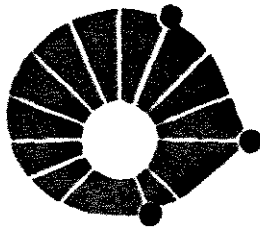


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS



UNICAMP

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

GEOENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

MODELAGEM BIDIMENSIONAL DA INJEÇÃO DE ÁGUA EM RESERVATÓRIOS HETEROGÊNEOS

Sérgio Ribeiro de Almeida

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Este exemplar corresponde 70 a
redação final da tese defendida
por Sérgio Ribeiro de Almeida
e aprovada pela Comissão Julgadora
em 23/01/1996


ORIENTADOR

CAMPINAS - SÃO PAULO

DEZEMBRO - 1995

AL64m

28977/RC

UNIDADE BC
 N.º CHAMADA: T/UNICAMP
AL64m
 V. 6
 N.º DO B. 28977
 PREC. 667/96
 C ☐ ☐ ☒ ☐
 PREÇO R\$ 11,00
 DATA 02/11/96
 N.º CPD CM-00093884-1

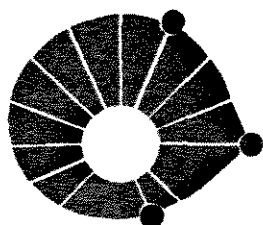
FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
 BIBLIOTECA DO I.G. - UNICAMP.

Almeida, Sérgio Ribeiro
 AL64m Modelagem bidimensional da injeção de água em
 reservatórios heterogêneos / Sérgio Ribeiro Almeida.-
 Campinas, SP.: [s.n.], 1995.

Orientador: Antonio Cláudio de França Corrêa.
 Dissertação (mestrado) Universidade Estadual de Campinas,
 Instituto de Geociências.

1. Poços de Petróleo - Reservatórios. 2. * Injeção de
 água. 3. * Reservatórios Heterogêneos. 4. Massa -
 Transferências. I. Corrêa, Antonio Claudio França. II.
 Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Geociências.
 III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS



UNICAMP

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

GEOENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

MODELAGEM BIDIMENSIONAL DA INJEÇÃO DE ÁGUA EM RESERVATÓRIOS HETEROGÊNEOS

Sérgio Ribeiro de Almeida

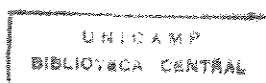
Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Geoengenharia de
Reservatórios.

Orientador: Antônio Cláudio de França Corrêa -
PETROBRÁS - UNICAMP

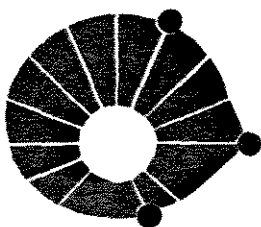
Co-Orientador: Maria Cristina Cunha - UNICAMP

CAMPINAS - SÃO PAULO

DEZEMBRO - 1995



0412000



UNICAMP

UNIVERSIDADE DE CAMPINAS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

GEOENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

TÍTULO DA TESE: MODELAGEM BIDIMENSIONAL DA INJEÇÃO DE ÁGUA EM
RESERVATÓRIOS HETEROGÊNEOS

AUTOR: Sérgio Ribeiro de Almeida

ORIENTADOR: Antônio Cláudio de França Corrêa

CO-ORIENTADOR: Maria Cristina Cunha

COMISSÃO EXAMINADORA

PRESIDENTE: Antônio Cláudio de França Corrêa

EXAMINADORES: Dênis José Schiozer

César Palagi

CAMPINAS, 23 DE JANEIRO DE 1996

À minha filha, Ana Maria

À minha esposa, Araguacy

Aos meus pais (in memoriam)

AGRADECIMENTOS

À PETROBRÁS pela oportunidade e apoio material.

Ao Dr. Antônio Cláudio de França Corrêa, pela orientação e proposta do tema de tese.

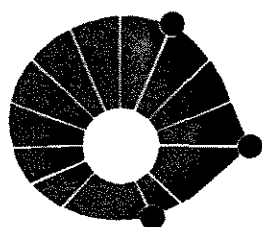
À Dra. Maria Cristina Cunha pelas sugestões e orientação.

Aos funcionários do I.G. e da F.E.M./D.E.P. pela cooperação.

Aos professores do I.G. e da F.E.M./D.E.P. pelos novos conhecimentos transmitidos.

Aos colegas de turma pela cooperação e convivência.

A minha esposa Araguacy pela paciência e cooperação.



UNICAMP

UNIVERSIDADE DE CAMPINAS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

GEOENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

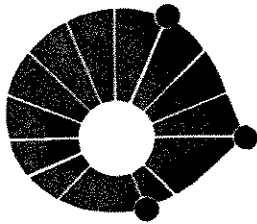
RESUMO

MODELAGEM BIDIMENSIONAL DA INJEÇÃO DE ÁGUA EM RESERVATÓRIOS HETEROGÊNEOS

Sérgio Ribeiro de Almeida

Esta dissertação estuda a aplicação da teoria dos canais de fluxo associada a um modelo linear de dupla porosidade em reservatórios heterogêneos submetidos à injeção de um fluido incompressível molhante e consequente produção do fluido não-molhante. Durante todo o trabalho foi considerado que as linhas de fluxo utilizadas são constantes com o tempo, não havendo fluxo entre os canais. Desprezou-se as forças gravitacionais e o fenômeno da embebição foi modelado através de um modelo de transferência de massa já utilizado no modelo linear. Soluções analíticas obtidas através da teoria do potencial complexo são apresentadas para os arranjos de poços "five-spot" e linha esconsa, bem como procedimentos para obtenção das linhas de fluxo. A generalização do modelo linear permitiu sua aplicação para o caso bidimensional.

Um outro item abordado foi a obtenção do coeficiente de difusão em função da saturação a partir da curva de pressão capilar.



UNICAMP

UNIVERSIDADE DE CAMPINAS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

GEOENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ABSTRACT

TWO-DIMENSIONAL MODELLING OF WATERFLOOD IN HETEROGENEOUS RESERVOIR

Sérgio Ribeiro de Almeida

This work studies the application of streamtube theory joined with a two-porosity linear model in heterogeneous reservoirs under injection of an incompressible wetting fluid and the production of a non-wetting fluid. It was considered that the streamlines are fixed and there is no flow between each channel. Gravity was neglected and the imbibition phenomena was modeled by the use of a mass transfer model. Analytical solutions given by complex potential theory are shown for two well pattern, as well as procedures to obtain the streamlines. The generalized linear model allowed its use in the two-dimensional case.

Another item studied was how to obtain a variable diffusion coefficient as a function of saturation from capillary pressure data.

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO.....	01
1.1 - OBJETIVO.....	02
1.2 - METODOLOGIA.....	02
1.3 - ESTRUTURAÇÃO DA DISSERTAÇÃO.....	02
2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	04
3- FORMULAÇÃO DO MODELO.....	08
3.1 - MODELO UNIDIMENSIONAL.....	08
3.2 - MODELO UNIDIMENSIONAL COM CANAIS DE FLUXO.....	10
3.3- SOLUÇÃO PARA CURTO TEMPO DA SATURAÇÃO DA FRENTE.....	11
4- RESERVATÓRIO HETEROGÊNEO COM DUAS CAMADAS NÃO-COMUNICANTES	16
4.1- MODELO.....	16
4.2- APLICAÇÃO AO RESERVATÓRIO HETEROGÊNEO COM DUAS CAMADAS NÃO-COMUNICANTES.....	19
5- MODELO PARA RESERVATÓRIO HETEROGÊNEO UTILIZANDO A TEORIA DOS CANAIS DE FLUXO	27
5.1- METODOLOGIA.....	27
5.2- SOLUÇÃO UTILIZANDO CANAIS DE FLUXO.....	28
5.3- VERIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO OBTIDA PARA CANAL DE FLUXO PARA UM CASO REAL.....	30
6 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	42
NOMENCLATURA	44
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	47
APÊNDICE A - DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO PARA O CANAL DE FLUXO..	50
APÊNDICE B - MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS.....	59

B.1 - MODELO UNIDIMENSIONAL.....	59
B.2 - MODELO UNIDIMENSIONAL COM CANAIS DE FLUXO.....	63
APÊNDICE C - EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA OBTENÇÃO DAS LINHAS DE FLUXO.....	65
APÊNDICE D - ADIMENSIONALIZAÇÃO DO MODELO DE LINHA DE FLUXO.....	74
APÊNDICE E - OBTENÇÃO DO COEFICIENTE DE DIFUSÃO COMO FUNÇÃO DA SATURAÇÃO DE ÁGUA A PARTIR DA CURVA DE PRESSÃO CAPILAR.....	79

LISTA DE FIGURAS

3.3.1 -SATURAÇÃO DA FRENTE NORMALIZADA	
PELA SATURAÇÃO NA ORIGEM	15
4.1.1 -MODELO HETEROGÊNEO COM DUAS CAMADAS.....	16
4.2.1a -PERFIL DE SATURAÇÃO NA FRAÇÃO MAIS	
PERMO-POROSA DA CAMADA 1.....	21
4.2.1b -PERFIL DE SATURAÇÃO NA FRAÇÃO MAIS	
PERMO-POROSA DA CAMADA 2.....	22
4.2.2a -PERFIL DE SATURAÇÃO NA FRAÇÃO MENOS	
PERMO-POROSA DA CAMADA 1.....	23
4.2.2b -PERFIL DE SATURAÇÃO NA FRAÇÃO MENOS	
PERMO-POROSA DA CAMADA 2.....	24
4.2.3 -COMPARAÇÃO ENTRE OS FATORES DE RECUPERAÇÃO.....	25
4.2.4 -COMPARAÇÃO ENTRE AS RAZÕES ÁGUA-ÓLEO.....	25
4.2.5 -COMPARAÇÃO ENTRE A RAZÃO ÁGUA-ÓLEO E	
OS FATORES DE RECUPERAÇÃO.....	26
5.2.1-LINHAS DE FLUXO OBTIDAS ATRAVÉS DE	
SOLUÇÃO ANALÍTICA DE ψ	29
5.3.1 - PERFIS DE SATURAÇÃO NA FRAÇÃO MAIS	
PERMO-POROSA (CASO 2).....	32
5.3.2 -PERFIL DE SATURAÇÃO NA FRAÇÃO MENOS	
PERMO-POROSA (CASO 2).....	33
5.3.3 -FATOR DE RECUPERAÇÃO PARA OS CASOS 1 E 2.....	34
5.3.4 -RAZÃO ÁGUA-ÓLEO X FATOR DE RECUPERAÇÃO	
PARA OS CASOS 1 E 2.....	34
5.3.5 -RAZÃO ÁGUA-ÓLEO PARA OS CASOS 1 E 2.....	35
5.3.6 -MAPA DE SATURAÇÃO PARA TD=0.2 E 0.4 (CASO2).....	36
5.3.7 -MAPA DE SATURAÇÃO PARA TD=0.6 E 0.7 (CASO2).....	37

5.3.8 -MAPA DE SATURAÇÃO PARA TD=0.8 E 1.0 (CASO2).....	38
5.3.9 -MAPA DE SATURAÇÃO PARA TD=0.2 E 0.4 (CASO 3).....	39
5.3.10 -MAPA DE SATURAÇÃO PARA TD=0.7 E 1.0 (CASO 3).....	40
5.3.11 --FATOR DE RECUPERAÇÃO E RAO PARA O CASO 3.....	41
A.1- REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO CANAL DE FLUXO.....	50
A.2- REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO MODELO.....	51
C.1- REPRESENTAÇÃO DE LINHA ESCONSA NO PLANO Z.....	67
C.2- PLANO W.....	68
C.3- POSIÇÃO DOS POÇOS PARA LINHA ESCONSA NO PLANO W CONJUGADO.....	69
C.4- REPRESENTAÇÃO DAS LINHAS DE FLUXO EM FUNÇÃO DE ψ	72
E.1 --EXPERIMENTO DE EMBEBIÇÃO VERTICAL.....	80
E.2 --COEFICIENTES DE DIFUSÃO OBTIDOS POR BECKNER <i>ET AL.</i> (1987).....	83
E.3 --COEFICIENTES DE DIFUSÃO OBTIDOS A PARTIR DE DADOS DE REIS(1992).....	84

LISTA DE TABELAS

4.2.1- PARÂMETROS UTILIZADOS COMUNS	
ÀS DUAS CAMADAS.....	20
4.2.2- PARÂMETROS UTILIZADOS EM CADA CAMADA.....	20
5.1.1- COMPARAÇÃO ENTRE O MODELO UNIDIMENSIONAL E	
O BIDIMENSIONAL.....	27
5.3.1- CASOS ESTUDADOS UTILIZANDO CANAIS DE FLUXO.....	30
5.3.2- PARÂMETROS DO RESERVATÓRIO PARA OS	
CASOS ESTUDADOS.....	31

1. INTRODUÇÃO

Os reservatórios heterogêneos que apresentam uma fração mais contínua, onde o fluxo convectivo é o predominante, e uma fração descontínua que troca massa com a fração contínua devido ao processo de embebição, podem ser modelados através de modelos de dupla porosidade.

A utilização de simulação por diferenças finitas pode levar a resultados não muito precisos, devido a dispersão numérica. Além disso, o processo de entrada de dados no simulador é bastante trabalhoso.

A partir da modelagem para reservatório unidimensional heterogêneo linear submetido à injeção de água com vazão constante, foi realizada a generalização para o caso bidimensional utilizando a teoria dos canais de fluxo. Nesta generalização utilizou-se a teoria dos canais de fluxo que tem sido bastante citada na literatura como uma ferramenta suficientemente precisa para a maioria dos problemas associados à gerência e aos estudos de comportamento de reservatórios encontrados na prática.

Quando se utiliza a equação da difusão na modelagem da transferência de massa num processo de embebição capilar entre as frações mais permo-porosa e menos permo-porosa, pode ser empregado um coeficiente de difusão constante ou variável com a saturação. Assim, a determinação deste coeficiente a partir da curva de pressão capilar, pode ser utilizado como uma primeira aproximação para os modelos.

1.1 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um modelo para previsão de comportamento de reservatórios heterogêneos submetidos à injeção de fluido imiscível com o fluido residente. O modelo se baseia na combinação da teoria dos canais de fluxo com a solução para escoamento linear em sistemas heterogêneos, obtida pelo método das características.

1.2 METODOLOGIA

Partindo do modelo de Ferreira(1994) a abordagem do problema foi feita em dois passos. Primeiro se buscou uma solução que considerasse a vazão variável e depois, uma solução para vazão e área variável.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A dissertação é dividida em seis capítulos. O primeiro trata da introdução, objetivo e estruturação. O segundo mostra uma revisão da literatura. O terceiro apresenta a formulação do modelo para vazão variável. Já no quarto, esta formulação é aplicada ao reservatório heterogêneo de duas camadas. O quinto exhibe os procedimentos e resultados obtidos utilizando a teoria dos canais de fluxo. As conclusões e recomendações decorrentes de todo o trabalho são reunidas no sexto capítulo.

Os Apêndices A e B fornecem mais detalhes da formulação do problema e suas soluções pelos métodos das características e por diferenças finitas, respectivamente. O Apêndice C descreve o procedimento utilizado para obtenção das linhas de fluxo a partir de soluções analíticas. O Apêndice D detalha a

adequação das variáveis adimensionais do modelo de canais de fluxo ao modelo de reservatório heterogêneo. Por último, o Apêndice E trata da obtenção do coeficiente de difusão como função da saturação a partir da curva de pressão capilar.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A utilização de modelos analíticos no estudo do comportamento de reservatórios possui um aspecto bastante atraente em relação à simulação, que é o de fornecer em alguns casos a solução exata do problema. Tendo como base a teoria do potencial complexo, a teoria dos canais de fluxo tem sido utilizada de forma ampla na solução dos mais diversos problemas de comportamento de reservatórios.

A utilização do método das características, na solução de equações diferenciais parciais não-lineares hiperbólicas permite a obtenção de soluções semi-analíticas que são melhores aproximações quando comparadas às obtidas por métodos de diferenças finitas. Isto se deve ao fato da dispersão numérica associada a discretização das derivadas ter forte influência neste tipo de equações diferenciais.

A seguir, são apresentados alguns trabalhos importantes para o desenvolvimento desta dissertação.

Buckley e Leverett (1941) apresentaram a solução analítica para o fluxo bifásico imiscível unidimensional em meios porosos.

Sheldon *et al.* (1959) apresentaram a solução da equação de Buckley-Leverett usando o método das características e o conceito de choque.

Douglas *et al.* (1959) obtiveram soluções numéricas por diferenças finitas das equações do fluxo bifásico em meios porosos, verificando a influência de parâmetros tais como: permeabilidade relativa, viscosidades, massa específica, gravidade e pressão capilar. Testes foram feitos para o caso

bidimensional comparando as soluções calculadas com dados obtidos de modelos de laboratório.

Hauber (1961), utilizando a teoria do potencial complexo, deduziu expressões analíticas para o estudo da injeção nos arranjos "five-spot" e linha direta.

Higgins e Leighton (1962, 1964), utilizando o modelo potenciométrico, canais de fluxo e fatores de forma, construíram um modelo para estudo do comportamento de reservatório de geometria complexa, submetido ao fluxo bifásico. Apresentaram também um método para o cálculo dos fatores de forma para células de iguais volumes.

Morel-Seytoux (1965, 1966) comparou os métodos analíticos e numéricos na previsão da influência do padrão da geometria dos poços na recuperação de reservatórios submetidos à injeção de água. Apresentou ainda, soluções analíticas para vários padrões de geometria de poços, considerando razão de mobilidade unitária e deslocamento tipo pistão.

Snyder e Ramey (1967) aplicaram a teoria de Buckley-Leverett a reservatórios de várias camadas não-comunicantes, variando vários parâmetros do reservatório. Compararam a previsão de comportamento sob a injeção de água do novo método proposto com a obtida por Stiles e Dykstra-Parsons, mostrando que esses métodos dão previsões pessimistas para o comportamento após a erupção de água.

Doyle e Wurl (1971) utilizaram a teoria dos canais de fluxo no estudo do comportamento da injeção de água para múltiplos poços e zonas, considerando o fluxo trifásico.

Leblanc e Caudle (1971) apresentaram um modelo bifásico para previsão de recuperação secundária que dispensava o cálculo dos fatores de forma, sendo as linhas de fluxo geradas pela superposição das soluções para fonte

e sumidouros.

Martin *et al.* (1973) mostraram que para a obtenção de resultados corretos utilizando a teoria dos canais de fluxo para o "five-spot" invertido é preciso que os canais sejam recalculados à medida que a frente avança para razão de mobilidade menor que 0,1.

Martin e Wegner (1979) apresentaram resultados mostrando que o desvio é da ordem de 10% na recuperação quando se utiliza canais de fluxo fixos ao invés de variáveis.

Abbaszadeh-Dehghani (1982) apresentou soluções analíticas para linha esconsa, direta, "five-spot" e "seven-spot" invertido, considerando a razão de mobilidade unitária.

Romeu (1985), utilizando a teoria da variável complexa, mostrou como calcular os fatores de forma de uma maneira direta, bem mais simples que a proposta por Higgins e Leighton.

Beckner *et al.* (1987) apresentaram uma função de transferência para reservatórios com dupla porosidade onde a troca de fluido entre a matriz e a fratura é predominantemente devida à embebição capilar. Utilizando os dados de Kleppe e Morse calcularam o coeficiente de difusão como função da saturação.

Cox (1987) obteve a eficiência de varrido utilizando canais de fluxo fixos para vários arranjos de poços. Considerou a produção e a queda de pressão como funções do volume poroso injetado, reduzindo a necessidade de fatores de forma.

Reis (1992) estudou o processo de embebição utilizando a equação da difusão. Através de tomografia computadorizada obteve perfis de saturações a partir dos quais foram calculados coeficientes de difusão.

Yang (1992) utilizou a abordagem de Buckley-Leverett para obter uma solução analítica para o fluxo bifásico em até três dimensões, utilizando o método das características. Assumiu que a mobilidade total das duas fases fosse

constante.

Ferreira (1994) apresentou um modelo para o escoamento imiscível, incompressível, bifásico, linear em reservatório heterogêneo utilizando o método das características na solução do sistema hiperbólico de equações.

Chen *et al.* (1995) utilizaram a equação da difusão para realizar experimentos numéricos de embebição em contracorrente num bloco de matriz para identificar características de fluxo. Mostraram que o modelo de Aronofsky *et al.* é válido somente para coeficiente de difusão constante. Utilizaram o conceito de vazão relativa para obter soluções analíticas para as equações da difusão não-lineares em uma e duas dimensões.

