



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS / DEPARTAMENTO DE
ADMINISTRAÇÃO E POLÍTICA DE RECURSOS
MINERAIS

Pós-Graduação em Geociências
Área de Administração e Política de Recursos Minerais

200206384

MAURÍLIO CAMARGOS BOTELHO

**O USO DA COKRIGAGEM CO-LOCADA (“COLLOCATED COKRIGING”)
NA INTEGRAÇÃO DE DADOS QUÍMICOS E MINERALÓGICOS NO MINÉRIO
DE FERRO**

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências
como parte dos requisitos para obtenção do título de
Mestre em Geociências na Área de Administração e
Política de Recursos Minerais.

Orientador: Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre

Este exemplar corresponde a
redação final da tese defendida
por Maurilio Camargos Botello
e aprovada pela Comissão Julgadora
em 30/11/2001

Armando Zaupa Remacre
ORIENTADOR

CAMPINAS - SÃO PAULO

Outubro – 2001



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS / DEPARTAMENTO DE
ADMINISTRAÇÃO E POLÍTICA DE RECURSOS
MINERAIS

Pós-Graduação em Geociências
Área de Administração e Política de Recursos Minerais

MAURÍLIO CAMARGOS BOTELHO

O USO DA COKRIGAGEM CO-LOCADA (“COLLOCATED COKRIGING”)
NA INTEGRAÇÃO DE DADOS QUÍMICOS E MINERALÓGICOS NO MINÉRIO
DE FERRO

ORIENTADOR: Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre

Aprovada em: 30 / 11 / 2001

PRESIDENTE: Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre

EXAMINADORES:

Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre

Prof. Dr. Saul Barisnik Suslick

Prof. Dr. João Felipe Costa

Campinas, de de 2001

Dedicatória

Aos meus pais, que sempre se esforçaram
para me oferecer uma boa educação.

Agradecimentos

Aos colaboradores da antiga SAMITRI – S/A Mineração da Trindade: Cleres, Marli, Cesarino, Sirdeley, Saliba e Duarte, que possibilitaram o meu ingresso neste curso;

À SAMARCO, em especial aos Eng's Walmir Carvalho Pereira e João Pedro da Silva, pela liberação do Banco de Dados da área de Alegria 1/6;

Aos colegas Helder, Charles, Kioshi e Caio pelas sugestões e colaborações;

Ao colega e amigo Camilo, pelas muitas sugestões e colaborações;

Ao colega Moacir Cornetti, pelo apoio em informática;

Ao Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre, pelo apoio, amizade e orientação proporcionados;

À querida Rosi, pelo carinho e apoio prestados durante todo esse período, fundamentais para que eu terminasse este curso;

À minha irmã Marília, pela paciente revisão detalhada do texto.

Ao colega e amigo Rogério, pela revisão e dicas na edição do texto, assim como pelo incentivo para que eu concluísse este curso;

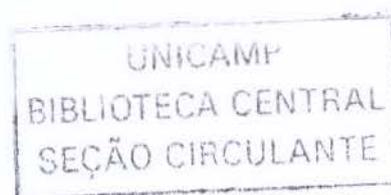
Ao Silmar, pela liberação, por parte da CVRD, para o término da edição e defesa desta dissertação;

À Deus, pela proteção.

Sumário

Dedicatória.....	iv
Agradecimentos.....	v
Sumário.....	vi
Lista de Figuras.....	viii
Lista de Fotos.....	x
Lista de Siglas e Abreviaturas.....	xi
Lista de Tabelas.....	xii
RESUMO.....	xiii
ABSTRACT.....	xiv
Capítulo 1.....	1
1.1. Introdução.....	1
1.2. Objetivos.....	2
1.3. Relevância do trabalho.....	2
1.4. Metodologia.....	4
1.5. Organização desta dissertação.....	6
Capítulo 2.....	7
2.1. Introdução.....	7
2.2. Efeitos da Cokrigagem tradicional em malhas densamente amostradas.....	8
2.3. Cokrigagem Co-locada (Collocated Cokriging).....	13
2.4. Modelos de covariância utilizados na Cokrigagem Co-locada.....	16
2.4.1. <i>Modelo linear de coregionalização</i>	17
2.4.2. <i>Modelo Markoviano 1 – MM1</i>	19
2.4.3. <i>Modelo Markoviano 2 – MM2</i>	21
Capítulo 3.....	23
3.1. Introdução.....	23

3.2. Dados gerais da jazida.....	24
3.2.1. <i>Localização geral da área em estudo</i>	24
3.2.2. <i>Localização da área no Complexo Alegria – Minas da Samarco</i>	25
3.2.3. <i>Geologia da Jazida</i>	26
3.2.4. <i>Caracterização química e mineralógica</i>	28
3.3. Estimativa por Krigagem Ordinária das variáveis mineralógicas.....	33
3.3.1. <i>Mapa base dos Furos de sonda</i>	33
3.3.2. <i>Análise Estatística dos dados mineralógicos</i>	34
3.3.3. <i>Estatística Espacial dos dados mineralógicos</i>	35
3.3.4. <i>Parâmetros da estimativa</i>	36
3.3.5. <i>Resultados da Krigagem Ordinária da variável GO</i>	37
3.4. Estimativa por Krigagem Ordinária das variáveis químicas.....	38
3.4.1. <i>Mapa base dos Furos de Perfuratriz</i>	38
3.4.2. <i>Análise Estatística das variáveis químicas</i>	39
3.4.3. <i>Estatística espacial das variáveis químicas</i>	39
3.4.4. <i>Resultados da Krigagem Ordinária da variável PPC</i>	40
Capítulo 4	42
4.1. Implementação da Cokrigagem Co-locada original.....	42
4.2. Adaptação da Cokrigagem Co-locada original.....	43
4.3. Inferência dos modelos de covariância da variável secundária.....	44
4.4. Cálculo do coeficiente de correlação (ρ).....	46
4.5. Inferência do modelo de covariância cruzada.....	46
4.6. Implementação da CCKO no ISATIS.....	47
4.7. Resultados da Cokrigagem Co-locada da GO.....	47
Capítulo 5	49
5.1. Comparação por parâmetros estatísticos.....	49
5.2. Comparação por análise de imagens.....	52
5.3. Funções de recuperação.....	55
5.4. Conclusões.....	58
5.5. Limitações e sugestões para trabalhos futuros.....	59
Referências Bibliográficas	60
Apêndice A	63
Apêndice B	67
Apêndice C	71



Lista de Figuras

Figura 1.1: Sequência para obtenção de Modelo Químico - Mineralógico.....	3
Figura 2.1: Grid hipotético ilustrando integração de dados primários com dados secundários densamente amostrados.....	9
Figura 2.2: Contribuição dos pesos na cokrigagem simples em três diferentes configurações de dados da variável secundária.....	11
Figura 2.3: Evolução de $\psi(u) \times \rho_{12}$ para as três configurações de teste.....	12
Figura 2.4: Estratégia de busca reduzida ao dado secundário co-locado.....	13
Figura 2.5: Necessidade de inferência e modelamento para modelo linear de coregionalização.....	18
Figura 2.6: Ilustração da hipótese de filtragem considerada no Modelo Markoviano 1.....	19
Figura 2.7: Necessidade de inferência e modelamento para modelo Markoviano 1.....	20
Figura 2.8: Ilustração da hipótese de filtragem considerada no Modelo Markoviano 2.....	21
Figura 3.1: Localização geral das áreas da SAMARCO.....	24
Figura 3.2: Mapa de localização de Alegria 1/6 nas áreas da SAMARCO.....	25
Figura 3.3: Seção vertical típica litológica de Alegria 1/6.....	27
Figura 3.4: Mapa litológico de superfície de Alegria 1/6.....	28
Figura 3.5: Fluxograma de processo da preparação de amostras.....	29
Figura 3.6: Esquema 4x1 de preparação das lâminas de seção polida.....	30
Figura 3.7: Mapa base dos furos de sonda.....	33
Figura 3.8: Histograma e resumo estatístico da % de GO.....	34
Figura 3.9: Diagrama de dispersão GO - PPC.....	34
Figura 3.10: Rotações ao longo dos eixos cartesianos.....	35
Figura 3.11: Variogramas da (%) de Goethita – GO.....	36
Figura 3.12: Histograma da porcentagem krigada de GO.....	37
Figura 3.13: Mapa base dos furos de perfuratriz.....	38
Figura 3.14: Histograma e resumo estatístico dos teores de PPC.....	39
Figura 3.15: Variogramas ajustados para o PPC.....	40
Figura 3.16: Histograma dos teores krigados de PPC.....	41
Figura 4.1: Configuração típica para aplicação da CCKO original.....	42
Figura 4.2: Perfil ilustrando situação típica de amostragem.....	43

Figura 4.3: Seção vertical ilustrando a variável PPC estimada por KO.....	44
Figura 4.4: Variogramas da variável secundária PPC no grid estimado por KO.....	45
Figura 4.5: Histograma das porcentagens Co-krigadas Co-locadas de GO.....	48
Figura 5.1: Seleção feita no histograma acumulado das variâncias de estimativa da KO.....	50
Figura 5.2: Diagrama de dispersão de teores de GO do grupo 1.....	51
Figura 5.3: Diagrama de dispersão de teores de GO do grupo 2.....	51
Figura 5.4: Imagem da GO estimada por KO no banco 1290.....	52
Figura 5.5: Imagem da GO estimada por CCKO no banco 1290.....	53
Figura 5.6: Imagem da variância do erro de estimativa da GO pela KO.....	54
Figura 5.7: Imagem da variância do erro de estimativa da GO pela CCKO.....	54
Figura 5.8: Metal contido – Q em reserva classificada com base na CCKO – Grupo 1.....	56
Figura 5.9: Tonelagem (%) – T em reserva classificada com base na CCKO – Grupo 1.....	56
Figura 5.10: Metal contido – Q em reserva classificada com base na CCKO – Grupo 2.....	57
Figura 5.11: Tonelagem (%) – T em reserva classificada com base na CCKO – Grupo 2.....	57

Lista de Fotos

Foto 3.1: Fotomicrografia de Hematita Especular (HE)	31
Foto 3.2: Fotomicrografia de Hematita Porosa (HP)	31
Foto 3.3: Fotomicrografia de Magnetita (MG)	32
Foto 3.4: Fotomicrografia de Goethita (GO) no detalhe	32

Lista de Siglas e Abreviaturas

Al ₂ O ₃	Composto químico Alumina
CCKO	Cokrigagem Co-locada
CKO	Cokrigagem Ordinária
Fe	Elemento químico Ferro
GO	Mineral Goethita
HE	Hematita Especular
HP	Hematia Porosa
KO	Krigagem Ordinária
LMC	<i>Linear Model of Coregionalization</i> (modelo linear de coregionalização)
MG	Mineral Magnetita
MM1	Modelo Markoviano 1
MM2	Modelo Markoviano 2
Mn	Elemento químico Manganês
P	Elemento químico Fósforo
PPC	Perda por calcinação
RI	Reserva Ideal
RE	Reserva Estimada
REF	Reserva Efetiva
SCK	Cokrigagem Simples
SiO ₂	Sílica

Lista de Tabelas

Tabela 3.1: Modelos variográficos para a variável mineralógica GO.....	35
Tabela 3.2: Parâmetros da Krigagem Ordinária da variável GO	36
Tabela 3.3: Resumo estatístico dos resultados da Krigagem Ordinária da GO	37
Tabela 3.4: Parâmetros variográficos do PPC feitos a partir de amostras	40
Tabela 3.5: Resumo estatístico dos resultados da Krigagem Ordinária do PPC.....	41
Tabela 4.1: Parâmetros variográficos do PPC feitos a partir do grid estimado por KO	45
Tabela 4.2: Resumo estatístico dos resultados da Cokrigagem Co-locada da GO	48
Tabela 5.1: Resumo estatístico das estimativas de GO por KO e CCKO.....	49



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS / DEPARTAMENTO DE
ADMINISTRAÇÃO E POLÍTICA DE RECURSOS
MINERAIS

Pós-Graduação em Geociências
Área de Administração e Política de Recursos Minerais

**O uso da Cokrigagem Co-locada (“Collocated Cokriging”) na integração de dados
químicos e mineralógicos no minério de ferro**

RESUMO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Maurílio Camargos Botelho

Nesta dissertação é apresentada uma técnica de coestimativa - Cokrigagem Co-locada - aplicada à integração de dados mineralógicos e químicos em minério de ferro. Tendo-se como premissa a adoção de um Modelo Markoviano para facilitar o modelamento de covariâncias, o procedimento sugerido consiste na coestimativa da variável mineralógica Goethita - GO com o auxílio da variável química Perda por Calcinação - PPC. A utilização dessa técnica é apoiada em: a) Correlação estatística existente entre as variáveis; b) Abundância de amostras da variável PPC, facilitando o modelamento de sua covariância direta. O método proposto apresenta como principal característica a simplicidade operacional, destacando-se a facilidade de modelamento da covariância direta da variável Goethita através do uso do Modelo Markoviano 2. A técnica foi aplicada em uma jazida de minério de ferro do Quadrilátero Ferrífero e, considerando-se que a proporção de Goethita afeta sobremaneira os processos de cominuição, aglomeração e redução, presta-se a auxiliar na caracterização do minério de ferro, seja na fase de avaliação de reservas, seja na fase do controle de lavra.



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS / DEPARTAMENTO DE
ADMINISTRAÇÃO E POLÍTICA DE RECURSOS
MINERAIS

Pós-Graduação em Geociências
Área de Administração e Política de Recursos Minerais

**The use of Collocated Cokriging for integrating mineralogical and chemical data in
iron ore**

ABSTRACT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Maurílio Camargos Botelho

This dissertation presents a coestimation technique - Collocated Cokriging – applied for integrating mineralogical and chemical data in iron ore. Adopting, as an assumption, a Markov Model for making the covariances modelling easier, the suggested procedure is made up of coestimating the mineralogical variable Goethite having as auxiliary variable Loss on Ignition. The application of this technique is based on: a) The existing statistical correlation between the two variables; b) Existence of a large amount of Loss on Ignition samples, making its direct covariance modelling easier. The proposed method has, as the most important characteristic, operational simplicity, emphasizing the easily direct covariance modelling of Goethite through the Markov Model 2. The technique was applied in an iron ore deposit located in Iron Quadrangle. Considering that the proportion of Goethite affects the gridding, pelletizing and reduction processes, the method is suitable for characterizing the iron ore in both resources modelling and mining control phases.

Capítulo 1

1.1. Introdução

O ganho de produtividade nos processos siderúrgicos, seja nas etapas de aglomeração ou de redução, vem sendo perseguido continuamente como forma de melhoria de competitividade e consequente sobrevivência das empresas. A indústria siderúrgica tem feito constantes ajustes nos processos para melhorar os índices de competitividade, seja através da melhoria da qualidade dos insumos, dos materiais refratários, da eficiência energética, da otimização da manutenção etc.

A indústria de mineração em geral, sendo a principal fornecedora dos insumos para os processos de redução, incluindo o material para carga metálica (minério de ferro) e fundentes (Calcários e Serpentinóis), tem que contribuir no fornecimento de matérias primas dentro de rígidas especificações técnicas que atendam aos ganhos de produtividade na siderurgia. A indústria de minério de ferro, maior fornecedora em termos de volumes e custos envolvidos, tem um grande peso na produtividade da siderurgia, sendo cada vez mais exigida a fornecer minério “sob medida” em termos granulométricos, químicos, mineralógicos e texturais.

De tal maneira, o conhecimento das características mineralógicas e texturais do minério de ferro é de suma importância, haja visto que estas características afetam sobremaneira os processos de aglomeração e redução. A produtividade da sinterização é influenciada diretamente pela porcentagem de minério poroso presente na carga utilizada. As características de resistência mecânica das pelotas são afetadas à medida que varia a quantidade de minério especular na carga de alimentação da pelotização.

Com o objetivo de se estimar as características mineralógicas e texturais do minério de ferro, seja na fase de estimativa de reservas, seja na etapa de controle diário de lavra, pode-se lançar mão de ferramentas qualitativas e/ou quantitativas.

Na prática atual da indústria de minério de ferro, a técnica mais tradicional é basicamente qualitativa, não envolvendo modelamento matemático das variáveis envolvidas. Consiste em se fazer o modelamento geológico – tipológico a partir de informações obtidas através de mapeamentos de superfície e resultados de furos de sonda desenhados em seções verticais e horizontais. A partir desta interpretação é feito um modelo que serve tanto para estimativa de reservas quanto para controle diário de lavra.

1.2. Objetivos

Esta dissertação visa, no âmbito geral, descrever e avaliar a eficiência da técnica de coestimativa geoestatística chamada de Cokrigagem Co-locada¹ (CCKO), originalmente proposta para a integração de dados primários (porosidade) e secundários (impedância) espaciais na indústria de petróleo.

De maneira específica será apresentada a implementação da Cokrigagem Co-locada (CCKO) em uma jazida de minério de ferro, com o intuito de se integrar a variável mineralógica Goethita (GO) com a variável química Perda por Calcinação (PPC), utilizando-se modelos baseados em filtragem de dados como forma de simplificar o modelamento das covariâncias. Posteriormente, estes resultados serão comparados à Krigagem Ordinária (KO) da GO para medir a eficiência do método.

1.3. Relevância do trabalho

A obtenção de um modelo integrado entre química e mineralogia justifica-se à medida que pode promover ganhos na melhoria da previsibilidade, e consequente produtividade, do minério de ferro nos processos de cominuição, concentração, aglomeração e redução. LIBANEO *et al*

¹ CABRAL (1998) utilizou o termo “Co-locada” como tradução de “Collocated Cokriging”

(2001) destacam a influência da variação da mineralogia no rendimento desde o pelotamento (aglomeração) até os reatores de redução.

A Figura 1.1 ilustra a sequência lógica para a obtenção de um modelo químico mineralógico integrado completo. No primeiro bloco, concentra-se a obtenção dos dados, via coleta de dados espaciais através de furos de sonda e de perfuratrizes e informações geológicas, tais como mapeamento superficial e interpretação de seções verticais e horizontais. No segundo bloco, concentra-se a parte de tratamento de dados e análise geoestatística com ênfase para os métodos de coestimativa. No último bloco, de posse das coestimativas químicas e mineralógicas, é possível classificar os blocos de formação ferrífera previamente estimados quimicamente de acordo com os principais tipos mineralógicos.

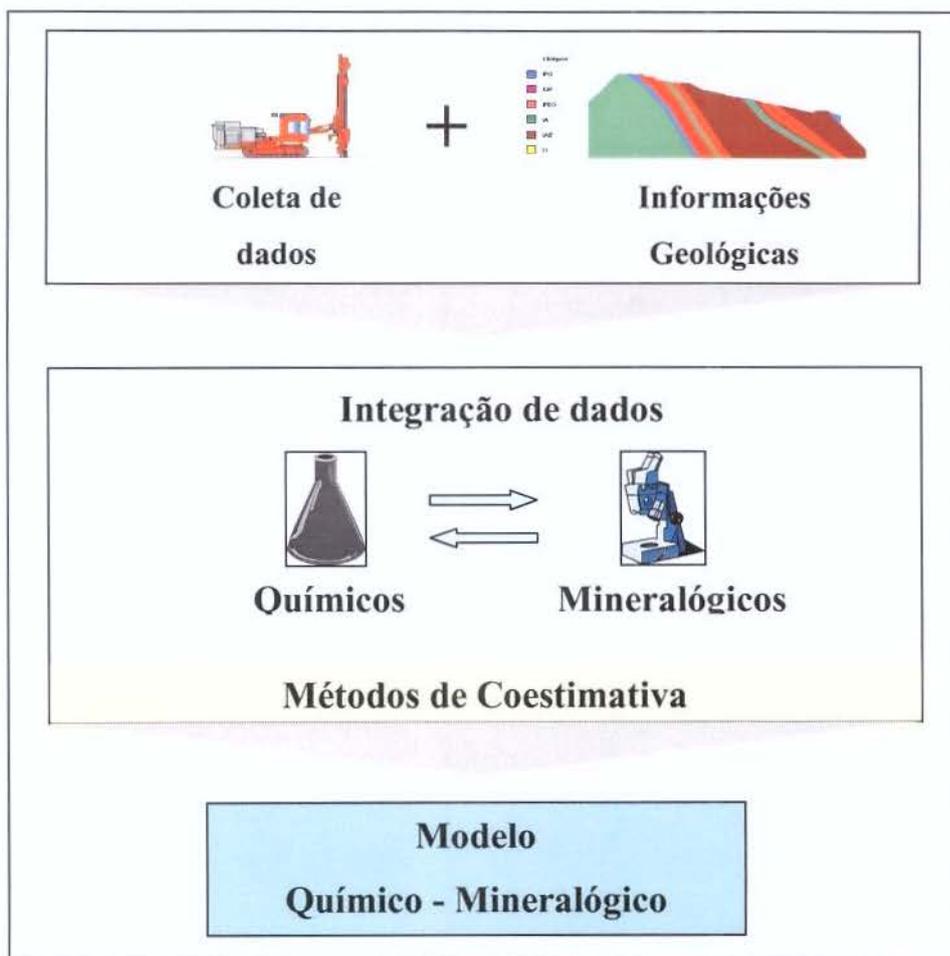


Figura 1.1: Sequência para obtenção de Modelo Químico - Mineralógico

A aplicação do método proposto (CCKO) para as duas variáveis GO e PPC foi definida em função de que (i) estas têm um coeficiente de correlação relativamente elevado (condição necessária para a aplicação dos modelos baseados em filtragem de dados), originado pelo fato que existe uma forte relação física: a Goethita é um mineral hidratado e a medida de Perda por Calcinação refere-se justamente à evaporação de moléculas de água que provocam perda de massa de uma determinada amostra de minério, quando esta é submetida a uma temperatura de aproximadamente 1000° C. Adicionalmente (ii), segundo LIBANEO *et al* (2001), a porcentagem de GO nos minérios tem diversas implicações geosiderúrgicas, destacando-se a importância direta no consumo de energia durante a cominuição, influência na eficácia da flotação e possibilidade de conferir diferentes graus de redutibilidade das pelotas, dependendo de sua proporção.

Uma vez validada a eficiência do método proposto (CCKO), poderá ser feita sua indicação como um método alternativo para realizar a classificação mineralógica parcial dos blocos de formação ferrífera estimados quimicamente. Assim será dada uma importante contribuição para a obtenção de um modelo integrado parcialmente, não atingindo-se, todavia, um modelo integrado completo.

1.4. Metodologia

Para o cumprimento dos objetivos propostos, será necessário seguir a seguinte metodologia, que inclui: (i) revisar os conceitos teóricos sobre os métodos geoestatísticos de coestimativa, enfatizando a Cokrigagem Co-locada (CCKO), (ii) compilar os dados geológicos e amostrais da área em questão, em especial do banco de dados de variáveis químicas e mineralógicas, (iii) implementar a Krigagem Ordinária (KO) da variável mineralógica GO e da variável química PPC, (iv) implementar a Cokrigagem Co-locada (CCKO) da variável mineralógica GO, utilizando-se a variável PPC como informação secundária e (v) comparar os resultados da GO obtidos através da Krigagem Ordinária e da Cokrigagem Co-locada.

