



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS**

**PROGRAMA EM GEOCIÊNCIAS**

**ÁREA DE ADMINISTRAÇÃO E POLÍTICA**

**DE RECURSOS MINERAIS**

**Frederico Augusto Rosa do Carmo**

**ESTIMATIVA DAS FUNÇÕES DE RECUPERAÇÃO DE  
RESERVAS MINERAIS USANDO CÓPULAS**

Tese apresentada ao Instituto de Geociências  
como parte dos requisitos para obtenção do título  
de Doutor em Ciências, na área de Administração  
e Política dos Recursos Minerais

**Orientador: Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre**

**CAMPINAS - SÃO PAULO**

**Agosto - 2006**

©by Frederico Augusto Rosa do Carmo

## **Catalogo na Publicação elaborada pela Biblioteca do Instituto de Geociências/UNICAMP**

**Frederico Augusto Rosa do Carmo**

**C213c Estimativa das Funções de Recuperação de Reservas Minerais Usando Cópulas  
Frederico Augusto Rosa do Carmo. - Campinas, SP.:[s.n.], 2006.**

**Orientador: Armando Zaupa Remacre  
Tese (Doutorado) Universidade de Campinas,  
Instituto de Geociências.**

**1. Geoestatística. 2. Cópulas. 3. Parametrização de Reservas.  
4. Projeto de Mineração. 5. Validação Cruzada. 6. Mineração.**

**I. Remacre, Armando Zaupa. Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Geociências. III. Estimativa das Funções de Recuperação de Reservas  
Minerais Usando Cópulas.**

**Título em Inglês: Estimation of Recovers Functions of Mineral Reserves Using Copulas.**

**Keywords: - Geostatistics;**

- Copulas;**
- Reserve Parametrization;**
- Mining Project;**
- Cross Validation;**
- Mining;**

**Área de Concentração: Administração e Política de Recursos Minerais**

**Titulação: Doutor em Ciências**

**Banca examinadora:- Armando Zaupa Remacre;**

- João Felipe Coimbra Leite Costa;**
- Giorgio Cesare de Tomi;**
- Rodrigo de Souza Portugal;**
- Denis José Schiozer.**

**Data da defesa: 24/08/2006**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOCIÊNCIAS

**AUTOR: Frederico Augusto Rosa do Carmo**

**ESTIMATIVA DAS FUNÇÕES DE RECUPERAÇÃO DE RESERVAS  
MINERAIS USANDO CÓPULAS**

**ORIENTADOR: Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre**

**Aprovada em: 24 / 08 / 2006**

**EXAMINADORES:**

**Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre - Orientador** \_\_\_\_\_ - **Presidente**

**Prof. Dr. João Felipe Coimbra Leite Costa - UFRGS** \_\_\_\_\_

**Prof. Dr. Giorgio Cesare de Tomi - USP** \_\_\_\_\_

**Prof. Dr. Rodrigo de Souza Portugal - UNICAMP** \_\_\_\_\_

**Prof. Dr. Denis José Schiozer - UNICAMP** \_\_\_\_\_

Dedico este trabalho à minha família, em especial ao amor do meu ♡ Angélica e minhas filhas

Letícia e Natália.

*“ ...devia ter arriscado mais e até errado mais  
ter feito o que eu queria fazer  
queria ter aceitado as pessoas como elas são  
cada um sabe a alegria e a dor que traz no coração...  
Devia ter complicado menos, trabalhado menos  
ter visto o sol se pôr  
devia ter me importado menos com problemas pequenos ...  
queria ter aceitado a vida como ela é  
a cada um cabe alegrias e a tristeza que vier”*

(Sergio Brito - Titãs , Epitáfio)

# Agradecimentos

A Deus por ter-nos dado a oportunidade de estarmos neste plano; ao meu amigo Geden por sempre estar disposto a ajudar; a meu orientador prof. Armando pelos ensinamentos profundos e a severa cobrança dos estudos em geoestatística; a Moacir Cornetti, sempre quebrando o galho; ao Doutor Flávio Moreira pelo apoio e seus comentários de grande valia; ao prof. Rodrigo Portugal pela ajuda; A CVRD pelo apoio; aos demais membros desta banca, professores João Felipe, Giorgio de Tomi e Dennis Schiozer;

A meu amigo Sergio "Serjão" Sacani, sempre ajudando. Aos meus amigos com quem convivi em Campinas, Rui "Zenko" Sansonowski, Pedro "Scooby" Gonçalves, Alexandre "Hortência" Milagres, Gabriel, e outros, que tornaram agradável minha estada em Campinas ;

Agradeço em especial aos meus pais, José Francisco e Marlene, meus sogros, Cirineu e Cenira, por sempre me apoiar nos momentos difíceis.

Meus agradecimentos também escola pública.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Seletividade na Mineração . . . . .	1
1.2	Objetivos . . . . .	5
1.3	Organização da Tese . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Cópuas Estatísticas</b>	<b>7</b>
2.1	Definições Básicas . . . . .	7
2.1.1	Métodos probabilísticos . . . . .	8
2.1.2	Variáveis aleatórias . . . . .	8
2.1.3	Função de distribuição e função de densidade . . . . .	9
2.1.4	Funções aleatórias . . . . .	10
2.1.5	Esperança matemática . . . . .	11
2.1.6	Variância, desvio padrão e momentos . . . . .	11
2.2	Várias variáveis aleatórias . . . . .	13
2.2.1	Probabilidade condicional . . . . .	14
2.2.2	Leis marginais . . . . .	15
2.2.3	Esperança Condicional . . . . .	16
2.2.4	Variância condicional . . . . .	18
2.2.5	Covariância e correlação . . . . .	19
2.3	Medidas de Correlação . . . . .	20
2.3.1	Correlação Linear . . . . .	21
2.4	Correlação Não-Paramétrica . . . . .	23

2.4.1	A medida $\tau$ de Kendall . . . . .	24
2.4.2	A medida $\rho_s$ de Spearman . . . . .	25
2.5	Definições e Propriedades Básicas . . . . .	26
2.5.1	Exemplo: distribuição de Gumbel . . . . .	28
2.6	Cópuas Elementares . . . . .	29
2.6.1	Lei de união associada a cópula . . . . .	29
2.6.2	Leis conjuntas das leis marginais . . . . .	29
2.7	Teoremas e Propriedades . . . . .	30
2.8	Dependência entre os dados . . . . .	33
2.9	Distribuições Bivariadas . . . . .	34
2.9.1	Método da Inversão . . . . .	35
2.10	Cópuas Paramétricas . . . . .	40
2.10.1	Cópuas Archimedianas . . . . .	40
2.10.2	Medidas Associativas . . . . .	43
2.11	Cópuas Gaussianas . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Parametrização de Reservas</b> . . . . .	<b>53</b>
3.1	Geoestatística Mineira . . . . .	53
3.2	Reservas Minerais . . . . .	56
3.3	Reservas Estimadas . . . . .	59
3.4	Geoestatística Não-Linear . . . . .	65
3.4.1	Função tonelagem . . . . .	67
3.4.2	Função Metal Contido . . . . .	68
3.4.3	Função Metal x Tonelagem . . . . .	69
3.4.4	Função Teor Médio . . . . .	71
3.4.5	Esperança Condicional . . . . .	72
3.4.6	Variável Normal Condicionada . . . . .	73

3.4.7	Mudança de Suporte . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Cópula e a Geoestatística</b>	<b>77</b>
4.1	Validação Cruzada . . . . .	77
4.2	A Seletividade das Distribuições . . . . .	86
4.3	Reserva Ideal via Cópulas . . . . .	89
4.4	Comparação com a Simulação Gaussiana Seqüencial . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Função de Transferência</b>	<b>109</b>
5.1	Avaliação de cava final via cópulas . . . . .	109
5.2	Mudança de Suporte via Cópulas . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>127</b>
<b>7</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>129</b>
<b>A</b>	<b>Walker Lake</b>	<b>133</b>
A.1	Simulação Gaussiana Seqüencial . . . . .	136
<b>B</b>	<b>Distribuições empíricas</b>	<b>141</b>
<b>C</b>	<b>Comparação entre Distribuições</b>	<b>145</b>
C.1	Efeito Suporte . . . . .	147
C.2	Efeito Informação . . . . .	149
C.3	Exemplo Teórico . . . . .	151
C.4	Funções de Perdas . . . . .	154
C.4.1	Estimativa por E-Type . . . . .	155
C.4.2	Estimativa pela Mediana . . . . .	156
C.4.3	Estimativa Inter Quartis . . . . .	156
<b>D</b>	<b>Fluxograma da Metodologia da Tese</b>	<b>159</b>
<b>E</b>	<b>Código Fonte</b>	<b>160</b>

# Lista de Figuras

1.1	Distribuição Bivariada dos Teores Verdadeiros ( $Z_v$ ) e Estimados ( $Z_v^*$ ) (JOURNEL e HUIJBREGTS, 1978) . . . . .	3
2.1	Função de distribuição da cópula Logística de Gumbel. À esquerda seu gráfico e à direita suas curvas de nível. . . . .	29
2.2	Simulação de uma cópula, onde as distribuições são uniformes (a) e a transformação da simulação das variáveis para distribuições normais (b) . . . . .	32
2.3	Simulação de duas variáveis normais independentes (a)(correlação igual a zero) transformadas em lognormais com correlação não linear (b) . . . . .	33
2.4	Simulação de duas variáveis dependentes normais (a) transformadas em Lognormais (b), com grau de correlação de 0,90. . . . .	34
2.5	Seqüência para gerar uma distribuição lognormal por meio do método da transformação inversa . . . . .	37
2.6	Dependência entre as variáveis aleatórias Gamma e t . . . . .	38
2.7	Comportamento dos graus dos coeficientes de correlação <i>versus</i> a correlação linear . . . . .	39
2.8	Cópula Frank's para $p = 2$ . . . . .	48
2.9	Cópula Frank's para $p = 4$ . . . . .	48
2.10	Cópula Clayton's para $p = 2$ . . . . .	49
2.11	Cópula Clayton's para $p = 4$ . . . . .	49
2.12	Cópula Gumbel para $p = 2$ . . . . .	50
2.13	Cópula Gumbel para $p = 4$ . . . . .	51

3.1	Dispersão entre teor estimado e teor verdadeiro, mostrando os erros cometidos na estimativa quando se aplica um teor de corte. . . . .	57
3.2	Curva Quantidade de Metal de Walker Lake em diversos suportes. . . . .	60
3.3	Representação da regressão entre o estimado e o real para uma variável com distribuição normal . . . . .	62
3.4	Representação da regressão entre o estimado e o real para uma variável com distribuição lognormal. . . . .	64
3.5	Curva tonelagem $x$ teor de corte de uma função lognormal, para diversos desvios padrões . . . . .	68
3.6	Curva metal contido $x$ teor de corte da função lognormal para diversos desvios padrões	69
3.7	Curva metal contido versus tonelagem da função lognormal, para diversos desvios padrões . . . . .	70
3.8	Curva Teor Médio $x$ teor de corte da função lognormal para diversos desvios padrões	71
3.9	Exemplo de um gráfico de Transformação Gaussiana . . . . .	73
4.1	Validação Cruzada da Variável $V$ de Walker Lake, mostrando que teores baixos são subestimados e teores altos são superestimados . . . . .	79
4.2	Erro da Validação Cruzada . . . . .	81
4.3	Gráfico de dispersão da variável $V$ estimada e os teores reais de Walker Lake, mostrando que teores baixos são subestimados e teores altos são superestimados . . .	81
4.4	Curvas de Parametrização da Estimativa e das Amostras . . . . .	83
4.5	Erro entre as Estimativas e os Dados Reais . . . . .	84
4.6	Benefício de Walker Lake, para a seleção perfeita, para a estimativa e o efetivo obtido pela krigagem . . . . .	86
4.7	Gráfico de Dispersão de Walker Lake, Real vs krigagem (azul) e Cópulas 10.000 pontos simulados (direita) - Cópulas 50.000 pontos simulados (esquerda), com as respectivas esperanças condicionais e seus histogramas . . . . .	90

4.8	Gráfico de Dispersão de Walker Lake, Real vs krigagem (azul) e Cópulas 78.000 dados simulados (cinza), com as respectivas esperanças condicionais e seus histogramas . . .	90
4.9	Curvas de Tonelagem vs teor de Corte (acima) e Quantidade de Metal e Teor Corte (abaixo) . . . . .	91
4.10	Benefício obtido via para os dados reais, krigagem ordinária e cópulas . . . . .	94
4.11	Porcentagem de Tonelagem de blocos classificados erroneamente, comparando o valor real e o valor krigado (vermelho) e a previsão por cópulas (preto). . . . .	95
4.12	Diferenças percentuais de tonelagem nas classificações de minério e estéril entre os dados reais <i>versus</i> krigagem e cópulas. . . . .	96
4.13	Porcentagem de quantidade de metal com seleção errônea, comparando o valor real e o valor krigado (vermelho) e a previsão por cópulas (preto). . . . .	97
4.14	Diferenças percentuais de quantidade de metal nas classificações de minério e estéril entre os dados reais <i>versus</i> krigagem e cópulas. . . . .	98
4.15	Benefício obtido por krigagem ordinária, cópulas, média SGS, 95% de probabilidade de estar acima e 95% de probabilidade de estar abaixo. . . . .	101
4.16	Curvas de parametrização obtidas por krigagem ordinária, cópulas, média SGS, 95% de probabilidade de estar acima e 95% de probabilidade de estar abaixo. . . . .	102
4.17	Benefício obtido por krigagem ordinária, cópulas, média SGS, 85% de probabilidade de estar acima e 85% de probabilidade de estar abaixo . . . . .	104
4.18	Curvas de parametrização obtidas por krigagem ordinária, cópulas, média SGS, 85% de probabilidade de estar acima e 85% de probabilidade de estar abaixo . . . . .	106
5.1	Walker Lake em seção vertical pontual: dados reais (esquerda) e krigagem (direita). . .	110
5.2	Cavas geradas de Walker Lake com seção vertical pontual dados reais e krigagem. . .	112
5.3	Simulação de cópulas com 3 parâmetros de entrada, correlações entre amostras e validação cruzada, amostras no bloco e krigagem e validação cruzada no bloco e krigagem. . . . .	114

5.4	Walker Lake com seção vertical blocos dados reais (esquerda) e krigagem ordinária (direita). . . . .	115
5.5	Cavas geradas de Walker Lake blocos 5x5. . . . .	116
5.6	Seqüenciamento e cava obtida com teor de corte de 65 ppm, via krigagem de blocos 5m x 5m, krigagem (em acima), cópula 1 (no meio) e cópula 2 (em baixo). . . . .	118
5.7	Fluxo de caixa obtido pelo seqüenciamento com teor de corte de 65 ppm, caso fosse conhecido os teores verdadeiros de blocos 5m x 5m. . . . .	119
5.8	Seqüenciamento e cava obtida com teor de corte de 65 ppm, caso fosse conhecido os teores verdadeiros de blocos 5m x 5m. . . . .	120
5.9	Seqüenciamento e cava obtida com teor de corte de 150 ppm, via krigagem de blocos 5m x 5m, krigagem (em acima), cópula 1 (no meio) e cópula 2 (em baixo). . . . .	121
5.10	Fluxo de caixa obtido pelo seqüenciamento com teor de corte de 150 ppm, caso fosse conhecidos os teores verdadeiros de blocos 5m x 5m. . . . .	123
5.11	Seqüenciamento e cava obtida com teor de corte de 150 ppm, caso fosse conhecidos os teores verdadeiros de blocos 5m x 5m. . . . .	123
5.12	Seqüenciamento e cava obtida com teor de corte de 260 ppm, via krigagem de blocos 5m x 5m, krigagem (em acima), cópula 1 (no meio) e cópula 2 (em baixo). . . . .	125
5.13	Seqüenciamento e cava obtida com teor de corte de 260 ppm, caso fosse conhecidos os teores verdadeiros de blocos 5m x 5m. . . . .	126
A.1	Banco de Dados de Walker Lake, Variável $V$ (esquerda) e Variável $U$ (direita) . . . . .	133
A.2	Amostragem da Variável $V$ (esquerda) e da Variável $U$ (direita) . . . . .	134
A.3	Correlação entre as amostras $V$ e $U$ . . . . .	135
A.4	Modelo de Blocos Walker Lake, Variável $V$ (esquerda) e Variável $U$ (direita) . . . . .	135
A.5	Ajuste de variograma e vizinhança de Walker Lake . . . . .	136
A.6	Variograma Ajustado para Simulação Gaussiana Seqüencial . . . . .	139
A.7	Exemplo de algumas simulações gaussianas seqüenciais de Walker Lake . . . . .	140

B.1	Função Empírica dos Dados . . . . .	142
B.2	Histograma das amostras e dos dados simulados . . . . .	142
B.3	Gráfico de dispersão das amostras (esquerda acima), da simulação (direita acima), Esperança Condicional (esquerda abaixo)e todos (direta abaixo) . . . . .	144
D.1	Fluxograma da metodologia aplicada para a correção das curvas de parametrização .	159



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOCIÊNCIAS  
ÁREA ADMINISTRAÇÃO E POLÍTICA DE RECURSOS MINERAIS

ESTIMATIVA DAS FUNÇÕES DE RECUPERAÇÃO DE RESERVAS MINERAIS  
USANDO CÓPULAS

RESUMO

TESE DE DOUTORADO

Frederico Augusto Rosa do Carmo

O objetivo principal desta tese foi desenvolver a metodologia de cópulas aplicada ao problema de estimativas de reservas condicionadas, corrigindo erros de tonelagem e quantidade de minério de um projeto, via uma abordagem diferente da simulação estocástica condicional. É apresentado um resumo teórico que fundamenta o estudo de cópulas. Inicia-se com a apresentação de definições e conceitos importantes da estatística e da probabilidade. Após uma discussão sobre medidas de correlação, é introduzido o conceito de cópulas, desde sua definição e propriedades básicas até o estudo de alguns tipos de cópulas essenciais para a aplicação nesta tese. É discutida toda a fundamentação teórica desenvolvida para o cálculo de recursos recuperáveis. Os conceitos de curvas de tonelagem e teores são introduzidos, pois são a base da parametrização de reservas minerais. É mostrado como a cópula pode ser utilizada num dos pontos principais da geoestatística mineira, principalmente no que diz respeito ao erro das estimativas. Discorre-se primeiramente sobre o conceito de validação cruzada, apresentando a definição de reserva ilusória, ótima e ideal. É definida a reserva ideal utilizando o conceito de cópulas, onde a krigagem, a simulação seqüencial gaussiana e a cópula são comparadas, mostrando as conseqüências da sobreestimativa e da subestimativa em projetos de cava e seqüenciamento na mineração.



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOCIÊNCIAS  
ÁREA ADMINISTRAÇÃO E POLÍTICA DE RECURSOS MINERAIS

ESTIMATION OF RECOVERS FUNCTIONS OF MINERAL RESERVES USING  
COPULAS

ABSTRACT

DOCTOR THESIS

Frederico Augusto Rosa do Carmo

The aim of this thesis was to develop the applied methodology of copulas in the problem of conditional reserves estimation. The copulas have a different approach from sequential gaussian simulation and in this thesis was used to correct the tonnage and ore quantity of a mining project. It is presented a theoretical summary that is the bases to the study of copulas. It is also presented a set of definitions and important concepts of the statistics and the probability. After a discussion about correlation measures, is introducing the concept of copulas, beginning with the definition and basic properties until the study of some types of essential copulas that was applied in this thesis. Whole the theoretical fundamentation is discussed to developed the calculation of recoverable resources. The concepts of tonnage and grades curves are introduced, therefore they are the base of the parametrization of mineral reserves. It is shown how the copulas can be used in the main points of the mining geostatistics, mainly in what concerns the estimation errors. Firstly the cross validation concept is presented and the illusory, best and ideal reserves are defined. The ideal reserves is defined using the concept of copulas, and the results are compared with the kriging and sequential gaussian simulation. With this comparisons is possible shown the consequences of the upper-estimation and under estimation in an open pit projects and sequential mining layout.

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Seletividade na Mineração

Uma mineração apresenta incertezas em todas as suas fases. As incertezas econômicas e geológicas são fatores de maior risco neste tipo de empreendimento, portanto, deve-se ter uma estimativa confiável dos recursos e reservas minerais, independente do tamanho, do tipo ou de sua localização. Essa previsão é necessária pois, uma mineração se difere da maioria dos negócios, visto que o conhecimento do produto é essencialmente baseado em estimativas, ou seja, o que se tem são expectativas de teores e volumes, cujas incertezas só diminuirão no decorrer do projeto.

Para se ter uma idéia de como a incerteza geológica é um fator crítico, VALLEE (2000) citou que em 60 % das minas estudadas, no seu primeiro ano, a taxa média de produção foi 70% menor do que a capacidade projetada. Essas falhas foram causadas por problemas na planta piloto, quantidade e teores de minério.

BURMEISTER (1989) revisou 35 projetos de mineração, e constatou que dois terços desses projetos não conseguiram atingir a meta de produção. Somente dois projetos alcançaram os objetivos em termos de teores. Ele detectou a razão das falhas, como sendo excessiva diluição, técnicas inapropriadas de estimativas, interpretação geológica inadequada e furos amostrados inadequadamente. LASSONDE (1990) mostrou que de 40 projetos de mineração que falharam no

Canadá e nos Estados Unidos entre 1989 e 1990, 29 apresentavam algum erro na estimativa de reservas. Estas falhas representaram uma perda de US\$1.1 bilhões em um total de US\$2.1 bilhões investidos. CLOUT (1990) examinou 25 projetos no Canadá e somente três projetos cumpriram as expectativas. Um exercício similar foi feito por HARQUAIL (1991) atribuindo 20 de 39 falhas a erros de reservas. McCarthy (DOMINY, 2004) mostrou que os problemas encontrados nos estudo de projetos podem ser divididos em: erros geotécnicos (9%), testes metalúrgicos (15%), estimativas de reservas e recursos (17%) e planejamento de mina (32%). Ele estima que os erros ligados diretamente a geologia são aproximadamente de 66%.

O problema central que será abordado nessa tese não é novo. Na verdade, remonta à própria origem da geoestística. D. KRIGE (1951), citado por M. DAVID (1979) já expuseram o problema do viés da estimativa. A importância desta questão é histórica, tanto que o mesmo conceito é o tema central livro de JOURNEL e HUIJBREGTS (1978), cuja capa apresenta o tema exposto. A distribuição bivariada entre o teor verdadeiro e o teor estimado (ver figura 1.1), mostra que a variância entre eles são diferentes. Como as funções de parametrização de reservas são calculadas pela distribuição da estimativa, a priori é introduzido um erro de seletividade, quando se determina um teor de corte. Neste exemplo, nota-se que a área de  $Z_v$  para o mesmo teor de corte  $z_o$  é maior que a área de  $Z_v^*$ , isto indica uma subestimativa. A figura 1.1 mostra que a função  $f(z)$  não é linear, implicando que a correlação entre o valor estimado e o valor real é variável para cada teor de corte. Esta figura quantifica a sobrestimativa e a subestimativa, quando se aplica um determinado teor de corte. Nesta tese, esses conceitos serão por diversas vezes retomados.

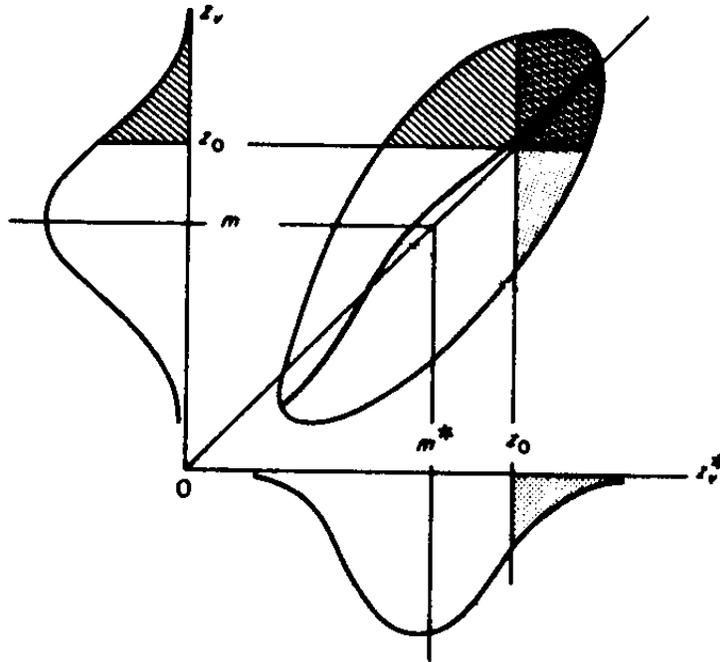


Figura 1.1: Distribuição Bivariada dos Teores Verdadeiros ( $Z_v$ ) e Estimados ( $Z_v^*$ ) (JOURNEL e HUIJBREGTS, 1978)

Nos últimos 40 anos, os estudos em Fontainebleau tem-se concentrado no efeito volume-variância e a escola sul-africana tem seguido o caminho do efeito regressão. Esses estudos de viés condicionais buscam correções para a estimativa de blocos, mas por vias diferentes. O ponto central é que a krigagem ou qualquer outro estimador não possui a mesma variabilidade no suporte a qual se deseja estimar, pois todas as curvas do tipo tonelagem e teor são calculadas pela distribuição da estimativa.

Se o objetivo é uma estimativa pontual, os altos valores provavelmente serão subestimados e os baixos valores serão superestimados. Se o interesse é na média geral, este viés não é importante. Se o interesse é somente em uma extremidade (aplicação de um teor de corte), geralmente os altos valores estarão enviesados. Por exemplo, aplicando um teor de corte econômico, isto irá resultar em uma subestimativa dos teores e uma superestimativa da tonelagem.

Se o objetivo é estimar blocos, o viés reverso irá ocorrer, os blocos com altos teores serão superestimados e blocos com baixos valores serão subestimados. Aplicando teores de corte, o resultado obtido é a superestimativa dos teores e subestimativa da tonelagem.

O impacto desses erros na mineração é crucial, porque toda a operação e planejamento de mina é baseada no exato conhecimento dos teores. Em face da incerteza do teor do bloco, a todo momento, é decidido o destino de um caminhão carregado: ou a carga vai para o britador ou para a pilha de estéril. A escolha errônea desse blocos podem ocasionar basicamente dois resultados: o bloco que possui teor verdadeiro abaixo do teor de corte, ou seja, estéril, pode ser mandado para britador; ou um bloco com teor acima do teor de corte, minério, pode ser mandado para a pilha de estéril. Para cada decisão existe uma consequência em termos de perda.

O teor de corte implica na seletividade da mina e para cada planta de beneficiamento de uma determinada jazida, existe um limiar onde se aplica um teor de corte com o objetivo de maximizar o retorno econômico sobre o fluxo de caixa relativo à vida útil do empreendimento.

Os engenheiros de minas estão interessados na proporção de blocos selecionados pelo teor de corte, que representa a parte do corpo geológico que possui interesse econômico. O teor de corte é primordial no que tange à operação de uma mina, pois todo o projeto de mineração está baseado nas reservas recuperáveis. Para a definição de uma reserva mineral, a interpretação geológica e a estimativa de teores são os fatores de maiores riscos.

Este texto abordará a estimativa de reservas através de métodos geoestatísticos, usando o paradigma proposto por G. MATHERON (1984) que consiste em estimar reservas usando a distribuição bivariada. É proposta uma nova metodologia baseada no uso de cópulas.

Cópuas constituem um método para desenvolver novas famílias de funções aleatórias, dissociando a estrutura de correlação entre as variáveis da distribuição marginal. Em geral, acredita-se que se foram especificadas as duas distribuições marginais e o coeficiente de correlação, uma distribuição bivariada com essas propriedades irá ocorrer. Entretanto, contras-exemplos podem ser vistos em ARMSTRONG e GALLI (2002).

## 1.2 Objetivos

Devido ao exposto, o objetivo principal desta tese foi aplicar a metodologia de cópuas ao problema de estimativas de reservas, corrigindo as curvas de parametrização por um método de simulação, onde a validação cruzada fornece os parâmetros impostos pelo modelo correlação espacial entre os dados reais e a estimativa. Este é o caráter de originalidade deste trabalho.

## 1.3 Organização da Tese

O *Capítulo 2* refere-se a uma revisão bibliográfica sobre cópuas que são ferramentas estatísticas introduzidas por SKLAR em 1959. Elas foram concebidas para resolver o problema probabilístico enunciado por Mauricie FRÉCHET, sobre o relacionamento multidimensional entre as funções probabilísticas e as distribuições marginais. As cópuas são caminhos que especificam uma distribuição conjunta, quando se conhece apenas as distribuições marginais individuais, indentificando quais partes destas distribuições são mais correlacionadas.

O *Capítulo 3* aborda as funções de recuperação (ou gráficos do tipo Tonelagem x Teor) que são um tipo de representação dos resultados obtidos. Eles fornecem informações de ordem quantitativa, envolvendo desde a fase de tomada de decisão pela implantação do empreendimento mineiro, até o controle de teor no dia-a-dia de uma mina. Portanto, faz-se necessário o estudo destas funções, pois elas fornecem informações importantes para o planejamento de estratégias gerenciais e operacionais, que permitem maximizar o benefício do empreendimento mineiro.

O *Capítulo 4* aborda a seletividade das distribuições. A parametrização de reservas seleciona a porção da reserva que poderá ser lavrada economicamente. Tendo isto em mente, MATHERON (1981) apresentou aplicações da validação cruzada, definindo conceitos de reservas e realizando comparações entre elas.

A validação cruzada é um caminho para comparar várias suposições sobre cada modelo de estimativa (desde a escolha do variograma e seus parâmetros ao tamanho da vizinhança de krigagem) ou sobre os dados (valores que não ajustam em sua vizinhança gerando os valores anômalos).

Neste capítulo é introduzida a cópula para o condicionamento das reservas, sendo utilizado o banco de dados de Walker Lake para explanação.

O *Capítulo 5* se dedica a verificar o efeito da aplicação do condicionamento geoestatístico usando cópulas em funções de transferências. A função de transferência mais importante em um projeto de mina à céu aberto é o otimizador de cavas. Foi construído um otimizador de Lerchs e Grossmann 2D no programa matlab e também um sequenciador de cava para verificar o impacto econômico nas tomadas de decisão. No apêndice D, encontra-se um fluxograma que explica a metodologia utilizada.

O *Capítulo 6* trata das conclusões e sugestões para futuros trabalhos.

Todos os programas e figuras desta tese foram feitos no programa Matlab<sup>1</sup> e toda geoestatística foi executada no programa Isatis<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Matlab é uma linguagem técnica de computação, sendo um produto da MathWorks, Inc.

<sup>2</sup>Isatis, programa comercial de geoestatística, Geovariances

## Capítulo 2

# Cópuas Estatísticas

Neste capítulo é apresentado um resumo teórico que fundamenta o estudo de cópuas. Inicia-se com a apresentação de definições e conceitos importantes da estatística e da probabilidade, tais como o espaço de probabilidade, variáveis aleatórias, esperança, variância e covariância. Após uma discussão sobre medidas de correlação, pode-se então introduzir o conceito de cópuas, desde sua definição e propriedades básicas até o estudo de alguns tipos de cópuas essenciais para a posterior aplicação nesta tese.

### 2.1 Definições Básicas

Para a apresentação das ferramentas e resultados básicos na teoria da probabilidade, começamos com o conceito de eventos e espaço amostral. Para tanto, é necessário primeiramente citar os axiomas da teoria de probabilidades.

Axiomas de probabilidade:

1. Uma  $\sigma$ -álgebra sobre um conjunto  $\Omega$  é uma família  $\mathcal{A}$  não vazia de subconjuntos de  $\Omega$  tal que:

(a)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ;

(b) Se  $A \in \mathcal{A}$  então  $A^c \in \mathcal{A}$ ;

(c)  $B_i \in \mathcal{A}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , implica que  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{A}$ .

2. Os elementos  $A$  de uma  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$  são denominados *eventos*. O par ordenado  $(\Omega, \mathcal{A})$  é denominado *espaço amostral*.

3. Uma *probabilidade* sobre  $(\Omega, \mathcal{A})$  é uma função  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as seguintes propriedades:

(a)  $P(A) \geq 0$ , para todo  $A \in \mathcal{A}$ ;

(b)  $P(\Omega) = 1$ ;

(c) Dados  $B_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ , tais que  $B_i \cap B_j = \emptyset$ , para  $i \neq j$ , implicam em

$$P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(B_i).$$

4. Se  $(\Omega, \mathcal{A})$  é um espaço amostral e se  $P$  é uma probabilidade sobre  $(\Omega, \mathcal{A})$  então  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  é um *espaço de probabilidade*.

### 2.1.1 Métodos probabilísticos

As definições relativas aos modelos probabilísticos são especificadas pelo *espaço de probabilidade* (CHAUVET, 1999, LANTUÉJOU, 2002), que pode ser definido como um conjunto  $\Omega$ , juntamente com uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  e uma medida  $P$  nessa  $\sigma$ -álgebra tal que  $P(\Omega)=1$ , onde:

- $\Omega$ , que é o conjunto de todas as possíveis realizações de um modelo, também chamado de *universo*;
- $\mathcal{A}$ , que é um conjunto de eventos, sendo que um evento pode ser definido como uma família de realizações;
- $P$  é a probabilidade medida. É uma função de  $\mathcal{F}$  para os número reais, determinando para cada evento uma probabilidade entre 0 e 1 e precisa satisfazer certas condições, principalmente que  $P(\Omega)=1$ .

### 2.1.2 Variáveis aleatórias

A palavra aleatória tem como origem a palavra latina *aleatorius*, que é relativo a jogo de azar ou aos jogadores, que por sua vez é derivada de *aleator oris*, que significa jogador, que tem origem em *alèa*

*ae*, ou seja, dado de jogar, jogo de dados ou qualquer jogo de azar.

Uma variável aleatória é definida como um expressão numérica associada ao resultado de um fenômeno aleatório. De fato, uma variável aleatória é uma função que relaciona os eventos de um espaço amostral a números reais.

Cada resultado particular não pode ser exatamente previsto, embora se possa descrever o conjunto de todos os resultados possíveis, como sendo o espaço amostral. Dentre os resultados possíveis, não se tem conhecimento suficiente de qual o resultado a ser obtido, embora esses resultados, ao fim de uma longa repetição de observações mostrem uma grande regularidade expressa por meio de frequências estatísticas de ocorrências.

### 2.1.3 Função de distribuição e função de densidade

Seja  $X$  uma variável aleatória, então a *função de distribuição* de  $X$  é definida pela seguinte equação:

$$F_X(x) = P(X \leq x). \quad (2.1)$$

A interpretação da função de distribuição é fornecer qual é a probabilidade da variável aleatória  $X$  ser menor ou igual a um dado valor  $x$ . Uma observação importante a ser feita é que uma variável aleatória está sempre associada a uma função de distribuição. O conhecimento de  $F(x)$  caracteriza completamente  $x$ .

A partir da função de distribuição é possível definir a função de *densidade de probabilidade*, por meio da equação:

$$f(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}, \quad (2.2)$$

isto é, a densidade é a derivada da função de distribuição.

A função densidade de probabilidade fornece a probabilidade relativa da variável aleatória  $X$  ser igual ao valor  $x$ .

#### 2.1.4 Funções aleatórias

Suponha que  $X$  seja uma variável aleatória, então, pode-se definir uma nova variável aleatória  $Y$  da seguinte forma:

$$Y = \varphi(X), \quad (2.3)$$

onde  $\varphi$  é uma função qualquer. A mais simples função aleatória é a combinação afim, onde a variável aleatória  $Y$  é função de  $X$ , por meio da seguinte equação:

$$Y = aX + b, \quad (2.4)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes reais.

As funções aleatórias podem ser classificadas em estacionárias e não-estacionárias. Um processo é dito estacionário se, em qualquer intervalo da função, os dados estatísticos representam toda a função, portanto, qualquer momento da função pode ser analisado, não importando a origem nem o final. Já uma função aleatória não-estacionária está intrinsecamente relacionada com a origem, apresentando sempre uma tendência.

Por exemplo, uma ação na bolsa começa com um certo preço no início da manhã e vai terminar no final do dia com outro valor, sendo que as oscilações do preço no decorrer do dia dependerá do valor inicial e terá uma certa tendência, de alta ou de baixa, dependendo do momento. O mesmo ocorre com os teores de minérios. A variação dos teores é considerada uma função aleatória não-estacionária, pois depende do valor inicial possuindo uma tendência espacial.

### 2.1.5 Esperança matemática

Para uma variável aleatória contínua  $X$  com densidade de probabilidade  $f(x)$ , a esperança matemática é uma quantidade definida por

$$E(X) = \int_D x f(x) dx, \quad (2.5)$$

onde  $D$  é o domínio de definição de  $X$ .

A interpretação da integral anterior é uma média ponderada dos possíveis resultados de  $X$ , com a ponderação dada pela densidade de probabilidade e em termos práticos, representa o valor mais provável. Algumas observações devem ser feitas sobre a esperança matemática:

- (a) A unidade da esperança é a própria unidade da variável aleatória;
- (b) A esperança independe da variável  $x$ ;
- (c) A integral 2.5 pode não existir, isto é, pode não haver esperança para uma variável aleatória;

Algumas propriedades da esperança

1. Linearidade:

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y); \quad (2.6)$$

2. Idempotência:

$$E(E(X)) = E(X); \quad (2.7)$$

3. Esperança de uma função aleatória:

$$E(\varphi(X)) = \int_D \varphi(x) f(x) dx \quad (2.8)$$

### 2.1.6 Variância, desvio padrão e momentos

A partir de uma variável aleatória  $X$ , com valor esperado finito  $\mu = E(X)$ , pode-se construir uma nova variável aleatória  $Z = X - \mu$ , a qual chamamos de variável aleatória centrada, pois seu valor

esperado é nulo.

De maneira análoga, outra variável que pode ser construída é  $Y = (X - \mu)^2$ . Chama-se *variância* de  $X$  a esperança matemática de  $Y$ , que pode ser computada pela equação (2.8), isto é,

$$\text{Var}(X) = E(Y) = \int_D (x - \mu)^2 f(x) dx, \quad (2.9)$$

por meio da observação de que  $Y = (X - \mu)^2 = X^2 - 2\mu X + \mu^2$ , temos que

$$\text{Var}(X) = E(Y) = E((X - \mu)^2) = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$$

Usando a propriedade da linearidade da esperança, segue que

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

e observando que  $\mu = E(X)$ , obtemos

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2, \quad (2.10)$$

que é uma expressão alternativa para a variância.

A variância pode ser interpretada como uma medida de dispersão de valores em torno da média, e também pode ser usada para aferir o quanto a média é representativa em uma variável aleatória. Se a variância é muito alta, então a média, apesar de ser o valor mais provável, é pouco representativa. Ao contrário, se a variância é baixa, a média representa bem os valores resultantes da variável aleatória.

Algumas observações devem ser feitas sobre a variância:

- (a) A unidade da variância é a unidade da variável aleatória ao quadrado;
- (b) A variância independe da variável  $x$ ;
- (c) Assim como a esperança, a variância de uma variável aleatória pode não existir.

Como foi observado no item (a), a variância não possui a mesma unidade da variável aleatória. Por exemplo se  $X$  está em metros,  $Var(X)$  é uma quantidade em metros quadrados. Para resolver esta situação é que se define o *desvio padrão*, que é a raiz quadrada da variância, denotado por

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}. \quad (2.11)$$

Usando o desvio padrão de uma variável aleatória, pode-se definir uma nova variável aleatória

$$\hat{X} = \frac{X - \mu}{\sigma}, \quad (2.12)$$

que é chamada *variável aleatória padronizada*. A operação acima, chamada de *padronização*, é útil para se criar uma variável aleatória adimensional, que mede o número de desvios padrão da variável original em relação à média.

Assim como foram definidas as variáveis  $Z = (x - \mu)$  e  $Y = (X - \mu)^2$ , pode-se definir uma variável com potência genérica  $n$

$$Y_n = (X - \mu)^n.$$

A esperança desta nova variável chama-se de momento de ordem  $n$ . Neste caso, observa-se que a esperança e a variância são momentos de ordem um e dois, respectivamente.

## 2.2 Várias variáveis aleatórias

Em um mesmo problema, pode-se considerar o estudo simultâneo de probabilidade de várias variáveis associadas à medidas distintas. Neste caso, estende-se o conceito de variável aleatória para o vetor aleatório ( $\vec{X}$ ):

$$\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n),$$

que é o agrupamento das variáveis aleatórias  $X_i$ .

A função de distribuição conjunta de um vetor aleatório  $\vec{X}$  é definida como

$$F_{\vec{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n). \quad (2.13)$$

Para um vetor aleatório com função de distribuição  $F_{\vec{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , se existir uma função  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$  tal que

$$F_{\vec{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n.$$

então  $f$  é chamada de *densidade conjunta* do vetor aleatório  $\vec{X}$ .

Pode-se demonstrar que, a partir de uma distribuição conjunta, é possível construir funções de distribuição individuais para cada variável aleatória  $X_k$ . Para isso, basta avaliar o limite da função de distribuição conjunta quando todas as outras variáveis tendem ao infinito

$$F_k(x_k) = \lim_{x_j \rightarrow +\infty} F_{\vec{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \text{para } j = 1, \dots, n; j \neq k.$$

Esta nova função é denominada *distribuição marginal* de  $X_k$ .

A *densidade marginal* de  $X_k$  é obtida por meio da integração da densidade conjunta em todas as variáveis com exceção da  $k$ -ésima variável

$$f(x_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_n) d\xi_1 \cdots d\xi_j \cdots d\xi_n, \quad \text{para } j \neq k.$$

Em particular para o caso de um vetor bidimensional  $\vec{Z} = (X, Y)$ , as expressões para as distribuições marginais são

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F_{\vec{Z}}(x, y), \quad (2.14)$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\vec{Z}}(x, y) \quad (2.15)$$

e para as densidades marginais são

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad (2.16)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (2.17)$$

### 2.2.1 Probabilidade condicional

Em um problema com mais de uma variável aleatória, pode-se observar o comportamento individual de cada variável, quando as outras possuem valores pré-determinados.

Neste caso, a definição da probabilidade condicional é

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (2.18)$$

onde  $P(A|B)$  se lê como probabilidade do evento  $A$  ocorrer dado que o evento  $B$  já ocorreu.

Em termos de uma variável aleatória, usa-se a própria definição de função de distribuição, para se definir a distribuição condicional de  $X$  dado o evento  $B$

$$F_X(x|B) = \frac{F(X \leq x, B)}{P(B)}. \quad (2.19)$$

Para o caso em que  $B$  é um resultado numérico de uma variável aleatória.

### 2.2.2 Leis marginais

Nomeando as leis marginais de leis de probabilidade de  $X$  e  $Y$  separadamente. Evidentemente de acordo com o teorema das probabilidades totais, tem-se:

$$\text{Lei marginal de } X : P(X = x_i) = \sum_{j=1}^q p_{ij} = p_i;$$

$$\text{Lei marginal de } Y : P(Y = y_i) = \sum_{i=1}^p p_{ij} = p_j.$$

Os eventos  $X = x_i$  e  $Y = y_i$  desde que as probabilidades não sejam nulas e definidas ao longo de duas famílias de leis condicionais e sabe-se o valor contido em  $X$  ou em  $Y$ . Lembrando que  $X$  e  $Y$  não são necessariamente variáveis aleatórias, mas variáveis qualitativas, então as leis condicionais podem ser escritas como:

**Leis condicionais de  $X$  se  $Y = y_j$  :**

$$P(X = x_i|Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_j} = \frac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(Y = y_j)}.$$

**Leis condicionais de  $Y$  se  $X = x_i$  :**

$$P(Y = y_j|X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_i} = \frac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(X = x_i)}$$

Assim o teorema de probabilidades totais pode ser escrito de uma segunda forma:

$$P(X = x_i \cap Y = y_j) = \sum_{j=1}^q P(X = x_i | Y = y_j) P(Y = y_j) \quad (2.20)$$

$$= \sum_{i=1}^p P(Y = y_j | X = x_i) P(X = x_i) \quad (2.21)$$

Pela fórmula de Bayes permite-se exprimir uma lei condicional em função de outra:

$$P(X = x | Y = y_j) = \frac{P(Y = y_j | X = x) P(X = x)}{\sum_{i=1}^p P(Y = y_j | X = x_i) P(X = x_i)},$$

e também por:

$$P(Y = y | X = x_i) = \frac{P(X = x_i | Y = y) P(Y = y)}{\sum_{j=1}^q P(X = x_i | Y = y_j) P(Y = y_j)}.$$

A independência entre  $X$  e  $Y$  é:

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j.$$

Isto equivale a dizer que as leis condicionais de  $q$  de  $X$  em relação à  $Y$  (enquanto variam em  $Y$ ) são idênticas. Os mesmos para  $p$  para as leis condicionais de  $Y$  à  $X$ .

### 2.2.3 Esperança Condicional

Suponha que  $Y$  seja uma variável real, e que a variável  $X$  não seja necessariamente uma variável qualitativa. Então, pode-se definir, com algumas reservas, a existência de uma expressão calculável, sendo possível definir a esperança e a variância de  $Y$  em relação a  $X$ . A esperança condicional de  $Y$  dado  $X = x$  é definido por

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y|x) dy. \quad (2.22)$$

Nota-se que  $E(Y|X = x)$  é função de  $x$ , uma vez que para cada valor de  $x$  associa-se o valor  $E(Y|X = x)$ . Sendo assim, pode-se definir  $\varphi(x) = E(Y|X = x)$ , chamada de função de regressão de  $Y$  em  $X$ . Sendo seu gráfico conhecido como momento condicional de  $Y$  em relação  $X$ .

Como  $E(Y|X = x)$  depende dos valores originados em  $X$ , pode-se definir uma variável aleatória com probabilidade  $P(X = x)$  por meio dos valores da esperança condicional  $E(Y|X = x)$ . Portanto, a esperança condicional de uma variável  $Y$  condicionada a  $X$ , denotada por  $E(Y|X)$ , é de fato uma função aleatória da variável  $X$ :

$$\varphi(X) = E(Y|X). \quad (2.23)$$

Esta variável apresenta um certo número de propriedades interessantes. Em primeiro lugar a linearidade como consequência da definição da esperança:

$$E(Y_1 + Y_2|X) = E(Y_1|X) + E(Y_2|X).$$

Especialmente neste caso, a esperança desta variável, é o teorema da esperança total, segundo SAPORTA (1990, p.76):

**Teorema 1** *Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias, sabendo que  $E(Y|X)$  é uma função aleatória de  $X$ , então é possível calcular sua esperança, que é dada por*

$$E(E(Y|X)) = E(Y). \quad (2.24)$$

### Demonstração

Denotando a função aleatória  $\varphi(X) = E(Y|X)$  e usando a definição de esperança matemática de uma função aleatória, temos que

$$\begin{aligned} E(E(Y|X)) = E(\varphi(X)) &= \int \varphi(x) f_X(x) dx \\ &= \int \left[ \int y f_Y(y|x) dy \right] f_X(x) dx \\ &= \int \int y f_Y(y|x) f_X(x) dy dx \\ &= \int y \left[ \int f_Y(y|x) f_X(x) dx \right] dy. \end{aligned}$$

Observando que a integral interna é a expressão da probabilidade total, vem

$$E(E(Y|X)) = \int y f(y) dy = E(Y). \quad (2.25)$$

Este teorema é uma ferramenta muito poderosa para se calcular a esperança matemática de uma lei complicada, por meio de leis condicionais simples.

Pode-se notar que não é necessário conhecer explicitamente a lei de  $Y$ . Sendo  $\psi(X)$  outra variável em função de  $X$ , com  $E[Y\psi(x)|X] = \psi(X)E[Y|X]$ , esta demonstração simples será omitida (REMACRE, 2001).

### 2.2.4 Variância condicional

A variância de uma variável aleatória  $Y$  condicionada a  $X = x$  é denominada *variância condicional* e denotada por  $Var(Y|X = x)$ , é definida por meio da esperança condicional, segundo a equação:

$$Var(Y|X = x) = E[(Y - E(Y|X = x))^2|X = x]. \quad (2.26)$$

Assim como no caso da esperança condicional, a variância condicional também é uma função de  $x$ , portanto pode ser interpretada como uma função aleatória da variável  $X$

$$\psi(X) = Var(Y|X) = E[(Y - E(Y|X))^2 | X].$$

**Teorema 2 (Teorema da variância total)** *A lei resultante é chamada de teorema da variância total:*

$$Var(Y) = E[Var(Y|X)] + Var[E(Y|X)]. \quad (2.27)$$

Portanto, a esperança que usualmente significa a média e a variância de  $Y$  é a soma de dois termos: a média de diversas variâncias condicionais e a variância de diversas médias condicionais.

#### Demonstração

Sabendo que  $E(Y|X)$  é uma função aleatória da variável  $X$ , introduzimos a notação  $Z = g(X) = E(Y|X)$ . Em seguida, pode-se desenvolver a expressão da variância de  $Y$  do seguinte modo

$$Var(Y) = E[(Y - EY)^2] = E[(Y - Z + Z - EY)^2].$$

Desenvolvendo a equação e agrupando  $Y - Z$  e  $Z - EY$ , temos que

$$Var(Y) = E[(Y - Z)^2] + 2E[(Y - Z)(Z - EY)] + E[(Z - EY)^2].$$

Aplicando o teorema da esperança total ao primeiro termo, obtemos

$$E[(Y - Z)^2] = E[E[(Y - Z)^2|X]].$$

que é a esperança da própria variância condicional, i.e.,

$$E[(Y - Z)^2] = E[Var(Y|X)].$$

Observando que no último termo  $EY = E(E(Y|X)) = EZ$ , também pelo teorema da esperança total, segue que

$$E[(Z - EY)^2] = E[(Z - EZ)^2] = Var(Z) = Var(E(X|Y)).$$

O último termo é igual a  $Var[E(Y|X)]$  por definição da variância desde que  $E(Y)$  seja a  $E(Y|X)$ .