3. FORMULAÇÃO DO MODELO

3.1. MODELO UNIDIMENSIONAL

O modelo unidimensional de vazão de injeção constante desenvolvido por Ferreira (1994), adaptado ao caso de vazão variável com o tempo (o desenvolvimento completo está no Apêndice A), pode ser representado por:

SISTEMA DE EQUAÇÕES NA FORMA ADIMENSIONAL

$$v_D(t_D) \frac{\partial f(S_f)}{\partial x_D} + \frac{\partial S_f}{\partial t_D} = S_n - S_f \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial S_n}{\partial t_D} = S_f - S_n \quad (3.2)$$

Condição inicial :

$$S_f(x_D, 0) = 0 \quad (3.3)$$

$$S_n(x_D, 0) = 0 \quad (3.4)$$

Condições de contorno:

$$S_f(0, t_D) = 1 \quad (3.5)$$

onde:

S_f : saturação da fase molhante normalizada na fração mais permo-porosa.

S_n : saturação da fase molhante normalizada na fração menos permo-porosa.

x_D : posição adimensional relativa ao ponto de injeção.

t_D : tempo adimensional.

v_D : velocidade efetiva adimensional.

$f(S_f)$: fluxo fracionário na fração mais permo-porosa.

a : relação entre as frações volumétricas da fração mais permo-porosa e a menos permo-porosa.

SOLUÇÃO PELO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

$$\frac{dS_f}{dt_D} = S_n - S_f, \quad (3.6)$$

sobre a característica dada por:

$$\frac{dx_D}{dt_D} = v_D(t_D) f'(S_f), \quad (3.7)$$

e:

$$\frac{1}{a} \frac{dS_n}{dt_D} = S_f - S_n, \quad (3.8)$$

sobre a característica dada por:

$$\frac{dx_D}{dt_D} = 0. \quad (3.9)$$

A velocidade do choque é dada por:

$$v_{choque} = \frac{v_D(t_D^+) f(S_f^+) - v_D(t_D^-) f(S_f^-)}{(S_f^+) - (S_f^-)} . \quad (3.10)$$

Pela condição inicial, $S_f^+ = 0$, a Eq. 3.10 fica:

$$v_{choque} = \frac{v_D(t_D^-) f(S_f^-)}{(S_f^-)} \quad (3.11)$$

3.2 MODELO UNIDIMENSIONAL COM CANAIS DE FLUXO

A dedução da equação sobre a linha de fluxo resulta no seguinte sistema de equações:

$$v_D(l_D, t_D) \frac{\partial f(S_f)}{\partial l_D} + \frac{\partial S_f}{\partial t_D} = S_n - S_f \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial S_n}{\partial t_D} = S_f - S_n \quad (3.13)$$

A solução é então obtida de maneira análoga ao caso unidimensional. Assim, as Eqs. 3.6 e 3.8 continuam válidas, porém as características dadas pelas Eqs. 3.7 e 3.9 são :

$$\frac{dl_D}{dt_D} = v_D(l_D, t_D) f'(S_f) , \quad (3.14)$$

$$\frac{dl_D}{dt_D} = 0, \quad (3.15)$$

onde, l_D é posição sobre a linha de fluxo central do canal de fluxo.

A velocidade do choque é dada por:

$$v_{choque} = \frac{q_w(l^+, t^+) - q_w(l^-, t^-)}{A(l^+)(S_f^+) - A(l^-)(S_f^-)} \quad (3.16)$$

Como $q_w(l_D^+, t_D^+) = 0$, ou seja, não há fluxo de água a jusante da frente, e como $S_f^+ = 0$, a Eq.3.16 pode ser simplificada, após substituir $q_w = f(S_f)$, que dividido pela área porosa efetiva, resulta na seguinte equação adimensionalizada:

$$v_{choque} = \frac{v_D(l_D^-, t_D^-) f(S_f^-)}{(S_f^-)} \quad (3.17)$$

Observe que a Eq. 3.10 é um caso particular da Eq. 3.16, quando se considera a área constante e a vazão de água (q_w) é substituída pelo produto de $f(S_f)$ pela vazão total (q).

3.3 SOLUÇÃO PARA CURTO TEMPO DA SATURAÇÃO DA FRENTE

A equação da fração contínua do modelo unidimensional de vazão de injeção constante é dada por:

$$f'(S_f) \frac{\partial S_f}{\partial x_D} + \frac{\partial S_f}{\partial t_D} = S_n - S_f \quad (3.18)$$

A velocidade do choque é dada por:

$$v_{choque} = \left[\frac{dx_D}{dt_D} \right]_{chq} = \frac{f(S_f^-)}{(S_f^-)} \quad , \quad (3.19)$$

e a velocidade da característica é dada por:

$$v_{característica} = \left[\frac{dx_D}{dt_D} \right]_{car} = f'(S_f) \quad . \quad (3.20)$$

Na origem, a velocidade do choque é igual a velocidade da característica, assim:

$$v_{choque} = \frac{dx_D}{dt_D} = \frac{f(S_f^*)}{(S_f^*)} = f'(S_f^*) \quad , \quad (3.21)$$

onde, S_f^* é a saturação do choque na origem.

Sobre a característica dada pela equação da velocidade do choque, ou seja, sobre a frente, a Eq.3.18, pode ser reescrita como:

$$f'(S_f) \frac{\partial S_f}{\partial t_D} \left[\frac{dt_D}{dx_D} \right]_{chq} + \frac{\partial S_f}{\partial t_D} = - S_f \quad (3.22)$$

Substituindo a Eq. 3.19 na Eq. 3.22, temos:

$$[f'(S_f) \frac{S_f^-}{f(S_f^-)}] \frac{\partial S_f}{\partial t_D} + \frac{\partial S_f}{\partial t_D} = - S_f \quad (3.23)$$

Separando as variáveis:

$$[1 + f'(S_f) \frac{S_f^-}{f(S_f^-)}] \frac{dS_f}{S_f} = - dt_D \quad (3.24)$$

Na origem, temos:

$$[1 + f'(S_f^*) \frac{S_f^*}{f(S_f^*)}] = 2 \quad (3.25)$$

Assim a Eq.3.24 pode ser aproximada por:

$$\frac{dS_f}{S_f} = - \frac{1}{2} dt_D \quad (3.26)$$

Condição inicial:

$$S_f(t_D = 0) = S_f^* \quad (3.27)$$

Integrando a Eq.3.26, obtem-se:

$$\int_{S_f^*}^{S_f} \frac{dS_f}{S_f} = - \frac{1}{2} \int_0^t dt_D, \quad (3.28)$$

ou:

$$S_f(t_D) = S_f^* \exp\left(-\frac{1}{2} t_D\right) \quad (3.29)$$

Esta aproximação para t_D pequeno, foi testada para 2 curvas de fluxo fracionário com diferentes valores de choque na origem, observando-se que se trata de uma boa aproximação.

Na Fig. 3.3.1 podem ser observados os valores obtidos para a saturação da frente, normalizados em relação a saturação da frente na origem, a solução exponencial obtida, e valores da Eq. 3.25 calculada sobre a frente.

Saturação da frente x td

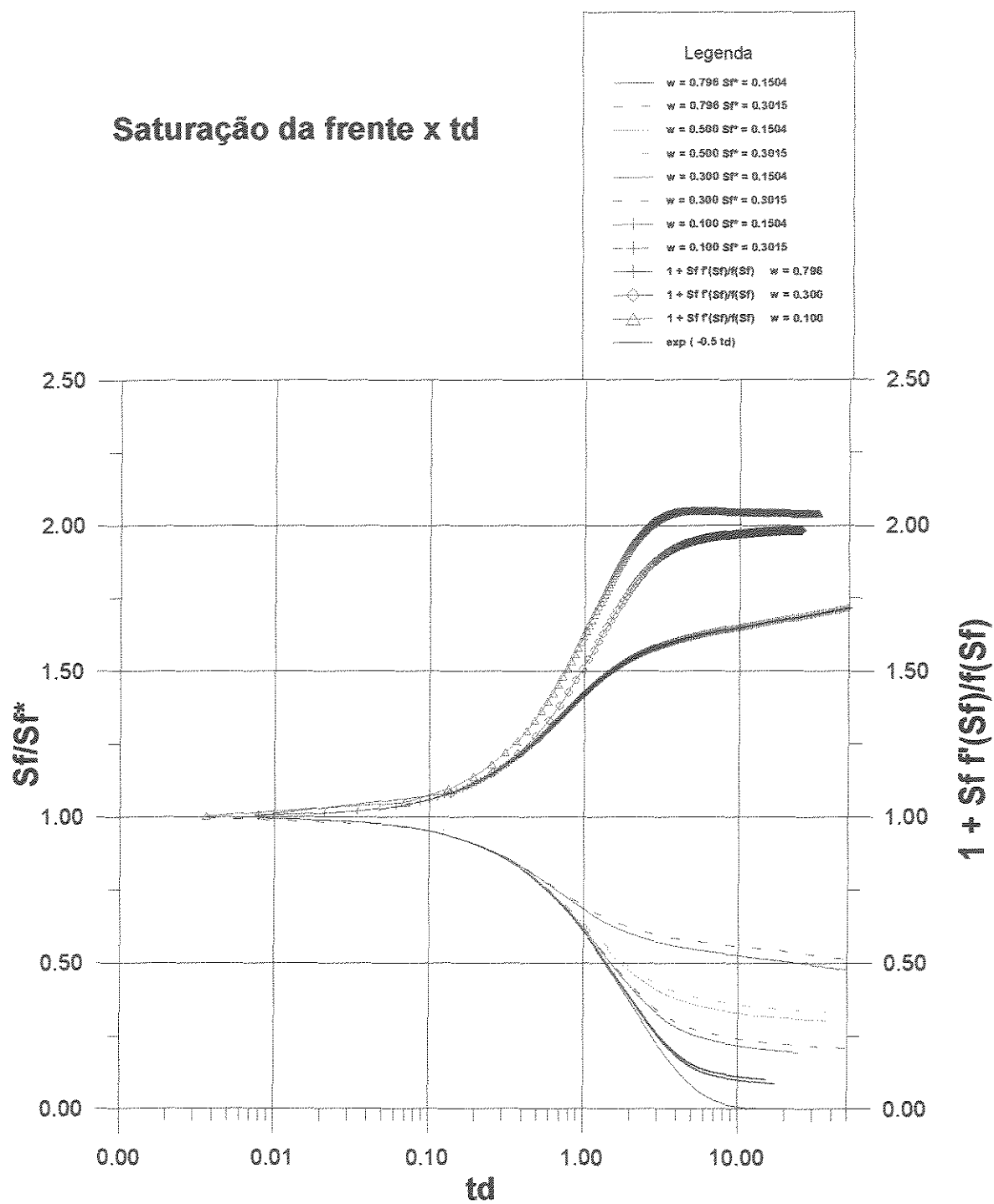


Fig.3.3.1 - Saturação da frente normalizada pela saturação da frente na origem

4. RESERVATÓRIO HETEROGÊNEO COM DUAS CAMADAS NÃO-COMUNICANTES

4.1. MODELO

Partindo-se do modelo para reservatório heterogêneo com vazão de injeção constante, conforme Ferreira (1994), desenvolveu-se um novo modelo linear para vazão de injeção variável com o tempo e aplicou-se ao caso do reservatório heterogêneo de duas camadas sem fluxo cruzado entre elas, assumindo diferentes propriedades de rochas e fluidos em cada camada, vazão de injeção constante no reservatório (Fig.4.1.1).

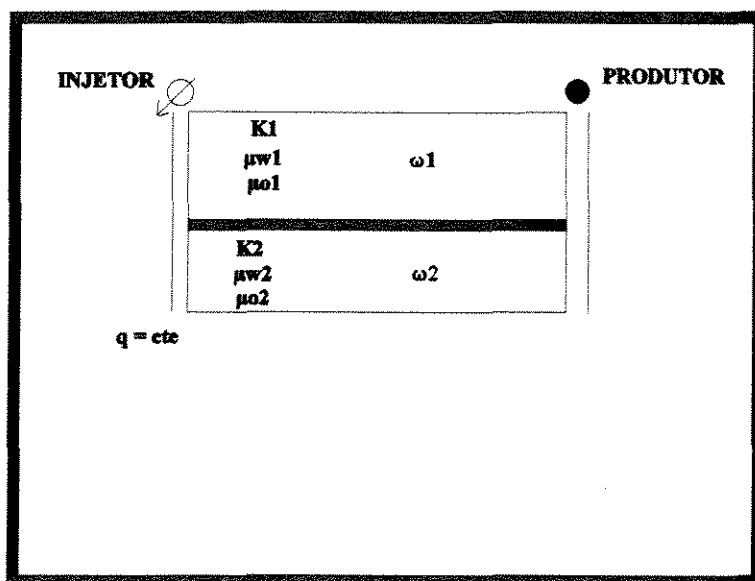


Fig.4.1.1 - Modelo heterogêneo com 2 camadas.

A vazão de injeção em cada camada a cada instante foi calculada através da relação entre a resistência ao fluxo de cada camada e a resistência ao fluxo total do reservatório, seguindo a relação dada por **Snyder e Ramey (1967)**.

A resistividade específica ao fluxo de uma célula i é dada por:

$$res_i = \left[\frac{\Delta x}{\frac{k_{ro}}{\mu_o} + \frac{k_{rw}}{\mu_w}} \right] \quad (4.1)$$

A resistência ao fluxo total numa camada j , com NC células, permeabilidade absoluta k e área A é:

$$R_j = \frac{\sum_{i=1}^{NC} res_i}{k_j A_j} \quad (4.2)$$

Assim, a resistência ao fluxo para o reservatório com NL camadas, é dada por:

$$R_t = \frac{1}{\sum_{j=1}^{NL} \frac{1}{R_j}} \quad (4.3)$$

A injetividade em cada camada, como função do tempo, pode ser calculada se assumirmos que a queda de pressão é a mesma em todas as camadas, pela relação abaixo:

$$\frac{i_{wj}}{i_w} = \frac{i_{wj}}{\sum_{j=1}^{NL} i_{wj}} = \frac{R_t}{R_j} \quad (4.4)$$

Assim, a medida que a frente avança em cada camada, a injetividade de cada camada é recalculada, obtendo-se então a vazão de injeção de cada camada.

Além das considerações supracitadas, as seguintes hipóteses básicas do modelo proposto por **Ferreira (1994)** foram assumidas: escoamento imiscível unidimensional bifásico, fluido incompressível, reservatório composto de uma parte contínua de maior permo-porosidade e uma parte descontínua com menor permo-porosidade, fluxo convectivo na fração mais permo-porosa, efeitos gravitacionais desprezíveis, efeitos capilares longitudinais desprezíveis, efeitos capilares transversais considerados através de um modelo de transferência de massa entre a fração mais permo-porosa e a fração menos permo-porosa.

O equacionamento do problema resulta num sistema de equações de derivadas parciais não-linear para cada camada, o qual foi solucionado pelo método das características e, também, por um método numérico implícito no tempo.

A extensão deste trabalho para reservatórios com maior número de camadas é possível, desde que as hipóteses básicas sejam mantidas.

Para o caso de pressão constante entre os poços produtor e injetor, com vazão de injeção variável, o método utilizado pode ser facilmente adaptado, alterando-se apenas a forma de cálculo da resistência ao fluxo total do reservatório.

4.2. APLICAÇÃO AO RESERVATÓRIO HETEROGÊNEO COM DUAS CAMADAS NÃO-COMUNICANTES

A partir dos dados de Ferreira (1994), foi feita uma adaptação ao modelo de duas camadas, obtendo as Tabelas 4.2.1 e 4.2.2, sendo que para simplificação dos cálculos, a única propriedade da rocha que se permitiu variar foi a permeabilidade absoluta da fração menos permo-porosa de uma das camadas. Considerou-se que a espessura da fração menos permo-porosa de uma das camadas é menor do que a da outra, o que implicou em dois valores de ω . Como a variável tempo adimensional depende de K e de ω , a fim de facilitar os cálculos a razão entre essas variáveis foi mantida constante em cada camada .

O valor de K utilizado foi menor que o calculado, a forma como ele é calculado tende a levar a uma superestimação do seu valor, conforme (Ferreira,1994).

Os resultados obtidos pelo método das características e por diferenças finitas mostraram excelente ajuste (Figs. 4.2.1a, 4.2.1b, 4.2.2a e 4.2.2b).

Os gráficos de produção, Figs. 4.2.3 a 4.2.6, mostram que a recuperação é maior na camada com menor valor de ω , isto é, com maior fração menos permo-porosa. Também se observa que a RAO final é menor nesta camada.

Este resultado está de acordo com o previsto, pois, uma vez que as espessuras e demais propriedades da fração mais permo-porosa são idênticas, na camada com maior espessura de fração menos permo-porosa, teremos uma maior troca de massa resultando numa maior recuperação e RAO menor.

	fração mais permo- porosa	fração menos permo- porosa
ϕ	0.15	0.10
Swc	0.20	0.25
Sor	0.328	0.35
$\phi_{efetiva}$	0.0708	0.04
μ_o (cP)	30	30
μ_w (cP)	0.8	0.8
k_{ro}	$0.86 \left(\frac{1 - S_w - S_{or}}{1 - S_{wc} - S_{or}} \right)^{3.1}$	
k_{rw}	$0.574 \left(\frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{or}} \right)^{1.8}$	

Tabela 4.2.1 - Parâmetros utilizados comuns às 2 camadas

	camada 2	camada 1
K (dia⁻¹) utilizado	1×10^{-4}	1.132×10^{-4}
K (dia⁻¹) calculado	7×10^{-3}	8×10^{-3}
ω	0.689	0.780
hf (m)	1.0	1.0
hn (m)	0.8	0.5
kaf (mD)	50	50
kan (mD)	13	5
b (m)	100	100
qinj(m ³ /dia) inicial	7.08	7.08
L (m)	200	200

