

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

MESTRADO EM GEOENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

**EXTENSÃO DA ANÁLISE R/S PARA
CARACTERIZAÇÃO GEOESTATÍSTICA LOCAL E REGIONAL
DE RESERVATÓRIOS DE HIDROCARBONETOS**

Rudolfo Beer

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

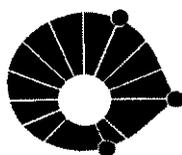
CAMPINAS SÃO PAULO
Julho / 1994

Este exemplar corresponde à
redação final da tese defendida
por Rudolfo Beer e aprovada pela
Comissão julgadora em 12/07/1994.

[Handwritten signature]

[Handwritten text: Comissão Julgadora]

UNICAMP
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

MESTRADO EM GEOENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

**EXTENSÃO DA ANÁLISE R/S PARA
CARACTERIZAÇÃO GEOESTATÍSTICA LOCAL E REGIONAL
DE RESERVATÓRIOS DE HIDROCARBONETOS**

Rudolfo Beer

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências
como requisito parcial à obtenção do título de
Mestre em Geoengenharia de Reservatório

Orientador: Constantino Tsallis

Co-orientador: Cláudio Bettini

CAMPINAS - SÃO PAULO
Julho / 1994



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

UNICAMP

MESTRADO EM GEOENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

EXTENSÃO DA ANÁLISE R/S PARA
CARACTERIZAÇÃO GEOESTATÍSTICA LOCAL E REGIONAL
DE RESERVATÓRIOS DE HIDROCARBONETOS

AUTOR: Rudolfo Beer

ORIENTADOR: Constantino Tsallis

CO-ORIENTADOR: Cláudio Bettini

COMISSÃO EXAMINADORA

PRESIDENTE

Constantino Tsallis, Ph.D

EXAMINADORES

Armando Zaupa Remacre, Ph.D

Osvair Vidal Trevisan, Ph.D.

Campinas, 12 de julho de 1994.

À meus pais.
Para Jussara,
Marcelo e Tatiana.

AGRADECIMENTOS

À PETROBRÁS/DEPEX pela oportunidade de cursar este mestrado, à UNICAMP pelo suporte tecnológico, ao CBPF pela acolhida e facilidades na execução da tese e ao PETROBRÁS/CENPES pela colaboração.

Aos colegas do curso de mestrado, pelo apoio, sugestões e convívio agradável durante o período.

Aos professores e funcionários do IG e DEP da UNICAMP pelo aperfeiçoamento tecnológico e participativo oferecido.

Ao Prof. Dr. CONSTANTINO TSALLIS pela orientação e pelo incentivo sempre presentes em todos os momentos do trabalho.

Ao Dr. CLAUDIO BETTINI pelos comentários e sugestões.

À todos os que direta ou indiretamente colaboraram para a confecção desta tese, em especial a Cezar Joaquim R. da Silva, pelo apoio na confecção de gráficos.



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

MESTRADO EM GEOENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

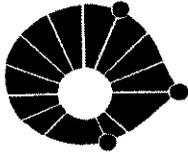
RESUMO

EXTENSÃO DA ANÁLISE R/S PARA CARACTERIZAÇÃO GEOESTATÍSTICA LOCAL E REGIONAL DE RESERVATÓRIOS DE HIDROCARBONETOS

RUDOLFO BEER

A geometria fractal vem sendo utilizada cada vez com maior frequência para caracterizar e descrever os fenômenos geológicos. A sua aplicação se estende desde o ponto de vista microscópico, como análise de lâminas delgadas de rochas, estudos de percolação de fluidos e estudos de características de sedimentação, até o entendimento de processos macroscópicos, como distribuição de padrões de fraturamento para análises tectônicas ou então geração de distribuições de propriedades petrofísicas para estudos de fluxo de fluidos em meios porosos. Este último tópico é o tema principal desta tese. Estudamos as principais propriedades de famílias de funções conhecidas por movimento Browniano fractal (mBf) e ruído Gaussiano fractal (rGf), com vistas à sua utilização para o modelamento de perfis elétricos, acústicos e radioativos de poços, determinando as características destas distribuições a partir da técnica estatística da análise R/S, que fornece o parâmetro H , expoente de Hurst, que caracteriza a intermitência destes processos. Com o valor de H realizamos interpolações estocásticas de propriedades de rochas, estimando valores em pontos não amostrados, que respeitam as características

estruturais expressas nos perfis dos pontos amostrados pelos poços. A malha pode ser refinada para atender às necessidades da simulação de fluxo. O algoritmo utilizado para este fim é uma modificação do processo de adições sucessivas aleatórias proposto por Voss (1988), com a particularidade de condicionar a simulação estocástica aos dados disponíveis. Em seu estágio atual, o algoritmo realiza uma simulação 2-D. Concluimos que as distribuições fractais têm aplicabilidade nos estudos de reservatórios de petróleo e que as técnicas da análise R/S e da simulação estocástica via adições sucessivas aleatórias modificado, em combinação com técnicas geoestatísticas como a variografia e a krigagem, são ferramentas de grande utilidade para a caracterização de propriedades geológicas na escala de simulação de fluxo. A tese está organizada como segue: o primeiro capítulo aborda os principais conceitos de fractais, os métodos de medida da dimensão fractal e algumas aplicações mais recentes na área das geociências; o segundo capítulo trata das propriedades das famílias de funções mBf e rGf; o terceiro capítulo estuda os processos dinâmicos e, em particular, a equação logística, para a calibração da análise R/S, cujas características constituem o tema central do capítulo quarto, que também mostra sua aplicação aos perfis elétricos de poços; no capítulo cinco são apresentados os conceitos de interpolação por krigagem e por simulação estocástica, com sua aplicação para gerar parâmetros petrofísicos em pontos não amostrados dos reservatórios.



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

MESTRADO EM GEOENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ABSTRACT

EXTENDED R/S ANALYSIS FOR LOCAL AND REGIONAL GEOSTATISTICAL CHARACTERIZATION OF HYDROCARBON RESERVOIRS

Rudolfo Beer

The fractal concepts have been increasingly used to characterize and describe geological phenomena. Their applicability extends from the microscopic scale, such as thin section analysis, fluid percolation and sedimentological studies, to the macroscopic scale processes, such as the pattern of fracture distribution for tectonic analysis or generation of petrophysical property distributions to improve the knowledge and simulation of fluid transport in porous media. The latter subject constitutes the main goal of the present thesis. We study the main features of a family of functions, referred to as fractional Brownian motion (fBm) and fractional Gaussian noise (fGn) by Mandelbrot and Van Ness (1968), and use them as a model for wireline well logs run in petroleum reservoirs. These distributions have the property of being statistically well characterized by the parameter H , the Hurst exponent, which measures the intermittency of the process. By using the H value, we are able to perform a stochastic interpolation of rock properties, estimating values of these properties in unsampled points. These estimates preserve the structural features of the well

logs from the sampled points. The interpolation grid can be refined to satisfy the requirements of the fluid flow simulators, minimizing the undesirable aspects of the scaling up procedures. The algorithm implemented in this work is a modification introduced in the so-called successive random additions algorithm, after Voss (1988), which has the peculiarity of conditioning the stochastic simulation to the original data. Another improvement of the algorithm is the ability of controlling the distance of information influence, by means of a parameter β . In the present stage, the code provides 2-D simulations only. We conclude that fractal distributions are suitable for hydrocarbon reservoir studies, and the techniques of R/S analysis and stochastic simulation via generalized successive random additions, combined with geostatistical tools such as variography and kriging, can be used to generate petrophysical property distributions and parameters to feed fluid flow simulators.

ÍNDICE

DEDICATÓRIA	iii
AGRADECIMENTOS	iv
RESUMO	v
ABSTRACT	vii
ÍNDICE	ix
CAPÍTULO I - FRACTAIS	1
I.1 Introdução	1
I.2 Tamanho Característico	2
I.3 Dimensões Fractais	3
I.4 Métodos para Estimar a Dimensão Fractal	6
I.4.1 Contagem de Caixas	7
I.4.2 Relações de Medida Fractal	8
I.4.3 Função de Autocorrelação	10
I.4.4 Função Distribuição de Probabilidade	10
I.4.5 Espectro de Freqüência	11
I.5 Outras Dimensões Fractais	11
I.5.1 Dimensão de Informação de Ordem q	12
I.5.2 Dimensão de Lyapunov	12
I.5.3 Dimensão Espectral	13
I.5.4 Dimensão de Espalhamento	15
I.5.5 Extensões da Dimensão Fractal	15
I.6 Alguns Exemplos Clássicos de Fractais	18
I.6.1 Poeira de Cantor	18
I.6.2 Esponja de Sierpinski	18
I.6.3 Curva de Koch	19
I.7 Aplicações Geológicas de Fractais	20
I.7.1 Medidas de Litoral e Relevo	20
I.7.2 Dimensão Fractal de Rios	21
I.7.3 Estudos de Tectônica e Fragmentação	24
I.7.4 Distribuição de Minérios	26
I.7.5 Petrofísica	26
I.7.6 Perfis Elétricos	30
CAPÍTULO II - MOVIMENTOS ALEATÓRIOS E FRACTAIS	31
II.1 Introdução	31

II.2 Movimento Browniano	32
II.2.1 Movimento Aleatório Unidirecional	32
II.2.2 Propriedade de Mudança de Escala	33
II.3 Movimento Browniano Fractal	36
CAPÍTULO III - SISTEMAS DINÂMICOS	45
III.1 Introdução	45
III.2 Caracterização do Movimento Caótico	47
III.2.1 Expoente de Lyapunov	48
III.2.2 Medida Invariante	51
III.2.3 Função de Correlação	52
III.3 Equação Logística	52
CAPÍTULO IV - ANÁLISE R/S	59
IV.1 Introdução	59
IV.2 Histórico	59
IV.3 Metodologia para Interpretação Gráfica	63
IV.4 Testes de Validade da Lei de Hurst	64
IV.5 Observações quanto à Interpretação Gráfica	68
IV.5.1 Efeito de Transiente Inicial	68
IV.5.2 Efeito de Memória	69
IV.5.3 Efeito de Ciclicidade	75
IV.6 Análise R/S em Perfis de Poços	77
CAPÍTULO V - PROCEDIMENTOS DE INTERPOLAÇÃO	92
V.1 Introdução	92
V.2 Conceitos Fundamentais	93
V.3 Caracterização Estrutural - Variograma e Análise R/S	95
V.4 Interpolação Linear por Krigagem	101
V.5 Simulação Estocástica	105
CONCLUSÕES	114
RECOMENDAÇÕES	115
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	116
TABELAS	122
TABELA 4.1 - Valores de H para cada poço	122
TABELA 4.2 - Valores de A para cada poço	124
TABELA 4.3 - Valores médios de H e A	126
TABELA 4.4 - Valores médios globais para cada curva	128

APÊNDICES	129
A1 Código FORTRAN programa análise R/S	129
A2 Resolução de sistema de krigagem três pontos	132
A3 Resolução de sistema de krigagem quatro pontos	134
A4 Código FORTRAN programa simulação estocástica	136

LISTA DE FIGURAS

FIG 1.1 - Curva de Peano.	4
FIG 1.2 - Curva de Koch recoberta por 7 círculos.	5
FIG 1.3 - Cobertura de uma curva por círculos de mesmo raio.	5
FIG 1.4 - Aproximação da medida de uma linha de costa por segmentos que correspondem ao raio r de círculos.	7
FIG 1.5 - Recobrimento de uma ilha por reticulado de lado r .	8
FIG 1.6 - Recobrimento de um objeto por reticulado.	9
FIG 1.7 - Método de contagem do número de pontos contido no círculo de raio r .	9
FIG 1.8 - Interpretação geométrica do gráfico $f(\alpha) \times \alpha$ mostrando diversas dimensões fractais em função da derivada q .	17
FIG 1.9 - Esquema de construção de Poeira de Cantor.	18
FIG 1.10 - Esquema de formação de uma esponja de Sierpinski.	19
FIG 1.11 - Esquema de construção de uma curva de Koch.	20
FIG 1.12 - Gráfico $r \times N(R)$ para medidas de litoral (a,b,c) e uma comparação com um círculo de raio 8 km (d).	21
FIG 1.13 - Visão esquemática de uma bacia hidrográfica, mostrando o canal principal de comprimento L e a área de drenagem A .	22
FIG 1.14 - Resultados das medições de L e A de Hack.	22
FIG 1.15 - Mapa de parte da bacia hidrográfica do Rio Amazonas.	23
FIG 1.16 - Gráfico $r \times N(r)$ para calcular a dimensão fractal do Rio Amazonas pelo método de contagem de caixas.	23
FIG 1.17 - Modelo teórico para fragmentação de Sammis et al.	25
FIG 1.18 - Dimensão fractal do modelo teórico da FIG 1.17.	25
FIG 1.19 - Distribuição de juntas e fraturas em Yucca Mountain, Nevada.	25
FIG 1.20 - Gráfico para determinação da dimensão fractal da FIG 1.18.	25
FIG 1.21 - Gráfico do Fator de Formação \times Porosidade para dados petrofísicos de dois poços de petróleo.	28
FIG 1.22 - Gráfico $Sw \times I$ para dados petrofísicos de poço de petróleo.	29
FIG 1.23 - Digitação viscosa em ensaios de laboratório de placas de vidro.	29

FIG 2.1 - a) Fractal determinístico; b) fractal estocástico; número de iterações = 5; dimensão fractal = $\ln 3 / \ln 2 = 1,585$.	31
FIG 2.2 - Seqüência de variáveis aleatórias gaussianas independentes com média zero e variância unitária a) passos; b) posição; amostragem a cada t.	35
FIG 2.3 - Seqüência de variáveis aleatórias gaussianas independentes com média zero e variância unitária; a) passos; b) posição; amostragem a cada 4t	35
FIG 2.4 - Evolução do comportamento de $C(S_1, S_2)$ em função de H.	40
FIG 2.5 - Interpolação e extrapolação para mBf com $0 < H < 0,5$ e $0,5 < H < 1$.	41
FIG 2.6 - Influência do valor de H e do tamanho amostral de eventos passados P na diferença entre médias amostrais de eventos futuros F e passados, $\Delta_{F,P}$ com tamanho de memória=10000.	43
FIG 2.7 - Comportamento de $\Delta_{F,P}$ frente a valores diferentes de H e P e com variação de M.	43
FIG 3.1 - Mapa de Hénon-Heiles.	47
FIG 3.2 - Definição de expoente de Lyapunov.	48
FIG 3.3 - Mudança de resolução em um mapa $f(\xi)$.	50
FIG 3.4 - Gráfico $\xi \times f(\xi)$ mostrando um ponto fixo estável.	50
FIG 3.5 - Rota para o caos da equação logística.	55
FIG 3.6 - Evolução do expoente de Lyapunov em função de a para a equação logística.	55
FIG 3.7 - Evolução de $H(z,a)$ em função de a.	55
FIG 3.8 - Evolução de $A(z,a)$ em função de a.	55
FIG 3.9 - Função densidade de estados.	57
FIG 3.10 - Gráfico mostrando a assimetria $M(z)$ vs z.	58
FIG 3.11 - Gráfico mostrando $\langle \xi \rangle(z)$ vs z.	58
FIG 4.1 - Esquema de um reservatório de água mostrando o significado das variáveis para análise R/S.	61
FIG 4.2 - Resultados da análise R/S dos dados de Hurst.	62
FIG 4.3 - Resultados da análise R/S para a simulação do jogo da moeda.	65
FIG 4.4 - Resultado da análise R/S para simulação com viés.	65
FIG 4.5 - Seqüência de valores de $\xi(t)$ para probabilidade = 50%.	66
FIG 4.6 - Resultados de análise R/S para probabilidade = 50% com várias sementes e $\xi(0) = 0$.	66
FIG 4.7 - Resultados de análise R/S para várias probabilidades e uma semente	

de números aleatórios.	67
FIG 4.8 - a) Resultados da análise R/S para a equação logística com $\xi(0) = 1$, Z = 2 e a = 0,000001. b) Seqüência de 200 primeiros valores.	67
FIG 4.9 - Resultados da análise R/S para a equação logística com $\xi(0) = 1$, Z = 2 e a = 2.	68
FIG 4.10 - Influência do transiente inicial para a equação logística.	69
FIG 4.11 - Gráfico de análise R/S com três regiões distintas.	69
FIG 4.12 - a) Resultados da análise R/S para a equação logística com $\xi(0) = 1$, Z = 2 e a = 0,01. b) Seqüência de 200 primeiros valores.	70
FIG 4.13 - a) Resultados da análise R/S para a equação logística com $\xi(0) = 1$, Z = 2 e a = 0,05. b) Seqüência de 200 primeiros valores. c) Resultados da análise R/S para a equação logística com $\xi(0) = 1$, Z = 2 e a = 0,60. d) Seqüência de 200 primeiros valores.	71
FIG 4.14 - a) Resultados da análise R/S para a equação logística com $\xi(0) = 1$, Z = 2 e a = 0,65. b) Seqüência de 200 primeiros valores. c) Resultados da análise R/S para a equação logística com $\xi(0) = 1$, Z = 2 e a = 0,75. d) Seqüência de 200 primeiros valores.	72
FIG 4.15 - a) Resultados da análise R/S para a equação logística com $\xi(0) = 1$, Z = 2 e a = 0,80. b) Seqüência de 200 primeiros valores. c) Resultados da análise R/S para a equação logística com $\xi(0) = 1$, Z = 2 e a = 1,401155. d) Seqüência de 200 primeiros valores.	73
FIG 4.16 - a) Resultados da análise R/S para a equação logística com $\xi(0) = 1$, Z = 2 e a = 1,50. b) Seqüência de 200 primeiros valores. c) Resultados da análise R/S para a equação logística com $\xi(0) = 1$, Z = 2 e a = 2,00. d) Seqüência de 200 primeiros valores.	74
FIG 4.17 - Exemplo de ciclicidade e sub-harmônicas.	75
FIG 4.18 - Exemplo de medidas de altura de ondas do mar.	76
FIG 4.19 - Análise R/S dos dados da FIG 4.18.	76
FIG 4.20 - Dados de altura de ondas do mar normalizados.	76
FIG 4.21 - Análise R/S dos dados da FIG 4.19.	76
FIG 4.22 - a) Evolução de um crossover. b) Evolução do falso valor de H medido sem considerar o crossover.	78
FIG 4.23 - Exemplo de perfis elétricos corridos em poço de petróleo.	79
FIG 4.24 - Seção esquemática mostrando litofácies.	80
FIG 4.25 - Resultados de análise R/S: a) GR; b) ILD; c) DT; d)RHOB; e) NPHI.	81 e 82

FIG 4.26 - Mapa de localização dos poços.	83
FIG 4.27 - Mapa de distribuição de H para a curva GR.	84
FIG 4.28 - Mapa de distribuição de A para a curva GR.	84
FIG 4.29 - Mapa de distribuição de H para a curva ILD.	85
FIG 4.30 - Mapa de distribuição de A para a curva ILD.	85
FIG 4.31 - Mapa de distribuição de H para a média geral.	86
FIG 4.32 - Mapa de distribuição de A para a média geral.	86
FIG 4.33 - Mapa de distribuição de H para a curva DT.	87
FIG 4.34 - Mapa de distribuição de A para a curva DT.	87
FIG 4.35 - Mapa de distribuição de H para a curva NPHI.	88
FIG 4.36 - Mapa de distribuição de A para a curva NPHI.	88
FIG 4.37 - Mapa de distribuição de H para a curva RHOB.	89
FIG 4.38 - Mapa de distribuição de A para a curva RHOB.	89
FIG 4.39 - Mapa de distribuição de H para a média de porosidades.	90
FIG 4.40 - Mapa de distribuição de A para a média de porosidades.	90
FIG 4.41 - Mapa do topo do marco cinza vulcânica.	91
FIG 5.1 - Exemplo teórico de variograma mostrando comportamento na origem.	97
FIG 5.2 - Exemplo teórico de variograma com patamar.	97
FIG 5.3 - Variograma experimental de uma curva de perfil.	99
FIG 5.4 - a) Exemplo de krigagem com três pontos conhecidos; b) detalhe para $H < 0,5$; c) detalhe para $H > 0,5$.	103
FIG 5.5 - a) Exemplo de krigagem com quatro pontos conhecidos; b) detalhe para $H < 0,5$; c) detalhe para $H > 0,5$.	104
FIG 5.6 - Simulação estocástica pelo algoritmo de Voss.	107
FIG 5.7 - Variogramas da simulação estocástica.	107
FIG 5.8 - a) Simulação estocástica pelo 1º algoritmo proposto com 3 pontos conhecidos e $H = 0,5$; b) $H = 0,8$.	109
FIG 5.9 - Simulação estocástica pelo 2º algoritmo proposto com 3 pontos conhecidos, $H = 0,8$ e $t^* = 10$.	111
FIG 5.10 - Simulação estocástica pelo 2º algoritmo proposto com 3 pontos conhecidos, $H = 0,5$ e $t^* = 10$.	111
FIG 5.11 - Exemplo de interpolação estocástica com perfis teóricos.	112
FIG 5.12 - Exemplo de interpolação estocástica com perfis reais.	113

CAPÍTULO I - FRACTAIS

I.1 INTRODUÇÃO

O termo fractal foi introduzido por Mandelbrot em 1975, para designar uma nova geometria de formas fracionárias, comumente encontradas na natureza, cuja descrição pela geometria euclidiana tradicional não mostrava resultados satisfatórios.

As aplicações práticas nas áreas das geociências são frequentes, como por exemplo, a medida do litoral de países ou continentes, a extensão de rios e redes de drenagem, a caracterização de superfícies topográficas, a representação de cadeias de montanhas, para citar aspectos macroscópicos, ou então, a caracterização de meios porosos, percolação de fluidos e outras aplicações no âmbito microscópico.

Para estudos geológicos de reservatórios de petróleo, um dos problemas de mais difícil solução é a transferência de informações entre as diversas escalas de trabalho.

A teoria dos fractais pode vir a contribuir para a descrição e o entendimento destes fenômenos, uma vez que dispõe de ferramentas para estudar as relações geométricas em diferentes escalas de observação. Através delas pode-se entender melhor como o comportamento de um processo na escala microscópica pode influenciar no comportamento macroscópico.

O entendimento humano a respeito dos fenômenos naturais é feito a partir de modelos teóricos, que devem levar em consideração a geometria de partículas que variam de tamanho desde a escala subatômica até a escala do universo.

Em cada campo da ciência houve a tendência a desenvolver conceitos adaptados e utilizados de forma intuitiva e corriqueira por seus pesquisadores. Os conceitos da geometria euclidiana como linhas, círculos, esferas e tetraedros, constituíram uma primeira aproximação para o problema.

A definição de fractal é muito controversa. O próprio Mandelbrot(1983) tentativamente apresenta a seguinte definição: "Fractal é um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch é maior que a dimensão topológica".

Como esta conceituação envolve a definição prévia de conjunto e das dimensões topológica e de Hausdorf-Besicovitch, que por sua vez encerram certo formalismo matemático, foi proposta por Mandelbrot (1986) uma definição mais simples e de mais fácil comprovação experimental: "Um fractal é uma forma constituída por partes similares ao todo de alguma maneira".

Um fractal conserva atributos morfológicos em qualquer escala de observação, ou seja, o fractal deve apresentar invariância por escala, o que constitui uma propriedade de grande utilidade, em particular em estudos de processos naturais e fenômenos geológicos.

Para considerar uma distribuição de frequência de tamanhos como fractal, requer-se que o número de objetos maiores que um determinado tamanho característico (escala) tenha uma dependência segundo uma lei de potência com o tamanho (escala) (Turcotte, 1992).

Vários modelos de distribuições estatísticas são utilizados para descrever os fenômenos geológicos, entre os quais o normal e o lognormal, amparado por teorema de limite central, para o caso de eventos estatisticamente independentes. As distribuições de lei de potência, entretanto, são as únicas que não possuem um tamanho característico, o que permite sua utilização em fenômenos invariantes por escala. Esta invariância provê a base racional para a sua aplicabilidade (Turcotte, 1992).

1.2 - TAMANHO CARACTERÍSTICO

Todas as formas conhecidas da natureza apresentam um tamanho característico, como por exemplo, uma esfera é caracterizada pelo seu raio e uma pessoa pela sua altura.

As formas artificiais também podem ser aproximadas normalmente por tamanhos característicos como, por exemplo, o pneu de um automóvel representado pela medida de seu aro.

Os objetos que apresentam tamanho característico via de regra têm contornos suaves, o que permite sua representação por meio de figuras geométricas simples.

Quando a rugosidade da forma geométrica aumenta progressivamente, é cada vez mais

difícil representá-la por meio de uma ou poucas figuras geométricas simples combinadas. Há a necessidade de se introduzirem novos conceitos de tamanho característico para poder representar estas formas. Como exemplo, temos as nuvens que, por sua complexidade, dificilmente serão bem representadas por figuras geométricas simples.

Uma consequência importante do fato de as formas com tamanho característico serem suaves é que elas não perdem as propriedades para suavizações em escalas menores que este tamanho. Com isto, pode-se aplicar o cálculo diferencial nestas formas.

Já no caso de fractais não se pode traçar uma tangente à sua curva, porque a rugosidade está presente até em escalas infinitesimais. Por isto, nenhuma forma fractal pode ser diferenciável, uma vez que a invariância por escala assegura que as irregularidades em escala macroscópica são reproduzidas em qualquer escala menor (Takayasu, 1990). Podemos incorrer em erros grosseiros ao provocar a suavização em uma determinada escala, negligenciando as escalas menores e aplicando o cálculo diferencial.

A invariância por escala é caracterizada por novas medidas denominadas dimensões fractais. Dentre elas, a mais frequentemente usada é a dimensão de Hausdorff.

I.3 - DIMENSÕES FRACTAIS

O nosso conceito intuitivo de dimensão é o de que ela toma valores numéricos inteiros, que coincidem com os graus de liberdade, definidos pelo número de variáveis independentes do sistema (Takayasu 1990). O espaço euclidiano especifica-se por esse tipo de dimensão.

Assim, uma linha é um espaço unidimensional, onde um ponto é representado por um único valor real. Um plano é um espaço bidimensional, onde um ponto é representado por dois valores reais.

A dimensão definida de acordo com os graus de liberdade pode, no entanto, conduzir a erros. Um exemplo é a estranha curva da FIG. 1.1, conhecida como de Peano, desenhada sem levantar a ponta do lápis e que preenche totalmente um plano. Um ponto nesta curva, como em qualquer curva, pode ser caracterizado por um valor real. Portanto, como a curva de Peano

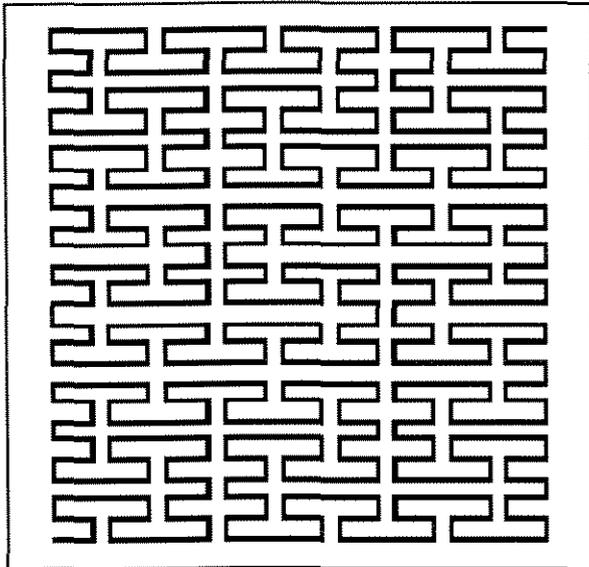


FIG 1.1 - Curva de Peano.

preenche o plano, um ponto no plano também pode ser representado por um valor real, fato que contradiz a definição empírica, dada por dois valores reais.

O conceito de dimensão deve ser revisto, recebendo uma nova definição, para englobar o conceito de similaridade.

Se tomarmos uma forma geométrica e a dividirmos em a^D pedaços similares de tamanho $1/a$, podemos dizer que o expoente D

corresponde à dimensão, que recebe o nome de dimensão de similaridade.

Sua feição mais interessante é a de que não necessariamente ela é um número inteiro. Neste caso D passa a ser uma dimensão fractal. Se tivermos b formas similares de tamanho $1/a$, então a dimensão de similaridade (D_s) será:

$$D_s = \frac{\ln b}{\ln a} \quad (1.1)$$

A dimensão de similaridade pode ser interpretada como um índice de complexidade da forma geométrica, no sentido de que as dimensões maiores descrevem formas mais complexas que as dimensões menores.

Um inconveniente da dimensão D_s é que ela só é definida para objetos que possuam similaridade em senso estrito, o que nem sempre se verifica para as formas encontradas na natureza.

Este contratempo pode ser superado com a definição de uma generalização da dimensão acima, conhecida por dimensão de Hausdorff, em homenagem a este estudioso, do início do século.

Sua definição intuitiva é bastante simples, obtida pelo método de recobrimento da superfície fractal (E) por meio de esferas de raios $r_1, r_2, \dots, r_k < \epsilon$, de modo que a medida D -

dimensional de Hausdorff é dada por:

$$M_D(E) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \min_{r_k < \epsilon} \sum_k r_k^D \quad (1.2)$$

A dimensão de Hausdorff D_H é obtida quando a medida dada por 1.2 é zero. Pode-se provar que ela é única e definida para qualquer tipo de fractal (Takayasu, 1990). O cálculo rigoroso desta dimensão é geralmente muito difícil.

Como exemplo temos uma curva de Koch, definida em 1.6.3, recoberta por $k=7$ círculos (FIG. 1.2).

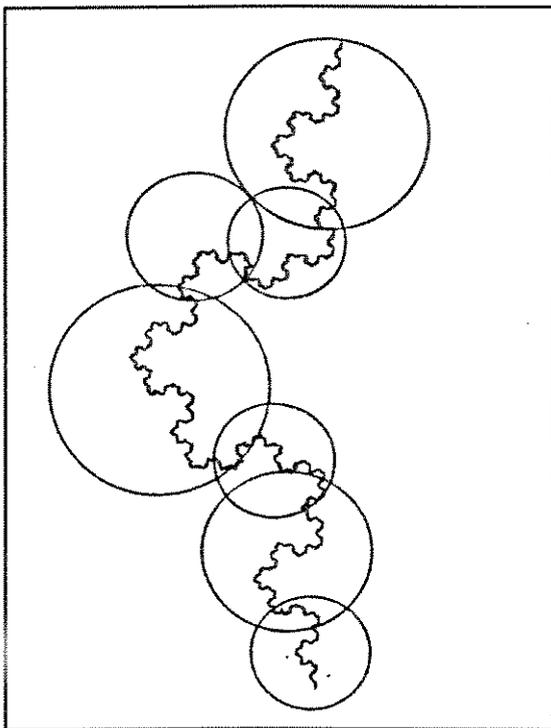


FIG 1.2 - Curva de Koch recoberta por 7 círculos, adaptado de Takayasu, 1990.

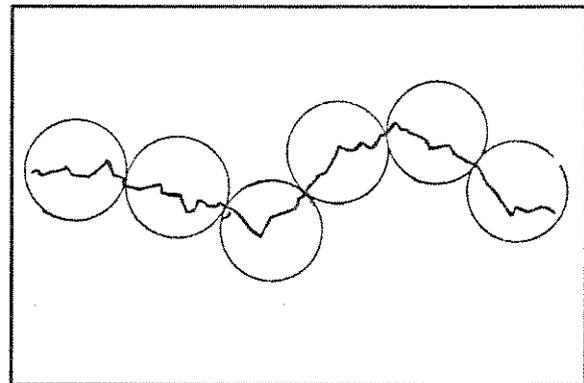


FIG 1.3 - Cobertura de uma curva com círculos de mesmo raio.

Outra dimensão baseada no mesmo princípio da anterior, porém com aplicabilidade prática maior, é a dimensão de capacidade (D_c), introduzida por Kolmogorov (1959).

Para a D_c o recobrimento da superfície do fractal se faz com esferas de mesmo raio r (FIG 1.3), de modo que:

$$D_c \equiv \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln (1/r)} \quad (1.3)$$

onde $N(r)$ é o número mínimo de esferas.

Para r suficientemente pequeno temos que:

$$N(r) \propto (1/r)^{D_c} \quad (1.4)$$

Neste caso, no limite $r \rightarrow 0$, a medida diverge se $D < D_c$ e converge para $D > D_c$.

Normalmente se observa que $D_c \geq D_H$.

Em casos práticos da física, entretanto, as duas dimensões acima estão definidas para $r \rightarrow 0$, o que implica em comprimento igual a zero, que não representa um conceito físico segundo o princípio da incerteza (Takayasu, 1990). Isto provoca um limite inferior no conceito de dimensão. Por outro lado, para cada problema físico há um limite superior acima do qual a invariância por escala não se mantém, tendo-se que adaptar o conceito de dimensão para este fato.

Estes limites inferior e superior são importantes porque servem como restritores e podem impedir que as grandezas físicas medidas neste intervalo sejam divergentes.

As dimensões obtidas por diferentes métodos de medida podem não ser exatamente iguais. Para manter o rigor, devemos distinguir cada dimensão com seu nome. Na maioria dos problemas envolvendo objetos naturais, sabe-se que as diferenças entre as medidas são pequenas quando comparadas ao erro de observação (Takayasu, 1990). Devido a isto, podemos designar a dimensão fractal genericamente, sem distinção do método de medição, entendendo-se por dimensão fractal toda dimensão que pode tomar valores fracionários.

1.4 - MÉTODOS PARA ESTIMAR A DIMENSÃO FRACTAL

Vários métodos práticos para estimar a dimensão fractal foram desenvolvidos, podendo ser agrupados em pelo menos cinco categorias distintas:

- a) contagem de caixas;
- b) utilização das relações de medida fractal;
- c) utilização da função de correlação;
- d) utilização da função distribuição de probabilidade;

e) utilização do espectro de frequência.

1.4.1 - CONTAGEM DE CAIXAS

Este método consiste em aproximar uma forma fractal a partir de formas geométricas com medida característica bem definida, como por exemplo, círculos, quadrados ou células.

Para cada tipo de problema a técnica de medição é diferente. Assim, para formas do tipo linha de costa, definimos um tamanho de raio r e, a partir de uma extremidade, recobrimo-la com círculos de raio r (FIG. 1.4). Cada interseção do círculo com a linha será o novo ponto de centro para o segmento de reta seguinte. Fazem-se várias medições, mudando-se o comprimento r e

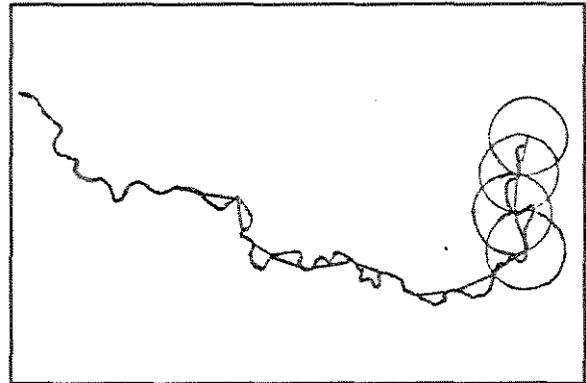


FIG 1.4 - Aproximação da medida de uma linha por segmentos que correspondem ao raio dos círculos, adaptado de Takayasu, 1990.

contando-se o número total de segmentos necessários para o recobrimento ($N(r)$).

Para situações onde o número de segmentos obedece à relação:

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (1.5)$$

definimos D como sendo a dimensão fractal da linha.

Esta técnica é usualmente empregada para medir linhas de costa ou gráficos de trajetórias aleatórias.

Uma variante deste método, com maior aplicabilidade e facilidade computacional, consiste em dividir um certo espaço em quadrados ou cubos de lado r e então contar o número de quadrados ou cubos que contém pelo menos um ponto do objeto a ser medido (FIG. 1.5). Novamente são efetuadas várias medições variando-se o tamanho de r , de forma que a relação 1.5 deva ser satisfeita para que D represente uma dimensão fractal.

Esta técnica pode ser utilizada em medidas de figuras complicadas como rios com muitos canais distributários ou imagens microscópicas.

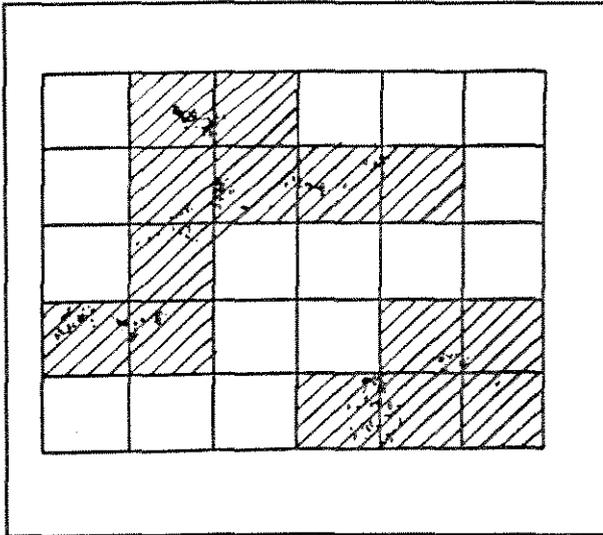


FIG 1.5 - Recobrimento de um espaço por quadrados de lado r , adaptado de Takayasu, 1990.

Outra extensão da técnica é a medição da dimensão de informação, especialmente destinada a distribuições estocásticas de pontos. Como acima, o espaço é dividido em formas geométricas de tamanho característico r , medindo-se a probabilidade $P_i(r)$ de um ponto escolhido ao acaso estar contido na célula i .

Define-se a informação $I(r)$ como sendo:

$$I(r) = -\sum_i P_i(r) \ln P_i(r) \quad (1.6)$$

onde:

$$\sum_i P_i(r) = 1 \quad (1.7)$$

Quando variamos o comprimento r , a informação $I(r)$ varia segundo:

$$I(r) = I(0) - D_I \ln r \quad (1.8)$$

onde D_I é a dimensão de informação.

1.4.2 - RELAÇÕES DE MEDIDA FRACTAL

Nos objetos geométricos não fractais observa-se uma relação entre o comprimento do lado (L), área superficial (A) e volume (V), de modo que, caso multipliquemos o comprimento por um fator k , a $A^{1/2}$ e o $V^{1/3}$ também se multiplicam pelo mesmo fator.

Para o caso de termos uma quantidade U que incrementa em 2^D vezes quando multiplicamos o seu comprimento por 2 , podemos dizer que ela é D -dimensional, satisfazendo a

seguinte relação:

$$L \propto A^{1/2} \propto V^{1/3} \propto U^{1/D} \quad (1.9)$$

Uma técnica para efetuar esta medida, para o caso de objetos do tipo linha de costa, consiste em recobrir o objeto com um reticulado cartesiano com lado tão pequeno quanto possível, contar o número de quadrados atravessados pela linha e o número de quadrados em branco inscritos nos quadrados interceptados por linhas (FIG. 1.6). Estes números são proporcionais ao comprimento e à área da figura. Deve-se repetir o procedimento

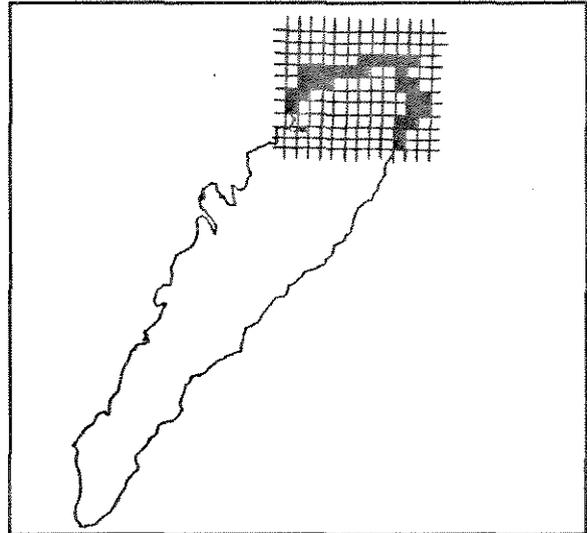


FIG 1.6 - Recobrimento de uma ilha por reticulado, adaptado de Takayasu, 1990.

em objetos semelhantes e de tamanhos diferentes, sem mudar o comprimento do lado do retículo.

Se obtivermos uma relação do tipo:

$$A^{1/2} \propto U^{1/D} \quad (1.10)$$

teremos que a dimensão fractal do objeto é D. Esta técnica difere do método 1.4.1 por se manter o tamanho constante e menor possível do reticulado.

Para um conjunto de pontos distribuídos no espaço, podemos definir a dimensão traçando uma esfera de raio r (FIG. 1.7) e contando o número de pontos incluídos na esfera (M(r)). Para uma distribuição D-dimensional temos que:

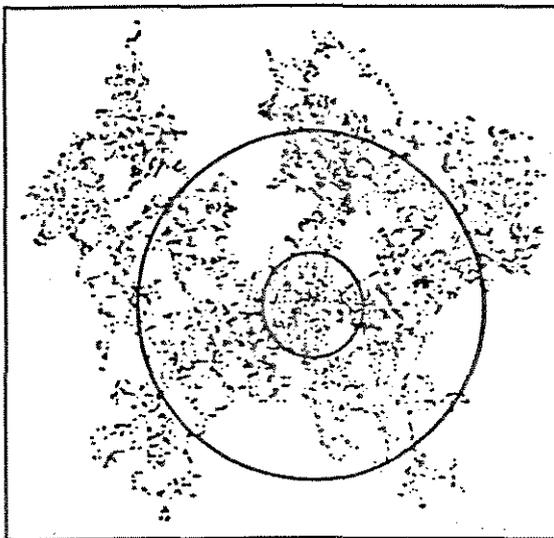


FIG 1.7 - Método de contagem do número de pontos contidos no círculo de raio r, adaptado de Takayasu, 1990.

$$M(r) \propto r^{-D} \quad (1.11)$$

A principal dificuldade para este método é a escolha do centro da esfera. Uma vez que

o cálculo de valores médios a partir de mudanças na posição do centro, bem como, a própria escolha do tipo de média podem conduzir a resultados diferentes, recomenda-se posicionar o centro da esfera no centro de massa da distribuição (Takayasu, 1990).

