza técnica ( $\beta$ ) e incerteza econômica ( $\gamma$ ) e parâmetros ( $\sigma=10\%$ ,  $r=4\%$ ,  $\mu=12\%$ ,  $\alpha=2\%$ ,  $\delta=10\%$ )

A definição da fronteira entre opções *out of the money* e opções *in the money* pode ser obtida de forma imediata para quaisquer combinações ou estruturas econômico-financeiras.

Ressalta-se que toda a análise é conduzida considerando-se três componentes simultâneas de incerteza: incerteza sobre a reserva, incerteza técnica associada com a quantidade de tempo e materiais que serão requeridos para completar o projeto e incerteza econômica relacionada a custos de insumo, preços e quantidades de trabalho e materiais que serão requeridos.

A Figura 3-40 ilustra os intervalos de contribuição de cada componente de incerteza (incerteza sobre a reserva, incerteza técnica e incerteza econômica) sobre a composição do índice de risco. Para baixos valores de incerteza técnica ( $\beta$ ) e incerteza econômica ( $\gamma$ ) tem-se um índice de risco de 5% causado pela incerteza sobre a reserva. O crescimento de  $\beta$  e  $\gamma$  acarreta uma elevação do índice de risco como pode ser visualizado na Figura 3-38. Conforme já mencionado tem-se, a partir do valor de incerteza técnica  $\beta=40\%$  e incerteza econômica  $\gamma=15\%$ , uma estabilização do valor da opção em torno do valor do VPL. Neste caso, considerando-se o valor da opção igual ao valor do VPL, o índice de risco normalizado pode atingir o nível máximo de 16%.

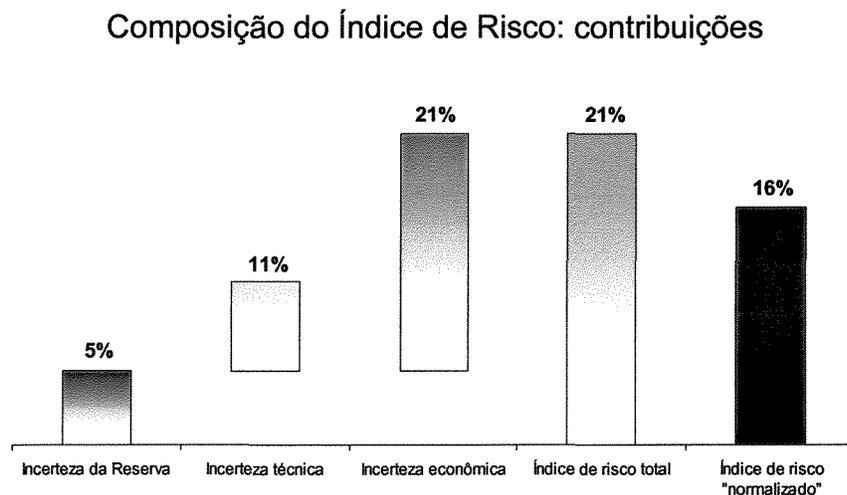


Figura 3-40 – Composição do índice de risco e as contribuições das componentes de incerteza sobre a reserva, incerteza técnica e incerteza econômica (para cenário econômico-financeiro:  $\sigma=10\%$ ,  $r=4\%$ ,  $\mu=12\%$ ,  $\alpha=2\%$ ,  $\delta=10\%$ )

A consideração de valores elevados de deriva ou taxa de crescimento do projeto por período ( $\alpha$ ) no modelo para investimentos de custos incertos gera condições para a obtenção de altos valores de prêmio de opção no momento zero.



## CAPÍTULO 4

### 4 ESTRATÉGIAS DE OPÇÕES REAIS EM PROJETOS

Este capítulo complementa conceitos discutidos nos Capítulos 1 e 2, apresenta um histórico dos desenvolvimentos da teoria de opções e faz uma abordagem sobre estratégias de Opções Reais e suas implementações na avaliação de negócios.

Normalmente todas as empresas usam alguma forma de cálculo de FCD para avaliar projetos. O cálculo base é completado frequentemente com análise de sensibilidade para parâmetros fundamentais como preço. Alguns analistas usam técnicas de Monte Carlo, mas eles não apresentam frequentemente esses resultados para a administração sênior.

A maioria das empresas usa preços de “commodities” provenientes de série histórica de longo prazo. Em outras palavras, elas substituem a variável aleatória por seu valor esperado. Além disso, há um significativo acordo relativo a esses preços. Uma possível razão para este consenso é que a maioria das grandes companhias subscreve aos serviços de previsão de um pequeno número de consultores.

A maioria das empresas incorpora o risco nos cálculos através do uso de uma *hurdle rate*<sup>14</sup>, que é normalmente um ajuste para mais na taxa de desconto. As taxas são ajustadas para valores mais altos para refletir, por exemplo, risco político extremo, e para valores mais baixos, quando há competição para adquirir propriedades.

---

<sup>14</sup> *Hurdle rate* é uma taxa de desconto normalmente utilizada pelas corporações para avaliar Valor Presente Líquido de projetos. Esta taxa é baseada na melhor estimativa para uma taxa de desconto apropriada considerando a natureza incerta e volátil de outras taxas teoricamente corretas, tais como custo de oportunidade de capital e custo de capital médio ponderado (*WACC – weighted average cost of capital*).

Geralmente, as empresas fazem ajustes aos cálculos de FCD, sendo o mais importante um aumento na taxa de desconto para refletir risco - uma prática que tem várias desvantagens. Por exemplo, suponha que a fonte principal de incerteza seja preço. Primeiramente, se a commodity é comercializada em um mercado futuro, os gerentes podem fazer cobertura contra o risco do preço. Em segundo lugar, até mesmo na ausência de *hedge*<sup>15</sup>, desde que o risco de preço não seja sistemático, os acionistas de empresas de mineração podem se auto-segurar diversificando seus portfólios. Além disso, os gerentes de mineração têm algum grau de flexibilidade operacional. De fato, se preço cai a um nível inaceitável, a mina pode ser paralisada até que as condições melhorem. Como resultado, embora mineração seja uma atividade de risco, uma parcela do risco pode ser protegida por *hedge*, diversificada ou evitada. Finalmente, na presença de fontes múltiplas de incerteza com diferentes características de risco, não é apropriado usar um fator de desconto uniforme para ajustar todos os riscos.

Os bancos que ajudam a financiar projetos de mineração também têm que conduzir avaliações. Da mesma forma que os produtores, eles usam uma análise de FCD padrão que utiliza parâmetros obtidos em uma revisão técnica prévia. A diferença principal é o modo que eles controlam risco. A maioria dos bancos não aumenta a taxa de desconto para refletir maior risco. Ao contrário, eles usam o custo do dinheiro para a taxa de desconto e ajustam a relação de proteção ou cobertura, que é o valor presente líquido dividido pelo investimento inicial. Por exemplo, uma regra típica poderia ser investir se esta relação exceder 1,5. Além disso, eles poderiam insistir que o período de *payback*, o tempo exigido para pagar o empréstimo, não exceda metade ou dois terços da vida do empreendimento. Finalmente, bancos estão frequentemente dispostos a aceitar risco de preço, o qual eles podem fazer *hedge*, mas menos dispostos a assumir qualquer risco técnico.

---

<sup>15</sup> Expediente adotado por empresas para se resguardar de flutuações de preços. (Ex.: firmas com dívidas em dólares compram títulos reajustados pela taxa cambial. Havendo desvalorização da moeda local, o aumento de valor dos títulos compensa o crescimento do montante, em moeda local, da dívida.)

Os ativos e investimentos em mineração são normalmente avaliados recorrendo-se a duas ferramentas analíticas. A primeira estima os fluxos de caixa associados a parâmetros técnico-econômicos determinísticos e estáveis, descontados ao longo do tempo de acordo com uma taxa de juros constante para toda a vida do projeto.

O outro procedimento, Valor Presente Líquido com análise de risco, incorpora modelos probabilísticos nos mesmos parâmetros técnico-econômicos usados no método anterior.

O método de VPL é amplamente utilizado por causa de sua simplicidade para obter uma estimativa adequada do valor de projeto quando certas condições são satisfeitas. A primeira condição é que uma relação linear deveria existir entre as variáveis de entrada e os fluxos de caixa líquidos para cada período. Esta condição permite estimar valores médios para fluxos de caixa líquidos a partir de valores médios das variáveis de entrada. Se essa condição não é encontrada, o procedimento de VPL fornece valores enviesados para os fluxos de caixas médios. As simulações de Monte Carlo podem ser usadas para estimar fluxos de caixa médios a partir de suas distribuições estatísticas, construídas a partir das distribuições das variáveis de entrada.

Uma segunda condição para o método de VPL é que o risco deveria ser constante ao longo do tempo. Em terceiro lugar, não deveriam existir contingências, isto é, a possibilidades de ajustar as operações dependendo do efeito ou consequência de qualquer variável.

Alguns projetos complexos não satisfazem a condição para a aplicação do método simples de VPL. Esses projetos usualmente têm fluxos de caixa que são relacionados de uma forma complexa a variáveis de entrada. Adicionalmente, a alavancagem operacional frequentemente muda no tempo, causando variação nos níveis de risco. A alavancagem operacional pode ser definida como a relação entre custos fixos e custos totais. Para baixos níveis de alavancagens operacionais, isto é, quando os custos são na maioria variáveis, o risco de um projeto é mais baixo comparado com outro com custos fixos altos. O que acontece com alavancagem operacional é o mesmo que ocorre quando a alavancagem financeira muda, isto é, o risco do projeto muda.

A terceira condição, relacionada com contingências, raramente é encontrada no desenvolvimento de projetos, porque existem diversas possibilidades de realocação de recursos quando os preços mudam inesperadamente.

O preço das “commodities” é uma das variáveis principais que influenciam substancialmente o valor de um projeto de desenvolvimento de recursos minerais. Sua incerteza é de importância suprema em muitas indústrias de recursos naturais onde o desvio padrão das mudanças anuais nos preços futuros pode exceder 40% por ano. As decisões estratégicas de investimento e operações que levam em consideração a flutuação de preços, a volatilidade, serão um pré-requisito para investidores contemporâneos e gerentes.

Os preços nominais de longo prazo de algumas “commodities” são de natureza estocástica (i.e. eles variam aleatoriamente através do tempo) e expõem a indústria de mineração a situações de contingências que introduzem incertezas no fluxo de caixa do projeto. Este fator modifica o nível de risco ao longo do tempo e, desta forma, gera instabilidade na taxa de desconto usada para descontar os fluxos.

Conseqüentemente, uma taxa de desconto fixa é uma limitação importante nos procedimentos de avaliação tradicionais, porque ela não pode antecipar e avaliar as situações de contingência. Para superar essa limitação, a avaliação de ativos de mineração pode utilizar conceitos da avaliação aplicada a certos tipos de instrumentos derivativos financeiros, opções, que são sujeitos a flutuações inesperadas em seus valores ao longo do tempo. Ao estimar um investimento em mineração, as opções incorporam explicitamente tendências, volatilidades e riscos de quaisquer variáveis incertas e relevantes, tais como preços, ao mesmo tempo em que ajustam seus valores finais à luz dos riscos de mercado.

O risco em projetos de mineração não é um conceito novo. Na década de 60, Massé (1962) propôs uma otimização dinâmica para análise de reservas. Na mesma época, Matheron e Formery (1963) desenvolveram o algoritmo de decisões sequenciais para estimar as opções de abandono, de operação

e de exploração adicional ao avaliar uma área de prospecção sujeita a respostas dependentes do progresso obtido.

Noren (1971) incorporou o conceito de flexibilidade operacional em virtude de contrações e expansões para modificar os fluxos financeiros gerados por um empreendimento de mineração de acordo com as condições estabelecidas pela indústria.

Essas linhas de pensamento revelaram a capacidade de um sistema de produção para responder a situações imprevistas graças ao gerenciamento operacional flexível que adiciona valor que não pode ser incorporado explicitamente ao usar a técnica convencional de VPL.

Uma das áreas mais frutíferas de pesquisa em finanças foi o desenvolvimento da teoria de avaliar opções. Após o trabalho original de Black e Scholes (1973) e Merton (1973), muitos artigos usaram esse método de análise para avaliar outros ativos financeiros com características de opções. Smith (1976) apresenta uma pesquisa dessa literatura.

Mais recentemente, tem sido observado que existem direitos ou títulos contratuais (concessões) sobre ativos reais que também apresentam características de opções, o que sugere que as análises de Black, Scholes e Merton poderiam ser úteis para a valoração desses direitos [Brealey e Myers (1984) e Mason e Merton (1985)]. Pode-se citar os seguintes exemplos: McDonald e Siegel (1985), que estudam a avaliação de projeto onde a empresa tem a opção de paralisar a produção; McDonald e Siegel (1986) e Myers e Majd (1983), que estudam a avaliação de investimento e oportunidades e Brennan e Schwartz (1985), que estudam investimentos em recursos naturais.

