



**UNICAMP**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS**

**PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOCIÊNCIAS – ÁREA DE  
GEOENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS**

**PAULO CARLOS SALDANHA FILHO**

**SIMULAÇÃO DE CAMPOS ALEATÓRIOS MARKOVIANOS: UMA INTRODUÇÃO  
VOLTADA À MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO**

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências como parte  
dos requisitos para obtenção do título de Mestre em  
Geoengenharia de Reservatórios

**Orientador:** Professor Doutor Armando Zaupa Remacre

Este exemplar corresponde a  
redação final da tese defendida  
por Paulo Carlos Saldanha Filho  
e aprovada pela Comissão Julgadora  
em 09.10.98  
  
ORIENTADOR

**CAMPINAS - SÃO PAULO**

**FEVEREIRO - 1998**

**Sa31s**

**35493/BC**



**UNICAMP**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS**

**PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOCIÊNCIAS – ÁREA DE  
GEOENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS**

**PAULO CARLOS SALDANHA FILHO**

**SIMULAÇÃO DE CAMPOS ALEATÓRIOS MARKOVIANOS: UMA INTRODUÇÃO  
VOLTADA À MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO**

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências como requisito  
parcial para obtenção do título de Mestre em Geoengenharia do  
Petróleo.

**Orientador:** Armando Zaupa Remacre - UNICAMP

**Co-Orientador:** Alejandro C. Frery - UFPE

**CAMPINAS - SÃO PAULO**

**FEVEREIRO - 1998**

9822220



UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	Sa 31s
V.	Ex.
TUMBO BC/	35493
PROC.	395/98
C <input type="checkbox"/>	D <input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	22/10/98
N.º CPD	

CM-00117533-3

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA  
PELA BIBLIOTECA I.G. - UNICAMP**

**Saldanha Filho, Paulo Carlos**

Sa31s **Simulação de campos aleatórios markovianos: uma introdução  
voltada à modelagem estocástica de reservatórios de petróleo /  
Paulo Carlos Saldanha Filho.- Campinas,SP.: [s.n.], 1998.**

**Orientadores: Armando Zaupa Remacre, Alejandro César Frery  
Orgambide**

**Dissertação (mestrado) Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Geociências**

**1. Probabilidades. 2. Estatística Matemática. 3. Reservatórios.  
4. Análise Estocástica. 1. Remacre, Armando Zaupa. II.  
Orgambide, Alejandro César Frery. III. Universidade Estadual de  
Campinas, Instituto de Geociências. IV. Título.**



**UNICAMP**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS**

**PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOCIÊNCIAS - ÁREA DE  
GEOENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS**

**AUTOR: Paulo Carlos Saldanha Filho**

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO/TESE: Simulação de Campos Aleatórios Markovianos: uma  
Introdução Voltada à Modelagem Estocástica de Reservatórios de Petróleo.**

**ORIENTADOR: Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre**

**CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Alejandro C. Frery**

**Aprovada em: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_**

**PRESIDENTE: Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre**

**EXAMINADORES:**

**Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre - Presidente**

**Prof. Dr. Luciane Bonet de Souza Cunha**

**Prof. Dr. Sérgio Nascimento Bordalo**

**Campinas, de de**

**Para Clarisse e Luiza, fontes da paz necessária.**

## **Agradecimentos**

À Petrobrás, de forma muito particular nas pessoas de Luis Robério Ramos, Ayrton Okada e Milton Souza, pelo apoio decisivo.

Aos colegas de turma da Unicamp, em especial Marcella e Marcos, pelos muitos momentos agradáveis e discussões construtivas.

Aos colegas da Petrobras, Bosco, Christovam, Bruno, Nilson, Antonio, Ferradans e outros pelo incentivo incansável.

Às bibliotecárias da Gedoc pela paciência e simpatia, em especial a Brigida, pelo apoio (para ontem) com as referências bibliográficas.

A Glória e Sônia, pelo apoio logístico permanente.

A Creusa e Wellington, pelos galhos quebrados.

Ao Moacir, pela ajuda decisiva com os computadores e programas.

Ao meu orientador Armando Zaupa Remacre, em especial pelo apoio na reta final.

Ao meu coorientador Alejandro Frery, pela perseverança e excelência nas discussões infinitas e incentivo irrestrito.

A Clarisse e Luiza pelo amor sempre presente.

A meus pais e irmãos, pela confiança cega.

# SUMÁRIO

	<b>Pág.</b>
Dedicatória.....	i
Agradecimentos.....	ii
Sumário.....	iii
Lista de Figuras.....	v
Resumo.....	vi
Abstract.....	vii
Capítulo 1: Introdução.....	1
1.1 – Objetivos.....	1
1.2 – Gerenciamento e informação.....	1
1.3 – A natureza da informação e a heterogeneidade da natureza.....	2
1.4 – Simulação de fluxo, heterogeneidades e simulação estocástica.....	5
1.5 – Modelos para simulação estocástica de reservatórios.....	6
1.5.1 – Simulação seqüencial de indicatrizes.....	8
1.5.2 – Gaussiana truncada.....	9
1.5.3 – Plurigaussiana truncada.....	9
1.5.4 – Campos aleatórios markovianos – CAMs.....	10
Capítulo 2: CAMs – Embasamento conceitual.....	13
2.1 – Introdução.....	13
2.2 – Definição.....	13
2.3 – CAMs e distribuições de Gibbs.....	17
Capítulo 3: CAMs – Modelagem.....	21
3.1 – Introdução.....	21
3.2 – Elementos geométricos: vizinhanças, grafos e cliques.....	21
3.3 – Funções potenciais.....	26
3.3.1 – O modelo de Ising.....	26
3.3.1.1 – O modelo de Omre <i>et al.</i> ....	29
3.3.2 – O modelo de Potts-Strauss.....	30
3.3.2.1 – O modelo de Høiberg <i>et al.</i> ....	30
3.3.3 – Campos aleatórios semi-markovianos (CASM).....	32
3.3.3.1 – Definição.....	32

3.3.3.2 –CASM – Modelagem.....	34
Modelo de Tjelmeland <i>et al.</i> (1992) .....	34
Modelo de Fält <i>et al.</i> (1991) .....	35
3.4 – Novos modelos .....	37
Capítulo 4: Estimação de parâmetros .....	39
4.1 – Introdução.....	39
4.2 – Estimadores para os modelos de Ising e Potts-Strauss .....	40
4.3 – Estimadores para o modelo de Høiberg <i>et al.</i> (1992).....	45
4.4 – Estimador para o modelo de Omre <i>et al.</i> (1990).....	46
Capítulo 5: Simulação condicional.....	48
5.1 – Introdução.....	48
5.2 – O algoritmo de Metropolis e sua generalização por Hastings.....	49
5.3 – O Amostrador de Gibbs ( <i>Gibbs sampler</i> ).....	51
5.4 – Algoritmo de Swendsen-Wang .....	52
5.5 – Algoritmo de Wolff.....	53
5.6 – Algoritmo de Flinn .....	53
Capítulo 6: Alguns exemplos, conclusões e recomendações.....	54
6.1 – Exploração de modelos .....	54
6.2 – Conclusões e recomendações.....	66
Referências Bibliográficas.....	67

## Lista de Figuras

	<b>Pág.</b>
Figura 1 – O esquema do vizinho mais próximo .....	22
Figura 2 – Esquema das vizinhanças planas para $c \leq 13$ .....	22
Figura 3 – Cliques do esquema do vizinho mais próximo.....	23
Figura 4 – Cliques adicionais da vizinhança $c = 2$ .....	23
Figura 5 – Clique máxima da vizinhança $c = 8$ . As linha assinalam todas as interações possíveis .....	23
Figura 6 – Quatro seções do cubo de vizinhança para $c \leq 9$ . Os números indicam a vizinhança mínima a que as respectivas celas pertencerão .....	24
Figura 7 – Vizinhança 3D para $c = 1$ e cliques correspondentes.....	24
Figura 8 - Clique máxima 3D da vizinhança $c \leq 3$ .....	25
Figura 9 - Corpo (A), Bordas (B) e Cantos (C).....	25
Figura 10 - Modelo de Ising, $\beta = -0.60$ .....	55
Figura 11 - Modelo de Ising, $\beta = -0.20$ .....	55
Figura 12 - Modelo de Ising, $\beta = 0.00$ .....	56
Figura 13 - Modelo de Ising, $\beta = 0.20$ .....	56
Figura 14 - Modelo de Ising, $\beta = 0.40$ .....	56
Figura 15 - Modelo de Ising, $\beta = 0.60$ .....	56
Figura 16 - Modelo de Ising, $\beta = 0.70$ .....	56
Figura 17 - Modelo de Ising, $\beta = 0.80$ .....	56
Figura 18 - Modelo de Ising, $\beta = 0.85$ .....	57
Figura 19 - Modelo de Ising, $\beta = 0.90$ .....	57
Figura 20 - Modelo de Ising, $\beta = 1.00$ .....	57
Figura 21 - Modelo de Ising, $\beta = 1.10$ .....	57
Figura 22 - Modelo de Ising anisotrópico. $\beta_v = 0.50, \beta_h = 1.00$ .....	58
Figura 23 - Modelo de Ising anisotrópico. $\beta_v = 0.80, \beta_h = 1.50$ .....	58
Figura 24 - Modelo de Ising anisotrópico. $\beta_v = 0.80, \beta_h = 3.00$ .....	59

Figura 25 - Modelo de Ising anisotrópico. Algoritmo de Flinn. $\beta_v = 0.50, \beta_h = 3.00$ .....	60
Figura 26 - Modelo de Ising anisotrópico. Algoritmo de Flinn. $\beta_v = 0.80, \beta_h = 3.00$ .....	60
Figura 27 - Modelo de Ising 3D. Algoritmo de Swendsen-Wang. $\beta = 0.30$ . Secção ao nível de $z = 15$ .....	61
Figura 28 - Modelo de Ising 3D. Algoritmo de Swendsen-Wang. $\beta = 1.00$ . Secção ao nível de $z = 15$ .....	62
Figura 29 - Modelo de Høiberg. Algoritmo de Flinn, condicional. $\beta = 1.00, \Delta = 1.00$ .....	63
Figura 30 - Esquema de condicionamento .....	63
Figura 31 - Modelo de Høiberg. Algoritmo de Flinn, condicional. $\beta = 1.20, \Delta = 0.00$ .....	64
Figura 32 - Esquema de condicionamento .....	64
Figura 33 - Modelo de Høiberg. Algoritmo de Flinn, condicional. $\beta = 0.40, \Delta = 0.20$ .....	65
Figura 34 - Modelo de Høiberg. Algoritmo de Flinn, condicional. $\beta = 0.20, \Delta = 1.20$ .....	65



**UNICAMP**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS/  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS/DEPTO**

**PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOCIÊNCIAS – ÁREA DE  
GEOENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS**

**CAMPOS ALEATÓRIOS MARKOVIANOS NA SIMULAÇÃO ESTOCÁSTICA DE  
RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO**

**RESUMO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Paulo Carlos Saldanha Filho**

**Resumo**

A simulação estocástica tem sido utilizada na caracterização de reservatórios de petróleo como ferramenta de modelagem capaz de conciliar informações de fontes diversas. Ao mesmo tempo, preserva a variabilidade do fenômeno modelado e permite a transferência do conhecimento geológico para modelos numéricos de fluxo, cujas previsões sobre o comportamento do reservatório servirão de base às decisões gerenciais quanto ao manejo de recursos.

Diversos modelos estocásticos têm sido utilizados e/ou sugeridos, em função da natureza do fenômeno a ser descrito. Os Campos Aleatórios Markovianos (CAMs) surgem como alternativa para modelagem de variáveis discretas, em reservatórios com arquitetura de fácies em mosaico.

Nesta dissertação o leitor é introduzido à modelagem estocástica por CAMs de forma genérica. São abordados os principais aspectos da técnica.

É descrito o Embasamento Conceitual dos CAMs: sua descrição via propriedade markoviana e equivalência com distribuições de Gibbs.

O arcabouço necessário para a Modelagem de CAMs é descrito de forma abrangente. Os modelos clássicos de Ising e Potts-Strauss são especificados neste contexto e relacionados a modelos utilizados em reservatórios de petróleo.

Discute-se o problema da estimação de parâmetros do modelo. São apresentados estimadores de Máxima Pseudoverossimilhança para alguns modelos.

Como Contribuição inédita, são desenvolvidos estimadores para dois modelos de utilidade em reservatórios.

Cinco algoritmos para Simulação Condicional de CAMs são descritos: algoritmo de Metropolis, algoritmo de Geman e Geman (*Gibbs sampler*), algoritmo de Swendsen-Wang, algoritmo de Wolff e algoritmo de Flinn.

Finalmente, apresentam-se exemplos de simulações de alguns dos modelos discutidos, e suas implicações na modelagem de reservatórios de petróleo. É destacado o fenômeno de Transição de Fase.



**UNICAMP**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS/  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS/DEPTO**

**PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOCIÊNCIAS – ÁREA DE  
GEOENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS**

**CAMPOS ALEATÓRIOS MARKOVIANOS NA SIMULAÇÃO ESTOCÁSTICA DE  
RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO**

**ABSTRACT**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Paulo Carlos Saldanha Filho**

Stochastic simulation has been employed in petroleum reservoir characterization as a modeling tool able to reconcile information from several different sources. It has the ability to preserve the variability of the modeled phenomena and permits transference of geological knowledge to numerical models of flux, whose predictions on reservoir behavior constitute the main basis for reservoir management decisions.

Several stochastic models have been used and/or suggested, depending on the nature of the phenomena to be described. Markov Random Fields (MRFs) appear as an alternative for the modeling of discrete variables, mainly reservoirs with mosaic architecture of facies.

In this dissertation, the reader is introduced to the stochastic modeling by MRFs in a generic sense. The main aspects of the technique are reviewed.

MRF Conceptual Background is described: its characterization through the markovian property and the equivalence to Gibbs distributions.

The framework for generic modeling of MRFs is described. The classical models of Ising and Potts-Strauss are specified in this context and are related to models used in petroleum reservoir characterization.

The problem of parameter estimation is discussed. The maximum pseudolikelihood estimators for some models are presented.

Estimators for two models useful for reservoir characterization are developed, and represent a new contribution to the subject.

Five algorithms for the Conditional Simulation of MRFs are described: the Metropolis algorithm, the algorithm of Geman & Geman (Gibbs sampler), the algorithm of Swendsen-Wang, the algorithm of Wolff, and the algorithm of Flinn.

Finally, examples of simulation for some of the models discussed are presented, along with their implications on the modeling of petroleum reservoirs.

# *Capítulo 1*

## *Introdução*

### **1.1 Objetivos**

O objetivo principal desta dissertação é expor de forma organizada, completa e coerente o embasamento conceitual dos Campos Aleatórios Markovianos (Capítulo 2), enfatizando aspectos relativos à modelagem de fenômenos específicos – não necessariamente de natureza geológica –, e situando os modelos da área de caracterização de reservatórios divulgados na literatura dentro do contexto mais genérico dos modelos válidos, ao lado de modelos clássicos e sob uma notação unificada (Capítulo 3).

Com o objetivo de equipar o leitor com as ferramentas básicas necessárias ao trabalho com estes processos, são abordados ainda o problema – frequentemente evitado na literatura – da estimação de parâmetros de CAMs (Capítulo 4) e alguns dos métodos de simulação disponíveis, destacando-se a possibilidade de obtenção de realizações condicionais sempre que possíveis (Capítulo 5).

São apresentados exemplos de realizações dos principais modelos descritos e fenômenos associados (Capítulo 6). Incluem-se códigos computacionais testados para obtenção de realizações dos modelos, eventualmente sob condicionamento (Anexo I).

A título de colocação do tema é apresentada uma Introdução em que é discutida a necessidade de utilização de modelagens estocásticas no âmbito da caracterização de reservatórios de petróleo, de forma a posicionar os Campos Aleatórios Markovianos em relação aos demais modelos estocásticos disponíveis (Capítulo 1).

### **1.2 Gerenciamento e informação**

A informação é a matéria-prima da “indústria” da tomada de decisões.

Informações confiáveis, em quantidade e qualidade adequadas, abrangendo o maior leque possível de alternativas, constituem a base sobre a qual são assentadas rotineiramente decisões de investimentos e manejo de recursos em todos os âmbitos do universo gerencial, desde

resoluções triviais até decisões sobre investimentos bilionários de muito longo prazo na indústria pesada.

Na indústria da exploração e exploração de petróleo o processo decisório é largamente baseado em previsões sobre o comportamento de produção dos reservatórios<sup>1</sup>. Estas previsões são por sua vez construídas sobre informações referentes a inúmeras propriedades do reservatório, aí incluídas a sua posição espacial, seu volume, características físicas e químicas e distribuição de seus fluidos e litologias, distribuição de porosidades, permeabilidades, conectividades, etc...

Porém, a obtenção de informações relevantes freqüentemente implica custos cuja monta pode tornar impeditiva a aquisição da quantidade e qualidade de informações desejáveis.

A própria natureza dinâmica da cadeia de tomadas de decisões envolvida no ciclo exploração/exploração de reservatórios de petróleo condiciona o gerenciamento destes recursos à aquisição cumulativa de informações durante toda a vida útil do reservatório.

Tipicamente, decisões tomadas em fase precoce de avaliação/desenvolvimento de uma jazida estarão embasadas em pequena quantidade de dados brutos, e conseqüentemente em modelos de reservatórios mais simples, onde predominam elementos de interpretação e experiência prévia dos profissionais envolvidos com ocorrências análogas.

Por outro lado, decisões necessárias em fases finais da exploração primária da jazida poderão contar com quantidade muito maior de dados brutos – adquiridos nos processos normais de exploração – e conhecimento acumulado sobre o comportamento do reservatório em análise. Em contrapartida, a margem de erro admissível estreita-se, em função de a relação entre custos de investimentos em infra-estrutura de *EOR*<sup>2</sup> e perspectiva de retorno em produção de petróleo freqüentemente apontarem para rentabilidades marginais.

Em quaisquer circunstâncias, o conhecimento abrangente e integrado da informação disponível, a *caracterização do reservatório*, constitui a bússola das decisões gerenciais.

### **1.3 A natureza da informação e a heterogeneidade da natureza**

Na atividade de exploração/exploração de reservatórios de petróleo a informação emana de diversas fontes:

---

<sup>1</sup> O termo *reservatório* refere-se neste texto ao sistema rocha/fluido no seu contexto geológico.

<sup>2</sup> EOR: *Enhanced Oil Recovery*.

- Levantamentos sísmicos
- Perfis elétricos de poços
- Testemunhos de poços
- Testes de poço
- Análises de fluidos
- Históricos de pressão/produção
- Experiência adquirida com o reservatório
- Experiência adquirida com reservatórios análogos
- Conhecimento geológico genérico
- etc.

Em uma rápida inspeção na lista acima destaca-se de imediato a heterogeneidade das informações, seja pela sua natureza física (ou mesmo imaterial, como é o caso da experiência), seja pelo suporte da medida (volume de rocha a que se refere a informação)

Assim, enquanto uma sessão sísmica contém informações sobre volumes de rocha não inferiores a cerca de  $1000m^3$ , uma medida de porosidade realizada rotineiramente em laboratório sobre um plugue de testemunho representa informação sobre volume de rocha não superior a  $50cm^3$ . Enquanto testes de poço transportam informações sobre volumes cilíndricos de reservatório com dezenas de metros de diâmetro, centrados no poço, um perfil elétrico carrega informações sobre porções virtualmente lineares de rocha com 30 a  $200cm$  de extensão situadas ao longo do poço.

Além disto, enquanto o poço centraliza no espaço a maior parte das informações, as extensas regiões entre poços e as que se estendem dos poços marginais aos limites dos reservatório permanecem desprovidas de representação direta.

Como regra, a quantidade mínima de dados necessária para caracterização do comportamento de um reservatório dependerá do seu grau de *heterogeneidade*.

Weber (1986) aborda de forma sistemática a questão das heterogeneidades geológicas, analisando o problema sob a ótica das escalas de observação, e relacionando as heterogeneidades em cada escala ao impacto causado na recuperação de petróleo. São distinguidas 7 escalas de heterogeneidades, das quais destacamos:

- Escala de campo: onde a continuidade e a conectividade dos corpos permoporosos são os principais fatores de impacto na recuperação de petróleo
- Escala de reservatório: onde os contrastes entre unidades genéticas e suas relações de contato

são os fatores dominantes

- Escala das unidades genéticas: onde as variações internas de permoporosidade são os fatores predominantes.
- Pequena Escala: onde as forças capilares passam a ter significância.

Weber e Van Geuns (1990) propõem uma metodologia de classificação para as heterogeneidades de grande escala, com base no grau de variabilidade presente:

- Reservatórios do *Tipo Bolo de Camadas*: unidades homogêneas horizontalmente extensas superpostas em arranjo monótono de camadas com variações de espessura graduais e limites de camadas coincidentes com variações maiores das propriedades petrofísicas ou barreiras de fluxo. Internamente, as unidades possuem variações suaves nas suas propriedades petrofísicas. Podem ser confiavelmente modelados de forma determinística.
- Reservatórios do *Tipo Quebra-cabeças*: compostos por uma série de corpos justapostos sem grandes descontinuidades, exceto por corpos ocasionais de baixa permeabilidade. Podem ocorrer grandes variações de propriedades petrofísicas entre os corpos, mas o seu arranjo pode ser estabelecido com o uso de diagramas-de-cerca detalhados. Internamente aos corpos podem ocorrer heterogeneidades que exijam modelagem própria.
- Reservatórios do *Tipo Labirinto*: constituídos por arranjos complexos de corpos e lentes com continuidades variadas, frequentemente justapostos através de horizontes de baixa permeabilidade. A correlação de intervalos entre poços é muito difícil, e usualmente observa-se anisotropia na continuidade dos corpos. Indica-se modelagem probabilística para reservatórios desta natureza..

A diversidade de escalas e a disparidade de densidades de informação por escala de observação *versus* a heterogeneidade intrínseca dos reservatórios são, portanto, as características mais marcantes do universo de informações à disposição do geólogo/engenheiro de reservatórios. A *incerteza* na caracterização de reservatórios nasce destas características.

A integração desta disparidade em um modelo consistente é tarefa-chave do gerente de reservatórios, de forma a dispor de uma base firme para a tomada de decisões. Neste processo é desejável a *quantificação da incerteza* associada ao modelo.