Tabela 4.2.2 - Parâmetros utilizados em cada camada

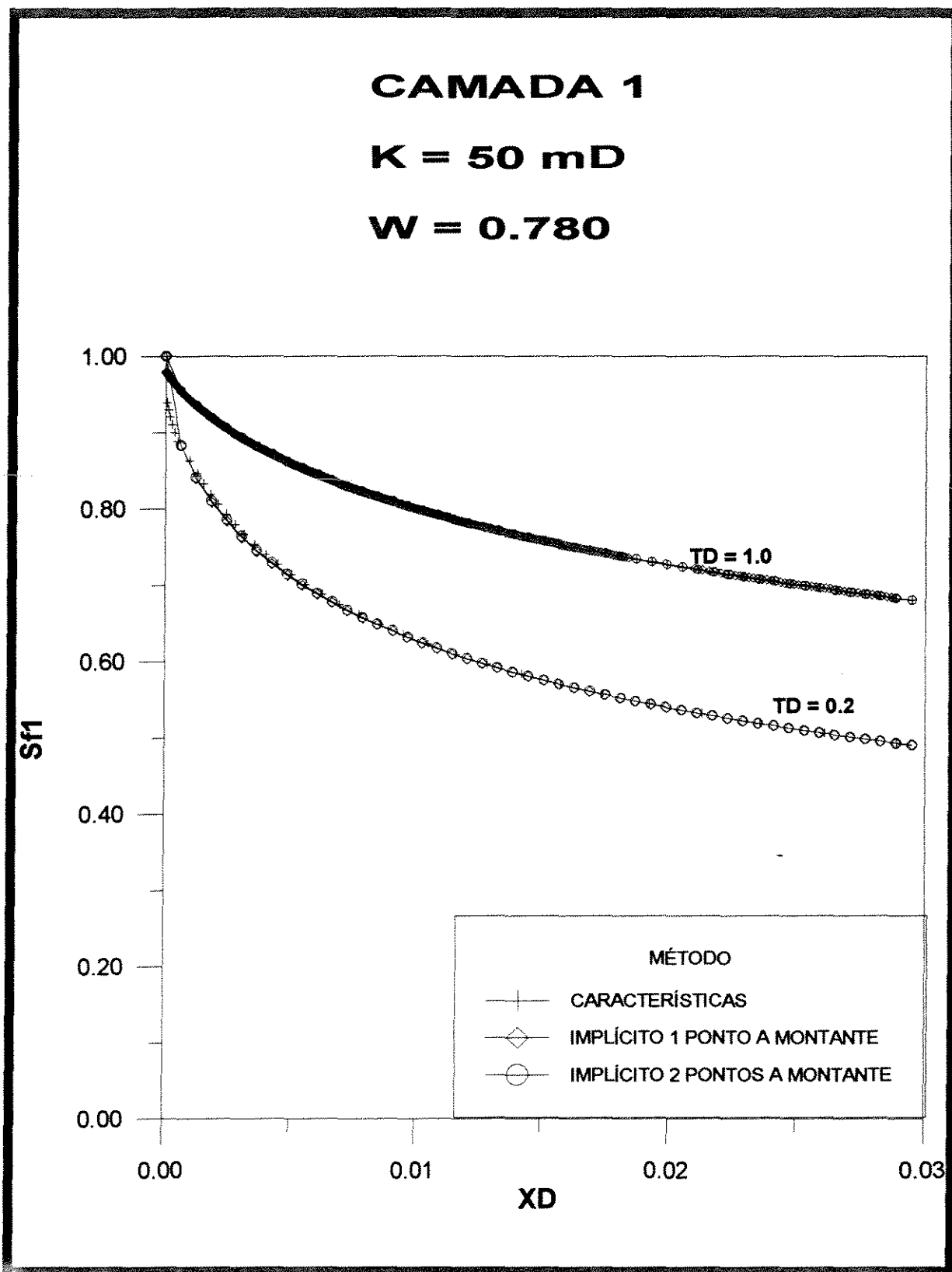


Fig.4.2.1a - Perfil de saturação na fração mais permeável

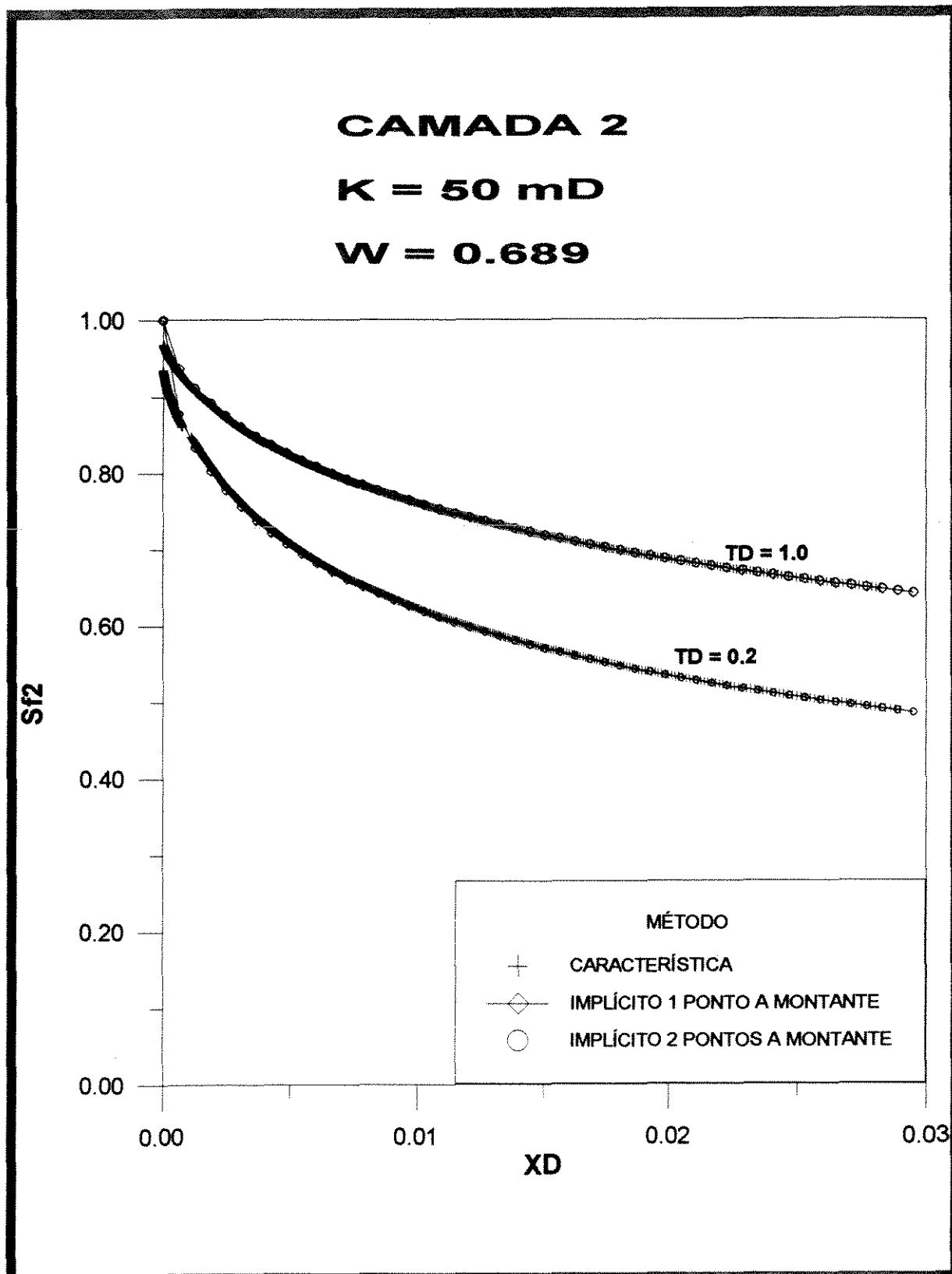


Fig.4.2.1b - Perfil de saturação na fração mais permeável

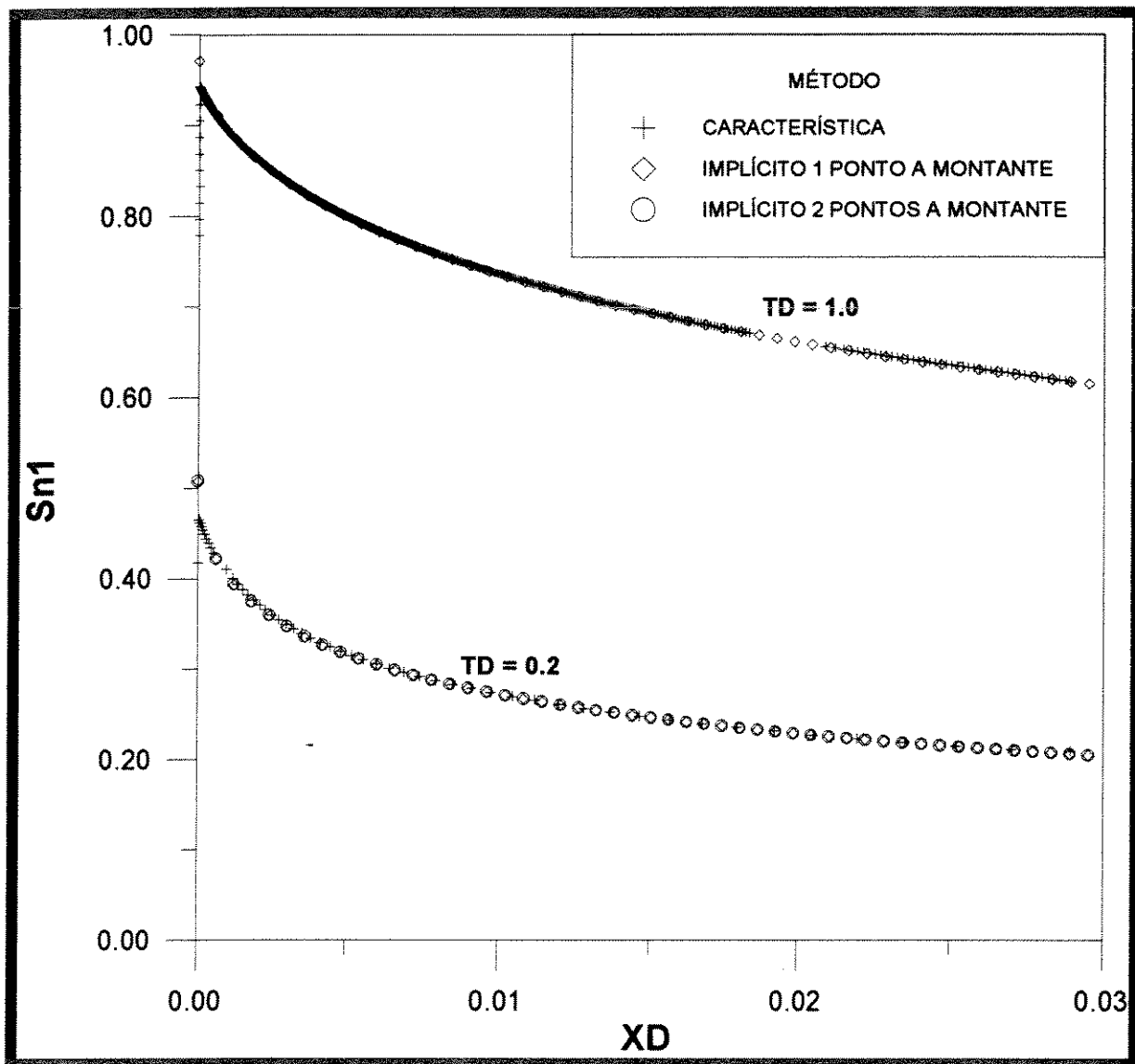


Fig.4.2.2a - Perfil de saturação na fração menos permeável da Camada 1.

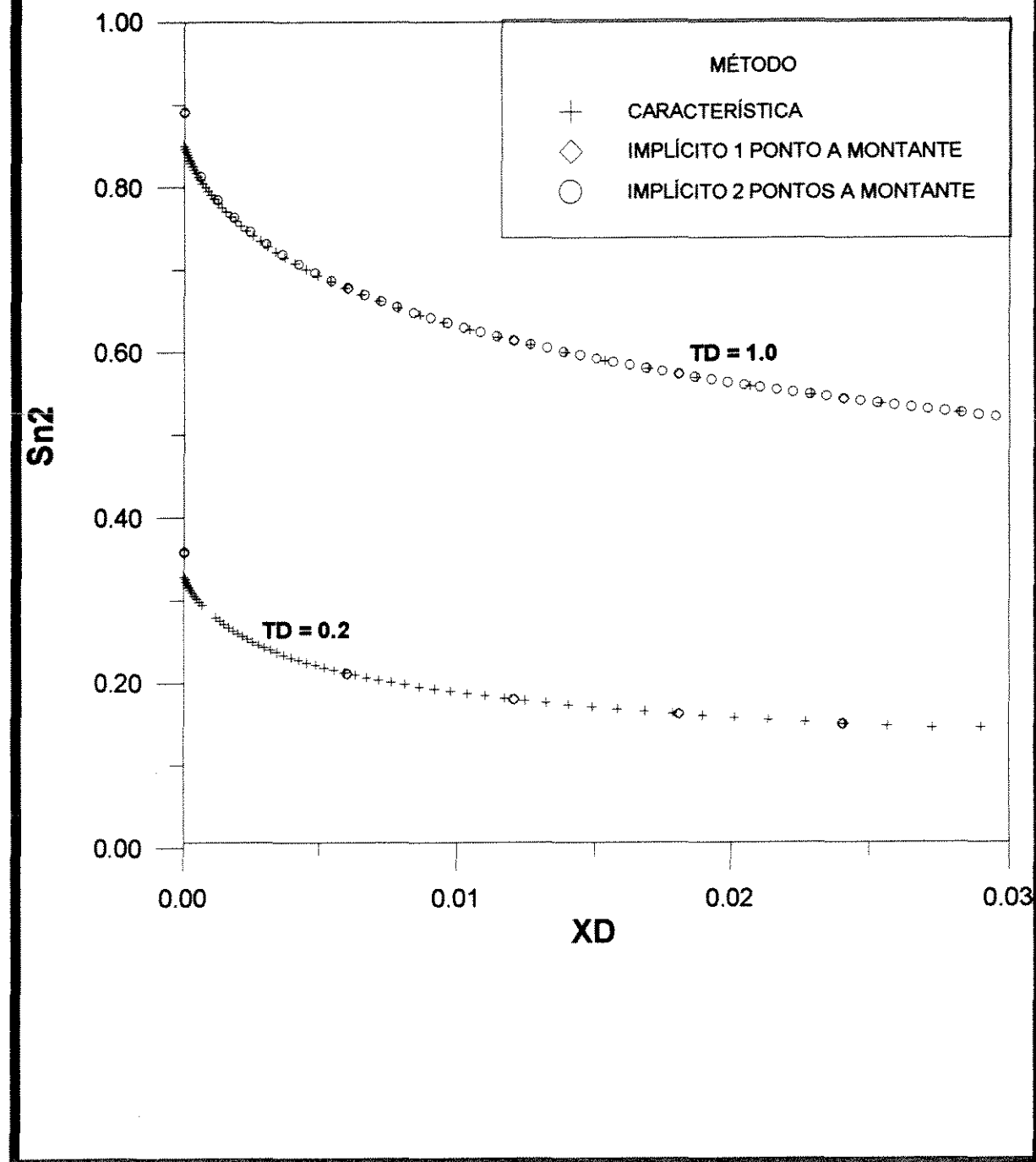


Fig.4.2.2b - Perfil de saturação na fração menos permo-porosa da Camada 2.

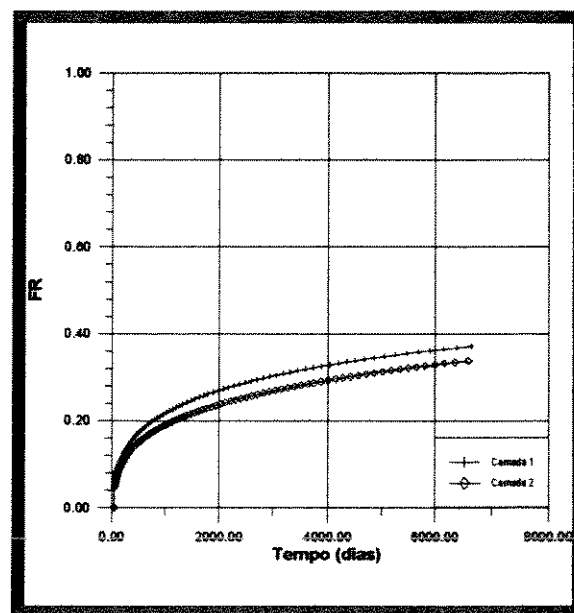
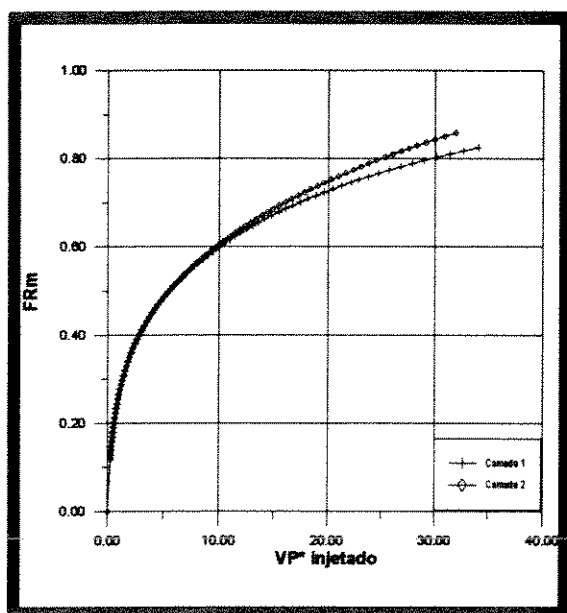


Fig.4.2.3 - Comparação entre os fatores de recuperação.

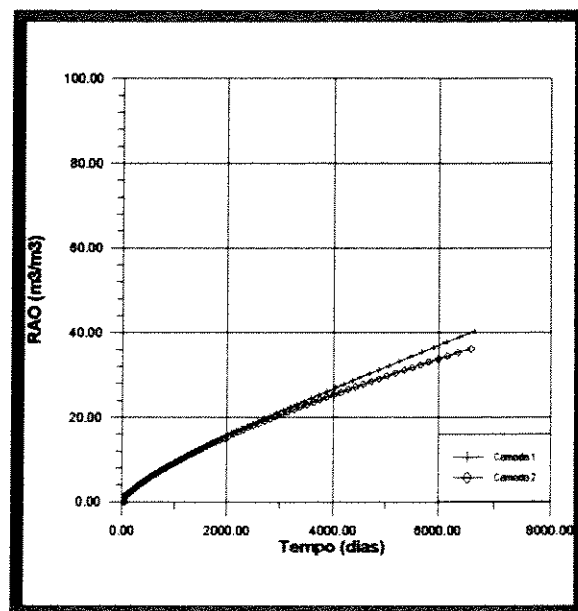
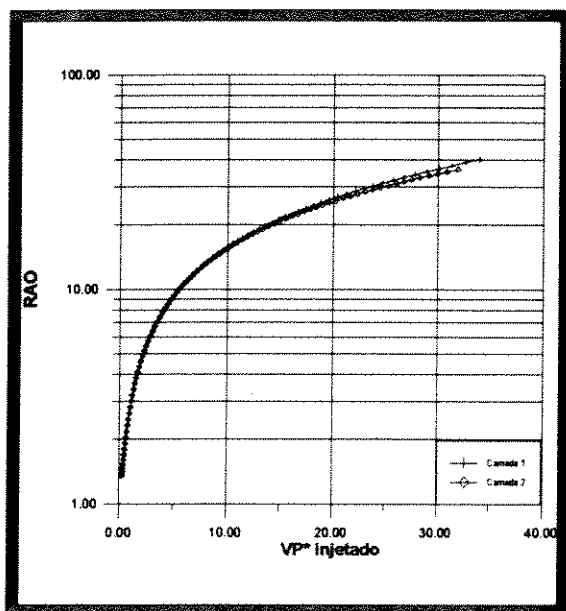


Fig.4.2.4 - Comparação entre as razões água-óleo

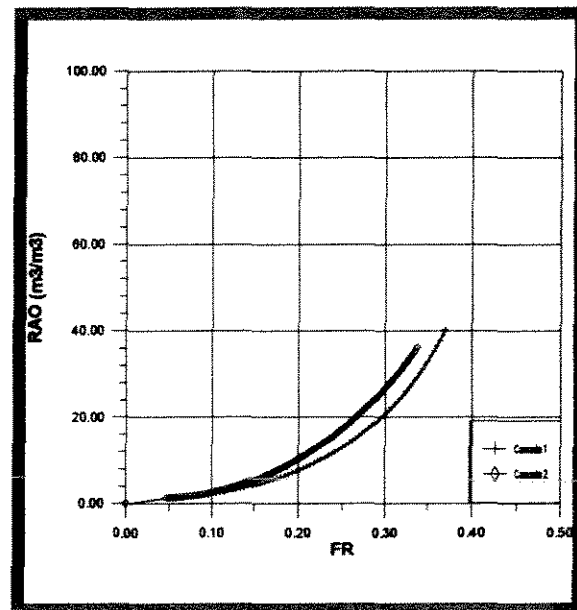
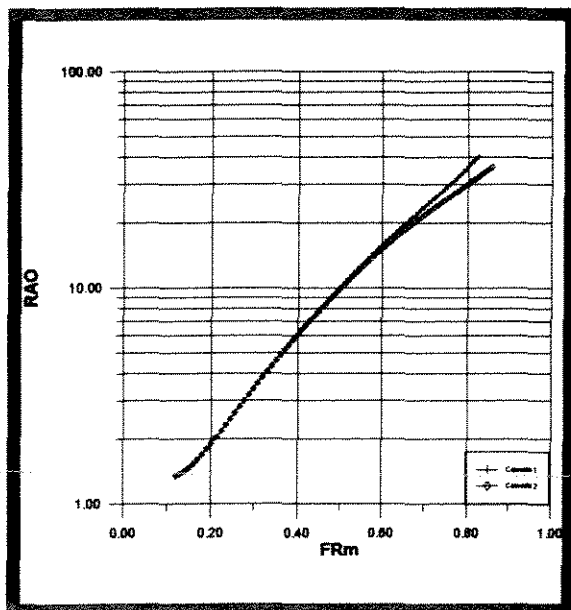


Fig.4.2.5 - Comparação entre a razão água-óleo e os fator de recuperação.

5. MODELO PARA RESERVATÓRIO HETEROGÊNEO UTILIZANDO A TEORIA DOS CANAIS DE FLUXO

5.1. METODOLOGIA

O problema a ser resolvido consiste em adequar o modelo unidimensional para o caso bidimensional, utilizando-se a teoria dos canais de fluxo, sendo que as principais diferenças em relação ao caso unidimensional podem ser vistas na Tabela 5.1.1.

Variável	Modelo	
	Unidimensional	Bidimensional com canais de fluxo
Área aberta ao fluxo	Constante	Variável
Vazão	Constante	Variável

Tabela 5.1.1 - Comparação entre modelo unidimensional e o bidimensional.

5.2. SOLUÇÃO UTILIZANDO CANAIS DE FLUXO

A obtenção dos canais de fluxo é feita utilizando a teoria do potencial complexo, a partir da obtenção da função corrente e da função potencial. Para alguns padrões geométricos de arranjo de poços, existem soluções analíticas para o potencial complexo, obtidas a partir de transformação conforme, **Hauber (1961)**, **Morel-Seytoux(1965,1966)** e **Abbaszadeh-Dehghani(1982)**. Para padrões irregulares, pode ser usado o método das imagens para se criar barreiras ao fluxo, e aplicar o princípio da superposição a partir das expressões para fonte e sumidouro.

O procedimento usado neste trabalho consiste em gerar as linhas de fluxo seguindo procedimento de **Leblanc e Caudle (1971)**, e obter os fatores de forma utilizando o método direto proposto por **Romeu (1985)**. Com isso temos definida a geometria do canal de fluxo que será considerada fixa em relação ao tempo, o que será verdadeiro se a mobilidade total for constante e, caso contrário, será considerado que a variação na mobilidade total não afetará significativamente a geometria do canal (**Martin e Wegner, 1979**). Estes dados são então alimentados nos programas para solução pelo método das características e diferenças finitas do reservatório heterogêneo unidimensional, modificados para calcular sobre a linha de fluxo.