Reorganizando a expressão de  $Var(Y|X)$ . Nota-se que  $Var(Y|X)$  não pode ser igualado a  $(Y - E(Y|X))^2$  que são duas variáveis que possuem a mesma esperança. Pode-se verificar que o produto de ambos é um novo condicionamento: a esperança condicional de  $X$  é fixada  $(Y - E(Y|X))(E(Y|X) - E(Y))$  valendo então:

$$E[(Y|X) - E(Y)][E[(Y - E(Y|X))|X]].$$

Porque  $E(Y|X) - E(Y)$  é uma constante.

### 2.2.5 Covariância e correlação

Uma função aleatória  $Z$  é chamada estacionária de segunda ordem se para cada variável  $Z(x)$  ela possui uma média  $m$ , finita, independente de  $x$ .

A covariância centrada em relação à média é definida como

$$Cov(Z, Y) = \sigma_{ZY} = E[(Z - E(X))(Y - E(Y))],$$

se estas esperanças existem e são finitas. Desenvolvendo o produto, obtemos uma expressão alternativa para a covariância

$$\begin{aligned} Cov(Z, Y) &= E[ZY - YE(Z) - ZE(Y) + E(Z)E(Y)] \\ &= E(ZY) - E(Z)E(Y). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Se  $Cov(Z, Y) = 0$ , dizemos que as variáveis  $Z$  e  $Y$  são não-correlacionadas. Se  $Z$  e  $Y$  são independentes e integráveis, então são não-correlacionadas, pois neste caso  $E(ZY) = E(Z)E(Y)$ , mas por outro lado,  $E(ZY) = E(Z)E(Y)$  não implica em independência, ou seja, covariância nula não necessariamente implica independência. Algumas propriedades da covariância são:

a)  $Cov(Z, Z) = Var(Z)$

b)  $Cov(aZ, bY) = abCov(Z, Y)$ .

Se  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  são variáveis aleatórias integráveis, então:

$$\begin{aligned} Var(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov(Z_i, Z_j), \\ &= \sum_{i=1}^n Var(Z_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} Cov(Z_i, Z_j). \end{aligned}$$

Esta fórmula é muito importante na geoestatística, pois na maioria das vezes, são manipuladas combinações lineares do tipo  $Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i$  e para deduzi-la é necessário saber o resultado algébrico:

$$Y^2 = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j Z_i Z_j.$$

Sejam  $Z$  e  $Y$  variáveis aleatórias com variâncias finitas e positivas. O coeficiente de correlação entre  $Z$  e  $Y$ ,  $\rho$  é igual a:

$$\rho(Z, Y) = \frac{Cov(Z, Y)}{\sigma_Z \sigma_Y} = E \left[ \left( \frac{Z - E(Z)}{\sigma_Z} \right) \left( \frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y} \right) \right]$$

## 2.3 Medidas de Correlação

Suponha-se simular duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , modelando a relação ou dependência entre elas. A maneira mais simples, também a mais usada, é por meio de correlação linear. A correlação linear é somente um caso particular de uma medida de dependência estocástica. É uma medida de dependência quando as variáveis aleatórias são distribuições multivariadas normais e também quando as variáveis são distribuídas esfericamente ou elipticamente.

Distribuições elípticas incluem a distribuição normal como um caso especial, e são menos restritivas. Em particular, sob condições elípticas, a função de distribuição multivariada pode ser determinada só com o conhecimento da variância e de suas correlações. Além disso, correlação linear igual a zero não significa que as variáveis aleatórias sejam independentes, a menos que se tenha uma normalidade multivariada.

Um outro problema da correlação linear, é que ela pode ser definida no caso da variância ser finita. Adicionalmente, até mesmo onde correlações estão definidas, as distribuições marginais e correlações, não são suficientes para determinar se a distribuição multivariada é conjunta. Portanto, a correlação não descreve todos os parâmetros da dependência, particularmente nas caudas das distribuições. Uma medida de dependência alternativa conhecida é a cópula. Ela permite extrair a estrutura de dependência, em comum, da função de distribuição. Assim, pode-se separar a estrutura de dependência das funções de distribuições marginais. Isto é extremamente útil, porque é um caminho natural que permite a dependência, estando livre das desvantagens da correlação. Cópula também possui a propriedade de ser invariante para transformações de variáveis aleatórias e/ou funções de distribuições.

### 2.3.1 Correlação Linear

FRANCIS GALTON (1822-1911), foi quem usou pela primeira vez o termo correlação, cujo trabalho influenciou de sobremaneira a estatística. GALTON publicou o livro *Gênio Hereditário*, em 1869, onde aplicou conceitos estatísticos à problemas da hereditariedade. Ele ficou impressionado com a distribuição normal aplicada à área de biologia por QUETELET, que mostrara no livro *O Homem Médio*, que a estatura de dez mil pessoas seguiam uma distribuição normal, ou seja a maioria das pessoas tinha sua estatura em torno da média e que um número, cada vez menor de pessoas, vai sendo encontrado à medida que se afasta da média.

GALTON cunhou o termo regressão quando observou que filhos de homens altos, não são, em

média, tão altos quanto seus pais, enquanto que filhos de homens muito baixos são, em média, mais altos que os pais. Ele concebeu uma forma gráfica de representar as propriedades básicas do coeficiente de correlação. Ele aplicou o seu método de correlação à variações de medidas físicas, por exemplo, mostrou a correlação entre a altura do corpo e o comprimento da cabeça. Seu aluno KARL PEARSON desenvolveu a fórmula matemática, que é usada até hoje e que tem o seu nome em sua homenagem.

Quando se estuda a relação entre duas variáveis  $X$  e  $Y$ , o conceito de covariância é muito importante. Se a variância é uma medida estatística por meio da qual chega-se ao desvio padrão que é uma medida de dispersão, a covariância é uma medida estatística por meio da qual chega-se ao coeficiente de correlação, que mede o grau de associação "linear" entre duas variáveis  $X$  e  $Y$ .

Sendo, então, duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , com valores reais e variância finita. O coeficiente linear de correlação (conhecido como  $\rho_l$ ) entre  $X$  e  $Y$  é:

$$\rho_l(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}. \quad (2.29)$$

Onde  $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$  é a covariância entre  $X$  e  $Y$ . A  $Var(X)$  e  $Var(Y)$  são as respectivas variâncias de  $X$  e  $Y$ . A correlação linear é uma medida de dependência linear. No caso de uma perfeita dependência linear tem-se:  $Y = aX + b$ , seguramente para  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$ . Onde  $\rho_l(X, Y) \pm 1$ . Caso contrário,  $-1 < \rho_l(X, Y) < +1$ .

Além disto a correlação linear possui a seguinte propriedade:

$$\rho_l(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \text{sgn}(\alpha\gamma)\rho_l(X, Y), \quad (2.30)$$

As correlações lineares podem ser manipuladas, por meio de operações lineares. Sendo  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^m$  e sendo  $X$  e  $Y$  vetores aleatórios. Então:

$$Cov(AX + a, BY + b) = ACov(X, Y)B^T.$$

Disto segue, para  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\text{Var}(\alpha^T X) = \alpha^T \text{Cov}(X, X)\alpha.$$

Conseqüentemente, a variância de uma combinação linear é completamente determinada por meio de pares de covariância entre os componentes.

A correlação linear é uma boa medida de dependência para distribuições esféricas, nas quais as variáveis são normais. Porém, para distribuições que ocorrem na área da geociências, não devem ser utilizadas, pois a grande maioria dos fenômenos naturais, apresentam caudas "pesadas" e não são distribuições normais.

## 2.4 Correlação Não-Paramétrica

Correlação não-paramétrica é a incerteza sendo interpretada por um coeficiente linear de correlação  $r$ , de onde são retirados os graus de correlações não-paramétricos, a partir de  $N$  pares de medidas  $(x_i, y_i)$ . A correlação linear não é uma boa medida quando a função de distribuição de probabilidade é desconhecida. Já as medidas de correlações não-paramétricas não necessitam o prévio conhecimento desta função.

O conceito fundamental de correlação não-paramétrica, é que, para cada  $x_i$  substituído por um outro valor, com um grau de correlação entre todos outros valores de  $x_i$ 's da amostra, que são  $1, 2, 3, \dots, N$ , então a lista resultante de valores irá esboçar uma perfeita função de distribuição conhecida. Será uma distribuição uniforme, com valores inteiros entre 1 e  $N$ . Na verdade, melhor que uniforme, desde que cada  $x_i$ 's sejam todos valores distintos, cada inteiro irá ocorrer precisamente uma vez. Se alguns destes  $x_i$ 's possuírem valores idênticos é necessário atribuir todos estes valores à média da correlação dos valores que sejam ligeiramente diferentes. Estas correlações medianas, às vezes, são inteiros ou meio-inteiros. Em todos os casos a soma de todas

as correlações atribuídas tem a mesma soma dos inteiros vindos de 1 até  $N$ , chamados de  $\frac{1}{2}N(N+1)$ .

O mesmo procedimento, é feito para  $y_i$ 's, substituindo cada valor pela correlação entre os  $y_i$ 's da amostra.

Assim, pode-se dizer, que nada impede de se criar medidas estatísticas para detectar correlações uniformes de conjuntos inteiros entre 1 e  $N$ , preservando a possibilidade de amarrar estes graus de correlação. Existem perdas, quando a informação dos números originais é substituída por graus de correlação. É fácil gerar exemplos artificiais onde uma correlação pode ser detectada parametricamente (por exemplo, correlação Linear  $r$ ). Mas não podem ser detectadas não-parametricamente. Tais exemplos paramétricos na vida real são raros. Quando a correlação se mostra presentemente como não-paramétrica, então realmente ela o é (para o nível de certeza escolhido). A correlação não-paramétrica é mais robusta que a correlação linear, mais resistente à variabilidade não planejada dos dados e tem a mesma ordem, pois tem-se o senso de que a mediana é mais robusta que a média.

Dois equivalências não-paramétricas para o coeficiente de correlação linear são a de Spearman ( $\rho_s$ ) e a de Kendall ( $\tau$ ). Se as duas variáveis de interesse são categóricas (Indicatrizes), a estatística não-paramétrica apropriada para testar a relação entre as duas variáveis são o teste de Chi-Quadrado ( $\chi^2$ ) e o Coeficiente Phi ( $\varphi$ ).

### 2.4.1 A medida $\tau$ de Kendall

A medida de correlação de Kendall dos pares de um vetor  $(X, Y)$  de uma variável contínua aleatória, distribuídos de acordo com uma função de distribuição conjunta  $H$ , pode ser definida como a diferença entre a probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância:

$$\tau = \tau(X, Y) = Pr[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - Pr[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]. \quad (2.31)$$

Para demonstrar a lei das medidas de associação, primeiramente define-se a função de concordância  $Q$ , que é a diferença entre a concordância e a discordância entre dois vetores  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$  de variáveis contínuas aleatórias com possíveis diferentes distribuições conjuntas,  $H_1$  e  $H_2$ , mas com marginais comuns  $F$  e  $G$ . Quando esta função depende somente da distribuição de  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$  então existe uma cópula associada a ela.

**Teorema 3** *Sejam  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$  vetores de uma variável aleatória independente com uma função de distribuição conjunta  $H_1$  e  $H_2$ , respectivamente, com marginais conjuntas  $F$  (de  $X_1$  e  $X_2$ ) e  $G$  (de  $Y_1$  e  $Y_2$ ). Sendo  $C_1$  e  $C_2$  as respectivas cópulas de  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$ , então tem-se  $H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y))$  e  $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$ . Chamando  $Q$  da diferença entre a probabilidade de concordância e discordância de  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$ ,*

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

Então

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1. \quad (2.32)$$

### 2.4.2 A medida $\rho_s$ de Spearman

Uma outra medida de associação conhecida é a de Spearman, sendo  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_2)$  e  $(X_3, Y_3)$  três vetores aleatórios independentes com uma função de distribuição conjunta  $H$  (cujas marginais foram definidas em  $F$  e  $G$ ) e a cópula  $C$ . A concordância é definida como a proporção da probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância para dois vetores  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_3)$ , pares de vetores com a mesma marginal, porém um vetor tem uma função de distribuição  $H$ , no qual os outros componentes são independentes:

$$\rho = \rho_{X,Y} = 3(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]). \quad (2.33)$$

Note que a função de distribuição conjunta de  $(X_1, Y_1)$  é  $H(x, y)$ , a função de distribuição conjunta de  $(X_2, Y_3)$  é  $F(x)G(y)$  (desde que  $X_2$  e  $Y_3$  sejam independentes).

**Teorema 4** *Sendo  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias contínuas cuja a cópula é  $C$ . A correlação de Spearman de  $X$  e  $Y$  pode ser escrita como:*

$$\begin{aligned}\rho_{X,Y} = \rho_C &= 3Q(C, \Pi), \\ &= 12 \int \int_{I^2} uv dC(u, v) - 3, \\ &= 12 \int \int_{I^2} C(u, v) du dv - 3.\end{aligned}\tag{2.34}$$

## 2.5 Definições e Propriedades Básicas

O termo “cópula” vem do latim, e se refere a conectar ou unir. Porém, nessa tese, o termo cópula refere-se a conceitos estatísticos que expressam o modo pelo qual as variáveis aleatórias se relacionam. É uma função que combina funções de distribuição univariadas em uma distribuição de probabilidade multivariada.

Cópula é uma ferramenta estatística introduzida por Sklar em 1959. Ela foi desenvolvida, para resolver o problema do espaço métrico probabilístico enunciado por Maurice Fréchet (NELSEN, 1999 e RONCALLI, 2002), que é uma generalização do espaço métrico introduzido pelo próprio Fréchet em 1906. Pode-se definir cópulas como uma função multivariada com distribuições marginais uniformes, definida em um cubo  $[0, 1]^n$ .

Uma cópula bidimensional é uma função  $C$  definida no domínio  $[0, 1] \times [0, 1]$ , e contradomínio  $[0, 1]$  que satisfaz as seguintes propriedades

$$(a) C(u, 0) = C(0, v) = 0;$$

$$(b) C(u, 1) = u \text{ e } C(1, v) = v;$$

(c) Para cada retângulo  $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2] \subset [0, 1]^2$ ,

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0,$$

onde  $u_2 \geq u_1$  e  $v_2 \geq v_1$ .

Por esta definição, nota-se que se uma distribuição  $C$  é uniforme, então  $U$  e  $V$  são variáveis aleatórias com distribuição uniforme. Considerado como um vetor aleatório  $U = (U_1, U_2)$ :

$$C(u, v) = P(U \leq u; V \leq v). \quad (2.35)$$

A imagem de  $U$  é então a unidade quadrática  $[0, 1]^2$ . A propriedade  $C(v, 0) = C(0, z) = 0$  implica que  $P(U_1 \leq 0, U_2 \leq u) = P(U_1 \leq u, U_2 \leq 0) = 0$ . Isto é uma função crescente e as distribuições marginais comuns são uniformes.

O teorema de SKLAR, descrito a seguir, é o resultado mais fundamental para a teoria de cópulas. Basicamente, esse teorema afirma que existe uma função cópula que relaciona uma distribuição multivariada e suas marginais. Para o caso bidimensional, o teorema pode ser enunciado como:

**Teorema de SKLAR 1** *Se  $F$  é uma função com distribuição bidimensional, cujas marginais são  $F_1$  e  $F_2$ . Então existe uma função  $C$  tal que*

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \quad (2.36)$$

*Se  $F_1$  e  $F_2$  são contínuas, então a cópula  $C$  é unicamente determinada com a imagem de  $F_1 \times F_2$ .*

*Por outro lado, se  $C$  é uma cópula e as funções  $F_1$  e  $F_2$  são funções de distribuição unidimensionais, então a função  $F(x_1, x_2)$  definida pela equação (2.36) é uma função de distribuição bidimensional com marginais  $F_1$  e  $F_2$ .*

**Demonstração:** A demonstração deste teorema pode ser encontrada em, NELSEN (1999, p. 15), RONCALLI (2002, p.6) e LINDSKOG (2000, p.4).

Este teorema é muito importante, pois, por meio dele, pode-se associar qualquer distribuição bidimensional à uma cópula. Tendo, portanto, uma distribuição canônica da própria distribuição.

Por um lado, tem-se as marginais  $F_1$  e  $F_2$  que são denominadas direções unidimensionais. Por outro, tem-se a cópula que permite a junção destas marginais, expressando a dependência entre as direções unidimensionais. Assim, o teorema de Sklar pode ser utilizado para construir distribuições bidimensionais.

### 2.5.1 Exemplo: distribuição de Gumbel

No que se segue, apresenta-se um exemplo da utilização do teorema de Sklar para a construção de uma cópula por meio da distribuição bidimensional denominada *distribuição Logística de Gumbel*:

$$F(x_1, x_2) = (1 + e^{-x_1} + e^{-x_2})^{-1}$$

definido em  $\mathbb{R}^2$ . Pode-se notar que as marginais são

$$F_1(x_1) \equiv \lim_{x_2 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) = (1 + e^{-x_1})^{-1}$$

$$F_2(x_2) \equiv \lim_{x_1 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) = (1 + e^{-x_2})^{-1}.$$

Definindo-se  $u_1 = F_1(x_1)$  e  $u_2 = F_2(x_2)$ , pode-se calcular os quantis das funções acima (ver Figura 2.1)

$$F_1^{-1}(u_1) = \ln u_1 - \ln(1 - u_1)$$

$$F_2^{-1}(u_2) = \ln u_2 - \ln(1 - u_2).$$

Podendo ser deduzida a função:

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) \\ &= F(\ln u_1 - \ln(1 - u_1), \ln u_2 - \ln(1 - u_2)) \\ &= \left(1 + \frac{1 - u_1}{u_1} + \frac{1 - u_2}{u_2}\right)^{-1} \\ &= \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - u_1 u_2}, \end{aligned}$$

cujos gráfico e curvas de nível podem ser observados na Figura 2.1.

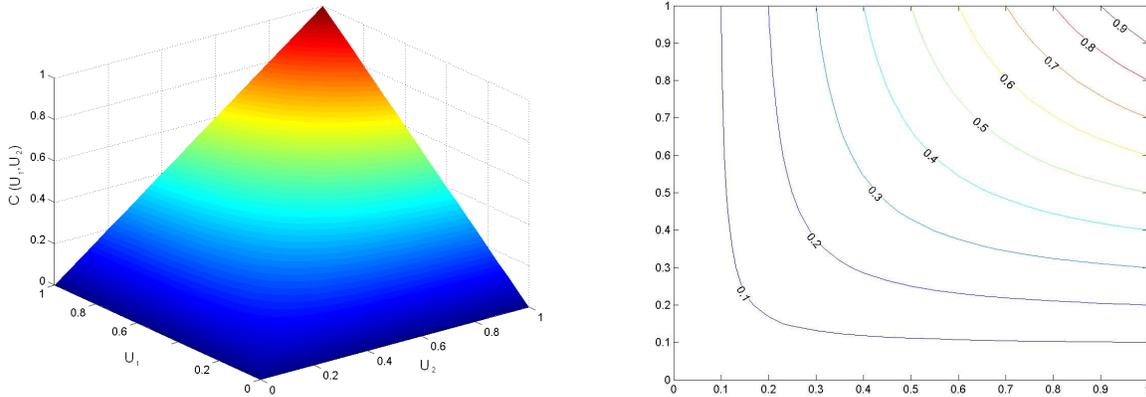


Figura 2.1: Função de distribuição da cópula Logística de Gumbel. À esquerda seu gráfico e à direita suas curvas de nível.

## 2.6 Cópulas Elementares

O estudo da lei de probabilidade de uma variável aleatória  $Y$  conhecida por um valor proveniente de uma outra variável aleatória  $X$  é fundamental para problemas de aproximação e também de previsão. É necessário saber, primeiro, como é a lei de distribuição de probabilidade da Cópula  $(X, Y)$  que está aplicada no trio  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  em  $\mathbb{R}^2$ .

### 2.6.1 Lei de união associada a cópula

Para uma lei de cópula  $(X, Y)$  a  $P_{XY}$  é inteiramente definida pelo arranjo dos números:

$P_{XY}(x_i; y_j) = P(X = x_i \cap Y = y_j)$ , no caso de uma lei de distribuição finita, a forma desta pode ser representada por uma tabela. Note que pela  $p_{ij} = P(X = x_i \cap Y = y_j)$  claramente tem-se

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$$

### 2.6.2 Leis conjuntas das leis marginais

Se  $(X, Y)$  são valores de  $\mathbb{R}^2$  tem-se a função de repartição da cópula  $H(x, y)$  definida por:

$$H(x, y) = P(X < x \cap Y < y).$$

Estas funções de repartição marginais deduzidas são:

$$F(x) = H(x; \infty) = P(X < x).$$

$$G(y) = H(\infty; y) = P(Y < y).$$

Se a Cópula de  $(X, Y)$  admite uma densidade  $h(x, y)$ :

$$h(x, y) = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}.$$

As densidades marginais são obtidas por:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x, y) dy.$$

$$g(y) = \int_{\mathbb{R}} h(x, y) dx.$$

## 2.7 Teoremas e Propriedades

O teorema fundamental afirma que, se uma junção ou uma função de distribuição multivariada marginal contínua, pode ser escrita em termos de uma função única, isto é chamado de cópula. Assim, a função de cópula descreve como a função multivariada é unida com as funções de distribuições marginais. Este resultado é importante, pois permite construir funções de distribuição comuns, por meio de funções marginais, considerando a estrutura de dependência entre elas.

Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variáveis aleatórias contínuas com funções de distribuições  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , respectivamente, e a função de distribuição conjunta  $H$ . Pode-se dizer que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são uma Cópula  $C$ .

**Teorema 5** *Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variáveis aleatórias contínuas com Cópula  $C_{X_1 X_2 \dots X_n}$ . As variáveis  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são independentes se, e somente se,  $C_{X_1 X_2 \dots X_n} = \Pi(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv x_1 x_2 \dots x_n$ .*

Esta é uma propriedade importante da teoria da cópula, pois para transformações estritamente monótonas de qualquer variável aleatória da cópula, são invariantes, ou se transformam de modos simples. Nota-se que, se a função de distribuição de uma variável aleatória  $X$  é contínua, e se  $\alpha$  é estritamente a função monótona cujo domínio contém  $R(X)$ , então a função de distribuição da variável aleatória  $\alpha(X)$  também é contínua.

**Teorema 6** *Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variáveis aleatórias contínuas com Cópula  $C_{X_1 X_2 \dots X_n}$ . Considere as funções aleatórias*

$$Y_1 = \alpha_1(X_1), \quad Y_2 = \alpha_2(X_2), \quad \dots, \quad Y_n = \alpha_n(X_n),$$

*onde as funções  $\alpha_k$  são estritamente crescentes em  $R(X_1), R(X_2), \dots, R(X_n)$  respectivamente. Então*

$$C_{Y_1 Y_2 \dots Y_n} = C_{X_1 X_2 \dots X_n} \quad (2.37)$$

*Isto é, a cópula  $C_{X_1 X_2 \dots X_n}$  é invariante sob transformações crescentes de  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .*

A completa discussão e prova dos teoremas pode ser encontrada em NELSEN (1999), RONCALLI (2002) e LINDSKOG (2000). Apesar de não ser um dos objetivos desta tese, será apresentado o algoritmo de geração de valores aleatórios de cópulas, que pode ser utilizado em muitos outros casos.

Considere a situação geral, de uma geração aleatória para n-Cópula  $C$ . Tem-se:

$$C_k(u_1, \dots, u_n) = C(u_1, \dots, u_k, 1, \dots, 1), k = 2, \dots, n - 1$$

Denomina-se  $k$ -marginais de  $C(u_1, \dots, u_n)$ . Além disto  $C_1(u_1) = u_1$  e  $C_n(u_1, \dots, u_n) = C(u_1, \dots, u_n)$ . Sendo  $(U_1, \dots, U_n)$  uma função de distribuição conjunta de  $C$ . Então a distribuição conjunta de  $U_k$  possui valores dos primeiros  $k-1$  componentes de  $(U_1, \dots, U_n)$ , sendo determinado por:

$$C_k(u_k | u_1, \dots, u_{k-1}) = P[U_k \leq u_k | U_1 = u_1, \dots, U_{k-1} = u_{k-1}], \quad (2.38)$$

$$= \frac{\partial^{k-1} C_k(u_1, \dots, u_k)}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}} \bigg/ \frac{\partial^{k-1} C_k(u_1, \dots, u_k)}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}} \quad (2.39)$$

Nota-se que para uma função crescente de uma das variáveis dada por  $u_j \mapsto C(u)$  para  $j = 1, \dots, n$  são diferenciáveis quase todo o tempo, a derivada parcial de primeira ordem existe quase sempre  $(u_1, \dots, u_n)$  em  $\mathbb{R}_n$ . O próximo passo do algoritmo é gerar um valor aleatório  $(u_1, \dots, u_n)$  para  $C(u_1, \dots, u_n)$ .

---

### Algoritmo básico para gerar cópulas

---

1. Simular um valor  $u_1$  de  $U(0, 1)$ ,
2. Simular um valor  $u_2$  de  $C_2(u_2|u_1)$ ,
3. Simular um valor  $u_n$  de  $C_n(u_n|u_1, \dots, u_{n-1})$ .

A Figura 2.2, exemplifica os passos 1 e 2 do algoritmo descrito acima. Primeiramente, é feita a simulação de uma variável uniforme ( $u_1 \equiv x$ ), depois, é simulada a segunda variável ( $u_2 \equiv y$ ) condicionada à primeira. Geralmente, deseja-se outra distribuição estatística, sendo possível a transformação dos dados em qualquer outra distribuição. No exemplo da Figura 2.2 (b), a simulação bivariada uniforme foi transformada em uma distribuição bivariada normal.

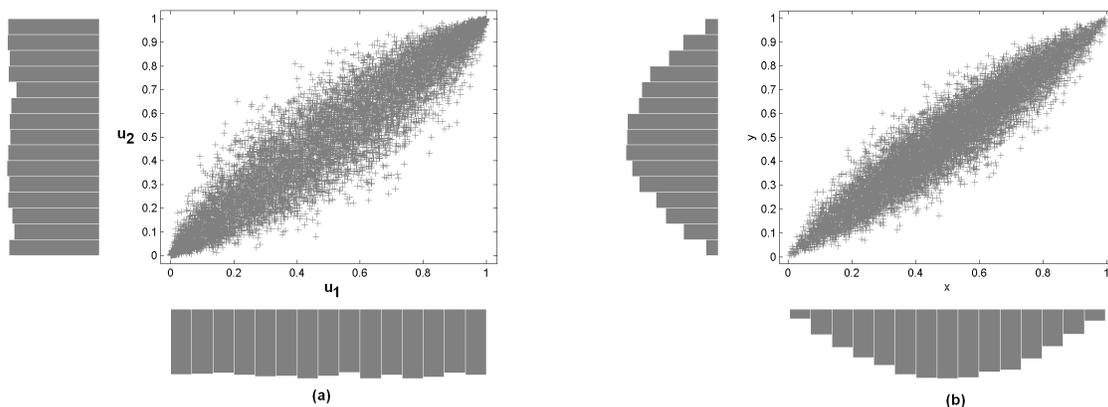


Figura 2.2: Simulação de uma cópula, onde as distribuições são uniformes (a) e a transformação da simulação das variáveis para distribuições normais (b)

## 2.8 Dependência entre os dados

Em uma simulação estocástica, é necessário escolher a distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias de entrada. Em casos mais complexos, é necessário saber, que tipo de dependência existe entre as variáveis. O ideal seria que os dados refletissem isso de maneira clara. Mas na maioria dos casos, não se conhece com certeza a distribuição da variável, sendo ainda mais difícil conhecer a dependência entre elas. Mesmo assim, quando se pressupõe que estas distribuições multivariadas sejam relativamente conhecidas, estas podem modelar um número limitado de relações de dependência.

A metodologia mais comum, quando se trata de simulação estocástica e se objetiva simular variáveis lognormais independentes, é simular duas variáveis aleatórias normais e calcular a exponencial para cada valor simulado. Mas a questão que surge é: até que ponto essas variáveis são independentes? Veja na Figura 2.3, que existe uma correlação não linear em (b), apesar da simulação normal (a) não apresentar correlação. Outra consideração que deve ser feita é como a dependência entre elas afeta os resultados. Na verdade, sabe-se que em dados reais, as condições (aleatórias) afetam ambas as variáveis, e ignorar isso nas simulações pode conduzir a resultados errôneos.

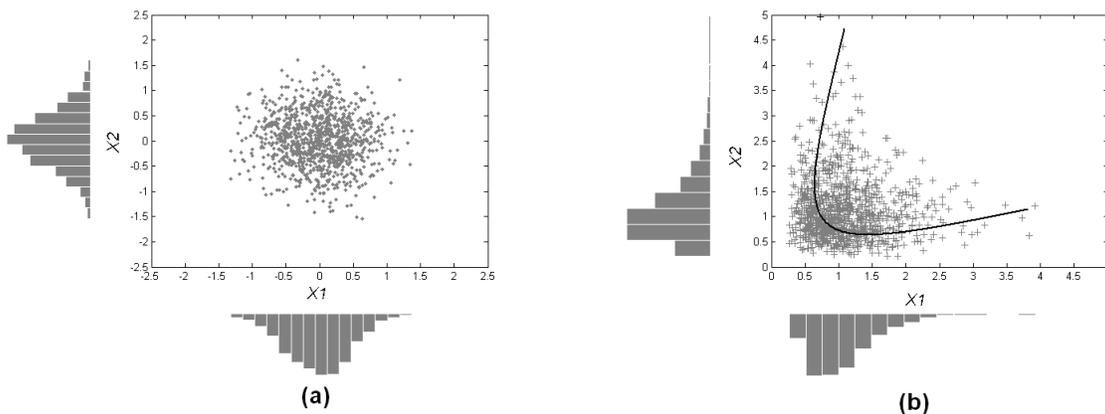


Figura 2.3: Simulação de duas variáveis normais independentes (a)(correlação igual a zero) transformadas em lognormais com correlação não linear (b)

Para se obter a simulação de variáveis aleatórias lognormais com correlação, basta impor na matriz de correlação entre as variáveis o grau de associação desejado. Por exemplo: duas variáveis normais podem ser simuladas com correlação de 90%, seguindo o mesmo procedimento anterior. Observa-se na Figura 2.4, que existe uma tendência dos baixos valores de  $X$  estarem associados a baixos valores de  $Y$  e similarmente altos valores de  $X$  estarem associados com altos valores de  $Y$ . Essa dependência foi determinada pelo coeficiente de correlação entre as duas variáveis normais subjacentes.

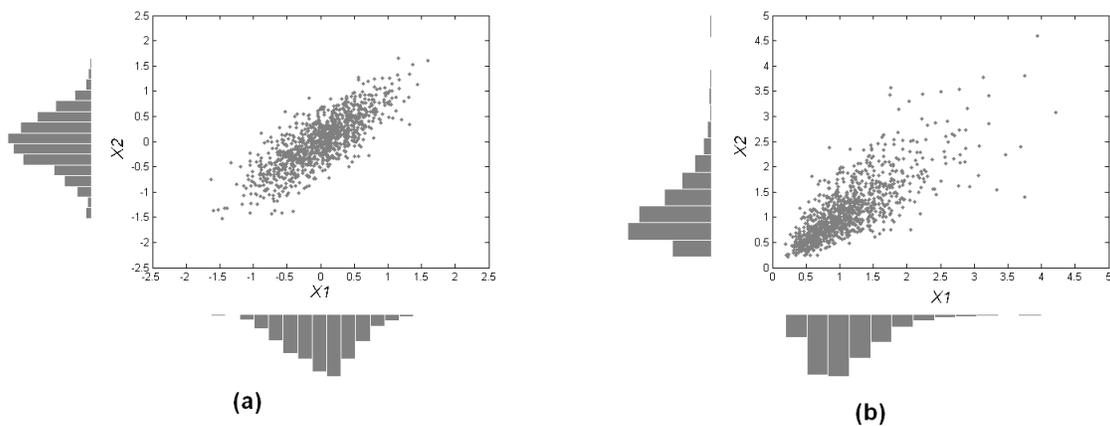


Figura 2.4: Simulação de duas variáveis dependentes normais (a) transformadas em Lognormais (b), com grau de correlação de 0,90.

A distribuição lognormal bivariada (ou outra específica) é uma solução simples e pode ser generalizada para mais de duas variáveis, sempre com distribuições marginais com diferentes parâmetros. Outras distribuições multivariadas podem ser geradas, mas a escolha destas é limitada e só é aplicada quando as distribuições marginais possuem a mesma distribuição teórica. Na prática, isso é uma grande restrição.

## 2.9 Distribuições Bivariadas

O método, descrito anteriormente, de gerar uma distribuição bivariada lognormal é simples e serve para explicar um método geral e mais aplicável. Primeiro, geram-se pares de valores de uma distribuição normal bivariada. Há uma relação de dependência entre estas duas variáveis e cada

uma tem uma distribuição marginal normal. Depois, aplica-se a função exponencial sobre cada valor, mudando assim a distribuição marginal normal para lognormal. Isto é a própria definição de lognormal, se  $X$  é normal  $e^X$  é lognormal. Sejam  $\mu$  e  $\sigma^2$  a média e a variância dos logaritmos, então  $\log X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Seja  $Y$  uma variável normal  $N(0,1)$ . Por definição, tem-se:  $\log X = \mu + \sigma Y$ . Neste caso, as relações são:  $X = e^{\mu + \sigma Y}$  e  $Y = \frac{(\log X - \mu)}{\sigma}$ . As variáveis assim transformadas ainda apresentam uma dependência estatística.

No caso em que  $X$  e  $Y$  são lognormais, portanto  $\log X$  e  $\log Y$  são normais (REMACRE & UZUMAKI, 1995), então:

$$\log X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$$

$$\log Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

$$\rho = \text{corr}(\log X, \log Y)$$

Se outra função fosse usada, esse método poderia ser generalizado para criar variáveis aleatórias bivariadas com dependência e com outras distribuições marginais. De fato, há um outro método de criar variáveis aleatórias dependentes, mais complexas do que uma simples exponenciação.

### 2.9.1 Método da Inversão

Um simples exemplo deste procedimento pode ser dado por meio de uma função de distribuição bivariada  $H$  com marginais contínuas  $F$  e  $G$ , invertida via cópulas.

$$C(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)).$$

Com esta cópula, novas distribuições bivariadas com marginais arbitrárias, ditas  $F'$  e  $G'$  podem ser construídas pelo teorema de SKLAR:  $H(x, y) = C(F'(x), G'(y))$ . Está claro, que esta função é igual a função da Cópula de sobrevivência:

$$\hat{C}(u, v) = \bar{H}(\bar{F}^{(-1)}(u), \bar{G}^{(-1)}(u)),$$

onde  $\bar{F}^{(-1)}$  é chamado de *quasi-inverso* de  $\bar{F}$ , que é equivalente à  $\bar{F}^{(-1)}(t) = F^{(-1)}(1 - t)$ . Por exemplo, a maneira usual para se obter estes resultados é gerar pares de valores para distribuições normais bivariadas. A dependência estatística entre estas duas variáveis é uma distribuição marginal normal. O próximo passo, é aplicar a transformação (por exemplo, em uma função exponencial), sendo aplicada separadamente para cada variável, mudando a distribuição marginal para lognormal. A variável transformada apresentará uma dependência estatística.

Se a transformação satisfatória é encontrada, este método pode ser generalizado. Pode-se criar uma dependência entre os vetores bivariados, que por sua vez, estarão sujeitos à distribuição marginal. Pela definição, aplicando-se a distribuição normal (chamada de  $\varphi$ ) à uma função densidade cumulativa (CDF), a variável aleatória normal padrão resulta em uma variável aleatória que é uniforme no intervalo  $[0,1]$ . Sendo,  $Z$  uma distribuição normal padrão, então a CDF de  $U = \varphi(Z)$  é:

$$Pr(U \leq u) = Pr(\varphi(Z) \leq u) = Pr(Z = \varphi^{(-1)}(u)) = u,$$

que é uma CDF de  $U(0,1)$ . Os histogramas das normais simuladas e seus valores transformados demonstram este fato. Adotando-se a teoria de geração univariada de números aleatórios, e aplicando-se a inversa da CDF de uma distribuição qualquer  $F$  à uma variável aleatória  $U(0,1)$ , tem-se como resultado uma variável aleatória cuja a distribuição é exatamente  $F$ . Isto é conhecido como método da Inversão. Outro histograma ilustra a transformação para uma distribuição lognormal, estes passos podem ser vistos na Figura 2.5.

Esta transformação tem dois passos que são aplicados em cada uma das variáveis bivariadas normais, criando dependência das variáveis aleatórias. Pode-se fazer a transformação em cada componente separadamente, os dois resultados não necessitam ter a mesma distribuição marginal.

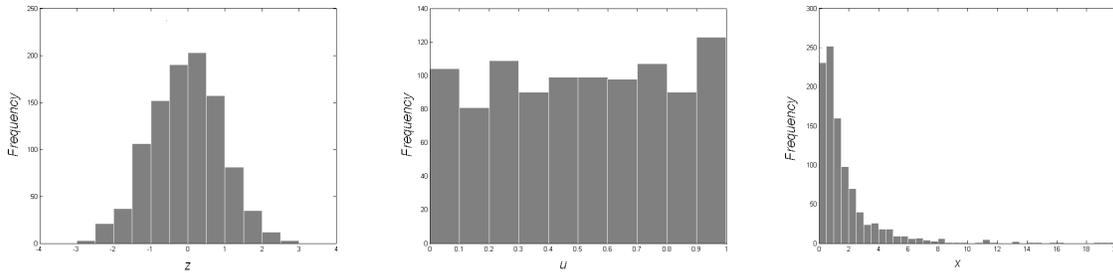


Figura 2.5: Seqüência para gerar uma distribuição lognormal por meio do método da transformação inversa

Tal transformação é definida como:

$$Z = [Z1 \ Z2] \approx N([0 \ 0], [1 \ \rho; \ \rho \ 1]);$$

$$U = [\varphi(Z1) \ \varphi(Z2)];$$

$$X = [G1(U1) \ G2(U2)].$$

Onde  $G1$  e  $G2$  são as inversas da CDF de duas possíveis diferentes distribuições. Por exemplo, pode-se gerar vetores aleatórios para distribuições bivariadas marginais com uma distribuição  $t$  e outra Gamma.

A dependência entre  $X1$  e  $X2$  é uma construção determinada pelo parâmetro de correlação ( $\rho$ ), da subjacente normal bivariada. Porém, não é verdade que a correlação linear de  $X1$  e  $X2$  seja  $\rho$ . Por exemplo, na origem de um caso lognormal, a forma da correlação é:

$$Corr(X1, X2) = \frac{e^{(\rho \cdot \sigma^2)} - 1}{e^{\sigma^2} - 1}.$$

Que é estritamente menor que  $\rho$ , a menos que  $\rho$  seja exatamente um. Nos casos mais comuns, embora semelhante a Gamma/ $t$  construída anteriormente, a correlação linear entre  $X1$  e  $X2$  é difícil ou impossível de se expressar em termos de  $\rho$ , mas simulações também podem ser utilizadas para mostrar o mesmo efeito.

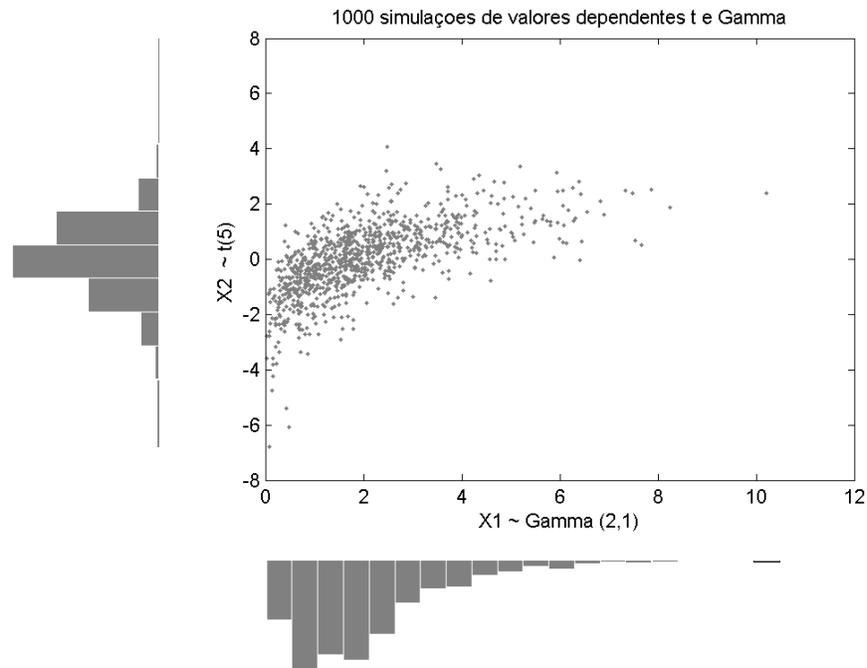


Figura 2.6: Dependência entre as variáveis aleatórias Gamma e t

Isso ocorre, pois o coeficiente de correlação linear expressa a dependência das variáveis aleatórias e quando transformações não lineares são aplicadas à estas variáveis, a correlação linear não é preservada. Instantaneamente, um coeficiente graduado de correlação, semelhante ao  $\tau$  de Kendall ou ao  $\rho's$  de Spearman, são os mais apropriados.

Assim, esses graus de correlação medem o grau em que os altos (ou baixos) valores de uma variável aleatória está associada com altos (ou baixos) valores de outra. Porém, ao contrário do coeficiente linear de correlação, a medida é associada somente em termos de graus. Como conseqüência, o grau de correlação é preservado. Em particular, o método de transformação descreve e preserva justamente o grau de correlação. Conseqüentemente, pode-se conhecer o grau de correlação de uma distribuição normal bivariada  $Z$ , determinando o grau de correlação da transformada final da variável  $X$ .

Enquanto que para  $\rho$  é preciso parametrizar a distribuição normal bivariada, os coeficientes de Kendall e Spearman são mais poderosos na descrição de dependências entre as variáveis aleatórias, porque eles são invariantes na escolha das distribuições marginais.

É fácil criar um específico grau de correlação entre  $X_1$  e  $X_2$ , indiferentemente da distribuição marginal. Isto é feito pela escolha correta do valor do parâmetro  $\rho$  da correlação linear entre  $Z_1$  e  $Z_2$ .

Na Figura 2.7, pode-se notar que para uma distribuição multivariada normal, o grau de correlação de Spearman é quase idêntico à correlação linear, correspondente à primeira bissetriz, já Kendall apresenta o comportamento dos graus de correlação parabólicos ao coeficiente linear de correlação.

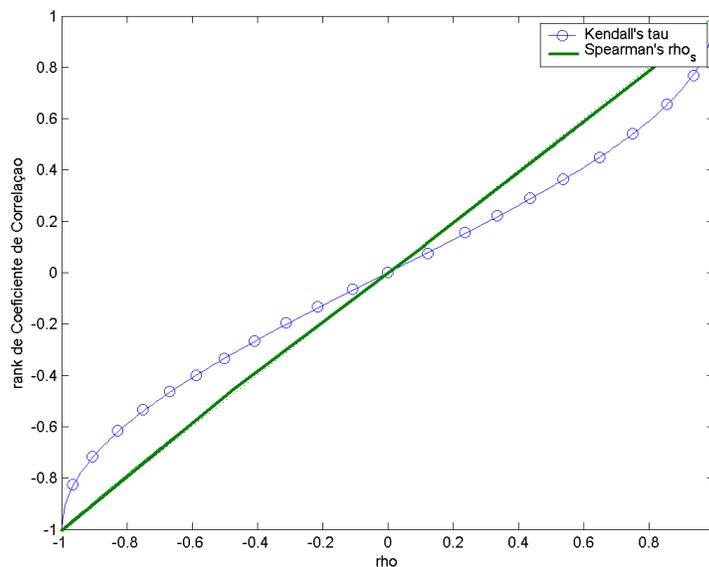


Figura 2.7: Comportamento dos graus dos coeficientes de correlação *versus* a correlação linear

O primeiro passo na construção descrita acima é definir o conhecimento da cópula. Uma cópula bivariada é simplesmente uma distribuição de probabilidade de duas variáveis aleatórias, cada uma com sua distribuição marginal uniforme. Estas duas variáveis, podem ser completamente

independentes, mas deterministicamente relacionadas (por exemplo,  $U_2 = U_1$ ). A cópula gaussiana bivariada e parametrizada por  $\rho = [\begin{smallmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{smallmatrix}]$ , sendo uma matriz de correlação linear.  $U_1$  e  $U_2$  são aproximações lineares, dependentes, quando as correlações possuem valores  $\pm 1$ . Se o valor se aproxima de zero, então não existe dependência de  $\rho$ .

## 2.10 Cópulas Paramétricas

### 2.10.1 Cópulas Archimedianas

A representação Archimediana permite reduzir o estudo de uma cópula multivariada para uma simples função univariada. Para simplificar, considere que uma cópula bivariada tenha  $p=2$ . Assume-se que uma função  $\varphi$  é convexa, decrescente, com domínio  $(0, 1]$  e com alcance de  $[0, \inf)$  tal que  $\varphi(1) = 0$ . Sendo  $\varphi^{-1}$  o inverso da função de  $\varphi$ . Tem-se a função:

$$C_\varphi(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \text{ para } v \in (0, 1]. \quad (2.40)$$

Esta função é chamada de cópula Archimediana. A função  $\varphi$  é chamada de gerador de cópula  $C_\varphi$ . Na Tabela 1, tem-se diversos geradores de diferentes famílias de cópulas. Um tipo de gerador determina uma cópula Archimediana e esta representação ajuda sua identificação de forma.

Tabela 1 - cópulas Archimedianas e seus geradores

Família	Gerador $\varphi(t)$	Parâmetro de Dependência ( $\theta$ )	Cópula Bivariada $C_\varphi(u, v)$
Independência	$-\ln t$	Não aplicável	$uv$
Clayton (1978), Cook-Johnson (1981), Oakes (1982)	$t^{-\theta} - 1$	$\theta > 1$	$(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$
Gumbel (1960), Hougaard (1986)	$(-\ln t)^\theta$	$\theta \geq 1$	$\exp \left\{ - \left[ (-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right]^{1/\theta} \right\}$
Frank (1979)	$\ln \frac{e^{\theta t} - 1}{e^\theta - 1}$	$-\inf < \theta < \inf$	$\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{\theta u} - 1)(e^{\theta v} - 1)}{e^\theta - 1} \right)$

Para a construção de uma cópula, um método sugerido por MARSHALL e OLKIN (1988), pode ser descrito da seguinte forma: suponha-se que  $X_i$  é uma função aleatória condicional, proveniente de uma variável positiva  $\gamma_i$  a função de distribuição é especificada por  $H_i(x|\gamma_i) = H_i(x)^{\gamma_i}$  onde  $H(\cdot)$  é a mesma base da função de distribuição, para  $i = 1, \dots, p$ . MARSHALL e OLKIN consideram a distribuição da função multivariada na forma:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_p) = E[K(H_1(x_1)^{\gamma_1}, \dots, H_p(x_p)^{\gamma_p})],$$

onde,  $K$  é uma função de distribuição com marginais uniformes. MARSHALL e OLKIN ainda mostraram que para um caso especial, todas as variáveis são iguais umas às outras, tendo  $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_p = \gamma$ , assim:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_p) = E_\gamma(H_1(x_1)^\gamma, \dots, H_p(x_p)^\gamma), \quad (2.41)$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_p) = \tau(\tau^{-1}(F_1(x_1)) + \dots + \tau^{-1}(F_1(x_1))), \quad (2.42)$$

onde  $F_i$  é integrante da distribuição marginal de  $F$  e  $\gamma(\cdot)$  é a transformação Laplace de  $\gamma$ , definida por  $\tau(s) = E_\gamma e^{-s\gamma}$ .

A transformação de Laplace tem uma inversa bem definida. Pela equação anterior, nota-se que a função inversa  $\tau^{-1}$  serve de gerador de cópula Archimediana. Na Tabela 2 é mostrada a transformação inversa de Laplace para os geradores listados na Tabela 1. Assim, pode-se ver como devem ser usadas distribuições conhecidas para gerar distribuições comuns. Esta transformação inversa de Laplace representa, portanto, um importante tipo de gerador de cópulas Archimedianas.

**Tabela 2 - Geradores Archimedianos e suas inversões**

Família	Gerador $\varphi(t)$	Gerador Inverso de Laplace ( $\tau(s) = \varphi^{-1}(s)$ )	Distribuição Transformada de Laplace
Independência	$-\ln t$	$\exp(-s)$	Degenerativa
Clayton (1978), Cook-Johnson (1981), Oakes (1982)	$t^{-\theta} - 1$	$(1 + s)^{-1/\theta}$	Gama
Gumbel (1960), Hougaard (1986)	$(-\ln t)^\theta$	$\exp(-s^{-1/\theta})$	Positiva Estável
Frank (1979)	$\ln \frac{e^{\theta t} - 1}{e^\theta - 1}$	$\theta^{-1} \ln[1 + e^s(e^\theta - 1)]$	Série Logarítmicas

Sintetizando, assumindo que  $X_1, X_2, \dots, X_p$  são condicionais, tem-se  $\gamma$ , independentemente da função de distribuição  $H_i(x)^\gamma$ . Então, a distribuição multivariada oriunda da cópula é obtida por um gerador de uma transformação inversa de Laplace da variável  $\gamma$ . Por causa da forma desta distribuição, foi chamada de distribuição de mistura de poderes, onde tem-se:

$$\tau[-\ln H_1(x)] = E_\gamma \exp(-(-\ln H_1(x))\gamma) = F_i(x)$$

Logo:

$$H_i(x) = \exp(-\tau^{-1}(F_i(x))).$$

Isto providencia um caminho para especificação das funções vindas das distribuições marginais.