(i) Foi feita a revisão bibliográfica completa da CCKO, destacando-se a aplicação de modelos covariância baseados em hipóteses Markovianas e as situações e condições em que sua consideração é possível;

(ii) Procedeu-se a uma extensa compilação dos dados amostrais da área onde, a partir de análises de dispersão (não explicitadas neste texto), definiu-se a priorização das variáveis GO e PPC como as mais viáveis para se provar a hipótese defendida no item 1.2;

(iii) Caracterizou-se a variabilidade espacial e procedeu-se a estimativa por Krigagem Ordinária da variável mineralógica GO e da variável química PPC, haja visto que estas duas estimativas tem funções primordiais na aplicação da CCKO, a saber: a estimativa da GO servirá como base de comparação para a eficiência do método proposto. A estimativa do PPC será fundamental para se ter a variável secundária em todos os nós do grid, condição indispensável à aplicação da CCKO;

(iv) Descreveu-se os aspectos concernentes à aplicação da CCKO na sua situação original e também as adaptações necessárias à implementação da CCKO neste estudo de caso. Em seguida modelou-se a covariância da GO através do uso da hipótese do MM2, haja vista a abundância da variável primária PPC, de mais fácil modelamento direto. Por fim, implementou-se a coestimativa da variável GO utilizando-se o método CCKO com a consideração da variável química PPC como informação secundária;

(v) Comparou-se os resultados de GO obtidos por meio da CCKO com aqueles obtidos pela KO, utilizando-se para isso três formas de comparação: análise dos parâmetros estatísticos resultantes, verificação das imagens obtidas através de um banco de lavra e cálculo das funções de recuperação, que indicam as perdas, nos dois métodos, provenientes da seleção errônea de blocos de lavra. Por último, discorreu-se sobre as limitações do método proposto, assim como sugeriu-se uma linha de futuros trabalhos.

1.5. Organização desta dissertação

Esta dissertação está organizada em 5 capítulos que abordam aspectos teóricos e práticos relativos à integração de dados mineralógicos (primários) e químicos (secundários):

O Capítulo 2 traz uma revisão bibliográfica sobre métodos de co-estimativas, em especial sobre a Cokrigagem Co-locada, enfatizando a razão de seu surgimento, aplicações típicas e restrições ao uso.

O Capítulo 3 apresenta a caracterização completa dos dados para o estudo de caso, incluindo informações gerais sobre a área considerada, assim como a implementação da Krigagem Ordinária para a variável química PPC e mineralógica GO.

O Capítulo 4 faz a implementação da Cokrigagem Co-locada da variável mineralógica GO tendo como variável secundária a variável química PPC. Detalha as modificações que se fizeram necessárias para a implementação deste estudo de caso.

O Capítulo 5 faz uma comparação dos resultados obtidos através dos dois métodos, KO e CCKO. Finalmente, são feitas conclusões acerca da eficiência da CCKO e sugestões para trabalhos posteriores.

Capítulo 2

Este capítulo procura mostrar, através de uma revisão bibliográfica detalhada, a importância do surgimento do método de Cokrigagem Co-locada (CCKO), que vem a ser uma simplificação da Cokrigagem Ordinária tradicional. Suas particularidades e hipóteses adotadas para a simplificação do modelo de covariância são especialmente abordadas.

2.1. Introdução

No estudo de fenômenos regionalizados, em particular o de mineralizações, é muito comum que os depósitos sejam caracterizados por mais de uma variável de interesse. Como exemplos mais comuns, onde há interesse econômico em dois ou mais minerais, pode-se citar associações de Ouro e Prata e depósitos porfíricos polimetálicos de Cobre, Chumbo e Zinco. Também no caso do minério de ferro deseja-se estimar não só o conteúdo de Fe metálico em uma determinada massa de minério, mas também os teores dos contaminantes.

A Cokrigagem, tal como foi proposta por JOURNAL (1978), constitui-se em um método de coestimativa que, explorando a correlação espacial cruzada geralmente existente entre duas ou mais variáveis, minimiza a variância do erro de estimativa das variáveis envolvidas. É de especial interesse para prover estimativas com precisão aceitável para variáveis que foram sub-amostradas em relação a uma outra variável também presente num mesmo domínio (caso de heterotopia).

Considerando que as coregionalizações são comuns, tanto na indústria mineral quanto na área petrolífera, a aplicação da cokrigagem na integração de dados primários e secundários seria de grande utilidade e interesse. Na prática sua aplicação apresenta dificuldades operacionais, pouca flexibilidade e, em algumas situações, até problemas de instabilidade matemática.

D'ABBADIA (1999) ressalta como principais restrições da utilização da cokrigagem, a necessidade do uso de variogramas proporcionais ao mesmo modelo básico e o uso de mesmas

vizinhanças de estimativa para as diversas variáveis em estudo. Ou seja, o uso da cokrigagem é restritivo ao considerar que as diversas variáveis têm as mesmas direções de anisotropias e idênticos padrões de variabilidade.

GOOVAERTS (1997) relata problemas de instabilidade nos casos onde a variável secundária é muito mais densamente amostrada que a variável primária. Nessa situação a correlação entre os dados secundários é muito maior que a correlação entre os dados primários distantes, causando instabilidades na resolução do sistema de cokrigagem.

Diante de problemas práticos de implementação, surgiu uma simplificação da Cokrigagem que permite, com algumas limitações, integrar dados primários e secundários com mais flexibilidade e facilidade de inferência dos modelos de covariância eliminando, adicionalmente, os problemas de instabilidade matemática - XU *et al apud* WACKERNAGEL (1995).

2.2. Efeitos da Cokrigagem tradicional em malhas densamente amostradas

Segundo WACKERNAGEL (1995), uma situação particular encontrada na prática é o caso da heterotopia total, quando uma variável de interesse $Z(x)$ (primária) é conhecida em apenas alguns poucos pontos e a variável secundária $S(x)$ é conhecida em todo o domínio, no caso em todos os nós do grid a ser estimado.

Esse caso é comum na indústria de petróleo, onde tem-se um extenso grid de informações sísmicas (secundárias), que são de baixo custo de obtenção e alguns poucos poços, que têm um elevado custo de perfuração. Também ocorre com frequência na indústria de mineração, onde é comum ter-se uma extensa malha de informações secundárias provenientes de furos de perfuratriz (*blastholes*), que têm baixo custo de perfuração, conjugada com uma malha mais esparsa de furos de sonda (*drillholes*), que têm custo de perfuração de 8 a 10 vezes superior aos furos de perfuratriz.

A Figura 2.1 ilustra hipoteticamente essas situações cujo objetivo principal é a integração de dados primários obtidos nas amostragens dispendiosas, com dados secundários provenientes de informações mais abundantes, as vezes menos precisos.

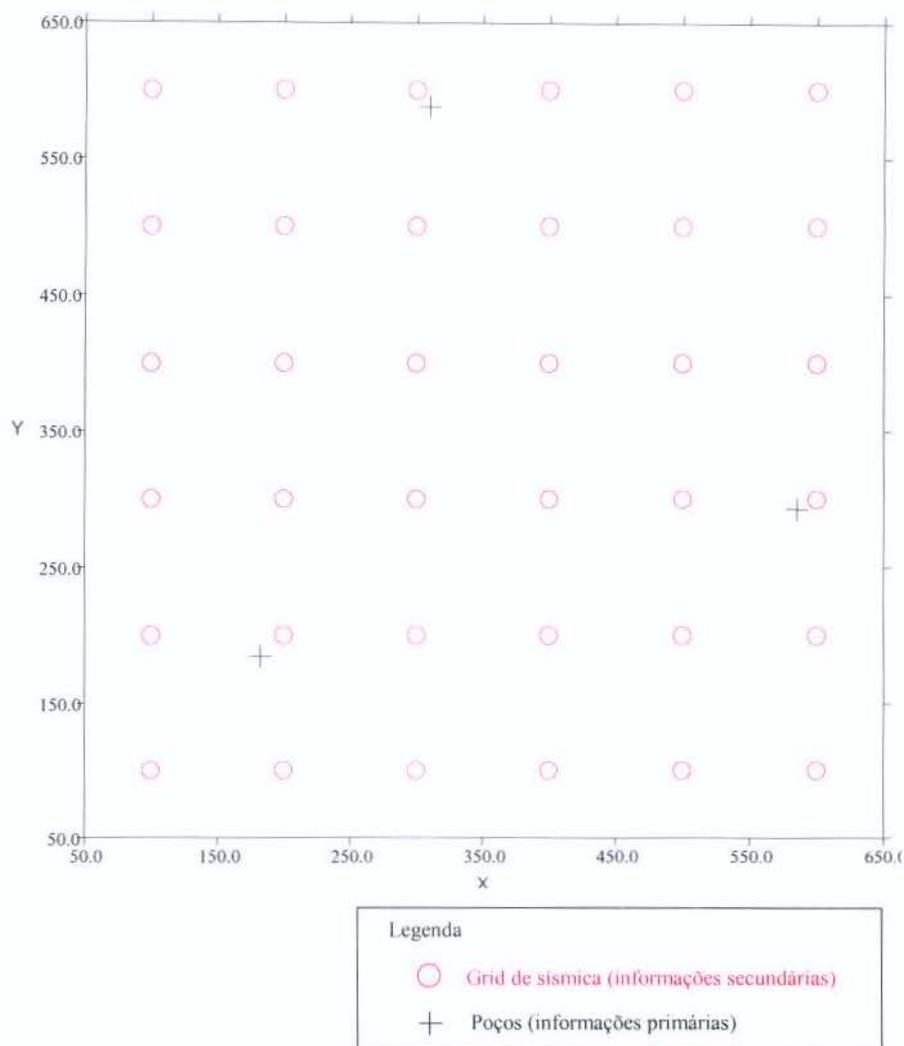


Figura 2.1: Grid hipotético ilustrando integração de dados primários com dados secundários densamente amostrados

Segundo GOOVAERTS (1997), nos casos onde a variável secundária é muito mais densamente amostrada que a variável primária, ocorrem problemas de instabilidade matemática, que dificultam a aplicação da Cokrigagem, ao mesmo tempo que ocorre uma “filtragem” de dados, possibilitando a adoção de hipóteses simplificadoras para os modelos de covariância.

O autor relata que a matriz M do lado direito do sistema de cokrigagem² (matriz das covariâncias diretas e cruzadas entre os dados e a variável a estimar no ponto u), torna-se instável porque a correlação entre os dados secundários redundantes (ou em maior quantidade), é muito maior que a correlação entre os dados primários distantes.

Do ponto de vista da simplificação, os dados secundários que estão muito próximos, ou mesmo co-locados com os dados primários desconhecidos, tendem a “filtrar” a influência dos dados secundários mais distantes, possibilitando a adoção de hipóteses comuns aos processos ditos Markovianos.

Com o intuito de se quantificar o aumento dos pesos das variáveis secundárias na estimativa das variáveis primárias, GOOVAERTS (1997) estudou a influência da densidade e configuração das amostras secundárias na cokrigagem simples de uma variável primária. A contribuição relativa das informações secundárias foi medida pela relação da soma dos valores absolutos dos pesos secundários e primários, dada pela seguinte equação:

$$\psi(u) = \frac{\sum_{\alpha_2=1}^{n_2(u)} |\lambda_{\alpha_2}^{SCK}(u)|}{\sum_{\alpha_1=1}^{n_1(u)} |\lambda_{\alpha_1}^{SCK}(u)|} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad 2.1$$

Onde:

u é o ponto a ser estimado;

λ_{α_1} são os pesos da variável primária;

λ_{α_2} são os pesos da variável secundária;

σ_2 é a variância da variável secundária;

σ_1 é a variância da variável primária.

² Detalhes do sistema de Cokrigagem Ordinária podem ser vistos no Apêndice A.

No estudo de GOOVAERTS (1997) foram consideradas 3 diferentes configurações de dados, cujas características são sumarizadas abaixo e ilustradas na Figura 2.2, que foi modificada do referido autor:

Configuração 1: ambos os dados primários e secundários estão posicionados isotopicamente em 4 locações distanciadas de uma unidade do ponto a ser estimado;

Configuração 2: além dos 4 dados secundários posicionados isotopicamente com os dados primários (configuração 1), são adicionados mais 4 dados secundários a 0,5 unidades do ponto a ser estimado;

Configuração 3: além dos 4 dados secundários posicionados isotopicamente com os dados primários (configuração 1), é adicionado apenas mais 1 dado secundário co-locado com o ponto a ser estimado, totalizando 5 dados secundários.

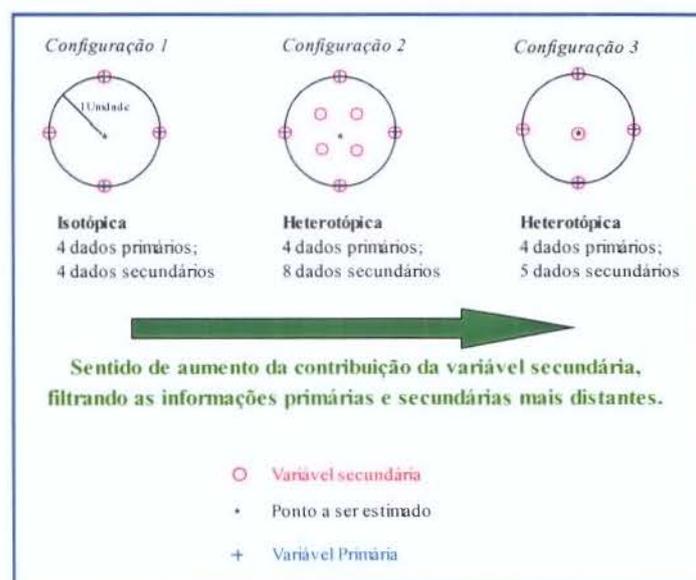


Figura 2.2: Contribuição dos pesos na cokrigagem simples em três diferentes configurações de dados da variável secundária.

Os testes foram feitos variando-se também o coeficiente de correlação estatística entre as variáveis primárias e secundárias para $h=0$. A Figura 3, também modificada de GOOVAERTS

(1997) mostra, para as três configurações, um gráfico com a evolução de $\psi(u)$ quando o coeficiente de correlação estatística (ρ_{12}) varia de 0 a 0,8:

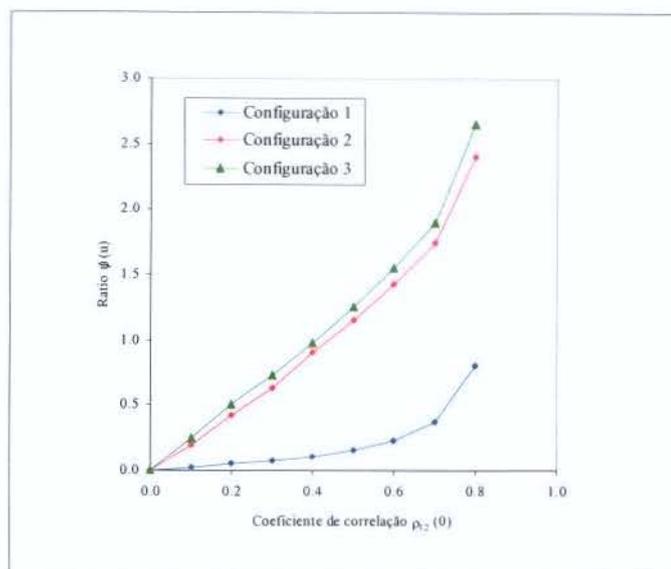


Figura 2.3: Evolução de $\psi(u)$ x ρ_{12} para as três configurações de teste.

Como conclusão geral dos testes, GOOVAERTS (1997) ressalta que os resultados mostram que $\psi(u)$ sempre aumenta, para qualquer $\rho_{12} > 0$, quando são adicionadas amostras da variável secundária à configuração originalmente isotópica.

De maneira específica vale notar que apenas 1 dado secundário co-locado tem uma contribuição relativa maior que 4 dados secundários a 0,5 unidades do ponto a ser estimado. Com efeito, dados secundários mais próximos, ou co-locados, “filtram” a influência de dados primários e secundários mais distantes.

As conclusões obtidas formam o arcabouço necessário para a adoção de um método de coestimativa simplificado que utiliza somente o dado co-locado e considera a filtragem de dados co-locados sobre dados mais distantes (hipóteses Markovianas).

2.3. Cokrigagem Co-locada (Collocated Cokriging)

Com o intuito de solucionar os problemas advindos de malhas densamente amostradas e com dados co-locados, uma solução encontrada por XU *et al* apud WACKERNAGEL (1995), consiste na definição de uma estratégia de busca na qual a vizinhança de estimativa da variável secundária é arbitrariamente reduzida a apenas um ponto, ou seja, o ponto mais próximo do ponto u a ser estimado. Dessa maneira, além de se resolver os problemas de instabilidade, reduz-se a influência dos outros dados secundários não tão bem posicionados em relação ao ponto u .

A Figura 2.4 ilustra uma situação hipotética em que apenas o dado secundário co-locado (verde) é considerado na estimativa. Os outros dados secundários presentes no elipsóide de busca (vermelhos) não entram na resolução do sistema de Cokrigagem Co-locada.

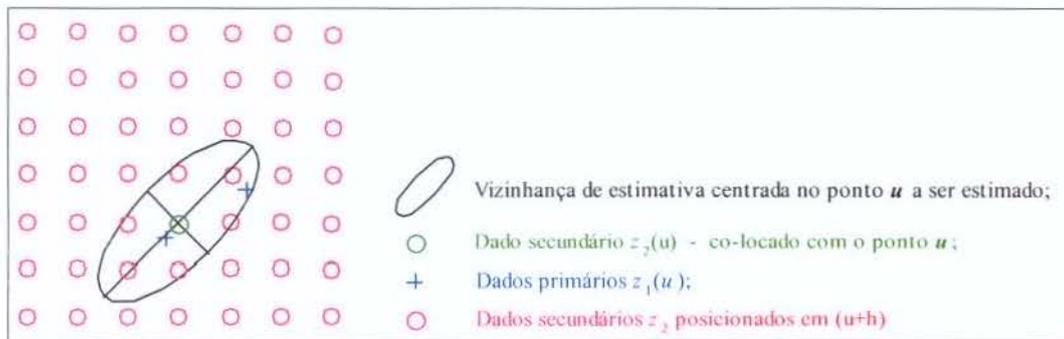


Figura 2.4: Estratégia de busca reduzida ao dado secundário co-locado.

Esta simplificação da cokrigagem, onde somente um dado secundário co-locado é retido, foi denominada por XU *et al* e ALMEIDA apud CABRAL (1998) de Cokrigagem Co-locada (“Collocated Cokriging”).

O estimador da Cokrigagem Co-locada para duas variáveis é uma combinação linear entre os dados da variável primária e único dado secundário. Pode ser escrito como:

$$Z_1^*(u) = \sum_{a1}^{n1(u)} \lambda_{a1}^{CKO}(u) \cdot Z_1(u_{a1}) + \lambda_2(u) \cdot [Z_2(u) - m_2 + m_1] \quad 2.2$$

Onde:

$Z_l^*(u)$ = estimativa da V.A Z_l no ponto $u(x,y,z)$ a ser estimado;

$Z_1(u_{\alpha 1})$ = V.A primária;

$Z_2(u)$ = V.A secundária;

$\lambda_{\alpha 1}$ = pesos da variável primária;

$\lambda_{\alpha 2}$ = pesos da variável secundária;

$n_1(u)$ = número de dados (realizações) de Z_1 na vizinhança;

m_1 = média local estacionária da variável primária;

m_2 = média local estacionária da variável secundária.

com a única restrição³ de que a soma dos pesos das variáveis primária e secundária deve ser igual a 1:

$$\sum_{\alpha 1}^{n_1(u)} \lambda_{\alpha 1}(u) + \lambda_{\alpha 2}(u) = 1 \quad 2.3$$

O sistema de Cokrigagem Ordinária Co-locada é escrito, em termos de somatórios, da seguinte forma:

$$\begin{cases} \sum_{\alpha 1}^{n_1(u)} \lambda_{\alpha 1}(u) \cdot C_{11}(u_{\alpha 1} - u_{\alpha 1}) + \lambda_2(u) \cdot C_{12}(u_{\alpha 1} - u) + \mu(u) = C_{11}(u_{\alpha 1} - u) \\ \sum_{\alpha 1}^{n_1(u)} \lambda_{\alpha 1}(u) \cdot C_{21}(u - u_{\alpha 1}) + \lambda_2(u) \cdot C_{22}(0) + \mu(u) = C_{21}(0) \\ \sum_{\alpha 1}^{n_1(u)} \lambda_{\alpha 1}(u) + \lambda_{\alpha 2}(u) = 1 \end{cases} \quad 2.4$$

Onde:

u = ponto a ser estimado;

$C_{11}(u_{\alpha 1} - u_{\alpha 1})$ = covariância direta entre os dados da variável primária;

³ Esta é a restrição da Cokrigagem Ordinária “modificada”, proposta por ISAACS and SRIVASTAVA (1989).

- $C_{12}(u_{\alpha 1} - u)$ = covariância cruzada entre os dados da variável primária e o ponto u ;
 $C_{22}(0)$ = covariância direta da variável secundária no ponto u ($h=0$);
 $C_{11}(u_{\alpha 1} - u)$ = covariância direta entre os dados da variável primária e o ponto u ;
 $C_{21}(0)$ = covariância cruzada no ponto u ($h=0$);
 $\mu(u)$ = Multiplicador de Lagrange;
 $n_1(u)$ = número de dados (realizações) da variável primária na vizinhança;
 $\lambda_{\alpha 1}$ = pesos da variável primária;
 $\lambda_{\alpha 2}$ = pesos da variável secundária.

Sob a forma matricial, o sistema de Cokrigagem Ordinária Co-locada pode ser escrito na forma das três matrizes $[K]$, $[\lambda]$, e $[M]$, a saber:

$$\begin{matrix} [K] & \cdot & [\lambda] & = & [M] \\ \begin{bmatrix} C_{11}(u_{\alpha 1} - u_{\alpha 1}) & C_{12}(u_{\alpha 1} - u) & 1 \\ C_{21}(u - u_{\alpha 1}) & C_{22}(0) & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} \lambda_{\alpha 1} \\ \lambda_{\alpha 2} \\ \mu \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} C_{11}(u_{\alpha 1} - u) \\ C_{21}(0) \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad 2.5$$

GOOVAERTS *apud* CABRAL (1998) destaca, em comparação com outros sistemas de Cokrigagem, as seguintes vantagens e desvantagens:

Vantagens

- Evita a instabilidade da matriz M do lado direito do sistema de cokrigagem, causada por dados secundários redundantes;
- É computacionalmente mais rápida, pois o sistema a resolver é menor;
- A inferência e modelagem das funções covariância são bem menores, especialmente se o modelo Markoviano for adotado.

Desvantagens

- A variável secundária deve ser conhecida em todos os pontos onde se pretende fazer uma estimativa;

- As informações dos dados secundários não co-locados nos pontos onde se pretende fazer a estimativa são ignoradas.