A opção por gerar as linhas de fluxo pelo método citado, que utiliza o método das imagens para representar barreiras ao fluxo, e exige portanto a adição de vários poços para o cálculo correto das linhas de fluxo, foi feita tendo em conta que as soluções analíticas para as funções corrente e potencial são restritas a determinados arranjos de poços. Como se baseiam nas funções elípticas de Jacobi, as quais podem ser obtidas a partir de expansão em série, que também demandam um certo tempo computacional, não se observou vantagem em utilizar

as soluções analíticas no presente trabalho.

A Fig.5.2.1 ilustra algumas linhas de fluxo obtidas resolvendo numericamente a expressão analítica para a função corrente, conforme explicado no Apêndice C, utilizando o procedimento de Abbaszadeh-Dehghani(1982).

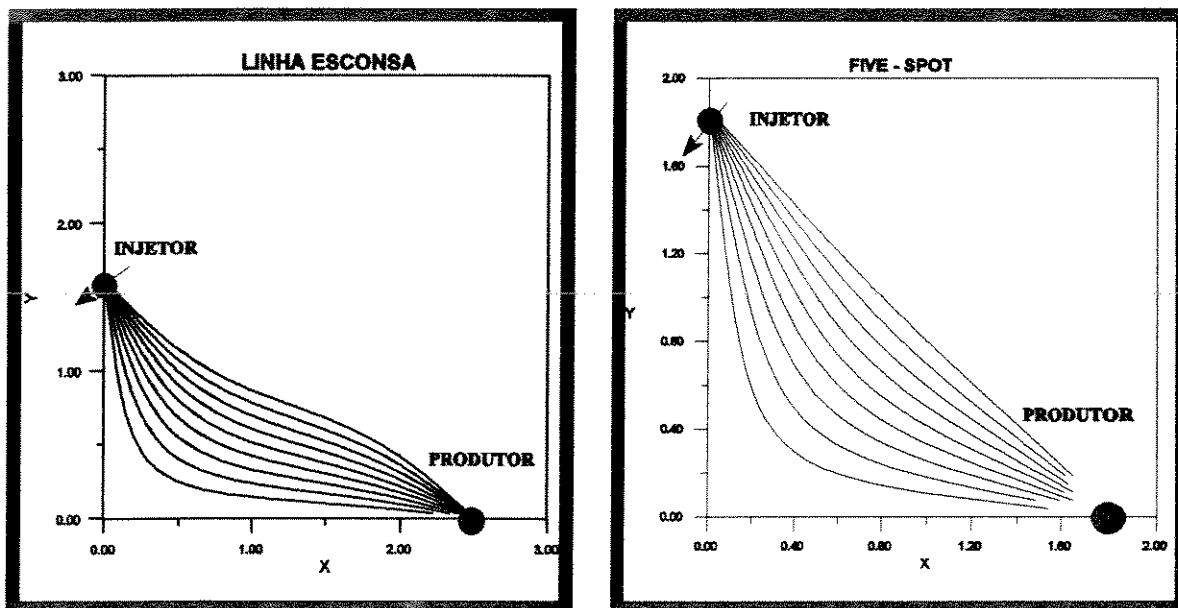


Fig.5.2.1- Linhas de fluxo obtidas através de solução analítica de ψ .

5.3. VERIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO OBTIDA PARA CANAL DE FLUXO PARA UM CASO REAL

Inicialmente foram geradas as linhas de fluxo na forma adimensional como descrito no Apêndice D, para 1/4 de "five-spot". A seguir, resolveu-se o sistema de equações em cada canal de fluxo pelo método das características e diferenças finitas.

Escolheu-se então três casos para estudo e verificação do programa, como mostrados na Tabela 5.3.1.

CASOS ESTUDADOS	
Casos 1 e 2	Variou-se o valor do coeficiente de transferência de massa (K), para estudar sua influência na produção e recuperação.
Caso 3	Curva de fluxo fracionário linear e ω próximo da unidade, visando observar o deslocamento tipo pistão

Tabela 5.3.1 - Casos estudados utilizando canais de fluxo.

A Tabela 5.3.2 mostra os parâmetros utilizados nos cálculos.

Os perfis de saturação obtidos em cada canal pelos dois métodos mostraram excelente ajuste como pode ser visto na Figs. 5.3.1 e 5.3.2.

Utilizando os resultados de cada canal foram gerados gráficos de produção para a análise dos resultados como pode ser visto nas Figs. 5.3.3 a 5.3.5.

Os mapas de saturações permitem uma melhor visualização da dinâmica

do processo de injeção de água e foram gerados utilizando-se a técnica do inverso do quadrado da distância sobre os pontos de cada linha de fluxo (Figs. 5.3.6 a 5.3.10).

Parâmetros	Casos 1 e 2		Caso 3	
	fração mais permo-porosa	fração menos permo-porosa	fração mais permo-porosa	fração menos permo-porosa
ϕ	0.15	0.10	0.2	0.10
Swc	0.20	0.25	0.10	0.25
Sor	0.328	0.35	0.10	0.35
ϕ efetiva	0.0708	0.04	0.16	0.04
μ_o (cP)	30	30	1	1
μ_w (cP)	0.8	0.8	1	1
krw	$0.574 \left(\frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{or}} \right)^{1.8}$		$\frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{or}}$	
kro	$0.86 \left(\frac{1 - S_w - S_{or}}{1 - S_{wc} - S_{or}} \right)^{3.1}$		$\frac{1 - S_w - S_{or}}{1 - S_{wc} - S_{or}}$	
L (m)	141.42		100.00	
hf(m)	1.0		1.0	
hn(m)	0.5		0.04	
K(dia-1)	Caso 1	1.0 E -4	1.0 E -3	
	Caso 2	1.0 E -3		
ω	0.78		0.99	
Número de Canais	10		10	

Tabela 5.3.2 - Parâmetros do reservatório para os 3 casos estudados.

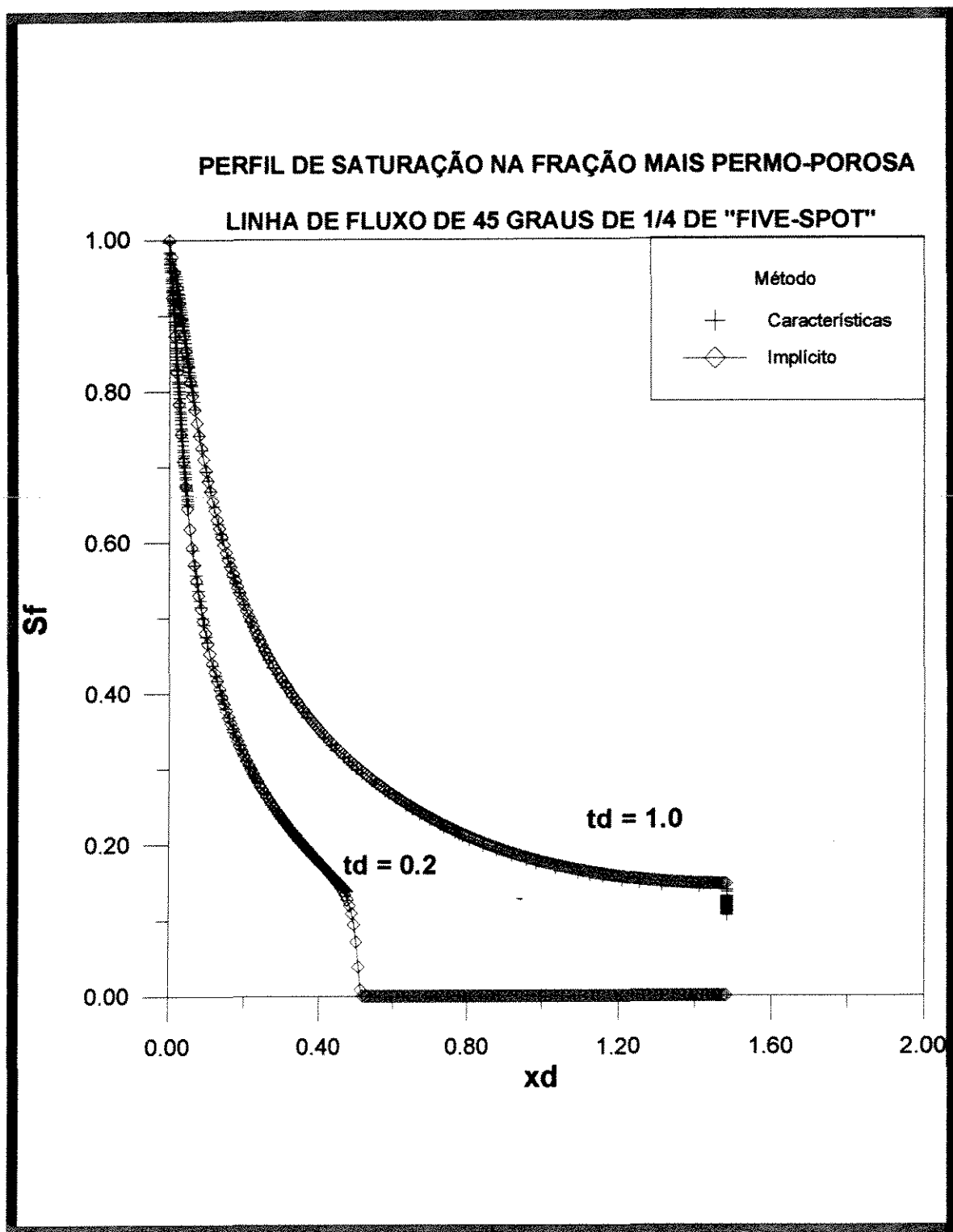


Fig.5.3.1 - Perfil de saturação na fração mais permo-porosa (CASO 2).

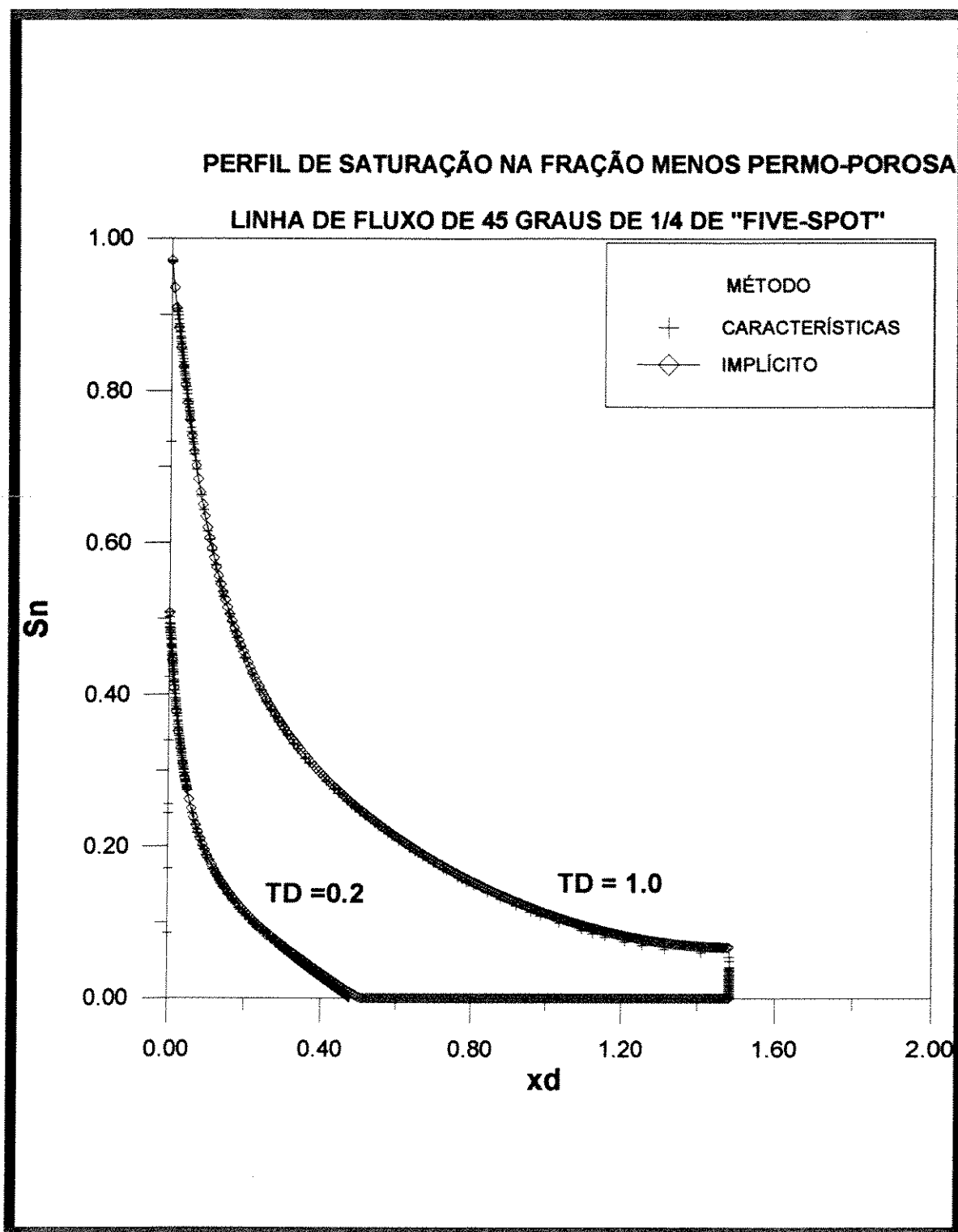


Fig. 5.3.2 - Perfil de saturação na fração menos permoporosa (CASO 2)

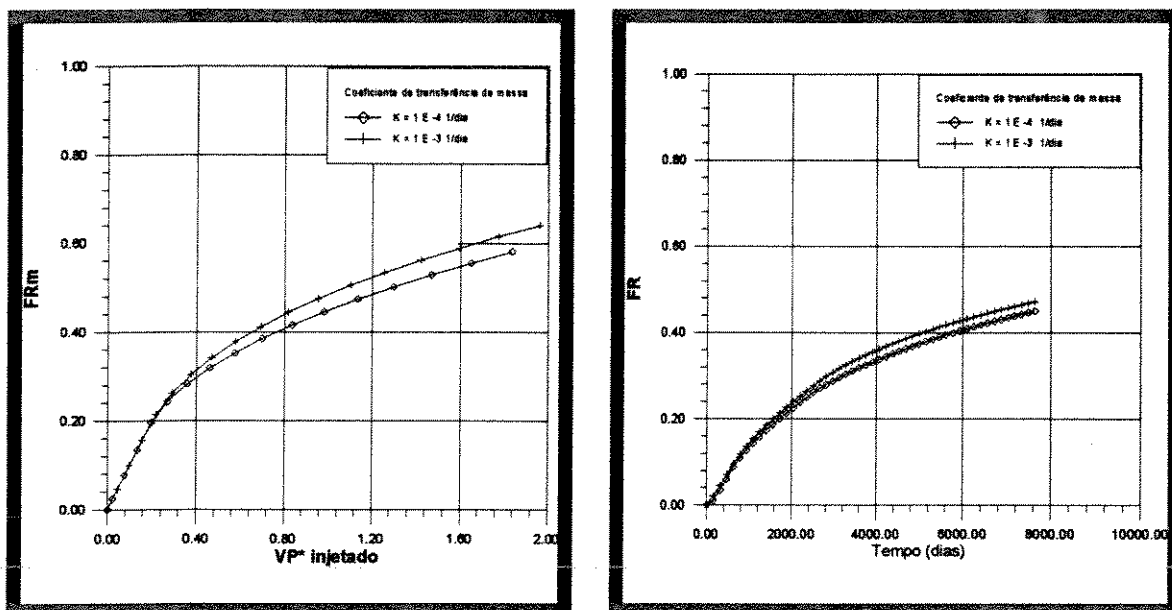


Fig.5.3.3 - Fator de recuperação para os Casos 1 e 2

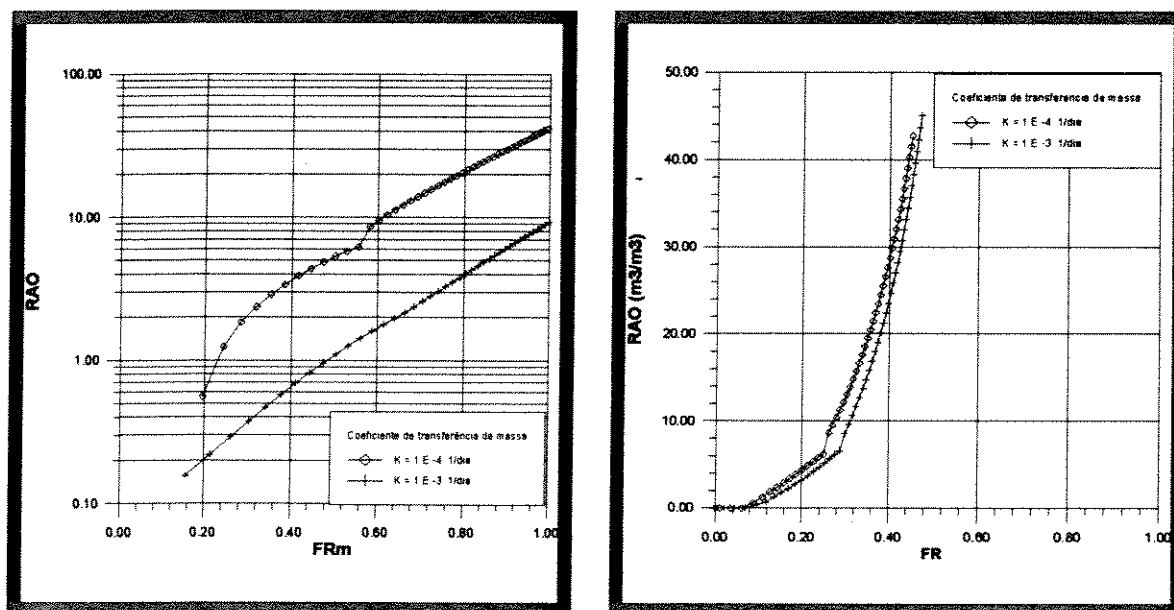


Fig.5.3.4 - Razão água-óleo x fator de recuperação para os Casos 1 e 2.

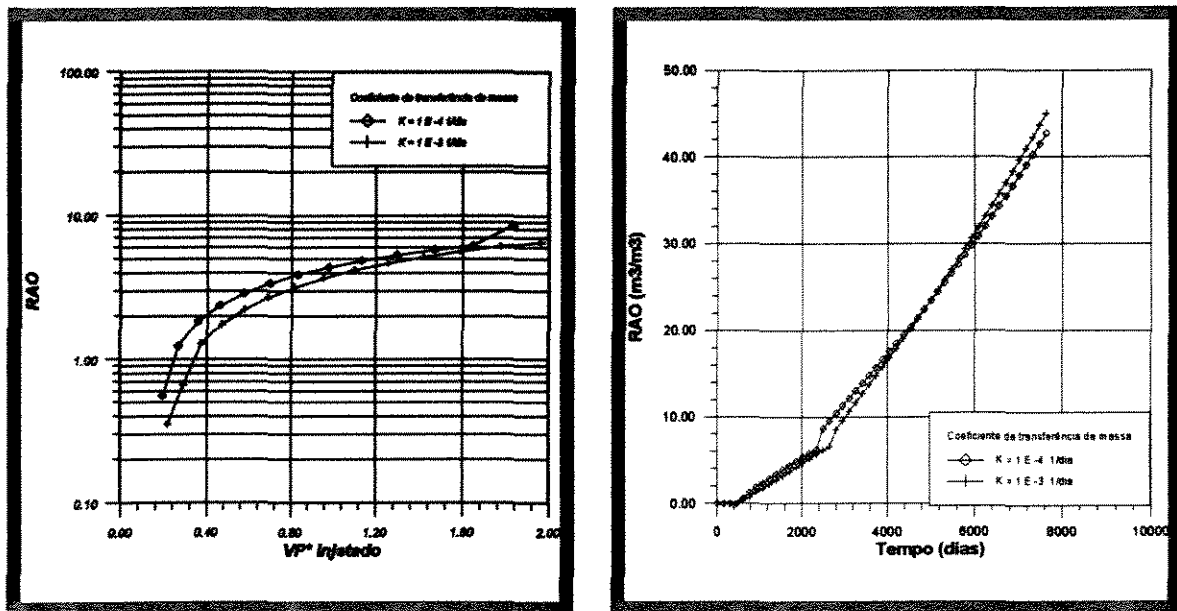


Fig.5.3.5 - Razão água-óleo para os Casos 1 e 2.

Comparando os gráficos de produção dos Casos 1 e 2, observa-se que a recuperação é maior e a razão água-óleo inicial é menor quanto maior for o coeficiente de transferência de massa. Isso se explica, pois quanto maior for a transferência de massa, mais rapidamente o óleo migra da fração menos permeável para a corrente de fluxo..