### 2.10.2 Medidas Associativas

A distribuição não paramétrica ranqueada (também conhecida como uma distribuição livre) foi proposta por SPEARMAN em 1904, como a medida direta entre duas variáveis. Sendo  $R_i$  um valor de  $x_i$  entre outros de  $x_i$ 's,  $S_i$  um valor de  $y_i$  entre outros de  $y_i$ 's. O coeficiente de correlação, para cada ranqueamento de dados é definido pelo coeficiente de correlação linear ordenado, sendo:

$$r_s = \frac{\sum_i (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_i (R_i - \bar{R})^2} \sqrt{\sum_i (S_i - \bar{S})^2}} \quad (2.43)$$

SCHWEIZER e WOLFF (1981) estabeleceram que as cópulas consideram toda a dependência entre duas variáveis aleatórias e que a medida de correlação não paramétrica padrão pode ser expressa em termos de uma função de cópula. O coeficiente de correlação de Spearman é definido por:

$$\rho(X, Y) = 12E \{ (F_1(x_1) - 1/2) (F_2(y_1) - 1/2) \}$$

$$\rho = 12 \int \int \{C(u, v) - uv\} dudv \quad (2.44)$$

O coeficiente de correlação de Kendall  $\tau$  para variáveis aleatórias contínuas pode ser definido similarmente. Sendo  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$  independentes e com vetores com distribuições aleatórias idênticas, então para cada distribuição conjunta  $H$ , tem-se:

$$\tau = \tau_{X,Y} = \Pr[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \Pr[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

$$\tau = 4 \int \int (C(u, v) dC(u, v) - 1.) \quad (2.45)$$

Para estas expressões, deve-se assumir que  $X_1$  e  $X_2$  possuem uma função de distribuição contínua conjunta. O coeficiente de correlação de Pearson,  $Cov(X_1, X_2)/(Var X_1, Var X_2)^{1/2}$  depende não somente da cópula, mas também da distribuição marginal. Vale lembrar que esta medida é afetada pelas mudanças (não-lineares) de escala.

Na Tabela 3 ilustra-se o cálculo destas medidas de correlação. A correlação da cópula de Frank, também chamada de função de "Debye", sendo definida por:

$$D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt.$$

Tabela 3 - cópulas Archimedianas e suas Medidas de Dependência

Família	Cópula Bivariada $C_\varphi(u, v)$	Kendall's $\tau$	Spearman's $\rho$
Independência	$uv$	0	0
Clayton (1978), Cook-Johnson (1981), Oakes (1982)	$(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$	$\frac{\theta}{\theta+2}$	Fórmula Complicada
Gumbel (1960), Hougaard (1986)	$\exp \left\{ - \left[ (-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right]^{1/\theta} \right\}$	$1 - \theta^1$	Fórmula não resolvida
Frank (1979)	$\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{\theta u} - 1)(e^{\theta v} - 1)}{e^\theta - 1} \right)$	$1 - \frac{4}{\theta} (D_1(-\theta) - 1)$	$1 - \frac{12}{\theta} (D_2(-\theta) - D_1(-\theta))$

Para iniciar a construção de uma cópula Archimediana, o objetivo do algoritmo é gerar  $X_1, X_2, \dots, X_p$  de uma função de distribuição conhecida  $F(x_1, x_2, \dots, x_p) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_p(x_p))$ , onde a função da Cópula é:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_p) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_p)).$$

Para esta construção, GENEST e RIVEST (1986) e GENEST (1987), introduziram a idéia da simulação completa da distribuição de  $(X_1, X_2, \dots, X_p)$  por meio de uma simulação condicional recursiva de  $X_k$  vinda de  $X_1, \dots, X_{k-1}$ , para  $k=2, \dots, p$ . Com esta idéia, subseqüentemente LEE (1993) desenvolveu que para simplificar, assume-se que a função de densidade probabilidade conjunta de  $X_1, X_2, \dots, X_p$  existe. Usando a cópula para a construção da função de densidade probabilidade conjunta de  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , tem-se:

$$f_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{\partial^k}{\partial x_1, \dots, \partial x_k} \varphi^{-1} \{ \varphi[F_1(x_1)] + \dots + \varphi[F_k(x_k)] \} \quad (2.46)$$

$$= \varphi^{-1(k)} \{ \varphi[F_1(x_1)] + \dots + \varphi[F_k(x_k)] \} \quad (2.47)$$

$$= \prod_{j=1}^k \varphi^{(1)}[F_j(x_j)] F_j^{(1)}(x_j). \quad (2.48)$$

Onde, a notação subscripta ( $j$ ) significa que o  $j$  é a derivada parcial. Condicionando a densidade de  $X_1, \dots, X_{k-1}$ , tem-se:

$$f_k(x_k | x_1, \dots, x_{k-1}) = \frac{f_k(x_1, \dots, x_k)}{f_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1})} \quad (2.49)$$

$$= \varphi^{(1)}[F_k(x_k)] F_k^{(1)}(x_k) \quad (2.50)$$

$$= \frac{\varphi^{-1(k-1)} \{ \varphi[F_1(x_1)] + \dots + \varphi[F_k(x_k)] \}}{\varphi^{-1(k-1)} \{ \varphi[F_1(x_1)] + \dots + \varphi[F_{k-1}(x_{k-1})] \}}. \quad (2.51)$$

Logo, a função de distribuição condicional de  $X_k$  oriunda de  $X_1, \dots, X_{k-1}$  é

$$F_k(x_k | x_1, \dots, x_{k-1}) = \int_{-\infty}^{x_k} f_k(x_k | x_1, \dots, x_{k-1}) dx \quad (2.52)$$

$$= \frac{\varphi^{-1(k-1)} \{ \varphi[F_1(x_1)] + \dots + \varphi[F_k(x_k)] \}}{\varphi^{-1(k-1)} \{ \varphi[F_1(x_1)] + \dots + \varphi[F_{k-1}(x_{k-1})] \}} \quad (2.53)$$

$$= \frac{\varphi^{-1(k-1)} \{ C_{k-2} + \varphi[F_k(x_k)] \}}{\varphi^{-1(k-1)} (C_{k-1})}. \quad (2.54)$$

Onde  $C_k = \varphi[F_1(x_1)] + \dots + \varphi[F_{k-1}(x_{k-1})]$ . Com esta função de distribuição, pode-se resolver a função de distribuição inversa, sendo avaliada através de números aleatórios uniformes, tal como,  $F^{-1} = X_k$ . Sumarizando os algoritmos, tem-se:

---

**Algoritmo para Gerar cópulas Archimedianas**


---

1. Gerar valores aleatórios  $U_1, U_2, \dots, U_p$  uniformemente independentes com  $(0, 1)$ .
2. Ajustar  $X_1 = F_1^{-1}(U_1)$  e  $C_0 = 0$ .
3. Para  $k = 2, \dots, p$  calcular recursivamente  $X_k$ , por meio da solução de:

$$U_k = F_k(X_k | x_1, \dots, x_{k-1}) = \frac{\varphi^{-1(k-1)} \{C_{k-2} + \varphi[F_k(x_k)]\}}{\varphi^{-1(k-1)}(C_{k-1})}.$$

---

Este algoritmo introduz implicitamente o contexto da cópula de Frank para  $p=2$ . Podendo o mesmo ser visto a seguir.

---

**Algoritmo para Gerar cópulas de Frank**


---

1. Gerar valores aleatórios  $U_1, U_2$  uniformemente independentes com  $(0, 1)$ .
2. Ajustar  $X_1 = F_1^{-1}(U_1)$ .
3. Calcular  $X_2$  com a seguinte solução:

$$U_2 = e^{-\alpha U_1} \left( \frac{e^{-\alpha} - e^{-\alpha F_2(X_2)}}{e^{-\alpha F_2(X_2)} - 1} + 1 \right)^{-1}.$$

Com isto calcula-se  $X_2 = F_1^{-1}(U_{*2})$ , onde:

$$U_{*2} = \frac{U_2 e^{-\alpha} - e^{-\alpha U_1} (1 - U_{*2})}{U_2 + e^{-\alpha U_1} (1 - U_{*2})}.$$

---

Alguns exemplos de Cópula de Frank, são apresentados nas próximas Figuras.

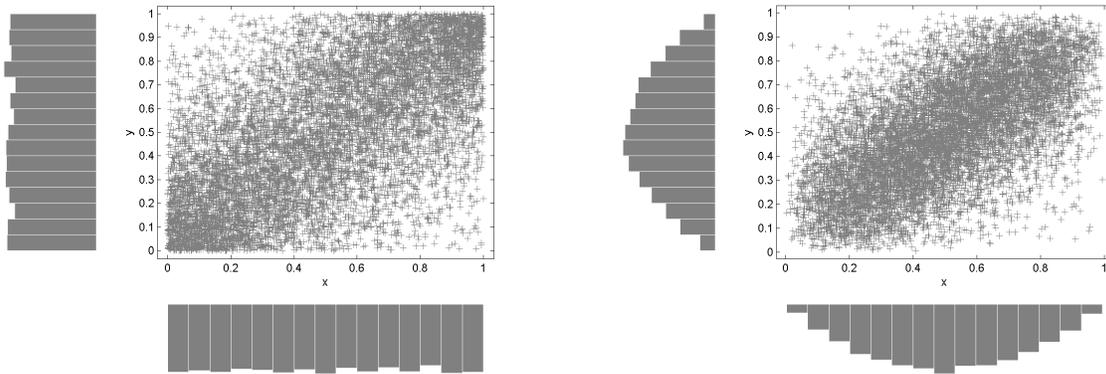


Figura 2.8: Cópula Frank's para  $p = 2$

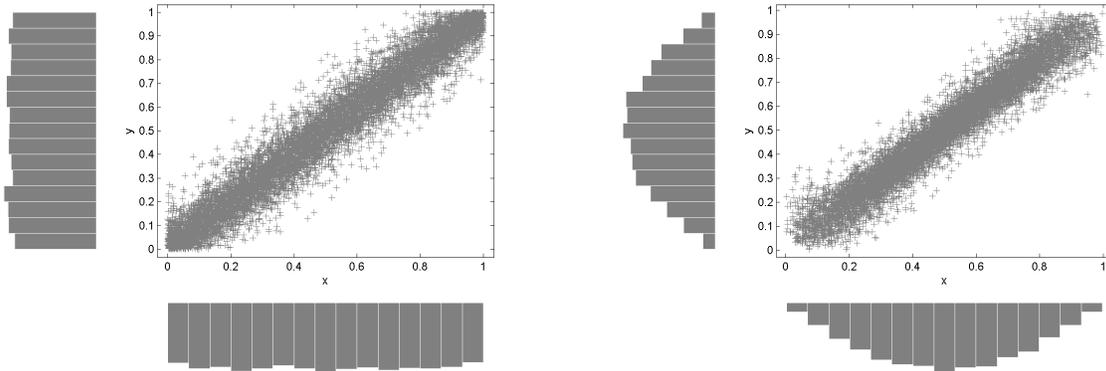


Figura 2.9: Cópula Frank's para  $p = 4$

Este algoritmo também pode ser usado para simular distribuições da família de Clayton. Pela Tabela 2, tem-se  $\varphi^{-1(1)} = (1 + s)^{-1/\alpha}$ , onde:

$$\varphi^{-1(1)}(s) = -\alpha^{-1}(1 + s)^{-(1/\alpha)-1}.$$

Esta expressão com  $p=2$ , tem-se:

$$U_2 = \frac{-\alpha^{-1} \left( 1 + F_2(X_2)^{-1/\alpha} - 1 + U_1^{-1/\alpha} - 1 \right)^{-(1/\alpha)-1}}{-\alpha^{-1} \left( 1 + U_1^{-1/\alpha} - 1 \right)^{-(1/\alpha)-1}}.$$

Para o cálculo de  $X_2 = F_1^{-1}(U_{*2})$ , tem-se:

$$U_{*2} = (1 + U_1^{-1/\alpha} (U_1^{-\alpha/(\alpha+1)} + 1))^{-\alpha}.$$

Alguns exemplos, da cópula de Glayton, podem ser observados nas próximas Figuras.

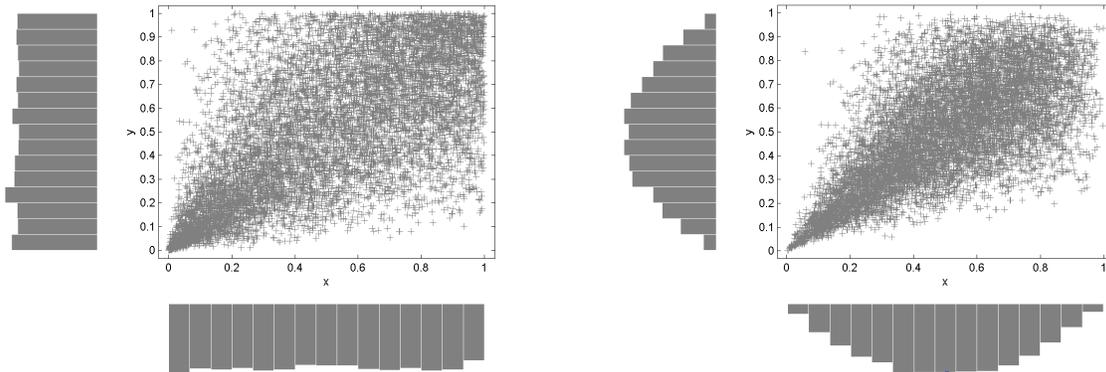


Figura 2.10: Cópula Clayton's para  $p = 2$

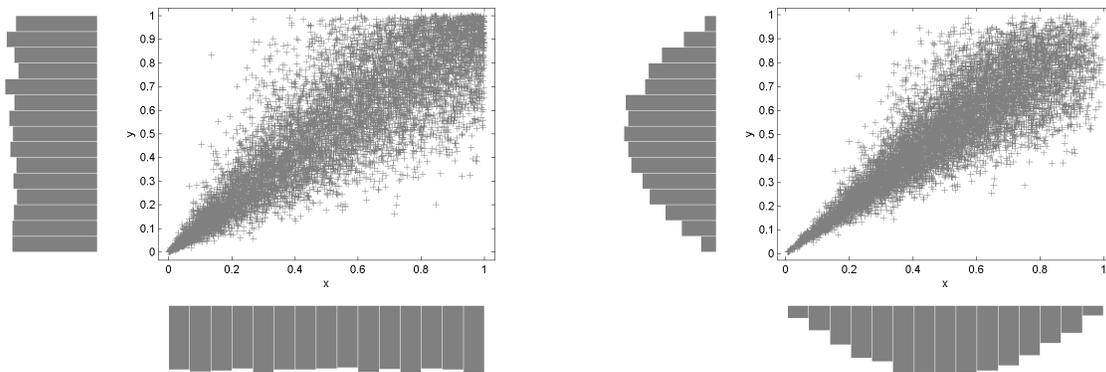


Figura 2.11: Cópula Clayton's para  $p = 4$

Para a cópula Gumbel-Hougaard, determinando o valor de  $X_2$ , a equação necessita de uma solução iterativa, e embora seja um método direto, em muitas aplicações requer um grande número de simulações. Um algoritmo alternativo foi introduzido por MARSHALL e OLKIN (1988) para a construção da cópula.

---

**Algoritmo para Gerar cópulas Gumbel**


---

1. Gerar um valor aleatório para variável  $\gamma$ , tendo esta uma transformada laplaciana  $\tau$ ,
2. Gerar valores aleatórios  $U_1, U_2, \dots, U_p$  uniformemente independentes com  $(0, 1)$ .
3. Para  $k = 1, \dots, p$  calcular  $X_k = F_1^{-1}(U_{*k})$ , onde:

$$U_{*k} = \tau(-\gamma^{-1} \ln U_k).$$

Relembrando, a função marginal de distribuição pode ser calculada pela função de distribuição  $F_k(x) = \tau(-\ln H_k(x))$ , logo para cópula de Gumbel, tem-se:

$$U_{*k} = \exp[-(-\gamma^{-1} \ln U_k)^{-1/\alpha}].$$

O resultado destas cópulas podem ser observados nas Figuras.

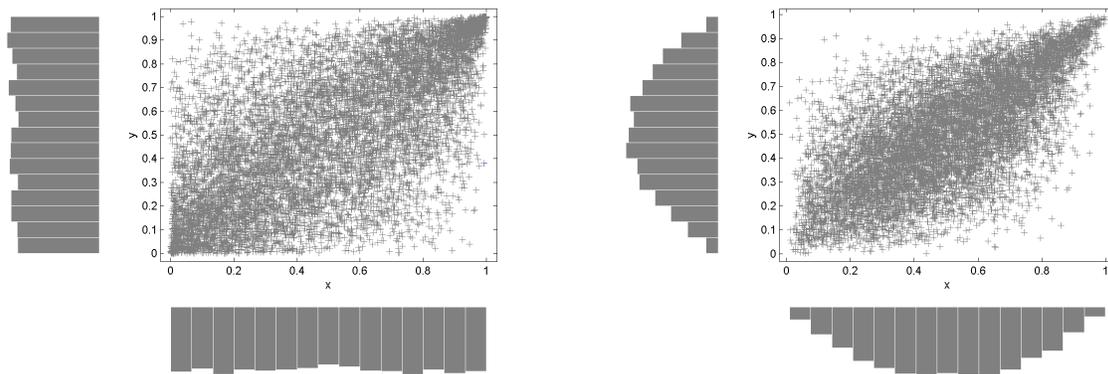
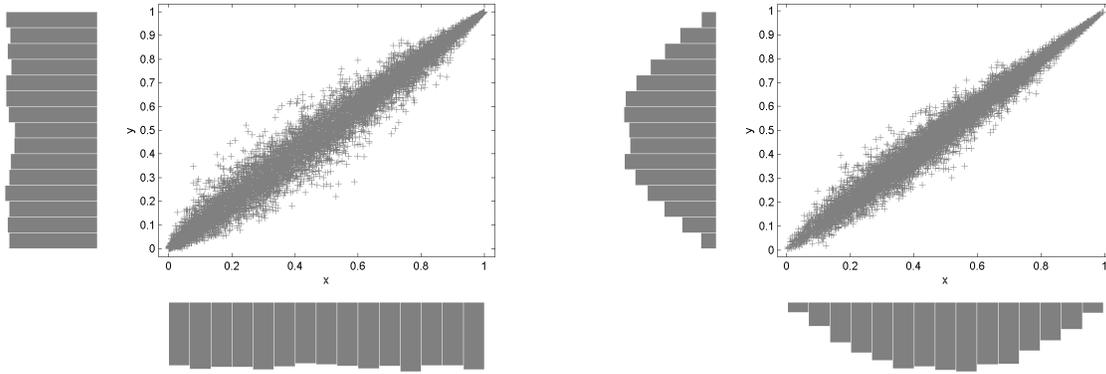


Figura 2.12: Cópula Gumbel para  $p = 2$

Figura 2.13: Cópula Gumbel para  $p = 4$ 

## 2.11 Cópulas Gaussianas

A cópula gaussiana está associada à uma distribuição normal multidimensional, a partir de agora será definida como a seguinte função:

$$c(u_1, \dots, u_n; \rho) = \Phi_p(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$$

**Teorema 7 (Teorema Cópula Normal)** A densidade da cópula gaussiana é

$$c(u_1, \dots, u_n; \rho) = \frac{1}{|\rho|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^T(\rho^{-1} - I)\zeta\right) \quad (2.55)$$

Onde  $\zeta_i = \Phi^{-1}(u_i)$  e  $I$  é a matriz de dimensão idêntica ( $n \times n$ ).

**Prova** Utilizando-se a relação de junção das densidades multivariadas, tem-se a densidade da cópula:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (2.56)$$

Aplicando-se esta relação normal multivariada, tem-se:

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\rho|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^T \rho^{-1} x\right) = c((\Phi(u_1), \dots, \Phi(u_n))) \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x_i^2\right)\right) \quad (2.57)$$

Obtendo-se a seguinte dedução:

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\rho|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^T \rho^{-1} \zeta\right)}{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^T \zeta\right)} \quad (2.58)$$

Assim, para o caso bivariado, a expressão pode ser escrita:

$$c(u_1, u_2; \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - \rho\zeta_1\zeta_2}{2(1-\rho^2)} + \frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}{2}\right) \quad (2.59)$$

Deduzindo:

$$C(u_1, u_2; \rho) = \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - \rho\zeta_1\zeta_2}{2(1-\rho^2)} + \frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}{2}\right) dx_1 dx_2 \quad (2.60)$$

Sendo  $\zeta_1 = \Phi_{(x_1)}^{-1}$  e  $\zeta_2 = \Phi_{(x_1)}^{-1}$ . Se for utilizada a decomposição canônica para distribuição bivariada, a expressão  $C$  é:

$$C(u_1, u_2; \rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2}{2(1-\rho^2)}\right) dx_1 dx_2 \quad (2.61)$$

A equação seguinte, como forma simplificada, foi proposta por JOUANIN e sua dedução pode ser vista em RONCALLI (2002):

$$C(u_1, u_2; \rho) = \int_0^{u_1} \Phi\left(-\frac{\Phi^{-1}(u_2) - 2\rho\Phi^{-1}(u)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) du \quad (2.62)$$

A cópula escolhida para ser utilizada nesta tese foi a gaussiana, porque o objetivo não era amarrar o modelo a uma específica distribuição. Assim, as variáveis podem ser transformadas por meio de polinômios de hermite ou ranqueadas para que assumam a forma gaussiana. O algoritmo de cópulas gaussianas é descrito a seguir:

---

#### Algoritmo para Gerar cópulas gaussianas

---

1. Gerar um valor aleatório para variável gaussiana;
  2. Gerar valores aleatórios  $N_1, N_2, \dots, N_p$  normalmente independentes com  $(0, 1)$ ;
  3. Impor correlação  $\exp(-0.5 * \sigma' * \rho_i n v * \sigma / \sqrt{1 - \rho^2})$ .
-

## Capítulo 3

# Parametrização de Reservas

*Neste capítulo é apresentado o problema que deu origem à geoestatística: o cálculo de reservas. É discutida toda a fundamentação teórica desenvolvida para o cálculo de recursos recuperáveis, apresentando os pontos fortes e também os pontos fracos. Os conceitos de curvas de tonelagem e teores são introduzidos, pois são a base da parametrização de reservas minerais.*

### 3.1 Geoestatística Mineira

A geoestatística surgiu como uma ferramenta de estudo do comportamento das variáveis aleatórias no espaço. Em trabalhos de H.S. SICHEL (1949 e 1952), D.G KRIGE (1951) e H.J. de WIJS (1952), sobre uma mina de ouro, bastante estudada, na África do Sul, as técnicas clássicas de regressão eram insuficientes para se estudar este jazimento. Assim, a geoestatística foi originalmente desenvolvida com o objetivo de melhorar a acurácia das estimativas locais de teores de blocos de minério, melhorando as regressões rudimentares que até então eram utilizadas.

Nota-se, que, os desenvolvimentos teóricos feitos pelos sul-africanos, são originados de observações práticas dessa mina de ouro. Basicamente, os trabalhos consistiam em fazer regressões nos valores de teores de blocos de minério. Eram pautados por aplicações de estatística, pois ainda não utilizavam o variograma. G. MATHERON em 1962, já trabalhava com os mesmos tipos de problemas em jazimentos de urânio e também com permeabilidade de depósitos petrolíferos.

tendo tido acesso à dissertação de mestrado de D. KRIGE, MATHERON com sua base teórica probabilística, estabeleceu a teoria da krigagem. Isto foi feito utilizando o conceito de funções aleatórias, desenvolvida nos anos 30 pela escola francesa e soviética (P. LÉVY, A. KOLMOGOROV, A. KHINTCHINE), também utilizou os mínimos quadrados, desenvolvidos nos anos 40 (H. CRTAMÉR, N. WIENER, S. BOCHENER). Esse resultado foi apresentado na publicação intitulada de Teoria das Variáveis Regionalizadas, onde está o desenvolvimento, com todo formalismo matemático, de um novo método de estimativa. Uma completa discussão do tema pode ser encontrada em CHAUVET (1999), JOURNAL & HUIJBREGTS (1978), CHILES & DELFINER (1999).

A novidade em relação à regressão dos mínimos quadrados ponderados é a modelagem analítica de um modelo de variograma. Com o variograma, foram introduzidos os conceitos de estruturas embricadas, efeito pepita e anisotropia, efeito de suporte e de informação, dentre outros.

A simulação estocástica geoestatística foi introduzida no início dos anos 1970 para corrigir (substituir) o efeito de suavização da krigagem e assim gerar mapas que representassem o comportamento da variância espacialmente, previstos por meio de um modelo de variograma (MATHERON, 1973; JOURNAL, 1974). O primeiro algoritmo de simulação estocástica desenvolvido foi o de Bandas Rotativas (*Turning Band*), originado de uma idéia sugerida em 1960 por MATHERON. Os algoritmos de simulação seqüencial são atualmente a essência da geoestatística teórica e prática (JOURNAL, 1983; ISAAKS, 1990; SRIVASTAVA, 1992; GOOVAERTS, 1997; CHILES & DELFINER, 1999). A simulação estocástica é derivada da distribuição condicional de probabilidade, sendo que os valores são simulados, via amostragem de Monte Carlo.

As simulações são geradas por meio de funções aleatórias, condicionadas às leis espaciais multigaussianas. Isto significa que todas as combinações lineares seguem uma distribuição gaussiana. Muitos destes algoritmos surgiram por meio de simulações não-condicionais e o

problema do condicionamento dos dados foi resolvido pela krigagem e pela variância de krigagem. Previamente, a variável regionalizada deve ser transformada em uma variável gaussiana. Tal transformação é conhecida como anamorfose gaussiana (MATHERON, 1974, JOURNAL and HUIJBREGTS, 1978, REMACRE, 1984 e RIVOIRARD, 1994) ou simplesmente transformação gaussiana.

As distribuições multigaussianas são extremamente cômodas ao ser utilizadas, pois dependem apenas dos momentos de 1ª e 2ª ordem ( Esperança Condicional e Covariância) para ser representadas, o que facilita a inferência estatística. Porém, isto acarreta várias restrições:

- Dificuldade de se conseguir a anamorfose gaussiana, quando o histograma da variável regionalizada é fortemente dissimétrico ou apresenta uma proporção importante de valores extremos (MATHERON, 1980, RIVOIRARD, 1994, EMERY, 2002);
- Simetria das distribuições de probabilidades em relação ao valor mediano: características estruturais de valores elevados (anisotropia, continuidade, ...) ocorrendo também com valores baixos;
- Propriedade de desestruturação de valores extremos (MATHERON, 1989, GOOVAERTS, 1997): A ocorrência de valores extremos causa incerteza, prevenindo que valores altos ou baixos sejam conectados espacialmente.

Estas características motivam a pesquisa de algoritmos de simulação estocástica não-gaussiana. Porém, existem alguns problemas quando se deseja simular distribuições que não são gaussianas, dentre eles, pode-se citar: a especificação para uma coerente lei espacial que pode ser modelada matematicamente; inferência dos parâmetros do modelo por meio de dados experimentais; construções de realizações para este modelo e condicionamento da simulação aos dados.

Todos estes esforços, de métodos de estimativas de simulação estocástica, buscam o mesmo

objetivo, que é saber se as expectativas sobre um determinado empreendimento serão atendidas, ou seja, se existe uma reserva.

## 3.2 Reservas Minerais

Segundo JOURNAL e HUIJBREGTS (1978), “os recursos *in situ* são determinados pelo ambiente geológico do depósito. As reservas dependem, não somente, dos recursos *in situ* e de suas características peculiares, mas também do contexto técnico e econômico da região onde o projeto mineral está inserido”. Para a mineração, o cálculo da reserva constitui-se um importantíssimo parâmetro, no que concerne à tomada de decisão de se lavar ou não o minério, sendo fator decisivo no sucesso do empreendimento.

Define-se reserva, como a porção da reserva mineral a qual os teores de metal ( $Z(x_i)$ ) dos blocos  $x_i$  foram estimados ( $Z^*(x_i)$ ) com valores acima de um determinado teor de corte  $z$ . No cálculo da reserva, a escolha de cada bloco é realizada dentro de um limite de cava preestabelecido. A definição do teor de corte é feita dentro do contexto técnico e econômico, no qual o projeto de mineração está inserido. Tal teor de corte refere-se ao teor mínimo de metal necessário capaz de pagar os custos envolvidos na lavra, no tratamento e transporte de um volume unitário da reserva mineral, para extração de um metal ou o intervalo de teor de minério que pode ser comercializado.

As Funções de Recuperação (gráficos do tipo Tonelagem x Teor) são de suma importância para a mineração, pois as informações de ordem financeira (lucro pela venda da tonelagem de material lavrado) por elas fornecida, envolve desde a fase de tomada de decisão pela implantação, até o controle de teor no dia-a-dia de uma mina. Elas fornecem dados importantes para o planejamento de estratégias gerenciais e operacionais, que permitem maximizar o benefício do empreendimento mineiro. Os erros ocasionados por esta tomada de decisão podem ser vistos na Figura 3.1. Ela apresenta o gráfico da dispersão  $Z(v_i) \times Z^*(v_i)$  obtido pela validação cruzada dos teores verdadeiros

$Z(v_i)$  e os teores estimados  $Z^*(v_i)$ . Dado um teor de corte  $z$  o gráfico pode ser dividido em quatro áreas, apresentando as seguintes informações:

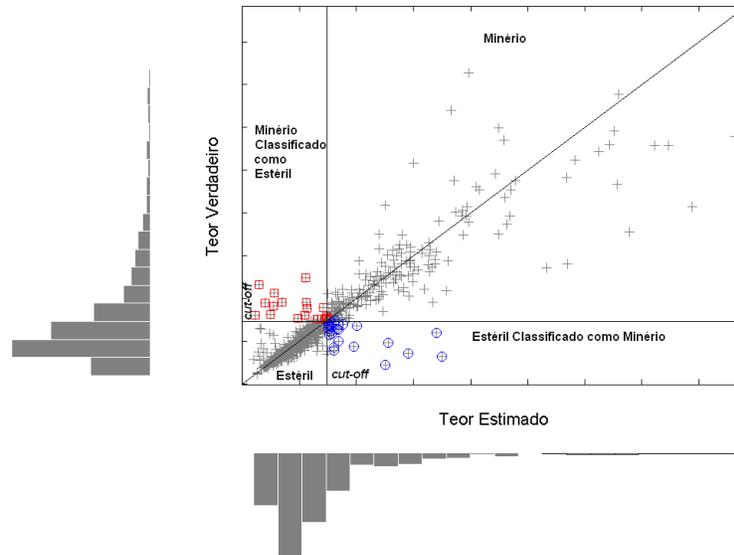


Figura 3.1: Dispersão entre teor estimado e teor verdadeiro, mostrando os erros cometidos na estimativa quando se aplica um teor de corte.

- Blocos de minério classificados como estéril: todos os blocos serão destinados ao depósito de estéril, pois  $Z^*(v_i) < z$ . Mas, de fato tem-se  $Z(v_i) \geq z$ .
- Blocos de minério corretamente classificados: os dois critérios de seleção são satisfeitos, ou seja,  $Z(v_i) \geq z$  e  $Z^*(v_i) \geq z$ . Então, todos os blocos desta área serão selecionados para compor a reserva recuperável.
- Blocos de estéril corretamente classificados: os dois critérios de seleção não foram satisfeitos, pois tem-se que  $Z(v_i) < z$  e  $Z^*(v_i) < z$ . Portanto, todos os blocos não serão selecionados, pois são considerados estéril, e realmente o são, dado um teor de corte.
- Blocos de estéril classificados como minério: todos os blocos serão selecionados, pois  $Z^*(v_i) \geq z$ .

$z$ . Porém  $Z(v_i) < z$ , o que significa que os blocos estimados como minério são blocos de fato estéril.

Basicamente, o cálculo da reserva recuperável constitui o problema de estabelecer relações entre tonelagem e teor, aos quais podem ser representadas sob diversos tipos de curvas (funções), sendo possível responder, rapidamente, importantes questões relevantes à implantação de projetos de mineração e também para o planejamento de lavra, tais como:

- Qual a tonelagem de minério da reserva mineral cujos blocos possuem teores com valores maiores que o *teor de corte*? Para o dimensionamento de todos os equipamentos de mineração, tanto os da lavra como os da usina de tratamento, é necessário a determinação da quantidade de minério que será movimentada na mina e processada na usina de tratamento. Determinando-se assim, o tempo de vida útil da mina até a sua exaustão econômica.
- Qual a quantidade de metal contida na porção da reserva, cujos blocos possuem teores com valores maiores que o *teor de corte*? Ao se selecionar os blocos que serão incluídos em um planejamento de lavra a curto prazo, é importante saber se a quantidade de metal contida nesses blocos será suficiente para suprir a demanda prevista do bem mineral.
- Qual o teor médio dos blocos com teores maiores que *teor de corte*? São preocupantes as perdas econômicas provocadas pela flutuação do teor metálico do minério com o qual a usina de tratamento é alimentada. Por um lado, pela produção de material de baixa qualidade, por outro, pela perda de metal não recuperado. Então, é notória a importância econômica da incerteza do teor médio à adequação da flutuação do teor de alimentação (especificação da usina). E, ainda, o teor médio está associado a quanto da jazida poderá ser lavrada, já que minério de alto teor pode ser blendado com minério marginal, aumentando a quantidade de metal extraído.
- E a questão mais importante: Qual o benefício (lucro financeiro) da lavra e tratamento do minério dos blocos que possuem teores de metal com valores maiores que *teor de corte*?

Qualquer empreendimento mineiro é concebido sobre alguns critérios de execução, dentre eles destacam-se os seguintes: atender o suprimento do mercado com o bem mineral (metal) e/ou maximizar o benefício econômico do empreendimento. Para satisfazer o primeiro critério, se faz necessária a parametrização de reservas de maneira a se ter conhecimento da quantidade de metal que poderá ser lavrado e disponibilizado ao mercado. O segundo critério, e talvez o mais importante, é a maximização do benefício econômico. No planejamento da lavra, a longo prazo, deve-se considerar quais blocos serão lavrados em cada período de operação da mina, de modo a satisfazer os objetivos de produção. As funções de recuperação são de grande utilidade para o planejamento de estratégias gerenciais e operacionais que dão maior garantia da maximização do benefício econômico.

### 3.3 Reservas Estimadas

As Funções de Recuperação podem ser obtidas usando funções de densidade de probabilidade (FDP) ajustadas aos histogramas experimentais aos dados (método contínuo), ou ainda, trabalhando diretamente sobre os dados estimados (método discreto).

Os conceitos de efeito suporte e informação refere-se ao volume sobre o qual é definido um parâmetro do recurso mineral, como por exemplo, o teor. O suporte pode apresentar qualquer geometria e a informação representa os dados existentes até o momento. De acordo com MATHERON (1984), os dois princípios da geoestatística usados na mudança de suporte são:

- A média permanece constante;
- As curvas de parametrização se degradam quando o suporte aumenta (ver Figura 3.2).

Uma reserva mineral dividida em painéis  $V$  (blocos grandes) e subdividida em blocos menores  $v$  (Unidade Seletiva de Mina), definem-se os teores de blocos  $Z(v)$  e sobre os dois suportes  $V$  e  $v$ . Tem-se  $E[Z(v_i)] = E[Z(V_i)]$  e  $var[Z(v_i)] > var[Z(V_i)]$ . Logo, existem duas populações de teores distintas entre si, que produzem histogramas diferentes. Esta diferença nos histogramas entre os

dois suportes, é chamada de *efeito suporte*, isto pode ser visto na Figura 3.2, utilizando o exemplo de Walker Lake<sup>1</sup>.

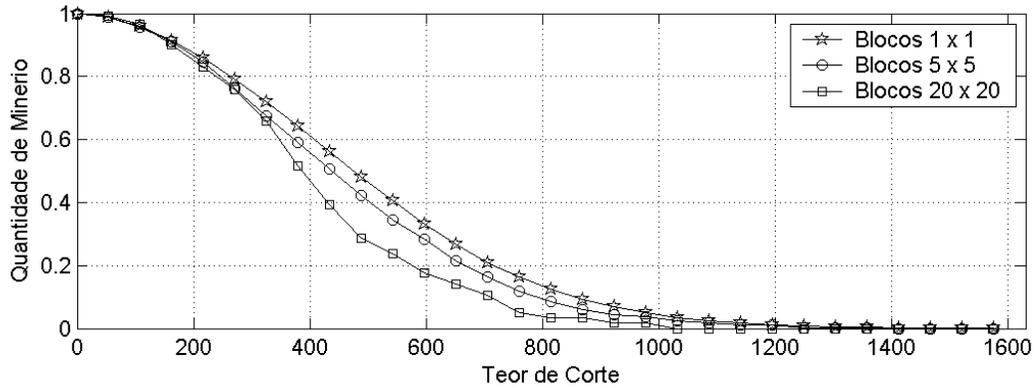


Figura 3.2: Curva Quantidade de Metal de Walker Lake em diversos suportes.

Sendo  $z$  o teor de corte, para o estabelecimento das funções de recuperação, a seleção de blocos se dá pelo teor estimado do bloco  $Z^*(v_i) \geq z$  e não sobre seu teor verdadeiro  $Z(v_i) \geq z$ , por ser desconhecido. Como todo processo de estimativa é passível de erro, é comum encontrar  $Z^*(v_i) \neq Z(v_i)$ . Esta diferença provoca uma degradação das funções de recuperação. Este efeito, devido ao desconhecimento do teor verdadeiro  $Z(v_i)$ , é chamado de *efeito informação*.

Sempre que ocorre  $Z^*(v_i) \neq Z(v_i)$ , leva-se ao viés  $Z^*(v_i) \neq Z(v_i)$ , que é a diferença média entre os valores verdadeiros e os estimados sobre todos os blocos. Não basta que  $E[Z_v - Z_v^*] = 0$ , pois podem ocorrer casos em que esta esperança é nula, mas a correlação entre  $Z(v_i)$  e  $Z^*(v_i)$  é inexistente ou muito fraca. Existem vários fatores que levam à ocorrência deste viés, tais como amostragem não representativa do depósito, erros cometidos nas análises químicas, mineralógicas e granulométricas das amostras, além de erros cometidos no processo de estimativa.

Sejam as variáveis aleatórias  $Z$  e  $Y$ . De acordo com REMACRE (1997), conceitua-se esperança condicional de  $Z$  dado que  $Y = y$  (simbolizada por  $E[Z|Y > y]$ ) da seguinte forma, para o caso

<sup>1</sup>Banco de dados disponível para pesquisa. Ver apêndice A

contínuo:

$$E[Z|Y > y] = \int z \cdot f(z|y) dz \quad (3.1)$$

Aplicando-se o conceito de esperança condicional na análise do efeito de informação, segundo RIVOIRARD (1987), constata-se a ocorrência do viés condicional  $E[Z(v_i) - Z^*(v_i)|Z^*(v_i)]$  quando se toma um valor  $Z^*(v_i) = z$ .

Na verdade, tem-se uma diferença no teor médio  $E[Z^*(v_i)|Z^*(v_i) = z]$ . Neste caso, os blocos com teor médio acima do teor de corte apresentam como a  $E[Z(v_i)|Z^*(v_i) \geq z]$ , que é diferente do teor médio estimado. Assim, o viés condicional  $E[Z(v_i) - Z^*(v_i)|Z^*(v_i)]$  é responsável por um viés no teor selecionado, dado por  $E[Z(v_i) - Z^*(v_i)|Z^*(v_i) \geq z]$  que é a média do viés condicionado para os blocos selecionados.

Em geral,  $Z(v_i)$  não é conhecido. Dessa forma, a seleção de blocos é feita por meio dos seus valores estimados  $Z^*(v_i)$ , o que poderá conduzir à escolha de blocos de teores reais baixos que foram estimados com o de teores altos e ao abandono de blocos de teores reais altos que foram estimados com o de teores baixos.

Como citado anteriormente, ocorre que  $Z^*(v_i) \neq Z(v_i)$ , o que implica no viés  $E[Z(v_i) - Z^*(v_i)]$ , que é a diferença média entre os valores verdadeiros e os estimados sobre todos os blocos, sem que tenha havido, ainda, qualquer seleção.

Não basta que  $E[Z(v_i) - Z^*(v_i)] = 0$ . Existem casos em que esta esperança é nula, mas não existe correlação entre  $Z(v_i)$  e  $Z^*(v_i)$ , caso no qual a função  $Z(v_i) \times Z^*(v_i)$  é simétrica em relação à primeira bissetriz, mas os pontos são dispersos.

Supondo que a regressão  $E[Z(v_i)|Z^*(v_i)]$  seja linear, isto é, que  $Z(v_i)$  e  $Z^*(v_i)$  tenham funções

de densidade de probabilidade, como é ilustrada pela Figura 3.3, tem-se que:

$$\frac{E[Z(v_i) - Z^*(v_i) | Z^*(v_i) \geq z_c] - m}{\sigma} = \frac{\rho[Z^*(v_i) - m]}{\sigma^*}.$$

Na qual:

$$m = E[Z(v_i)] = E[Z^*(v_i)], \quad (3.2)$$

$$\sigma^2 = \text{Var}[Z(v_i)], \quad (3.3)$$

$$\sigma^{*2} = \text{Var}[Z^*(v_i)], \quad (3.4)$$

$$\rho = [Z(v_i), Z^*(v_i)]. \quad (3.5)$$

Logo:

$$E[Z(v_i) | Z^*(v_i)] - m = p[Z^*(v_i) - m],$$

onde  $p$  é a inclinação da regressão, e é dada por:

$$p = \rho \frac{\sigma}{\sigma^*} = \frac{\text{cov}[Z(v_i), Z^*(v_i)]}{\text{var}[Z^*(v_i)]}.$$

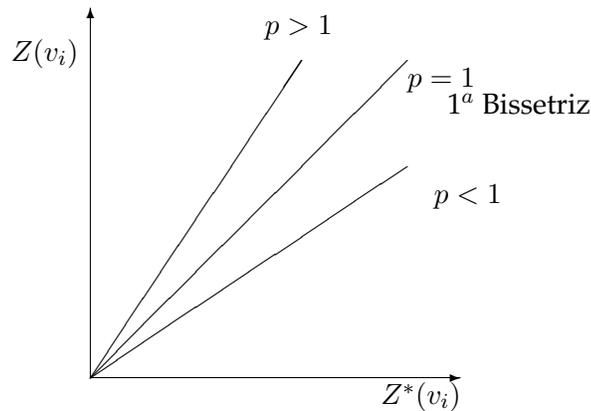


Figura 3.3: Representação da regressão entre o estimado e o real para uma variável com distribuição normal

Quando há um não-viés condicional, a regressão tem inclinação igual a 1 (primeira bisettriz). Então, um valor de  $p$  diferente de 1, implica em um viés condicional. Se  $p < 1$ , o teor recuperado será

menor que o estimado. O estimador  $Z^*(v_i)$  sobrestima o teor selecionado.  $\sigma^{*2} > \sigma^2 \Rightarrow p = \rho \frac{\sigma}{\sigma^*} < 1$ . Se  $p < 1$ , o teor recuperado será maior que o estimado. Ocorre uma subestimativa, e isto pode levar a decisão de não implementar, ou postergar o projeto, alegando que o mesmo é economicamente inviável no momento.

Em geral,  $Z(v_i)$  não é conhecido, assim, se a seleção dos blocos for feita por meio de seus valores estimados  $Z^*(v_i)$  que poderá conduzir a:

1. escolha de blocos pobres que foram estimados como sendo ricos;
2. abandono de blocos ricos que foram estimados como blocos pobres.

Estes erros correspondem à dispersão vertical dos pontos do gráfico da figura 3.1, ao redor da 1ª bissetriz:  $Var[Z(v_i) - Z^*(v_i)|Z^*(v_i)]$ . A diferença  $Z(v_i) \neq Z^*(v_i)$ , provoca uma degradação das funções de recuperação. Como dito anteriormente, este efeito, devido ao desconhecimento do teor verdadeiro  $Z(v_i)$  é chamado de efeito informação. Tem-se que:

$$Z(v_i) - Z^*(v_i) = \{Z(v_i) - E[Z(v_i)|Z^*(v_i)]\} + \{E[Z^*(v_i)|Z^*(v_i)] - Z^*(v_i)\}.$$

O segundo termo do segundo membro da expressão acima  $E[Z^*(v_i)|Z^*(v_i)] - Z^*(v_i)$  depende apenas de  $Z^*(v_i)$ , por isto não é correlacionada com o primeiro termo. Portanto, a variância do erro de estimativa é dado por:

$$Var[Z(v_i) - Z^*(v_i)] = Var\{Z(v_i) - E[Z(v_i)|Z^*(v_i)]\} + Var\{E[Z^*(v_i)|Z^*(v_i)] - Z^*(v_i)\}.$$

Em que o segundo termo, do segundo membro, corresponde ao viés condicional, enquanto o primeiro corresponde à dispersão vertical do diagrama  $Z(v_i) \times Z^*(v_i)$  ao redor da regressão.  $[Z(v_i)|Z^*(v_i)]$

A variância de estimativa é o compromisso de minimizar a diferença entre o teor recuperado e o estimado, com o intuito de minimizar o erro global de estimativa. Em geociências é comum a variável apresentar uma distribuição lognormal. Para este tipo de distribuição, tem-se que a regressão  $E[Z(v_i)|Z^*(v_i)]$ , pode ser representada pela Figura 3.4.

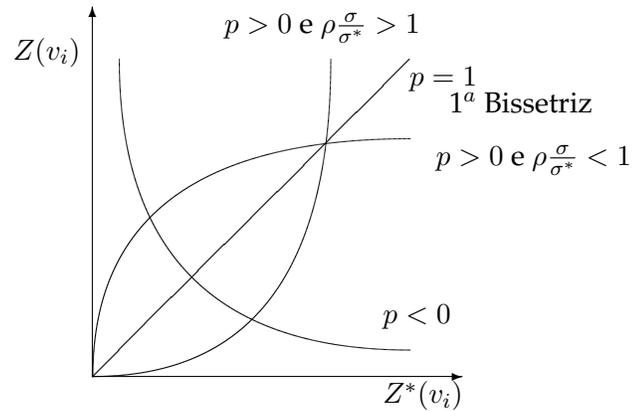


Figura 3.4: Representação da regressão entre o estimado e o real para uma variável com distribuição lognormal.

A noção de variância de dispersão, que está sendo introduzida é bastante singular na geoestatística. Primeiramente, por razões históricas, pois para a estatística clássica, não existe a variância de dispersão. Mas em termos práticos, o seu cálculo pode ser deduzido como:

$$\sigma^2(v|V) = E[S^2(v|V)] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{Z}_i - \bar{Z})^2\right]$$

Uma solução para estas correções é a aplicação de técnicas não-lineares. Para qualquer método de estimativa linear (krigagem, Inverso do Quadrado da Distância, etc) usa-se a combinação dos dados:  $z^* = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} z_{\alpha}$ . Na estimativa não-linear, por exemplo, pode-se escolher a soma de  $n$  funções de cada dado avaliado:  $z^* = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(z_{\alpha})$ . Ou melhor, considerar uma única função de  $n$  dados:  $z^* = f(z_1, \dots, z_n)$ .

Mas existe uma grande dificuldade devido ao alto grau de complexidade no ajuste desta função e ainda a existência de vários pré-requisitos para praticar estes métodos de estimativa. A grande vantagem destes métodos é que, diferentemente dos métodos lineares, estes reproduzem a variabilidade espacial dos teores verdadeiros. Consequentemente, é possível derivar suas proporções aplicando teores de corte.

Os métodos não-lineares, apresentam a correção dos blocos e amostras, e a isto foi chamado de relação de Cartier. Considere-se que um ponto aleatório  $x$  em um bloco  $v$ . A esperança condicional de  $Z(x)$  condicionada ao valor do bloco  $v$  é igual ao momento de  $Z$  de seu Bloco:

$$E[Z(x)|Z(v)] = Z(v),$$

Por uma Anarmofose Gaussiana,

$$Z(x) = \varphi(Y(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k}{k!} H_k(Y(x)),$$

Onde  $H_k(Y(x))$  são polinômios de Hermite, de uma anamorfose  $\varphi_v(Y(v))$  dos blocos correspondentes, a relação pode ser re-escrita:

$$E(\varphi(Y(x))|Z(v)) = E(\varphi(Y(x))|\varphi_v(Y(v))) = \varphi_v(Y(v))$$

A anamorfose gaussiana dos blocos pode ser expressa pelos coeficientes  $\varphi_k$  (ajustados aos dados) da anamorfose pontual é introduzido um coeficiente positivo  $r$  de correlação ponto-bloco:

$$\varphi_v(Y(v)) = E(\varphi(Y(x))|Z(v)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k}{k!} E(H_k(Y(v))|\varphi_v(Y(v))) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k}{k!} r^k H_k(Y(v)),$$

A correção ponto bloco é determinada a partir da variância de dispersão dos blocos,

$$\text{var}(Z(v)) = \text{var}(\varphi_v(Y(v))) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k^2}{k!} r^{2k},$$

### 3.4 Geoestatística Não-Linear

A geoestatística linear foi desenvolvida para resolver combinações lineares de uma variável de estudo  $Z(x)$  e também providenciar a variância de estimativa. Mas quando é necessário calcular uma estimativa da variabilidade de  $Y(x)$  por meio de uma ou mais funções  $f[Y(x)]$ , os métodos não-lineares são os mais indicados. Um engenheiro de minas estará buscando prever quais blocos elementares possuem teores médios acima do teor de corte econômico e a quantidade de metal que estes blocos contém. Segundo CHILÈS e DELFINER (1999, pg.375), quando existe um corte em

uma variável, o problema básico é a determinação da distribuição acumulativa  $F(z) = \Pr Z(x) < z$ . Portanto, é necessário especificar o aspecto espacial que distingue este problema da estimativa padrão em relação à distribuição.

