

**UNICAMP**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS**

**PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOCIÊNCIAS - ÁREA DE  
ADMINISTRAÇÃO E POLÍTICA DOS RECURSOS  
MINERAIS**

**ANTÔNIO CAMILO CRUZ JÚNIOR**

**ANÁLISE DAS FUNÇÕES DE RECUPERAÇÃO PARA A  
PARAMETRIZAÇÃO DE RESERVAS MINERAIS**

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências  
como parte dos requisitos para obtenção do título de  
Mestre em "Geociências - área de administração e política  
dos recursos minerais."

**Orientador:** Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre.

**CAMPINAS - SÃO PAULO**

**OUTUBRO – 1998**

**C889a**

**35804/BC**



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS / ÁREA DE  
ADMINISTRAÇÃO E POLÍTICA DOS RECURSOS  
MINERAIS**

**PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOCIÊNCIAS - ÁREA DE  
ADMINISTRAÇÃO E POLÍTICA DOS RECURSOS  
MINERAIS**

**ANTÔNIO CAMILO CRUZ JÚNIOR**

**ANÁLISE DAS FUNÇÕES DE RECUPERAÇÃO PARA A  
PARAMETRIZAÇÃO DE RESERVAS MINERAIS**

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências  
como parte dos requisitos para obtenção do título de  
Mestre em "Geociências - área de administração e política  
dos recursos minerais."

**Orientador:** Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre - UNICAMP/IG/AGP

**CAMPINAS - SÃO PAULO**

**OUTUBRO – 1998**

**II**

9823041



UNIDADE	BC
N.º CHA	
	I/UNICAMP
	C 889 a
V.	
P.	35 804
	395/98
	0 [X]
P.	2411,00
DATA	13/11/98
N.º CPU	

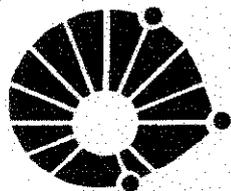
FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA I.G. - UNICAMP

CM-00118485-5

Cruz Júnior, Antônio Camilo  
C889 a Análise das funções de recuperação para a parametrização  
de reservas minerais / Antônio Camilo Cruz Júnior.-  
Campinas,SP.: [s.n.], 1998.

Orientador: Armando Zaupa Remacre  
Dissertação (mestrado) Universidade Estadual de  
Campinas, Instituto de Geociências

1. Geoestatística. 2. Mineração. 3. Recursos Minerais  
(Reservas). 4. Análise Estocástica. I. Remacre, Armando  
Zaupa. II. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Geociências. III. Título



**UNICAMP**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS/ ÁREA DE  
ADMINISTRAÇÃO E POLÍTICA DOS RECURSOS  
MINERAIS**

**PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOCIÊNCIAS - ÁREA DE  
ADMINISTRAÇÃO E POLÍTICA DOS RECURSOS  
MINERAIS**

**AUTOR: Antônio Camilo Cruz Júnior**

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: ANÁLISE DAS FUNÇÕES DE RECUPERAÇÃO  
PARA APARAMETRIZAÇÃO DE RESERVAS  
MINERAIS**

**ORIENTADOR: Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre**

**Aprovada em: 7, 10, 98**

**PRESIDENTE: Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre**

**EXAMINADORES:**

**Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre**

**- Presidente**

**Prof. Dr. Saul Barisnik Suslick**

**Prof. Dr. Giorgio de Tomi**

**Prof. Dr. Sérgio Nascimento Bordalo**

**- Suplente**

Campinas, de de 1998

**À Sra. Esther Pereira de Carvalho**

## **Agradecimentos**

**À CAPES pela oportunidade e recursos financeiros oferecidos.**

**Ao Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre pelo apoio e importante trabalho de orientação.**

**Aos membros das bancas examinadoras de qualificação e defesa pelas valiosas sugestões.**

**Aos professores e funcionários do IG - UNICAMP que participaram da formação teórica e prática durante o mestrado.**

**Ao Moacir Cornetti pela atenção e colaboração prestadas no laboratório de informática.**

**Aos colegas de mestrado que souberam manter a união, colaboração e amizade.**

**À minha esposa Leila Beatriz pela compreensão, incentivo, carinho e dedicação.**

**À meus pais Camillo Cruz e Esther Pereira de Carvalho pelo carinho e compreensão.**

**Aos meus irmãos pela compreensão e colaborações (Vera, Hércules, Marina e Robinson).**

**À Deus pelo amparo e proteção.**

# Sumário

DEDICATÓRIA.....	i
AGRADECIMENTOS.....	ii
ÍNDICE.....	iii
LISTA DE FIGURAS.....	v
LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS.....	viii
LISTA DE SÍMBOLOS.....	ix
LISTA DE TABELAS.....	xii
RESUMO.....	xiv
ABSTRACT.....	xv
<b>I CAPÍTULO 1 .....</b>	<b>1</b>
I.1 Introdução .....	1
I.1.1 Recursos “in situ” e Reservas Recuperáveis .....	1
I.1.2 Objetivos desta dissertação .....	4
I.1.3 Metodologia.....	5
I.1.4 Organização da Dissertação.....	7
<b>II CAPÍTULO 2 .....</b>	<b>8</b>
II.1 Funções de recuperação e parametrização de reservas .....	8
II.2 FR para variáveis contínuas.....	10
II.2.1 Função tonelagem - $T(z)$ :.....	10
II.2.1.1 Representação gráfica da função $T(z)$ : .....	11
II.2.2 Função metal contido - $Q(z)$ :.....	12
II.2.2.1 Representação gráfica da função $Q(z)$ :.....	12
II.2.3 Função Metal Contido x Tonelagem - $Q(T)$ :.....	13
II.2.3.1 Representação gráfica da função $Q(T)$ .....	13
II.2.4 Função benefício convencional - $B(z)$ :.....	15
II.2.4.1 Representação gráfica da função $B(z)$ .....	16
II.2.5 Função Teor Médio - $m(z)$ .....	17
II.3 Modelos de distribuição de probabilidade .....	18

II.4	FR para variáveis discretas.....	19
<b>III</b>	<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>21</b>
III.1	Efeito Suporte.....	21
III.2	Validação Cruzada .....	24
III.3	Efeito Informação.....	26
<b>IV</b>	<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>32</b>
IV.1	Tipos de Reservas Recuperáveis.....	32
IV.1.1	Para o caso da distribuição Normal .....	35
IV.1.2	Para o caso da distribuição Lognormal .....	35
<b>V</b>	<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>39</b>
V.1	Criação do Estudo de Caso .....	39
V.2	Impacto do Efeito Suporte sobre as FR .....	40
V.3	Impacto do efeito informação sobre as FR.....	46
<b>VI</b>	<b>CONCLUSÕES</b> .....	<b>55</b>
	<b>ANEXO</b> .....	<b>56</b>
	<b>REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>62</b>

## Lista de Figuras

Figura 1.1: Esquema de uma bancada de um depósito de metal (Rivoirard, 1994). ..	2
Figura 1.2 : Ilustração da conversão da reserva estimada em reserva recuperável, dado um cenário técnico e econômico.....	4
Figura 1.3: Esquema da metodologia adotada. ....	6
Figura 2.1: Curva Tonelagem x Teor de corte: $T(z)$ .....	11
Figura 2.2: Ilustração da função $Q(z)$ .....	12
Figura 2.3: Ilustração da função $Q(T)$ .....	14
Figura 2.4: ilustração da função Quantidade de Metal x Tonelagem $Q(T)$ , com os parâmetros $B$ , $m$ e $z$ .....	15
Figura 2.5: Ilustração da função benefício convencional: $B(z)$ .....	16
Figura 2.6: Ilustração da função Benefício Convencional $B(z)$ , com os parâmetros $Q$ , $T$ e $m$ .....	16
Figura 2.7: Ilustração da função Teor Médio $m(z)$ .....	17
Figura 3.1: Ilustração de um domínio $D$ dividido nos suportes $v$ e $V$ . ....	22
Figura 3.2: a) Função densidade de probabilidade, b) Função densidade de probabilidade acumulada, para os suportes $v$ e $V$ . ....	22
Figura 3.3: Ilustração das funções de recuperação: a) $T(z)$ , b) $Q(z)$ e c) $B(z)$ , para os suportes $v$ e $V$ . ....	23
Figura 3.4: Nuvem de dispersão $Z(x_i) \times Z^*(x_i)$ gerada pela validação cruzada. ....	25
Figura 3.5: Teores verdadeiros versus Teores estimados [ $Z(v_i) \times Z^*(v_i)$ ], e um teor de corte $z$ em ambos os eixos. ....	27
Figura 3.6: Regressão normal.....	30
Figura 3.7: Regressão Lognormal.....	31
Figura 4.1: Funções de recuperação: a)Tonelagem $T(z)$ , b)Metal contido $Q(z)$ , c)Benefício Convencional $B(z)$ e d)Metal contido $\times$ Tonelagem $Q(T)$ para as reservas ilusória, ideal, efetiva e ótima. Utilizando os parâmetro: teor médio $m=1$ g/t variância pontual $\sigma_x^2=1,718$ (g/t) <sup>2</sup> , variância de bloco $\sigma_v^2=0,649$ (g/t) <sup>2</sup> e correlação $\rho=0,5$ (reproduzido de Matheron 1981). ....	36

Figura 4.2: Ilustração do cálculo de reserva estimada, verdadeira e efetiva.....	38
Figura 5.1: Ilustração do cálculo do teor de metal $Z(v_i)$ para o suporte de 3x3m: pela média do suporte de 1x1m.....	41
Figura 5.2: a) Variogramas experimentais para os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m na direção do eixo x. b) Variância de $Z(v)$ versus Tamanho de Suporte $v$ .....	42
Figura 5. 3: Histogramas dos teores de metal $Z(v_i)$ : suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m. ....	42
Figura 5. 4: Representação gráfica da função Tonelagem $[T(z)]$ , definida sobre os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m.....	43
Figura 5.5: Representação gráfica da função Metal Contido $[Q(z)]$ , definida sobre os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m.....	44
Figura 5.6: Representação gráfica da função Benefício Convencional $[B(z)]$ , definida sobre os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m.....	45
Figura 5.7: Representação gráfica da função Metal Contido x Tonelagem $Q(T)$ , definida sobre os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m.....	46
Figura 5.8: a) 10 Caso: estimativa do teor de metal $Z^*(v_i)$ do bloco $v_i$ pelo teor da amostra localizada no centro do bloco $v_i$ com suporte de 5x5m e b) 20 Caso: Vizinhança de Krigagem de bloco para estimativa do teor de metal $Z^*(v_i)$ do bloco $v_i$ para o suporte de 5x5m.....	47
Figura 5.9: Curvas da Tonelagem $[T(z)]$ : para os teores verdadeiro $Z(v_i)$ , e para os estimados $Z^*(v_i)$ pelo teor da amostra central do bloco $v_i$ e pela krigagem de bloco usando as 5 amostras mais próximas ao bloco $v_i$ ; isto para os suportes de a)3x3, b)5x5 e c)7x7m. ....	50
Figura 5.10: Curvas do Metal Contido $[Q(z)]$ : para os teores verdadeiro $Z(v_i)$ , e para os estimados $Z^*(v_i)$ pelo teor da amostra central do bloco $v_i$ e pela krigagem de bloco usando as 5 amostras mais próximas ao bloco $v_i$ , isto para os suportes de a)3x3, b)5x5 e c)7x7m.....	52
Figura 5.11: Curvas do Metal Contido x Tonelagem $[Q(T)]$ : para os teores verdadeiro $Z(v_i)$ , e para os estimados $Z^*(v_i)$ pelo teor da amostra central do	

bloco  $v_i$  e pela krigagem de bloco usando as 5 amostras mais próximas ao bloco  $v_i$ , isto para os suportes de a)3x3, b)5x5 e c)7x7m..... 53

Figura 5.12: Curvas do Benefício Convencional [ $B(z)$ ]: para os teores verdadeiro  $Z(v_i)$ , e para os estimados  $Z^*(v_i)$  pelo teor da amostra central do bloco  $v_i$  e pela krigagem de bloco usando as 5 amostras mais próximas ao bloco  $v_i$ , isto para os suportes de a)3x3, b)5x5 e c)7x7m..... 54

## Lista de Siglas e Abreviaturas

FA	Função aleatória.
fdp	função densidade de probabilidade.
fdpa	função densidade de probabilidade acumulada.
FR	Funções de recuperação.
IG	Instituto de Geociências.
IQD	Inverso do Quadrado da Distância.
ISATIS	Software Geoestatístico da Geovariances.
KO	Krigagem ordinária.
TB	Simulação <i>Turning Bands</i> ou Bandas Rotativas.
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas.
VA	Variável aleatória.

## Lista de símbolos

$A$	Área (ou volume) a ser estimada.
$B(z)$	Função benefício convencional.
$B_v(z)$	Função benefício convencional, definida sobre o suporte $v$ .
$B_V(z)$	Função benefício convencional, definida sobre o suporte $V$ .
$B_{ef}(Z(x_i) \geq z)$	Função benefício convencional para reserva efetiva.
$B_{Z(v)}(z)$	Função benefício convencional para reserva ideal.
$B_{id}(z)$	Função benefício convencional para reserva ideal.
$B_{il}(z)$	Função benefício convencional para reserva ilusória.
$B_{opt}(z)$	Função benefício convencional para reserva ótima.
$B_{Z(x)}(z)$	Função benefício convencional para reserva ilusória.
$C(z)$	Função custo.
$C(h)$	Função de covariância entre duas VAs separadas por $h$ .
<b>C</b>	Matriz das covariâncias pontuais entre as amostras.
$C(x_i - x_j)$	Covariância entre as duas VAs nas posições $x_i$ e $x_j$ .
$C(x_i - x_0)$	Covariância entre as duas VAs na posição $x_i$ e onde se quer estimar $x_0$ .
$C(x_i - A)$	Covariância entre as duas VAs na posição $x_i$ e a área $A$ .
$\bar{C}(x_i - A)$	Covariância média entre as duas VAs na posição $x_i$ e a área $A$ .
$\bar{C}_{AA}$	Covariância entre os pares de pontos discretizados dentro de $A$ .
$d_i$	Densidade do bloco $i$ .
<b>D</b>	Vetor das covariâncias entre as amostras e os pontos a serem estimados, para krigagem pontual; Vetor das covariâncias médias entre as amostras e as área $A$ a ser estimada, para krigagem de bloco.
$E[Z]$	Esperança matemática dos teores $Z$ .
$E[Z   Z > z]$	Esperança matemática condicional.
$ef$	Relativo à reserva efetiva.
$f(z)$	Função densidade de probabilidade.
$F(z)$	Função densidade de probabilidade acumulada.
$F_v(z)$	Função densidade de probabilidade acumulada da VA $Z(v_i)$ .
$F_V(z)$	Função densidade de probabilidade acumulada da VA $Z(V_i)$ .

$F_{Z(x)}$	Função densidade de probabilidade acumulada da VA $Z(x_i)$ .
$F_{Z(v)}$	Função densidade de probabilidade acumulada da VA $Z(v_i)$ .
$F_h$	Função densidade de probabilidade acumulada definida sobre $h$ .
$g(y)$	Função densidade de probabilidade gaussiana padrão.
$G(y)$	Função densidade de probabilidade acumulada gaussiana padrão.
$h$	Distância entre duas posições; Regressão condicional $E[Z(v_i) Z(x_i)]$ .
$h(Z(x))$	Função de regressão condicional $E[Z(v_i) Z(x_i)]$ .
$I_i(z)$	Função indicatriz.
$id$	Referente à reserva ideal.
$il$	Referente à reserva ilusória.
$m$	Teor médio de metal.
$m(z)$	Função teor médio.
$m_v(z)$	Função teor médio, definida sobre o suporte $v$ .
$m_V(z)$	Função teor médio, definida sobre o suporte $V$ .
$N(0,1)$	Distribuição gaussiana padrão com média zero e variância unitária.
$n$	Número de amostras; Número de linhas para a simulação <i>Turning Bands</i> .
$opt$	Referente à reserva ótima.
$P(Z > z)$	Probabilidade do teor $Z$ ser maior que o teor de corte $z$ .
$P(Z \leq z)$	Probabilidade do teor $Z$ ser menor ou igual que o teor de corte $z$ .
$p(z)$	Função de probabilidade de $Z = z$ .
$P(Z = z)$	Probabilidade de $Z = z$ .
$p$	Inclinação de regressão.
$Q(z)$	Função metal contido.
$Q(T)$	Metal contido em função da tonelagem.
$Q_v(z)$	Função metal contido definida sobre o suporte $v$ .
$Q_V(z)$	Função metal contido definida sobre o suporte $V$ .
$Q_{il}(z)$	Função metal contido para reserva ilusória.
$Q_{Z(x)}(z)$	Função metal contido para reserva ilusória.
$Q_{il}(T)$	Metal contido em função da tonelagem para reserva ilusória.
$Q_{ef}(Z(x_i) \geq z)$	Função metal contido para reserva efetiva.

$Q_{ef}(T)$	Metal contido em função da tonelagem para reserva efetiva.
$Q_{id}(z)$	Função metal contido para reserva ideal.
$Q_{Z(v)}(z)$	Função metal contido para reserva ideal.
$Q_{id}(T)$	Metal contido em função da tonelagem para reserva ideal.
$Q_{opt}(z)$	Função metal contido para reserva ótima $Q_{opt}(Z(x_i) \geq z)$ .
$Q_{opt}(T)$	Metal contido em função da tonelagem para reserva ótima.
$R^n$	Espaço de dimensão $n$ .
$R_v$	Reserva verdadeira.
$R_e$	Reserva estimada.
$R_{ef}$	Reserva efetiva.
$S$	Índice de seletividade.
$S^2$	Variância da VA resultante da transformação da VA reduzida $y'$ .
$T(z)$	Função tonelagem.
$T_v(z)$	Função tonelagem, definida sobre o suporte $v$ .
$T_V(z)$	Função tonelagem, definida sobre o suporte $V$ .
$T_{il}(z)$	Função tonelagem para reserva ilusória.
$T_{Z(x)}(z)$	Função tonelagem para reserva ilusória.
$T_{ef}(Z(x_i) \geq z)$	Função tonelagem para reserva efetiva.
$T_{id}(z)$	Função tonelagem para reserva ideal.
$T_{Z(v)}(z)$	Função tonelagem para reserva ideal.
$T_{opt}(z)$	Função tonelagem para reserva ótima $T_{opt}(Z(x_i) \geq z)$ .
$Var[Z(v_i)]$	Variância de $Z(v_i)$ .
$Var[Z^*(v_i)]$	Variância de $Z^*(v_i)$ .
$v_i$	Volume do bloco (ou do suporte) $i$ .
$x_0$	Posição genérica em que é realizada a estimativa.
$y$	Variável reduzida, padronizada.
$y_s$	Variável simulada pelo algoritmo <i>Turning Bands</i> .
$y'$	Variável reduzida da variável simulada $y_s$ .
$z$	Teor de corte ( <i>cutoff</i> ).
$Z(v_i)$	Teor de metal do bloco $v_i$ .
$Z(V_i)$	Teor de metal definido sobre o suporte $V$ .

$Z(x_i)$	Teor de metal da amostra na posição $x_i$ .
$Z^*(x_i)$	Teor de metal estimado na posição $x_i$ .
$Z^*(v_i)$	Teor de metal estimado sobre o suporte $v$ .
$z(x)$	Variável regionalizada, realização da FA $Z(x)$ .
$Z(x)$	Função aleatória referente a VA $z(x)$ .
$z_s(x)$	Realizações simuladas da FA $Z(x)$ .
$Z_{si}(x)$	Valor da simulação unidimensional na posição $x$ .
$Z_{snc}(x)$	Valor da simulação não condicional na posição $x$ .
$Z_j$	VA correspondente aos valores dos pontos dentro da área $A$ .
$Z_A$	Valor médio sobre uma área $A$ .
$\lambda_i$	Ponderadores, pesos de krigagem.
$\lambda(A)$	Peso de krigagem da área $A$ .
$\lambda$	Vetor dos pesos de krigagem (pontual ou de bloco).
$\sigma$	Desvio padrão.
$\sigma^2$	Variância.
$\sigma^{*2}$	Variância da variável estimada.
$\sigma_H^2$	Variância da função $H$ .
$\sigma_{Z(x)}^2$	Variância da variável $Z(x_i)$ .
$\sigma_{Z(v)}^2$	Variância da variável $Z(v_i)$ .
$\sigma_y^2$	Variância da variável reduzida $y$ .
$\sigma_s^2$	Variância da variável simulada $y_s$ .
$\sigma_K^2(x_0)$	Variância de krigagem da posição $x_0$ .
$\bar{\sigma}_K^2$	Variância de krigagem de bloco.
$\gamma(h)$	Variograma.
$\rho$	Correlação.
$\mu$	Teor médio para o caso de distribuição contínuo.
$\mu_s$	Média da variável simulada $y_s$ .
$\mu$	Média;
	Multiplicador de Lagrange.
$\mu(A)$	Multiplicador de Lagrange para a krigagem da área $A$ .
$\forall$	Para todo e qualquer valor.

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1: : Expressões das FR para os casos de fdp normal e lognormal: nos quais $\mu$ e $\sigma^2$ são, respectivamente, a média e a variância de $Z$ para o caso normal, e a média e a variância de $\ln(Z)$ para o caso lognormal. ....	18
Tabela 2.2: Impacto causado pela incerteza do teor médio de metal do depósito sobre as FR, para o caso que o teor de metal ter distribuição lognormal, considerando o teor de corte $z = 2,00$ g/t.....	19
Tabela 5.1: Parâmetros utilizados e obtidos durante a fase de transformação.....	40
Tabela 5.2: Estatística básica dos teores de metal $Z(v_i)$ para suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m, e para os dados simulados. ....	41
Tabela 5.3: Quantidade de minério selecionado pela aplicação do teor de corte $z = 2$ g/t, em porcentagem da reserva total, para os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m. ....	43
Tabela 5.4: Quantidade de metal selecionado pela aplicação do teor de corte $z = 2$ g/t, em porcentagem, em relação a quantidade total de metal contida na reserva mineral, para os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m. ....	44
Tabela 5.5: Benefício convencional, em porcentagem, aplicando o teor de corte $z = 2$ g/t, para os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m. ....	45
Tabela 5.6: Quantidade de metal contido em 20% da reserva suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m.....	46
Tabela 5.7: Impacto do efeito informação, para o 1o caso, em diferença relativa à reserva verdadeira $[100 \cdot (Q^* - Q) / Q]$ , sobre as curvas $T(z)$ , $Q(z)$ , $B(z)$ e $Q(T)$ , utilizando os teores de corte $z_1 = 1,5$ g/t, $z_2 = 2,0$ g/t e $z_3 = 2,5$ g/t, para o suporte de 5x5m. ....	48
Tabela 5.8: Impacto do efeito informação, para o 2o caso, em diferença relativa à reserva verdadeira $[100 \cdot (Q^* - Q) / Q]$ , sobre as curvas $T(z)$ , $Q(z)$ , $B(z)$ e $Q(T)$ , utilizando os teores de corte $z_1 = 1,5$ g/t, $z_2 = 2,0$ g/t e $z_3 = 2,5$ g/t, para o suporte de 5x5m. ....	51



**UNICAMP**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS / ÁREA DE  
ADMINISTRAÇÃO E POLÍTICA DOS RECURSOS  
MINERAIS**

**PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOCIÊNCIAS - ÁREA DE  
ADMINISTRAÇÃO E POLÍTICA DOS RECURSOS  
MINERAIS**

**ANÁLISE DAS FUNÇÕES DE RECUPERAÇÃO PARA A  
PARAMETRIZAÇÃO DE RESERVAS MINERAIS**

**RESUMO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Antônio Camilo Cruz Júnior**

Apesar do desenvolvimento de modernas técnicas de tratamento de minério, a estimativa de reservas ainda é uma parte importante na avaliação de reservas.