Para o Caso 3, podemos observar que as aproximações feitas foram bem sucedidas na representação do deslocamento tipo pistão, como pode ser visto nos mapas de saturação e gráficos de produção (Figs. 5.3.9 a 5.3.11).

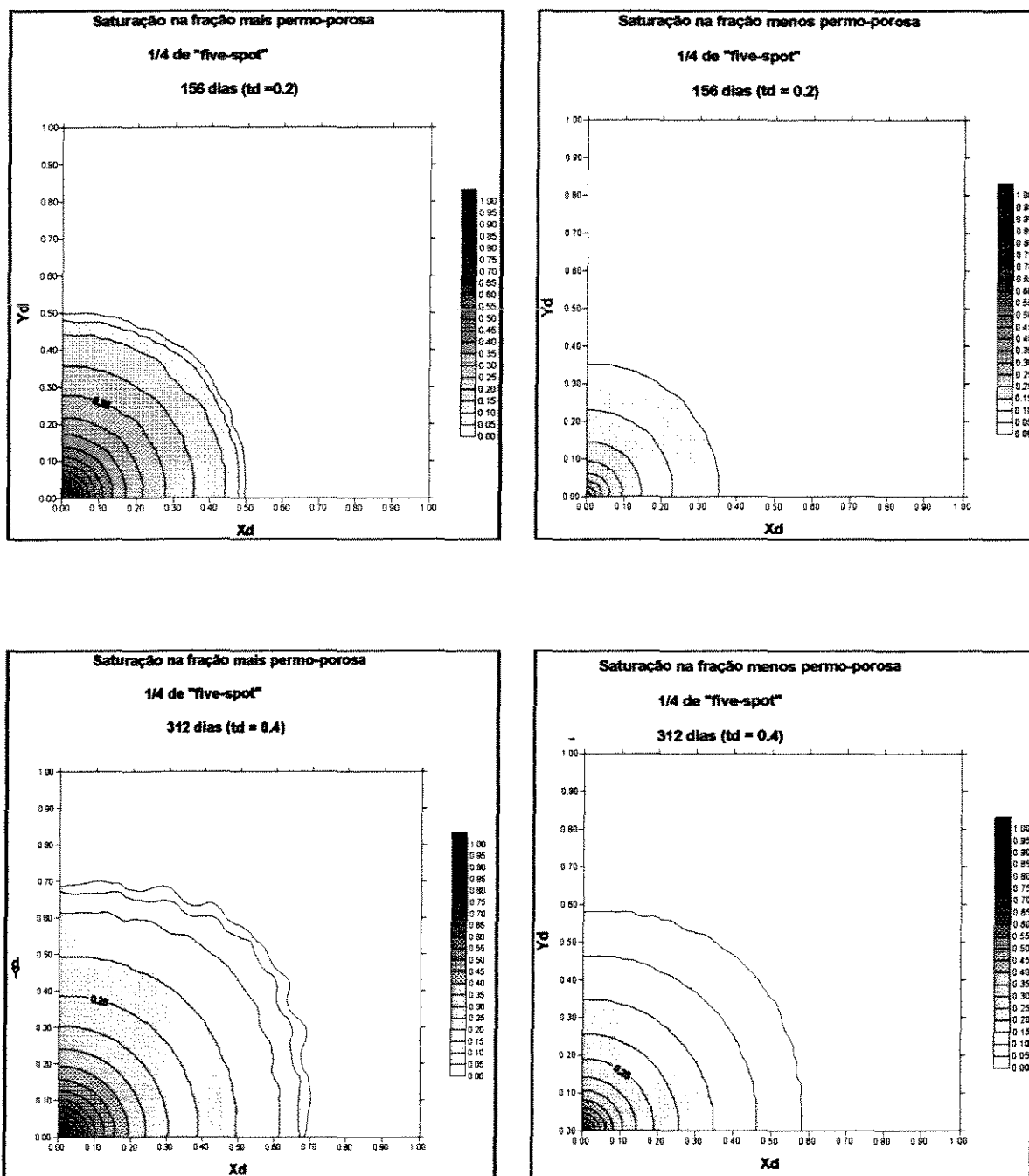


Fig.5.3.6 - Mapas de saturação para $td = 0.2$ e $td = 0.4$ (Caso 2).

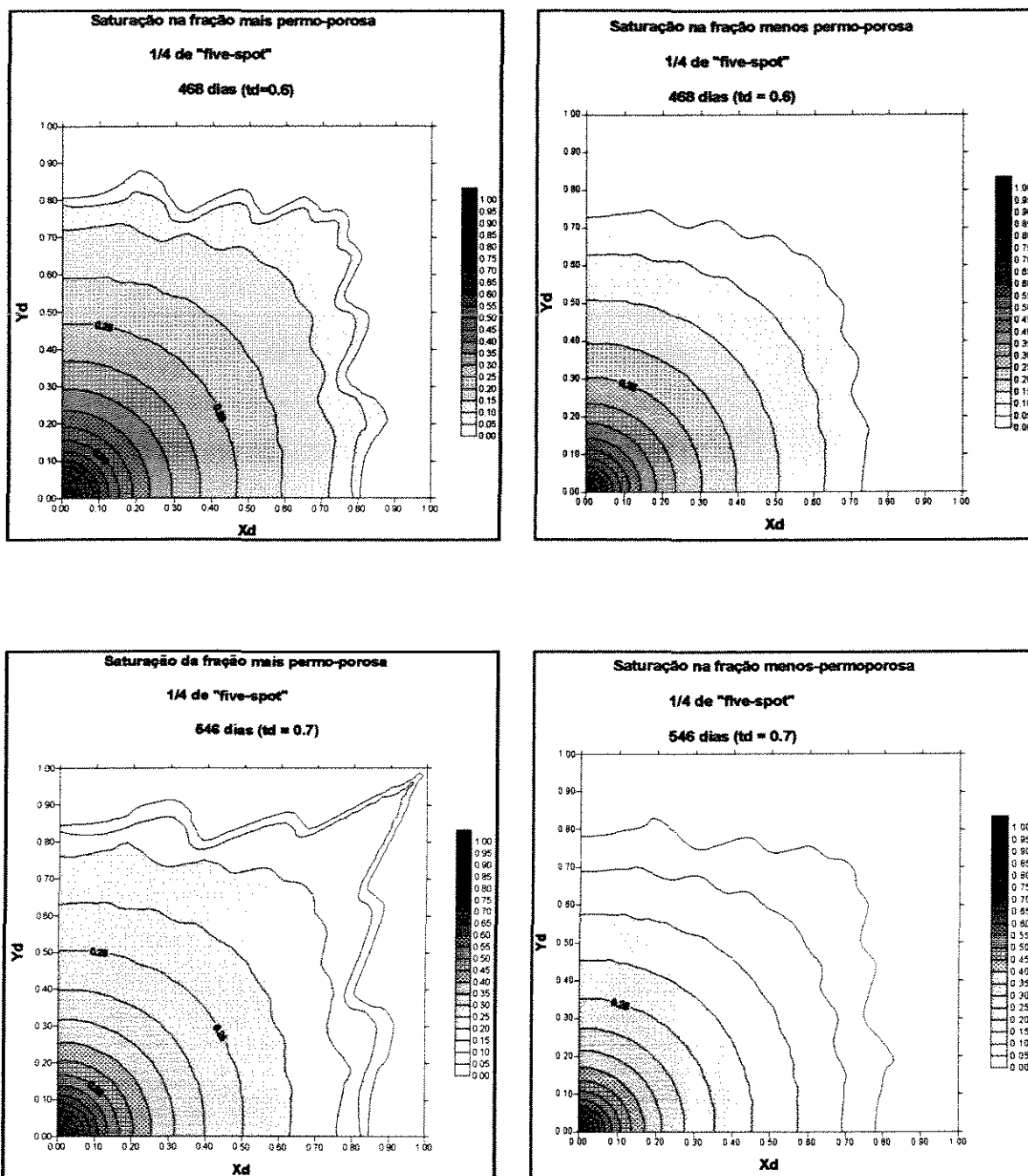


Fig.5.3.7 - Mapas de saturação para $td=0.6$ e $td = 0.7$ (Caso 2)

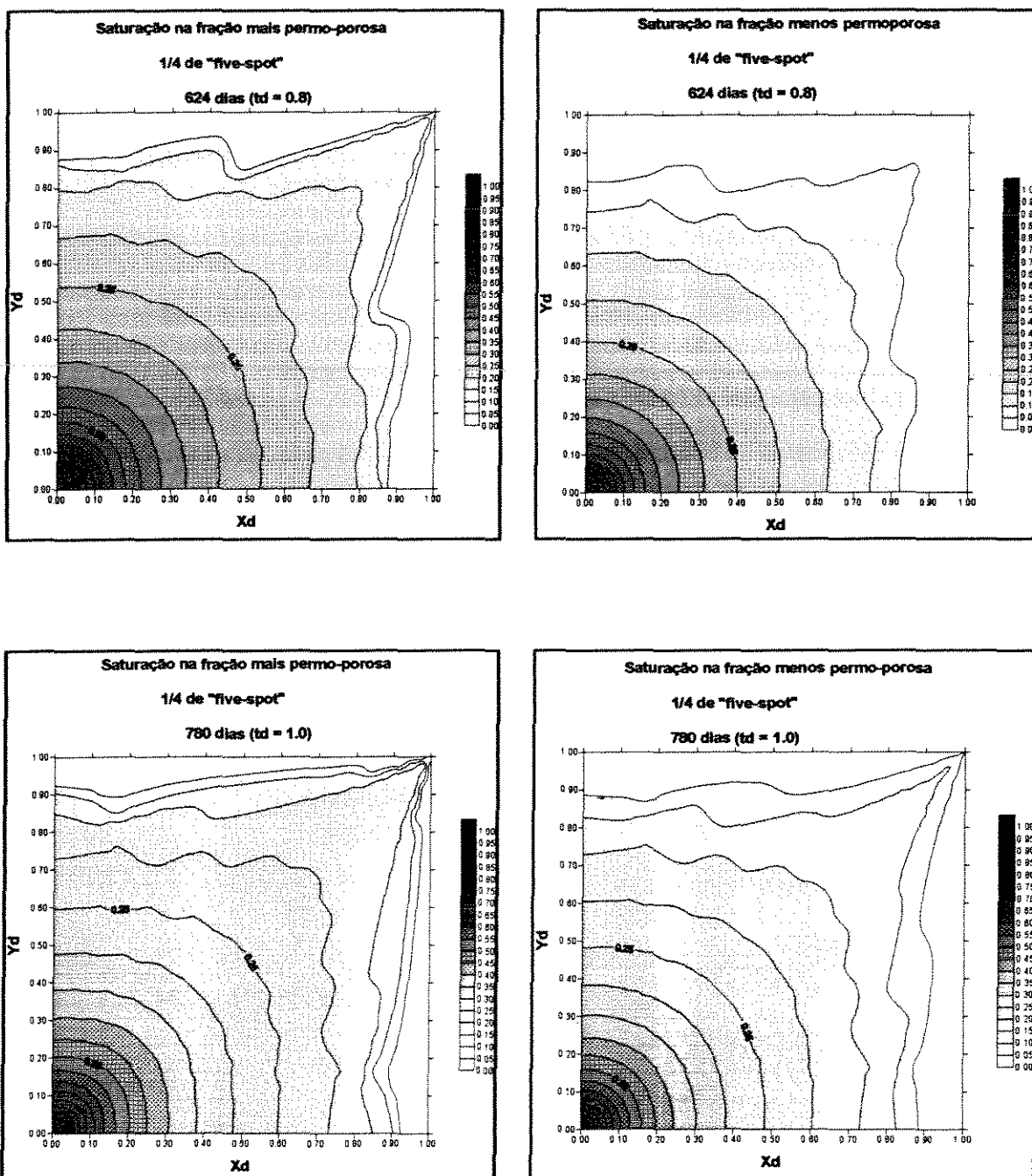


Fig.5.3.8 - Mapas de saturação para $t_d = 0.8$ e $t_d = 1.0$ (Caso 2)

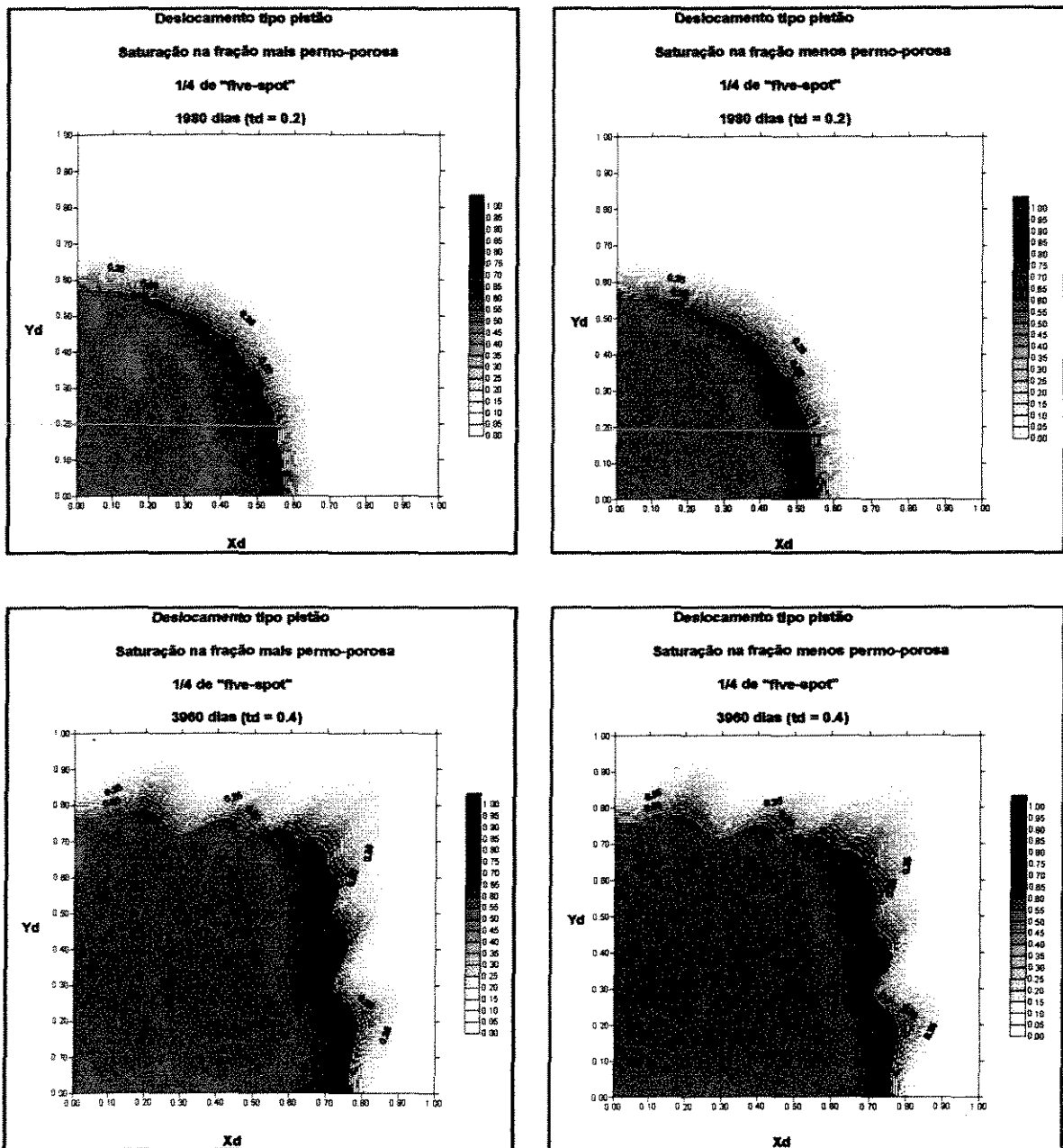


Fig.5.3.9 - Mapas de saturação para $t_d = 0.2$ e $t_d = 0.4$ (Caso 3).

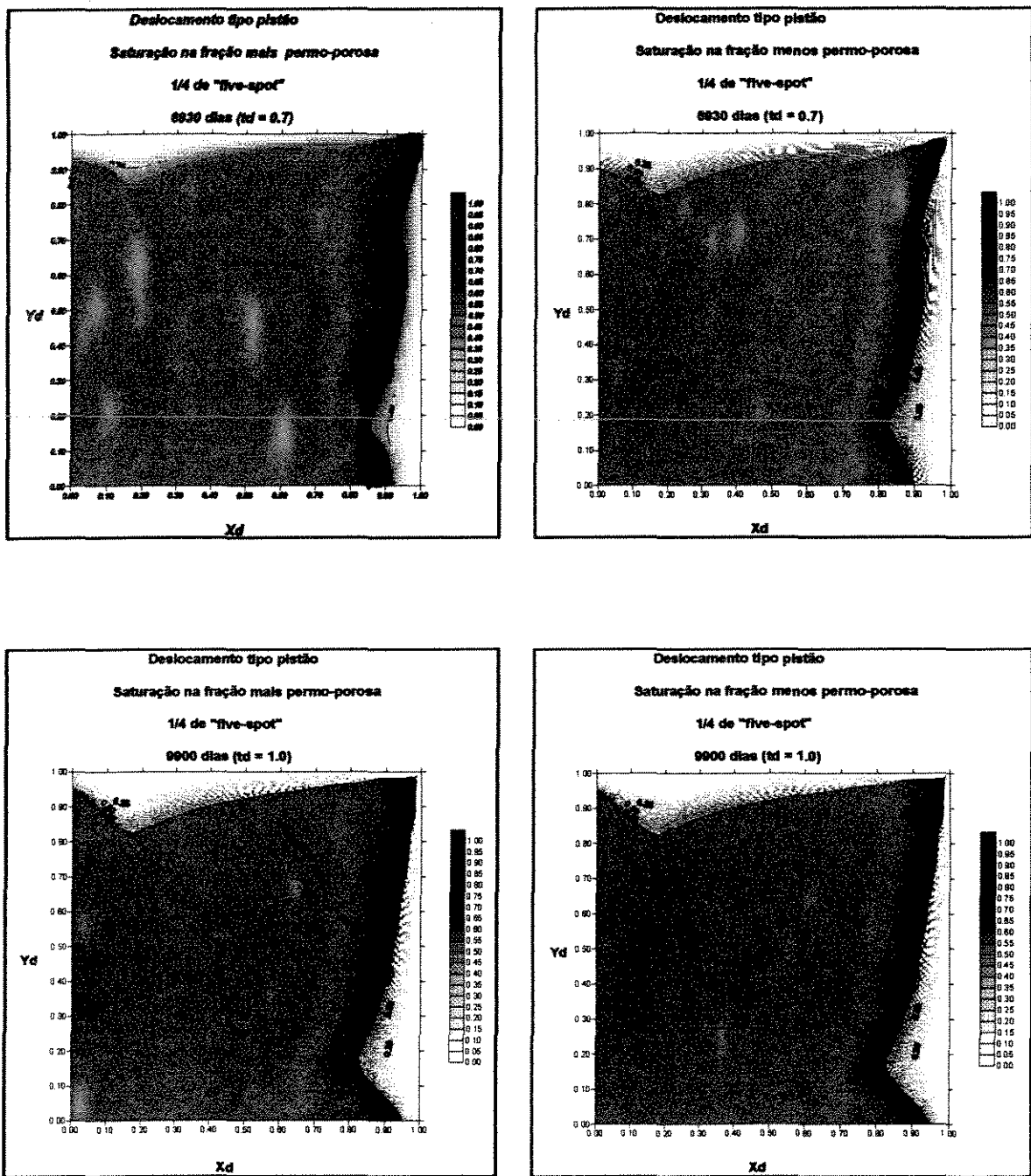


Fig.5.3.10 - Mapas de saturação para $t_d = 0.7$ e $t_d = 1.0$ (Caso 3).

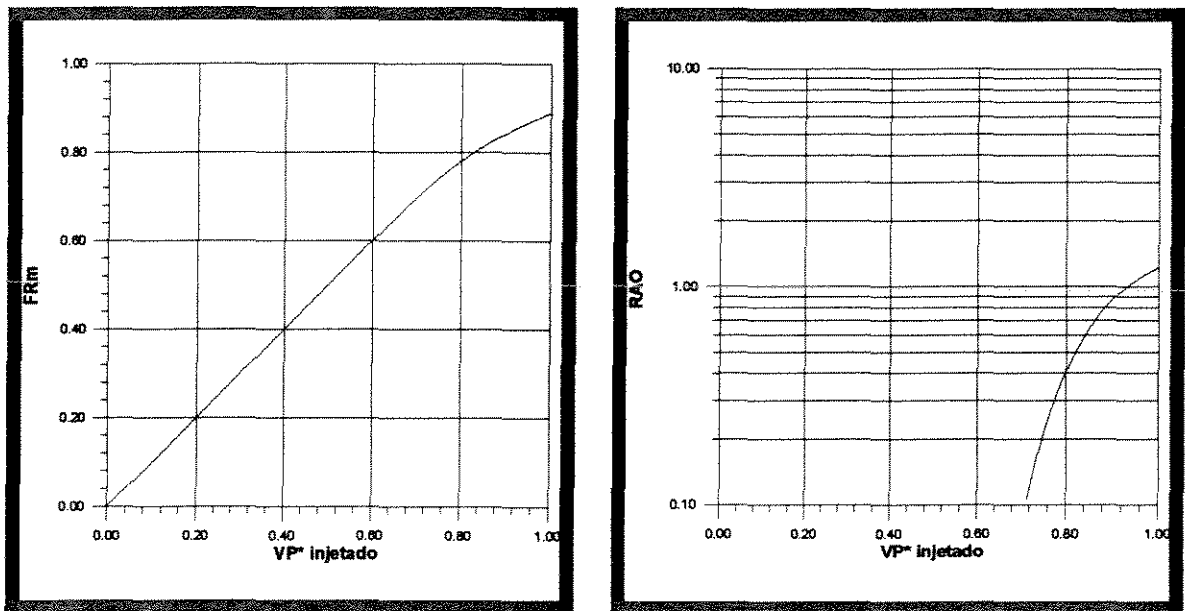


Fig.5.3.11 - Fator de recuperação e RAO para o Caso 3.