2.4. Modelos de covariância utilizados na Cokrigagem Co-locada

A resolução do sistema de Cokrigagem Co-locada não necessita da inferência e modelamento da covariância direta da variável secundária $C_{22}(h)$, exceto para $h=0$. Obviamente, requer ainda a inferência e modelagem da covariância direta da variável primária $C_{11}(h)$ e da covariância cruzada entre as variáveis primária e secundária $C_{12}(h)$, como pode ser lembrado através da equação 2.5:

$$\begin{bmatrix} C_{11}(u_{\alpha 1} - u_{\alpha 1}) & C_{12}(u_{\alpha 1} - u) & 1 \\ C_{21}(u - u_{\alpha 1}) & C_{22}(0) & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{\alpha 1} \\ \lambda_{\alpha 2} \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(u_{\alpha 1} - u) \\ C_{21}(0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad 2.6$$

Onde:

- u = ponto a ser estimado;
- $C_{11}(u_{\alpha 1} - u_{\alpha 1})$ = covariância direta entre os dados da variável primária;
- $C_{12}(u_{\alpha 1} - u)$ = covariância cruzada entre os dados da variável primária e o ponto u ;
- $C_{22}(0)$ = covariância direta da variável secundária no ponto u ($h=0$);
- $C_{11}(u_{\alpha 1} - u)$ = covariância direta entre os dados da variável primária e o ponto u ;
- $C_{21}(0)$ = covariância cruzada no ponto u ($h=0$);
- $\mu(u)$ = Multiplicador de Lagrange;
- $n_1(u)$ = número de dados (realizações) da variável primária na vizinhança;
- $\lambda_{\alpha 1}$ = pesos da variável primária;
- $\lambda_{\alpha 2}$ = pesos da variável secundária.

Para a obtenção dos modelos de covariância (diretos e cruzados) necessários à resolução do sistema de Cokrigagem Co-locada, há três possibilidades, de acordo com as hipóteses consideradas:

1ª Possibilidade: construção de um modelo linear de coregionalização (LMC- Linear Model of Coregionalization) JOURNEL (1978), que assume a hipótese de que os modelos criados por combinações lineares são proporcionais a um mesmo modelo básico autorizado;

2ª Possibilidade: construção de um modelo Markoviano que requer somente a inferência e modelagem da covariância direta da variável primária e o uso do coeficiente de correlação estatística entre as variáveis primária e secundária. Assume a hipótese de que um dado primário co-locado “filtra” a influência de valores da variável secundária posicionados a uma distância $u + h$ do ponto a ser estimado;

3ª Possibilidade: construção de um modelo Markoviano que requer somente a inferência e modelagem da covariância direta da variável secundária e o uso do coeficiente de correlação estatística entre as variáveis primária e secundária. Assume uma hipótese simétrica àquela da 2ª possibilidade. Neste caso, a premissa é que o dado secundário co-locado “filtra” a influência de outros dados secundários distanciados de $u + h$ sobre a variável primária.

As três possibilidades, suas hipóteses, restrições, vantagens e desvantagens serão discutidas com mais detalhes nos itens que se seguem.

2.4.1. Modelo linear de coregionalização

Segundo SHMARYAN *et al* (1998), a abordagem mais tradicional para assegurar que as covariâncias diretas e cruzadas sejam autorizadas ou seja, produza variâncias de combinações lineares não negativas, constitui-se em construir uma matriz de covariâncias utilizando-se um mesmo conjunto de modelos básicos autorizados para as covariâncias diretas e cruzadas de todas as variáveis envolvidas.

Um modelo completo de coregionalização, por exemplo um modelo linear de coregionalização, requer a inferência e o modelamento de $N_v(N_v+1)/2$ variogramas diretos e cruzados, sendo N_v o número de variáveis. Dessa forma, em um caso de duas variáveis, seria

necessário a inferência e o modelamento de 3 variogramas, sendo dois diretos (1 para cada variável), e um cruzado (entre as variáveis primária e secundária). A Figura 2.5 mostra a necessidade de inferência e modelamento no caso de um LMC para 2 variáveis.

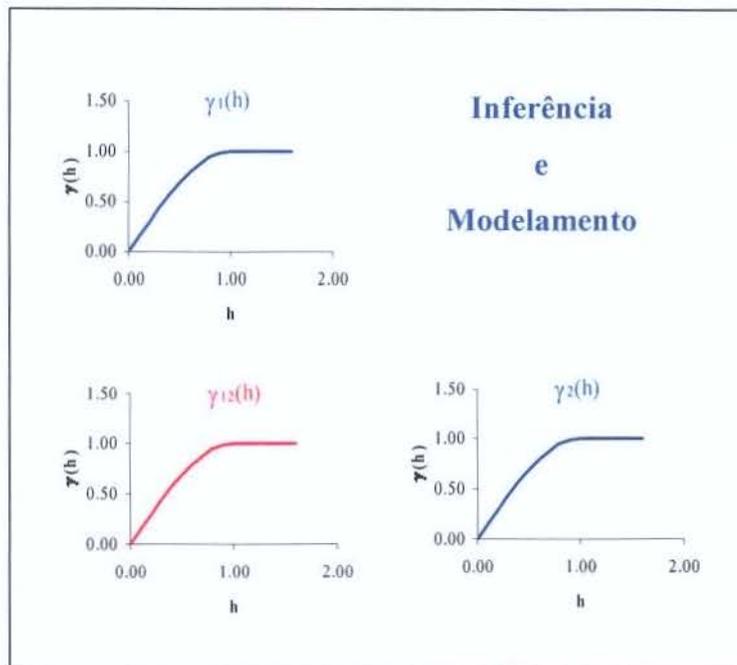


Figura 2.5: Necessidade de inferência e modelamento para modelo linear de coregionalização.

Segundo JOURNAL (1998), a construção do modelo linear de coregionalização é o maior obstáculo para o uso extensivo da cokrigagem na integração de dados secundários pois, para N_v variáveis, deve-se criar uma matriz $N_v \times N_v$ de covariâncias diretas e cruzadas que seja semi-positiva definida (veja detalhes de construção no Apêndice B).

2.4.2. Modelo Markoviano 1 – MM1

JOURNAL (1998) cita a adoção de modelos Markovianos, baseados em hipóteses de filtragem de dados, como uma forma de reduzir consideravelmente a inferência estatística em sistemas densamente amostrados em alguma das variáveis, como aquele mostrado na Figura 2.1.

No modelo MM1, a hipótese é de que um dado primário $z_1(u)$ co-locado filtra a influência, em uma variável secundária $Z_2(u)$, de valores da variável secundária z_2 posicionados em $u + h$. A Figura 2.6 apresenta uma configuração hipotética que ilustra essa hipótese de filtragem:

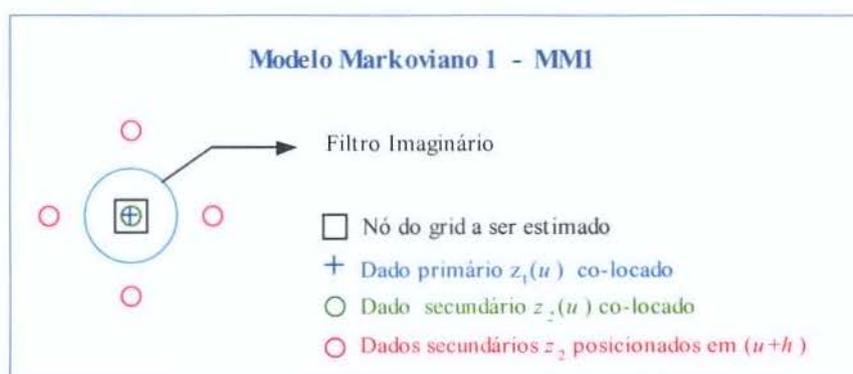


Figura 2.6: Ilustração da hipótese de filtragem considerada no Modelo Markoviano 1

Baseado nesta hipótese, ALMEIDA and JOURNAL *apud* JOURNAL (1998) sugeriu o Modelo Markoviano 1 (MM1) como alternativa para substituir o modelo linear de coregionalização, que pode tornar-se de difícil modelamento nos casos em que uma das variáveis é escassamente amostrada.

O modelo proposto requer somente a inferência e o modelamento da covariância direta da variável primária $Z_1(u)$. O modelamento da covariância cruzada $C_{12}(h)$ é calculado então a partir da multiplicação do coeficiente de correlação estatística $\rho_{12}(0)$ entre os dados primários e os dados secundários co-locados e a covariância direta da variável primária $C_1(h)$. A Figura 2.7 mostra esquematicamente os passos necessários ao modelamento do Modelo Markoviano 1:

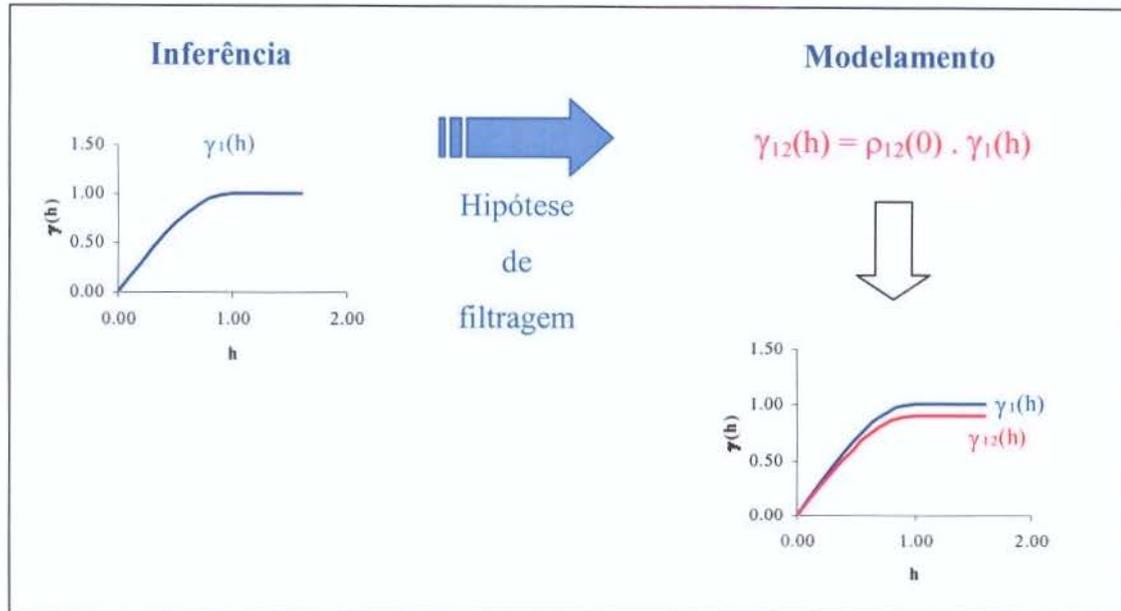


Figura 2.7: Necessidade de inferência e modelamento para modelo Markoviano 1

Assim ALMEIDA *apud* SHMARYAN *et al* (1998) define um modelo simplificado onde a covariância cruzada $C_{12}(h)$ requerida é feita proporcional ao modelo de covariância primária $C_1(h)$:

$$C_{12}(h) = \rho_{12}(0) \times C_1(h) \quad 2.7$$

Onde:

$C_{12}(h)$ = Covariância cruzada das variáveis primária e secundária;

$\rho_{12}(0)$ = Coeficiente de correlação estatística entre as variáveis primária e secundária;

$C_1(h)$ = Covariância direta das variável primária.

2.4.3. Modelo Markoviano 2 – MM2

Segundo SHMARYAN *et al* (1998), em muitas aplicações (por exemplo com dados sísmicos), a variável secundária $z_2(u)$ é definida em um suporte muito maior que a variável $z_1(u)$. Em tais casos a covariância $C_2(h)$ é muito mais contínua que $C_1(h)$ e a covariância cruzada experimental $C_{12}(h)$ tende a refletir a melhor continuidade de $C_2(h)$. Esta constatação fez surgir um modelo alternativo chamado MM2, onde a covariância cruzada $C_{12}(h)$ é feita proporcional à covariância $C_2(h)$:

$$C_{12}(h) = \rho_{12}(0) \times C_2(h) \quad 2.8$$

Onde:

$C_{12}(h)$ = Covariância cruzada das variáveis primária e secundária;

$\rho_{12}(0)$ = Coeficiente de correlação estatística entre as variáveis primária e secundária;

$C_2(h)$ = Covariância direta da variável secundária.

A hipótese no MM2 é de que o dado secundário $z_2(u)$ co-locado filtra a influência, na estimativa de $Z_1(h)$, de quaisquer outros dados secundários posicionados em $u + h$. A Figura 2.8 mostra a configuração de filtragem do MM2, devendo-se ressaltar que esta é simétrica ao MM1, já ilustrado na Figura 2.6:

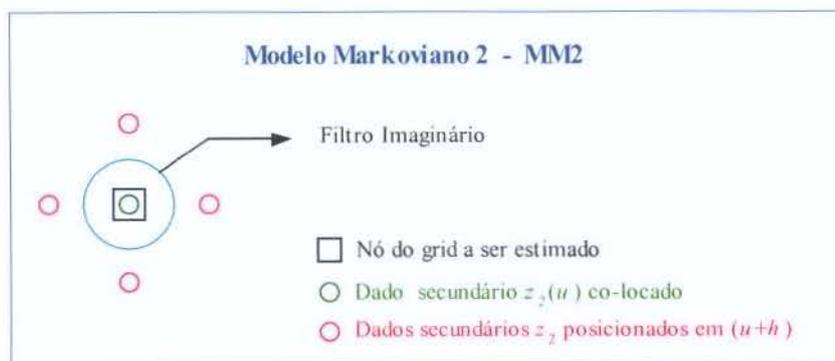


Figura 2.8: Ilustração da hipótese de filtragem considerada no Modelo Markoviano 2

Ao contrário do MM1, este modelo requer a inferência de ambas as covariâncias primária $C_1(h)$ e secundária $C_2(h)$ necessitando, portanto, que seja verificado que as 3 funções de covariância $C_1(h)$, $C_2(h)$ e $C_{12}(h)$ constituem uma matriz de covariâncias permissíveis (detalhes sobre matrizes de coregionalização semi-positiva definidas no Apêndice B).

A partir destas condições JOURNAL (1998) definiu a seguinte sequência para que a relação 2.8 forneça um modelo linear de coregionalização autorizado:

- A covariância secundária $C_2(h)$ é modelada diretamente dos dados secundários, independentemente dos dados primários;
- A covariância cruzada $C_{12}(h)$ é calculada pela relação 2.7;
- A covariância primária $C_1(h)$ é calculada como uma combinação linear de $C_2(h)$ e qualquer outro modelo autorizado de covariância $C_r(h)$:

$$C_1(h) = \rho_{12}^2(o) \times C_2(h) + [1 - \rho_{12}^2(o)] \times \rho_r(o) \quad 2.9$$

Onde:

$\rho_r(h)$ = qualquer modelo autorizado de covariância.

Sendo que o componente adicional $\rho_r(h)$ fornece o grau de liberdade necessário ao modelamento da covariância primária $C_1(h)$.

Ainda segundo SHMARYAN *et al* (1998), o modelo MM2, em oposição ao MM1, dá prioridade ao modelamento da covariância secundária $C_2(h)$, que usualmente é mais fácil de ser modelada em função dos dados secundários serem tipicamente mais abundantes.

Capítulo 3

Neste capítulo será feita uma caracterização da área em estudo, enfatizando os aspectos primordiais à integração dos dados mineralógicos e químicos, tais como a geologia, formas de amostragem e análise das amostras. Adicionalmente serão feitas duas Krigagens Ordinárias (KO), a saber: da variável mineralógica GO, cujos resultados servirão de base para comparação da eficiência do método de CCKO; e da variável química PPC, que servirá como *background* para a implementação da CCKO.

3.1. Introdução

Na SAMARCO já existem procedimentos internos desenvolvidos para se efetuar a estimativa por Krigagem Ordinária (KO) das variáveis mineralógicas, não havendo ainda, um procedimento para co-estimar as variáveis químicas e mineralógicas utilizando-se a Cokrigagem Co-locada (CCKO).

Considerando-se que há abundância, na área em questão, de informações secundárias (químicas) provenientes de uma extensa malha de furos de perfuratrizes, sugere-se que estes dados sejam integrados aos dados provenientes de furos de sonda, onde geralmente são feitas análises mineralógicas.

Para esta integração, que será apresentada no Capítulo 4, faz-se necessária a descrição completa da área, assim como a caracterização estatística e as estimativas por Krigagem Ordinária da GO e do PPC.

3.2. Dados gerais da jazida

3.2.1. Localização geral da área em estudo

A SAMARCO Mineração S/A é uma associação entre a Companhia Vale do Rio Doce – CVRD e a Broken Hill Properties – BHP. É especializada na produção de pelotas de minério de ferro cujos totais atingem cerca de 12 milhões de toneladas por ano.

Os depósitos de minério de ferro do Complexo de Alegria, de propriedade da SAMARCO Mineração, encontram-se situados no município de Mariana, ao norte da cidade de Ouro Preto, estado de Minas Gerais. Estão situados no vértice sudeste do Quadrilátero Ferrífero, mais precisamente nas quadrículas Capanema e Santa Rita Durão, como mostra a Figura 3.1:

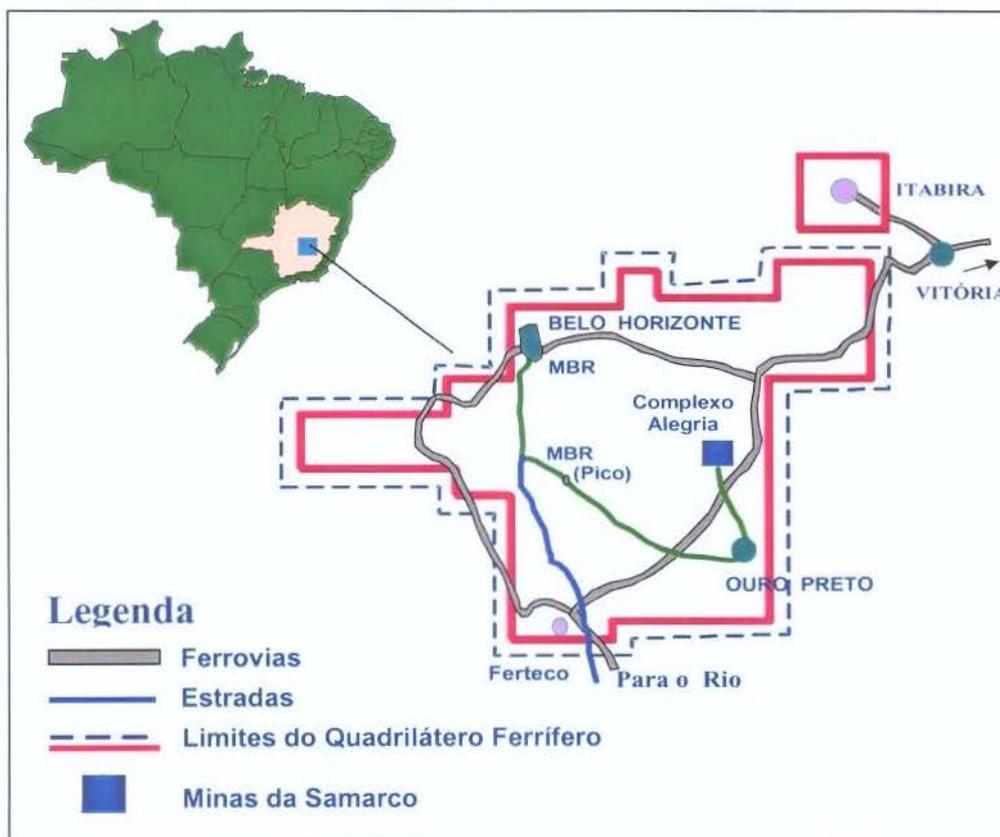


Figura 3.1: Localização geral das áreas da SAMARCO

3.2.2. Localização da área no Complexo Alegria – Minas da Samarco

A área em estudo é denominada Alegria 1/6 e encontra-se inserida no Complexo Alegria, mostrado no mapa da Figura 3.1. Internamente ao complexo a área de Alegria 1/6 situa-se ao Norte, entre os córregos das Almas e João Manuel, sendo contígua à área de Alegria 2. A Figura 3.2 mostra a localização de Alegria 1/6:

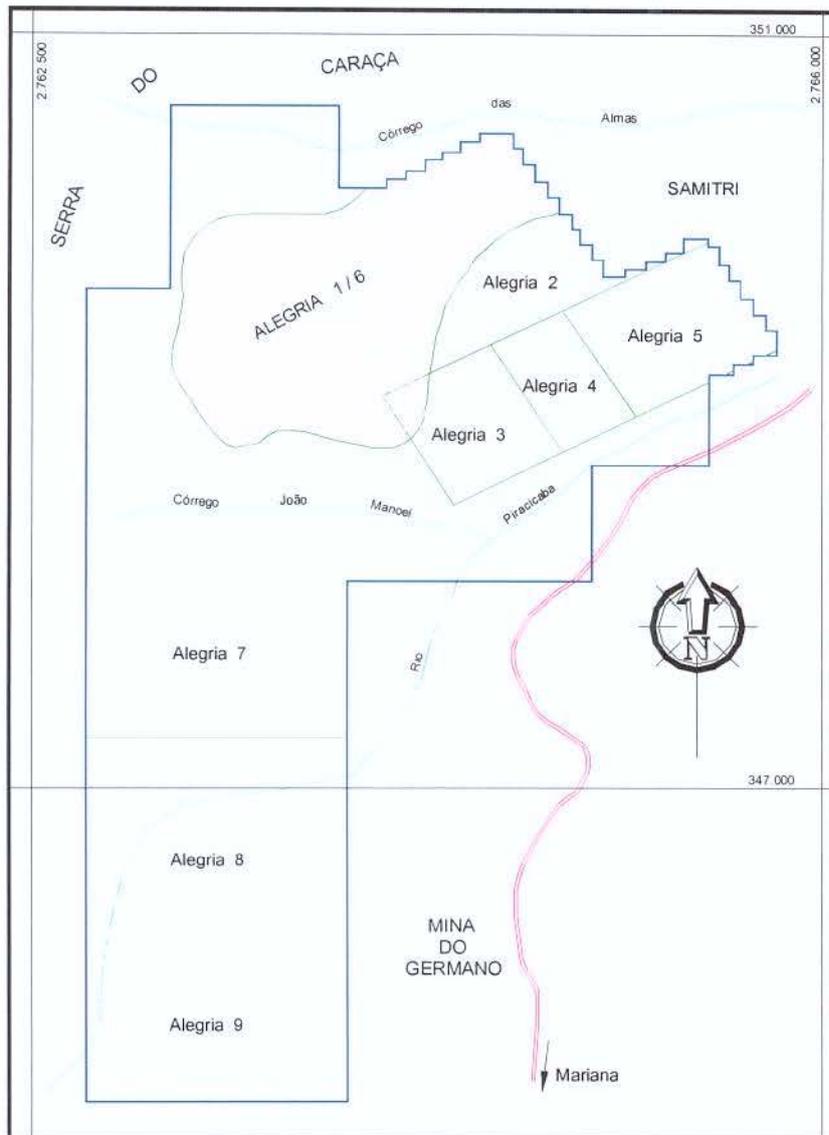


Figura 3.2: Mapa de localização de Alegria 1/6 nas áreas da SAMARCO

3.2.3. Geologia da Jazida

Segundo KANEKO (1999) “a jazida de ferro de Alegria 1/6 faz parte da estrutura tectônica Sinclinal de Alegria, que possui um eixo de direção NW-SE caindo para SE, com a aba sul tendo direção N-S e a aba norte, direção E-W. É constituída por Itabiritos pertencentes à Formação Cauê, Grupo Itabira, Supergrupo Minas, incluindo também corpos hematíticos, rolado, canga e algum solo laterítico”.