I.4.3 - FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO

Para distribuições com caráter fractal a função de autocorrelação segue uma lei de potência, sem ter medida característica, com a correlação diminuindo com o aumento da distância r segundo uma taxa constante (Takayasu, 1990).

Nos casos onde se observa a proporcionalidade:

$$C(r) \propto r^{-\alpha} \quad (1.12)$$

podemos dizer que a autocorrelação diminui de um fator 2^α quando a distância aumenta 2 vezes.

A relação entre o expoente α e a dimensão fractal D é dada por:

$$D = d - \alpha \quad (1.13)$$

onde d é a dimensão euclidiana do espaço. Esta relação pode ser obtida integrando-se a massa $M(r)$ do método da esfera do item anterior, que pela definição de $c(r)$ temos:

$$M(r) = \int_{|s| < r} ds c(s) / P(0) \propto r^{d-\alpha} \quad (1.14)$$

Comparando 1.14 com 1.11 chegamos a 1.13.

I.4.4 - FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

Admitimos que $P[X > r]$ seja a probabilidade de um objeto ter tamanho maior que um valor r . Esta probabilidade está associada com a função densidade de probabilidade $p(r)$ por:

$$P[X > r] = \int_r^\infty p(s) ds \quad (1.15)$$

Quando provocamos uma mudança de escala, transformamos r para $b.r$. O caráter fractal da distribuição estabelece a invariância por escala para qualquer valor positivo b , de modo

que:

$$P[X > r] \propto P[bX > br] \quad (1.16)$$

A única forma funcional que satisfaz 1.16 é a lei de potência onde:

$$P[X > r] \propto r^{-D} \quad (1.17)$$

O expoente **D** pode ser considerado como sendo a dimensão fractal nos casos em que **r** representa uma medida unidimensional (comprimento). Em outras situações, **D** é apenas um parâmetro que caracteriza a distribuição.

I.4.5 - ESPECTRO DE FREQUÊNCIA

Podemos obter um espectro de frequência ao estudar as feições estatísticas de processos aleatórios espaciais ou temporais. Caso o caráter apresentado seja fractal, podemos determinar a sua dimensão.

Em analogia com o método de I.4.1, quando mudamos o limite superior de frequência de observação, o qual indica as frequências desprezadas acima de uma frequência crítica (f_c), o espectro do sinal fractal deve permanecer invariante.

O único espectro que mantém esta propriedade é novamente o de lei de potência:

$$S(f) \propto f^{-\beta} \quad (1.18)$$

A relação entre o expoente β e a dimensão fractal **D** do gráfico do sinal fractal é:

$$\beta = 5 - 2D \quad (1.19)$$

onde $1 < D < 2$. A partir da equação 1.13, com $d = 2$, e da definição do espectro de potência dado por 1.18, pode-se estabelecer que $\beta = 2H + 1$ (Turcotte, 1992), obtendo-se 1.19.

I.5 - OUTRAS DIMENSÕES FRACTAIS

Além das dimensões fractais citadas anteriormente (similaridade, Hausdorff, capacidade e informação), podem ser definidas outras dimensões fractais, algumas com aplicabilidade restrita.

I.5.1 - DIMENSÃO DE INFORMAÇÃO DE ORDEM q

Constitui uma extensão da dimensão de informação, cuja expressão é:

$$D_q = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{I_q(r)}{\ln(1/r)} \quad (1.20)$$

onde: I_q = informação de Renyi de ordem q ,

r = aresta de um cubo unitário.

Para definir I_q supomos um conjunto de pontos distribuídos aleatoriamente em um espaço d -dimensional, dividindo-se este espaço em cubos de aresta r . Definindo P_i como sendo a probabilidade de um ponto pertencer ao cubo i e assumindo arbitrariamente um número positivo q , podemos dizer que:

$$I_q(r) = -\frac{1}{1-q} \ln \sum_i P_i^q \quad (1.21)$$

Para o caso particular de $q = 1$, a expressão 1.21 reproduz a entropia clássica de Shanon (1.6) e D_1 coincide com D_1 .

Quando q tende a 0_+ , a dimensão D_0 iguala-se à D_c .

Outra possibilidade consiste em substituir 1.21 pela entropia generalizada de Tsallis, onde:

$$S_q = \frac{1 - \sum_i P_i^q}{q-1} \quad (1.22)$$

conforme descrito em Tsallis (1988), Evaldo e Tsallis (1991) e Alemany e Zanette (1994).

Esta generalização da dimensão de informação vem sendo muito estudada em distribuições do tipo multifractal (Takayasu, 1990), conforme será visto em I.5.5.

I.5.2 - DIMENSÃO DE LYAPUNOV

Várias equações diferenciais de primeira ordem não-lineares apresentam soluções que não convergem para um ponto fixo no limite $t \rightarrow \infty$. A solução pode se manter em uma região de tamanho finito, cuja órbita é chamada de atrator (ver CAP. III). Quando possuem aspectos de

auto-similaridade, estes atratores são fractais (Takayasu, 1990).

Podemos calcular a dimensão fractal através dos métodos expostos em 1.4, como por exemplo o de contagem de caixas, porém não se encontrou ainda uma fórmula para calcular diretamente a dimensão fractal de um sistema dinâmico.

Uma fórmula indireta para a determinação da dimensão é por meio dos expoentes de Lyapunov (λ_α). Se tivermos dois pontos alinhados segundo uma direção α separados pela distância $L_\alpha(t)$ no tempo t e $L_\alpha(t+\tau)$ no tempo $t+\tau$, então podemos definir o expoente de Lyapunov como sendo:

$$\lambda_\alpha \equiv \frac{1}{\tau} \left\langle \ln \frac{L_\alpha(t+\tau)}{L_\alpha(t)} \right\rangle \quad (1.23)$$

onde $\langle \rangle$ representa médias sobre várias observações.

Valores positivos de λ_α indicam que os pontos estão se separando exponencialmente e valores negativos indicam aproximação exponencial. O subscrito α representa a direção e precisamos de um valor de α para cada grau de liberdade.

Para um espaço d-dimensional, precisamos de j expoentes de Lyapunov $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j$, de modo que a dimensão fractal seja:

$$D = j - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j}{\lambda_j} \quad (1.24)$$

onde o subscrito j é o menor número inteiro que torna λ negativo.

Esta dimensão fractal (1.24) é conhecida como dimensão de Lyapunov ou Kaplan-Yorke e, de modo geral, coincide com a dimensão de informação.

1.5.3 - DIMENSÃO ESPECTRAL

O movimento aleatório de partículas em estruturas fractais apresenta várias propriedades que ainda não haviam sido encontradas no espaço euclidiano (Takayasu, 1990). Estas novas propriedades são caracterizadas também por uma nova quantidade denominada dimensão fractal espectral.

Podemos definir esta dimensão a partir da relação do valor esperado da distância média quadrática (R) a partir da origem após um número N de passos:

$$\langle R^2 \rangle \propto N^{D/\bar{D}} \quad (1.25)$$

onde \bar{D} é a dimensão espectral para o movimento aleatório.

Para o espaço euclidiano, $D = \bar{D} = d$ e a relação 1.25 se reduz ao caso particular do movimento browniano. Para estruturas fractais, os valores de D são fracionários e diferentes de \bar{D} , resultando no comportamento anômalo do movimento aleatório em fractais.

Esta dimensão espectral controla o número total de pontos distintos visitados durante o movimento, bem como a probabilidade de voltar à origem após percorrer N passos.

Situações mais complexas podem acontecer quando a relação 1.25 é divergente (Alemany e Zanette, 1994), porém estão fora do escopo desta tese.

Outra definição mais apropriada para utilização computacional é a que calcula o passo de tempo $T(x)$ no qual uma partícula, partindo da origem, atinge a distância x pela primeira vez, dada por:

$$T(x) = x^{2D/\bar{D}} \quad (1.26)$$

que também pode ser interpretado como uma inversa para 1.25.

O nome espectral é proveniente de uma propriedade de materiais elásticos com estrutura fractal (Takayasu, 1990). Para pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio destes materiais, a densidade espectral $\rho(w)$ da oscilação é uma função da frequência w segundo a lei de potência:

$$\rho(w) \propto w^{\bar{D}-1} \quad (1.27)$$

Uma vez que \bar{D} controla o espectro de oscilações da estrutura fractal, recebe o nome de dimensão fractal espectral.

I.5.4 - DIMENSÃO DE ESPALHAMENTO

Esta dimensão, também denominada por dimensão de conectividade, caracteriza o número de ligações conectadas entre dois pontos distintos, tendo grande aplicação em fenômenos elétricos.

Neste tipo de problemas, fisicamente é mais interessante medir a distância entre dois pontos pelo número de ligações que um elétron deve percorrer para sair de um ponto a outro, do que simplesmente medir a distância pela raiz quadrada da soma dos quadrados das coordenadas cartesianas.

Caso o número de pontos visitados $N(n)$ pelo elétron após n passos varie segundo uma lei de potência com n , teremos:

$$N(n) \propto n^{\hat{D}} \quad (1.28)$$

A dimensão de espalhamento (\hat{D}) não é limitada pelo espaço euclidiano em que a estrutura está contida, podendo ser maior que 2 para um plano, e aumentar indefinidamente para um grande número de ligações em d .

I.5.5 - EXTENSÕES DA DIMENSÃO FRACTAL

Muito embora a dimensão fractal seja a medida básica para a representação de formas auto-similares e fenômenos naturais, nem sempre é possível descrever as formas mais complicadas através de um único número.

Faz-se necessário ampliar o conceito de dimensão fractal, podendo-se abordar o problema de duas formas distintas: a) generalização da dimensão fractal para torná-la dependente da escala de observação; b) introdução de novas medidas que descrevam as flutuações espaciais da dimensão fractal (Takayasu, 1990).

No primeiro caso é possível definir uma dimensão fractal a partir de um comprimento, impondo limites superior e inferior na escala de observação. Para o segundo, estaremos trabalhando com objetos cuja dimensão fractal varia em cada parte do mesmo, passando-se

intuitivamente para o conceito de multifractal (ver, por exemplo Stanley e Meakin (1988)).

A teoria dos multifractais foi desenvolvida para analisar formas com mais de um tamanho característico. A sua grande generalidade, semelhante à da termodinâmica, é a principal vantagem na sua aplicação para descrever os fenômenos naturais.

Em termos simples, a generalização de dimensão fractal para medida multifractal envolve a passagem de um número finito para um número infinito de dimensões, que podem inclusive ser negativas (Mandelbrot, 1989).

Muitos multifractais podem ser construídos a partir da repetição iterativa de dois ou mais geradores, resultando em um fractal não-uniforme (McCauley, 1990), cuja dimensão é representada pela função $f(\alpha)$ ou pela dimensão de informação de ordem q (D_q) (Chhabra e Jensen, 1989). As duas grandezas estão relacionadas por uma transformada de Legendre (Meneveau e Sreenivasan, 1989).

Inicialmente definimos uma função geradora de modo que:

$$\chi(q) = \sum_{i=1}^{N_n} P_i^q \quad (1.29)$$

onde P_i e q têm o mesmo significado que no item 1.5.1 e N_n é o número total de cubos de aresta r (tamanho característico).

Combinando as equações 1.20, 1.21 e 1.29, chegamos em:

$$\chi(q) = r^{(q-1)D_q} \quad (1.30)$$

Para o caso de multifractal, podemos ter r_i tamanhos característicos, de forma que a probabilidade de o cubo i com comprimento r_i ser visitado em n iterações é dada por:

$$P_i = r_i^{\alpha_i} \quad (1.31)$$

De todos os cubos N_n , um certo número $N(\alpha)$ terão índices $\alpha_i = \alpha$, com dimensão $f(\alpha)$, que obedece à lei:

$$N(\alpha) = r^{-f(\alpha)} \quad (1.32)$$

onde $(r_i)_{\min} \leq r \leq (r_i)_{\max}$.

Combinando 1.29, 1.31 e 1.32, teremos:

$$\chi(q) = \sum_{\alpha=\alpha_{\min}}^{\alpha=\alpha_{\max}} r^{q\alpha - f(\alpha)} \quad (1.33)$$

onde os limites α_{\min} e α_{\max} são determinados para cada sistema dinâmico em conjunto com seu espectro de $f(\alpha)$.

Desta maneira, garante-se que existe uma função $\alpha(q)$ definida para cada valor de q , que permite substituir a equação 1.33 por um único fractal geométrico auto-similar de dimensão $f(\alpha(q))$ (McCauley, 1990), onde as dimensões generalizadas são dadas por:

$$D_q = \frac{q\alpha(q) - f(\alpha(q))}{q-1} \quad (1.34)$$

A forma fractal não-uniforme pode ser aproximada por um fractal uniforme diferente, de acordo com cada valor diferente de q . Este valor de q representa a inclinação (derivada) da curva $f(\alpha)$ em um gráfico $f(\alpha)$ vs α (FIG. 1.8). A interpretação geométrica de D_q também pode ser visualizada na figura.

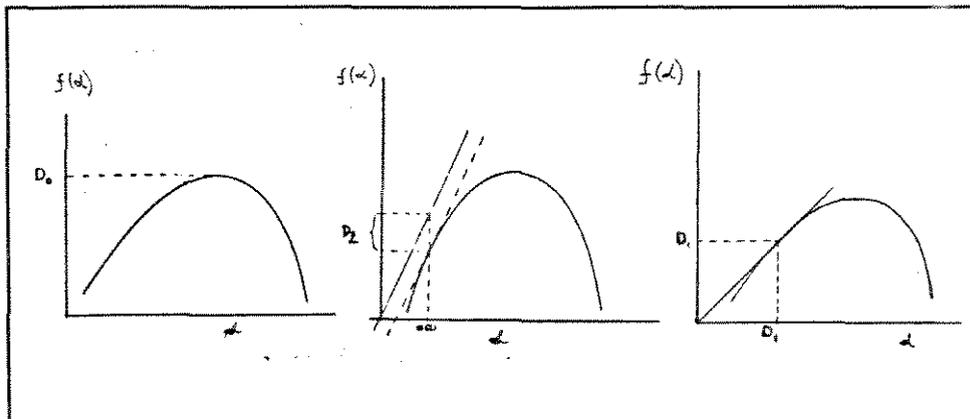


FIG 1.8 - Interpretação geométrica do gráfico $f(\alpha)$ x α mostrando dimensões fractais em função da derivada q , adaptado de McCauley, 1990.

1.6 - ALGUNS EXEMPLOS CLÁSSICOS DE FRACTAIS

Neste ítem serão apresentados três exemplos clássicos de formas geométricas fractais, que por sua simplicidade na geração e na medida da dimensão, fornecem uma boa base para o entendimento destes conceitos.

1.6.1 - POEIRA DE CANTOR

Consideremos um segmento de reta de comprimento unitário $[0,1]$ o qual será dividido em três partes iguais, retirando-se em seguida o terço central (FIG. 1.9).

Em sucessivas iterações, continua-se o processo de dividir os segmentos restantes em três partes e retirar o terço central. Após um número infinito de iterações teremos produzido a poeira de Cantor.

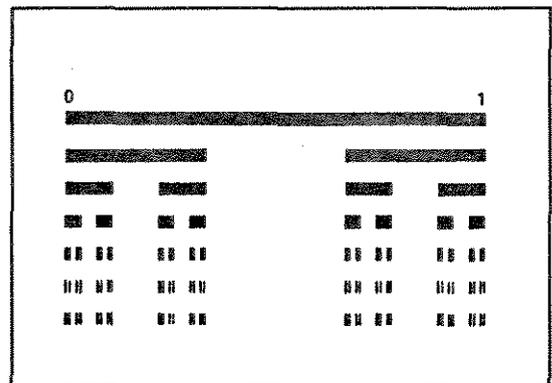


FIG 1.9 - Esquema de construção da Poeira de Cantor, adaptado de Ciência Hoje, v 14, n 80.

Em termos matemáticos, a poeira representa um conjunto completo, porém, sem densidade. Em outras palavras, cada ponto limite deste conjunto pertence ao conjunto e, em qualquer subconjunto de $[0,1]$ sempre haverá pelo menos um subintervalo que não contém nenhuma parte do conjunto (Takayasu, 1990).

Como sempre retiramos duas partes em três, a dimensão fractal da poeira de Cantor é dada por:

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,6309\dots$$

1.6.2 - ESPONJA DE SIERPINSKI

A filosofia de geração deste fractal é semelhante à do caso anterior, podendo ser

considerado uma extensão da poeira de Cantor para duas ou mais dimensões.

Para o caso bidimensional, tomamos uma figura geométrica qualquer como gerador, neste exemplo, um triângulo totalmente preenchido (FIG. 1.10). Divide-se internamente este triângulo em 4 menores de igual tamanho, retirando-se o triângulo central.

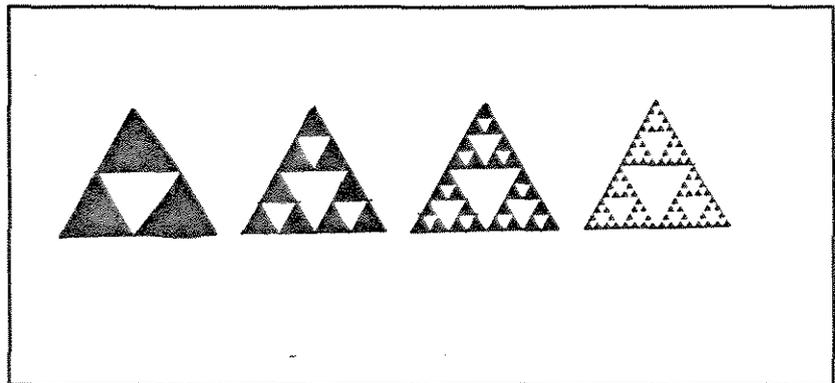


FIG 1.10 - Esquema de formação de uma esponja de Sierpinski, adaptado de Feder, 1988.

O processo é repetido recursivamente em infinitas iterações sobre os triângulos preenchidos restantes. Em cada aplicação, um triângulo preenchido é substituído por 3 novos, com uma mudança de escala com fator igual a $1/2$. Desta forma, pela equação 1.1 temos a dimensão fractal dada por:

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,585\dots$$

É interessante notar que a área visível deste fractal tende a zero ao passo que o perímetro dos buracos tende a infinito.

1.6.3 - CURVA DE KOCH

Esta constitui um dos exemplos mais ilustrativos de que uma curva pode ter dimensão fracionária.

O ponto de partida é um segmento de reta de comprimento unitário, que também, pode ser substituído por um polígono qualquer com aresta unitária (FIG. 1.11).

O processo iterativo se faz pela substituição de cada segmento do passo anterior por quatro novos de comprimento igual a $1/3$ do comprimento anterior.

A dimensão fractal assim obtida será:

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2628\dots$$

Observa-se que com o avanço do processo, o comprimento de cada segmento tende a zero, ao passo que o comprimento da curva (ou perímetro do polígono) tende para infinito.

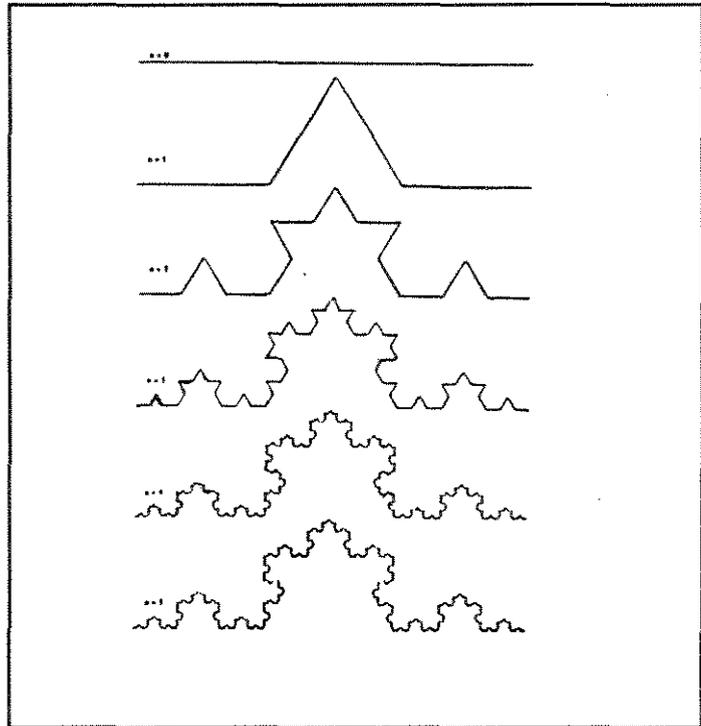


FIG 1.11 - Esquema de construção de uma Curva de Koch, adaptado de Feder, 1988.

I.7 - APLICAÇÕES GEOLÓGICAS DE FRACTAIS

Os fractais têm sido utilizados para descrever vários fenômenos geológicos, que incluem desde aspectos macroscópicos como estudos sismológicos, tectônicos e geomorfológicos, como também aspectos meso- e microscópicos, como correlação entre rochas, sedimentologia e análise de meios porosos. A seguir serão descritas algumas aplicações encontradas na literatura.

I.7.1 - MEDIDAS DE LITORAL E RELEVO

Uma das primeiras aplicações para medidas de linha de costa surgiu com o trabalho de Richardson (1961) seguido por Mandelbrot (1967). O comprimento de um litoral é calculado multiplicando-se uma medida unitária r pelo número de segmentos $N(r)$ necessários para fazer o recobrimento da costa. Tomam-se vários valores diferentes de r , obtendo-se distintos $N(r)$.

Estes dados são plotados em um gráfico log-log de r vs $N(r)$ (FIG. 1.12), resultando em um alinhamento cujo gradiente θ está relacionado com a dimensão fractal por $\theta=1-D$.

Os valores da dimensão fractal reportados por vários autores situam-se entre $1 < D < 1,4$ com média de 1,2. Constatou-se que quanto maior o número D , mais acidentado é o litoral. Aplicando-se o procedimento descrito a um círculo, observa-se que o gráfico log-log de r vs $N(r)$ não é linear, provando que formas com comprimento característico nunca produzem retas em gráficos como os da FIG. 1.12.

Se considerarmos a linha do litoral como sendo um corte praticado na superfície da Terra, ou seja, um corte efetuado em seu relevo, constituído por montanhas e vales, podemos estimar a dimensão fractal deste relevo a partir da dimensão da costa, adicionando-se 1 ao valor de D . Portanto, a dimensão fractal média do relevo terrestre situa-se em 2,2, valor consistente com medidas realizadas diretamente.

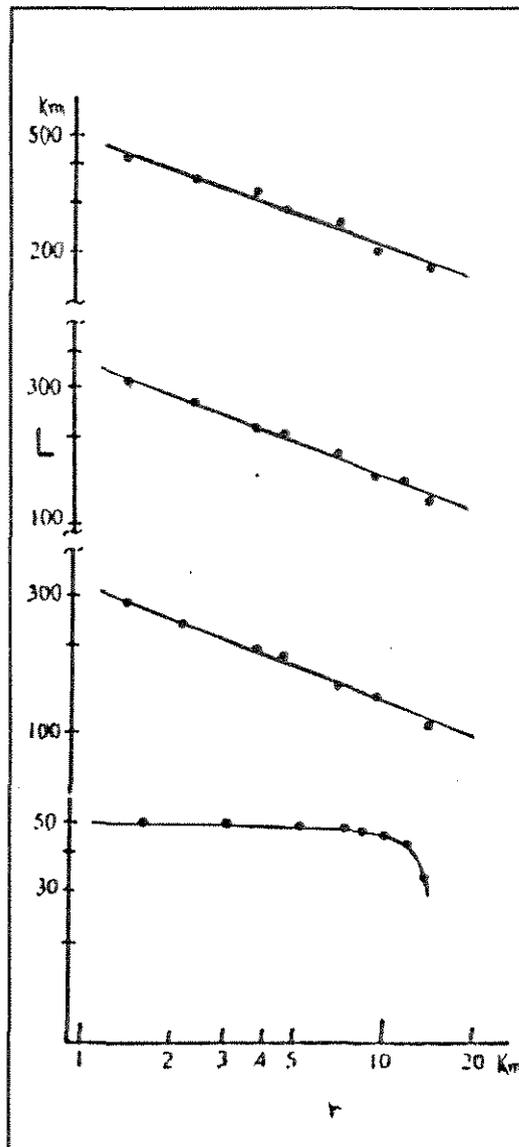


FIG 1.12 - Gráfico $r \times N(r)$ para medidas de litoral do Japão (três superiores), comparadas com um círculo de raio 8Km (inferior), adaptado de Takayasu, 1990.

1.7.2 - DIMENSÃO FRACTAL DE RIOS

Takayasu (1990) reconhece várias propriedades fractais em sistemas de drenagem. Uma relação bem conhecida entre o comprimento do canal principal (L) e a área de drenagem (A) da bacia hidrográfica (FIG. 1.13) é dada pela lei de Hack (1957):

$$L \propto 1.89 A^\alpha$$

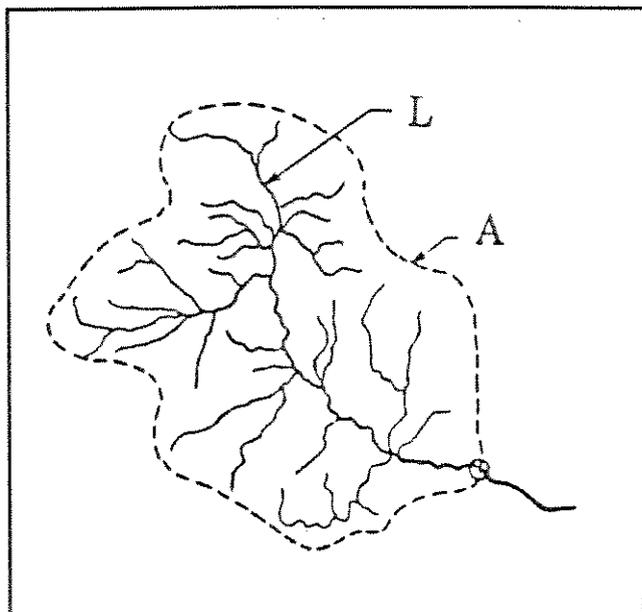


FIG 1.13 - Visão esquemática de uma bacia hidrográfica, mostrando o canal principal de comprimento L e a área de drenagem A, adaptado de Feder, 1988.

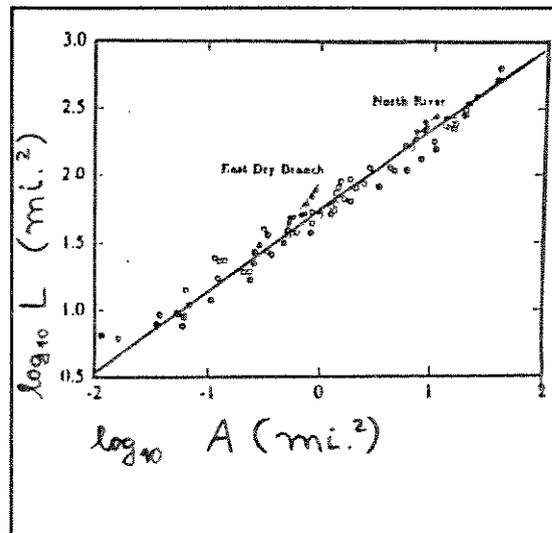


FIG 1.14 - Resultados das medidas de L e A de Hack (1957), adaptado de Feder, 1988.

O expoente α foi relacionado por Mandelbrot (1982) com a dimensão fractal, obtendo-se $D = 2.\alpha$.

Os resultados de Hack (1957) estudando rios da Virgínia e Maryland apontam para valores de $\alpha = 0,6$, fornecendo $D = 1,2$ (FIG 1.14). De modo geral, a dimensão fractal para o canal principal situa-se entre $1,1 \leq D \leq 1,3$ (Takayasu, 1990).

Feder (1988), entretanto, mantém restrições quanto ao aspecto de similaridade entre as diversas bacias hidrográficas pois, de acordo com observações de Hack (1957), estas bacias mudam de forma no sentido de jusante, tornando-se mais longas e estreitas. Por outro lado, as bacias maiores são mais alongadas, ao passo que as menores são mais ovaladas. Estas características podem suprimir o caráter fractal dos rios. A forma do sistema fluvial também pode ser interpretada como fractal. Um exemplo clássico é a do rio Amazonas (FIG. 1.15), cuja dimensão fractal obtida pelo método de contagem de caixas é de 1,85 (FIG. 1.16). Para o rio Nilo, reporta-se na literatura o valor 1,4. Estes números demonstram haver uma relação entre a

dimensão fractal e o regime pluviométrico, tendo-se maiores valores para regimes de chuvas mais contínuos, nos quais, para manter o equilíbrio do sistema, a drenagem deve ser quase imediata, o que implica em maior cobertura do rio e seus afluentes, aumentando o valor da dimensão.

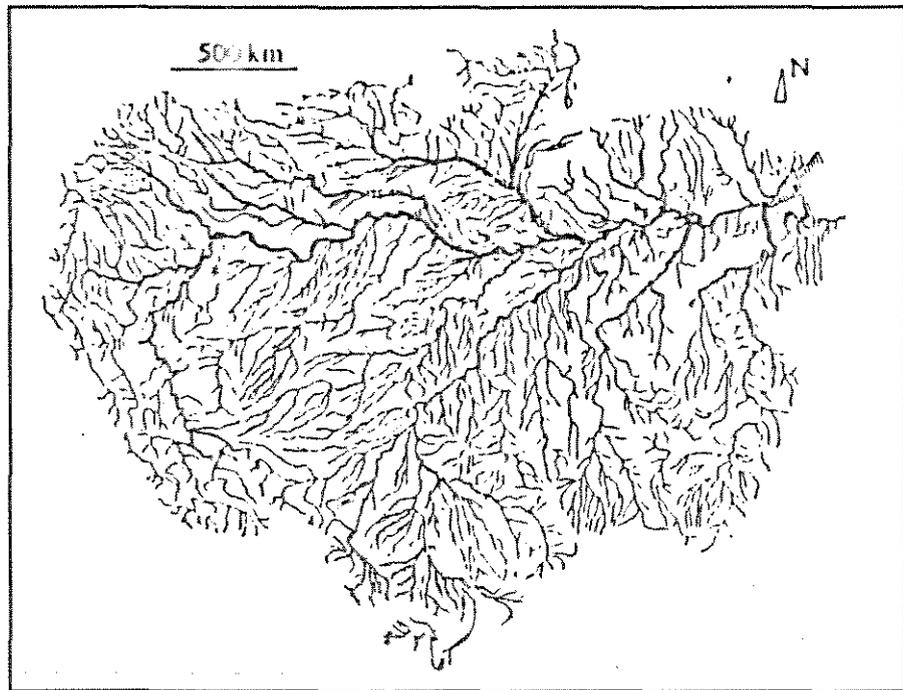


FIG 1.15 - Mapa de parte da bacia hidrográfica do rio Amazonas, adaptado de Feder, 1988.

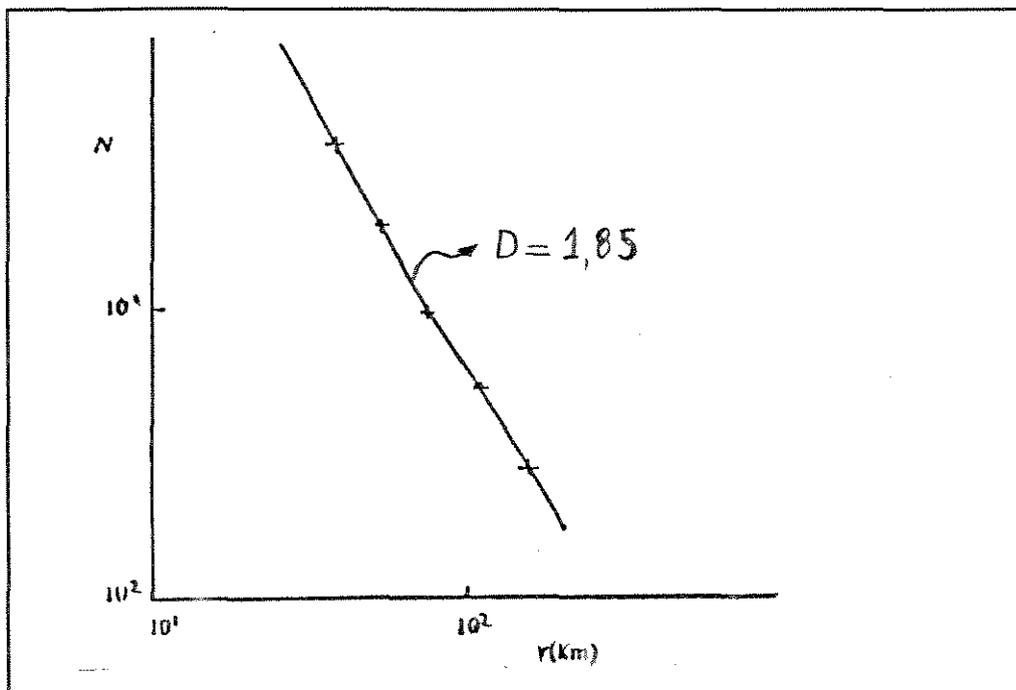


FIG 1.16 - Gráfico $r \times N(r)$ para calcular a dimensão fractal do rio Amazonas pelo método de contagem de caixas, adaptado de Feder, 1988.

I.7.3 - ESTUDOS DE TECTÔNICA E FRAGMENTAÇÃO

Os terremotos constituem outra área com aplicações para a geometria fractal (Takayasu, 1990). A distribuição espacial dos terremotos é localizada em alguns agrupamentos na crosta terrestre. Embora o erro cometido na determinação da dimensão fractal destes agrupamentos possa ser grande, reportam-se valores na faixa de **1,2 a 1,6**.

A distribuição de frequência do número de terremotos secundários (**N(t)**) associados com o de maior intensidade segue uma lei de potência conhecida como fórmula de Omori:

$$N(t) \propto t^{-P} \quad P \neq 1$$

Uma grande quantidade de processos geológicos estão relacionados com o fenômeno de fragmentação. Citam-se os processos tectônicos, envolvendo falhamentos e fraturamentos, os mecanismos de intemperismo das rochas e os processos explosivos, como vulcanismo e ação do homem.

Admite-se que a distribuição dos falhamentos na crosta terrestre é fractal e cada sistema de falhas apresenta características próprias com relação aos abalos sísmicos (Turcotte, 1992).

Embora as distribuições de frequência e tamanho das falhas seja fractal, não podemos concluir que a dimensão fractal das falhas seja igual à dos terremotos. Esta hipótese implica que o intervalo de tempo entre abalos consecutivos seja independente da escala, o que não é observado na prática (Turcotte, 1992). De modo geral, o intervalo de tempo entre dois terremotos é maior para os falhamentos menores.

Um modelo teórico simples para fragmentação, baseado no mesmo princípio do conjunto de Cantor, consiste no cubo da FIG. 1.17. A cada iteração do processo, dois blocos diagonalmente opostos são fraturados e os outros são mantidos intactos, gerando um fractal de dimensão **D=2,60** (FIG. 1.18).

Barton e Hsieh (1989) fizeram um levantamento estatístico da distribuição de juntas e fraturas em rochas do embasamento de Yucca Mountain, Nevada (FIG. 1.19). Calculando a dimensão fractal, obtiveram **D = 1,7** em duas dimensões (FIG. 1.20).

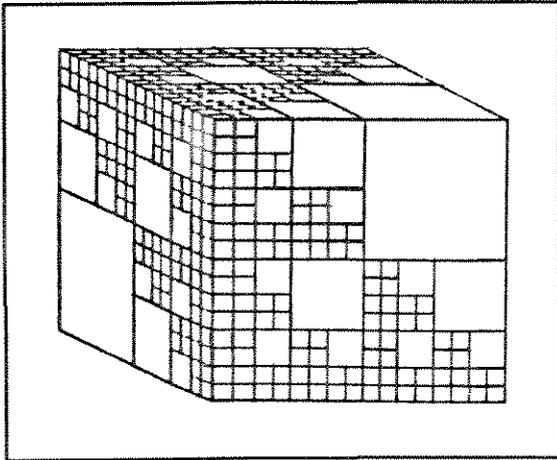


FIG 1.17 - Modelo teórico para fragmentação de Sammis et al (1986), adaptado de Turcotte, 1992.

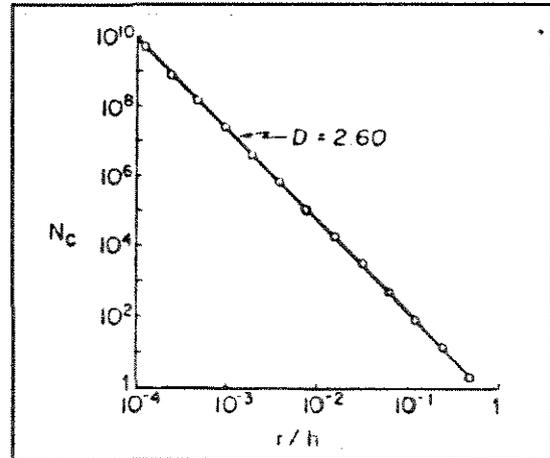


FIG 1.18 - Dimensão fractal do modelo teórico da Fig 1.17, adaptado de Turcotte, 1992.

Contruindo-se um modelo teórico com a filosofia do parágrafo anterior, obtêm-se resultados semelhantes ao do caso prático (Turcotte, 1992).

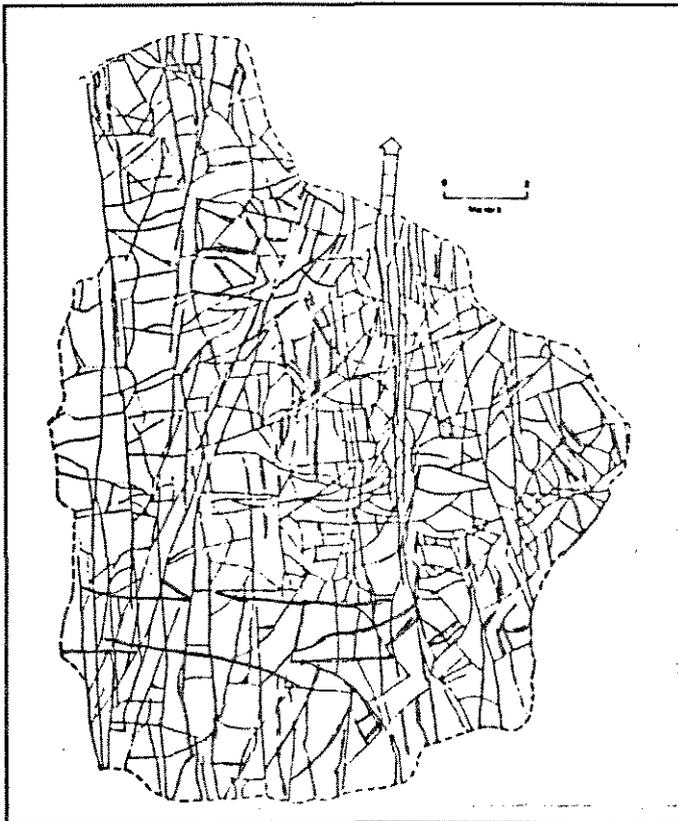


FIG 1.19 - Distribuição de juntas e fraturas em Yucca Mountain, Nevada, adaptado de Turcotte, 1992.

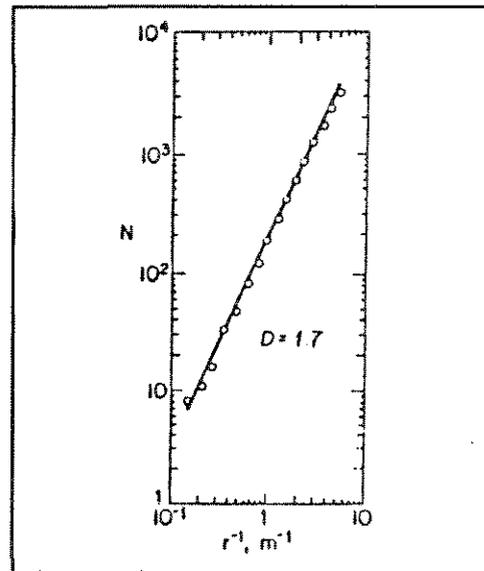


FIG 1.20 - Gráfico para determinação da dimensão fractal da FIG 1.18, adaptado de Turcotte, 1992.

I.7.4 - DISTRIBUIÇÃO DE MINÉRIOS

A estimativa de reservas de bens minerais é feita com base em estudos estatísticos, com o objetivo de determinar a quantidade de minério explotável acima de um determinado teor crítico, específico para cada tipo de minério. Estas estimativas são realizadas tanto em caráter regional como local.

Vários autores sugerem haver uma relação linear entre o logaritmo da tonelagem de minério acima do teor crítico e o logaritmo do teor, sendo esta relação fractal (Turcotte, 1992). Para garantir o caráter fractal desta relação, é necessário que o mecanismo de concentração do minério seja invariante por escala. Embora alguns destes mecanismos já estejam exaustivamente estudados, a complexidade dos fenômenos não está ainda totalmente compreendida, não permitindo a formulação de modelos quantitativos adequados.