A Geoestatística surgiu como uma ferramenta auxiliar capaz de promover alguns aspectos da integração necessária, estabelecendo uma base de procedimentos em constante evolução até os dias de hoje.

O instrumento fundamental da Geoestatística clássica é o seu conjunto de procedimentos de interpolação, que constituem os diversos “sabores” da *krigagem* e que se propõem a desenvolver estimadores *ótimos*, no sentido de não-tendenciosidade do estimador e mínima variância do erro de estimação.

## 1.4 Simulação de fluxo, heterogeneidades e simulação estocástica

O domínio das leis da física e da química que governam o comportamento de fluidos em meio poroso permitiu o desenvolvimento de simuladores numéricos que, a menos de restrições relativas à capacidade computacional, reproduzem com precisão arbitrária vazões, pressões, proporções de fases, composição e quaisquer outros parâmetros de interesse, em qualquer tempo e em qualquer ponto do modelo de sistema reservatório/fluido/condições iniciais que lhes tenha sido informado.

Dado um modelo de reservatório, é possível analisar o seu comportamento futuro, introduzir-lhe modificações e observar sua resposta. É possível analisar alternativas de métodos de gerência de produção, ou avaliar a performance de diferentes técnicas de estímulo e *EOR* sem efetivamente implementá-las.

Naturalmente os simuladores de fluxo passaram a constituir a ferramenta básica da previsão de comportamento dos reservatórios.

Com a rápida evolução dos computadores e o aumento associado do nível de detalhe passível de representação nos simuladores de fluxo, logo ficou claro que uma representação realista das heterogeneidades dos reservatórios é necessária para se obterem previsões confiáveis do seu comportamento de produção.

Os dados do modelo de reservatório são fornecidos aos simuladores de fluxo na forma de matrizes em que cada cela representa um volume no qual as propriedades do sistema são consideradas homogêneas.

A confiabilidade dos resultados dependerá de o quanto o modelo informado aos simuladores caracteriza, ou representa, o reservatório real.

Dada a concentração de informações nos poços, surge de imediato a necessidade de estender o domínio dos dados aos pontos não amostrados.

De fato, a necessidade de interpolar informações de forma a cobrir o espaço entre dados esparsos faz parte da atividade cotidiana do geólogo, ao traçar mapas de contorno baseados em dados de poços.

Observa-se que os mapas assim confeccionados representam invariavelmente uma imagem suavizada da variável em questão.

É conhecido o fato de que esta suavização é inerente a todos os métodos de interpolação – aí incluídos os métodos geoestatísticos –, sejam eles intuitivos ou matemáticos, e a sua utilização no processo de modelagem poderá corresponder a um mascaramento freqüentemente indesejado das heterogeneidades do reservatório, resultando em modelos de fluxo inadequados e, conseqüentemente, prospectos de produção equivocados que podem conduzir a decisões impróprias sobre recursos invariavelmente escassos.

As técnicas de simulação estocástica condicional propõem-se a contornar este problema, introduzindo no modelo uma componente de controle da variabilidade das realizações, ao mesmo tempo em que são preservadas informações condicionantes, tais como o valor da variável simulada em pontos determinados, seu histograma, e outras.

Além disto, somente o formalismo probabilístico dispõe de ferramentas capazes de quantificar a incerteza associada ao modelo.

## **1.5 Modelos para simulação estocástica de reservatórios**

A utilização de técnicas de simulação estocástica na caracterização de reservatórios é atualmente prática comum na indústria do petróleo, e um número crescente de técnicas de modelagem probabilística vêm sendo utilizadas.

Revisões das principais técnicas de simulação estocástica utilizadas em caracterização de reservatórios podem ser encontradas em Farmer (1988), Dubrule (1989), Haldorsen e Damsleth (1990), Omre (1992), Dubrule (1992) Deutsch e Journel (1992), Ripley (1992), Chessa (1995) e Galli e Beucher (1997).

Os modelos estocásticos dividem-se em dois grupos:

- Modelos Contínuos
  - Modelos Discretos
- a depender da natureza do fenômeno em estudo.

Na prática, modelos *híbridos* têm sido freqüentemente utilizados em uma abordagem hierárquica, com a finalidade de obter maior realismo no que toca à diversidade das heterogeneidades como função das escalas de observação. Exemplos desta abordagem são encontrados em Damsleth *et al.* (1992), Omre (1992), Bratvold *et al.* (1994), Tyler *et al.* (1994), entre outros.

Os modelos contínuos são geralmente utilizados na simulação de propriedades petrofísicas. As funções aleatórias Gaussianas têm sido largamente utilizadas com este propósito, devido às suas excepcionais propriedades.

A simulação é realizada sobre uma anamorfose gaussiana da variável original – se necessária –, e a estruturação espacial do modelo é obtida através da reprodução do seu *variograma*.

Algoritmos de simulação rápidos e eficientes e simplicidade de modelagem têm sido responsáveis pela grande popularidade destes modelos.

A modelagem de fenômenos discretos tem sido utilizada predominantemente na descrição da arquitetura de fácies dos reservatórios.

Omre (1992) distingue duas classes básicas de fenômenos:

- *Fenômenos eventuais* – representados pela ocorrência de unidades menores em uma fácies predominante de fundo.
- *Fenômenos em mosaico* – constituídos por um empacotamento de diferentes fácies, sem a existência de uma fácies de *background*.

Dois grupos de modelos disponíveis para caracterização destes fenômenos podem ser individualizados (Galli e Beucheur, 1997, Chessa, 1995)

- *Modelos orientados a objetos* – que especificam regras para construção de objetos no espaço
- *Modelos orientados a pixels*<sup>3</sup> – que atribuem valores às celas da grade de simulação individualmente

Modelos orientados a objeto têm sido utilizados para modelagem de unidades genéticas, tais como canais fluviais e lobos deltaicos; comprimento e orientação de falhas; e arquitetura de fácies sedimentares tais como corpos erráticos de folhelhos não interceptados por mais de um poço.

Estes modelos são baseados no formalismo dos *Processos de Pontos* (*Point Processes*) e são particularmente adequados à descrição de fenômenos eventuais (Chessa, 1995, Omre, 1992).

Modelos orientados a *pixels* têm sido indicados para a simulação de fenômenos em mosaico (Omre, 1992). Outras aplicações, como a descrição de fenômenos de variação contínua (através de sua discretização) são reportadas (Høiberg *et al.*, 1990, Journel e Isaacs, 1984).

Os principais modelos nesta categoria são:

---

<sup>3</sup> Correspondem aos *Modelos orientados à grade* (*grid-oriented models*) de Chessa (1995).

- Simulação Sequencial de Indicatrizes
- Simulação Gaussiana Truncada
- Simulação Plurigaussiana Truncada
- Campos Aleatórios Markovianos

### 1.5.1 Simulação Sequencial de Indicatrizes:

Neste contexto, uma *Indicatriz* é uma função aleatória que pode assumir apenas dois valores, 0 e 1, de acordo com a regra:

$$\mathbb{I}_F(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in F \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde  $\mathbb{I}_F(x)$  é a função indicadora da fácies  $F$ . Assim, haverá tantas funções indicatrizes quantas fácies houver na modelagem.

No caso da modelagem de variáveis contínuas através de sua discretização, definem-se as funções indicatrizes como:

$$\mathbb{I}_{z_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } z_i < Z(x) \\ 1 & \text{se } z_i \geq Z(x) \end{cases}$$

onde  $z_i$  são *pontos de corte* (*cutt-offs*) definindo  $k$  faixas de interesse na caracterização da função aleatória  $Z(x)$ .

O algoritmo de simulação sequencial baseia-se na fatoração bayesiana e pode ser aplicado sempre que for possível avaliar a probabilidade condicional de um evento dados os eventos previamente simulados ou estabelecidos como condicionantes. No caso da simulação sequencial das indicatrizes, estas probabilidades são obtidas através da *krigagem* da indicatriz. A demonstração desta propriedade pode ser encontrada em Journel, 1989.

No caso da discretização das variáveis contínuas, a principal vantagem do método é a possibilidade de modelar tantas covariâncias espaciais quantas indicatrizes forem definidas, contra apenas uma nos modelos gaussianos tradicionais (Journel, 1989).

A consistência teórica da abordagem sequencial das indicatrizes tem sido alvo de diversos trabalhos, e vários pontos permanecem duvidosos. Galli e Beucher (1997) fazem um apanhado das dificuldades existentes e remetem a algumas referências sobre o assunto.

Apesar destas dificuldades, o método tem sido largamente empregado na sua versão sobre variáveis discretas, particularmente na simulação da arquitetura de fácies de reservatórios de petróleo.

## 1.5.2 Gaussiana Truncada

O modelo da Gaussiana Truncada simula distribuições espaciais de variáveis indicatrizes – representativas de fenômenos categóricos ou fenômenos contínuos discretizados – através do truncamento de uma função aleatória gaussiana.

Selecionam-se os *pontos de corte* (*cutt-offs*)  $y_{p_i}$  do truncamento de forma a obterem-se as proporções  $p_i$  adequadas de cada categoria, através da relação  $y_{p_i} = G^{-1}(p_i)$ , onde  $y_{p_i}$  é o  $p_i$ -quantil da normal gaussiana cuja função de distribuição acumulada é  $G$ , e  $p_i$  é a proporção acumulada das categorias  $1 \dots i$ .

A simulação do modelo é rápida e eficiente, e consiste na obtenção de uma realização da função gaussiana com o modelo de covariância desejado. Esta realização é então truncada nos *pontos de corte* previamente definidos para obtenção da imagem desejada.

Deutsch *et al.* (1992) enumeram três problemas do modelo:

- o esquema de truncamento gera uma ordenação – nem sempre desejável – das fácies nas imagens simuladas
- o modelo de covariância da função gaussiana governa as covariâncias das variáveis indicatrizes de forma arbitrária, gerando realizações com variabilidade espacial não controlada
- o condicionamento das realizações a dados categóricos é problemático, já que a função aleatória simulada é contínua

Galli e Beucher (1997) comentam estas características:

- a característica da ordenação, quando problemática, é amenizada pela possibilidade de variarem-se os *pontos de corte* no espaço de acordo com curvas de proporções experimentais e/ou modeladas
- podem-se modelar covariâncias cruzadas consistentes das indicatrizes, ainda que reste pouca liberdade para uma modelagem correta dos variogramas cruzados experimentais
- o condicionamento das realizações a dados categóricos pode ser obtido através de algoritmos como o Gibbs Sampler

## 1.5.3 Plurigaussiana Truncada

O modelo da plurigaussiana truncada é uma extensão direta do modelo da gaussiana truncada.

Cada categoria é aqui definida por truncamentos sobre  $n$  gaussianas, correlacionadas ou não, eliminando o problema do ordenamento das categorias observado no modelo da gaussiana truncada.

Segundo Galli e Beucher (1997), esta extensão permite a manipulação das probabilidades de transição e das anisotropias entre as fácies, respeitando os variogramas das indicatrizes, mesmo quando o número de gaussianas é restrito a  $n = 2$ .

O método possui consistência teórica e sua simulação é também uma extensão daquela da gaussiana truncada.

#### 1.5.4 Campos Aleatórios Markovianos – CAMs

Os Campos Aleatórios Markovianos são uma classe de distribuições de probabilidades a valores discretos definidas pela condição de que a probabilidade local de ocorrer um valor em um ponto do domínio depende apenas dos valores que ocorrem na vizinhança deste ponto.

Sob certas condições – não muito restritivas –, relativas à definição de vizinhança, à forma funcional da expressão das probabilidades, e à condição de probabilidades não-nulas, o conjunto das probabilidades locais define unicamente a probabilidade conjunta do campo.

A simulação de CAMs pode ser realizada através do uso de algoritmos iterativos da classe dos algoritmos de Hastings, a exemplo do algoritmo de Metropolis e do Amostrador de Gibbs.

As primeiras aplicações reportadas de CAMs remontam à década de 20, com o trabalho de Ising em ferromagnetismo (Cross e Jain, 1983). Outras aplicações na área da Física Estatística são relativas à modelagem de separação de fases em ligas binárias por Flinn (1974) e ordenação em cristais (segundo Cross e Jain, 1983).

Besag (1974) reporta aplicações de CAMs na modelagem de experimentos em agricultura.

Cross e Jain (1983) historicam o uso de CAMs na síntese de texturas de imagens e apresentam uma coleção de imagens pretensamente representativas das texturas obteníveis pela técnica. Seus modelos incluem variações anisotrópicas.

Mais recentemente seguindo o trabalho de Geman e Geman (1984), um enorme número de aplicações na área da análise e síntese de imagens digitalizadas tem sido reportado, onde os CAMs têm sido utilizados frequentemente como distribuições *a priori* em contexto bayesiano. Li (1996) é uma referência bastante completa sobre o tema.

Em Geologia, o uso de CAMs na modelagem estocástica de reservatórios de petróleo vem sendo reportado em trabalhos de revisão como alternativa natural – e potencialmente mais rica – ao uso de modelos como a simulação sequencial da indicatriz (de consistência teórica

problemática) e a gaussiana truncada (com seu ordenamento de categorias e outras dificuldades). Revisões sobre este tema podem ser encontradas em Dubrule (1989), Haldorsen e Damsleth (1990), Omre (1992), Dubrule (1992), Ripley (1992) e Chessa (1995).

Em Galli e Beucher (1997), acrescenta-se aos métodos acima a plurigaussiana truncada. Infelizmente os CAMs são mencionados apenas *en passant* neste trabalho.

Inexistem trabalhos comparando a técnica a outras potencialmente competidoras. A argumentação, quando existente, é essencialmente sobre as qualidades e defeitos intrínsecos dos métodos, e escassamente comparativa.

# *Capítulo 2*

## *CAMs – Embasamento Conceitual*

### **2.1 Introdução**

São apresentados os conceitos fundamentais relacionados aos Campos Aleatórios Markovianos.

É colocada a utilidade do conceito e mostrada a dificuldade de modelagem a partir da conceituação básica.

É colocada a equivalência entre CAMs e Distribuições de Gibbs.

Demonstra-se como as Distribuições de Gibbs surgem no processo de modelagem de imagens com características específicas e sua utilidade para contornar os problemas da formulação markoviana.

### **2.2 Definição**

**Campos Aleatórios Markovianos – CAMs** são uma classe de processos estocásticos a valores discretos<sup>4</sup> definidos sobre um arranjo espacial de coordenadas e caracterizados pela propriedade de que o valor assumido por uma variável aleatória é dependente apenas dos valores das variáveis aleatórias que ocorrem em sua vizinhança.

O interesse deste estudo está voltado para a simulação de CAMs, de forma que deseje-se caracterizar e amostrar a distribuição de probabilidades *conjunta* das variáveis aleatórias residentes nas celas do arranjo espacial considerado.

Na prática da caracterização de reservatórios em geologia do petróleo, o fenômeno modelado geralmente corresponde à distribuição espacial de alguma característica geológica de interesse.

Matematicamente este arranjo espacial é representado por um vetor (uni, bi ou tridimensional), cujo índice é indicador da posição espacial correspondente. O termo *grade* será utilizado aqui para designar este arranjo espacial, independentemente de sua dimensão

---

<sup>4</sup> Besag (1974) afirma que o conceito pode ser estendido às variáveis contínuas. Neste trabalho será abordada apenas a versão discreta dos CAMs.

e/ou geometria. Por simplificação, e sem perda de generalidade, será feita referência ao índice de posição da grade como unidimensional.

Seja  $S$  o conjunto de celas de uma grade.

Suponha-se que em cada cela  $s$  de  $S$  possa-se observar um estado<sup>5</sup> de um conjunto  $\Xi_s$ <sup>6</sup> de estados possíveis, por simplicidade considerado igual para todas as celas. Neste caso, o conjunto de todas as imagens possíveis será<sup>7</sup>

$$\Xi = \prod_{s \in S} \Xi_s$$

Portanto, se a grade  $S$  for composta por  $N$  celas, a variável aleatória que se deseja caracterizar e simular tem a forma:

$$\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \Xi = \{X_1, X_2, \dots, X_{N-1}, X_N\},$$

onde  $\Omega$  denota um espaço amostral genérico, e uma realização (imagem) específica de  $\mathbf{X}$  terá a forma correspondente:

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N\}$$

Suponha-se agora que  $\pi$  seja uma probabilidade sobre o conjunto das imagens  $\Xi$ , e que a probabilidade de ocorrer uma imagem qualquer seja sempre maior do que zero. Ou seja<sup>8</sup>:

$$\pi(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \Pr(\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{N-1} = x_{N-1}, X_N = x_N\}) > 0; \mathbf{x} \in \Xi \quad (1)$$

Esta premissa determina que qualquer imagem será possível, desde que esta imagem exista no universo  $\Xi$  das imagens, incluindo, por exemplo, uma imagem de uma única cor.

Para cada cela  $s$  da grade, define-se a probabilidade condicional:

$$\pi_s(\mathbf{x}) = \pi(\{\mathbf{y} : y_s = x_s\} \mid \{\mathbf{y} : y_t = x_t, t \neq s\}) \quad (2)$$

A expressão acima define, em termos de probabilidades de ocorrerem imagens ou conjuntos de imagens, o seguinte conceito, intuitivamente razoável:

A probabilidade condicional de ocorrência de uma determinada cor  $x_s$  em uma determinada cela  $s$  de uma imagem  $\mathbf{x}$  depende das cores  $x_t$  que ocorrem em todos os demais

<sup>5</sup> Por exemplo: cor, fácies, etc.

<sup>6</sup> Pronuncia-se "csi". Seu correspondente minúsculo é  $\xi$

<sup>7</sup> O produtório cartesiano dos conjuntos  $\Xi_s$

<sup>8</sup> Por simplicidade, será adotada a seguinte notação:

$$\pi(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \pi(\{\mathbf{x}\}) = \pi(\mathbf{x})$$

e

$$\Pr(\{X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N\}) = \Pr(\{x_1, \dots, x_N\})$$

pontos  $t \neq s$  da imagem  $\mathbf{x}$ .

A expressão acima é conhecida como a expressão das “Características Locais associadas a  $\pi$ ”.

Note-se que  $\pi_s(\mathbf{x})$  e  $\pi(\mathbf{x})$  estão relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \pi_s(\mathbf{x}) &= \pi(\{\mathbf{y} : y_s = x_s\} \mid \{\mathbf{y} : y_t = x_t, t \neq s\}) \\ &= \frac{\pi(\{\mathbf{y} : y_s = x_s\} \cap \{\mathbf{y} : y_t = x_t, t \neq s\})}{\pi(\{\mathbf{y} : y_t = x_t, t \neq s\})} \\ &= \frac{\pi(\mathbf{x})}{\sum_{\mathbf{y} : y_t = x_t, t \neq s} \pi(\mathbf{y})} \end{aligned} \quad (3)$$

Considere-se agora uma vizinhança  $\partial_s$  da cela  $s$ , definida como um conjunto qualquer de celas obedecendo às seguintes condições:

- (1)  $s \notin \partial_s$ .  
Ou seja, uma cela não pode ser vizinha dela própria.
- (2)  $s \in \partial_t \Leftrightarrow t \in \partial_s$ .  
Se uma cela pertence à vizinhança de outra, a recíproca deve ser verdadeira.

O conjunto  $\mathcal{V} = \{\partial_s : s \in S\}$  será chamado de *família de vizinhanças* na grade  $S$ .

O arranjo espacial  $S$  e a família de vizinhanças  $\mathcal{V}$  constituem um *grafo*  $\mathcal{G}(S, \mathcal{V})$  em que os pontos  $s$  de  $S$  são os *nós* do grafo e os pares  $(s, t)$  são os *laços* do grafo, se  $s$  é vizinho de  $t$ .

Por definição, diz-se que  $\pi$  é uma **probabilidade markoviana em relação ao grafo**  $\mathcal{G}$  ou  **$\mathcal{G}$ -markoviana** se:

$$\pi_s(\mathbf{x}) = \pi(\{\mathbf{y} : y_s = x_s\} \mid \{\mathbf{y} : y_t = x_t, t \in \partial_s\}); s \in S \quad (4)$$

Analogamente ao que foi feito para a expressão (2) (pág 14), a expressão (11) (pág. 20) define, em termos das probabilidades de ocorrerem imagens ou conjuntos de imagens, o seguinte conceito (*propriedade markoviana*):

A probabilidade condicional de ocorrer uma determinada cor  $x_s$  na cela  $s$  da imagem  $\mathbf{x}$  depende apenas das cores  $x_t$  que ocorrem nas celas  $t$  pertencentes à vizinhança  $\partial_s$  da cela  $s$ .

A propriedade markoviana possui o efeito de reduzir o universo de dependência à vizinhança adotada. No caso de vizinhanças locais, esta redução pode ser a chave para a viabilização da modelagem de fenômenos que de outra forma seriam intratáveis.

Frequentemente será possível supor a existência da propriedade markoviana, mesmo no caso de modelagem de fenômenos para os quais ela não pode ser suposta estritamente, desde que se

possa considerar a influência de pontos distantes como desprezível em relação à influência dos pontos situados em uma vizinhança próxima.

Finalmente, diz-se que a variável aleatória  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \Xi$ , com distribuição de probabilidades  $\pi(\mathbf{X} = \mathbf{x}) > 0; \forall \mathbf{x} \in \Xi$ , é um **Campo Aleatório Markoviano em relação ao grafo  $\mathcal{G}(S, \mathcal{V})$**  se  $\pi$  for uma probabilidade  $\mathcal{G}$ -Markoviana.

**OBSERVAÇÃO:**

Pode-se definir a seguinte vizinhança para cada cela  $s$  da grade  $S$ :

$$\partial_s^\circ = \{S - \{s\}\} \quad (5)$$

Esta vizinhança abrange todas as celas da grade, à exceção daquela a que se refere a vizinhança.

A família de vizinhanças correspondente é  $\mathcal{V}^\circ = \{\partial_s^\circ : s \in S\}$ , e o grafo correspondente é  $\mathcal{G}^\circ = (S, \mathcal{V}^\circ)$ .