Os Itabiritos, ainda de acordo com JAMES e ROSIÈRE & CHEMALE *apud* KANEKO (1999), são definidos pela alternância de bandas de espessura centimétrica à milimétrica, de óxidos e/ou hidróxidos de ferro e minerais leves (micro e mesobandas) e correspondem à fácies óxidos. Com base na composição mineralógica das bandas de minerais leves distinguiu-se três tipos principais de itabiritos:

- Itabirito comum ou normal: composto de bandas alternadas de sílica e óxido de ferro;
- Itabirito Dolomítico: composto de bandas alternadas de carbonatos e óxido de ferro;
- Itabirito Anfibolítico: composto de bandas alternadas de anfibólio e óxidos de ferro;

Em um trabalho enfatizando a definição de tipos de Itabiritos para alimentação da concentração mineral na SAMARCO, HASUI *et al apud* KANEKO (1999) cita que os Itabiritos da jazida em estudo têm, de acordo com a composição mineralógica do mineral-minério predominante, cinco tipos distintos, sendo eles:

- Itabirito Anfibolítico: caracterizado pela presença de pseudomorfos de anfibólio, que exibem hábito prismático a fibroso, coloração marrom-escuro, amarelo e ocre etc;
- Itabirito Martítico: caracterizado por ter hematita porosa (martita) como mineral de ferro dominante, proveniente da transformação da magnetita e apresenta coloração cinza-azulado;
- Itabirito Goethítico: caracterizado pela Goethita como mineral de ferro dominante, a qual provém da magnetita e apresenta coloração cinza escuro a marrom escuro etc;

- Itabirito Especularítico: neste tipo o mineral de ferro predominante é a hematita especular (Especularita), que dá ao minério uma cor cinza-azulada brilhante;
- Itabirito Magnetítico: caracterizado por ter magnetita em maior proporção em relação aos outros minerais de ferro. Pode ser reconhecido em campo pelo alto magnetismo.

Em virtude do enfoque deste trabalho, que é a estimativa e a co-estimativa de dados mineralógicos dentro do corpo de Itabirito, não serão adotadas as classificações tipológicas identificadas por KANEKO (1999), mas somente a classificação litológica. Portanto os Itabiritos Especularítico, Magnetítico, Goethítico e Martítico serão considerados indistintamente como Itabiritos. Apenas o Itabirito Anfibolítico, que é considerado estéril por apresentar alto teor de contaminantes, será apresentado em separado.

Em geral, as camadas apresentam direção N60E, com mergulho variando de 45° a 55° para sudeste (SE). As Figuras 3.3 e 3.4, modificadas de KANEKO (1999), mostram, respectivamente, uma seção vertical típica e um mapa com a geologia superficial de Alegria 1/6 segundo uma classificação apenas litológica.

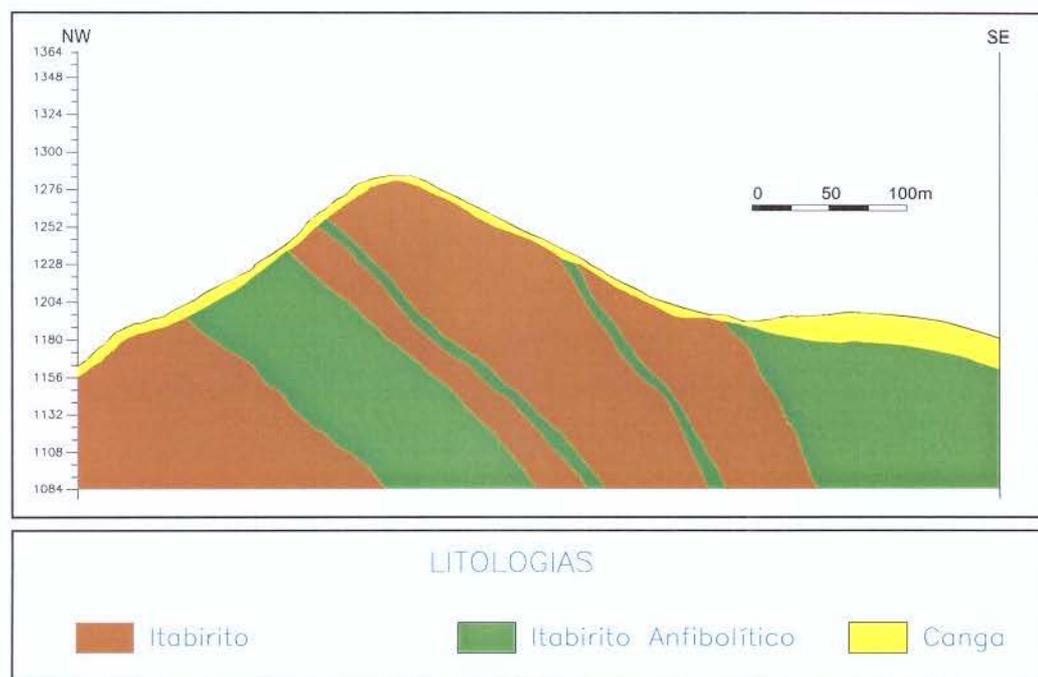


Figura 3.3: Seção vertical típica litológica de Alegria 1/6

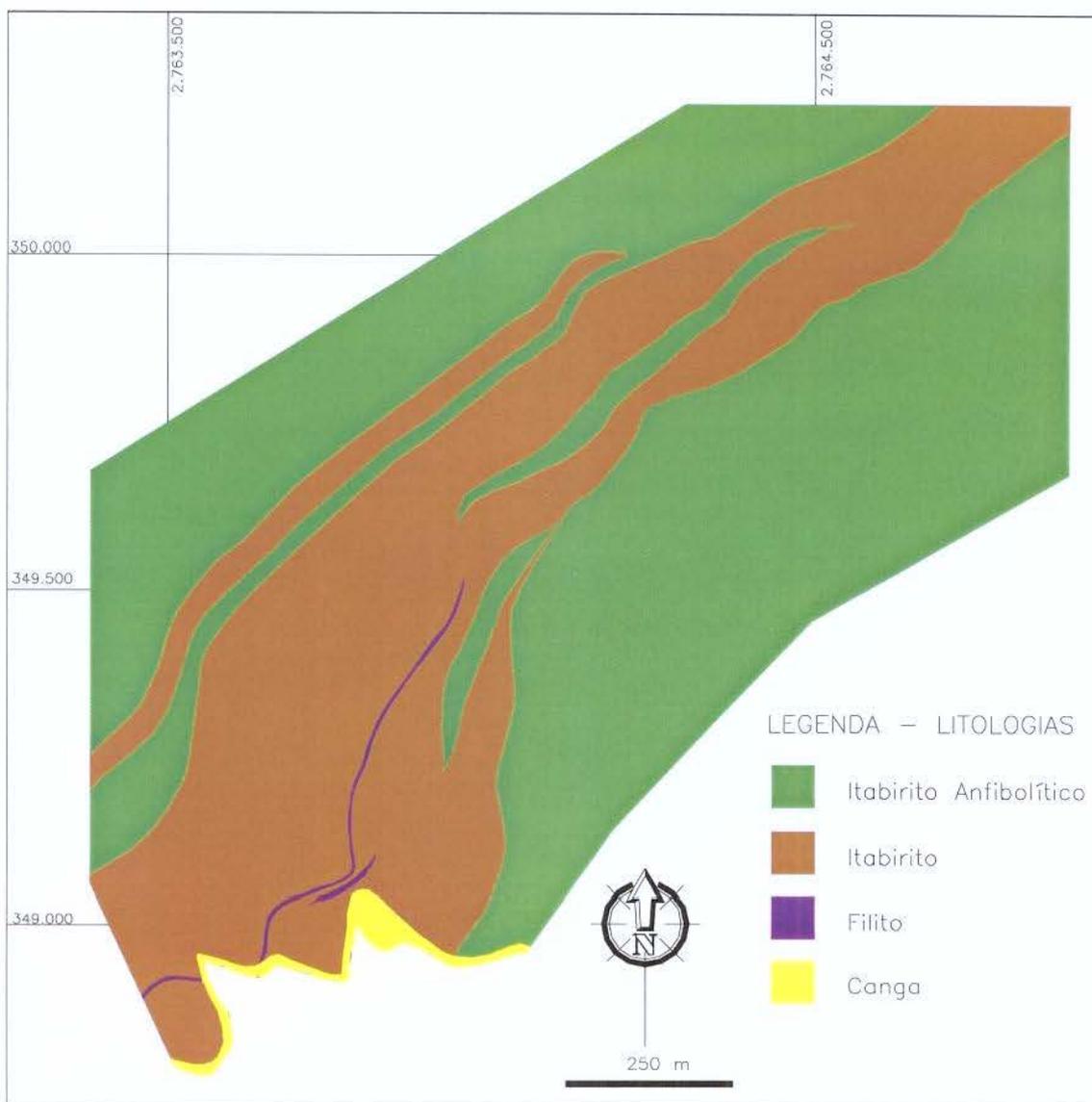


Figura 3.4: Mapa litológico de superfície de Alegria 1/6

3.2.4. Caracterização química e mineralógica

As amostras de formação ferrífera (Itabiritos) retiradas dos testemunhos de sondagem e de perfuratrizes foram processadas em laboratório físico (operações unitárias de cominuição e separação granulométrica) com o objetivo de preparar as amostras para as análises químicas e

análises mineralógicas (seções polidas). A Figura 3.5 mostra o fluxograma de processo do tratamento das amostras:

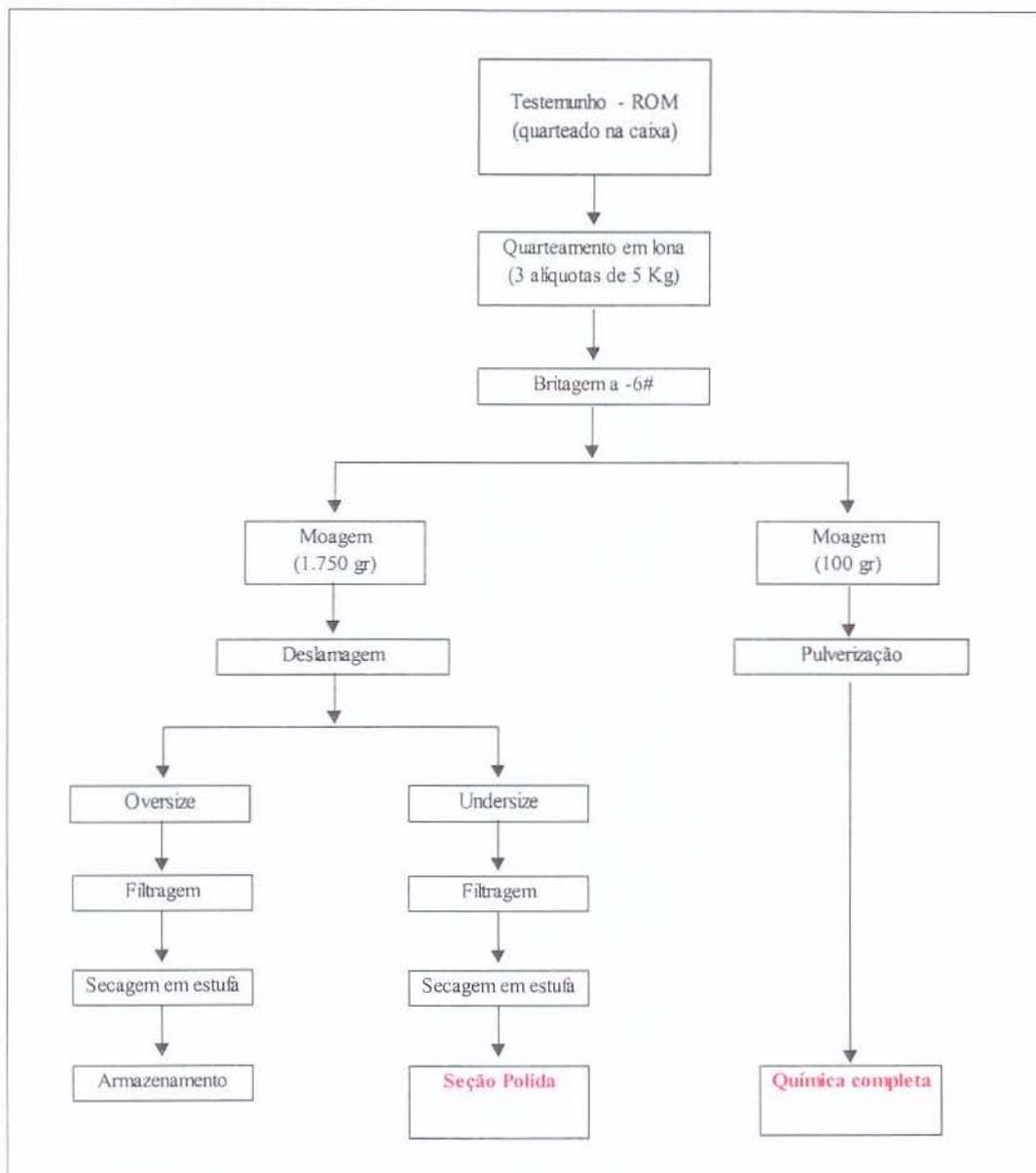


Figura 3.5: Fluxograma de processo da preparação de amostras

Após as etapas de cominuição (Britagem, moagem e pulverização) descritas na Figura 3.5, as amostras destinadas à análise química, são analisadas, por via úmida, segundo os elementos / compostos químicos mais importantes para as rochas Itabiríticas, a saber: Fe, SiO₂, Al₂O₃, P, Mn e PPC.

As amostras destinadas à análise mineralógica, após as operações unitárias descritas no fluxograma da Figura 3.5, deverão ser preparadas em forma de seções polidas que serão analisadas em microscópio petrográfico de luz refletida. Com o objetivo de se minimizar os erros de contagem das partículas, a seção é dividida em 4 partes iguais, de forma que cada parte contenha granulometria semelhante. Segundo KANEKO (1999), este processo, ilustrado na Figura 3.6, permite que a contagem tenha um erro médio de 3%.

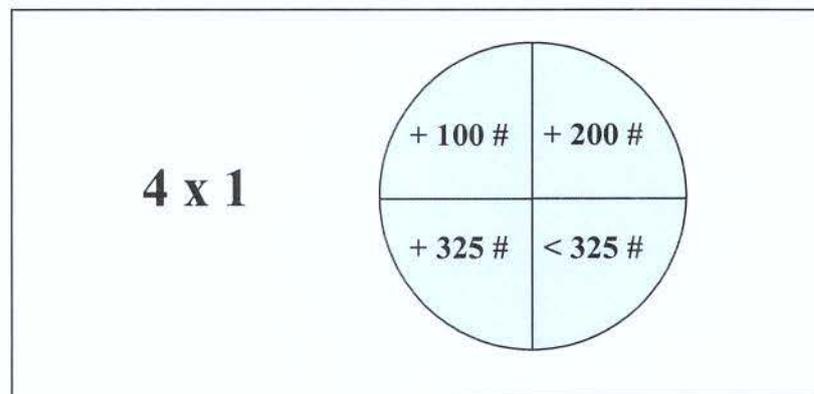


Figura 3.6: Esquema 4x1 de preparação das lâminas de seção polida

No processo de contagem calcula-se a proporção de cada tipo de mineral-minério (HP, HE, MG ou GO), dos minerais de Ganga e também outros que aparecem em menor porcentagem. Através da multiplicação da proporção pela densidade de cada tipo obtém-se a proporção em peso, cuja soma deve aproximar-se de 100%. Neste estudo de caso optou-se por recalculá-los os quatro minerais-minérios de forma que sua soma desse 100%, eliminando os minerais de Ganga e outros.

De posse dos resultados, os dados químicos e mineralógicos alimentam um banco de dados geológico que tem ainda coordenadas espaciais e informações litológicas de todos os intervalos de formação ferrífera. Posteriormente este banco de dados é regularizado em *composites* de 8 metros (que é a altura da bancada de lavra) de maneira que possa ser analisado geostatisticamente em um mesmo suporte.

As 4 Fotos subsequentes mostram fotomicrografias obtidas através das seções polidas. O fundo predominantemente cinza escuro é a matriz da seção polida. Os círculos de detalhe mostram os minerais-minério HE, HP, MG e GO.

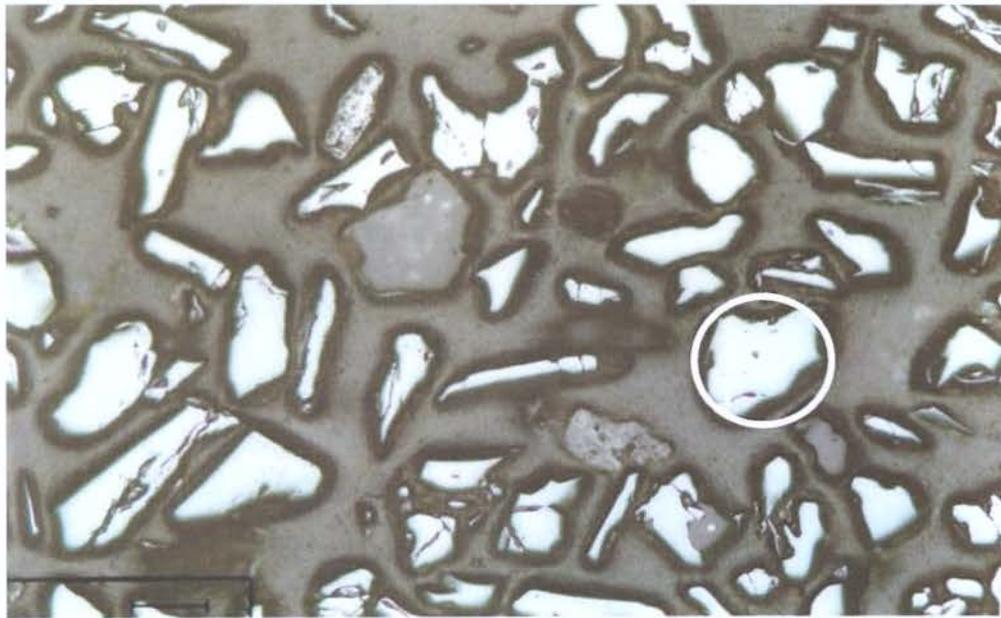


Foto 3.1: Fotomicrografia de Hematita Especular (HE)

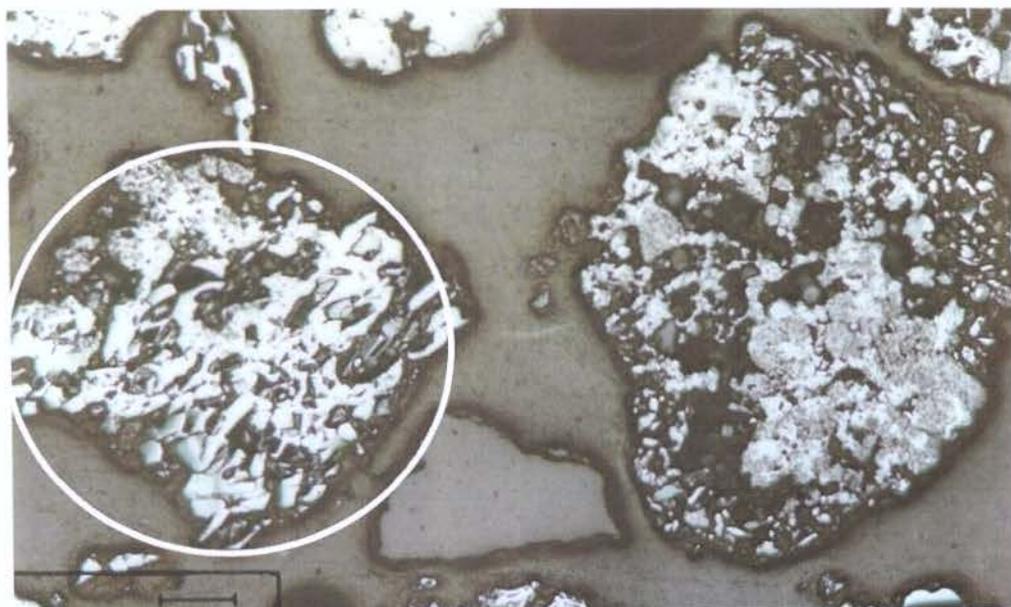


Foto 3.2: Fotomicrografia de Hematita Porosa (HP)

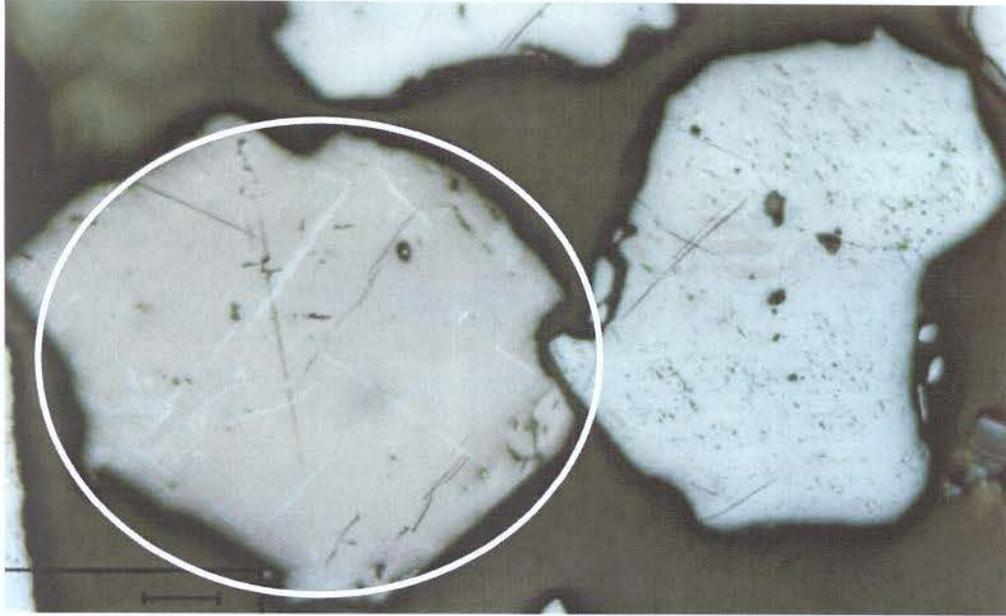


Foto 3.3: Fotomicrografia de Magnetita (MG)

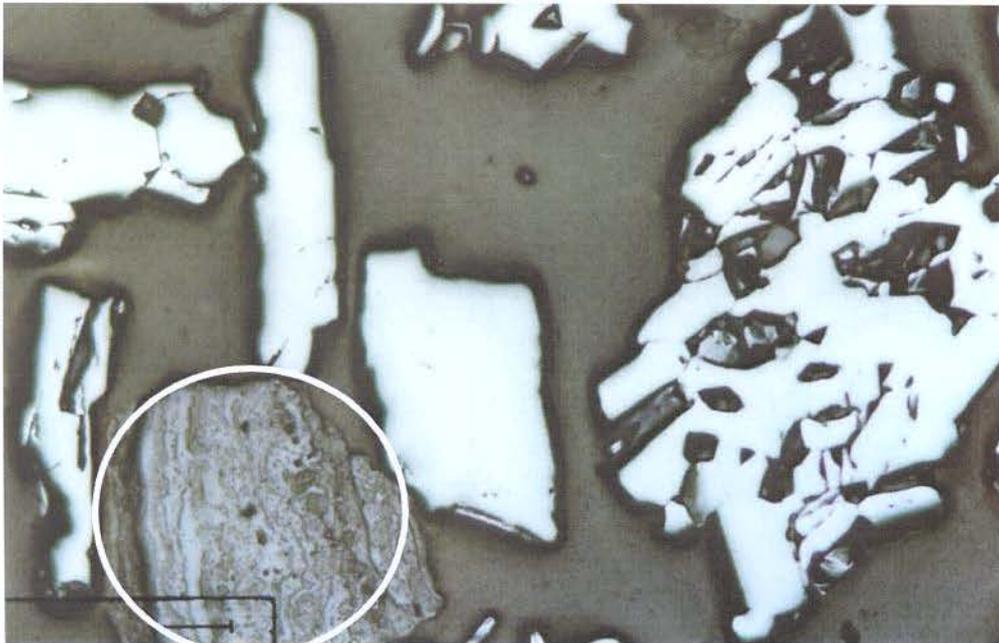


Foto 3.4: Fotomicrografia de Goethita (GO) no detalhe

3.3. Estimativa por Krigagem Ordinária das variáveis mineralógicas

A estimativa por Krigagem Ordinária das variáveis mineralógicas, em especial da GO, servirá de base para medir a eficiência do método que está sendo avaliado, que é a Cokrigagem Co-locada (CCKO). No intuito de se obter os resultados Krigados da GO, todos os procedimentos tradicionais de um estudo geoestatístico foram adotados, e serão descritos nos itens que se seguem.