Em vários exemplos com minérios (Turcotte, 1992), observam-se valores de dimensão fractal que vão de **2,01** para depósitos de mercúrio a **1,16** para minério de cobre nos Estados Unidos, o que demonstra existirem diferentes processos invariantes por escala responsáveis pela concentração dos diversos minerais.

Acredita-se também que a distribuição dos campos de petróleo obedeça à geometria fractal. Estudos como os de Drew et al (1982) realizados no Golfo do México, reportam valores de dimensão fractal para distribuições de volumes de óleo da ordem de **2,22**. Há grande diferença em medidas que podem ser atribuídas às características geológicas regionais diferentes ou à controvérsia na delimitação dos campos e de suas reservas petrolíferas.

I.7.5 - PETROFÍSICA

As análises petrofísicas fornecem parâmetros importantes para o estudo de reservatórios de petróleo. O caráter fractal das rochas porosas faz com que o estudo da dimensão contribua para a determinação dos parâmetros.

Um dos trabalhos pioneiros foi realizado por Katz e Thompson (1985) que estudaram superfícies fraturadas em arenitos, usando imagens de microscopia eletrônica. As fotos são

convertidas em imagens bimodais onde as cores claras representam o espaço poroso e as escuras os grãos. Cada contraste claro/escuro constitui uma feição e calcula-se a dimensão fractal a partir de um plot log-log do número de feições vs. deslocamento unitário. A dimensão fractal obtida pelos autores acima varia entre **2,57** e **2,87**.

Brown e Scholz (1985) estudaram a topografia de afloramentos de rochas cristalinas e sedimentares em escalas variando de 10μ a 1m. Estes autores utilizam funções aleatórias do tipo movimento browniano fractal (Capítulo II) ou funções de Weierstrass-Mandelbrot para o modelamento das superfícies.

Avnir, Farin e Pfeifer (1985), fazem contagem do número de moléculas adsorvidas para cobrir uma superfície porosa, utilizando vários tamanhos de molécula para introduzir o fator de escala.

Wong, Howard e Lin (1986) usam a técnica de espalhamento de pequeno ângulo ("small-angle scattering - SAS") de neutrons termais em amostras de arenitos, folhelhos e carbonatos, observando características fractais nos dois primeiros, que chegam a dimensões de **2,96**. Já para os carbonatos, o ajuste no plot bilogaritmo não foi bom, o que levou os autores a considerar estas rochas como rugosas, porém não como fractais.

Uma aplicação mais prática da dimensão fractal foi dada por Katz e Thompson (1985), relacionando a porosidade das rochas com a dimensão fractal:

$$\phi = A \left(\frac{I_1}{I_2} \right)^{3-D}$$

onde **A** é uma constante (geralmente =1 para arenitos) e I_1 e I_2 são escalas limites superior e inferior da amplitude fractal.

A avaliação quantitativa da saturação de fluidos no espaço poroso das rochas foi estabelecida por Archie (1942) com sua lei:

$$S_w^n = \frac{aR_w}{\phi^m R_t}$$

onde S_w é a saturação de água, **a** constante =1 na proposta original, R_w resistividade da água que

impregna a rocha, ϕ porosidade, m o expoente de cimentação e R_i a resistividade da rocha.

Os parâmetros a e m são determinados a partir de ensaios de laboratório, onde se mede a resistividade R_o de amostras de rocha impregnadas de água com as características da água de formação e o parâmetro n em testes de impregnação progressiva com petróleo da amostra saturada por água, medindo-se sua resistividade. São utilizados gráficos de $F = a/\phi^m$ vs ϕ e $I = R_i/R_o$ vs S_w . Tomam-se valores de $a \neq 1$ para satisfazer ao ajuste gráfico de linhas retas, embora estes valores violem a definição das grandezas.

Tsallis et al (1992) propuseram uma generalização da lei de Archie, interpretando os dados acima como "crossover" entre distintos regimes fractais, entre sistemas de porosidade efetiva e sistemas com microporosidade, que afetam as medidas de resistividade tanto em ensaios de laboratório como os próprios perfis elétricos nas medições de poços.

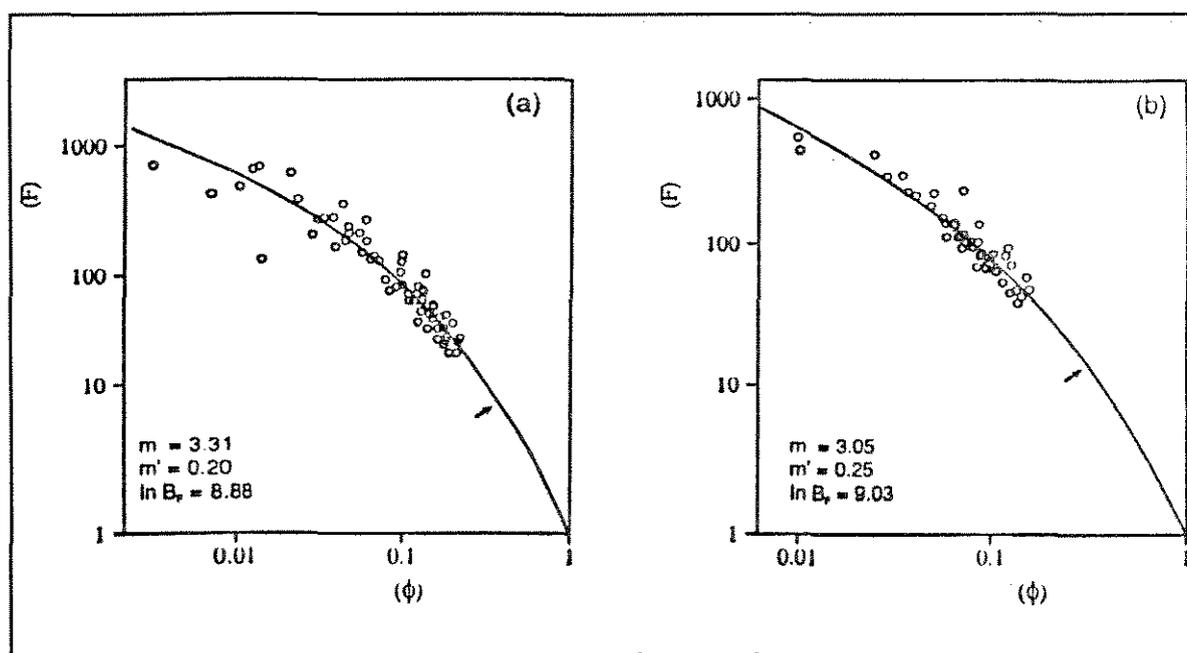


FIG 1.21 - Gráfico do fator de formação x porosidade para dados petrofísicos de dois poços de petróleo brasileiros, adaptado de Tsallis et al, 1992.

Com a adoção de valores adequados do expoente de cimentação para cada regime (m e m' FIG. 1.21) e do expoente de saturação (n e n' FIG. 1.22) nos correspondentes intervalos de porosidade, esta generalização da lei de Archie fornece valores mais confiáveis de saturação de fluidos, sem precisar impor artifícios matemáticos para o valor de a .

Estudos recentes de digitação viscosa ("viscous fingering") utilizando modelos de geometria fractal de percolação de fluidos estão ganhando importância cada vez maior em reservatórios de hidrocarbonetos, uma vez que os métodos de recuperação secundária de petróleo através de injeção de água estão sendo continuamente mais utilizados para melhorar o índice de recuperação de óleo das jazidas. Os ensaios de laboratório, usando duas placas de vidro (FIG. 1.23), uma lisa e outra

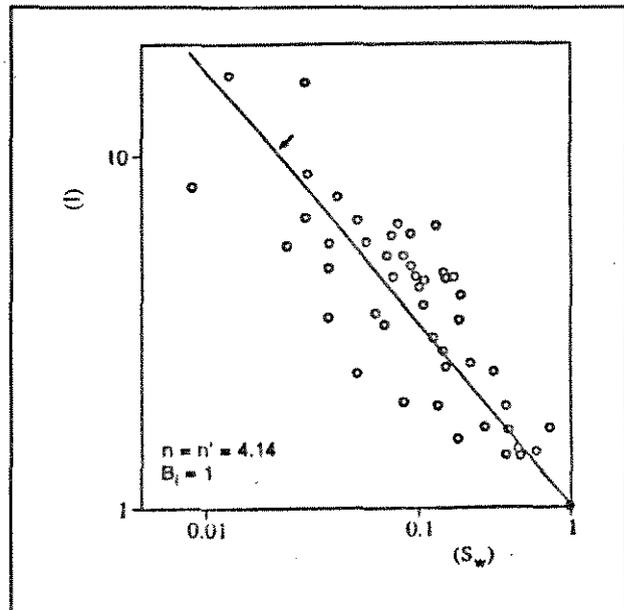


FIG 1.22 - Gráfico $S_w \times I$ para dados petrofísicos de poço de petróleo brasileiros, adaptado de Tsallis et al, 1992.

rugosa, mostram caráter fractal no deslocamento de glicerina por óleo, que pode ser reproduzido por simulação em computador. O padrão de deslocamento mostra uma dimensão fractal da ordem de $D = 1.72$. O sistema água/óleo produz padrões similares aos do teste.

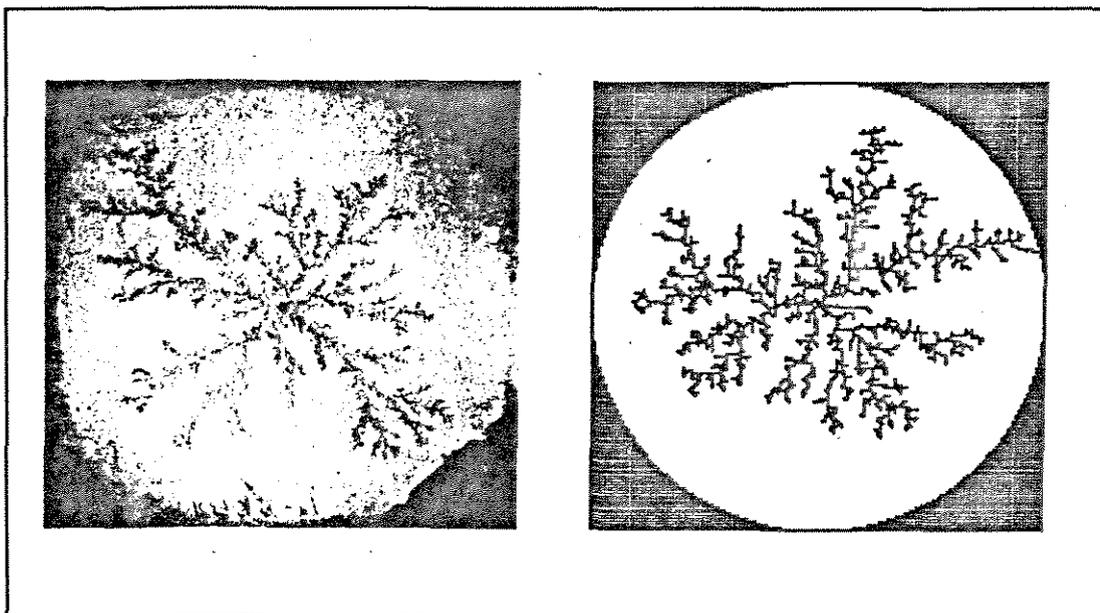


FIG 1.23 - Digitação viscosa em ensaios de laboratório em placas de vidro: experiência real (esquerda) e simulação por computador (direita), adaptado de The Technical Review, v 36, n 1.

I.7.6 - PERFIS ELÉTRICOS

Os perfis elétricos são uma das principais ferramentas de trabalho em estudos de reservatórios de hidrocarbonetos. Por serem corridos praticamente em todos os poços e por apresentarem vários princípios físicos, geram a medição de diferentes propriedades como, por exemplo, a porosidade, o conteúdo de argila, a saturação de água, entre outras.

O caráter fractal destes registros tem chamado a atenção de pesquisadores.

Hewett (1986) foi um precursor ao adaptar o formalismo de Mandelbrot e Van Ness (1968), interpretando as curvas de perfis como funções de ruído Gaussiano fractal e movimento Browniano fractal. A aplicabilidade da dimensão fractal, obtida a partir do expoente de Hurst $H=2-D$, vai até a interpolação de propriedades entre poços, através de técnicas geoestatísticas. A abordagem heurística de Hewett (1986) é seguida nesta tese, onde estudamos os procedimentos na intenção de entender e melhorar o processo.

O conceito de multifractal é também abordado por Muller et al (1992) para quantificação e modelamento de heterogeneidades de rochas reservatório, utilizando perfis de dipmeter.

O formalismo adotado por estes pesquisadores é o descrito em I.5.5. As pesquisas ainda estão em andamento, mas os autores acreditam ser possível identificar diferentes tipos litológicos com a análise multifractal das curvas de microrresistividade.

CAPÍTULO II - MOVIMENTOS ALEATÓRIOS E FRACTAIS

II.1 - INTRODUÇÃO

Nos fenômenos naturais, o acaso tem grande importância para a caracterização dos processos, o que implica em uma necessidade prática em relacionar aleatoriedade com fractais (Mandelbrot, 1983).

De um modo geral, o poder do acaso é subestimado na caracterização dos processos naturais. Em uma conceituação física ingênua, os efeitos da aleatoriedade são mais manifestos no plano microscópico, podendo ser insignificantes no macroscópico. No caso de fractais aleatórios, o acaso mantém sua importância de forma constante em todas as escalas de observação (Mandelbrot, 1983).

Por fractal aleatório entende-se todo o fractal gerado por regras não-determinísticas (Tél, 1988). Como exemplo, podemos gerar um fractal determinístico ao eliminar a quarta parte superior de um quadrado, iterando o

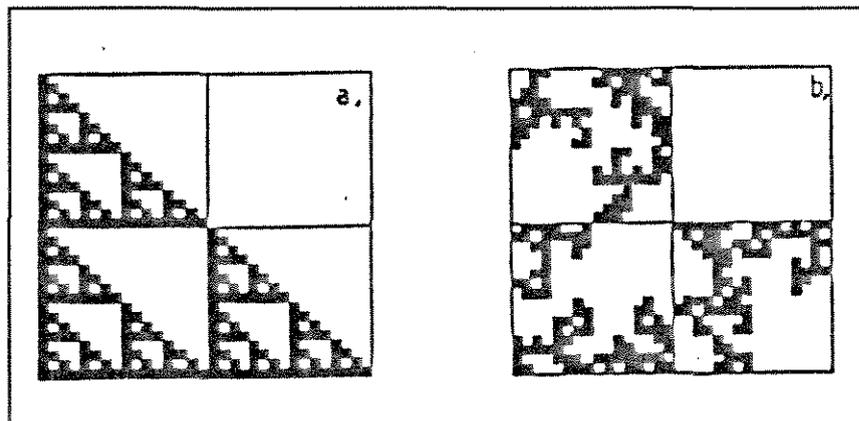


FIG 2.1 - a) Fractal Determinístico; b) Fractal Estocástico. Número de iterações = 5; $D = \ln 3 / \ln 2 = 1,585$, adaptado de Tél, 1988.

processo sucessivas vezes, obtendo-se a FIG. 2.1a. Se repetirmos o processo, só que escolhendo ao acaso a quarta parte a ser eliminada, o fractal gerado será estocástico, podendo a FIG. 2.1b ser uma imagem possível. É fácil verificar que os aspectos geométricos são diferentes, porém a dimensão fractal deles é a mesma, por construção.

Existem, também descritas, funções fractais aleatórias. Uma destas, estudada mais extensivamente, é o processo de difusão conhecido por movimento browniano ou aleatório, com

sua generalização para movimento browniano fractal, definido por Mandelbrot e Van Ness(1968).

II.2 - MOVIMENTO BROWNIANO

O movimento browniano foi observado pela primeira vez por Brown (1828), que constatou experimentalmente o fato de o movimento aleatório apresentado por partículas microscópicas de pólen ter origem em causas puramente físicas e não biológicas como era acreditado até então.

As partículas subatômicas, átomos, moléculas e demais componentes da natureza encontram-se em constante movimentação devido a flutuações térmicas (energia térmica), apresentando colisões aleatórias de seus componentes.

Em uma resolução microscópica, podemos entender o movimento browniano como sendo constituído por deslocamento de uma partícula através de passos segundo uma direção aleatória, com comprimento característico.

É importante observar que, em um movimento browniano, a posição de uma partícula não é independente de sua posição no instante anterior, mas sim, o deslocamento da partícula em um dado instante de tempo é independente do deslocamento da mesma partícula em outro intervalo de tempo (Feder, 1988).

O movimento browniano é auto-similar (Mandelbrot e Van Ness, 1968), no sentido de que o caminho aleatório em uma escala de observação é semelhante ao apresentado em outra escala maior ou menor. Já para o caso de admitirmos o tempo como uma dimensão adicional, no caso a posição da partícula em função do tempo, também chamada por registro do movimento, o fractal passa a ser auto-afim, uma vez que os fatores de multiplicação da escala de tempo diferem dos fatores da escala de observação (Feder, 1988).

II.2.1 - MOVIMENTO ALEATÓRIO UNIDIRECIONAL

Para melhor entendimento dos fundamentos matemáticos envolvidos, vamos adotar a argumentação de Feder (1988), baseada em conceitos termodinâmicos.

Para o caso unidimensional de movimento ao longo de um eixo, consideramos uma



partícula realizando deslocamentos de tamanho microscópico ξ , positivos ou negativos, a cada tempo t .

Podemos também impor a condição de que os deslocamentos não se realizem em espaçamentos de tamanho constante, mas sim com o comprimento dado por uma distribuição gaussiana de probabilidade:

$$p(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi vt}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4vt}\right) \quad (2.1)$$

onde v é o coeficiente de difusão, dado pela relação de Einstein:

$$v = \frac{1}{2t} \langle \xi^2 \rangle \quad (2.2)$$

Desta forma, a intervalos de tempo t escolhemos aleatoriamente um deslocamento de comprimento ξ , sendo $p(\xi, t)d\xi$ a probabilidade de encontrarmos ξ no intervalo que vai de ξ a $\xi + d\xi$. A sequência de passos constitui um conjunto de variáveis aleatórias gaussianas independentes, com variância expressa por:

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi^2 p(\xi, t) = 2vt \quad (2.3)$$

A posição da partícula ao longo do eixo do deslocamento é calculada a cada passo por:

$$X(t) = \sum_{i=1}^t \xi_i \quad (2.4)$$

II.2.2 - PROPRIEDADE DE MUDANÇA DE ESCALA

Os deslocamentos efetuados pelas partículas em movimento browniano só podem ser observados a partir de uma resolução finita. Em inúmeros processos físicos, não nos interessa o valor do deslocamento a cada instante t , mas precisamos da informação a cada $b.t$, onde b é um número qualquer. O deslocamento final ξ passa a ser então uma combinação linear de

vários incrementos independentes $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_b$. Para exemplificar, tomamos $b = 2$ e $\xi = \xi_1 + \xi_2$.

Por serem incrementos independentes, a probabilidade conjunta de encontrarmos o primeiro incremento ξ_1 no intervalo $[\xi_1, \xi_1 + d\xi_1]$ e o segundo ξ_2 em $[\xi_2, \xi_2 + d\xi_2]$ é dada pelo produto das duas densidades de probabilidade:

$$p(\xi_1, \xi_2, t) = p(\xi_1, t) p(\xi_2, t) \quad (2.5)$$

Integrando este resultado sobre todas as combinações possíveis de ξ_1 e ξ_2 teremos o produto de convolução:

$$p(\xi, 2t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 p(\xi - \xi_1, t) p(\xi_1, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu 2t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\nu 2t}\right) \quad (2.6)$$

Generalizando para qualquer valor de b :

$$p(\xi, bt) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu bt}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\nu bt}\right) \quad (2.7)$$

Para todo o valor b os incrementos na posição da partícula serão variáveis aleatórias gaussianas independentes, com:

$$\langle \xi \rangle = 0 \quad e \quad \langle \xi^2 \rangle = 2\nu bt \quad (2.8)$$

Ao mudarmos a resolução de um movimento browniano, observamos que o seu registro parece não mudar. Esta propriedade é conhecida como invariância por escala ou simetria de um registro (FIG. 2.2 e FIG 2.3).

Matematicamente, se mudarmos a escala do eixo x em $b^{0.5}$ e o tempo pelo fator b , teremos:

$$\hat{\xi} = b^{0.5} \xi \quad e \quad \hat{t} = bt \quad (2.9)$$

Substituindo em 2.1, chegamos facilmente a:

$$p(\hat{\xi}, \hat{t}) = b^{-0.5} p(\xi, t) \quad (2.10)$$

garantindo-se que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\hat{\xi} p(\hat{\xi}, \hat{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi, t) = 1 \quad (2.11)$$

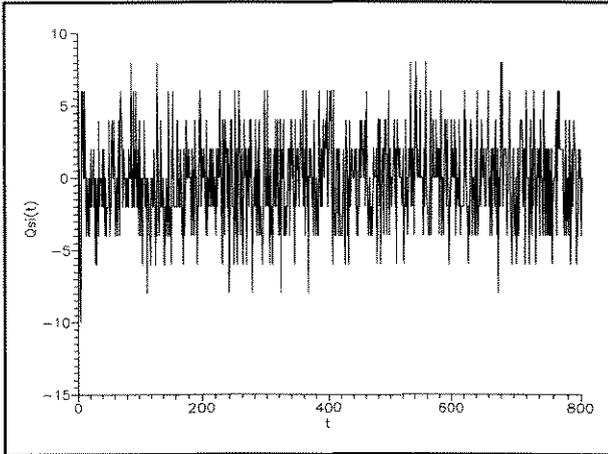


FIG 2.2a Seqüência de Variáveis Aleatórias com Média = 0 e Variância = 1. Amostragem a cada t.

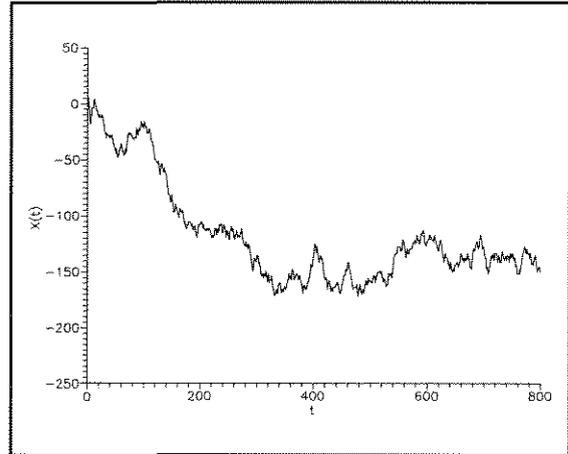


FIG 2.2b - Posição do Movimento Aleatório dado pelas Variáveis da Figura Anterior. Amostragem a cada t.

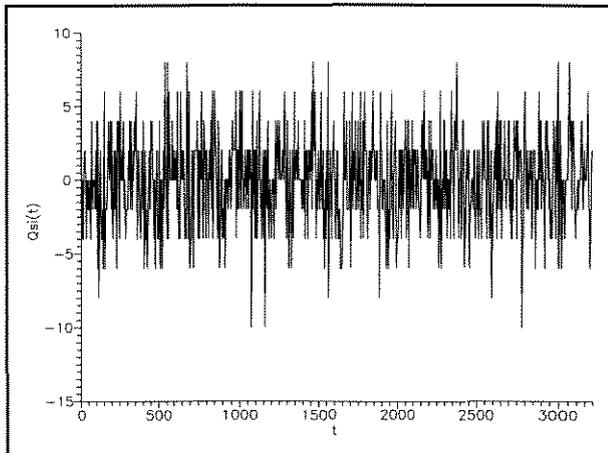


FIG 2.3a - Seqüência de Variáveis Aleatórias Gaussianas Independentes com Média = 0 e Variância = 1. Amostragem a cada 4t.

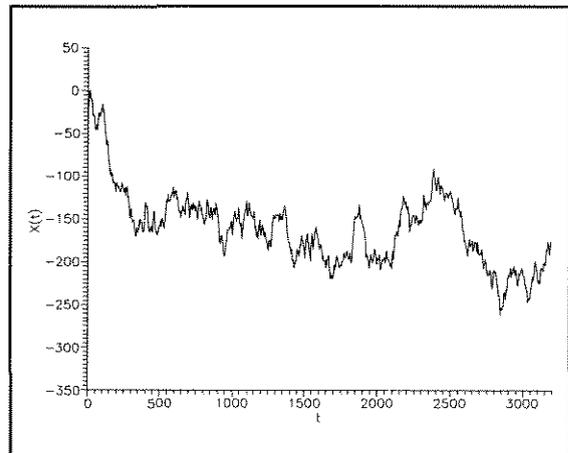


FIG 2.3b - Posição do Movimento Aleatório da Figura Anterior. Amostragem a cada 4t.

A equação 2.10 constitui a prova de que o movimento browniano é um processo invariante em distribuição e auto-afim, pois ao mudar a escala de tempo por um fator b e a escala de medida variou por um fator $b^{0.5}$.

Pelo mesmo método acima, podemos estabelecer a distribuição de probabilidade para

a posição da partícula $X(t)$, a partir de uma posição inicial $X(t_0)$ no instante inicial t_0 :

$$P(X(t) - X(t_0)) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu|t-t_0|}} \exp\left(-\frac{[X(t) - X(t_0)]^2}{4\nu|t-t_0|}\right) \quad (2.12)$$

que satisfaz a relação de mudança de escala:

$$P(b^{0.5}[X(bt) - X(bt_0)]) = b^{-0.5} P(X(t) - X(t_0)) \quad (2.13)$$

A média e a variância da posição da partícula são dadas respectivamente por:

$$\langle [X(t) - X(t_0)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta X \Delta X P(\Delta X, t - t_0) = 0 \quad (2.14)$$

e

$$\langle [X(t) - X(t_0)]^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta X (\Delta X)^2 P(\Delta X, t - t_0) = 2\nu|t - t_0| \quad (2.15)$$

com $\Delta X = X(t) - X(t_0)$.

A posição da partícula no movimento browniano, dada por $X(t)$ é, portanto, uma função aleatória, que foi definida por Wiener (1923) como sendo:

$$X(t) = X(t_0) + \xi |t - t_0|^{1/2} \quad (2.16)$$

onde ξ é um número aleatório de uma distribuição gaussiana.

II.3 - MOVIMENTO BROWNIANO FRACTAL

A generalização do movimento browniano foi proposta por Mandelbrot e Van Ness (1968), para designar uma família de funções aleatórias gaussianas, controladas por um parâmetro H restrito ao intervalo $0 < H < 1$. Introduzindo-se este conceito em 2.16, passamos a ter:

$$X_H(t) = X_H(t_0) + \xi |t - t_0|^H \quad (2.17)$$

O processo de movimento browniano fractal (**mBf**) apresenta média de incrementos:

$$\langle X_H(t) - X_H(t_0) \rangle = 0 \quad (2.18)$$

e variância de incrementos:

$$\langle [X_H(t) - X_H(t_0)]^2 \rangle = 2\nu\tau \left(\frac{|t-t_0|}{\tau}\right)^{2H} \propto |t-t_0|^{2H} \quad (2.19)$$

A feição básica do movimento browniano fractal é que a interdependência entre seus incrementos é infinita (Mandelbrot e Van Ness, 1968), ou seja, o **mBf** apresenta alcance da autocorrelação infinito. Com isto, os incrementos passados tem correlação com os incrementos futuros, seguindo a relação:

$$C(t) = \frac{\langle X_H(-t) - X_H(t) \rangle}{\langle [X_H(t)]^2 \rangle} = 2(2^{2H-1} - 1) \quad \forall t \quad (2.20)$$

onde adotou-se $X_H(0) = 0$ e unidades apropriadas para fazer $\tau = 1$ e $2\nu\tau = 1$, por conveniência.

Analisando a fórmula 2.20 verificamos que a correlação tende a zero para $H \rightarrow 1/2$ e, neste caso, não temos mais correlação entre os eventos passado e futuro. Estamos então no caso particular do movimento browniano.

Para valores de $H \neq 1/2$ teremos $C(t) \neq 0$ independente do valor de t . Ocorre persistência para $H > 1/2$, onde teremos a maior probabilidade de continuar uma tendência de alta (ou baixa) do passado para o futuro. Já para valores de $H < 1/2$ ocorre a anti-persistência, ou seja, uma tendência de valores altos no passado mais provavelmente será seguida por uma tendência de baixos valores no futuro e vice-versa.

Estes resultados da equação 2.20 estão em desacordo com o que normalmente é esperado para sistemas físicos e registros estocásticos. A premissa mais utilizada por estatísticos é a de que a correlação entre dois eventos decresce à medida que aumenta a distância entre eles, sendo nula a partir de um certo limite. Para esta família de funções (**mBf**) a exceção constitui a regra, uma vez que o comportamento de lei de potência para a função de correlação se mantém por várias escalas.

Mandelbrot e Van Ness (1968) definiram a função aleatória **mBf** com parâmetro H como

sendo:

$$X_H(t) - X_H(0) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^t dX(t') K(t-t') \quad (2.21)$$

onde $\Gamma(x)$ é a função gama e

$$K(t-t') = \begin{cases} (t-t')^{H-\frac{1}{2}} & 0 \leq t' \leq t \\ (t-t')^{H-\frac{1}{2}} - (-t')^{H-\frac{1}{2}} & t' < 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Segundo a equação 2.21, um incremento gaussiano independente $dX(t')$ de tamanho unitário no instante t' contribui para a posição da partícula browniana $X_H(t)$ em um instante posterior t , segundo a função linear $K(t-t')$.

Para mudanças de escala no eixo do tempo, onde $t' = bt''$, sabemos que, para um processo gaussiano independente, em distribuição, vale a relação:

$$dX(t' = bt'') = b^{1/2} dX(t'') \quad (2.23)$$

porém é fácil verificar que:

$$K(bt = bt'') = b^{H-1/2} K(t-t'') \quad (2.24)$$

o que nos leva a concluir que:

$$X_H(bt) - X_H(0) = b^H (X_H(t) - X_H(0)) \quad (2.25)$$

vale, em distribuição, para qualquer valor de b .

Outra proposição feita por Mandelbrot e Van Ness (1968) é a da existência de uma lei de potência para o desvio padrão de X_H , dada por:

$$E\{[X_H(t+\tau) - X_H(t_0)]^2\} = \tau^{2H} V_H \quad (2.26)$$

onde:

$$V_H = \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \left\{ \int_{-\infty}^0 d(t) [(1-t)^{H-1/2} - (-t)^{H-1/2}]^2 + \frac{1}{2H} \right\} \quad (2.27)$$

Da mesma forma que o movimento browniano, o processo $X_H(t)$ não é diferenciável por apresentar auto-similaridade. A falta de derivada é um inconveniente, especialmente para funções utilizadas como modelo para interpolação e extrapolação de propriedades.

Para o movimento browniano foram estabelecidos vários métodos, muitos deles desprovidos de rigor matemático, na tentativa de encontrar "uma função derivada para o **mB**", e as funções assim obtidas foram classificadas como "ruído gaussiano branco". Para o **mBf** Mandelbrot e Van Ness (1968) sugerem aproximações análogas, às quais eles denominaram "ruído Gaussiano fractal" (**rGf**).

Segundo os autores acima, uma forma elementar para contornar o problema é proceder a uma suavização de X_H , introduzindo a função aleatória:

$$X_H(t, \delta) = \delta^{-1} \int_t^{t+\delta} dt' X_H(t') = \int_{-\infty}^{\infty} dt' X_H(t') \Phi_1(t-t') \quad (2.28)$$

onde:

$$\Phi_1(t) = \begin{cases} \delta^{-1} & \text{se } 0 \leq t \leq \delta \\ 0 & \text{no restante do domínio} \end{cases}$$

A função $X_H(t, \delta)$ possui uma derivada estacionária, dada por:

$$X_H'(t, \delta) = \delta^{-1} [X_H(t+\delta) - X_H(t)] = - \int_{-\infty}^{\infty} d\Phi_1(t-t') X_H(t') \quad (2.29)$$

Para valores muito pequenos de δ , os processos $X_H(t)$ e $X_H(t; \delta)$ não podem ser distinguidos em termos práticos, com exceção dos efeitos de altas frequências que geram a não-diferenciabilidade de X_H .

A correlação entre dois incrementos de $X_H(t)$ é outra propriedade interessante para a utilização do **mBf** como modelo físico. Supondo os pontos conhecidos nos instantes fixos e não negativos T , T_1 e T_2 , podemos estabelecer a correlação entre os incrementos de $X_H(t)$ sobre os intervalos de tempo $T/2 \rightarrow T_1$ e $-T/2 \rightarrow T_2$ como sendo:

$$C(S_1, S_2) = \frac{1}{2} \frac{(1+S_1+S_2)^{2H+1} - (1+S_1)^{2H} - (1+S_2)^{2H}}{(S_1 S_2)^H} \quad (2.30)$$

onde $S_1 = T_1/T$ e $S_2 = T_2/T$.

Para quaisquer valores de S_1 e S_2 (FIG 2.4) temos que a correlação é positiva (persistente) para $1/2 < H \leq 1$, negativa (antipersistente) para $0 < H < 1/2$ (Mandelbrot e Van Ness, 1968) e nula para $H = 0$ e $1/2$.

Conhecendo-se dois valores de X_H , como por exemplo, $X_H(0) = 0$ por conveniência e $X_H(T)$ com $T > 0$, podemos extrapolar e interpolar valores no intervalo $-\infty < t < \infty$, a partir da fórmula de interpolação/extrapolação, em função da variável reduzida $s = t/T$:

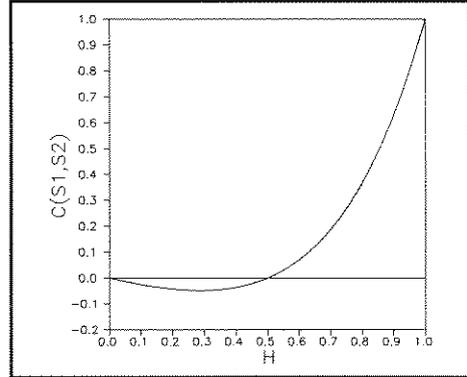


FIG 2.4 - Evolução do comportamento de $C(S_1, S_2)$ em função de H

$$Q_H(s) \equiv \frac{1}{2} [s^{2H+1} - |s-1|^{2H}] \quad (2.31)$$

Para $H = 1/2$ a interpolação se faz por meio de linhas retas e a extrapolação considera que a melhor estimativa do próximo ponto é o ponto anterior, portanto, $X_H(t) = X_H(T)$ para $t > T$ ou $X_H(t) = X_H(0)$ para $t < 0$.

Quando $1/2 < H < 1$, $Q_H(s)$ apresenta uma derivada contínua que satisfaz as relações:

$$Q_H'(0) < 0 \quad , \quad Q_H'(1) < 1 \quad \text{e} \quad Q_H'(1/2) > 1$$

resultando em interpolações segundo curvas suaves. Para extrapolação, temos que $Q_H(s) \approx H|s|^{2H-1}$ para grandes valores de s , o que determina uma tendência não-linear divergente para $t \rightarrow \pm\infty$.

No caso de $0 < H < 1/2$, $Q_H(s)$ é diferenciável com exceção dos pontos $s = 0$ e $s = 1$, onde apresenta cúspides. Para grandes valores de s , $Q_H(s) \sim 1/2$, o que determina a extrapolação segundo uma tendência que converge para o valor médio de $X_H(0)$ e $X_H(T)$.

A FIG 2.5 mostra a evolução da interpolação/extrapolação para os casos de $0 < H < 1/2$

e $1/2 < H < 1$. Estes resultados podem ser generalizados para mais de dois pontos conhecidos, obtendo-se expressões um pouco mais complicadas, porém ainda como funções de variáveis reduzidas convenientemente escolhidas.

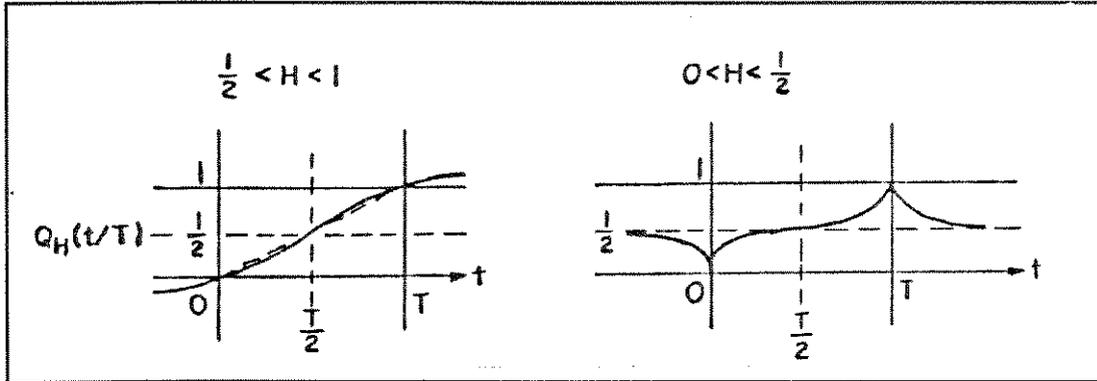


FIG 2.5 - Esquemas para interpolação e extrapolação para mBf, adaptado de Mandelbrot e Van Ness, 1968.

A função rGf também constitui um modelo estocástico com propriedades interessantes (Mandelbrot e Van Ness, 1968). Sendo um processo estacionário, a covariância entre incrementos separados por um intervalo de tempo τ é dada por:

$$C_H(\tau, \delta) = \frac{1}{2} V_H \delta^{2H-2} \left[\left(\frac{|\tau|}{\delta} + 1 \right)^{2H} - 2 \left(\frac{|\tau|}{\delta} \right)^{2H} + 1 \right] \quad (2.32)$$

que se reduz a:

$$C_H(\tau, \delta) = V_H H(2H-1) |\tau|^{2H-2} \quad (2.33)$$

para $\tau \gg \delta$.

Estas funções foram estudadas por Mandelbrot e Wallis (1969a,b,c), para vários valores de H e de outro parâmetro denominado M = "memória do processo". Esta "memória" se refere ao fato de não se contar com séries temporais de tamanho infinito nos processos práticos, havendo necessidade de se estudar o efeito do volume de dados nas estatísticas.

Em especial, observaram que testes estatísticos demonstram que as séries geradas com valores de $H < 0,5$ são ricas em termos de altas frequências, fazendo com que grandes valores positivos apresentem a tendência a ser seguidos por grandes valores negativos, promovendo um

tipo de "compensação". Já para $H > 0,5$ o **rGf** é preferencialmente dominado por termos de baixa frequência, levando à característica de os grandes valores positivos ou negativos tenderem a persistir.

Os autores acima recomendam que as séries artificialmente produzidas em ensaios de computador sejam comparadas com os registros naturais, para verificar visualmente a adequação do uso do **rGf** como modelo. Caso a aparência das curvas seja muito diferente, podemos descartar o uso destas funções. Já se houverem semelhanças, porém, ainda que com pequenas distorções, deve-se tentar um valor diferente de H . Quando o grau de ajuste visual parecer adequado, deve-se então partir para testes estatísticos que quantifiquem o bom ajuste.

Ainda no mesmo trabalho, Mandelbrot e Wallis (1969) destacam a característica visual de **rGf's** sintéticos com $0,5 < H < 1$ apresentarem, desafortunadamente, aspectos de ciclicidade, embora no seu mecanismo gerador não esteja embutida nenhuma estrutura periódica, levando os autores a concluir que os ciclos devem ser considerados efeitos espúrios. A amplitude aparente destes ciclos é da ordem de $1/3$ do tamanho total da amostra, variando proporcionalmente com o mesmo (efeito "memória"). Os testes estatísticos de análise espectral ou de Fourier realizados pelos autores não confirmam esta aparente periodicidade do ruído Gaussiano fractal.

Outro resultado interessante apontado pelos autores acima refere-se à correlação entre médias amostrais de eventos passados (**P**) e futuros (**F**). Neste caso, verificaram que, mesmo tomando médias de intervalos longos e sucessivos, elas poderiam ter valores muito diferentes, sendo também diferentes da média amostral tomando os dois intervalos em conjunto.

As conclusões dos autores com referência à diferença entre as médias podem ser melhor entendidas através das FIG. 2.6 e 2.7. Definindo:

$$\Delta_{F,P} = \frac{1}{F} \sum_{u=1}^F X(u) - \frac{1}{P} \sum_{u=1-P}^0 X(u) \quad (2.34)$$

onde $\Delta_{F,P}$ é a diferença entre médias amostrais de eventos **F** e **P**.