Esta dissertação representa o formalismo das funções de recuperação (curvas tonelagem teor) com o objetivo de esclarecer os efeitos vinculados à atividade mineira, tais como: o efeito suporte e o efeito informação.

O estudo do efeito suporte e do efeito informação, considerando que a seleção de blocos é feita sem restrições (seleção livre), mostrou que a mudança de suporte e a tomada de decisão sobre valores estimados degradam significativamente as curvas de parametrização, no sentido de perda econômica.



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS / ÁREA DE  
ADMINISTRAÇÃO E POLÍTICA DOS RECURSOS  
MINERAIS**

**PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOCIÊNCIAS - ÁREA DE  
ADMINISTRAÇÃO E POLÍTICA DOS RECURSOS  
MINERAIS**

**RECOVERY FUNCTIONS ANALYSIS FOR  
ORE RESOURCES PARAMETRIZATION**

**ABSTRACT**

**MASTER DISSERTATION**

**Antônio Camilo Cruz Júnior**

Despite of the development of new techniques of ore treatment, the estimation of reserves is still an important part in its evaluation process.

This dissertation shows the formalism of the recovery functions (grade versus tonnage curves) with the objective of emphasizing the effects that come from mining activity, such as: the support effect and the information effect.

The study of the support effect and information effect, considering that the selection of blocks is done without restrictions (free selection), showed that change in support and in taking of decision on estimate values degrade the grade/tonnage curves significantly, in the sense of economic loss.

# I Capítulo 1

## I.1 Introdução

Nos últimos anos a indústria de mineração tem se desenvolvido muito principalmente na área de tratamento de minério. Paralelamente a isso as demandas da sociedade em relação ao meio ambiente tem exigido cada vez mais que os projetos de mineração diminuam riscos e incertezas relativas a qualidade seja do minério produzido, seja do estéril envolvido.

O domínio ou o controle dos riscos e incertezas dos projetos também tem sido exigidos dos órgãos de financiamento dada a escassez de investimentos no setor de mineração, dada, também a pressão da sociedade, nesses órgãos, em relação aos cuidados que se deve ter do meio ambiente.

Por essas razões a estimativa de reservas é e continuará sendo uma das áreas importantes das partes envolvidas nos projetos de avaliação de recursos minerais.

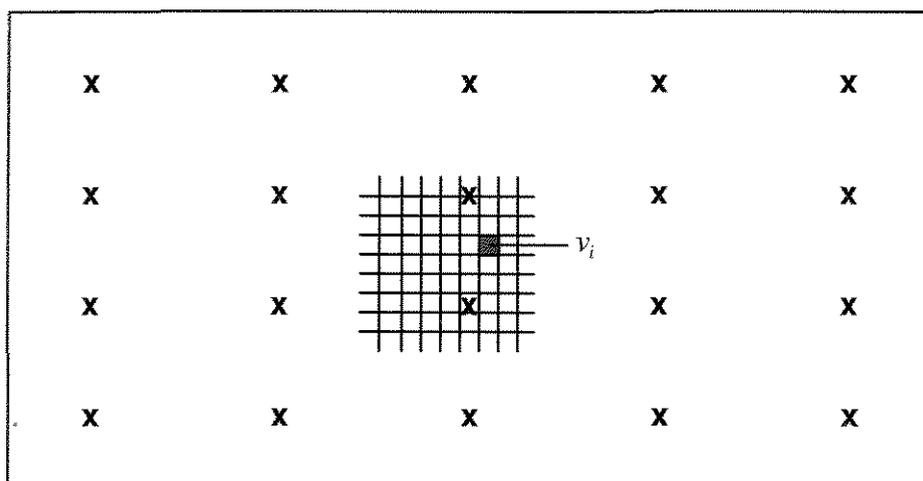
Esta dissertação representa o formalismo das funções de recuperação (FR) (curvas do tipo tonelagem $\times$ teor) com o objetivo de esclarecer diversos efeitos decorrentes à atividade mineira, ou seja, o efeito suporte e o efeito informação.

Além de ser feita uma revisão dessas funções, exemplos práticos, embora acadêmicos, foram realizadas de modo a tornar mais didáticos e aplicáveis os textos originais de Matheron, 1981 e Matheron, 1984.

### I.1.1 Recursos “*in situ*” e Reservas Recuperáveis

A variabilidade espacial do teor, da mineralogia, da granulometria e de outros parâmetros de caracter geológico, no interior de um depósito mineral constitui-se em um problema para a engenharia no que concerne à estimativas de reservas minerais sobre os recursos *in situ* no depósito.

Suponha uma bancada de um depósito de metal, conforme está esquematizado na Figura 1.1, em que o símbolo  $x$  corresponde à distribuição espacial dos pontos amostrados segundo uma malha de exploração (sondagem). Então, estima-se o teor de metal  $Z(v_i)$  de cada bloco  $v_i$ , utilizando um método de estimativa qualquer. Muitas vezes deseja-se saber qual a quantidade de minério ou a de metal contido em todos os blocos que apresentam teor maior que um dado teor de corte  $z$ .



**Figura 1.1: Esquema de uma bancada de um depósito de metal (Rivoirard, 1994).**

A seleção de blocos se dá pela introdução do parâmetro econômico teor de corte  $z$ , que corresponde ao teor mínimo de metal do bloco ao qual o metal recuperado é capaz de custear todos os custos de lavra e tratamento do minério do bloco. Isto é, o bloco será selecionado se o seu teor de metal  $Z(v_i)$  for superior ao teor de corte  $z$ . Portanto, o teor de corte  $z$  é caracterizado pelo contexto técnico e econômico da região no qual o projeto mineiro está inserido.

Suponha, agora, que se quer saber qual a quantidade de minério ( ou a de metal), considerando todos os possíveis teores de corte  $z$ . Então, o problema é inserir em tais reservas minerais todos os possíveis contextos técnico e econômico, dos quais são, em geral, variáveis no tempo e no espaço.

Segundo Journel & Huijbregts (1978), “os recursos *in situ* são determinados pelo ambiente geológico do depósito. Enquanto as reservas recuperáveis (ou lavráveis) dependem, não somente, dos recursos *in situ* e de suas características

peculiares, mas também, e essencialmente do contexto técnico e econômico da região onde o projeto mineral está inserido”.

Para a estimativa de reservas minerais, geralmente é usada a geoestatística como ferramenta principal (krigagem, cokrigagem ou ainda simulação estocástica), ou ainda métodos como o Inverso do Quadrado da Distância (IQD) ou do polígono de influência, para realizar estimativas locais ou globais dos corpos geológicos. E, em geral, esta estimativa é obtida através das informações de amostragem exploratória, do conhecimento geológico do depósito e, finalmente, na fase de lavra, de informações provenientes da amostragem dos furos de desmontes de painéis, que servem para o acompanhamento do controle de lavra em operações mineiras do dia a dia de uma mina.

Para a mineração, o cálculo da reserva recuperável constitui-se em um importantíssimo parâmetro, no que concerne a tomada de decisão de se lavar ou não uma reserva mineral. Principalmente, quando se trata de projetos que apresentam uma estreita margem de lucro financeiro, os chamados projetos marginais.

Define-se **reserva recuperável** como a porção da reserva mineral a qual os teores de metal de seus blocos foram estimados com valores acima de um determinado teor de corte  $z$ .

É importante saber que, nesta dissertação, para o cálculo da reserva recuperável, a escolha de cada bloco é realizada independentemente de sua localização no depósito e de sua vizinhança. Isto é, a reserva recuperável depende somente do teor de corte  $z$  adotado (única restrição). Portanto, a reserva recuperável não apresentará, necessariamente, conformidade adequada com a cava da mina (*pit* de lavra), quando os blocos selecionados estão bastantes dispersos geograficamente.

A definição do teor de corte  $z$  é baseada dentro do contexto técnico e econômico, citado anteriormente, no qual o projeto de mineração está inserido. Tal teor de corte  $z$  refere-se ao teor mínimo de metal necessário capaz de pagar os custos envolvidos na lavra e no tratamento de um volume unitário ( $v_i$ ) da reserva mineral, para extração de um metal.

É importante notar que com a utilização de um teor de corte  $z$ , a reserva recuperável não é calculada por um processo linear, como ocorre na estimativa da

reserva mineral usando, por exemplo, a krigagem ou a cokrigagem que são métodos lineares.

A Figura 1.2 ilustra a relação entre reserva estimada e reserva recuperável, perante um único cenário técnico e econômico caracterizado pelo teor de corte  $z$ .

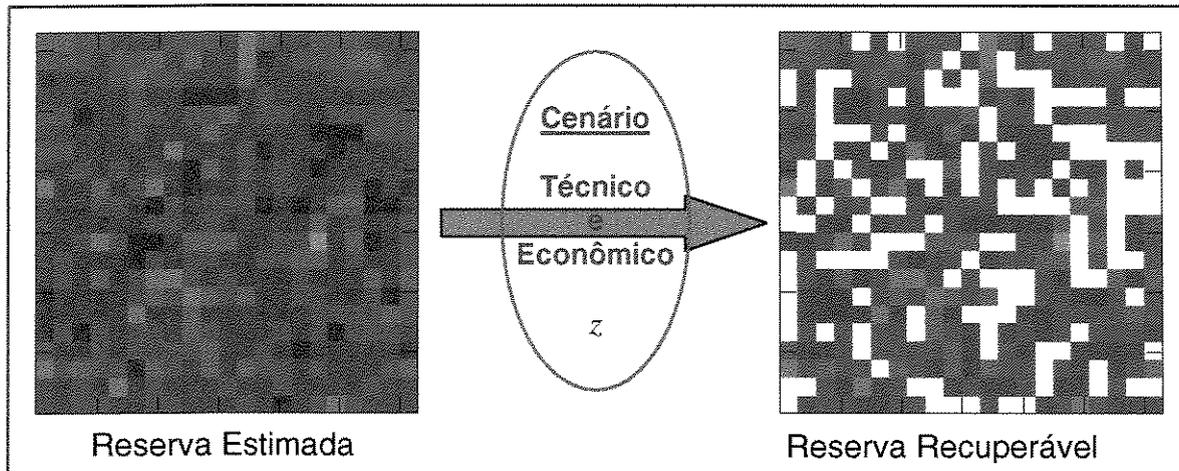


Figura 1.2 : Ilustração da conversão da reserva estimada em reserva recuperável, dado um cenário técnico e econômico.

### I.1.2 Objetivos desta dissertação

As Funções de Recuperação (FR) são de suma importância para a mineração, devido às informações de ordem financeira por elas fornecidas, envolvendo desde a fase de tomada de decisão pela implantação, ou não, do empreendimento mineiro, até o controle de teor no dia a dia de uma mina para decidir pela lavra, ou não, de um painel da mina. Portanto, faz-se necessário o estudo das FR, pois, elas fornecem informações importantes para o planejamento de estratégias gerenciais e operacionais, que permitam maximizar o benefício do empreendimento mineiro.

Esta dissertação visa contribuir em conhecimentos referentes aos impactos econômicos relacionados aos efeitos suporte e/ou informação sobre as FR, uma vez que ainda existe muito empirismo no trato dessas funções, fazendo com que haja uma resistência ao seu uso, por parte dos mineiros. Mas que apesar do seu formalismo rigoroso é de fácil utilização hoje em dia.

### I.1.3 Metodologia

A metodologia usada nesta dissertação inclui: (i) construir uma imagem por simulação estocástica não condicional, utilizando um variograma especificado, (ii) e posteriormente, fazer uma transformação dos dados simulados de maneira a obter um depósito de um metal precioso similar a um depósito real com teor médio e variância especificados, (iii) estudar o impacto do efeito suporte e (iv) do efeito informação sobre as Funções de Recuperação (FR).

- (i) Foi empregada a simulação não condicional *Turning Bands* (TB) sobre um *grid* de 1x1m, objetivando a obtenção de um conjunto de dados simulados.
- (ii) De posse dos valores simulados, foi realizada uma transformação de modo que os dados obtidos sejam semelhantes a teores de blocos de um depósito de metal precioso (exemplo: ouro). Assim, obtém-se um depósito com teores de blocos simulados que foram aqui tomados como teores verdadeiros.
- (iii) Posteriormente, os teores dos blocos com suporte de 1x1m foram também definidos para os tamanhos de suportes de 3x3m, 5x5m, 7x7m, 9x9m e 15x15m, para observar o impacto provocado por estas mudanças de suportes sobre as FR.
- (iv) Dos teores obtidos pela transformação dos dados simulados foram tiradas amostragens, e daí realizadas estimativas, para verificar o impacto do efeito informação sobre as FR.

A Figura 1.3 ilustra o esquema da metodologia adotada.

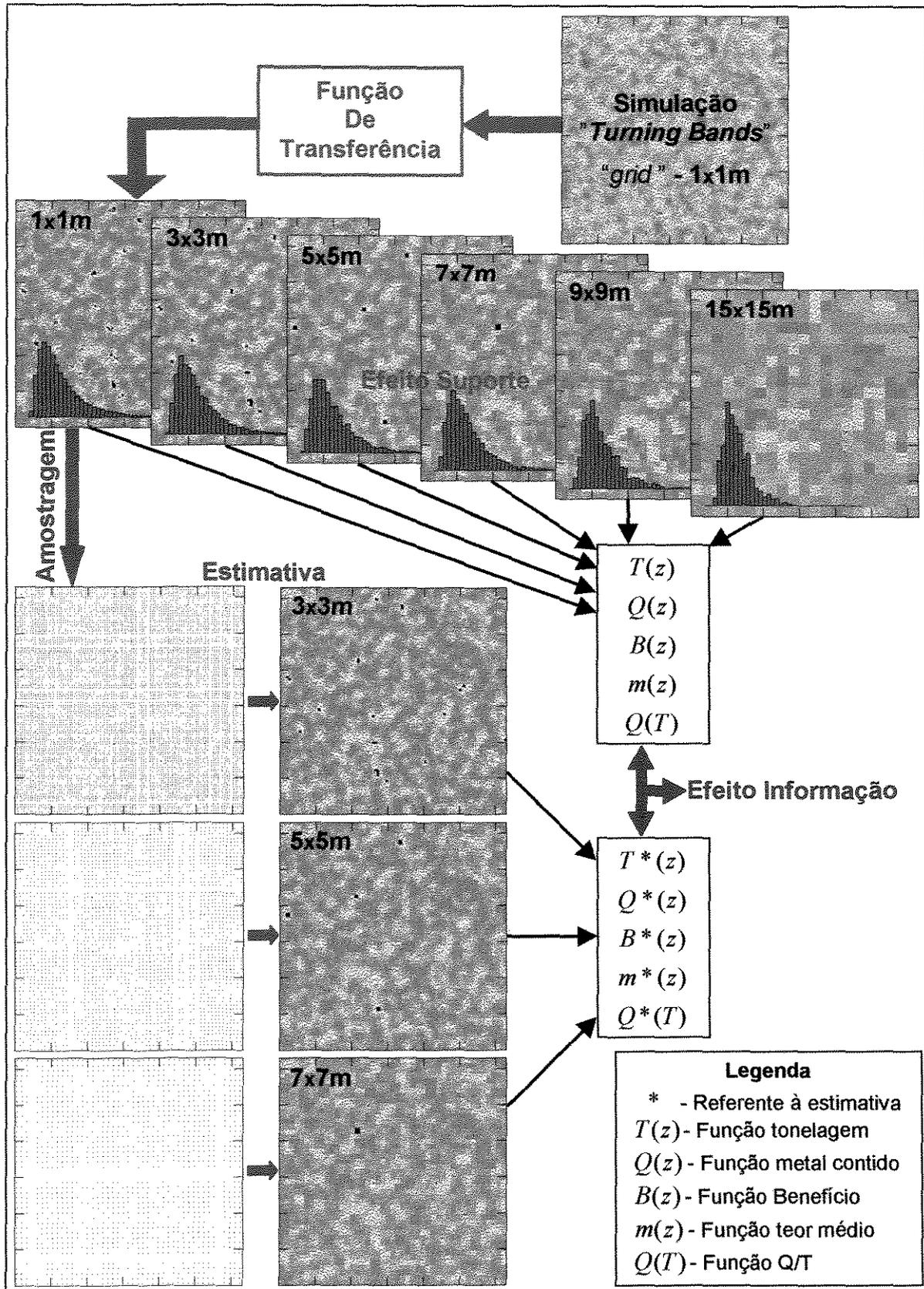


Figura 1.3: Esquema da metodologia adotada.

## **I.1.4 Organização da Dissertação**

Esta dissertação está organizada em 6 capítulos que abordam assuntos práticos e teóricos relevantes à parametrização de reservas minerais.

O capítulo 2 trás uma revisão da teoria das Funções de Recuperação (FR) e de Parametrização de Reservas, obtidas a partir de variáveis contínuas quanto para variáveis discretas. Trás, ainda, a importância das FR para a mineração, e o seu comportamento gráfico.

No capítulo 3 é feita uma revisão da teoria envolvida nos conceitos dos efeitos Suporte e Informação e de validação cruzada.

E no capítulo 4 apresenta uma classificação de vários tipos de reservas recuperáveis definidas sobre diferentes critérios de seleção.

No capítulo 5 é apresentado um estudo de caso, o qual foi criado para verificar os impactos sobre as curvas de parametrização gerados pelos efeitos Suporte e de Informação.

E por fim, no capítulo 6, são feitas as conclusões referentes ao estudo das FR.

## II Capítulo 2

Este capítulo faz uma revisão dos conceitos envolvidos na teoria das Funções de Recuperação (FR) e de Parametrização de Reservas. Sejam elas obtidas a partir de dados contínuos, adotando funções de densidade de probabilidade (fdp) ou a partir de dados discretos. Trazendo ainda, a representação gráfica das FR, exemplificando sua importância para a mineração.

### II.1 Funções de recuperação e parametrização de reservas

O cálculo da reserva recuperável constitui-se em um problema de estabelecer relações entre tonelagem e teor, as quais podem ser representadas sob diversos tipos de curvas (funções), tais como (Rivoirard-1994):

- A tonelagem de minério  $T$  como função de  $z \rightarrow T(z)$
- A tonelagem de metal  $Q$  como função de  $z \rightarrow Q(z)$
- O teor médio  $m$  como função de  $z \rightarrow m(z)$
- O benefício convencional  $B$  como função de  $z \rightarrow B(z)$
- O custo  $C$  como função de  $z \rightarrow C(z)$
- A tonelagem de metal  $Q$  como função de  $T \rightarrow Q(T)$

O conjunto destas funções é chamado de Funções de Recuperação (FR) e seu estabelecimento de parametrização de reservas.

Com tais funções é possível responder rapidamente importantes questões relevantes à implantação de projetos de mineração, e para o planejamento de lavra, tais como:

- Qual a quantidade de minério da reserva mineral cujo os blocos possuem teores com valores maiores que o *cut-off*  $z$  ?

Para o dimensionamento de todos os equipamentos de mineração, tanto os da lavra como os da usina de tratamento, é requerida a determinação da quantidade de minério que será movimentada na mina e processada na usina de tratamento. Determinando assim, o tempo de vida útil da mina até a sua exaustão econômica.

- Qual a quantidade de metal contido na porção da reserva, cujo os blocos possuem teores com valores maiores que ?

Ao selecionar os blocos que serão incluídos em um planejamento de lavra a curto prazo, é importante saber se a quantidade de metal contido nesses blocos serão suficiente para suprir a demanda prevista do bem mineral.

- Qual o teor médio dos blocos com teores maiores que ?

É preocupante as perdas econômicas provocadas pela flutuação do teor de metal do minério em que a usina de tratamento é alimentada. Por um lado, pela produção de material de baixa qualidade, e por outro, pela perda de metal não recuperado. Então, é notória a importância econômica (risco) da incerteza do teor médio à adequação da flutuação do teor de alimentação (especificação da usina).

- E a questão mais importante: Qual o benefício (lucro financeiro) da lavra e tratamento do minério dos blocos que possuem teores de metal com valores maiores que ?

Qualquer empreendimento mineiro é concebido sobre alguns critérios de execução, dentre eles destacam-se os seguintes: atender o suprimento do mercado com o bem mineral (metal) e/ou maximizar o benefício econômico do empreendimento. Para satisfazer o primeiro critério, se faz necessária a parametrização de reservas de maneira a se ter conhecimento da quantidade de metal que poderá ser lavrado e disponibilizado ao mercado. O segundo critério, e talvez o mais importante para qualquer empreendimento, visa a maximização do benefício econômico, uma vez que o capital estatal vem sendo substituído pelo privado, e por vivemos em um mundo com economia mais integrada pela chamada globalização. Portanto, as FR são de muita utilidade para o planejamento de estratégias gerenciais e

operacionais que dão maior garantia da maximização do benefício econômico.

As FR podem ser obtidas usando funções de densidade de probabilidade (fdp) ajustadas aos histogramas experimentais aos dados (método contínuo), ou ainda, trabalhando diretamente sobre os dados estimados (método discreto).

## II.2 FR para variáveis contínuas<sup>1</sup>

Seja  $Z(v)$ , definida sobre o volume  $v$ , uma variável aleatória (VA) e  $f(z)$  a sua função densidade de probabilidade (fdp).

### II.2.1 Função tonelagem - $T(z)$ :

Sendo  $f(z)$  a função densidade de probabilidade dos teores  $Z(v)$ , e  $F(z)$  sua acumulada crescente (fdpa), definida por

$$F(z) = P(Z(v) \leq z) = \int_{-\infty}^z f(z) dz$$

A função tonelagem  $T(z)$ , também chamada, simplesmente, de tonelagem de minério ou curva de proporção, é, por definição, a probabilidade do teor  $Z(v)$  ser maior que um dado teor de corte  $z$ , ou seja, o complemento de  $F(z)$ .

$$T(z) = P(Z(v) > z) = \int_z^{\infty} f(z) dz$$

Logo, tem-se  $0 \leq T(z) \leq 1$ . Podendo-se também escrever

$$P(Z(v) \leq z) + P(Z(v) > z) = 1$$

e

$$F(z) + T(z) = 1$$

---

<sup>1</sup> Uma variável aleatória  $Z$  é contínua se existe uma função densidade de probabilidade de  $Z$  [ $f(z)$ ], tal que atenda as seguintes propriedades (Remacre 1997):

$$\text{a) } f(z) \geq 0, \forall z \in \mathbf{R}; \quad \text{e} \quad \text{b) } \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = 1.$$

portanto

$$T(z) = 1 - F(z)$$

Pode-se ver que  $T(z)$  é a proporção do número de blocos que possui teor de metal  $Z(v_i)$  maior que o teor de corte  $z$ . Portanto,  $T(z)$  é uma função de densidade acumulada não crescente, definida no intervalo  $[0,1]$ .