6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

- 1- O modelo bidimensional proposto utilizando a teoria dos canais de fluxo e o método das características de forma combinada, se mostrou adequado para obtenção do comportamento do reservatório heterogêneo.
- 2- O saturação da frente de avanço para curto tempo apresenta um declínio exponencial.
- 3- O modelo para reservatórios de duas camadas com vazão de injeção constante, pode também ser utilizado, após pequenas alterações, para o caso de pressão constante, bastando que se altere a forma da resistência total ao fluxo.
- 4- As equações para vazão variando com o tempo e a posição, representam a forma mais genérica das equações do modelo unidimensional com vazão constante.
- 5- A adimensionalização adequada do modelo de canal de fluxo possibilitou uma forma direta de geração dos dados de entrada para solução do sistema de equações do reservatório heterogêneo.
- 6- A utilização de simulador comercial com modelo de dupla porosidade, pode ser tentada como uma forma de verificar se o modelo de canais de fluxo esta representando adequadamente o problema.

7- A obtenção do coeficiente de difusão variável com a saturação, a partir das curvas de pressão capilar e permeabilidades relativas, pode servir como uma primeira aproximação do valor a ser usado.

8- A obtenção de soluções analíticas para alguns padrões de arranjos de poços apresentou problemas para implementação, pois necessita de funções matemáticas que são obtidas de forma trabalhosa, tornando o procedimento de Leblanc e Caudle adequado para geração das linhas de fluxo.

9- As soluções obtidas por diferenças finitas e pelo método das características apresentaram excelente ajuste para o nível de discretização utilizado.

10- A grande contribuição dada por este trabalho foi a criação de um modelo numérico com propriedades variáveis e com isso, outras propriedades variáveis podem ser incorporadas ao modelo.

NOMENCLATURA

A - área porosa efetiva transversal ao fluxo. $[L^2]$

a - relação entre a fração volumétrica da fração mais permo-porosa e a fração volumétrica da fração menos permo-porosa.

b - largura do meio poroso. $[L]$

c - constante da equação do fluxo fracionário

D- coeficiente de difusão. $[L^2/T]$

D* - coeficiente de difusão (D) dividido pela porosidade. $[L^2/T]$

f - fluxo fracionário da água.

FR - fator de recuperação

h - espessura. $[L]$

K- coeficiente de transferência de massa. $[1/T]$

ka - permeabilidade absoluta. $[L^2]$

kr- permeabilidade relativa.

l - posição sobre a linha de fluxo. $[L]$

L - comprimento do meio poroso. $[L]$

$\dot{m}$ - fluxo mássico longitudinal. $[M/T]$

$\dot{m}_z$ - fluxo mássico transversal. $[M/T]$

q - vazão. $[L^3/T]$

RAO - razão água-óleo

S - saturação da fase molhante.

t - tempo. $[T]$

v- velocidade. [L/T]

VP* - volumes porosos efetivos injetados

x - posição. [L]

z - posição. [L]

Alfabeto grego

μ - viscosidade. [M/LT]

ρ - massa específica. [M/L³]

γ - peso específico. [M/L²T²]

λ - mobilidade do fluido. [M L/T]

ϕ - porosidade

Φ - função potencial

ψ - função corrente

ω - fração volumétrica do meio contínuo

Ω - função potencial complexo

Subscritos

car - característica

chq - choque

D - adimensional

e - efetiva

f - fração contínua

h - heterogêneo

m - em relação ao volume de óleo móvel

n - fração descontínua

o - óleo

r - residual

w - água

x - direção x

y - direção y

Sobrescritos

' - derivada

+ - a jusante da frente de avanço

- - a montante da frente de avanço

* - na origem

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABBASZADEH-DEHGHANI,M. & BRIGHAM,W.E. Analysis of Unit Mobility Ratio Well-to-Well Tracer Flow to Determine Reservoir Heterogeneity, Dec. 1982, Stanford University Petroleum Research Institute.
- BECKNER,B.L.; ISHIMOTO,K.; YAMAGUCHI,S.; FIROOZABADI,A.; AZIZ,K. Imbibition-Dominated Matrix-Fracture Fluid Transfer in Dual Porosity Simulators. *Society of Petroleum Engineers*, SPE 16981, Sept. 1987, p.509-523.
- BUCKLEY,S.E. & LEVERETT,M.C. Mechanism of Fluid Displacement in Sands. *Petroleum Technology*, May 1941, p. 107-116.
- CHEN,J.; MILLER,M.A.; SEPEHRNOORI,K. Theoretical Investigation of Countercurrent Imbibition in Fractured Reservoir Matrix Blocks. *Society of Petroleum Engineers*, SPE 29141, Feb.1995, p.491-506.
- DOUGLAS Jr.,J.; PEACEMAN,D.W.; RACHFORD Jr., H.H. A Method for Calculating Multi-Dimensional Immiscible Displacement, *Petroleum Transactions*, AIME, vol.216, 1959, p. 297-306.
- DOYLE,R.E & WURL,T.M. Stream Channel Concept Applied to Waterflood Performance Calculations For Multiwell, Multizone, Three-Component Cases. *Journal of Petroleum Technology*. SPE 2653, Mar. 1971, p. 373-380.

FERREIRA,D.M. *Análise do Comportamento de Reservatórios Heterogêneos Submetidos à Injeção de Água*, Dissertação de Mestrado, IG/UNICAMP, 1994, p.117.

HAUBER, W.C. Prediction of Waterflood Performance for Arbitrary Well Patterns and Mobility Ratios, *Journal of Petroleum Technology*, Jan. 1964, p. 95-103.

HIGGINS,R.V. & LEIGHTON,A.J. A computer Method to Calculate Two-Phase Flow in Any Irregularly Bounded Porous Medium. *Journal of Petroleum Technology*, Nov. 1961, p.679-683.

HIGGINS,R.V. & LEIGHTON,A.J. Aids to Forecasting the Performance of Water Floods. *Journal of Petroleum Technology*, July 1964, p.1076-1082.

LEBLANC,J.L. & CAUDLE,B.H. A Streamline Model for Secondary Recovery, *Society of Petroleum Engineers Journal*, SPE 2865, Mar. 1971, p. 7-12.

MARTIN,J.C. & WEGNER,R.E. Numerical Solution of Multiphase, Two-Dimensional Incompressible Flow Using Stream-Tube Relationships. *Society of Petroleum Engineers of Journal*, SPE 7140, Oct. 1979, p.313-323.

MOREL-SEYTOUX,H.J. Analytical-Numerical Method in Waterflooding Predictions, *Society of Petroleum Engineers Journal*, SPE 985, Sept. 1965, p. 247-258.

MOREL-SEYTOUX, H.J. Unity Mobility Ratio Displacement Calculations for Pattern Floods in Homogeneous Medium, *Society of Petroleum Engineers Journal*, SPE 1359, Sept. 1966, p. 217-227.

REIS, L.C. *Estudo da Embebição Espontânea usando o Conceito de Difusão Capilar com Auxílio de Tomografia Computadorizada*. Dissertação de Mestrado. IG/UNICAMP, 1992, p.111.

ROMEU, R.K. Um Método Direto para Cálculo dos Fatores de Forma em Malhas de Fluxo, *Boletim Técnico Petrobrás*, v.28 (1), jan./mar. 1985, p. 17-26.

SNYDER, R.W. & RAMEY Jr., H.J. Application of Buckley-Leverett Displacement Theory to Noncommunicating Layered Systems, *Journal of Petroleum Technology*, SPE 1645, Nov.1967, p. 1500-1506.

YANG, W. An Analytical Solution to Two-Phase Flow in Porous Media and Its Applications to Water Coning. *Society of Petroleum Engineers Journal*, SPE 25283, June 1992, p.1-35.

APÊNDICE A- DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO PARA CANAL DE FLUXO

A dedução será feita para o canal de fluxo, pois a solução do modelo linear com vazão variável com o tempo, é um caso particular das equações que são apresentadas quando se considera a área aberta ao fluxo constante.

Definindo-se l como a posição sobre a linha de fluxo central do canal de fluxo (Fig.A.1),

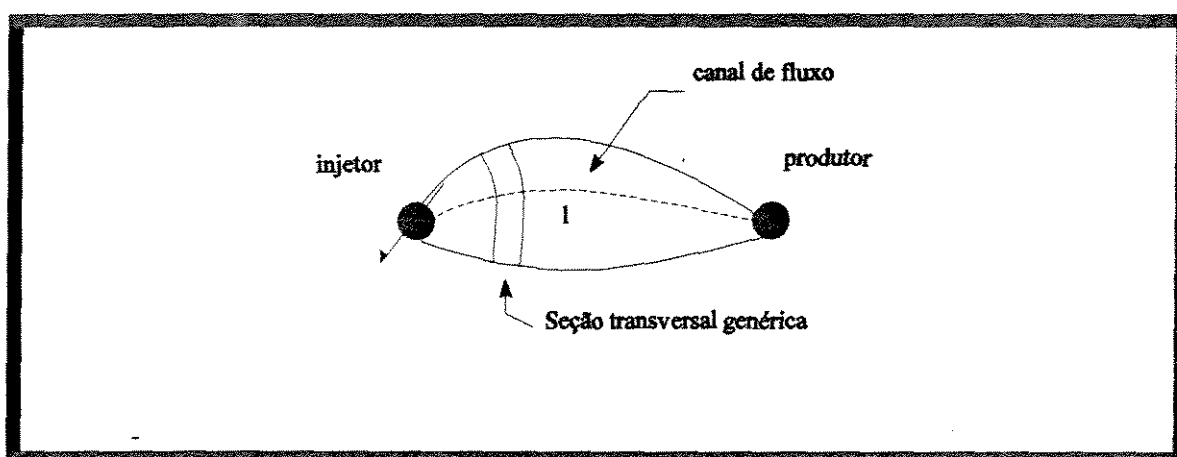


Fig. A.1 Representação esquemática do canal de fluxo

e representando o reservatório heterogêneo de maneira análoga à feita por Ferreira(1994) (Fig. A.2) ,

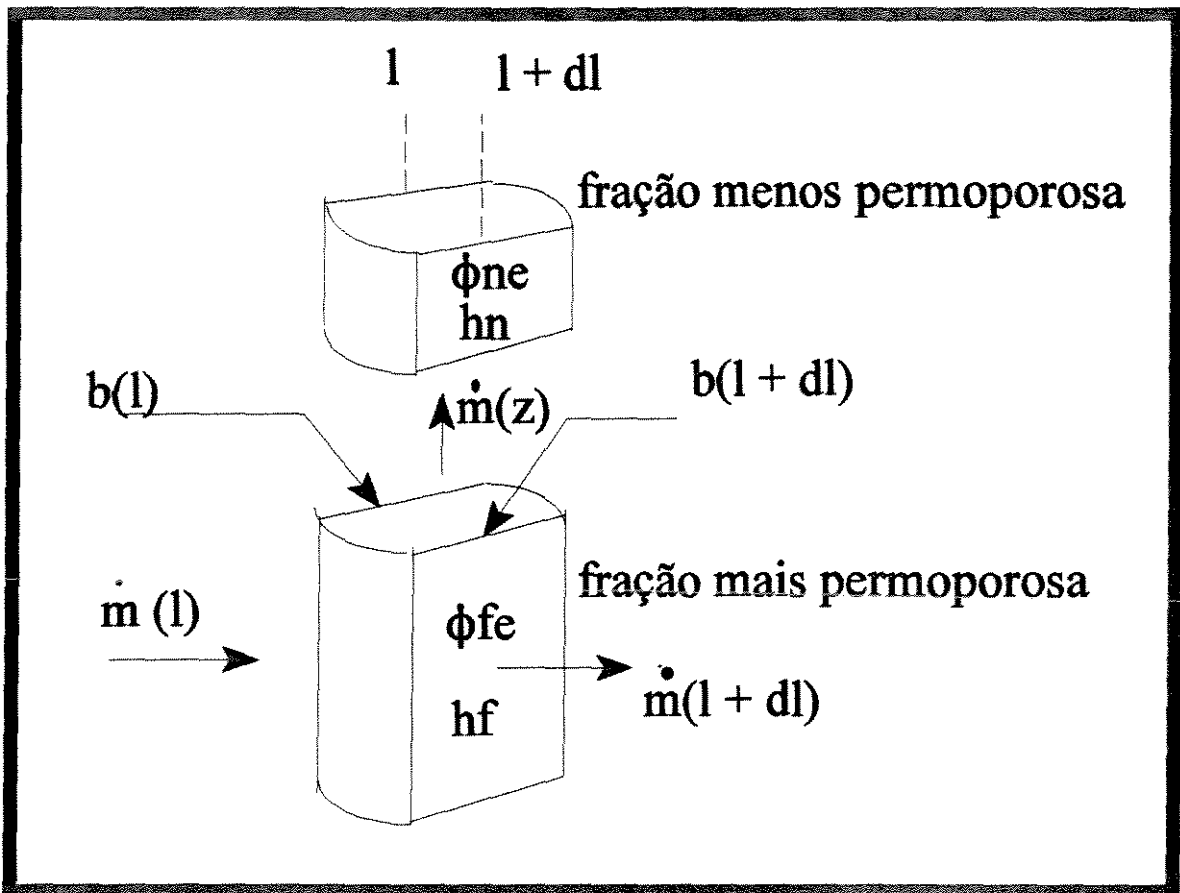


Fig. A.2- Representação esquemática do modelo.

As saturações da fase molhante serão representadas na forma normalizada, dada por:

$$S_f = \frac{S_{wf} - S_{wcf}}{1 - S_{orf} - S_{wcf}}, \quad (\text{A.1})$$

$$S_n = \frac{S_{wn} - S_{wcn}}{1 - S_{or n} - S_{wcn}}. \quad (\text{A.2})$$

A fração volumétrica do meio contínuo é dada por:

$$\omega = \frac{\phi_{fe} h_f}{\phi_{fe} h_f + \phi_{ne} h_n} \quad . \quad (\text{A.3})$$

As porosidades efetivas são definidas como:

$$\phi_{fe} = \phi_f (1 - S_{orf} - S_{wcf}) \quad , \quad (\text{A.4})$$

$$\phi_{ne} = \phi_n (1 - S_{orn} - S_{wcn}) \quad . \quad (\text{A.5})$$

A saturação total da fase molhante é então dada por:

$$S = \omega S_f + (1 - \omega) S_n \quad (\text{A.6})$$

Aplicando a equação da continuidade na fração contínua, obtemos:

$$\left(\dot{m}_l - \dot{m}_{l+\frac{dl}{2}} - \dot{m}_{l-\frac{dl}{2}} \right) dt = \rho_w b \left(l + \frac{dl}{2} \right) h_f dl \phi_{fe} [S_f(t+dt) - S_f(t)] \quad (\text{A.7})$$

No limite,

$$\begin{aligned} dl &\rightarrow 0 \\ e \\ dt &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

tem-se

$$\frac{\partial \dot{m}_l}{\partial l} + \frac{\dot{m}_{zl}^*}{\partial l} = - \rho_w b(l) h_f \phi_{fe} \frac{\partial S_f}{\partial t} \quad (\text{A.9})$$

Repetindo-se o processo para a fração descontínua, obtem-se:

$$\dot{m}_{z1}^* \cdot \frac{dl}{2} dt = \rho_w b(l + \frac{dl}{2}) h_n dl \phi_{ne} [S_n(t + dt) - S_n(t)] \quad (\text{A.10})$$

No limite dado pela Eq. A.8, a Eq. A.10 se torna:

$$\frac{\dot{m}_{zl}^*}{\partial l} = \rho_w b(l) h_n \phi_{ne} \frac{\partial S_n}{\partial t} \quad (\text{A.11})$$

Substituindo a Eq.A.11 na Eq.A.9 ,

$$\frac{1}{h_f \phi_{fe} + h_n \phi_*} \frac{1}{b(l)\rho_w} \frac{\partial \dot{m}_l}{\partial l} + \omega \frac{\partial S_f}{\partial t} + (1 - \omega) \frac{\partial S_n}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.12})$$

como o fluxo mássico na fração contínua é dado por

$$\dot{m}_l = \rho_w q_w \quad (\text{A.13})$$

e

$$q_w(t) = f(S_f) q_r(t) \quad (\text{A.14})$$

obtemos,

$$\frac{q_f(t)}{b(l) h_f \phi_{fe} + h_n \phi_{ne}} \frac{\partial f(S_f)}{\partial l} + \omega \frac{\partial S_f}{\partial t} + (1 - \omega) \frac{\partial S_n}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.15})$$

mas,

$$v_f(l,t) = \frac{q(t)}{b(l) h_f \phi_{fe}} \quad (\text{A.16})$$

então:

$$v_f(l,t) \omega \frac{\partial f(S_f)}{\partial l} + \omega \frac{\partial S_f}{\partial t} + (1 - \omega) \frac{\partial S_n}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.17})$$

Assumindo que o fluxo mássico na fração descontínua seja:

$$\dot{m}_z^* = K \rho_w [b(l) dl (h_n \phi_{ne} + h_f \phi_{fe})] (S_f - S_n) \quad (\text{A.18})$$

Substituindo Eq. A.18 na Eq. A.11

$$(1 - \omega) \frac{\partial S_n}{\partial t} = K (S_f - S_n) \quad (\text{A.19})$$

Definindo as variáveis adimensionais:

$$t_D = \frac{K t}{\omega} \quad (\text{A.20})$$

$$l_D = \frac{K l}{\omega v_r} \quad (\text{A.21})$$

$$v_D(l_D, t_D) = \frac{v_f(l_D, t_D)}{v_r} \quad (\text{A.22})$$

SISTEMA DE EQUAÇÕES NA FORMA ADIMENSIONAL

$$v_D(l_D, t_D) \frac{\partial f(S_f)}{\partial l_D} + \frac{\partial S_f}{\partial t_D} = S_n - S_f \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial S_n}{\partial t_D} = S_f - S_n \quad (\text{A.24})$$

Condição inicial :

$$S_f(l_D, 0) = 0 \quad (\text{A.25})$$

$$S_n(l_D, 0) = 0 \quad (\text{A.26})$$

Condições de contorno:

$$S_f(0, t_D) = 1 \quad (\text{A.27})$$

Onde :

$$a = \frac{\omega}{1 - \omega} \quad (\text{A.28})$$

v_f : velocidade efetiva de injeção

v_r : velocidade efetiva de referência

K : coeficiente de transferência de massa

l_D : posição adimensional

t_D : tempo adimensional

v_D : velocidade adimensional

SOLUÇÃO PELO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

$$\frac{dS_f}{dt_D} = S_n - S_f \quad (\text{A.29})$$

sobre a característica dada por:

$$\frac{dl_D}{dt_D} = v_D(l_D, t_D) f'(S_f) \quad (\text{A.30})$$

e

$$\frac{1}{a} \frac{dS_n}{dt_D} = S_f - S_n \quad (\text{A.31})$$

sobre a característica dada por:

$$\frac{dl_D}{dt_D} = 0 \quad (\text{A.32})$$

Para chegar a expressão da velocidade do choque partiu-se da equação na forma conservativa obtida da substituição das Eqs.A.13 e A.11 na Eq.A.9, obtendo:

$$\frac{\partial[\rho_w q_w(t)]}{\partial l} + \rho_w b(l) h_n \phi_{ne} \frac{\partial S_n}{\partial t} = - \rho_w b(l) h_f \phi_{fe} \frac{\partial S_f}{\partial t} \quad (\text{A.33})$$

Como ρ_w é considerado constante e na frente o termo fonte é zero, a Eq.A.33 pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial[q_w(t)]}{\partial l} + b(l) h_f \phi_{fe} \frac{\partial S_f}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.34})$$

mas,

$$A(l) = b(l) h_f \phi_{fe} \quad (\text{A.35})$$

assim,

$$\frac{\partial[q_w(t)]}{\partial l} + \frac{\partial[A(l) S_f]}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.36})$$

e portanto, a velocidade do choque é dada por:

$$v_{choque} = \frac{\partial l}{\partial t} = \frac{q_w(l^+, t^+) - q_w(l^-, t^-)}{A(l^+)(S_f^+) - A(l^-)(S_f^-)} \quad (\text{A.37})$$