Se  $\pi_s(\mathbf{x}) = \pi(\{\mathbf{y} : y_s = x_s\} \mid \{\mathbf{y} : y_t = x_t, t \in \partial_s^\circ\})$ , então  $\pi$  é uma probabilidade  $\mathcal{G}^\circ$ -markoviana. Mas ocorre que a definição de  $\mathcal{V}^\circ$  é tal que a expressão acima iguale-se àquela em que se define  $\pi_s(\mathbf{x})$  sem considerar a propriedade markoviana (expressão (2), pág. 14). Ou seja, **qualquer probabilidade  $\pi$  definida sobre  $S$  será sempre uma probabilidade  $\mathcal{G}^\circ$ -markoviana.**

Besag (1974) apresenta o seguinte resultado:

$$\frac{\pi(\mathbf{x})}{\pi(\mathbf{y})} = \prod_{i=1}^N \frac{\pi(x_i \mid x_1, \dots, x_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_N)}{\pi(y_i \mid x_1, \dots, x_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_N)} \quad (6)$$

A equação (6) expressa a razão entre as probabilidades conjuntas de duas imagens através das características locais de  $\pi$ . Por (6) pode-se observar a principal dificuldade existente para especificar a probabilidade  $\pi$  através da família das características locais: como os rótulos indicadores de posição das variáveis aleatórias locais  $X_i$  são arbitrários, fica claro que existem muitas fatorações do tipo (6) possíveis. Como todas elas devem ser equivalentes, de forma a que a estrutura de probabilidade conjunta seja matematicamente consistente, a forma funcional das distribuições de probabilidades condicionais (características locais) deve sofrer restrições severas.

Portanto, é virtualmente impossível especificar empiricamente as características locais de forma a consistir uma distribuição de probabilidades conjunta válida.

## 2.3 CAMs e Distribuições de Gibbs

O *Teorema de Hammersley e Clifford* estabelece a forma funcional geral das características locais válidas, e a respectiva forma funcional da distribuição conjunta determinada por uma família de características locais.

Este teorema data de 1971 e não foi publicado por seus autores. Demonstrações alternativas do Teorema de Hammersley e Clifford podem ser encontradas em Besag (1974) e Bustos et al. (1993).

De acordo com este teorema, todo CAM é equivalente a uma *Distribuição de Gibbs*, que é uma distribuição de probabilidades com a seguinte propriedade:

$$\pi(\mathbf{X} = \mathbf{x}) \propto \exp(-H_V(\mathbf{x})) \quad (7)$$

onde

$$H_V(\mathbf{x}) = - \sum_{A \in \mathcal{C}(\mathcal{G})} V(\mathbf{x}, A) \quad (8)$$

é a *função de energia* da imagem  $\mathbf{x}$  associada ao *potencial*  $V$ . A definição deste último vem a seguir.

Para compreender a idéia subjacente à definição de uma família de distribuições de probabilidades com a forma de (7), suponha-se que exista interesse em amostrar aleatoriamente imagens em que esteja presente uma determinada característica.

Dada uma imagem qualquer, como quantificar a presença desta característica, de modo a valorar a imagem como “próxima” ou “distante” da característica desejada?

É possível que uma porção da imagem seja portadora da característica, enquanto o resto aproxima-se vagamente do desejado.

É possível que a característica comporte mais de um aspecto, e assim sendo é possível que uma porção da imagem esteja próxima do desejado em um aspecto, mas distante em outro.

De uma maneira geral, é intuitiva a necessidade de avaliar cada subconjunto possível da imagem em relação à característica desejada, e neste processo podem-se atribuir “notas” a cada subconjunto avaliado.

Desta forma, se a soma de todas as notas de todos os subconjuntos possíveis de uma imagem for superior à soma das “notas” de uma segunda imagem, é possível afirmar que a imagem

de maior escore está como um todo mais próxima da característica desejada do que a sua concorrente<sup>9</sup>.

Com o objetivo de obter amostras aleatórias de imagens portadoras da característica em questão, pode-se definir uma distribuição de probabilidades sobre o universo das imagens possíveis de tal forma que a probabilidade de ocorrer uma imagem seja tanto maior quanto maior seja o seu escore.

A expressão (7) apresenta uma relação desta natureza.

No contexto das distribuições de Gibbs, as funções pelas quais são atribuídas “notas” aos subconjuntos das imagens são chamadas de **Funções Potenciais**.

A natureza das funções potenciais é dependente da características desejadas para as imagens, e sua formulação deve obedecer a dois requisistos:

- (1)  $V(\mathbf{x}, \emptyset) = 0$   
O potencial do conjunto vazio deve ser zero.
- (2)  $x_s = y_s, \forall s \in A, A \subseteq S \Rightarrow V(\mathbf{x}, A) = V(\mathbf{y}, A)$   
Se duas imagens  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  forem iguais em um subconjunto  $A$  de celas da grade, então os potenciais das imagens em relação a  $A$  devem ser iguais.

Ambas as condições são bastante intuitivas e naturalmente estarão presentes em qualquer modelagem prática.

O escore resultante da soma das funções potenciais sobre todos os subconjuntos da imagem recebe o nome de **Energia da imagem  $\mathbf{x}$  em relação ao potencial  $V$** .

$$H_V(\mathbf{x}) = - \sum_{A \subseteq S} V(\mathbf{x}, A) \quad (9)$$

O sinal negativo presente na relação (9) pretende apenas tornar a relação inversa: quanto maior o potencial, menor a energia, de forma a preservar a noção advinda da Física de que os estados de menor energia são mais prováveis.

Finalmente, chega-se à expressão (7) (pág. 17) ao definir-se a probabilidade de uma imagem  $\mathbf{x}$  como proporcional ao exponencial da energia de  $\mathbf{x}$  medida pelo potencial  $V$ .

A função exponencial é uma função bem comportada do ponto-de-vista matemático. Calculada sobre a energia (o somatório dos potenciais), fornece valores mais elevados para as imagens de pequena energia (alto potencial) relativamente às de alta energia do que os valores

<sup>9</sup> Neste raciocínio não está sendo considerada a possibilidade de existir independência condicional markoviana em relação a alguma vizinhança local. Em outras palavras, está sendo considerada uma vizinhança global ( $\mathcal{V}^o$ ).

que seriam obtidos na sua ausência, podendo acentuar desta forma a moda da distribuição de probabilidades decorrente (reduzindo a sua variância).

O cálculo das probabilidades associadas à expressão (7) exige a avaliação da constante de proporcionalidade:

$$Z = \sum_{\mathbf{y} \in \Xi} \exp(-H_V(\mathbf{y}))$$

Esta constante envolve as energias de todas as imagens possíveis, e  $Z$  é chamada de **Função de Partição do potencial  $V$** .

Observe-se que, estabelecida a relação:

$$\pi(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \exp(-H_V(\mathbf{x})) = \frac{\exp(-H_V(\mathbf{x}))}{\sum_{\mathbf{y} \in \Xi} \exp(-H_V(\mathbf{y}))} \quad (10)$$

o cálculo das características locais de  $\pi$  pode ser feito através de (3) (pág. 15).

Recapitulando: foi visto o conceito de Campos Aleatórios Markovianos; foi colocada a afirmação de que os os CAMs são equivalentes às Distribuições de Gibbs (Teorema de Hammersley e Clifford); e foi mostrado como as Distribuições de Gibbs surgem naturalmente do processo de estabelecer uma distribuição de probabilidades que permita a obtenção de amostras aleatórias de imagens com características específicas.

Nesta última etapa, foi estabelecida a forma da distribuição de probabilidades como função da função de energia, envolvendo uma constante de proporcionalidade e considerando o caso da vizinhança global. A função de energia envolve um somatório sobre todos os subconjuntos possíveis da imagem, e é fácil perceber que o esforço computacional necessário para a avaliação desta função assim como definida torna impraticável o seu uso em qualquer situação de utilidade prática, a menos que a função potencial venha a ser definida de forma a reduzir consideravelmente este esforço<sup>10</sup>.

Na mesma linha de raciocínio, constata-se que a avaliação da constante de proporcionalidade é tarefa ainda mais ingrata, pois envolve o cálculo da energia de todas as imagens possíveis.

Como foi observado anteriormente, a expressão (10) (pág. 19) apresenta o formato das Distribuições de Gibbs resultante de um desenvolvimento em que não foi considerada a propriedade markoviana. Esta condição equivale a considerar a propriedade markoviana relativa a uma vizinhança global como definida em (5) (pág. 16).

<sup>10</sup> Este é o caso dos Campos Aleatórios Semi-Markovianos de Tjelmeland et al. (1992).

Quando a propriedade markoviana relativa a uma vizinhança local é considerada no desenvolvimento da expressão das Distribuições de Gibbs, uma alteração é introduzida em relação ao que foi obtido no caso da vizinhança global.

Esta alteração envolve uma família especial de conjuntos de celas da grade, chamada *Família das Cliques do grafo*  $\mathcal{G}$  e designada por  $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ .

Cliques do grafo  $\mathcal{G}(S, \mathcal{V})$  são os conjuntos de celas da grade constituídos por uma única cela ou por qualquer número de celas, desde que todas reciprocamente vizinhas.

Deve-se observar agora uma terceira condição na formulação das Funções Potenciais, além das condições listadas à página 18.

$$V(\mathbf{x}, A) = 0 \text{ se } A \notin \mathcal{C}(\mathcal{G})$$

Por esta condição, o potencial de todos os conjuntos de celas que não sejam cliques será nulo, e a Função Potencial assim definida é chamada de  **$\mathcal{G}$ -potencial**.

A expressão da energia da imagem  $\mathbf{x}$  torna-se:

$$H_V(\mathbf{x}) = - \sum_{A \in \mathcal{C}(\mathcal{G})} V(\mathbf{x}, A)$$

o que reduz drasticamente o esforço computacional necessário para cálculo da energia da imagem, no caso de adotar-se um CAM definido sobre uma vizinhança restrita.

Portanto, a definição de um  $\mathcal{G}$ -potencial  $V(\mathbf{x}, A)$  produz um CAM cuja família de características locais

$$\pi_s(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left(\sum_{A \in \mathcal{C}, s \in A} V(\mathbf{x}, A)\right)}{\sum_{\mathbf{y} \in \Xi | y_t = x_t, t \neq s} \exp\left(\sum_{A \in \mathcal{C}, s \in A} V(\mathbf{y}, A)\right)} \quad (11)$$

induz uma distribuição conjunta equivalente à Distribuição de Gibbs dada por

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left(\sum_{A \in \mathcal{C}} V(\mathbf{x}, A)\right)}{\sum_{\mathbf{y} \in \Xi} \exp\left(\sum_{A \in \mathcal{C}} V(\mathbf{y}, A)\right)} \quad (12)$$

O processo de modelagem por CAM consiste na definição de um  $\mathcal{G}$ -potencial adequado à descrição do fenômeno em estudo.

# Capítulo 3

## CAMs - Modelagem

### 3.1 Introdução

Neste capítulo serão abordados os elementos envolvidos no processo de modelagem por CAMs, essencialmente o estabelecimento de um  $\mathcal{G}$ -potencial conveniente.

A definição de uma função  $\mathcal{G}$ -potencial é um processo que envolve:

- a determinação da vizinhança a ser considerada,
- a determinação das cliques do grafo resultante a serem consideradas, e
- o estabelecimento do modelo de valoração das interações entre as celas para cada clique considerada.

Os dois primeiros itens estão intimamente relacionados e serão abordados sob um mesmo tópico, enquanto o terceiro item será abordado em tópico separado.

### 3.2 Elementos Geométricos: Vizinhanças, Grafos e Cliques

Como foi visto na seção anterior, a função potencial deve ser capaz de quantificar a adequação dos diversos subconjuntos de uma imagem a alguma característica de interesse na modelagem.

Em se tratando de um  $\mathcal{G}$ -potencial, deve ser capaz de quantificar esta adequação para todos os conjuntos da família das cliques, pois, por definição, o seu valor será nulo para quaisquer outros conjuntos.

No caso bidimensional de uma grade retangular, a vizinhança mais simples é aquela constituída pelos quatro pontos mais próximos (fig 1).

Se  $s = (i, j)$ :

$$\partial_s = \partial_{(i,j)} = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\} \quad (13)$$

com adaptações convenientes nas bordas e cantos da grade.

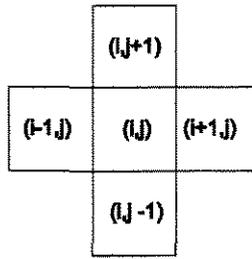


Figura 1: O esquema do vizinho mais próximo.

Genericamente, uma ordem natural de vizinhanças pode ser estabelecida com base na distância entre um ponto e seus vizinhos (Geman e Geman, 1984). No plano:

$$\partial_s^c = \partial_{i,j}^c = \{(k, l) \in S : 0 < (k - i)^2 + (l - j)^2 \leq c\} \quad (14)$$

Para  $c = 1$ ,

$$\begin{aligned} \partial_{(i,j)}^1 &= \{(k, l) \in S : 0 < (k - i)^2 + (l - j)^2 \leq 1\} \\ &= \{(i - 1, j), (i + 1, j), (i, j - 1), (i, j + 1)\} \end{aligned}$$

e  $\partial_{(i,j)}^1$  corresponde a (13).

A figura 2 mostra as configurações das vizinhanças planas para  $c \leq 13$ . A configuração da vizinhança caracterizada por  $c = 8$  inclui todas as celas assinaladas com valores iguais ou inferiores a 8.

	13	10	9	10	13	
13	8	5	4	5	8	13
10	5	2	1	2	5	10
9	4	1	S	1	4	9
10	5	2	1	2	5	10
13	8	5	4	5	8	13
	13	10	9	10	13	

Figura 2: Esquema mostrando as vizinhanças planas para  $c \leq 13$ .

A família das cliques resultante da definição de  $\partial_s^1$  é composta de todos os subconjuntos de  $S$  das formas:

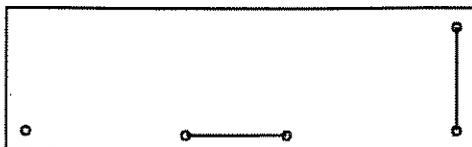


Figura 3: Cliques do esquema do vizinho mais próximo.

Portanto, uma função potencial definida para o sistema de vizinhanças mais simples possível no plano deverá avaliar conjuntos de no máximo dois pontos.

Para  $c = 2$ , a família das cliques correspondente será composta por todos os subconjuntos de  $S$  nas formas definidas na figura 3, mais as formas a seguir:

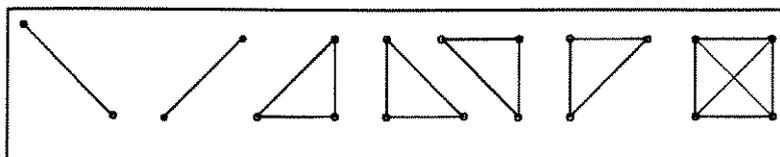


Figura 4: Cliques adicionais da vizinhança  $c = 2$ .

Correspondentemente, a função potencial definida sobre uma vizinhança do tipo  $c = 2$  deverá avaliar conjuntos de, no máximo, 4 celas.

Para  $c = 8$ , pertencerão à família das cliques todos os subconjuntos da grade com número de celas entre 1 e 9, de tal forma que as celas estejam em posição relativa igual à de algum subconjunto presente na figura 5.

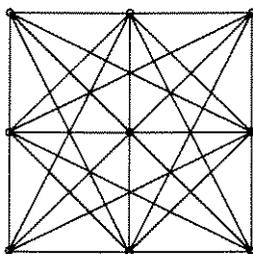


Figura 5: Clique máxima da vizinhança 8. As linhas assinalam todas as interações possíveis.

É fácil perceber que o número de cliques do grafo aumenta rapidamente à medida que a vizinhança cresce, até eventualmente abranger todos os subconjuntos possíveis da grade, no caso da vizinhança global.

Esta característica, de se poderem modelar relações entre várias coordenadas da grade através da função potencial, confere ao esquema markoviano uma grande riqueza em termos de modelagem de fenômenos espaciais.

As mesmas considerações são, evidentemente, válidas para grades tridimensionais.

Uma ordenação de vizinhanças análoga a (14) (pág. 22) pode ser estabelecida para grades 3D:

$$\partial_s^c = \partial_{(i,j,k)}^c = \{(l, m, n) \in S : 0 < (l - i)^2 + (m - j)^2 + (n - k)^2 \leq c\} \quad (15)$$

A figura 6 apresenta as configurações de vizinhanças 3D correspondentes à definição (15) para  $c \leq 9$ .

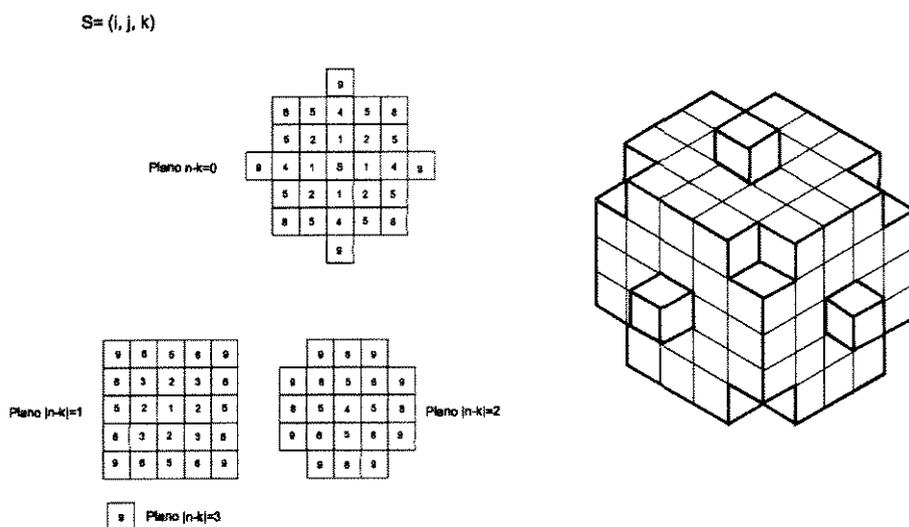


Figura 6: Quatro seções do cubo de vizinhança para  $c \leq 9$ . Os números indicam a vizinhança mínima a que as respectivas celas pertencerão.

Para  $c = 1$ , as cliques têm no máximo 2 celas (figura 7):

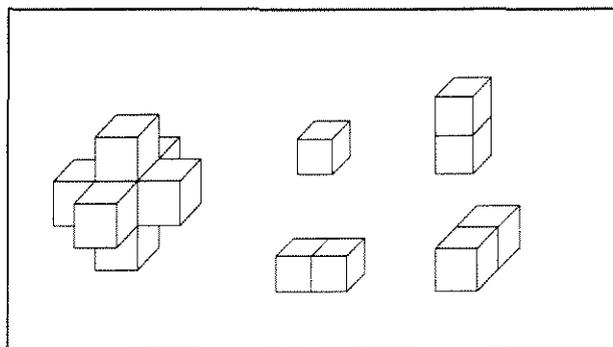


Figura 7: Vizinhança 3D para  $c = 1$  e cliques correspondentes

Para  $c = 3$ , as cliques terão entre 1 e 8 celas, conformes a algum subconjunto da clique máxima mostrada na figura 8.

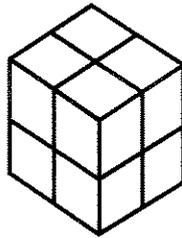


Figura 8: Clique máxima 3D da vizinhança  $c \leq 3$ .

Finalmente, é conveniente observar que as definições de vizinhanças conforme (14) (pág. 22) e (15) (pág. 24) implicam que as celas situadas próximas às bordas da grade possuem um número menor de vizinhos do que aquelas situadas no interior da grade.

No caso bidimensional com vizinhança  $c = 1$ , a grade pode ser dividida em 3 subconjuntos, de acordo com o número de vizinhos existente em cada cela do conjunto:

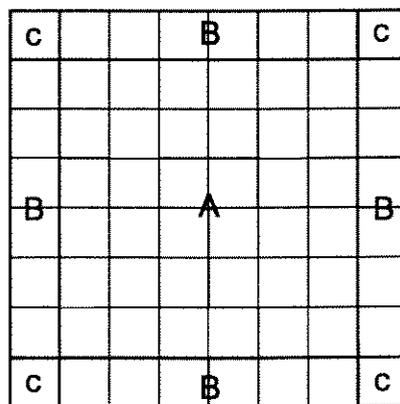


Figura 9: Corpo (A), Bordas (B) e Cantos (C)

O conjunto  $A$  é o *corpo* da grade, e todas as celas que o compõem possuem a vizinhança completa.

O conjunto  $B$  é o conjunto de *bordas* da grade, e todas as celas que o compõem possuem apenas 3 vizinhos.

O conjunto  $C$  é o conjunto dos *cantos* da grade, e todas as celas que o compõem possuem apenas 2 vizinhos.

No caso tridimensional com vizinhança  $c = 1$ , definem-se analogamente os conjuntos:

- *corpo*: celas com vizinhança completa (6 vizinhos)
- *face*: celas com 5 vizinhos
- *aresta*: celas com 4 vizinhos
- *vértice*: celas com 3 vizinhos

### 3.3 Funções Potenciais

O terceiro elemento no processo de modelagem por CAM é a definição das *Funções Potenciais* necessárias à avaliação da adequação dos subconjuntos de uma imagem à característica que está sendo modelada.

Mais especificamente, as funções potenciais deverão avaliar os subconjuntos da imagem pertencentes à família das cliques do grafo definido pela família de vizinhanças sobre a grade que serve de suporte ao processo, conforme visto nas seções anteriores.

São apresentados os modelos clássicos de Ising e Potts-Strauss, e sua relação com modelos extraídos da literatura sobre a simulação de CAMs na caracterização de reservatórios de petróleo.

Os modelos de Ising e Potts-Strauss apresentam um comportamento conhecido como *Transição de Fase* (Ripley, 1992, Frery, 1993). Este comportamento está, por sua vez, associado a um valor crítico específico  $\beta_c$  do parâmetro de atratividade do modelo<sup>11</sup>, e consiste no desenvolvimento de padrões de correlação de longo alcance para modelos com  $\beta > \beta_c$  versus padrões de curto alcance para modelos com  $\beta < \beta_c$ .

Imagens geradas para  $\beta$  supercrítico consistem de grandes manchas de uma cor salpicadas por celas esparsas de outra cor, com fronteiras suaves e longas entre as manchas.

Para grades de tamanho infinito, o valor crítico do parâmetro é dado por

$$\beta_c = \ln \left( 1 + \sqrt{K} \right)$$

onde  $K$  é o número de cores possíveis do modelo (Frery, 1993).