### II.2.1.1 Representação gráfica da função $T(z)$ :

Como  $F(z)$  é, por definição, uma função crescente, conclui-se que  $T(z)$  é decrescente, ou seja, a medida que  $z$  cresce alguns blocos não serão selecionados, fazendo  $T(z)$  decrescer. A função tonelagem  $[T(z)]$  está ilustrada, graficamente na Figura 2.1, no qual o eixo horizontal corresponde aos teores de corte  $z$ , e o eixo vertical a proporção da reserva mineral formada pelos blocos com teor de metal  $Z(v_i)$  maior que o teor de corte  $z$ .

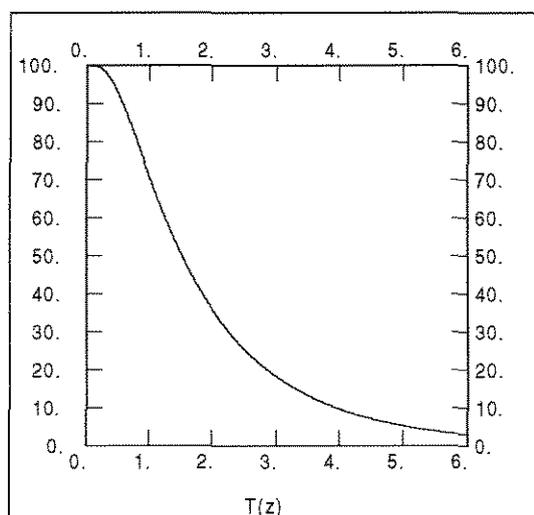


Figura 2.1: Curva Tonelagem x Teor de corte:  $T(z)$ .

Se  $z = 0$ , implicará em  $T(0) = 1$ , desta forma seleciona-se todos os blocos (100%) da reserva mineral, fazendo com que essa se transforme totalmente em reserva recuperável, que se lavrada promoverá a sua exaustão física. Entretanto, se  $z = \infty$ , implicará em  $T(\infty) = 0$ , pois não haverá qualquer bloco selecionado.

## II.2.2 Função metal contido - $Q(z)$ :

A função metal contido  $Q(z)$ , também chamada de quantidade de metal contido, refere-se a proporção (ou quantidade) de metal contido na reserva mineral, cujo os blocos possuem teores de metal acima do valor de corte  $z$ . Ou seja,  $Q(z)$  é a proporção de metal da reserva mineral contido nos blocos selecionados pelo critério  $Z(v_i) > z$ . Logo, pela definição, a função metal contido  $Q(z)$  é definida, em proporção, pela integral:

$$Q(z) = \int_z^{\infty} z \cdot f(z) dz$$

neste caso,  $Q(z)$  corresponde a proporção de metal da reserva mineral a qual está contido em  $T(z)$ .

É importante observar que para  $z = 0$ , tem-se que  $Q(0)$  corresponde ao teor médio ( $m$ ) do depósito mineral.

$$Q(0) = \int_0^{\infty} z \cdot f(z) dz = E[Z] = m$$

em que  $E[Z]$  refere-se a esperança matemática dos teores  $Z(v)$ . Neste caso  $Q(0)$  é definida pela expressão de centro de massa.

### II.2.2.1 Representação gráfica da função $Q(z)$ :

A Figura 2.2 ilustra a função Metal Contido  $Q(z)$ , que é sempre decrescente com o teor de corte  $z$ .

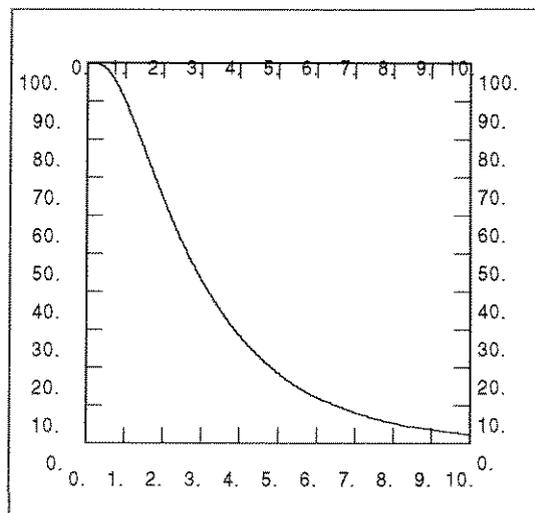


Figura 2.2: Ilustração da função  $Q(z)$ .

Se  $z = 0$ , tem-se que  $Q(0) = 1$ , desta forma seleciona-se todos os blocos (100%) da reserva mineral, fazendo com que essa se transforme totalmente em reserva recuperável. Portanto, todo o metal contido no depósito serão selecionados. Entretanto, se  $z = \infty$ , implicará em  $Q(\infty) = 0$ , pois não haverá qualquer bloco selecionado.

### II.2.3 Função Metal Contido x Tonelagem - $Q(T)$ :

O Metal contido em função da tonelagem [ $Q(T)$ ] fornece o metal contido  $Q(z)$ , em uma porção da reserva  $T(z)$ , a qual seus blocos possuem teores  $Z(v_i)$  maior que o teor de corte  $z$ .

Tal função é de vital importância para o estudo da seletividade. Pois, ela é equivalente a curva de concentração de Lorenz<sup>2</sup>, a qual é usada pelos economistas para representar a concentração de riqueza da população de um país. Da mesma forma,  $Q(T)$  representa a concentração de metal (de riqueza) de um depósito mineral. Isto é, uma pequena quantidade de blocos do depósito pode conter uma grande proporção de metal contido em todo o depósito.

A função  $Q(T)$  é definida pela expressão:

$$Q(T) = \int_0^{+\infty} \min(T, T(u)) du$$

#### II.2.3.1 Representação gráfica da função $Q(T)$

A função  $Q(T)$  é sempre crescente e côncava. E está ilustrada graficamente pela Figura 2.3.

A representação gráfica desta função é de muita importância para o estudo da seletividade. Pois, a metade da área delimitada pela função  $Q(T)$  e a primeira bissetriz é igual ao índice de seletividade  $S$  (índice de concentração, também

---

<sup>2</sup> Curva de Lorenz ou curva de concentração, ver em Saporta, 1995

chamado pelos economistas de índice de Gini), que é uma medida de dispersão da variável aleatória  $Z$ , semelhante a variância  $\sigma^2$ .

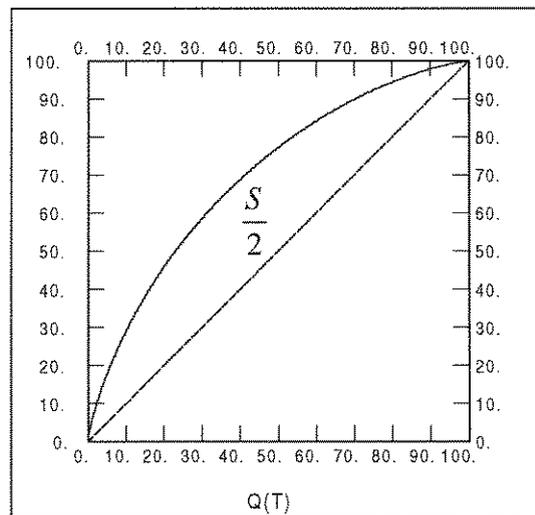


Figura 2.3: Ilustração da função  $Q(T)$ .

O índice de seletividade  $S$  é dado por (Saporta, 1995):

$$S = \frac{\Delta}{2m}$$

em que  $\Delta$  é

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x - y| f(x) f(y) dx dy \quad \text{para o caso teórico.}$$

e

$$\Delta = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |x_i - x_j| \quad \text{para o caso experimental.}$$

e que  $n$  e  $m$  são o número de dados e o teor médio, respectivamente.

A Figura 2.4 ilustra a função  $Q(T)$ , em que o teor médio  $m(z)$  é dado pela inclinação da reta que passa pela origem do gráfico e pelo ponto  $(Q, T)$ . E, a reta tangente que passa pelo ponto  $(Q, T)$  intercepta o eixo dos  $Q$  no ponto  $(B(z), 0)$  tendo inclinação igual a  $z$ .

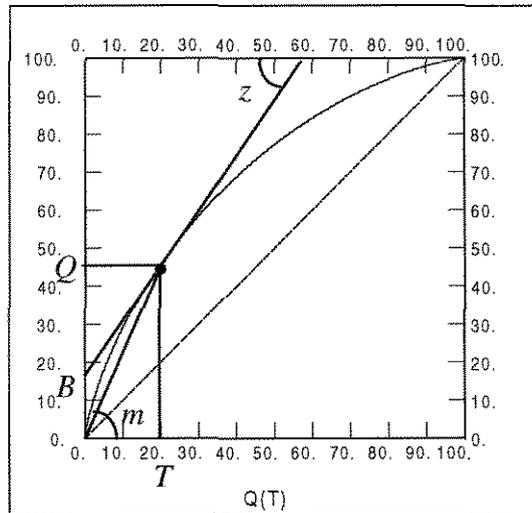


Figura 2.4: ilustração da função Quantidade de Metal x Tonelagem  $Q(T)$ , com os parâmetros  $B$ ,  $m$  e  $z$ .

## II.2.4 Função benefício convencional - $B(z)$ :

A função Benefício Convencional  $B(z)$ , representa o lucro (ou prejuízo) econômico obtido da venda do metal extraído dos blocos selecionados com teor  $Z(v_i)$  maior que o teor de corte  $z$ , subtraindo os custos envolvidos na lavra e no tratamento desses blocos. Portanto, é a função mais importante na parametrização de reservas, pois “representa” o sucesso (ou fracasso) financeiro do empreendimento mineiro. E pode ser dada pela expressão simplória:

$$B(z) = Q(z) - C(z)$$

no qual  $C(z)$  é a função custo, que aqui é definida como o gasto financeiro total empregado na lavra e no tratamento dos blocos selecionados. Portanto, pela definição do teor de corte  $z$ , a função custo  $C(z)$  poderá ser dada multiplicando o teor de corte  $z$  pela função tonelagem  $T(z)$ , ou seja,

$$C(z) = z \cdot T(z)$$

Logo, a função benefício pode ser reescrita

$$B(z) = Q(z) - z \cdot T(z)$$

no qual  $Q(z)$  é a função Metal Contido, que constitui a receita, e  $z \cdot T(z)$  todos os custos envolvidos na lavra e no tratamento do minério selecionado.

### II.2.4.1 Representação gráfica da função $B(z)$

A Figura 2.5 ilustra a função Benefício Convencional  $B(z)$ , que é sempre não crescente e convexa.

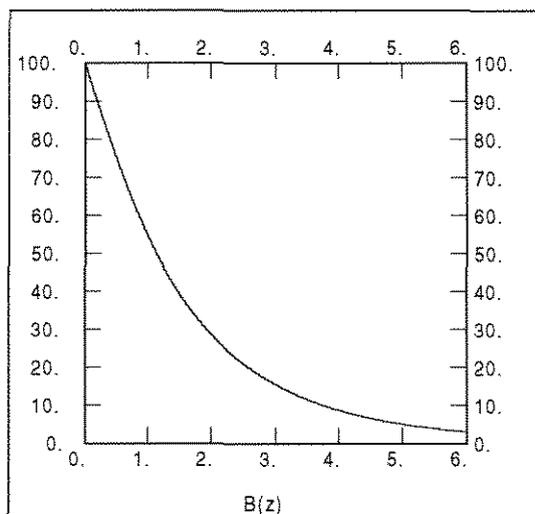


Figura 2.5: Ilustração da função benefício convencional:  $B(z)$ .

A função Benefício Convencional  $B(z)$  também é ilustrada pela Figura 2.6, em que a reta tangente que passa pelo ponto  $(B, z)$ , intercepta o eixo dos  $B$  no ponto  $(0, Q)$  e o eixo dos  $z$  no ponto  $(m = Q/T, 0)$ , e que sua inclinação é  $-T$ .

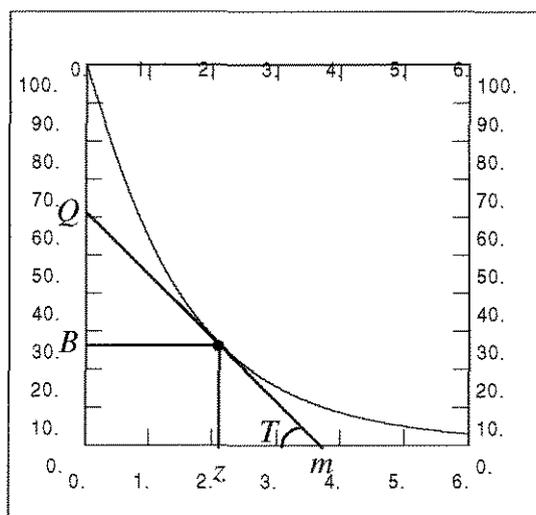


Figura 2.6: Ilustração da função Benefício Convencional  $B(z)$ , com os parâmetros  $Q$ ,  $T$  e  $m$ .

## II.2.5 Função Teor Médio - $m(z)$

A função Teor Médio  $m(z)$  corresponde ao teor médio dos blocos selecionados (daqueles com teor  $Z(v_i) > z$ ), os quais vão compor a reserva recuperável.  $m(z)$  é calculado pela relação:

$$m(z) = \frac{Q(z)}{T(z)}$$

$m(z)$  é uma função crescente, pois a medida que o teor de corte ( $z$ ) aumenta, os blocos mais pobres serão abandonados. Então assim, apenas os blocos mais ricos serão selecionados, fazendo com que o teor médio dos blocos selecionados [ $m(z)$ ] cresça cada vez que se aumenta  $z$ .

Exemplificando as considerações acima, se forem considerados dois teores de corte  $z_1$  e  $z_2$ , no qual se tem que  $z_2 > z_1$ , em termos de esperança condicional<sup>3</sup> a desigualdade abaixo deverá se satisfeita.

$$E[Z | Z > z_2] > E[Z | Z > z_1]$$

$$m(z_2) > m(z_1)$$

Fazendo  $z = 0$ , tem-se que  $m(0) = E[Z] = m$ .

A Figura 2.7 mostra o comportamento da função teor médio  $m(z)$ :

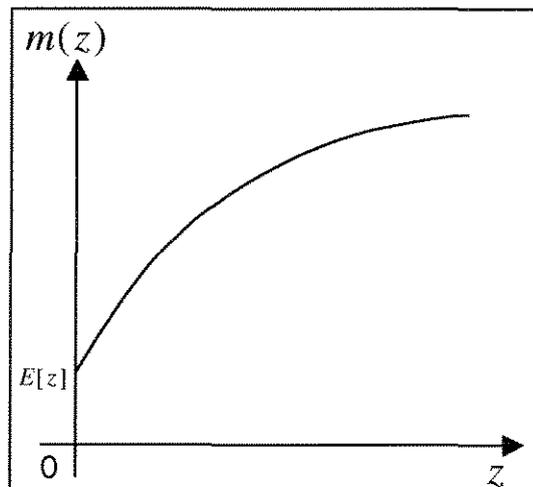


Figura 2.7: Ilustração da função Teor Médio  $m(z)$ .

<sup>3</sup> Sejam as variáveis aleatórias  $Z$  e  $Y$ . A esperança condicional de  $Z$  dado que  $Y = y$  é dada por (Remacre 1997):

• Caso discreto  $E[Z | Y > y] = \sum_z z \cdot p(z | y)$

• Caso contínuo  $E[Z | Y > y] = \int z \cdot f(z | y) dz$

## II.3 Modelos de distribuição de probabilidade

Existem muitos atributos, da Ciências da Terra, e em especial na mineração, que se ajustam, adequadamente, a alguns modelos clássicos de funções de densidade de probabilidade (fdp). É o caso da lognormal.

Para David (1977), em uma dada mina, diferentes teores de corte diferentes toneladas de minério (ou de metal) são calculadas, cada qual com seu teor médio. Para isto, um simples caminho é assumir que os teores de metal dos blocos tenham uma distribuição de probabilidade ajustada a uma simples função densidade de probabilidade.

Aqui é feita uma síntese das funções de recuperação para os casos com distribuição normal e lognormal. A Tabela 2.1 apresenta as expressões das funções de recuperação  $T(z)$  e  $Q(z)$ , para os casos em que os teores dos blocos apresentam função densidade de probabilidade dos tipos normal e lognormal.

**Tabela 2.1: : Expressões das FR para os casos de fdp normal e lognormal: nos quais  $\mu$  e  $\sigma^2$  são, respectivamente, a média e a variância de  $Z$  para o caso normal, e a média e a variância de  $\ln(Z)$  para o caso lognormal.**

Distribuição	$T(z)$	$Q(z)$	$y$
<b>Normal</b>	$T(z) = 1 - G(y)$	$Q(z) = \mu \cdot G(y) - \sigma \cdot g(y)$	$y = \frac{z - \mu}{\sigma}$
<b>Lognormal</b>	$T(z) = 1 - G(y)$	$Q(z) = m_z \cdot [1 - G(y - \sigma)]$	$y = \frac{\ln(z) - \mu}{\sigma}$

Porém, é importante salientar que no caso da função de densidade de probabilidade normal, em que o teor médio  $E[Z]$  é baixo (próximo de zero) a variável  $Z$  pode assumir valores negativos, o que não é real para o cálculo de reservas recuperáveis, pois a variável  $Z$  é por definição, por se tratar de teor, essencialmente positiva. Portanto, fica aqui uma ressalva das implicações imprevisíveis do uso deste tipo de distribuição. A função densidade de probabilidade normal aparece aqui como apoio à distribuição lognormal.

As funções de recuperação expostas na Tabela 2.1 podem ser utilizadas, porém, com a devida cautela referente a sensibilidade dessas funções em relação

aos parâmetros  $\mu$ ,  $\sigma$  e  $m_z$ . Pois, os métodos empregados na fase de estimativas, não fornecem medida capaz de anular a incerteza da estimativa, e não reproduzem o histograma das amostras. Lembrando-se do fato que o histograma das amostras pode não ser representativo do depósito, prejudicando a estimativa.

**Tabela 2.2: Impacto causado pela incerteza do teor médio de metal do depósito sobre as FR, para o caso que o teor de metal ter distribuição lognormal, considerando o teor de corte  $z = 2,00$  g/t.**

Distribuição Lognormal	$\sigma^2 = 3,00 \text{ (g/t)}^2$		Impacto (%)
	$m = 2,00 \text{ g/t}$	$m = 2,10 \text{ g/t}$	
$T(z)$	15,08	20,84	31,36
$Q(z)$	47,14	60,96	29,32

A Tabela 2.2 apresenta o impacto causado pela incerteza do teor médio  $m$ , com uma variação de 5% (2,00 e 2,10 g/t), da reserva sobre as FR  $T(z)$  e  $Q(z)$  para o caso lognormal, considerando um mesmo teor de corte  $z = 2,00$  g/t e mesma variância  $\sigma^2 = 3,00(\text{g/t})^2$ . É notado o forte aumento relativo de 31,36% da função  $T(z)$  e de 29,32% da função metal contido, quando o teor médio aumenta em 5%.

## II.4 FR para variáveis discretas<sup>4</sup>

Para o cálculo de  $T(z)$  e  $Q(z)$  pode-se expressar o número de blocos selecionados usando a função indicatriz:

$$I_i(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } Z(v_i) \geq z \\ 0 & \text{se caso contrário} \end{cases}$$

Para dados regulares no qual admite-se que  $p(z) = \frac{1}{n} \forall z$ . tem-se:

<sup>4</sup> Uma variável aleatória  $Z$  é dita discreta se a mesma toma um número finito ou enumerável de valores. E a função de probabilidade de  $Z$  [ $p(z) = P(Z = z)$ ] possui as seguintes propriedades (Remacre 1997):

a)  $p(z) \geq 0, \forall z$  e b)  $\sum_z p(z) = 1$

$$T(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i(z)$$

e

$$Q(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z(v_i) \cdot I_i(z)$$

Porém, quando os dados são ponderados, tem-se:

$$T(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i(z) \cdot p(z)$$

e

$$Q(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z(v_i) \cdot I_i(z) \cdot p(z)$$

em que  $T(z)$  e  $Q(z)$  são definidos em proporção. Logo,  $0 \leq T(z) \leq 1$  e  $0 \leq Q(z) \leq 1$ .

Pode-se também obter  $T(z)$  e  $Q(z)$  em tonelagem, por:

$$T(z) = \sum_{i=1}^n v_i \cdot d_i \cdot I_i(z)$$

e

$$Q(z) = \sum_{i=1}^n v_i \cdot d_i \cdot Z(v_i) \cdot I_i(z)$$

em que  $v_i$  e  $d_i$  são o volume e a densidade do bloco  $i$ , respectivamente.

Como visto anteriormente, no caso de  $Z(v_i)$  ser uma variável contínua, as funções  $T(z)$  e  $Q(z)$  são funções decrescente. Agora, no caso em que  $Z(v_i)$  é uma variável discreta, pode ser que não existam valores de  $Z(v_i)$  em algum intervalos de teores, fazendo que as funções  $T(z)$  e  $Q(z)$  assumam valores constantes nestes intervalos. Com isto, conclui-se que as curvas de  $T(z)$  e de  $Q(z)$  são não crescentes para o caso de  $Z(v_i)$  ser discreta.

Para as demais funções de recuperação, sejam elas em termos de proporção ou em tonelagem, serão obtidas por relações entre  $T(z)$ ,  $Q(z)$  e  $z$ . São elas:

$$B(z) = Q(z) - zT(z) \quad m(z) = \frac{Q(z)}{T(z)} \quad C(z) = zT(z)$$

E a função  $Q(T)$  é obtida tabelando os valores de  $Q(z)$  e de  $T(z)$ , para um mesmo teor de corte  $z$ .

### III Capítulo 3

Este capítulo faz uma revisão da teoria envolvida nos conceitos dos efeitos suporte e informação e de validação cruzada.

As reservas recuperáveis estão relacionadas com dois efeitos de natureza puramente física: o efeito suporte e o efeito informação. As reservas dependem do tamanho do suporte de seleção da unidade mínima de lavra que será enviado separadamente como minério para a planta de tratamento ou como estéril para o depósito de estéril. Similarmente, ela depende da informação final na qual toma-se a decisão se a unidade é minério ou é estéril (Murthy 1996).

Segundo Remacre (1985), um resultado intuitivo bem conhecido dos mineradores é o de que, para um dado jazimento, efetua-se uma melhor seleção lavrando-se com pequenos blocos do que com grandes blocos (efeito suporte) e ainda seleciona-se melhor com blocos de teor conhecido do que com teores estimados (efeito informação).