A teoria das opções financeiras fornece um método que pode lidar com projetos com níveis de risco variáveis e contingências. Alguns procedimentos são baseados no método proposto por Cox e Ross (1976) para avaliar opções. A implementação do método, usando simulação de Monte Carlo, é proposta por Boyle (1977), e a representação do processo estocástico da incerteza é proposto por Jacoby e Laughton (1988). Paddock, Siegel e Smith (1988) fornecem um exemplo de aplicação da teoria de opções para a avaliação de contratos de arrendamento de reservatórios de petróleo.

Uma vez que um projeto de desenvolvimento de recursos é iniciado, o gerente tem que seguir uma estratégia operacional ótima, e várias outras variáveis, além de taxa de produção, devem ser consideradas. Existem várias opções operacionais para os administradores dos projetos, tais como abandono, reabertura ou manutenção de condições mínimas de operação para enfrentar mudanças no ambiente econômico. Considerando essas opções, o valor presente esperado de um projeto se torna maior que o valor calculado por análise de VPL convencional baseado em fluxo de caixa determinístico, dado que o projeto será gerenciado de forma ótima.

As opções lidam com dois elementos. O primeiro é a resposta do gerenciamento do projeto ao confrontar-se com situação de contingência identificada (modelamento de parâmetros operacionais). O segundo é o comportamento de variáveis incertas (modelamento da incerteza).

Uma contingência é um evento acidental que condiciona o desenvolvimento de uma ação programada previamente. Um projeto de mineração pode ser exposto a contingências técnicas e econômicas. Uma contingência técnica ocorre quando o evento não permite que um processo seja desenvolvido como programado, por exemplo, impedindo o uso das reservas que supostamente deveriam ser extraídas de acordo com o plano de mineração. Uma contingência econômica ocorre quando a operação é exposta a evento financeiro que impede o lucro esperado de ser alcançado, por exemplo, como resultado de redução significativa do preço do produto.

A resposta dos parâmetros operacionais frente a situações de contingências é determinada pelo estabelecimento de cenários alternativos. O modelamento do comportamento das variáveis se dá através do uso de processos estocásticos que definem o comportamento de variáveis aleatórias ao longo do tempo (e.g. preço de metal) ou através do espaço (e.g. teores de minério).

Os métodos baseados em avaliação de opções devem causar um grande impacto na forma como as empresas devem implementar as ações gerenciais em um mundo onde as estratégias devem ser criadas em virtude de grandes riscos, com potenciais de lucros ou perdas.

Frequentemente, empresas são avaliadas de forma incorreta, devido a dificuldade de se estabelecer um número para fluxos de caixa futuros. A menos que uma estimativa razoável possa ser feita de fluxo de caixa futuro, muitos consultores e bancos de investimento agem como se ele pudesse ser ignorado. Qualquer avaliação com significado deve dividir os fluxos de caixa em três componentes distintos:

- Fluxos de caixa existentes gerados por negócios em operação (*business in place*).
- Fluxos de caixa adicionais associados com crescimento futuro previsível.
- Fluxos de caixa potenciais associados com projetos de crescimento opcionais.

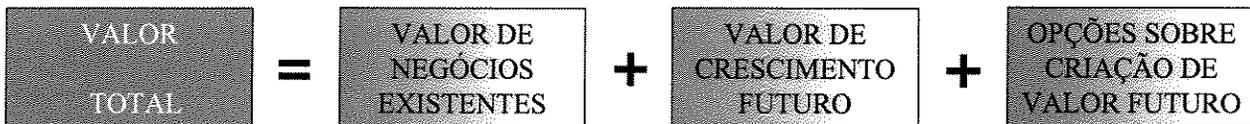


Figura 4-1 – Componentes de valor em fluxos de caixa

O valor de negócios existentes corresponde aos fluxos de caixa que refletem as operações no momento da avaliação.

O valor do crescimento futuro pode ser expresso como a qualidade do crescimento, que reflete vantagem competitiva, vezes a quantidade de crescimento, que reflete o montante de investimento. O valor destas opções de crescimento pode ser dividido em duas partes: valor intrínseco e potencial de melhorias (*upside potential*). O valor intrínseco é o valor presente líquido das ofertas de novos produtos possíveis associados às opções. Em muitos casos, o desenvolvimento de novos produtos possíveis é desconhecido e não existe em qualquer forma definida. O potencial de aumento do valor da opção cresce com a incerteza e com o intervalo de tempo que a empresa pode manter a propriedade da informação. O risco (*downside risk*) é limitado ao desembolso (preço do exercício) para a opção. Na parcela do valor do crescimento futuro estão incluídas as opções operacionais disponíveis aos gerentes durante a fase de operação.

Em indústrias de rápida evolução, investimento em posicionamento de mercado pode não ser tão importante quanto desenvolvimento de competências para maximizar a habilidade em explorar oportunidades. Do ponto de vista econômico, P&D e outros projetos de construção de competências são investimentos em opções sobre criação de valor futuro. Os desembolsos dão à empresa a escolha de participar em futuros projetos quando seus lucros líquidos se tornarem positivos.

O conceito de Opções Reais foi difundido por Michael J. Mauboussin, estrategista-chefe do “Credit Suisse First Boston” e professor adjunto de finanças em “Columbia School of Business”. Mauboussin usa Opções Reais em parte para explicar a lacuna entre a forma como o mercado de ações determina preços de alguns negócios e o valor intrínseco para esses negócios como calculado por análise financeira tradicional.

Instintivamente, sabe-se que não se pode obter uma estimativa perfeita para o valor intrínseco de um negócio. Independentemente do rigor da análise, o melhor que se pode conseguir é um possível intervalo de valores e uma probabilidade. Isso acontece porque, atribuir um valor para um negócio, requer a projeção de fluxos de caixa futuros para a vida do negócio, e não se pode prever o futuro com acurácia perfeita. Mesmo em se tratando de um negócio muito previsível, existe sempre alguma probabilidade de mudança que poderá alterar dramaticamente o valor daquele negócio.

Ao apresentar o conceito de Opções Reais, Mauboussin (1999) reconhece, essencialmente, que as empresas são valorizadas pela combinação de valor de negócios conhecidos mais um valor que representa a oportunidade para criação de valor futuro. Para se ter uma idéia de quanto valor de “opção real” o mercado está atribuindo a uma dada empresa a um dado preço, Mauboussin utiliza FCD para dar um preço para um negócio existente da empresa e compara esse resultado ao valor de mercado. Quanto maior a discrepância entre o valor de mercado (*market cap*) e o valor de FCD, maior o valor que o mercado normalmente está atribuindo às opções reais disponíveis para a empresa.

Naturalmente, opções reais são disponíveis para todas as empresas, embora algumas companhias tenham mais opções disponíveis para criação de valor que outras. Mauboussin (1999) mostra que opções reais devem ser consideradas especialmente quando três fatores se fazem presentes.

O primeiro fator é uma equipe de gerenciamento eficaz que está constantemente procurando identificar e exercer opções para aumentar o valor do negócio. O segundo fator é um negócio líder de mercado. Isto porque os líderes de mercado tendem a ter acesso a mais opções reais e recursos financeiros e escala operacional para explorá-las. Finalmente, quanto maior a incerteza no mercado no qual a empresa opera, maior o valor das opções. Este último fator se torna mais compreensível quando se considera uma empresa que é posicionada em um segmento com grande potencial, porém de difícil avaliação. Não se conhece o potencial dos planos e, desta forma, o valor da opção deve refletir pelo menos alguma chance de que o valor potencial possa ser grande.

Sob o ponto de vista de aplicação, os investidores têm três escolhas para a utilização de Opções Reais:

- A primeira escolha é ignorar opções reais. Se esta é a escolha, o investidor simplesmente avalia a empresa com base em seu negócio atual. Esta é a metodologia mais conservadora e, provavelmente, garantirá que não haja uma sobrevalorização para uma empresa que tem potencial, mas apresenta pequenas receitas e ganhos.
- A segunda escolha é considerar opções reais, mas somente investir em empresas que se considera estar vendendo o valor do seu negócio principal. Ao considerar esta metodologia, procura-se encontrar empresas com valor de opções reais significativo.
- A terceira e mais agressiva metodologia é procurar por empresas que têm preferencialmente opções reais. Estas empresas são, frequentemente, nomeadas como “sobrevalorizadas” pela imprensa financeira. Ao fazer uma estimativa para a opção, tem-se que proceder a uma avaliação. Pode-se identificar uma grande oportunidade que o mercado não considera totalmente. Naturalmente que, dependendo da situação, pode-se ter lucro ou prejuízo. De qualquer modo, ao considerar o “jogo” de opções reais, deve-se estar preparado para alguma volatilidade.

A longo prazo, a adoção de Opções Reais tende a melhorar as métricas de performance, já que estruturam-se flexibilidades que adicionam valor aos projetos.

As empresas de diversos segmentos da indústria estão aprendendo que são numerosas as oportunidades para se aplicar a teoria de opções em investimentos.

A idéia de investimentos como opções é muito bem ilustrada no contexto de decisões para adquirir e explorar depósitos de recursos naturais. Uma empresa que compra depósitos está comprando um ativo que pode ser desenvolvido imediatamente ou mais tarde, dependendo das condições de mercado. O ativo, então, é uma opção – uma oportunidade para escolher o cronograma de desenvolvimento futuro do depósito. Uma empresa pode acelerar a produção quando o preço é alto, e pode diminuí-la ou suspendê-la quando o preço é baixo. Ignorar a opção e valorizar toda a reserva ao preço atual (ou a preços futuros seguindo uma taxa pré-definida) pode conduzir a uma significativa sub-estimativa do valor do ativo.

Considere o que aconteceria se uma empresa tentasse valorizar um recurso usando a metodologia padrão de VPL. Dependendo do preço atual, da taxa de mudança esperada do preço e do custo de desenvolvimento da reserva, poder-se-ia construir um cenário para a evolução do desenvolvimento e, então, determinar o tempo e os valores dos futuros fluxos de caixa a partir da produção. Poder-se-ia então valorizar a reserva descontando estes números e somando os mesmos. Em função da incerteza dos preços das “commodities”, quanto maior a volatilidade dos preços, maior a taxa de desconto utilizada. E quanto mais alta a taxa de desconto, menor o valor estimado para a reserva.

O procedimento acima descrito subestima o valor da reserva. Ele ignora completamente a flexibilidade que a empresa tem em relação a quando desenvolver a reserva – isto é, quando exercer o valor de opção da reserva. Nota-se que, tal como as opções que apresentam mais valor quando existe mais incerteza sobre contingências futuras, a reserva tem mais valor quando o preço do produto é mais volátil. O resultado seria justamente o oposto daquele fornecido através do cálculo padrão de VPL. Em contraste ao cálculo padrão, que diz que incertezas maiores sobre preços deveriam conduzir a menos investimentos em reservas não desenvolvidas, a teoria de opções diz que tais investimentos deveriam ser maiores.

Ao avaliar uma reserva não desenvolvida como uma opção, pode-se determinar o melhor tempo para investir em seu desenvolvimento. Desenvolver a reserva é como exercer uma opção de compra, onde o preço do exercício é o custo de desenvolvimento. Quanto maior a incerteza sobre preços, mais uma empresa deveria sustentar as reservas não desenvolvidas e manter vivas as opções para desenvolvê-las.

É importante a adoção de técnicas apropriadas para que se possa trabalhar com modelos adequados nas estimativas, nos procedimentos de valoração e nos processos de tomada de decisão. Existem numerosos casos e exemplos mostrando que através de Simulação criaram-se protótipos e a partir destes viabilizaram-se projetos. Modelos robustos e técnicas apropriadas são vitais para o sucesso de um empreendimento.

Remacre (1985) define muito apropriadamente que, em mineração, a realidade é desconhecida. O modelo é, portanto, o instrumento básico de suporte da decisão. O texto sugere que se adote a seguinte “filosofia” de trabalho: “Já que não se pode fazer o que se quer, que se faça o que se pode”. A conclusão deste artigo faz a seguinte citação: “O que se pode, para começar, depende de uma boa consciência e, em seguida, de bons conhecimentos”.

Este capítulo é finalizado com um ponto de reflexão para avaliadores, planejadores e estrategistas. A Figura 4-2, utilizada pelo autor em algumas apresentações, sumariza uma mensagem de incentivo à criatividade e à importância da reflexão constante das atividades.