#### 3.3.1 O Modelo de Ising

No caso de modelos definidos sobre grades bidimensionais, a família de vizinhanças mais simples corresponde ao modelo do vizinho mais próximo, ou

$$\partial_{(i,j)}^1 = \{ (k, l) \in S : 0 < (k - i)^2 + (l - j)^2 \leq 1 \}$$

<sup>11</sup> Os modelos de Ising e Potts-Strauss são apresentados nos itens 3.1 e 3.2, respectivamente.

$$= \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\} \text{ (no corpo da grade)}$$

(ver figura 1)

As cliques correspondentes são, para cada cela  $s = (i, j)$  (figura 3):

$$\begin{aligned} A &= \{(i, j)\} && \text{conjunto de uma única cela} \\ B &= \{\{(i, j), (i-1, j)\}, \{(i, j), (i+1, j)\}\} && \text{conjuntos de 2 celas colineares na direção } i \\ C &= \{\{(i, j), (i, j-1)\}, \{(i, j), (i, j+1)\}\} && \text{conjuntos de 2 celas colineares na direção } j \end{aligned}$$

A forma mais genérica da função de energia sobre este sistema é:

$$\begin{aligned} H_V(\mathbf{x}) &= - \sum_{M \in \mathcal{C}} V_M \\ &= - \left[ V_A(\mathbf{x}, A) + \sum_{D \in B} V_B(\mathbf{x}, D) + \sum_{E \in C} V_C(\mathbf{x}, E) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

O caso especial em que o CAM  $\mathbf{X}$  é binário (cada cela pode assumir apenas um de dois valores, codificados como 0 e 1, por exemplo, fácies folhelho e fácies arenito), homogêneo (estritamente estacionário, invariante por translação) e isotrópico (invariante por rotação), com a função potencial tomando a forma

$$\begin{aligned} V_{M \in \mathcal{C}: (i,j) \in M} &= \alpha x_{i,j} + \beta (x_{i,j} x_{i-1,j} + x_{i,j} x_{i+1,j}) + \beta (x_{i,j} x_{i,j-1} + x_{i,j} x_{i,j+1}) \\ &= x_{i,j} (\alpha + \beta (x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1})) \end{aligned} \quad (17)$$

é o chamado *Modelo de Ising*, criado em 1925 para estudar o ferromagnetismo (Geman & Geman, 1984), e também conhecido como o modelo *autológico* (Besag, 1974). Na terminologia correspondente, o parâmetro  $\alpha$  corresponde ao efeito de um campo magnético externo ao sistema e o parâmetro  $\beta$  corresponde à força de interação entre moléculas (coordenadas) vizinhas.

De acordo com (11) (pág. 20), vale que:

$$\pi_{i,j}(X = x) = \frac{\exp[-x_{i,j} (\alpha + \beta (x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1}))]}{1 + \exp[-x_{i,j} (\alpha + \beta (x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1}))]}$$

o que especifica a família das características locais do modelo de Ising.

Observe-se que a formulação (17) é uma expressão algebricamente conveniente (em função da codificação dos estados possíveis como 0 e 1) para a função potencial que pode ser descrita de forma mais explícita da seguinte maneira:

- $V_A(\mathbf{x}, A) = \alpha$  se  $x_{i,j} = 1$ . Atribui peso diferenciado à ocorrência de uma das 2 classes possíveis (aquela codificada como 1 na formulação de Ising).  
Controla a distribuição marginal das classes (Ripley, 1992)
- $V_B(\mathbf{x}, B) = \beta$  se no vizinho à direita ocorrer o mesmo valor que ocorre na cela central;  $\beta$  se no vizinho à esquerda ocorrer o mesmo valor que ocorre na cela central;  $2\beta$  se em ambas

as celas ocorrer o mesmo valor que ocorre na cela central.

- $V_C(\mathbf{x}, C) = \beta$  se no vizinho de baixo ocorrer o mesmo valor que ocorre na cela central;  $\beta$  se no vizinho de cima ocorrer o mesmo valor que ocorre na cela central;  $2\beta$  se em ambas as celas ocorrer o mesmo valor que ocorre na cela central.

Esta leitura da expressão (17) mostra com clareza a modelagem da ação de um campo magnético externo mediante  $V_A$ , dependente do “tipo de molécula” que ocorre na cela.

Já  $V_B$  e  $V_C$  modelam a interação entre moléculas vizinhas, simplesmente atribuindo um maior peso à continuidade espacial em relação à descontinuidade, no caso de  $\beta > 0$ , ou favorecendo a descontinuidade em relação à continuidade, se  $\beta < 0$ .

O parâmetro  $\beta$  pode ser:

- positivo, denotando atração entre celas vizinhas, e conseqüente geração de aglomerados de celas com o mesmo valor;
- negativo, denotando repulsão entre celas vizinhas e favorecendo a formação de um padrão de tabuleiro de xadrez;
- nulo, indicando independência entre vizinhos.

A anisotropia pode ser facilmente considerada no modelo de Ising, desde que sejam diferenciadas as funções  $V_B$  e  $V_C$  de (16) (pág. 27), através da introdução de um terceiro parâmetro.

A função de energia assume a forma:

$$V_{M \in C: (i,j) \in M} = x_{i,j} [\alpha + \beta_h (x_{i-1,j} + x_{i+1,j}) + \beta_v (x_{i,j-1} + x_{i,j+1})]$$

e

$$\pi_{i,j}(X_{i,j} = x_{i,j}) = \frac{\exp[-x_{i,j} (\alpha + \beta_h (x_{i-1,j} + x_{i+1,j}) + \beta_v (x_{i,j-1} + x_{i,j+1}))]}{1 + \exp[-x_{i,j} (\alpha + \beta_h (x_{i-1,j} + x_{i+1,j}) + \beta_v (x_{i,j-1} + x_{i,j+1}))]}$$

onde  $\beta_h$  e  $\beta_v$  são, respectivamente, os parâmetros de continuidades horizontal e vertical do modelo.

Uma extensão 3D do modelo, considerando anisotropia, nasce da especificação do sistema de vizinhos mais próximos no espaço tridimensional (figura 7).

A função potencial correspondente terá a forma:

$$V(\mathbf{x}, M) = V_A(\mathbf{x}, A) + \sum_{M \in B} V_B(\mathbf{x}, M) + \sum_{M \in C} V_C(\mathbf{x}, M) + \sum_{M \in D} V_D(\mathbf{x}, M)$$

onde (figura 7)

- $A = \{(i, j, k)\}$
- $B = \{\{(i, j, k), (i-1, j, k)\}, \{(i, j, k), (i+1, j, k)\}\}$
- $C = \{\{(i, j, k), (i, j-1, k)\}, \{(i, j, k), (i, j+1, k)\}\}$

- $D = \{\{(i, j, k), (i, j, k - 1)\}, \{(i, j, k), (i, j, k + 1)\}\}$

resultando:

$$\begin{aligned} \pi_{i,j,k}(X = x) &= \\ &= \frac{\exp[-x_{i,j,k}(\alpha + \beta_1(x_{i-1,j,k} + x_{i+1,j,k}) + \beta_2(x_{i,j-1,k} - x_{i,j+1,k}) + \beta_3(x_{i,j,k-1} + x_{i,j,k+1})))]}{1 + \exp[-x_{i,j,k}(\alpha + \beta_1(x_{i-1,j,k} - x_{i+1,j,k}) + \beta_2(x_{i,j-1,k} - x_{i,j+1,k}) + \beta_3(x_{i,j,k-1} - x_{i,j,k+1})))]} \end{aligned}$$

### 3.3.1.1 O Modelo de Omre *et al.* (1990)

Uma variação anisotrópica do modelo de Ising utilizando vizinhança maior do que o sistema de vizinhos mais próximos foi utilizada por Omre *et al.* (1990) para modelagem de horizontes cimentados por calcita em um reservatório arenoso do Mar do Norte.

A variável binária foi definida como:

$$t_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se ocorre calcita em } (i, j) \\ 0 & \text{se ocorre areia em } (i, j) \end{cases}$$

A expressão das características locais definidas na modelagem é:

$$\Pr(t_{i,j} = 1 \mid t_{k,l}; (k, l) \in \partial_{i,j}) = C \exp \left\{ - \sum_{(k,l) \in \partial_{i,j}} \Delta_{k-i, l-j} (1 - t_{k,l}) \right\} \quad (18)$$

onde

- $\partial_{i,j}$  é o conjunto dos vizinhos de  $(i, j)$
- $C$  é a constante de proporcionalidade que faz com que  $\Pr(t_{i,j} = 1 \mid \cdot)$  seja uma probabilidade
- $\Delta_{\Delta i, \Delta j}$  são os parâmetros de continuidade, definidos somente para as 4 direções principais: (E-W), (N-S), (NE-SW), (NW-SE)

Como o sistema é binário, a família das características locais fica completamente especificada por:

$$\Pr(t_{i,j} = 0 \mid t_{k,l}; (k, l) \in \partial_{i,j}) = 1 - \Pr(t_{i,j} = 1 \mid t_{k,l}; (k, l) \in \partial_{i,j})$$

Observe-se que a forma funcional de (18) define apenas a interação entre pares de celas, implicitamente atribuindo valor nulo ao campo externo (pesos diferenciados pela natureza da ocorrência) e a quaisquer interações entre 3 ou mais celas (no caso de uma vizinhança 3x3, poderia ser definida interação de conjuntos de até 4 pontos; para vizinhança 5x5, o tamanho máximo dos conjuntos pertencentes à família das cliques do grafo é de 9 celas). Mais ainda, são atribuídos valores nulos às interações entre pares de pontos situados fora das 4 direções cardiais.

Este procedimento simplifica o modelo e reduz enormemente a carga computacional exigida na simulação subsequente, mas mantém ainda uma considerável riqueza no modelo.

### 3.3.2 Modelo de Potts-Strauss

O modelo de Potts-Strauss é a extensão do modelo de Ising para um número de estados maior do que 2.

Definido no plano sobre o sistema de vizinhos mais próximos, apresenta a seguinte função de energia:

$$H_V(\mathbf{x}) = - \sum_{C \in \mathcal{C}} V_C(\mathbf{x}) = \sum_{s \in S} \left[ \alpha_{x_s} + \beta_1 \sum_{t \in \partial_s^h} \mathbb{I}(x_s = x_t) + \beta_2 \sum_{t \in \partial_s^v} \mathbb{I}(x_s = x_t) \right] \quad (19)$$

onde

$$\mathbb{I}(x_s = x_t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_t = x_s \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é a função indicadora da continuidade da imagem entre os pontos  $s$  e  $t$ ,

$$\partial_s^h = \{(i-1, j), (i+1, j)\} \text{ é o conjunto dos vizinhos horizontais de } s \text{ e}$$

$$\partial_s^v = \{(i, j-1), (i, j+1)\} \text{ é o conjunto dos vizinhos verticais de } s.$$

com redefinições adequadas nas bordas e cantos da grade.

Este modelo tem sido largamente utilizado em técnicas de restauração e análise de imagens e na síntese de texturas (Cross & Jain, 1983).

#### 3.3.2.1 Modelo de Høiberg *et al.*

Høiberg *et al.* (1990), em seu trabalho *A Stochastic Model for Shale Distribution in Petroleum Reservoirs*, utilizaram uma variante do modelo de Potts-Strauss para modelagem de níveis de folhelho com grande extensão lateral através da sua discretização.

A variável modelada foi a espessura da camada, discretizada em um número finito ( $K + 1$ ) de valores na forma:

$$t_{i,j} \in \{0, a, 2a, \dots, Ka\}$$

As características locais foram definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \Pr(t_{i,j} | t_{k,l}; (k,l) \in \partial_{i,j}) = \\ & = \frac{1}{Z} \exp \left\{ - \sum_{(k,l) \in \partial_{i,j}} \left[ \frac{\beta_{k-i,l-j}}{a} |t_{i,j} - t_{k,l}| + \Delta_{k-i,l-j} \mathbb{I}(t_{i,j} = 0 \neq t_{k,l} \vee t_{i,j} \neq 0 = t_{k,l}) \right] \right\} \end{aligned}$$

onde

- $\beta_{k-i,l-j}$  e  $\Delta_{k-i,l-j}$  são parâmetros do modelo. Por questões de consistência, exige-se que  $\beta_{i,j} = \beta_{-i,-j}$ ,  $\Delta_{i,j} = \Delta_{-i,-j}$ , para quaisquer  $i, j$ .
- $\mathbb{I}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \text{ é verdadeiro} \\ 0 & \text{se } \omega \text{ é falso} \end{cases}$
- $\partial_{i,j}$  é o conjunto das celas vizinhas da cela  $(i, j)$
- $Z$  é a constante de proporcionalidade
- $\vee$  é a função lógica *ou*

A função potencial presente na expressão acima contempla somente conjuntos de 2 pontos, considerando nulas as contribuições de todas as outras cliques do grafo definido pela vizinhança  $\partial_{i,j}$  sobre a grade  $S$ .

À semelhança do que foi feito por Omre *et al.* (1990), o modelo de Høiberg *et al.* (1990) é anisotrópico e avalia as interações de pares de pontos alinhados de acordo com as 4 direções cardeais principais N-S, E-W, NE-SW e NW-SE. Desta forma, é exigida a especificação de 8 parâmetros ( $\beta_{n-s}$ ,  $\Delta_{n-s}$ ,  $\beta_{e-w}$ ,  $\Delta_{e-w}$ ,  $\beta_{ne-sw}$ ,  $\Delta_{ne-sw}$ ,  $\beta_{nw-se}$ ,  $\Delta_{nw-se}$ ) para caracterização do modelo (ou apenas 4, no caso do sistema de vizinhos mais próximos, que só admite 2 direções de anisotropia).

Para cada par de celas  $(i, j)$  e  $(k, l)$ , é observada a variação de espessura da camada de folhelho ( $|t_{i,j} - t_{k,l}|$ ). Quanto maior esta variação, tanto menor será a parcela da função potencial a ela correspondente<sup>12</sup>, resultando maior energia e, portanto, menor probabilidade de ocorrência de variações bruscas de espessura da camada. Por esta razão,  $\beta$  são os parâmetros que controlam a *suavidade* da variação de espessura do folhelho nas diversas direções de anisotropia.

Para cada par de celas é avaliada também a continuidade do tipo de rocha, através da função indicadora  $\mathbb{I}(t_{i,j} = 0 \neq t_{k,l} \vee t_{i,j} \neq 0 = t_{k,l})$ .

Esta função assume o valor 1 se houver transição de areia ( $t = 0$ ) para folhelho ( $t \neq 0$ ), ou vice-versa, entre as celas  $(i, j)$  e  $(k, l)$ . Portanto, se houver transição o potencial do par de celas será reduzido no valor de  $\Delta_{k-i,l-j}$ , com a conseqüente redução da probabilidade da imagem.  $\Delta$  são os parâmetros que controlam a *continuidade* litológica nas diversas direções de anisotropia.

<sup>12</sup> Na suposição de um valor de  $\beta$  normalmente positivo.

### 3.3.3 Campos Aleatórios Semi-Markovianos (CASM)

Tjelmeland *et al.* (1992) introduziram os CASM na modelagem estocástica de reservatórios de petróleo por considerarem insatisfatórios os resultados obtidos com experimentação sobre o modelo de Potts-Strauss e variantes, em função da ocorrência do fenômeno de Transição de Fase.

#### 3.3.3.1 Definição

Os *Campos Aleatórios Semi-Markovianos* constituem uma subclasse de CAMs definidos sobre a vizinhança global  $\mathcal{V}^\circ$ .

Nestes CAMs as funções potenciais são definidas sobre os conjuntos de celas da imagem que constituem corpos homogêneos conectados. A idéia central é definir a probabilidade de ocorrência de uma imagem como proporcional à adequação dos corpos (conjuntos homogêneos de celas) presentes na imagem a *formas* de interesse, ou de pares de corpos a interações de interesse.

Se a imagem cuja probabilidade se deseja calcular for dividida no número mínimo de corpos homogêneos conexos que a compõem por inteiro, e se estes conjuntos forem chamados de  $B_1, B_2, \dots, B_{N_B}$ , com as fácies correspondentes sendo chamadas de  $c_1, c_2, \dots, c_{N_B}$ , então, de acordo com a idéia acima e introduzindo a função exponencial de acordo com a mesma lógica usada na construção das Distribuições de Gibbs, pode-se escrever:

$$\Pr(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \exp \left\{ \sum_{i=1}^{N_B} U_1(B_i, c_i) + \sum_{i=1}^{N_B} \sum_{j=i+1}^{N_B} U_2(B_i, c_i, B_j, c_j) \right\}$$

A esta equação correspondem as funções potenciais:

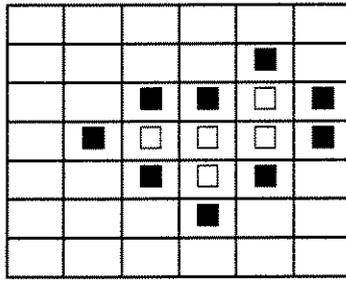
$$V_C(\mathbf{x}) = \begin{cases} U_1(B_i, c_i) & \text{se } C = B_i \cup R(B_i) \\ U_2(B_i, c_i, B_j, c_j) & \text{se } C = B_i \cup R(B_i) \cup B_j \cup R(B_j) \\ 0 & \text{em qualquer outro caso} \end{cases}$$

onde:

$$R(B) = \left( \bigcup_{r \in B} \partial_r^1 \right) - B$$

é o *anel externo* do corpo  $B$ , já que  $\partial_r^1$  é a vizinhança de ordem 1 da cela  $r$ .

Por exemplo, se  $B$  é o corpo definido pelas celas  $\square$ ,  $R(B)$  é o conjunto das celas  $\blacksquare$ .



### 3.3.3.2 CASM – Modelagem

**Modelo de Tjelmeland *et al.* (1992)** Em Tjelmeland *et al.* (1992), a função que descreve a interação entre os corpos é tomada como nula ( $U_2 = 0$ ), enquanto a função que descreve o tamanho e forma dos corpos é definida por:

$$U_1(B, c) = U_x(l_x(B), c) + U_y(l_y(B), c) + U_z(l_z(B), c) + U_v(B, c) \quad (20)$$

onde, para  $p$  indicando  $x, y$  ou  $z$ :

$$U_p(l_p, c) = \frac{(l_p - \mu_p)^2}{\sigma_p^2} \quad (21)$$

e

$$l_p(B) = \sqrt{\frac{\sqrt{20}}{V_B} \int_B (p - \bar{p})^2 dx dy dz} \quad (22)$$

com  $V_B$  sendo o volume do corpo  $B$ ,  $\mu_p$  os comprimentos médios esperados dos corpos fâcies  $c$  nas direções  $p$  e  $\sigma_p$  os desvios padrões esperados para os comprimentos dos corpos da fâcies  $c$  nas direções  $p$ .

As expressões  $l_p(B)$  (22) avaliam as extensões do corpo  $B$  nas direções  $x, y$  e  $z$ . Assim sendo, as expressões  $U_p(l_p, c)$  (21) avaliam o desvio do corpo  $B$  em relação às dimensões esperadas para a fâcies  $c$ , e valores elevados de  $U_p$  conferem à imagem baixa probabilidade de ocorrência.

Já a parcela  $U_v(B, c)$  em (20) é definida naquele trabalho como:

$$U_v(B, c) = \frac{(V_B - \frac{\pi}{6} l_x(B) \cdot l_y(B) \cdot l_z(B))^2}{\sigma_v^2}$$

À semelhança de  $U_p$  em (21),  $U_v$  avalia o desvio do volume do corpo  $B$  em relação a um volume médio<sup>13</sup> e desvio padrão  $\sigma_v$  esperados, conferindo probabilidades maiores a pequenos desvios.

Assim, enquanto as componentes  $U_p$  da função potencial  $U_1$  controlam principalmente as dimensões dos corpos simulados, a componente  $U_v$  controla a forma destes corpos.

Os parâmetros que especificam o modelo são, para cada fâcies,  $\mu_x, \mu_y, \mu_z, \sigma_x, \sigma_y$  e  $\sigma_z$ .

Os resultados obtidos por Tjelmeland *et al.* com este modelo, simulado com o uso do algoritmo de Metropolis, não foram considerados satisfatórios pelos autores, por apresentarem corpos inconsistentes com as características modeladas. Esta frustração foi atribuída à natureza

<sup>13</sup>  $\frac{\pi}{6} l_x(B) l_y(B) l_z(B)$ : o volume de um elipsóide com eixos  $l_x(B), l_y(B)$  e  $l_z(B)$ .

do algoritmo de simulação— uma versão do algoritmo de Metropolis que procede à alteração de uma única cela da grade por iteração –, resultando em convergência extremamente lenta. Os autores argumentam que seria necessária a utilização de algoritmos capazes de alterar mais de uma cela, preferencialmente corpos inteiros, a cada iteração. Este é, portanto, um problema adequado à natureza dos algoritmos de simulação de tipo *cluster flip*, que serão abordados no próximo capítulo.

Em seu trabalho, Tjelmeland *et al.* contornam o problema através da utilização de um algoritmo de *simulated annealing*, cuja discussão está fora do escopo desta dissertação.

**Modelo de Fält *et al.* (1991)** Fält *et al.* (1991) propõem um modelo de CASM cuja distribuição de probabilidades é dada por:

$$\Pr \{ \mathbf{X} = \mathbf{x} \mid \text{diagramas de cerca} \} = \frac{1}{Z} \exp \left\{ U_{\text{cerca}}(\mathbf{x}) + \sum_{b=1}^{N_B} U(B_b, c_b) \right\} \quad (23)$$

onde:

- a imagem  $\mathbf{x}$  foi dividida no maior número possível de volumes ou corpos conexos homogêneos  $B_1, B_2, \dots, B_{N_B}$ .
- $c_b$  é a fácies que ocorre no corpo  $B_b$ .
- $Z$  é a constante de normalização
- $U(B, c)$  é uma função potencial
- $U_{\text{cerca}}(\mathbf{x})$  é uma função que especifica a influência dos diagramas de cerca.