#### III.1 Efeito Suporte

Matheron (1984), mostrou uma analogia entre geoestatística e a termodinâmica que é regida por dois princípios; o da conservação da energia e o do incremento da entropia (ou da degradação da energia). Segundo Matheron, os dois princípios da geoestatística são:

1. A média permanece constante;
2. As curvas de parametrização se degradam quando o suporte aumenta.

O termo suporte refere-se ao volume sobre o qual é definido um teor, podendo ter qualquer tamanho e geometria.

Supondo que uma reserva mineral seja dividida em grandes blocos de tamanho  $V$ , e posteriormente, novamente dividida em pequenos blocos  $v$ , como é

mostrado pela Figura 3.1. E então, definindo os teores de bloco  $Z(v_i)$  e  $Z(V_i)$  para os dois suportes. Tem-se que o teor médio é o mesmo para os dois suportes, porém com distribuições freqüências diferentes entre si. Assim, existirá duas fdp, uma para cada suporte ( $v$  e  $V$ ). A diferença nas distribuições entre os dois suportes, é chamada de **efeito suporte**.

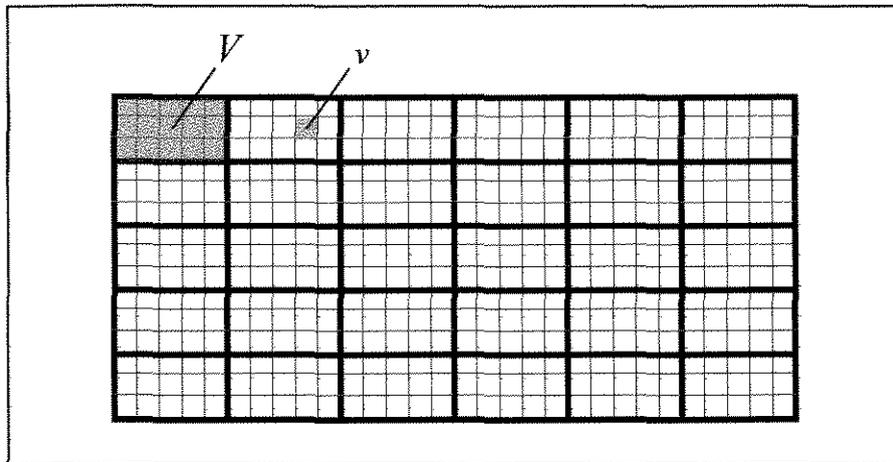


Figura 3.1: Ilustração de um domínio  $D$  dividido nos suportes  $v$  e  $V$ .

É esperado que a dispersão dos dados para o suporte  $V$  seja menor que a dispersão para o suporte  $v$ , pois os valores extremos de  $v$  são atenuados quando se passa para  $V$ . A Figura 3.2 ilustra as distribuições de freqüências para os suportes  $v$  e  $V$ .

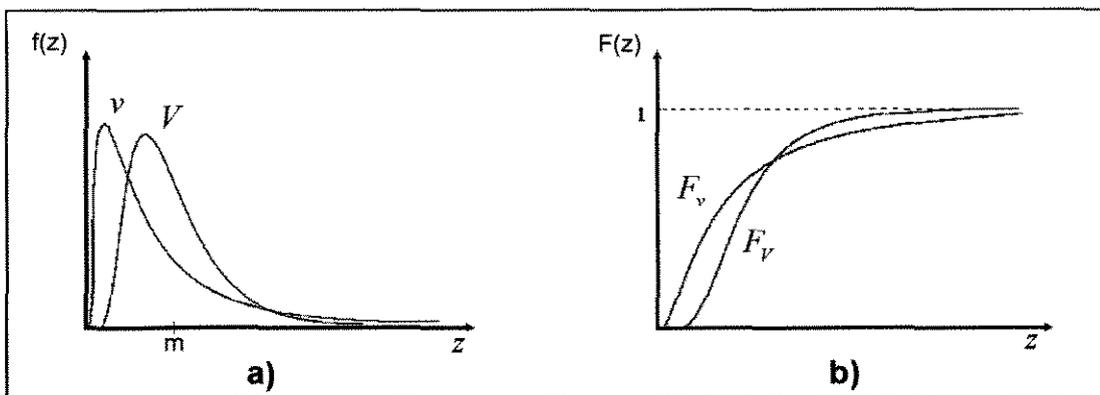


Figura 3.2: a) Função densidade de probabilidade, b) Função densidade de probabilidade acumulada, para os suportes  $v$  e  $V$ .

Logo, por conseqüência, cada suporte terá suas funções de recuperação. Pois, se trata de duas variáveis diferentes, definidas sobre suportes diferentes:

**Suporte  $\nu$**

$$T_\nu(z) = 1 - F_\nu(z)$$

$$Q_\nu(z)$$

$$B_\nu(z)$$

$$m_\nu(z)$$

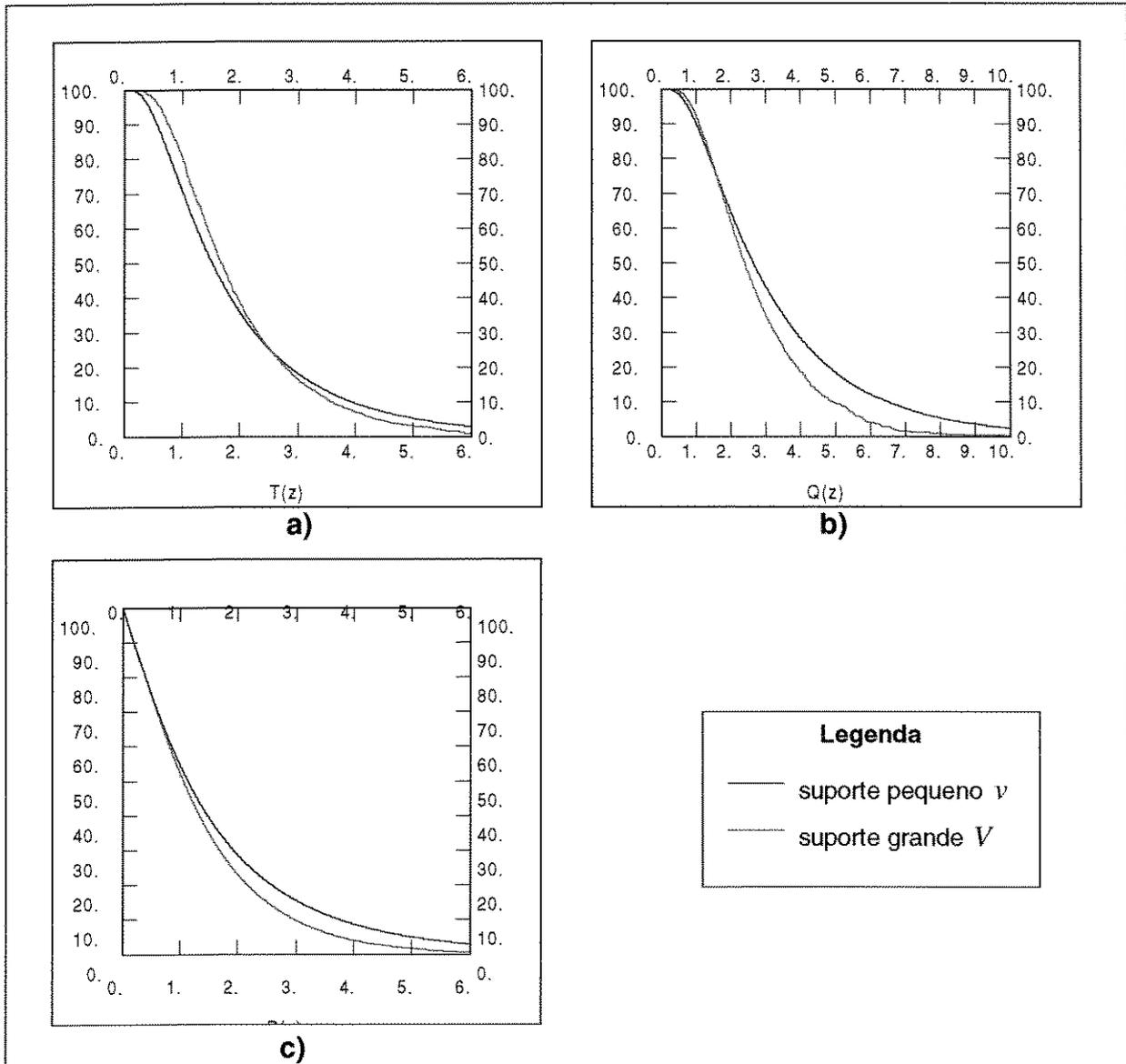
**Suporte  $V$**

$$T_V(z) = 1 - F_V(z)$$

$$Q_V(z)$$

$$B_V(z)$$

$$m_V(z)$$



**Figura 3.3: Ilustração das funções de recuperação: a)  $T(z)$ , b)  $Q(z)$  e c)  $B(z)$ , para os suportes  $\nu$  e  $V$ .**

Como os teores dos blocos pequenos ( $\nu$ ) são mais dispersos, em relação aos teores dos blocos grandes ( $V$ ), é esperado que o teor médio, após a seleção dos

blocos, para qualquer teor de corte  $z$ , seja maior para os blocos pequenos ( $v$ ), ou seja:

$$m_v(z) > m_V(z)$$

Para altos valores de  $z$  a proporção dos blocos e o metal selecionados tendem a serem maiores para pequenos blocos. E similarmente, para baixos valores de  $z$ , tendem a serem maiores para grandes blocos.

As funções de recuperação  $T(z)$ ,  $Q(z)$  e  $B(z)$  para os suportes  $v$  e  $V$ , estão ilustradas pela Figura 3.3.

A função benefício  $B_v(z)$  é sempre maior que  $B_V(z)$  para qualquer  $z$ , conforme é visto na Figura 3.3c). Isto é, o benefício financeiro da lavra de pequenos blocos ( $v$ ) é sempre maior que o da lavra de grandes blocos ( $V$ ), dado um mesmo teor de corte  $z$ , ou seja:

$$B_v(z) > B_V(z)$$

### III.2 Validação Cruzada

A validação cruzada é um caminho para comparar várias suposições sobre cada modelo (tipo de variograma e seus parâmetros, e o tamanho da vizinhança de krigagem) ou sobre os dados (valores que não ajustam em sua vizinhança gerando os *outliers* ou *pointwise* anormais) (Wackernagel, 1995).

Para a realização de estimativas (krigagem ou cokrigagem) é muito importante verificar a adequação do modelo de variograma (ou de covariância) para assegurar uma melhor estimativa.

O procedimento para realizar a validação cruzada consiste em remover o valor amostrado  $Z(x_i)$  do banco de dados e estimá-lo  $Z^*(x_i)$ , na mesma posição  $x_i$ , usando as outras  $n-1$  amostras, e assim procedendo-se com todos os valores amostrais separadamente.

A diferença entre o valor amostrado  $Z(x_i)$  e o estimado  $Z^*(x_i)$ , isto é:

$$Z(x_i) - Z^*(x_i)$$

constitui o erro cometido na estimativa, que dá uma indicação de como os valores amostrais ajustam-se na vizinhança adjacente dos dados amostrais.

Segundo Remacre & Cornetti, 1996, a validação cruzada auxilia a análise de uma serie de fatores de estimativa, tais como:

- Comparar valor médio estimado com valor médio amostrado (não viés);
- Comparar histograma amostral com histograma dos dados estimados;
- Verificar a independência do erro  $Z(x_i) - Z^*(x_i)$  e da variância da krigagem;
- Verificar o não viés condicional através do estudo da nuvem de dispersão  $Z(x_i) \times Z^*(x_i)$ .

Para se ter maior “certeza” do valor verdadeiro (que é inacessível), seria necessário realizar uma amostragem muito adensada, o que é impraticável em mineração devido aos altos custos envolvidos. Por isto, é comum optar-se pela operação de validação cruzada, de modo a permitir a comparação entre o valor estimado  $Z^*(x_i)$  e o valor verdadeiro  $Z(x_i)$ .

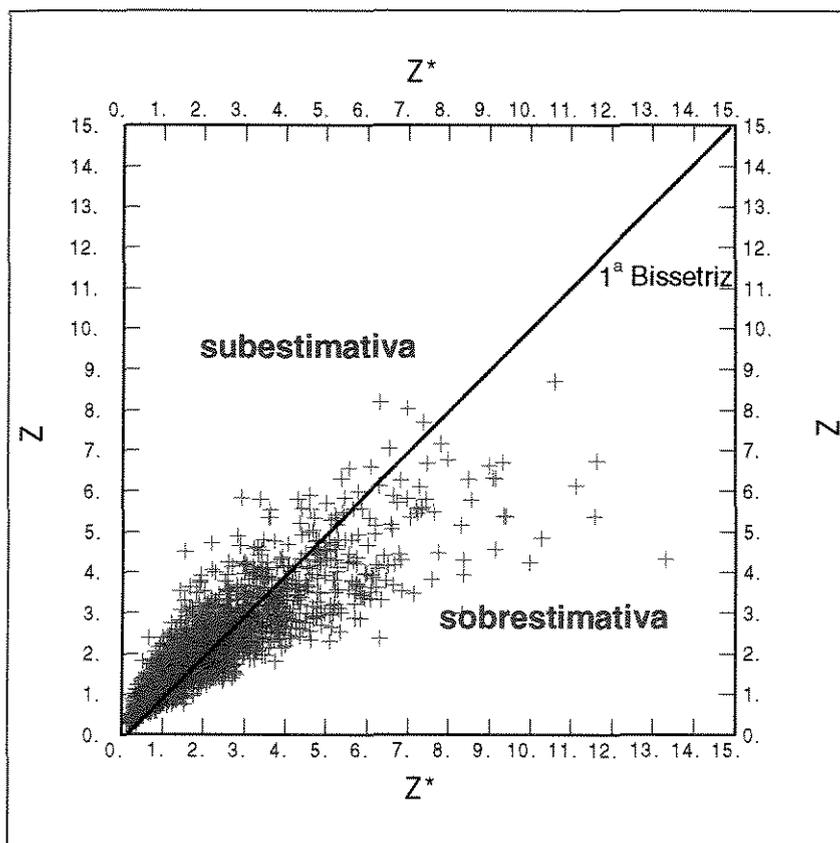


Figura 3.4: Nuvem de dispersão  $Z(x_i) \times Z^*(x_i)$  gerada pela validação cruzada.

A Figura 3.4 apresenta graficamente a nuvem de dispersão  $Z(x_i) \times Z^*(x_i)$  gerada pela validação cruzada.

O estudo da nuvem de dispersão  $Z(x_i) \times Z^*(x_i)$  gerada pela validação cruzada é de grande importância para a estimativa de reservas. Devendo apresentar-se com as seguintes características:

- ser simétrica em relação a primeira bissetriz;
- os pontos devem concentrar-se ao redor da primeira bissetriz.

De modo a assegurar que o modelo de variograma adotado na validação cruzada seja adequado para a estimativa de reservas por krigagem (ou cokrigagem).

Se o erro médio fornecido pela validação cruzada não for muito diferente de zero, isto é:

$$E[Z(x_i) - Z^*(x_i)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [Z(x_i) - Z^*(x_i)] \cong 0$$

pode-se dizer que não existe viés aparente. Enquanto um valor significativo negativo (ou positivo) pode representar sistematicamente uma sobrestimação (ou uma subestimação). Portanto, deve-se estar ciente dos efeitos econômicos envolvidos em reservas minerais sobrestimadas ou subestimadas.

Se em média o quadrado do erro padronizado da validação cruzada esta próximo de um, isto é:

$$E\left[\frac{[Z(x_i) - Z^*(x_i)]^2}{\sigma_i^2}\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{[Z(x_i) - Z^*(x_i)]^2}{\sigma_i^2}\right] \cong 1$$

Então, o erro de estimativa existente é igual em média ao erro predito pelo modelo, o que dá uma idéia quantitativa sobre a adequação do modelo e de seus parâmetros.

É importante salientar que estimar ponto é a situação mais desfavorável numa estimativa. Assim sendo, os problemas encontrados na estimativa de pontos serão minimizados na estimativa de blocos (Remacre & Cornetti, 1996).

### III.3 Efeito Informação

Para o estabelecimento das FR, seleciona-se os blocos baseando-se nos seus teores estimados  $Z^*(v_i) \geq z$  e não sobre seus teores verdadeiros  $Z(v_i) \geq z$ . Porém, é comum que  $Z^*(v_i) \neq Z(v_i)$ . Portanto, ocorrerá uma degradação das FR.

Tem-se que o teor estimado  $Z^*(v_i)$  é conhecido, porém, o verdadeiro  $Z(v_i)$  é desconhecido.

À seleção errônea de blocos de lavra sempre acarreta perdas. Se um bloco de minério é classificado como estéril, tem-se um perda igual ao valor de mercado do metal potencialmente recuperável no bloco. Se um bloco de material estéril é classificado como minério, tem-se uma perda igual ao custo de tratamento desse bloco (Godoy, 1998).

Segundo Godoy (1998), as operações de lavra em minérios metálicos, é esperado um aumento na lucratividade em função do aumento na capacidade seletiva da operação. O objetivo da lavra seletiva é reduzir a diluição de minério. A capacidade seletiva na lavra inclui parâmetros críticos como: controle geológico e ou estrutural do depósito; teores de corte praticados; grau de continuidade do minério; dimensões e capacidade seletiva dos equipamentos de lavra e taxa de produção requerida. Estes parâmetros determinam as dimensões das unidades seletivas de lavra ou blocos de lavra, no qual é possível separar material estéril de minério.

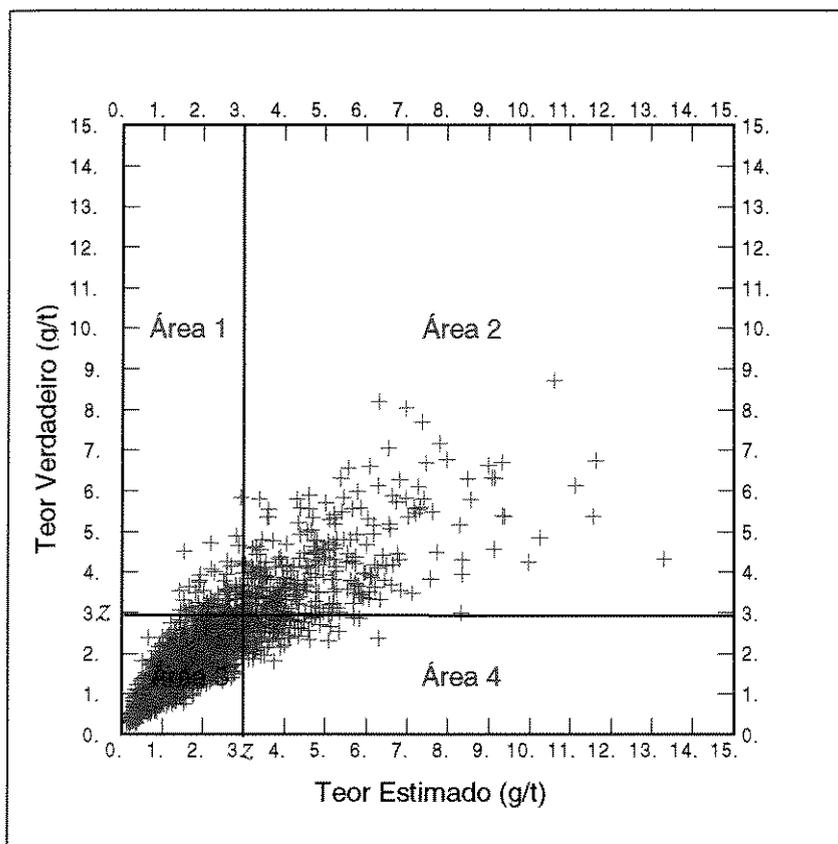


Figura 3.5: Teores verdadeiros *versus* Teores estimados [ $Z(v_i) \times Z^*(v_i)$ ], e um teor de corte  $z$  em ambos os eixos.

A Figura 3.5 apresenta o gráfico da dispersão  $Z(v_i) \times Z^*(v_i)$  obtido pela validação cruzada dos teores verdadeiros  $Z(v_i)$  e os teores estimados  $Z^*(v_i)$ .

Dado um teor de corte  $z$ , e dividindo o gráfico da Figura 3.5 em quatro áreas (1, 2, 3 e 4), tiram-se as seguintes informações:

- Na área 1, todos os seus blocos não serão selecionados, pois  $Z^*(v_i) < z$ , mas, porém, tem-se que  $Z(v_i) \geq z$ , o que significa que todos seus blocos estimados como estéril são, na verdade, blocos de minério. Podendo assim, induzir a uma análise errônea com relação a viabilidade econômica do projeto, levando a conclusão que o empreendimento deva ser postergado, ou até mesmo descartado.
- Na área 2, os dois critérios de seleção são satisfeitos, ou seja,  $Z(v_i) \geq z$  e  $Z^*(v_i) \geq z$ . Então, todos os blocos desta área serão selecionados para compor a reserva recuperável.
- Na área 3, os dois critérios de seleção não foram satisfeitos, pois tem-se que  $Z(v_i) < z$  e  $Z^*(v_i) < z$ . Portanto, todos os seus blocos não serão selecionados, pois são considerados como estéril, e realmente o são, dado a teor de corte  $z$ .
- Na área 4, todos os blocos serão selecionados, pois  $Z^*(v_i) \geq z$ , mas, porém, tem-se que  $Z(v_i) < z$  o que significa que os blocos estimados como minério são, na verdade, blocos de estéril. Isto pode levar o projeto ao fracasso financeiro, se implementado.

Como, citado anteriormente, ocorre que  $Z^*(v_i) \neq Z(v_i)$ , o que implica no viés  $E[Z(v_i) - Z^*(v_i)]$ , que é a diferença média entre os valores verdadeiros e os estimados sobre todos os blocos, sem que tenha havido, ainda, qualquer seleção.

Existem vários fatores que levam a ocorrência deste viés, tais como:

- Amostragem mal representativa do depósito;
- Erros cometidos na análise química das amostras;
- Erros cometidos no processo de estimativa.

Não basta que  $E[Z(v_i) - Z^*(v_i)] = 0$ , pois, há os casos em que esta esperança é nula, mas porém não existe correlação entre  $Z(v_i)$  e  $Z^*(v_i)$ , é o caso em que a

função  $Z(v_i) \times Z^*(v_i)$  é simétrica em relação a primeira bissetriz, mas os pontos são dispersos.

Considerando o viés condicional  $E[Z(v_i) - Z^*(v_i) | Z^*(v_i)]$ , ao qual ocorre quando se toma um valor  $Z^*(v_i) = z$ , na verdade tem-se uma diferença no teor médio  $E[Z^*(v_i) | Z^*(v_i) = z]$ . Neste caso, os blocos com teor médio acima do teor de corte  $z$  tem teor médio dado por  $E[Z(v_i) | Z^*(v_i) \geq z]$  que é diferente do teor médio estimado. Então, o viés condicional  $E[Z(v_i) - Z^*(v_i) | Z^*(v_i)]$  é responsável por um viés no teor selecionado:  $E[Z(v_i) - Z^*(v_i) | Z^*(v_i) \geq z]$ . Isto é, a média do viés condicionado para os blocos selecionados (Rivoirard, 1987).