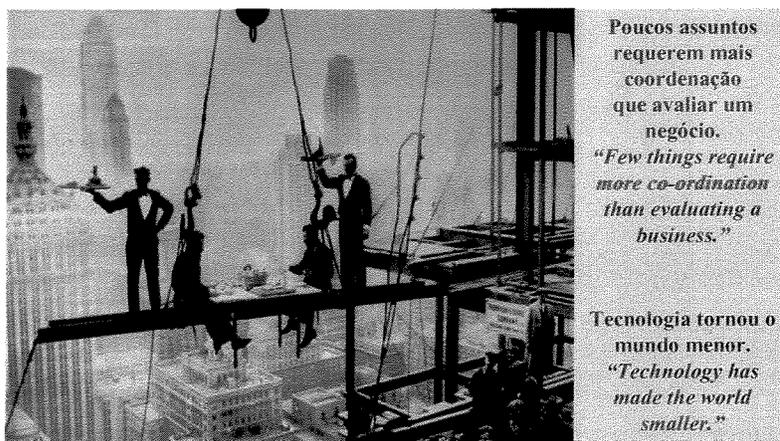


Figura 4-2 – Um ponto de reflexão na avaliação de projetos e negócios



## CAPÍTULO 5

### 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Investir em um projeto de mineração tem muito em comum com o exercício de uma opção financeira. Primeiramente, ambos são pelo menos parcialmente irreversíveis. Em segundo lugar, a variável tempo é crucial. De fato, tomar uma ação irreversível significa perder a opção de esperar por nova informação referente às condições de mercado. Quando essa informação é valiosa, o valor da opção perdida deve ser acrescentado ao custo direto de investir. Desta forma, as análises por Opções Reais atribuem pelo menos o mesmo valor para um projeto de investimento que aquele obtido usando técnicas de FCD. Em outras palavras, a flexibilidade não tem um valor negativo.

Os modelos de investimentos sequenciais apresentados no Capítulo 3 consistem na obtenção da regra ótima de investimento que maximiza o valor da empresa realizadora do projeto. O valor da opção de investimento da empresa é obtido, bem como o valor crítico de custo abaixo do qual é ótimo investir e acima do qual o investimento é suspenso. Para um dado cenário financeiro, é possível identificar se um projeto completo de valor  $V$  consiste em uma opção “*deep in the money*” (VPL de continuar a frente alto o suficiente para a perda do valor da opção), “*in the money*” (preço do exercício abaixo do preço do ativo subjacente), “*at the money*” (preço do exercício próximo ao do ativo subjacente) ou “*out of the money*” (preço do exercício acima do preço do ativo subjacente). Uma representação desta classificação de opções é ilustrada na Figura 5-1.

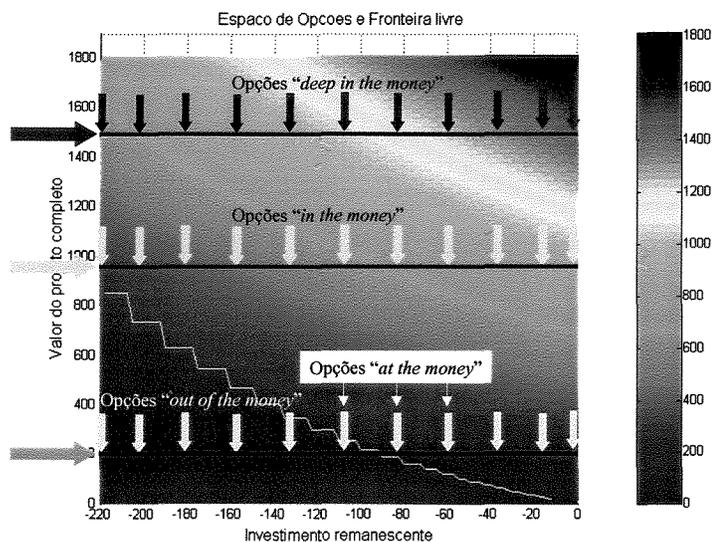


Figura 5-1 – Classificação das Opções para diferentes valores de projeto completo (V) e considerando um determinado cenário econômico-financeiro

A determinação da fronteira livre (*free boundary*) permite analisar o histórico de investimentos e identificar anos críticos nos quais seria melhor postergar a decisão de iniciar o fluxo de desembolsos. A fronteira livre define dois domínios distintos. O primeiro engloba as situações onde é recomendável a realização ou continuidade do investimento. O segundo domínio corresponde às áreas onde a ação mais adequada é paralisar ou postergar a realização do investimento. A Figura 5-2 ilustra os domínios e a melhor ação a ser conduzida sob incerteza.

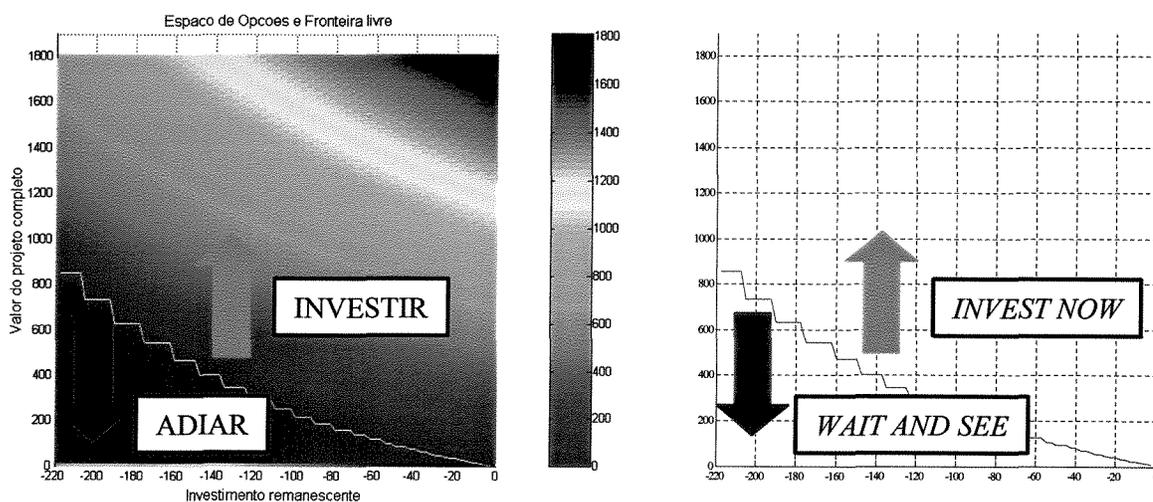


Figura 5-2 – Espaço de Opções, Fronteira livre e ações sob incerteza

Várias aplicações podem ser derivadas da utilização dos modelos de investimentos sequenciais. Um projeto ótimo deveria ter aquele cujo sequenciamento operacional e de realização de investimento produzisse para todos os períodos os maiores valores possíveis de opções. Através da utilização dos modelos de investimentos sequenciais pode-se realizar comparações entre projetos e escolher aquele que produz a máxima soma de opções para toda a vida do empreendimento. O uso destes modelos permite verificar se a sequência de investimento mantém para todos os momentos opções mais altas que os valores críticos estabelecidos pela fronteira livre.

Uma grande vantagem da adoção dos modelos de opções é a possibilidade de se poder calcular o valor crítico do projeto completo ( $V^*$ ) no momento zero (quando ainda não se realizou nenhum investimento) e que justifique um determinado investimento total  $I$  para um dado cenário financeiro.

Nos modelos de investimentos sequenciais, a flexibilidade de tempo de construção corresponde a altos valores de taxa de investimento ( $k$ ). Pode-se, então, calcular o valor da oportunidade de investimento  $F(V, K)$  para diferentes valores de  $k$ . A mudança nos valores de  $F$  correspondente a variações em  $k$  mede o valor incremental da flexibilidade adicional.

Os modelos de Opções Reais podem ser úteis para definir valores de propriedades durante as fases de viabilidade e planejamento de projetos. A flexibilidade dos modelos de investimentos sequenciais permite avaliar estratégias operacionais e riscos associados em minas em operação. Os estudos e implementações realizados permitiram verificar que uma fração significativa do valor total do projeto está relacionada a opções operacionais disponíveis aos gerentes durante a fase de extração.

A magnitude do prêmio de opção derivado da flexibilidade gerencial depende das características fundamentais do ativo subjacente que, nesse caso é a estrutura econômica e financeira da propriedade mineral que será gerenciada. Nos exemplos estudados, obteve-se prêmios de opção oscilando entre os níveis de 20 a 40%. Pode-se observar a possibilidade de obter valores expandidos (incluindo o prêmio de opção) bem superiores aos valores mensurados por VPL. Os parâmetros de determinação de valor das opções são diferentes para diferentes ativos. Desta forma, o prêmio de opção associado

com a estimativa de valor de um ativo é uma função do ativo sendo valorizado. Para alguns ativos, o prêmio pode ser substancial e, para outros, pode ser mínimo.

Para modelar o risco geológico, diferentes metodologias podem ser seguidas. Uma alternativa pode ser definir um vetor de variáveis técnico-geológicas que afetam o valor da mina e especificar um processo estocástico para cada um deles. Esse processo foi conduzido através da Simulação Geoestatística, técnica que gerou as prováveis imagens para a criação dos modelos.

As dispersões de valores de opção obtidas a partir dos modelos de investimentos sequenciais revelam índices de risco entre 10 e 16%, valores efetivamente muito superiores ao patamar de 5%, capturado pela variação de resultados de VPL.

Em função da alta competitividade no mercado de mineração, as empresas necessitam estar aptas para avaliar o potencial econômico de prospectos de exploração e aquisições potenciais de forma precisa. Esta tese apresenta um conjunto de procedimentos para conduzir tais estimativas, conjugando técnicas de Geoestatística e modelos de investimentos sequenciais em Opções Reais.

# ANEXO 1

## SIMULAÇÃO GEOESTATÍSTICA: O ALGORITMO DAS BANDAS ROTATIVAS

O algoritmo das bandas rotativas foi o primeiro algoritmo de simulação 3D realmente implementado em grande escala. Neste método são feitas as seguintes hipóteses: o campo a ser simulado é estacionário de segunda ordem e isotrópico com covariância  $C(\mathbf{h})$  conhecida; os valores deste campo são  $N(0,1)$ , se necessário, após a transformação gaussiana; o campo apresenta distribuição multivariada gaussiana.

A originalidade do método desenvolvido por Matheron (1973, apud Journel e Huijbregts, 1978) está na redução das simulações  $n$ -dimensionais em várias e independentes simulações unidimensionais ao longo de linhas que são giradas no espaço  $R^n$ . Um valor simulado em uma posição  $\mathbf{x}$  é obtido a partir das contribuições das  $n$  simulações unidimensionais  $z_{si}(\mathbf{x})$ .

$$z_{snc}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n z_{si}(\mathbf{x}).$$

A realização resultante  $z_{snc}(\mathbf{x})$  é uma realização de uma FA (Função Aleatória), por exemplo no caso 3D  $Z_s(\mathbf{x}) = Z_s(u, v, w)$ , que é estacionária de segunda ordem, com esperança zero e covariância

$$E[Z_s(\mathbf{x})Z_s(\mathbf{x} + \mathbf{h})] = C(\mathbf{h}),$$

que tende à covariância isotrópica quando o número de linhas tende a infinito. Uma covariância  $C(\mathbf{h})$  anisotrópica pode ser modelada como somatória de modelos isotrópicos imbricados em espaços de dimensões  $n \leq 3$ . Basta, então, simular independentemente cada um dos componentes do modelo e, em seguida, somar as realizações em cada ponto.

Na prática, o número  $n$  de linhas não pode ser infinito. O reduzido número de linhas pode provocar o efeito de artefatos (lineamentos) nos campos simulados, gerando anisotropias inexistentes. Além disso, o algoritmo das bandas rotativas somente é capaz de lidar com determinados tipos de função covariância.

O condicionamento para a simulação, via bandas rotativas, trata-se de uma etapa em separado. Para produzir um *grid* com os valores condicionantes e que reproduza a variabilidade espacial da FA, valores são produzidos através de Krigagem, usando os valores simulados não condicionais na posição dos dados originais. Estes novos valores estimados por Krigagem são subtraídos dos valores da simulação não condicional para se obter um *grid* com valores de erros correlacionados. Estes erros correlacionados são adicionados aos valores de uma Krigagem realizada considerando os dados originais, de forma a produzir uma simulação condicional. Então:

$$z_{sc} = z_{kd} + (z_{snc} - z_{ksnc}),$$

onde  $z_{sc}$  é a simulação condicional,  $z_{kd}$  é a Krigagem obtida a partir dos dados originais reais,  $z_{snc}$  é a simulação não condicional e  $z_{ksnc}$  é a Krigagem dos valores simulados não condicionalmente nas mesmas posições dos dados originais condicionantes.