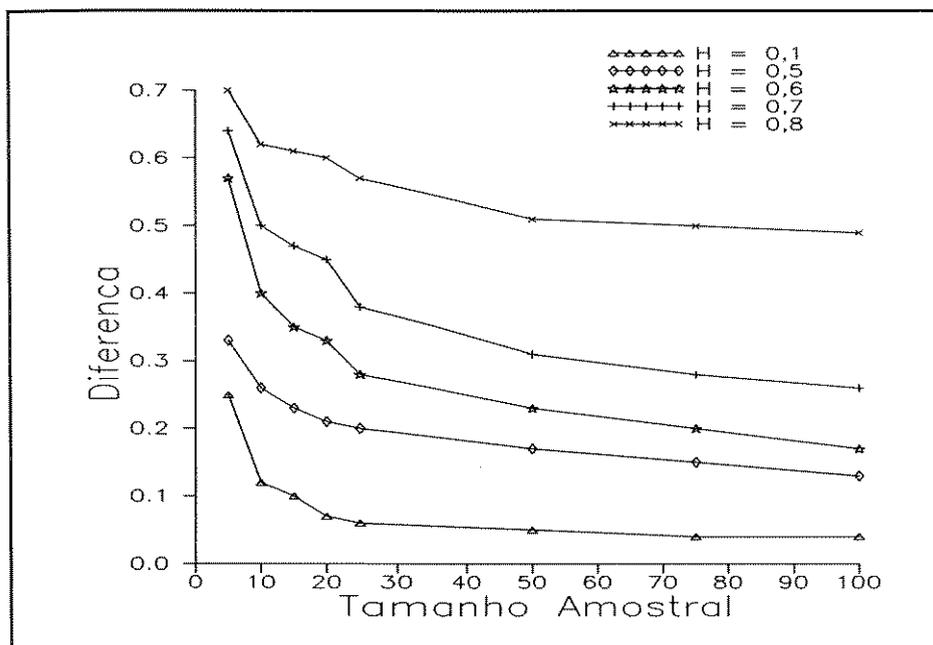


FIG 2.6 - Influência de H e do tamanho amostral na diferença entre médias amostrais de eventos futuros F e passados $\Delta_{F,P}$. Memória = 10000, adap. de Mandelbrot e Wallis, 1969.

Na Fig. 2.6 foram plotadas médias calculadas a partir de séries geradas com valores distintos de **H** e tamanho fixo de "memória" **M = 10000**. O número de amostras futuras foi mantido em **F = 50** e o de **P** variou entre $5 \leq P \leq 100$.

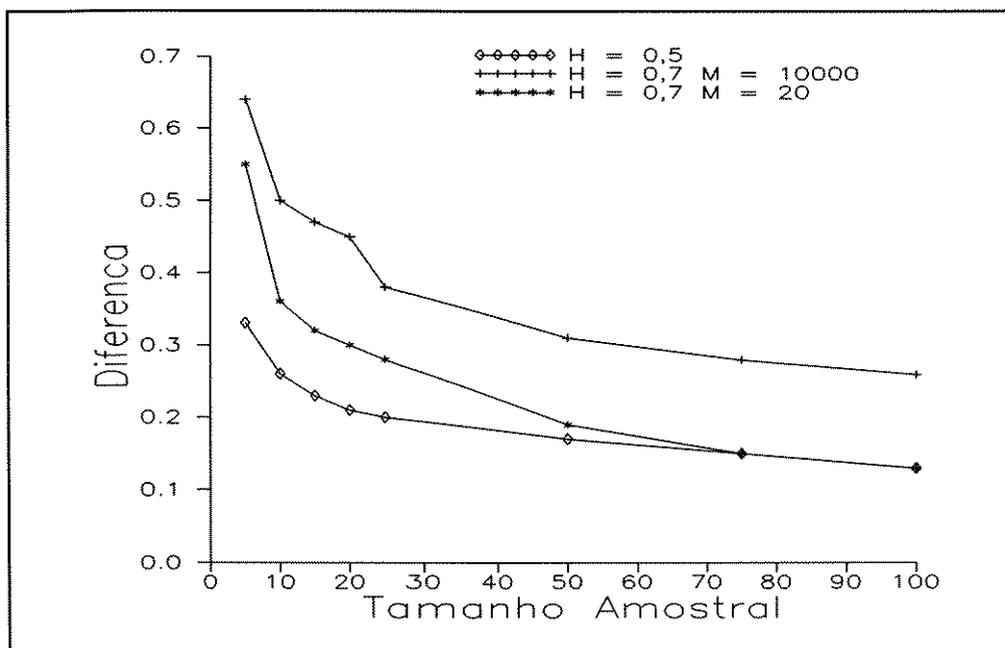


FIG 2.7 - Comportamento de $\Delta_{F,P}$ frente a valores diferentes de H e P e com variação de M, adaptado de Mandelbrot e Wallis, 1969.

Para um mesmo valor de P a média de $|\Delta_{f,p}|$ aumenta rapidamente com o aumento de H . Para um mesmo valor de H , a média diminui à medida que P aumenta.

Na FIG. 2.7 foram tomadas as mesmas curvas para $H = 0,7$ e $H = 0,5$ da figura anterior, acrescidas da curva para $H = 0,7$ e $M = 20$. Pode ser visualizado o efeito do tamanho da memória, observando-se que a curva para $M = 20$ apresenta comportamento de pequena escala próximo ao de $H = 0,7$ e $M = 10000$ mas, para grande escala, tende ao comportamento de $H = 0,5$.

Portanto, para o modelamento de fenômenos naturais a partir de séries de rGf sintéticas, não importa somente conhecer o valor adequado de H mas também, para melhor ajuste, deve-se gerar séries com tamanho de memória grande, mais precisos para o processo de interpolação e extrapolação das propriedades.

Capítulo III - SISTEMAS DINÂMICOS

III.1 - INTRODUÇÃO

Para um grande número de sistemas físicos, ao provocarmos pequenas modificações nas condições iniciais, pouco iremos alterar o resultado final. Como exemplo, uma torneira pouco aberta deixa fluir a água em fluxo laminar e, para pequenas modificações na abertura da mesma, não iremos alterar as condições de fluxo da água, permitindo que uma pessoa lave as mãos sem se molhar.

Há outros sistemas que tem como propriedade típica uma dependência muito acentuada para condições iniciais, observando-se efeitos contrários ao salientado acima. No mesmo exemplo, a partir de um ponto crítico de abertura, o fluxo de água passa a ser turbulento. Nesta região, um pequeno deslocamento na abertura da torneira muda o regime de fluxo, fazendo com que, em termos práticos, a pessoa em volta se molhe.

Este comportamento completamente imprevisível passou a ser conhecido como comportamento caótico (do grego *χαος*: vácuo, desordem, confusão ou, na mitologia, ente primordial), podendo se desenvolver em sistemas dinâmicos não-lineares com mais de dois graus de liberdade para equações diferenciais, ou mais de um grau de liberdade para diferenças finitas (Schuster, 1984).

Nos últimos anos desenvolveram-se muitos métodos para a classificação dos diferentes tipos de caos, descobrindo-se que vários sistemas diferentes apresentam transições semelhantes da ordem para o caos, podendo esta rota ser controlada por meio de parâmetros externos.

Até o final do século passado, acreditava-se que os sistemas determinísticos, governados por equações diferenciais para calcular o comportamento futuro do processo a partir de condições iniciais, eram completamente regulares e longe de serem caóticos, pois os estados sucessivos evoluíam continuamente dos estados anteriores. Poincaré (1892) foi o pioneiro em demonstrar que alguns sistemas mecânicos, cuja evolução temporal é dada por equações de

Hamilton, poderiam apresentar comportamento caótico.

Somente após o trabalho de Lorenz (1963), a descoberta de Poincaré deixou de ser uma mera curiosidade científica. Neste trabalho, Lorenz analisou um conjunto de três equações diferenciais não-lineares de primeira ordem, chegando à conclusão que elas poderiam levar a trajetórias caóticas.

O termo caos determinístico é utilizado para designar o movimento irregular ou caótico, gerado por sistemas não-lineares cujas leis dinâmicas determinam, de forma única, a evolução temporal de um estado do sistema, a partir do conhecimento de um histórico do mesmo (Schuster, 1984).

A predição do comportamento futuro destes sistemas para tempos muito longos é impossível de forma prática, uma vez que as condições iniciais e os cálculos podem ser estabelecidos somente com uma precisão finita, mas os erros crescem de forma exponencial, conduzindo rapidamente ao caos.

Os sistemas não-lineares podem ser divididos em sistemas dissipativos e sistemas conservativos (Schuster, 1984). Nos dissipativos só ocorre a transição para o caos nos casos em que o sistema sofre influência externa, ou seja, se ele for aberto (Schuster, 1984).

Até o presente, admite-se que existam pelo menos quatro rotas distintas que conduzem ao caos em sistemas dissipativos.

Uma proposta foi efetuada por Ruelle e Takens (1971) e Newhouse (1978), seguindo idéias pré-lançadas por Landau e Lifshitz (1959). Este último considerava a turbulência no tempo como o limite de uma seqüência infinita de instabilidades, cada uma delas criando uma nova freqüência básica quasi-periódica. Os primeiros autores provaram que, já após a terceira iteração, a trajetória passa a ficar confinada a uma região limitada do espaço de fases, nas quais as trajetórias, inicialmente pouco separadas, se afastam exponencialmente, de modo que o movimento passa a ser caótico. A região do espaço de fase recebe o nome de bacia atratora.

Uma segunda proposição, feita por Manneville e Pomeu (1979), é conhecida como rota de intermitência. Por intermitência entendem-se os movimentos irregulares estatisticamente

distribuídos, que passam a afetar um sinal de comportamento regular no tempo. O número destas interferências aumenta de acordo com a variação de um parâmetro de controle externo, até atingir estágios completamente caóticos.

Outra rota bastante conhecida é a rota de bifurcações, estabelecida por Grossmann e Thomae (1977), Feigenbaum (1978) e Coulet e Tresser (1978). Analisando uma equação diferencial simples para descrever a taxa de variação de populações ao longo do tempo, observaram que o tamanho da população oscila entre valores fixos, cujo número dobra para certos valores particulares de um parâmetro externo de controle. A partir daí as variações passam a ser irregulares. Esta equação também possui grande aplicabilidade para outros sistemas físicos.

Uma quarta rota foi proposta por Souza Viera, Lazo e Tsallis (1987) quando discutiram a assimetria introduzida nas equações estudadas por Feigenbaum, mostrando uma descontinuidade na origem, que se reflete em "cascatas" que levam ao caos de forma diferente que o cenário exposto em Feigenbaum.

III.2 - CARACTERIZAÇÃO DO MOVIMENTO CAÓTICO

A caracterização das trajetórias que levam ao caos pode ser feita de forma qualitativa, analisando-se os gráficos dos mapas resultantes das equações diferenciais.

Um exemplo destes mapas é o da FIG 3.1, que representa um corte de uma superfície no espaço de fase de muitas dimensões, conhecida por superfície ou seção de Poincaré, onde se estuda a figura formada

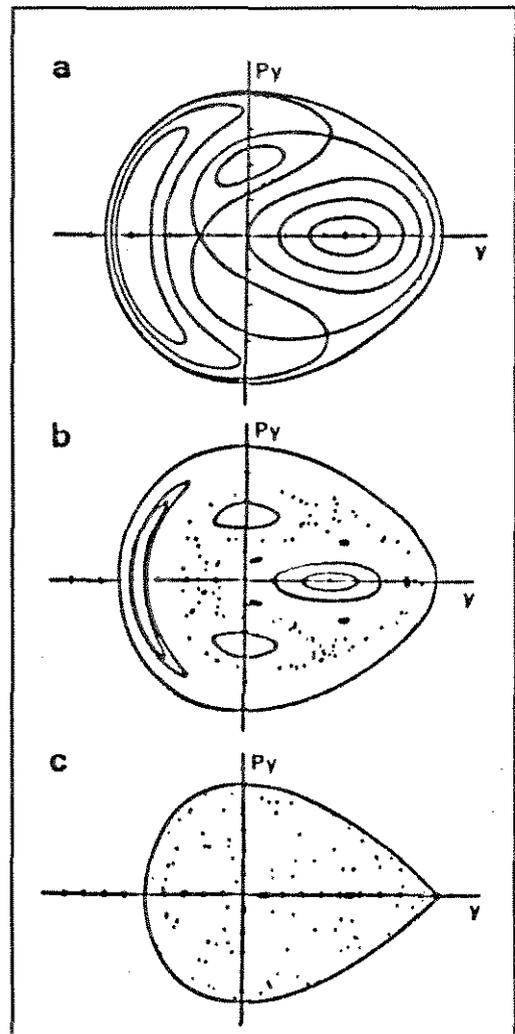


FIG 3.1 - Mapa de Hénon-Heiles, adaptado de Ciência Hoje, v14, n80.

pelos pontos em que a superfície é perfurada pelas trajetórias. Nesta figura, a seção de Poincaré

representa um corte no modelo de Hénon-Heiles, que descreve o movimento de uma estrela dentro de uma galáxia com simetria axial. Para baixas energias (a), o comportamento é regular, formando curvas fechadas. Em energias intermediárias (b), ocorrem regiões regulares e caóticas. Para altas energias (c), os pontos se distribuem de maneira complicada, não formando curvas fechadas, caracterizando o comportamento predominantemente caótico.

As medidas quantitativas para caracterizar o movimento caótico são:

- i) expoente de Lyapunov: descreve o afastamento de dois pontos originalmente próximos pela ação de uma função de iteração f ;
- ii) medida invariante: mostra a distribuição dos valores iterados no intervalo unitário;
- iii) função de correlação: mede a correlação entre iterações distantes de m passos.

III.2.1 - EXPOENTE DE LYAPUNOV

A partir do mapeamento de uma equação simples como:

$$\xi_{t+1} = f(\xi_t) \tag{3.1}$$

observamos que pontos inicialmente muito próximos podem sofrer uma separação exponencial, levando ao caos (FIG. 3.2).

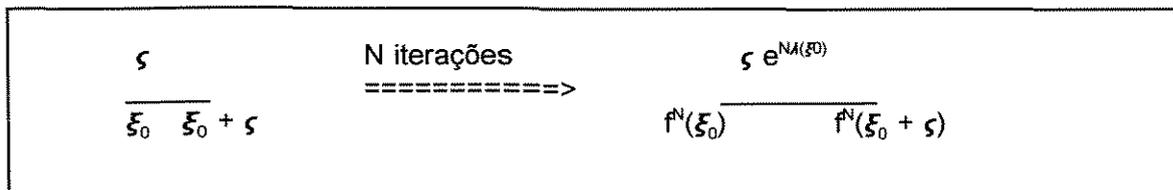


FIG 3.2 - Definição do expoente de Lyapunov, adaptado de Schuster, 1984.

Dois pontos distantes de ϵ , após N iterações ficarão a uma distância:

$$\epsilon \cdot e^{N\lambda(\xi_0)}$$

Olhando a FIG 3.2 podemos verificar que:

$$\epsilon \cdot e^{N\lambda(\xi_0)} = |f^N(\xi_0 + \epsilon) - f^N(\xi_0)| \tag{3.2}$$

onde $\lambda(\xi_0)$ é o expoente de Lyapunov, que mede a separação exponencial entre os dois pontos.

A definição matemática é obtida aplicando-se os limites $\epsilon \rightarrow 0$ e $N \rightarrow \infty$ na expressão 3.2:

$$\lambda(\xi_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{f^N(\xi_0 + \zeta) - f^N(\xi_0)}{\zeta} \right| \quad (3.3)$$

ou ainda:

$$\lambda(\xi_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{d f^N(\xi_0)}{d \xi_0} \right| \quad (3.4)$$

O termo $e^{N\lambda(\xi_0)}$ mede o fator médio pelo qual a distância entre dois pontos próximos aumenta após uma iteração.

O expoente de Lyapunov também mede, em média, a perda de informação após cada iteração em torno da posição de um ponto no intervalo [0,1]. Isto pode ser interpretado matematicamente aplicando a regra da cadeia em 3.3, obtendo-se:

$$\frac{d}{d\xi} f^2(\xi) \Big|_{\xi_0} = \frac{d}{d\xi} [f(f(\xi))] \Big|_{\xi_0} = f'[f(\xi_0)]f'(\xi_0) = f'(\xi_1)f'(\xi_0) \quad (3.5)$$

sendo: $\xi_1 \equiv f(\xi_0)$.

Podemos então reescrever $\lambda(\xi_0)$ como:

$$\lambda(\xi_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(\xi_i) \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(\xi_i)| \quad (3.6)$$

Apenas como exemplo, podemos calcular a perda de informação após uma iteração com um mapa linear. Dividimos um intervalo [0,1] em n partes iguais, nas quais um ponto ξ_0 pode ocorrer com igual probabilidade $1/n$. A informação adquirida ao verificar o primeiro intervalo que contém ξ_0 é dada por:

$$I_0 = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{n} = \log_2 n \quad (3.7)$$

Ao diminuir o valor de n, a informação I_0 também reduz, até atingir zero para $n=1$. Na FIG. 3.3 observa-se que a função $f(\xi)$ muda o comprimento de um intervalo por um fator $a = |f'(0)|$, resultando na perda de informação após o mapeamento de:

$$\Delta I = -\sum_{i=1}^{n/a} \frac{a}{n} \log_2 \frac{a}{n} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{n} = -\log_2 a = -\log_2 |f'(0)| \quad (3.8)$$

A perda média de informação, calculada assumindo que $|f'(\xi)|$ varia de ponto a ponto, obtendo-se médias para várias iterações, fornece:

$$\overline{\Delta I} = -\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log_2 |f'(\xi_i)| \quad (3.9)$$

que é proporcional ao expoente de Lyapunov:

$$\lambda(\xi_0) = \ln 2 \cdot |\overline{\Delta I}|$$

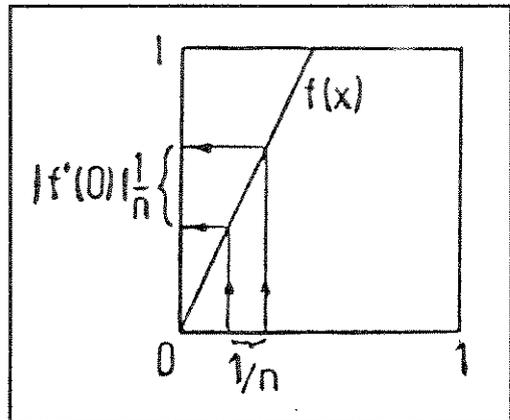


FIG 3.3 - Mudança de resolução em um mapa $f(\xi)$, adaptado de Schuster, 1987.

Para mapeamentos com dimensões maiores, em primeiro lugar devem ser estudados os pontos fixos e a sua estabilidade.

Uma solução é considerada um ponto fixo de um mapa $f(\xi)$ se:

$$\xi^* = f(\xi^*) \quad (3.10)$$

ou seja, os pontos fixos são interseções de $f(\xi)$ com a bissetriz no gráfico ξ vs $f(\xi)$ (FIG 3.4). Este ponto é considerado estável se todos os pontos ξ_0 próximos a ξ^* são atraídos para ele após N iterações.

Nos casos em que uma seqüência de iterações não apresenta

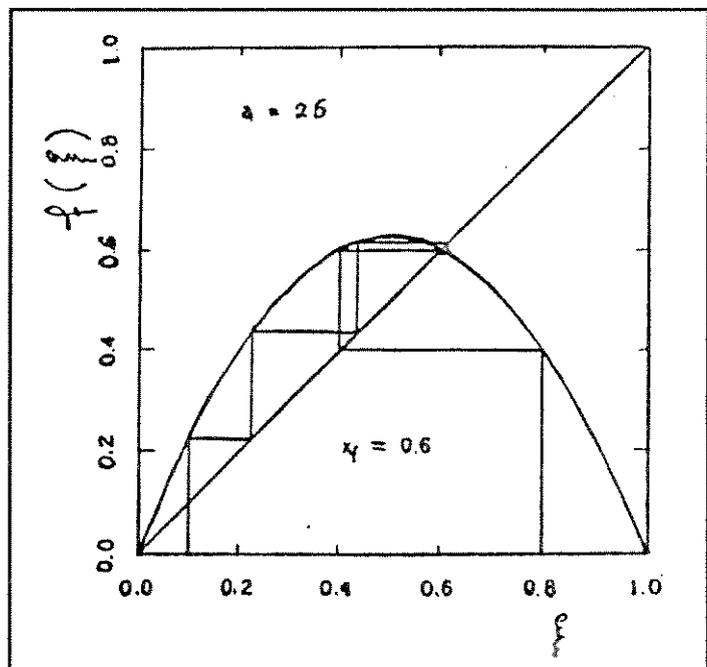


FIG 3.4 - Gráfico de ξ x $f(\xi)$ mostrando um ponto fixo estável, adaptado de Feigenbaum, 1978.

pontos fixos estáveis, a separação entre dois pontos inicialmente próximos cresce exponencialmente e o expoente de Lyapunov torna-se independente de ξ_0 após n iterações

(Schuster, 1984):

$$\lambda = \ln 2 \quad (3.11)$$

III.2.2 - MEDIDA INVARIANTE

Tomando-se por base um mapa como o fornecido por 3.1 em um intervalo $[0, 1]$ podemos definir a medida invariante $\rho(\xi)$ como sendo a densidade de estados do resultado das iterações, dada pela expressão:

$$\rho(\xi) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \delta[\xi - f^i(\xi_0)] \quad (3.12)$$

A fórmula acima permite calcular médias temporais sobre uma função $g(\xi)$ como se fossem médias sobre a medida invariante, ou seja:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N g(\xi) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N g[f^i(\xi_0)] = \int_0^1 d\xi g(\xi) \rho(\xi) \quad (3.13)$$

Observamos então que, para uma dimensão, restabelecemos a fórmula clássica da média em mecânica estatística e, para sistemas ergódicos, podemos trocar a média temporal por uma média de "ensemble" sobre uma distribuição estacionária $\tilde{\rho}$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^1 dt A[\vec{\xi}(t)] = \int d\vec{\xi} A(\vec{\xi}) \tilde{\rho}(\vec{\xi}) \quad (3.14)$$

onde a função A depende do vetor

$$\vec{\xi} = [p(t), q(t)]$$

q são coordenadas;

p são momentos.

III.2.3 - FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO

Consideremos novamente o mapa da equação 3.1, sobre o qual calculamos o desvio de cada iteração em relação ao valor médio:

$$\hat{\xi}_j = \xi_j - \bar{\xi} \quad (3.15)$$

A função de correlação $C(m)$ é definida como sendo a medida da afinidade entre dois desvios calculados a partir de 3.15 e separados por m passos:

$$C(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \hat{\xi}_{i+m} \hat{\xi}_i \quad (3.16)$$

Podemos escrever também a função de correlação em termos da medida invariante como sendo:

$$C(m) = \int_0^1 d\xi \rho(\xi) \xi f^m(\xi) - \left[\int_0^1 d\xi \rho(\xi) \xi \right]^2 \quad (3.17)$$

III.3 - EQUAÇÃO LOGÍSTICA

Uma das equações não-lineares mais simples é a chamada equação logística ou mapa logístico. Esta é uma expressão recursiva cuja forma canônica é:

$$f(\xi_j) \equiv \xi_{j+1} = b\xi_j(1-\xi_j) \quad (3.18)$$

Tomando-se inicialmente um valor ξ_0 que entra na equação como ξ_t , calcula-se o valor de ξ_1 como ξ_{t+1} . Em seguida, pega-se o valor de ξ_1 e obtém-se o valor de ξ_2 . O processo segue recursivamente gerando o mapa $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$.

As iterações de 3.18 foram estudadas por May (1976), que observou pela primeira vez o notável comportamento desta equação, dependendo do valor escolhido para a constante b .

Uma particularidade de 3.18 vista por May (1976) é a de que os valores de ξ devem estar restritos ao intervalo (0,1). Para valores maiores que 1, as iterações divergem rapidamente

para $-\infty$. A função apresenta um valor máximo em $\xi = 1/2$ correspondente a $b/4$. Para um comportamento dinâmico não-trivial, requer-se que $b < 4$. Já para $b < 1$, todas as trajetórias são atraídas para $\xi = 0$. Portanto, o domínio aceitável para soluções não-trivias restringe o parâmetro b para $1 < b < 4$. Para fora destes limites o processo se extingue.

Para um melhor entendimento da mecânica do processo, estudam-se os pontos fixos desta equação, fazendo-se $\xi_{t+1} = \xi_t$ em 3.18. Resolvendo-se para ξ_t obtém-se dois pontos fixos, a saber: $\xi_{t1} = 0$ e $\xi_{t2} = 1 - 1/b$.

O próximo passo consiste em saber se o mapeamento converge ou diverge para estes pontos fixos. Define-se:

$$\Upsilon = \left(\frac{df(\xi_t)}{d\xi_t} \right)_{\xi_t = \xi_{ta}} \quad (3.19)$$

como sendo a inclinação da função $f(\xi_t)$ no ponto fixo ξ_{ta} , $a=1,2,\dots$. Para $|\Upsilon| < 1$ o ponto fixo é um atrator (estável), mas, para $|\Upsilon| > 1$ o ponto fixo é instável (divergente) (Turcotte, 1992).

Para $\xi_{t1} = 0$ temos $\Upsilon = b$ e para $\xi_{t2} = 1 - 1/b$, $\Upsilon = 2 - b$. Tomando valores positivos para b , temos que o ponto fixo ξ_{t1} é estável no intervalo $0 < b < 1$ e instável para $b > 1$. Já o ponto fixo ξ_{t2} é instável para $0 < b < 1$, estável para $1 < b < 3$ e instável para $b > 3$.

A equação logística também pode ser escrita na forma generalizada:

$$\xi_{t+1} = 1 - a|\xi_t|^z \quad (3.20)$$

Quando $z = 2$, esta forma é equivalente à expressão 3.18.

Hauser, Tsallis e Curado (1984) estudaram o comportamento de 3.20 no contexto de grupos de renormalização. Observaram que esta equação possui duas raízes $\xi_{t1}(a) \geq 0$ e $\xi_{t2}(a) \leq 0$. A primeira é igual a 1 para $a = 0$ e decresce à medida que a aumenta, convergindo para um ponto fixo para valores pequenos de a ($= 3/4$ p/ $z=2$). A partir deste ponto, o comportamento passa a ser instável, convergindo para ciclos de 2^k pontos, com $k = 1,2,3,\dots$, até entrar em regime caótico, quando a convergência passa para infinitos pontos. O valor de a crítico (a^*) para a entrada em caos depende do valor de z . Sabe-se que para $a = 2$ o sistema é caótico

independente do valor de z . Para $a > 2$ a função rapidamente diverge para qualquer valor de z . A rota para o caos para $z = 2$ está esboçada na FIG. 3.5. Para $z \geq 1$ o comportamento é sempre semelhante. O valor de a^* cresce no intervalo $1 \leq a^* \leq 2$, para z variando entre $1 \leq z < \infty$.

Observando mais atentamente a FIG 3.5, nota-se que, mesmo para valores de $a > a^*$, existem ainda janelas de atratores finitos misturados com as regiões caóticas.

A rota para o caos com as características da FIG 3.5 não é exclusiva da equação 3.20, podendo também ser constatada em várias outras, que compartilham entre si algumas poucas propriedades matemáticas como, por exemplo, o fato de terem um único máximo (Feigenbaum, 1978).

A equação logística com $z = 2$ tem várias propriedades como a seqüência de bifurcação, janelas de atratores finitos, constantes universais, entre outras, que têm sido medidas em vários experimentos de sistemas físicos tais como os hidrodinâmicos, ópticos, acústicos, eletrônicos, biológicos e químicos (Tamarit et all, 1992).

Em muitos sistemas físicos, normalmente são observados fenômenos de assimetria, ou seja, comportamentos diferenciados para $\xi \rightarrow 0_+$ e $\xi \rightarrow 0_-$. Souza Vieira, Lazo e Tsallis (1987) introduziram um termo de assimetria na equação 3.20, obtendo:

$$f(\xi_t) \equiv \xi_{t+1} = \begin{cases} 1 - \epsilon_1 - a_1 |\xi_t|^{z_1} & \text{se } \xi_t > 0 \\ 1 - \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) & \text{se } \xi_t = 0 \\ 1 - \epsilon_2 - a_2 |\xi_t|^{z_2} & \text{se } \xi_t < 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

que constitui uma generalização de 3.20.

Estes autores verificaram que o mapa de 3.21 fornece um tipo de diagrama de fase no espaço definido por $(\epsilon_1, \epsilon_2, a_1, a_2)$, onde conjuntos complexos de hipersuperfícies de p-furcações ocorrem nos pontos críticos como a entrada em caos, que corresponde a uma generalização de $a^*(z)$; e outra que corresponde a uma generalização do ponto onde desaparecem os atratores finitos. A evolução dos atratores nesta equação é uma função de $(\epsilon_1, \epsilon_2, a_1, a_2)$, da mesma forma como o expoente de Lyapunov.

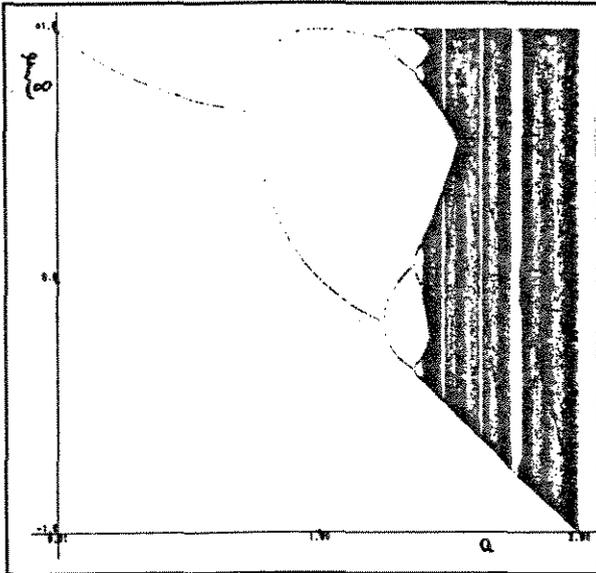


FIG 3.5 - Rota para o caos da equação logística com $Z = 2$ e $\xi(0) = 0,5$.

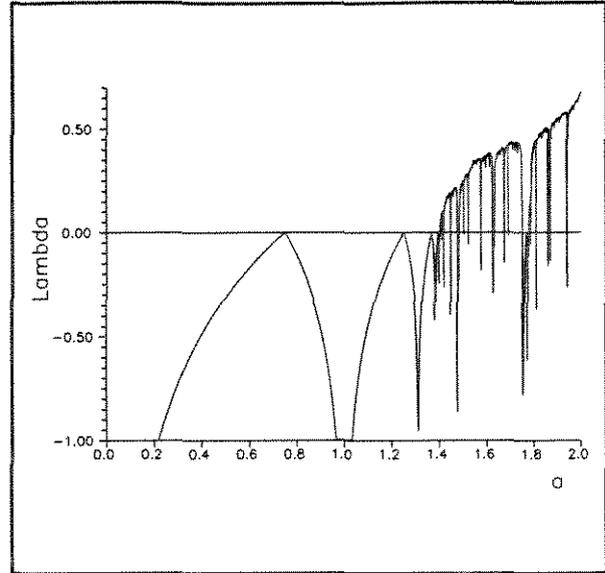


FIG 3.6 - Evolução dos expoentes de Lyapunov em função de a , para a equação logística com $Z = 2$, $\xi(0) = 0,5$.

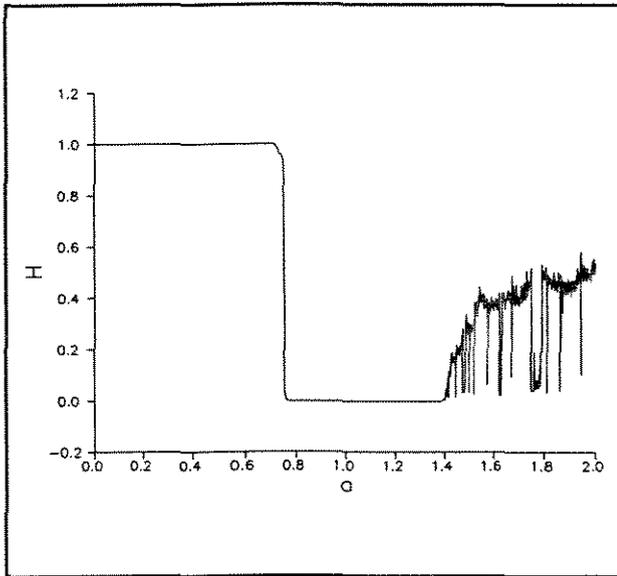


FIG 3.7 - Evolução de $H(Z,a)$ em função de a , para a equação logística com $Z = 2$ e $\xi(0) = 0,5$.

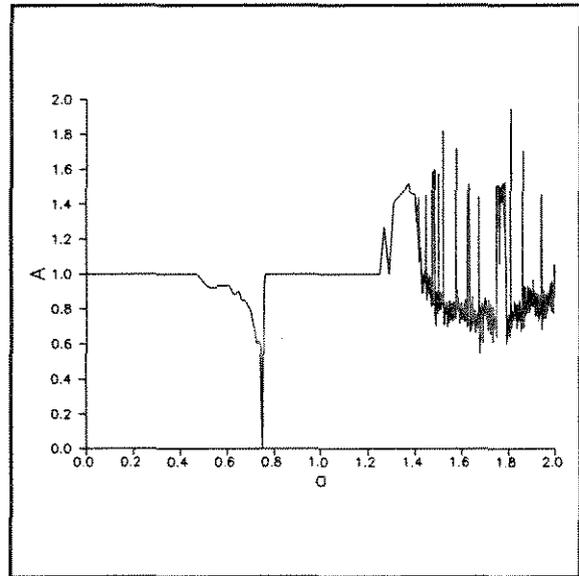


FIG 3.8 - Evolução de $A(Z,a)$ em função de a para a equação logística com $Z = 2$ e $\xi(0) = 0,5$.

A quantificação do movimento caótico para a equação logística pode ser feita por meio de expoentes de Lyapunov (FIG. 3.6). Para expoentes negativos, as soluções adjacentes convergem e são, portanto, previsíveis. Para expoentes positivos as soluções adjacentes divergem e obtém-se o caos (Turcotte, 1992). Nos pontos onde o expoente se iguala a zero, ocorrem as bifurcações da rota para o caos.

Para os trabalhos desta tese, calculamos séries temporais com base na equação 3.20 para vários valores de a e z , aplicando posteriormente a técnica de análise R/S (Capítulo IV) para obter os valores do expoente de Hurst $H(z,a)$ e da amplitude $A(z,a)$.

A FIG. 3.7 mostra a evolução de H vs a e a FIG 3.8 a evolução de A vs a para valores fixos de $z = 2$, que refletem em essência a própria evolução dos atratores, em particular para $z > 1$, ao longo das sucessivas bifurcações que conduzem ao regime caótico para $a \in [a^*(z), 2]$ (Beer, Tsallis, Nascimento e Silva, a ser publicado).

Verificamos que:

- i) acima do valor crítico $a^*(z)$ ocorre um comportamento muito irregular, semelhante ao apresentado pelo expoente de Lyapunov;
- ii) para qualquer $z > 1/2$ e $a = 2$ temos $H = 1/2$, o que é consistente com o fato de termos essencialmente um gerador de números aleatórios para este valor de a ;
- iii) para $a < 1^a$ bifurcação temos $H = 1$, que passa para $H = 0$ no intervalo entre a 1^a bifurcação e $a^*(z)$.
- iv) para $a \geq a^*$ temos $H \leq 1/2$ em todos os casos, ou seja, o comportamento genérico ou é movimento aleatório ou tem caráter anti-persistente;
- v) a amplitude $A(z,a)$ apresenta um ruído (salto de ciclo) em cada ponto de bifurcação para $z > 1$.

Para o caso particular de caos com $a = 2$ calculamos as funções densidade de estados (ver item III.2.2) dos pontos ξ visitados ($D_z(\xi)$), que são funções contínuas no intervalo $(-1,1)$, FIG. 3.9.

As fórmulas exatas para $D_{1/2}(\xi)$ (Hemmer, 1984), $D_1(\xi)$ e $D_2(\xi)$ são:

$$D_{1/2}(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad (3.22)$$

$$D_1(\xi) = \frac{1}{2} \quad (\forall \xi) \quad (3.23)$$

$$D_2(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1-\xi^2)^{1/2}} \quad (3.24)$$

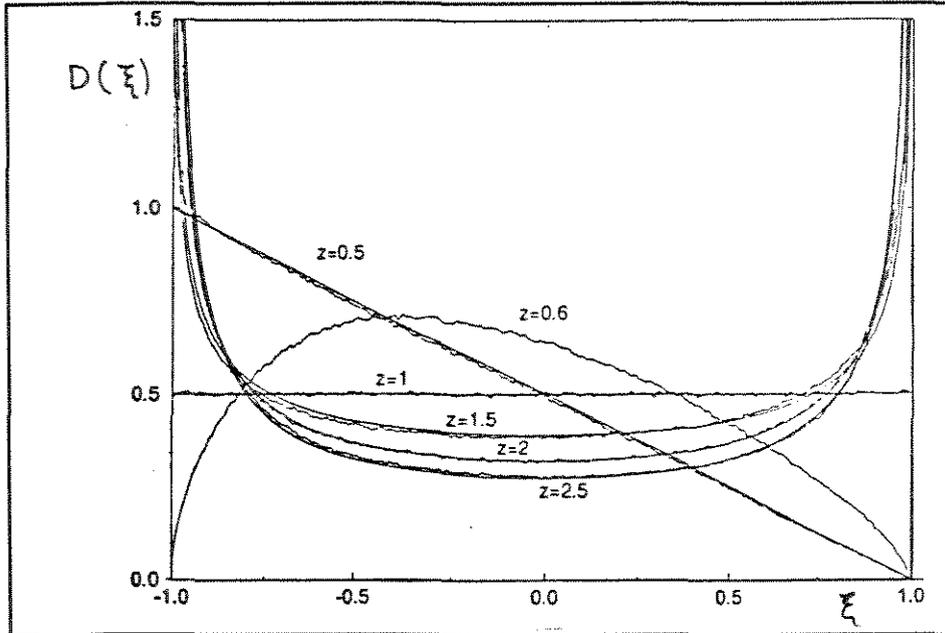


FIG 3.9 - Função densidade de estados para a equação logística com vários valores de Z, adaptado de Beer, Tsallis, Nascimento et al, não publicado.

Para valores de $z \geq 1$ propusemos heurísticamente a expressão:

$$D_z(\xi) = \frac{\Gamma(1/2+1/z)}{(\pi)^{1/2}\Gamma(1/z)} \frac{1}{(1-\xi^2)^{(z-1)/z}} \quad (3.25)$$

A fórmula proposta é exata para $z = 2$ e $z = 1$, apresentando uma pequena assimetria para outros valores de z , que se torna mais pronunciada para $z < 1$.

Definimos ainda um parâmetro de assimetria dado por:

$$M(z) \equiv \int_{-1}^0 d\xi D_z(\xi) - \int_0^1 d\xi D_z(\xi) \quad (3.26)$$

e a posição média:

$$\langle \xi \rangle (z) \equiv \int_{-1}^1 d\xi \xi D_z(\xi) \quad (3.27)$$

conforme pode ser visto nas FIG. 3.10 e FIG 3.11.

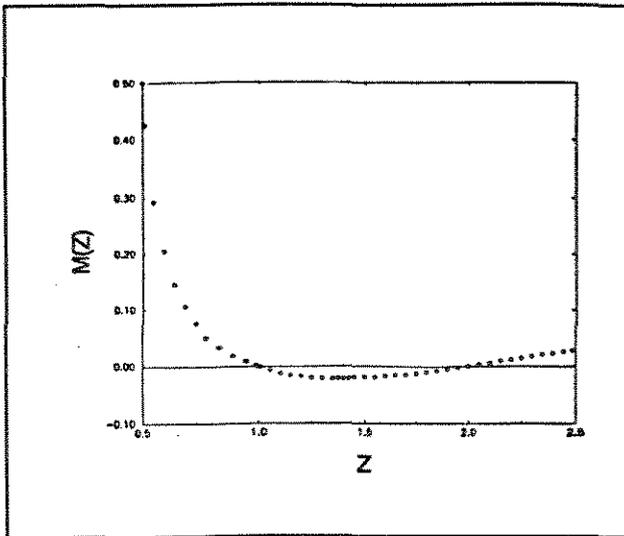


FIG 3.10 - Gráfico mostrando a assimetria $M(Z) \times Z$ para a equação logística, adaptado de Beer, Tsallis, Nascimento et al, não publicado.

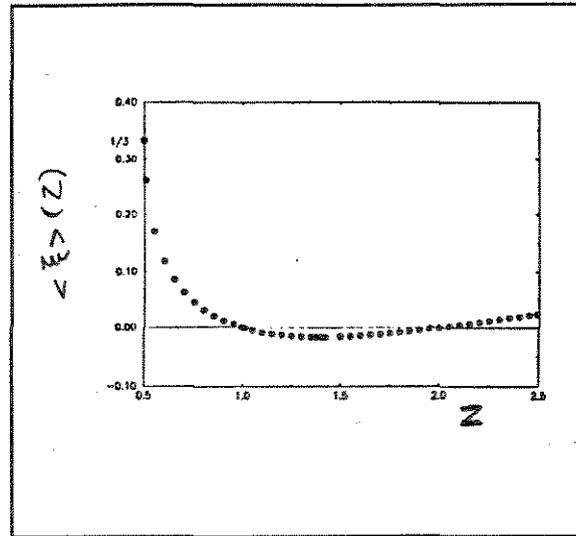


FIG 3.11 - Gráfico mostrando $\langle \xi \rangle(Z) \times Z$ para a equação logística, adaptado de Beer, Tsallis, Nascimento et al, não publicado.

Como conclusão, observamos que o gráfico H vs a pode se constituir em uma caracterização da rota para o caos diferente das quatro citadas anteriormente. A equação logística é um bom protótipo para efetuar testes em metodologias do tipo análise R/S.

CAPÍTULO IV - ANÁLISE R/S

IV.1 - INTRODUÇÃO

Os processos que dependem de seleções aleatórias nas ciências naturais, supostamente deveriam obedecer a duas proposições bem conhecidos (Korvin, 1992):

i) os sistemas naturais têm tempo de memória curto a nível microscópico, o que equivale a dizer que os efeitos de perturbações aleatórias atuando no sistema são sentidos durante um intervalo de tempo limitado, com a correlação dos eventos caindo exponencialmente;

ii) perturbações de pequena intensidade conduzem a alterações pequenas ou previsíveis no comportamento futuro do sistema.