3.3.1. Mapa base dos Furos de sonda

As amostras das variáveis mineralógicas foram obtidas a partir de 168 furos de sonda rotativos, com direção vertical, amostrados em intervalos de aproximadamente 8 metros. A Figura 3.7 mostra as posições, no plano XY, das coordenadas da “boca” (*header*) dos referidos furos:

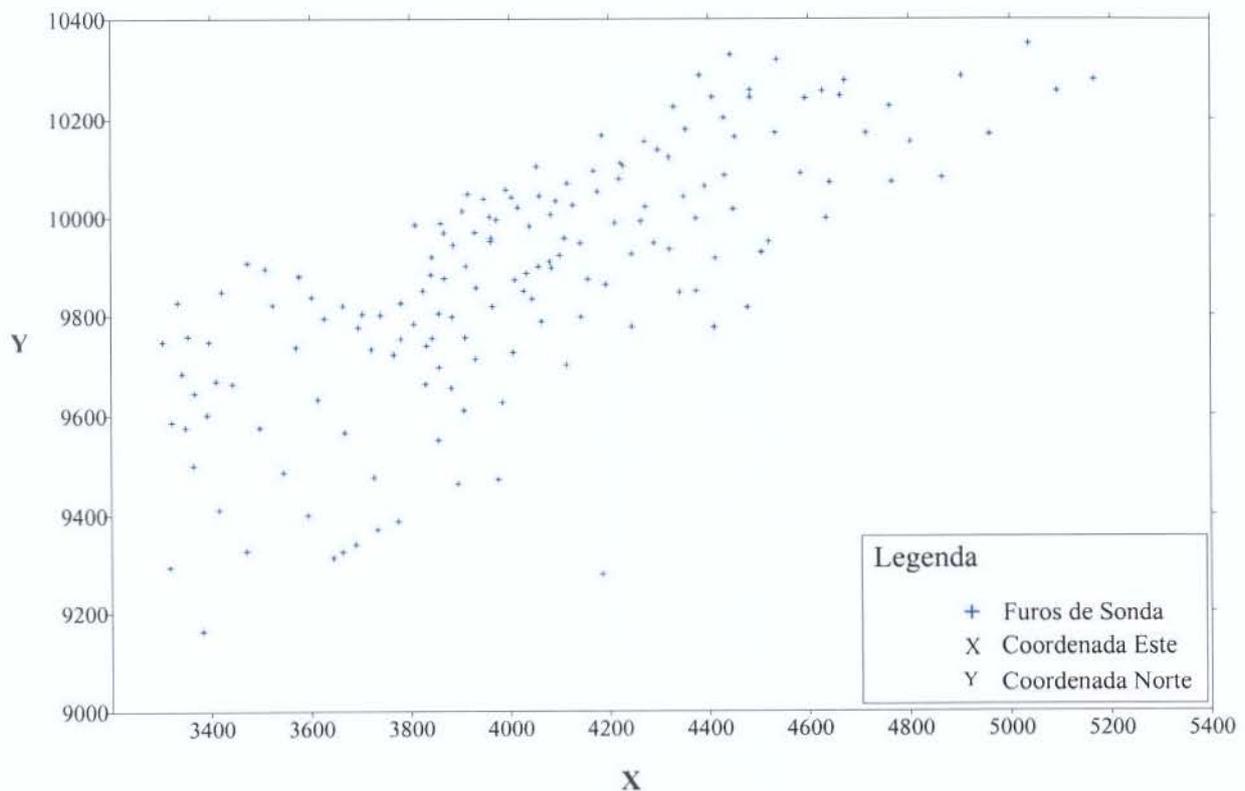


Figura 3.7: Mapa base dos furos de sonda.

3.3.2. Análise Estatística dos dados mineralógicos

Foi feita uma análise estatística com o intuito de se ter referência acerca dos parâmetros básicos que regem a distribuição das porcentagens de GO medidas nos furos de sonda. Também serviu como forma de se verificar a dispersão com a variável química PPC. As Figuras 3.8 e 3.9 mostram, respectivamente, a forma de distribuição das porcentagens de GO e o diagrama de dispersão GO - PPC:

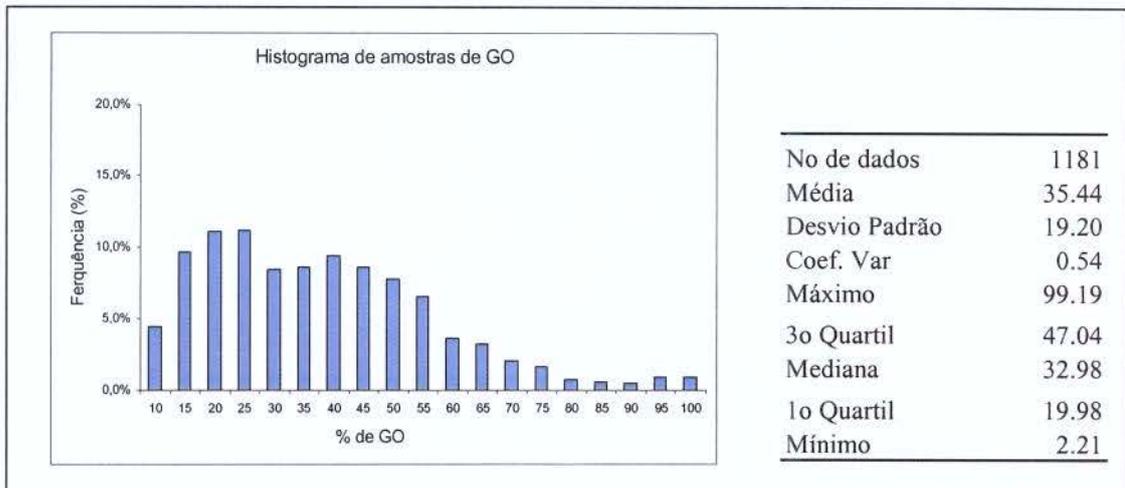


Figura 3.8: Histograma e resumo estatístico da % de GO

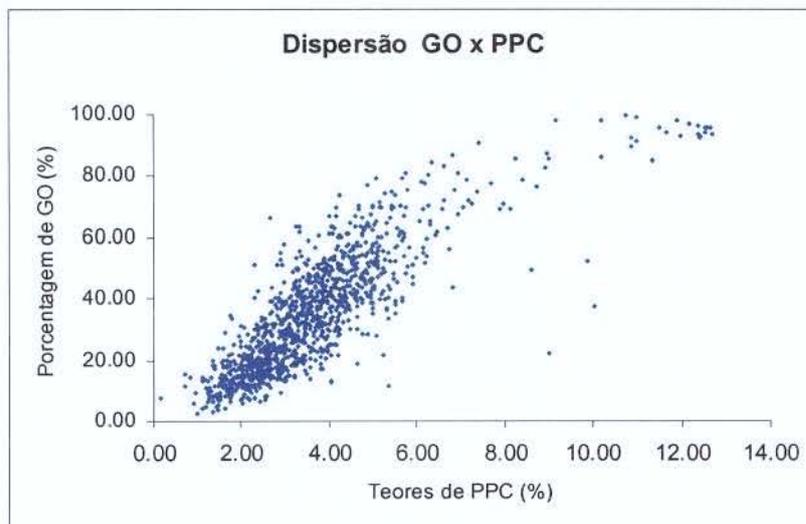


Figura 3.9: Diagrama de dispersão GO - PPC

3.3.3. Estatística Espacial dos dados mineralógicos

Inicialmente foram feitos variogramas direcionais com o objetivo de se conhecer as direções de mínima e máxima variabilidade. Após diversos testes definiu-se como principais direções de variabilidade aquelas definidas por um plano rotacionado respectivamente ao longo das direções D3 e D1 gerando, de acordo com a Figura 3.9, D1', D2' e D3'.

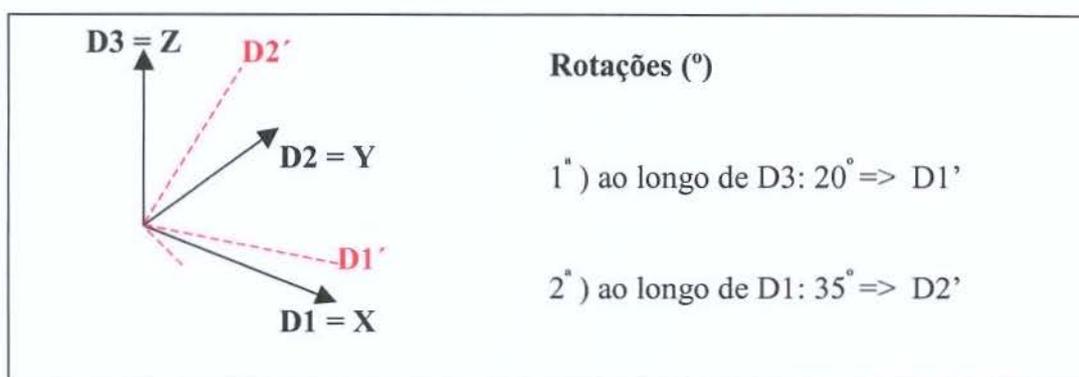


Figura 3.10: Rotações ao longo dos eixos cartesianos

A partir deste ponto do texto, qualquer referência às direções D1, D2 e D3 diz respeito às já rotacionadas D1', D2' e D3', conforme explicação anterior.

De posse dos variogramas experimentais, procedeu-se ao modelamento variográfico, cujos parâmetros são apresentados na Tabela 3.1, abaixo. M1, M2 e M3 referem-se aos modelos ajustados para as direções D1, D2 e D3.

Tabela 3.1: Modelos variográficos para a variável mineralógica GO

	$M1 = 223 \text{ Esf}_{110}(h)$
GO	$M2 = 223 \text{ Esf}_{110}(h) + 132 \text{ Esf}_{180}(h)$
	$M3 = 223 \text{ Esf}_{95}(h) + 132 \text{ Esf}_{95}(h)$

Entre as premissas gerais do modelamento destaca-se a adoção de modelos cuja proximidade da origem seja linear e com menor inclinação ao longo de D1, mostrando que esta é a direção de maior continuidade. A Figura 3.10 mostra o variograma experimental e o modelo ajustado para a variável mineralógica GO para as direções D1, D2 e D3.

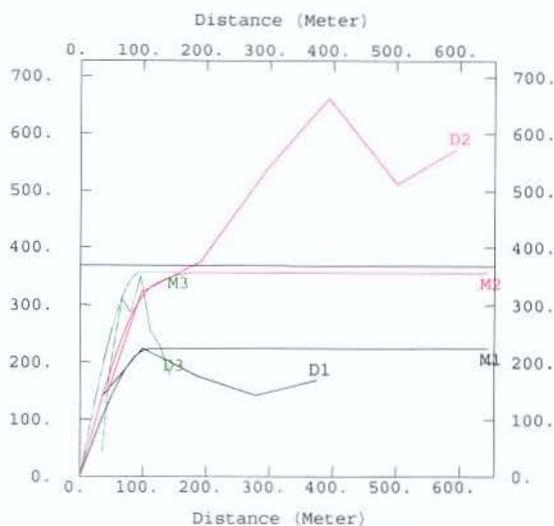


Figura 3.11: Variogramas da (%) de Goethita – GO

3.3.4. Parâmetros da estimativa

Diante dos modelos de covariância inferidos, e de posse do Banco de Dados, procedeu-se à estimativa por Krigagem Ordinária da variável mineralógica GO, segundo o elipsóide de busca definido na Tabela 3.2:

Tabela 3.2: Parâmetros da Krigagem Ordinária da variável GO

	D1	D2	D3
Raio de Busca (m)	150	90	20
Mínimo de amostras	3		
Máximo de amostras	12		
Discretização dos Blocos	5x 5 x 1 (X Y Z)		

3.3.5. Resultados da Krigagem Ordinária da variável GO

Os resultados da Krigagem Ordinária da variável mineralógica GO serão particularmente importantes para a comparação da eficiência da CCKO, que será desenvolvida no Capítulo 4. A Tabela 3.3 traz um resumo estatístico dos valores krigados e das variâncias de estimativa:

Tabela 3.3: Resumo estatístico dos resultados da Krigagem Ordinária da GO

Variável: GO	Valores Krigados	Variância
No. De dados	4129	4129
Média	33.18	12.73
Desvio Padrão	14.22	4.12
Coefficiente de Variação	42.86%	32.35%
Máximo	98.28	21.36
3o. Quartil	41.42	15.89
Mediana	31.41	13.01
1o. Quartil	21.48	9.39
Mínimo	2.16	3.48

A Figura 3.12 mostra o histograma da distribuição da porcentagem de GO obtida através da Krigagem Ordinária. Nota-se, no caso dos teores, que a forma de distribuição é bastante semelhante ao histograma das amostras, mostrado na Figura 3.8.

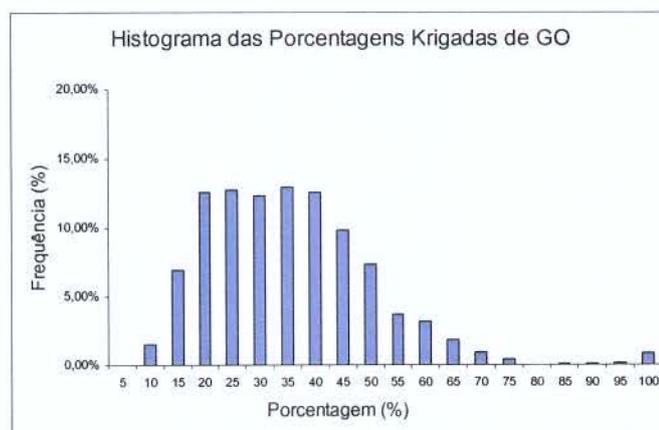


Figura 3.12: Histograma da porcentagem krigada de GO

3.4. Estimativa por Krigagem Ordinária das variáveis químicas

A Krigagem Ordinária da variável química PPC servirá para a constituição do *Background* ou, em outros termos, para se ter os valores da variável secundária (PPC) co-locados em todos os nós do grid em que se deseja proceder a Cokrigagem Co-locada da variável mineralógica GO. Analogamente ao procedimento descrito no item 3.3, este item seguirá uma sequência semelhante.

3.4.1. Mapa base dos Furos de Perfuratriz

Foram realizados 3366 furos de perfuratriz, todos verticais, amostrados em intervalos de aproximadamente 8 metros. A Figura 3.13 mostra as posições, no plano XY, das coordenadas da “boca” (*header*) dos referidos furos:

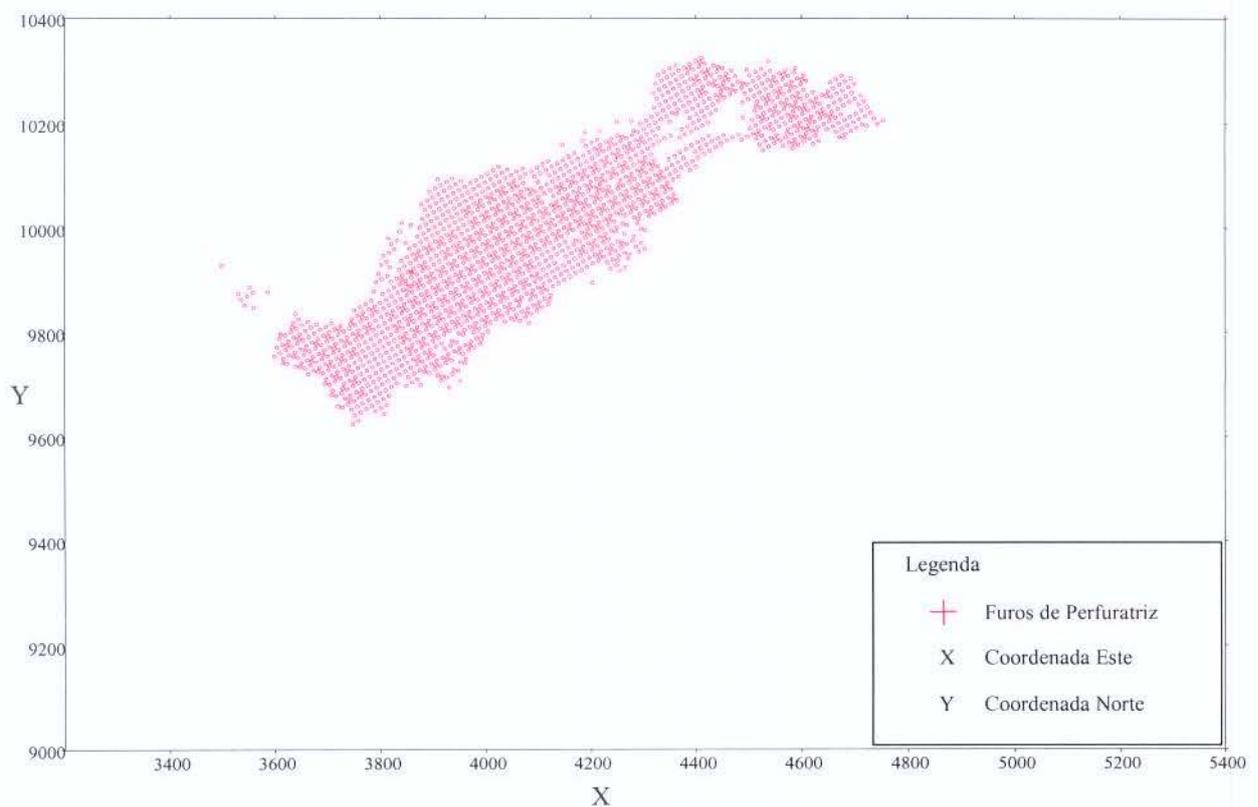


Figura 3.13: Mapa base dos furos de perfuratriz

A área de Alegria 1/6 é extensamente amostrada por furos de perfuratriz, que têm o objetivo inicial de preparar furos para a colocação de explosivos para detonação do minério. A concepção é a de amostrar, através da coleta do pó gerado durante a furação, o minério e analisá-lo quimicamente. Dessa forma é possível a obtenção de um grande número de resultados químicos a um custo muito inferior ao custo de furos de sonda (que são utilizados para as amostras de mineralogia).

3.4.2. Análise Estatística das variáveis químicas

Foi feita uma análise estatística com o objetivo de se ter referência a respeito dos parâmetros básicos que regem a distribuição dos teores químicos. A Figura 3.14 mostra o histograma dos teores de PPC obtidos através das amostras dos furos de perfuratriz e de sonda:

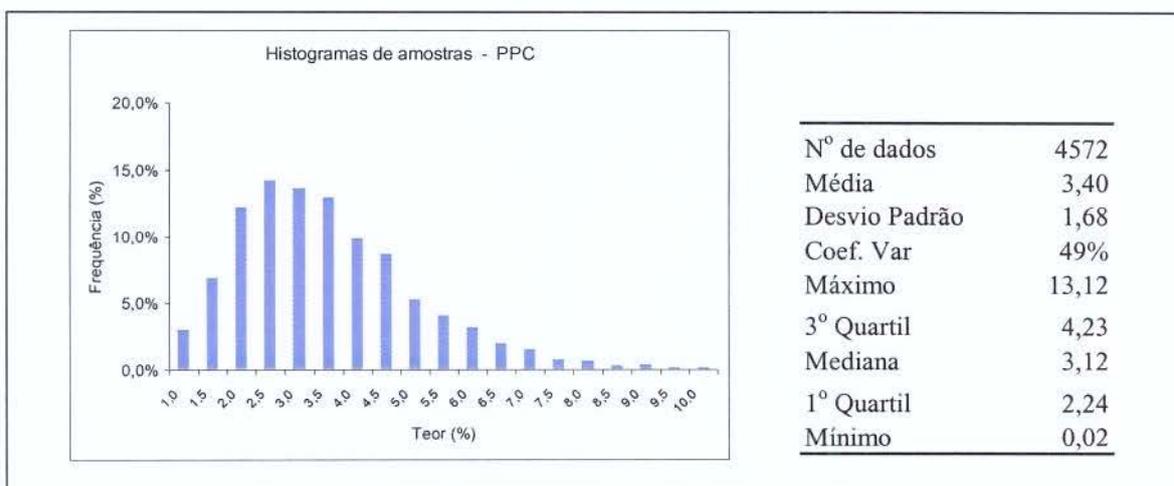


Figura 3.14: Histograma e resumo estatístico dos teores de PPC

3.4.3. Estatística espacial das variáveis químicas

Os variogramas experimentais do PPC, após diversos testes em várias direções, foram definidos nas mesmas direções apresentadas no item 3.3.3. A Tabela 3.4 mostra os parâmetros

dos modelos ajustados e a Figura 3.15 traz graficamente os variogramas experimentais e modelados:

Tabela 3.4: Parâmetros variográficos do PPC feitos a partir de amostras

	$M1 = 1.57 \text{ Esf}_{200} (h)$
PPC	$M2 = 1.57 \text{ Esf}_{80} (h) + 1.2 \text{ Esf}_{150} (h)$
	$M3 = 1.57 \text{ Esf}_{70} (h)$

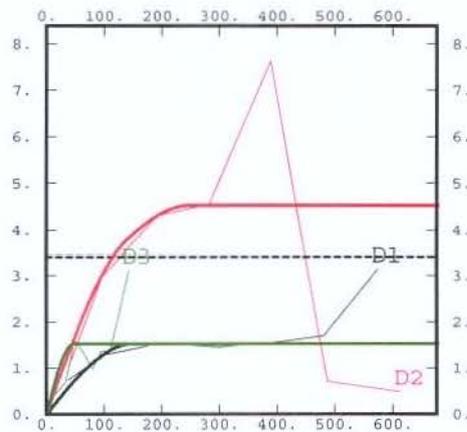


Figura 3.15: Variogramas ajustados para o PPC

3.4.4. Resultados da Krigagem Ordinária da variável PPC

Os resultados da Krigagem Ordinária da variável química PPC são imprescindíveis para a implementação da Cokrigagem Co-locada da variável GO, que será desenvolvida no Capítulo 4.