Supondo que a regressão  $E[Z(v_i) | Z^*(v_i)]$  seja linear, isto é, que  $Z(v_i)$  e  $Z^*(v_i)$  tenham funções densidade de probabilidade do tipo normal, como é ilustrada pela Figura 3.6, tem-se que

$$\frac{E[Z(v_i) - Z^*(v_i) | Z^*(v_i) \geq z_c] - m}{\sigma} = \frac{\rho[Z^*(v_i) - m]}{\sigma^*}$$

em que

$$m = E[Z(v_i)] = E[Z^*(v_i)]$$

$$\sigma^2 = \text{Var}[Z(v_i)]$$

$$\sigma^{*2} = \text{Var}[Z^*(v_i)]$$

$$\rho = \text{correlação}[Z(v_i), Z^*(v_i)]$$

consequentemente,

$$E[Z(v_i) | Z^*(v_i)] - m = \rho[Z^*(v_i) - m]$$

no qual  $\rho$  é a inclinação da regressão, e é dada por:

$$\rho = \frac{\sigma}{\sigma^*} = \frac{\text{cov}[Z(v_i), Z^*(v_i)]}{\text{var}[Z^*(v_i)]}$$

Quando há um não viés condicional, a regressão tem inclinação igual a 1 (primeira bissetriz). Então, um valor de  $\rho$  diferente de 1, implica em um viés condicional.

Se  $p < 1$ , o teor recuperado será menor que o estimado. O estimador  $Z^*(v_i)$  sobrestima o teor selecionado.  $\sigma^{*2} > \sigma^2 \Rightarrow p = \rho \frac{\sigma}{\sigma^*} < 1$

Se  $p > 1$ , o teor recuperado será maior que o estimado. Ocorre uma subestimativa, isto pode levar a decisão de não implementar, ou postergar, o projeto, alegando que o mesmo é economicamente inviável, no momento.

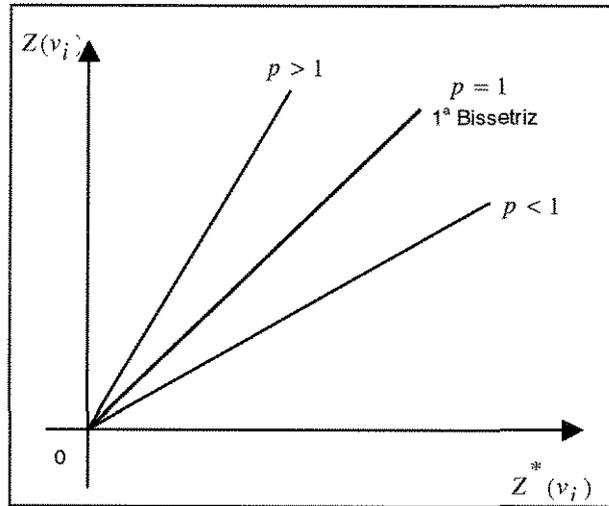


Figura 3.6: Regressão normal

Em geral,  $Z(v_i)$  não é conhecido, assim se a seleção dos blocos for feita através dos seus valores estimados  $Z^*(v_i)$  conduzirá a:

- Escolha de blocos pobres que foram estimados ricos;
- E ao abandono de blocos ricos que foram estimados pobres.

Estes erros correspondem a dispersão vertical dos pontos do gráfico da Figura 3.6 ao redor da 1ª bissetriz :  $Var[Z(v_i) - Z^*(v_i) | Z^*(v_i)]$ .

A diferença  $Z(v_i) \neq Z^*(v_i)$ , provoca uma degradação das FR. Este efeito sobre as FR, devido ao desconhecimento do teor verdadeiro  $Z(v_i)$  é chamado de **efeito informação**.

Tem-se que:

$$Z(v_i) - Z^*(v_i) = \{Z(v_i) - E[Z(v_i) | Z^*(v_i)]\} + \{E[Z^*(v_i) | Z^*(v_i)] - Z^*(v_i)\}$$

o segundo termo do segundo membro da expressão acima  $E[Z^*(v_i)|Z^*(v_i)] - Z^*(v_i)$  depende apenas de  $Z^*(v_i)$ , por isto não é correlacionada com o primeiro termo. Portanto, a variância do erro de estimativa é dado por:

$$Var[Z(v_i) - Z^*(v_i)] = Var\{Z(v_i) - E[Z(v_i)|Z^*(v_i)]\} + Var\{E[Z^*(v_i)|Z^*(v_i)] - Z^*(v_i)\}$$

em que o segundo termo, do segundo membro, corresponde ao viés condicional, enquanto o primeiro corresponde a dispersão vertical do diagrama  $Z(v_i) \times Z^*(v_i)$  ao redor da regressão.

Em mineração a variância de estimativa é um compromisso de minimizar a diferença entre o teor recuperado e o estimado, como o intuito de minimizar o erro global de estimativa.

Para o caso lognormal, tem-se que a regressão  $E[Z(v_i)|Z^*(v_i)]$ , pode ser representada pelo gráfico da Figura 3.7.

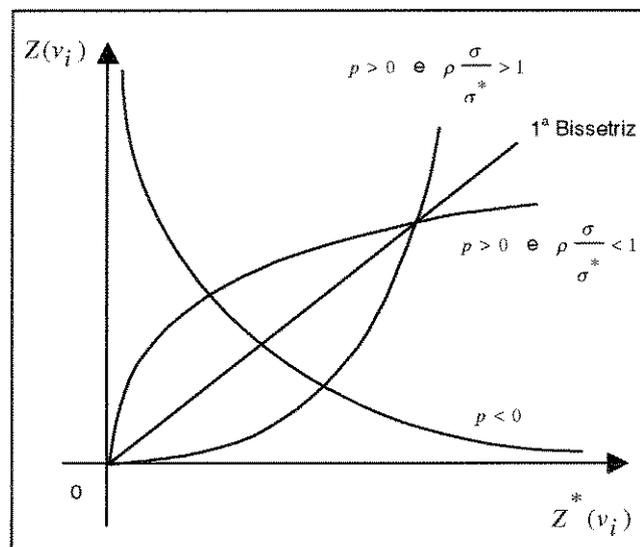


Figura 3.7: Regressão Lognormal.

## IV Capítulo 4

Este capítulo, classifica vários tipos de reservas recuperáveis definidas sobre critérios diferentes de seleção de blocos.

### IV.1 Tipos de Reservas Recuperáveis

A geoestatística realiza a estimativa, enquanto a parametrização de reservas seleciona a porção da reserva que poderá ser lavrada economicamente. Tendo isto em mente, Matheron (1981) apresentou uma aplicação da validação cruzada, definindo 4 conceitos de reservas e realizando comparações entre elas em um casos em que se precedeu a validação cruzada.

Matheron dá um exemplo típico, em que se tem  $Z(v_i)$  como o teor de um painel (ou bloco) de volume  $v_i$  e  $Z(x_i)$  o teor de uma amostra, quase pontual, localizada aleatoriamente, segundo uma lei uniforme, na posição  $x_i$  dentro do painel (ou do bloco)  $v_i$ , de sorte que  $F_{Z(x)}$  é mais seletiva que  $F_{Z(v)}$  (que representa o efeito suporte). Fazendo  $h = E[Z(v_i) | Z(x_i)]$  a esperança condicional de  $Z(v_i)$  em  $Z(x_i)$ , tem-se que  $F_{Z(v)}$  é mais seletiva que  $F_h$  (que representa o efeito informação).

Para o cálculo de reservas minerais, a princípio dispõe-se apenas dos valores amostrais, quase pontuais, dos teores  $Z(x_i)$ . Então, Matheron define **reserva ilusória** como aquela formada pelos blocos aos quais foram selecionados por conter amostra com teor de metal  $Z(x_i) \geq z$ . Então, o autor define as FR pela parametrização diretamente dos teores  $Z(x_i) \geq z$ , que podem ser expressas por:

$$T_{il}(z) = T_{Z(x)}(z)$$

$$Q_{il}(z) = Q_{Z(x)}(z)$$

$$B_{il}(z) = B_{Z(x)}(z)$$

em que o índice *il* significa ilusória, e  $Z(x)$  a parametrização sobre os teores das amostras.

O termo ilusória foi devido ao fato de se estimar o teor de metal do painel (ou do bloco)  $Z^*(v_i)$  pelo teor de metal da amostra  $Z(x_i)$ , ou seja, a reserva ilusória poderia ser, também, denominada de **reserva estimada** ou **reserva esperada**.

O mesmo autor define **reserva efetiva** como aquela que é efetivamente recuperada, com base no critério de seleção  $Z(x_i) \geq z$  :

$$T_{ef}(Z(x_i) \geq z) = T_{Z(x)}(z)$$

$$Q_{ef}(Z(x_i) \geq z) = \int_{Z(x) \geq z}^{+\infty} h(Z(x)) F_{Z(x)}(dZ(x))$$

$$B_{ef}(Z(x_i) \geq z) = \int_{Z(x) \geq z}^{+\infty} [h(Z(x) - z)] F_{Z(x)}(dZ(x))$$

em que o índice *ef* significa efetiva.

De posse dos valores amostrados  $Z(x_i)$ , e com o uso de um estimador (krigagem ou cokrigagem), realiza-se, na prática, a estimativa dos teores dos painéis (ou dos blocos), obtendo assim, teores estimados para os painéis (ou blocos)  $Z^*(v_i)$ . Como foi mencionado,  $Z^*(v_i)$  é uma estimativa, portanto, passível de erro.

Seriam obtidas as melhores relações Tonelagem/Teor possíveis se os teores verdadeiros dos painéis (ou blocos)  $Z(v_i)$  fossem conhecidos (ausência de efeito informação), o que é inacessível na prática. Matheron define **reserva ideal** como aquela que foi parametrizada através dos valores dos teores verdadeiros dos painéis (ou blocos)  $Z(v_i)$ , com corte em  $Z(v_i) \geq z$  :

$$T_{id}(z) = T_{Z(v)}(z)$$

$$Q_{id}(z) = Q_{Z(v)}(z)$$

$$B_{id}(z) = B_{Z(v)}(z)$$

em que o índice *id* significa ideal.

Como a reserva ideal é inacessível, ou seja, se conhece  $Z(x_i)$  e não  $Z(v_i)$ , Matheron propõe uma política de otimização que consiste em tomar o corte em  $H$ , segundo o qual  $H \geq z$ , no qual  $H$  é a função condicional abaixo:

$$H = h(Z(x)) = E[Z(v) | Z(x)]$$

e, com base nisto ele define a **reserva ótima** como:

$$T_{opt}(z) = \int_{h(Z(x)) \geq z}^{+\infty} F_{Z(x)}(dZ(x))$$

$$Q_{opt}(Z(x_i) \geq z) = \int_{h(Z(x)) \geq z}^{+\infty} h(Z(x)) F_{Z(x)}(dZ(x))$$

$$B_{opt}(Z(x_i) \geq z) = \int_{h(Z(x)) \geq z}^{+\infty} [h(Z(x)) - z] F_{Z(x)}(dZ(x))$$

que é o que se pode obter de uma situação real, e que o índice *opt* significa ótima.

Com base nisto tudo, conclui-se que:

$$B_{ef}(z) \leq B_{opt}(z) \leq B_{id}(z) \leq B_{il}(z)$$

em que a primeira inequação exprime simplesmente que  $h(Z(x)) \geq z$  é o melhor critério possível quando se conhece o teor da amostra  $Z(x_i)$  (da estimativa). E a diferença  $B_{opt}(z) - B_{ef}(z)$  resulta da escolha do mal critério  $Z(x_i) \geq z$ . A segunda inequação representa o efeito informação e a terceira inequação o efeito suporte.

Se a parametrização for feita em  $T$  ao invés de  $z$ , tem-se que:

$$Q_{ef}(T) = Q_{opt}(T)$$

com a restrição que a função  $h(Z(x))$  seja crescente. E se assim for, tem-se que:

$$T_{ef}(z) = T_{opt}(z_1)$$

$$Q_{ef}(z) = Q_{opt}(z_1)$$

com  $h(z) = z_1$ , no qual tem-se que os mesmos painéis (ou blocos) são selecionados, mas para cortes diferentes, ou seja, consiste em obter uma coleção de  $h(Z(v_i))$ , transformando cada um dos teores  $Z(v_i)$  em  $h(Z(v_i))$  utilizando a esperança condicional acima.

Como  $F_{Z(x)}$  é mais seletiva que  $F_{Z(v)}$ , e esta mais seletiva que  $F_H$ , tem-se que:

$$Q_{opt}(T) \leq Q_{id}(T) \leq Q_{il}(T)$$

Como toda esta teoria proposta por Matheron, é para dados contínuos, foi feito um estudo para os casos com funções densidade de probabilidade normal e

lognormal. Do qual é realizada a representação gráfica das funções  $T(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $B(z)$  e  $Q(T)$  das reservas ilusória, ideal, efetiva e ótima, para o caso lognormal na Figura 4.1.

#### IV.1.1 Caso Normal

Para o caso normal, em que  $Z(x_i)$  e  $Z(v_i)$  são variáveis com distribuição de probabilidade normal, com a mesma média  $m_o$  e com variâncias  $\sigma_{Z(x)}^2$  e  $\sigma_{Z(v)}^2$ , tem-se que:

$$h(Z(x)) = E[Z(v) | Z(x)] = m_o + \rho \frac{\sigma_{Z(v)}}{\sigma_{Z(x)}} (Z(x) - m_o)$$

e ainda que:

$$\sigma_H^2 = \sigma_y^2 (1 - \rho^2)$$

Logo, para o caso normal, tem-se as seguintes funções de recuperação:

$$T_*(z) = 1 - G(y_*)$$

$$Q_*(z) = m_o \cdot G(y_*) - \sigma \cdot g(y_*)$$

$$B_*(z) = Q_*(z) - z \cdot T_*(z)$$

com

$$y_* = \frac{z - m_o}{\sigma_*}$$

em que o índice  $*$  representa *opt*, *id* e *il*. Sendo  $g(y_*)$  a função densidade de probabilidade padronizada (distribuição de Gauss) e  $G(y_*)$  a sua acumulada.

#### IV.1.2 Caso Lognormal

Para o caso lognormal, em que  $Z(x_i)$  e  $Z(v_i)$  são variáveis com distribuição de probabilidade lognormal, com a mesma média  $m_o$  e com variâncias logarítmica  $\sigma_{Z(x)}^2$  e  $\sigma_{Z(v)}^2$ , tem-se a regressão dada por:

$$h(Z(x)) = E[Z(v) | Z(x)] = m_o \left( \frac{Z(x)}{m_o} \right)^{\rho^2} \exp\left(\frac{1}{2} \sigma_{Z(v)}^2 (1 - \rho^2)\right)$$

no qual a função  $h(Z(x))$  tem, também distribuição lognormal com esperança  $m_o$  e variância logarítmica dada por:

$$\sigma_H^2 = \rho^4 \cdot \sigma_{Z(x)}^2 = \rho^2 \cdot \sigma_{Z(v)}^2$$

Logo, para o caso lognormal, tem-se as seguintes funções de recuperação:

$$T_*(z) = 1 - G(y_*)$$

$$Q_*(z) = m_o [1 - G(y_* - \sigma_*)]$$

$$B_*(z) = Q_*(z) - z \cdot T_*(z)$$

com

$$y_* = \frac{1}{\sigma_*} \ln\left(\frac{z}{m_o}\right) + \frac{1}{2} \sigma_*$$

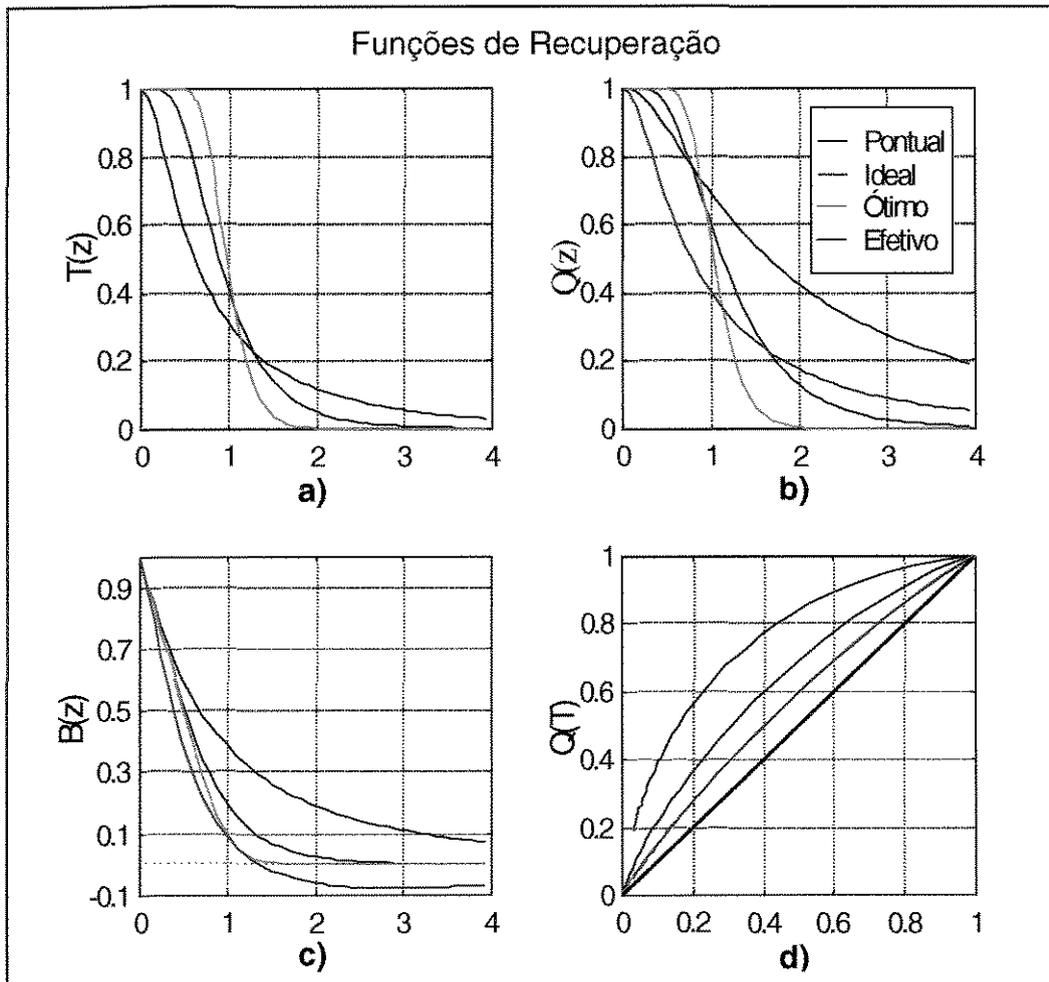


Figura 4.1: Funções de recuperação: a)Tonelagem  $T(z)$ , b)Metal contido  $Q(z)$ , c)Benefício Convencional  $B(z)$  e d)Metal contido  $\times$  Tonelagem  $Q(T)$  para as reservas ilusória, ideal, efetiva e ótima. Utilizando os parâmetros: teor médio  $m = 1$  g/t variância pontual  $\sigma_x^2 = 1,718$  (g/t)<sup>2</sup>, variância de bloco  $\sigma_v^2 = 0,649$  (g/t)<sup>2</sup> e correlação  $\rho = 0,5$  (reproduzido de Matheron 1981).

em que o índice  $*$  representa *opt*, *id* e *il*. Sendo  $G(y_*)$  a função de probabilidade acumulada padronizada (de Gauss).

O gráfico da Figura 4.1 ilustra as funções de recuperação  $T(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $B(z)$  e  $Q(T)$ , para as reservas ilusória, efetiva, ótima e ideal.

É notado na Figura 4.1 no item **a**) que  $T_{ef}(z) = T_{opt}(z)$  e que no item **d**) tem-se  $Q_{ef}(T) = Q_{opt}(T)$  como é esperado.

Remacre & Cornetti (1996) define alguns conceitos de reservas (baseado em Matheron): define **Reserva Estimada** (ou esperada) como aquela obtida com base em um estimador  $Z^*(v_i)$ , que pode ser sobrestimada [ $Z^*(v_i) > Z(v_i)$ ] ou subestimada [ $Z^*(v_i) < Z(v_i)$ ], dependendo da qualidade do estimador (krigagem ou cokrigagem) e das condições da estimativa (modelo geológico). Como se conhece  $Z^*(v_i)$ , ou seja, o seu histograma, portanto se conhece sua média e sua variância, realiza a parametrização em  $Z^*(v_i) \geq z$ .

Tal autor, define **Reserva Ideal** (ou Verdadeira) aquela calculada utilizando o teor verdadeiro  $Z(v_i)$ , na hipótese de que sejam conhecidos. Neste caso, não há sobrestimava e nem subestimava (ausência de efeito informação), independentemente do método de estimativa tem-se  $Z^*(v_i) = Z(v_i)$ , e a parametrização é feita com  $Z(v_i) \geq z$ .

Define **Reserva Efetiva** como aquela obtida usando como critério de seleção  $Z^*(v_i) \geq z$ , porém, calculada utilizando os teores verdadeiros  $Z(v_i)$  (na hipótese de que sejam conhecidos), o que não implica, necessariamente, que  $Z(v_i) \geq z$ . Portanto, a reserva efetiva é aquela que, realmente, é recuperada.

A reserva efetiva será sempre menor que a reserva ideal. Isso se deve ao efeito informação: seleciona-se baseado em um estimador, portanto em situação desfavorável, as FR seriam deterioradas em relação a ideal. Logo, o efetivamente recuperado é sempre menor que o ideal.

Um exemplo numérico, para um caso discreto, é ilustrado na Figura 4.2, em que se tem um depósito de metal (ex. cobre) formado por 5 blocos de minério os quais, para cada um, é atribuído o seu teor de metal estimado  $Z^*(v_i)$  e o verdadeiro

$Z(v_i)$ . E então, calcula-se as reservas recuperáveis estimada, verdadeira e efetiva, considerando teor de corte  $z = 1,5 \text{ g/t}$ .