Em muitos exemplos, entretanto, estes dois dogmas não são verdadeiros, como é o caso dos sistemas dinâmicos apresentados no Capítulo III, cuja evolução pode levar a rotas completamente caóticas, desobedecendo (ii), ou então, as funções mBf e rGf do Capítulo II, que podem apresentar correlações em várias escalas, não verificando a proposição (i).

As técnicas estatísticas comuns não são eficazes para o tratamento de sistemas com larga amplitude de correlações (Mandelbrot e Wallis, 1969e). Estes autores apontam uma técnica estabelecida por Hurst (1951), a qual denominaram análise **R/S**, para determinar parâmetros que caracterizam estas distribuições.

IV.2 - HISTÓRICO

O problema estudado em profundidade por Hurst (1951) estava ligado à construção de barragens. Durante muito tempo este cientista estudou o comportamento do rio Nilo, envolvido na construção da barragem de Assuã.

Do ponto de vista operacional, pretendia determinar o volume ideal de armazenamento de água em um reservatório, baseado nos dados de vazão de água requerida ao longo do tempo.

Um reservatório ideal deveria ter as seguintes propriedades:

- i) o volume de água fornecido para a usina (vazão de saída) deve ser constante;
- ii) o nível de água após um determinado período deve permanecer constante;
- iii) o lago não deve encher demais para não extravasar e;
- iv) a capacidade de armazenamento deve ser a menor possível, de modo a compatibilizar

i, ii, iii.

As condições i e ii determinam que o volume de água liberado por ano seja igual ao volume médio de água que entra no reservatório durante um período de τ anos. A condição iii implica em que o reservatório ideal também fique quase seco em algum período, para evitar ser superdimensionado.

Chamando o influxo de água no reservatório da barragem por $\xi(t)$ (FIG 4.1), definimos o influxo médio no período de τ anos como sendo:

$$\langle \xi \rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t) \quad (4.1)$$

Representando por $X(t, \tau)$ a acumulação da diferença entre o influxo $\xi(t)$ e o influxo médio:

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t \left\{ \xi(u) - \langle \xi \rangle_{\tau} \right\} \quad (4.2)$$

podemos definir a grandeza "range" $R(\tau)$ como sendo:

$$R(t, \tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) \quad (4.3)$$

É fácil compreender que a capacidade de armazenamento requerida para satisfazer às quatro condições acima é dada por $R(t, \tau)$.

Hurst (1951) estudou também vários outros registros geofísicos como nível de água em lagos, vazões de rios, regimes de chuvas entre outros, chegando à conclusão que, para poder comparar fenômenos com origem e características diferentes, era necessário dividir $R(t, \tau)$ pelo desvio padrão $S(t, \tau)$:

$$S(t, \tau) = \left(\frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \{ \xi(t) - \langle \xi \rangle_{\tau} \}^2 \right)^{1/2} \quad (4.4)$$

Com base nestes estudos (FIG 4.2), Hurst (1951) verificou que muitos registros naturais poderiam ser bem descritos pela relação:

$$\frac{R(t, \tau)}{S(t, \tau)} = B_{\tau}^H \quad (4.5)$$

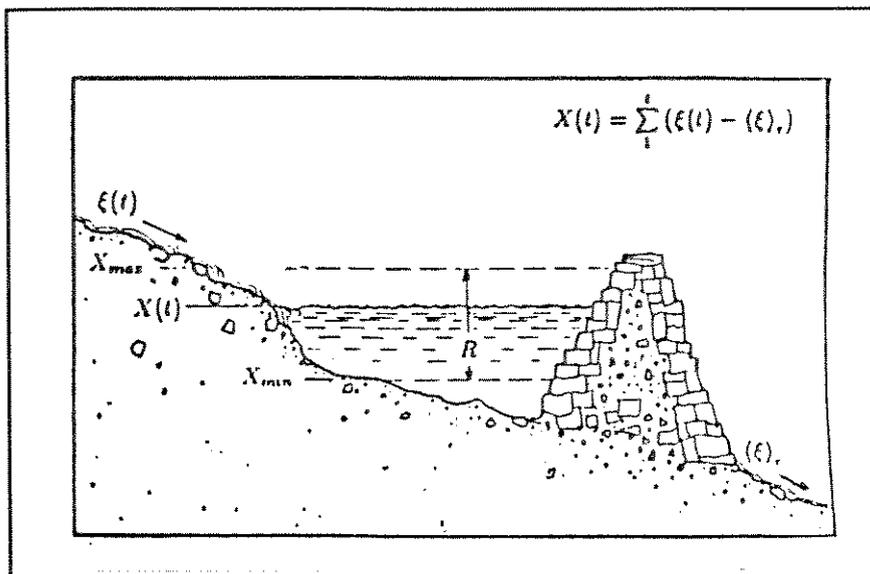


FIG 4.1 Esquema de um reservatório de água mostrando o significado das variáveis para a análise R/S, adaptado de Feder, 1988.

Mandelbrot e Wallis (1969 a,b,c,d) estudaram os fundamentos da análise R/S e sua real utilidade para a descrição de séries temporais com correlação em várias escalas, como é o caso das funções mBf e rGf. Perceberam que, apesar de a formulação inicial proposta por Hurst (1951) apresentar falhas, a idéia geral da lei era válida.

Lloyd (1967) reconhece a validade da lei de Hurst para fenômenos naturais, onde se esperava um crescimento de $R(t, \tau)$ segundo $\tau^{0,5}$, porém a partir dos casos bem documentados por Hurst (1951), os cientistas se vêm forçados a concluir que há correlação em grande escala, proporcional a τ^H , onde H gira em torno de 0,7.

Hewett (1986) apresentou a primeira aplicação prática da análise R/S em estudos de

reservatórios de petróleo, utilizando esta estatística para determinar o valor de H em registros de perfis elétricos de poços e aplicar este parâmetro na simulação estocástica de propriedades de rochas. Ainda nesta área de petróleo, a análise R/S também foi aplicada por Emanuel et al (1989); Crane e Tubman (1990); Hewett e Behrens (1990); Aasum, Kelkar e Gupta (1991) e Perez e Chopra (1991).

Boes (1988) fez uma revisão dos princípios da lei de Hurst, afirmando que algumas explicações possíveis para o fenômeno são:

- i) a distribuição de $\xi(t)$ ser fortemente assimétrica;
- ii) a variável aleatória $\xi(t)$ não apresentar estacionariedade;
- iii) o comportamento proporcional a τ^H ser transiente e, mais cedo ou mais tarde, passar para $\tau^{0,5}$ devido à perda de correlação;
- iv) mesmo havendo estacionariedade, a variável aleatória $\xi(t)$ apresentar correlações em várias escalas.

Feder (1988) apresenta os conceitos da lei

em forma didática, conferindo os testes de validade efetuados por Hurst (1951) com moedas e cartas de baralho, por meio de simulações por computador, gerando uma quantidade bem maior de dados, o que lhe permite concluir que o valor de H tende assintoticamente para 0,5 nas situações em que Hurst obtinha $H \cong 0,7$.

Korvin (1992) conclui que, para a classe dos processos estacionários, somente aqueles em que a auto-correlação decresce lentamente, como uma potência do intervalo de tempo considerado, são capazes de preservar as propriedades da lei de Hurst quando $\tau \rightarrow \infty$.

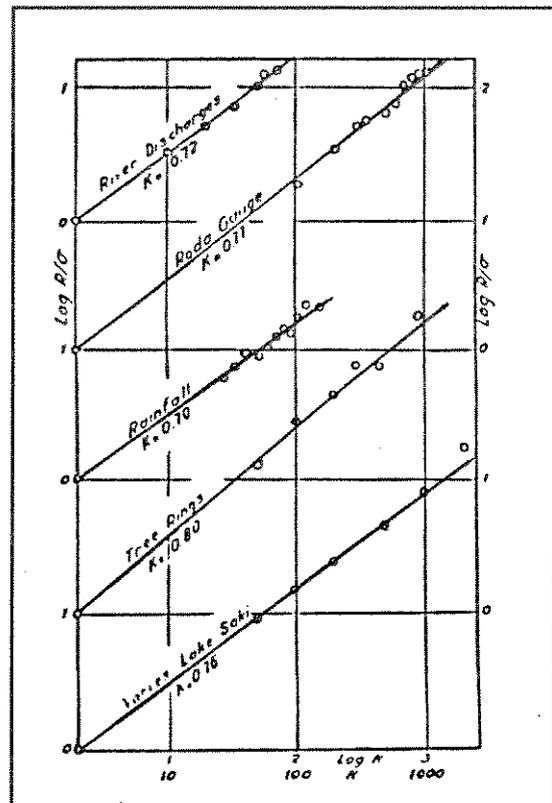


FIG 4.2 - Resultado de Análise R/S dos Dados de Hurst, adaptado de Feder, 1988.

IV.3 - METODOLOGIA PARA INTERPRETAÇÃO GRÁFICA

O parâmetro H pode ser determinado a partir de gráficos em papel bilogaritmo para as situações em que há uma dependência de lei de potência entre r e $R(t,r)/S(t,r)$.

Mandelbrot e Wallis (1969 a, b) apontam particularidades que devem ser levadas em consideração para a construção e interpretação de tais diagramas.

Os gráficos analisados pelos autores acima consistiram em amostras de rGf com 10000 valores, semelhantes aos discutidos no Capítulo II.3.

Por definição, para $r = 1$ a análise fica indeterminada pois $R(t,1) = 0$ e $S(t,1) = 0$. Para $r = 2$, obtivemos $R(t,2)/S(t,2) = 1$ ou flutuações em torno deste número. Utilizando uma definição um pouco diferente, Mandelbrot e Wallis (1969b) obtiveram $R(t,2)/S(t,2) = 2$. Os casos práticos devem ser analisados a partir de $r = 3$, até o número máximo de dados N .

O primeiro passo consiste em definir uma seqüência de intervalos r , ou seja, fixar os diversos tamanhos de amostras a serem analisados. Mandelbrot e Wallis (1969b) sugerem os valores 3, 4, 5, 7, 20, 40, 70, 100, 200, 400, 700, 1000, 2000, 4000, 7000 e 9000, aos quais acrescentamos 10000, 20000, 30000 e 50000, retirando o ponto 9000, para contemplar séries com mais de 10000 elementos.

Uma vez fixados os valores de N e r , escolhemos os pontos de partida t , que podem variar de 1 a $N-r+1$. Para poucos pontos (caso extremo 1 ponto com $t = 1$), a interpretação gráfica pode ser prejudicada pelas flutuações amostrais, inviabilizando obter-se uma conclusão rigorosa. Por outro lado, um número excessivo de pontos, por exemplo, uma análise a cada ponto t faz com que o gráfico tenha um aspecto triangular, com $N-2$ pontos em $r = 3$ e 1 ponto em $r = N$, o que representa redundância de informação, pois os valores de R/S de amostras sobrepostas não são independentes. A análise também passa a ser dependente de N , tornando difícil a comparação de gráficos de séries com tamanhos diferentes.

A filosofia da análise R/S é explorar a distribuição da variável aleatória $R(t,r)/S(t,r)$, plotando-se valores independentes desta variável. Para simulações teóricas sempre podemos construir várias séries independentes, porém os registros e amostragens em fenômenos naturais

normalmente só podem ser realizados uma única vez.

Um procedimento alternativo consiste em quebrar a série em subséries, evitando sobreposição de amostras, o que gera valores de $R(t,\tau)/S(t,\tau)$ independentes (Mandelbrot e Wallis, 1969e).

Os autores acima utilizam pontos de partida em $t = 1, 100, \dots, 1400$ para valores de $\tau < 500$ e $t = 1000, 2000, \dots, 8000$ ou até $N - \tau + 1$, a depender do menor valor entre estes dois, para $\tau > 500$. Em nossos trabalhos adotamos a mesma série de pontos de partida, acrescentando os pontos 10000, 15000, 20000, 30000 e 40000 para séries maiores que 10000 amostras.

Cada valor de $R(t,\tau)/S(t,\tau)$ calculado é representado por um sinal +. Calcula-se o valor da média aritmética para todos os valores obtidos em um mesmo τ , sendo representado por \square . Traça-se uma regressão linear pelos pontos do valor médio, obtendo-se o valor de H a partir da inclinação desta reta e, o valor de A pela interseção com o eixo das abscissas. Para o caso de "crossover", são efetuadas tantas regressões quantas mudanças de H forem detectadas. Nossos resultados são obtidos a partir da reta de melhor ajuste do programa gráfico GRAPHER.

IV.4 - TESTES DE VALIDADE DA LEI DE HURST

Hurst (1951) realizou vários testes com moedas para criar uma seqüência aleatória de caras e coroas com igual probabilidade de ocorrência. Por serem eventos independentes, o resultado esperado para H é **0,5**, como de fato foi comprovado pelo pesquisador.

Para simular valores de H superiores a **0,5** encontrados nos registros físicos, este autor utilizou um baralho onde as cartas eram numeradas segundo a freqüência de uma população normal, em ± 1 , ± 3 , ± 5 e ± 7 . Desta forma, nas 52 cartas haviam 26 números 1, 16 números 3, 8 números 5 e 2 números 7. Após misturar bem, o baralho era "cortado" ao acaso e o número do corte era anotado, gerando uma seqüência aleatória com $H = 0,5$. Retirando algumas cartas após o terceiro corte, segundo regras pré-estabelecidas, e introduzindo um coringa no jogo, Hurst (1951) conseguiu introduzir um viés na distribuição anteriormente obtida. Quando a carta do corte era o coringa, todas as cartas voltavam ao baralho e iniciava-se uma nova seqüência.

O processo acima gera séries onde aparecem claras tendências, que permanecem para intervalos τ da ordem do número de cartas na mão. Em média, Hurst (1951) observou que o coringa aparecia no 27º corte. Portanto, se o viés for positivo, a tendência será crescente e, se for negativo, decrescente.

Feder (1988) reproduziu estes experimentos utilizando simulações por computador, gerando seqüências muito maiores e mais significativas.

Para o jogo da moeda, Feder (1988) utilizou um gerador de números aleatórios para construir uma seqüência de valores +1 e -1 escolhidos com igual probabilidade, relacionando o número +1 com cara e -1 com coroa. A variável $\xi(t)$ considerada para análise R/S é formada pela

soma de 10 números, repetindo-se o processo até um número total N (50.000) de amostras.

O valor de H obtido é de $0,503 \pm 0,008$ e o de A = $1,3 \pm 0,1$ (FIG 4.3).

Introduzindo um viés no processamento acima, foi possível para o autor simular também o jogo de cartas elaborado por Hurst (1951), obtendo uma amostra de 100.000 valores para $\xi(t)$. A

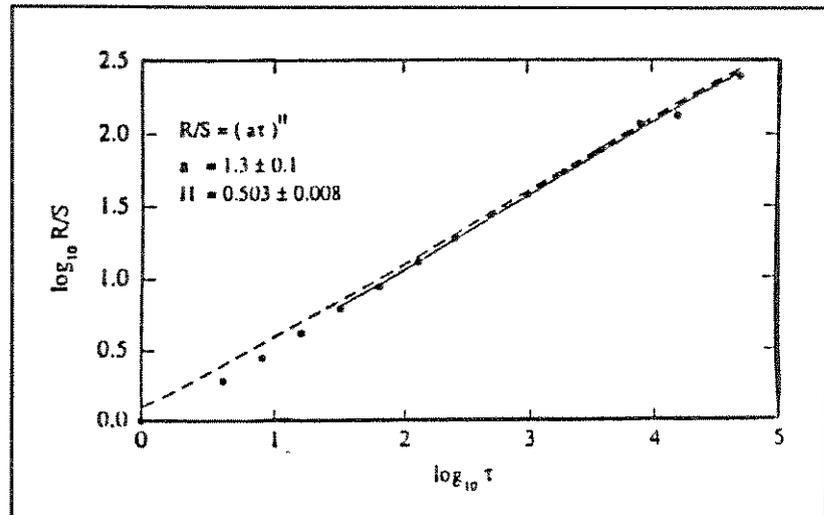


FIG 4.3 - Resultado da análise R/S para a simulação do jogo da moeda, adaptado de Feder, 1988.

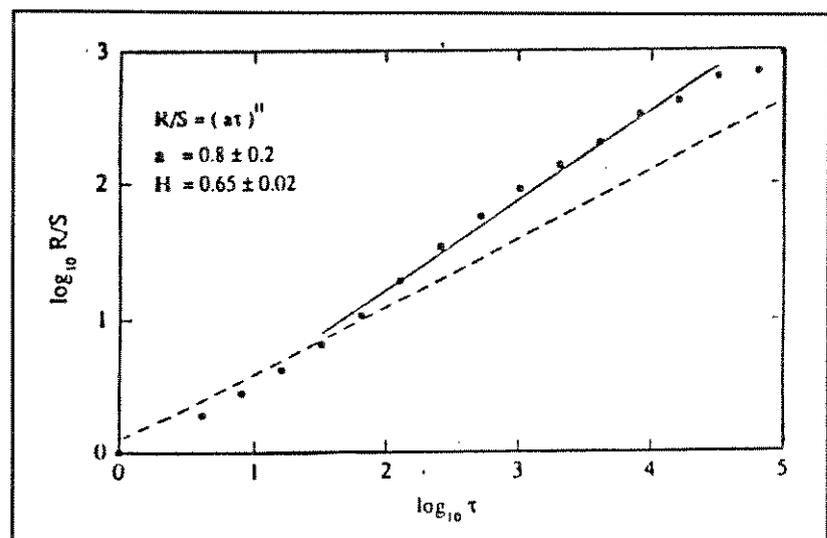


FIG 4.4 - Resultado da análise R/S para a simulação com viés, adaptado de Feder, 1988.

FIG 4.4 mostra os resultados da análise **R/S**.

O ajuste de **H** proposto é $0,65 \pm 0,2$, observando-se que para tempos muito grandes, $\tau > 50.000$, há uma tendência da inclinação passar para **0,5** assintoticamente. A interpretação gráfica nesta parte é dificultada, pois são necessárias determinações em várias décadas para se obter um bom ajuste, o que levaria a simulações com um número muito grande de pontos.

Este processo de calibração foi parcialmente repetido em nosso trabalho. Geramos uma variável aleatória $\xi(t)$ com igual probabilidade de valer **+1** e **-1**, a partir de uma distribuição uniforme de números aleatórios. Uma amostra de 200 valores da seqüência encontra-se na FIG 4.5. As análises **R/S** apresentam valores de $H = 0,507 \pm 0,007$ e $A = 1,134 \pm 0,067$, a depender da semente utilizada (FIG 4.6).

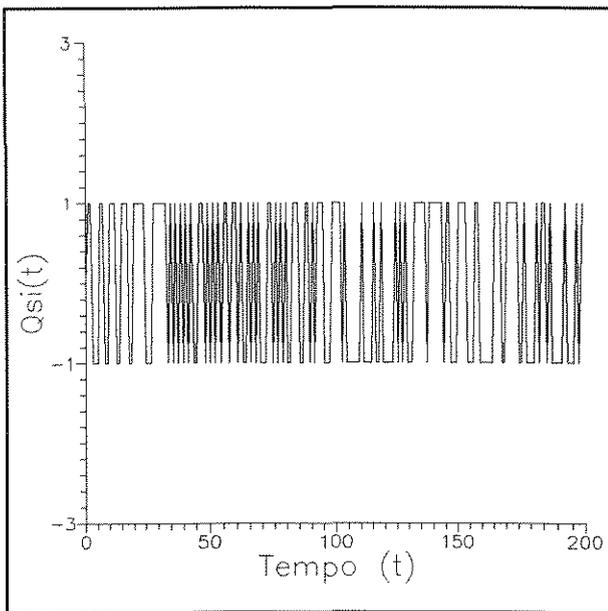


FIG 4.5 Sequência de valores de $\xi(t)$ para probabilidade de 50%.

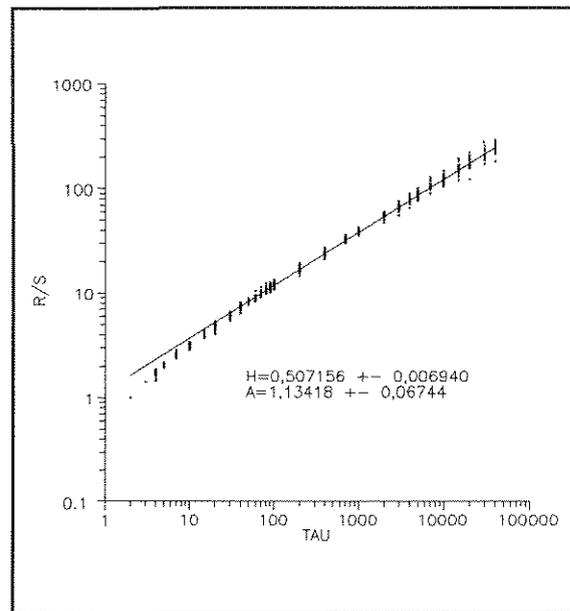


FIG 4.6 Resultado de análises **R/S** para probabilidade = 50%, com várias sementes de números aleatórios e $\xi(0) = 0$.

Aumentando a probabilidade de $\xi(t)$ valer **+1**, passando sucessivamente para **60%**, **70%**, **80%**, **90%** e **99,75%**, os valores de **H** obtidos da análise **R/S** permaneceram da ordem de $0,502 \pm 0,02$ e $A = 1,166 \pm 0,106$. Este constitui um exemplo de que, apesar de a distribuição binomial ficar cada vez mais assimétrica, o valor de **H** continua sendo igual a **0,5** em média (FIG 4.7).

A equação logística na forma 3.20 foi utilizada para a calibração, especialmente para os

casos de anti-persistência e movimento aleatório. Diversos valores de z e a foram testados, observando-se comportamento semelhante em todos os casos.

Para valores de a que levam a um atrator que é um ponto fixo, temos $H=1$, que significa comportamento totalmente persistente (FIG 4.8a,b). Para $a=2$ temos movimento aleatório em qualquer valor de z , gerando valores de $H = 0,5$ (FIG 4.9). Para os ciclos de bifurcação 2, 4, ..., temos $H = 0$.

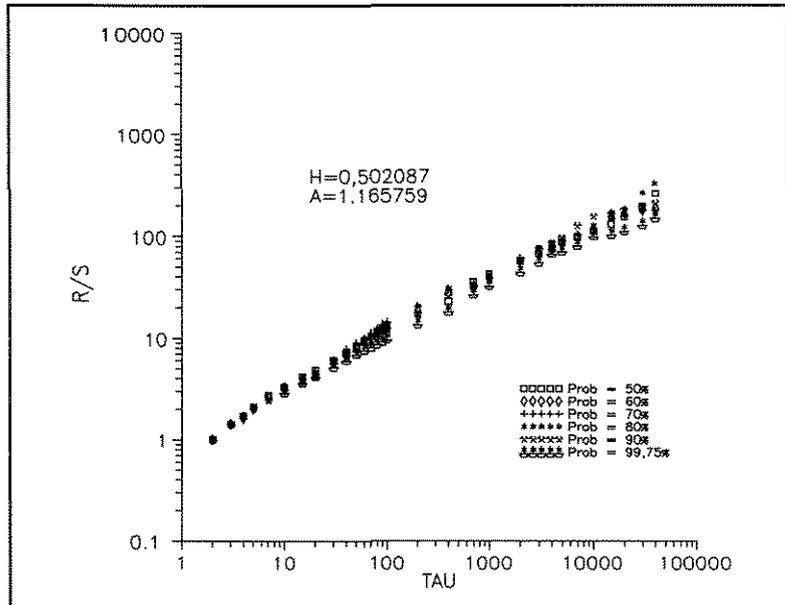


FIG 4.7 Análise R/S para várias probabilidades a partir de uma semente de números aleatórios.

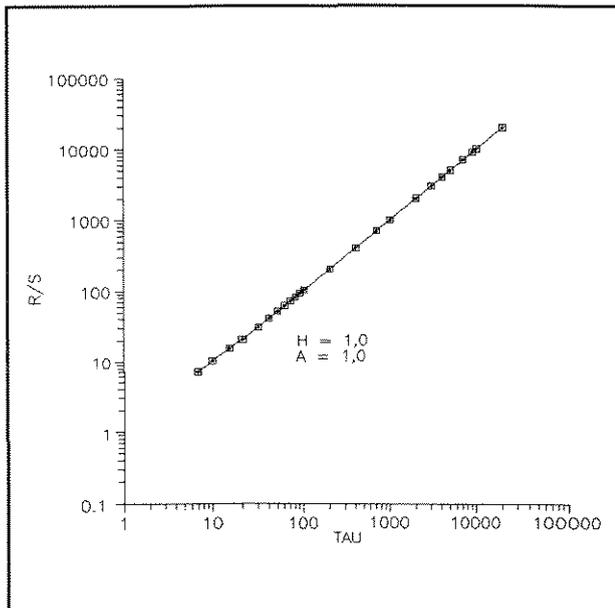


FIG 4.8a Resultado da análise R/S para a equação logística com $\xi(0)=1$, $Z=2$, $a=0,000001$.

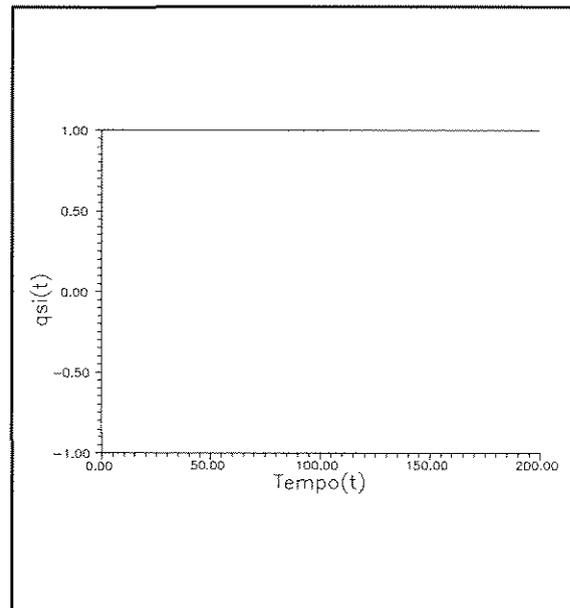


FIG 4.8b Sequência dos 200 primeiros valores da equação logística para $\xi(0)=1$, $Z=2$ e $a=0,000001$.

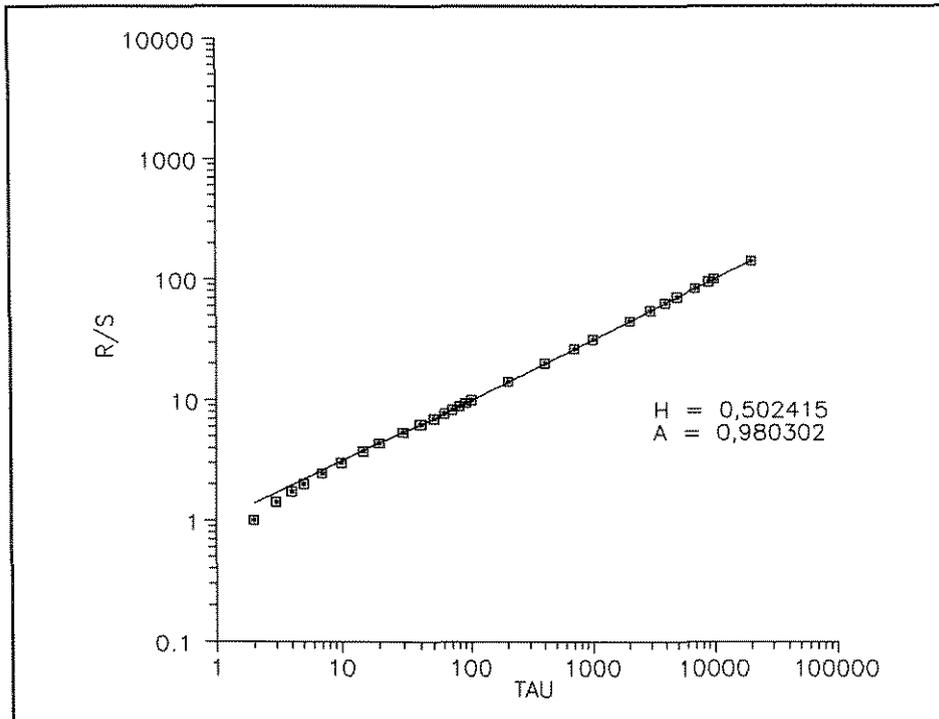


FIG 4.9 Resultado da análise R/S para a equação logística com $\xi(0)=1$, $Z=2$ e $a=2$.

IV.5 - OBSERVAÇÕES QUANTO À INTERPRETAÇÃO GRÁFICA

Após abordar a metodologia e a calibração da interpretação gráfica, restam alguns efeitos que devem ser levados em conta para a correta definição de H .

IV.5.1 - EFEITO DE TRANSIENTE INICIAL

Os valores muito pequenos de τ sofrem grandes influências de fatores quase sempre irrelevantes para a análise R/S , mas que provocam grande dispersão nos valores de $R(t,\tau)/S(t,\tau)$ nesta região do gráfico.

Desta forma, os pontos iniciais devem ser descartados para a análise. Mandelbrot e Wallis (1969b) e Feder (1988) são unânimes em considerar um limite inferior da ordem de $\tau_{\min} = 20$. Em nossos experimentos este limite aparenta ser menor, da ordem de $\tau_{\min} = 7$ (FIG 4.10).

O efeito transiente observado nos ensaios de Mandelbrot e Wallis (1969b) é maior para $H < 0,5$, com tendência a um crescimento rápido à medida que $H \rightarrow 0$, estando acima de $\tau = 1000$

para $H = 0,1$.

IV.5.2 - EFEITO DE MEMÓRIA

As análises R/S efetuadas por Mandelbrot e Wallis (1969b) nas simulações com rGf com tamanho de memória (M) diferentes (ver Capítulo II) demonstram que os valores de $R(t,\tau)/S(t,\tau)$ diminuem consideravelmente na região de grandes valores de τ quando M passa a ser menor que 3000. A região do transiente, entretanto, permanece inalterada. O gráfico final pode conter três regiões distintas (FIG 4.11), iniciando com um transiente, passando para $H = 0,7$ e finalmente com um alinhamento em $H = 0,5$.

Este comportamento pressupõe que a variável aleatória $R(t,\tau)/S(t,\tau)$ se comporta assintoticamente como $\tau^{0,5}$, em função do tamanho M , que controla o intervalo onde vale a relação com τ^H . Designando o ponto de transição por M^* , os autores observaram, que para H da ordem de $0,7$, $M^* = 3M$, o que requereria mais de 30000 amostras para um comportamento de $H = 0,5$.

Estes dados também são coerentes com os obtidos por Feder (1988) nas simulações do jogo de baralho onde $H > 0,5$.

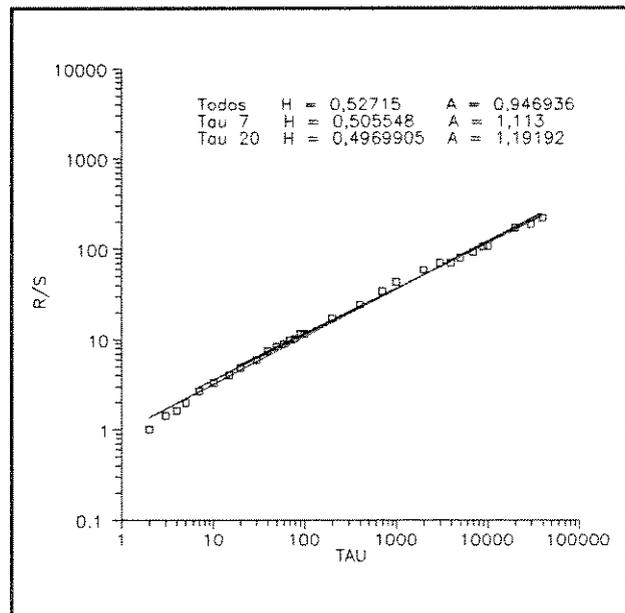


FIG 4.10 Influência do transiente inicial para o exemplo da equação logística com H determinado a partir de τ igual a 1, 7 e 20.

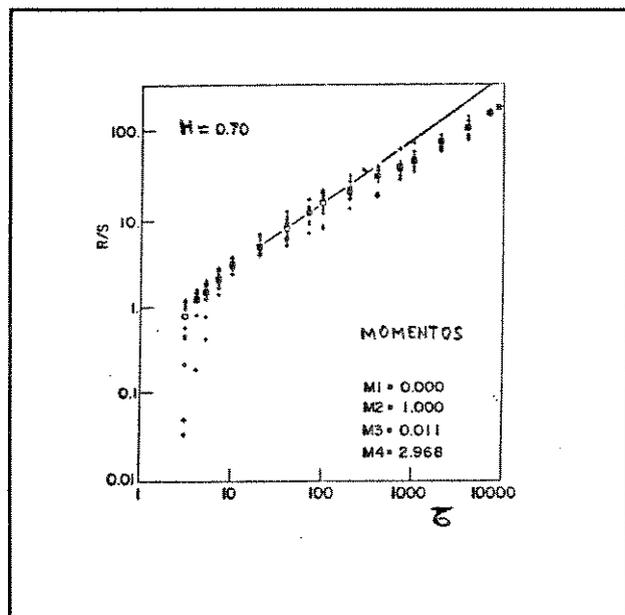


FIG 4.11 - Gráfico de análise R/S com três regiões distintas: transiente inicial, $H=0,7$ e $H=0,5$, adaptado de Mandelbrot e Wallis, 1969.

Nas análises **R/S** dos registros de perfis de poços, não observamos este comportamento assintótico para $\tau^{0,5}$. Desta forma, podemos considerar os valores de **H** obtidos como confiáveis.

O conceito de correlação em grande escala, visto sob a ótica acima, pode ser melhor compreendido pois, por dependência estatística infinita dos registros geofísicos, entende-se que as correlações existentes atingem uma amplitude maior do que o maior tamanho de registro disponível para análise.

Um exemplo interessante para se ter uma compreensão do efeito de memória é o das FIG 4.12 a 4.16. A equação logística 3.20 foi utilizada para a geração da seqüência de $\xi(t)$, com $z = 2$, $\xi(0) = 1$ e a variando entre (0,2).

Com $a = 0$ temos $\xi(t) = 1$, $\forall t \neq 0$, que corresponde ao máximo de persistência que se pode alcançar neste processo. O valor de **H** correspondente é 1 (FIG. 4.8a,b).

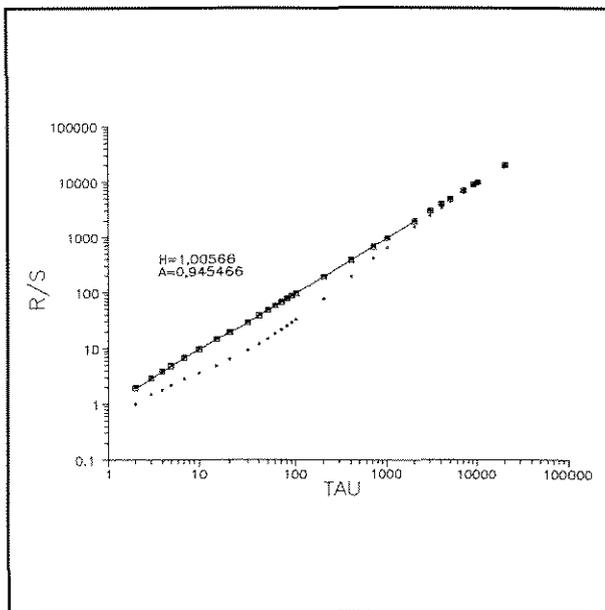


FIG 4.12a Resultado da análise **R/S** para a equação logística com $\xi(0)=1$, $Z=2$ e $a=0,01$.

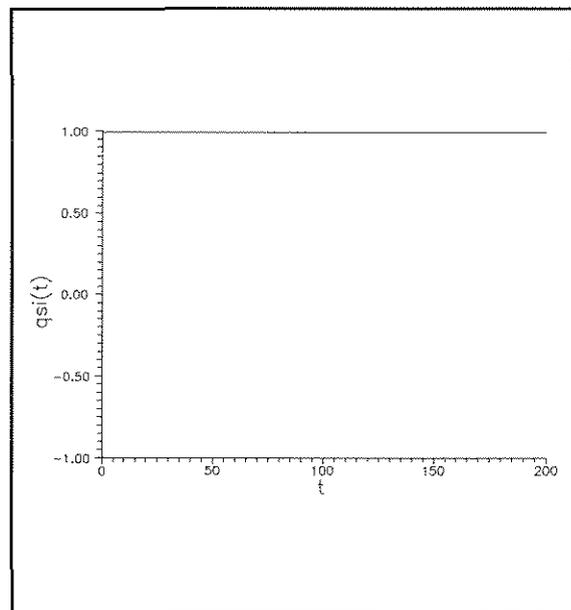


FIG 4.12b Seqüência dos 200 primeiros valores da equação logística com $\xi(0)=1$, $Z=2$ e $a=0,01$.

Aumentando progressivamente o valor de a , observa-se a evolução de $\xi(t)$ para seu atrator, que ocorre em tempos pequenos ($t < 100$) para $a \leq 0,60$ (FIG. 4.12 b; Fig. 4.13 b,d). Quando atinge o atrator, $\xi(t)$ passa a ter comportamento persistente.

A análise **R/S** é feita a partir de pontos de partida $t = 1,100,...$ como explicado em IV.3.

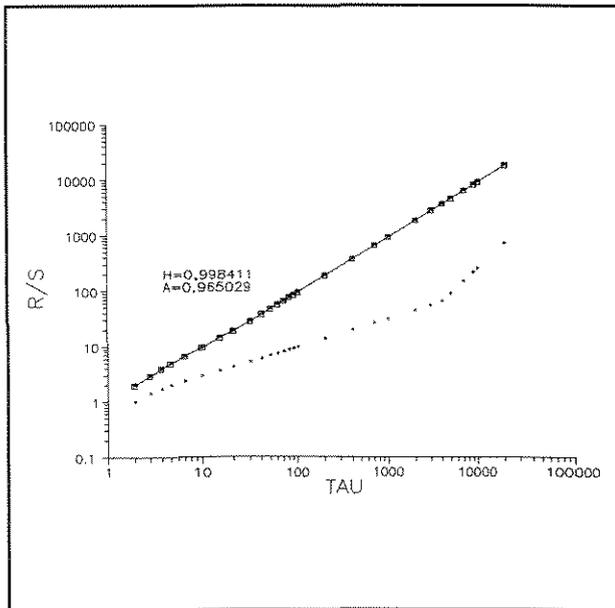


FIG 4.13a Resultados da análise R/S para a equação logística com $\xi(0)=1$, $Z=2$ e $a=0,05$.

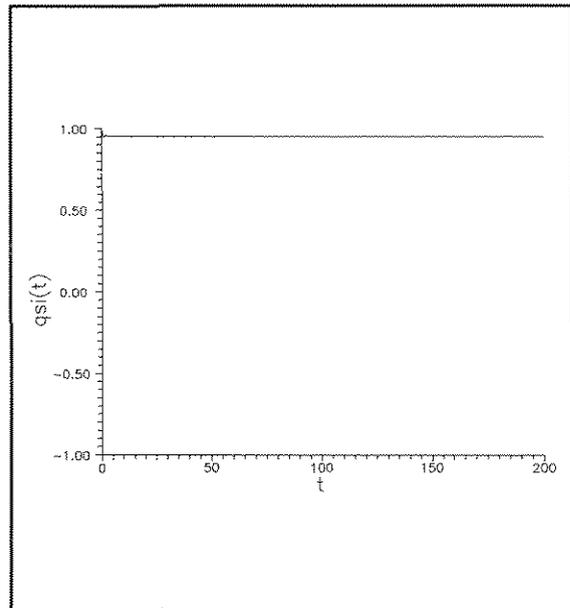


FIG 4.13b Seqüência dos 200 primeiros valores da equação logística com $\xi(0)=1$, $Z=2$ e $a=0,05$.

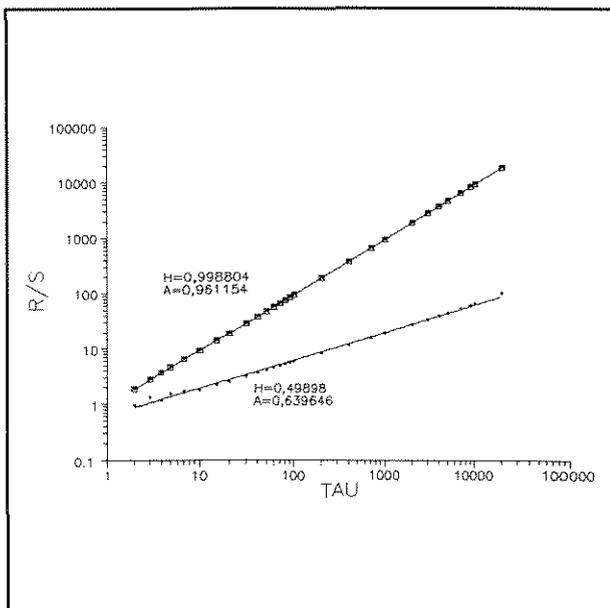


FIG 4.13c Resultados da análise R/S para a equação logística com $\xi(0)=1$, $Z=2$, $a=0,60$.