Em relação ao modelo de Tjelmeland *et al.*, este modelo incorpora a função  $U_{\text{cerca}}(\mathbf{x})$ , cuja finalidade é condicionar as realizações especificadas pela função potencial  $U(B, c)$  aos corpos interpretados manualmente através de diagramas de cerca. Observe-se que este condicionamento não é exato, mas possui um grau de liberdade especificado através do parâmetro  $\alpha$  da expressão de  $U_{\text{cerca}}(\mathbf{x})$ .

$$U_{\text{cerca}}(\mathbf{x}) = \alpha \sum_{(i,j,k)} \mathbb{I}(g_{i,j,k} = x_{i,j,k})$$

onde  $\mathbb{I}(\omega)$  é a função indicadora,  $g_{i,j,k}$  é a fácies especificada no diagrama de cerca correspondente à cela  $(i, j, k)$  e o somatório é sobre todas as celas correspondentes ao diagrama de cerca.

Assim, quando  $\sum_{(i,j,k)} \mathbb{I}(g_{i,j,k} = x_{i,j,k})$  atinge o seu valor máximo, o condicionamento é exato. O valor de  $\alpha$  determina o peso atribuído pelo intérprete à reprodução dos diagramas de cerca nas imagens simuladas.

A função potencial  $U(B, c)$  é especificada como em Tjelmeland *et al.*, através de parcelas sobre os comprimentos dos corpos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , acrescidas de uma parcela sobre os volumes dos corpos:

$$U(B_b, c_b) = U_x(l_x, c_b) + U_y(l_y, c_b) + U_z(l_z, c_b) + U_v(B, c)$$

Se em Tjelmeland *et al.* a especificação de  $U_x$ ,  $U_y$  e  $U_z$  era feita de forma analítica através das relações (21), em Fält *et al.* esta especificação é feita em função das distribuições de  $l_x$ ,  $l_y$  e  $l_z$  para cada fácies.

Usando a propriedade da função exponencial segundo a qual

$$\exp(a + b) = \exp a \cdot \exp b$$

ou, genericamente,

$$\exp\left(\sum_i a_i\right) = \prod_i \exp(a_i)$$

observa-se que (23) equivale a:

$$\begin{aligned} \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x} \mid \text{diagramas de cerca}\} &= \frac{1}{Z} \exp U_{\text{cerca}}(\mathbf{x}) \cdot \prod_{b=1}^{N_B} [\exp U(B_b, c_b)] \\ &= \frac{1}{Z} \exp U_{\text{cerca}}(\mathbf{x}) \cdot \prod_{b=1}^{N_B} [\exp U_x \cdot \exp U_y \cdot \exp U_z \cdot \exp U_v] \end{aligned}$$

Como  $U(B_b, c_b) = U_x, U_y$  e  $U_z$  dependem apenas de  $l_x, l_y$  e  $l_z$ , respectivamente, pode-se modelar  $\exp U_x, \exp U_y$  e  $\exp U_z$  diretamente a partir dos histogramas dos comprimentos  $l_x, l_y$  e  $l_z$  para cada fácies.

Em Bratvold *et al.* (1994) é descrita a ferramenta computacional comercial STORM, em que uma variante da modelagem de Fält *et al.* (1991) é implementada para simulação das distribuições de fácies em ambiente com características de mosaico.

Os parâmetros do modelo são:

- distribuições dos comprimentos dos corpos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  para cada fácies
- frequência relativa de cada fácies
- probabilidade de transição entre fácies
- grau de condicionamento das realizações aos diagramas de cerca

### 3.4 Novos Modelos

Tjelmeland (1996) historia as tentativas de utilização de CAMs na modelagem de reservatórios. Aponta as dificuldades das modelagens utilizando os modelos que só contemplam interações de pares de celas – caso típico dos modelos de Ising e Potts – como originários de propriedades de grande escala destes modelos totalmente inadequadas para esta finalidade. Atribui o sucesso destes modelos no contexto da análise de imagens, ao fato de as observações brutas serem conhecidas em toda a área de interesse, corrigindo as propriedades desfavoráveis por condicionamento, enquanto observa que na caracterização de reservatórios os dados são esparsos.

Levanta a possibilidade de que alguns exemplos mostrados na literatura sejam produtos de rodadas de simulação que não atingiram a convergência, mas não cita referências.

Prossegue citando os Campos Aleatórios Semi-Markovianos de Tjelmeland e Holden (1993) como tentativa de superar o problema através da introdução de interações de ordem superior, resultando em modelos mais realistas, porém com problemas de convergência.

O artigo propõe novos modelos de CAMs com interações de ordem superior.

São propostas funções potenciais na forma

$$V_C(x_C) = \begin{cases} \theta_l & \text{se } x_C \in D_l \text{ para } l = 1, \dots, L \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_L)$  é um vetor de parâmetros de dimensão  $L$  e  $D_1, \dots, D_L$  são conjuntos de configurações em uma clique<sup>14</sup>.

Com funções potenciais desta forma, a distribuição conjunta é expressa por

$$\pi(x) = c \cdot \exp \left\{ - \sum_{l=1}^L \theta_l \cdot n_l(x) \right\}$$

onde  $n_l(x)$  é o número de cliques com configurações no conjunto  $D_l$  existente na grade de simulação.

Dois modelos são apresentados:

- Um modelo 2D para barreiras constituídas por folhelhos extensos, à semelhança das barreiras modeladas por Omre *et al.* (1991). Utiliza vizinhança de quarta ordem (60 vizinhos, cliques de 19 celas) em grade hexagonal.
- Um modelo em mosaico 3D utilizando 24 vizinhos para cada cela ( $c = 4$  no esquema da página 22).

<sup>14</sup> O autor utiliza o termo *clique* como sinônimo de clique maximal, ou seja, o maior conjunto de celas mutuamente vizinhas duas a duas existente mediante a definição de vizinhança em uso.

As imagens obtidas possuem aspecto bastante realista, porém o número de parâmetros dos modelos é muito grande e não possuem uma interpretação geométrica clara.

São abordadas alternativas para especificação dos parâmetros dos modelos.

Os tempos de *cpu* foram de 40min para o modelo 2D de 5000 celas e muitas horas para o modelo 3D de 54000 celas<sup>15</sup>.

O algoritmo de Metropolis foi utilizado na simulação.

---

<sup>15</sup> A máquina utilizada é referida como uma estação de trabalho “padrão”. O *software* não é especificado.

# *Capítulo 4*

## *Estimação de Parâmetros*

### 4.1 Introdução

Geralmente as funções potenciais são selecionadas para modelagem em razão de sua forma funcional, ficando a especificação completa do modelo na dependência da escolha de valores adequados para os diversos parâmetros das funções.

Por exemplo, se optou-se pelo modelo de Potts-Strauss isotrópico sobre os 4 vizinhos mais próximos, sabe-se que a forma funcional das funções potenciais será:

$$V_{\{s\}}(\mathbf{x}) = \alpha_i \quad \text{se } \mathbf{x}_s = \xi_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq k \text{ e}$$
$$V_{\{(s,t)\}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \beta & \text{se } \mathbf{x}_s = \mathbf{x}_t \\ -\beta & \text{se } \mathbf{x}_s \neq \mathbf{x}_t \end{cases}$$

onde  $\xi_i$ ,  $1 \leq i \leq k$  são as cores possíveis.

Nesta formulação estão presentes  $k + 1$  parâmetros:  $k$  valores para  $\alpha_i$  mais o valor de  $\beta$ .

A escolha dos parâmetros adequados a um estudo particular pode ser realizada por tentativa, em função de considerações sobre a natureza do fenômeno, ou pode ser realizada através da estimação estatística dos parâmetros correspondentes a uma realização (ou interpretação) tomada como representativa.

Além desta aplicação, as técnicas de estimação de parâmetros encontram utilidade também na implementação de um critério de convergência para o processo de simulação: considera-se atingida a distribuição-alvo quando os parâmetros estimados na imagem aproximam-se o suficiente dos parâmetros especificados no modelo.

A técnica de estimação por Máxima Verossimilhança, preferencialmente utilizada em problemas de estimação, consiste em encontrar o conjunto de valores dos parâmetros correspondente à máxima probabilidade (sob a forma funcional do modelo escolhido) de ocorrência da imagem que serve de base à estimação.

Na aplicação à estimação de parâmetros de CAMs, esta técnica esbarra na necessidade de calcular a função de partição  $Z$  da distribuição de Gibbs correspondente, o que é geralmente inviável do ponto-de-vista computacional, mesmo para imagens de pequeno porte.

Besag (1974) propõe o uso de subconjuntos da imagem, condicionalmente independentes sob a propriedade markoviana, para cálculo do estimador de máxima verossimilhança, em um método chamado de “coding”, através do qual obtém-se um estimador dos parâmetros da imagem para cada subconjunto. O inconveniente deste método é o fato de os estimadores serem obtidos com base em partes da informação disponível (Li, 1996). O número de subconjuntos varia, a depender da estrutura de vizinhança. Com o aumento do número de subconjuntos reduz-se proporcionalmente a informação utilizada por cada estimador. Além disto, não há critério bem fundamentado para combinarem-se os diversos estimadores em um único representativo da imagem disponível.

Uma alternativa consistente e simples, do ponto-de-vista computacional, é o estimador de Máxima Pseudoverossimilhança (Besag, 1974, Ripley, 1992, Frery, 1993).

Esta técnica consiste em encontrar o conjunto  $\Theta$  de valores dos parâmetros que corresponde ao máximo da Função de Pseudoverossimilhança

$$PL_T(\Theta, \mathbf{x}) = \prod_{t \in T} \Pr_{\Theta}(y_t = x_t \mid y_s = x_s, s \neq t)$$

onde  $\mathbf{x}$  é a imagem e  $T$  é um subconjunto adequado de celas da grade  $S$ .

Equivalentemente, o estimador de máxima pseudoverossimilhança pode ser obtido de forma mais conveniente através do máximo do logaritmo da função de pseudoverossimilhança:

$$IPL_T(\Theta, \mathbf{x}) = \sum_{t \in T} \ln \Pr_{\Theta}(y_t = x_t \mid y_s = x_s, s \in \partial_t)$$

A expressão acima já é específica para estimação de parâmetros de CAMs, tendo a propriedade markoviana explicitada, pois  $\partial_t$  é o conjunto das celas vizinhas a  $t$ .

Assim, se  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ , os estimadores podem ser obtidos resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial IPL_T(\Theta, \mathbf{x})}{\partial \theta_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial IPL_T(\Theta, \mathbf{x})}{\partial \theta_k} = 0 \end{cases}$$

Prova-se que o estimador de máxima pseudoverossimilhança converge ao valor real do parâmetro quando o número de celas da imagem tende a infinito.

## 4.2 Estimadores para os modelos de Ising e Potts-Strauss

Frery (1993) desenvolveu expressões destes estimadores para o modelo de Potts-Strauss isotrópico sobre o sistema dos vizinhos mais próximos, sem campo externo. Este modelo é

dado por:

$$\Pr(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \frac{1}{Z_\beta} \exp \left( \beta \sum_{s,t \in S: \|s-t\|=1} \mathbb{I}_{\{x_t\}}(x_s) \right)$$

onde

$$\mathbb{I}_A(v) = \begin{cases} 1 & \text{se } v \in A \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$S$  é o conjunto das celas da grade

$\|s - t\|$  é a distância euclidiana entre as celas  $s$  e  $t$

$Z_\beta$  é a função de partição do modelo

Foram desenvolvidos os estimadores para 3 casos, e por simplificação computacional são visitadas apenas as celas do *corpo* da imagem, conforme ilustrado à página 26, cujo conjunto é aqui designado por  $W$ .

- **Caso Binário:** quando o conjunto das cores possíveis em cada ponto é

$$\Xi_s = \{0, 1\}$$

o estimador  $\hat{\beta}$  é dado por:

$$\begin{aligned} 2(C_4^1 - C_0^0) + C_1^0 + C_3^1 - 2(C_0^0 + C_0^1 + C_4^0 + C_4^1) \gamma(4\hat{\beta}) - (C_1^0 + C_1^1 + C_3^0 + C_3^1) \gamma(2\hat{\beta}) &= 0 \\ 2(C_4^1 - C_0^0) + C_1^0 + C_3^1 - 2(C_0^0 + C_0^1 + C_4^0 + C_4^1) \gamma(4\hat{\beta}) - & \\ - (C_1^0 + C_1^1 + C_3^0 + C_3^1) \gamma(2\hat{\beta}) &= 0 \end{aligned}$$

onde:

$$C_k^l = \# \left\{ s \in W : x_s = l, \sum_{t \in S: \|s-t\|=1} x_t = k \right\}$$

são contadores dos números de celas<sup>16</sup> do corpo da imagem que são da cor  $l$  e possuem  $k$  vizinhos da cor  $l$  e

$$\gamma(t) = \frac{\exp(t)}{1 + \exp(t)}$$

- **Caso Ternário:** quando

$$\Xi_s = \{0, 1, 2\}$$

o estimador de  $\hat{\beta}$  é dado por:

$$\begin{aligned} \sum_{s \in W} v_s(x_s) - \left[ V^4 \frac{4 \exp(4\hat{\beta})}{2 - \exp(4\hat{\beta})} + V^3 \frac{3 \exp(3\hat{\beta}) - \exp(\hat{\beta})}{\exp(3\hat{\beta}) - \exp(\hat{\beta}) - 1} + \right. \\ \left. + V^2 \frac{4 \exp(2\hat{\beta})}{2 \exp(2\hat{\beta}) - 1} + V^1 \frac{2 \exp(\hat{\beta}) + 2}{\exp(\hat{\beta}) - 2} \right] &= 0 \end{aligned}$$

onde, se a vizinhança da cela  $s$  é dada por  $\partial_s = \{t, u, v, w\}$  e se  $x_{\partial_s} = \{x_r : r \in \partial_s\}$ , então:

$$v_s(r) = \# \{q \in \partial_s : x_q = r\}$$

<sup>16</sup> A notação  $\#$  indica que está-se fazendo referência à *cardinalidade* do conjunto, ou seja, ao número de elementos que o compõem.

$$\begin{aligned}
V^4 &= \#\{x_{\partial_s} \subset W : x_t = x_u = x_v = x_w\} \\
V^3 &= \#\{x_{\partial_s} \subset W : x_t = x_u = x_v \neq x_w\} \\
V^2 &= \#\{x_{\partial_s} \subset W : x_t = x_u \neq x_v = x_w\} \\
V^1 &= \#\{x_{\partial_s} \subset W : x_t = x_u \neq x_v \neq x_w\}
\end{aligned}$$

- **Caso Geral:** quando  $\Xi_s = \{0, 1, \dots, k-1\}$ ;  $k \geq 4$ , o estimador de  $\hat{\beta}$  é dado por:

$$\begin{aligned}
\sum_{s \in W} v_s(x_s) - & \left[ V^4 \frac{4 \exp(4\hat{\beta})}{k-1-\exp(4\hat{\beta})} + V^3 \frac{3 \exp(3\hat{\beta}) + \exp(\hat{\beta})}{k-2+\exp(3\hat{\beta})+\exp(\hat{\beta})} + \right. \\
& + V^2 \frac{4 \exp(2\hat{\beta})}{k-2+2 \exp(2\hat{\beta})} + V^1 \frac{2 \exp(\hat{\beta})+2}{k-3+\exp(\hat{\beta})} + \\
& \left. + V^0 \frac{4 \exp(\hat{\beta})}{k-4+4 \exp(\hat{\beta})} \right] = 0
\end{aligned}$$

onde  $v_s(r)$ ,  $V^1$ ,  $V^2$ ,  $V^3$  e  $V^4$  definem-se como no caso ternário e

$$V^0 = \#\{x_{\partial_s} \subset W : x_i \neq x_j, \forall i \neq j\}$$

Vieira (1996) desenvolveu os estimadores de máxima pseudoverossimilhança para o modelo de Potts-Strauss homogêneo e isotrópico com 8 vizinhos.

Como contribuição inédita, no presente trabalho foram desenvolvidos os estimadores de máxima pseudoverossimilhança para os modelos de Potts-Strauss bidimensionais anisotrópicos a dois parâmetros, sem campo externo, definidos sobre o sistema dos 4 vizinhos mais próximos, para os casos de 2, 3 ou mais de 3 cores possíveis.

Também como contribuição inédita, desenvolveu-se um estimador para os parâmetros de uma variante do Modelo de Høiberg *et al.* (1992). A variante em questão difere do modelo original por utilizar o esquema do vizinho mais próximo, quando naquele trabalho foi utilizado esquema de vizinhança mais amplo.

Genericamente, estes estimadores podem ser calculados através do sistema de equações:

$$\begin{cases}
\sum_{t \in T} \left[ \sum_{u \in \partial_t^v} \mathbb{I}_{\{x_u\}}(x_t) - \frac{\sum_{\xi \in \Xi_t} \left[ \sum_{u \in \partial_t^v}(\xi) \exp\left(\beta_h \sum_{u \in \partial_t^h} \mathbb{I}_{\{x_u\}}(\xi) - \beta_v \sum_{u \in \partial_t^v} \mathbb{I}_{\{x_u\}}(\xi)\right) \right]}{\sum_{\xi \in \Xi_t} \left[ \exp\left(\beta_h \sum_{u \in \partial_t^h} \mathbb{I}_{\{x_u\}}(\xi) + \beta_v \sum_{u \in \partial_t^v} \mathbb{I}_{\{x_u\}}(\xi)\right) \right]} \right] \\
\sum_{t \in T} \left[ \sum_{u \in \partial_t^h} \mathbb{I}_{\{x_u\}}(x_t) - \frac{\sum_{\xi \in \Xi_t} \left[ \sum_{u \in \partial_t^h}(\xi) \exp\left(\beta_h \sum_{u \in \partial_t^h} \mathbb{I}_{\{x_u\}}(\xi) - \beta_v \sum_{u \in \partial_t^v} \mathbb{I}_{\{x_u\}}(\xi)\right) \right]}{\sum_{\xi \in \Xi_t} \left[ \exp\left(\beta_h \sum_{u \in \partial_t^h} \mathbb{I}_{\{x_u\}}(\xi) - \beta_v \sum_{u \in \partial_t^v} \mathbb{I}_{\{x_u\}}(\xi)\right) \right]} \right]
\end{cases}$$

onde  $\beta_h$  e  $\beta_v$  são os parâmetros de continuidade correspondentes às direções horizontal (E-W) e vertical (N-S), respectivamente.

O termo *arranjo* será aqui utilizado para fazer referência a uma porção da imagem constituída por uma cela central e seus vizinhos.

Observa-se que cada arranjo identificável na imagem contribuirá com 2 parcelas para os valores de cada uma das equações das derivadas do logaritmo da função de máxima pseudoverossimilhança em relação aos parâmetros.

A primeira parcela independe do valor do parâmetro e corresponde ao número de vizinhos verticais<sup>17</sup> de mesma cor da cela central. Os somatórios destas parcelas para todos os arranjos da imagem serão designados respectivamente por  $S_v$  e  $S_h$ :

$$S_v = \sum_{t \in T} \sum_{u \in \partial_t^v} \mathbb{I}_{\{x_u\}}(x_t)$$

$$S_h = \sum_{t \in T} \sum_{u \in \partial_t^h} \mathbb{I}_{\{x_u\}}(x_t)$$

A segunda parcela de contribuição de cada arranjo é dependente dos valores dos parâmetros mas independe da classe que ocorre na cela central.

Observa-se que arranjos diferentes entre si podem resultar parcelas iguais, e assim sendo é conveniente identificar as configurações pelos valores possíveis de serem assumidos por estas parcelas e agrupá-las para a computação do somatório das contribuições de cada arranjo sobre toda a imagem cujos parâmetros estão sendo estimados.

---

<sup>17</sup> ou horizontais, a depender de a equação corresponder à derivada em relação ao parâmetro vertical ou horizontal, respectivamente.

- O sistema de equações assume a forma:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 S_v - \left[ k_0 \frac{2 \exp(2\hat{\beta}_v + 2\hat{\beta}_h)}{k-1-\exp(2\hat{\beta}_v + 2\hat{\beta}_h)} + \right. \\
 + k_1 \frac{2 \exp(2\hat{\beta}_v)}{k-2+\exp(2\hat{\beta}_v)+\exp(2\hat{\beta}_h)} + k_2 \frac{2 \exp(\hat{\beta}_v + \hat{\beta}_h)}{k-2+2 \exp(\hat{\beta}_v + \hat{\beta}_h)} + \\
 + k_3 \frac{2 \exp(2\hat{\beta}_v)}{k-3+\exp(2\hat{\beta}_v)+2 \exp(\hat{\beta}_h)} + k_4 \frac{2 \exp(\hat{\beta}_v)}{k-3+\exp(2\hat{\beta}_h)+2 \exp(\hat{\beta}_v)} + \\
 + k_5 \frac{\exp(\hat{\beta}_v + \hat{\beta}_h) - \exp(\hat{\beta}_v)}{k-3+\exp(\hat{\beta}_v + \hat{\beta}_h) + \exp(\hat{\beta}_v) + \exp(\hat{\beta}_h)} + k_6 \frac{2 \exp(\hat{\beta}_v)}{k-4+2 \exp(\hat{\beta}_v) - 2 \exp(\hat{\beta}_h)} + \\
 \left. + k_7 \frac{2 \exp(2\hat{\beta}_v + \hat{\beta}_h)}{k-2+\exp(2\hat{\beta}_v + \hat{\beta}_h) + \exp(\hat{\beta}_h)} + k_8 \frac{\exp(\hat{\beta}_v - 2\hat{\beta}_h) + \exp(\hat{\beta}_v)}{k-2-\exp(\hat{\beta}_v - 2\hat{\beta}_h) - \exp(\hat{\beta}_v)} \right] = 0 \\
 \\
 S_h - \left[ k_0 \frac{2 \exp(2\hat{\beta}_v + 2\hat{\beta}_h)}{k-1-\exp(2\hat{\beta}_v + 2\hat{\beta}_h)} + \right. \\
 + k_1 \frac{2 \exp(2\hat{\beta}_h)}{k-2+\exp(2\hat{\beta}_v) + \exp(2\hat{\beta}_h)} + k_2 \frac{2 \exp(\hat{\beta}_v + \hat{\beta}_h)}{k-2+\exp(\hat{\beta}_v + \hat{\beta}_h)} + \\
 + k_3 \frac{2 \exp(2\hat{\beta}_h)}{k-3+\exp(2\hat{\beta}_v) + 2 \exp(\hat{\beta}_h)} + k_4 \frac{2 \exp(2\hat{\beta}_h)}{k-3-\exp(2\hat{\beta}_h) + 2 \exp(\hat{\beta}_v)} + \\
 + k_5 \frac{\exp(\hat{\beta}_v + \hat{\beta}_h) - \exp(\hat{\beta}_v)}{k-3+\exp(\hat{\beta}_v + \hat{\beta}_h) + \exp(\hat{\beta}_v) + \exp(\hat{\beta}_h)} + k_6 \frac{2 \exp(\hat{\beta}_h)}{k-4+2 \exp(\hat{\beta}_v) + 2 \exp(\hat{\beta}_h)} + \\
 \left. + k_7 \frac{\exp(2\hat{\beta}_v + \hat{\beta}_h) + \exp(\hat{\beta}_h)}{k-2+\exp(2\hat{\beta}_v + \hat{\beta}_h) - \exp(\hat{\beta}_h)} + k_8 \frac{2 \exp(\hat{\beta}_v + 2\hat{\beta}_h)}{k-2-\exp(\hat{\beta}_v + 2\hat{\beta}_h) - \exp(\hat{\beta}_v)} \right] = 0
 \end{array} \right. \quad (24)$$

onde:

- $k_0$  corresponde ao número de arranjos em que todos os vizinhos são iguais entre si.
- $k_1$  corresponde ao número de arranjos em que os vizinhos verticais são iguais entre si e os vizinhos horizontais são iguais entre si, porém diferentes dos verticais.
- $k_2$  corresponde ao número de arranjos em que os vizinhos verticais são diferentes entre si e os vizinhos horizontais também são diferentes entre si, porém cada vizinho horizontal possui um vertical igual a si.
- $k_3$  corresponde ao número de arranjos em que os vizinhos verticais são iguais entre si e os vizinhos horizontais são diferentes entre si e diferentes dos verticais.
- $k_4$  corresponde ao número de arranjos em que os vizinhos horizontais são iguais entre si e os vizinhos verticais são diferentes entre si e diferentes dos horizontais.
- $k_5$  corresponde ao número de arranjos em que os vizinhos verticais são diferentes entre si e os vizinhos horizontais são também diferentes entre si, porém existe um vizinho vertical igual a um dos horizontais.
- $k_6$  corresponde ao número de arranjos em que todos os vizinhos são diferentes entre si.
- $k_7$  corresponde ao número de arranjos em que ocorrem 3 vizinhos iguais entre si, 2 deles na vizinhança vertical.
- $k_8$  corresponde ao número de arranjos em que ocorrem 3 vizinhos iguais entre si, 2 deles na vizinhança horizontal.