A elaboração de um modelo é a etapa primordial para resolver um problema prático. Os métodos não-lineares não são melhores que a krigagem linear para estimar os teores de um bloco, mas são essenciais para resolver problemas de reservas. Segundo REMACRE (1984) via de regra, um modelo responde a um certo número de hipóteses. A validação dessas hipóteses é que garantem a validação do modelo e somente com a adaptação do modelo à realidade, obtém-se métodos de estimativas eficazes. Para se ajustar este modelo é necessário o conhecimento de quatro fatores importantes:

1. *Domínio* A distribuição não é necessariamente estimada em apenas uma unidade seletiva de lavra, mas em um domínio (um painel, uma bancada ou uma seqüência de lavra). Talvez este domínio de interesse  $D$ , possa ser usado utilizando-se todos os dados disponíveis (estimativa global). Ou talvez, possa ser localmente distribuído baseado somente nos valores dentro de uma vizinhança (estimativa local). Uma típica aplicação, é a determinação da distribuição de teores de pequenos blocos em um painel de lavra. Se o espaço entre as amostras é grande comparado com as dimensões do bloco, a previsibilidade dos blocos é pobre. O mais razoável seria prever o número de blocos que está acima de teor de corte.
2. *Mudança de Suporte* Embora as medidas usadas na estimativa sejam obtidas por meio de um suporte amostral pontual (amostras regularizadas), frequentemente o interesse está em estimar grandes suportes. Um depósito mineral não pode ser minerado em pequenos volumes. Portanto, a unidade seletiva deve ter um suporte adequado com o porte e a seletividade dos equipamentos.
3. *Efeito Informação* Na seletividade da mina, as seleções dos blocos são baseados em estimativas  $Z^*$  na qual o resultado econômico é comparado com a seleção feita em teores verdadeiros.

Esta avaliação requer o modelamento da função de distribuição conjunta  $Z$  e  $Z^*$ , ou seja, os dados obtidos pela lavra e a estimativa.

4. *Efeito Correlação* As variáveis da geociências geralmente estão correlacionadas, sendo importante definir se um bloco está acima de um teor de corte não apenas por uma variável, mas pelo conjunto, de forma que se maximize o valor agregado da unidade seletiva.

### 3.4.1 Função tonelagem

Sendo  $f(z)$  a função densidade de probabilidade dos teores  $Z(v)$  e  $F(z)$ , sua acumulada crescente (fdpa), definida por:

$$F(z) = P(Z(v) \leq z) = \int_{-\infty}^z f(z) dz.$$

A função tonelagem  $T(z)$ , também chamada de tonelagem de minério ou curva de proporção, por definição é a probabilidade do teor  $Z(v)$  ser maior que um dado teor de corte  $z$ , ou seja, o complemento de  $F(z)$ .

$$T(z) = P(Z(v) > z) = \int_z^{\infty} f(z) dz.$$

Logo, tem-se  $0 \leq T(z) \leq 1$ . Podendo-se também escrever:

$$P(Z(v) \leq z) + P(Z(v) > z) = 1,$$

e

$$F(z) + T(z) = 1.$$

Portanto:

$$T(z) = 1 - F(z).$$

Pode-se ver que  $T(z)$  é a proporção do número de blocos que possui teor de metal maior que o teor de corte. Sendo uma função de densidade acumulada não-crescente, definida no intervalo  $[0,1]$ . A Figura 3.5 mostra, para uma função lognormal, com média igual a 1 e diversos desvios padrões, suas respectivas curvas de Tonelagem.

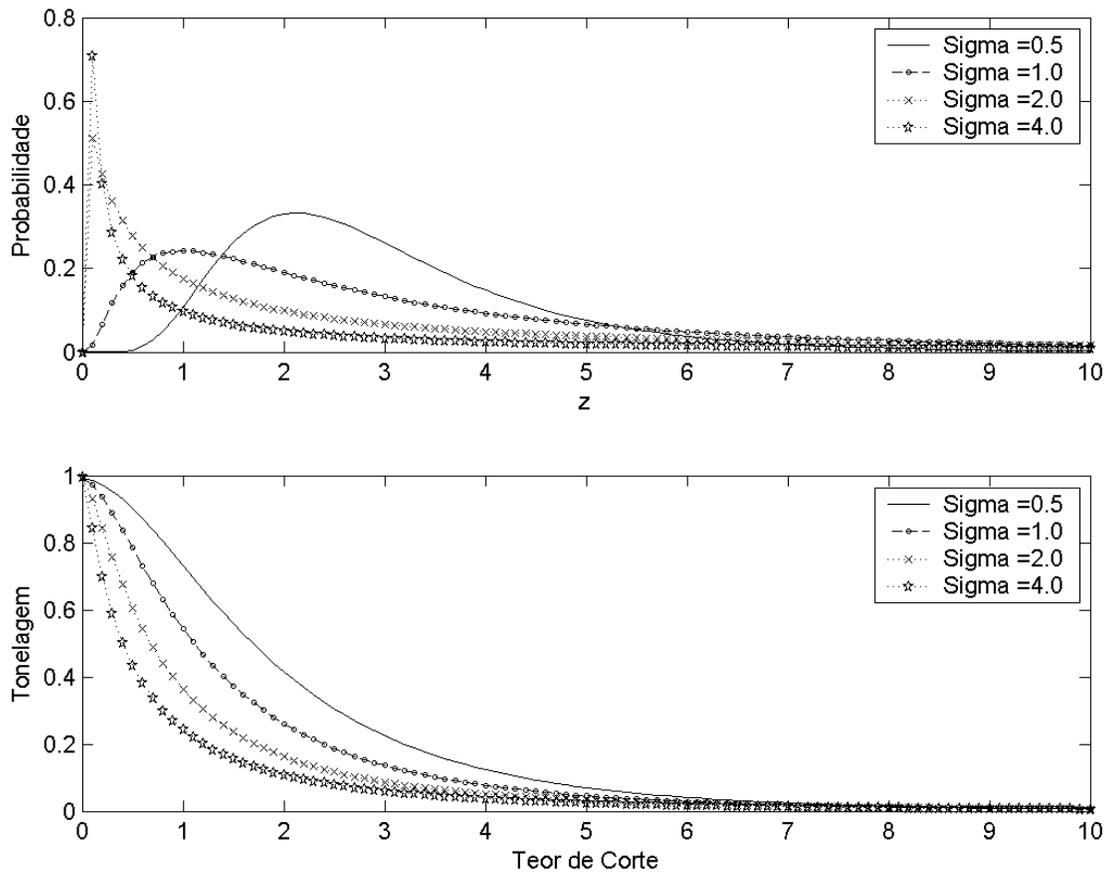


Figura 3.5: Curva tonelagem  $\times$  teor de corte de uma função lognormal, para diversos desvios padrões

### 3.4.2 Função Metal Contido

A função metal contido  $Q(z)$ , também chamada de quantidade de metal, refere-se à proporção de metal contido nos blocos selecionados que possuem teores de metal acima do valor de corte  $z$ . Ou seja,  $Q(z)$  é a proporção de metal da reserva mineral contido nos blocos selecionados pelo critério  $Z(v_i) > z$ . Logo, pela definição, a função metal contido é definida, em proporção, pela integral:

$$Q(z) = \int_z^{\infty} z \cdot f(z) dz.$$

É importante observar que para  $z = 0$ , tem-se,  $Q(0)$  que corresponde ao teor médio ( $m$ ) do depósito mineral inteiro.

$$Q(0) = \int_0^{\infty} z \cdot f(z) dz = E[Z] = m$$

A  $E[Z]$  refere-se a esperança matemática dos teores  $Z(v)$ . Neste caso,  $Q(0)$  é definida pela expressão de centro de massa.

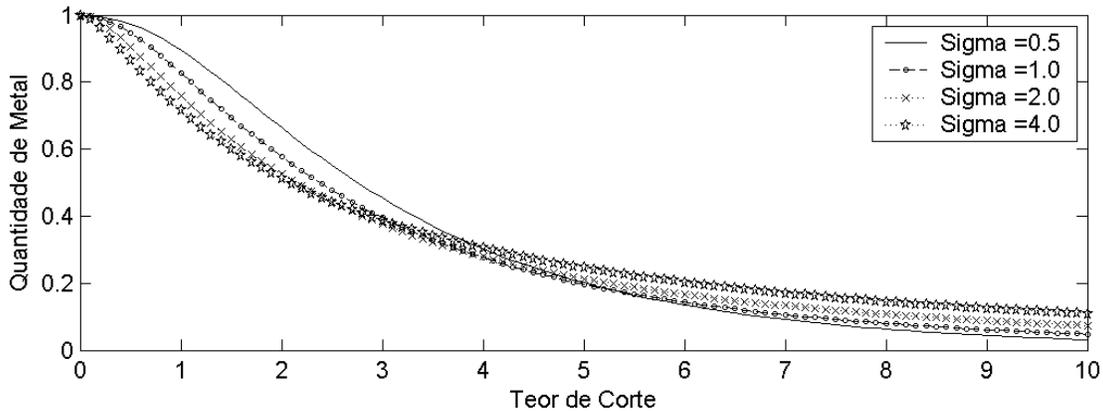


Figura 3.6: Curva metal contido  $x$  teor de corte da função lognormal para diversos desvios padrões

### 3.4.3 Função Metal x Tonelagem

O metal contido em função da tonelagem  $[Q(T)]$  fornece o metal contido  $Q(z)$ , em uma porção da reserva  $T(z)$ , a qual seus blocos possuem teores  $Z(v_i)$  maiores que o teor de corte  $z$ . Tal função é de vital importância para o estudo da seletividade.  $Q(T)$  representa a concentração de metal (de riqueza) de um depósito mineral. Isto é, uma pequena quantidade de blocos do depósito pode conter uma grande proporção de metal contido em todo o depósito. A função  $Q(T)$  é definida pela expressão:

$$Q(T) = \int_0^{+\infty} \min(T, T(u)) du$$

A função é sempre crescente e côncava. A representação gráfica desta função é de grande importância para o estudo da seletividade, pois, a área delimitada pela função  $Q(T)$  e a primeira bissetriz, é igual a metade do índice de seletividade  $S$ . Sendo o mesmo uma medida de dispersão

da variável aleatória  $Z$ , semelhante a variância  $\sigma$ .

O índice de seletividade é dado por  $S = \frac{\Delta}{2m}$ , onde  $\Delta$ , para o caso teórico:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x - y| f(x) f(y) dx dy.$$

Para o caso experimental:

$$\Delta = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |x_i - x_j|.$$

Onde  $n$  e  $m$  são o número de dados e o teor médio, respectivamente.

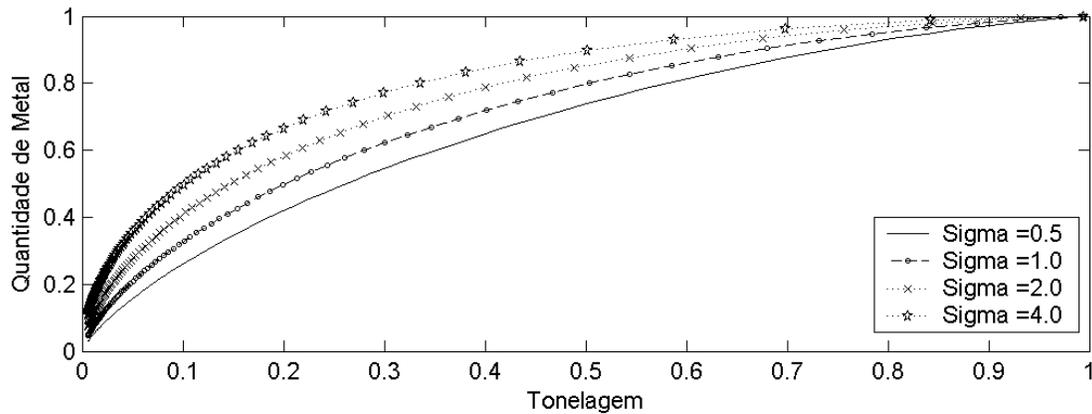


Figura 3.7: Curva metal contido versus tonelagem da função lognormal, para diversos desvios padrões

### 3.4.4 Função Teor Médio

A função Teor Médio  $m(z)$  corresponde ao teor médio dos blocos selecionados (daqueles com teor  $Z(v_i) > z$ ), os quais vão compor a reserva recuperável.  $m(z)$  é calculado pela relação:

$$m(z) = \frac{Q(z)}{T(z)}$$

$m(z)$  é uma função crescente, pois à medida em que o teor de corte ( $z$ ) aumenta, os blocos mais pobres serão abandonados. Assim, apenas os blocos mais ricos serão selecionados, fazendo com que o teor médio dos blocos selecionados [ $m(z)$ ] cresça cada vez que se aumenta  $z$ .

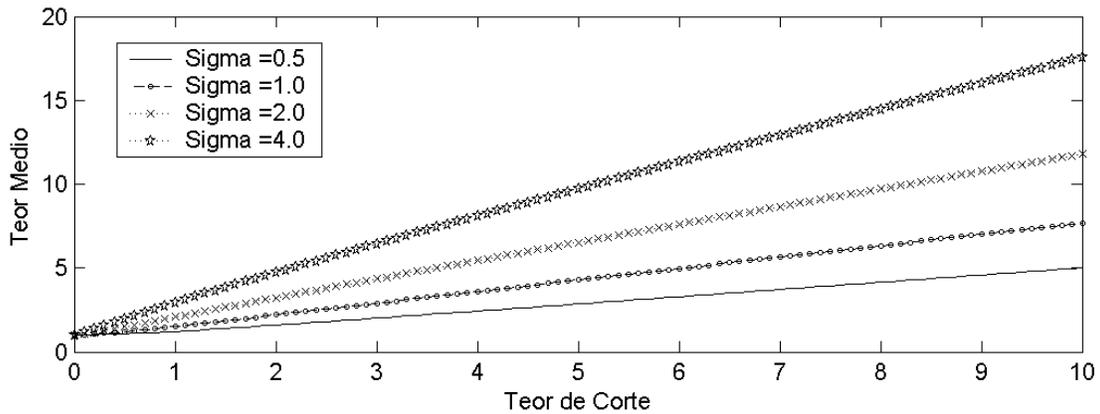


Figura 3.8: Curva Teor Médio  $x$  teor de corte da função lognormal para diversos desvios padrões

### 3.4.5 Esperança Condicional

Sendo  $Z(x)$  uma variável aleatória e deseja-se estimar a probabilidade desta variável ser maior que um corte  $s$ . Uma medida teórica do valor  $x_0$ , de  $N$  pontos amostrais  $x_\alpha : \alpha = 1, \dots, N$  de uma função  $F(z, z_1, \dots, z_N)$  é definida por:

$$F(z, z_1, \dots, z_N) = \Pr Z(x_0) < z, Z(x_1) < z_1, \dots, Z(x_N) < z_N.$$

Para esta distribuição, pode-se deduzir que:

- As marginais  $F_0(z) = \Pr Z(x_0) < z, F_1(z) = \Pr Z(x_1) < z, \dots, F_N(z) = \Pr Z(x_N) < z$ ;
- A distribuição condicional  $F_0(z|z_1, \dots, z_N)$  de  $Z(x_0)$  quando  $Z(x_\alpha)$  são os valores de  $z_\alpha$ .

O estimador ótimo de  $I(z)$  no ponto  $x_0$ , é a esperança condicional de  $1_{Z(x_0) < z}$ , isto é precisamente  $F_0(z|z_1, \dots, z_N)$ . Considere também  $Y$ , uma transformação gaussiana de  $Z$  pela função de anamorfose  $\varphi : Z = \varphi(Y)$ . Logo,  $Z$  pode ser expressado por:

$$Z(x) = \varphi[Y^*(x) + \sigma^*(x)W(x)] \quad (3.6)$$

Onde,  $Y^*$  e  $\sigma^*$  são respectivamente a krigagem simples de  $Y$  avaliada nos dados de  $Y_\alpha$  e o desvio padrão da krigagem.  $W(x)$  é a função gaussiana normalizada, espacialmente independente de  $Y^*$ . A probabilidade de  $Z$  ser maior que o teor de corte  $s$  é diretamente derivada da equação precedente:

$$\Pr[Z(x) > s] = \Pr[Y^*(x) + \sigma^*(x)W(x) > s] \quad (3.7)$$

$$= \Pr \left[ W(x) > \frac{\varphi^{-1}(s) - Y^*(x)}{\sigma^*(x)} \right] \quad (3.8)$$

$$= 1 - G \left( \frac{\varphi^{-1}(s) - Y^*(x)}{\sigma^*(x)} \right) \quad (3.9)$$

Onde  $G$  é função de distribuição acumulada. Na prática, o modelo gaussiano possui boas propriedades. Como é raro encontrar na geociência uma variável com distribuição gaussiana, é possível transformar uma variável com qualquer distribuição em uma com distribuição gaussiana.

Se  $Z$  é uma função aleatória com uma distribuição marginal contínua  $F(dz)$  e se  $G(y)$  é uma função de distribuição acumulada normal (ou gaussiana), a transformação  $Y = G^{-1}(F(Z))$  é a transformação de  $Z$  em uma função aleatória com uma distribuição marginal gaussiana padrão. A transformação gaussiana pode ser definida graficamente (figura 3.9) por meio de histograma empírico. Cada ponto  $(z, F(z))$  do gráfico é associado a um ponto  $(y, G(y))$  tal que  $F(z) = G(y)$ .  $Z$  também pode ser obtido por meio de uma transformação  $Y$  por  $Z(x) = \varphi(Y(x))$ , a esta função  $\varphi = F^{-1}G$  denomina-se função anamorfose, que pode ser obtida pela expansão de um polinômio de Hermite.

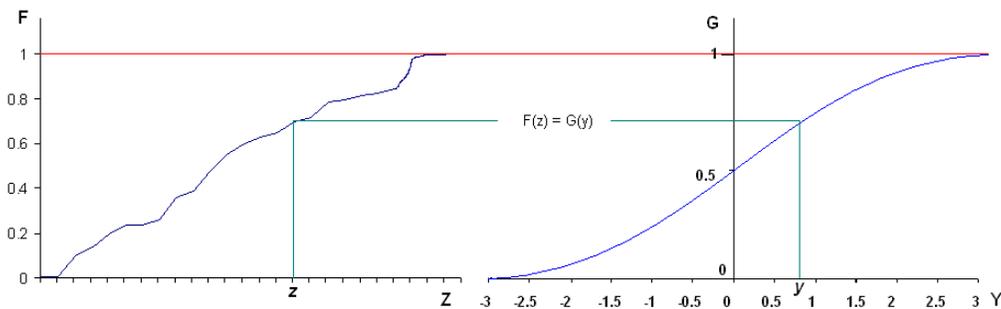


Figura 3.9: Exemplo de um gráfico de Transformação Gaussiana

### 3.4.6 Variável Normal Condicionada

Sendo  $(Y_0, Y_1)$  um par de variáveis aleatórias com distribuições normais bivariadas e coeficiente de correlação  $\rho$ :

$$U = \frac{Y_0 - \rho Y_1}{\sqrt{1 - \rho^2}}. \quad (3.10)$$

Para uma variável normal padrão, tem-se:

$$E(U) = 0$$

$$Var(U) = 1$$

Conseqüentemente,  $U$  é uma variável normal padrão. Portanto,  $cov(U, Y_1) = 0$ . Então,  $U$  e  $Y_1$  não são correlacionadas. Note que os pares  $(U, Y_1)$  são distribuições normais bivariadas (porque os pares  $U$  e  $Y_1$  são combinações lineares de  $Y_0$  e  $Y_1$ , que são bivariados normais). Logo, pode-se escrever a seguinte expressão:

$$Y_0 = \rho Y_1 + \sqrt{1 - \rho^2} U.$$

Onde  $U$  é uma variável normal independente de  $Y_1$ . Portanto, como se conhece que  $Y_1 = y_1$ , tem-se:

$$(Y_0|Y_1 = y_1) = \rho y_1 + \sqrt{1 - \rho^2} U. \quad (3.11)$$

Por esta dedução de condicionamento da variável  $Y_0$ , a média é  $E(Y_0|Y_1 = y_1) = \rho y_1$  e com variância igual  $1 - \rho^2$ .

Se  $Y_1 = y_1$ , pode-se usar o valor  $E(Y_0|Y_1 = y_1)$  e estimar  $Y_0$ . Nota-se, que a estimativa de variância de  $Y_0$  é originado de  $Y_1 = y_1$  e  $1 - \rho^2$  que não depende de  $y_1$ . Deduzindo-se a equação de regressão de  $Y_0$ , conhecendo  $Y_1$ , tem-se:

$$E(Y_0|Y_1) = \rho Y_1.$$

A equação acima é linear. Assim, usando a expressão do estimador de  $I(Y_0 < y)$ , vinda de  $Y_1 = y_1$ , tem-se:

$$E(I_{Y_0 < y}|Y_1 = y_1) = P(Y_0 < y|Y_1 = y_1) = G\left(\frac{y - \rho y_1}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right).$$

### 3.4.7 Mudança de Suporte

Quando se quer obter uma distribuição de blocos  $Z(v)$  por meio de teores conhecidos  $Z(x)$ , é necessário que o modelo satisfaça certas condições. Primeiramente, a média dos valores deve permanecer constante,  $E[Z(x)] = E[Z(v)]$ . O segundo ponto, é que o cálculo da variância da distribuição de  $Z(v)$  pode ser feita por meio do variograma  $\gamma(h)$  de  $Z(v)$ ,  $VarZ(v) = varZ(x) - \bar{\gamma}(v, v)$ . O termo  $\bar{\gamma}(v, v)$  representa o comportamento da variabilidade do bloco, ou seja, a dispersão

de variância dos pontos dentro do bloco  $v$ .

$$\bar{\gamma}(v, v) = \frac{1}{v^2} \int \int \gamma(x - y) dx dy.$$

O resultado entre os pontos e o bloco é chamado de relação de Cartier's e pode ser expressa pela relação:

$$E[z(\underline{x})|Z(v)] = Z(v).$$

Onde  $\underline{x}$  é chamado de ponto aleatório localizado dentro do bloco  $v$ . MATHERON provou que esta relação garante ordem de relacionamento entre as curvas de quantidade de metal e de tonelagem de minério em relação ao benefício convencional nas curvas de teores de corte.

Assim, um modelo discreto gaussiano pode ser construído, tendo uma variável  $Z(v)$  que pode ser representada pela função  $\varphi_v$  de uma variável normal  $Y_v$ :

$$Z(v) = \varphi_v(Y_v).$$

Reescrevendo a equação de Cartier's, para determinar  $\varphi_v$ :

$$E[\varphi(Y(\underline{x}))|\varphi_v(Y_v)] = \varphi_v(Y_v),$$

ou

$$\varphi_v(Y_v) = E[\varphi(Y(\underline{x}))|(Y_v)].$$

Para avaliar algumas hipóteses, assume-se que os pares  $(Y_v, Y(\underline{x}))$  são uma distribuição normal bivariada com coeficiente de correlação  $r$ . Desde que  $Y_v$  e  $Y(\underline{x})$  sejam variáveis normais, a distribuição condicional de  $Y(\underline{x})$  vêm de  $Y_v = y_v$  sendo normal com média  $ry_v$  e variância  $1 - r^2$ :

$$Y(\underline{x}) = rY_v + \sqrt{1 - r^2}U.$$

Usando-se a função anamorfose  $\varphi_v$  dos blocos:

$$\varphi_v(Y_v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(rY_v + \sqrt{1 - r^2}u) g(u) d(u). \quad (3.12)$$

Onde  $g(u)$  é a função de densidade da distribuição normal. Na prática, é mais conveniente usar os polinômios de Hermite. Sendo  $Y_v$  e  $Y(\underline{x})$  variáveis normais, a relação é similar:

$$E[H_n(Y(\underline{x})|Y_v) = r^n H_n(Y_v).$$

Então:

$$\begin{aligned} \varphi_v(Y_v) &= E[\varphi(Y(\underline{x})|Y_v)] \\ &= E\left[\sum_0 \varphi_n H_n(Y(\underline{x})|Y_v)\right] \\ &= \sum_0 \varphi_n E[H_n(Y(\underline{x})|Y_v)]. \end{aligned}$$

Logo:

$$Z(v) = \varphi_v(Y_v) = \sum_0 \varphi_n r^n H_n(Y_v). \quad (3.13)$$

Pode-se obter o coeficiente de anamorfose dos blocos pela multiplicação dos correspondentes pontos  $\varphi_n$  por  $r^n$ . A correlação entre os diferentes polinômios pode ser obtida por:

$$\text{var}Z(v) = \text{Var}\varphi_v(Y_v) = \sum_1 (\varphi_n)^2 r^{2n}. \quad (3.14)$$

Desde que  $\text{var}Z(v) = \text{Var}Z(x) - \bar{\gamma}(v, v)$ , o valor de mudança de suporte  $r$  pode ser calculado, o que corresponde ao conhecimento da variância dos blocos.

No caso da krigagem Disjuntiva, para a mudança de suporte de estimativas locais para uma função de Indicatriz  $I(Z(v) < z)$ , pode ser expressa em termos de polinômio de Hermite  $H_n(Y_v)$ :

$$I_{Y_v < y} = G(y) + \sum_1 \frac{1}{\sqrt{n}} H_{n-1}(y) g(y) H_n(Y_v).$$

## Capítulo 4

# Cópula e a Geoestatística

*Neste capítulo, será mostrado como a cópula pode ser utilizada num dos pontos principais da geoestatística mineira, principalmente no que diz respeito ao acesso das incertezas. Discorre-se, primeiramente, sobre o conceito de validação cruzada, apresentando a definição de reserva ilusória, ótima e ideal: é introduzido o conjunto de dados de Walker Lake, para exemplificar os resultados obtidos via cópula, e por fim, são comparadas a krigagem, a simulação seqüencial gaussiana e a cópula .*

### 4.1 Validação Cruzada

Para aumentar o grau de certeza do valor real de uma jazida, é necessário realizar uma amostragem muito adensada, porém isto é impraticável devido aos altos custos envolvidos. Uma alternativa comum é optar pela operação de validação cruzada, permitindo comparações entre os valores estimados  $Z^*(x_i)$  e os valores verdadeiros  $Z(x_i)$ .

A validação cruzada é uma via para comparar as suposições impostas em cada modelo de estimativa (desde a escolha dos parâmetros do variograma até o tamanho da vizinhança de krigagem) ou sobre os dados (valores que não se ajustam em sua vizinhança gerando os valores anômalos). Para a realização de estimativas é importante verificar a adequação do modelo de variograma (ou de covariância) para assegurar resultados mais confiáveis.

O procedimento para realizar a validação cruzada consiste em remover o valor amostrado  $Z(x_i)$  do banco de dados e fazer uma estimativa  $Z^*(x_i)$ , na mesma posição  $x_i$ , usando as outras  $n - 1$  amostras localizadas na vizinhança escolhida, e assim procedendo-se com todos os valores amostrais separadamente. A diferença entre o valor amostrado  $Z(x_i)$  e o estimado  $Z^*(x_i)$ , isto é:  $Z(x_i) - Z^*(x_i)$ , constitui o erro cometido na estimativa, indicando o efeito dos parâmetros escolhidos (vizinhança e modelo de variograma). Segundo REMACRE e CORNETTI (1996), a validação cruzada auxilia a análise de uma série de fatores de estimativa, tais como:

- Comparar valor médio estimado com valor médio amostrado (não viés);
- Comparar histograma amostral com histograma dos dados estimados;
- Verificar a independência do erro  $Z(x_i) - Z^*(x_i)$  e da variância da krigagem;
- Verificar o não viés condicional através do estudo da nuvem de dispersão  $Z(x_i) * Z^*(x_i)$ .

Utilizando o projeto de Walker Lake, para a variável  $V$ , foi feito o variograma experimental e o mesmo foi ajustado conforme ISAAKS e SRIVASTAVA (1998), a vizinhança utilizada foi a mesma sugerida pelos autores, conforme apêndice.

Um exemplo de gráfico de dispersão da validação cruzada é apresentado na Figura 4.1 . O estudo da nuvem de dispersão  $Z(x_i) * Z^*(x_i)$  gerada pela validação cruzada é de grande importância para a estimativa de reservas, devendo apresentar as seguintes características:

- simetria em relação a primeira bissetriz;
- concentração dos pontos ao redor da primeira bissetriz.

Na Figura 4.1, a linha vermelha representa a primeira bissetriz, em verde é mostrada a curva de regressão e os pontos vermelhos indicam a esperança condicional. A partir desse gráfico é possível constatar que os valores baixos teores são superestimados e os valores altos são subestimados. Os dados desta tabela comprovam os resultados mostrados por ARMSTRONG e GALLI (2002).

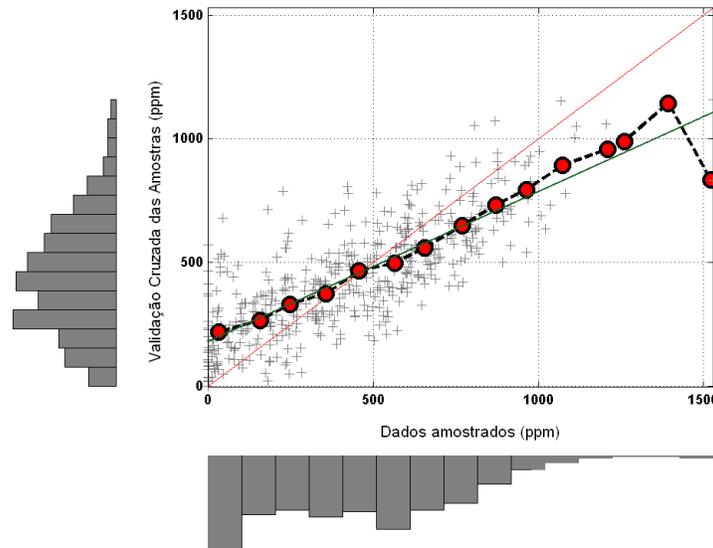


Figura 4.1: Validação Cruzada da Variável V de Walker Lake, mostrando que teores baixos são subestimados e teores altos são superestimados

Embora o variograma seja bem ajustado, nota-se que existe um viés na krigagem dos pontos amostrados. Além disso, é possível observar que de acordo com o teor de corte adotado, mudanças significativas ocorrem nas correlações, o que pode ser comprovado ao se analisar a Tabela 4.1, na qual são apresentados os coeficientes de correlação em função do teor de corte adotado.

**Tabela 4.1 - Alteração nos coeficientes de correlação em função do teor de corte adotado**

Teor de Corte	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Abaixo do Corte	0.245	0.245	0.331	0.429	0.516	0.582	0.659	0.696	0.746	0.764
Acima do Corte	0.776	0.740	0.735	0.689	0.686	0.651	0.590	0.539	0.577	0.492

Normalmente quando se procede a validação de qualquer método de estimativa espera-se que, globalmente, não se tenha viés.

Para se assegurar de que o modelo de variograma, adotado na validação cruzada, seja adequado para a estimativa de reservas por krigagem (ou cokrigagem) deve-se verificar se o erro médio fornecido pela validação cruzada é próximo a zero:

$$E [Z(x_i) - Z^*(x_i)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [Z(x_i) - Z^*(x_i)] \cong 0.$$

Para o problema em estudo, tem-se  $E [Z(x_i) - Z^*(x_i)] = 0.0137$ , ou seja, muito próximo do valor desejado, já que a média dos dados é 436,35 ppm. Porém, ao se analisar o histograma dos dados (Figura 4.2), observa-se que existe uma certa variabilidade e grandes erros podem ser cometidos.

Verificando-se apenas o valor global do viés, pode-se dizer que não existe viés aparente. Se o erro fosse um valor significativo negativo (ou positivo) representaria sistematicamente uma sobrestimativa (ou uma subestimativa). Assim, antes do início do projeto, é possível estar ciente dos efeitos econômicos envolvidos em reservas minerais sobrestimadas ou subestimadas. Porém em casos como o apresentado, onde o erro está próximo a zero, uma análise realizada somente observando o valor global, o viés condicional estaria encoberto (conforme Figura 4.1).

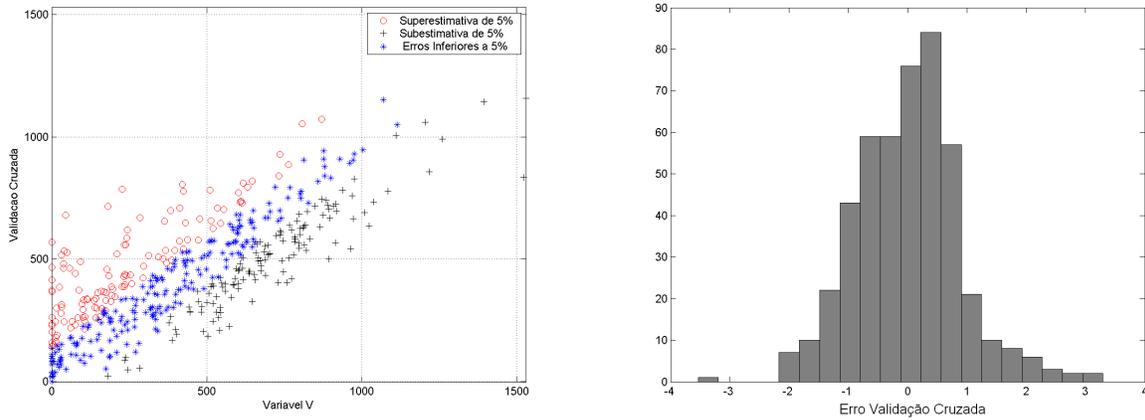


Figura 4.2: Erro da Validação Cruzada

Com os dados apresentados anteriormente, foi executada a krigagem ordinária pontual de Walker Lake, e os dados foram comparados com os dados reais, como é mostrado na Figura 4.3. Comparando a primeira bissetriz (linha vermelha) com a reta de regressão (linha verde) pode-se concluir que o valor estimado realmente foi enviesado.

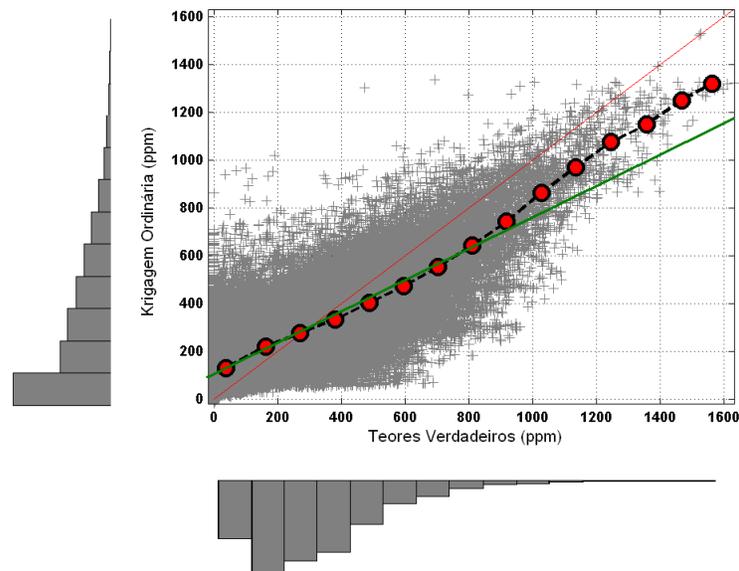


Figura 4.3: Gráfico de dispersão da variável  $V$  estimada e os teores reais de Walker Lake, mostrando que teores baixos são subestimados e teores altos são superestimados

O coeficiente de correlação dos dados da validação cruzada é de 0.795 e o da estimativa é 0.809, ou seja, valores bem próximos. Contudo, na Tabela 4.2, onde se apresentam os coeficientes de correlação em função do teor de corte, nota-se que dependendo do teor de corte, a correlação se inverte, podendo ocorrer superestimativa ou subestimativa.

**Tabela 4.2 - Comparação entre os coeficientes de correlação em função do teor de corte**

Teor de Corte	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Abaixo do Corte	0.320	0.441	0.519	0.577	0.635	0.682	0.721	0.748	0.768	0.783
Acima do Corte	0.765	0.744	0.724	0.701	0.685	0.676	0.663	0.659	0.642	0.636

O efeito da escolha do teor de corte e do coeficiente de correlação respectivo é refletido nas curvas de parametrização de reservas. Para esta krigagem pontual, os impactos em termos de previsão da tonelagem e quantidade de metal são afetados diretamente pelo teor de corte. Observa-se que a tonelagem pode ser superestimada até um determinado valor de teor de corte e depois passa a ser subestimada. Já em termos de quantidade de metal a curva apresenta um valor maior que o valor esperado da krigagem, apesar da curva da validação cruzada apresentar a quantidade de metal maior que os valores das amostras (Figura 4.4).

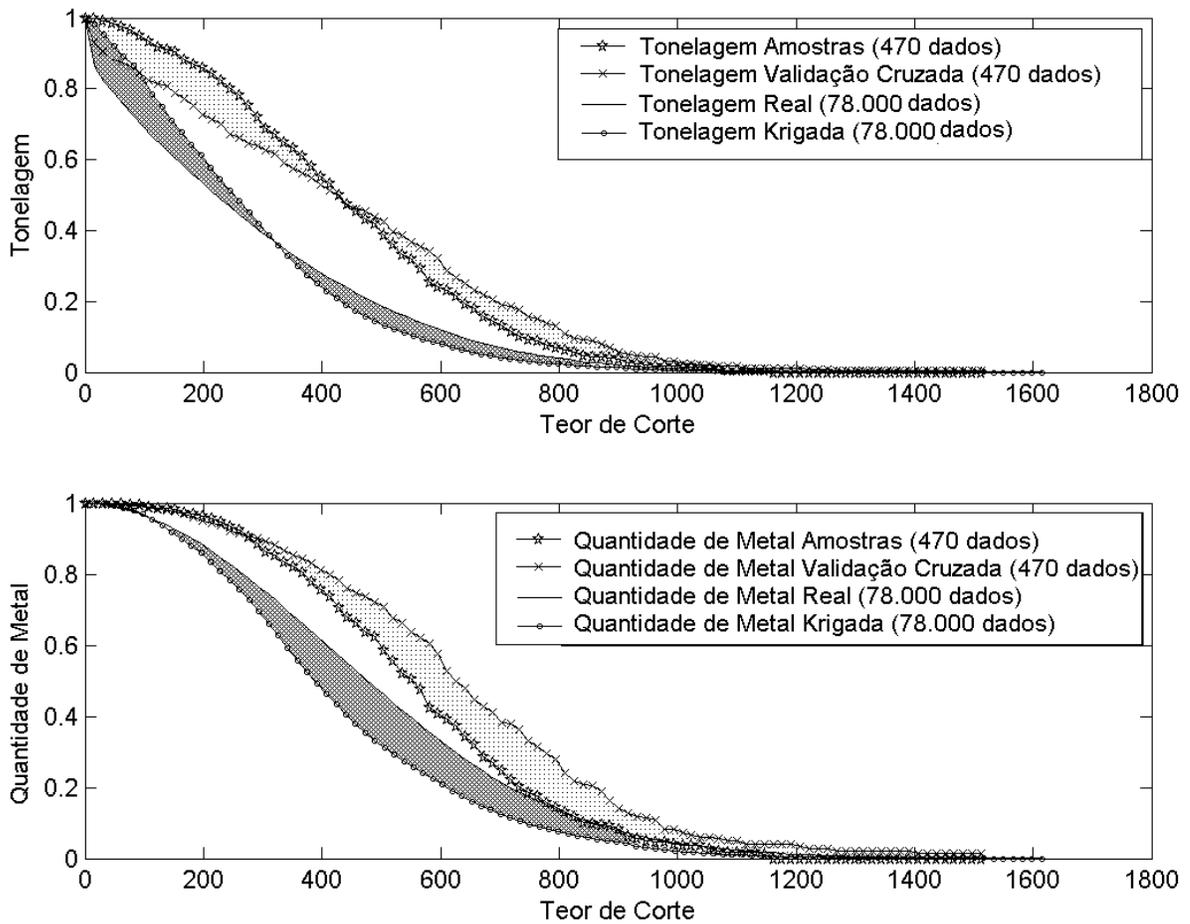


Figura 4.4: Curvas de Parametrização da Estimativa e das Amostras

Comparando o erro entre os valores estimados e os valores verdadeiros, ou seja, entre as amostras e a validação cruzada, krigagem e dados reais (Figura 4.5), conclui-se, por meio da validação cruzada, que as curvas de reservas estimadas pela krigagem apresentaram um viés.

O viés condicional na krigagem é o problema geral apresentado pelos sul-africanos nas minas de ouro, estudadas de maneira quantitativa por KRIGE (1951), em que ele utilizou um modelo empírico (linear) para determinar as diferenças entre as médias das amostras e a superestimativa e subestimativa dos blocos de minério. KRIGE assumiu que esta relação era linear e desenvolveu um sistema de regressão linear que quantificava o viés condicional.

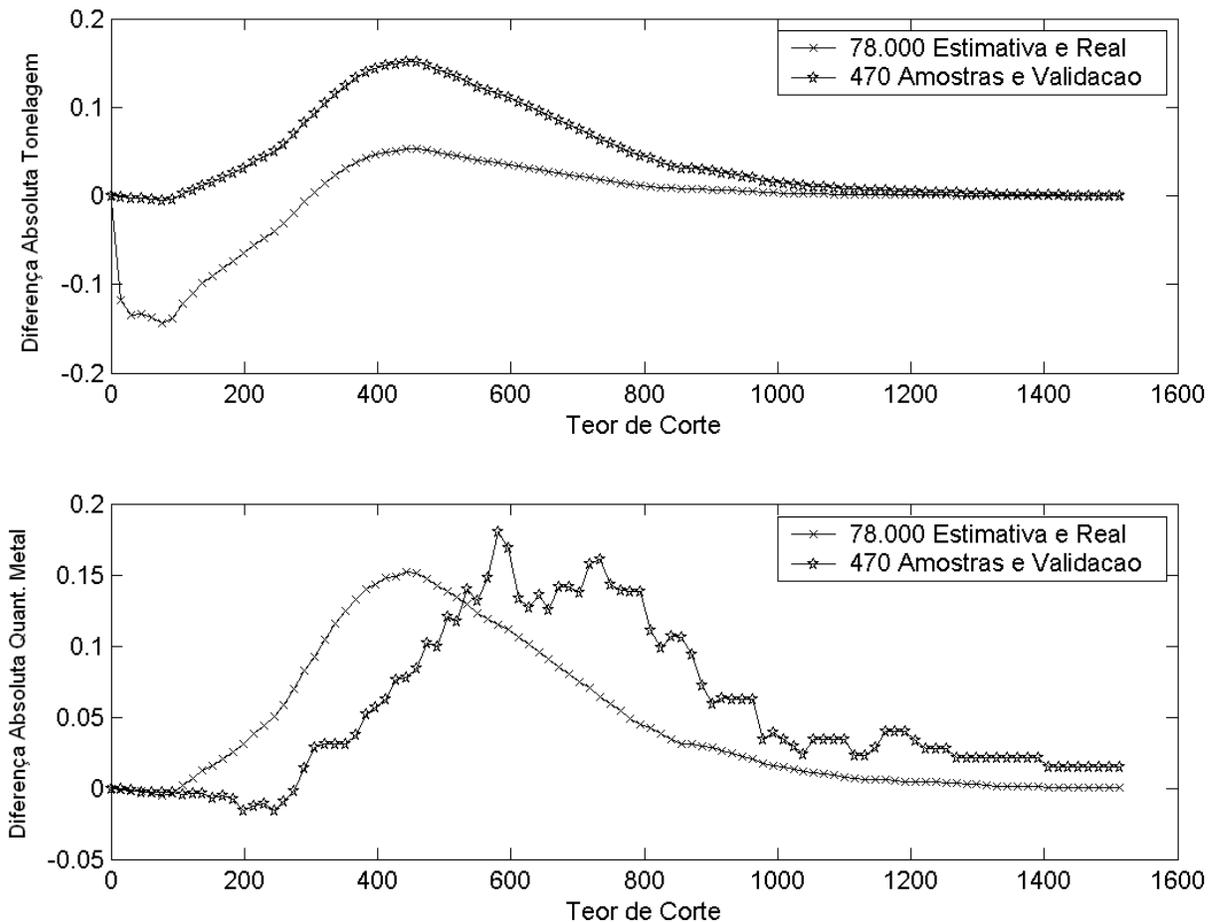


Figura 4.5: Erro entre as Estimativas e os Dados Reais

A regressão é feita em função da variância dos blocos reais e dos blocos estimados, isto pode ser visto no capítulo 5 do livro *Teoria das Variáveis Regionalizadas e suas Aplicações* (MATHERON, 1971), quando a regressão é próxima de um (1), o viés é pequeno, mas quando os valores são

diferentes o viés é grande. O problema está descrito também em JOURNEL e HUIJBREGTS (1978). MATHERON mostrou que a krigagem é um estimador linear que minimiza o viés condicional, isto pode ser visto nas figuras anteriores. O problema está em minimizar os erros da incorreta estimativa pela redução da superestimativa e subestimativa. Ele provou que a krigagem é o método que mais se aproxima do não-viés condicional.

Todas as tentativas de corrigir este viés, utilizam métodos lineares, buscando o ajuste das curvas por meio de correlações gerais. Como foi visto, estas correlações mudam com o teor de corte utilizado.

Cópula é uma nova maneira de modelar a estrutura de correlação entre as variáveis. Por meio de cópula não se dissocia a estrutura de correlação das distribuições marginais. A cópula é um método não-linear para correlacionar os dados. Foi criada uma função benefício para o Walker Lake, mais elaborada que a função  $Q - z_c * T$ , levando em conta custos de mineração e processamento, sendo expressa pela equação:

$$FB_v(z_c) = \eta(z_c) \cdot [Q_v(z_c) - T_v(z_c) \cdot z_c] - \xi \cdot (T - T_v(z_c) \cdot z_c)$$

Onde o  $\eta(z_c)$  representa a variável de preço por conteúdo metálico.  $Q_v(z_c)$  é a quantidade de metal em um volume  $v$ , quando se aplica um teor de corte  $z_c$  e  $T_v(z_c)$  é a tonelagem para o mesmo caso.  $\xi$  é uma constate de custos e  $T$  é a tonelagem lavrada.

O resultado da seleção é apresentado na Figura 4.6. Pode-se observar que a curva do benefício calculado para os dados reais (linha vermelha com círculo vermelho) é maior que aos dados estimados pela krigagem ordinária (linha azul, com asterisco). E ainda, dependendo do teor de corte da jazida, o benefício efetivo obtido pela seleção dos valores estimados por K.O. (linha azul, círculo azul) seria menor que o valor calculado, ou seja, as expectativas de teores, tonelagem e lucro do empreendimento não seriam alcançadas. Neste exemplo, até 400 ppm, o benefício esperado pela krigagem não é atingido, a curva mostra que a seleção feita por meio dos teores da krigagem não

alcança seu objetivo em termos de benefícios.

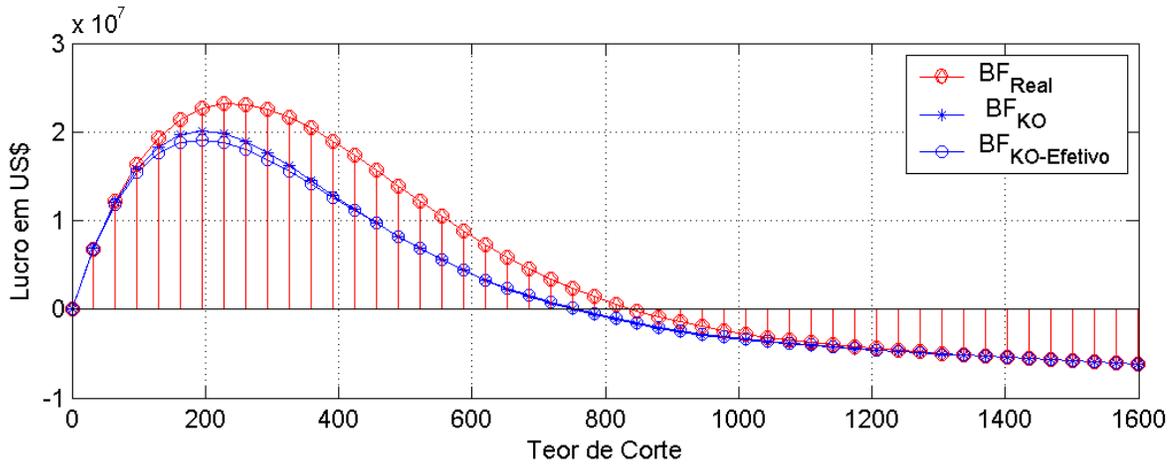


Figura 4.6: Benefício de Walker Lake, para a seleção perfeita, para a estimativa e o efetivo obtido pela krigagem

## 4.2 A Seletividade das Distribuições

A parametrização de reservas seleciona a porção da reserva que poderá ser lavrada economicamente. MATHERON (1981) apresentou aplicações da validação cruzada, definindo conceitos de reservas e realizando comparações entre elas.

MATHERON (1981) dá um exemplo típico, em que se tem  $Z(v_i)$  como o teor de um bloco de volume  $v_i$  e  $Z(x_i)$  o teor de uma amostra, quase pontual, localizada aleatoriamente, segundo uma lei uniforme, na posição  $x_i$  dentro do bloco  $v_i$ , sendo  $F_{Z(x)}$  mais seletiva que  $F_{Z(v)}$  (efeito suporte). Fazendo  $\varphi = E[Z(v_i)|Z(x_i)]$  a esperança condicional de  $Z(v_i)$  em  $Z(x_i)$ , tem-se que  $F_{Z(v)}$  é mais seletiva que  $F_\varphi$  (que representa o efeito informação).

Para o cálculo de reservas minerais, a princípio dispõe-se apenas dos valores amostrais, quase pontuais, dos teores  $Z(x_i)$ . Então, MATHERON (1981) define reserva ilusória como aquela formada

pelos blocos, os quais foram selecionados de modo a conter amostra com teor de metal  $Z(x_i) \geq z$ . Então, as funções de recuperação podem ser definidas pela parametrização diretamente dos teores  $Z(x_i) \geq z$ , sendo expressas por:

$$T_{il}(z) = T_{Z(x)}(z).$$

$$Q_{il}(z) = Q_{Z(x)}(z).$$

$$B_{il}(z) = B_{Z(x)}(z).$$

O índice *il* significa ilusória, e  $Z(x)$  a parametrização sobre os teores das amostras. O termo ilusória refere-se ao fato de se estimar o teor de metal do bloco  $Z^*(v_i)$  pelo teor de metal da amostra  $Z^*(x_i)$ , ou seja, a reserva ilusória poderia ser, também, denominada de reserva estimada ou reserva esperada.