A Tabela 3.5 e a Figura 3.16 trazem, respectivamente, um resumo estatístico dos valores krigados e um histograma dos teores Krigados:

Tabela 3.5: Resumo estatístico dos resultados da Krigagem Ordinária do PPC

Variável: PPC	Valores Krigados	Variância
No. De dados	4129	4129
Média	3.53	1.07
Desvio Padrão	1.31	0.37
Coefficiente de Variação	37.11%	34.34%
Máximo	11.01	2.13
3o. Quartil	4.11	1.32
Mediana	3.28	1.07
1o. Quartil	2.65	0.78
Mínimo	1.11	0.35

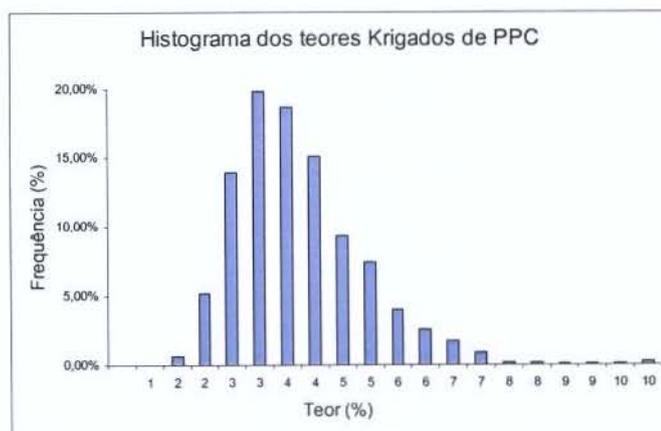


Figura 3.16: Histograma dos teores krigados de PPC

Capítulo 4

Neste capítulo será apresentada a implementação da Cokrigagem Co-locada integrando dados mineralógicos com dados químicos, em especial das variáveis GO (mineralógica) e PPC (química). O objetivo é gerar um conjunto de resultados que serão posteriormente comparados com a Krigagem Ordinária. O banco de dados utilizado refere-se à área de Alegria 1/6, descrita no capítulo 3.

4.1. Implementação da Cokrigagem Co-locada original

A Cokrigagem co-locada original foi proposta para fazer a integração de dados sísmicos (impedância), com dados provenientes de poços (porosidade). Nesta situação, que é totalmente heterotópica, as amostras das variáveis primárias e secundárias são sempre coletadas em posições espaciais diferentes, ou seja, nunca co-existem em uma mesma posição espacial ($h=0$). Dessa forma as medidas de porosidade são escassas e estão presentes em apenas alguns poucos pontos do domínio, sendo difícil o modelamento de sua covariância. Já a medida de impedância é presente em todos os nós do grid onde pretende-se estimar a porosidade, constituindo-se no “*Background*”. A Figura 4.1 ilustra a configuração típica da Cokrigagem Co-locada original:

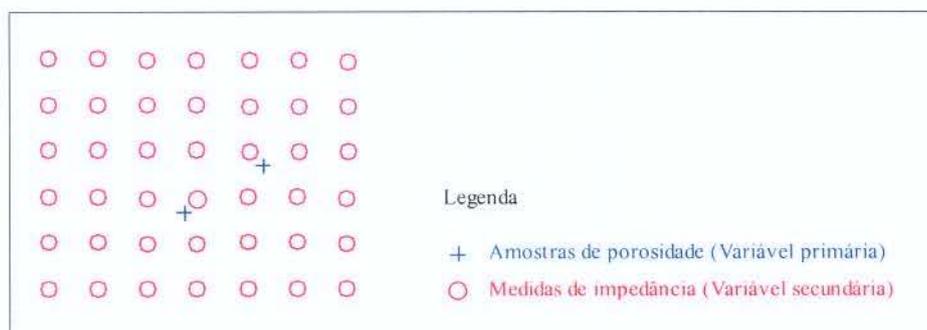


Figura 4.1: Configuração típica para aplicação da CCKO original

Diante desta situação tradicional, ilustrada na Figura 4.1, os passos necessários à implementação da Cokrigagem Co-locada podem ser assim resumidos, segundo JOURNAL (1998):

- Inferência e modelagem da covariância direta da variável secundária (“*Background*”);
- Estimativa dos valores da variável secundária nos pontos onde tem-se amostras da variável primária, com o intuito de se calcular o coeficiente de correlação para $h=0$;
- Inferência e modelagem da covariância cruzada através de um modelo linear de coregionalização ou através de um dos modelos Markovianos MM1 ou MM2.

4.2. Adaptação da Cokrigagem Co-locada original

O uso da Cokrigagem Co-locada na área em questão deve sofrer adaptações devido principalmente à configuração dos dados amostrais. Neste caso tem-se uma situação de heterotopia parcial, ou seja, existem amostras de mineralogia com mesmas coordenadas $u(x,y,z)$ de amostras de química, mas também existem amostras químicas em locais que não se têm mineralogia. A Figura 4.2 ilustra a situação típica de amostragem:

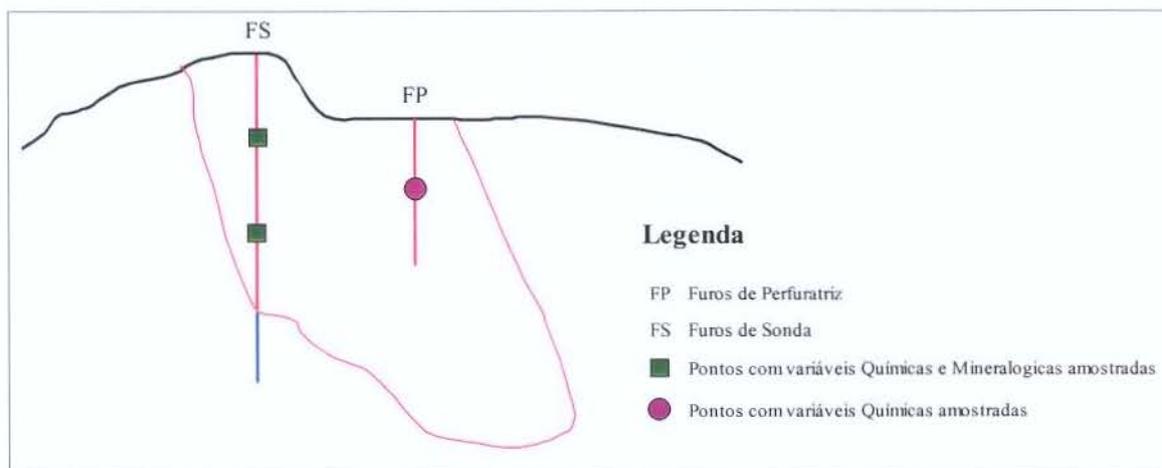


Figura 4.2: Perfil ilustrando situação típica de amostragem

Diante do exposto, a prática da Cokrigagem co-locada na área em questão irá requerer que se estime o valor da variável secundária PPC em todos os nós do grid. Este procedimento foi feito através da Krigagem ordinária, cujos resultados são mostrados no Capítulo 3. Somente assim o “background”, que é a variável química PPC, estará co-locado nos nós do grid onde deseja-se fazer a co-estimativa da variável mineralógica GO, como ilustra a Figura 4.3:

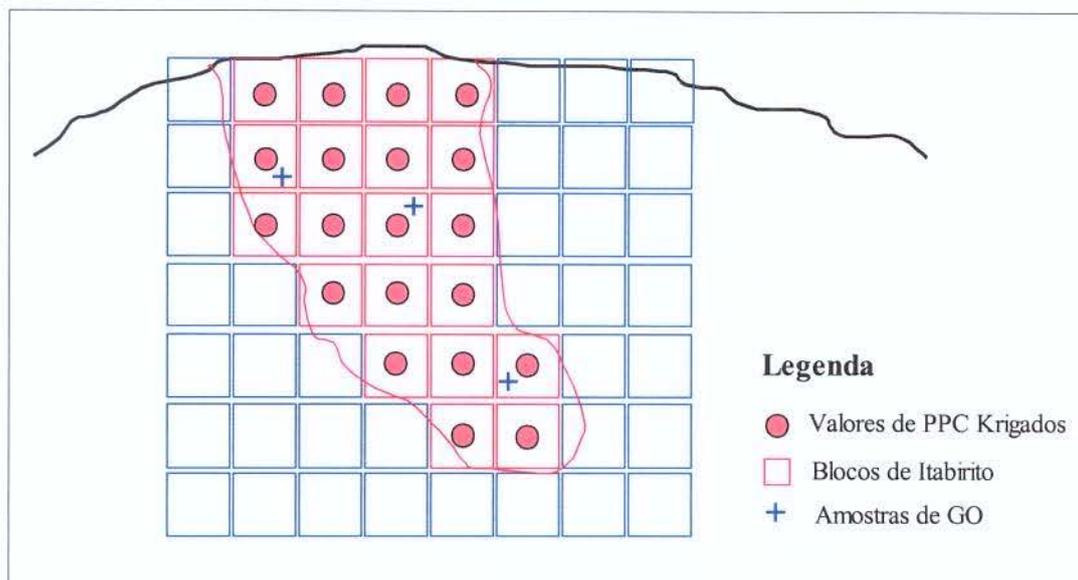


Figura 4.3: Seção vertical ilustrando a variável PPC estimada por KO

Por outro lado não será necessário, como sugerido no roteiro de JOURNAL (1998), estimar as variáveis secundárias nos pontos onde se tem as variáveis primárias. Como, nos furos de sonda, há um número bastante grande de locais onde se tem a química e a mineralogia analisadas (situação de isotopia), o coeficiente de correlação para $h=0$ pode ser calculado diretamente.

4.3. Inferência dos modelos de covariância da variável secundária

Como exposto anteriormente, a presença da variável secundária PPC em todos os nós do grid é indispensável para a realização da Cokrigagem Co-locada. Como não existem medidas de PPC em todos os nós, o procedimento de estimativa desta variável será feito através da krigagem

ordinária. Nesta estimativa serão consideradas amostras tanto de furos sonda, quanto de furos de perfuratriz que, apesar de não estarem presentes em todos os blocos, são bastante abundantes na área consideranda.

A partir do grid estimado de PPC, de acordo com as mesmas direções variográficas definidas no Capítulo 3, procedeu-se à inferência e ao modelamento da covariância da variável secundária, etapa indispensável à realização da Cokrigagem Co-locada da variável GO utilizando-se o Modelo Markoviano 2 – MM2, como exposto no Capítulo 2. A Tabela 4.1 e a Figura 4.4 mostram, respectivamente, os parâmetros variográficos e os variogramas, já ajustados para as 3 direções, obtidos na variografia feita a partir do grid de PPC.

Tabela 4.1: Parâmetros variográficos do PPC feitos a partir do grid estimado por KO

	$M1 = 1.57 \text{ Esf}_{200} (h)$
PPC	$M2 = 1.57 \text{ Esf}_{80} (h) + 1.2 \text{ Esf}_{150} (h)$
	$M3 = 1.57 \text{ Esf}_{70} (h)$

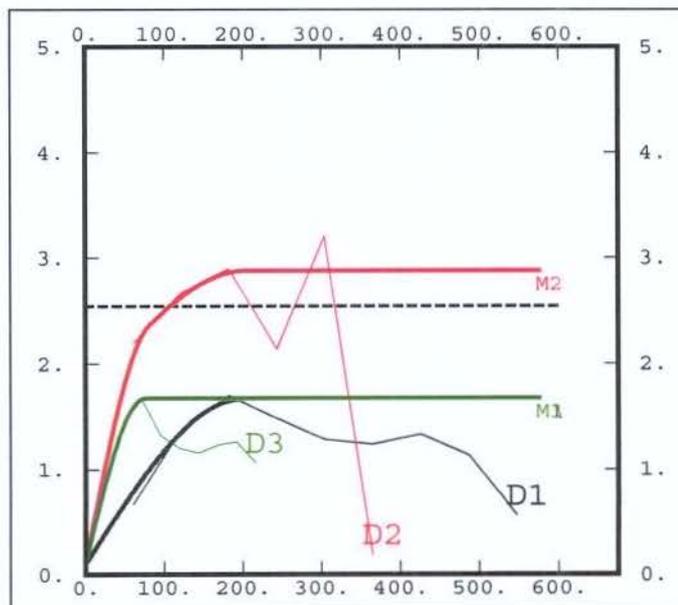


Figura 4.4: Variogramas da variável secundária PPC no grid estimado por KO

4.4. Cálculo do coeficiente de correlação (ρ)

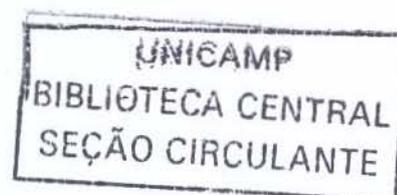
Segundo JOURNAL (1998), para uma situação tradicional de aplicação da Cokrigagem Co-locada, há a necessidade de se estimar os valores da variável secundária nos pontos onde tem-se amostras da variável primária, com o intuito de se calcular o coeficiente de correlação para $h=0$, como citado no item 4.1. Este procedimento se faz necessário em casos de heterotopia total, onde não existem amostras das variáveis primárias e secundárias nas mesmas posições espaciais.

No estudo de caso ora apresentado existem inúmeras amostras da variável primária (GO), coletadas nas mesmas posições espaciais da variável secundária (PPC), permitindo o cálculo direto do coeficiente de correlação para $h=0$, que é de 0,83.

4.5. Inferência do modelo de covariância cruzada

No estudo ora apresentado há abundância da variável secundária PPC, tornando mais fácil o modelamento de sua covariância (descrito no item 4.3) se comparado ao modelamento da variável primária GO. Assim será adotada a hipótese do Modelo Markoviano 2 - MM2 seguindo, para isso, os seguintes passos, respeitando-se a sequência descrita no Capítulo 2 (item 2.4.3):

- 1) Obtenção do modelo de covariância direta da variável secundária PPC (item 4.3);
- 2) Cálculo do coeficiente de correlação ρ_{12} entre as variáveis primária (GO) e secundária (PPC) (item 4.4);
- 3) Obtenção do modelo de covariância cruzada C_{12} a partir de 1) e 2), fornecido pela equação 2.8;
- 4) Modelamento da covariância direta da variável primária GO a partir de 3).



4.6. Implementação da CCKO no ISATIS

A implementação da CCKO foi feita no *software* ISATIS da Geovariances – França, que em termos de arquivos e detalhes pode ser assim resumida:

Arquivo de Entrada:	<i>Composites</i> da variável primária GO;
<i>Output Grid</i> :	<i>Grid</i> que receberá os valores estimados de GO por CCKO
Parâmetros:	
<i>Background</i> :	<i>Grid</i> com o PPC estimado por KO em todos os nós do grid que se deseja co-estimar a variável GO
Vizinhança:	Raios de busca conforme item 3.3.4
Coefficiente de correlação:	conforme cálculo mostrado no item 4.4

No ISATIS há uma pequena variação do algoritmo original. Segundo BLEINER *et al* (2000) as amostras de variável secundária existentes em todos os pontos onde existem variáveis primárias também são incorporadas na resolução do sistema de CCKO. No algoritmo original apenas o dado secundário co-locado (Capítulo 2) é utilizado. Nesta implementação tomou-se o cuidado de não haver, no arquivo de entrada, amostras da variável secundária, de forma que a implementação utilizasse apenas os dados co-locados.

4.7. Resultados da Cokrigagem Co-locada da GO

A seguir são apresentados os resultados da Cokrigagem Co-locada da variável mineralógica GO, utilizando-se o PPC como variável secundária. Estes resultados serão comparados, no Capítulo 5, aos resultados da Krigagem Ordinária, para medir a eficiência da CCKO. A Tabela 4.2 traz um resumo estatístico dos valores Cokrigados co-locados e das

variâncias de estimativa. O histograma das porcentagens Co-Krigadas Co-locadas da GO estão na Figura 4.5 :

Tabela 4.2: Resumo estatístico dos resultados da Cokrigagem Co-locada da GO

Variável: GO	Valores Co-Krigados	Variância
No. De dados	4129	4129
Média	33.59	9.02
Desvio Padrão	15.70	2.60
Coefficiente de Variação	46.75%	28.86%
Máximo	97.53	23.55
3o. Quartil	43.78	10.67
Mediana	32.14	8.79
1o. Quartil	21.32	7.06
Mínimo	0.35	3.88

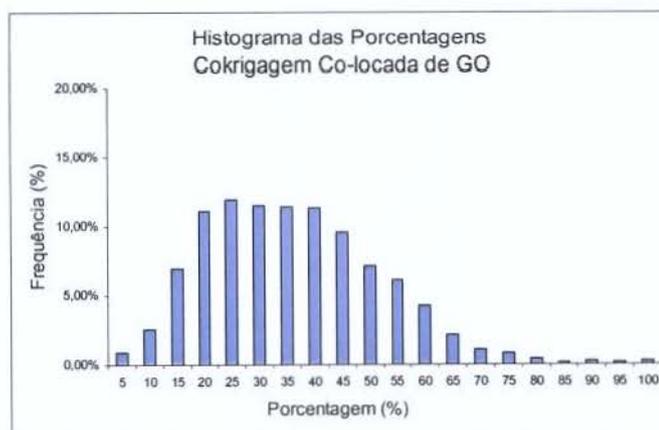


Figura 4.5: Histograma das porcentagens Co-krigadas Co-locadas de GO

Capítulo 5

Este capítulo tem por objetivo a comparação dos resultados obtidos na estimativa por Krigagem Ordinária (KO) e Cokrigagem Co-locada (CCKO) da variável mineralógica GO. Serão utilizadas 3 formas de comparação, baseadas em parâmetros estatísticos, análise de imagens em um banco de lavra da mina e por funções de recuperação. Dessa forma será possível medir a eficiência na nova metodologia proposta, concluindo sobre as possíveis vantagens ou desvantagens de sua utilização.

5.1. Comparação por parâmetros estatísticos

Os resultados da Krigagem Ordinária (KO) e da Cokrigagem Co-locada (CCKO) da variável mineralógica GO foram sumarizados na Tabela 5.1 de forma a possibilitar a comparação sob o ponto de vista estatístico. Pode-se notar que em termos médios os dois resultados são bastante semelhantes, sendo que a diferença das médias é de apenas 1.2%. A KO produziu valores mais atenuados, haja vista que o seu coeficiente de variação é cerca de 3 pontos percentuais menor que o da CCKO. Por último verifica-se que a variância do erro de estimativa na CCKO é menor que na KO, sendo sua diferença de 29%.

Tabela 5.1: Resumo estatístico das estimativas de GO por KO e CCKO

Variável: GO	KO	Variância	CCKO	Variância
No. De dados	4129	4129	4129	4129
Média	33.18	12.73	33.59	9.02
Desvio Padrão	14.22	4.12	15.70	2.60
Coefficiente de Variação	43.54%	32.35%	46.75%	28.86%
Máximo	98.28	21.36	97.53	23.55
3o. Quartil	41.42	15.89	43.78	10.67
Mediana	31.41	13.01	32.14	8.79
1o. Quartil	21.48	9.39	21.32	7.06
Mínimo	2.16	3.48	0.35	3.88

Em continuação à comparação estatística, procedeu-se a análise de dispersão dos teores de GO (co)estimados pelos dois métodos, KO e CCKO mostrando se, estatisticamente, a distribuição dos teores são semelhantes ou não. Com o objetivo de proporcionar uma análise diferenciada para grupos que têm densidades amostrais diferentes, evidenciada por menores variâncias de estimativa, foram selecionados dois grupos, segundo a distribuição acumulada das variâncias de estimativa dos blocos estimados por KO, que é o método referência. A Figura 5.1 mostra este histograma e o ponto (1^o quartil) que foi considerado para divisão dos grupos:

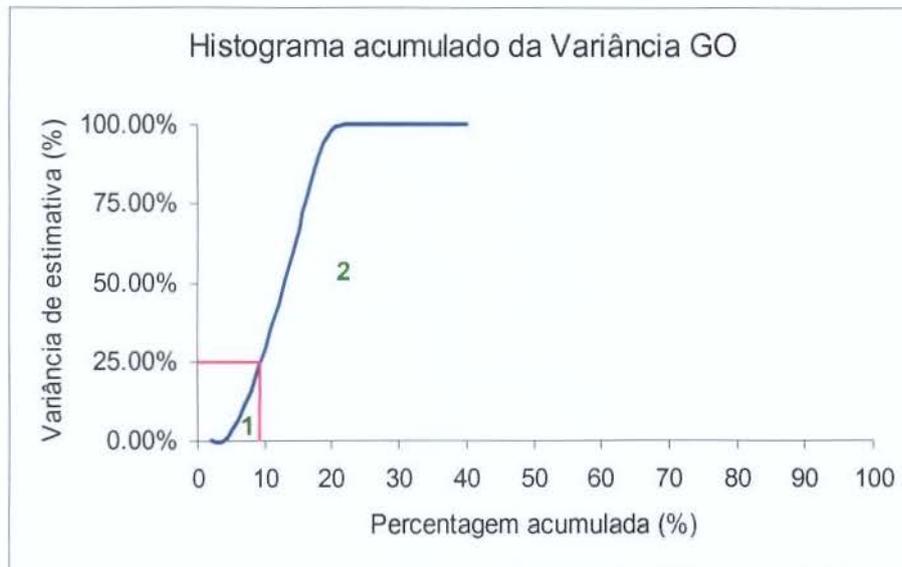


Figura 5.1: Seleção feita no histograma acumulado das variâncias de estimativa da KO

A partir desta seleção foram gerados dois grupos cujas características estatísticas podem ser assim definidas:

Grupo 1: Blocos que têm variâncias de estimativa da KO presentes no 1^o quartil, ou seja, abaixo de 9.39, como pode ser observado na Figura 5.1 e no item 3.3.5 dos resultados da Krigagem Ordinária da variável GO;

Grupo 2: Blocos que têm as maiores variâncias de erro de estimativa da KO, presentes nos outros quartis. Representam uma situação menos favorável em termos de configuração das amostras utilizadas nas estimativas.