No caso do modelo binário, os contadores  $k_3$ ,  $k_4$ ,  $k_5$  e  $k_8$  assumem o valor *zero*.

No caso do modelo ternário, o contador  $k_6$  assume o valor *zero*.

### 4.3 Estimador para o modelo de Høiberg *et al.* (1992)

Estimador para variante do modelo de Høiberg *et al.* (1992) definido sobre o sistema de vizinhança de ordem 1, com duas direções de anisotropia.

Reescrevendo o modelo à página 30 de forma conveniente conforme as condições acima, e considerando a variável de interesse como previamente discretizada como múltipla de  $a = 1$ , a expressão do estimador de máxima pseudoverossimilhança para o modelo de Høiberg *et al.* (1992) assume a forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{t \in T} \frac{\sum_{\xi \in \Xi_t} \left[ M_1(\xi \mathbf{x}_{S \setminus \{t\}}) \exp\left(-\sum_{i=1}^4 \beta_i M_i(\xi \mathbf{x}_{S \setminus \{t\}})\right) \right]}{\sum_{\xi \in \Xi_t} \exp\left(-\sum_{i=1}^4 \beta_i M_i(\xi \mathbf{x}_{S \setminus \{t\}})\right)} \\ \sum_{t \in T} \frac{\sum_{\xi \in \Xi_t} \left[ M_2(\xi \mathbf{x}_{S \setminus \{t\}}) \exp\left(-\sum_{i=1}^4 \beta_i M_i(\xi \mathbf{x}_{S \setminus \{t\}})\right) \right]}{\sum_{\xi \in \Xi_t} \exp\left(-\sum_{i=1}^4 \beta_i M_i(\xi \mathbf{x}_{S \setminus \{t\}})\right)} \\ \sum_{t \in T} \frac{\sum_{\xi \in \Xi_t} \left[ M_3(\xi \mathbf{x}_{S \setminus \{t\}}) \exp\left(-\sum_{i=1}^4 \beta_i M_i(\xi \mathbf{x}_{S \setminus \{t\}})\right) \right]}{\sum_{\xi \in \Xi_t} \exp\left(-\sum_{i=1}^4 \beta_i M_i(\xi \mathbf{x}_{S \setminus \{t\}})\right)} \\ \sum_{t \in T} \frac{\sum_{\xi \in \Xi_t} \left[ M_4(\xi \mathbf{x}_{S \setminus \{t\}}) \exp\left(-\sum_{i=1}^4 \beta_i M_i(\xi \mathbf{x}_{S \setminus \{t\}})\right) \right]}{\sum_{\xi \in \Xi_t} \exp\left(-\sum_{i=1}^4 \beta_i M_i(\xi \mathbf{x}_{S \setminus \{t\}})\right)} \end{array} \right. \begin{array}{l} - \sum_{t \in T} M_1(\mathbf{x}) \\ - \sum_{t \in T} M_2(\mathbf{x}) \\ - \sum_{t \in T} M_3(\mathbf{x}) \\ - \sum_{t \in T} M_4(\mathbf{x}) \end{array}$$

onde:

- $\beta_1 = \beta_{0,1} = \beta_{0,-1} = \beta_{N-S}$
- $\beta_2 = \beta_{1,0} = \beta_{-1,0} = \beta_{E-W}$
- $\beta_3 = \Delta_{0,1} = \Delta_{0,-1} = \Delta_{N-S}$
- $\beta_4 = \Delta_{1,0} = \Delta_{-1,0} = \Delta_{E-W}$
- $\xi \mathbf{x}_{S \setminus \{t\}} = \begin{cases} \mathbf{x}(s) & \text{se } s \neq t \\ \xi & \text{se } s = t \end{cases}$  representa uma imagem idêntica à imagem  $\mathbf{x}$ , exceto por ocorrer a cor  $\xi$  na posição  $t$ .
- $M_1(\xi \mathbf{x}_{S \setminus \{t\}}) = |\xi - x_{(i,j-1)}| + |\xi - x_{(i,j+1)}|$
- $M_2(\xi \mathbf{x}_{S \setminus \{t\}}) = |\xi - x_{(i-1,j)}| + |\xi - x_{(i+1,j)}|$
- $M_3(\xi \mathbf{x}_{S \setminus \{t\}}) = \mathbb{I}(x_{(i,j)} = 0 \neq x_{(i,j-1)} \vee x_{(i,j)} \neq 0 = x_{(i,j-1)}) + \mathbb{I}(x_{(i,j)} = 0 \neq x_{(i,j+1)} \vee x_{(i,j)} \neq 0 = x_{(i,j+1)})$
- $M_4(\xi \mathbf{x}_{S \setminus \{t\}}) = \mathbb{I}(x_{(i,j)} = 0 \neq x_{(i-1,j)} \vee x_{(i,j)} \neq 0 = x_{(i-1,j)}) + \mathbb{I}(x_{(i,j)} = 0 \neq x_{(i+1,j)} \vee x_{(i,j)} \neq 0 = x_{(i+1,j)})$

sendo  $\mathbb{I}(\omega)$  a função indicadora conforme definida à página 31.

#### 4.4 Estimador para o modelo de Omre *et al.* (1990)

O modelo de Omre (1990, ver (18), pág. 29) é uma variante anisotrópica do modelo de Ising, que, por sua vez é um caso particular do modelo de Potts-Strauss. Desta forma, o estimador definido em (3) (pág. 45) para a família de vizinhanças de ordem 1, caso binário ( $k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 0$ ), será válido para uma variante do modelo de Omre (1990) quando definido sobre a mesma família de vizinhanças e reescrito na forma de (19) (pág. 30):

$$\Pr(t_{i,j} = 1 \mid t_{k,l}; (k,l) \in \partial_{i,j}) \propto \exp \left[ \beta_h \sum_{t \in \partial_{i,j}^h} \mathbb{I}(t_{i,j} = t_{k,l}) + \beta_v \sum_{t \in \partial_{i,j}^v} \mathbb{I}(t_{i,j} = t_{k,l}) \right]$$

,onde:

- $\beta_h$  e  $\beta_v$  são parâmetros de continuidade relativos às duas direções de anisotropia – horizontal (E-W) e vertical (N-S)

os demais elementos definem-se como em (19).

# Capítulo 5

## Simulação Condicional

### 5.1 Introdução

A simulação de CAMs diretamente a partir de sua distribuição de probabilidades exige o cálculo da constante de normalização. Lembrando que esta constante envolve o cálculo das energias de todas as imagens possíveis (ver pág. 19), conclui-se que a hipótese de simulação direta de CAMs deve ser descartada para todas as situações práticas, pois o número de imagens possíveis pode ser intratavelmente grande, mesmo nos casos mais simples<sup>18</sup>

Por outro lado, a fatoração bayesiana

$$\Pr(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = \Pr(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) \Pr(x_1, \dots, x_{n-1})$$

utilizada nos algoritmos seqüenciais, esbarra no fato de que

$$\Pr(x_{n-1} | x_1, \dots, x_{n-2})$$

não possui obtenção fácil a partir das características locais (Besag, 1974).

Hastings (1970) descreve uma família de algoritmos de simulação iterativos baseados em propriedades de Cadeias de Markov. Estes algoritmos são derivados do trabalho original de Metropolis et al. (1953), e consideram a distribuição que se deseja amostrar como a distribuição de equilíbrio de uma Cadeia de Markov irredutível e aperiódica, cujos estados são imagens possíveis sobre a grade de simulação. Neste procedimento não é exigido o cálculo das probabilidades das imagens, mas apenas o cálculo de razões entre probabilidades de imagens, e neste caso as constantes de normalização ( $Z$  em (10), pág. 19) podem ser eliminadas, garantindo a exequibilidade do procedimento.

Neste capítulo descreve-se o arcabouço genérico dos algoritmos de Hastings como generalização da idéia pioneira de Metropolis *et al.* (1953), incluindo a especificação de cinco algoritmos:

- Algoritmo de Metropolis
- Amostrador de Gibbs
- Algoritmo de Swendsen-Wang
- Algoritmo de Wolff

<sup>18</sup> Por exemplo, em uma grade  $50 \times 50$  o número de imagens binárias possíveis é  $2^{2500}$ .

- Algoritmo de Flinn

São descritas variações incorporando anisotropia e condicionamento, quando possível.

A motivação para abordagem de cinco algoritmos de simulação e suas variações surge na sequência do trabalho em função da necessidade de incorporar características desejáveis aos modelos e sua simulação.

O algoritmo de Metropolis é apresentado por razões históricas, e também porque sua lógica de iteração está presente no algoritmo de Flinn.

O Amostrador de Gibbs (*Gibbs sampler* de Geman e Geman, 1984), também conhecido como “banho térmico” (*heat bath*) (Ripley, 1992), é apresentado por ser um mecanismo genérico para a simulação de CAMs, diretamente a partir das características locais. Pode incorporar anisotropia e condicionamento a ocorrências locais.

O amostrador de Gibbs é um algoritmo do tipo conhecido na Física Estatística como *spin-flip*, devido ao fato de alterar apenas uma cela da grade a cada iteração. Esta característica implica que duas imagens consecutivas da Cadeia de Markov empregada na simulação estarão altamente correlacionadas entre si. Conseqüentemente, grandes alterações da imagem ocorrem lentamente.

Esta característica, associada ao fenômeno de transição de fase existente nos modelos de Ising e Potts-Strauss (ver pág. 26), pode resultar em tempos de processamento extremamente longos para alterações significativas da imagem quando o valor do parâmetro de atratividade estiver próximo ou acima do valor crítico, gerando um estado de convergência aparente, o chamado estado de “quase-equilíbrio” (Ripley, 1992), por sua vez resultante no fenômeno da “lentidão crítica” (*critical slowing down*), (Frery, 1991, Swendsen, 1991).

A melhora dos tempos de processamento para os modelos de Ising e Potts-Strauss sem campo externo constitui a motivação para a introdução dos algoritmos de Swendsen-Wang e Wolff. Ambos são do tipo chamado de *cluster-flip*, pelo fato de alterarem grupos de celas de grade, a cada iteração.

Diversos trabalhos abordam este tema, além dos já citados, incluindo: Wolff (1989), Wang e Swendsen (1990), Frery (1991), Besag e Green (1993), Frery (1993).

Diversos outros métodos, menos restritivos em relação aos modelos, têm sido propostos com a finalidade de acelerar a convergência. Besag e Green (1993) e Ripley (1992) trazem revisões destes métodos.

Um destaque merece ser dado à possibilidade de paralelização computacional de alguns algoritmos. Geman e Geman (1984) afirmam que o Amostrador de Gibbs é 100% paralelizável. Margalit (1989) descreve implementação específica, com algoritmos incluídos, reportando um nível ideal de 40% de paralelização para o método e o equipamento utilizados.

Finalmente, a motivação para a abordagem do algoritmo de Flinn provém do fato de este algoritmo gerar realizações do modelo condicionais ao histograma de cores da imagem inicial (arbitrária). Chessa (1995) demonstra formalmente a validade deste algoritmo, conhecido como do tipo *spin exchange*, por alterar a imagem através da troca das cores de duas celas da grade de simulação.

Uma motivação adicional para a implementação do algoritmo de Flinn é o fato de que o fenômeno de transição de fase não pode, evidentemente, manifestar-se sob este tipo de condicionamento.

## 5.2 O Algoritmo de Metropolis e sua generalização por Hastings

Na formulação de Metropolis, se  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \Xi$  é a variável aleatória a ser simulada (a imagem) e  $\pi$  é a distribuição de probabilidades de  $\mathbf{X}$ , a idéia é construir uma Cadeia de Markov sobre  $\Xi$  (o conjunto das imagens possíveis) que tenha  $\pi$  como distribuição limite.

Observe-se que as versões condicionais destes algoritmos têm por objetivo simular eventos de distribuições definidas sobre um espaço amostral reduzido – um subconjunto de  $\Xi$  –, e desta forma não contrariam a condição de positividade imposta aos CAMs (ver (1), pág 14).

O algoritmo pode ser descrito da seguinte forma:

- (1) Definir  $Q = (q_{i,j})$ , uma matriz de transição simétrica qualquer, tal que gere uma Cadeia de Markov irreduzível e aperiódica em  $\Xi$ . Para que esta condição seja satisfeita, é necessário que

$$q_{ij} > 0 \Leftrightarrow q_{ji} > 0$$

para quaisquer imagens  $i, j$ .

A matriz  $Q$  governará uma sucessão aleatória de imagens, de tal forma que, em um número suficientemente grande de transições, todas as imagens possíveis serão visitadas, cada uma com frequência relativa igual à sua probabilidade limite.

A distribuição limite de probabilidades induzida por  $Q$  pode ser obtida da relação:

$$\pi_Q = \pi_Q Q$$

- (2) Definir uma nova Cadeia de Markov a partir de  $Q$ , governada pela matriz de transição  $P = (p_{ij})$ , dada por:

$$p_{ij} = \min \left( 1, \frac{\pi_j}{\pi_i} \right) q_{ij}$$

e

$$p_{ii} = q_{ii} + \sum_{i \neq j} \max(0, 1 - \pi_j/\pi_i) q_{ij}$$

- (3) Reiterar até que seja atingido algum critério de convergência.

Pode-se demonstrar que a Cadeia de Markov gerada por  $P$  possui  $\pi$  como distribuição limite, independente do ponto onde iniciou a sucessão, pois como em (1),  $\pi = \pi P$ .

A mecânica da simulação será a seguinte:

- A partir de uma imagem  $i$ , qualquer, propor uma nova imagem  $j$ , gerada aleatoriamente de acordo com a probabilidade de transição especificada pela linha  $i$  da matriz de transições  $Q$ .
- Se a imagem  $j$  for diferente da imagem  $i$ , aceitar o novo estado  $j$  se  $\pi_j > \pi_i$  ou aceitá-lo com probabilidade  $1 - \pi_j/\pi_i$  se  $\pi_j < \pi_i$ , caso contrário rejeitar a mudança.
- Reiterar, até que a distribuição de freqüências da Cadeia de Markov esteja “próxima” da distribuição limite desejada.

A partir deste momento podem-se considerar as imagens sucessivas como provenientes da distribuição de probabilidades desejada, e qualquer imagem pode ser tomada como amostra de  $\Xi$  mediante  $\pi$ .

Hastings (1970) generalizou o procedimento para permitir matrizes de transição não simétricas (Ripley, 1992). Nesta formulação, a nova matriz de transição  $P = (p_{ij})$  é dada por:

$$p_{ij} = q_{ij} \rho_{ij}$$

onde

$$\rho_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{1 + \frac{q_{ji} \pi(i)}{q_{ij} \pi(j)}}$$

sempre que  $i \neq j$ .

Os  $\alpha_{ij}$  podem ser quaisquer, desde que

$$0 < \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \leq \min \left\{ 1 + \frac{q_{ij} \pi(i)}{q_{ji} \pi(j)}, 1 + \frac{q_{ji} \pi(j)}{q_{ij} \pi(i)} \right\}$$

Finalmente,

$$p_{ii} = 1 - \sum_{i \neq j} p_{ij}$$

Na prática da simulação de CAMs, a sucessão de imagens é feita de tal forma que imagens sucessivas diferem muito pouco entre si. Em outras palavras, estão altamente correlacionadas.

Se houver interesse em obter amostras independentes, deve-se utilizar um intervalo de amostragem suficientemente grande para garantir a independência entre as imagens, ou, alternativamente, gerar imagens independentes através de procedimentos de simulação independentes<sup>19</sup>.

### 5.3 O Amostrador de Gibbs (*Gibbs Sampler*)

O Amostrador de Gibbs (Geman & Geman, 1984) é um algoritmo da classe dos algoritmos de Hastings no qual duas imagens consecutivas diferem no máximo em uma cela, e o novo valor desta cela é selecionado obedecendo à distribuição de probabilidades ditada pelas características locais (ver (4), pág. 15) da distribuição desejada.

Se a grade de simulação possui  $N$  celas:

$$q_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N} \cdot \Pr(i_s = j_s \mid X_t = i_t, t \in \partial_s) & \text{se as imagens } i \text{ e } j \text{ diferem} \\ 0 & \text{no máximo por 1 cela} \\ & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Esta definição de  $Q$  leva a

$$\rho_{ij} = 1$$

e, conseqüentemente, toda transição proposta com base em  $Q$  será aceita.

Este arcabouço prevê que a cela a ser alterada seja escolhida aleatoriamente dentre as celas da grade, de acordo com uma distribuição uniforme de probabilidades.

Pode-se demonstrar, no entanto, que o algoritmo continua válido no caso em que a cela a ser alterada é escolhida de forma sistemática, através de uma varredura, por exemplo – o que é computacionalmente conveniente (Ripley, 1992).

O Amostrador de Gibbs é de uso restrito à simulação de CAMs, e admite condicionamento das imagens simuladas a pontos amostrais e a proporções entre cores.

O condicionamento a celas de valor conhecido é atingido simplesmente fazendo-se com que as celas condicionantes não sejam visitadas durante a simulação.

O condicionamento às frequências relativas de ocorrência das cores é obtido através de uma variante do Amostrador de Gibbs em que a imagem inicial deve ser gerada com as proporções especificadas. A cada iteração, sucedem-se imagens que diferem entre si por apenas 2 celas,

<sup>19</sup> Alterando a imagem inicial e/ou a semente do gerador de números aleatórios.

cujas cores são trocadas em imagens consecutivas, de tal forma que a proporção inicialmente estabelecida permanece inalterada ao longo do processo.

Condicionamento simultâneo a dados amostrais e a proporções de cores pode ser obtido evitando visitas às celas condicionantes durante as iterações do processo condicionante às frequências, acima descrito.

Demonstrações formais da validade destes métodos de condicionamento são encontradas em Chessa (1995).

## 5.4 Algoritmo de Swendsen-Wang

O algoritmo de Swendsen-Wang propõe uma matriz de transição através da qual, a cada iteração, a imagem é particionada em manchas monocromáticas (de uma única fácies) contínuas cujas cores são alteradas, ou não, de acordo com uma probabilidade uniforme sobre o conjunto das cores possíveis.

Este algoritmo é válido para o modelo de Potts-Strauss sem campo externo.

A descrição formal do algoritmo a seguir consta em Frery (1993).

Se  $\beta$  é o parâmetro de atratividade do modelo de Potts-Strauss isotrópico sem campo externo dado pela expressão (19) à página 30, com  $\alpha_{x_s} \equiv 0$ , então iterar até a convergência:

- (1) Formar um grafo sobre a configuração atual, colocando um arco entre todas as posições vizinhas que exibem o mesmo valor, com probabilidade  $1 - \exp(-\beta)$ .
- (2) Obter o conjunto de todas as componentes conexas do grafo obtido no passo anterior.
- (3) Se os elementos de uma componente conexa  $j$ , formada no passo anterior, têm o valor  $x_j \in \Xi_s$ , substituir esses valores pelo novo valor resultante de observar a variável aleatória  $X \sim \mathcal{U}(\Xi_s)$ . Observe-se que os valores da componente conexa podem não ser alterados.

Uma versão do algoritmo para o modelo anisotrópico pode ser obtida observando-se o lançamento dos arcos referidos no item 1 acima com probabilidades  $1 - \exp(-\beta_i)$  dependentes das direções  $i$  correspondentes aos parâmetros  $\beta_i$ .

Ripley (1992) e Swendsen (1991) reportam ainda adaptações do algoritmo ao modelo de Potts-Strauss com campo externo dado pela expressão (19) à página 30.

Edwards e Sokal (1988) propõem uma generalização deste algoritmo para modelos arbitrários, mas ressaltam que os resultados práticos foram decepcionantes em termos de

melhora dos tempos de convergência, em relação a outras técnicas de implementação muito mais simples.

O algoritmo permite o condicionamento a dados locais, desde que as cores das manchas que contêm celas condicionantes não sejam alteradas.