O mesmo autor define reserva efetiva como aquela que é efetivamente recuperada, com base no critério de seleção  $Z(x_i) \geq z$ :

$$T_{ef}(Z(x_i) \geq z) = T_{Z(x)}(z).$$

$$Q_{ef}(Z(x_i) \geq z) = \int_{Z(x) \geq z}^{+\infty} \varphi(Z(x)) F_{Z(x)}(dZ(x)).$$

$$B_{ef}(Z(x_i) \geq z) = \int_{Z(x) \geq z}^{+\infty} [h(Z(x) - z)] F_{Z(x)}(dZ(x)).$$

O índice *ef* significa efetiva. De posse dos valores amostrados  $Z(x_i)$ , e com o uso de um estimador, realiza-se a estimativa dos teores dos blocos  $Z^*(v_i)$ . Como foi mencionado,  $Z^*(v_i)$  é uma estimativa, portanto, passível de erro.

Seriam obtidas as melhores relações tonelagem teor possíveis se os teores verdadeiros dos blocos  $Z(v_i)$  fossem conhecidos (ausência de efeito informação), o que é inacessível antes da lavra. MATHERON (1981) define reserva ideal como aquela que foi parametrizada por meio dos valores

dos teores verdadeiros dos blocos  $Z(v_i)$ , com corte em  $Z(v_i) \geq z$ :

$$T_{id}(z) = T_{Z(v)}(z).$$

$$Q_{id}(z) = Q_{Z(v)}(z).$$

$$B_{id}(z) = B_{Z(v)}(z).$$

Em que o índice *id* significa ideal. Como a reserva ideal é inacessível, ou seja, se conhece apenas  $Z(x_i)$  e não  $Z(v_i)$  antes da lavra, MATHERON propôs uma política de otimização que consiste em tomar o corte em  $\varphi$ , segundo o qual  $\varphi \geq z$ , onde  $\varphi$  é a seguinte função condicional:

$$\varphi = h(Z(x)) = E[Z(v)|Z(x)] \quad (4.1)$$

e, com base nisto define-se a reserva ótima como:

$$T_{opt}(z) = \int_{\varphi(Z(x)) \geq z}^{+\infty} F_{Z(x)}(dZ(x)). \quad (4.2)$$

$$Q_{opt}(Z(x_i) \geq z) = \int_{\varphi(Z(x)) \geq z}^{+\infty} h(Z(x)) F_{Z(x)}(dZ(x)). \quad (4.3)$$

$$B_{opt}(Z(x_i) \geq z) = \int_{\varphi(Z(x)) \geq z}^{+\infty} [h(Z(x)) - z] F_{Z(x)}(dZ(x)). \quad (4.4)$$

Que é o que se pode obter de uma situação real, onde o índice *opt* significa ótima. Com base nessas definições, conclui-se que:

$$B_{ef}(z) \leq B_{opt}(z) \leq B_{id}(z) \leq B_{il}(z).$$

A equação 4.1 exprime simplesmente que  $\varphi(Z(x)) \geq z$  é o melhor critério possível quando se conhece o teor da amostra  $Z(x_i)$  (da estimativa). E a diferença  $B_{opt}(z) - B_{ef}(z)$  resulta da escolha do critério inadequado  $Z(x) \geq z$ . A segunda inequação representa o efeito da informação e a terceira inequação o efeito do suporte. Se a parametrização for feita em  $T$  ao invés de  $z$ , tem-se que:

$$Q_{ef}(T) = Q_{opt}(T).$$

Com a restrição que a função  $\varphi(Z(x))$  seja crescente. E se assim for, tem-se:

$$T_{ef}(z) = T_{opt}(z_1).$$

$$Q_{ef}(z) = Q_{opt}(z_1).$$

Com  $\varphi(z) = z_1$ , onde se tem que os mesmos blocos são selecionados, mas para cortes diferentes, ou seja, consiste em obter uma coleção de  $\varphi(Z(v_i))$ , transformando cada um dos teores  $Z(v_i)$  em  $\varphi(Z(v_i))$  utilizando a esperança condicional acima.

Como  $F_{Z(x)}$  é mais seletiva que  $F_{Z(v)}$ , e esta mais seletiva que  $F_\varphi$ , tem-se que:

$$Q_{opt}(T) \leq Q_{id}(T) \leq Q_{il}(T).$$

### 4.3 Reserva Ideal via Cópulas

Para a krigagem pontual, utilizando cópulas gaussianas, é possível construir a função que define reserva ideal, utilizando informações obtidas por meio da validação cruzada com retorno via distribuição empírica<sup>1</sup> da krigagem.

A Figura 4.7, exemplifica como é a forma de distribuição bivariada entre os dados reais e a krigagem dos 78.000 pontos (em azul); na mesma figura é apresentada a esperança condicional (linha com círculos preenchidos de azul); e em cinza tem-se o mesmo para a cópula.

O critério para se escolher o número de dados a serem simulados igual ao número de dados krigados é uma forma de reproduzir todos os parâmetros que são desejados, sem a necessidade de transformações (Figura 4.8).

---

<sup>1</sup>Ver apêndice B

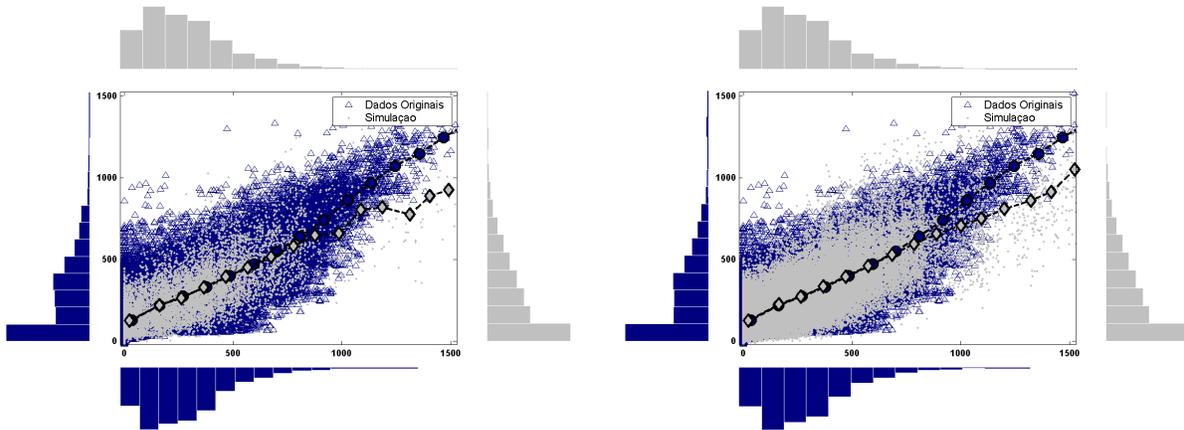


Figura 4.7: Gráfico de Dispersão de Walker Lake, Real vs krigagem (azul) e Cópulas 10.000 pontos simulados (direita) - Cópulas 50.000 pontos simulados (esquerda), com as respectivas esperanças condicionais e seus histogramas

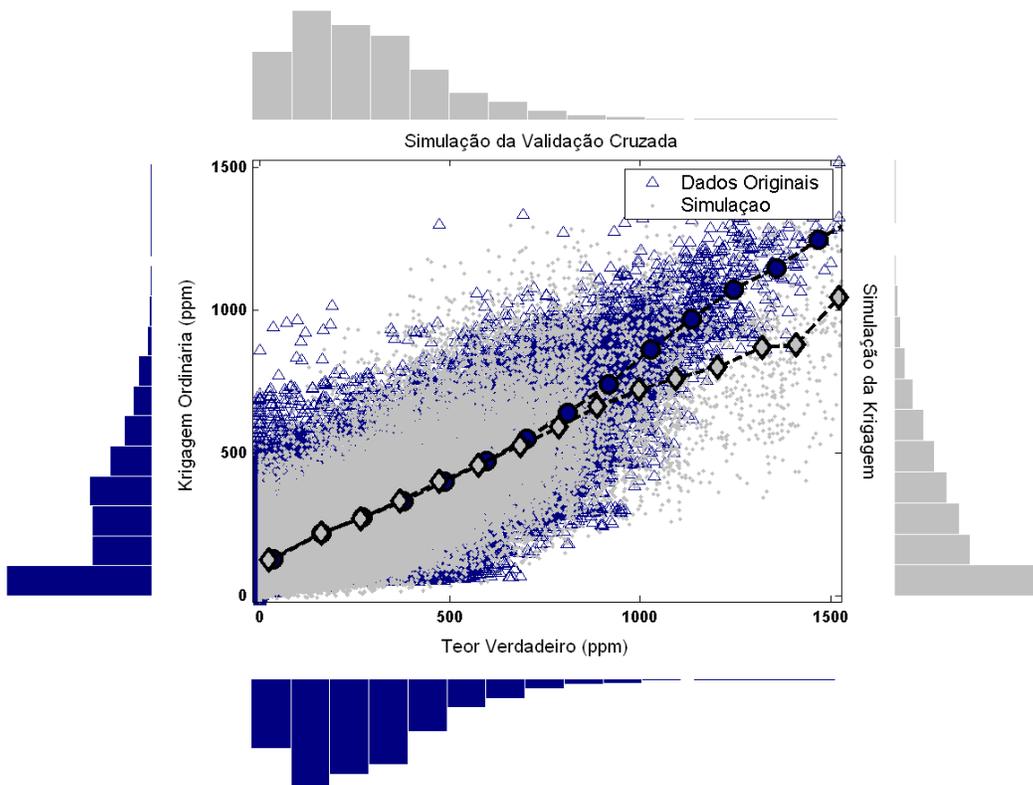


Figura 4.8: Gráfico de Dispersão de Walker Lake, Real vs krigagem (azul) e Cópulas 78.000 dados simulados (cinza), com as respectivas esperanças condicionais e seus histogramas

Pode-se verificar a inversão da krigagem nas curvas de tonelagem, sendo que a curva de tonelagem  $\phi(T_{Z^{c^*}(x)}|T_{z(x)})$  e a curva de quantidade de minério  $\phi(Q_{Z^{c^*}(x)}|Q_{z(x)})$  representam uma cópula condicionada pelos valores da krigagem; a outra, curva de tonelagem  $\psi(T_{Z^{c^*}(x)}|T_{z^*(x)})$ ; e a outra curva de quantidade de minério  $\psi(Q_{Z^{c^*}(x)}|Q_{z^*(x)})$  representam a cópula condicionada pela validação cruzada. Nota-se que até uma determinada quantidade de tonelagem que será retirada, a krigagem subestima o valor possível. As curvas de parametrização da cópulas, na estimativa pontual, são idênticas às curvas dos valores reais (Figura 4.9). Apesar de a forma da curva da validação cruzada via cópulas ser praticamente a mesma dos dados reais, é interessante considerar as duas curvas, como espaço de incerteza dos valores de tonelagem e qualidade do minério.

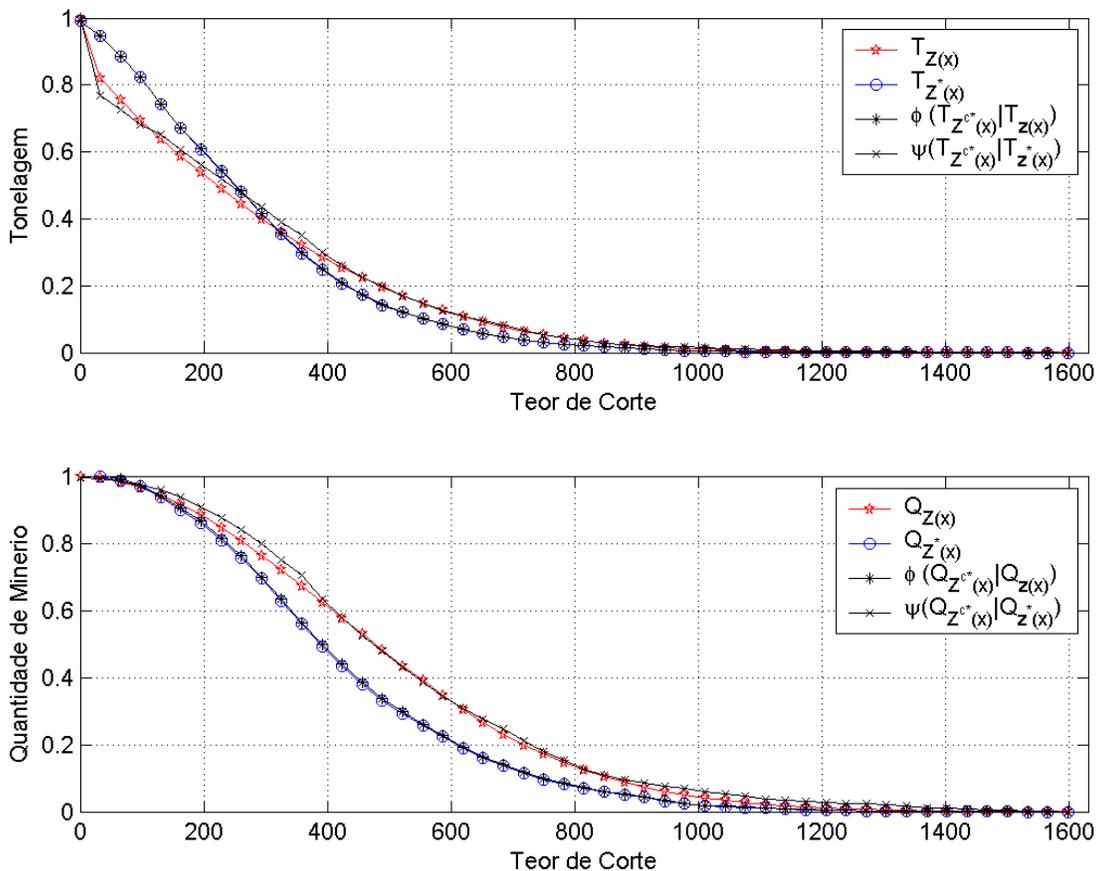


Figura 4.9: Curvas de Tonelagem vs teor de Corte (acima) e Quantidade de Metal e Teor Corte (abaixo)

Aplicando alguns valores de teores de corte (Tabela 4.3) pode-se notar depois de um certo valor, a krigagem passa a subestimar a tonelagem acima de um determinado teor de corte. Mas, sem o conhecimento dos teores verdadeiros, não se sabe o risco de sua estimativa, podendo-se ter lucro em um projeto, ou seja, uma tonelagem a mais de minério em um projeto que já tinha um retorno garantido, ou uma tonelagem menor que a esperada, obtendo-se prejuízo no projeto. A quantidade de minério na krigagem é sempre subestimada, devido à suavização imposta pelo estimador.

**Tabela 4.3 - Porcentagens da tonelagem acima de alguns teores de corte**

Teor de Corte	Teores Verdadeiros	krigagem Ordinária	$\phi(T_{Z^{c^*}(x)} T_{z(x)})$	$\psi(T_{Z^{c^*}(x)} T_{z^*(x)})$
065 (ppm)	75.50	88.45	88.58	72.87
260 (ppm)	44.39	47.98	48.23	47.67
425 (ppm)	25.49	20.66	21.00	25.94
620 (ppm)	10.75	6.98	7.13	10.85
750 (ppm)	5.26	3.05	3.11	5.42
850(ppm)	2.91	1.71	1.74	2.89

Em termos de quantidade de minério, nota-se que os valores previstos pela krigagem somente são atingidos para o primeiro teor de corte. Os outros valores são subestimados. Já para as cópulas, o valor real está entre os valores previstos. Isto garante uma região de incerteza, onde o valor real é uma das soluções possíveis (Tabela 4.4).

**Tabela 4.4 - Porcentagens da quantidade de minério obtidas de alguns teores de corte**

Teor de Corte	Teores Verdadeiros	krigagem Ordinária	$\phi(Q_{Z^{c^*}(x)} Q_{z(x)})$	$\psi(Q_{Z^{c^*}(x)} Q_{z^*(x)})$
065 (ppm)	98.34	98.69	99.12	98.51
260 (ppm)	80.72	75.72	76.25	83.97
425 (ppm)	57.73	43.40	44.11	57.81
620 (ppm)	30.53	19.03	19.42	30.85
750 (ppm)	17.13	9.65	9.85	17.84
850 (ppm)	10.41	5.89	6.00	10.76

De posse desses valores, foram calculadas as curvas de benefício. Na Figura 4.10, tem-se a curva de uma função benefício para os dados reais e conseqüentemente a seleção perfeita. O valor obtido pela krigagem foi bem abaixo do valor real, e isto ocorre, pois a quantidade de metal estimada é sempre menor que os valores reais, para este exemplo. As curvas obtidas por meio das cópulas conseguem acessar a incerteza do valor real, onde se tem uma região de valores possíveis para o benefício esperado.

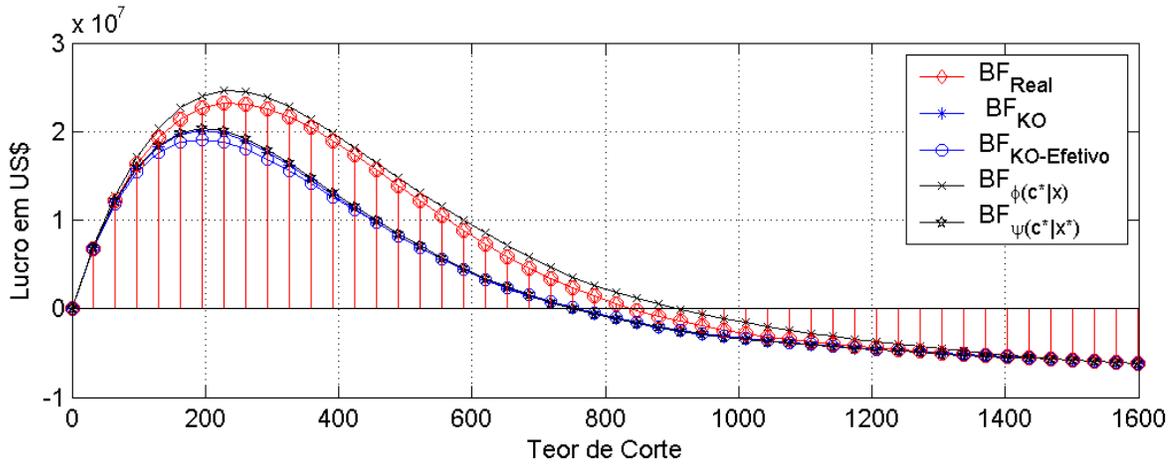


Figura 4.10: Benefício obtido via para os dados reais, krigagem ordinária e cópulas

A quantificação do erro da estimativa também pode ser feita, ou seja, antes do projeto iniciar, pode-se saber qual a quantidade de minério e a tonelagem que foram classificadas erroneamente pela krigagem ordinária. A Tabela 4.5 mostra que, dependendo do teor de corte, podem existir grandes erros de blocos de minério classificados como estéril e blocos de estéril classificados como minério.

**Tabela 4.5 - Benefício obtido para diferentes teores de corte. (em MM US\$)**

Teor de Corte	Teores Verdadeiros	k.O.	K.O.Efetiva	$BF_{\psi(c^* x^*)}$	$BF_{\tau(c^* x^{**})}$
065 (ppm)	12.2	12.1	11.9	12.7	12.2
260 (ppm)	23.1	19.0	18.1	24.5	19.2
425 (ppm)	17.4	11.2	11.1	18.2	11.5
620 (ppm)	7.31	3.28	3.31	8.56	3.43
750 (ppm)	2.35	-0.03	0.13	3.58	0.05
850 (ppm)	-0.02	-0.17	-0.15	-0.11	-0.16

A tonelagem de minério classificado como estéril prevista pela cópula, neste exemplo, é maior que a diferença entre os dados reais em relação a krigagem ordinária, mas esta diferença é no máximo de 2.15% (ver Figura 4.11). Por exemplo, no projeto de Walker Lake, para um teor de corte de 200 ppm, através das cópulas sabe-se que a krigagem terá classificado 7.5% dos blocos de minério como estéril e no final da lavra em posse dos teores verdadeiros a diferença seria menor que 1% do valor previsto antes de iniciar a lavra pela simulação via cópulas.

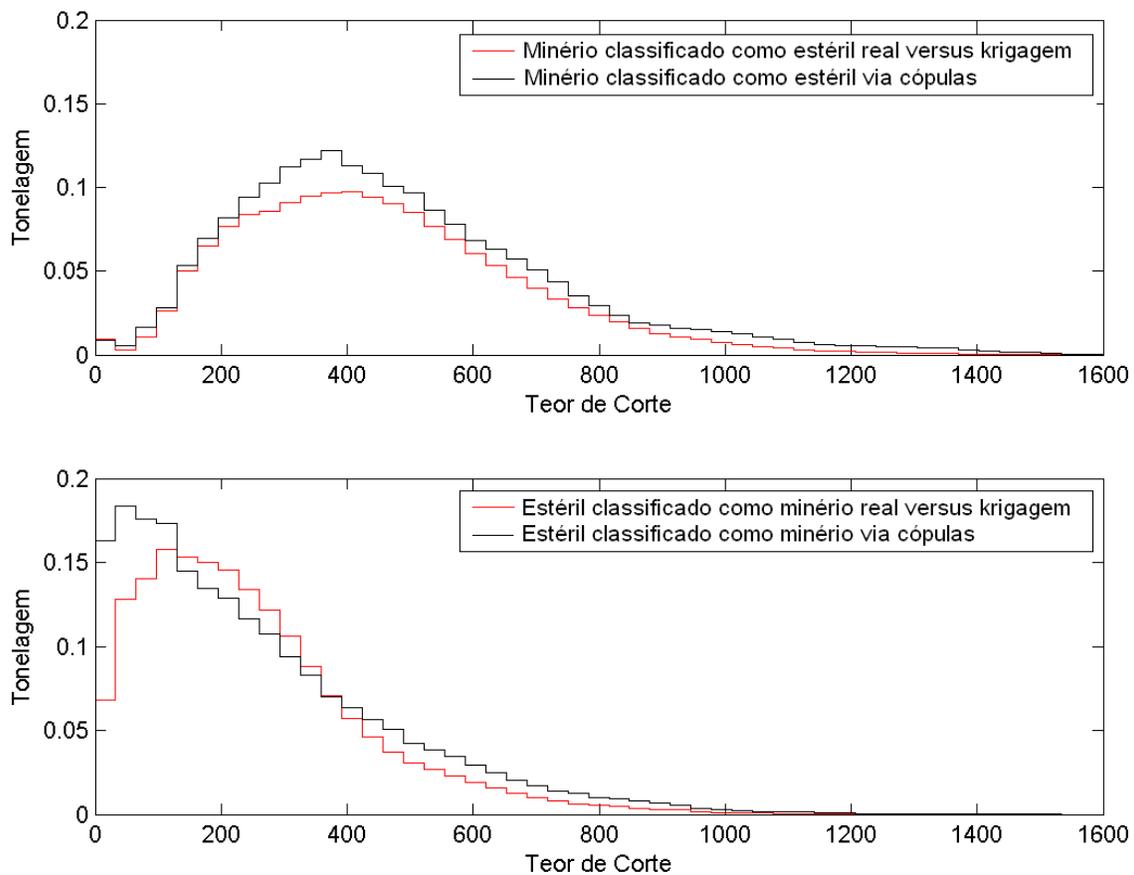


Figura 4.11: Percentagem de Tonelagem de blocos classificados erroneamente, comparando o valor real e o valor krigado (vermelho) e a previsão por cópulas (preto).

O mesmo acontece para a tonelagem de estéril que foi classificada como minério, com implicações diretas sobre a qualidade do produto. A Figura 4.12 mostra as diferenças percentuais

entre a tonelagem real e a tonelagem krigada em relação ao teor de corte. Assim, os valores possíveis, dos blocos classificados erroneamente, podem ser supostos antes de se conhecer os valores reais.

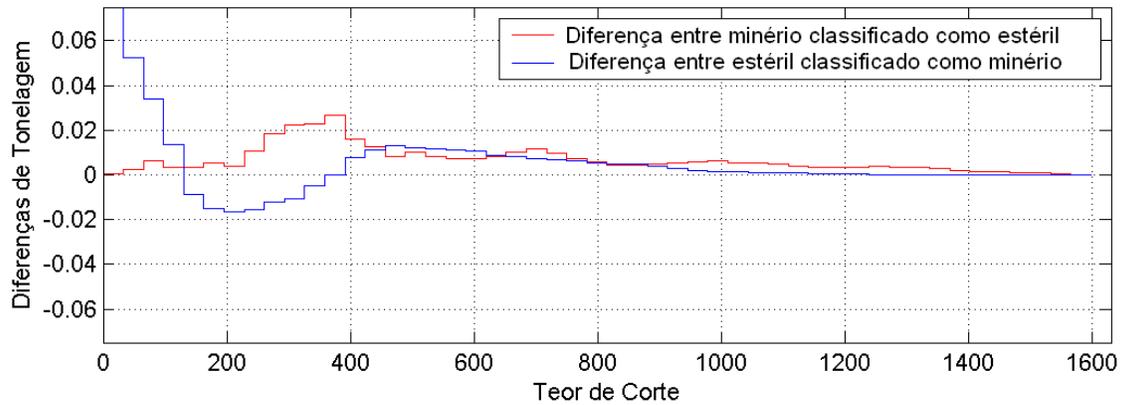


Figura 4.12: Diferenças percentuais de tonelagem nas classificações de minério e estéril entre os dados reais *versus* krigagem e cópulas.

A quantidade de metal recuperada, também é de grande importância, pois todo o benefício está relacionado com a quantidade de metal produzida. A expectativa de teores está na quantidade de minério lavrado. Como pode ser observado na Figura 4.13, a simulação via cópulas está muito próxima do que realmente vai ser lavrado.

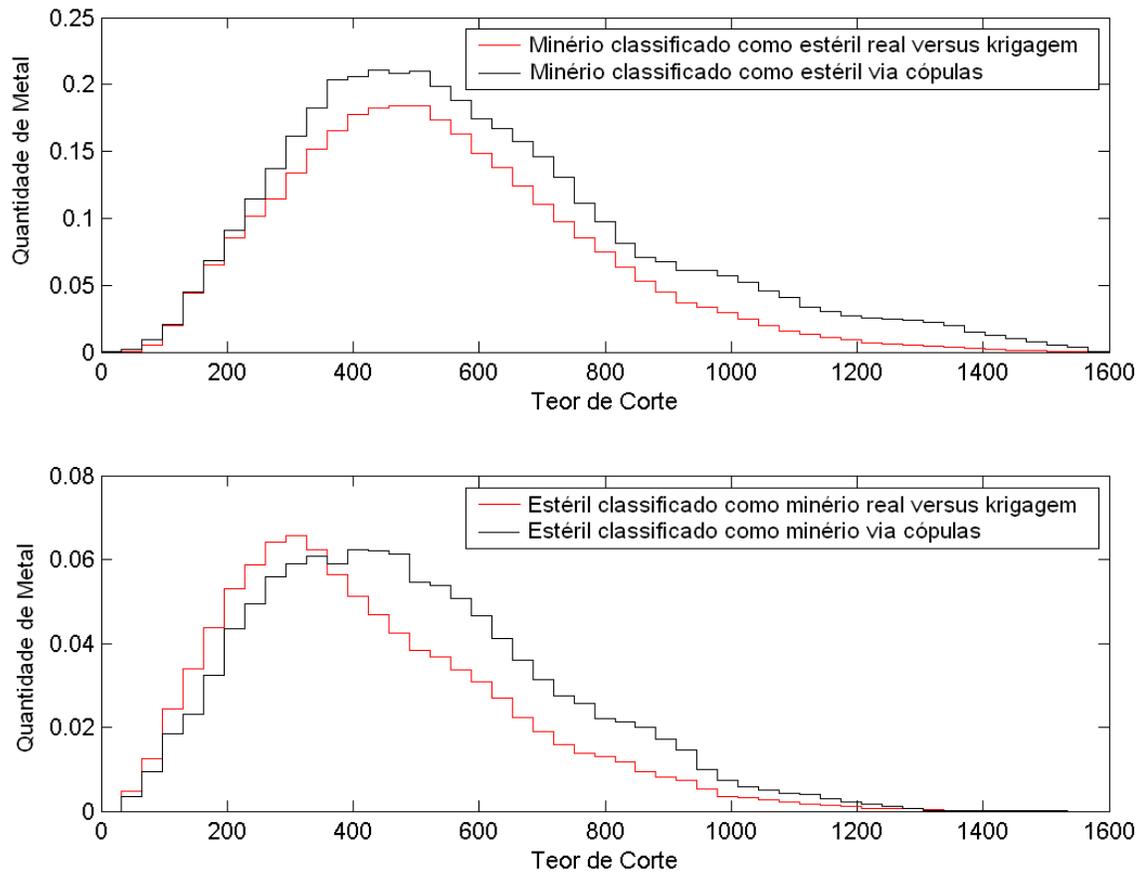


Figura 4.13: Porcentagem de quantidade de metal com seleção errônea, comparando o valor real e o valor krigado (vermelho) e a previsão por cópulas (preto).

As diferenças percentuais podem ser vistas na Figura 4.14. Mais uma vez, o erro cometido na estimativa da quantidade de metal é calculado, antes de se conhecer os valores verdadeiros. A maior diferença chegou a 4% entre o valor verdadeiro e a previsibilidade via cópulas. A diferença entre estéril classificado como minério, ficou bem ajustada, sendo seu valor sempre menor que 2%, tanto sobrestimando como subestimando. Para um novo projeto, sem o conhecimento do efeito informação, considerando-se uma previsibilidade de quanto será o erro da estimativa em termos de quantidade de metal via uma simulação, e estas diferenças comparadas com dados reais serem menores que 4%, mostra o potencial deste método.

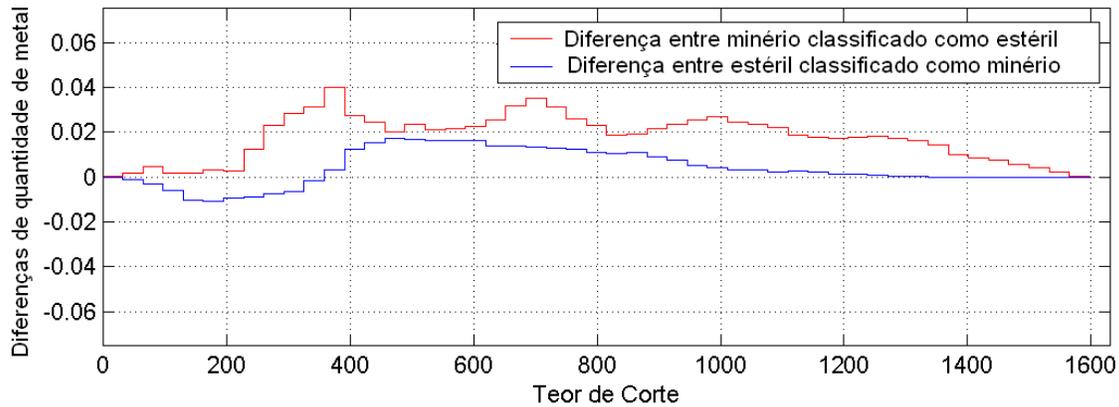


Figura 4.14: Diferenças percentuais de quantidade de metal nas classificações de minério e estéril entre os dados reais versus krigagem e cópulas.

Utilizando os mesmos teores de corte, definidos na tabela anterior, nota-se que o erro cometido pode ser previsto por cópulas, sem o conhecimento dos dados reais, cujos valores são próximos dos valores verdadeiros. Por exemplo, se o teor de corte aplicado no projeto de Walker Lake for 260 ppm, a quantidade de minério classificada como estéril será de 8.60%, e a previsão por cópulas de 10.42%. Para um teor de corte de 620 ppm, a quantidade de estéril classificada como minério será 1.59%, e por cópulas 2.46%. Na Tabela 4.6 são resumidas as demais comparações para diferentes teores de corte.

Tabela 4.6 - Diferenças de Tonelagem e Quantidade de Minério no projeto

Tonelagem (%)				
Teor de Corte	Minério $\mapsto$ Estéril		Estéril $\mapsto$ Minério	
	Real	Cópulas	Real	Cópulas
065 (ppm)	1.08	1.71	14.04	17.42
260 (ppm)	8.60	10.42	12.19	10.98
425 (ppm)	9.42	10.68	4.60	5.73
620 (ppm)	5.35	6.18	1.59	2.46
750 (ppm)	2.84	3.56	0.63	1.24
850 (ppm)	1.58	2.00	0.38	0.85
Quantidade de Minério (%)				
Teor de Corte	Minério $\mapsto$ Estéril		Estéril $\mapsto$ Minério	
	Real	Cópulas	Real	Cópulas
065 (ppm)	0.55	0.99	1.26	0.94
260 (ppm)	11.48	13.76	6.42	5.68
425 (ppm)	18.27	20.71	4.681	6.19
620 (ppm)	13.81	16.373	2.70	4.10
750 (ppm)	8.57	11.16	1.37	2.60
850 (ppm)	5.27	7.19	0.95	2.05

## **4.4 Comparação com a Simulação Gaussiana Seqüencial**

Uma outra maneira de acessar as incertezas é por meio da simulação estocástica. Para isso foi utilizada a simulação gaussiana seqüencial (SGS) com o objetivo de verificar a variabilidade do fenômeno. O banco de dados de Walker Lake, com 470 amostras é de difícil simulação, pois existe uma grande variação de teores e de classes, sendo algumas mais representativas que outras. Em muitos trabalhos, utilizando -se esse mesmo banco de dados, são feitas amostragens aleatórias de 195 dados, com isto tem-se uma amostragem melhor distribuída e média dos dados mais próxima dos 78.000 pontos. Em projetos de minerações reais, os dados são mais amostrados em regiões ricas, os furos são programados por geólogos e o que se espera deles é que furem em regiões ricas de minério. Por isto, é importante a utilização das 470 amostras de ISSAKS e SRIVASTAVA (1989), pois representam um cenário realista encontrado no dia-a-dia de uma mina. Foram geradas 100 simulações para o depósito. A partir destes dados foram criados cenários probabilísticos; o primeiro, é a média das simulações, cujo valor é próximo da krigagem; os outros dois utilizados foram 95% de probabilidade de estar acima ou abaixo de um determinado teor de corte. O benefício obtido pelos cenários da simulação condicional, não atingiram os valores reais, obtidos pela seleção perfeita (Figura 4.15).

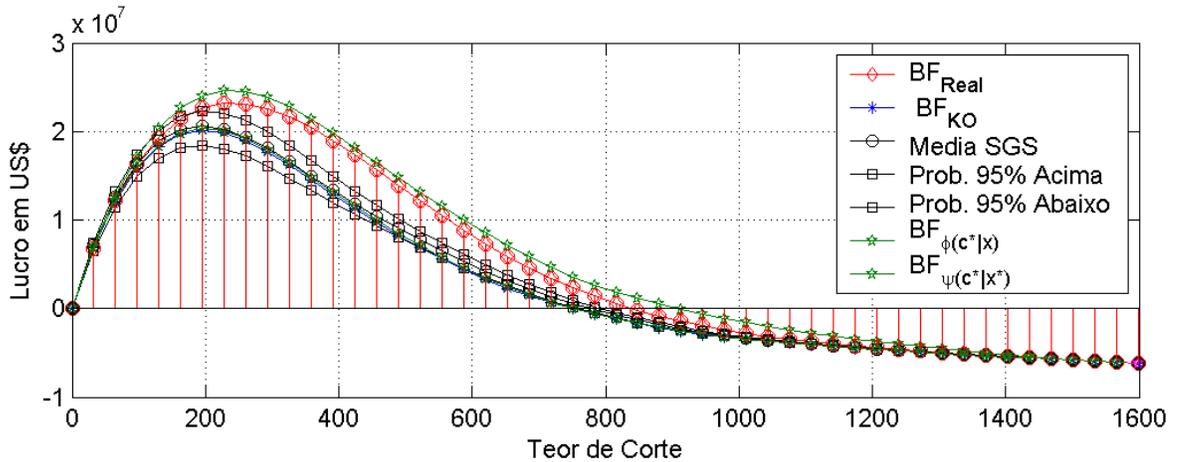


Figura 4.15: Benefício obtido por krigagem ordinária, cópulas, média SGS, 95% de probabilidade de estar acima e 95% de probabilidade de estar abaixo.

A Tabela 4.7, mostra que o objetivo da simulação de atingir as incertezas não foi alcançado; o benefício dentro do intervalo probabilístico só foi atingido para o corte de 65 ppm; porém neste corte, a krigagem ordinária foi o melhor estimador, enquanto que as cópulas, em todos os valores de teores de cortes aplicados, envolveu a curva de teor real.

**Tabela 4.7 - Benefício obtido por teores de corte diferentes (em MM US\$)**

T. C.	Real	k.O.	$BF_{\psi(c^* x^*)}$	$BF_{\tau(c^* x^{**})}$	SGS Médio	95% Acima	95% Abaixo
065 (ppm)	12.20	12.10	12.70	12.20	12.50	13.20	11.50
260 (ppm)	23.10	19.00	24.50	19.20	19.40	21.30	17.20
425 (ppm)	17.40	11.20	18.20	11.5	11.80	13.30	10.60
620 (ppm)	7.31	3.28	8.56	3.43	4.22	4.92	3.56
750 (ppm)	2.35	-0.03	3.58	0.05	0.42	0.49	0.36
850 (ppm)	-0.02	-0.17	-0.11	-0.16	-0.12	-0.11	-0.16

As curvas de tonelagem e quantidade de metal, em relação ao teor de corte obtidos via simulação, mostram que os valores ficaram próximos dos valores da krigagem. Todos os valores da média das simulações, exceto para o primeiro teor de corte, obtiveram melhores resultados que a krigagem ordinária. O intervalo de probabilidade de 95% não alcançou os dados de tonelagem e quantidade de metal que poderiam ser estimados se fosse conhecida a reserva real (Figura 4.16).

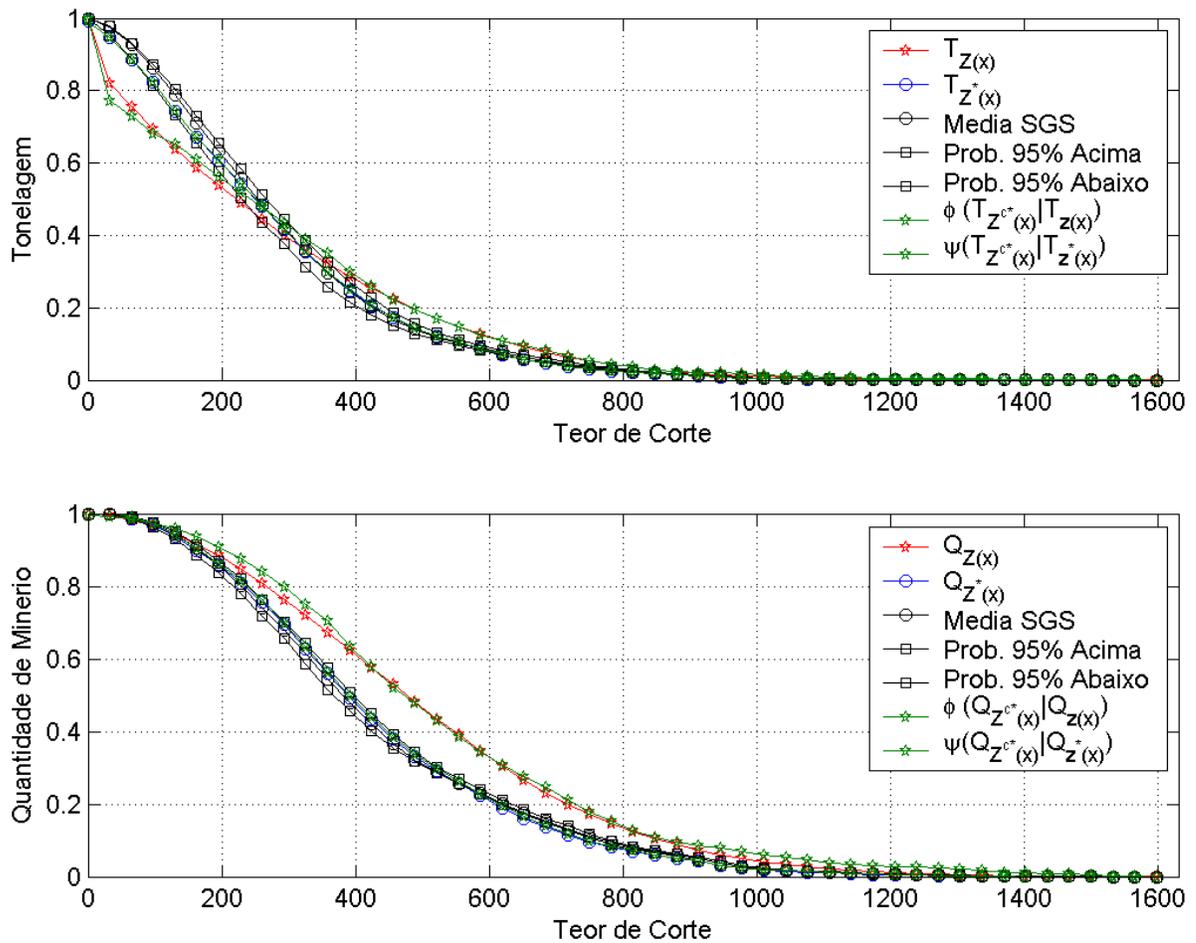


Figura 4.16: Curvas de parametrização obtidas por krigagem ordinária, cópulas, média SGS, 95% de probabilidade de estar acima e 95% de probabilidade de estar abaixo.

A Tabela 4.8, é a representação numérica dos valores apresentados na Figura 4.16 . Pode-se observar que no primeiro teor de corte nenhum método atingiu o objetivo. No corte em 260 ppm, a simulação alcançou sua meta. Nos outros cortes, principalmente na cauda das distribuições as cópulas foram as curvas que fizeram o seu papel de contornar a curva real .

**Tabela 4.8 - Porcentagens da tonelagem acima de alguns teores de corte**

T.C.	Real	K.O.	$\phi(T_{Z^{c^*}(x)} T_{z(x)})$	$\psi(T_{Z^{c^*}(x)} T_{z^*(x)})$	SGS Médio	95% Acima	95% Abaixo
065 (ppm)	75.50	88.45	88.58	72.87	92.62	93.10	88.90
260 (ppm)	44.39	47.98	48.23	47.67	48.35	51.15	43.61
425 (ppm)	25.49	20.66	21.00	25.94	20.31	22.67	17.92
620 (ppm)	10.75	6.98	7.13	10.85	7.52	8.26	6.94
750 (ppm)	5.26	3.05	3.11	5.42	3.62	3.99	3.27
850 (ppm)	2.91	1.71	1.74	2.89	2.02	2.20	1.83

Em termos de quantidade de metal, a cópula obteve os melhores resultados. Em especial para altos teores de corte, onde os outros métodos subestimaram a quantidade de metal do projeto (Tabela 4.9).

Tabela 4.9 - Porcentagens da quantidade de metal obtidas de alguns teores de corte

T.C.	Real	K.O.	$\phi(Q_{Z^{c^*}(x)} Q_{z(x)})$	$\psi(Q_{Z^{c^*}(x)} Q_{z^*(x)})$	SGS Médio	95% Acima	95% Abaixo
065 (ppm)	98.34	98.69	99.12	98.51	99.00	99.09	98.50
260 (ppm)	80.72	75.72	76.25	83.97	74.07	76.28	71.71
425 (ppm)	57.73	43.40	44.11	57.81	42.01	44.88	40.24
620 (ppm)	30.53	19.03	19.42	30.85	20.13	21.24	19.89
750 (ppm)	17.13	9.65	9.85	17.84	11.09	11.75	10.76
850 (ppm)	10.41	5.89	6.00	10.76	6.79	7.11	6.56

Uma outra análise pode ser realizada aumentando o intervalo de confiança, para isso foram executados diversos testes para este banco de dados e com um intervalo de 85% de confiança, obtendo curvas que acessariam os valores reais (Figura 4.17).

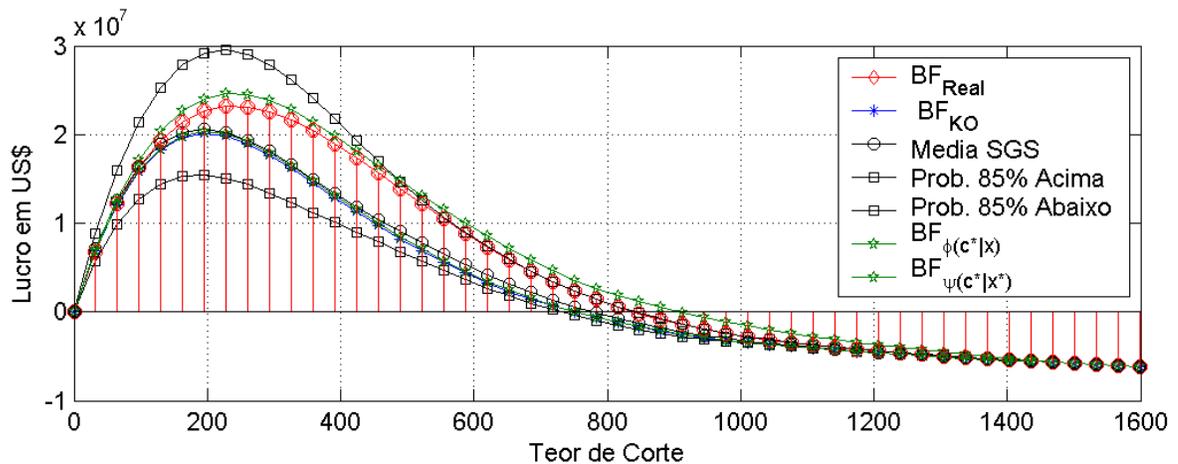


Figura 4.17: Benefício obtido por krigagem ordinária, cópulas, média SGS, 85% de probabilidade de estar acima e 85% de probabilidade de estar abaixo

Ao se aumentar o intervalo de confiança, o problema encontrado é que o espaço de incerteza é muito amplo e de difícil análise. Quando se aplica um teor de corte de 260 ppm, tem-se um benefício variando de US\$14.40 milhões até US\$ 29.10 milhões, uma diferença de US\$ 14.70 milhões, podendo assim, variar mais que o dobro da probabilidade menor, tornando difícil defender um projeto que tenha uma incerteza tão alta. Observando-se a Tabela 4.10, essa comparação torna-se mais clara.

**Tabela 4.10 - Benefício obtido por teores de corte diferentes (em MM US\$)**

T. C.	Real	k.O.	$BF_{\psi(c^* x^*)}$	$BF_{\tau(c^* x^{**})}$	SGS Medio	85% Acima	85% Abaixo
065 (ppm)	12.20	12.10	12.70	12.20	12.50	15.90	9.90
260 (ppm)	23.10	19.00	24.50	19.20	19.40	29.10	14.40
425 (ppm)	17.40	11.20	18.20	11.50	11.80	19.40	8.90
620 (ppm)	7.31	3.28	8.56	3.43	4.22	7.38	2.68
750 (ppm)	2.35	-0.03	3.58	0.05	0.42	2.40	-0.40
850 (ppm)	-0.02	-0.17	-0.11	-0.16	-0.12	-0.15	-1.98

As curvas de tonelagem em relação ao teor de corte, obtidos via simulação, mostram que os valores probabilísticos atingiram o objetivo de acessar as incertezas. Com 85% de probabilidade a curva de tonelagem verdadeira foi envolvida. Apenas alguns valores, com baixos teores de corte, não foram envoltos nas curvas probabilísticas (Figura 4.18).

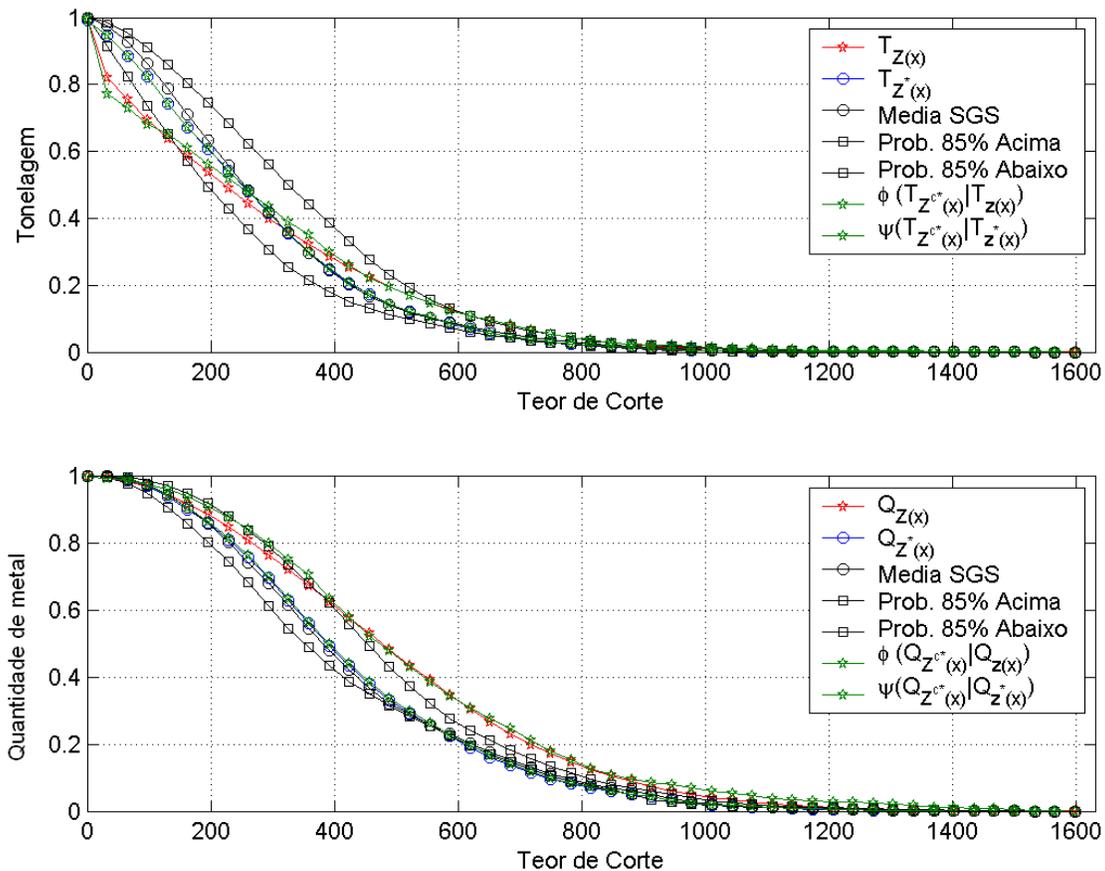


Figura 4.18: Curvas de parametrização obtidas por krigagem ordinária, cópulas, média SGS, 85% de probabilidade de estar acima e 85% de probabilidade de estar abaixo

Nota-se que o espaço probabilístico continua muito amplo. Utilizando-se ainda o teor de corte de 260 ppm, a tonelagem prevista pode ser de 36.71% até 62.38% (Tabela 4.11). Como pode-se projetar uma usina de tratamento, onde a tonelagem de metal tem um intervalo de probabilidade tão amplo? O valor de 260 ppm é justamente o teor onde há a inversão da superestimativa pela subestimativa onde todos os métodos falham na curva de tonelagem.