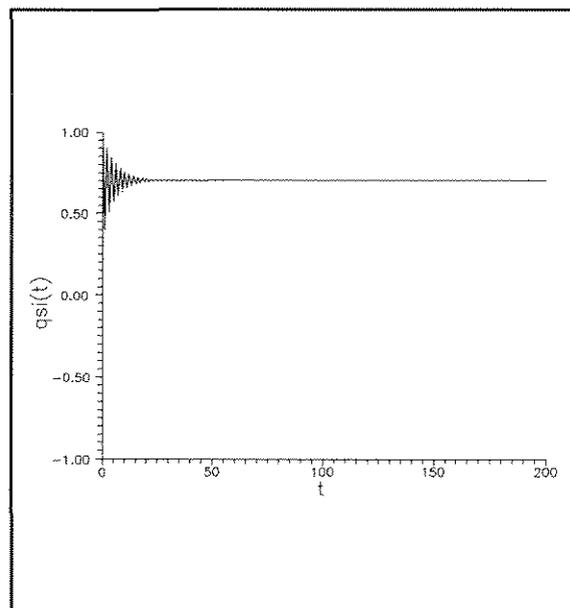


FIG 4.13d Seqüência dos 200 primeiros valores da equação logística para $\xi(0)=1$, $Z=2$ e $a=0,60$.

Nos gráficos das FIG. 4.12a e FIG. 4.13a,c, vemos um alinhamento para $H = 1$ correspondente aos pontos calculados para $t \geq 100$ e outro para $t = 1$ com $H = 0,5$, mostrando um "crossover" para $H = 1$ no primeiro gráfico.

Quando o atrator de $\xi(t)$ passa a ser atingido após $t = 100$, observa-se que os pontos R/S analisados em $t = 100$ passam a ter o mesmo comportamento que os de $t = 1$ acima (FIG. 4.14a). Inicia-se lentamente a formação de outro "crossover" próximo à origem, mostrando $H = 0$.

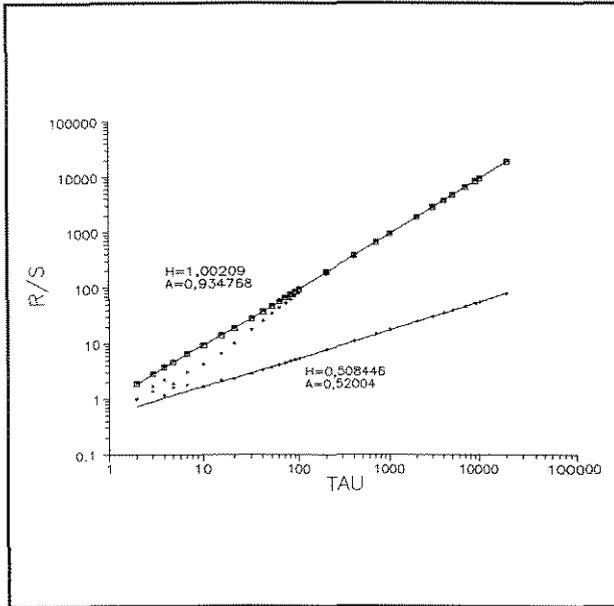


FIG 4.14a Resultados da análise R/S para a equação logística com $\xi(0)=1$, $Z=2$ e $a=0,65$.

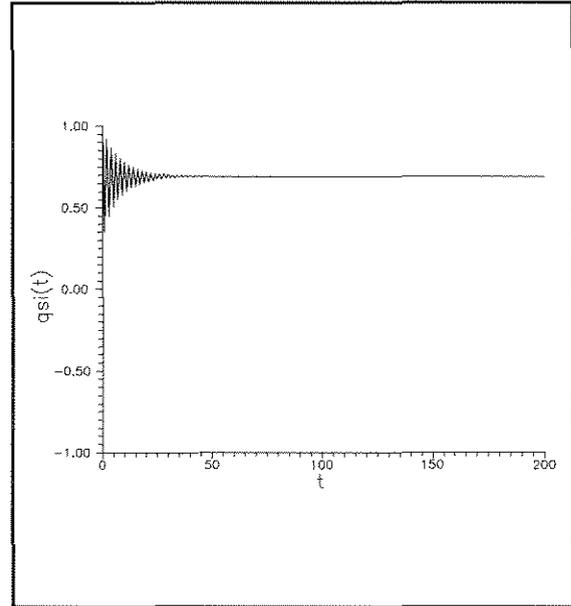


FIG 4.14b Seqüência dos 200 primeiros valores da equação logística com $\xi(0)=1$, $Z=2$ e $a=0,65$.

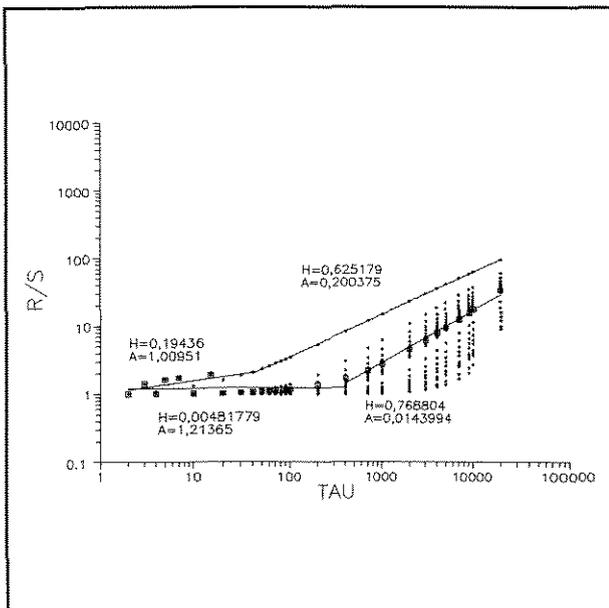


FIG 4.14c Resultados da análise R/S para a equação logística com $\xi(0)=1$, $Z=2$ e $a=0,75$.

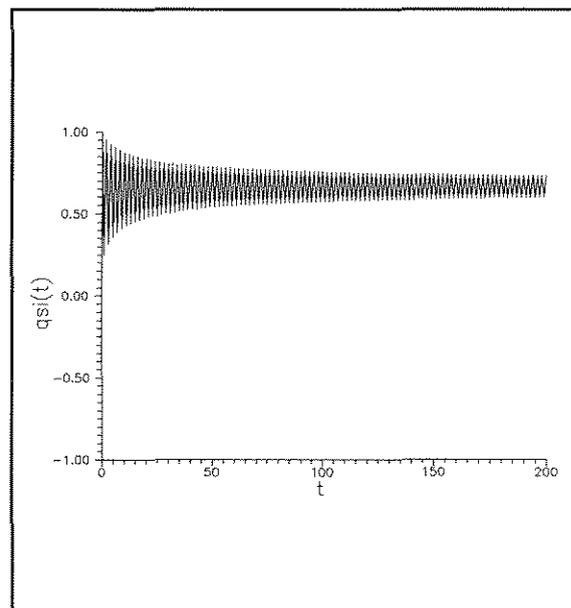


FIG 4.14d Seqüência dos 200 primeiros valores da equação logística para $\xi(0)=1$, $Z=2$ e $a=0,75$.

Para valores da ordem de $a = 0,75$ (FIG 4.14c) já não é mais visível o alinhamento $H = 1$. O "crossover" $H = 0$ para $H = 0,5$ já esta bem demarcado, atingindo a totalidade dos pontos de partida. Para $a > 0,80$ temos $H = 0$ que se mantém até o ponto de entrada em caos ($a = 1,401155$) (FIG. 4.15a,c).

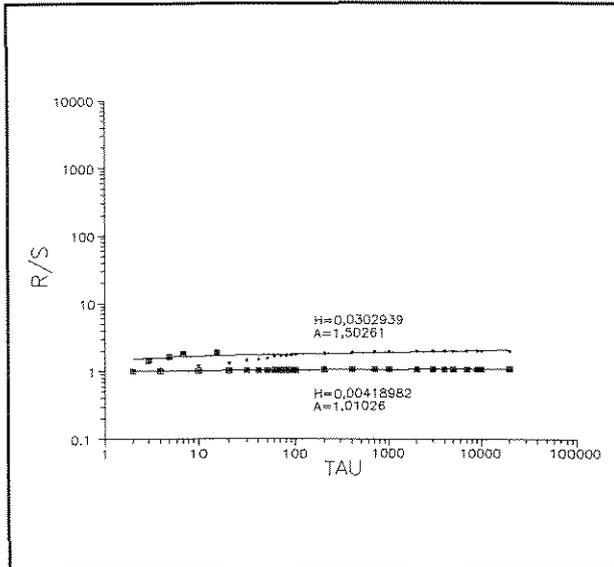


FIG 4.15a Resultados da análise R/S para a equação logística para $\xi(0)=1$, $Z=2$ e $a=0,80$.

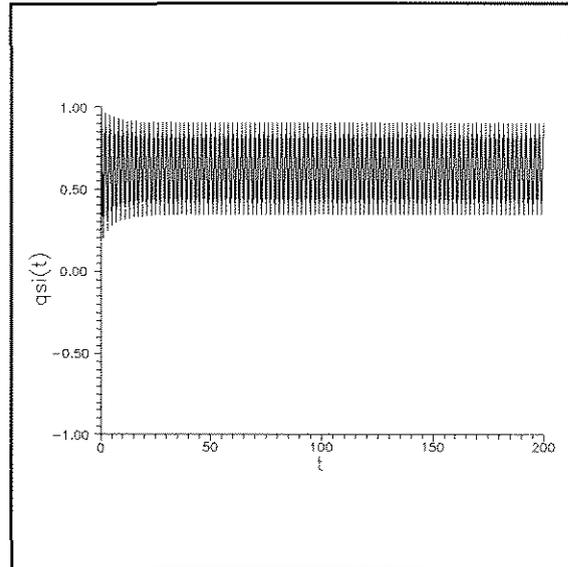


FIG 4.15b Seqüência dos 200 primeiros valores da equação logística para $\xi(0)=1$, $Z=2$ e $a=0,80$.

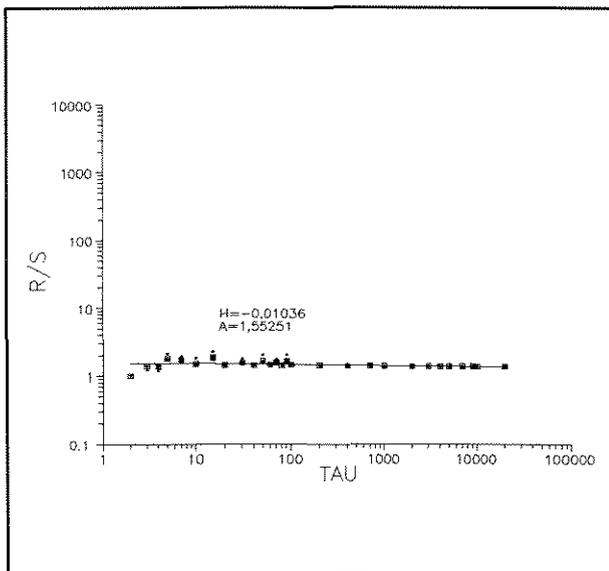


FIG 4.15c Resultados da análise R/S para a equação logística com $\xi(0)=1$, $Z=2$ e $a=1,401155$.

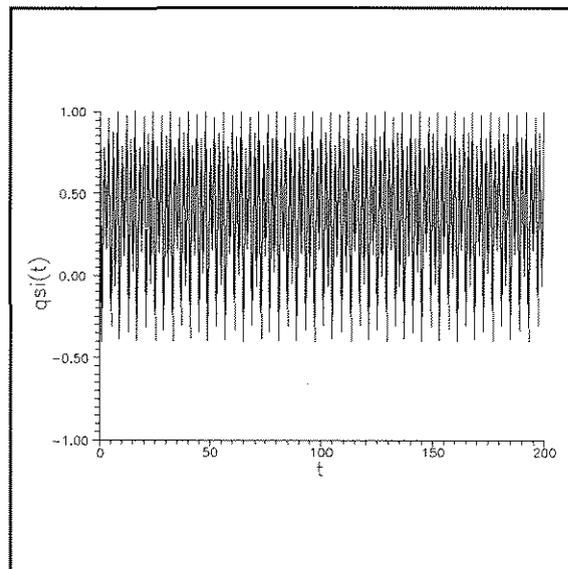


FIG 4.15d Seqüência dos 200 primeiros valores da equação logística para $\xi(0)=1$, $Z=2$ e $a=1,401155$.

A partir da entrada em caos, aumentando progressivamente a verifica-se um crescimento de H em direção a $H = 0,5$, atingido em $a = 2$, o que confirma a natureza aleatória dos dados neste ponto (FIG. 4.16a,b,c,d).

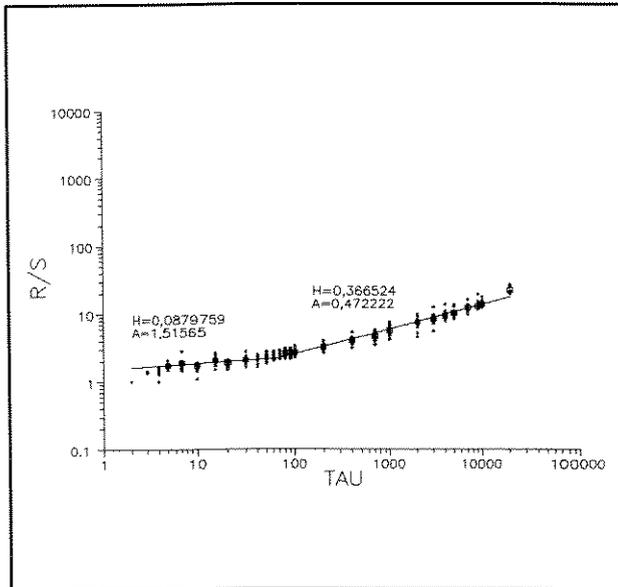


FIG 4.16a Resultados da análise R/S para a equação logística com $\xi(0)=1$, $Z=2$ e $a=1,50$.

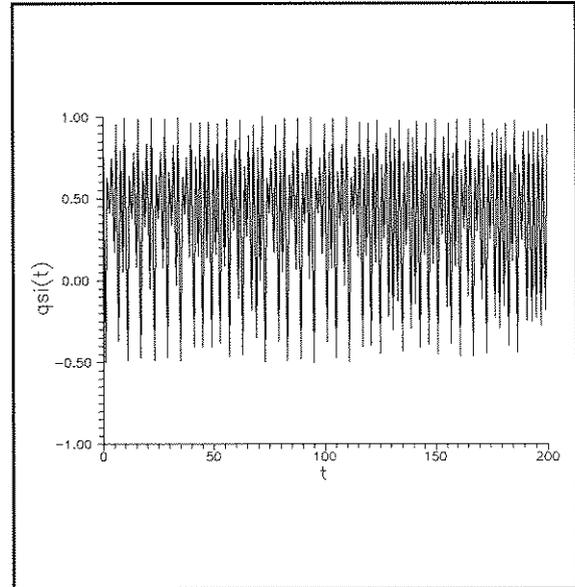


FIG 4.16b Seqüência dos 200 primeiros valores da equação logística com $\xi(0)=1$, $Z=2$ e $a=1,50$.

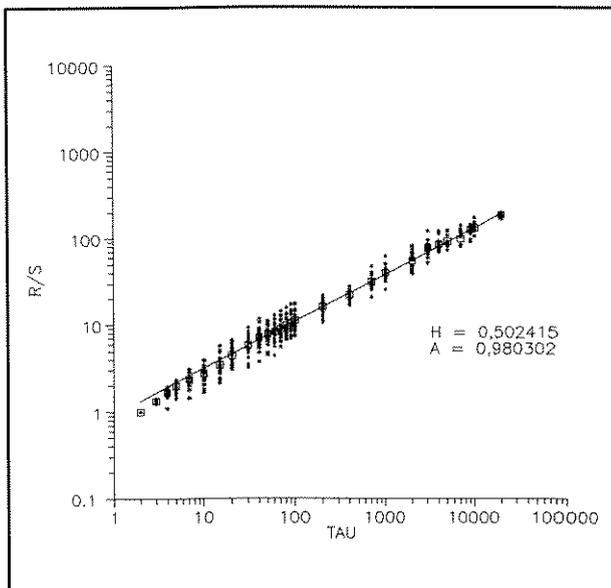


FIG 4.16c Resultados da análise R/S para a equação logística com $\xi(0)=1$, $Z=2$ e $a=2$.

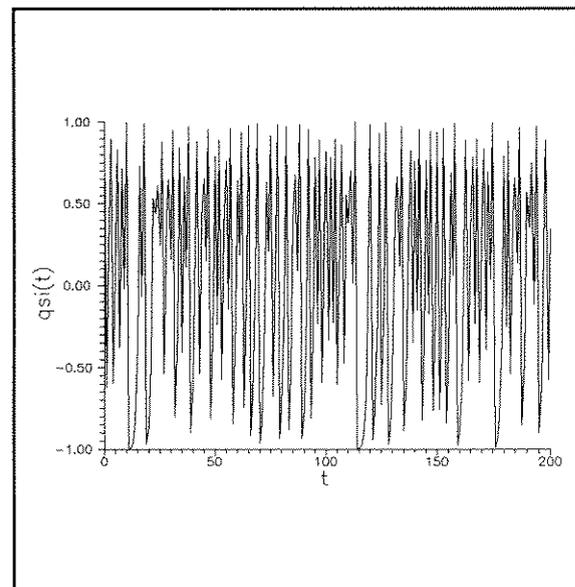


FIG 4.16d Seqüência dos 200 primeiros valores da equação logística para $\xi(0)=1$, $Z=2$ e $a=2$.

O crescimento de H também é através de "crossover", começando com um transiente de $H = 0$, passando para $H > 0$. À medida que a aumenta o ponto de "crossover" diminui

rapidamente, ao passo que $H = 0,5$ só é atingido assintoticamente em $a = 2$.

IV.5.3 - EFEITO DE CICLICIDADE

A presença de elementos periódicos pode complicar o aspecto gráfico, porém não necessariamente invalidar o fenômeno Hurst. Em outros casos, onde ocorrem ciclos de duração menor, o efeito cíclico aliado ao efeito provocado por subharmônicas do ciclo principal pode mascarar a interdependência de grande escala expressa pela lei de Hurst.

Neste caso, o valor de H não pode ser determinado graficamente com diagramas construídos a partir dos dados brutos (Mandelbrot e Wallis, 1969d).

De um modo geral, os ciclos e subharmônicas provocam quebras (FIG. 4.17) no alinhamento do diagrama log-log de R/S vs τ . Estas quebras podem transformar-se em pequenos patamares com $H \approx 0$. Quando a ciclicidade é muito acentuada, as quebras tendem a se juntar, baixando o valor de H , que pode

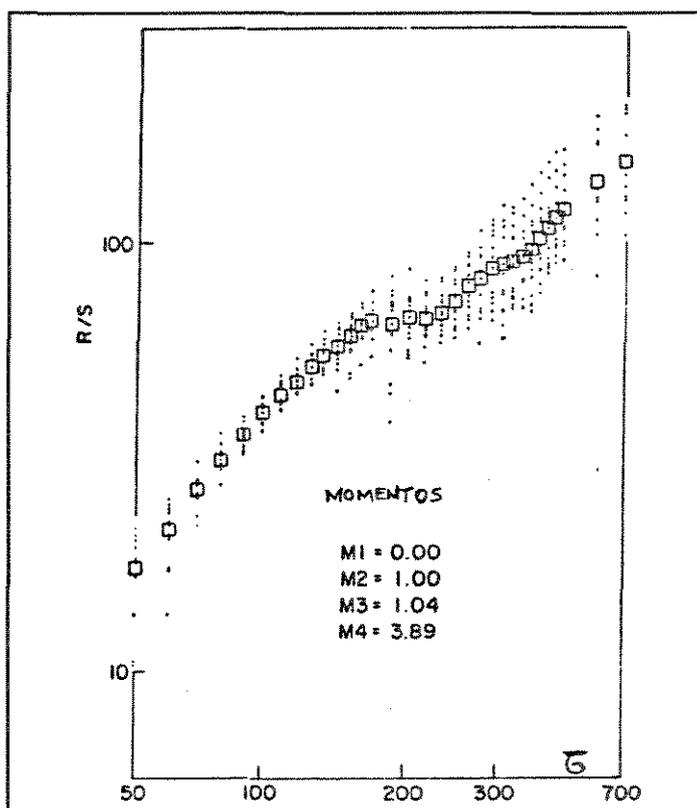


FIG 4.17 - Exemplo de ciclicidade e subharmônicas, adaptado de Mandelbrot e Wallis, 1969.

chegar até $H = 0$ (tendência completamente horizontal).

Feder (1988) sugere que se proceda a uma normalização dos dados, para se tirar o efeito de ciclicidade, de modo que a sequência apresente média igual a 0 e variância 1. Em seu exemplo de medidas de altura de ondas do mar ao longo do tempo (FIG. 4.18), Feder (1988) aponta uma quebra associada a um período de 1 ano (FIG. 4.19). A análise R/S dos dados brutos indica $H = 0,87$.

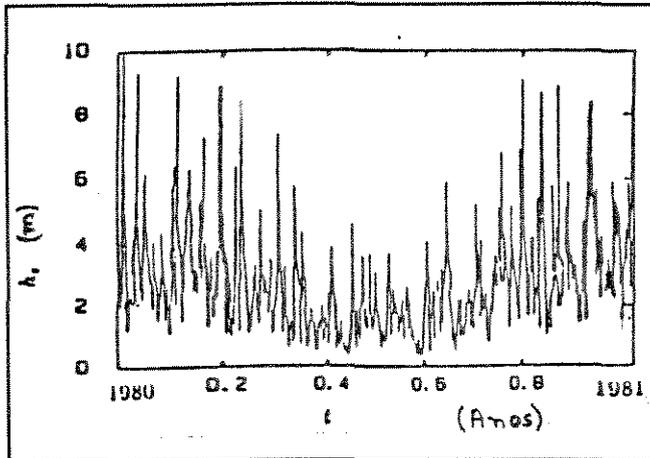


FIG 4.18 - Exemplo de medidas de altura de ondas do mar, adaptado de Feder, 1988.

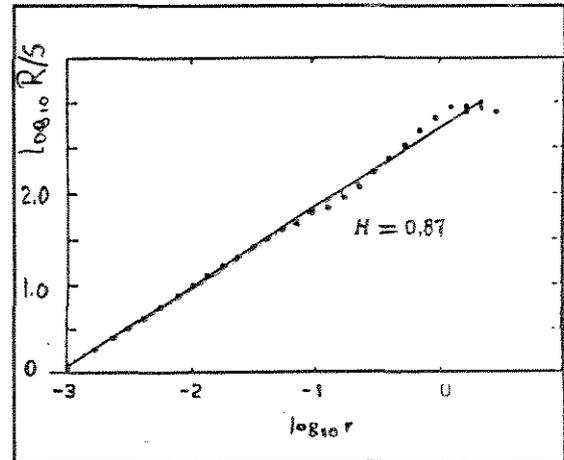


FIG 4.19 - Análise R/S dos dados da FIG 4.18, adaptado de Feder, 1988.

Após a normalização (FIG. 4.20), a análise R/S mostra claramente a existência de um "crossover" entre $H = 0,92$ para $\tau < 20$ dias e $H = 0,52$ para $\tau > 20$ dias (FIG. 4.21).

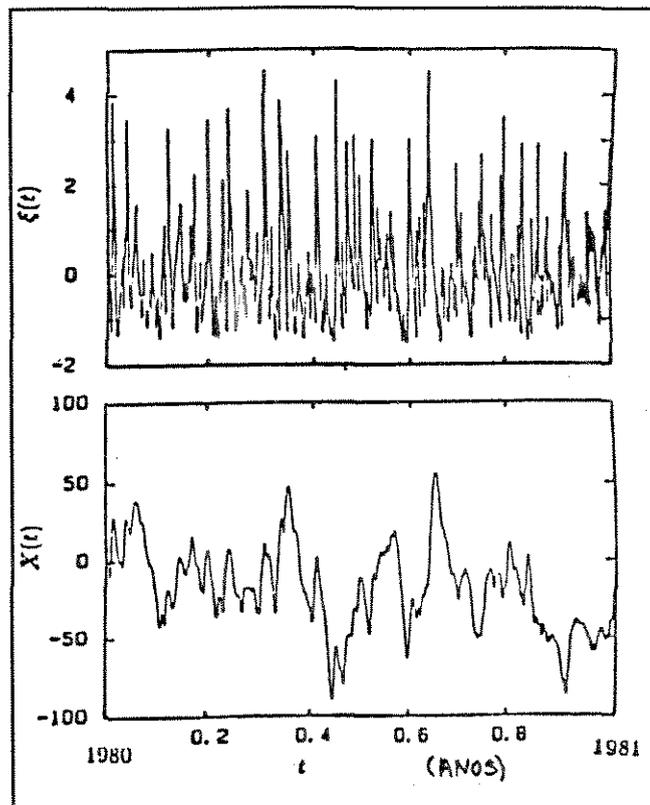


FIG 4.20 - Normalização dos dados da FIG 4.18, adaptado de Feder, 1988.

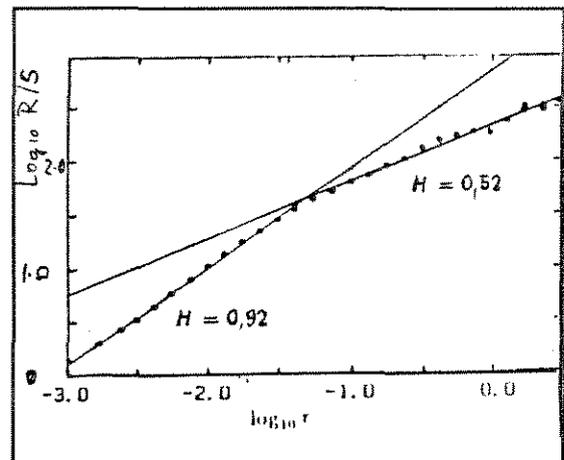


FIG 4.21 - Análise R/S dos dados de altura de ondas normalizados, adaptado de Feder, 1988.

Este "crossover" reflete a passagem de um regime persistente para um regime aleatório.

O exemplo acima também comprova a robustez da análise estatística R/S, uma vez que

a distribuição das medidas de ondas é fortemente assimétrica (Feder, 1988). Conforme discutido por Mandelbrot e Wallis (1969b), mesmo distribuições de incrementos lognormais, hiperbólicas ou gama, também podem gerar valores de $H = 0,5$.

O efeito de ciclicidade foi estudado nesta tese com o auxílio de uma função senoidal:

$$\xi(\lambda) = 0.5 + 0.1 \operatorname{sen}(\lambda \lambda) \quad (4.6)$$

onde λ controla o comprimento de onda, variando entre 0 e 1.

Para $\lambda = 0$ temos um sistema persistente com $H = 1$. À medida que λ aumenta, o comprimento de onda diminui, provocando o surgimento de eventos cíclicos em $\xi(t)$. Estes ciclos se refletem na análise R/S como "crossover" entre dois regimes, um com $H = 1$ e outro com $H = 0$. Observa-se na FIG. 4.22a a evolução do ponto de "crossover" diminuindo o valor de τ com o aumento de λ . O falso valor de H , calculado sem levar o "crossover" em consideração, é dado pela FIG 4.22b.

IV.6 - ANÁLISE R/S EM PERFIS DE POÇOS

Os perfis elétricos, acústicos e radioativos de poços são interpretados como **rGf** (Hewett, 1986). Nestas séries temporais, a profundidade faz o papel do tempo. Em poços de petróleo, via de regra, são registradas medidas de resistividade através de corrente elétrica induzida (**ILD**), de radioatividade natural de raios gama (**GR**), de tempo de trânsito de onda sonora (**DT**), de radioatividade através do bombardeio da rocha com raios gama (**RHOB**) e de radioatividade por bombardeio de nêutrons com registro do índice de hidrogênio (**NPHI**).

As três últimas medidas refletem a propriedade da porosidade das rochas. Os raios gama podem ser associados com os diferentes tipos de litologia atravessados pelo poço. A resistividade possui uma relação com o conteúdo de fluido existente no espaço poroso. Com estes registros é possível caracterizar as sequências de rochas, a sua porosidade e o conteúdo de fluido presente nos poros.

Com o auxílio da análise R/S determina-se o valor do expoente H , que está relacionado

com a dimensão fractal através de:

$$H = 2 - D$$

(4.7)

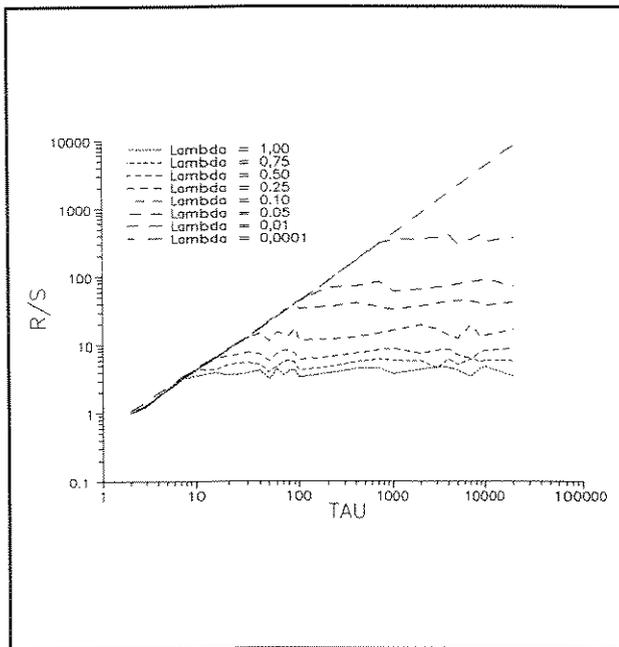


FIG 4.22a - Evolução de um crossover para a equação $\xi(t) = 0,5 + 0,1 * \text{sen}(\lambda t)$, em função de λ .

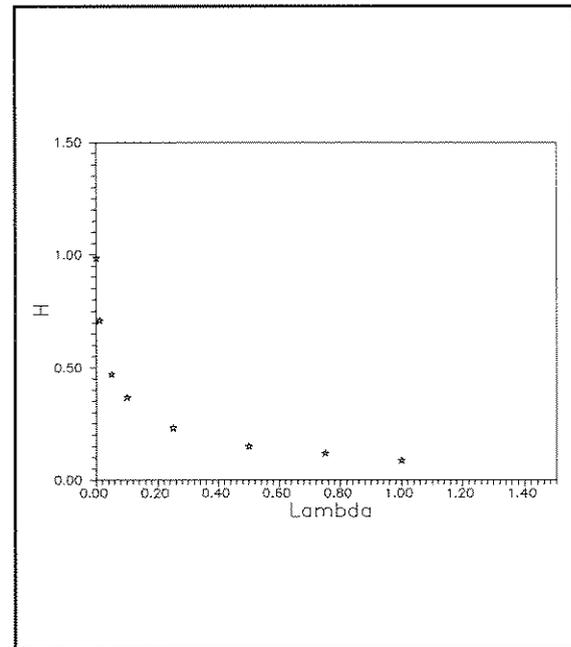


FIG 4.22b - Evolução do falso valor de H medido sem levar em consideração o crossover no exemplo da função da FIG 4.22a.

A FIG. 4.23 mostra os registros dos perfis corridos em um poço da plataforma continental brasileira. A seção sedimentar corresponde às formações Macaé, Campos e Emborê.

Da base para o topo, a seqüência inicia com depósitos marinhos em ambiente de mar semirrestrito, com o desenvolvimento de uma rampa carbonática predominantemente de água rasa, caracterizada por calcarenitos oolíticos e oncolíticos da Formação Macaé Inferior (Scuta, 1984, in Freitas, 1987).

O basculamento da bacia sedimentar para leste provocou o afogamento desta rampa e a sedimentação passou a ser caracteristicamente de água profunda, representada por margas e calcilutitos da Formação Macaé Superior (Freitas, 1987).

Durante esta fase, houve intensa movimentação tectônica devido ao basculamento da bacia, que ocasionou também a movimentação de camadas salíferas depositadas na fase rift

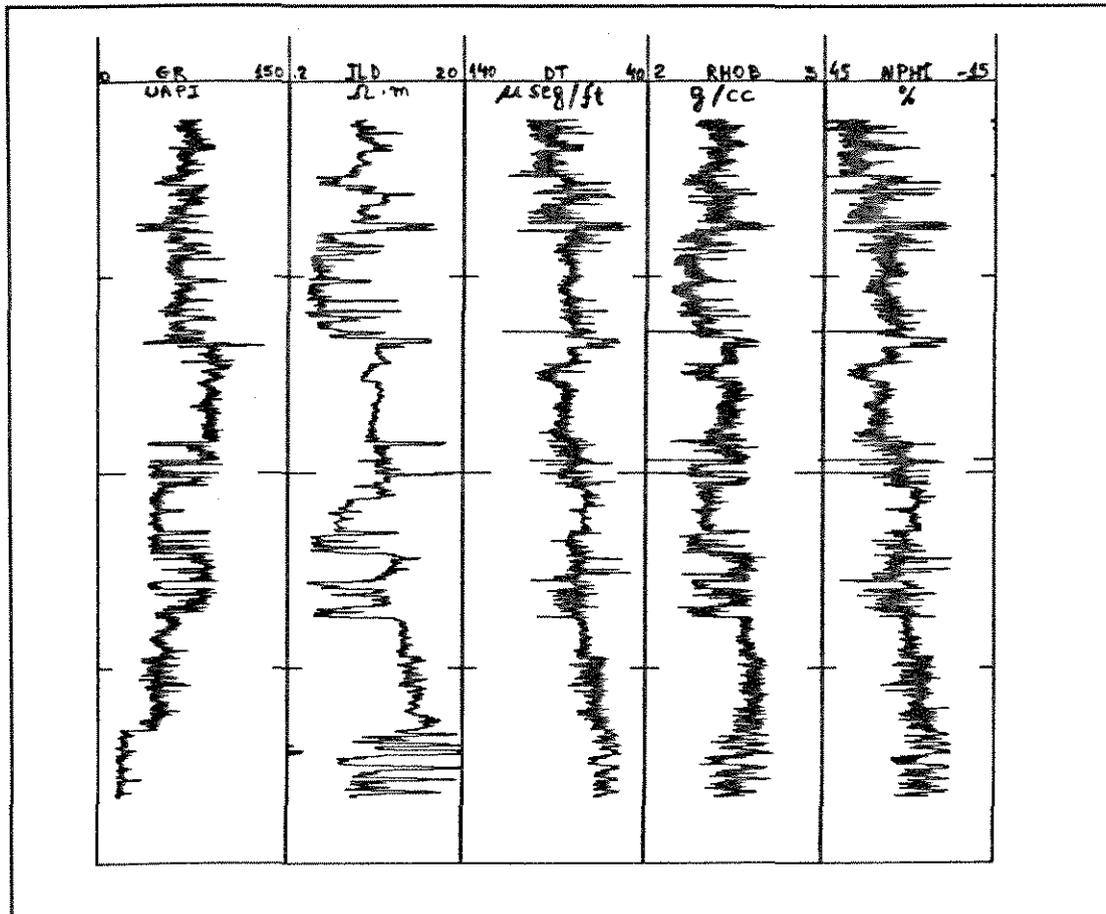


FIG 4.23 - Exemplo de perfis elétricos corridos em um poço de petróleo.

anterior à deposição da rampa carbonática (Figueiredo et al, 1983, in, Freitas, 1987). Houve a formação de calhas estruturais que serviram como zonas de captação de areias turbidíticas (Arenito Namorado).

Com o contínuo basculamento da Bacia, instalou-se um oceano aberto, onde a sedimentação passou a ter um caráter transgressivo com clásticos grosseiros na porção marginal (Formação Emborê) e folhelhos marinhos na porção distal (Membro Ubatuba, Formação Campos) (Freitas, 1987)

Nestes folhelhos distais, ainda por ação da tectônica salífera associada com variações do nível do mar, ocorreu uma segunda fase de deposição turbidítica cretácica, constituída pelos arenitos do Membro Carapebus da Formação Campos (Freitas, 1987).

Os reservatórios de hidrocarbonetos são formados por duas espessas seções de arenitos do Membro Carapebus (Cândido, 1988).

A seqüência superior é constituída por pacotes de arenitos de idade eocênica média, com ocorrência restrita de óleo, tendo pequena expressão econômica (Blaskovski e Moreira, 1992).

Os reservatórios principais são formados por espessos pacotes de arenitos, de idade Coniaciano e Maastrichtiano (Blaskovski e Moreira, 1992). Com o auxílio de dados petrográficos, petrofísicos e de perfis, Cândido (1988) individualizou dois tipos litológicos principais. O primeiro, litofácies A, é constituído por arenitos muito grosseiros, com grânulos dispersos e microconglomerados. O segundo, litofácies B, é formado por arenitos médios a grosseiros (FIG. 4.24).

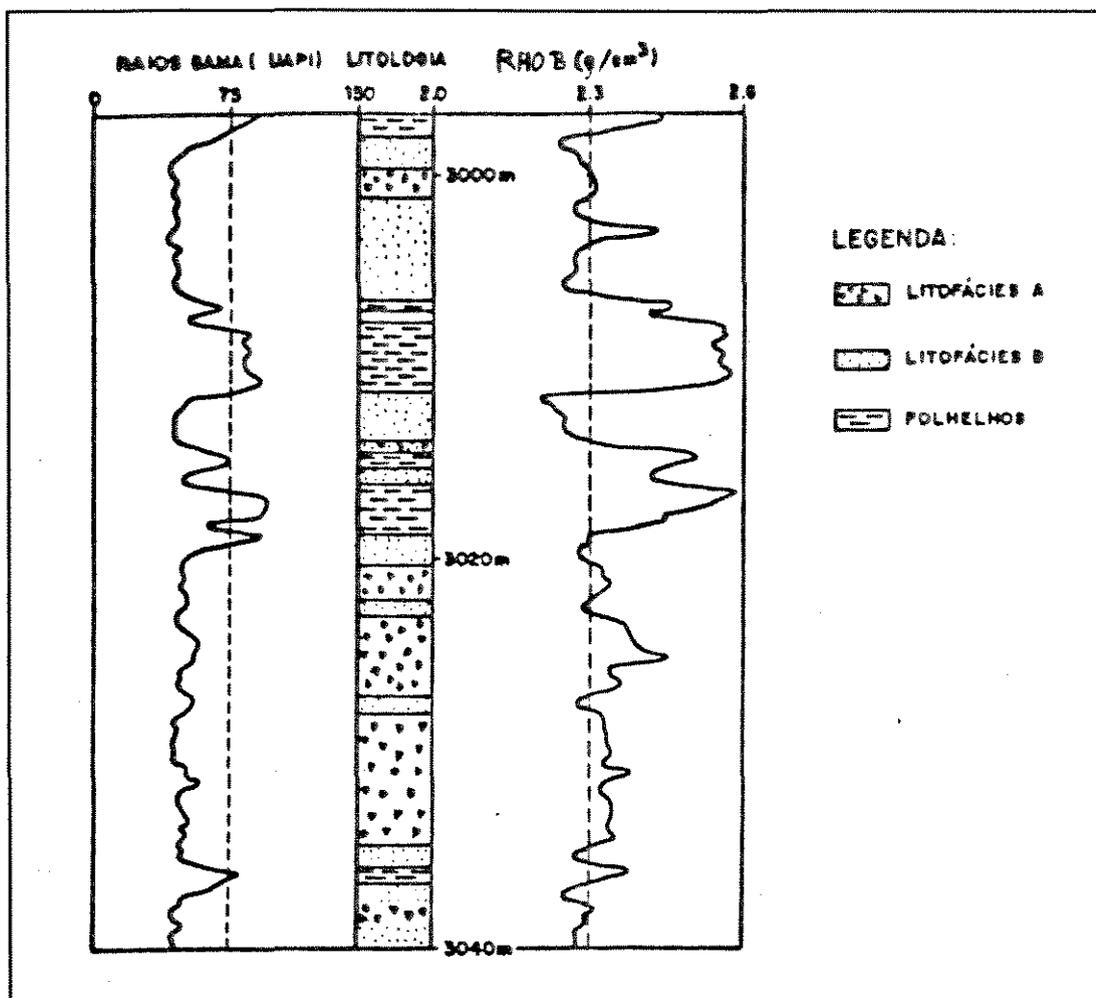


FIG 4.24 - Seção esquemática mostrando as principais litofácies da seção sedimentar, adaptado de Cândido, 1988.

A análise R/S mostrou valores muito próximos para as diversas curvas, como mostra a FIG. 4.25a,b,c,d,e. O alinhamento dos pontos indica que não ocorre efeito transiente inicial e que

os perfis apresentam correlações de grande escala.

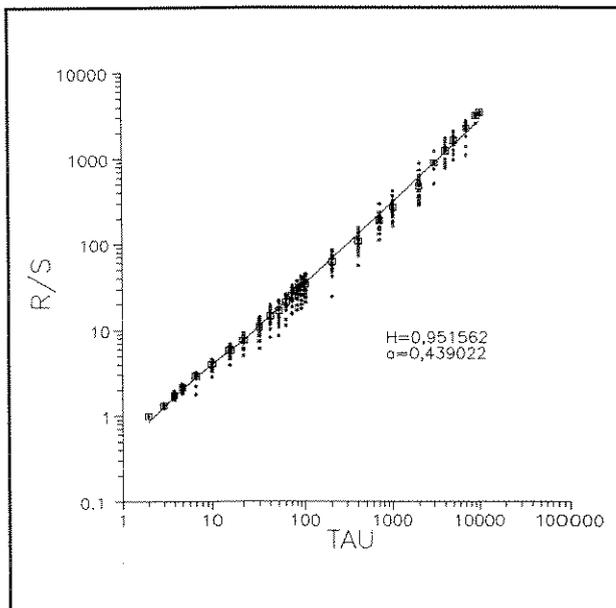


FIG 4.25a - Análise R/S para a curva de GR do poço da FIG 4.23.