As Figuras 5.2 e 5.3 mostram, respectivamente, os diagramas de dispersão dos teores de GO Krigados (pela KO) e Cokrigados (pela CCKO) para os dois grupos supra-citados:

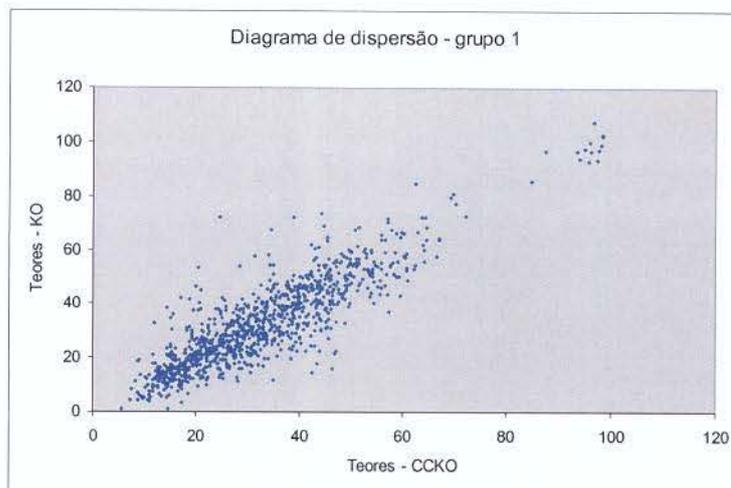


Figura 5.2: Diagrama de dispersão de teores de GO do grupo 1

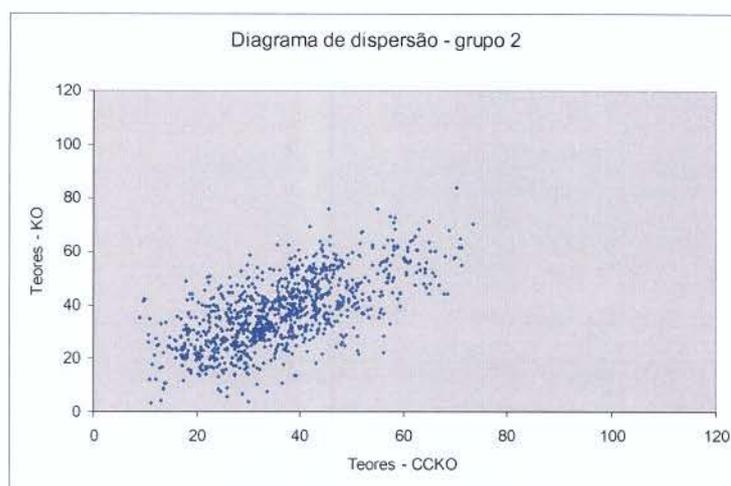


Figura 5.3: Diagrama de dispersão de teores de GO do grupo 2

Da análise dos diagramas é possível observar que existe uma menor dispersão dos teores de GO no grupo 1, com coeficiente de correlação de 0.88. Este fato indica que em situações mais favoráveis de configuração de dados amostrais (locais onde se tem uma menor variância do erro

de estimativa) a Cokrigagem Co-locada fornece resultados bastante próximos da KO, que é um método consagrado para variáveis regionalizadas.

5.2. Comparação por análise de imagens

A análise de imagens tem por objetivo mostrar, em um banco de lavra, se a distribuição espacial dos teores de GO estimados pelos dois métodos, KO e CCKO, são semelhantes. Ainda que não conclusiva quanto a demonstrar a eficiência da CCKO, mostra o que acontece na mina, onde efetivamente se dará a seleção dos blocos de lavra.

Foram geradas 2 imagens do nível 1290 mostrando, através da gradação de cores, a variação dos teores de GO estimados por KO e CCKO. Os teores de GO obtidos por Krigagem Ordinária mostram-se mais atenuados, tendendo para a média que é de 33.18. Diferentemente, na CCKO pode-se verificar valores extremos. As Figuras 5.4 e 5.5 apresentam, respectivamente, estas imagens.

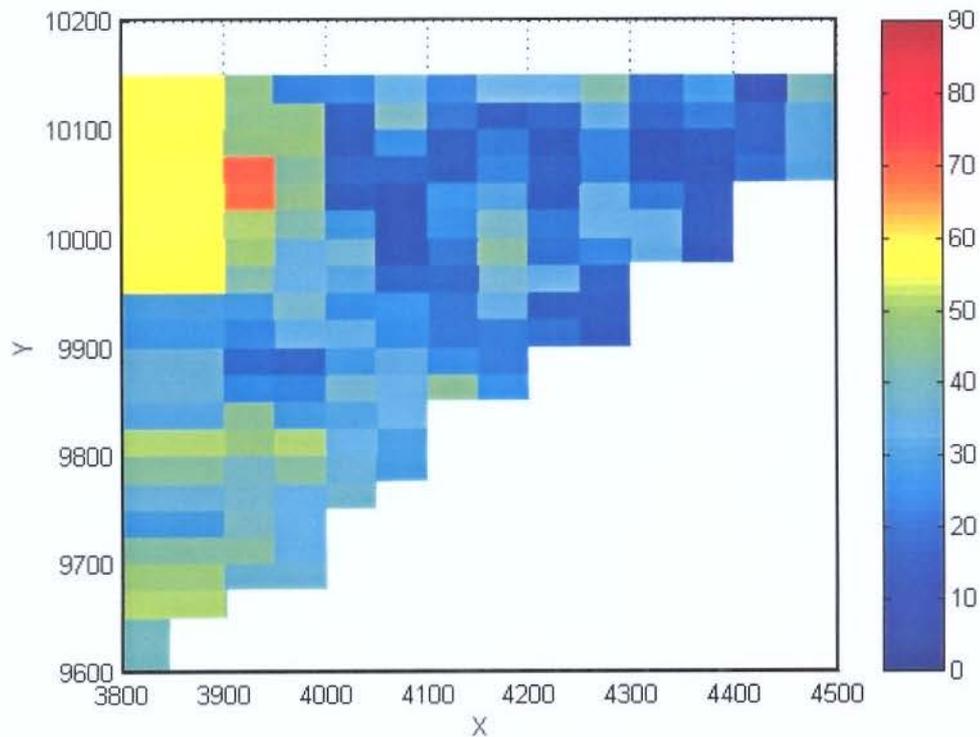


Figura 5.4: Imagem da GO estimada por KO no banco 1290

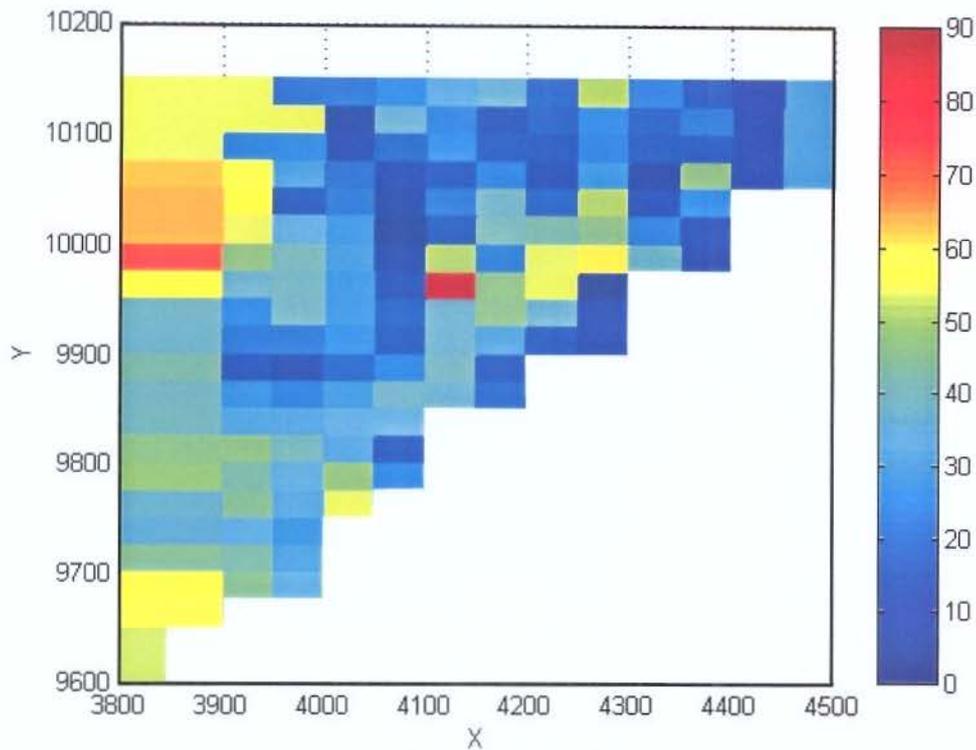


Figura 5.5: Imagem da GO estimada por CCKO no banco 1290

Os métodos de coestimativa, em especial Cokrigagem Ordinária – CKO e Cokrigagem Co-locada – CCKO), tem como princípio minimizar a variância do erro de estimativa explorando a correlação espacial cruzada entre 2 ou mais variáveis aleatórias (detalhes no Apêndice A).

Nesta aplicação da CCKO, os resultados mostram que a utilização de informações secundárias co-locadas, no caso a variável química PPC, produz menores variâncias de erro de estimativa se comparado às variâncias obtidas pelo método de Krigagem Ordinária, confirmando a adequação da CCKO como método de coestimativa.

As Figuras 5.6 e 5.7 mostram, para o mesmo banco, as imagens das variâncias do erro de estimativa para a Krigagem Ordinária e para a Cokrigagem Co-locada. Pode-se verificar, pela gradação de cores nas paletas, que os valores de variância para a CCKO são inferiores aos da KO.

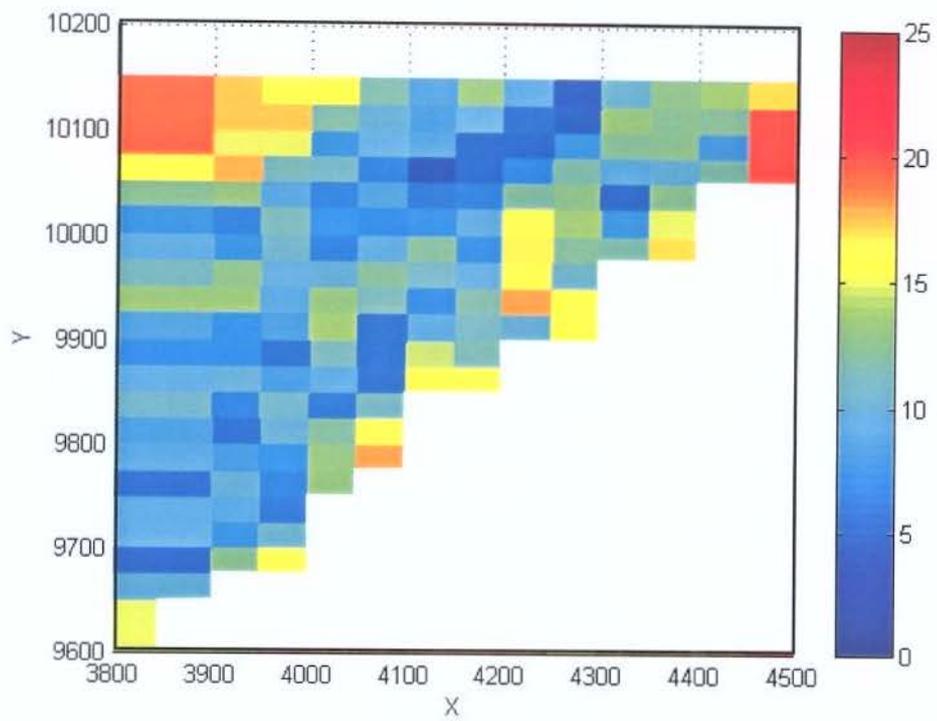


Figura 5.6: Imagem da variância do erro de estimativa da GO pela KO

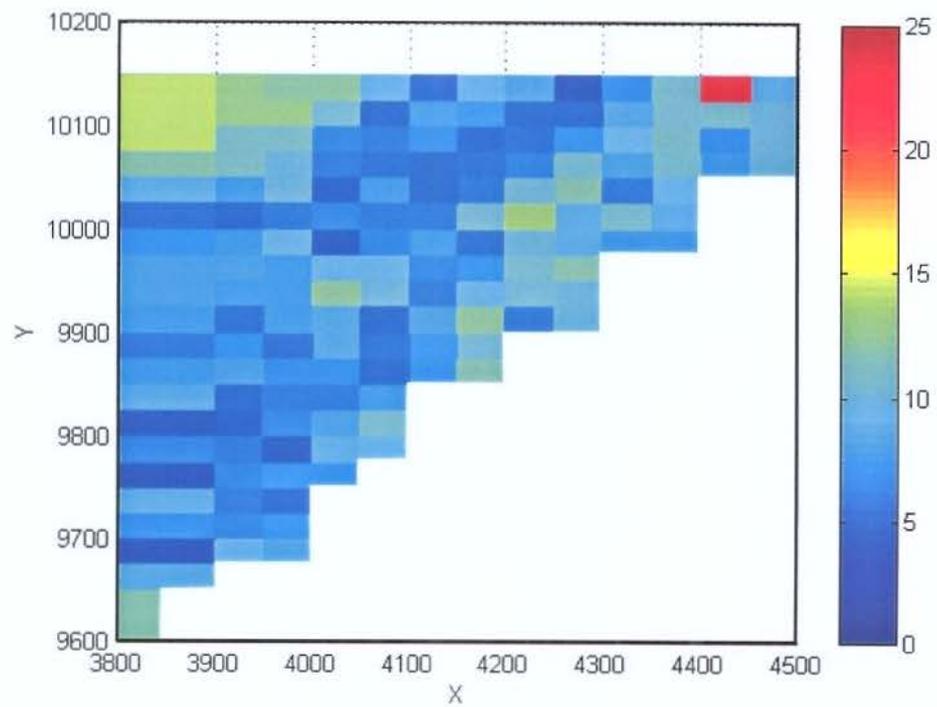


Figura 5.7: Imagem da variância do erro de estimativa da GO pela CCKO

5.3. Funções de recuperação

As funções de recuperação servem para medir a eficiência de métodos de estimativa quanto às perdas por seleção errônea de blocos de lavra, seja na fase de classificação de reservas ou otimização de cava final, seja na etapa de controle diário de lavra. Estas perdas podem ser quantificadas em termos de metal contido, de benefício econômico e de tonelagem de minério (detalhes no Apêndice C).

Neste estudo de caso, diante da impossibilidade de se trabalhar com os valores reais de GO nos blocos, foram construídas curvas de tonelagem teor para os resultados da estimativa por CCKO da variável GO, levando-se em consideração os resultados estimados pela KO como reserva ideal. De tal maneira os resultados da CCKO são comparados relativamente aos resultados da KO.

As curvas construídas tem as seguintes características e adaptações, sumarizadas abaixo e cujas equações detalhadas podem ser vistas no Apêndice C:

Função de Recuperação – Q: considera a proporção de metal contido nos blocos, ou seja, constitui-se na multiplicação entre o teor, a densidade e o volume dos blocos;

Função de Recuperação – T: considera a proporção de massa contida nos blocos, ou seja, constitui-se na multiplicação entre a densidade e o volume dos blocos;

Função de Recuperação – B: considera a proporção de benefício econômico auferida com a receita de venda do metal contido no blocos.

Para este estudo de caso foram construídas, segundo os critérios definidos acima, as curvas de recuperação para Metal Contido - Q e Proporção de Tonelagem - T, para os dois grupos definidos no ítem 5.1, que têm diferentes níveis de variância do erro de estimativa. As Figuras 5.8 e 5.9 mostram as curvas de Q e T para o grupo 1. As Figuras 5.10 e 5.11 mostram as curvas de Q e T para o grupo 2.

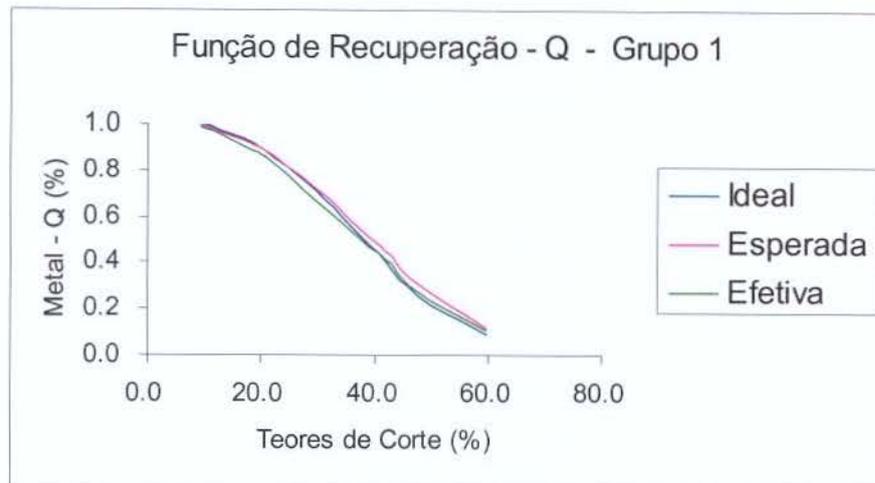


Figura 5.8: Metal contido – Q em reserva classificada com base na CCKO – Grupo 1

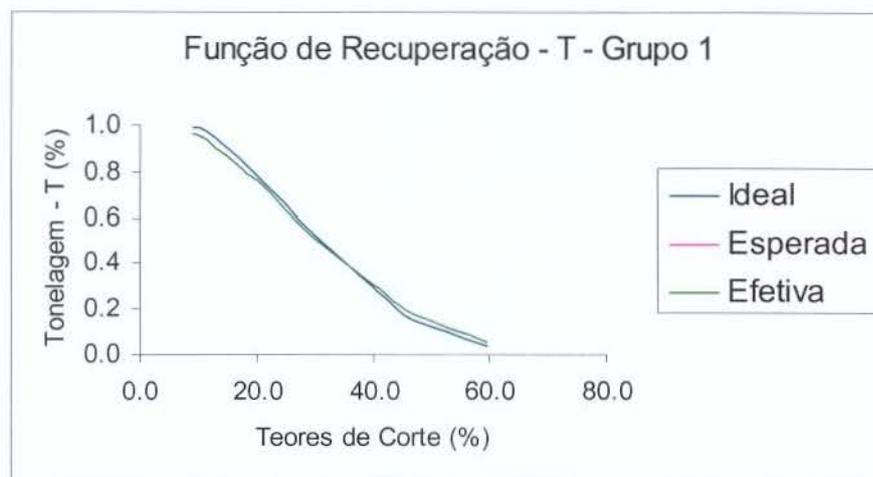


Figura 5.9: Tonelagem (%) – T em reserva classificada com base na CCKO – Grupo 1

Em termos de recuperação de metal, os resultados obtidos na CCKO para o Grupo 1 mostram que para teores de corte de até 30% a perda de metal contido em relação à reserva ideal, estimada por KO, é muito baixa, de cerca de 1%. Nas curvas de proporção de tonelagem, para a mesma faixa de teores de corte, as perdas também são pequenas, inferiores a 3%.

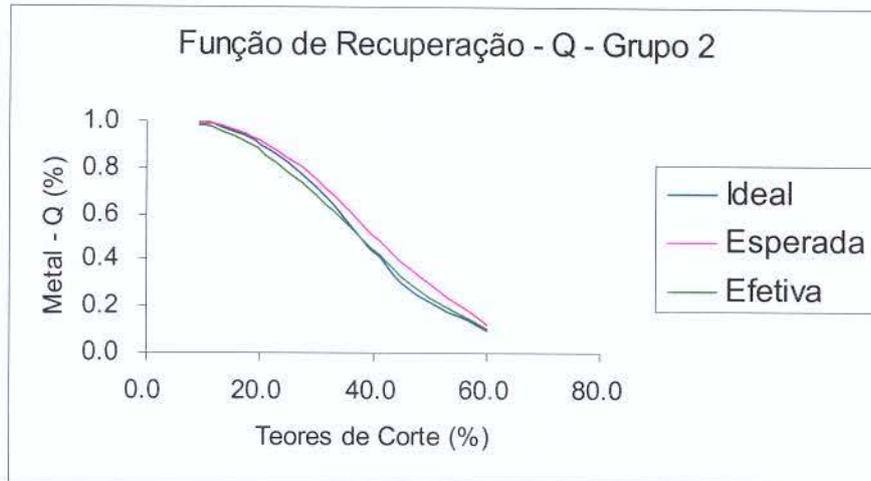


Figura 5.10: Metal contido – Q em reserva classificada com base na CCKO – Grupo 2

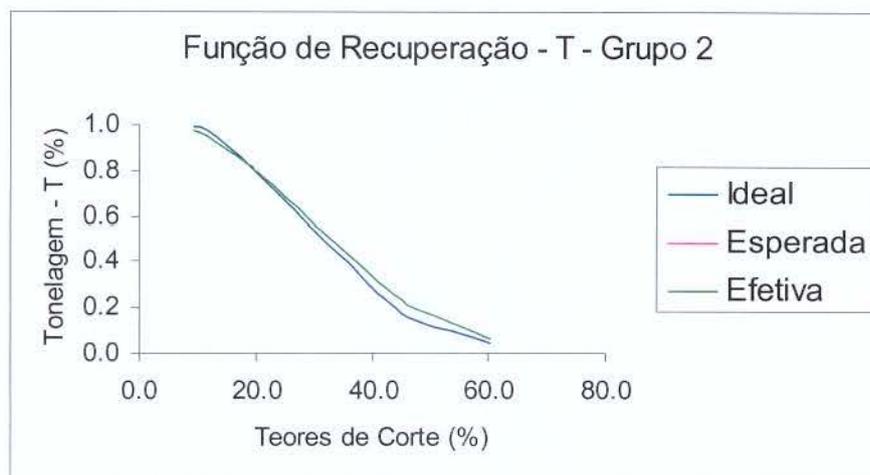


Figura 5.11: Tonelagem (%) – T em reserva classificada com base na CCKO – Grupo 2

Também no Grupo 2, onde tem-se uma menor densidade amostral de GO para utilização nas (co)-estimativas, as diferenças entre os dois métodos mostraram-se pequenas. Tanto na recuperação de metal contido – Q, quanto na proporção de Tonelagem – T, as perdas ocasionadas pelo uso da CCKO em relação à reserva ideal (obtida por KO), foram inferiores a 4.9%. Este resultado mostra que mesmo em condições de amostragem mais escassa, o uso da CCKO é viável, não gerando perdas significativas se comparado à utilização da KO.

5.4. Conclusões

As comparações efetuadas nos itens 5.1, 5.2 e 5.3 mostraram que, em termos gerais, os resultados da Cokrigagem Co-locada - CCKO são estatisticamente competitivos em relação à Krigagem Ordinária - KO. Portanto, o método (CCKO) pode ser aplicado em uma situação de integração parcial de dados químicos e mineralógicos em minério de ferro, prestando-se a constituir um modelo estimado para fins de avaliação de reservas, otimização de cavas finais e controle de lavra.

Em termos específicos há que se destacar as seguintes conclusões sobre a implementação da Cokrigagem Co-locada – CCKO em minério de ferro:

1) Uma das restrições à aplicação da CCKO é o fato de ser necessário que a variável secundária esteja presente em todos os nós do grid. A adaptação proposta no item 4.2, em que a variável secundária PPC é estimada por Krigagem Ordinária, feita para possibilitar a implementação da CCKO da variável mineralógica GO, mostrou-se viável, podendo ser aplicada em outros casos;

2) A aplicação da CCKO em integração de dados mineralógicos é especialmente indicada nos casos em que a variável primária for escassamente amostrada, dificultando o modelamento de sua covariância. Nestes casos, como o mostrado neste trabalho, a escolha do MM2 facilita bastante o modelamento da covariância primária, que é feita através do modelamento da covariância secundária e do coeficiente de correlação;

3) Como previsto para métodos que exploram a correlação espacial entre 2 ou mais variáveis aleatórias, a CCKO diminui, em relação à KO, a variância do erro de estimativa, como pode ser visto no item 5.2;

4) A seleção de reservas feita através de um modelo estimado por CCKO, como mostrado no item 5.3, apresenta pequenas perdas se comparada à seleção baseada em um modelo estimado por KO. Este fato foi evidenciado tanto na situação de baixas variâncias de erro de estimativa

(Grupo 1), onde as perdas de metal contido não foram superiores a 1%, quanto na situação de maiores variâncias de erro de estimativa, ocasionada por uma menor densidade amostral de GO (Grupo 2). Assim conclui-se que o uso da CCKO é recomendável nas situações em que se tiver uma baixa densidade amostral, haja vista que seus resultados mostraram-se semelhantes à KO, incluindo a vantagem adicional de facilitar o modelamento da covariância primária através do MM2, fato que seria dificultado nos casos em que houvesse poucas amostras para modelamento direto da GO.