## ANEXO 2

### DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DOS VALORES DE OPÇÃO $F(i,j)$ COM O MODELO PARA VALOR DO PROJETO ESTOCÁSTICO E INVESTIMENTO DETERMINÍSTICO: INCORPORAÇÃO DE CONDIÇÃO DE OPTIMALIDADE

O procedimento demonstrado a seguir ilustra o processo de obtenção das equações relativas aos pares  $(i,j)$  da opção de investimento  $F(V,K)$  definidos em uma malha  $4 \times 4$  com o “Modelo para valor do projeto estocástico e investimento determinístico: incorporação de condição de optimalidade” (Capítulo 3.2).

Para  $i = 1$  e  $j = 1$ , tem-se:

$$F_{0,1} = 0 \text{ de (3-67),}$$

$$F_{1,0} = i\Delta V \text{ de (3-68),}$$

$$AF_{i+1,j} + BF_{i,j} + CF_{i-1,j} - DF_{i,j+1} + DF_{i,j-1} = k ,$$

$$A_{11}F_{2,1} + B_{11}F_{1,1} - D_{11}F_{1,2} = k - D_{11}\Delta V .$$

Para  $i = 1$  e  $j = 2$ , tem-se:

$$F_{0,1} = 0 \text{ de (3-67),}$$

$$AF_{i+1,j} + BF_{i,j} + CF_{i-1,j} - DF_{i,j+1} + DF_{i,j-1} = k$$

$$A_{12}F_{2,2} + B_{12}F_{1,2} - D_{12}F_{1,3} + D_{12}F_{1,1} = k.$$

Para  $i = 1$  e  $j = 3$ , tem-se:

$$F_{0,3} = 0 \text{ de (3-67),}$$

$$AF_{i+1,j} + BF_{i,j} + CF_{i-1,j} - DF_{i,j+1} + DF_{i,j-1} = k ,$$

$$A_{13}F_{2,3} + B_{13}F_{1,3} - D_{13}F_{1,4} + D_{13}F_{1,2} = k .$$

Para  $i = 1$  e  $j = 4$ , tem-se:

$$F_{0,4} = 0 \text{ de (3-67),}$$

$$F_{1,5} = 0 \text{ de (3-69),}$$

$$AF_{i+1,j} + BF_{i,j} + CF_{i-1,j} - DF_{i,j+1} + DF_{i,j-1} = k ,$$

$$A_{14}F_{2,4} + B_{14}F_{1,4} + D_{14}F_{1,3} = k .$$

Para  $i = 2$  e  $j = 1$ , tem-se:

$$F_{2,0} = i\Delta V \text{ de (3-68),}$$

$$AF_{i+1,j} + BF_{i,j} + CF_{i-1,j} - DF_{i,j+1} + DF_{i,j-1} = k ,$$

$$A_{21}F_{3,1} + B_{21}F_{2,1} + C_{21}F_{1,1} - D_{21}F_{2,2} = k - 2\Delta V D_{21} .$$

Para  $i = 2$  e  $j = 2$ , tem-se:

$$AF_{i+1,j} + BF_{i,j} + CF_{i-1,j} - DF_{i,j+1} + DF_{i,j-1} = k ,$$

$$A_{22}F_{3,2} + B_{22}F_{2,2} + C_{22}F_{1,2} - D_{22}F_{2,3} - D_{22}F_{2,1} = k .$$

Para  $i = 2$  e  $j = 3$ , tem-se:

$$AF_{i+1,j} + BF_{i,j} + CF_{i-1,j} - DF_{i,j+1} + DF_{i,j-1} = k ,$$

$$A_{23}F_{3,3} + B_{23}F_{2,3} + C_{23}F_{1,3} - D_{23}F_{2,4} + D_{23}F_{2,2} = k .$$

Para  $i = 2$  e  $j = 4$ , tem-se:

$$F_{2,5} = 0 \text{ de (3-69),}$$

$$AF_{i+1,j} + BF_{i,j} + CF_{i-1,j} - DF_{i,j+1} + DF_{i,j-1} = k,$$

$$A_{24}F_{3,4} + B_{24}F_{2,4} + C_{24}F_{1,4} + D_{24}F_{2,3} = k.$$

Para  $i = 3$  e  $j = 1$ , tem-se:

$$F_{3,0} = i\Delta V \text{ de (3-68),}$$

$$AF_{i+1,j} + BF_{i,j} + CF_{i-1,j} - DF_{i,j+1} + DF_{i,j-1} = k,$$

$$A_{31}F_{4,1} + B_{31}F_{3,1} + C_{31}F_{2,1} - D_{31}F_{3,2} = k - 3\Delta VD_{31}.$$

Para  $i = 3$  e  $j = 2$ , tem-se:

$$AF_{i+1,j} + BF_{i,j} + CF_{i-1,j} - DF_{i,j+1} + DF_{i,j-1} = k,$$

$$A_{32}F_{4,2} + B_{32}F_{3,2} + C_{32}F_{2,2} - D_{32}F_{3,3} + D_{32}F_{3,1} = k.$$

Para  $i = 3$  e  $j = 3$ , tem-se:

$$AF_{i+1,j} + BF_{i,j} + CF_{i-1,j} - DF_{i,j+1} + DF_{i,j-1} = k,$$

$$A_{33}F_{4,3} + B_{33}F_{3,3} + C_{33}F_{2,3} - D_{33}F_{3,4} + D_{33}F_{3,2} = k.$$

Para  $i = 3$  e  $j = 4$ , tem-se:

$$F_{3,5} = 0 \text{ de (3-69),}$$

$$AF_{i+1,j} + BF_{i,j} + CF_{i-1,j} - DF_{i,j+1} + DF_{i,j-1} = k,$$

$$A_{34}F_{4,4} + B_{34}F_{3,4} + C_{34}F_{2,4} + D_{34}F_{3,3} = k.$$

Para  $i = 4$  e  $j = 1$ , tem-se:

$$F_{4,0} = i\Delta V \text{ de (3-68),}$$

$$BF_{i,j} + (A + C)F_{i-1,j} - DF_{i,j+1} + DF_{i,j-1} = k - 2A\Delta V e^{-\delta j\Delta k/k},$$

$$B_{41}F_{4,1} + (A_{41} + C_{41})F_{3,1} - D_{41}F_{4,2} = k - 2A_{41}\Delta V e^{-\delta \Delta k/k} - 4\Delta VD_{41}.$$

Para  $i = 4$  e  $j = 2$ , tem-se:

$$BF_{i,j} + (A + C)F_{i-1,j} - DF_{i,j+1} + DF_{i,j-1} = k - 2A\Delta V e^{-\delta j\Delta k/k},$$
$$B_{42}F_{4,2} + (A_{42} + C_{42})F_{3,2} - D_{42}F_{4,3} + D_{42}F_{4,1} = k - 2A_{42}\Delta V e^{-\delta 2\Delta k/k}.$$

Para  $i = 4$  e  $j = 3$ , tem-se:

$$BF_{i,j} + (A + C)F_{i-1,j} - DF_{i,j+1} + DF_{i,j-1} = k - 2A\Delta V e^{-\delta j\Delta k/k},$$
$$B_{43}F_{4,3} + (A_{43} + C_{43})F_{3,3} - D_{43}F_{4,4} + D_{43}F_{4,2} = k - 2A_{43}\Delta V e^{-\delta 3\Delta k/k}.$$

Para  $i = 4$  e  $j = 4$ , tem-se:

$$F_{4,5} = 0 \text{ de (3-69),}$$
$$BF_{i,j} + (A + C)F_{i-1,j} - DF_{i,j+1} + DF_{i,j-1} = k - 2A\Delta V e^{-\delta j\Delta k/k},$$
$$B_{44}F_{4,4} + (A_{44} + C_{44})F_{3,4} + D_{44}F_{4,3} = k - 2A_{44}\Delta V e^{-\delta 3\Delta k/k}.$$

## **ANEXO 3**

### **MODELO PARA INVESTIMENTOS DE CUSTOS INCERTOS APRESENTADO POR ROCHA (1996)**

Este modelo baseia-se no desenvolvimento proposto por Pindyck (1992), onde decisões de investimentos irreversíveis são analisadas, quando o projeto apresenta tempo para se completar e é sujeito à dois tipos de incerteza sobre seus custos - a incerteza técnica e a incerteza econômica.

Os custos relacionados à incerteza técnica podem ser considerados como custos internos, relativos às dificuldades técnicas do investimento, sendo, portanto, descorrelacionados com o mercado.

Os custos relacionados à incerteza econômica, como insumos necessários ao projeto, são custos externos relativos ao ambiente político e econômico e, portanto, correlacionados com o mercado.

O custo de investimento segue um processo de difusão controlado que permite a inclusão desses dois tipos de incerteza, os quais afetam diferentemente a decisão de investimento.

O modelo consiste na obtenção da regra ótima de investimento que maximiza o valor da firma realizadora do projeto. O valor da opção de investimento da firma é obtido, bem como o valor crítico de custo abaixo do qual é ótimo investir e acima do qual o investimento é suspenso.

#### **Suposições do Modelo**

O modelo supõe que o projeto pode ser suspenso caso seu custo de investimento ultrapasse um certo nível crítico calculado e reativado, caso contrário, sem custos adicionais. O capital previamente investido não declina caso não houver continuidade do investimento.

O custo de investimento segue um processo de difusão controlado e o valor do projeto completo segue o movimento geométrico Browniano. Por simplificação, assume-se que todo o risco pode ser diversificado no mercado.

Existe uma taxa máxima de investimento ( $k$ ) por período para a construção do projeto, significando que o projeto possui um tempo para a finalização, “*time to build*”.

A firma não recebe nenhum fluxo de caixa ou dividendos até o término do investimento, quando recebe o valor total do projeto. Qualquer investimento, uma vez realizado, é considerado irreversível.

## Desenvolvimento do Modelo

A análise relativa a incertezas sobre os custos é aplicada a projetos de Pesquisa e Desenvolvimento, onde, por vezes, os custos são mais incertos do que as receitas geradas pelo próprio projeto.

O modelo analisa o caso da obtenção da regra ótima de investimento de uma usina nuclear, cujo custo de investimento é de difícil previsão e varia com respeito a muitas variáveis, como regulamentações de governo e dificuldades técnicas.

O valor da usina completa também é de difícil previsão, pois a demanda de energia e os custos de combustíveis alternativos são, de forma semelhante, incertos. Utiliza-se, portanto, a suposição de que tanto o valor do projeto completo (usina), quanto o custo de investimento apresentam variações estocásticas.

A incerteza técnica, relativa a dificuldades técnicas e problemas físicos do projeto, torna a oportunidade de investimento mais atrativa, pois, mesmo se o valor presente líquido VPL do projeto for negativo, ainda pode ser econômico começar o investimento, pois o início do investimento revela informações importantes sobre os custos internos (técnicos) e, portanto, apresenta um *shadow value*, que se traduz em uma redução do custo total esperado, além da contribuição direta para a finalização

do projeto. Como as informações chegam assim que os investimentos são realizados, não existe valor na espera.

A incerteza econômica, relativa a custos externos, como construção e ambiente político-econômico, no entanto, torna a oportunidade de investimento menos atrativa para um investimento imediato, pois um projeto, mesmo com um VPL positivo, pode ser não econômico, devido ao fato de os custos externos variarem independentemente do investimento estar ou não sendo realizado, existindo, portanto, um valor em esperar por novas informações antes de começar o investimento.

Considere que o projeto em questão possui um custo total representado por uma variável aleatória  $K$ , onde somente seu valor esperado é conhecido e denote por  $I$  a taxa de investimento existente por período.

Para permitir a inclusão de ambos os custos na formulação do modelo, assume-se que o custo esperado de investimento,  $K$ , é dado pelo seguinte processo de difusão controlado:

$$dK = -I dt + \beta(IK)^{1/2} dz + \gamma K dw, \quad (1)$$

onde  $dz$  e  $dw$  são incrementos descorrelatados do processo de Wiener.

O segundo termo do lado direito de (1), termo em  $dz$ , descreve os custos internos relacionados a incertezas técnicas, e o terceiro termo em  $dw$  descreve os custos externos relacionados à incerteza relativa ao ambiente político-econômico como regulamentações e insumos.

Observa-se em (1) que, mesmo sem haver investimentos, ou seja com  $I = 0$ , o custo de investimento  $K$  ainda possui flutuações correspondendo ao termo  $dw$ , representando os custos externos relativos à economia: insumos, mão-de obra e ambiente político-econômico. Estes custos variam, quer a firma esteja investindo ou não, raciocínio condizente com a realidade.