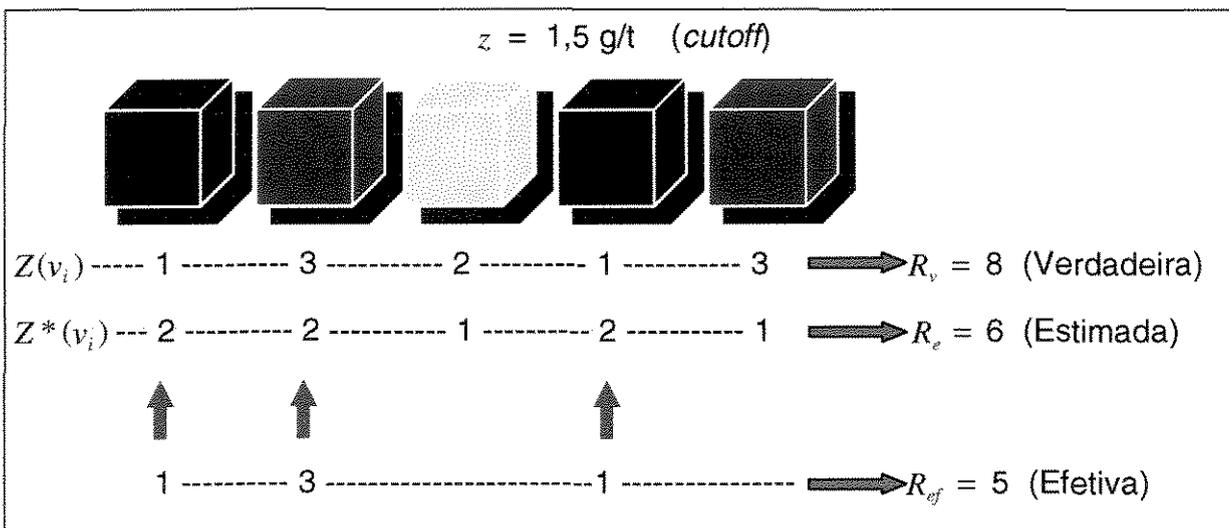


Figura 4.2: Ilustração do cálculo de reserva estimada, verdadeira e efetiva.

Aqui está uma importante tarefa a qual o engenheiro de minas deve estar atento, de modo a evitar, pelo acompanhamento de lavra, que blocos de estéril, mas estimados como minério sejam levados para a usina de tratamento, e que blocos de minérios, mas estimados como estéril sejam levados para a pilha de estéril.

## V Capítulo 5

Este capítulo apresenta um estudo de caso, criado com o objetivo de verificar os impactos sobre as curvas de parametrização gerados pelos efeitos suporte e informação.

### V.1 Criação do Estudo de Caso

Foi criado um estudo de caso com o intuito de verificar o impacto do **efeito suporte** e do **efeito informação** sobre as funções de recuperação.

Para tal estudo, foi realizada uma simulação estocástica, utilizando o método *Turning Bands* que é um algoritmo bastante difundido na mineração para simulação de reservas minerais. Tal simulação foi feita empregando o *software* ISATIS.

A simulação foi realizada sobre uma malha, a 2D, totalizando 99225 "blocos" de 1x1m, e abrangendo uma área quadrada de 315 por 315m que pode ser uma bancada de uma mina, utilizando um modelo de variograma esférico e isotrópico com o alcance de 15m e patamar igual a 1.

Posteriormente, foi necessário transformar os dados simulados de modo que os dados obtidos apresentasse similaridade com dados reais normalmente encontrados na mineração. Tal processo foi realizado do seguinte modo:

- Criar população de teor de metal que poderia caracterizar um depósito de ouro disseminado com teor médio ( $m$ ) em torno de 2 g/t e que apresentasse variância ( $S^2$ ) ao redor de 3 (g/t)<sup>2</sup>.
- Transformar os dados obtidos pela simulação estocástica em uma população com distribuição de probabilidade normal com média 0 e variância 1 (normal reduzida), usando a expressão:  $y' = \frac{y_s - \mu_s}{\sigma_s}$ , nos quais  $\mu_s$ ,  $\sigma_s^2$  e  $y'$  são, respectivamente, a média, a variância e a variável reduzida da variável simulada  $y_s$ .

- Transformar  $y'$  usando a expressão  $Z(v_i) = \exp(\mu + \sigma y')$ , no qual  $Z(v_i)$  é o teor de metal do bloco  $i$ , e os valores de  $\mu$  e  $\sigma$  são determinados por

$$S^2 = m^2 (e^{\sigma^2} - 1) \quad \longrightarrow \quad \sigma^2 = \ln\left(\frac{S^2}{m^2} + 1\right)$$

$$m = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad \longrightarrow \quad \mu = \ln(m) - \frac{1}{2}\sigma^2$$

de modo a obter uma população de teores com  $m$  e  $S^2$  ao redor de 2 g/t e 3 (g/t)<sup>2</sup>, respectivamente. Logo, o teor de “ouro”  $Z(v_i)$  terá distribuição de probabilidade lognormal, sendo um modelo bastante encontrado na natureza.

A Tabela 5.1 apresenta os parâmetros utilizados e os calculados na fase de transformação de dados, mostrando os valores dos parâmetros desejados (média e variância dos teores de metal requeridas), os quais são usados para a obtenção dos parâmetros calculados (média e variância dos dados simulados), e que estes são utilizados para a obtenção da média e variância dos teores de metal (parâmetros obtidos).

**Tabela 5.1: Parâmetros utilizados e obtidos durante a fase de transformação.**

Parâmetros desejados		Parâmetros Calculados		Parâmetros Obtidos	
$m$ (g/t)	$S^2$ (g/t) <sup>2</sup>	$\mu$	$\sigma^2$	$m$ (g/t)	$S^2$ (g/t) <sup>2</sup>
2,00	3,00	0,41	0,56	1,99	2,70

## V.2 Impacto do Efeito Suporte sobre as FR

Para o estudo do efeito suporte, foram criados novos *grids* com suportes de 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m, de maneira que cada um deles sobrepõe totalmente a área do *grid* com suporte de 1x1m.

O cálculo do teor de metal  $Z(v_i)$  de cada bloco para os novos suportes, são obtidos pela média dos blocos com suporte 1x1m sobrepostos em cada um dos suportes. Um exemplo desta sobreposição é ilustrado pela Figura 5.1, no qual a

média dos teores dos nove blocos com suporte 1x1m corresponde ao teor de um único bloco com suporte 3x3. Similarmente, este procedimento também é aplicado para os demais suportes.

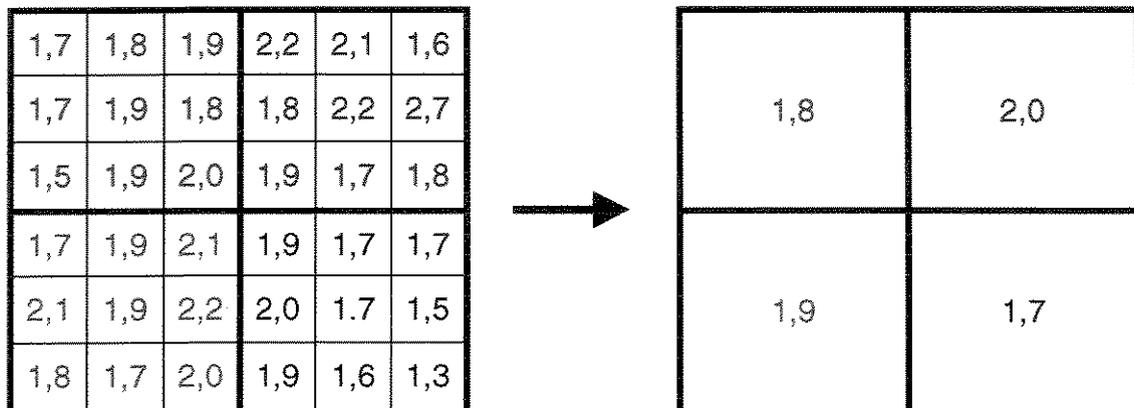


Figura 5.1: Ilustração do cálculo do teor de metal  $Z(v_i)$  para o suporte de 3x3m: pela média do suporte de 1x1m.

Tabela 5.2: Estatística básica dos teores de metal  $Z(v_i)$  para suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m, e para os dados simulados.

Variável ou Suporte (m)	Nº de Blocos	Teor Mínimo	Teor Máximo	Teor Médio	Variância
<b>Simulação</b>	99225	-4,09	3,82	0,0134	0,9731
<b>Gaussiana</b>	99225	-4,16	3,86	0	1
<b>1x1</b>	99225	0,06	27,03	1,99	2,70
<b>3x3</b>	11025	0,12	19,07	1,99	2,18
<b>5x5</b>	3969	0,17	11,41	1,99	1,83
<b>7x7</b>	2025	0,27	11,29	1,99	1,54
<b>9x9</b>	1225	0,32	7,81	1,99	1,28
<b>15x15</b>	441	0,55	5,15	1,99	0,69

A Tabela 5.2 mostra a estatística básica para os dados simulados, gaussianos, e para os teores  $Z(v_i)$  para os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m. É importante observar que o teor médio permaneceu constante para todos os suportes, e que a variância diminuiu com o aumento do suporte, como era de se esperar.

O declínio da variância também é evidenciado pelos variogramas apresentados na Figura 5.2a), e pelo gráfico do item b), da mesma Figura. Esse declínio se deve ao desaparecimento dos valores extremos a medida que o suporte cresce, o que é visto pelo desaparecimento das classes extremas dos histogramas da Figura 5. 3.

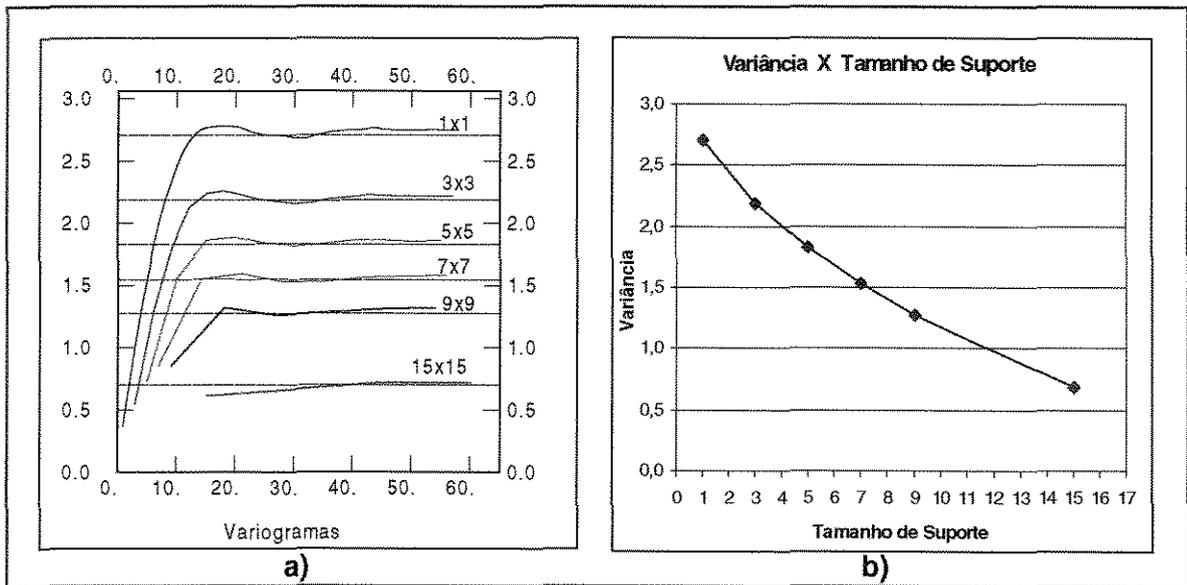


Figura 5.2: a) Variogramas experimentais para os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m na direção do eixo x. b) Variância de  $Z(v)$  versus Tamanho de Suporte  $v$ .

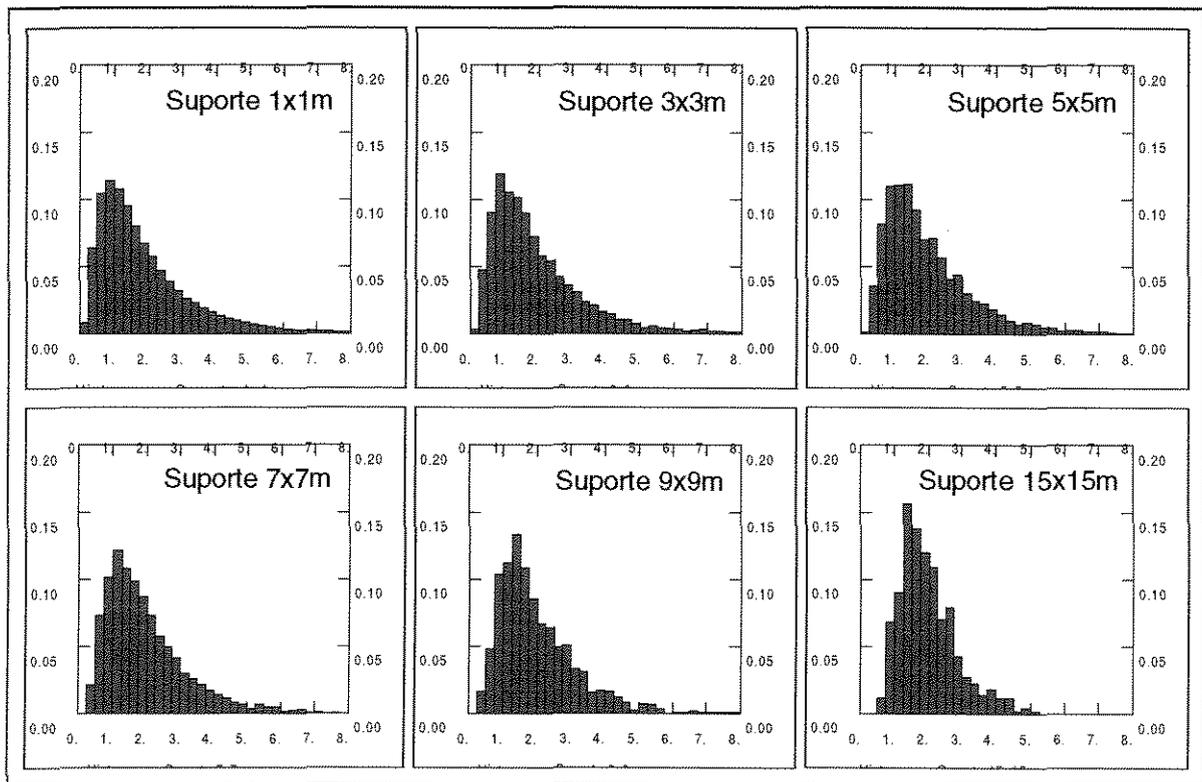


Figura 5. 3: Histogramas dos teores de metal  $Z(v_i)$  : suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m.

A Figura 5. 4 mostra, graficamente, a função de recuperação  $T(z)$ , definida sobre os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m.

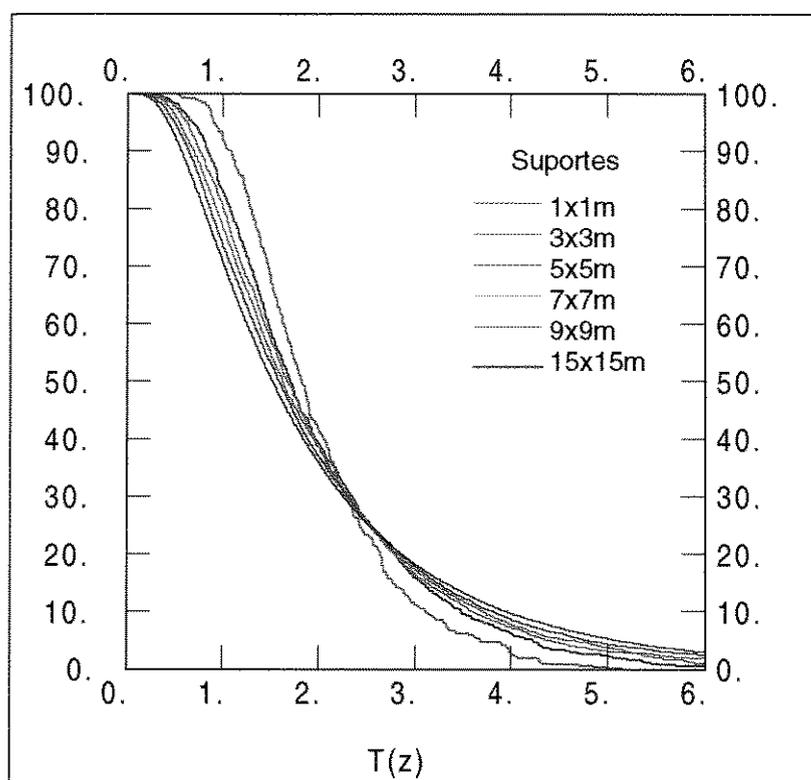


Figura 5. 4: Representação gráfica da função Tonelagem  $[T(z)]$ , definida sobre os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m.

Aplicando um teor de corte  $z=2g/t$  na Figura 5. 4, tem-se, para os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m, a porcentagem de minério selecionado, cujo os valores são mostrado pela Tabela 5 3.

**Tabela 5 3: Quantidade de minério selecionado pela aplicação do teor de corte  $z = 2g/t$ , em porcentagem da reserva total, para os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m.**

Suporte	1x1m	3x3m	5x5m	7x7m	9x9m	15x15m
$T(z)$	35,91	37,06	38,70	38,86	39,09	41,49

A representação gráfica da função de recuperação  $Q(z)$ , definida sobre os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m, é mostrada pela Figura 5.5.

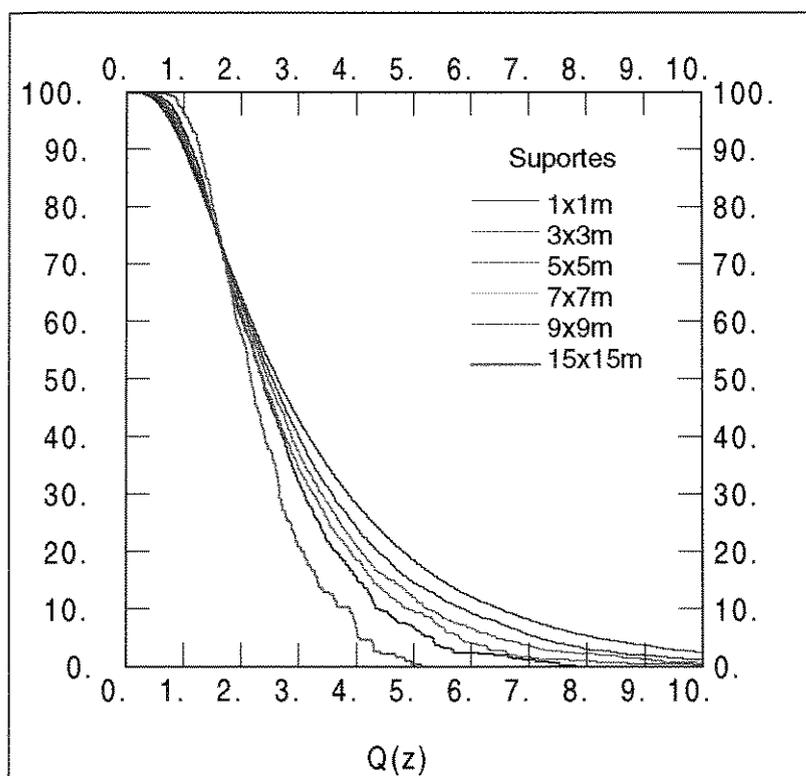


Figura 5.5: Representação gráfica da função Metal Contido  $[Q(z)]$ , definida sobre os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m.

Utilizando o teor de corte  $z = 2g/t$ , na Figura 5.5, obtém-se a porcentagem de metal selecionado, em relação a quantidade de metal total contida em toda a reserva mineral, para os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m. Tais porcentagens estão apresentadas na Tabela 5.4.

**Tabela 5.4: Quantidade de metal selecionado pela aplicação do teor de corte  $z = 2g/t$ , em porcentagem, em relação a quantidade total de metal contida na reserva mineral, para os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m.**

Suporte	1x1m	3x3m	5x5m	7x7m	9x9m	15x15m
$Q(z)$	64,86	63,83	63,78	62,17	60,89	57,95

A representação gráfica da função de recuperação  $B(z)$ , definida sobre os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m, é mostrada pela Figura 5.6.

Aplicando o teor de corte  $z = 2g/t$ , na Figura 5.6, obtém-se o benefício convencional, em porcentagem, promovido pela venda do metal descontados os custos de lavra e tratamento do minério selecionado, para os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m. Tais porcentagens estão mostradas na Tabela 5.5.

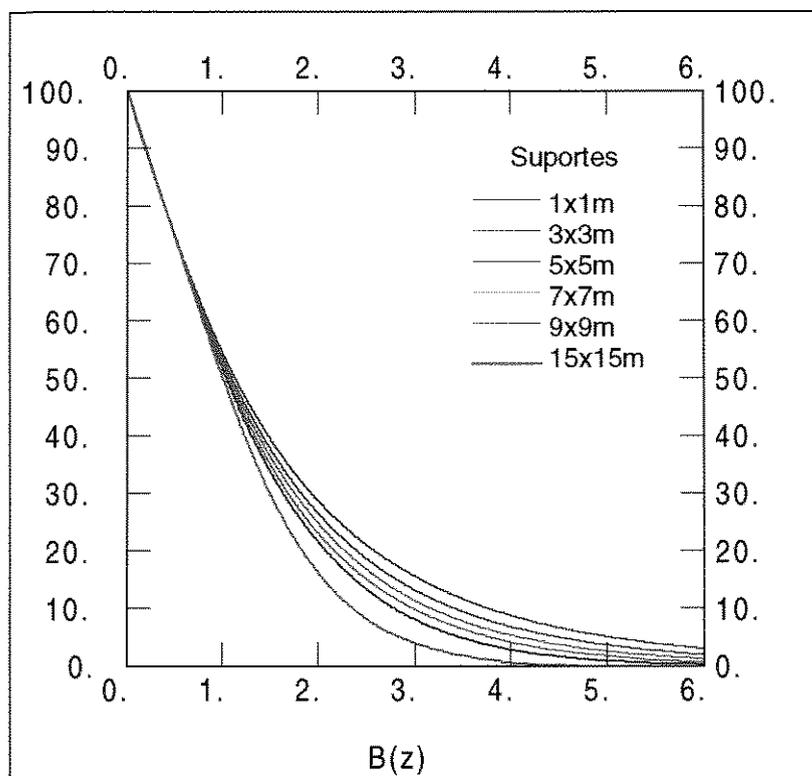


Figura 5.6: Representação gráfica da função Benefício Convencional  $[B(z)]$ , definida sobre os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m.

Tabela 5.5: Benefício convencional, em porcentagem, aplicando o teor de corte  $z = 2\text{g/t}$ , para os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m.

Suporte	1x1m	3x3m	5x5m	7x7m	9x9m	15x15m
$B(z)$	28,71	26,57	24,88	23,09	21,58	16,23

A função de recuperação  $Q(T)$ , definida sobre os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m está representada, graficamente, na Figura 5.7.

A Tabela 5.6 mostra a porcentagem de metal contida em 20% da reserva mineral total, para os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m. Isto é de suma importância, pois se em um depósito mineral (exemplo: ouro), uma pequena parcela dos blocos conter uma alta proporção de metal, implicará em uma situação de maior risco financeiro na implantação do projeto. Então, neste caso, há a necessidade de verificar com maior certeza a existência de tais blocos ricos, geralmente, com empenho de mais sondagem.