5.5. Limitações e sugestões para trabalhos futuros

Uma das vantagens do método é a possibilidade de se adotar um modelo Markoviano para simplificar o modelamento de covariâncias. No entanto, quando adota-se o MM1 ou o MM2, há a restrição de aplicá-lo somente para variáveis primárias e secundárias que tenham um elevado coeficiente de correlação para $h=0$. No estudo de caso ora apresentado, foi possível aplicar a CCKO com sucesso integrando as variáveis GO e PPC, que têm um coeficiente de correlação de 0,83. Entretanto, haverá dificuldades de se estender a aplicação da CCKO aos outros minerais – minério portadores de ferro, tais como a HP, MG e HE, caso queira se adotar os modelos Markovianos. Contudo não é vedada sua aplicação caso um LMC seja utilizado, situação em que perde-se as vantagens acerca das facilidades de modelamento de covariâncias.

No intuito de se proceder à uma integração completa das variáveis mineralógicas, sugere-se, para futuros trabalhos, o uso de um modelo linear de coregionalização. Assim será possível obter um modelo integrando dados químicos e mineralógicos de forma que os Itabiritos possam ser classificados segundo a predominância dos minerais – minério. Em complementação pode-se proceder à simulação estocástica, com o objetivo de se ter acesso à incerteza conjunta de química e mineralogia.

Referências Bibliográficas

ALMEIDA and JOURNAL *apud* JOURNAL (1998), Markov Models for Cross Covariances, Stanford Center for reservoir forecasting – SCRF, Vol 2, Stanford University, Stanford, CA.

ALMEIDA *apud* SHMARYAN *et al* (1998), A New Markov Model for Cokriging and Simulation, Stanford Center for reservoir forecasting – SCRF, Vol 2, Stanford University, Stanford, CA.

BLEINER C. *et al* (2000). Isatis Software Manual. Geovariances & Ecole des Mines de Paris, Paris, France. 585p.

CABRAL, I. E. (1998), Comportamento de ponderadores e influência de fatores operacionais e estruturais em processos de estimação por diferentes formas de cokrigagem, Proposta de Tese, Universidade Federal de Minas Gerais, Curso de Pós Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Minas, Belo Horizonte, MG.

CRUZ JUNIOR, A. C. (1998), Análise das Funções de Recuperação para a parametrização de reservas minerais, Dissertação de Mestrado, Instituto de Geociências, Departamento de Administração e Política dos Recursos Minerais, UNICAMP, Campinas, SP.

D'ABBADIA, M. R. I. (1999), Análise do Problema da Krigagem da Soma e da Soma das Krigagens, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, Campinas, SP.

GOOVAERTS, P. (1997), Geostatistics for natural resources evaluation, Oxford University Press Inc., New York, Oxford.

GOOVAERTS *apud* CABRAL (1998), Comportamento de ponderadores e influência de fatores operacionais e estruturais em processos de estimação por diferentes formas de cokrigagem,

Proposta de Tese, Universidade Federal de Minas Gerais, Curso de Pós Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Minas, Belo Horizonte, MG.

KANEKO, K. M. (1999), Caracterização Tipológica-Mineralógica, Estrutural e Modelagem Geométrica Tridimensional da jazida de Ferro de Alegria 1 e 6 – Quadrilátero Ferrífero, Dissertação de Mestrado, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, SP.

ISAAKS, E. and SRIVASTAVA, R. (1989), An Introduction to Applied Geostatistics, Oxford University Press Inc., New York.

JAMES e ROSIÈRE & CHEMALE *apud* KANEKO (1999), Caracterização Tipológica-Mineralógica, Estrutural e Modelagem Geométrica Tridimensional da jazida de Ferro de Alegria 1 e 6 – Quadrilátero Ferrífero, Dissertação de Mestrado, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, SP.

JOURNEL, A. and HUIJBREGTS, C. J. (1978), Mining Geostatistics, Academic Press, New York.

JOURNEL, A. (1998), Markov Models for Cross Covariances, Stanford Center for reservoir forecasting – SCRF, Vol 2, Stanford University, Stanford, CA.

HASUI *et al apud* KANEKO (1999), Caracterização Tipológica-Mineralógica, Estrutural e Modelagem Geométrica Tridimensional da jazida de Ferro de Alegria 1 e 6 – Quadrilátero Ferrífero, Dissertação de Mestrado, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, SP.

LIBANEO, C. A. F. *et al* (2001), Classificação Mineralógica, Textural e Granulométrica de detalhe de Minério de Ferro (“Pellet Feed”) e suas implicações Geosiderúrgicas, Aceito para publicação no III Simpósio Brasileiro de Minério de Ferro, 25 a 28 de Novembro de 2001, Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP, Ouro Preto, MG.

SHMARYAN, L. E. *et al* (1998), A New Markov Model for Cokriging and Simulation, Stanford Center for reservoir forecasting – SCRF, Vol 2, Stanford University, Stanford, CA.

REMACRE, A. Z. & CORNETTI, M. A. (1999) Análise de variabilidade, Krigagens e Funções de Recuperação. in: SEMINÁRIO NACIONAL SOBRE INFORMÁTICA EM MINERAÇÃO: Pesquisa, Lavra e Beneficiamento mineral, 6, 1996. Belo Horizonte - MG, IBRAM, 1996. p.60-69.

WACKERNAGEL, H. (1995), Multivariate Geostatistics: an introduction with applications, Springer-Verlag, Berlim, Heidelberg, 275p.

XU *et al apud* WACKERNAGEL, H. (1995), Multivariate Geostatistics: an introduction with applications, Springer-Verlag, Berlim, Heidelberg, 275p.

XU *et al* e ALMEIDA *apud* CABRAL (1998), Comportamento de ponderadores e influência de fatores operacionais e estruturais em processos de estimação por diferentes formas de cokrigagem, Proposta de Tese, Universidade Federal de Minas Gerais, Curso de Pós Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Minas, Belo Horizonte, MG.

Apêndice A

Cokrigagem Ordinária

A Cokrigagem Ordinária (CKO) é um método de coestimativa que minimiza a variância do erro explorando a correlação espacial cruzada entre 2 ou mais variáveis aleatórias. Dessa forma estima-se uma variável de interesse a partir do uso conjunto de seus próprios dados e de realizações (amostras), de variáveis auxiliares presentes na vizinhança.

Segundo GOOVAERTS (1997), o estimador de Cokrigagem Ordinária (CKO), para uma variável aleatória (V.A) $Z(U)$ é dado pela combinação linear das variáveis aleatórias primária $Z_1(u_{\alpha 1})$ e secundária $Z_2(u_{\alpha 2})$ e seus respectivos pesos $\lambda_{\alpha 1}$ e $\lambda_{\alpha 2}$:

$$Z_1^*(u) = \sum_{\alpha 1}^{n1(u)} \lambda_{\alpha 1}^{CKO}(u) \cdot Z_1(u_{\alpha 1}) + \sum_{\alpha 2}^{n2(u)} \lambda_{\alpha 2}^{CKO}(u) \cdot Z_2(u_{\alpha 2}) \quad A.1$$

onde:

$Z^*(u)$ = estimativa da V.A Z_1 no ponto $u(x,y,z)$ a ser estimado;

$Z_1(u_{\alpha 1})$ = V.A primária;

$Z_2(u_{\alpha 2})$ = V.A secundária;

$\lambda_{\alpha 1}$ = pesos da variável primária (a serem determinados);

$\lambda_{\alpha 2}$ = pesos da variável secundária (a serem determinados);

$n_1(u)$ = número de dados (realizações) de Z_1 na vizinhança;

$n_2(u)$ = número de dados (realizações) de Z_2 na vizinhança;

Assim como na Krigagem Ordinária (KO), o erro de estimativa é definido como sendo a diferença, em cada ponto a ser estimado, entre o valor estimado $Z^*(u)$ e o valor real $Z_1(u)$:

$$R = Z_1^*(u) - Z_1(u) = \sum_{\alpha 1}^{n1(u)} \lambda_{\alpha 1}^{CKO}(u) \cdot Z_1(u_{\alpha 1}) + \sum_{\alpha 2}^{n2(u)} \lambda_{\alpha 2}^{CKO}(u) \cdot Z_2(u_{\alpha 2}) - Z_1(u) \quad A.2$$

onde:

R = V.A erro de estimativa;

$Z^*(u)$ = estimativa da V.A Z_1 no ponto $u(x,y,z)$ a ser estimado;

$Z_1(u_{\alpha 1})$ = V.A primária;

Como, por definição ISAACS and SRIVASTAVA (1989), o método deve prover estimativas não enviesadas, a esperança matemática da variável aleatória R (erro) deve ser igual a zero, ou seja:

$$\sum_{a1}^{n1(u)} \lambda_{\alpha1}^{CKO}(u) \cdot Z_1(u_{a1}) + \sum_{a2}^{n2(u)} \lambda_{\alpha2}^{CKO}(u) \cdot Z_2(u_{a2}) - Z_1(u) = 0 \quad A.3$$

Considerando-se a hipótese da estacionaridade local, as V.A's Z_1 e Z_2 passam a ser representadas por médias locais constantes, ou seja:

$$Z_1(u_{a1}) = m_1(u) = \text{constante} \quad \text{e} \quad Z_2(u_{a2}) = m_2(u) = \text{constante}$$

Então a equação do erro torna-se função apenas dos pesos e das médias locais:

$$m_1(u) \cdot \sum_{a1}^{n1(u)} \lambda_{\alpha1}^{CKO}(u) - m_1(u) + m_2(u) \cdot \sum_{a2}^{n2(u)} \lambda_{\alpha2}^{CKO}(u) = 0 \quad A.4$$

Dessa forma, as condições mais usuais de não enviesamento, que tornarão a equação A.4 nula, são as seguintes:

$$\sum_{a1}^{n1(u)} \lambda_{\alpha1}^{CKO}(u) = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{a2}^{n2(u)} \lambda_{\alpha2}^{CKO}(u) = 0 \quad A.5$$

Estas são as restrições da Cokrigagem Ordinária Padrão (GOOVAERTS (1997, p. 232), ISAACS and SRIVASTAVA (1989, p. 416)).

Sendo a $Var\{R\}$ definida em termos dos pesos da Cokrigagem e covariâncias entre as V.A's Z_1 e Z_2 , tem-se:

$$\begin{aligned}
Var\{R\} &= \sum_{a1}^{n1(u)} \sum_{a2}^{n2(u)} \lambda_{\alpha1}^{CKO}(u) \lambda_{\alpha2}^{CKO}(u) \cdot Cov\{Z_1(u_{a1}), Z_1(u_{a2})\} \\
&+ \sum_{a1}^{n2(u)} \sum_{a2}^{n2(u)} \lambda_{\alpha1}^{CKO}(u) \lambda_{\alpha2}^{CKO}(u) \cdot Cov\{Z_2(u_{a1}), Z_2(u_{a2})\} \\
&+ 2 \sum_{a1}^{n1(u)} \sum_{a2}^{n2(u)} \lambda_{\alpha1}^{CKO}(u) \lambda_{\alpha2}^{CKO}(u) \cdot Cov\{Z_1(u_{a1}), Z_2(u_{a2})\} \\
&\quad - 2 \sum_{a1}^{n1(u)} \lambda_{\alpha1}^{CKO}(u) \cdot Cov\{Z_1(u_{a1}), Z(u)\} \\
&\quad - 2 \sum_{a2}^{n2(u)} \lambda_{\alpha2}^{CKO}(u) \cdot Cov\{Z_2(u_{a2}), Z(u)\} \\
&\quad + 2Cov\{Z(u), Z(u)\}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Também analogamente à Krigagem Ordinária (KO), a variância do erro deve ser minimizada. Considerando que esta minimização deverá ser feita sob duas restrições, dois multiplicadores de Lagrange (μ_1 e μ_2) devem ser introduzidos. Dessa forma as condições de não enviesamento (A.5) são igualadas a zero e multiplicadas pelos respectivos multiplicadores, resultando:

$$Var\{R\} = \sigma_E^2(u) + 2\mu_1 \cdot \left(\sum_{a1}^{n1(u)} \lambda_{\alpha1}^{CKO}(u) \right) - 1 + 2\mu_2 \cdot \left(\sum_{a2}^{n2(u)} \lambda_{\alpha2}^{CKO}(u) \right) \tag{A.7}$$

Para minimizar a equação A.7 primeiro faz-se as derivadas parciais de $Var\{R\}$ em relação aos (n_1+n_2) pesos e aos 2 multiplicadores de Lagrange, depois iguala-as a zero:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(Var\{R\})}{\partial \lambda_{\alpha1}} &= 0 \\
\frac{\partial(Var\{R\})}{\partial \lambda_{\alpha2}} &= 0 \\
\frac{\partial(Var\{R\})}{\partial \mu_1} &= 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\text{Var}\{R\})}{\partial\mu_2} = 0$$

Dessa forma, a variância mínima de estimativa da Cokrigagem Ordinária é dada por:

$$\sigma_E^2(u) = C_{11}(0) - \mu_1(u) - \sum_{\alpha_1}^{n_1(u)} \lambda_{\alpha_1}^{CKO}(u) \cdot C_{11}(u_{\alpha_1} - u) - \sum_{\alpha_2}^{n_2(u)} \lambda_{\alpha_2}^{CKO}(u) \cdot C_{21}(u_{\alpha_2} - u) \quad \text{A.8}$$

O sistema de Cokrigagem Ordinária é escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \sum_{\alpha_1}^{n_1(u)} \lambda_{\alpha_1}(u) \cdot C_{11}(u_{\alpha_1} - u_{\alpha_1}) + \sum_{\alpha_2}^{n_2(u)} \lambda_{\alpha_2}(u) \cdot C_{12}(u_{\alpha_1} - u_{\alpha_2}) + \mu_1(u) = C_{11}(u_{\alpha_1} - u) \\ \sum_{\alpha_1}^{n_1(u)} \lambda_{\alpha_1}(u) \cdot C_{21}(u_{\alpha_2} - u_{\alpha_1}) + \sum_{\alpha_2}^{n_2(u)} \lambda_{\alpha_2}(u) \cdot C_{22}(u_{\alpha_2} - u_{\alpha_2}) + \mu_2(u) = C_{21}(u_{\alpha_2} - u) \\ \sum_{\alpha_1}^{n_1(u)} \lambda_{\alpha_1}(u) = 1 \\ \sum_{\alpha_2}^{n_2(u)} \lambda_{\alpha_2}(u) = 0 \end{cases}$$

Sob a forma matricial, o sistema de Cokrigagem Ordinária pode ser escrito:

$$[\mathbf{K}] \cdot [\boldsymbol{\lambda}] = [\mathbf{M}] \quad \text{A.9}$$

$$\begin{bmatrix} [C_{11}(u_{\alpha_1}, u_{\alpha_1})] & [C_{12}(u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2})] & [1_1] & [0_1] \\ [C_{21}(u_{\alpha_2}, u_{\alpha_1})] & [C_{22}(u_{\alpha_2}, u_{\alpha_2})] & [0_2] & [1_2] \\ [1_1]^T & [0_2]^T & 0 & 0 \\ [0_1]^T & [1_2]^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\lambda_{\alpha_1}]^T \\ [\lambda_{\alpha_2}]^T \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C_{11}(u_{\alpha_1}, u)]^T \\ [C_{21}(u_{\alpha_2}, u)]^T \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Apêndice B

Modelos lineares de coregionalização

Os variogramas experimentais multivariados proveêm um conjunto de matrizes $\Gamma(h_k)=[\gamma_{ij}(h_k)]$ para um número finito de passos h_k , $h=1,\dots,k$ e direções. No caso univariado o modelamento provê um valor do variograma (ou da covariância) para qualquer distância h , como é necessário pelos algoritmos de interpolação.

Casos multivariáveis requerem o modelamento de $N_v (N_v+1)/2$ variogramas diretos e cruzados. A dificuldade não está no número de modelos a inferir, mas sim no fato de que estes modelos não podem ser feitos independentemente uns dos outros

Por analogia com o caso univariado, a maneira mais simples de se obter um modelo de coregionalização consiste em construir um conjunto de F.A's $Z_i(u)$. A correspondente matriz de covariâncias $C(h)$ ou de variogramas $\Gamma(h)$ é, por definição, autorizada.

O modelo linear de coregionalização constrói cada F.A $Z_i(u)$ como uma combinação linear de F.A's independentes $Y_k^l(u)$, cada uma com média zero e função covariância $C_l(h)$

$$Z_i(u) = \sum_{l=0}^L \sum_{k=1}^{n_l} a_{ik}^l Y_k^l(u) + m_i \quad \forall i \quad \text{B.1}$$

Onde:

$Z_i(u)$ = combinação linear de $(L+1)$ F.A's;

L = número de F.A's;

n_l = número de variáveis;

a_{ik}^l = coeficientes das funções básicas autorizadas;

$Y_k^l(u)$ = funções básicas autorizadas;

m_i = média zero.

Satisfazendo:

$$E\{Z_i(u)\} = m_i$$

$$E\{Y_k^l(u)\} = 0 \quad \forall l$$

$$Cov\{Y_k^l(u), Y_{k'}^{l'}(u+h)\} = C_l(h) \quad \text{se } k = k' \quad \text{se } l = l'$$

$$Cov\{Y_k^l(u), Y_{k'}^{l'}(u+h)\} = 0 \quad \text{caso contrário}$$

GOOVAERTS (1997) ainda ressalta que algumas das funções $Y_k^l(u)$ com $n_l \leq N_v$ podem dividir a mesma covariância $C_l(h)$, mas ainda assim elas se mantêm independentes umas das outras. Desse modo o número total de funções básicas autorizadas $Y_k^l(u)$ é então:

$$\sum_{l=0}^L n_l \leq (L+1) \cdot N_v \quad \text{B.2}$$

Uma vez definida a construção da F.A $Z_i(u)$, a covariância cruzada entre as variáveis aleatórias $Z_i(u)$ e $Z_j(u+h)$ pode ser expressa como uma combinação linear das covariâncias cruzadas entre quaisquer duas variáveis aleatórias $Y_k^l(u)$ e $Y_{k'}^{l'}(u+h)$:

$$\begin{aligned} C_{ij}(h) &= Cov\{Z_i(u), Z_j(u+h)\} \\ &= \sum_{l=0}^L \sum_{l'=0}^L \sum_{k=1}^{n_l} \sum_{k'=1}^{n_{l'}} a_{ik}^l a_{jk'}^{l'} \cdot Cov\{Y_k^l(u), Y_{k'}^{l'}(u+h)\} \end{aligned} \quad \text{B.3}$$

Como as funções básicas autorizadas $Y_k^l(u)$ são mutuamente independentes, a expressão 4.6 reduz-se a:

$$C_{ij}(h) = \sum_{l=0}^L \sum_{k=1}^{n_l} a_{ik}^l a_{jk}^l c_l(h)$$

Então o modelo linear de coregionalização é um conjunto de $N_v \times N_v$ modelos de covariâncias diretas e cruzadas $C_{ij}(h)$:

$$C_{ij}(h) = \sum_{l=0}^L b_{ij}^l c_l(h) \quad \forall i, j \quad \text{B.4}$$

onde o patamar b_{ik}^l da função básica do modelo de covariância $C_l(h)$ é:

$$b_{ij}^l = \sum_{k=1}^{n_l} a_{ik}^l a_{jk}^l \quad \forall l, i, j \quad \text{B.5}$$

Sendo que, por construção, os coeficientes b_{ij}^l e b_{ji}^l são idênticos, tornando iguais os modelos de covariância $C_{ij}(h)$ e $C_{ji}(h)$.

A relação B.5 é importante porque é a definição geral da matriz $N_v \times N_v$ positiva semi-definida $B_l = [b_{ij}^l]$, chamada de matriz de coregionalização.

Dessa forma, as condições suficientes para que a matriz de funções $C_l(h)$, definidas na relação B.4, sejam modelos permissíveis de coregionalização são:

as funções básicas $C_l(h)$ ou $(Y_k^l(u))$ sejam modelos autorizados de covariância (ou de variogramas);

as $(L+1)$ matrizes de coregionalização B_l sejam positivas semi-definidas.

GOOVAERTS (1997) ressalta que um desenvolvimento similar pode ser feito com semi-variogramas. Seja $g_l(h)$ seja o semi-variograma das n_l funções básicas $Y_k^l(u)$, com semi-variogramas cruzados entre $Y_k^l(u)$ e $Y_{k'}^{l'}(u)$ iguais a zero:

$$E \{ [Y_k^l(u) - Y_k^l(u+h)] \cdot [Y_{k'}^{l'}(u) - Y_{k'}^{l'}(u+h)] \} = g_l(h) \quad \text{se } k=k' \text{ e } l=l'$$

$$E \{ [Y_k^l(u) - Y_k^l(u+h)] \cdot [Y_{k'}^{l'}(u) - Y_{k'}^{l'}(u+h)] \} = 0 \quad \text{caso contrário.}$$

Então o modelo linear de coregionalização é definido como um conjunto de $N_v = N_v$ modelos $\gamma_{ij}(h)$ de variogramas diretos e cruzados tais que:

$$\gamma_{ij}(h) = \sum_{l=0}^L b_{ij}^l g_l(h) \quad \forall i, j \quad \text{B.6}$$

onde cada função $g_l(h)$ é um modelo autorizado de variograma, e as $(L+1)$ matrizes de coeficientes b_{ij}^l , correspondendo aos patamares dos modelos $g_l(h)$, são todas positivo semi-definidas.

d = densidade.

Em termos analíticos, a quantidade de metal Q , estimada ou real, para cada tipo de reserva será dada por:

RE

$$\text{Se } Z^* \geq z_c \text{ então } Q^*(z_c) = T \times \sum_{z^* \geq z_c} Z^* \quad \text{C.2}$$

Onde:

T = tonelagem $v \times d$;

Z^* = teor estimado;

z_c = teor de corte;

$Q^*(z_c)$ = quantidade de metal estimada em função do teor de corte.

RI

$$\text{Se } Z \geq z_c \text{ então } Q(z_c) = T \times \sum_{z \geq z_c} Z \quad \text{C.3}$$

Onde:

T = tonelagem $v \times d$;

Z = teor real;

z_c = teor de corte;

$Q(z_c)$ = quantidade de metal real em função do teor de corte.

REF

$$\text{Se } Z^* \geq z_c \text{ então } Q_f(z_c) = T \times \sum_{z \geq z_c} Z \quad \text{C.4}$$

Onde:

T = tonelagem $v \times d$;

Z^* = teor estimado;

z_c = teor de corte;

$Q_f(z_c)$ = quantidade de metal efetiva em função do teor de corte.

REMACRE(1999) ainda observa que o efetivamente recuperado, seja em termos de metal contido, tonelagem ou benefício, será sempre menor que o esperado ou ideal. Isso deve-se ao efeito de informação, consequência de uma seleção feita baseada em um estimador que se encontra em uma situação desfavorável, fragmentária em relação ao ideal.

Uma descrição mais completa sobre funções de recuperação, inclusive com detalhes matemáticos, pode ser encontrada em CRUZ JUNIOR (1998).