Admitindo que o valor do projeto completo  $V$  pode ser representado pelo movimento geométrico Browniano, pode-se escrever para a variável  $V$ :

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dv, \quad (2)$$

onde  $dv$  representa o incremento do processo de Wiener, e assume-se que  $dv$  é descorrelacionado com  $dz$  e  $dw$ .

O parâmetro  $\alpha$  equivale à taxa de crescimento do projeto por período e  $\sigma$  representa o desvio padrão do projeto por período. Valores futuros de  $V$  são representados por uma distribuição log-normal e, conseqüentemente, a receita gerada pelo projeto também é incerta.

## A Equação $F(K,V)$

Utiliza-se a programação dinâmica para precificar o valor da opção de investimento  $F(K,V)$  da firma, assumindo, por simplificação, que todos os riscos gerados pelo projeto podem ser diversificados no mercado, implicando que o projeto pode ser descontado a uma taxa livre de risco.

Utiliza-se o Lema de Itô para  $F(K,V)$ :

$$dF = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} dV^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} dK^2 + \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{\partial F}{\partial K} dK.$$

Substituindo as expressões relativas à  $dV$  e  $dK$  na equação acima:

$$dF = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \sigma^2 V^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} (\beta^2 IK + \gamma^2 K^2) dt + \frac{\partial F}{\partial V} (\alpha V dt + \sigma V dv) + \frac{\partial F}{\partial K} (-Idt + \beta (IK)^{1/2} dz + \gamma K dw).$$

Tomando o valor esperado de  $dF$  obtém-se:

$$E[dF] = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \sigma^2 V^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} (\beta^2 IK + \gamma^2 K^2) dt + \frac{\partial F}{\partial V} (\alpha V dt) + \frac{\partial F}{\partial K} (-I dt). \quad (3)$$

Considera-se que o fluxo de caixa gerado pela detenção da opção de investimento é uma saída de caixa equivalente ao investimento necessário para a realização do projeto por período, ou seja, um montante de  $-I dt$ .

Utilizando a equação de Bellman da programação dinâmica:

$$rF(K, V) = \max_I \left\{ -I + \frac{1}{dt} E[dF] \right\}. \quad (4)$$

O lado esquerdo da equação (4),  $rF(K, V)$ , é o retorno por unidade de tempo que o investidor irá requerer por possuir o ativo, ou seja, a opção de investimento. Uma vez assumido que todo o risco pode ser diversificado no mercado, utiliza-se a taxa livre de risco  $r$  para o retorno desse investimento.

O primeiro termo do lado direito de (4),  $-I$ , equivale à saída de caixa desse montante por unidade de tempo para que o investimento seja realizado, e o segundo termo equivale ao retorno esperado do ganho de capital por unidade de tempo.

Logo, o lado direito de (4) é o retorno total esperado por unidade de tempo por deter o ativo, maximizado com respeito a variável de controle  $I$ .

Substituindo a expressão (3) em (4) obtém-se:

$$rF(K, V) = \max_{I(t)} \left\{ -I(t) + \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + \frac{1}{2} (\beta^2 IK + \gamma^2 K^2) \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} + \alpha V \frac{\partial F}{\partial V} - I \frac{\partial F}{\partial K} \right\}. \quad (5)$$

Analisando a equação acima, nota-se que a expressão é linear com respeito à variável de controle  $I(t)$ , na qual a equação deve ser maximizada. Considerando que a taxa máxima de investimento por período é igual a  $I$ , como consequência da linearidade, a expressão assume o seu máximo quando  $I(t) = 0$  ou  $I(t) = I$ , ou seja:

$$\text{caso (a)} : -1 + \frac{1}{2}(\beta^2 K) \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} - \frac{\partial F}{\partial K} < 0, \Rightarrow I(t) = 0,$$

$$\text{caso (b)} : -1 + \frac{1}{2}(\beta^2 K) \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} - \frac{\partial F}{\partial K} > 0, \Rightarrow I(t) = I.$$

A equação (5) pode, portanto, ser dividida em duas equações relativas aos casos (a) e (b). Considerando o caso (a), o ótimo é não proceder ao investimento,  $I(t) = 0$ . No caso (b), o ótimo é investir a taxa máxima disponível,  $I(t) = I$ .

No limite das duas expressões, encontra-se o ponto ótimo de transição de custos de investimentos, chamado  $K^*(V)$ . Uma vez descoberto o ponto  $K^*(V)$ , obtém-se a regra ótima de investimento que maximiza o valor da firma.

Para um determinado valor do projeto  $V$ , a firma deve observar os custos atuais e compará-lo com o custo ótimo  $K^*(V)$ . Caso os custos observados estiverem abaixo desse limite ótimo, o investimento deve ser realizado à taxa máxima disponível,  $I(t) = I$ . Caso contrário, o investimento deve ser suspenso,  $I(t) = 0$ .

Logo, pode-se dividir a equação (5) em dois intervalos de acordo com os custos observados  $K$ , e o custo ótimo  $K^*$ , ainda a ser calculado:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + \frac{1}{2}\gamma^2 K^2 F_{KK} + \alpha V F_V - rF = 0 \quad , \text{ caso } K > K^* ,$$

(6), (7)

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + \frac{1}{2}(\beta^2 IK + \gamma^2 K^2) F_{KK} + \alpha V F_V - IF_K - rF - I = 0 \quad , \text{ caso } K < K^* .$$

A equação (6) é uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem com solução analítica, e a equação (7) é uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem do tipo elíptica, devendo ser resolvida numericamente. O problema é, portanto, encontrar a regra de investimento ótima  $K^*(V)$ . O valor ótimo  $K^*(V)$  não conhecido é chamado de contorno livre, o que caracteriza um problema de contorno livre.

## Condições de Contorno

A solução das equações (6) e (7) possui as seguintes condições de contorno:

$$F(0, V) = V, \quad (8)$$

$$\lim_{V \rightarrow 0} F(K, V) = 0, \quad (9)$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} F(K, V) = 0, \quad (10)$$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} F_V(K, V) = e^{-\delta K / I}, \quad (11)$$

$F(K^*, V)$  é contínua em  $K^*(V)$  - (condição do valor ótimo),

$F_K(K^*, V)$  é contínua em  $K^*(V)$  - (condição de contato alto do valor ótimo).

As equações diferenciais (6) e (7) resolvidas juntamente com as condições de contorno acima levam ao valor da opção de investimento  $F(V, K)$  e ao valor ótimo  $K^*(V)$ , traduzindo a regra de investimento ótima para a empresa.

As duas últimas condições de contorno referem-se às condições do valor ótimo e contato alto, onde o valor da opção  $F(V, K)$  e de sua derivada  $F_K(V, K)$  devem ser contínuas no ponto ótimo  $K^*(V)$ . Trabalha-se, portanto, com um problema de contorno livre.

A condição (8) indica que, quando o valor do investimento restante  $K$  alcança zero, o investimento está terminado, e a firma recebe o valor do projeto completo  $V$ .

A condição (9) equivale a suposição de que o valor do projeto  $V$  segue o movimento geométrico Browniano. Uma vez que o valor do projeto alcance zero, ele permanece em zero, anulando, portanto, o valor da opção de investimento.

A condição (10) indica que, quando o valor do investimento restante  $K$  é muito grande, a probabilidade de, em algum instante,  $K$  cair para um valor acessível que permita o início do projeto é muito pequena, e, portanto, a opção de investimento não tem valor algum.

A condição (11) refere-se ao valor da opção quando o valor do projeto tende ao infinito. Quando o valor do projeto  $V$  torna-se grande comparado ao total restante de investimento  $K$ , é improvável que o investimento seja suspenso antes de sua finalização. O projeto apresenta, portanto, exatos  $K/I$  períodos para seu término, lembrando sempre que, por mais rápida a realização do investimento, o tempo mínimo para seu término,  $K/I$ , depende da taxa máxima de investimento da firma, no caso  $I$  por período. Durante esse período, o detentor da opção perde a taxa de distribuição de dividendos  $\delta$  relativa ao projeto. Essa é a taxa apropriada para o desconto do valor do projeto. Conforme a condição (8), ao término do investimento,  $K = 0$ , o valor da opção é  $V$ ,  $F(V,0) = V$ , e sabe-se, exatamente, que o período restante para o término do projeto é de  $K/I$ . Calculando o valor presente da opção de investimento quando  $V$  tende ao infinito, obtém-se:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} F(K, V) = Ve^{-\delta K/I}.$$

Derivando em relação à  $V$ , obtém-se justamente a condição (11) reescrita abaixo:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} F_V(K, V) = e^{-\delta K/I}. \quad (11)$$

## Solução da Equação F(V,K)

### Caso $K > K^*(V)$ – Solução Analítica

Caso  $K > K^*$ , a empresa suspende seus investimentos,  $I(t) = 0$ , e deve-se resolver a equação (6) reescrita abaixo:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + \frac{1}{2}\gamma^2 K^2 F_{KK} + \alpha V F_V - rF = 0 \quad (6).$$

Sujeita às condições de contorno:

$$\lim_{V \rightarrow 0} F(K, V) = 0, \quad (9)$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} F(K, V) = 0, \quad (10)$$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} F_V(K, V) = e^{-\delta K / I}, \quad (11)$$

$F(K^*, V)$  é contínua em  $K^*(V)$  - (condição do valor ótimo),

$F_K(K^*, V)$  é contínua em  $K^*(V)$  - (condição de contato alto do valor ótimo).

A equação (6) é uma equação diferencial parcial que possui solução analítica do tipo:

$$F(K, V) = m(K/V)^\omega, \quad (12)$$

Substituindo (12) na equação (6), obtém-se a equação de segundo grau (13), cujas raízes  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são dadas pela equação (14) :

$$\frac{1}{2}\gamma^2[\omega^2 - \omega] - \alpha\omega + \frac{1}{2}\sigma^2[\omega^2 - \omega] - r = 0, \quad (13)$$

$$\omega_{1,2} = \left( \frac{1}{2} + \frac{\alpha - \sigma^2}{\gamma^2 + \sigma^2} \right) \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2r(\gamma^2 + \sigma^2)}{(\gamma^2 + 2\alpha - \sigma^2)^2}} \right). \quad (14)$$

A solução de (6) é, portanto, uma combinação linear do tipo da equação (12):

$$F(K,V) = m_1(K/V)^{\omega_1} + m_2(K/V)^{\omega_2}.$$

Pela equação (14), verifica-se que  $\omega_1 > 1$  e  $\omega_2 < 0$ . Devido à condição de contorno (10), para a função  $F(K,V)$  não divergir quando  $K$  tender para infinito, a constante  $m_2$  é suposta igual a zero, resultando como solução :

$$F(K,V) = m_2(K/V)^{\omega_2}. \quad (15)$$

As condições de contorno do valor ótimo e de contato alto garantem que no ponto ótimo  $K^*$  a função  $F(K,V)$  e sua derivada  $F_K(K,V)$  são contínuas, portanto, obtém-se:

$$F(K^*,V) = m_2(K^*/V)^{\omega_2}, \quad (16)$$

$$F_K(K^*,V) = m_2\omega_2(K^*/V)^{\omega_2-1}/V. \quad (17)$$

Dividindo (16) por (17), elimina-se a constante  $m_2$  :

$$F(K^*,V) = \left( \frac{K^*}{\omega_2} \right) \cdot F_K(K^*,V). \quad (18)$$

A condição (18) equivale à condição de valor ótimo do contorno livre e substitui as duas condições de contorno do valor ótimo e de contato alto. A partir da condição (18), comum às duas soluções, consegue-se o valor ótimo  $K^*(V)$ , como se vê adiante.

## Caso $K < K^*$ - Solução Numérica

Caso  $K < K^*$ , a firma investe a taxa máxima de investimento por período,  $I(t) = I$ , e deve-se resolver a equação (7) reescrita abaixo:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + \frac{1}{2}(\beta^2 IK + \gamma^2 K^2)F_{KK} + \alpha VF_V - IF_K - rF - I = 0 \quad (7).$$

Sujeita às condições de contorno:

$$F(0, V) = V, \quad (8)$$

$$F(K, 0) = 0, \quad (9)$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} F(K, V) = 0, \quad (10)$$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} F_V(K, V) = e^{-\delta K / I}, \quad (11)$$

$$F(K^*, V) = \left( \frac{K^*}{\omega_2} \right) \cdot F_K(K^*, V). \quad (18)$$

A equação (7) é uma equação diferencial parcial elíptica e deve ser resolvida numericamente. O método aqui utilizado corresponde ao método das diferenças finitas (MDF) em sua forma implícita. Consiste na transformação das variáveis  $V$  e  $K$  em incrementos discretos e da equação diferencial parcial (7) em uma equação de diferenças finitas, a qual pode ser resolvida algebricamente através da resolução de um sistema linear.