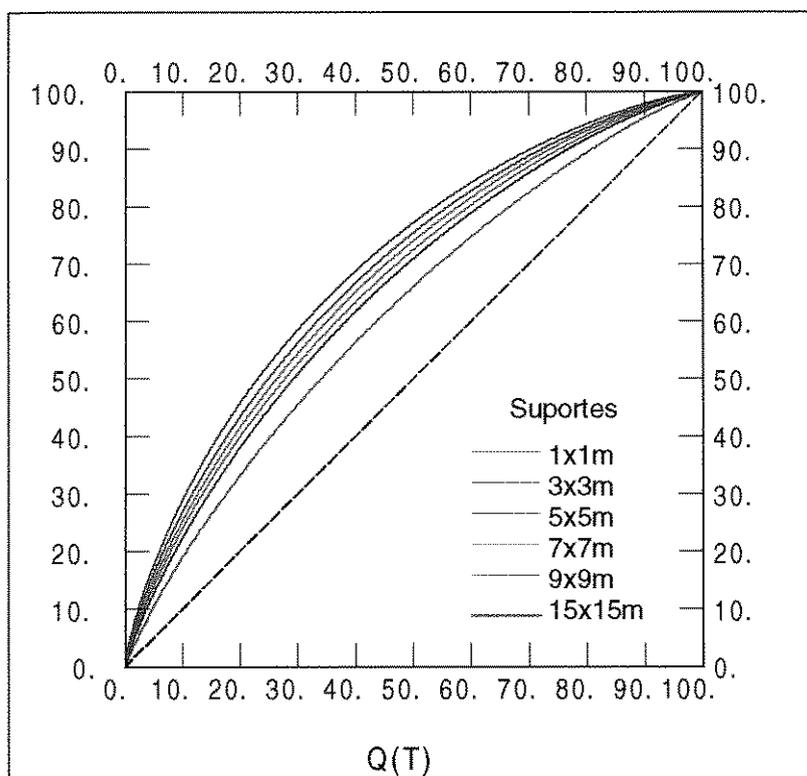


Figura 5.7: Representação gráfica da função Metal Contido x Tonelagem  $Q(T)$ , definida sobre os suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m.

Tabela 5.6: Quantidade de metal contido em 20% da reserva suportes 1x1, 3x3, 5x5, 7x7, 9x9 e 15x15m.

Suporte	1x1m	3x3m	5x5m	7x7m	9x9m	15x15m
$Q(T)$	45,75	43,35	41,50	39,88	38,08	33,35

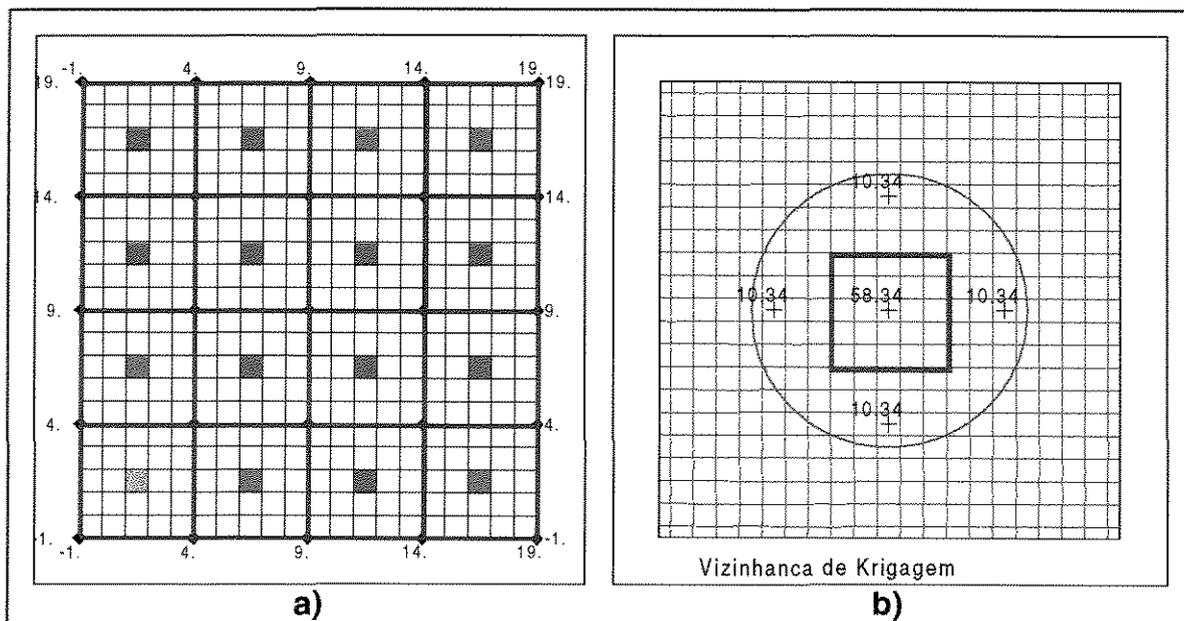
A questão é: Qual o suporte mais adequado financeiramente, uma vez que, na prática, o custo de lavra declina com aumento do suporte? A solução para esta questão implica a determinação de teores de corte diferentes, um para cada suporte.

### V.3 Impacto do efeito informação sobre as FR.

O estudo do impacto do efeito informação sobre as funções de recuperações (FR), foi baseado pela diferença entre as FR obtidas a partir do teor verdadeiro  $Z(v_i)$  e as obtidas a partir do teor estimado  $Z^*(v_i)$ . No qual  $Z^*(v_i)$  é derivado de dois casos comuns à mineração:

- 1º caso:  $Z^*(v_i)$  é estimado pelo teor de metal da amostra localizada no centro do bloco  $v_i$ .
- 2º caso:  $Z^*(v_i)$  é estimado por krigagem de bloco usando as 5 amostras mais próximas ao centro do bloco  $v_i$ .

A Figura 5.8 representa, para o suporte de 5x5m, a ilustração do processo de estimativa do teor de metal  $Z^*(v_i)$  para os dois caso mencionados acima: em que no item **a)**, 1º caso,  $Z^*(v_i)$  é estimado pelo teor de metal da amostra localizada no centro do bloco  $v_i$ . Enquanto, no item **b)**, 2º caso, ilustra a vizinhança de krigagem utilizada para a estimativa do teor de metal  $Z^*(v_i)$  pela krigagem de bloco ("block Kriging"), a qual é calculada utilizando as 5 amostras mais próximas ao centro do bloco  $v_i$ . O mesmo processo de estimativa do teor de metal  $Z^*(v_i)$  é definido para os suportes 3x3 e 7x7m.



**Figura 5.8: a) 1º Caso: estimativa do teor de metal  $Z^*(v_i)$  do bloco  $v_i$  pelo teor da amostra localizada no centro do bloco  $v_i$  com suporte de 5x5m e b) 2º Caso: Vizinhança de Krigagem de bloco para estimativa do teor de metal  $Z^*(v_i)$  do bloco  $v_i$  para o suporte de 5x5m.**

Para o estudo, foram tiradas 3 amostragens dos dados exaustivos (dos dados simulados), em malhas de amostragem com espaçamento uniforme de 3x3, 5x5 e 7x7 metros.

## 1º Caso

Aqui é analisado o impacto do efeito informação sobre as FR, em que a informação teor de metal do bloco  $v_i$  é estimado pelo teor da amostra localizada no centro do bloco  $v_i$ , ou seja  $Z^*(v_i) = Z(x_i)$ , conforme é ilustrado na Figura 5.8a). Este procedimento, constitui uma prática muito comum na mineração, utilizada no controle de teores em frente de lavra, a qual pode obter um bom resultado dependendo do tamanho do suporte adotado. É um caso bastante similar ao método de estimativa do polígono de influência, que era muito usado no passado para a estimativa de reservas minerais.

Segundo Remacre (1995), a prática de estimar o teor pela amostra central do bloco de lavra, resulta necessariamente, em média, em uma sobreestimativa do teor do bloco selecionado.

Após atribuir ao teor do bloco  $v_i$  o teor da amostra  $Z(x_i)$ , foi feita a parametrização, obtendo as FR através dos teores das amostras para os suportes 3x3, 5x5 e 7x7m.

As curvas de parametrização  $T(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $Q(T)$  e  $B(z)$  dos teores verdadeiro (curvas de cor preta) e dos teores estimados pela amostra central ao bloco (curvas de cor vermelha), para os suportes 3x3, 5x5 e 7x7m, são mostradas pelos itens **a**, **b** e **c** das Figuras 5.9; 5.10; 5.11 e 5.12, respectivamente.

**Tabela 5.7: Impacto do efeito informação, para o 1º caso, em diferença relativa à reserva verdadeira  $[100 \cdot (Q^* - Q) / Q]$ , sobre as curvas  $T(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $B(z)$  e  $Q(T)$ , utilizando os teores de corte  $z_1 = 1,5 \text{ g/t}$ ,  $z_2 = 2,0 \text{ g/t}$  e  $z_3 = 2,5 \text{ g/t}$ , para o suporte de 5x5m.**

Teor de Corte	$T(z)$	$Q(z)$	$B(z)$	$Q(T)$
$z_1 = 1,5$	-6,78	0,33	8,39	0,33
$z_2 = 2,0$	-5,56	2,32	14,57	2,32
$z_3 = 2,5$	-1,26	7,04	23,05	7,04

A Tabela 5.7 mostra o impacto do efeito informação, para o 1º caso, em diferença relativa à reserva verdadeira  $[100 \cdot (Q^* - Q) / Q]$ , sobre as curvas  $T(z)$ ,

$Q(z)$ ,  $B(z)$  e  $Q(T)$ , considerando os teores de corte  $z_1 = 1,5$  g/t,  $z_2 = 2,0$  g/t e  $z_3 = 2,5$  g/t, para o suporte de 5x5m. É notado que a estimativa não foi adequada, para este tamanho de suporte, pois para todos os teores de corte  $z$  houve uma sobrestimativa do benefício convencional bastante significativa, atingindo uma estimativa 23,05% superior ao verdadeiro, para  $z_3 = 2,5$  g/t. E, isto acontece para todos os teores de corte.

De acordo com os gráficos das Figuras 5.9; 5.10; 5.11 e 5.12, a prática de estimar o teor de metal de um bloco pelo teor da amostra central ao bloco, 1º caso em estudo, para o cálculo de reservas recuperáveis ou para o controle de teores em frente de lavra pode ser adequada quanto a malha de amostragem for bastante adensada. Porém, isto exige um número maior de amostras, o que acarreta em maior investimento. Como é visto, nas referidas Figuras, que as FR para o suporte 3x3m, não apresentaram diferenças muito significativas, em relação às FR verdadeiras. Porém, esta diferença aumenta a medida que o suporte cresce. Isto se deve ao fato que ao utilizar uma amostragem mais adensada, se tem um melhor conhecimento da variabilidade do teor de metal à menor distância, qualificando o nível da estimativa, ou seja, se conhece melhor a origem do variograma.

## 2º Caso

No 2º caso, o impacto do efeito informação sobre as FR, no qual a estimativa do teor de metal  $Z^*(v_i)$  do bloco  $v_i$  é obtida por krigagem de bloco (*Block Kriging*) utilizando uma vizinhança de krigagem móvel que contenha as 5 amostras mais próximas ao bloco a ser estimado, conforme é ilustrado a Figura 5.8b).

Após a estimativa por krigagem de bloco, foi feita a parametrização, obtendo as FR através dos teores krigados, para os suportes 3x3, 5x5 e 7x7m.

As curvas de parametrização  $T(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $Q(T)$  e  $B(z)$  dos teores verdadeiro (curvas de cor preta) e dos teores estimados pela krigagem de bloco (curvas de cor azul), para os suportes 3x3, 5x5 e 7x7m, são mostradas pelos itens **a**, **b** e **c** das Figuras 5.9; 5.10; 5.11 e 5.12, respectivamente.

A Tabela 5.8 mostra o impacto do efeito informação, para o 2º caso (estimativa por krigagem de bloco), em diferença relativa à reserva verdadeira

$[100 \cdot (Q^* - Q) / Q]$ , sobre as curvas  $T(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $B(z)$  e  $Q(T)$ , considerando os teores de corte  $z_1 = 1,5$  g/t,  $z_2 = 2,0$  g/t e  $z_3 = 2,5$  g/t, para o suporte de 5x5m. Neste caso observou-se que o benefício foi subestimado para todos os teores de corte.

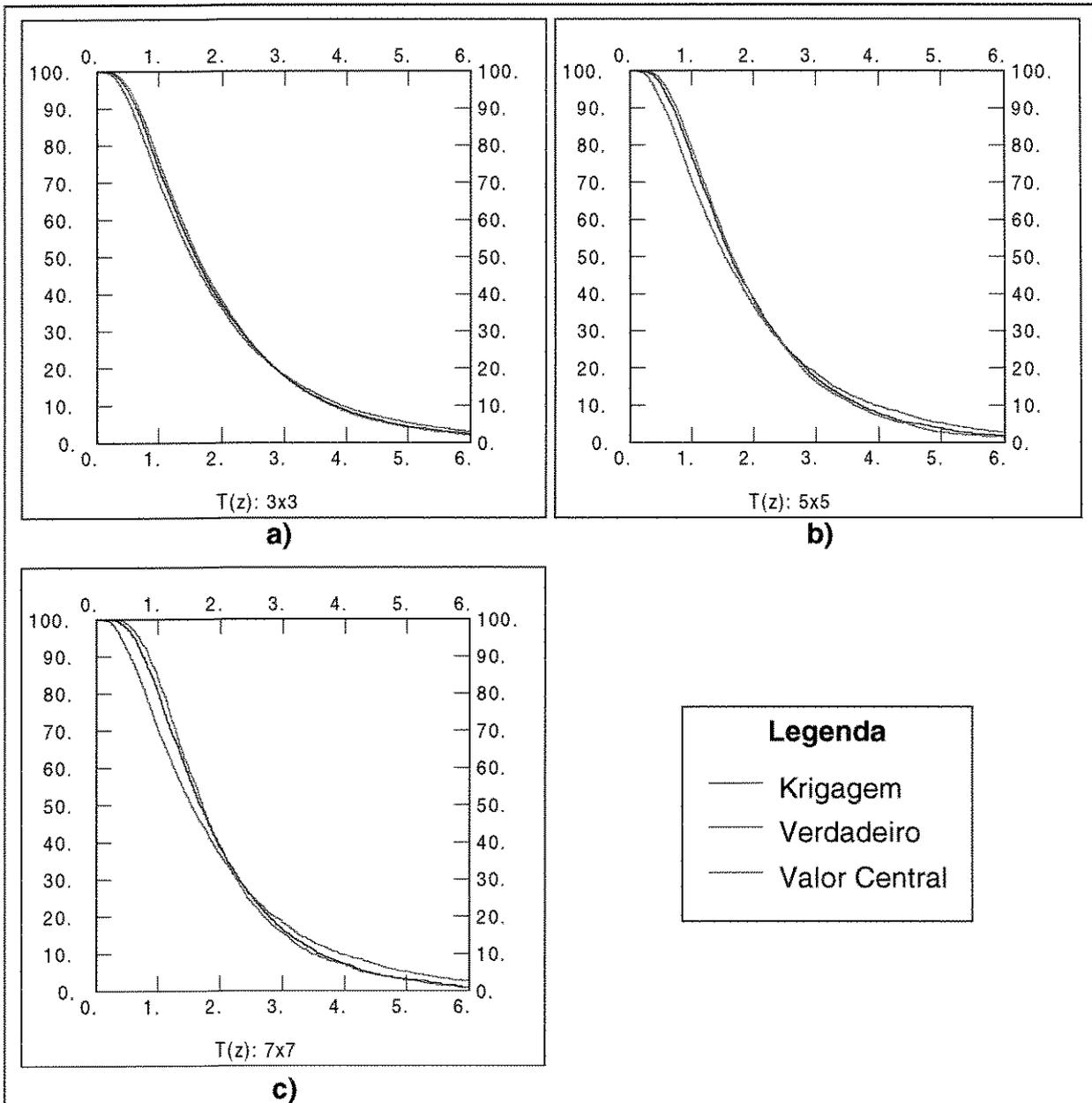
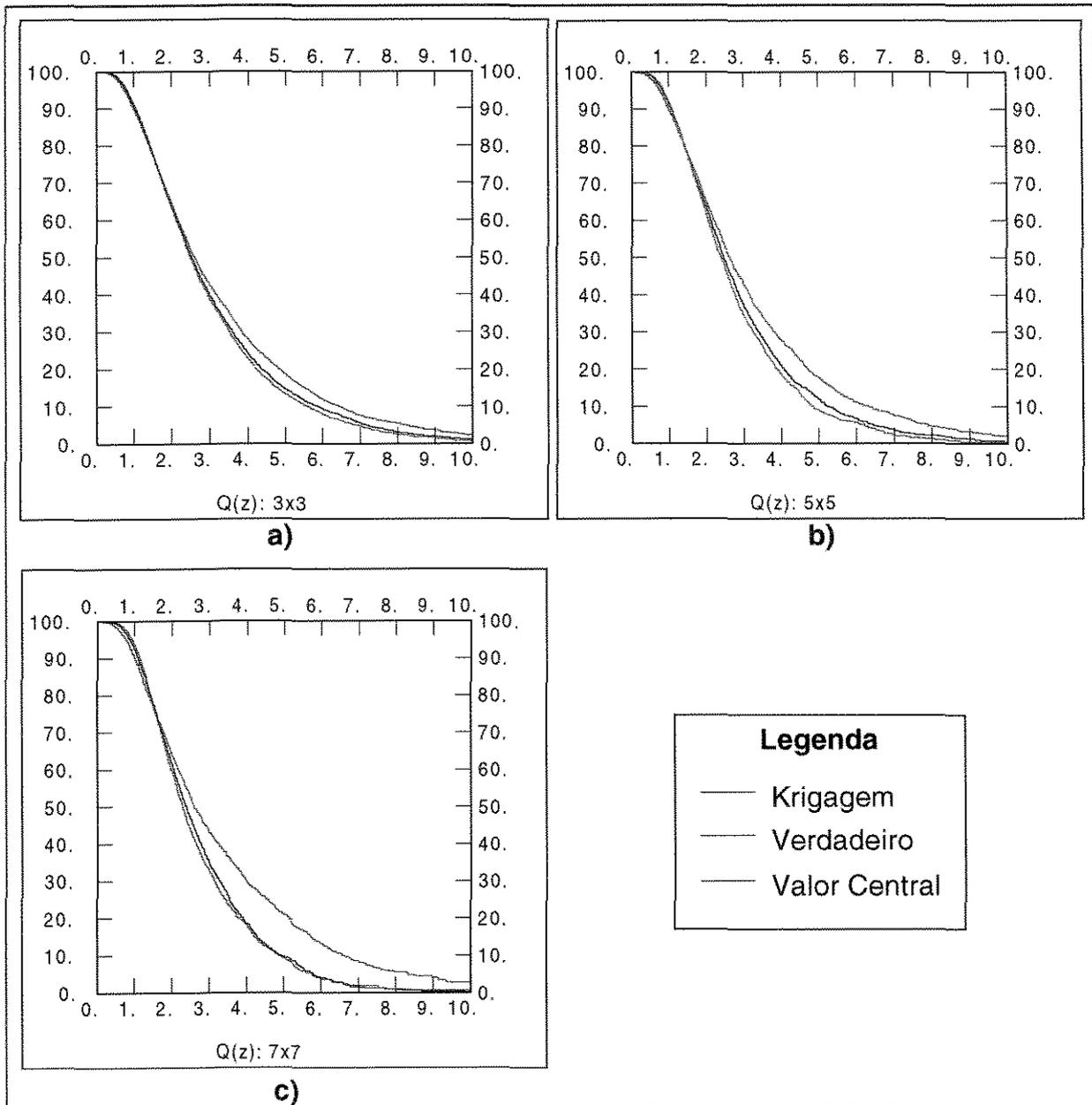


Figura 5.9: Curvas da Tonelagem  $[T(z)]$ : para os teores verdadeiro  $Z(v_i)$ , e para os estimados  $Z^*(v_i)$  pelo teor da amostra central do bloco  $v_i$  e pela krigagem de bloco usando as 5 amostras mais próximas ao bloco  $v_i$ ; isto para os suportes de a) 3x3, b) 5x5 e c) 7x7m.

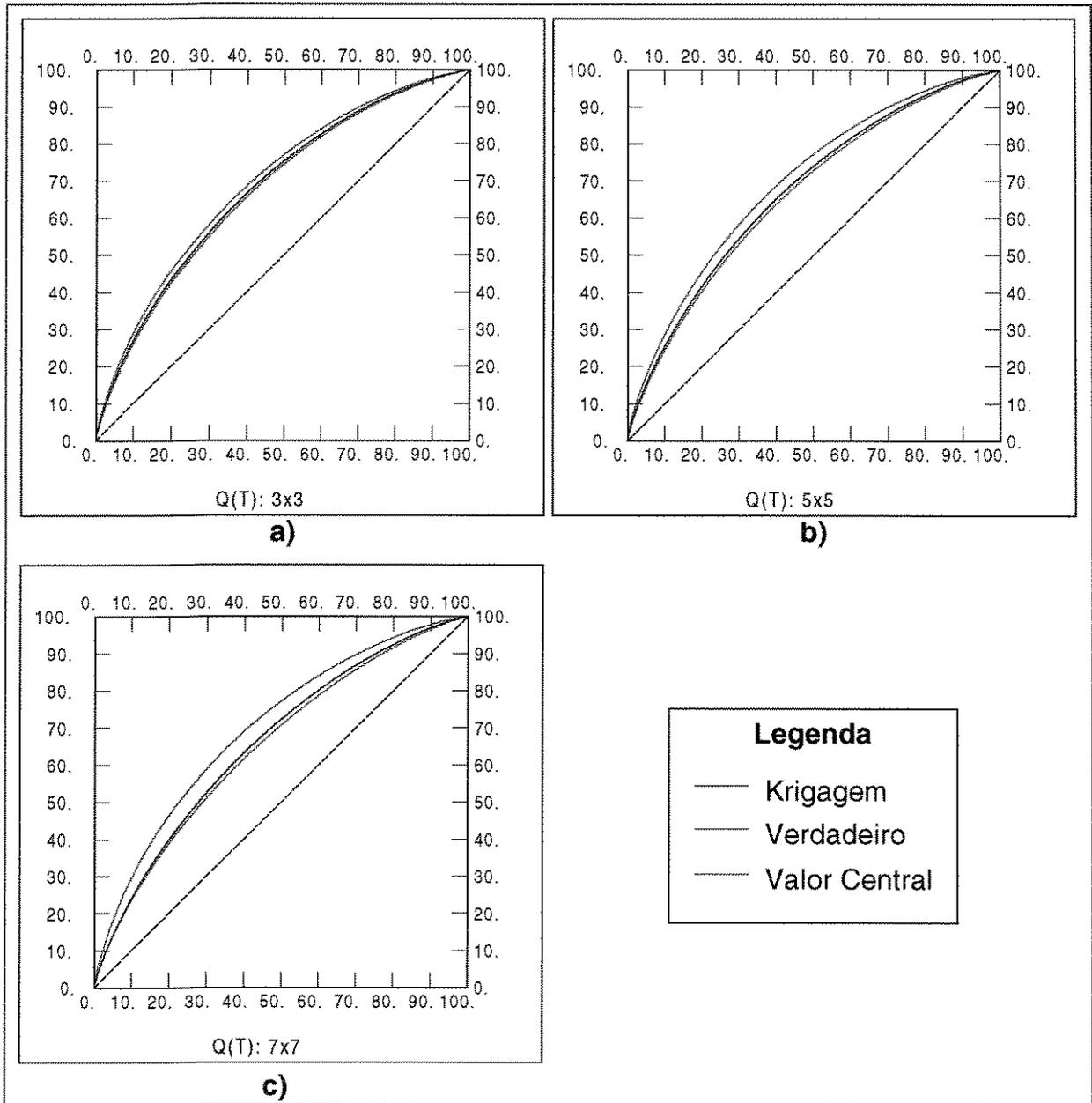
**Tabela 5.8: Impacto do efeito informação, para o 2º caso, em diferença relativa à reserva verdadeira  $[100 \cdot (Q^* - Q) / Q]$ , sobre as curvas  $T(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $B(z)$  e  $Q(T)$ , utilizando os teores de corte  $z_1 = 1,5 \text{ g/t}$ ,  $z_2 = 2,0 \text{ g/t}$  e  $z_3 = 2,5 \text{ g/t}$ , para o suporte de 5x5m.**

Teor de Corte	$T(z)$	$Q(z)$	$B(z)$	$Q(T)$
$z_1 = 1,5$	-2,39	-0,23	-3,95	-0,23
$z_2 = 2,0$	-1,56	-3,18	-6,78	-3,18
$z_3 = 2,5$	-0,39	-3,02	-9,24	-3,02

É notória a superioridade da estimativa por krigagem em relação estimativa pelo amostra do centro do bloco, neste estudo. Pois, todas as curvas de parametrização dos teores estimados pela krigagem apresentaram uma pequena diferença em relação as curvas verdadeiras, o que pode ser visto nas Figuras 5.9; 5.10; 5.11 e 5.12. Lembrando que os teores verdadeiros foram obtidos por uma média, conforme foi mencionado anteriormente, e que o teor krigado constitui, também, uma média, porém, esta é ponderada pelos pesos de krigagem.