Aplicando a condição inicial, $S_f^+ = 0$, obtem-se:

$$v_{choque} = \frac{\partial l}{\partial t} = \frac{q_w(l^-, t^-)}{A(l^-)(S_f^-)} = \frac{f_w(S_f^-) q(l^-, t^-)}{S_f^- A(l^-)} = \frac{f_w(S_f^-) v_f(l^-, t^-)}{S_f^-} \quad (\text{A.38})$$

Em variáveis adimensionais:

$$v_{choque} = \frac{\partial l_D}{\partial t_D} = \frac{f_w(S_f^-) v_D(l_D^-, t_D^-)}{S_f^-} \quad (\text{A.39})$$

APÊNDICE B - MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

B.1 MODELO UNIDIMENSIONAL

Partindo da equação modificada para vazão variável com o tempo foi utilizado um esquema de diferenças finitas implícito no tempo para resolver o sistema de equações. Como o termo $v_D(t_D)$ depende, para sua avaliação, do cálculo da resistência ao fluxo em cada instante, ele é avaliado no tempo n , e não no tempo $n + 1$. Para simplificar a notação o termo S_f será representado por S .

$$v_D(t_D) \frac{\partial f(S)}{\partial x_D} + \frac{\partial S}{\partial t_D} + S - a \int_0^{t_D} e^{-a(t_D - \tau_D)} S(\tau_D) d\tau_D = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$C.I. \quad S(x_D, 0) = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$C.C.I. \quad S(0, t_D) = 1 \quad (\text{B.3})$$

A integral de convolução foi avaliada usando o algoritmo já utilizado por **Ferreira (1994)**, que resolveu a Eq. B.1 para vazão constante utilizando um esquema explícito no tempo.

$$\int_0^{t_D} e^{-a(t_D - \tau_D)} S(\tau_D) d\tau_D = F(t_D) \quad (\text{B.4})$$

$$F(t_D^{n+1}) = e^{-a \Delta t_D^n} [(S)_i^{n+1} \Delta t_D^n + SUM^{n-1}] \quad (B.5)$$

onde

$$SUM^{n-1} = e^{-a \Delta t_D^{n-1}} [S_i^n \Delta t_D^{n-1} + SUM^{n-2}] \quad (B.6)$$

e

$$SUM^{n-1} = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(\prod_{k=j}^{n-1} e^{-a \Delta t_D^k} \right) S_i^{j+1} \Delta t_D^j \right] \quad (B.7)$$

onde

$$\Delta t_D^k = t_D^{k+1} - t_D^k \quad (B.8)$$

Assim, a equação discretizada fica :

$$\begin{aligned} v_D(t_D)^n \frac{f(S)_i^{n+1} - f(S)_{i-1}^{n+1}}{\Delta x_D} + \frac{(S)_i^{n+1} - (S)_i^n}{\Delta t_D} + (S)_i^{n+1} + \\ - a e^{-a \Delta t_D} (S)_i^{n+1} \Delta t_D - a e^{-a \Delta t_D} SUM^{n-1} = 0 \end{aligned} \quad (B.9)$$

Definindo

$$\alpha = \Delta t_D \Delta x_D a e^{-a \Delta t_D} \quad (B.10)$$

A Eq. B.9 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \Delta t_D v_D(t_D)^n f(S)_i^{n+1} + \Delta x_D (S)_i^{n+1} + \Delta t_D \Delta x_D (S)_i^{n+1} + \\ - \alpha \Delta t_D (S)_i^{n+1} - \Delta t_D v_D(t_D)^n f(S)_{i-1}^{n+1} = \Delta x_D (S)_i^n + \alpha SUM^{n-1} \end{aligned} \quad (B.11)$$

Para $i=1$, temos:

$$\begin{aligned} & \Delta t_D v_D(t_D)^n f(S)_1^{n+1} + \Delta x_D (S)_1^{n+1} + \Delta t_D \Delta x_D (S)_1^{n+1} + \\ & - \alpha \Delta t_D (S)_1^{n+1} - \Delta t_D v_D(t_D)^n f(S)_0^{n+1} = \Delta x_D (S)_1^n + \alpha SUM^{n-1} \end{aligned} \quad (B.12)$$

Para $i=2$, temos:

$$\begin{aligned} & \Delta t_D v_D(t_D)^n f(S)_2^{n+1} + \Delta x_D (S)_2^{n+1} + \Delta t_D \Delta x_D (S)_2^{n+1} + \\ & - \alpha \Delta t_D (S)_2^{n+1} - \Delta t_D v_D(t_D)^n f(S)_1^{n+1} = \Delta x_D (S)_2^n + \alpha SUM^{n-1} \end{aligned} \quad (B.13)$$

Generalizando, temos

$$\begin{bmatrix} g(S_1) \\ & g(S_2) \\ & & g(S_3) \\ & & & \dots \\ & & & & g(S_{n-1}) \\ & & & & & g(S_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + d_1 \\ b_2 + d_2 \\ \dots \dots \dots \\ b_{n-1} + d_{n-1} \\ b_n + d_n \end{bmatrix} \quad (B.14)$$

onde:

$$\begin{aligned} g(S_i) = & \Delta t_D v_D(t_D)^n f(S)_i^{n+1} + \Delta x_D (S)_i^{n+1} + \Delta t_D \Delta x_D (S)_i^{n+1} + \\ & - \alpha \Delta t_D (S)_i^{n+1} \end{aligned} \quad (B.15)$$

$$b_i = \Delta x_D S_i^n + \alpha SUM^{n-1} \quad (B.16)$$

$$d_i = \Delta t_D v_D (t_D)^n f(S)_{i-1}^{n+1} \quad (\text{B.17})$$

Para efeito de cálculo adotou-se a seguinte expressão analítica para o fluxo fracionário

$$f(S) = \frac{c S^2}{c S^2 + (1 - S^2)} \quad (\text{B.18})$$

onde c é um parâmetro que pode auxiliar no ajuste de dados disponíveis. A derivada desta função é

$$f'(S) = \frac{2c S(1 - S)}{[(1 - S)^2 + c S^2]^2} \quad (\text{B.19})$$

A Eq. B.12 torna-se um sistema não-linear de equações que pode ser resolvida pelo método de Newton, desde que se parta da condição de contorno interna em $x_d = 0$, o que permite que se calcule o valor do termo d_1 no tempo $(n+1)$, e assim se obtenha S_1 no tempo $(n+1)$, que permite que se calcule o termo d_2 , e assim por diante...

$$F(S_i^{n+1}) = g(S_i) - b_i - d_i \quad (\text{B.20})$$

$$F'(S_i^{n+1}) = g'(S_i) \quad (\text{B.21})$$

$$g'(S_i) = \Delta t_D v_D (t_D)^n f'(S_i)^{n+1} + \Delta x_D + \Delta t_D \Delta x_D - \alpha \Delta t_D \quad (\text{B.22})$$

$$S_i^{v+1} = S_i^v - \frac{F(S_i)}{F'(S_i)} \quad (\text{B.23})$$

Utilizando um esquema com 2 pontos a montante, teremos:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x_D} \approx \frac{f(S_{i-2}) - 4f(S_{i-1}) + 3f(S_i)}{2\Delta x_D} \quad (\text{B.24})$$

$$d_i = 4 \Delta t_D v_D(t_D)^n f(S)_{i-1}^{n+1} - \Delta t_D v_D(t_D)^n f(S)_{i-2}^{n+1} \quad (\text{B.25})$$

$$b_i = 2 \Delta x_D S_i^n + 2\alpha SUM^{n+1} \quad (\text{B.26})$$

$$g(S_i) = 3\Delta t_D v_D(t_D)^n f(S)_i^{n+1} + 2\Delta x_D (S)_i^{n+1} + 2\Delta t_D \Delta x_D (S)_i^{n+1} + \\ - 2\alpha \Delta t_D (S)_i^{n+1} \quad (\text{B.27})$$

E novamente podemos aplicar o método de Newton para resolver o sistema obtido.

Para a fração menos permo-porosa a equação discretizada fica:

$$\frac{1}{a} \frac{(S_n)^{n+1} - (S_n)^n}{\Delta t_D} = (S)^{n+1} - (S_n)^{n+1} \quad (\text{B.28})$$

B.2 MODELO UNIDIMENSIONAL COM CANAIS DE FLUXO

As principais diferenças do equacionamento do modelo unidimensional com canais de fluxo em relação a equação (B.1) é que o termo $v_D(t_D)$, passa a ser $v_D(l_D, t_D)$ e x_D passa a ser l_D , onde l_D é a posição adimensional sobre a linha de fluxo central do canal de fluxo. O termo $v_D(l_D, t_D)$ representa a velocidade efetiva em um dado ponto da linha de fluxo, obtida pela divisão da vazão pela área porosa efetiva de seção transversal desse ponto. Como foram utilizadas linhas de

fluxo fixas, a velocidade como função da posição é obtida previamente, a partir de um programa que gera a linha de fluxo. Esse termo é então corrigido durante a execução do programa por um termo que leva em conta a resistência ao fluxo como função do tempo, resultando no termo $v_D(l_D, t_D)$.

APÊNDICE C - EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA OBTENÇÃO DAS LINHAS DE FLUXO

A seguir, ilustra-se a obtenção das funções corrente e potencial para linha esconsa a partir de transformação conforme, como utilizado por Abbaszadeh-Dehghani (1982).

O potencial complexo para o fluxo de fluido irrotacional e incompressível em 2 dimensões, pode ser expresso por:

$$\Omega(z) = \Phi(x,y) + i \psi(x,y) \quad (C.1)$$

onde:

$\Omega(z)$: potencial complexo

$\psi(x,y)$: função corrente

$\Phi(x,y)$: função potencial de velocidade

$z = x + iy$

O potencial complexo é uma função analítica e portanto $\Phi(x,y)$ e $\psi(x,y)$ satisfazem a equação de Laplace. As componentes das velocidades do fluido em um ponto qualquer podem ser obtidas a partir das relações de Cauchy-Riemann e a lei de Darcy:

$$v_x(x,y) = \frac{k}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{k}{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (C.2)$$

$$v_y(x,y) = \frac{k}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (C.3)$$

O potencial complexo para uma fonte linear (poço injetor) em um meio infinito, em regime permanente, é dado por:

$$\Omega(z) = v \ln(z) \quad , \quad (C.4)$$

onde v é a força da fonte e z é a distância de um ponto a origem de um sistema de coordenadas posicionado na fonte.

Caso a fonte esteja a uma distância z_0 da origem do sistema de coordenadas, teremos:

$$\Omega(z) = v \ln(z - z_0) \quad . \quad (C.5)$$

Como o potencial complexo satisfaz a equação de Laplace, o princípio da superposição pode ser utilizado para obter o potencial complexo para qualquer combinação de poços produtores e injetores. Supondo os injetores localizados nos pontos a_i e os produtores nos pontos b_j , e representando os produtores com sinal negativo e injetores com sinal positivo, temos:

$$\Omega(z) = \sum_{i=1}^{n_i} v_{a_i} \ln(z - a_i) - \sum_{j=1}^{n_p} v_{b_j} \ln(z - b_j) \quad (C.6)$$

onde n_i é o número de poços injetores e n_p é o número de poços produtores.

Usando a transformação conforme descrita abaixo sobre o plano dado pela Fig. C.1

$$z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} \quad 0 \leq m \leq 1 \quad (C.7)$$

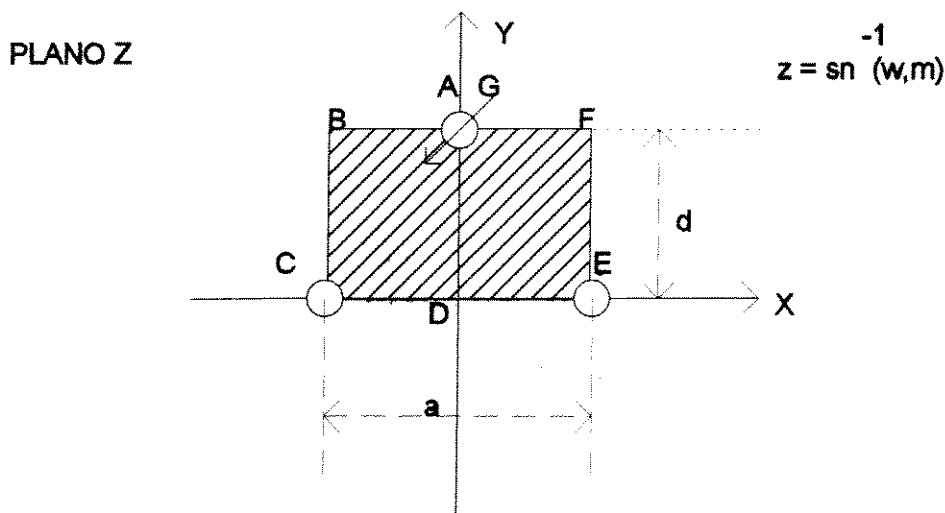


Fig. C.1 - Representação de linha esconsa no plano z

a região hachurada da Fig. C.1 é transformada na metade superior do plano w , conforme ilustrado na Fig. C.2. Os poços injetores são mapeados no infinito e os produtores em $w = 1$ e $w = -1$, e os pontos B e F da Fig. C.1 são mapeados em $-1/\sqrt{m}$ e $1/\sqrt{m}$, respectivamente. Como a integral da Eq. C.7 é a inversa da

função elíptica de Jacobi, $\text{sn}(z,m)$, temos:

$$z = \text{sn}^{-1}(w,m) \quad (\text{C.8})$$

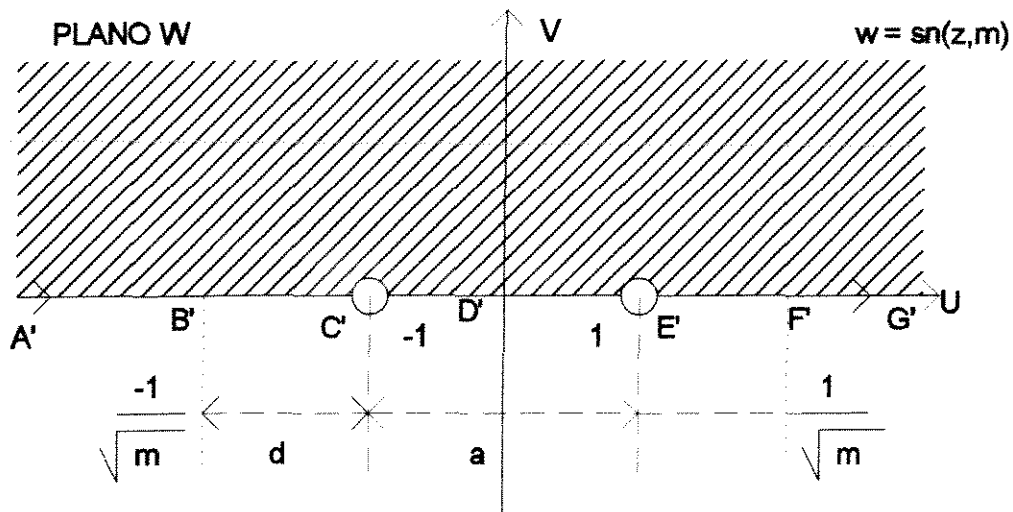


Fig. C.2 - Plano w

Assim ,

$$w = \text{sn}(z,m) \quad (\text{C.9})$$

Aplicando uma nova transformação:

$$\bar{w} = i w \quad , \quad (\text{C.10})$$

o semiplano superior do plano w é agora mapeado no semiplano à esquerda do plano w conjugado, como mostrado na Fig. C.3.

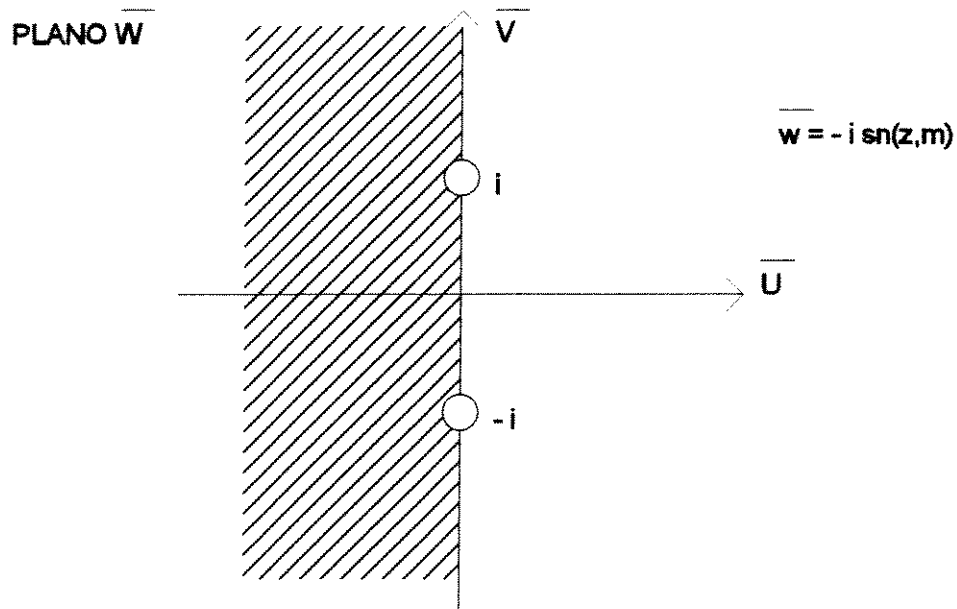


Fig. C3 - Posição dos poços para linha esconsa no plano w conjugado

Os poços produtores estão agora no plano w conjugado em v conjugado $= i$ e $-i$, e os poços injetores continuam no infinito. Esta última transformação por atuar apenas na parte imaginária do potencial, afetou apenas as linhas de corrente. O eixo v conjugado da Fig. C.3 representa uma barreira ao fluxo e pode ser matematicamente removido superpondo uma imagem da metade esquerda do plano w conjugado, ao lado direito do plano. Assim o sistema de poços torna-se equivalente a 2 produtores num meio infinito. Como um quarto de um poço produtor no plano z é mapeado em uma metade de um poço nos planos w e w conjugado, a força de um poço no plano w conjugado é metade da força do poço correspondente no plano z . Assumindo que as forças dos poços sejam unitárias, temos:

$$\Omega(\bar{w}) = -\frac{1}{2} \ln(\bar{w} - i) - \frac{1}{2} \ln(\bar{w} + i) = -\ln\left(\sqrt{\bar{w}^2 + 1}\right) \quad (\text{C.11})$$

Os poços que estão no infinito não contribuem para o potencial complexo.

$$\overline{w} = -i \operatorname{sn}(z, m) \quad (\text{C.12})$$

Substituindo Eq. C.12 na Eq. C.11 e utilizando as propriedades das funções elípticas de Jacobi, $\operatorname{sn}^2(z, m) = 1 - \operatorname{cn}^2(z, m)$, obtemos:

$$\Omega(z) = -\ln [\operatorname{cn}(z, m)] \quad (\text{C.13})$$

O termo $\operatorname{cn}(z, m)$ pode ser expandido por:

$$\operatorname{cn}(z, m) = \operatorname{cn}(x + iy, m) = \frac{\operatorname{cn}(x) \operatorname{cn}(y) - i \operatorname{sn}(x) \operatorname{dn}(x) \operatorname{sn}(y) \operatorname{dn}(y)}{1 - \operatorname{sn}^2(y) \operatorname{dn}^2(x)} \quad (\text{C.14})$$

onde,

$$\operatorname{sn}(x) = \operatorname{sn}(x, m)$$

$$\operatorname{cn}(x) = \operatorname{cn}(x, m)$$

$$\operatorname{dn}(x) = \operatorname{dn}(x, m)$$

$$\operatorname{sn}(y) = \operatorname{sn}(y, m_1)$$

$$\operatorname{cn}(y) = \operatorname{cn}(y, m_1)$$

$$\operatorname{dn}(y) = \operatorname{dn}(y, m_1)$$

são as funções elípticas de Jacobi com parâmetros m e m_1 , sendo $m + m_1 = 1$.

Usando a igualdade dada pela Eq. C.15,

$$\ln (x + iy) = \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2) + i \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (\text{C.15})$$

e a Eq. C.14 na Eq. C.13, temos finalmente:

$$\begin{aligned} \Omega(z) = & -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{cn^2(x) cn^2(y) + sn^2(x) dn^2(x) sn^2(y) dn^2(y)}{1 - sn^2(y) dn^2(x)} \right) \\ & + i \tan^{-1} \left[\frac{sn(x) dn(x) sn(y) dn(y)}{cn(x) cn(y)} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Assim a equação para as linhas de fluxo é dada por:

$$\psi(x,y) = \tan^{-1} [f(x, m) f(y, m)] \quad (\text{C.17})$$

onde:

$$f(x,m) = \frac{sn(x,m) dn(x,m)}{cn(x,m)} \quad (\text{C.18})$$

A Fig.C.4, mostra o sistema de coordenadas e uma representação dos valores das linhas de fluxo calculadas a partir da Eq.C.17 e C.18. Os termos $K(m)$ e $K'(m)$ são as integrais elípticas completas complementar e incomplementar definidas pela Eq.C.7 com $w=1$ e $w=-1$, respectivamente. O quociente, $K'(m)/2K(m) = d/a$, relaciona o parâmetro m a geometria do sistema, por exemplo, para o "five-spot", onde $d/a = 1/2$, $K'(m) = K(m)$.