A resolução da EDP elíptica implica no total conhecimento da região de contorno do problema. Isso é fornecido através das condições de contorno (8)-(11). A condição de contorno (18) fornece a informação necessária para o cálculo do ponto ótimo  $K^*(V)$ .

Neste modelo, o total de investimento  $K$ , necessário para o desenvolvimento do projeto, bem como os valores,  $V$ , que o projeto pode assumir são aleatórios.

Seja a seguinte discretização para duas variáveis:

$$F(K,V) \equiv F(i\Delta K, j\Delta V) \equiv F_{i,j} \quad , \quad \text{onde } 0 \leq i \leq n+1 \text{ e } 0 \leq j \leq n.$$

Com essa discretização, pode-se montar um domínio quadrado, também chamado de grid  $n \times n$  onde a solução é procurada. A região do domínio para as variáveis são  $K \in [0, K_{\text{máx}}]$  e  $V \in [0, V_{\text{máx}}]$ , onde  $K_{\text{máx}} = n\Delta K$  e  $V_{\text{máx}} = n\Delta V$ .

Pelo fato de se estar utilizando o método implícito, a escolha das discretizações  $\Delta K$  e  $\Delta V$  não são de importância para a convergência do método.

As derivadas parciais serão aproximadas pelas formas de diferenças do seguinte modo:

$$F_{KK} \approx [ F_{i+1,j} - 2F_{i,j} + F_{i-1,j} ] / (\Delta K)^2 , \quad (19)$$

$$F_K \approx [ F_{i+1,j} - F_{i-1,j} ] / 2\Delta K , \quad (20)$$

$$F_{VV} \approx [ F_{i,j+1} - 2F_{i,j} + F_{i,j-1} ] / (\Delta V)^2 , \quad (21)$$

$$F_V \approx [ F_{i,j+1} - F_{i,j-1} ] / 2\Delta V . \quad (22)$$

Aplicando as aproximações de diferenças finitas (19)-(22) na equação (7), obtém-se:

$$-a_{i,j}F_{i,j} + b_{i,j}F_{i+1,j} + c_{i,j}F_{i-1,j} + d_{i,j}F_{i,j+1} + e_{i,j}F_{i,j-1} - I = 0 , \quad (23)$$

onde:

$$\begin{aligned}
a_{i,j} &= r + \sigma^2 j^2 + \frac{i}{\Delta K} (\beta^2 I + \gamma^2 i \Delta K), \\
b_{i,j} &= \frac{1}{2\Delta K} (i\beta^2 I + i^2 \gamma^2 \Delta K - I), \\
c_{i,j} &= \frac{1}{2\Delta K} (i\beta^2 I + i^2 \gamma^2 \Delta K + I), \\
d_{i,j} &= \frac{1}{2} j (\sigma^2 j + \alpha), \\
e_{i,j} &= \frac{1}{2} j (\sigma^2 j - \alpha)
\end{aligned}$$

Agora as condições de contorno são transformadas de acordo com as aproximações de diferenças finitas (19)-(22):

$$\text{A condição de contorno (8) :} \quad F_{0,j} = j\Delta V \quad . \quad (24)$$

$$\text{A condição de contorno (9) :} \quad F_{i,0} = 0 \quad . \quad (25)$$

$$\text{A condição de contorno (10) :} \quad F_{i=n+1,j} = 0 \quad . \quad (26)$$

$$\text{A condição de contorno (11) :} \quad F_v(i\Delta K, n\Delta V) = e^{-\delta i\Delta K/I} \quad .$$

Utilizando a aproximação (22) das diferenças finitas para a equação acima:

$$\frac{[F_{i,n+1} - F_{i,n-1}]}{2\Delta V} = e^{-\delta i\Delta K/I} \quad .$$

Isolando o termo  $F_{i,n+1}$  da equação acima:

$$F_{i,n+1} = 2\Delta V e^{-\delta i\Delta K/I} + F_{i,n-1} \quad . \quad (27)$$

Utilizando a equação (23) e fazendo  $j = n$ , obtém-se:

$$-a_{i,n}F_{i,n} + b_{i,n}F_{i+1,n} + c_{i,n}F_{i-1,n} + d_{i,n}F_{i,n+1} + e_{i,n}F_{i,n-1} - I = 0. \quad (28)$$

Substituindo a equação (27) em (28), tem-se:

$$-a_{i,n}F_{i,n} + b_{i,n}F_{i+1,n} + c_{i,n}F_{i-1,n} + d_{i,n}\left(2\Delta V e^{-\delta i\Delta K/I} + F_{i,n-1}\right) + e_{i,n}F_{i,n-1} - I = 0. \quad (29)$$

Arrumando os termos acima, obtém-se:

$$-a_{i,n}F_{i,n} + b_{i,n}F_{i+1,n} + c_{i,n}F_{i-1,n} + (d_{i,n} + e_{i,n})F_{i,n-1} + d_{i,n}2\Delta V e^{-\delta i\Delta K/I} - I = 0. \quad (30)$$

Relativo a condição de contorno (18) obtém-se:

$$F_{i^*,j} = \frac{i^* \Delta K}{\omega_2} \left( \frac{F_{i^*+1,j} - F_{i^*-1,j}}{2\Delta K} \right) .$$

E procedendo a simplificando da expressão acima:

$$F_{i^*,j} = \frac{i^*}{2\omega_2} [F_{i^*+1,j} - F_{i^*-1,j}] . \quad (31)$$

## Desenvolvimento do Algoritmo

Reescrevendo a equação de diferenças finitas a ser calculada:

$$-a_{i,j}F_{i,j} + b_{i,j}F_{i+1,j} + c_{i,j}F_{i-1,j} + d_{i,j}F_{i,j+1} + e_{i,j}F_{i,j-1} - I = 0, \quad (23)$$

onde:

$$a_{i,j} = r + \sigma^2 j^2 + \frac{i}{\Delta K} (\beta^2 I + \gamma^2 i \Delta K),$$

$$b_{i,j} = \frac{1}{2\Delta K} (i\beta^2 I + i^2 \gamma^2 \Delta K - I),$$

$$c_{i,j} = \frac{1}{2\Delta K} (i\beta^2 I + i^2 \gamma^2 \Delta K + I),$$

$$d_{i,j} = \frac{1}{2} j (\sigma^2 j + \alpha),$$

$$e_{i,j} = \frac{1}{2} j (\sigma^2 j - \alpha).$$

Sujeita às condições de contorno:

$$F_{i=0,j} = j\Delta V \quad , \quad (24)$$

$$F_{i,j=0} = 0 \quad , \quad (25)$$

$$F_{i=n+1,j} = 0 \quad , \quad (26)$$

$$-a_{i,n} F_{i,n} + b_{i,n} F_{i+1,n} + c_{i,n} F_{i-1,n} + (d_{i,n} + e_{i,n}) F_{i,n-i} + d_{i,n} 2\Delta V e^{-\delta i \Delta K / I} - I = 0, \quad (30)$$

$$F_{i^*,j} = \frac{i^*}{2\omega_2} [F_{i^*+1,j} - F_{i^*-1,j}] \quad . \quad (31)$$

Cada elemento  $F_{i,j}$  da equação (23), pode ser visto como elemento de um grid  $n \times n$ . As condições de contorno do grid equivalem às equações (24)-(26) e (30). No entanto, ao contrário das condições (24)-(26), a condição (30) é dada como função dos valores do grid (incógnitas a serem calculadas).

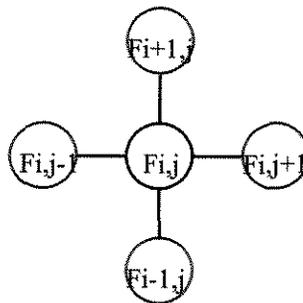
A equação (23), correspondente à equação de diferenças finitas, deve ser resolvida sob a forma de um sistema. Este sistema, possui um número de incógnitas e equações iguais ao número de elementos do grid.

No caso, como se está trabalhando com um grid de  $n \times n$  elementos, o sistema apresentará  $n \times n$  equações e variáveis. Um sistema de  $n \times n$  variáveis e equações corresponde à resolução de uma matriz de  $(n \times n)^2$  elementos.

Para um melhor grau de precisão, é preferível trabalhar com discretizações pequenas. Ao mesmo tempo que torna a solução mais precisa, diminuindo os valores das discretizações, refina-se o grid e, por conseguinte, aumenta o seu número de elementos, bem como os elementos da matriz, o que implica em um maior esforço computacional.

Por exemplo, trabalhando-se com valores de  $K$  e  $V$  variando de 0 até 10 e com uma discretização de 0,25 (fazendo  $\Delta K = \Delta V$ ), está se considerando, na verdade, um grid de  $40 \times 40$ , ou seja um sistema de 1600 ( $40^2$ ) incógnitas e equações, o que leva a resolução de uma matriz de 2.560.000 ( $1600^2$ ) elementos. É necessário, portanto, armazenar os 2,56 milhões de elementos da matriz para proceder ao escalonamento.

Como em uma EDP elíptica cada elemento pode ser calculado dependendo dos quatro elementos adjacentes, tem-se, para cada elemento a ser calculado, o máximo de quatro outros elementos disponíveis, como mostra a célula representativa abaixo:



Observe-se o elemento central da célula  $F_{i,j}$ . Este elemento é calculado baseado nos valores dos quatro elementos adjacentes, no caso os elementos em vermelho,  $F_{i+1,j}$ ,  $F_{i-1,j}$ ,  $F_{i,j+1}$  e  $F_{i,j-1}$ , o que pode ser observado pela expressão (23). Através dessa expressão, monta-se um sistema de equações na forma matricial. Cada linha da matriz conterà, no máximo, cinco elementos não nulos - o próprio e mais seus quatro elementos adjacentes. Se o elemento a ser calculado estiver perto da fronteira do

grid, o elemento pode ser representado apenas por dois (menor caso), ou três elementos adjacentes. Na figura acima, este seria o caso onde um ou dois elementos em vermelho seriam conhecidos pelas condições de contorno e, portanto, não representariam variáveis do sistema.

Portanto, cada linha ou coluna da matriz do sistema conterá no máximo cinco elementos não nulos.

Como se vê, a própria estrutura de uma EDP elíptica ajuda bastante na redução de variáveis necessárias ao armazenamento, auxiliando na economia de memória computacional necessária.

Uma matriz dessa forma, com apenas poucos elementos não nulos por linha ou coluna, é chamada de matriz esparsa.

O algoritmo para obtenção da regra ótima de investimento pode ser referido da seguinte maneira:

Primeiramente, deve-se calcular os valores das condições de contorno do grid.

Através da equação (23), monta-se um sistema de equações lineares em forma matricial, onde cada variável da matriz representa um ponto do grid. No exemplo, existem 1600 variáveis que representam todos os pontos do grid. Cada ponto equivale ao valor  $F_{ij}$  ( $F(K, V)$ ) da opção de investimento.

Procede-se ao escalonamento da matriz para a resolução das 1600 variáveis que representam os pontos do grid. Como existem 1600 variáveis e equações, a matriz será sempre quadrada com  $1600^2$  elementos.

Uma vez resolvido o sistema matricial, obtém-se os valores das opções de investimentos  $F_{ij}$  para todos os valores do grid, ou seja, para toda região de valores de  $K$  (custo de investimento) e  $V$  (valor do projeto completo) abrangida.

Lembrando que se está calculando a equação de diferenças finitas (23) correspondente à solução numérica do problema. Deve-se agora proceder ao cálculo da região onde a solução é analítica da forma de (15), reescrita abaixo:

$$F(K, V) = m_2(K/V)^{\omega_2}. \quad (15)$$

A solução analítica corresponde à parte da solução, onde os custos de investimentos  $K(V)$  são maiores do que o custo limite ótimo  $K^*(V)$ . Logo, é necessário descobrir, primeiramente, esse ponto ótimo de transição.

Utiliza-se a condição de contorno do valor ótimo (31), em todas as colunas do grid, para descobrir o ponto ótimo  $K^*(V)$ . Devido a erros numéricos, (31) não será verificada exatamente, portanto, um erro é introduzido de forma que (31) possa ser verificada. A condição (31) passa a ser, portanto:

$$F_{i^*,j} - \frac{i^*}{2\omega_2} [F_{i^*+1,j} - F_{i^*-1,j}] \leq \varepsilon, \text{ onde } \varepsilon \text{ é escolhido como } \Delta K/3. \quad (32)$$

Uma vez satisfeita a condição acima, obtém-se o valor ótimo  $i^*$  para cada  $j$ , ou seja,  $K^*(V)$ , bem como o valor de  $F_{i^*,j}$  que equivale à  $F(K^*, V)$ .