**Figura 5.10: Curvas do Metal Contido  $[Q(z)]$  : para os teores verdadeiro  $Z(v_i)$ , e para os estimados  $Z^*(v_i)$  pelo teor da amostra central do bloco  $v_i$  e pela krigagem de bloco usando as 5 amostras mais próximas ao bloco  $v_i$ , isto para os suportes de a)  $3 \times 3$ , b)  $5 \times 5$  e c)  $7 \times 7$  m.**



**Figura 5.11: Curvas do Metal Contido x Tonelagem  $[Q(T)]$  : para os teores verdadeiro  $Z(v_i)$ , e para os estimados  $Z^*(v_i)$  pelo teor da amostra central do bloco  $v_i$  e pela krigagem de bloco usando as 5 amostras mais próximas ao bloco  $v_i$ , isto para os suportes de a)3x3, b)5x5 e c)7x7m.**

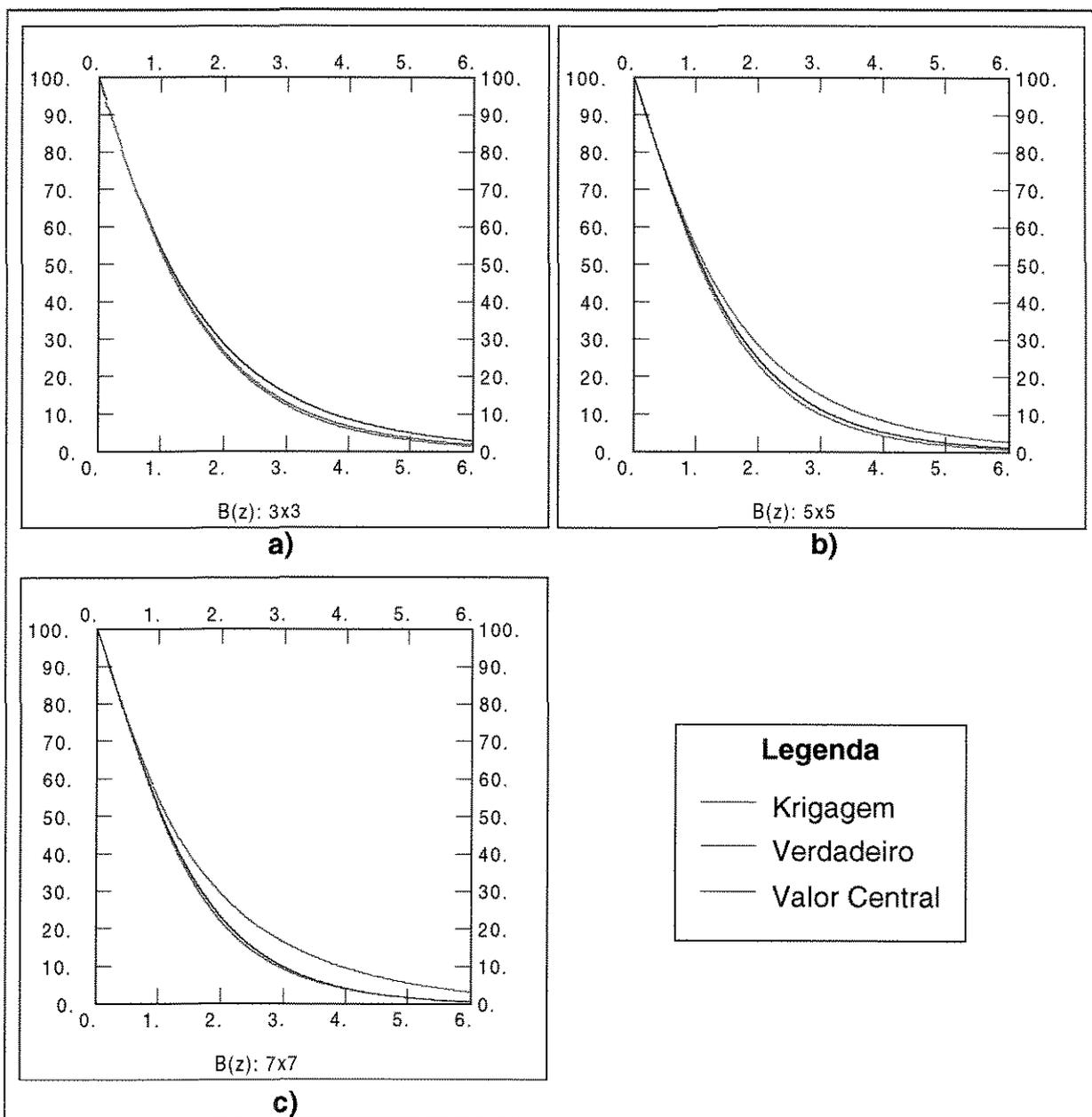


Figura 5.12: Curvas do Benefício Convencional  $[B(z)]$  : para os teores verdadeiro  $Z(v_i)$ , e para os estimados  $Z^*(v_i)$  pelo teor da amostra central do bloco  $v_i$  e pela krigagem de bloco usando as 5 amostras mais próximas ao bloco  $v_i$ , isto para os suportes de a)  $3 \times 3$ , b)  $5 \times 5$  e c)  $7 \times 7$  m.

## VI Conclusões

1. Mostrou-se que é possível tratar de maneira formal um assunto de extrema importância na avaliação de projetos de mineração. Muitos projetos ainda são tratados de maneira empírica, mas os conceitos aqui estudados permitem um tratamento rigoroso, mas de fácil utilização.
2. Foram tratadas as funções de recuperação no caso lognormal, podendo as mesmas serem construídas utilizando programas em FORTRAN, programas em MATLAB, ou até mesmo em EXCEL.
3. No caso lognormal convém notar que houve necessidade de usar a lei bivariada lognormal fato raro na maioria dos trabalhos anteriores, exceto Matheron, 1981, e Remacre & Uzumaki, 1995.
4. Com o atual estágio da informática, tem-se a facilidade de usar todas as funções de parametrização. Normalmente, as curvas da função Benefício  $[B(z)]$  e da função  $Q(T)$  são as mais importantes:
  - A função Benefício  $[B(z)]$  incorpora duas funções  $[Q(z)$  e  $T(z)]$ 
$$B(z) = Q(z) - z \cdot T(z)$$
  - A função  $Q(T)$ , como salientada por Matheron, 1984, se presta para definir o conceito de seletividade.
5. No capítulo 5, após criação de um jazimento hipotético, foi constatada a degradação das curvas de parametrização de reservas, provocada pelo efeito suporte e pelo efeito informação.
  - Entre 2 suportes próximos, 5x5m e 7x7m, por exemplo, obteve-se diferenças na ordem de 2%. Já, para suportes mais distintos, 5x5m e 15x15m, a diferença ultrapassou 8% na função Benefício  $[B(z)]$  (efeito suporte), considerando o mesmo teor de corte (Tabela 5.5).
  - Entre os diversos tipos de controle de lavra obteve-se variações na ordem de 2% a 7% (efeito informação).
6. Como os efeitos suporte e informação se somam, tem-se variações de 4% a 15% na função Benefício  $[B(z)]$ . Variações desta ordem são extremamente importantes no cálculo do projeto final.

## Anexo

### Simulação Estocástica

Aqui, sem pretender esgotar o assunto, é apresentado os conceitos básicos empregados à teoria de simulação estocástica, destacando o método de simulação *turning bands*, o qual foi empregado nesta dissertação apenas para a obtenção de dados (teor de metal) para a parametrização de reservas, mas que apesar disto, deve ser elucidada a sua importância para a mineração.

Infelizmente, o perfeito conhecimento da realidade *in situ* dos recursos minerais não está disponível nas etapas de planejamento de uma operação mineira. A informação disponível nesta etapa é usualmente muito fragmentada, e limitada aos teores de poucas amostras, as quais são utilizadas para a realização da estimativa, geralmente empregando a krigagem, que é uma ferramenta imprecisa para o exato cálculo da dispersão real.

Como é impossível estimar corretamente a realidade *in situ* de um depósito em suficiente detalhe, uma simples idéia é simular o depósito com base em um modelo. Neste caminho, um depósito real e simulações deste depósito são diferentes variantes de um mesmo fenômeno mineralizado, caracterizado segundo um dado modelo.

Uma variável regionalizada  $z(x)$  é interpretada como uma realização de uma função aleatória  $Z(x)$ . Esta função aleatória (FA) é caracterizada por uma função de distribuição e um modelo de covariância ou variograma. A idéia de simulações consiste em obter outras realizações  $z_s(x)$  a partir da função aleatória  $Z(x)$  (Journel e Huijbregts, 1978).

A estimativas de reservas recuperáveis, local ou global, são freqüentemente insuficiente para a etapa de planejamento de uma nova mina ou mesmo para uma nova parte a ser explotada. É essencial, para o engenheiro de minas e outros profissionais correlatos à mineração, prever as variações das características da reserva recuperável em várias etapas da operação mineira, (*after mining*, transporte e pilhas de estoque).

A escolha dos métodos de lavra e de transporte dependem em parte da dispersão espacial das várias características mineralógicas.

A escolha dos equipamentos de mineração ou do método de remoção dos produtos minerados em um depósito sedimentar quase horizontal pode depender das variações diárias na sobre carga e espessura mineralizada. O processo de blendagem e a flexibilidade da planta de tratamento dependerá da dispersão dos teores recebidos em toda escala (diariamente, mensalmente e anualmente).

Existe uma grande variedade de algoritmos de simulação estocástica disponíveis atualmente, que apresentam suas diferenças peculiares que aqui não serão comentadas dado o objetivo de seu emprego nesta dissertação. Apenas será elucidado o algoritmo empregado (*Turning Bands*).

## Turning Bands

O algoritmo de simulação estocástica *Turning Bands*, também chamado de Bandas Rotativas (Oliveira, 1997), foi o primeiro algoritmo de simulação a 3D realmente implementado em grande escala, inicialmente desenvolvido por Matheron (1973, apud Journel e Huijbregts, 1978). Para a aplicação deste método, são feitas as seguintes hipóteses:

- o campo a ser simulado é estacionário de segunda ordem e isotrópico, com covariância  $C(h)$  conhecida;
- Os valores deste campo possuem distribuição de probabilidade normal  $N(0,1)$ .

O algoritmo consiste em simulações unidimensionais ao longo de  $n$  linhas que são giradas no espaço  $R^n$ . Um valor simulado na posição  $x$ ,  $Z_{snc}(x)$ , é obtido a partir das contribuições das  $n$  simulações unidimensionais  $Z_{si}(x)$ , usando a expressão:

$$Z_{snc}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_{si}(x)$$

em que a realização resultante,  $Z_{snc}(x)$ , é uma função aleatória (FA) estacionária de segunda ordem com esperança zero e covariância  $E[Z_s(x)Z_s(x+h)] = C(h)$ , que

tende à covariância isotrópica quando o número de linhas tende a infinito. A anisotropia pode ser modelada através do somatório de modelos isotrópicos imbricados em espaços de dimensões  $n \leq 3$ . Basta então, simular independentemente cada um dos componentes do modelo e em seguida somar as realizações em cada ponto.

Na prática, o número  $n$  de linhas não pode ser infinito e nem mesmo muito grande, devido ao excessivo esforço computacional. Por outro lado, um número reduzido de linhas pode provocar o efeito de lineamentos nos campos simulados gerando anisotropias inexistentes.

A simulação empregada, no estudo de caso, foi executada no software ISATIS versão 3.2 que se encontra disponível no Instituto de Geociências (IG) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Os parâmetros utilizados na simulação são listados a seguir:

- Semente: 230665
- Número de bandas: 700
- Variograma  $\gamma(h)$ :
  - \* Modelo esférico:
    - \* Alcance de 15m
    - \* Patamar igual a 1

## Krigagem ordinária

A krigagem ordinária (KO) consiste em um método de estimativa usado para estimar um valor  $Z^*(x_0)$  em uma determinada posição  $x_0$  usando os  $n$  dados vizinhos  $Z(x_i)$  através de uma combinação linear com ponderadores  $\lambda_i$ :

$$Z^*(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_0) \cdot Z(x_i)$$

procurando sempre minimizar a variância do erro de estimativa, e satisfazendo a condição de não viés onde o somatório dos pesos  $\lambda_i$  é igual a 1. Que pode ser representada pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j(x_0)C(x_i - x_j) - \mu(x_0) = C(x_i - x_0) & \forall i=1,2,\dots,n \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j(x_0) = 1 \end{cases}$$

Considerando que a função de covariância modelada a partir dos dados seja do tipo positiva definida o sistema de equações terá uma única solução. A Variância de krigagem é dada por:

$$\sigma_k^2(x_0) = C(0) + \mu(x_0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_0)C(x_i - x_j)$$

O sistema de krigagem ordinária também pode ser rescrito em forma de matrizes:

$$\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{D}$$

$$\begin{bmatrix} C(x_1 - x_1) & \cdots & C(x_1 - x_n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C(x_n - x_1) & \cdots & C(x_n - x_n) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(x_1 - x_0) \\ \vdots \\ C(x_n - x_0) \\ 1 \end{bmatrix}$$

a matriz **C** consiste nos valores das covariâncias pontuais  $C(x_i - x_j)$  entre as variáveis aleatórias  $Z(x_i)$  e  $Z(x_j)$ , onde estão localizadas as amostras. Enquanto, o vetor **D** consiste nos valores das covariâncias pontuais  $C(x_i - x_0)$  entre as variáveis aleatórias  $Z(x_i)$  nas localizações das amostras e a variável aleatória  $Z(x_0)$  na posição em que se quer estimar. O vetor  $\boldsymbol{\lambda}$  consiste nos pesos de krigagem  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  e no multiplicador de Lagrange  $\mu$ .

## Krigagem de Bloco

Analisando as matrizes do sistema de krigagem ordinária pontual, verifica-se que a matriz **C** depende apenas da posição das amostras, e que é independente do local a ser estimado. Logo, conclui-se que a matriz **C** não requer qualquer modificação para a krigagem de bloco. Entretanto, o vetor de covariância **D** consiste dos valores das covariâncias entre as variáveis aleatórias nas localizações das amostras e a variável aleatória no local a ser estimado. Para a estimativa pontual, a matriz **D** é constituída das covariâncias de ponto para ponto, e por analogia, para

estimativa de bloco, das covariâncias de ponto para bloco. Então, com uma pequena alteração, pode-se converter o sistema de krigagem ordinária pontual em um sistema de krigagem ordinária de bloco.

O calculo do valor médio de uma variável aleatória localizada em pontos dentro de uma área (ou bloco) é obtido por uma combinação linear, portanto o valor médio também será uma variável aleatória, que pode ser dada por:

$$Z_A = \frac{1}{|A|} \cdot \sum_{\forall j \in A} Z_j$$

em que  $Z_A$  é uma variável aleatória correspondendo ao valor médio sobre uma área  $A$  (ou bloco) e  $Z_j$  a variável aleatória correspondente aos valores dos pontos dentro de  $A$ .

As covariâncias requeridas para a krigagem de bloco pode ser obtida por:

$$C(x_i - A) = Cov[Z_A, Z_i]$$

$$C(x_i - A) = \frac{1}{|A|} \sum_{\forall j \in A} Cov[Z_j, Z_i]$$

O sistema de Krigagem de bloco pode ser escrito do seguinte modo:

$$\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{D}$$

$$\begin{bmatrix} C(x_1 - x_1) & \cdots & C(x_1 - x_n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C(x_n - x_1) & \cdots & C(x_n - x_n) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{C}(x_1 - A) \\ \vdots \\ \overline{C}(x_n - A) \\ 1 \end{bmatrix}$$

em que a barra sobre as covariâncias do vetor  $\mathbf{D}$  significa que corresponde à média das covariâncias entre uma amostra e todos os pontos dentro de  $A$ , que é dada por:

$$\overline{C}(x_i - A) = \frac{1}{|A|} \sum_{\forall j \in A} C(x_i - x_j)$$

A variância de krigagem de bloco é dada por:

$$\overline{\sigma}_K^2 = \overline{C}_{AA} - \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i(A) \overline{C}(x_i - x_j) + \mu(A) \right)$$

em que  $\overline{C}_{AA}$  é o valor médio da covariância entre os pares de pontos dentro de  $A$ , dada por:

$$\overline{C}_{AA} = \frac{1}{|A|^2} \sum_{\forall i \in A} \sum_{\forall j \in A} C(x_i - x_j)$$

Na prática, a covariância média de bloco é aproximada pela discretização de  $A$  em vários pontos.

A vantagem do uso do sistema de krigagem de bloco é que ele pode produzir uma estimativa da média do bloco com a solução de somente um sistema de krigagem. E, a desvantagem é que o cálculo das covariâncias média envolve um pouco mais de esforço computacional que no cálculo das covariâncias pontuais do sistema de krigagem pontual (ISAAKS & SRIVASTAVA, 1989).

## Referencia Bibliográfica

- DAVID, M. **Geostatistical Ore Reserve Estimation**. New York, USA: Elsevier Scientific, 1977. 364p. (Developments in Geomathematics 2).
- GLACKEN, L. M. **Change of Support and Use of Economic Parameters For Block Selection**. In: BAAFI, E. Y.; SCHOFIELD, N. A. (eds.), **Geostatistics Wollongong'96**. Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers, 1997. p.881-821.
- GODOY, M. C. **Minimização de Perdas em Operações de Lavra Seletiva Incorporando a Incerteza da Estimativa no Controle de Teores**. 1998. 91p. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Minas, Metalurgia e Materiais, UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL.
- ISAAKS, E. H. & SRIVASTAVA, R. M. **Applied Geostatistics**. New York, USA: Oxford University Press, 1989. 561p.
- JOURNEL, A. G. **Fundamentals of Geostatistics in Five Lessons**. Stanford, USA: Stanford University, Applied Earth Science Department, 1988.
- JOURNEL, A. G. & HUIJBREGTS, C. J. **Mining Geostatistics**. London, England: Academic Press, 1978. 600p.
- MATHERON, G. **La Selectivite des Distributions**. Fontainebleau, France: Centre de Géostatistique et de Morphologie Mathématique. École National Supérieure des Mines de Paris, 1981. (N – 686).
- MATHERON, G. **The Selectivity of the Distributions and “The Second Principle of Geostatistics”**. In: **GEOSTATISTICS FOR NATURAL RESOURCES CHARACTERIZATION**. Lake Tahoe USA. D. Reidel Publishing Company. 1984. p.421-433.

- MURTHY, P. S. N. **Selectivity Studies on Multivariables Under Constraint in an Indian Iron Ore Deposit.** In: BAAFI, E. Y.; SCHOFIELD, N. A. (eds.), **Geostatistics Wollongong'96.** Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers, 1997. p.851-863.
- REMACRE, A. Z. & CORNETTI, M. A. **Análise de variabilidade, Krigagens e Funções de Recuperação.** in: SEMINÁRIO NACIONAL SOBRE INFORMÁTICA EM MINERAÇÃO: Pesquisa, Lavra e Beneficiamento mineral, 6, 1996. **Anais...** Belo Horizonte - MG, IBRAM, 1996. p.60-69.
- REMACRE, A. Z. & UZUMAKI, E. T. **Regressão Lognormal.** Cadernos: IG/UNICAMP. v.5, n.1, p.47-59. 1995.
- REMACRE, A. Z. **L'Estimation du Recupérable Local Le Conditionnement Uniforme.** 1984. 99p. .These Doctour Ingénieur en Sciences et Techniques Minières – Option Géostatistique. Ecole des Mines de Paris.
- REMACRE, A. Z. **O Problema da Estimação de Reservas Recuperáveis na Geoestatística.** Revista da Escola de Minas de Ouro Preto, Ouro Preto – MG. v.38, n.4, p.30-34, quarto trimestre, 1985.
- REMACRE, A. Z. **Revisão de Conceitos Probabilísticos,** março, 1997. Apostila de nivelamento.
- REMACRE, A. Z. **Seletividade: Krigagem-Histórico.** Notas de Aula. 1995.
- RIVOIRARD, J. **Advanced Geostatistics.** Fontainebleau, France: Centre de Géostatistique. École des Mines de Paris, 1987. (C - 131).
- RIVOIRARD, J. **Introduction to Disjunctive Kriging and Non-Linear Geostatistics.** Oxford, England. Oxford University Press, 1994. 180p.
- SAPORTA, G. **Probabilités Analyse des Données et Statistique.** Paris, France: Éditions Technip, 1990. 493p.
- WACKERNAGEL, H. **Multivariate Geostatistics;** an introduction with applications. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1995. 257p.