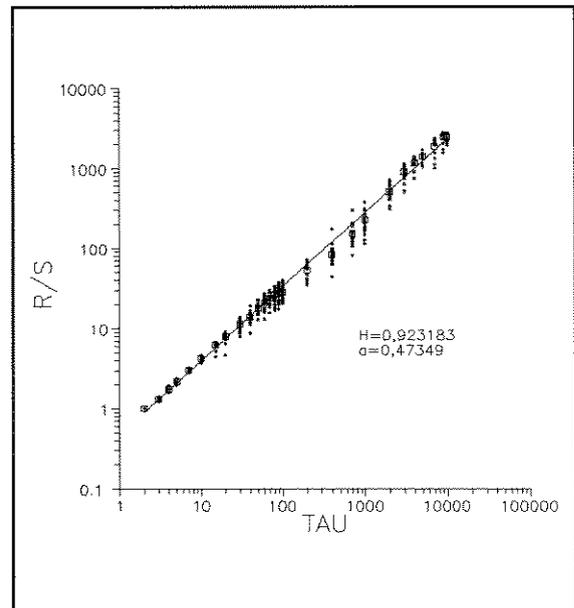


FIG 4.25b - Análise R/S da curva ILD para o poço da FIG 4.23.

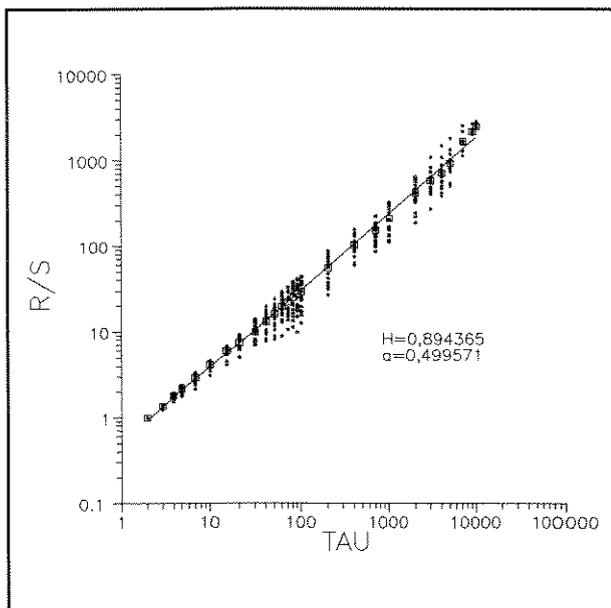


FIG 4.25c - Análise R/S para a curva DT do poço da FIG 4.23.

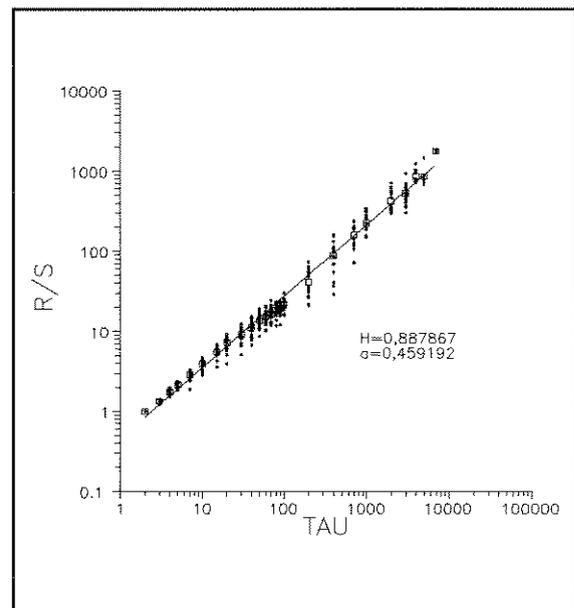


FIG 4.25d - Análise R/S da curva RHOB do poço da FIG 4.23.

Pelo processo de cálculo de $R(t,\tau)/S(t,\tau)$ podemos concluir que esta razão não é sensível às mudanças litológicas desta seção sedimentar, não apresentando "crossover" em função das diferentes unidades litológicas maiores (formações).

A ausência de mudança de direção e, portanto, dimensão fractal provavelmente se deve

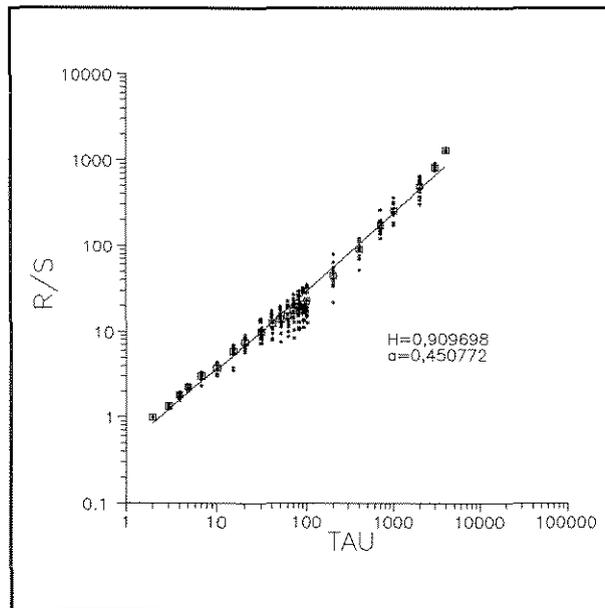


FIG 4.25e - Análise R/S da curva NPHI para o poço da FIG 4.23.

ao fato de as seqüências sedimentares serem constituídas por arenitos e folhelhos, com exceção da base, onde ocorrem os carbonatos com pouca espessura.

Resultado diverso foi encontrado por Shiao e Hu (1992) nas rochas do Terciário da China. Estes autores observaram um aumento brusco no valor do expoente H das rochas do Mioceno para o Pleistoceno, talvez associado a feições estruturais resultantes de colisão de placas. Também apontam a existência de quebras na tendência dos valores médios de R/S , que podem estar relacionadas às periodicidades "escondidas" dos estratos sedimentares.

Para estudar a distribuição em área e o comportamento espacial do valor de H e A , tomamos 52 poços de um campo de petróleo para análise. A seção sedimentar corresponde à mesma descrita acima. O mapa (FIG. 4.26) mostra a distribuição geográfica dos poços.

As TABELAS 4.1 e 4.2 apresentam os valores obtidos em cada análise R/S para H e A . A TABELA 4.3 mostra os valores médios de H e A por poço e a média dos três perfis que refletem a porosidade (DT, RHOB, NPHI). Os valores médios globais para cada curva encontram-se na TABELA 4.4. Como observação, destaca-se que os valores de H e A foram calculados sobre os dados brutos, sem efetuar correções para os efeitos de ambiente de perfilagem ou verticalização dos poços direcionais. A efetivação destas correções não altera o resultado final

pois elas essencialmente não mudam a forma final da curva.

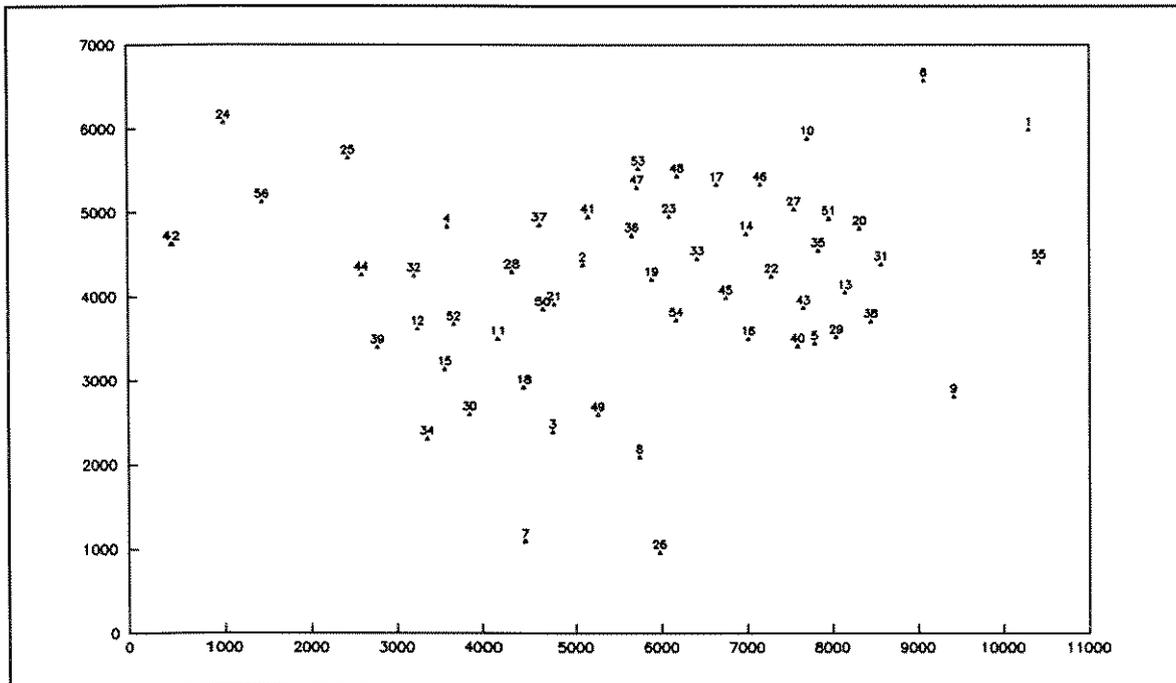


FIG 4.26 - Mapa de localização dos poços estudados na análise R/S.

Em mapa, os resultados podem ser visualizados nas FIG 4.27 a 4.40. **H** e **A** apresentam uma variabilidade concordante com a estrutura geológica local, mostrada pelo mapa do topo do marco cinza vulcânica na FIG 4.41. A análise desses mapas pode auxiliar na determinação do valor de **H** na direção horizontal.

O parâmetro **H** constitui-se em um dado de entrada de capital importância para estudos geoestatísticos, com grande utilidade para os procedimentos de interpolação por krigagem ou para simulação estocástica de propriedades.

Como conclusão, podemos afirmar que os perfis de poços possuem correlação estatística de grande escala, cuja intensidade é dada pelo parâmetro **H**. Embora nos exemplos analisados não haja uma relação direta que permita diagnosticar unidades geológicas diferentes, esta possibilidade deve ser investigada em seqüências que apresentem maior variabilidade litológica. Outra frente aberta à pesquisa é o estudo das características da análise **R/S** e seus resultados utilizando perfis de maior resolução vertical como, por exemplo, as ferramentas radioativas de maior resolução (**RHOB** e **NPHI**) e/ou os perfis de mergulho (dipmeter).

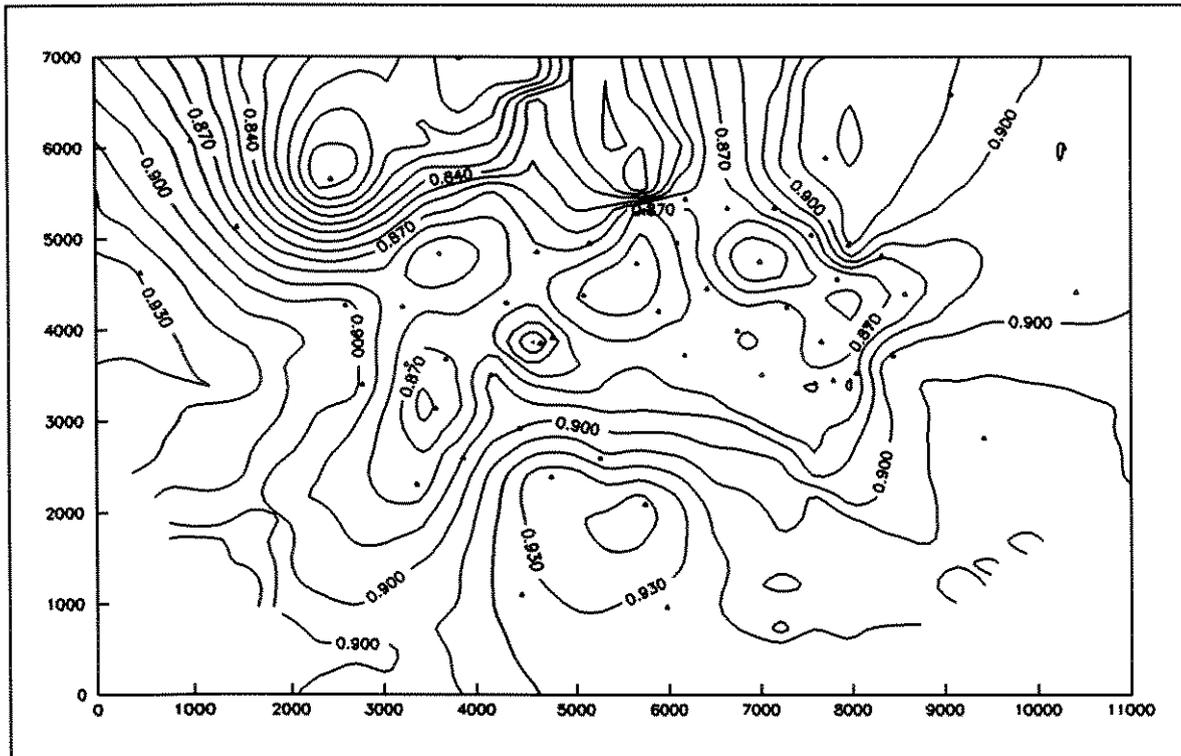


FIG 4.27 - Mapa da distribuição de H para a curva de GR na área em estudo. Coordenadas em metros, intervalo de contorno = 0,01.

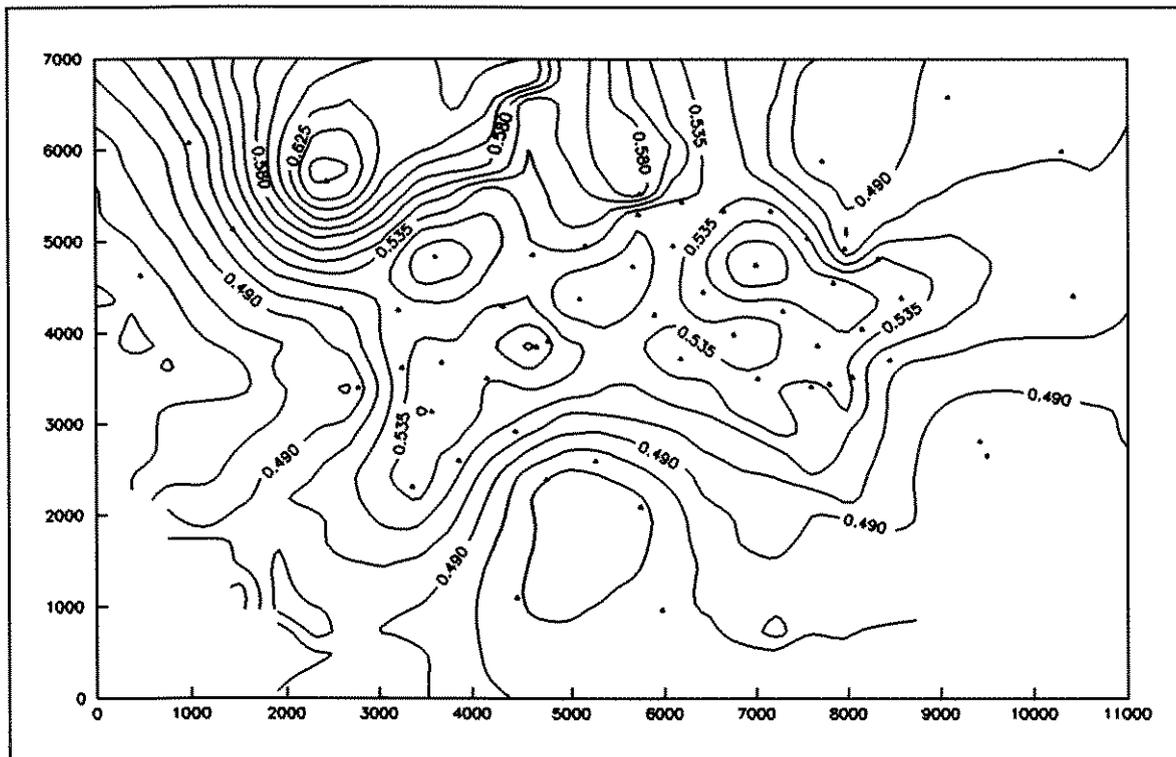


FIG 4.28 - Mapa de distribuição de A para a curva GR na área em estudo. Coordenadas em metros, intervalo de contorno = 0.015.

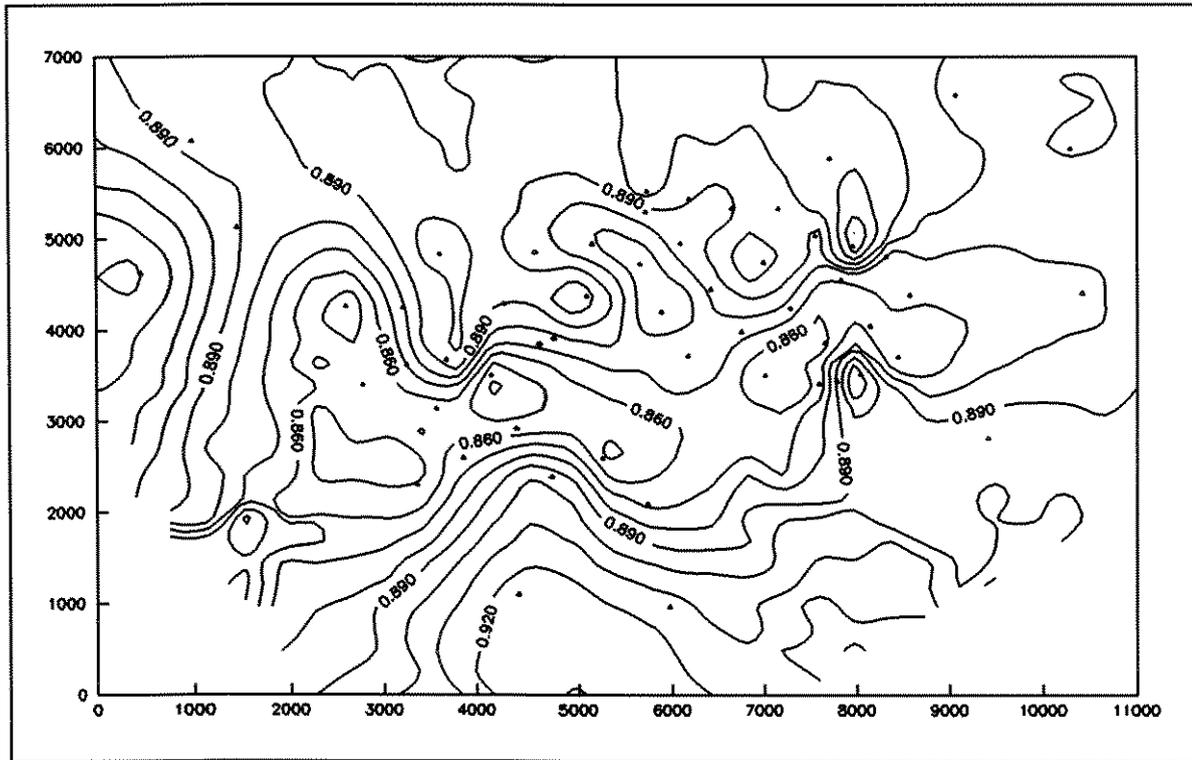


FIG 4.29 - Mapa da distribuição de H para a curva de ILD na área em estudo. Coordenadas em metros, intervalo de contorno = 0,01.

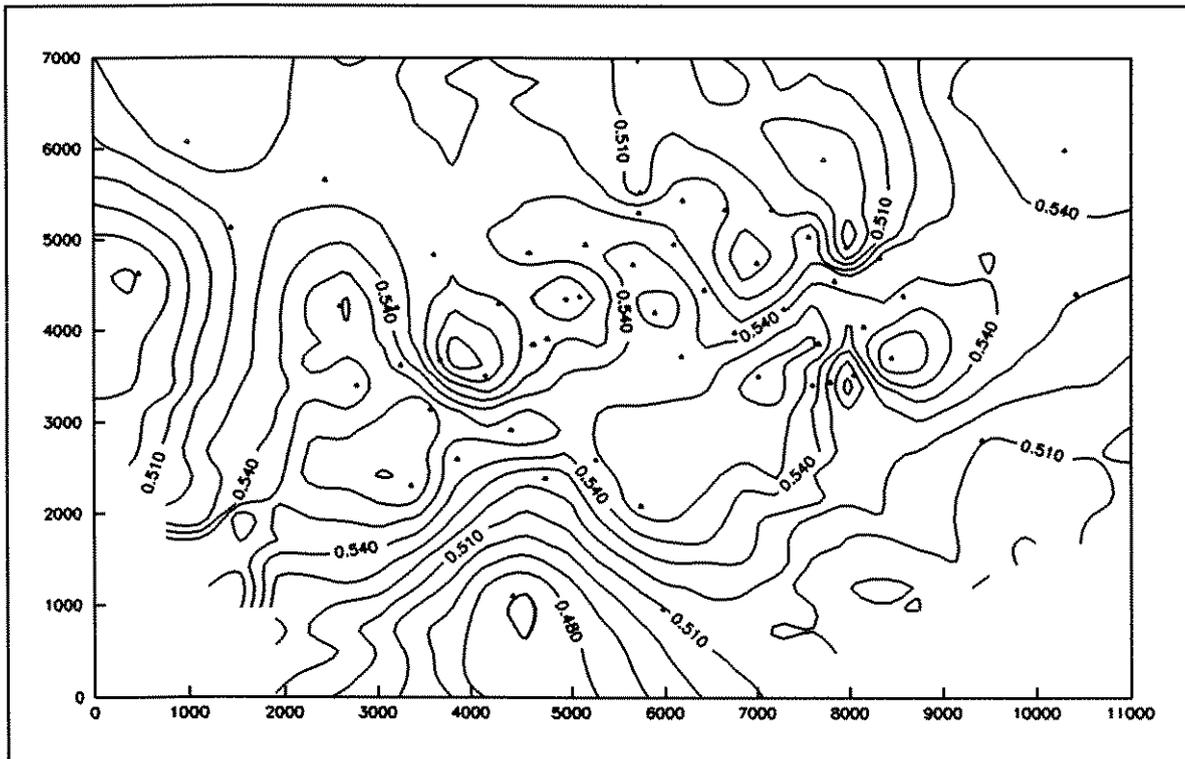


FIG 4.30 - Mapa de distribuição de A para a curva ILD na área em estudo. Coordenadas em metros, intervalo de contorno = 0.01.

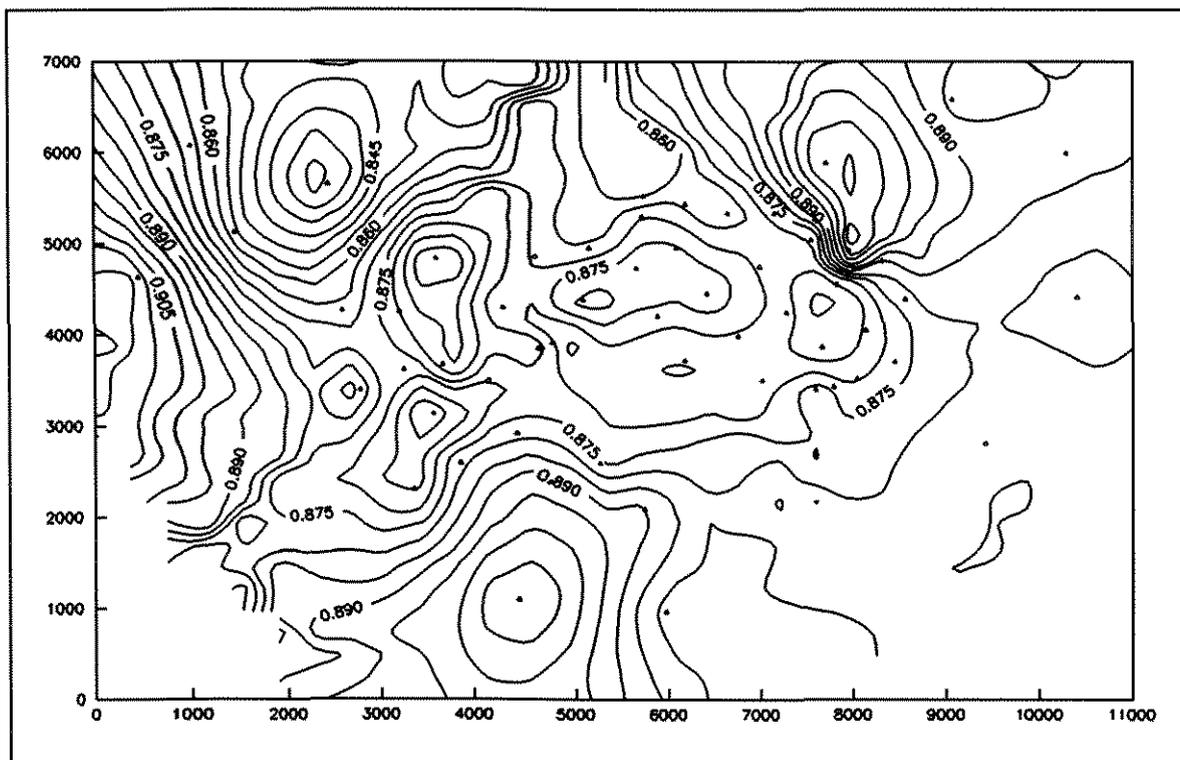


FIG 4.31 - Mapa da distribuição do valor médio de H para as curvas de perfis na área em estudo. Coordenadas em metros, intervalo de contorno = 0,005.

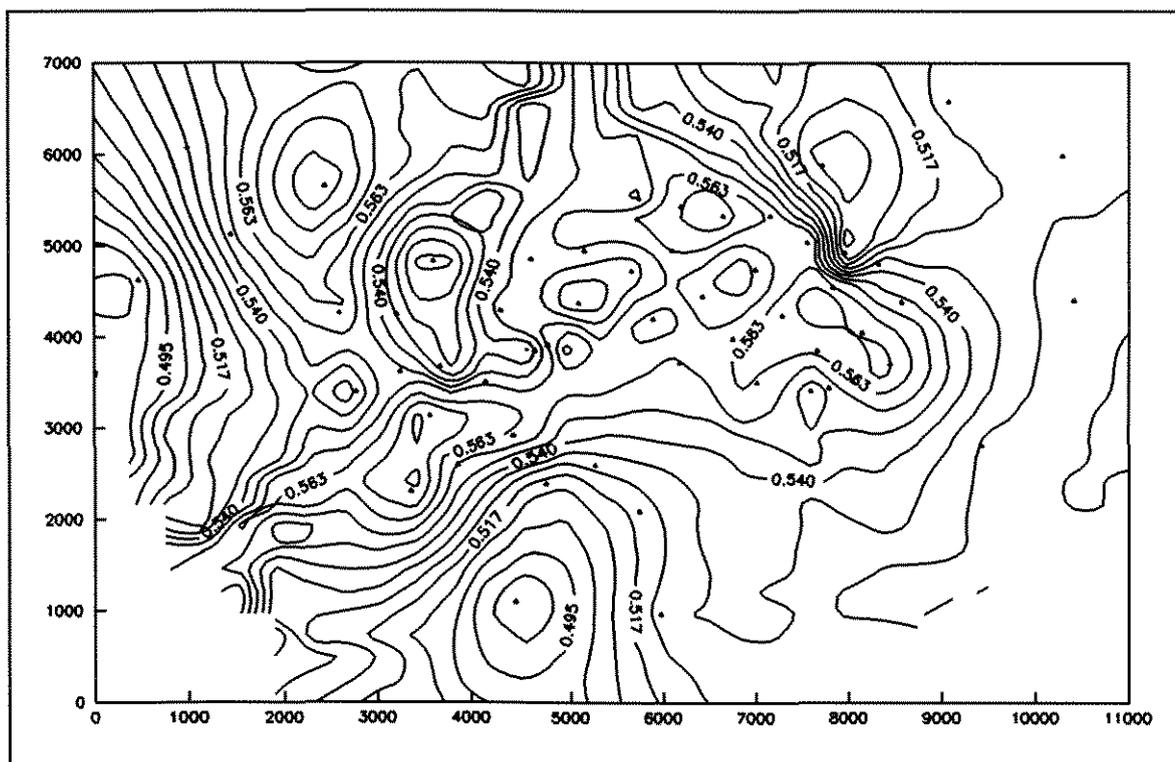


FIG 4.32 - Mapa de distribuição do valor médio de A para as curvas de perfis na área em estudo. Coordenadas em metros, intervalo de contorno = 0.0075.

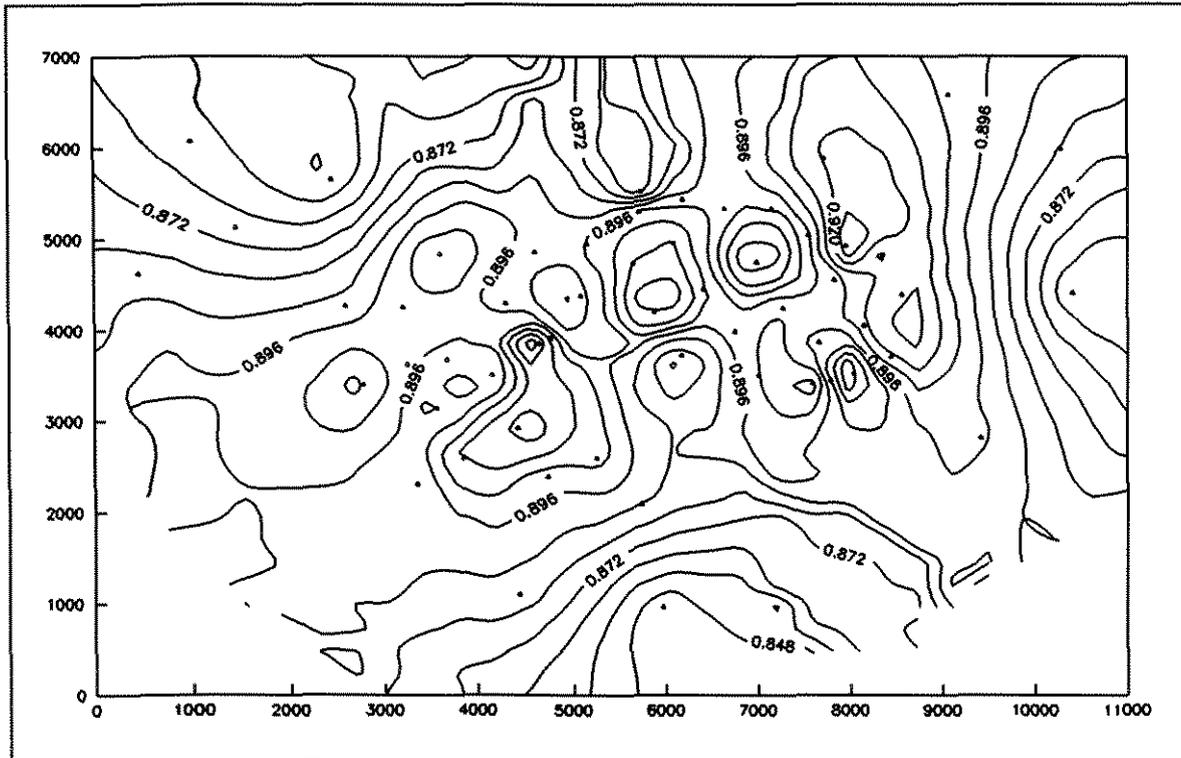


FIG 4.33 - Mapa da distribuição de H para a curva de DT na área em estudo. Coordenadas em metros, intervalo de contorno = 0,008.

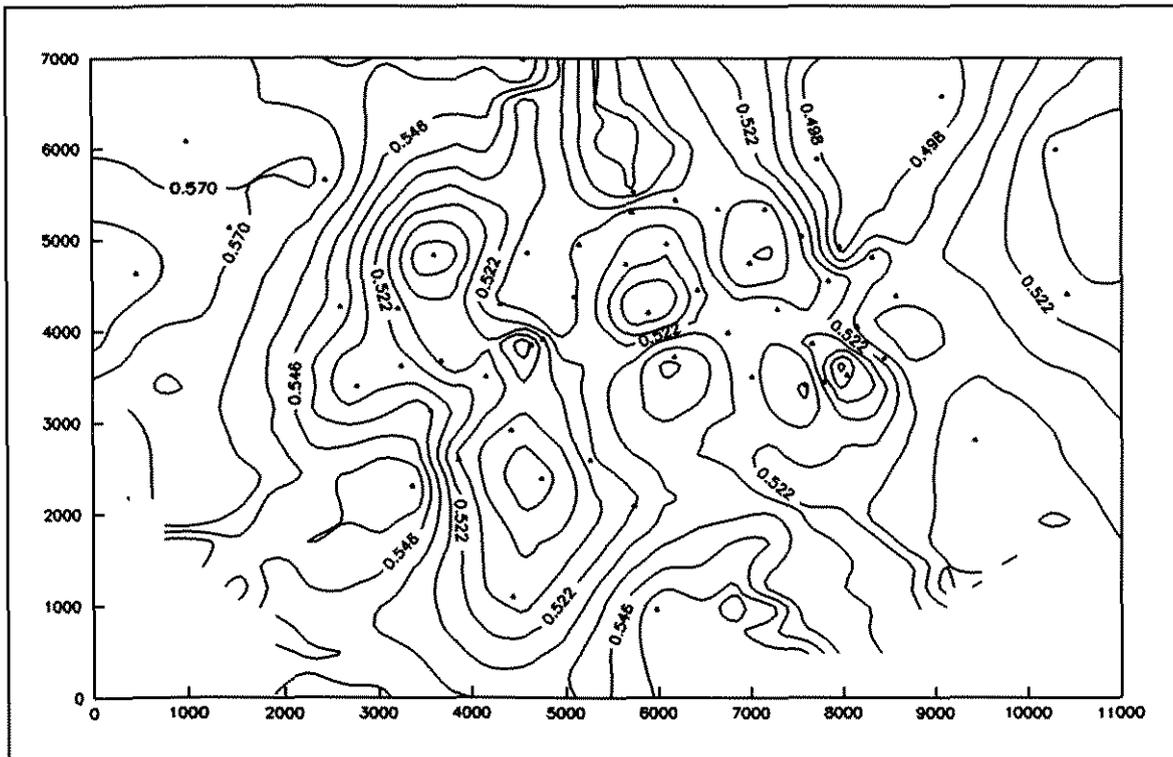


FIG 4.34 - Mapa de distribuição de A para a curva DT na área em estudo. Coordenadas em metros, intervalo de contorno = 0.008.

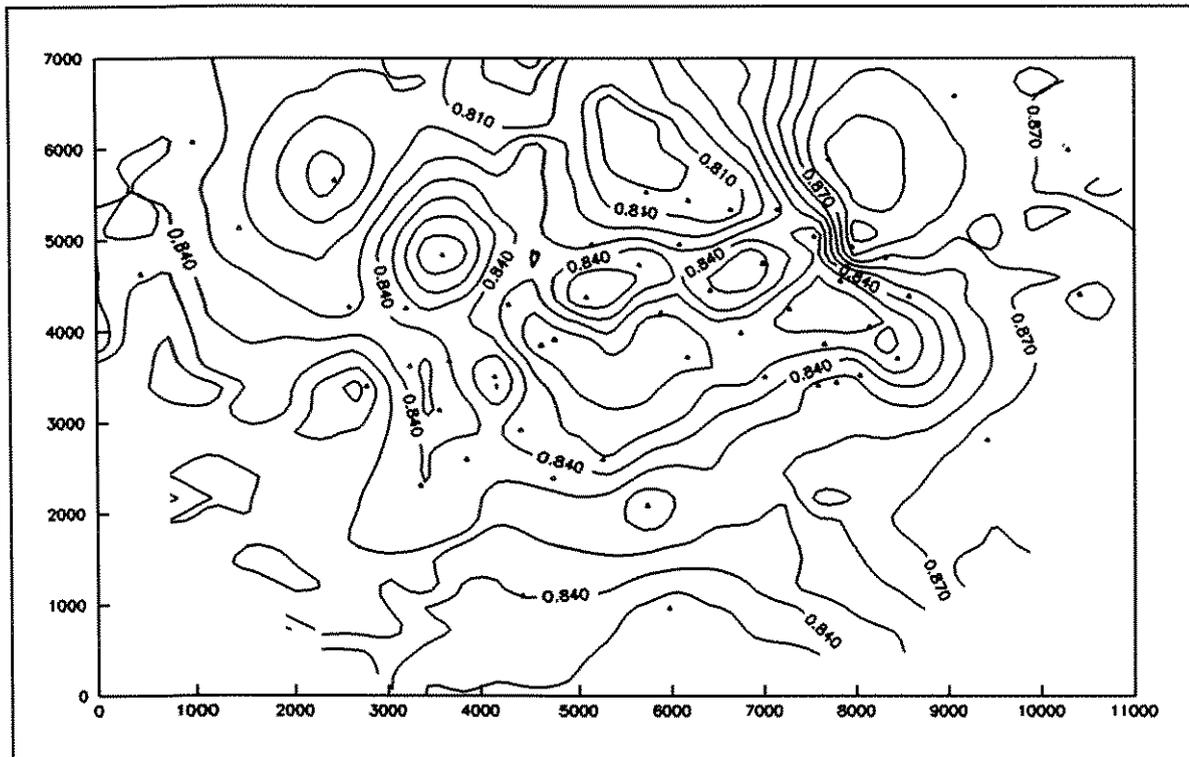


FIG 4.35 - Mapa da distribuição de H para a curva de NPHI na área em estudo. Coordenadas em metros, intervalo de contorno = 0,01.

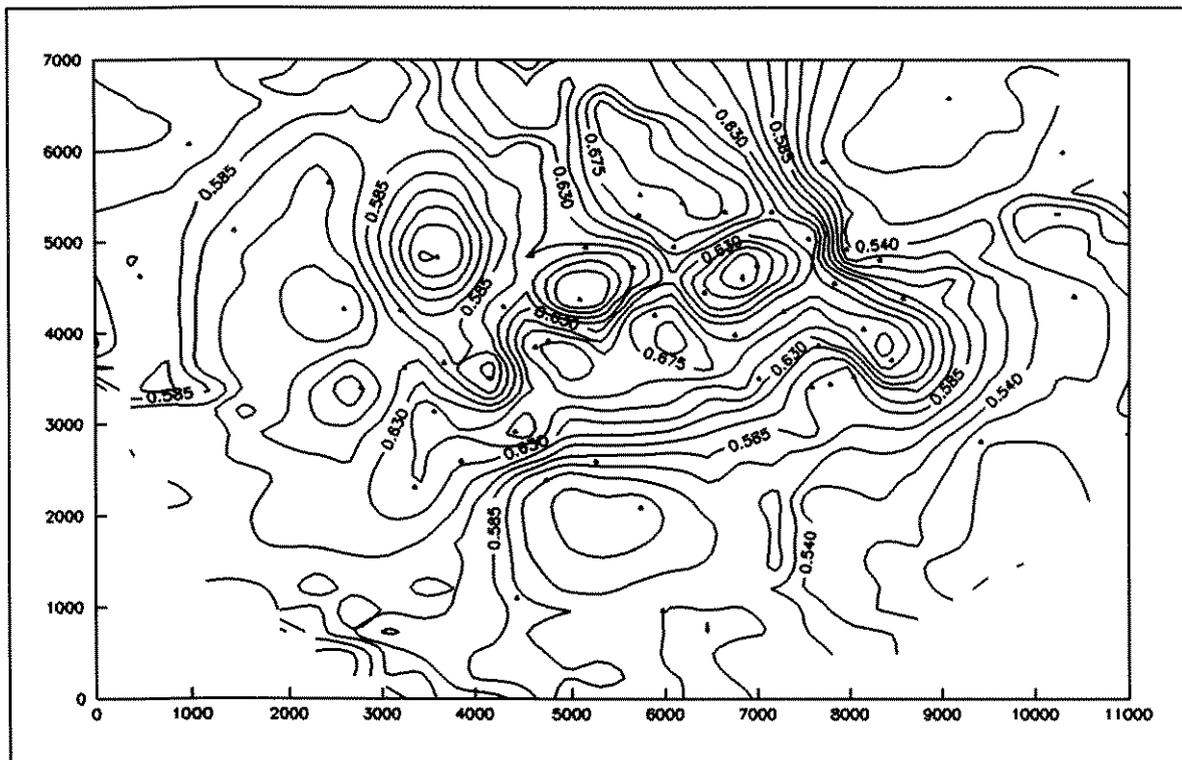


FIG 4.36 - Mapa de distribuição de A para a curva NPHI na área em estudo. Coordenadas em metros, intervalo de contorno = 0.015.