Como no ótimo as duas soluções (analítica e numérica) são contínuas, utiliza-se a equação (15) para o cálculo da constante  $m_2$ .

Com esse procedimento, pode-se encontrar valores de  $m_2$  que variem de acordo com cada coluna do grid, ou seja,  $m_2(V)$ .

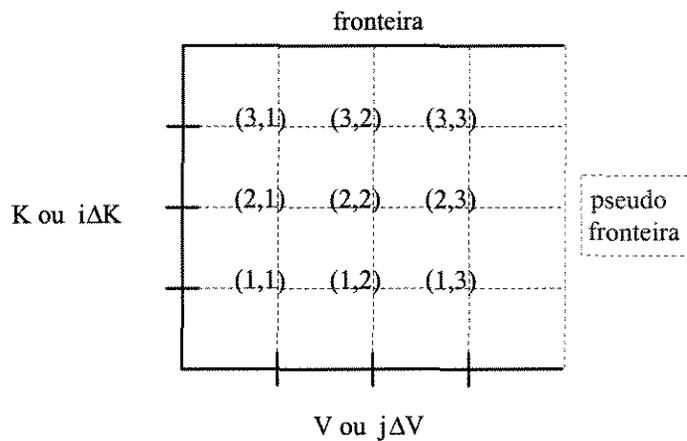
Porém, como  $m_2$  é constante para (15) ser solução analítica de (6), deve-se utilizar como boa “proxy” aquele valor de  $m_2$  relativo à coluna central do grid (no exemplo coluna central equivale a  $V = 5$ ), de forma a evitar erros de interferências.

A partir de  $K(V) > K^*(V)$ , a solução numérica deixa de valer, sendo substituída pela solução analítica. São calculados, portanto, os valores de  $F(K,V)$  segundo a equação (15), já com o valor de  $m_2$  conhecido.

Com isso, obtém-se todos os valores de  $F(K,V)$  e os pontos ótimos  $K^*(V)$  do grid, responsáveis pela regra ótima de investimento, maximizando o valor da opção de investimento da firma.

Um exemplo é ilustrado, a seguir, supondo um grid  $3 \times 3$ . As figuras abaixo ilustram o procedimento:

Primeiro, as variáveis contínuas  $V$  e  $K$  são discretizadas. Utilizando o exemplo anterior, onde as variáveis  $V$  e  $K$  variam de 0 até 10, o valor das discretizações deverá ser 3.33 ( $\Delta K = \Delta V = 3.33$ ) para um grid  $3 \times 3$ . Cada ponto do grid, par  $(i,j)$ , representa a opção de investimento  $F(K,V)$  referida por  $F_{i,j}$ . O domínio contínuo transforma-se em um grid discreto conforme a figura abaixo:



Os elementos da fronteira são conhecidos a partir das condições de contorno, e a pseudo-fronteira, representada em vermelho, possui suas derivadas conhecidas ao invés da função no ponto. Devido a este fato, os elementos adjacentes à pseudo fronteira, ou seja, pares com valores de  $j = 3$ , possuem fórmula de recorrência dada pela equação (30), diferente dos outros pares, com  $j \neq 3$ , com fórmula de recorrência dada pela equação (23).

A seguir, calcula-se as equações relativas aos pares (i,j) definidos no grid acima:

$$\underline{i = 1 \quad j = 1}$$

A equação de diferenças finitas, com a fórmula geral dada por (23), é:

$$-a_{1,1}F_{1,1} + b_{1,1}F_{2,1} + c_{1,1}F_{0,1} + d_{1,1}F_{1,2} + e_{1,1}F_{1,0} - I = 0 \quad ,$$

mas:

$$F_{0,1} = \Delta V \quad , \text{ pela condição de contorno (24),}$$

$$F_{1,0} = 0 \quad , \text{ pela condição de contorno (25).}$$

Logo, a equação torna-se:

$$-a_{1,1}F_{1,1} + b_{1,1}F_{2,1} + d_{1,1}F_{1,2} = -c_{1,1}\Delta V + I. \quad (33)$$

$$\underline{i = 1 \quad j = 2}$$

A equação de diferenças finitas, com a fórmula geral dada por (23), é:

$$-a_{1,2}F_{1,2} + b_{1,2}F_{2,2} + c_{1,2}F_{0,2} + d_{1,2}F_{1,3} + e_{1,2}F_{1,1} - I = 0 \quad ,$$

mas:

$$F_{0,2} = 2\Delta V \quad , \text{ pela condição de contorno (24).}$$

Logo, a equação torna-se:

$$-a_{1,2}F_{1,2} + b_{1,2}F_{2,1} + d_{1,2}F_{1,3} + e_{1,2}F_{1,1} = -c_{1,2}2\Delta V + I. \quad (34)$$

$$\underline{i = 1 \quad j = 3}$$

A equação de diferenças finitas, com a fórmula geral dada por (30), é:

$$-a_{1,3}F_{1,3} + b_{1,3}F_{2,3} + c_{1,3}F_{0,3} + (d_{1,3} + e_{1,3})F_{1,2} + d_{1,3}2\Delta V e^{-\delta \Delta K/I} - I = 0,$$

mas:

$$F_{0,3} = 3\Delta V \quad , \text{ pela condição de contorno (24).}$$

Logo, a equação torna-se:

$$-a_{1,3}F_{1,3} + b_{1,3}F_{2,3} + (d_{1,3} + e_{1,3})F_{1,2} = -c_{1,3}3\Delta V - d_{1,3}2\Delta V e^{-\delta \Delta K/I} + I. \quad (35)$$

$$\underline{i = 2 \quad j = 1}$$

A equação de diferenças finitas, com a fórmula geral dada por (23), é:

$$-a_{2,1}F_{2,1} + b_{2,1}F_{3,1} + c_{2,1}F_{1,1} + d_{2,1}F_{2,2} + e_{2,1}F_{2,0} - I = 0 \quad ,$$

mas:

$$F_{2,0} = 0 \quad , \text{ pela condição de contorno (25).}$$

Logo, a equação torna-se:

$$-a_{2,1}F_{2,1} + b_{2,1}F_{3,1} + c_{2,1}F_{1,1} + d_{2,1}F_{2,2} = I. \quad (36)$$

$$\underline{i = 2 \quad j = 2}$$

A equação de diferenças finitas, com a fórmula geral dada por (23), é:

$$-a_{2,2}F_{2,2} + b_{2,2}F_{3,2} + c_{2,2}F_{1,2} + d_{2,2}F_{2,3} + e_{2,2}F_{2,1} - I = 0.$$

E a equação torna-se:

$$-a_{2,2}F_{2,2} + b_{2,2}F_{3,2} + c_{2,2}F_{1,2} + d_{2,2}F_{2,3} + e_{2,2}F_{2,1} = I. \quad (37)$$

$$\underline{i = 2 \quad j = 3}$$

A equação de diferenças finitas, com a fórmula geral dada por (30), é:

$$-a_{2,3}F_{2,3} + b_{2,3}F_{3,3} + c_{2,3}F_{1,3} + (d_{2,3} + e_{2,3})F_{2,2} + d_{2,3}2\Delta V e^{-\delta 2\Delta K/I} - I = 0,$$

Logo, a equação torna-se:

$$-a_{2,3}F_{2,3} + b_{2,3}F_{3,3} + c_{2,3}F_{1,3} + (d_{2,3} + e_{2,3})F_{2,2} = -d_{2,3}2\Delta V e^{-\delta 2\Delta K/I} + I. \quad (38)$$

$$\underline{i = 3 \quad j = 1}$$

A equação de diferenças finitas, com a fórmula geral dada por (23), é:

$$-a_{3,1}F_{3,1} + b_{3,1}F_{4,1} + c_{3,1}F_{2,1} + d_{3,1}F_{3,2} + e_{3,1}F_{2,0} - I = 0,$$

mas:

$$F_{2,0} = 0, \text{ pela condição de contorno (25),}$$

$$F_{4,1} = 0, \text{ pela condição de contorno (26).}$$

Logo, a equação torna-se:

$$-a_{3,1}F_{3,1} + c_{3,1}F_{2,1} + d_{3,1}F_{3,2} = I. \quad (39)$$

$$\underline{i = 3 \quad j = 2}$$

A equação de diferenças finitas, com a fórmula geral dada por (23), é:

$$-a_{3,2}F_{3,2} + b_{3,2}F_{4,2} + c_{3,2}F_{2,2} + d_{3,2}F_{3,3} + e_{3,2}F_{3,1} - I = 0 \quad ,$$

mas:

$$F_{4,2} = 0 \quad , \text{ pela condição de contorno (26).}$$

Logo, a equação torna-se:

$$-a_{3,2}F_{3,2} + c_{3,2}F_{2,2} + d_{3,2}F_{3,3} + e_{3,2}F_{3,1} = I. \quad (40)$$

$$\underline{i = 3 \quad j = 3}$$

A equação de diferenças finitas, com a fórmula geral dada por (30), é:

$$-a_{3,3}F_{3,3} + b_{3,3}F_{4,3} + c_{3,3}F_{2,3} + (d_{3,3} + e_{3,3})F_{3,2} + d_{3,3}2\Delta V e^{-\delta 3\Delta K/I} - I = 0,$$

mas:

$$F_{4,3} = 0 \quad , \text{ pela condição de contorno (26).}$$

Logo, a equação torna-se:

$$-a_{3,3}F_{3,3} + c_{3,3}F_{2,3} + (d_{3,3} + e_{3,3})F_{3,2} = -d_{3,3}2\Delta V e^{-\delta 3\Delta K/I} + I. \quad (41)$$

As equações (33)-(41) definem um sistema linear com nove incógnitas que representam os valores da opção de investimento  $F_{i,j}$  do grid  $3 \times 3$  analisado. Colocando o sistema em forma matricial,  $\underline{\underline{A}} \underline{x} = \underline{b}$ , obtém-se:

$$\underline{\underline{A}} \underline{x} = \underline{b}$$

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & d_{11} & 0 & b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_{12} & -a_{12} & d_{12} & 0 & b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (d_{13} + e_{13}) & -a_{13} & 0 & 0 & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & -a_{21} & d_{21} & 0 & b_{21} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & e_{22} & -a_{22} & d_{22} & 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} & 0 & (d_{23} + e_{23}) & -a_{23} & 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 & c_{31} & 0 & 0 & -a_{31} & d_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{32} & 0 & e_{32} & -a_{32} & d_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{33} & 0 & (d_{33} + e_{33}) & -a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{31} \\ F_{32} \\ F_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\underline{b}$$

$$= \begin{bmatrix} -c_{11}\Delta V + I \\ -c_{12}2\Delta V + I \\ -c_{13}3\Delta V - d_{13}2\Delta V e^{-\delta\Delta K/I} + I \\ I \\ I \\ -d_{23}2\Delta V e^{-\delta 2\Delta K/I} + I \\ I \\ I \\ -d_{33}2\Delta V e^{-\delta 3\Delta K/I} + I \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz  $\underline{\underline{A}}$  é uma matriz esparsa, onde cada linha possui no mínimo três e no máximo cinco elementos, conforme já mencionado.

Uma vez resolvido o sistema, o que implica encontrar a matriz inversa  $\underline{\underline{A}}^{-1}$ , todos os pontos do grid, pares  $(i,j)$  correspondentes à opção de investimento  $F_{i,j}$ , são obtidos.

Finalmente, a condição de contorno (32) é utilizada para identificar qual o ponto ótimo  $K^*(V)$ , no caso  $i^*(j)$ . Para cada coluna  $j$  do grid, um ponto  $i^*$  é obtido.

Através da discretização da equação (15), obtém-se o valor da constante  $m_2$  substituindo o par  $(i^*\Delta K, j\Delta V)$ , conforme abaixo:

$$m_2 = \frac{F_{i^*,j}}{\left(\frac{i^*\Delta K}{j\Delta V}\right)^{\omega 2}}.$$

Utiliza-se como valor de  $m_2$  aquele relativo à coluna central do grid, no caso ( $V = 6.66$ ), ou seja,  $j = 2$ .