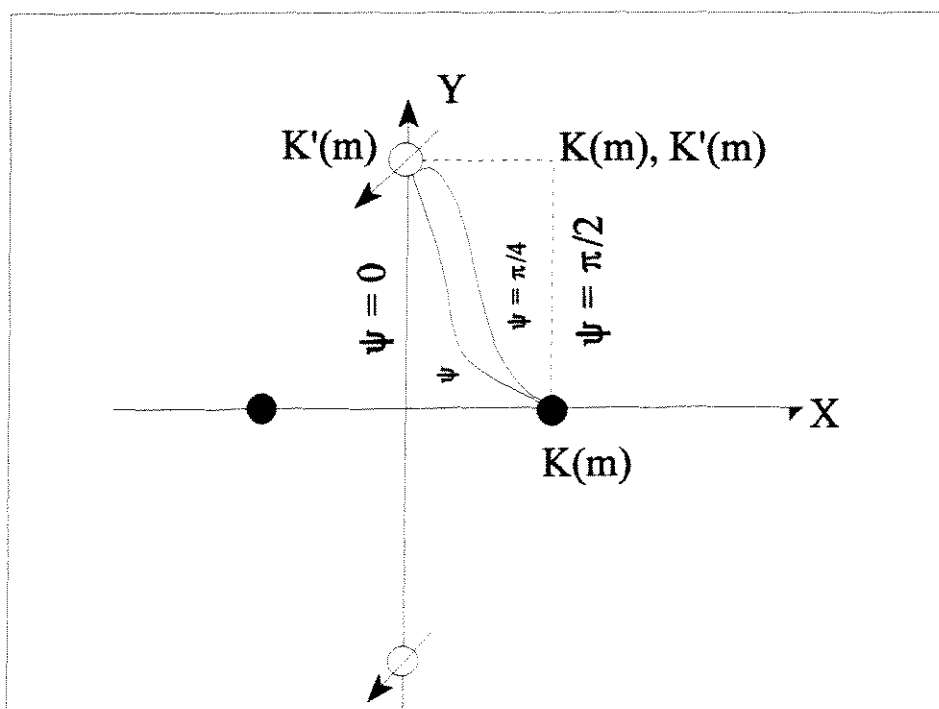


Fig. C.4 - Representação das linhas de fluxo em função de ψ .

Para razão de mobilidade unitária e deslocamento tipo pistão, o fluxo fracionário no poço produtor é dado pela razão entre o ângulo que a linha de fluxo ψ entra no poço produtor e o ângulo total disponível para fluxo, sendo dado por:

$$f_d = 1 - \frac{4 \psi}{\pi} \quad (\text{C.19})$$

e, conseqüentemente,

$$\psi = \frac{\pi}{4} (1 - f_d) \quad (\text{C.20})$$

Para o "five-spot"

$$m = m_1 = 0.5$$

$$\beta = m - m_1 = 0$$

$$K(m) = K'(m) = 1.8540747$$

A geração das linhas de fluxo, a partir das expressões analíticas podem ser feitas da seguinte maneira:

- a) Arbitrar um valor de f_d .
- b) Usando a Eq. C.20 calcular o valor de ψ .
- c) Arbitrar valores de y ou x dentro do domínio dado pela Fig.C.4.
- d) Resolver numericamente a Eq. C.17.
- e) Repetir o processo para outro f_d .

APÊNDICE D - ADIMENSIONALIZAÇÃO DO MODELO DE LINHA DE FLUXO

O potencial para um arranjo qualquer de poços produtores e injetores de vazão q_i posicionados nas coordenadas (x_i, y_i) pode ser obtido utilizando o princípio da superposição por:

$$\Phi(x, y) = \Phi_a - \frac{1}{4 \pi \lambda_o h} \sum_{i=1}^m q_i \ln[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2] \quad (D.1)$$

e as componentes das velocidades do fluido nas direções x e y por:

$$v_x = - \frac{\lambda_o}{\phi_{fe}} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{2 \pi \phi_{fe} h} \sum_{i=1}^m q_i \frac{(x - x_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (D.2)$$

$$v_y = - \frac{\lambda_o}{\phi_{fe}} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{2 \pi \phi_{fe} h} \sum_{i=1}^m q_i \frac{(y - y_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (D.3)$$

Para simplificar a notação somente neste apêndice o subscrito 'D' representará as variáveis adimensionais para o modelo de canal de fluxo e 'Dh', o reservatório heterogêneo

Definindo as variáveis adimensionais:

$$x_D = \frac{x}{L} \quad (D.4)$$

Substituindo as Eqs. D.4 e D.5 em D.1 a D.3, obtemos:

$$\Phi(x_D, y_D) = \Phi_r - \frac{1}{4 \pi \lambda_o h} \sum_{i=1}^m q_i \ln[(x_D - x_{Di})^2 + (y_D - y_{Di})^2] \quad (D.6)$$

onde

$$\Phi_r = \Phi_a - \frac{1}{4 \pi \lambda_o h} \sum_{i=1}^m q_i \ln L^2 \quad (D.7)$$

$$y_D = \frac{y}{L} \quad (D.5)$$

e

$$v_x(x_D, y_D) = \frac{1}{2 \pi \phi_{fe} h L} \sum_{i=1}^m q_i \frac{(x_D - x_{Di})}{(x_D - x_{Di})^2 + (y_D - y_{Di})^2} \quad (D.8)$$

$$v_y(x_D, y_D) = \frac{1}{2 \pi \phi_{fe} h L} \sum_{i=1}^m q_i \frac{(y_D - y_{Di})}{(x_D - x_{Di})^2 + (y_D - y_{Di})^2} \quad (D.9)$$

Definindo o potencial adimensional como:

$$\Phi_D(x_D, y_D) = (\Phi(x_D, y_D) - \Phi_r) \frac{\lambda_o h}{q_r} \quad (D.10)$$

Aplicando a Eq. D.8 em D.6 obtemos:

$$\Phi_D(x_D, y_D) = - \frac{1}{4 \pi} \sum_{i=1}^m \frac{q_i}{q_r} \ln [(x_D - x_{Di})^2 + (y_D - y_{Di})^2] \quad (D.11)$$

Definindo as velocidades adimensionais como:

$$v_{xD}(x_D, y_D) = - \frac{\partial \Phi_D}{\partial x_D} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m \frac{q_i}{q_r} \frac{(x_D - x_{Di})}{(x_D - x_{Di})^2 + (y_D - y_{Di})^2} \quad (D.12)$$

$$v_{yD}(x_D, y_D) = - \frac{\partial \Phi_D}{\partial y_D} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m \frac{q_i}{q_r} \frac{(y_D - y_{Di})}{(x_D - x_{Di})^2 + (y_D - y_{Di})^2} \quad (D.13)$$

Assim a relação entre a velocidade adimensional e a dimensional num dado ponto (x_D, y_D) é dada por:

$$\frac{v_{yD}(x_D, y_D)}{v_y(x_D, y_D)} = \frac{\phi_{fe} h L}{q_r} \quad (D.14)$$

$$\frac{v_{xD}(x_D, y_D)}{v_x(x_D, y_D)} = \frac{\phi_{fe} h L}{q_r} \quad (D.15)$$

ou

$$v_D(x_D, y_D) = \frac{\phi_{fe} h L}{q_r} v(x_D, y_D) \quad (D.16)$$

E o tempo adimensional é dado por:

$$t_D = \frac{q_r t}{\phi h L^2} \quad (D.17)$$

Para o reservatório heterogêneo, podemos definir as seguintes variáveis adimensionais:

$$x_{Dh} = \frac{K x}{\omega v_r} \quad (D.18)$$

$$y_{Dh} = \frac{K y}{\omega v_r} \quad (D.19)$$

e

$$l_{Dh} = \frac{K l}{\omega v_r} \quad (D.20)$$

Comparando as Eqs. D.18 e D.19 com D.4 e D.5, nota-se que escolhendo um v_r apropriado consegue-se fazer com que a geometria do problema adimensionalizado para canal de fluxo seja a mesma utilizada para o reservatório heterogêneo, ou

$$v_r = \frac{K L}{\omega} \quad (D.21)$$

assim,

$$x_{Dh} = x_D \quad (D.22)$$

$$y_{Dh} = y_D \quad (D.23)$$

$$l_{Dh} = l_D \quad (D.24)$$

No equacionamento do problema sobre a linha de fluxo, a velocidade adimensional é dada por:

$$v_{Dh}(x_D, y_D) = \frac{v(x_D, y_D)}{v_r} = \frac{q_r}{\phi_{fe} h L} \frac{v_D(x_D, y_D)}{v_r} \quad (D.25)$$

O tempo adimensional para o modelo de reservatório heterogêneo é definido como:

$$t_{Dh} = \frac{K t}{\omega} \quad (D.26)$$

Comparando a Eq. D.17 e D.26, obtemos a seguinte relação:

$$t_{Dh} = \frac{K \phi_{fe} L^2 h}{\omega q_r} t_D \quad (D.27)$$

Substituindo a Eq. D.21 na D.27, obtemos:

$$t_{Dh} = \frac{v_r \phi_{fe} L h}{q_r} t_D \quad (D.28)$$

Definindo,

$$q_r = v_r \phi_{fe} L h \quad (D.29)$$

Obtêm-se as seguintes igualdades:

$$v_{Dh}(x_D, y_D) = v_D(x_D, y_D) \quad (D.30)$$

$$t_{Dh} = t_D \quad (D.31)$$

Assim utilizando as Eqs. D.21 e D.29, o modelo adimensionalizado para o canal de fluxo pode ser usado para obter as velocidades adimensionais, os fatores de forma e as posições sobre uma linha de fluxo de maneira direta.

APÊNDICE E - OBTENÇÃO DO COEFICIENTE DE DIFUSÃO COMO FUNÇÃO DA SATURAÇÃO DE ÁGUA A PARTIR DA CURVA DE PRESSÃO CAPILAR

O modelo de reservatório heterogêneo utilizado nesta dissertação representa a transferência de massa entre as frações mais e menos permeáveis, devido ao fenômeno de embebição capilar, como função de um coeficiente de transferência de massa constante (K). Quando se utiliza a equação da difusão para representar o processo de embebição capilar, a determinação do coeficiente de difusão se faz necessário. **Reis (1992)** mostrou como se poderia determinar este coeficiente através de ensaios dinâmicos em laboratório, utilizando técnicas de tomografia computadorizada.

Existem modelos na literatura que consideram o coeficiente de difusão constante e outros que o consideram como função da saturação. Este trabalho visa a obtenção do coeficiente de difusão de uma forma mais simples, que poderia servir como uma primeira aproximação desta variável.

Considerando que o ar tenha mobilidade infinita e densidade nula, a equação da continuidade para um processo de embebição vertical (Fig.E.1) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial v_w}{\partial z} + \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = 0 \quad (\text{E.1})$$

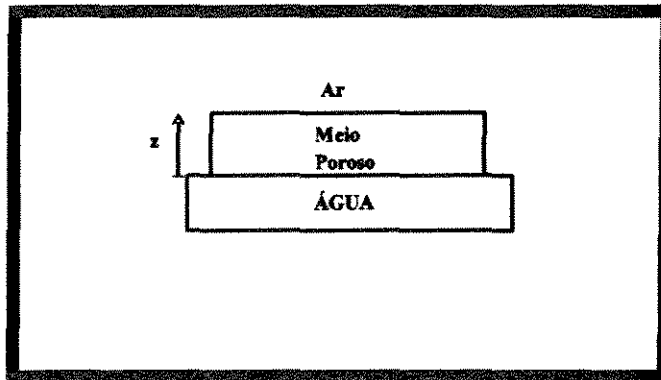


Fig. E.1 - Experimento de embebição vertical

onde v_w é a velocidade resultante da atuação das forças capilar e gravitacional, ou seja:

$$v_w = v_d - v_g, \quad (\text{E.2})$$

$$v_d = - D(S_w) \frac{\partial S_w}{\partial z}, \quad (\text{E.3})$$

$$v_g = - \frac{kk_{rw}}{\mu_w} \gamma_w. \quad (\text{E.4})$$

A Eq. E.1 pode ser simplificada para um tempo infinito, no qual haja um equilíbrio entre as atuações das forças capilares e gravitacionais, pois nesse caso,

$$v_d = v_g, \quad (\text{E.5})$$

$$v_w = 0, \quad (E.6)$$

e assim, temos:

$$D(S_w) = \frac{\frac{kk_{rw}}{\mu_w} \gamma_w}{\frac{\partial S_w}{\partial z}} = \frac{kk_{rw}}{\mu_w} \frac{dP_c}{dS_w}. \quad (E.7)$$

A curva de pressão capilar pode ser considerada representativa de um estado de equilíbrio. Assim, com os dados da curva de pressão capilar, dados da curva de permeabilidade relativa e viscosidade do fluido, podemos obter o coeficiente de difusão em função da saturação.

Para um reservatório real de petróleo, a situação que é normalmente encontrada corresponde àquela de um meio poroso inicialmente preenchido com água, a qual foi expulsa dos poros num processo de drenagem. Se admitirmos que o fluxo se efetua em contracorrente, pode-se proceder de forma análoga a anterior, e encontrar uma expressão para o cálculo do coeficiente de difusão em função da saturação.

A equação da difusão para dois fluidos imiscíveis e incompressíveis que descreve o fluxo em contracorrente é dada (Chen *et al.* 1995) por:

$$\nabla \cdot [D(S_w) \nabla S_w] + \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = 0 \quad (E.8)$$

onde

$$D(S_w) = \frac{kk_{ro}}{\mu_o} f_w \frac{dP_c}{dS_w} , \quad (E.9)$$

$$f_w = \frac{1}{1 + \frac{k_{rw} \mu_o}{k_{ro} \mu_w}} , \quad (E.10)$$

$$D^*(S_w) = \frac{D(S_w)}{\phi} . \quad (E.11)$$

Partindo-se da própria definição de $D(S_w)$, dada pela Eq. E.9, observa-se que se conhecermos os dados de pressão capilar, permeabilidade relativa e viscosidades dos fluidos, poderemos obter o coeficiente de difusão diretamente desta equação.

Beckner *et al.* (1987) utilizando dados obtidos do experimento de Kleppe e Morse, calcularam esses dois tipos de coeficiente de difusão, dados pelas Eqs. E.7 e E.9, cujo resultado pode ser visto na Fig.E.2. Observa-se que a variação com a saturação pode ser considerada pequena neste caso.

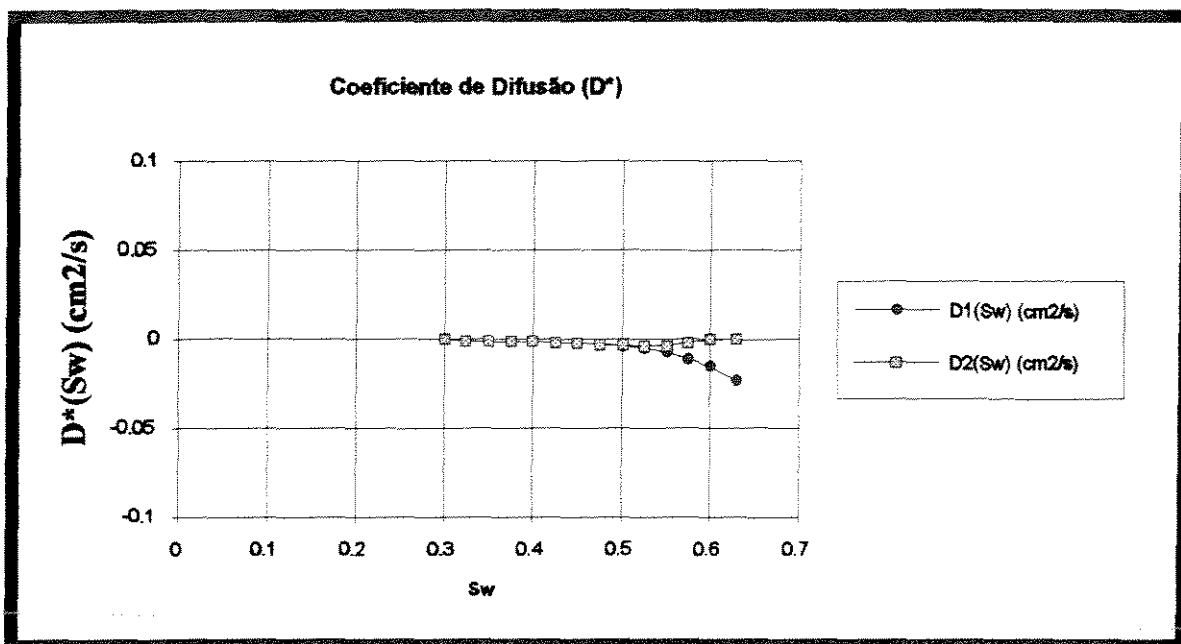


Figura E.2 - Coeficientes de difusão obtidos por Beckner *et al.*(1987).

Utilizando dados obtidos de Reis (1992), para duas amostras de rocha de um reservatório, foram calculados os coeficientes de difusão. O resultado pode ser visto na Fig.E.3. Observa-se que para a amostra RB-395 os valores calculados são mais próximos dos obtidos por Beckner *et al.*(1987).

Uma das dificuldades apresentadas para a obtenção a partir de dados experimentais é o cálculo da derivada da pressão capilar em função da saturação, uma vez que, normalmente não se dispõe de muitos pontos para derivar numericamente. As curvas de permeabilidades relativas obtidas em laboratório, normalmente começam com um valor mais alto que o da saturação de água conata, impossibilitando o cálculo do coeficiente de difusão para valores próximos desta saturação.

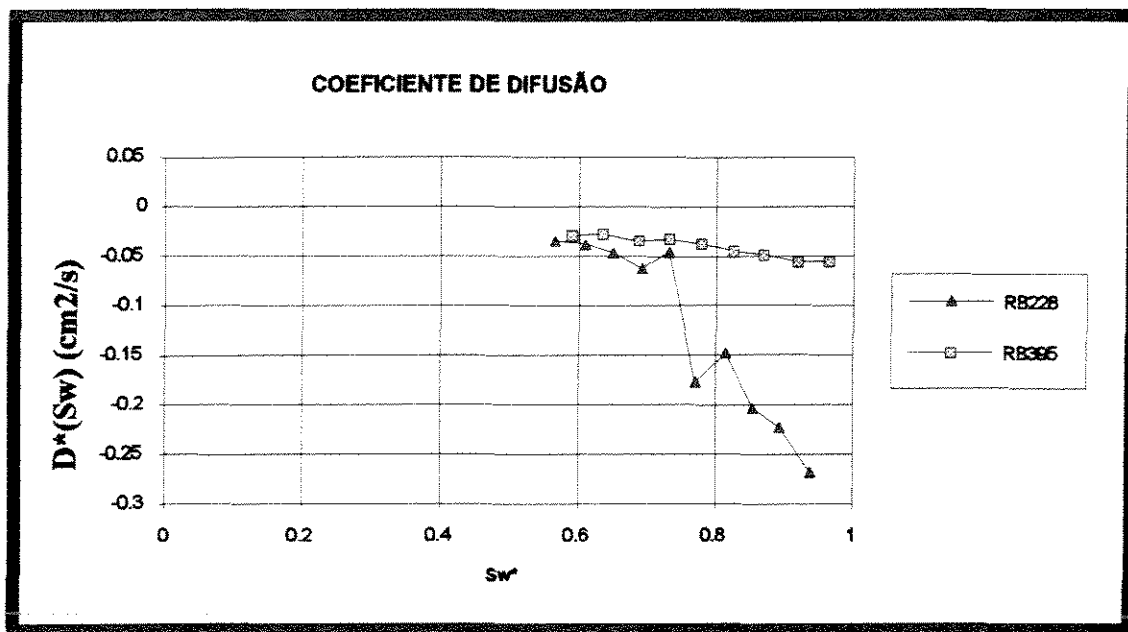


Figura E.3 Coeficiente de difusão obtido a partir de dados de Reis (1992).

Convém lembrar que existem métodos para obtenção da curva de pressão capilar a partir de dados de perfis elétricos corridos nos poços, baseados em correlação multivariada entre a porosidade, permeabilidade e altura em relação ao contato água-óleo. Se considerarmos essa curva como sendo a mais representativa das condições existentes no reservatório, poderíamos utilizá-la para obter o coeficiente de difusão nas condições de reservatório.