## 5.5 Algoritmo de Wolff

O algoritmo de Wolff é útil para o modelo de Potts-Strauss sem campo externo e possui uma mecânica semelhante à do algoritmo de Swendsen-Wang:

a cada iteração

- a imagem é particionada da mesma forma que em Swendsen-Wang
- seleciona-se uma única das manchas assim obtidas através de sorteio em que cada mancha tem probabilidade proporcional ao seu tamanho de ser escolhida.
- Altera-se a cor da mancha escolhida selecionando uma das cores restantes com probabilidade uniforme

O procedimento de identificação das manchas e de seleção da mancha a ser alterada é equivalente a obter a mancha correspondente a um ponto escolhido por sorteio.

Considerações análogas às de Swendsen-Wang para anisotropia e condicionamento são válidas.

## 5.6 Algoritmo de Flinn

O algoritmo de Flinn (Cross e Jain, 1983, Ripley, 1987, Ripley, 1992, Chessa, 1995) é particularmente interessante pelo fato de, por construção, não alterar as proporções de cores (fácies) estabelecidas na imagem inicial, gerando condicionamento da imagem às proporções entre as cores através de redução do universo das imagens possíveis.

Consiste em, a cada iteração, selecionarem-se aleatoriamente duas celas, não vizinhas e considerar-se a troca das cores das celas de acordo com a regra do algoritmo de Metropolis: aceitar a troca da imagem atual  $i$  pela nova imagem  $j$  com probabilidade dada pelo  $\min(1, \pi_j/\pi_i)$ , caso contrário rejeitar a troca e reiterar o algoritmo.

## Capítulo 6

### *Alguns exemplos, conclusões e recomendações*

#### 6.1 Exploração de modelos

Um ponto de partida natural para a exploração das possibilidades dos modelos de CAMs na modelagem estocástica de reservatórios de petróleo é a observação do comportamento geral do Modelo de Ising como função do parâmetro de atratividade.

As figuras 10 a 21 mostram uma série de imagens binárias correspondentes a realizações do modelo de Ising para valores do parâmetro no intervalo  $[-0.60, 1.10]$ .

O modelo é homogêneo e isotrópico, sem campo externo.

A vizinhança corresponde ao esquema do vizinho mais próximo ( $c = 1$ ).

As imagens foram geradas através do Amostrador de Gibbs (algoritmo de Geman e Geman) sobre suporte de  $128 \times 128$  celas, partindo de configuração inicial correspondente à ocorrência aleatória independente de uma das cores em cada cela (*temperatura infinita*, na terminologia da Física Estatística).

A convergência do algoritmo foi determinada através do estimador de máxima pseudoverossimilhança como tendo sido atingida após executado um número de iterações igual a 3 vezes o número de iterações já executado no momento em que o estimador atingiu pela primeira vez valor maior ou igual ao do parâmetro do modelo.

Por iteração, entende-se aqui uma visita do algoritmo a cada cela da grade. Ou seja, uma iteração corresponderá, no caso, a  $128 \times 128$  ( $= 16384$ ) propostas de alteração da imagem pela dinâmica do Amostrador de Gibbs.

O valor crítico do parâmetro é dado por

$$\beta_c = \ln(1 + \sqrt{2}) = 0.8814$$

A observação da seqüência de imagens permite algumas conclusões gerais:

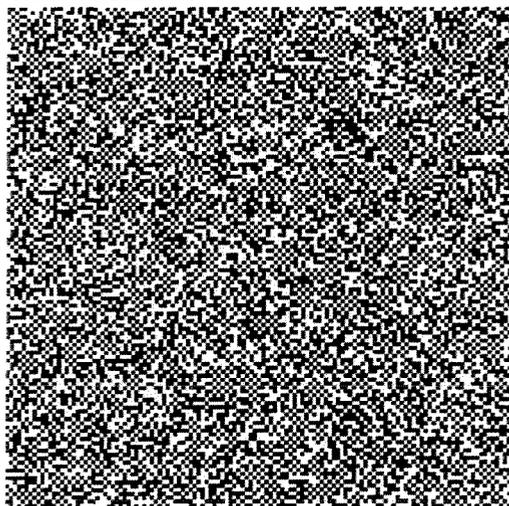
- Valores negativos do parâmetro induzem padrão de repulsão entre celas de mesma cor, gerando configurações que lembram um tabuleiro de xadrez.
- Valores do parâmetro próximos a zero resultam em imagens que sugerem total independência entre vizinhos.

- Valores positivos crescentes induzem aglomerados progressivamente maiores de celas de uma mesma cor, enquanto ainda se preservam proporções aproximadamente iguais entre as cores. “Manchas” de uma cor são salpicadas por celas da outra cor.
- Quando o valor do parâmetro de atratividade ultrapassa o valor crítico, começa a haver predominância de uma das duas cores, até a ocorrência de imagens essencialmente monocromáticas.

Em resumo, para valores subcríticos têm-se imagens com correlação espacial de curto alcance, correspondentes a “manchas” monocromáticas de baixa compacidade, enquanto valores supercríticos desenvolvem correlações de longo alcance, correspondentes a “manchas” de elevada compacidade. Trata-se do fenômeno de Transição de Fase.

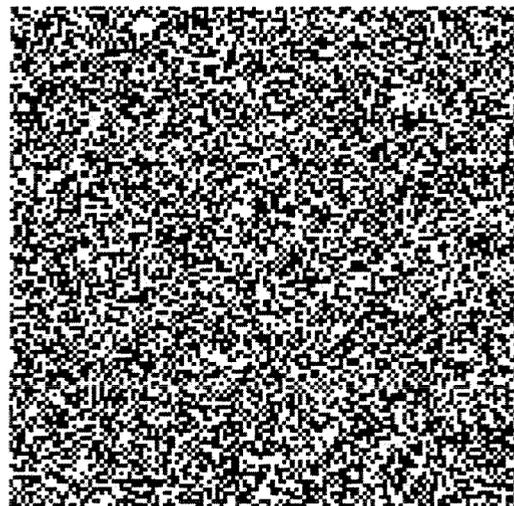
Imagens como aquelas correspondentes aos valores positivos subcríticos trazem algum apelo no sentido da modelagem de sistemas porosos em escala de detalhe, mas a sua baixa compacidade, exceto talvez para valores de *beta* muito próximos ao valor crítico, não aparenta ser de grande utilidade para modelagem de arquitetura de fácies.

Ainda assim, Omre *et al.* (1990) utilizaram uma variante anisotrópica deste modelo, definida sobre vizinhança maior, na modelagem de horizontes cimentados por calcita, em um reservatório arenoso do Mar do Norte.



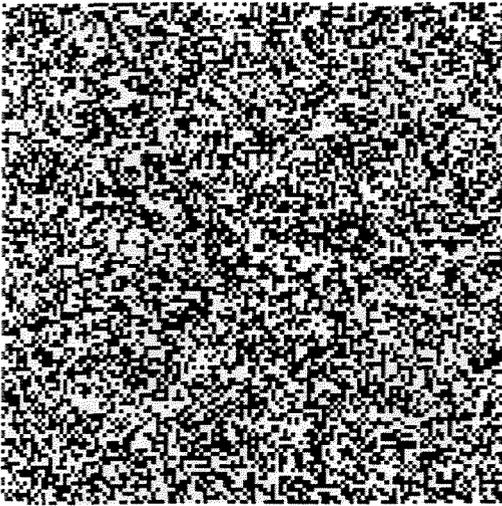
beta = -0.60

Figura 10



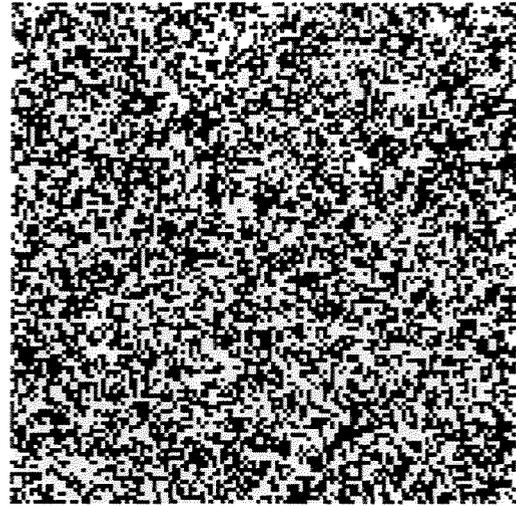
beta = -0.20

Figura 11



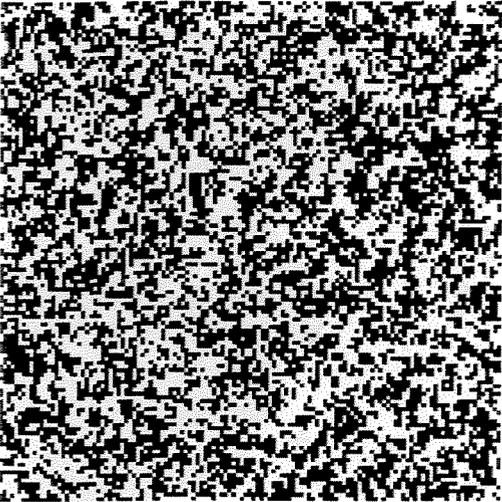
beta = 0.00

Figura 12



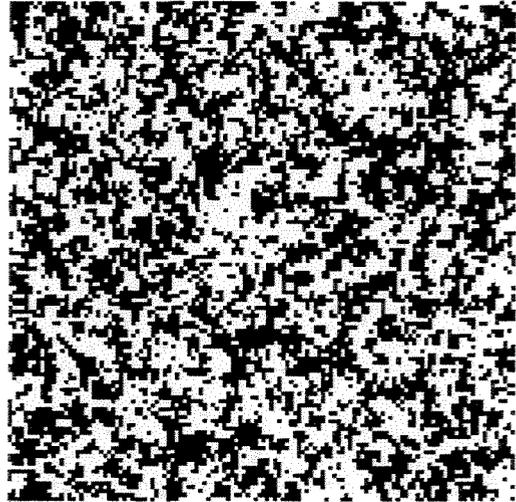
beta = 0.20

Figura 13



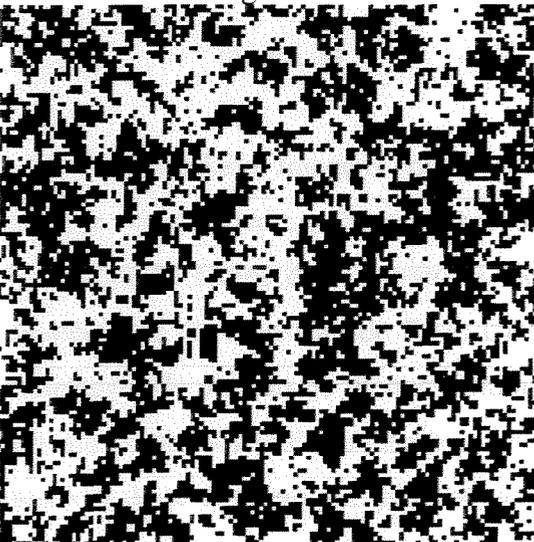
beta = 0.40

Figura 14



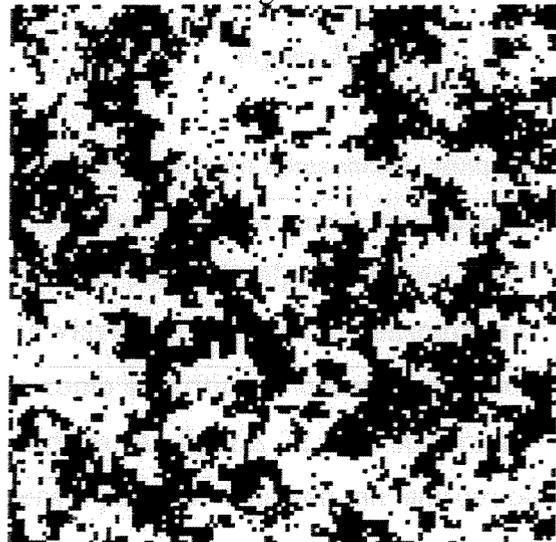
beta = 0.60

Figura 15



beta = 0.70

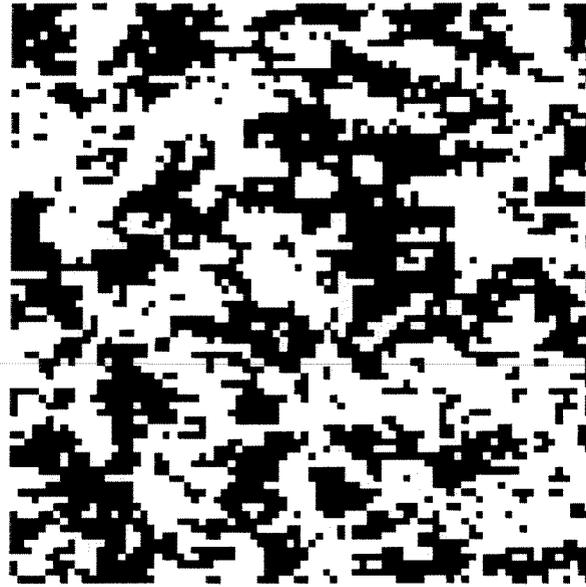
Figura 16



beta = 0.80

Figura 17

observáveis nas imagens com  $\beta_{th} \gg \beta_{tc}$  parecem ser devidas a problemas de convergência, mais do que propriedades consistentes dos campos amostrados.



$\beta_{av} = 0.50$      $\beta_{th} = 1.00$

Figura 22



$\beta_{av} = 0.80$      $\beta_{th} = 1.50$

Figura 23



Figura 24

Outra alternativa é a utilização de condicionamento para inibir a Transição de Fase: se o universo amostral corresponde ao conjunto das imagens com histograma de cores fixo, é claro que o fenômeno não poderá se manifestar. As imagens apresentadas nas figuras 25 e 26 são novamente amostras da variante anisotrópica do modelo de Ising descrito anteriormente, obtidas através do algoritmo de Flinn, com proporções de cores fixadas em 50%. Os resultados têm bom apelo visual, e estes modelos podem encontrar aplicação na modelagem estocástica de reservatórios de petróleo. Observe-se que a fixação das proporções das cores parece impor limites às realizações factíveis. Por exemplo, nas imagens das figuras 25 e 26 o parâmetro  $\beta_{\eta}=3.0$  não foi recuperado pelos estimadores, cujos valores estacionaram em torno de 2.65. Uma exploração mais abrangente do modelo pode vir a evidenciar os limites do método.



Flinn:  $\beta_{av} = 0.50$   
 $\beta_{tah} = 3.00$

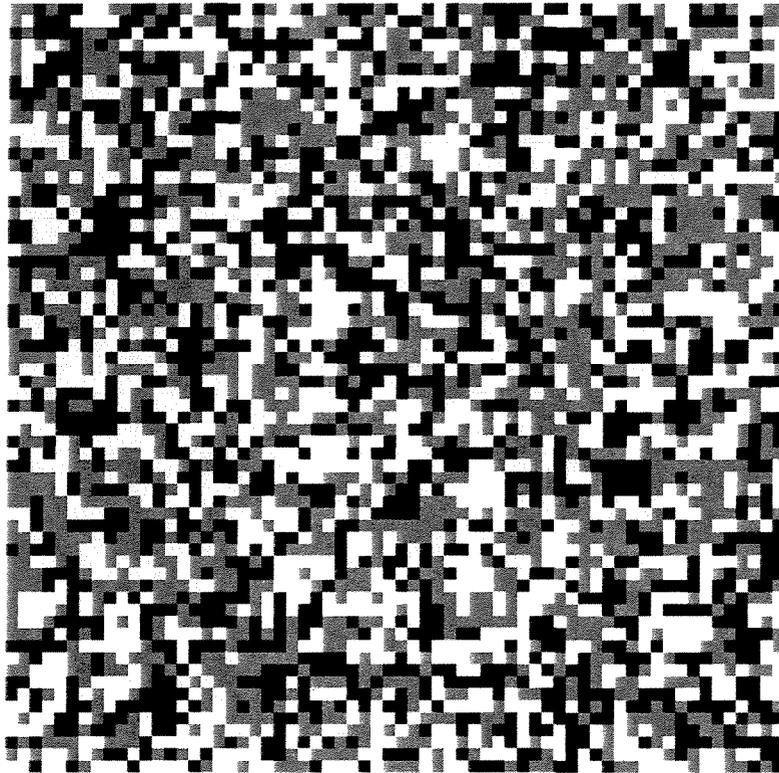
Figura 25



Flinn :  $\beta_{av} = 0.80$   
 $\beta_{tah} = 3.00$

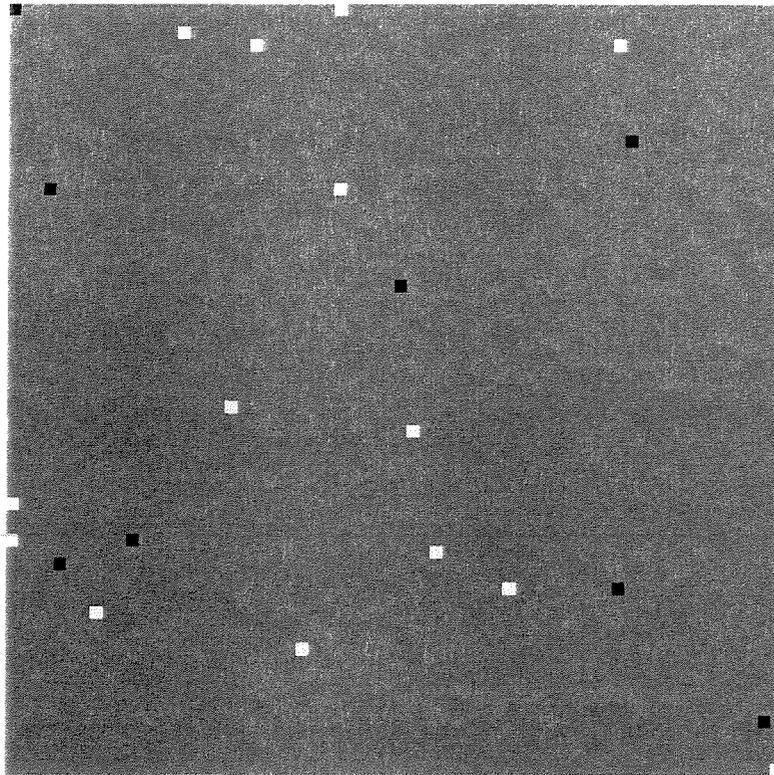
Figura 26

As figuras 27 e 28 apresentam duas imagens correspondentes a seções no nível  $z=15$  de realizações do modelo de Potts-Strauss isotrópico a três cores sobre um suporte cúbico de  $64 \times 64 \times 64$  celas, com estrutura de vizinhança 3D correspondente a  $c=1$  (vizinho mais próximo). O algoritmo de simulação utilizado foi Swendsen-Wang. Observa-se a ocorrência do fenômeno de Transição de Fase. A imagem subcrítica aproxima-se de ruído aleatório puro, enquanto a imagem supercrítica é virtualmente monocromática. Todas as considerações anteriormente feitas sobre este fenômeno, no caso 2D do modelo de Ising permanecem válidas. A adoção de condicionamento a proporções como forma de inibição da Transição de Fase deve produzir resultados positivos também no caso 3D. Recomenda-se experimentação específica.



SW3D: beta = 0.30

Figura 27



SW3D: beta = 1.0

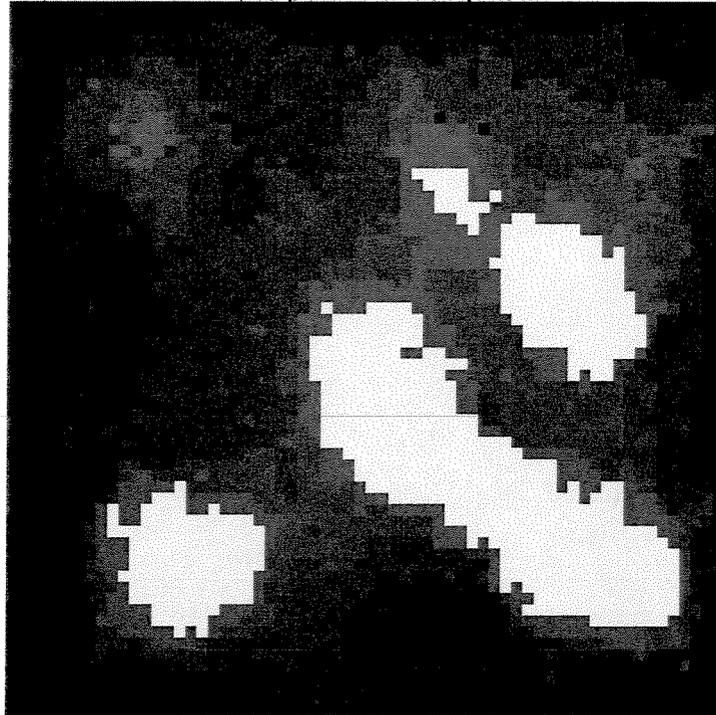
Figura 28

As figuras 29 a 34 mostram realizações condicionais de um modelo idêntico ao modelo de Høiberg *et al.* (1990) exceto pela estrutura de vizinhança. No modelo aqui apresentado foi utilizado o esquema do vizinho mais próximo, com apenas duas direções de anisotropia, enquanto o modelo original contempla um esquema de vizinhança mais amplo, e quatro direções de anisotropia. Neste modelo, descrito em detalhe na seção 3.2.1, à página 30, os parâmetros *beta* controlam a *suavidade* da variação de espessura da camada de folhelho modelada, enquanto os parâmetros *delta* controlam a *continuidade* da camada. O esquema de condicionamento a *pixels* está sumarizado na figura 30, onde as celas em cores verdes e amarelas são condicionantes nestas mesmas cores, enquanto a linha em azul representa trecho do corpo de folhelho condicionado a ser contínuo (de cor verde, ou não-amarelo).

São exploradas diferentes parametrizações do modelo, ora enfatizando suavidade (figura 31), ora enfatizando continuidade (figura 34), ora atribuindo peso elevado a ambos os fatores (figura 29), ora atribuindo pouco peso aos parâmetros (figura 33).

Está claro que este modelo, simulado com o uso do algoritmo de Flinn, inibe a Transição de Fase por condicionamento a proporções, como sugerido acima.