De posse do valor relativo a  $m_2$ , utiliza-se a equação (15b - discretizada) para se obter os valores de  $F(K, V)$  restantes, região  $K(V) \geq K^*(V)$ , ou seja,  $i(j) \geq i^*(j)$ :

$$F(K, V) = F_{i,j} = m_2 \left(\frac{i\Delta K}{j\Delta V}\right)^{\omega 2}. \quad (15b)$$



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS <sup>16</sup>

- AMES, W. F. **Numerical Methods for Partial Differential Equations**. New York: Academic Press, 1977.
- ARMSTRONG, M., et. al. (Editors) **Geostatistics Rio 2000**. Proceedings of the Geostatistics Sessions of the 31<sup>st</sup> International Geological Congress. Quantitative Geology and Geostatistics: Kluwer Academic Publishers, 2000. ISBN 1-4020-04070-2.
- ARMSTRONG, M.; DOWD, P. A. (Editors) **Geostatistical Simulations**. Proceedings of the Geostatistical Simulation Workshop. Quantitative Geology and Geostatistics. France: Kluwer Academic Publishers, 1993. ISBN 0-7923-2732-2.
- BEREZIN, I. S.; ZIDKOV, N. P. **Methods of Calculations**. Moscow: State Publish House of Physical and Mathematical Books, 1960.
- BHAPPU; GUZMAN *apud* DAVIS, G. A. **Option Premiums in Mineral Asset Pricing: Are They Important?**. Working paper of the Division of Economics and Business. Colorado School of Mines, 1994.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. **The Pricing of Options and Corporate Liabilities**. Journal of Political Economy, 1973. p 637-657.
- BLANCHARD, O.; FISCHER, S. **Lectures on macroeconomics**. MIT Press, 1989.
- BLEINER, C., et. al. **Isatis Software Manual**. Geovariances & Ecole des Mines de Paris, Paris, France, 2000. 585 p.
- BOYLE, P. P. **Options: A Monte Carlo Approach**. Journal of Financial Economics, 1977. p. 323-338.
- BREALEY, R.; MYERS, S. **Principles of Corporate Finance**. 2<sup>nd</sup> ed. New York: McGraw Hill Book Company, 1984.
- BREALEY, R.; MYERS, S. **Principles of Corporate Finance**. New York: McGraw Hill Book Company, 1992.
- BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E. S. **Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis**. Journal of Financial and Quantitative Analysis 20, 1978. p. 461-473.
- BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E. S. **Evaluating Natural Resource Investments**. Journal of Business, 1985. Vol. 58. N° 2. p. 135-158.
- CARVALHO, R. M. **Geostatistical Simulation for an Open Pit Iron Ore Mine**. 1995. Center of Geostatistics, École des Mines de Paris, Fontainebleau, 1995.
- CARVALHO, R. M.; Remacre, A. Z.; Suslick, S. B. **Geostatistical Simulation and Option Pricing Techniques: A Methodology to Integrate Geological Models in the Mining Evaluation Projects**. In: 6<sup>th</sup> International Geostatistics Congress, Cape Town, 2000. ISBN 0-620-25382-7.
- CHILÈS, J. P.; DELFINER, P. **Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty**. John Wiley & Sons Inc, 1999. 695 p. ISBN 0-4710-8315-1.
- COPELAND, T.; LOLLER, T.; MURRIN, J. **Valuation: measuring and managing the value of companies**. New York: John Wiley and Sons, 1990.

---

<sup>16</sup> Baseada na NBR-6023 de ago. de 2000, da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).

- COX, J. C.; ROSS, S. A. **The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes.** Journal of Financial Economics 3, 1976. p. 145-166.
- COURTADON, G. **A More Accurate Finite Difference Approximation for the Valuation of Options.** Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1982. p. 697-703.
- DAVIS, G. A. **Option Premiums in Mineral Asset Pricing: Are They Important?.** Working paper of the Division of Economics and Business. Golden: Colorado School of Mines, 1994.
- DIXIT, A. K.; PINDYCK, R. S. **Investment under Uncertainty,** NJ: Princeton University Press, 1993. ISBN 0-691-03410-9.
- DOWD, P. A. **Risk assessment in reserve estimation and open-pit planning.** Institution of Mining and Metallurgy, 1994. Vol. 103. p. A148-A154.
- GENTRY, D.; O'NEIL, T. **Mining Investment Analysis.** New York: AIME, 1984. 502 p.
- GESKE, R.; SHASTRI, K. **Valuation by Approximation: A Comparison of Alternative Option Valuation Techniques.** Journal of Financial and Quantitative Analysis 20, 1985. p. 45-71.
- GLACKEN, I. M. **Change of Support and Use of Economic Parameters for Block Selection.** Geostatistics Wollongong '96. Vol. 2: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- HULL, J.; WHITE, A. **Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method.** Journal of Financial and Quantitative Analysis 25, 1990. p. 87-100.
- JACOBY, H. J.; LAUGHTON D. L. **Project Evaluation Using a Probabilistic-Process Representation of Uncertainty.** Center for Energy Policy Research. M.I.T. Energy Laboratory, 1988.
- LUEHRMAN, T. A. **Strategy as a Portfolio of Real Options.** Harvard Business Review, 1998. p. 89-99.
- MAJD, S.; PINDYCK, R. S. **Time to Build, Option Value and Investment Decisions.** Journal of Financial Economics 18, 1987. March, 7-27.
- MASON, S. P.; MERTON, R. C. **The Role of Contingent Claims Analysis in Corporate Finance.** Recent Advances in Corporate Finance. Altman, E. I.; Subrahmanyam M. G. (eds.), 1985.
- MASSÉ, P. **La elección de Inversiones.** Sagitario S.A., 1962.
- MATHERON, G. *apud* JOURNEL, A. G; HUIJBREGTS, C. J. **Mining Geostatistics.** Academic Press, London, 1978.
- MATHERON, G.; FORMERY, P. **Recherche d'Optimum dans la Reconnaissance des Gisements Miniers.** Annales des Mines, 1963.
- MAUBOUSSIN, M. J. **Get Real: Using Real Options in Security Analysis.** Credit Suisse First Boston Corporation, 1999. Vol. 10. June 23.
- MCDONALD, R.; SIEGEL, D. **Investment and the Valuation of Firms When There is an Option to Shut Down.** International Economic Review, 1985. XXVI. p. 331-349.
- MCDONALD, R.; SIEGEL, D. **The value of waiting to invest.** Quarterly Journal of Economics, 1986. Nov. Vol. 101. p. 707-728.

- MERTON, R. C. **The Theory of Rational Option Pricing**. Bell Journal of Economics and Management Science, 1973. IV. p 141-183.
- MILNE, A.; WHALLEY A. E. **Time to build, option value and investment decision's: a comment**. Journal of Financial Economics, 2000. 56. p. 325-332.
- MILNE, A.; WHALLEY A. E. **Time to build and aggregate work-in-progress**. International Journal of Production Economics, 2001. 71, p. 165-175.
- MYERS, S. C. **Interactions of Corporate Financing and Investment Decisions – Implications for Capital Budgeting**. Journal of Finance, 1974. Vol. 29. March 1974. p. 1-25.
- MYERS, S. C.; MAJD, S. **Calculating Abandonment Value Using Option Pricing Theory**. Sloan School of Management Working Paper, 1983. N° 1462-83.
- NOREN, N. E. **Mine Development – Some Decisions Problems and Optimization Models, Decision Making in the Mineral Industry**. The Canadian Institute of Mining and Metallurgy Spend, 1971. Vol. 12.
- PADDOCK, J. L.; SIEGEL D. R.; SMITH J. L. **Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases**. Quarterly Journal of Economics, 1988.
- PINDYCK, R. S. **Investments of Uncertain Cost**. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1992. MA 02139.
- REMACRE, A. Z. **O Problema da Estimacão de Reservas Recuperáveis na Geoestatística**. Revista Escola de Minas, 1985. Vol. 38. N° 4. p. 30-34.
- RIBEIRO, D. T., et. al. **Application of Cokriging in Iron Ore Evaluation: Iron Ore Quadrangle – Brazil**, In E.Y. Baafi.; N.A Schofield (eds.). Geostatistics Wollongong '96, Australia: Kluwer, 1996. Vol. 2. p. 831-841. ISBN 0-7923-4495-2.
- ROCHA, K. M. C. **Análise de Investimentos sob Incerteza**. 1996. Dissertao (Mestrado) - Departamento de Engenharia Industrial, PUC-RIO, Rio de Janeiro, 1996.
- SCHWARTZ, E. S. **The Valuation of Warrants: Implementing a New Approach**. Journal of Financial Economics, 1977. 4,1. p. 79-93.
- SMITH, C. W. **Option Pricing: a Review**. Journal of Financial Economics, 1976. III, p. 3-52.
- SMITH, G. D. **Numerical Solution of Partial Differential Equations**. Oxford Mathematical Handbooks. London: Oxford University Press, 1971.
- SMITH, L. D. **Discount rates and risk assessment in mineral project evaluations**. CIM Bulletin, 1995. Vol. 88. No. 989. p. 34-43.
- STRIKWERDA, J. C. **Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations**. Wadsworth & Brooks/Cole Press, 1989.
- WACKERNAGEL, H. (1995) **Multivariate Geostatistics: an introduction with applications**. Springer, 1995. ISBN 3-540-60127-9.
- YOUNG, D. M. **Iterative Solution of Large Linear System**. Computer Science and Applied Mathematics. New York: Academic Press, 1971.



## BIBLIOGRAFIA

- ARMSTRONG, M.; GALLI, A. **Option pricing: A new approach to valuing mining projects**. CIM Bulletin, 1997. Vol. 90. N° 1009. p. 37-44.
- BELIOSSI, G. **Option pricing of an oil company: the model and an empirical valuation**. New Orleans: Financial Management Association Conference, 1996.
- BOHL, D. R.; TOMAN, M. A. **Analyzing nonrenewable resource supply**. Resources for the Future, Washington, 1984. 159 p.
- BOULEAU, N. **Processus Stochastiques et Applications**. Paris: Heermann, 1988.
- BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E. S. **Consistent regulatory policy under uncertainty**. The Bell Journal of Economics.
- BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E. S. **A New Approach to Evaluating Natural Resource Investments**. University of British Columbia.
- BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E. S.; LAGNADO R. **Strategic asset allocation**. Journal of Economic Dynamics and Control, 1997. p. 1377-1403.
- CARRANCE, F.; PAGÈS, G. **Les Options ou les Jeux de la Finance et du Hasard**. Annales des Mines, 1988.
- CHORN, L. G.; CROFT, M. **Resolving Reservoir Uncertainty to Create Value**. Journal of Petroleum Technology, 2000.
- CORTAZAR, G., SCHWARTZ, E. S.; CASASSUS, J. **Optimal Exploration Investments under Price and Geological-Technical Uncertainty: a Real Options Model**. 2000.
- DAMODARAN, A. **The Promise and Peril of Real Options**. New York: Stern School of Business. NY 10012.
- DAMODARAN, A. **Financing Innovations and Capital Structure Choices**. New York : Stern School of Business. University.
- DEUTSCH, C. V.; JOURNEL, A. G. **GSLIB: Geostatistical Software Library and User's Guide**. New York: Oxford University Press, 1992.
- DIAS, M. A. G.; ROCHA, K. M. C. **Petroleum Concessions with Extendible Options Using Mean Reversion with Jumps to Model Oil Prices**. In: 3<sup>rd</sup> Annual International Conference on Real Options, Wassenaar/Leiden, The Netherlands, 1999.
- FRIMPONG, S.; WHITING, J. M. **Derivative mine evaluation: strategic investment decisions in competitive markets**. Resources Policy, 1997. Vol. 23. N° 4. p. 163-171.
- HALLERMANN, D. **Valuing Political Risk: A Contingent Claims Approach**. Proceedings of the Mineral Economics and Management Society (MEMS). In: Seventh Annual MEME Professional Meeting. McCarl, Henry N.; Poulin, Richard (Editors), 1998.
- HULL, J. **Introdução aos Mercados Futuros e de Opções**. 2ª ed. São Paulo: Cultura Editores Associados e Bolsa de Mercadorias & Futuros, 1996.

- LUEHRMAN, T. **Investment Opportunities as Real Options: Getting Started on the Numbers.** Harvard Business Review, 1998. July-August 1998. p. 51-67.
- MARDONES, J. L. **Option Valuation of Real Assets.** Resources Policy, 1993. Vol. 19. N° 1.
- MOEL, A.; TUFANO, P. **Bidding for the Antamina Mine: Valuation and Incentives in a Real Options Context.** 1988.
- PINDYCK, R. S. **Irreversibilities and the Timing of Environmental Policy.** Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1999. MA 02139.
- RADETZKI, M. **A Guide to Primary Commodities in the World Economy.** Basil Blackwell, 1990.
- SAITO, R., et. al. **Value Assessment for Reservoir Recovery Optimization.** Journal of Petroleum Science and Engineering. Elsevier Science, 2001. Vol. 32. N. 2. p. 151-158.
- SLADE, M. E. **Valuing Managerial Flexibility: An Application of Real-Options Theory to Mining Investments.** Department of Economics. Vancouver: The University of British Columbia, 2000. BC V6T 1Z1.
- TRIGEORGIS, L. **Real options: Managerial flexibility and strategy in resource allocation.** Cambridge. Mass.: MIT Press, 1996. 427 p.