**Tabela 4.11 - Porcentagens da tonelagem acima de alguns teores de corte**

T. C.	Real	K.O.	$\phi_{(T_{Z^{c^*}(x)} T_{z(x)})}$	$\psi_{(T_{Z^{c^*}(x)} T_{z^*(x)})}$	SGS Médio	85% Acima	85% Abaixo
065 (ppm)	75.50	88.45	88.58	72.87	92.62	95.15	82.37
260 (ppm)	44.39	47.98	48.23	47.67	48.35	62.38	36.71
425 (ppm)	25.49	20.66	21.00	25.94	20.31	33.10	15.12
620 (ppm)	10.75	6.98	7.13	10.85	7.52	10.82	6.11
750 (ppm)	5.26	3.05	3.11	5.42	3.62	5.25	2.84
850(ppm)	2.91	1.71	1.74	2.89	2.02	2.86	1.57

Em termos de quantidade de metal, a cópula obteve os melhores resultados. Acima de um determinado teor de corte, os outros métodos subestimaram a quantidade de metal do projeto. Isto faz com que o benefício diminua à medida em que tenha um corte maior, podendo inviabilizar projetos que seriam implementados caso o teor verdadeiro fosse conhecido (Tabela 4.12).

**Tabela 4.12 - Porcentagens da quantidade de metal obtidas de alguns teores de corte**

T. C.	Real	K.O.	$\phi_{(Q_{Z^{c^*}(x)} Q_{z(x)})}$	$\psi_{(Q_{Z^{c^*}(x)} Q_{z^*(x)})}$	SGS Médio	85% Acima	85% Abaixo
065 (ppm)	98.34	98.69	99.12	98.51	99.00	99.44	97.60
260 (ppm)	80.72	75.72	76.25	83.97	74.07	83.74	68.12
425 (ppm)	57.73	43.40	44.11	57.81	42.01	55.71	38.66
620 (ppm)	30.53	19.03	19.42	30.85	20.13	24.03	19.63
750 (ppm)	17.13	9.65	9.85	17.84	11.09	13.39	10.46
850 (ppm)	10.41	5.89	6.00	10.76	6.79	8.03	6.28

## Capítulo 5

# Função de Transferência

*Neste capítulo, é apresentada a função de transferência mais importante em um projeto de mina a céu aberto, o otimizador de cavas. Em qualquer projeto de mineração, a primeira pergunta gerencial a ser feita é se a cava ótima foi escolhida e qual é seu valor presente líquido. Foi programado um otimizador baseado no algoritmo de Lerchs e Grossmann 2D em matlab e também um seqüenciador de cava, para explanação deste capítulo, mostrando as conseqüências da sobrestimativa e da subestimativa em projetos de mineração, o banco de dados de Walker Lake foi utilizado para suportar os problemas ocasionados pelo erro de estimativa.*

### 5.1 Avaliação de cava final via cópulas

Um aspecto fundamental no desenvolvimento de qualquer projeto de mineração a céu aberto é a determinação das reservas minerais, obtidas por meio dos chamados limites finais da cava. Os limites finais da cava definem o tamanho e a forma de uma mina a céu aberto no final de sua vida útil, buscando a maximização do lucro. Eles definem a extensão das reservas lavráveis e a quantidade de material estéril a ser retirado. Normalmente, marcam a fronteira além da qual a exploração de um dado depósito não será mais econômica. Os limites da cava na superfície delimitam uma fronteira dentro da qual as estruturas de superfície da mina, tais como plantas de beneficiamento e escritórios da mina, não devem ser locados.

A verdadeira revolução em otimização de cavas de minas surgiu em 1965, com o aparecimento do algoritmo idealizado por HELMUT LERCHS e INGO F. GROSSMANN e desde então muitos autores o desenvolveram e muitas técnicas de programação lhe foram aplicadas. Até o aparecimento do algoritmo LG, a otimização de cavas finais sempre foi feita por um método manual de tentativas. Nele se procurava, por meio de tentativas, chegar a uma cava que deveria ser interessante e, se viesse a parecer muito estéril dentro desta cava, ela deveria ser fechada (em nova tentativa) para desmontar minério de maior teor e menos estéril, mas se ao contrário, houvesse possibilidade de alargar mais a cava, tal também deveria ser feito (em nova tentativa) e assim sucessivamente até se alcançar uma cava final satisfatória.

O algoritmo de LERCHS e GROSSMAN é um algoritmo dual para o problema de fechamento máximo e corte mínimo que trabalha com a solução ótima possível. Sua relação para fluxo máximo é bastante evidente, uma completa abordagem pode ser vista em LERCHS e GROSSMANN (1965).

O banco de dados de Walker Lake, rotacionado em  $90^{\circ}$ , foi utilizado como uma seção geológica vertical representando uma jazida em 2D. Observa-se na Figura 5.1, que o resultado da krigagem é uma imagem suavizada dos dados reais.

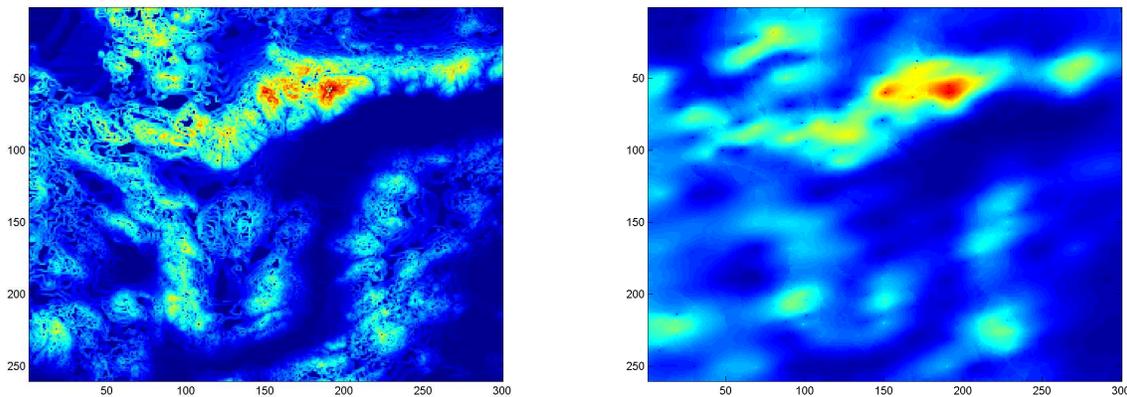


Figura 5.1: Walker Lake em seção vertical pontual: dados reais (esquerda) e krigagem (direita).

Assim, foram geradas as cavas ótimas para se verificar os efeitos da krigagem em um projeto de mineração quando se utiliza uma função de transferência, no caso, a otimização de cavas. Os valores da função foram alterados, pois a lavra não será mais feita como um painel, mas sim como um modelo de blocos com minério e estéril. Para este caso, utilizando o teor de corte de 65 ppm, o valor obtido pela krigagem foi de US\$ 1.80 milhões. Seguindo a geometria proposta pelo otimizador de cavas por meio dos dados estimados, o valor efetivo recuperado seria de US\$ 2.26 milhões. Mas se os valores verdadeiros fossem conhecidos, o benefício obtido seria de US\$ 2.42 milhões. Esta diferença é de 25.84% menor do que o projeto poderia realizar. Um resultado satisfatório é que o projeto teria um lucro de 20.41% maior. O questionamento que deve ser feito é: se os investidores soubessem antes do projeto que existe uma alta probabilidade de o lucro do empreendimento ser maior que o da estimativa, quanto seria a sua fatia na carteira investida? O inverso também pode acontecer, se o projeto foi superestimado, portanto, várias decisões podem ser tomadas dependendo da incerteza da estimativa.

Segundo MATHERON (REMACRE, 1984), os teores provenientes da amostragem são em geral medidos sobre suportes pequenos. Tais teores são muitos dispersos, sendo ilusório pensar em recuperar só estes teores elevados: com efeito, não se lavram amostras, mas unidades muito maiores, cujos teores são menos dispersos e apresentam poucos valores extremos. Por isto, foram estimados os teores de Walker Lake para um suporte de 5 x 5 metros, de modo a verificar o comportamento das cópulas, sobre um outro volume.

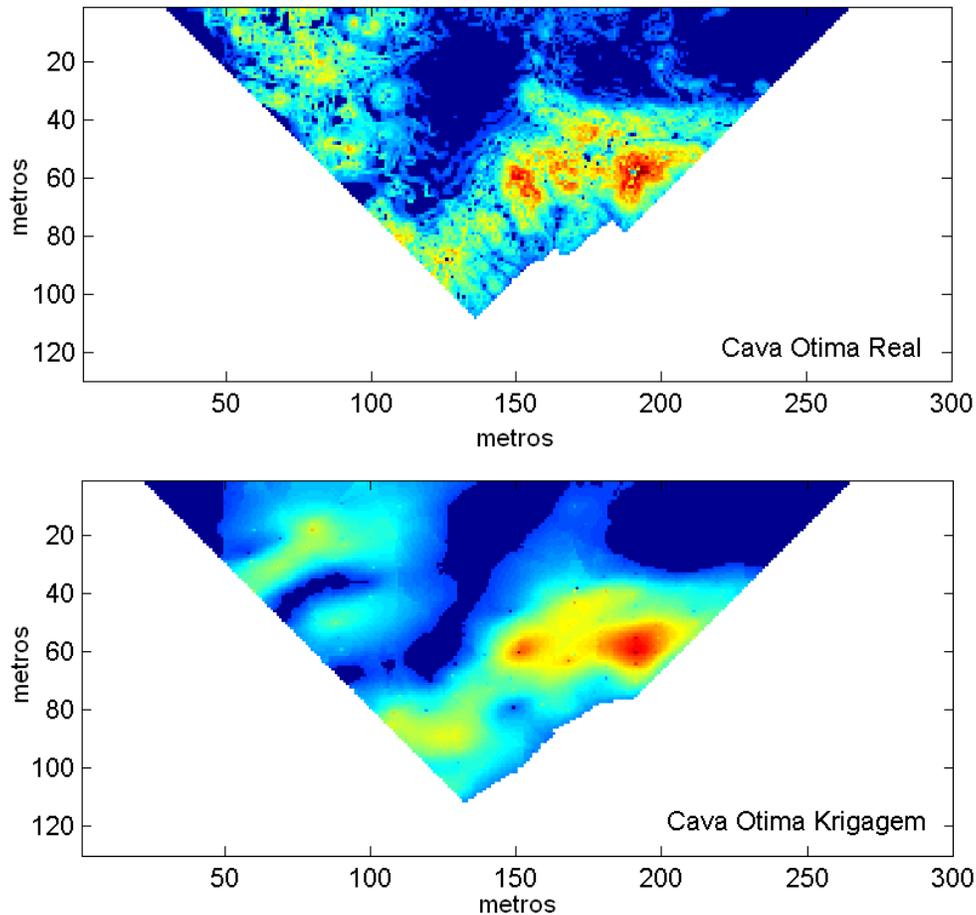


Figura 5.2: Cavas geradas de Walker Lake com seção vertical pontual dados reais e krigagem.

## 5.2 Mudança de Suporte via Cópulas

Durante um certo tempo, perdeu-se a verdadeira razão da krigagem: a de evitar o erro sistemático, cultivando-se a variância mínima. O controle de lavra tinha pouca importância. Hoje, às exigências são outras, e para cada bloco o problema é o mesmo: minério ou estéril? Esta preocupação não é nova, KRIGE buscava a construção de um estimador que evitasse o erro sistemático. Foi a partir daí que nasceu a geoestatística, o outro aspecto, que está sendo esquecido é a extrema simplicidade das ferramentas utilizadas por MATHERON: noções de regressão linear da estatística aplicada.

Em termos práticos, a krigagem consiste em encontrar a melhor estimativa linear do teor de um bloco em função da informação disponível, ou seja, dos teores das diferentes amostras disponíveis, seja no interior, seja no exterior do bloco que se quer estimar. A krigagem é uma ponderação na qual se atribui um peso ao teor de cada amostra, peso este calculado de maneira a tornar mínima a variância de estimativa e ainda ser função das características geométricas do problema (formas, dimensões e disposição mútua das amostras e do bloco). A solução de um problema de krigagem somente é possível de ser resolvido quando calcula-se efetivamente o peso ótimo de cada amostra, assumindo-se certas hipóteses sobre as características geoestatísticas do depósito estudado, correlacionado com a função variograma ou a função covariância. É necessário notar que no momento de se estimar estas funções, a partir dos dados, é que se coloca o questionamento das hipóteses de estacionaridade (de 2ª ordem ou intrínseca).

Como foi visto no Capítulo 3, a mudança de suporte causa a degeneração das curvas de parametrização. Assim, para a simulação via cópulas além da validação cruzada, foi inserido o efeito de suporte.

Na Figura 5.3, tem-se uma visão tridimensional dos dados simulados. A simulação é condicionada pelas covariâncias entre os dados que foram mudados de suporte pela validação cruzada no suporte de 5 metros e pelo próprio valor krigado.

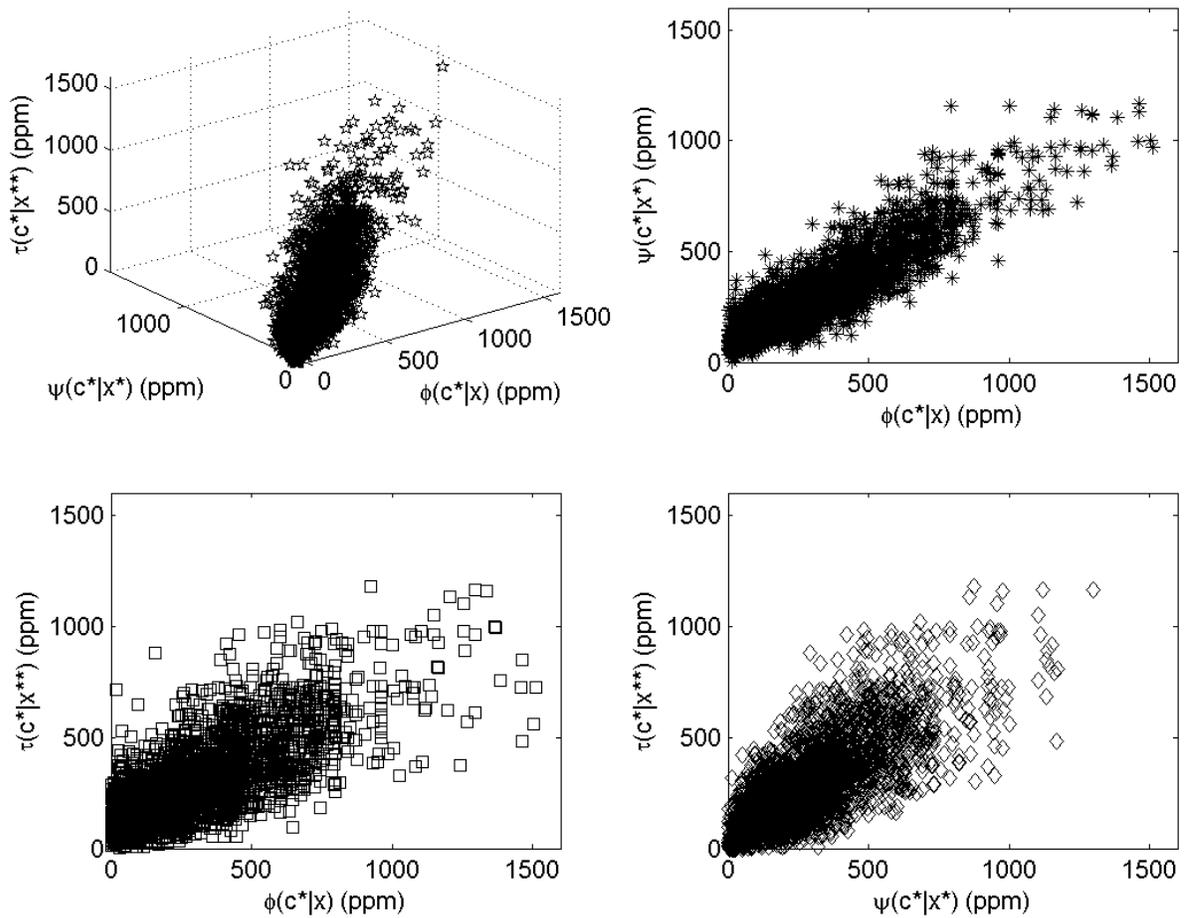


Figura 5.3: Simulação de cópulas com 3 parâmetros de entrada, correlações entre amostras e validação cruzada, amostras no bloco e krigagem e validação cruzada no bloco e krigagem.

Tem-se  $\phi(c^* | x)$  como a simulação da cópula condicionada aos valores das amostras no bloco,  $\psi(c^* | x^*)$  representa o condicionamento da validação cruzada e  $\tau(c^* | x^{**})$  o condicionamento com o bloco krigado.

A primeira vantagem da krigagem aparece devido a sua própria definição. Minimizando a variância de estimativa, garante-se tirar o melhor partido das informações disponíveis. Esta vantagem notável não justifica, muitas vezes, as complicações suplementares da própria krigagem. O interesse prático mais importante da krigagem provém não apenas da melhor precisão possível,

mas do que ela permite evitar, ou seja, o erro sistemático. Na maior parte dos depósitos, pratica-se uma operação, chamada de seleção, que consiste em extrair certos blocos julgados rentáveis e abandonar outros julgados não rentáveis. A Figura 5.4, mostra a seção vertical krigada e os dados reais, e nota-se que a krigagem ordinária, como qualquer estimador, cometeu alguns erros, pois algumas regiões perto de valores altos foram superestimadas.

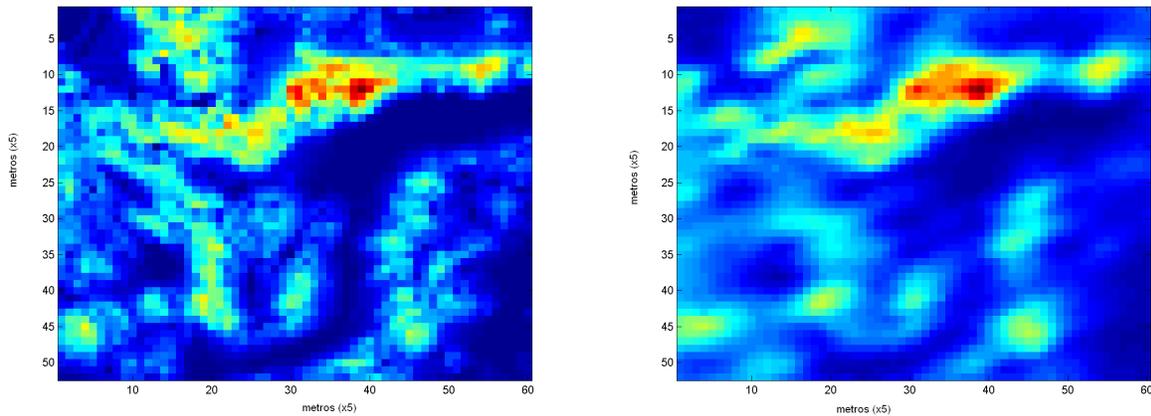


Figura 5.4: Walker Lake com seção vertical blocos dados reais (esquerda) e krigagem ordinária (direita).

Para a explanação deste capítulo, foram geradas três cavas com teores de corte diferentes, uma com 65 ppm, outra com 150 ppm e a terceira com 260 ppm. Acima desse teor de corte, o valor descontado da cava foi negativo, não gerando assim cava ótima.

A cava gerada com o teor de corte de 65 ppm, é apresentada na Figura 5.5. A seção transversal da figura foi cortada no nível 25, para uma melhor visualização. As cavas apresentam o mesmo aspecto, mas seus valores são bem diferentes.

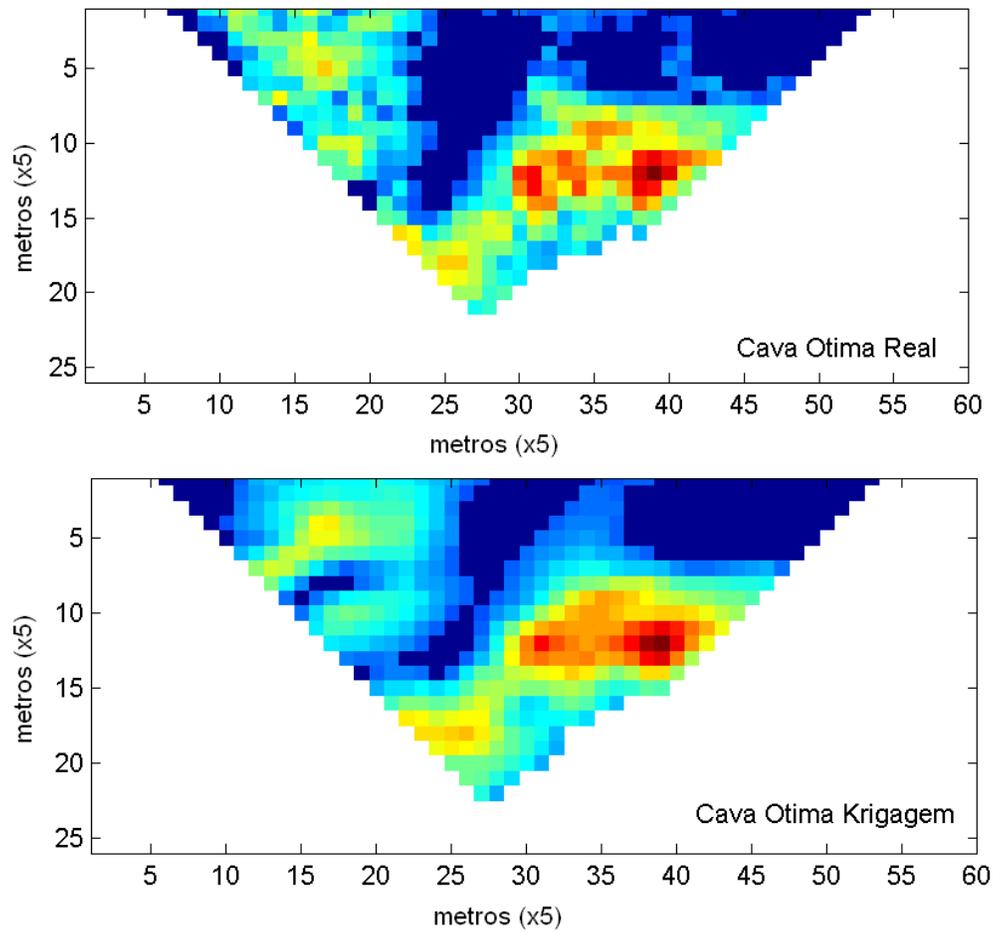


Figura 5.5: Cavas geradas de Walker Lake blocos 5x5.

O benefício obtido pela cava, sem o seqüenciamento, ou seja, como se a lavra fosse feita em todos os blocos ao mesmo tempo, apresenta valores bem próximos dos valores reais. O resultado obtido via cópulas, aproximou-se mais dos dados reais, esses resultados estão resumidos na Tabela 5.1.

**Tabela 5.1 - Valor Presente obtido pelo teor de corte de 65 ppm**

Cava Obtida	Benefício
Ideal	$1.7369 \times 10^6$
Krigagem Ordinária	$1.6858 \times 10^6$
Efetivo Krigagem Ordinária	$1.7049 \times 10^6$
Cópula $\psi(c^* x^*)$	$1.6888 \times 10^6$
Efetivo Cópulas $\psi(c^* x^*)$	$1.7049 \times 10^6$
Cópula $\tau(c^* x^{**})$	$1.7342 \times 10^6$
Efetivo Cópula $\tau(c^* x^{**})$	$1.7015 \times 10^6$

Contudo, em uma mina tem-se uma seqüência de extração de minério. Portanto, foi programado um seqüenciador de cavas em Matlab, para que fosse feito o cálculo correto do fluxo de caixa obtido pela cava gerada. Foi aplicada uma taxa de desconto de 12% ao ano e a capacidade de produção foi aumentada, para que a lavra fosse sempre em um número fixo de anos.

Desse modo, é possível analisar o real impacto do estimador. Nas expectativas depositadas no projeto, o foco está orientado no benefício obtido, que é o objetivo principal de todo empreendimento. Na Figura 5.6, nota-se que, para este teor de corte, os investidores obtiveram resultados satisfatórios. O benefício final é superior ao início do projeto. A grande questão é prever se o valor obtido antes de iniciar um projeto, vai superar a estimativa ou será um projeto que irá falhar, obtendo um retorno financeiro aquém do valor esperado.

Na Figura 5.6, apresenta-se o valor esperado da krigagem e das cópulas (na cor preta). Pode-se notar, que os valores de benefício obtidos (pontilhado) são superiores aos estimados.

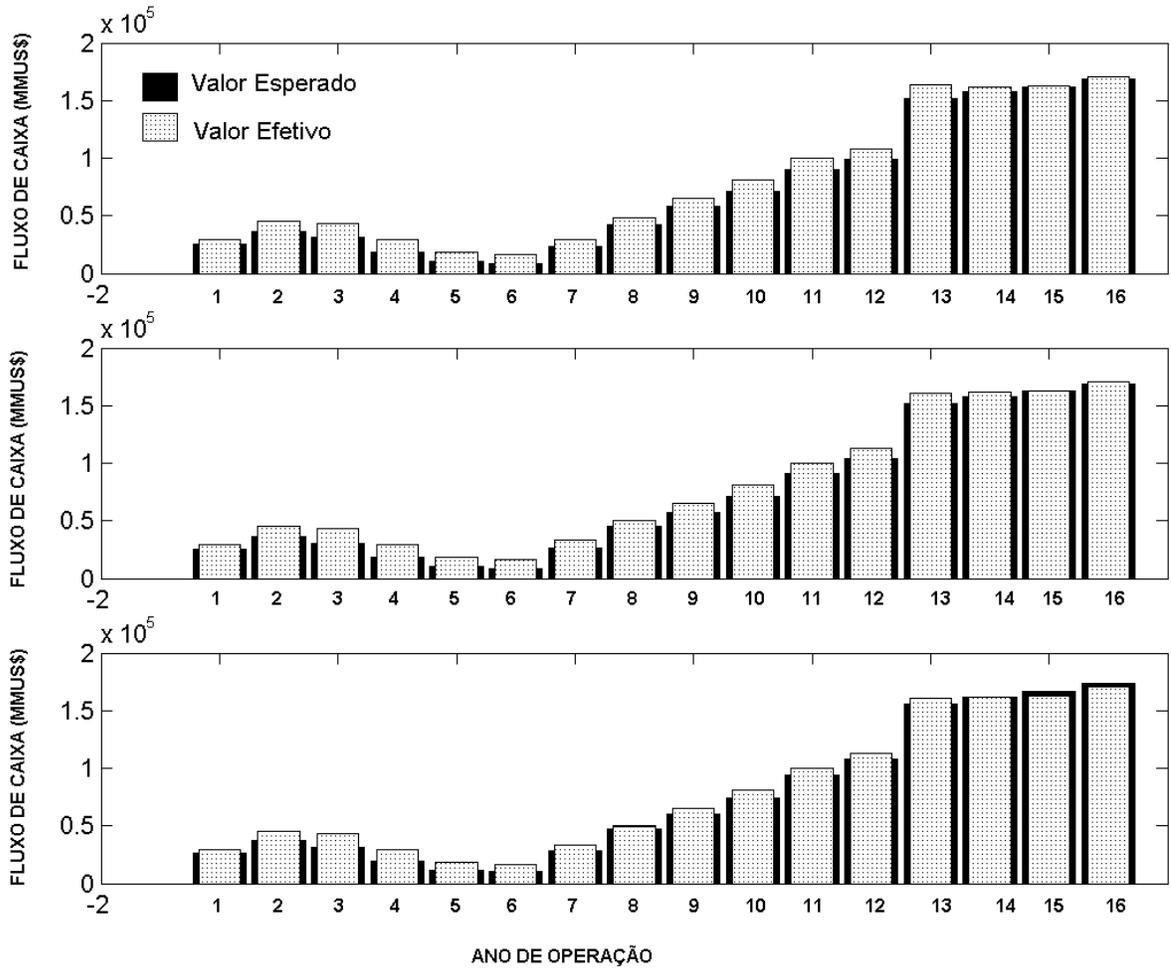


Figura 5.6: Seqüenciamento e cava obtida com teor de corte de 65 ppm, via krigagem de blocos 5m x 5m, krigagem (em acima), cópula 1 (no meio) e cópula 2 (em baixo).

Os valores presentes líquidos, encontram-se apresentados na Tabela 5.2. Eles mostram que o valor esperado pela krigagem é 21,94% inferior ao valor ideal que poderia ser obtido pela cava. E a diferença entre o valor esperado e o valor efetivo é de 13,66%.

Tabela 5.2 - Valor Presente Líquido obtido pelo teor de corte de 65 ppm

Sequenciamento Obtido	Benefício Líquido
Ideal	$4.9256 \times 10^5$
Krigagem Ordinária	$3.8442 \times 10^5$
Efetivo Krigagem Ordinária	$4.4525 \times 10^5$
Cópulas $\psi(c^* x^*)$	$3.8801 \times 10^5$
Efetivo Cópula $\psi(c^* x^*)$	$4.4868 \times 10^5$
Cópulas $\tau(c^* x^{**})$	$4.0236 \times 10^5$
Efetivo Cópula $\tau(c^* x^{**})$	$4.5875 \times 10^5$

Caso os teores reais sejam conhecidos, o melhor seqüenciamento da cava pode ser visto na Figura 5.7 e 5.8, onde se prioriza lavar toda a região de altos teores primeiro, buscando recuperar os investimentos.

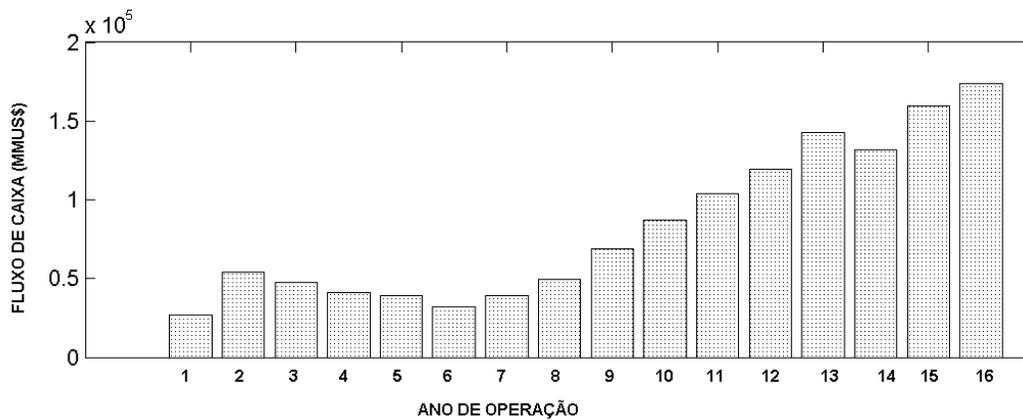


Figura 5.7: Fluxo de caixa obtido pelo seqüenciamento com teor de corte de 65 ppm, caso fosse conhecido os teores verdadeiros de blocos 5m x 5m .

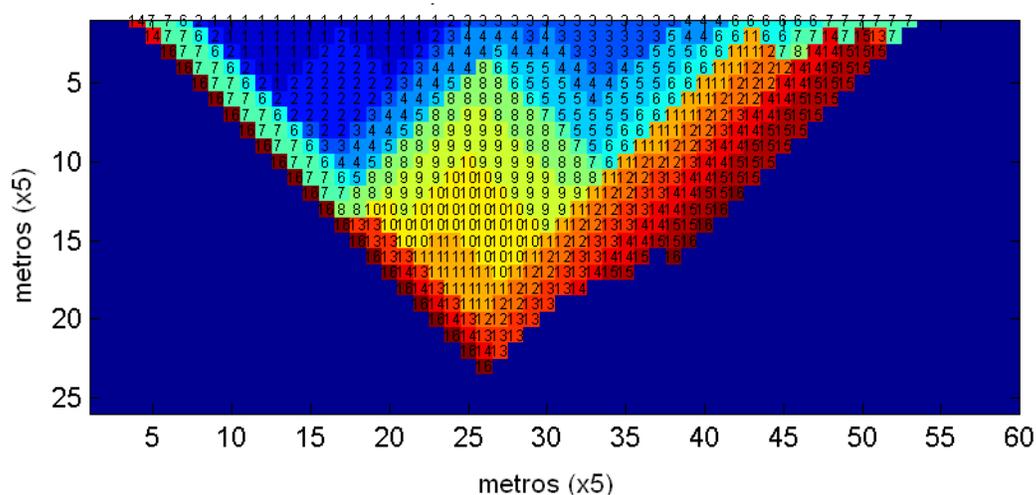


Figura 5.8: Seqüenciamento e cava obtida com teor de corte de 65 ppm, caso fosse conhecido os teores verdadeiros de blocos 5m x 5m.

Foi gerada uma cava com o teor de corte de 150 ppm. O benefício obtido para esta cava, sem o seqüenciamento, pode ser visto na Tabela 5.3. A geometria da cava foi a mesma para todas as estimativas, portanto, o valor econômico efetivamente lavrado foi o mesmo para todas.

Tabela 5.3 - Valor Presente obtido pelo teor de corte de 150 ppm

Cava Obtida	Benefício
Ideal	$1.4681 \times 10^6$
Krigagem Ordinária	$1.4662 \times 10^6$
Efetivo Krigagem Ordinária	$1.4156 \times 10^6$
Cópula $\psi(c^* x^*)$	$1.4665 \times 10^6$
Efetivo Cópula $\psi(c^* x^*)$	$1.4156 \times 10^6$
Cópula $\tau(c^* x^{**})$	$1.5126 \times 10^6$
Efetivo Cópula $\tau(c^* x^{**})$	$1.4156 \times 10^6$

Foi aplicada a mesma taxa de desconto de 12% ao ano e a capacidade de produção foi aumentada, para que a lavra fosse sempre em um número fixo de anos.

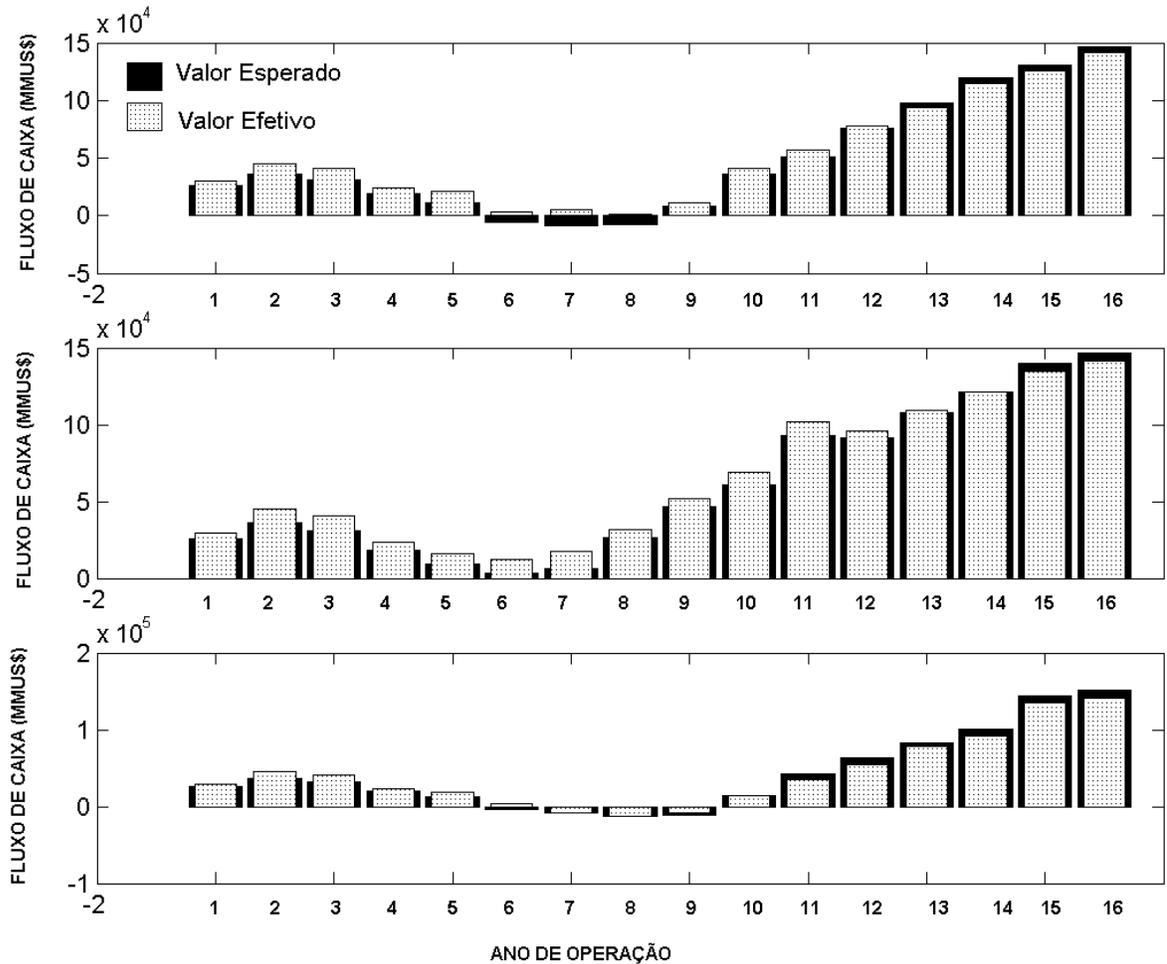


Figura 5.9: Seqüenciamento e cava obtida com teor de corte de 150 ppm, via krigagem de blocos 5m x 5m, krigagem (em acima), cópula 1 (no meio) e cópula 2 (em baixo).

Os valores presentes líquidos, encontram-se resumidos na Tabela 5.4. Pode-se observar que o valor esperado pela krigagem foi 28,23% inferior ao valor ideal que poderia ser obtido pela cava. As diferenças aumentaram em relação ao teor de corte anterior. Uma das cópulas conseguiu obter uma diferença de 7,01%, ou seja, o valor do projeto ficou próximo do valor esperado.

Mais uma vez pode-se analisar o impacto do estimador nas expectativas depositadas no projeto, cujo foco está orientado para o benefício obtido, que é o objetivo principal de todo empreendimento. A Figura 5.9 mostra que para este teor de corte, o benefício final será superior ao início do projeto. A grande questão é prever, se o valor obtido antes de iniciar um projeto, vai superar a estimativa ou será um projeto que irá falhar, obtendo um retorno financeiro abaixo do valor esperado.

**Tabela 5.4 - Valor Presente Líquido obtido pelo teor de corte de 150 ppm**

Seqüenciamento Obtido	Benefício Líquido
Ideal	$3.5139 \times 10^5$
Krigagem Ordinária	$2.5254 \times 10^5$
Efeito Krigagem Ordinária	$2.9961 \times 10^5$
Cópula $\psi(c^* x^*)$	$3.2679 \times 10^5$
Efetivo Cópula $\psi(c^* x^*)$	$3.3534 \times 10^5$
Cópula $\tau(c^* x^{**})$	$2.2908 \times 10^5$
Efetivo Cópula $\tau(c^* x^{**})$	$2.4812 \times 10^5$

Na Figura 5.10, tem-se o valor esperado da krigagem e das cópulas (na cor preta). Os valores de benefício obtidos (pontilhado) são superiores aos estimados. Caso os teores reais fossem conhecidos, o melhor seqüenciamento da cava pode ser visto na Figura 5.10, onde se busca lavrar toda a região de altos teores primeiro, auferindo maior lucro, e buscando recuperar os investimentos.

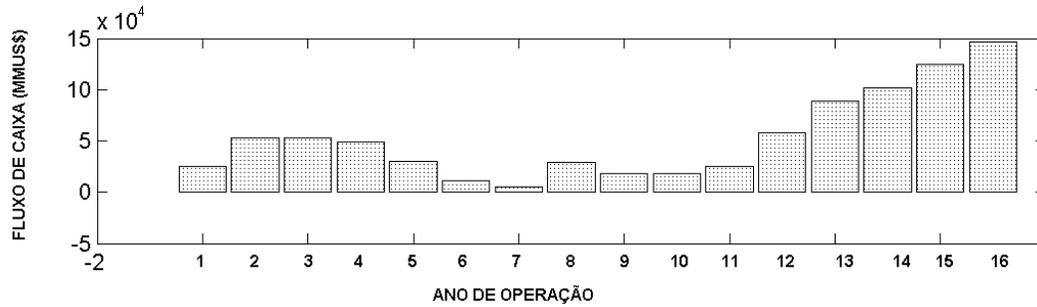


Figura 5.10: Fluxo de caixa obtido pelo seqüenciamento com teor de corte de 150 ppm, caso fosse conhecidos os teores verdadeiros de blocos 5m x 5m.

A geometria do seqüenciamento ideal também pode ser observada na Figura 5.11, isto seria possível, se fossem conhecidos os teores reais.

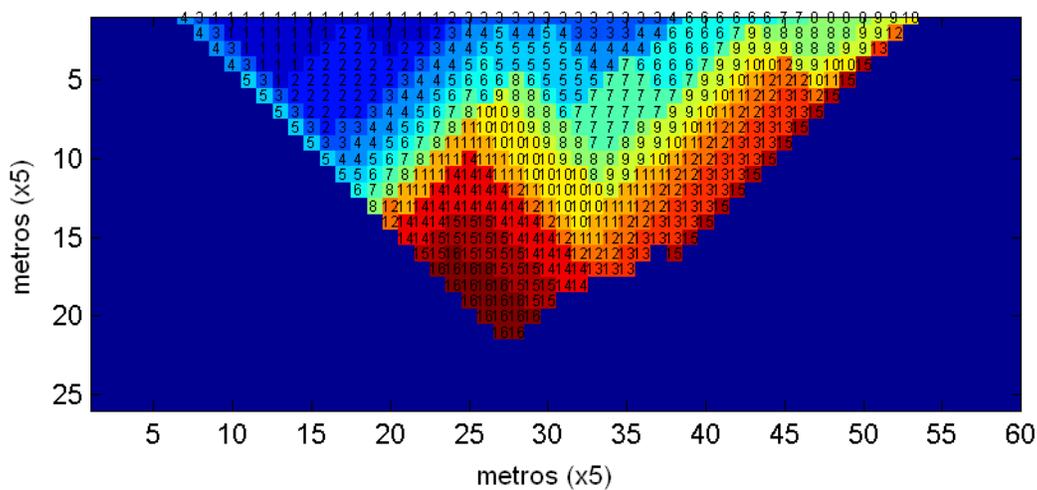


Figura 5.11: Seqüenciamento e cava obtida com teor de corte de 150 ppm, caso fosse conhecidos os teores verdadeiros de blocos 5m x 5m.

A última cava que será apresentada é a gerada com o teor de corte de 260 ppm. Os valores calculados para o benefício obtido pela cava, sem o seqüenciamento, podem ser resumidos na Tabela 5.5. Sem a utilização de taxas de descontos, o valor da krigagem foi o melhor resultado. As diferenças entre o valor esperado e o ideal foram baixas.

Tabela 5.5 - Valor Presente obtido pelo teor de corte de 260 ppm

Cava Obtida	Benefício
Ideal	$0.8532 \times 10^6$
Krigagem Ordinária	$0.7608 \times 10^6$
Efetivo Krigagem Ordinária	$0.7826 \times 10^6$
Cópula $\psi(c^* x^*)$	$0.6877 \times 10^6$
Efetivo Cópula $\psi(c^* x^*)$	$0.7794 \times 10^6$
Cópula $\tau(c^* x^{**})$	$0.1560 \times 10^6$
Efetivo Cópula $\tau(c^* x^{**})$	$0.7528 \times 10^6$

Como anteriormente, foi aplicada a mesma taxa de desconto de 12% ao ano, e a capacidade de produção foi aumentada para que a lavra fosse sempre em um número fixo de anos.

Na Figura 5.12, apresenta-se o valor esperado, da krigagem e das cópulas (na cor preta). Os valores de benefício efetivamente obtidos (pontilhado) são superiores em todas as estimativas. Nota-se que, a primeira cópula conseguiu obter resultados satisfatórios, principalmente nos anos onde o benefício seria negativo, devido a alta quantidade de estéril a ser removida para alcançar o segundo corpo de minério.

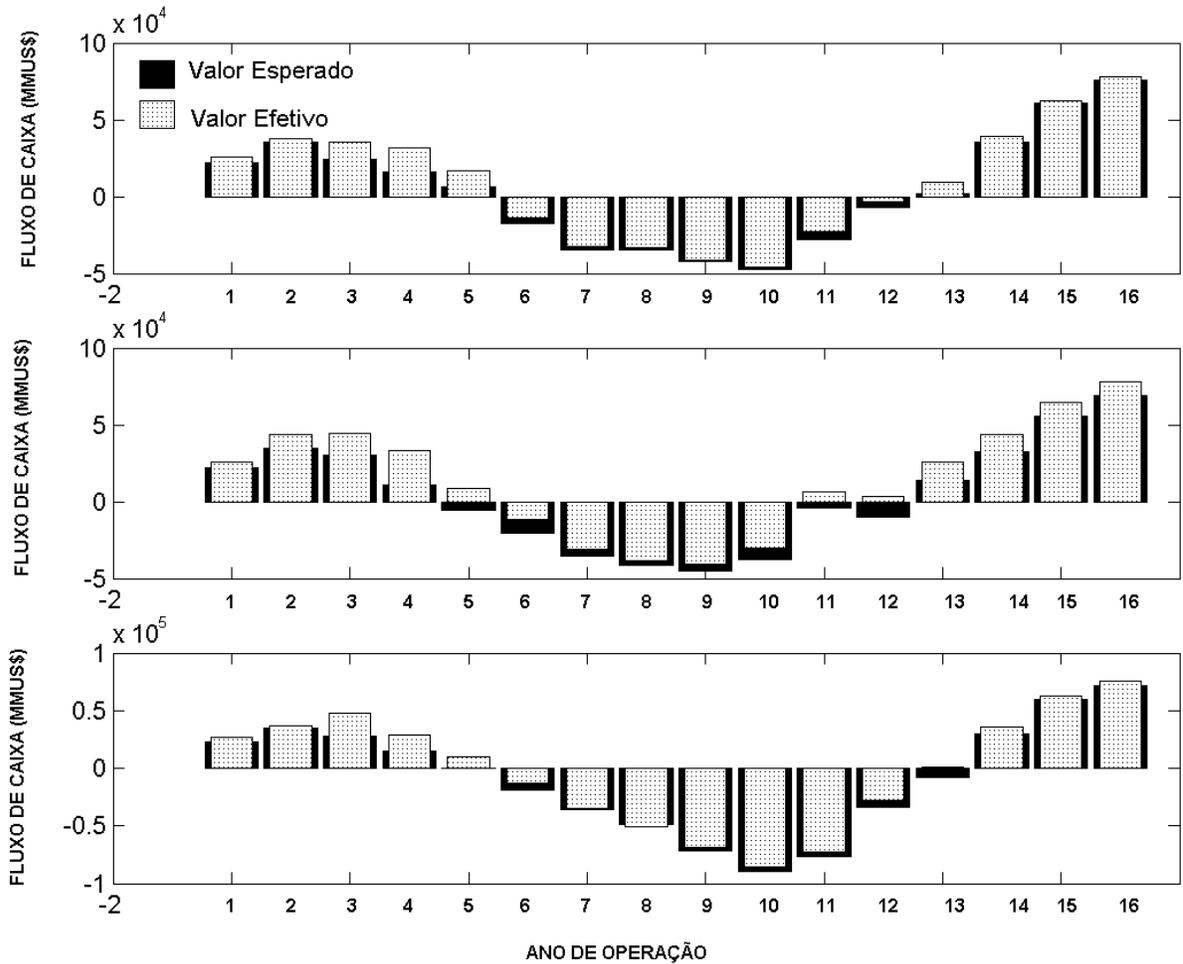


Figura 5.12: Seqüenciamento e cava obtida com teor de corte de 260 ppm, via krigagem de blocos 5m x 5m, krigagem (em acima), cópula 1 (no meio) e cópula 2 (em baixo).

Os valores presentes líquidos, encontram-se na Tabela 5.6. Eles mostram que o valor esperado pela krigagem foi 28,13% inferior ao valor ideal que poderia ser obtido pela cava. As diferenças aumentaram em relação ao teor de corte anterior. Uma das cópulas conseguiu obter o valor mais próximo do valor ideal.