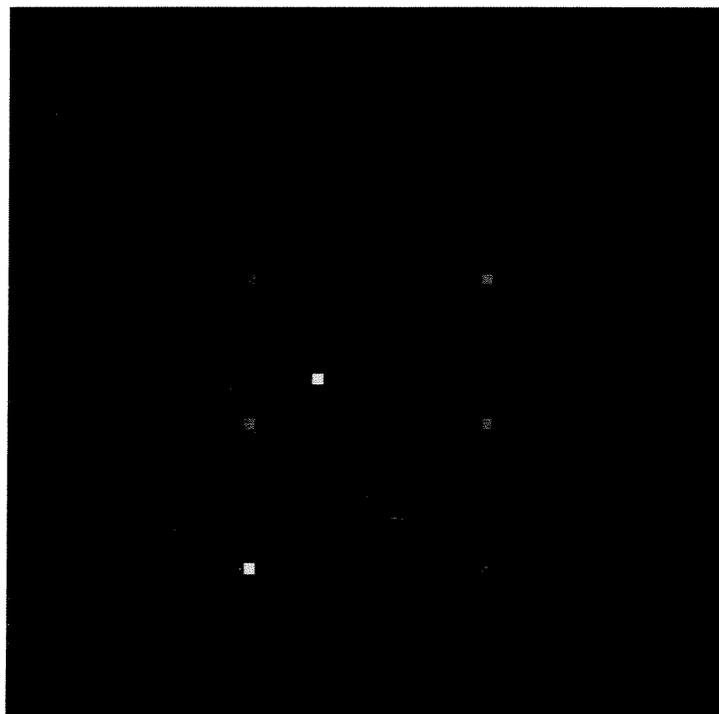
Mais do que um modelo útil em si, o modelo de Høiberg *et al.* (1990) é um exemplo de construção de uma função potencial adequada.



$\beta = 1.0$

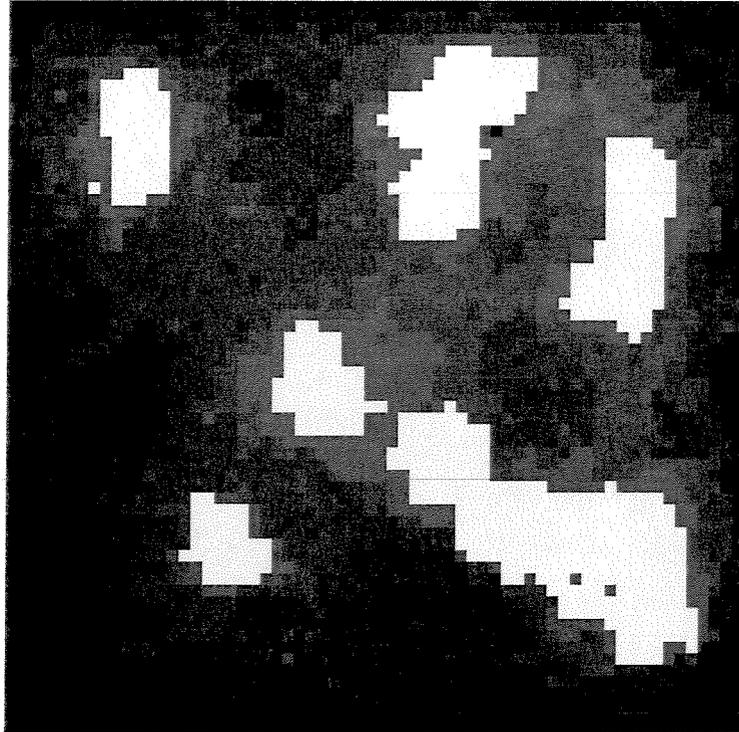
$\delta = 1.0$

Figura 29



Esquema de condicionamento

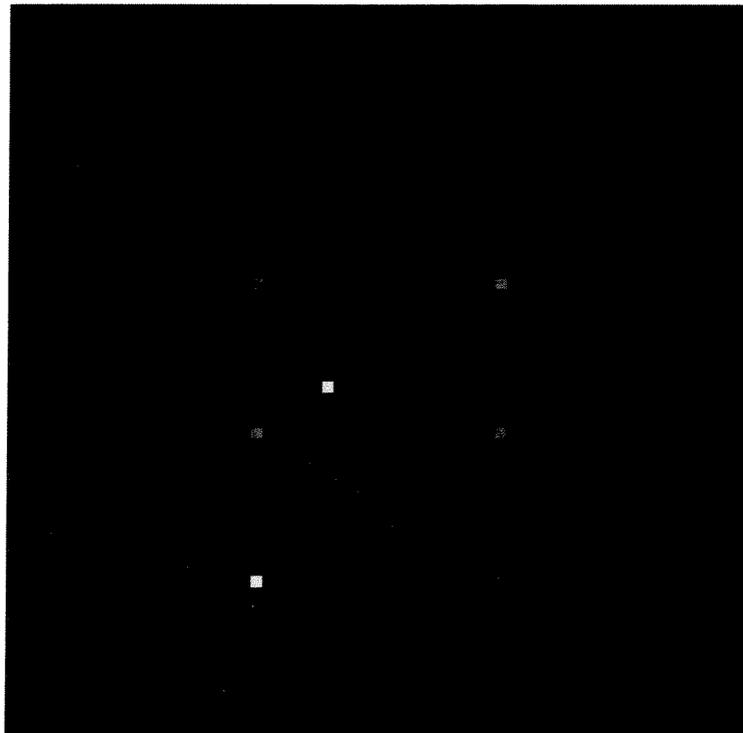
Figura 30



beta = 1.2

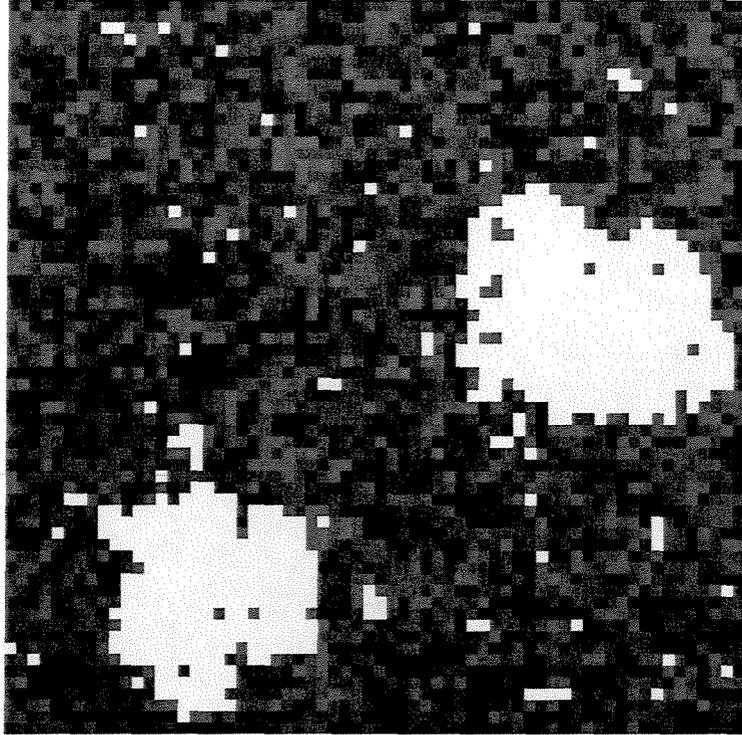
delta = 0.0

Figura 31



Esquema de condicionamento

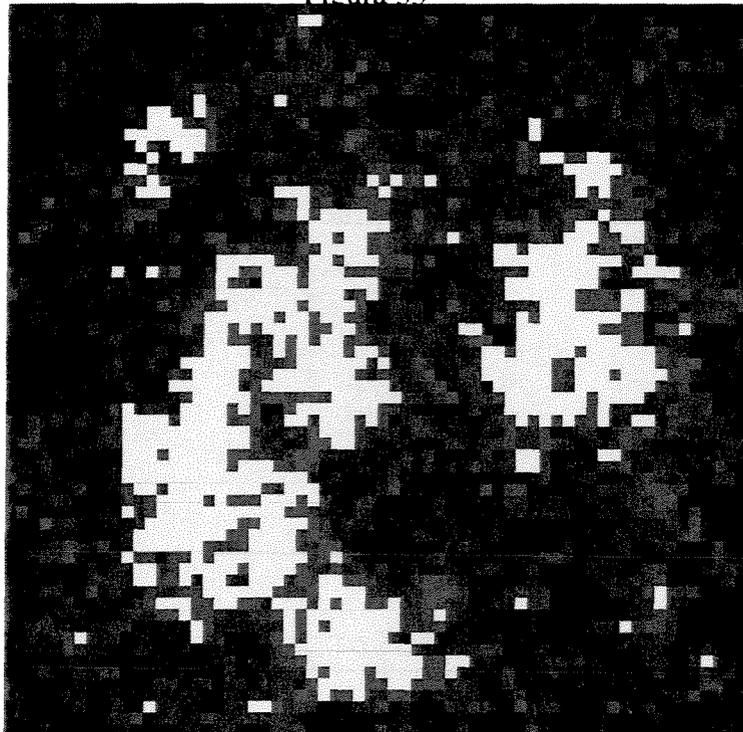
Figura 32



beta = 0.40

delta = 0.20

Figura 33



beta = 0.20

delta = 1.2

Figura 34

## 6.2 Conclusões e Recomendações

A principal conclusão deste trabalho é de que os Campos Aleatórios Markovianos constituem uma classe de modelos estocásticos de enorme potencial para uso em caracterização de reservatórios, devido à sua grande versatilidade.

A realização deste potencial depende de diversos fatores, dentre os quais destacam-se a necessidade de difusão dos conceitos associados à técnica e a necessidade de exploração ampla dos modelos e algoritmos disponíveis, e proposição de novos modelos para finalidades específicas..

O presente trabalho representa um contribuição no sentido da consecução do primeiro destes destaques.

É necessário um trabalho amplo para a realização do segundo destaque. Algumas direções podem ser indicadas para desenvolvimentos futuros:

- Desenvolvimento e divulgação de um sistema computacional adequado ao trabalho com CAMs
- Exploração de modelos com vizinhanças mais amplas
- Exploração de modelos com interações de ordem superior a 2

## Referencias Bibliográficas

- BESAG, J.. Spatial Interaction and the Statistical Analysis of Lattice Systems. **Journal of the Royal Statistical Society B**, n. 2, p. 192-236, 1974. (Discussion).
- , GREEN, P.J.. Spatial Statistics and Bayesian Computation. **Journal of the Royal Statistical Society B**, v. 55, n. 1, p. 25-37, 1993.
- BU, T. , DAMSLETH, E. . Errors and Uncertainties in Reservoir Performance Predictions. **SPE Formation Evaluation**, p. 194-200, Sept. 1996.
- BUSTOS, O. H. , FRERY, A. C. . Markovian Fields as Limits of Markov Chains. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON USE OF COMPUTERS IN SCIENTIFIC AND TECHNICAL RESEARCH, 2. , 1991, Mendoza. **Proceedings....**Mendoza: Editora de la Universidad de Mendoza, 1991, v. 1, p. 85-97
- , OJEDA, S. . **Campos Aleatórios Markovianos en Procesamiento de Imagenes**. (Notas de aula, INPE, São José dos Campos, primeiro período de 1993. Apostila datilografada.)
- BRATVOLD, R. B. , HOLDEN, L. , SVANES, T. , et al. . STORM: Integrated 3D Stochastic Reservoir Modeling Tool for Geologists and Reservoir Engineers. In: EUROPEAN PETROLEUM COMPUTER CONFERENCE, 1994. **Proceedings....** p. 243-261. (SPE 27563).
- CHESSA, A. G. . **Conditional Simulation of Spatial Stochastic Models for Reservoir Heterogeneity**. Delft, Netherlands: Delft University Press, 1995. 173 p. . Tese.
- CROSS, G. R. , JAIN, A. K. . Markov Random Field Texture Models. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. PAMI-5, n. 1, p. 25-39, Jan. 1983.
- DAMSLETH, E. , TJØLSEN, C. B. , OMRE, H. , et al. . A Two-Stage Stochastic Model Applied to a North Sea Reservoir. **Journal of Petroleum Technology**, p. 402-408, Apr. 1992.
- DUBRULE, O.. A Review of Stochastic Models for Petroleum Reservoir. In: ARMSTRONG, M. (Ed.). **Geostatistics**. V. 2 Kluwer Academic Publisher, 1989. P. 493-506.
- , Introducing More Geology in Stochastic Reservoir Modeling. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE GEOESTATÍSTICA, 4. , 1992, Tróia. **Proceedings...** . Kluwer Academic Press, 1993. P. 351-369.
- DEUTSCH, C. , JOURNAL, A. G. . **GSLIB: Geostatistical Software Library and User's Guide**. New York: Oxford University Press, 1992. 340 p. . (Bibliografia: p. 323-334).

- EDWARDS, R. G. , SOKAL, A. D. . Generalization of the Fortuin-Kasteleyn-Swendsen-Wang representation and Monte Carlo algorithm. **Physical Review D**, v. 38, n. 6, p. 2009-2012, Sept. 1988.
- ELLIOT, H. , DERIN, H. , CRISTI, R. et al. . Application of the Gibbs Distribution to Image Segmentation. In: WEGMAN, E. J., DePRIEST, D. J.. **Statistical Image Processing and Graphics**. New York: M. Dekker, 1986. 351 p.. (Statistics Textbooks and Monographs v. 72) ISBN 082476003 .
- FÄLT, L. M. , HENRIQUEZ, A. , HOLDEN, L. , et al. . MOHERES, a Program System for Simulation of Reservoir Architecture and Properties. In: EUROPEAN IOR-SYMPOSIUM, 6. , 1991, Stavanger, Norway. **Proceedings...** . Steering Committee of the European IOR-Symposium, 1991. p. 27-36.
- FARMER, C. L. . The Generation of Stochastic Fields of Reservoir Parameters with Specified Geostatistical Distributions. In: IMA CONFERENCE ON MATHEMATICS OF OIL PRODUCTION. **Proceedings...** . Oxford University Press, 1988.
- FLINN, P. A. . Monte Carlo Calculation of Phase Separation in a Two Dimensional Ising System. **Journal of Statistical Physics**, New York, v. 10, n. 1, p. 89-97, 1974.
- FRERY, A. C. . **Estatística na Análise e na Síntese de Imagens**. Rio de Janeiro: IMPA, Março 1990. 99 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada - Estatística. Informes de Matemática Série D-034-Março/90).
- **Monte Carlo Determination of the Convergence Time of Two Cluster-Flip Algorithms in The Ising Model**. São José dos Campos: INPE, Out. 1991. 6p. (INPE - 5303 - PRE/1708)
- **Algumas Ferramentas Estatísticas na Síntese, Processamento e Análise de Imagens de Radar de Abertura Sintética**. São José dos Campos: INPE, 1993. 228 p. . Tese (Doutorado em Computação Aplicada), (INPE-5548-TDI/534)
- FURTADO, A. L. . **Teoria dos Grafos: Algoritmos**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1973. 155. p. (Ciência da Computação)
- GALLI, A. , BEUCHER, H. . Stochastic Models for Reservoir Characterization: a user-friendly review. In: LATIN AMERICAN AND CARIBBEAN PETROLEUM ENGINEERING CONFERENCE AND EXHIBITION, 5. , 1997, Rio de Janeiro. **Proceedings...** . SPE, 1997. p. 1-11. (SPE 38999).

- GEMAN, S., GEMAN, D. . Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. PAMI-6, n. 6, Nov. 1984.
- HAAS, A. , DUBRULE, O.. Geostatistical Inversion - a Sequential Method of Stochastic Reservoir Modelling Constrained by Seismic Data. **First Break**, v. 12, n. 11, p. 561-569, Nov. 1994.
- HALDORSEN, H. H. , MacDONALD, C. J. . Stochastic Modeling of Underground Reservoir Facies (SMURF). In: ANNUAL TECHNICAL CONFERENCE AND EXHIBITION OF THE SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS, 62. , 1987, Dallas, TX. **Proceedings...** . SPE, 1987. p. 575-589. (SPE 16751).
- HALDORSEN, H. , DAMSLETH, E. . Stochastic Modeling. **Journal of Petroleum Technology**, p. 404-412, Apr. 1990. (SPE Distinguished Author series).
- HARRIS, D. G. . The Role of Geology in Reservoir Simulation Studies. **Journal of Petroleum Technology**, p. 625-632, May 1975.
- HASTINGS, W. K.. Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains, and Their Applications. **Biometrika**, v. 57, p. 97-109, 1970.
- HØIBERG, J. , OMRE, H. , TJELMELAND, H.. A Stochastic Model for Shale Distribution in Petroleum Reservoirs. In: CODATA CONFERENCE ON GEOMATHEMATICS AND GEOSTATISTICS, 2. , 1990, Leeds,UK. **Proceedings....** p. 1-18.
- HOLDEN, L. , OMRE, H. , TJELMELAND, H. . Integrated Reservoir Description. In: SPE EUROPEAN PETROLEUM COMPUTER CONFERENCE, 1992, Stavanger, Norway. **Proceedings...** . SPE, 1992. p. 15-23. (SPE 24261).
- JOHNSON, C. R. , JONES, T. A. . Putting Geology into Reservoir Simulations: A Three-Dimensional Modeling Approach. In: ANNUAL TECHNICAL CONFERENCE AND EXHIBITION OF THE SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS, 63. , 1988, Houston, TX. **Proceedings...** . SPE, 1988. p. 585-594. (SPE 18321).
- JOURNEL, A. G., ISAACS, E. H.. Conditional Indicator Simulation: Application to a Saskatchewan Uranium Deposit. **Math. Geology**, v. 16, n. 7, p. 685-718, 1984.
- . **Fundamentals of Geostatistics in Five Lessons**. Washington, D. C. : American Geophysical Union, 1989. (Short Course in Geology)

- LI, S. Z.. **Markov Random Field Modeling in Computer Vision**. [on line]. Out. 1996. Available from World Wide Web: <[http://ntu.ac.sg/~szli/MRF\\_Book/](http://ntu.ac.sg/~szli/MRF_Book/)>
- MARGALIT, A. . A parallel algorithm to generate a Markov random field image on a SIMD hypercube machine. **Pattern Recognition Letters**, North-Holland, n. 9, p. 263-278, May 1989.
- METROPOLIS, N., ROSENBLUTH, A. W., ROSENBLUTH, A. H., *et al.*, Equations of State Calculations by Fast Computing Machines. **J. Chem. Phys.**, v. 21, p. 1087-1091, 1953.
- OMRE, H. , SØLNA, K. , TJELMELAND, H. , *et al.* . Calcite Cimentation: Description and Production Consequences. In: ANNUAL TECHNICAL CONFERENCE AND EXHIBITION OF THE SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS, 65. , 1990, New Orleans. **Proceedings...** . SPE, 1990. P. 811-823. (SPE 20607).
- , TJELMELAND, H. , Qi, Y. , *et al.* . Assessment of Uncertainty in the Production Characteristics of a Sand Stone Reservoir. In: INTERNATIONAL RESERVOIR CHARACTERIZATION TECHNICAL CONFERENCE, 1991, Tulsa. **Proceedings...** . p. 1-37.
- . Stochastic Models for Reservoir Characterization. In: SKJAEVELAND, S. M. , KLEPPE, J. (Ed.) . **Recent Advances in Improved Oil Recovery Methods for North Sea Sandstone Reservoir**. Stavanger, Norway: Norwegian Petroleum Directorate, 1992. p. 141-149.
- . Modelling of the Spatial Facies Distribution by Markov Random Fields. In: **International Geostatistics Congress**, 5, 1996, Wollong, Australia. Theory and Petroleum Pre-Prints.
- RIPLEY, B. D. . **Stochastic Simulation**. New York: John Wiley & Sons, 1987. 237 p. . (Wiley series in probability and mathematical statistics. Applied probability and statistics), Bibliografia: p. 200-214. ISSN 0271-6356, ISBN 0-471-81884-4..
- . Stochastic Models for the Distribution of Rock Types in Petroleum Reservoirs. In: WALDEN, A. T. , GUTTORP, P. (Ed.). **Statistics in the Environmental & Earth Science**. London: Edward Arnold, 1992, p. 247-282.
- SRIVASTAVA, R. M. . Reservoir Characterization With Probability Field Simulation. In: ANNUAL TECHNICAL CONFERENCE AND EXHIBITION OF THE SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS, 67. , 1992, Washington, DC. **Proceedings...** . SPE, 1992. p. 927-938. (SPE 24753).
- SWENDSEN, R. H. . Acceleration Methods for Monte Carlo Computer Simulations. **Computer Physics Communications**. North-Holland, n. 65, p. 281-288, 1991.

- TJELMELAND, H. , HOLDEN, L.. Semi-Markov Random Fields. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE GEOESTATÍSTICA, 4. , 1992, Tróia. **Proceedings...** . Kluwer Academic Publishers, 1993. P. 1-12.
- , **Modeling of the Spatial Facies Distribution by Markov Random Fields** Internet
- TYLER, K. , SVANES, T. , HENRIQUEZ, A. . Heterogeneity Modeling Used for Production Simulation of a Fluvial Reservoir. **SPE Formation Evaluation**, p. 85-92, June 1994. (SPE 25002).
- VIEIRA, P. R.. **Desenvolvimento de Classificadores de Máxima Verossimilhança Pontuais e ICM para Imagens de Radar de Abertura Sintética.**São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 1996, Dissertação (Mestrado)
- WANG, J.-S. , SWENDSEN, R. H. . Cluster Monte Carlo Algorithms. **Physica A**, North-Holland, n. 167, p. 565-579, 1990.
- WEBER, K. J.. How Heterogeneity Affects Oil Recovery. In: LAKE, L. W., CARROL JUNIOR., H. B. (Ed.). **Reservoir Characterization**. Orlando: Academic Press, 1986. p. 487-544.
- , VAN GEUNS, L. C. . Framework for Constructing Clastic Reservoir Simulation Models. **Journal of Petroleum Technology**, p. 1248-1253, 1296-1297, Oct. 1990. (SPE 19582).
- WOLFF, U. . Comparison Between Cluster Monte Carlo Algorithms in the Ising Model. **Physics Letters B**, North-Holland, v. 228, n. 3, p. 379-382, Sept. 1989.