Tabela 5.6 - Valor Presente Líquido obtido pelo teor de corte de 260 ppm

Sequenciamento Obtido	Benefício Líquido
Ideal	$0.1068 \times 10^5$
Krigagem Ordinária	$0.0353 \times 10^5$
Efeito Krigagem Ordinária	$0.0783 \times 10^5$
Cópula $\psi(c^* x^*)$	$0.0614 \times 10^5$
Efetivo Cópula $\psi(c^* x^*)$	$0.1051 \times 10^5$
Cópula $\tau(c^* x^{**})$	$0.0034 \times 10^5$
Efetivo Cópula $\tau(c^* x^{**})$	$0.0213 \times 10^5$

Caso os teores reais fossem conhecidos, o melhor seqüenciamento da cava pode ser observado na Figura 5.13.

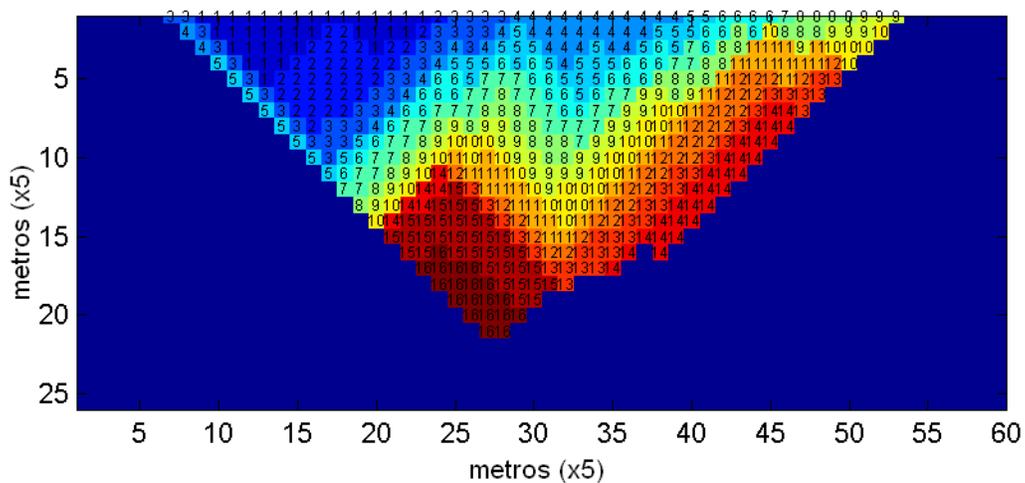


Figura 5.13: Seqüenciamento e cava obtida com teor de corte de 260 ppm, caso fosse conhecidos os teores verdadeiros de blocos 5m x 5m.

## Capítulo 6

# Conclusões

Estudos especializados sobre falhas em projetos de mineração mostram que alguns fracassos dos empreendimentos são diretamente atribuídos a erros de estimativa de minério. Muitos métodos vêm sendo propostos para solucionar o velho problema mineiro. Cada vez mais é preciso gerenciar as possíveis falhas, para verificar a opção de investir ou não em um projeto.

Respostas rápidas são exigidas para diversos projetos. A simulação estocástica foi formulada com o objetivo de verificar a variabilidade de um depósito, seu objetivo é diferente da krigagem. Apesar da velocidade dos computadores atuais, como gerar 50 ou 100 cavas oriundas de simulações condicionais e aplicar teores de cortes diferentes, seriam gerados milhares de cenários deste exercício. O processo de definição da cava matemática e seu seqüenciamento são demorados, além disso, deve-se rodar uma função benefício para cada cenário e os processos de importação e exportação de modelos de blocos reais são lentos, e muitas vezes, os resultados obtidos, pela simulação, não são satisfatórios. O compromisso de reproduzir a variabilidade do depósito (conhecida no jargão geoestatístico como cabeleira de variograma) não garante que as incertezas, utilizando um teor de corte, sejam acessadas. A utilização do banco de dados de Walker Lake com 470 em vez dos tradicionais 190, mostram a influência de dados enviesados, isto foi visto no capítulo 4, onde o cenário na qual se definiu as incertezas do projeto foi o de probabilidade de 85%, mas como saber que o cenário de probabilidade de 95% não acessaria estas incertezas, se em

projetos reais não se conhece o valor verdadeiro. A probabilidade de 85% acarretou um problema, pois o intervalo entre as probabilidades de estar acima e abaixo, ficaram amplos, sendo impossível tomar qualquer decisão; o sucesso e o fracasso do empreendimento ficaram com probabilidades altas.

O objetivo principal desta tese foi atingido, o método de condicionamento utilizando cópulas obteve sucesso de uma maneira simples, através do condicionamento da krigagem e da validação cruzada, definindo o intervalo de incertezas de um projeto. Em posse da melhor ferramenta de estimativa não enviesada e os erros locais impostos pela definição do variograma e vizinhança de krigagem (validação cruzada) foram utilizados em uma simulação que buscava reproduzir a forma da distribuição conjunta, entre o valor estimado e o valor real (que não existe na prática). Com isto, foi possível estimar curvas do tipo tonelagem  $x$  teor e definir um intervalo de possíveis valores para o projeto. Dependendo do teor de corte, a krigagem sobrestima ou subestima e com os valores obtidos por cópulas foi possível detectar a região onde existe a inversão dos teores, pois tem-se uma estimativa. Os resultados obtidos na otimização de cava e no seqüenciamento mostram o efeito da krigagem na otimização de cavas. Principalmente no que tange o erro econômico que uma seqüência definida por uma estimativa pode levar, devida a seleção errônea de blocos. Os resultados obtidos no capítulo 5, mostram que o condicionamento utilizando cópulas, obteve resultados efetivamente melhores que a krigagem.

Como sugestão para trabalhos futuros, além de testar em outros bancos de dados sintéticos ou reais; bancadas com valores conhecidos, verificando o comportamento das cópulas, pode-se impor distribuições conhecidas, como a cópula lognormal, mudando o suporte, em termo de teórico, por meio da variância. Não sendo necessário a utilização da transformação gaussiana.

# Capítulo 7

## Bibliografía

[1] ARMSTRONG, M.; GALLI, A. Copulas. In: SPE ATW Risk Analysis Applied to Field Development Under Uncertainty, Rio de Janeiro, Agosto 2002.

[2] BURMEISTER, B. From Resources to Reality-A Critical Review of the Achievement of New Australian Gold Mining Projects During the Period January 1983 to September 1987, Sydney, 1989. MSc Thesis (unpublished), Macquarie University.

[3] CLOUT, J. M. F.; CLEGHORN, J. H.; EATON, P. C. Geology of the Kalgoorlie gold field. In: HUGHES, F. E. ed., Geology of the Mineral Deposits of Australia and Papua New Guinea, AusIMM, Melbourne, 1990, p.411-431.

[4] CHAUVET, P. Aide-mémoire de géostatistique linéaire. Presses de l'Ecole des mines de Paris. Fontainebleau: 1999, 367 p.

[5] CHILÈS, J. P.; DELFINER, P. Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty. Wiley Series in Probability and Statistics, 1999. 720p.

[6] DOMINY; SIMON C.; NOPPÉ; MARK A.; ANNELS, A. E. Errors and Uncertainty in Mineral Resource and Ore Reserves Estimation: The Importance of Getting it Right. Explor. Mining Geol. v.11, n.1-4, p.77-98, 2002.

[7] EMERY, X. Simulation conditionnelle de modèles isofactoriels. Paris, 2004. Thèse de doct. en géostatistique, Ecole des Mines de Paris.

[8] GALTON, F.. Hereditary Genius: An Inquiry Into Its Laws and Consequences. Macmillan and CO, London, 1892. 390p.

- [9] GOOVAERTS, P. Geostatistics for Natural Resources Evaluation. Oxford University Press, New York, 1997. 483 p.
- [10] HARQUAIL, D. Investing in Junior Mining Companies. In: 6th Mineral Economics Symposium of CIM, Montreal, Canada, 1991. Proceedings, 10p, 1991.
- [11] ISAAKS, E. H. The application of Monte Carlo Methods to the Analysis of Spatially Correlated Data. Stanford, 1990. Ph.D. Thesis, Stanford University.
- [12] ISAAKS, E., H.; SRIVASTAVA, M. R. Introduction to Applied Geostatistics. Oxford University Press, Boston, 1990. 592p.
- [13] JOURNEL, A. G.; HUIJBREGTS, C. J. Mining geostatistics. London, Academic Press, 1978. 600p.
- [14] JOURNEL, A. G. Nonparametric estimation of spatial distributions. *Mathematical Geology*, v. 15, n. 3, p. 445-468, jun. 1983.
- [15] JOURNEL, A.G. Geostatistics for conditional simulation of ore body. *Economic Geology*, n.69, p.673-687, 1974.
- [16] KRIGE, D. G. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand. *Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa*. n.52, p. 119-139, 1951.
- [17] LASSONDE, P. The Gold book: The complete investment guide to precious metals. Financial Times of Canada, Toronto, 1990. 130p.
- [18] LANTUÉJOL, C. Geostatistical Simulation, Models and Algorithms. Springer, Berlin. Olea, RA, 2002. 256p.
- [19] LINDSKOG, F. Modeling Dependences with Copulas and Application to the Risk Management. Working Paper, Department of Mathematics ETH Zurich, sep. 2000.
- [20] MATHERON, G. The Selectivity of the Distributions and The Second Principle of Geostatistics In: Verly et al. ed., *Geostatistics, Kluwer for Natural Resources Characterization*, Part I, 1984, p. 421-433.

- [21] MATHERON, G. The Intrinsic Random Functions and Their Applications. *Adv. Appl. Prob.* v.5, p.439-468, 1973.
- [22] MATHERON, G. La Sélectivité des Distributions. Centre de Géostatistique, Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau: 1981. (Internal Report N-395).
- [23] MARSHALL, A. W.; OLKIN, I. Families of Multivariate Distributions. *Journal of the American Statistical Association.* v. 83, n. 403, sep. 1988.
- [24] NELSEN, Roger, B. An Introduction to Copulas. *Lecture notes in Statistics.* Springer Verlag, New York, 1999. 139p.
- [25] REMACRE, A. Z. L'estimation du récupérable local : le conditionnement uniforme. Paris, 1984. Thèse de Doct. Ing. en sciences et techniques minières, Ecole des Mines de Paris.
- [26] RIVOIRARD, J. Introduction to disjunctive kriging and non-linear geostatistics. Oxford University Press, 1994. 180p.
- [27] RONCALLI, T. Gestion des risques multiples ou copules et aspects multidimensionnels du risque. Cours ENSAI 3ième année, 2002. 320p.
- [28] SICHEL, H. S. New Methods in the Statistical Evaluation of Mine Sampling Data. *Trans. Inst. Mining and Metall.* v.61, p.261-288, 1952.
- [29] SICHEL, H. S. Mine valuation and Maximum likelihood, Witwatersrand, 1949. Thesis, University of Witwatersrand.
- [30] SRIVASTAVA, R. M. Reservoir characterization with probability field simulation. In: *SPE Annual Conference and Exhibition, Washington, D.C, Number: 24753, p.927 - 938, 1992.*
- [31] REMACRE, A. Z. e CORNETTI, M. A. , *Analise de Variabilidade - ANAVAR, VI Simposio de Quantificacao em Geociencias, I, P. 139-141, 1995.*
- [31] SPEARMAN, C.E. The Proof and Measurement of Association Between Two Things. *American Journal of Psychiatri.* v.15, p.72-101, 1904.
- [32] SCHWEIZER, B.; WOLFF, E. F. On Nonparametric Measures of Dependence for Random Variables. *The Annals of Statistics.* v.9, p.879-885, 1981.

[33] WIJS de H. J. Statistics of ore deposition. *Geologie en Mijubouw*. v. 30, p. 365-375, 1951.

[34] LERCHS, H. e GROSSMANN, I.F. *Optimum Design of Open Pit Mines*, CIM Bulletin, Montreal, Canada, 1965.

## Apêndice A

# Walker Lake

Para exemplificar esta tese, será utilizado um banco de dados, conhecido pelos geoestatísticos como Walker Lake. Este banco de Dados é derivado de um levantamento digital de altitude de uma área em Nevada, no oeste dos Estados Unidos. Os dados originais continham 2 milhões de pontos em um gride regular (ISAACS e SRIVASTAVA, 1989, p.4). Estes dados foram transformados em 3 variáveis cada uma com 78.000 pontos em um gride regular. Existem duas variáveis contínuas, que foram utilizadas nesta tese (ver figura A.1) e uma variável de indicatriz. As variáveis  $V$  e  $U$ , para nosso caso de mineração, representaram seu valor em ppm.

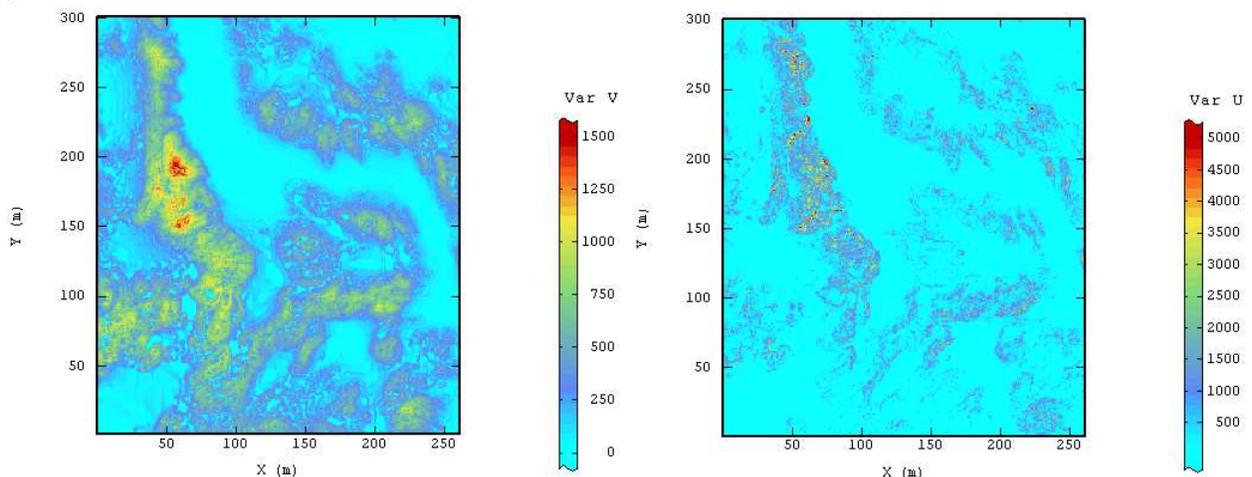


Figura A.1: Banco de Dados de Walker Lake, Variável  $V$  (esquerda) e Variável  $U$  (direita)

Uma amostragem foi feita no banco de dados, sendo que foram retiradas 470 amostras da

variável  $V$  e 275 amostras da variável  $U$ , ver figura A.2. A diferença entre o número de amostras é típica em uma mineração, algumas variáveis são amostradas mais que outras, devido de custos, falta de recuperação de massa, novas tecnologias etc.

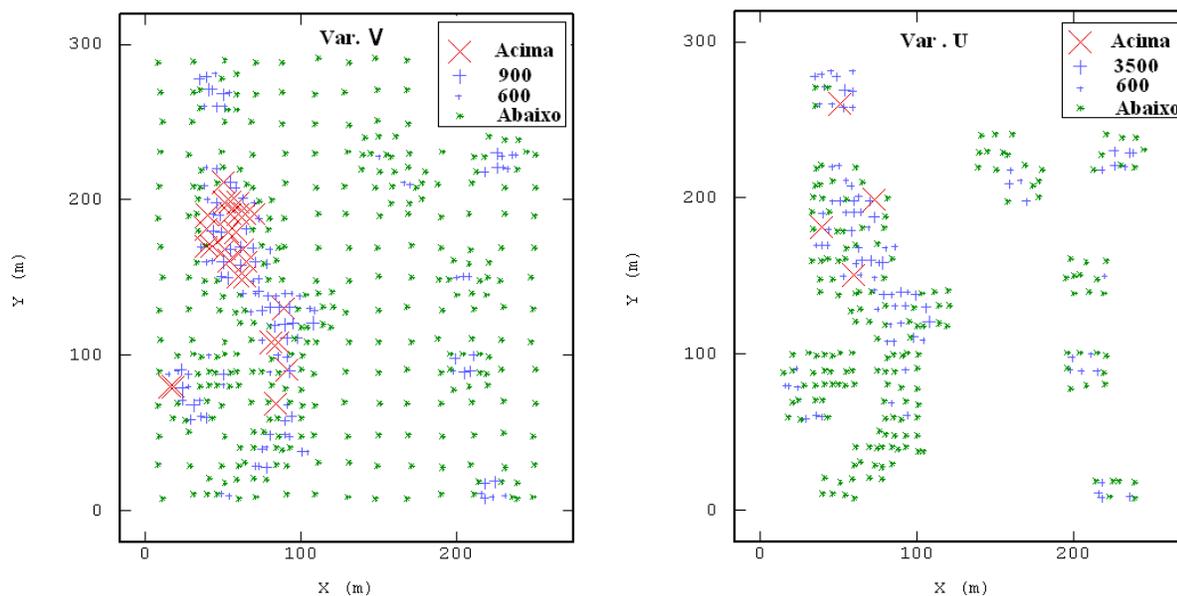
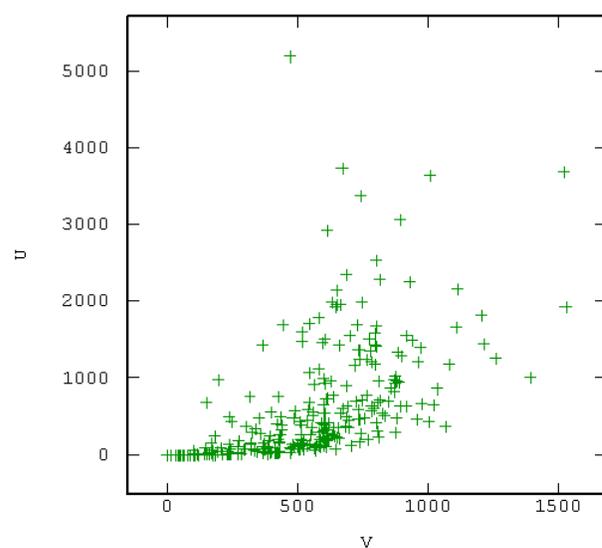


Figura A.2: Amostragem da Variável  $V$  (esquerda) e da Variável  $U$  (direita)

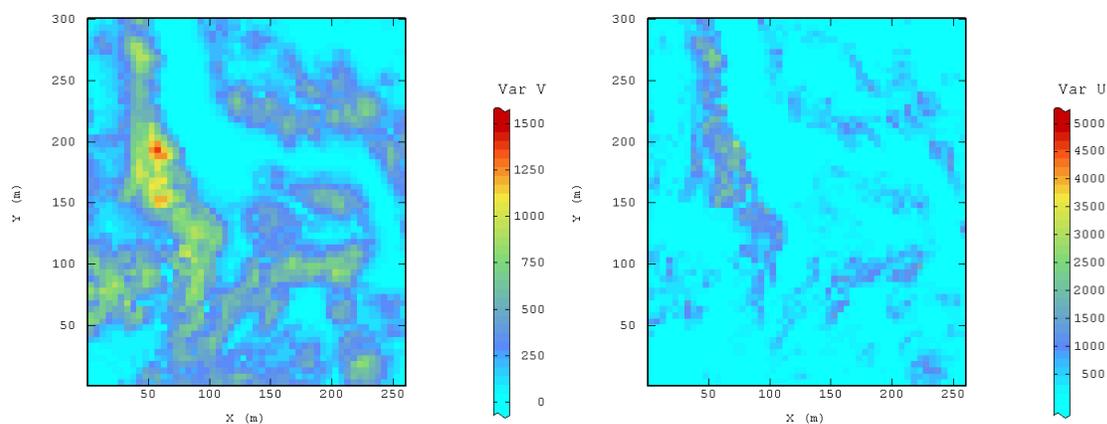
**Tabela A.1 - Estatística da Amostragem**

Variável	Amostras	Mínimo	Média	Máximo	Desvio Padrão	Coef. de Var.
V	470	0.00	436.35	1528.10	299.92	0.69
U	275	0.00	613.27	5190.10	767.32	1.25

Na maioria dos projetos, um outro fator importante é a correlação entre variáveis, pois em alguns casos, apenas um tipo de minério não é suficiente para pagar todos os custos ou maximizar o valor da jazida. Por exemplo, é muito comum uma mineração produzir cobre e ouro, e a venda dos dois minérios garantirem o fluxo de caixa positivo. Uma forma de verificar a correlação entre as variáveis é o gráfico de dispersão (pode ser visto na figura A.3). Para Walker Lake a correlação entre as variáveis  $V$  e  $U$  é de 0.55.

Figura A.3: Correlação entre as amostras  $V$  e  $U$ 

Outro ponto importante é que todo projeto de mineração é baseado em um modelo de blocos, que possui um suporte muito maior que uma amostra e todo planejamento da mina é feito em seqüências de lavra ou painéis de lavra. Assim, o tamanho de blocos adotado para esta jazida foi de 5 x 5 metros (ver figura A.4).

Figura A.4: Modelo de Blocos Walker Lake, Variável  $V$  (esquerda) e Variável  $U$  (direita)

Utilizando o projeto de Walker Lake, para a variável  $V$ , foi feito o variograma experimental e o mesmo foi ajustado conforme ISAAKS e SRIVASTAVA (1998), a vizinhança utilizada foi a mesma sugerida pelos autores, conforme figura a seguir.

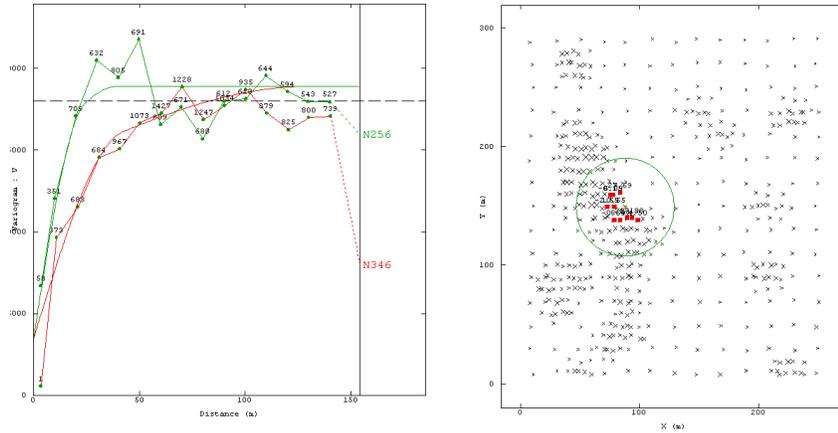


Figura A.5: Ajuste de variograma e vizinhança de Walker Lake

A tabela A.2 mostra as alterações estatísticas entre o gride 1x1 e o gride 5x5, ocorridas durante a reblocagem.

Tabela 3.2 - Estatística da mudança de suporte

Variável	Blocos	Mínimo	Q25	Média	Q75	Máximo	Desvio Padrão	Coef. de Var.
V 1x1	7800	0.00	67.79	277.98	429.34	1631.16	249.84	0.89
V 5x5	3120	0.00	92.81	277.98	414.32	1378.12	228.66	0.82
U 1x1	7800	0.00	6.67	266.04	316.35	9499.51	488.45	1.84
U 5x5	3120	0.00	22.82	266.04	361.87	2844.55	358.80	1.35

## A.1 Simulação Gaussiana Seqüencial

Considere uma função aleatória  $Z(\bullet)$ , conhecida com  $N$  amostras  $x_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, N$ . Assume-se que há uma simulação não-condicional  $S(\bullet)$  independente de  $Z(\bullet)$  com a mesma covariância de

$Z(\bullet)$ . Uma maneira de condicionar os dados é através da krigagem. O princípio proposto por MATHERON, é muito simples. Sendo  $Z^*(x)$  chamado de uma estimativa de  $Z(x)$  no ponto  $x$  baseado no dado  $Z(x_\alpha)$ , sendo isso o início de uma decomposição:

$$Z(x) = Z^*(x) + [Z(x) - Z^*(x)],$$

*Valor Verdadeiro = Estimativa Krigada + Erro de Krigagem.*

O erro de krigagem é verificado desde que  $Z(x)$  seja conhecido. Agora, considere a mesma igualdade para  $S(x)$ , onde  $S^*(x)$  é uma estimativa da krigagem obtida por simulação, onde se conhece somente os pontos amostrais  $x_\alpha$ :

$$S(x) = S^*(x) + [S(x) - S^*(x)].$$

Como o valor verdadeiro de  $S(x)$  é conhecido, então o erro  $S(x) - S^*(x)$  também o é. Conseqüentemente a idéia é substituir, na decomposição de  $Z(x)$ , o erro não conhecido por meio do erro da simulação, assim temos uma simulação condicional:

$$Y(x) = Z^*(x) + [S(x) - S^*(x)]$$

Simulação Condicional = Estimativa por Krigagem + Erro de Krigagem Simulado.

Desde que a krigagem seja um interpolador exato, para cada amostra tem-se  $Z^*(x_\alpha) = Z(x_\alpha)$  e  $S^*(x_\alpha) = S(x_\alpha)$  e também  $Y^*(x_\alpha) = Z(x_\alpha)$ . Como conseqüência, em termos de covariância,  $Cov(Z(x), Z(x')) = Cov(Z^*(x), Z^*(x')) + Cov(Z(x) - Z^*(x), Z(x') - Z^*(x'))$ , desde que  $Z(x) - Z^*(x)$  não seja correlacionado com  $Z^*(x')$  para todo  $x'$ . Sendo  $S$  e  $Z$  independente, a covariância de  $T$  é também a soma das covariâncias de  $Z^*$  tal que  $S - S^*$ , igualando-se a isso a  $Z - Z^*$ . Logo:

$$Cov(T(x), T(x')) = Cov(Z(x), Z(x')).$$

A família de procedimentos seqüenciais envolve a escolha de um caminho aleatório através dos nós da malha a ser simulada; a estimativa de distribuição de probabilidade condicional local a

partir dos dados condicionantes e os já simulados e, finalmente, sortear um valor desta.

Esses métodos seqüenciais, propostos por JOURNEL e ALABERT (1989,1990) são uma aplicação do teorema de Bayes. Os  $n$  eventos dependentes  $A_i, i = 1, \dots, n$  podem ser simulados seqüencialmente usando a expressão:

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_n|A_1, \dots, A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1}|A_1, \dots, A_{n-2}) \dots P(A_2|A_1) \cdot P(A_1)$$

$$P\{z_{M+1} \leq Z_{M+1} + dz_{M+1}, \dots, z_N \leq Z_N < z_N + dz_N | z_1, \dots, z_M\}$$

$$= P\{z_{M+1} \leq Z_{M+1} < z_{M+1} + dz_{M+1} | z_1, \dots, z_M\}$$

$$\times P\{z_{M+2} \leq Z_{M+2} < z_{M+2} + dz_{M+2} | z_1, \dots, z_M, z_{M+1}\}$$

•

•

•

$$P\{z_N \leq Z_N < z_N + dz_N | z_1, \dots, z_M, z_{M+1}, z_{N-1}\}.$$

A técnica requer a inferência de  $n - 1$  sucessivas distribuições de probabilidade condicionais, por meio de uma transformação Gaussiana. O algoritmo de simulação Gaussiana seqüencial consiste dos seguintes passos:

1. transformar os dados condicionantes em valores Gaussianos padrão;
2. calcular e modelar o variograma dos dados condicionantes transformados;
3. definir um caminho aleatório através de todos os pontos da malha de simulação;
4. em cada ponto da malha, krigar um valor baseado em outros valores (condicionantes e já simulados);

5. o valor krigado e a variância de krigagem associada, são os parâmetros da distribuição Gaussiana condicional no ponto da malha, dado os dados condicionantes e os valores previamente simulados. Sorteia-se um número aleatório dessa distribuição e o adiciona ao conjunto dos valores simulados;
6. retornar ao passo 4 até que os valores sejam simulados em todos os pontos da malha;
7. aplicar a transformação inversa nos valores Gaussianos simulados condicionalmente.

As maiores vantagens desse método são: a) o condicionamento é parte integrante da simulação e não um passo separado; b) as anisotropias são manuseadas automaticamente, pode ser aplicado a qualquer função de covariância; c) requer apenas um algoritmo de krigagem eficiente (com busca de vizinhança móvel).

O variograma para a variável V simulada, pode ser visto na próxima figura, os parâmetros utilizados para o ajuste do modelo foram rotação de 14 graus da direção noroeste, onde foi ajustado um efeito pepita de 0.067. Duas estruturas esféricas foram ajustadas, sendo a primeira ( 30.00m, 18.00m, 18.00m) e a segunda ( 78.00m, 36.00m, 36.00m). Com os respectivos patamares: 0.51 e 0.42.

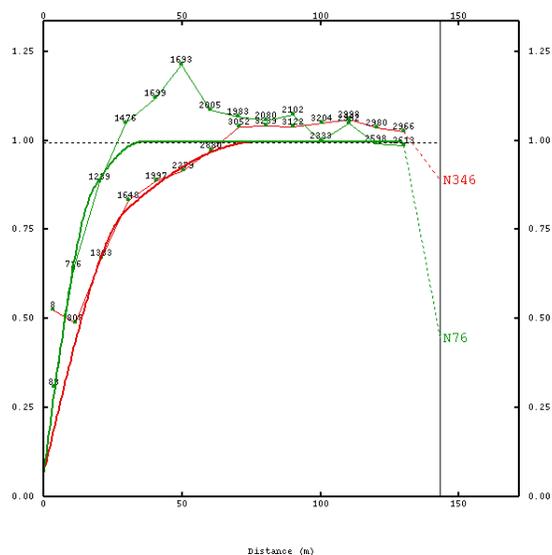


Figura A.6: Variograma Ajustado para Simulação Gaussiana Seqüencial

Foi utilizada uma vizinhança de 42 x 42 metros, onde o número máximo de dados escolhido

para a simulação de um bloco foi de 16, onde 12 desdes, poderiam advir da simulação. A semente utilizada foi 54760341. Foram feitas 100 simulações no programa Isatis.

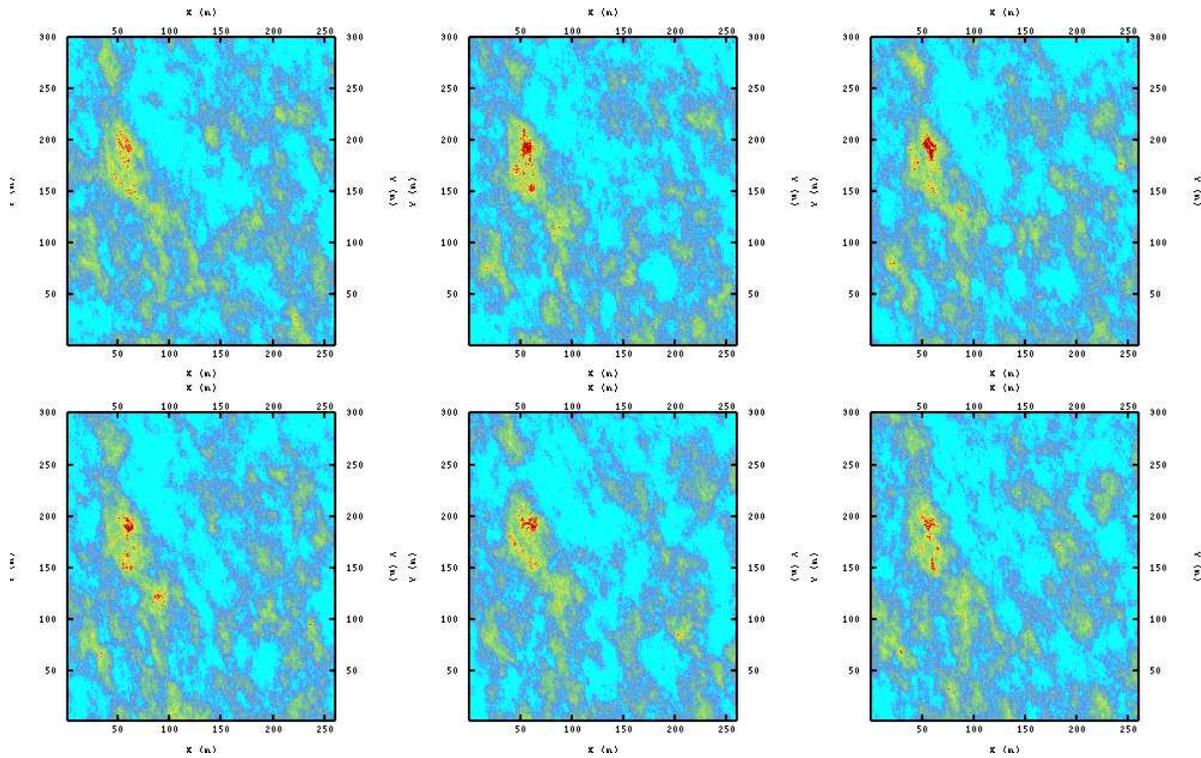


Figura A.7: Exemplo de algumas simulações gaussianas seqüenciais de Walker Lake

## Apêndice B

# Distribuições empíricas

Para simular dados multivariados dependentes, usando cópulas, é necessário especificar os seguintes parâmetros:

1. A família de cópulas (é o parâmetro da forma);
2. O *rank* de correlação entre as variáveis;
3. A distribuição marginal para cada variável.

Tendo dois conjuntos de dados reais, (Ferro e Sílica de uma jazida de ferro) e tendo como objetivo rodar uma simulação de *Monte Carlo* com entradas que seguem a mesma distribuição dos conjuntos. (os dois vetores possuem o mesmo número de dados, mas isto não é necessário).

Pode-se ajustar um modelo paramétrico separado para cada conjunto de dados e usá-los como sendo as distribuições marginais. Contudo, um modelo paramétrico talvez não seja suficientemente flexível. Então, em vez disso, pode-se usar um modelo empírico para as distribuições marginais. Só necessita-se de uma maneira de calcular a inversa da distribuição função cumulada.

A função empírica inversa acumulada para esse conjuntos de dados é exatamente a função escada, com passos de  $1/\text{No. observações}$ ,  $2/\text{No. observações}$ , ..., 1. A altura dos passos é simplesmente os dados ranqueados, ver Figura B.1.

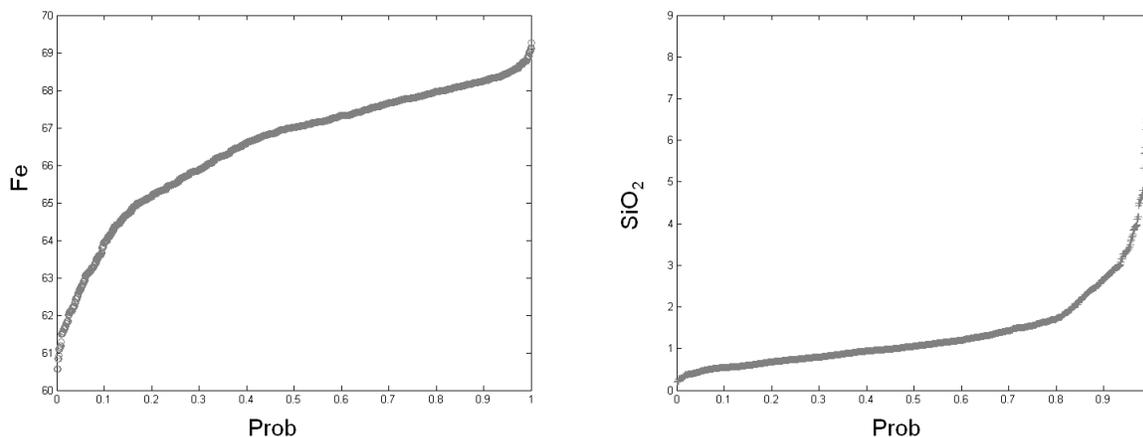


Figura B.1: Função Empírica dos Dados

Para as simulações devemos experimentar diferentes cópulas e correlações. Usaremos aqui uma cópula bivariada lognormal com um coeficiente de correlação igual a  $-0.60$ , correspondente aos dados de entrada, ver Figura B.2.

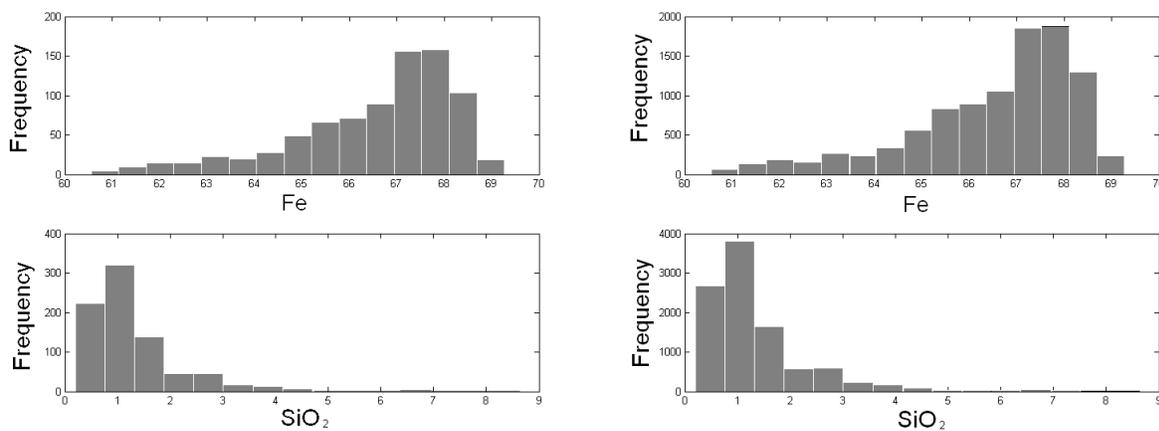


Figura B.2: Histograma das amostras e dos dados simulados

Foram simuladas 10.000 valores. Os resultados estatísticos podem ser vistos na tabela B.1, juntamente com os respectivos histogramas dos dados originais e dos simulados.

Tabela B.1 - Estatísticas da Simulação

Estatística	Dados de Entrada	Simulação
Número de Dados	828	10.000
Média Ferro	66.50	66.51
Média Sílica	1.377	1.373
Variância Ferro	3.0234	3.0304
Variância Sílica	1.1627	1.2053

As simulações, na geoestatística, são geradas através de funções aleatórias, condicionadas às leis espaciais multigaussianas. Isto significa que todas as combinações lineares seguem uma distribuição gaussiana, sendo que o problema do condicionamento dos dados foi resolvido pela krigagem e pela variância de krigagem. Previamente a variável regionalizada deve ser transformada em uma variável marginal gaussiana.

As distribuições multigaussianas são extremamente cômodas na utilização, pois dependem apenas dos momentos de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordem ( Esperança Condicional e Covariância) o que facilita a inferência estatística. Porém, isto acarreta várias restrições, entre elas, a dificuldade de se conseguir a anamorfose gaussiana, quando o histograma da variável regionalizada é fortemente dissimétrico ou apresenta uma proporção importante de valores extremos.

Este método de simulação abre caminho para resoluções de alguns problemas da geoestatística, principalmente na área da geoestatística não-linear, onde pode ser vastamente aplicada.

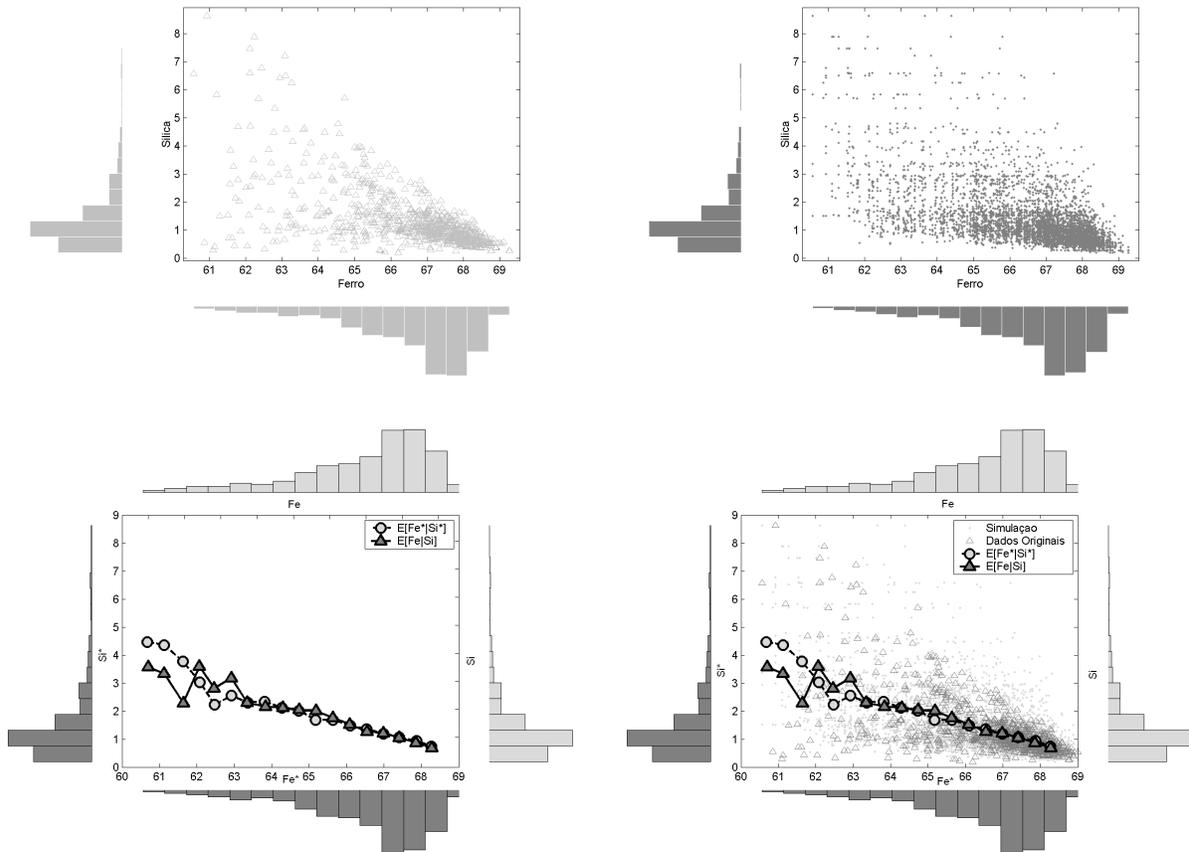


Figura B.3: Gráfico de dispersão das amostras (esquerda acima), da simulação (direita acima), Esperança Condicional (esquerda abaixo) e todos (direita abaixo)

A Figura B.3 mostra a dispersão da simulação. Note que nesse caso foi feita uma simulação com apenas duas variáveis, mas a metodologia não se restringe a dados bivariados. Em termos de esperança condicional, verifica-se que os resultados são muito próximos, tornando a simulação não enviesada, apesar dos valores altos correlacionados com valores baixos.

## Apêndice C

# Comparação entre Distribuições

Considere duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  positivas (esta restrição não é essencial), e designadas por  $F_X, F_Y, T_X, T_Y$ , etc. As diversas funções estão condicionadas a estas variáveis.

Parece bastante natural dizer que a lei de  $F_X$  é melhor que a lei de  $F_Y$ , na mineração, se:

$$Q_X(T) \geq Q_Y(T) \text{ para todo } T \in E(0, 1).$$

ou se  $V_X(z) \geq V_Y(z)$  para todo o  $z \geq 0$ .

Estas duas definições são equivalentes:

$$Q_X \geq Q_Y (=) V_X \geq V_Y$$

Isto é suficiente para usar as fórmulas de dualidade (ver MATHERON, 1981) entre as funções de  $V$  e  $Q$ :

$$\begin{cases} V(z) = \sup_T (Q(T) - zT) \\ Q(T) = \inf_z (V(z) - zT) \end{cases}$$

Por exemplo, suponha que  $Q_Y \leq Q_X$ . Então, para todo  $T$  e todo  $z$ :

$$Q_Y(T) - zT \leq Q_X(T) - zT \leq \sup_T (Q_X(T) - zT) = V_X(z).$$

Por consequência:

$$V_Y(z) = \sup_T (Q_Y(T) - zT) \geq V_X(z).$$

Assim  $Q_Y \geq Q_X$  requer que  $V_Y \geq V_X$  e a recíproca é demonstrado, da mesma maneira.

A relação de ordem,  $F_X$  mais seletivo que  $F_Y$ , na geoestatística mineira, está demonstrada especialmente entre distribuições de mesmo momento, que é a comparação de presente interesse.

Para dizer que a lei de  $F_X$  é mais seletiva que a lei de  $F_Y$ , a condição necessária é:

$$E(X) = E(Y) \quad e V_X \geq V_Y \quad (\text{ou } Q_X \geq Q_Y). \quad (\text{C.1})$$

Uma condição necessária e suficiente, para que a lei de  $F_X$  seja mais seletiva que a lei de  $F_Y$  é que  $E[\varphi(X)] \geq E[\varphi(Y)]$ , isso significa:

$$\int \varphi(x) F_X(dx) \geq \int \varphi(y) F_Y(dy). \quad (\text{C.2})$$

Para toda função convexa  $\varphi$ .

Realmente, toda a função convexa em  $\mathbb{R}_+$  adquire a forma abaixo:

$$\varphi(x) = a + bx + \int_0^x (x-t)\mu(dt)$$

Para uma medida positiva  $\mu$  em  $\mathbb{R}_+$ . Então, para a variável aleatória  $X$ , tem-se (MATHERON, 1981):

$$\begin{aligned} E[\varphi(x)] &= a + bE(X) + \int_0^\infty F_X dx \int_0^\infty (x-t)\mu(dt) \\ &= a + bE(X) + \int_0^x V_X(t)\mu(dt). \end{aligned}$$

Inversamente, tendo  $\varphi(x) = bx$ , veêm  $bE(X) \geq bE(Y)$ . Como  $b$  pode ser positivo ou negativo, então  $E(X) = E(Y)$ . Levando então  $\varphi(x) = (x-x_0)_+$ , a relação de  $V_X(x_0) \geq V_Y(y_0)$ , então a última equação é verdadeira.

## C.1 Efeito Suporte

Será apresentado aqui um exemplo simples, feito por MATHERON, mas seu entendimento é muito importante para a compreensão do efeito suporte. Sendo  $Z(x), x \in \mathbb{R}^n$  uma função aleatória (estacionária ou não),  $\Pi = \bigcup \bar{w}_i$  de um painel constitui de reunião blocos disjuntos  $\bar{w}_i$ . Considerando o volume de  $\Pi$  como unidade seletiva de volume, designando  $\nu_i$  como o volume do bloco  $\bar{w}_i$ , de forma que  $\sum \nu_i = 1$ .

Sendo  $Y$  um valor mediano de  $Z(x)$  no volume  $\Pi$  e o mesmo para  $X_i$  de  $Z(x)$  no bloco  $\bar{w}_i$ , de forma que esta função aleatória possa ser expressa pela seguinte equação:

$$Y = \sum \nu_i X_i. \quad (\text{C.3})$$

Como o  $\nu_i$  constitui a probabilidade no espaço indexada, chamando esta função aleatória com  $Pr(I = i) = \nu_i$  e por  $X = X_I$  de uma variável aleatória composta, obtida pela substituição de  $I$  em  $i$  em  $X_i$  (aleatoriamente  $i$ ). tem-se a esperança condicional de  $X$  em relação  $Y$ :

$$E(X|Y) = \sum \nu_i E(X_i|Y).$$

E, como consequência, tem-se a seguinte relação:

$$E(X|Y) = Y.$$

Isto resulta que a lei de  $X$  (lei dos blocos) é mais seletiva que a lei de  $Y$  (lei dos painéis). Este fenômeno, fundamental na geoestatística, é conhecido como efeito suporte.

Realmente, para toda função convexa  $\varphi$  e toda lei de probabilidade de  $F$ , tem-se:

$$\varphi \left[ \int z F(dz) \right] \leq \int \varphi(z) F(dz)$$

Em particular, aplicando a lei condicional de  $X$ :

$$\varphi(Y) = \varphi [E(X|Y)] \leq E[\varphi(X)|Y].$$

Levando a esperança para dentro da equação, obtem-se:

$$E[\varphi(Y)] \leq E[\varphi(X)].$$

Isto significa exatamente que  $F_X$  é mais seletivo que  $F_Y$ .

A relação de ordem  $F_X$  é mais disperso que  $F_Y$ . Geralmente, a lei de  $F_X$  se deduz pela dispersão de uma lei de  $F_Y$ , pode-se achar uma lei de duas variáveis  $F(dx, dy)$  admitindo para as leis marginais de  $F_X$  e  $F_Y$  tal que:

$$E(X|Y) = Y.$$

Isto é o mesmo que dizer que para  $F_Y$  todo  $y$  pode ser achado com uma probabilidade de transição de  $P_y(dx)$  verificando a condição baricêntrica:

$$\int x P_y(dx) = y.$$

Por conseqüência,

$$\int F_Y(dy) P_y(A) = F_X(A)$$

Para todo o boreliano de  $A$ . Debaixo desta forma markoviana, é suficiente para verificar que a relação:  $F_X$  é mais dispersa que  $F_Y$  sendo uma relação de ordenamento.

No exemplo prévio, a lei dos blocos apresenta-se mais dispersa que a lei dos painéis. Então, pode-se dizer que  $F_X$  é mais disperso que  $F_Y$ , então  $F_X$  é mais seletivo que  $F_Y$ . Segundo MATHERON (1981), o recíproco é verdade (e até mesmo em espaços vetoriais mais gerais que  $\mathbb{R}$ ). Este teorema muito importante é chamado de teorema de Cartier (cuja demonstração encontra-se d'Alfsen, sobre espaços compactos convexos). Assim:

Uma lei de  $F_X$  é mais seletiva que uma lei de  $F_Y$  se e somente se  $F_X$  pode ser deduzido pela

dispersão de  $F_Y$ .

Ou seja, tem-se  $E\varphi(X) \geq E\varphi(Y)$  para toda função convexa  $\varphi$  ( $EX = EY$  e  $V_X \geq V_Y$ ), se e somente se pode-se deduzir a lei das duas variáveis  $F(dx, dy)$  admitindo as marginais  $F_X$  e  $F_Y$  e tendo como  $E(X|Y) = Y$ .

## C.2 Efeito Informação

O efeito informação é outro problema, também inspirado da prática mineira. Qualquer variável aleatória  $Y$  pode representar o conteúdo de um bloco, a decisão de selecionar ou não, pode ser representada por  $X_i, i = 1, 2, \dots, n$  que são os teores das amostras na qual se tomou a escolha. O teor de corte  $y$  é definido com critérios que buscam escolher um boreliano em  $\mathbb{R}^n$  e selecionar os blocos se  $(X_1, \dots, X_n) \in A$ , e rejeitar, caso contrário. Entre todos os borelianos  $A$  possíveis, o melhor, para o teor de corte é o boreliano  $A_y$  do que alcança o *Sup* de:

$$E[(Y - y) I_A] = \int_A E \left[ \frac{(Y - y)}{x_1, \dots, x_n} \right] F(dx_1, \dots, dx_n).$$

Ou  $F(dx_1, \dots, dx_n)$  é uma lei multivariada de  $X_i$ . Pode-se, abreviar:

$$h(x_1, \dots, x_n) = E(Y | X_1 = x_1, \dots, x_n = X_n).$$

Então:

$$E[(Y - y) I_A] = \int_A E(h(x) - y) F(dx_1, \dots, dx_n)$$

Então o boreliano  $A_y$ :

$$A_y^+ = \{h(x) \geq y\} \text{ e } A_y^- = \{h(x) > y\}$$

Pode-se trabalhar com estas quantidades como sendo uma variável aleatória:

$$H = h(X_1, \dots, X_n) = E(Y | X_1, \dots, X_n).$$

Realmente, está variável  $H$  leva à uma ótima seleção, e a função  $V_H(y) = E((H - y)_+)$  representa bem o valor máximo recuperável para um dado teor de corte. Da mesma maneira, para as tonelagens e as quantidades de metal:

$$T_H^-(y) = E(I_{H>y}) ; T_H^+(y) = E(I_{H\geq y})$$

$$Q_H^-(y) = E(HI_{H>y}) = E(YI_{H>y})$$

$$Q_H^+(y) = E(HI_{H\geq y}) = E(YI_{H\geq y}).$$

Isto, está de acordo com a mesma definição da esperança condicional de  $H$ . Da mesma maneira, tem-se  $T \in (0, 1)$ , a função  $Q_H(T)$  representando o metal recuperável para uma tonelagem  $T$  dada.

Como  $H$  é uma esperança condicional, tem-se  $E(H) = E(Y) = m_0$ . Isto comprova que a variável  $H$  é menos seletiva que  $Y$ , resta verificar se  $V_Y \geq de V_H$ . Mas é óbvio, desde que  $V_Y(y_0)$  alcance o *Sup* de:

$$\int_B (y - y_0) F(dy, \dots, dx_n)$$

Tem-se o boreliano de  $B$  no  $\mathbb{R}^n + 1$ , de onde resulta:

$$\begin{aligned} V_Y(y_0) &\geq \int_{\mathbb{R} \times A} (y - y_0) F(dy, \dots, dx_n) \\ &= \int_A (y - y_0)^{-y_0} F(dy, \dots, dx_n) \end{aligned}$$

Para todo o boreliano de  $\mathbb{R}$ , e por continuação com  $A = A_y$ :

$$V_Y(y_0) \geq V_H(y_0).$$

Pode-se notar que a mesma definição de  $H = E(Y|X_1, \dots, X_n)$  é idêntica a  $E(Y|H) = H$ . Assim a lei  $F_H$  é mais dispersa e mais seletiva que  $F_Y$ .

Assim, a variável  $H$  é sempre menos seletiva que  $Y$ . Este fenômeno leva o nome de efeito de informação: a seleção indireta (i.e, a seleção foi feita nos teores das amostras de  $X_i$  e não nos teores de  $Y$ , sendo as mesmas) sempre tem o efeito de danificar as funções  $V(y)$  e  $Q(T)$ .

### C.3 Exemplo Teórico

Sendo  $Y$  o teor de um painel e  $X$  o de uma amostra quase pontual (suponha que esta amostra foi implantada aleatoriamente dentro do decorrente painel, de acordo com uma lei uniforme), de forma que  $F_X$  seja mais seletivo que  $F_Y$ . Sendo  $H = E(Y|X)$  a esperança condicional de  $Y$  em relação a  $X$ , tem-se que  $F_Y$  é mais seletivo que  $F_H$ , ou simbolicamente:

$$F_X \geq F_Y \geq F_H.$$

A primeira desigualdade representa o efeito de suporte e a segunda o efeito informação. Analisando ingenuamente (ignorando a geoestatística). Sendo  $y_0$  o teor de corte (inserido por meio do qual as despesas de tratamento são pagas e se obtém o lucro com a venda do valor contido). A seleção dos painéis para os quais a amostra correspondente possui  $X \geq y_0$  (ou  $X > y_0$ ), espera-se recuperar a tonelagem de  $T_X(y_0)$  e o metal  $Q_X(y_0)$  e o valor  $V_X(x_0)$ . Para a tonelagem, esta esperança é razoável, mas não o é, para nenhuma das outras duas funções. Então Matheron convencionou isto como ilusório.

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{il}(y_0) = T_X(y_0) \\ Q_{il}(y_0) = Q_X(y_0) \\ V_{il}(y_0) = V_X(y_0) \end{array} \right.$$

A quantidade efetivamente recuperada (a partir de um critério ruim) será:

$$\begin{aligned} T_{eff}(X \geq y_0) &= T_X(y_0) \\ Q_{eff}(X \geq y_0) &= \int_{X \geq y_0} h(x) F_X(dx) \\ V_{eff}(X \geq y_0) &= \int_{X \geq y_0} (h(x) - y_0) F_X(dx). \end{aligned}$$

Nota-se imediatamente que:

$$V_{eff}(X \geq y_0) \leq V_H(y_0).$$

Porque:

$$V_H(y_0) = \text{Sup}_A \int_A (h(x) - y_0) F_X(dx).$$

Para descrever a família boreliana do eixo  $x$ :  $A = x \geq y_0$ , vinda da desigualdade anterior.

Na ausência do efeito informação (isso significa se o teor  $Y$  fosse conhecido e se a seleção fosse  $Y \geq y_0$ ) a obtenção das melhores relações tonelagem/teor possíveis, é feita através do cálculo do efeito suporte. Isto é um ideal inacessível na prática, que pode ser expresso pelas equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{id}(y_0) = T_Y(y_0) \\ Q_{id}(y_0) = Q_Y(y_0) \\ V_{id}(y_0) = V_Y(y_0) \end{array} \right.$$

Considerando o fato que se conhece somente  $X$  e não  $Y$  (efeito informação), as melhores políticas consistem em cortar  $H \geq y_0$ , onde  $H = h(X) = E(Y|X)$ . Esta política de otimizar leva a:

$$\begin{aligned} T_{opt}(y_0) &= T_H(y_0) = \int_{h(x) \geq y_0} F_X(dx) \\ Q_{opt}(y_0) &= Q_H(y_0) = \int_{h(x) \geq y_0} h(x) F_X(dx) \\ V_{opt}(y_0) &= V_H(y_0) = \int_{h(x) \geq y_0} (h(x) - y_0) F_X(dx) \end{aligned}$$

Que é o melhor que se pode obter em uma situação real. As desigualdades seguintes são inelutáveis:

$$V_{eff}(y_0) \leq V_{opt}(y_0) \leq V_{id}(y_0) \leq V_{ill}(y_0).$$

A primeira desigualdade expressa simplesmente que  $h(X) \geq y_0$  sendo o melhor critério possível quando só conhecido o teor de  $X$ . A perda correspondente  $V_{opt} - V_{eff}$  é o resultado da má escolha baseada nos critérios de  $X \geq y_0$ : isto não deve ser feito. A segunda desigualdade representa o efeito

de informação ( $F_Y$  é mais seletivo que  $F_H$ ), e o terceiro é o efeito suporte ( $F_X$  é mais seletivo que  $F_Y$ ).

Eliminando o parâmetro  $y_0$  de maneira que a função  $Q(T)$  correspondente, tem-se:  $Q_{eff}(T)$  será igual  $Q_{opt}(T)$ , conseqüentemente se a função  $h(x)$  é crescente em  $x$ : se  $h(x)$  é crescente, tem-se efetivamente:

$$T_{opt}(y_0) = T_{eff}(y_1)Q_{opt}(y_0) = Q_{eff}(y_1).$$

Para  $h(y_1) = y_0$ : estes serão os mesmos painéis que serão selecionados, mas com cortes diferentes. Portanto tem-se:

$$Q_{opt}(T) \geq Q_{id}(T) \geq Q_{ill}(T)$$

Pelas mesmas razões (seletividade crescente das variáveis  $H, Y$  e  $X$ ).

### Caso Lognormal

Para ilustrar isto, suponha que  $X$  e  $Y$  sejam variáveis lognormais como a média  $m_0$  e sendo  $\sigma_X^2$  e  $\sigma_Y^2$  as variâncias de  $\log X$  e  $\log Y$ . A condição  $E(X|Y) = Y$  mostra que o coeficiente de correlação deve ser:

$$\rho = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}.$$

Que implica que:  $\sigma_Y^2 \leq \sigma_X^2$ . Então:

$$h(x) = E(Y|X) = m_0 \frac{x}{m_0} \frac{\rho^2}{e^{\frac{1}{2}\sigma_Y^2(1-\rho^2)}}$$

Assim, se  $H$  é lognormal, com esperança  $m_0$  e seu logaritmo admite variância:

$$\sigma_H^2 = \rho^4 \sigma_X^2 = \rho^2 \sigma_Y^2.$$

Sendo,  $\sigma_H^2 \leq \sigma_Y^2 \leq \sigma_X^2$ , que traduz o efeito informação e o efeito de suporte.

Para um teor de corte  $y_0$ , tem-se:

$$z = \frac{1}{\sigma} \log \frac{y_0}{m_0} + \frac{1}{2} \sigma.$$

$z$  terá ao mesmo índice  $H, Y$  ou  $X$  que  $\sigma$  e as funções  $opt, id$  e  $ill$ , terão a mesma forma.

$$T_*(y_0) = 1 - G(z_*)$$

$$Q_*(y_0) = m_0[1 - G(z_* - \sigma_*)]$$

$$V_*(y_0) = Q_*(y_0) - y_0 T_*(y_0).$$

A indicação \* substitui  $opt, id$  e  $ill$ .  $T_{eff}(y_0)$  e  $Q_{eff}(y_0)$  coincidem com  $T_{opt}(y_1)$  e  $Q_{opt}(y_1)$  com  $Y_1$  tendo  $h(y_1) = y_0$ .

## C.4 Funções de Perdas

A seleção de uma única estimativa com um alcance de possíveis valores de  $z$ , requerem um critério de avaliação. Um critério comum é minimizar o impacto anexado à estimativa do erro  $e(x) = z^*(x) - z(x)$  que provavelmente ocorre. A esta função é dado o nome de Função de Perda  $L(\cdot)$ , onde  $L(e(x)) = [e(x)]^2$ . Sendo que esta, minimiza o resultado da perda  $z_{L(x)}^*$  que é aproximadamente  $L(z^*(x) - z(x))$ . A determinação da perda  $L(z^*(x) - z(x))$  requer o valor de  $z(x)$ , o qual não é conhecido na prática. Portanto, a incerteza sobre  $z(x)$  é modelada por uma função densidade acumulativa condicional (ccdf)  $F(x; z|(n))$ , que é avaliável. A idéia de se usar o modelo de incerteza é determinar a esperança da perda:

$$\begin{aligned} \varphi_L(z^*(x)|(n)) &= \mathbb{E}\{L(z^*(x) - Z(x))\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} L(z^*(x) - z) dF(x; z|(n)) \end{aligned}$$

Na prática, usa-se a discreta aproximação:

$$\varphi_L(z^*(x)|(n)) \simeq \sum_{k=1}^{K+1} L(z^*(x) - \bar{z}_k) \cdot F(x; z_k|(n)) - F(x; z_{k-1}|(n)) \quad (\text{C.4})$$

Onde  $z_k$  é o valor de  $k$  do corte discretizado pelo o alcance da variação do valor de  $z$ , por convenção,  $F(x; z_0|(n)) = 0$  e  $F(x; z_{k-1}|(n)) = 1$ . Os outros cortes de  $z_k$  podem ser identificados com os p-quartiles correspondentes a um espaço regularizado de uma ccdf,  $z_k = F^{-1}(x; k/[K + 1]|(n))$ . Sendo  $z_k$  definido como a média na classe  $(z_{k-1}, z_k]$  que depende do modelo de interpolação, por exemplo, para o modelo linear,  $z_k = (z_{k-1} + z_k)/2$ .

A ótima estimativa da função de perda  $L(\cdot)$  do valor de  $z$  é minimizada pela esperança de perda:  $z_L^*(x)$  é semelhante tal que  $\varphi_L(z^*(x)|(n))$  é mínimo.

A determinação da ótima estimativa procede através de dois passos:

1. A incerteza sobre o valor não conhecido de  $z(x)$  no primeiro modelo através do condicionamento de uma cdf.
2. Através de um modelo, a estimativa é deduzida de acordo com um critério específico de busca do ótimo.

O acesso à incerteza e a estimativa claramente mostram que não há a melhor estimativa para todas as situações. Uma boa estimativa depende da intenção do uso. Um modelo de incerteza pode ser obtido dependendo da função de perda escolhida.

#### C.4.1 Estimativa por E-Type

Considere primeiramente o critério dos mínimos quadrados, que é a perda modelada pela função quadrática de qualquer erro de subestimativa e superestimativa:

$$L(e(x)) = [e(x)]^2 \quad (\text{C.5})$$

A estimativa ótima é mostrada como o valor esperado da ccdf na localização  $x$ , também chamado

de estimativa E-type, vindo da relação:

$$z_L^*(x) = z_E^*(x) \simeq \sum_{k=1}^{k+1} \bar{z}_K \cdot [F(x; z_K|(n) - F(x; z_{K-1}|(n))] \quad (\text{C.6})$$

As estimativas por E-Type e (co)krigagem são usualmente diferentes, embora ótimos para o critério dos mínimos quadrados. Essa diferença está na cdf vinda para a estimativa do E-Type que deriva dos valores dos dados. Uma exceção ocorre quando o valor original  $z$  são normalmente distribuídos e sua ccdf é modelada usando uma aproximação multigaussiana. Em todas outras situações, a vantagem da estimativa do E-Type é avaliar a incerteza sobre o erro das zonas mais ricas do que a variância da krigagem.

O quadrado da estimativa do erro na expressão anterior ( $L(e(x)) = [e(x)]^2$ ), os valores extremos do erro, tendem a ter um grande impacto sobre a esperança de perda. Assim, a estimativa E-Type, pode exceder, dependendo do modelo de subida ou descida da cauda da distribuição  $F(x; z|(n))$ .

#### C.4.2 Estimativa pela Mediana

Usando a função linear da estimativa do erro, que é uma função quadrática, reduz-se o impacto do modelo da cauda na expectativa da perda. Por exemplo, a perda pode ser modelada em uma proporção absoluta da estimativa do erro:

$$L(e(x)) = |e(x)| \quad (\text{C.7})$$

O critério da ótima estimativa do desvio absoluto da média é a mediana da ccdf:

$$z_L^*(x) = q_{0.5}(x) = F^{-1}(x; 0.5|(x)) \quad (\text{C.8})$$

O valor da mediana usualmente não é afetado pela escolha de um modelo particular de extrapolação de subida de cauda.

#### C.4.3 Estimativa Inter Quartis

Semelhante à função de perda simétrica, esta penaliza a subestimativa e superestimativa igualmente, em muitas aplicações, a perda é assimétrica. Para a tomada destas decisões claramente,

por exemplo, o impacto da subestimativa em concentrações tóxicas é provavelmente maior que uma superestimativa de igual amplitude.

Considere a seguinte assimetria linear da função de perda:

$$L(e(x)) = \begin{cases} w_1 \cdot e(x) & \text{para } e(x) \geq 0 \text{ (Superestimativa)} \\ w_2 \cdot |e(x)| & \text{para } e(x) < 0 \text{ (Sub - estimativa)} \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

Onde os parâmetros  $w_1$  e  $w_2$  são relativos ao impacto anexado a superestimativa e subestimativa, respectivamente. A ótima estimativa é mostrada pelo p-quartil da cdf (Journel,1984).

$$z_L^*(x) = q_p(x) = F^{-1}(x; p|(n))$$

$$\text{onde } p = \frac{w_1}{w_1 + w_2} \in [0, 1]$$

Podem ser distingüidos três casos:

1.  $w_1 = w_2$  Uma função linear simétrica, é a ótima estimativa do 0.5 quartil, ou seja, a mediana previamente discutida.
2.  $w_1 > w_2$  O impacto da superestimativa é maior que o da subestimativa de mesma magnitude. Assim,  $p < 0.5$ , a ótima estimativa é menor que a mediana (uma conservativa escolha para detecção de deficiências). Considere uma assimétrica função de perda, onde  $w_1=0.9$  e  $w_2=0.1$ . O quartil é estimado pela interpretação do valor de corte de 90% da probabilidade de exceder o valor não conhecido:

$$Pr Z(x) > q_{0.1}(x)|(n) = 0.9$$

Uma grande estimativa de  $q_{0.1}(x)$  indica que o valor não conhecido é certamente maior que o da localização  $x$ .

3.  $w_1 < w_2$  O impacto da superestimativa é menor que o da subestimativa de mesma magnitude. Assim,  $p > 0.5$ , a ótima estimativa é maior que a mediana. O quartil é

estimado pela interpretação do valor de corte de 10% da probabilidade de exceder o valor não conhecido:

$$PrZ(x) > q_{0.1}(x)|(n) = 0.1$$

Uma pequena estimativa de  $q_{0.9}(x)$  indica que o valor não conhecido é certamente menor que o da localização  $x$ .

Incrementando o contraste entre o relativo impacto  $w_1$  e  $w_2$  na estimativa dos campos de quartiles correspondentes, há um ajuste na probabilidade acumulativa muito pequena ou muito grande.

## Apêndice D

# Fluxograma da Metodologia da Tese

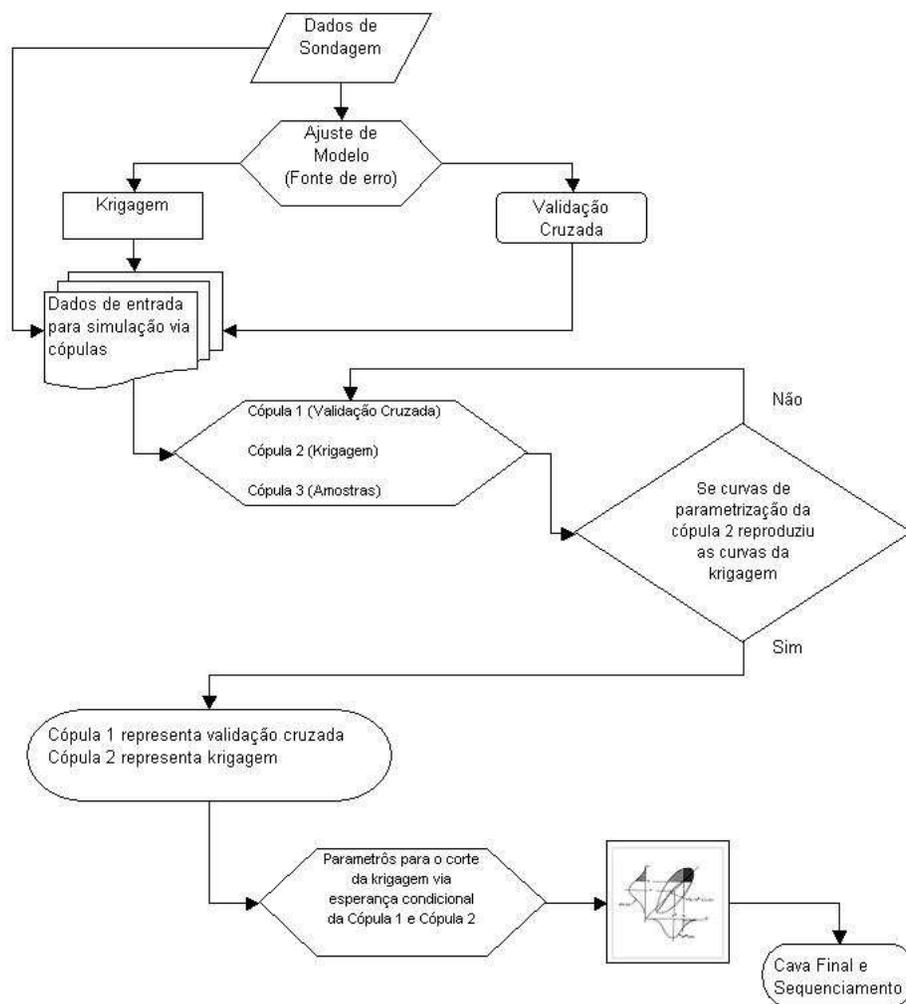


Figura D.1: Fluxograma da metodologia aplicada para a correção das curvas de parametrização

# Apêndice E

## Código Fonte

```
#####%
### UNIVERSADE ESTADUAL DE CAMPINAS -UNICAMP ##%
### INSTITUTO DE GEOCIENCIAS ##%
### DEPARTAMENTO DE GEOLOGIA E RECURSOS NATURAIS ##%
###-----##%
### Autor : Frederico Augusto Rosa do carmo ##%
### Orientador : Armando Zaupa Remacre ##%
###-----##%
### RESERVA_COPULAS_2006 ##%
#####%
% Entrada ASCII dos Furos de Sonda -----
clear all;
valida_cruz; %Arquivo com os dados em uma tabela -----
Var_1 = V;
Val_C = Cross_V;
n2A= length(Val_C);
% Corrige valores negativos da ValidaÃ§ao Cruzada -----
for i=1: n2A
    if Val_C(i)<0
        Val_C(i)=0;
    end
end
%-----
krig5x5_2; % Busca no Isatis Valores Krigados -----
fid = fopen('C:\Frederico\ISATIS\WALKER LAKE\GTX\DIRE.2\FILE.2\ ...
    VARI.12/datavar','r','b');
AMOSTRAS=fread(fid,[dx*dy],'float');
fclose(fid);
fid = fopen('C:\Frederico\ISATIS\WALKER LAKE\GTX\DIRE.2\FILE.2\ ...
    VARI.14/datavar','r','b');
VCAMOST=fread(fid,[dx*dy],'float');
fclose(fid);
% Procurando lugares onde existem amostras-----
AMOST_5X5=AMOSTRAS(find(AMOSTRAS<100000)); % Amostras para o bloco -----
```

---

```

KAMOS_5X5=V1_Est(find(AMOSTRAS<100000)); % Krigagem para a amostra ----
VAMOS_5X5=VCAMOST(find(AMOSTRAS<100000)); % ValidaÃ§ao das Amostras -----

%-----
t = cputime;
nobs =size(Var_1,1);
% Transformando os dados em Variaveis Normais .....
[NS_AMOST,o_nscore1]=nscore(Var_1,2,2,0,1600);
[NS_VC,o_nscore2]=nscore(Val_C,2,2,0,1600);
[NS_EST,o_nscore3]=nscore(V1_Est);
[NS_AMOST_5X5,o_nscore4]=nscore(AMOST_5X5);
[NS_VAMOS_5X5,o_nscore5]=nscore(VAMOS_5X5);
[NS_KAMOS_5X5,o_nscore6]=nscore(KAMOS_5X5);

% Relacionamento entre as Variaveis -----
Sig1 =corrcoef(NS_AMOST_5X5,NS_KAMOS_5X5);
Sig2 =corrcoef(NS_AMOST_5X5,NS_VAMOS_5X5);
Sig3 =corrcoef(NS_AMOST,NS_VC);
Sig = [ 1 Sig1(2,1) Sig2(2,1);Sig1(2,1) 1 Sig3(2,1);...
       Sig2(2,1) Sig3(2,1) 1];
% verificando as diferenÃ§as entre amostras e Val cruz e Krigagem.....
s_origdata=sort(o_nscore4.d);
id=find(~isnan(o_nscore4.normscore));
PAMOST = interp1(o_nscore4.normscore(id),o_nscore4.d(id),...
               o_nscore3.normscore,'pchip');
s_origdata=sort(o_nscore5.d);
id=find(~isnan(o_nscore5.normscore));
PAVC = interp1(o_nscore5.normscore(id),o_nscore5.d(id),...
               o_nscore3.normscore,'pchip');
o_nscore7=o_nscore3;
% .....
[DA P1]=sort(PAMOST);
[DVC P2]=sort(PAVC);
[DK P3]=sort(o_nscore3.d);
dumm1 = DVC-DA;
dumm2 = sort(o_nscore3.d)-dumm1;
o_nscore7.d(P3) =dumm2(P3);
%.....
L= mvnrnd( [0 0 0] , Sig , n );
X = [inscore(L(:,1),o_nscore7) inscore(L(:,2),o_nscore3) ...
     inscore(L(:,3),o_nscore3)];
%.....
e = cputime-t
% ParametrizaÃ§ao de Reservas -----
Paramet_Rsv
% Otimizador de Cavas -----
Otimizador

```

---

```

%Sequenciamento de Cava -----
[SeqEst,fcEst,recEst,recRReal,fcREf,qaz]=SequencKrig(mascEst, ...
    cavaEst,dx,dy,Bver);
[SeqR,fcR,recR,recRReal,fcRReal]=SequencReal(mascVer,cavaVer, ...
    dx,dy,Bver);
#####%
###    UNIVERSADE ESTADUAL DE CAMPINAS -UNICAMP                ##%
###    INSTITUTO DE GEOCIENCIAS                                ##%
###    DEPARTAMENTO DE GEOLOGIA E RECURSOS NATURAIS          ##%
###-----##%
### Autor      : Frederico Augusto Rosa do carmo              ##%
### Orientador : Armando Zaupa Remacre                        ##%
###-----##%
### Sub-rotina: Paramet_Rsv                                    ##%
#####%
vr =V1_Ver;
vr2=V1_Est;
vr3 =X(:,2);
vr4=X(:,1);
cl= [floor(min(vr)):(round(max(vr))-floor(min(vr)))/50:round(max(vr))];
ncl = length(cl) ;
zmax = max(vr);

for i=1:ncl-1,
    % Variavel Real-----
   iaux = find(vr >=cl(i));
    TonVer(i) = length(iaux);
    QminVer(i) = sum(vr(iaux));
    TMVer(i) = mean(vr(iaux));
    % Variavel Estimada -----
   iaux2 = find(vr2 >=cl(i));
    TonEst(i) = length(iaux2);
    QminEst(i) = sum(vr2(iaux2));
    TMEst(i) = mean(vr2(iaux2));
    TMEstEf(i) = mean(vr(iaux2));
    QminEstEf(i) = sum(vr(iaux2));
    % Variavel Real-----
   iaux = find(vr3 >=cl(i));
    TonVer2(i) = length(iaux);
    QminVer2(i) = sum(vr3(iaux));
    TMVer2(i) = mean(vr3(iaux));
    % Variavel Estimada -----
   iaux2 = find(vr4 >=cl(i));
    TonEst2(i) = length(iaux2);
    QminEst2(i) = sum(vr4(iaux2));
    TMEst2(i) = mean(vr4(iaux2));
    % Minerio classificado como Esteril -----

```

```

iaux3 = find(vr >=cl(i) & vr2<=cl(i));
TonMcE(i) = length(iaux3);
QminMcE(i) = sum(vr(iaux3));
% Esteril classificado como Minerio -----
iaux4 = find(vr2>=cl(i) & vr<=cl(i));
TonEcM(i) = length(iaux4);
QminEcM(i) = sum(vr(iaux4));
% Minerio classificado como Esteril -----
iaux3 = find(vr4 >=cl(i) & vr3<=cl(i));
TonMcE2(i) = length(iaux3);
QminMcE2(i) = sum(vr4(iaux3));
% Esteril classificado como Minerio -----
iaux4 = find(vr3>=cl(i) & vr4<=cl(i));
TonEcM2(i) = length(iaux4);
QminEcM2(i) = sum(vr4(iaux4));
end
%-----
c11 = cl(1:ncl-1);
id=find(~isnan(vr4));
id2=find(~isnan(vr3));
TR =length(vr);
TE =length (vr2);
Tc1 =length(vr4);
Tc2 =length (vr3);
QR =sum(vr);
QE =sum(vr2);
Qc1 =sum(vr4(id));
Qc2 =sum(vr3(id2));
aux =[ (0:0.35:17.15) ];
%-----
BenVer = (aux.*(QminVer - TonVer.*c11))-(0.05*(TR-TonVer).*c11);
BenEst = (aux.*(QminEst- TonEst.*c11))-(0.05*(TR-TonEst).*c11);
BenVer2= (aux.*(QminVer2 - TonVer2.*c11))-(0.05*(TR-TonVer2).*c11);
BenEst2= (aux.*(QminEst2 - TonEst2.*c11))-(0.05*(TR-TonEst2).*c11);
BenEstEf= (aux.*(QminEstEf - TonEst.*c11))-(0.05*(TR-TonEst).*c11);
%-----
figure
subplot(2,1,1)
plot(c11,BenVer,'-rd','MarkerSize',5);hold on;
plot(c11, BenEst,'-b*','MarkerSize',5);hold on;
plot(c11, BenEstEf,'-bo','MarkerSize',5);hold on;
plot(c11, BenEst2,'-kx','MarkerSize',5);hold on;
plot(c11, BenVer2,'-kp','MarkerSize',5);hold on;
stem_handles = stem(c11,BenVer,'r');
grid on;
legend('BF_{Real}', 'BF_{KO}', 'BF_{KO-Efetivo}', 'BF_{\phi(c*|x)}',...
'BF_{\psi(c*|x*)}');

```

```

xlabel('Teor de Corte')
ylabel('Lucro em US$')

%-----
TonVer = TonVer/TR;
QminVer = QminVer/QR;
TonEst = TonEst/TE;
QminEst = QminEst/QE;
TonVer2 = TonVer2/Tc1;
QminVer2= QminVer2/Qc1;
TonEst2 = TonEst2/Tc2;
QminEst2= QminEst2/Qc2;
TonMcE = TonMcE/TR;
QminMcE = QminMcE/QR;
TonEcM = TonEcM/TR;
QminEcM = QminEcM/QR;
TonMcE2 = TonMcE2/Tc1;
QminMcE2 = QminMcE2/Qc1;
TonEcM2 = TonEcM2/Tc1;
QminEcM2 = QminEcM2/Qc1;

%-----
figure
subplot(2,1,1)
plot(c11,TonVer,'-rp','MarkerSize',5);hold on;
plot(c11,TonEst,'-bo','MarkerSize',5);hold on;
plot(c11,TonVer2,'-k*','MarkerSize',5);hold on;
plot(c11,TonEst2,'-kx','MarkerSize',5);hold on;
axis([0 zmax 0 1]);
xlabel('Teor de Corte');
ylabel('Tonelagem');
legend('T_{Z(x)}','T_{Z^{*}(x)}','\phi (T_{Z^{c*}(x)}|T_{z(x)})', ...
      '\psi(T_{Z^{c*}(x)}|T_{z^{*}(x)})');
grid on;
subplot(2,1,2)
plot(c11,QminVer,'-rp','MarkerSize',5);hold on;
plot(c11,QminEst,'-bo','MarkerSize',5);hold on;
plot(c11,QminVer2,'-k*','MarkerSize',5);hold on;
plot(c11,QminEst2,'-kx','MarkerSize',5);hold on;
axis([0 zmax 0 1]);
xlabel('Teor de Corte');
ylabel('Quantidade de Minerio');
legend('Q_{Z(x)}','Q_{Z^{*}(x)}','\phi (Q_{Z^{c*}(x)}|Q_{z(x)})', ...
      '\psi(Q_{Z^{c*}(x)}|Q_{z^{*}(x)})');
grid on;

%-----
figure
subplot(2,1,1)

```

```

stairs(c11,TonMcE,'r');hold on;
stairs(c11,TonMcE2,'k');hold on;
xlabel('Teor de Corte');
ylabel('Tonelagem');
legend('Minerio Classificado como Esteril Real', 'Minerio ...
      Classificado como Esteril Copulas');
grid on;
subplot(2,1,2)
stairs(c11,TonEcM,'r');hold on;
stairs(c11,TonEcM2,'k');hold on;
xlabel('Teor de Corte');
ylabel('Tonelagem');
legend('Esteril Classificado como Minerio Real', 'Esteril ...
      Classificado como Minerio Copulas');
grid on;
%-----
figure
subplot(2,1,1)
stairs(c11,TonMcE2-TonMcE,'r'); hold on;
stairs(c11,TonEcM2-TonEcM,'b'); hold on;
legend('Diferença entre Minerio Classificado como Esteril', ...
      'Diferença entre Esteril Classificado como Minerio');
xlabel('Teor de Corte');
ylabel('Diferenças de Tonelagem');
axis([0 zmax -0.075 0.075]);
grid on;

subplot(2,1,2)
stairs(c11,QminMcE2-QminMcE,'r'); hold on;
stairs(c11,QminEcM2-QminEcM,'b'); hold on;
legend('Diferença entre Minerio Classificado como Esteril', ...
      'Diferença entre Esteril Classificado como Minerio');
xlabel('Teor de Corte');
ylabel('Diferenças de Quantidade de Minerio');
axis([0 zmax -0.075 0.075]);
grid on;
%-----
figure
subplot(2,1,1)
stairs(c11,QminMcE,'r');hold on;
stairs(c11,QminMcE2,'k');hold on;
xlabel('Teor de Corte');
ylabel('Quantidade de Minerio');
legend('Minerio Classificado como Esteril Real', 'Minerio ...
      Classificado como Esteril Copulas');
grid on;
subplot(2,1,2)

```

```

stairs(c11,QminEcM,'r');hold on;
stairs(c11,QminEcM2,'k');hold on;
%plot(c11,QminEcM3,'--b','MarkerSize',3);hold on;
xlabel('Teor de Corte');
ylabel('Quantidade de Minerio');
legend('Esteril Classificado como Minerio Real', ...
      'Esteril Classificado como Minerio Copulas');
grid on;
%-----
#####%
### UNIVERSADE ESTADUAL DE CAMPINAS -UNICAMP      ##%
### INSTITUTO DE GEOCIENCIAS                      ##%
### DEPARTAMENTO DE GEOLOGIA E RECURSOS NATURAIS  ##%
###-----##%
### Autor      : Frederico Augusto Rosa do carmo  ##%
### Orientador : Armando Zaupa Remacre          ##%
###-----##%
### Sub-rotina: Otimizador                        ##%
#####%
BenBloco_Ver=length(vr) 4];
BenBloco_Est=length(vr) 4];
%-----
cutoff = [65, 150, 260, 300, 425, 550];
for i=1:6
    aux3 = find(vr>= cutoff(i));
    aux4 = find(vr< cutoff(i));
    BenBloco_Ver(aux3,i) = (3.27*vr(aux3))-1200;
    BenBloco_Ver(aux4,i) = -1200;

    aux5 = find(vr2>= cutoff(i));
    aux6 = find(vr2< cutoff(i));
    BenBloco_Est(aux5,i) = (3.27*vr2(aux5))-1200;
    BenBloco_Est(aux6,i) = -1200;
end
%-----
Bver =[dx dy];
Best =[dx dy];
aux=1;
corte =3;
for i=1:dx,
    for j=1:dy,
        Bver(i,j)=BenBloco_Ver(aux,corte);
        Best(i,j)=BenBloco_Est(aux,corte);
        aux=aux+1;
    end
end
%-----

```

```

[mascVer cavaVer]=LG2D(Bver,dx,dy);
%-----
[mascEst cavaEst]=LG2D(Best,dx,dy);
%-----
figure
subplot(2,1,1)
imagesc(cavaVer);
axis equal;
axis([1 dy 1 (dx/2)]);
title('Cava Otima Real');
%-----
subplot(2,1,2)
imagesc(cavaEst);
axis equal;
axis([1 dy 1 (dx/2)]);
title('Cava Otima Krigagem');
%-----
BEN_REAL =sum(sum(cavaVer))
BEN_KRIG =sum(sum(cavaEst))
BEN_EFE =sum(sum(mascEst.*Bver))
TON_REAL =sum(sum(mascVer));
TON_KRIG =sum(sum(mascEst));
QM_REAL =sum(sum(mascVer.*Zver));
QM_KRIG =sum(sum(mascEst.*Zest));
QM_EFE =sum(sum(mascEst.*Zver));
#####%
### UNIVERSADE ESTADUAL DE CAMPINAS -UNICAMP ##%
### INSTITUTO DE GEOCIENCIAS ##%
### DEPARTAMENTO DE GEOLOGIA E RECURSOS NATURAIS ##%
###-----##%
### Autor : Frederico Augusto Rosa do carmo ##%
### Orientador : Armando Zaupa Remacre ##%
###-----##%
### Funcao: LG2D ##%
#####%
function [masc2, cava2, EMKrig, Valor_Krig]=LG2D(ModBlock,dx,dy);
%Inserindo uma linha de zeros -----
m=ModBlock;
mij=zeros(dx+1,dy);
mij(2:dx+1,:)=m ;
%Fazendo Mij=Soma das colunas -----
Mjk=cumsum(mij);
% Procurando o maximo valor na coluna anterior -----
P=Mjk;
for j=2:dy
for i=2:dx+1
k=[-1 0 1];

```

---

```

        if i==dx+1
            kk=i+k(1:2);
        else
            kk=i+k;
        end
        maxx=max(P(kk,j-1));
        P(i,j)=Mjk(i,j)+maxx;
    end
end
%Desenhando a Cava -----
masc2 = zeros(dx+1,dy);
indmax = find(P(2,)==max(P(2,:)));
masc2(2,indmax)=1;
ii=2;
for j=indmax: -1: 2
    k=[-1 0 1];
    if ii==dx+1
        kk=ii+k(1:2);
    elseif ii==1
        kk=ii+k(2:3);
    else
        kk=ii+k;
    end
    maxx =max(P(kk,j-1));
    ii = find(P(kk,j-1)==maxx );
    ii =kk(ii);
    masc2(ii,j-1)= 1;
    masc2(:,j-1)=[ ones(ii,1); zeros(dx+1-ii,1)];
end
masc2= masc2(2:dx+1,:);
cava2=masc2.*m;
Valor_Krig=sum(sum(cava2));
%-----
mascara01=cava2>0;
mascara02=cava2<0;
VE = cava2.*mascara02;
VM = cava2.*mascara01;
Valor_Est_Krig = sum(sum(VE));
Valor_Min_Krig = sum(sum(VM));
%-----
Valor_Tonel=sum(sum(masc2));
SomaEst = cava2;
ii = find (SomaEst>0);
    SomaEst(ii)=0;
jj = find (SomaEst<0);
    SomaEst(jj)=1;
%-----

```

---

```

TonEsterilKrig=sum(sum( SomaEst));
TonMinerioKrig=Valor_Tonel-TonEsterilKrig;
EMKrig = TonEsterilKrig/TonMinerioKrig;

#####%
### UNIVERSADE ESTADUAL DE CAMPINAS -UNICAMP ##%
### INSTITUTO DE GEOCIENCIAS ##%
### DEPARTAMENTO DE GEOLOGIA E RECURSOS NATURAIS ##%
###-----##%
### Autor : Frederico Augusto Rosa do carmo ##%
### Orientador : Armando Zaupa Remacre ##%
###-----##%
### Funcao: SEQUENCIAMENTO ##%
#####%
% dx = Numero de dados na direÃ§ao X
% dy = Numero de dados na direÃ§ao Y
% ns = Numero de simulaÃ§oes
% Gamma = Matrix que vai liberar os blocos
% Cap_Min = Capacidade de MineraÃ§ao por periodo de Tempo
% Ton_Cavas = Tonelagem Total a ser extraida
%-----
%-----
% OUTPUT
%-----
% Seq =
% fc = Fluxo de Caixa do Sequenciamento
%
%-----
function [SeqR,fcR,recR,recRReal,fcRReal,qaz]=SequencKrig(masc, ...
cava,dx,dy,ModBlockR);
%-----
Vj=dx;
Vi=dy;
NBB = sum(sum(masc));
ns =1;
%-----
Cap_Min = floor(NBB/15);% 15 = anos
%-----
Gamma = ones(dx,dy,ns);
SeqR= zeros(dx,dy,ns);
Bloc_teor = ones(dx,dy,ns);
Gamma(:, :, :) = -9999999;
Bloc_teor(:, :, :) = -9999999;
% Achando os Blocos que podem ser extraidos -----
Block_Liber = find (masc ==1);
Gamma(Block_Liber) = -9999999;
% Liberando a camada para retirar os blocos -----

```

```

for i=1:ns
  for j=1:dy
    if Gamma(1,j,i)==-999991
      Gamma(1,j,i) = 0;
    end;
  end;
end;
% restringindo a capacidade de mineraÃ§ao -----
for i=1:ns
  NB=1;
  ano=1;
  aaa =1;
  aa=find(Gamma(:, :, i)==0);
  aa=aa+((i-1)*dx*dy);
  Bloc_teor(aa)=cava(aa);
  Ach_Max = max(max(Bloc_teor(:, :, i)));
  num_bl=find(Bloc_teor==Ach_Max);
  esc_bloco =cava;
  uu=find(cava==0);
  esc_bloco(uu) ==-99999999;
  if num_bl>1
    if num_bl>dx & num_bl<(dx*dy)-dx
      triang_m = esc_bloco(num_bl+1)+esc_bloco(num_bl-dx)...
        + esc_bloco(num_bl+dx);
      al = find(max(triang_m));
    else
      al=1;
    end
  else
    al=1
  end
  Gamma(num_bl(al))=1 ;
  SeqR(num_bl(al))=ano;
%-----
  Bloc_teor(:, :, i)=-99999999;% Seguindo a Sequencia -----
  while NB<=NBB(i)
    %Restringir pela capacidade anual-----
    bb = find(Gamma(:, :, i)==1);
    bb = bb+((i-1)*Vj*Vi);
    z = ceil(bb./(Vj*Vi));
    z2 = z-1;
    f = bb -(z2.*(Vj*Vi));
    x = ceil(f./Vj);
    y = f -((x-1)*Vj);
    Pos = (z2).*(Vj*Vi)+((x-1).*Vj)+y;
    % PosiÃ§Ãoes onde os blocos estao liberados-----
    PosD = (z2).*(Vj*Vi)+((x).*Vj)+y;

```

---

```

PosE = (z2).*(Vj*Vi)+((x-2).*Vj)+y;
PosB = (z2).*(Vj*Vi)+((x-1).*Vj)+(y+1);
% -----
tm= length(PosB);
if PosD <= (z.*(dx*dy))& PosD>0
    iii = find(Gamma(PosD) == 0) ;
    Bloc_teor(PosD(iii))=cava(PosD(iii));
end
if PosE <= (z.*(dx*dy))& PosE>0
    iii = find(Gamma(PosE) == 0);
    Bloc_teor(PosE(iii))=cava(PosE(iii));
end
if PosB <= (z.*(dx*dy))& PosB>0
    iii = find(Gamma(PosB) == 0);
    Bloc_teor(PosB(iii))=cava(PosB(iii));
end
% -----
Ach_Max = max(max(Bloc_teor(:, :, i)));
num_bl=find(Bloc_teor==Ach_Max);
-   if num_bl>1
        %-----
        if num_bl>dx & num_bl<(dx*dy)-dx
            triang_m = esc_bloco(num_bl+1)+esc_bloco(num_bl-dx)...
                +esc_bloco(num_bl+dx);
            al = find(max(triang_m));
            if length(al)>1
                triang_m = esc_bloco(num_bl+2)+triang_m;
                al = find(max(triang_m));
            end
        else
            al=1;
        end
        %-----
        ale = length(num_bl);
        al = floor(rand*ale)+1 ;
        Gamma(num_bl(al))=1 ;
        SeqR(num_bl(al))=ano;
        Bloc_teor(num_bl(al))=-9999999;
    else
        Gamma(num_bl(1))=1 ;
        SeqR(num_bl(1))=ano;
        Bloc_teor(num_bl(1))=-9999999;
    end
    end
LBl_Bai = find(Gamma(:, :, i)==1);
LBl_Bai = LBl_Bai+((i-1)*Vj*Vi);
z1 = ceil(LBl_Bai./(Vj*Vi));
z2l = z1-1;

```

---

```

f1 = LBl_Bai -(z2l.*(Vj*Vi));
x1 = ceil(f1./Vj);
y1 = f1 -((x1-1)*Vj);

PosDC = (z2l).*(Vj*Vi)+((x1).*Vj)+(y1);
PosEC = (z2l).*(Vj*Vi)+((x1-2).*Vj)+(y1);
PosCC = (z2l).*(Vj*Vi)+((x1-1).*Vj)+(y1);
Pos2 = (z2l).*(Vj*Vi)+((x1-1).*Vj)+(y1+1);

T2= length(PosCC);
for iii=1:T2
    if (PosDC(iii)>0)&(PosEC(iii)>0)&(PosCC(iii)>0)&...
        (PosDC(iii)<=(dx*dy*ns))&(PosEC(iii)<=(dx*dy*ns))& ...
        (PosCC(iii)<=(dx*dy*ns))
        if ((Gamma(PosDC(iii))==1) & (Gamma(PosEC(iii))==1)& ...
            (Gamma(PosCC(iii))==1) & (Gamma(Pos2(iii))==-999991))
            Gamma(Pos2(iii))=0;
        end;
    end;
end;
aaa=aaa+1;
if aaa==Cap_Min
    ano=ano+1;
    aaa=1;
end;
NB=NB+1;
end; % while
end;% for
SeqR(1,1)=0;
%-----
aa =max(max(SeqR(:, :, :)));
aa= reshape(aa,ns,1);
for i=1:ns
    for j=1:aa(i)
        asdf = find(SeqR(:, :, i)==j);
        recR(i, j) = sum (cava(asdf));
        recRReal(i, j) = sum(ModBlockR(asdf));
    end
end
as =max(aa);
fcR = zeros(ns,as);
fcRReal = zeros(ns,as);
Inv_Inic = -0;
fcR(:,1) =recR(:,1);
fcRReal(:,1) =recRReal(:,1);
G_anual = 0.5;
for i=1:ns

```

---

```

for j=2:aa(i)
    fcR(i,j) = fcR(i,j-1)+recR(i,j);
    fcRReal(i,j) = fcRReal(i,j-1)+recRReal(i,j);
    %fcR(i,j) = fcR(i,j-1)+recR(i,j)-G_anual;
    %fcRReal(i,j) = fcRReal(i,j-1)+recRReal(i,j)-G_anual;

end
end
qaz = 0:1:as-1;
%-----
    VPLEstimado = pvvar(fcR,0.12);
    VPLReal = pvvar(fcRReal,0.12);
%-----
figure
subplot(2,1,1)
imagesc(SeqR)
axis equal
axis([1 dy 1 dx/2]);
Title ('Sequenciamento cava Krigada')
for i=1:dx
    for j=1:dy
        if SeqR(i,j,1)>0
            text(j,i,num2str(SeqR(i,j,1)),'HorizontalAlignment',...
                'center','VerticalAlignment','middle','FontSize',6)
        end
    end
end
end
subplot(2,1,2)
imagesc(cava)
axis equal;
axis([1 dy 1 dx/2]);
Title ('Cava Krigada')
%-----
figure
subplot(2,1,1)
bar (qaz,fcR,0.9); hold on
bar (qaz,fcRReal,0.7,'r')
%-----
[n1,ctr1] = hist(X(:,2),15);
[n2,ctr2] = hist(X(:,1),15);
[n3,ctr3] = hist(V1_Est,15);
[n4,ctr4] = hist(V1_Ver,15);
nn1 = 100.*n1./(sum(n1));
nn2 = 100.*n2./(sum(n2));
nn3 = 100.*n3./(sum(n3));
nn4 = 100.*n4./(sum(n4));
Min_Var_1 = floor (min(Var_1));

```

---

```

Min_Var_2 = floor (min(V1_Est));
Max_Var_1 = round (max(Var_1));
Max_Var_2 = round (max(V1_Est));
aa = [Min_Var_1; Min_Var_2; Max_Var_1; Max_Var_1];
minimo = min(aa);
maximo = max(aa);
%-----
figure
subplot(3,3,5);
plot(V1_Ver,V1_Est,'r^');hold on;
plot(X(:,1),X(:,2),'b. ');
h1 =gca;legend('Dados Originais', 'Simulação');
%econd2(V1_Ver,V1_Est,X(:,1),X(:,2));
econdf(V1_Ver,V1_Est);
[econd,medvr,cl,Beta]=econdf2(X(:,1),X(:,2));
axis([minimo maximo minimo maximo]);

subplot(3,3,8); bar(ctr1,-nn1,1,'b'); h2 =gca; axis([minimo ...
    maximo -max(nn1)*1.1 0]); axis('off');
subplot(3,3,4); barh(ctr2,-nn2,1,'b'); h3 =gca; axis ...
    ([-max(nn2)*1.1 0 minimo maximo]);axis('off');
subplot(3,3,2); bar(ctr3,nn3,1,'r'); h4 =gca; axis ...
    ([minimo maximo 0 max(nn3)*1.1]); axis('off');
subplot(3,3,6); barh(ctr4,nn4,1,'r'); h5 =gca; axis ...
    ([0 max(nn4)*1.1 minimo maximo]);axis('off');

set(h1,'Position',[0.25 0.25 0.55 0.55]);
set(h2,'Position',[.25 .05 .55 .15]);
set(h3,'Position',[.05 .25 .15 .55]);
set(h4,'Position',[.25 .85 .55 .15]);
set(h5,'Position',[.85 .25 .15 .55]);
%-----
figure
plot(VAMOS_5X5,KAMOS_5X5,'rd','MarkerSize',5)
hold on
plot(AMOST_5X5,KAMOS_5X5,'bp','MarkerSize',5)
plot(AMOST_5X5,VAMOS_5X5,'ko','MarkerSize',5)
%-----
figure
plot3(X(:,1),X(:,2),X(:,3),'kp');
grid on;
axis([0 1600 0 1600 0 1600]);
xlabel('\phi(c*x)'); ylabel('\psi(c*x)'); zlabel('\tau(c*x*)')
%-----

```