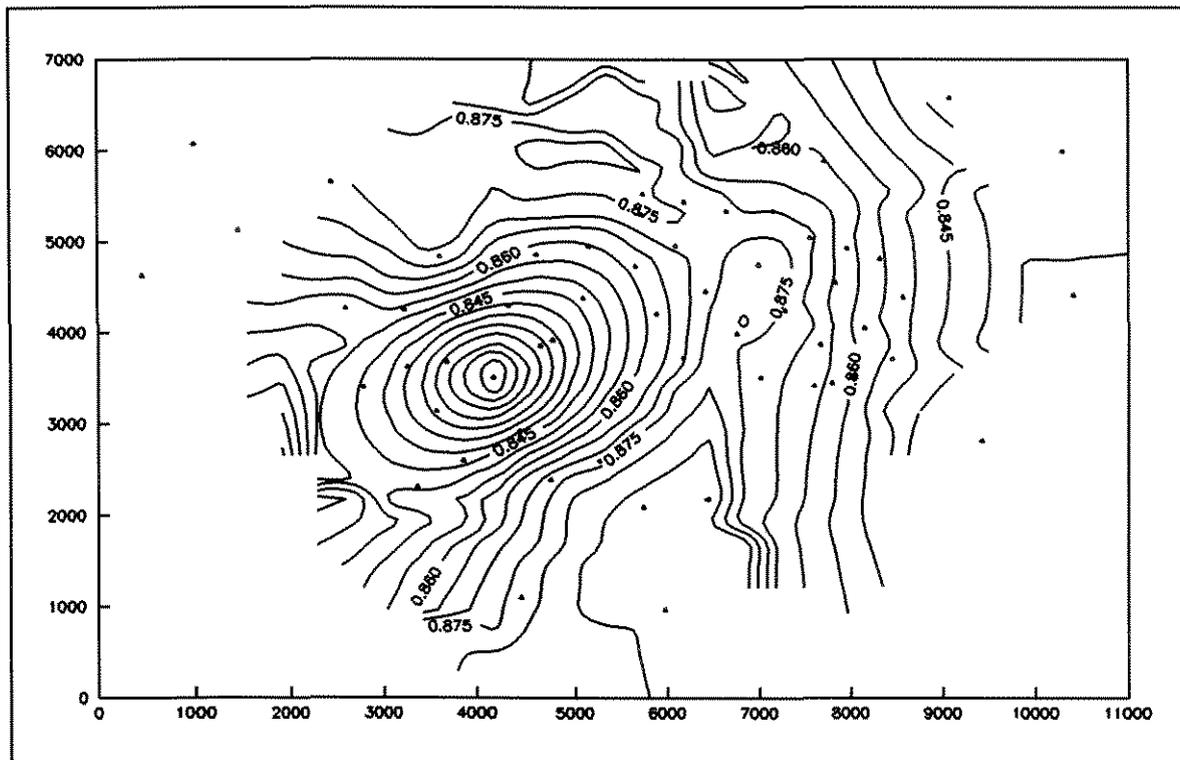


FIG 4.37 - Mapa da distribuição de H para a curva de RHOB na área em estudo. Coordenadas em metros, intervalo de contorno = 0,005.

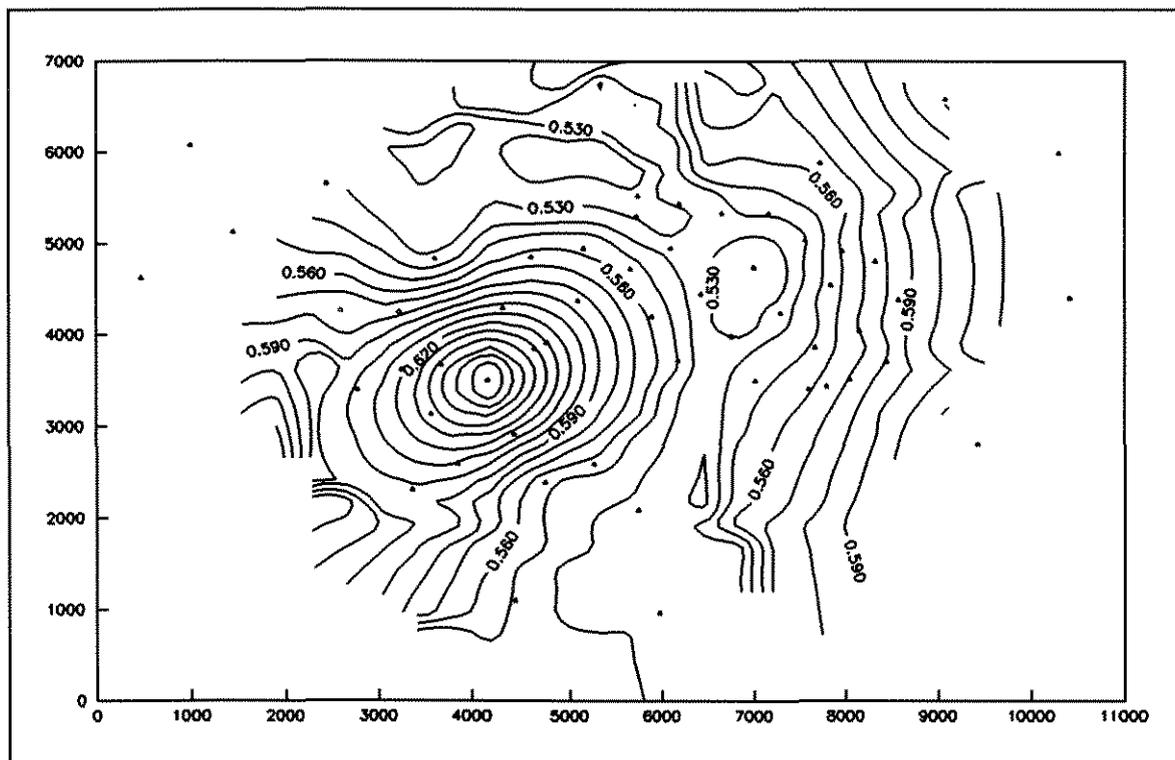


FIG 4.38 - Mapa de distribuição de A para a curva RHOB na área em estudo. Coordenadas em metros, intervalo de contorno = 0.01.

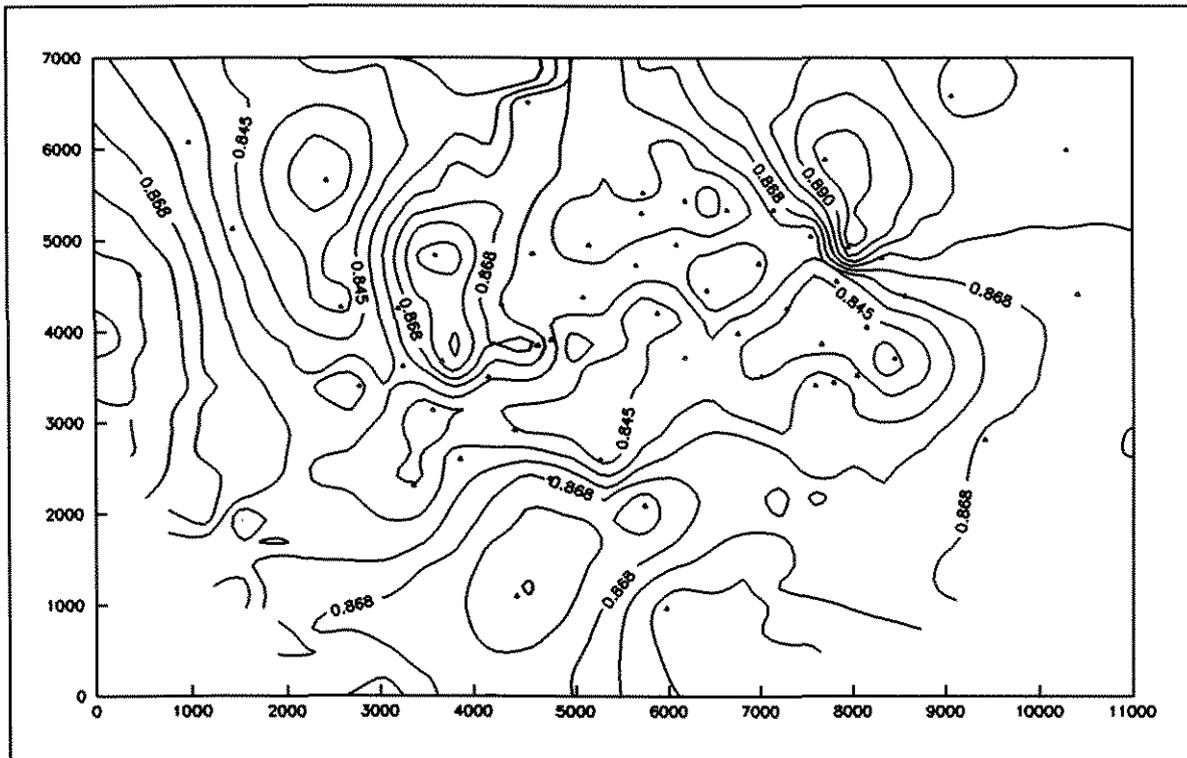


FIG 4.39 - Mapa da distribuição do valor médio de H para as curvas de perfis de porosidade na área em estudo. Coordenadas em metros, intervalo de contorno = 0,0075.

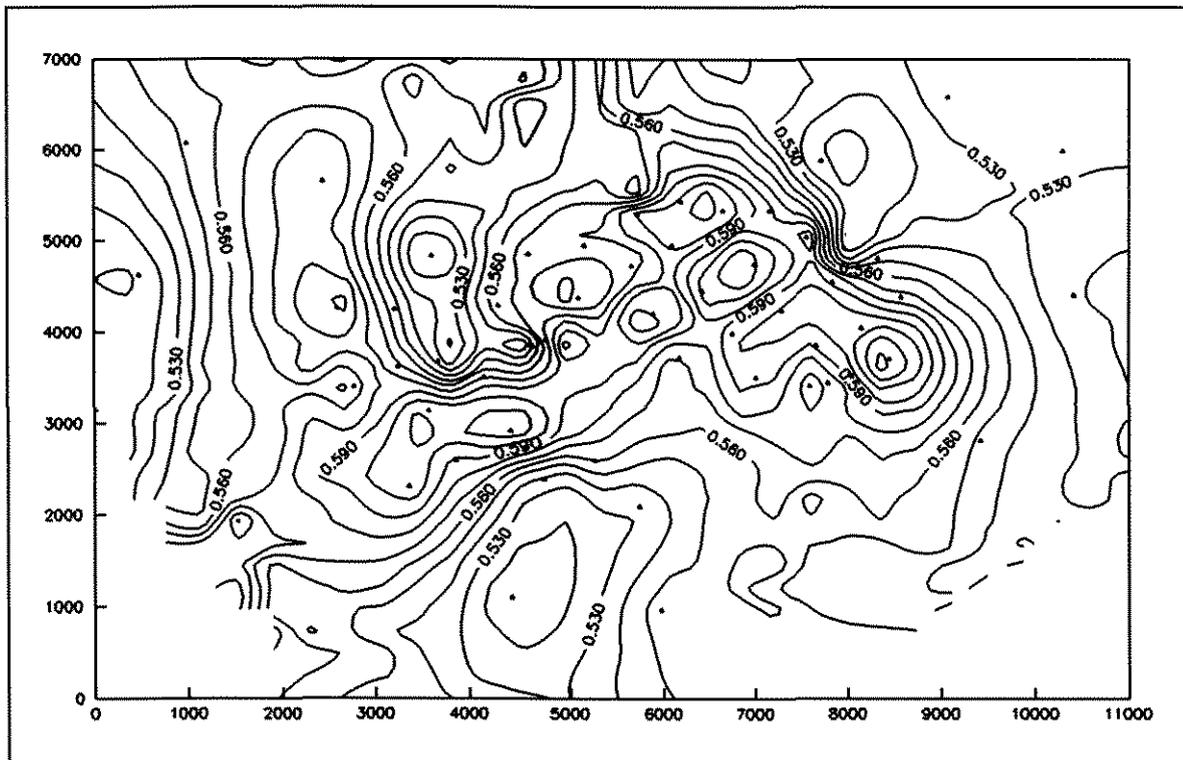


FIG 4.40 - Mapa de distribuição do valor médio de A para as curvas de perfis de porosidade na área em estudo. Coordenadas em metros, intervalo de contorno = 0.01.

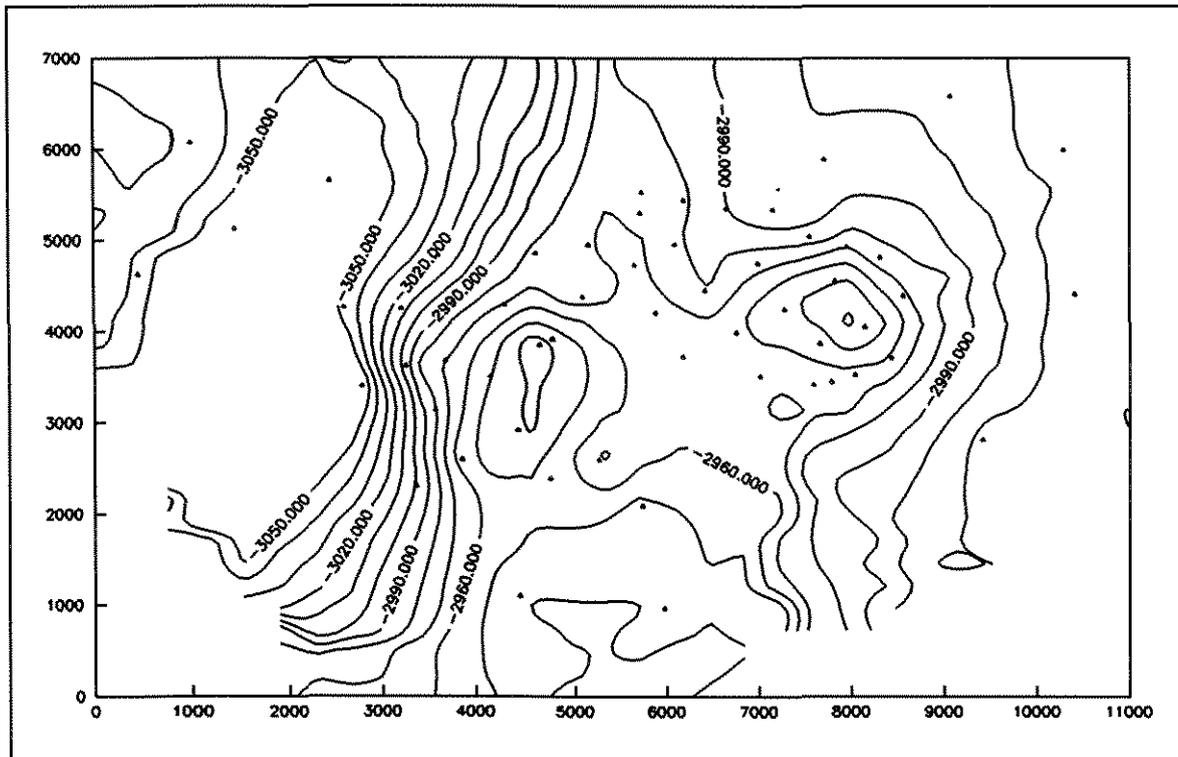


FIG 4.41 - Mapa do topo do marco cinza vulcânica na área em estudo. Coordenadas em metros, intervalo de contorno = 20m.

CAPÍTULO V - PROCEDIMENTOS DE INTERPOLAÇÃO

V.1 - INTRODUÇÃO

O estudo de variáveis aleatórias regionalizadas é caracterizado pelo fato de não dispormos de dados amostrais em todos os pontos do domínio.

Para o caso da indústria do petróleo, a amostragem é feita, via de regra, através de poços, perfurados em áreas mais favoráveis à prospecção, previamente determinadas por estudos geofísicos e geológicos.

O alto custo de cada poço, que implica a otimização dos locais perfurados no terreno, é um dos principais fatores na definição do número de poços a perfurar em uma determinada área. Vários fatores, como as características permo-porosas das rochas, o tamanho da acumulação de petróleo, o número de reservatórios na seção sedimentar, entre outros, também são de grande importância para a tomada de decisão quanto ao número de poços.

Pelos motivos acima, depreende-se que a amostragem nas áreas petrolíferas é dispersa, com o espaçamento dos poços variando desde algumas centenas de metros até poucos quilômetros entre eles.

Por outro lado, a densidade de amostragem é anisotrópica, sendo muito mais abundante na direção vertical, ao longo do poço, do que na direção horizontal.

Os estudos geológicos e de engenharia de produção dos reservatórios de hidrocarbonetos são efetuados com base em modelos. Especialmente no segundo caso, realizam-se simulações do comportamento do reservatório frente a processos de recuperação secundária e terciária. Estes estudos necessitam de informações em uma malha mais refinada do que aquela obtida só pela posição dos poços.

Cabe aos geólogos e engenheiros encarregados de estudar e gerenciar a exploração dos campos de hidrocarbonetos a tarefa de prover as informações necessárias ao modelamento matemático.

A interpolação estocástica é uma ferramenta adequada para este fim, uma vez que

permite caracterizar as propriedades desejadas e, a partir da análise espacial dos dados, realizar inferências destas mesmas propriedades sobre pontos não amostrados. Obtém-se então uma imagem do reservatório.

Duas técnicas de interpolação estocástica são bastante difundidas na indústria do petróleo. A primeira, denominada krigagem, fornece uma imagem otimizada pela minimização da função variância associada aos dados. A segunda, em contrapartida, preserva a variabilidade da distribuição, produzindo imagens de grande utilidade para o estudo do impacto desta variabilidade sobre o processo em apreço.

V.2 - CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Nesta seção, vamos apresentar as noções básicas de estatística necessárias ao bom entendimento dos problemas de interpolação espacial.

Uma variável aleatória (**VA**) pode ser definida como uma variável que pode assumir uma série de valores, denominados realizações, que apresentam uma probabilidade de ocorrência. Quando o número de valores possíveis é finito temos uma variável aleatória discreta. Quando este número é infinito e os valores possíveis pertencem a um conjunto denso, a **VA** é contínua e sua distribuição de probabilidade é dada por uma função acumulada:

$$F(\xi) = \text{Prob}\{\Xi \leq \xi\} \in [0,1] \quad (5.1)$$

Esta função de distribuição acumulada caracteriza plenamente a **VA** Ξ (Journel, 1987).

Denominamos de esperança matemática à soma ponderada pela probabilidade de todas as possíveis ocorrências da **VA**:

$$E\{\Xi\} = m = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi f(\xi) \quad (5.2)$$

onde $f(\xi) = F'(\xi)$ é a função densidade de probabilidade, definida como sendo a derivada da função distribuição de probabilidade, onde ela existir.

A variância da **VA** é definida como sendo a esperança do desvio quadrático de Ξ em

torno de seu valor médio:

$$\text{var}(\Xi) \equiv \sigma^2 \equiv E\{[\Xi - m]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi (\xi - m)^2 f(\xi) \geq 0 \quad (5.3)$$

O operador variância é linear, no sentido de que a esperança de uma combinação linear de **VA** independentes é a combinação linear das esperanças das **VA**:

$$E\left\{\sum_i a_i \Xi_i\right\} = \sum_i a_i E\{\Xi_i\} \quad (5.4)$$

Na maioria dos problemas geológicos, normalmente é mais importante conhecer a relação de dependência entre duas variáveis aleatórias, ou seja, a relação entre uma realização da variável Ξ_1 e outra Ξ_2 (Journel, 1987). Este padrão de dependência torna-se um elemento crítico de grande importância em processos de inferência estatística como, por exemplo, quando queremos estimar valores de porosidade em uma malha tridimensional a partir dos dados de perfis de poços perfurados.

A distribuição das realizações do par de **VA** Ξ_1 e Ξ_2 é caracterizada pela função distribuição de probabilidade conjunta:

$$F_{\Xi_1, \Xi_2}(\xi_1, \xi_2) = \text{Prob}\{\Xi_1 \leq \xi_1 \text{ e } \Xi_2 \leq \xi_2\} \quad (5.5)$$

que, na prática, é estimada pela proporção de pares de valores abaixo dos respectivos limites ξ_1 e ξ_2 .

Graficamente, o grau de independência pode ser analisado pela dispersão dos dados, plotados em um gráfico cartesiano de Ξ_1 e Ξ_2 , em torno da linha de 45°. O momento de inércia deste diagrama é conhecido por semi-variograma, dado pela expressão:

$$\gamma_{\Xi_1, \Xi_2} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N [\xi_{1i} - \xi_{2i}]^2 \quad (5.6)$$

que nada mais é do que a diferença média quadrática entre os dois componentes de cada distribuição. Quanto maior o valor do semi-variograma, maior é a dispersão em torno da linha de 45° e menor a relação entre as duas variáveis.

A esperança matemática da distribuição conjunta é dada por:

$$E\{\Xi_1 \Xi_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 d\xi_2 \xi_1 \xi_2 f_{\Xi_1 \Xi_2}(\xi_1 \xi_2) \quad (5.7)$$

A covariância entre as duas VA é definida como:

$$cov\{\Xi_1 \Xi_2\} \equiv \sigma_{\Xi_1 \Xi_2} = E\{[\Xi_1 - m_{\Xi_1}] \cdot [\Xi_2 - m_{\Xi_2}]\} \quad (5.8)$$

Ao normalizarmos a covariância para obtermos uma nova grandeza independente de unidades, definimos o coeficiente de correlação:

$$\rho_{\Xi_1 \Xi_2} = \frac{\sigma_{\Xi_1 \Xi_2}}{\sigma_{\Xi_1} \sigma_{\Xi_2}} = \frac{cov\{\Xi_1 \Xi_2\}}{\sqrt{var\{\Xi_1\} var\{\Xi_2\}}} \in [-1, 1] \quad (5.9)$$

O semi-variograma representa uma medida da variabilidade, ao passo que a covariância e o coeficiente de correlação são medidas de similaridade (Journel e Huijbregts, 1989).

V.3 - CARACTERIZAÇÃO ESTRUTURAL - SEMI-VARIOGRAMA E ANÁLISE R/S

O caso mais freqüente dos problemas geológicos de interpolação é o de se ter a medida de um mesmo atributo em duas posições diferentes separadas por um vetor τ , ou seja:

$$\Xi_1 = \Xi(t) \text{ e } \Xi_2 = \Xi(t + \tau) \quad (5.10)$$

Neste caso, a variável aleatória $\Xi(t)$, $t \in [A]$, deve ser inferida, para fins de mapeamento, a partir de um número finito de pontos amostrais.

Analisando os $n(\tau)$ pares de pontos amostrais do domínio A , podemos estimar as características da função semi-variograma pelo semi-variograma experimental:

$$\gamma_{\Xi(t), \Xi(t+\tau)} = \frac{1}{2n(\tau)} \sum_{i=1}^{n(\tau)} [\xi(t_i) - \xi(t_i + \tau)]^2 \quad (5.11)$$

Variando o vetor τ , obtemos uma função vetorial $\gamma(\tau)$, que caracteriza a incerteza espacial da VA $\Xi(t)$ no domínio A .

Para a construção de um modelo matemático para $\gamma(\tau)$ adotamos médias sobre a

distribuição espacial de $\Xi(\mathbf{t})$ e $\Xi(\mathbf{t}+\boldsymbol{\tau})$, baseadas em critérios geológicos que, via de regra, não podem ser provados ou refutados por testes estatísticos (Journel, 1987).

Os processos de inferência estatística envolvem modelamento sobre várias realizações do par de **VA** $\Xi(\mathbf{t})$ e $\Xi(\mathbf{t}+\boldsymbol{\tau})$. Nos processos geológicos, entretanto, não é possível obter mais de uma realização destas **VA**. Este problema é superado admitindo-se que o par de **VA** acima apresenta a mesma lei de distribuição para qualquer translação do vetor $\boldsymbol{\tau}$, ou seja, a lei espacial é invariante por translação ou estacionária (Journel e Huijbregts, 1989).

Para os estudos geoestatísticos, a estacionariedade requerida implica em:

i) que exista a esperança matemática e que ela seja independente do suporte amostral \mathbf{t} :

$$E\{\Xi(\mathbf{t})\} = m \quad \forall \mathbf{t} \quad (5.12)$$

ii) que exista a covariância para cada par da **VA** e que seja dependente da separação $\boldsymbol{\tau}$.

$$C(\boldsymbol{\tau}) = E\{\Xi(\mathbf{t}+\boldsymbol{\tau}) \cdot \Xi(\mathbf{t})\} - m^2 \quad \forall \mathbf{t} \quad (5.13)$$

A condição ii implica a estacionariedade das funções variância e semi-variograma, valendo as relações:

$$\text{var}\{\Xi(\mathbf{t})\} = C(0) = \text{cte} \quad \forall(\mathbf{t}) \quad (5.14)$$

$$\gamma(\boldsymbol{\tau}) = C(0) - C(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall(\mathbf{t}) \quad (5.15)$$

Muitos fenômenos físicos apresentam uma capacidade infinita de dispersão, onde não se pode definir a variância a priori ($C(0)$) nem a covariância, mas pode-se definir o semi-variograma. Nestes casos, pode-se relaxar as condições de estacionariedade, mantendo-se a condição i e admitindo-se a existência e estacionariedade somente do semi-variograma, ou seja, os incrementos $[\Xi(\mathbf{t}+\boldsymbol{\tau}) - \Xi(\mathbf{t})]$ possuem variância finita independente de \mathbf{t} :

$$\text{var}\{\Xi(\mathbf{t}+\boldsymbol{\tau}) - \Xi(\mathbf{t})\} = E\{[\Xi(\mathbf{t}+\boldsymbol{\tau}) - \Xi(\mathbf{t})]^2\} = 2\gamma(\boldsymbol{\tau}), \quad \forall(\mathbf{t}) \quad (5.16)$$

As duas principais características de um semi-variograma são:

i) comportamento na origem, que pode ser parabólico, linear ou pepítico (FIG 5.1).

ii) existência ou não de um patamar de estabilização do valor de $\gamma(\tau)$ à medida que τ aumenta, fazendo $\gamma(\tau) = \text{cte}$ para $|\tau| > a$ (amplitude ou "range" de correlação).

Para o tratamento matemático, são empregados os seguintes modelos teóricos para o modelamento dos semi-variogramas experimentais (Journel e Huijbregts, 1989):

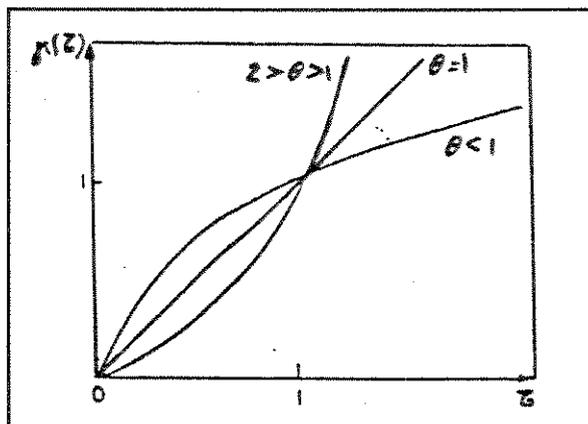


FIG 5.1 - Exemplo teórico de semi-variograma, mostrando o comportamento na origem, adaptado de Journel e Huijbregts, 1989.

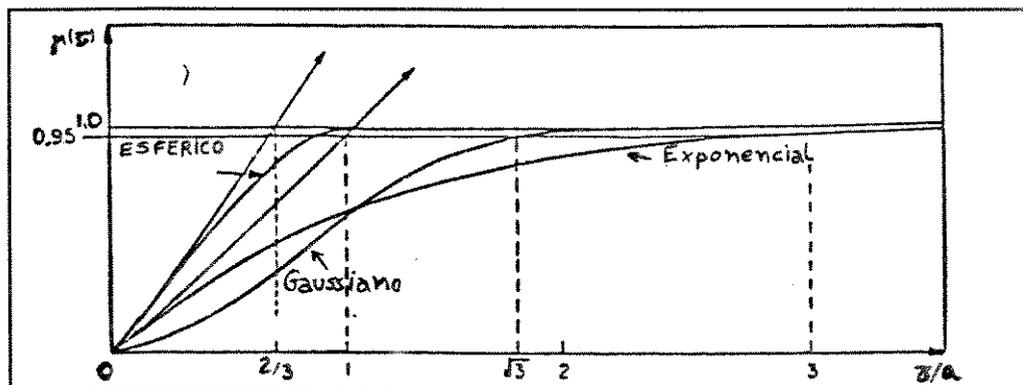


FIG 5.2 - Exemplo teórico de semi-variograma com patamar, adaptado de Journel e Huijbregts, 1989.

i) modelos com patamar e comportamento linear na origem (FIG 5.2):

i.1) esférico:

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} \frac{3\tau}{2a} - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{a}\right)^3 & \forall \tau \in [0, a] \\ 1 = \text{patamar} & \forall \tau \geq a \end{cases} \quad (5.17)$$

i.2) exponencial:

$$\gamma(\tau) = 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{a}\right) \quad (5.18)$$

ii) modelos com patamar e comportamento parabólico na origem:

ii.3) gaussiano:

$$\gamma(\tau) = 1 - \exp\left(-\frac{\tau^2}{a^2}\right) \quad (5.19)$$

iii) modelos sem patamar, que não apresentam função covariância nem variância a priori:

iii.1) lei de potência:

$$\gamma(\tau) = |\tau|^\theta \quad \theta \in (0,2) \quad (5.20)$$

iii.2) logarítmico:

$$\gamma(\tau) = \ln \tau \quad (5.21)$$

Todo o semi-variograma deve começar pela origem dos eixos. Na prática, entretanto, normalmente se observa uma descontinuidade na origem, na maioria das vezes ocasionada por um patamar com valor $\gamma(0) = \text{cte}$ em uma distância menor do que o menor espaçamento entre duas observações disponíveis. Este efeito é conhecido como **efeito pepita** e caracteriza a ausência de correlação à escala de amostragem do estudo (Journel e Huijbregts, 1989).

Para distribuições de variáveis aleatórias com características de **mBf**, Mandelbrot e Van Ness (1968); Hewett (1986); Feder (1988) e Voss (1988) estabelecem que as características estruturais dadas pelo semi-variograma obedecem a uma lei de potência dada por:

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{2} * V_H * \tau^{(2*H)} \quad (5.22)$$

onde:

$$r = |t_2 - t_1|;$$

V_H = variância dos dados;

H = expoente de Hurst.

Outra propriedade de interesse para a interpolação e extrapolação é a da mudança de escala por um fator r , valendo a propriedade:

$$\gamma(r\tau) = r^{(2-H)} * \gamma(\tau) \quad (5.23)$$

Uma desvantagem do semi-variograma, como ferramenta estatística para estudar o comportamento e a correlação espacial de uma variável aleatória, é o seu limitado raio de ação, tendo significado até distâncias máximas aproximadamente iguais à metade do domínio. As distribuições fractais, por outro lado, possuem correlações em todas as escalas, com longo alcance (Mandelbrot e Van Ness, 1968). A determinação do parâmetro H por meio de semi-variogramas sofre, portanto, esta influência, sendo válida somente para pequenos espaçamentos τ . Para correlações de longo alcance, a análise R/S constitui-se em uma ferramenta mais apropriada (Mandelbrot e Van Ness, 1968; Hewett, 1986).

Os registros de perfis elétricos de poços são interpretados como rGf (Capítulo II). As propriedades de distribuições fractais na direção horizontal podem ser modeladas por funções mBf . O comportamento do rGf quando $H \rightarrow 1$ é semelhante ao comportamento do mBf quando $H \rightarrow 0$ (Hewett, 1986).

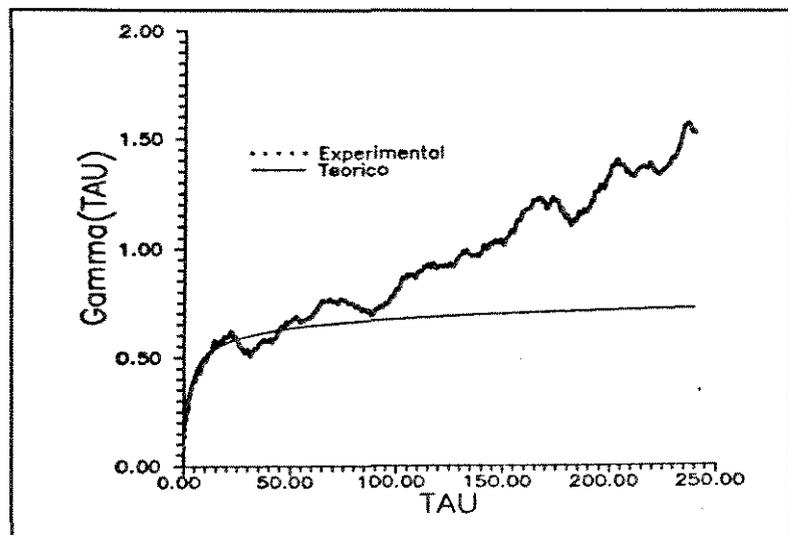


FIG 5.3 - Semi-variograma experimental de uma curva de perfil elétrico de poço, com ajuste para o teórico.

A FIG 5.3 mostra o semi-variograma de um poço na mesma área estudada pela análise R/S do capítulo IV. A FIG 4.25d mostra os resultados da análise R/S. Observa-se claramente que o semi-variograma experimental não se ajusta mais ao modelo teórico a partir de $\tau \approx 100$, ou seja, para espessuras maiores do que 20-25m. A partir destas espessuras, o semi-variograma

já começa a sofrer influências de uma deriva, muito provavelmente associada às espessuras de camadas litológicas atravessadas. A análise R/S não é sensível a estas variações litológicas, que provavelmente se representariam como "crossover", uma vez que a quantidade de pontos não é suficiente para o seu registro, determinando, portanto, um valor de **H** com maior precisão para correlações de longo alcance. O valor de **H** para a direção vertical é determinado de forma precisa por meio da análise R/S dos registros de poços.

Para os problemas de interpolação necessitamos caracterizar o valor de **H** na direção horizontal. Hewett (1986) propôs utilizar o mesmo valor da vertical, apoiado no fato de os processos geológicos atuantes na formação de rochas sedimentares afetarem grandes áreas, sujeitas às mesmas variações de clima e tempo. Somente com a disponibilidade de mapas de contorno de propriedades que não estejam muito suavizados, deve-se preterir a hipótese acima e determinar **H** diretamente dos mapas, através de técnicas de estimativa da dimensão fractal como expostas no Capítulo I.

Crane e Tubman (1990) utilizaram dados de poços horizontais e verticais para examinar a variabilidade de parâmetros de reservatórios, concluindo que os perfis destes poços podem ser caracterizados como **rGf** com dimensão fractal semelhante, suportando, portanto, a idéia de Hewett (1986).

Perez e Chopra (1991) também utilizaram dados de poços horizontais, observando que havia mudanças do valor de **H** da vertical para a horizontal, o que inviabilizaria assumir a hipótese acima.

No conjunto de dados disponíveis para esta tese não temos poços horizontais para confrontar estas duas hipóteses de trabalho. Uma vez que os mapas geológicos normalmente são suavizados, não apresentando resolução para a variabilidade em pequena escala, não nos parece aconselhável obter o valor de **H** através deles. Enquanto não dispusermos de elementos mais significativos, adotaremos a mesma hipótese de Hewett (1986) para a determinação de **H** na direção horizontal, calculando um valor médio para os poços de uma área.

V.4 - INTERPOLAÇÃO LINEAR POR KRIGAGEM

A idéia básica em um processo de interpolação espacial linear por técnicas de regressão é estimar o valor desconhecido de uma variável a partir de uma combinação linear de alguns valores conhecidos em pontos próximos ao ponto a determinar.

As informações requeridas para este procedimento são os valores conhecidos para a propriedade a estimar e uma informação estrutural, como por exemplo, um semi-variograma.

O processo de krigagem é uma técnica de interpolação que fornece o melhor estimador linear não tendencioso de uma variável, a partir de um conjunto de amostras, requerendo o conhecimento prévio dos momentos de segunda ordem, covariância e semi-variograma, os quais normalmente podem ser inferidos (Journel e Huijbregts, 1989).

A característica principal da krigagem é minimizar o erro cometido ao se estimar o valor de uma variável $\xi(\mathbf{t})$, representando uma propriedade a ser mapeada, num ponto arbitrário \mathbf{t} do domínio.

A estimativa é feita a partir de uma combinação linear dos dados amostrais, de tal forma que o valor estimado $\xi^*(\mathbf{t})$ seja dado por:

$$\xi^*(\mathbf{t}) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} \xi_{\alpha}(\mathbf{t}_{\alpha}) \quad (5.24)$$

onde α simboliza o ponto amostral.

Uma vez que admitimos a nossa variável aleatória como apresentando uma certa continuidade, aceitando a condição de estacionariedade do fenômeno, temos que a esperança matemática dos dados estimados deve ser igual à esperança dos dados reais:

$$E\{\xi^*(\mathbf{t})\} = m \quad (5.25)$$

Substituindo 5.24 em 5.25, obtemos a condição:

$$\sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} = 1 \quad (5.26)$$

Esta condição garante que o erro de estimação seja nulo em média:

$$\langle \xi(\hat{t}) - \xi^*(\hat{t}) \rangle = 0 \quad (5.27)$$

A variância de estimação, ou variância de krigagem, é calculada pela expressão:

$$\sigma_k^2 = E\{[\xi(\hat{t}) - \xi^*(\hat{t})]^2\} \quad (5.28)$$

Esta expressão pode ser desenvolvida com substituição da equação 5.24 em 5.28. Efetuando as operações algébricas convenientes, como bem demonstrado nos livros que tratam de krigagem (Journel e Huijbregts, 1989), o problema passa a ser o de determinar os pesos λ_α que minimizem a variância σ_k^2 , sujeitos à condição 5.26.

Para minimizar uma função de λ devemos fazer com que as derivadas parciais em relação aos λ_α 's sejam iguais a zero. Como temos uma relação condicionante, podemos aplicar o método dos multiplicadores de Lagrange (μ), definindo uma nova função:

$$\theta = \sigma_k^2 + 2\mu \left(\sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha - 1 \right) \quad (5.29)$$

O sistema de krigagem resulta diretamente ao se fazerem as derivadas parciais de θ em relação às incógnitas λ e μ iguais a zero. Reescrevendo as equações, já em termos de semi-variograma, teremos:

$$\sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha \gamma\{\xi_\alpha(\hat{t}), \xi_\beta(\hat{t})\} - \mu = \gamma\{\xi(\hat{t}), \xi_\alpha(\hat{t})\} \quad (5.30)$$

combinada com a equação 5.26.

O semi-variograma, portanto, é ferramenta estatística de fundamental importância para a solução dos problemas de krigagem.

Para familiarização com sistemas de krigagem e verificação das propriedades 5.22 e 5.23 estudamos dois problemas simples de interpolação e extrapolação entre três e quatro pontos conhecidos (Anexos 1 e 2), para um segmento de tamanho unitário T , com $\xi(0) = 0$; $\xi(T/2) = 0,65$ e $\xi(T) = 1$ para três pontos e $\xi(T/4) = 0,5$ e $\xi(3T/4) = 0,5$ com os mesmos extremos do caso anterior para quatro pontos.

A estrutura de mBf é dada pelo semi-variograma de lei de potência utilizado, estudando-se a sensibilidade do método para valores diferentes de H (FIG 5.4 e FIG 5.5).

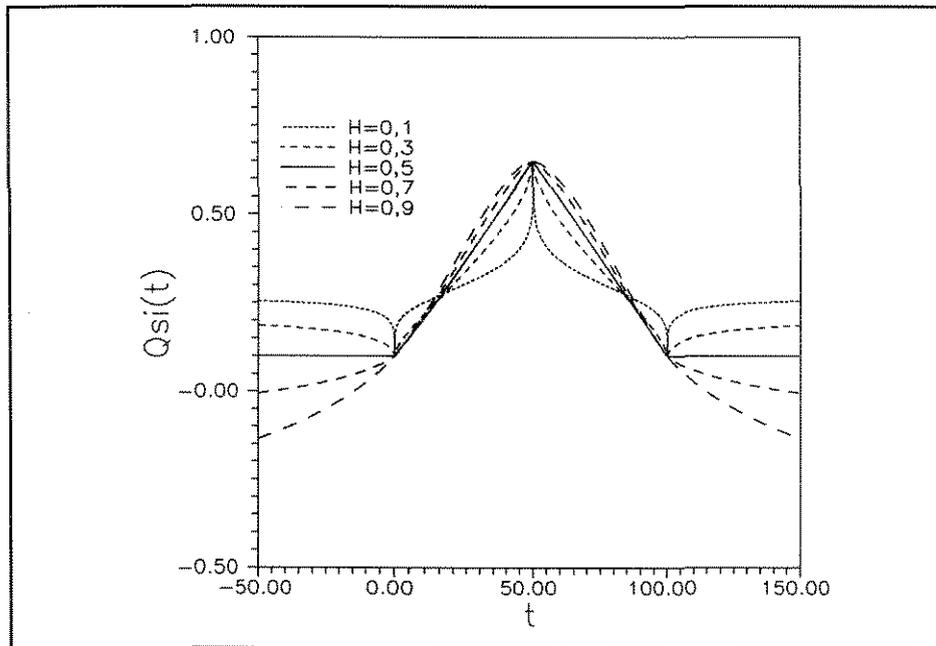


FIG 5.4a - Exemplo de krigagem com 3 pontos conhecidos e vários valores de H .

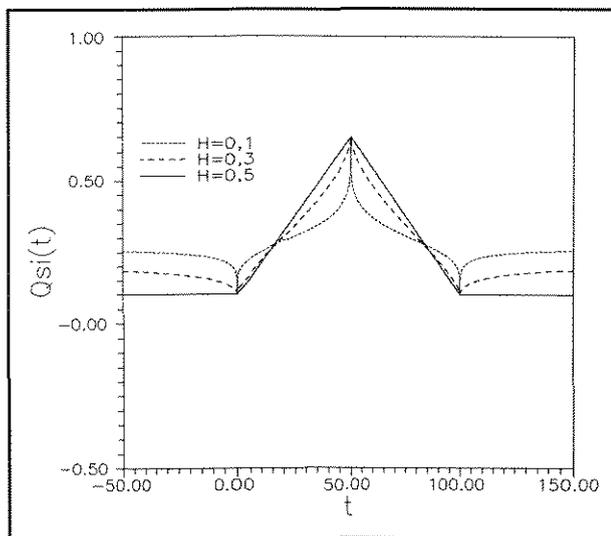


FIG 5.4b - Detalhe para $H < 0,5$ do exemplo acima.

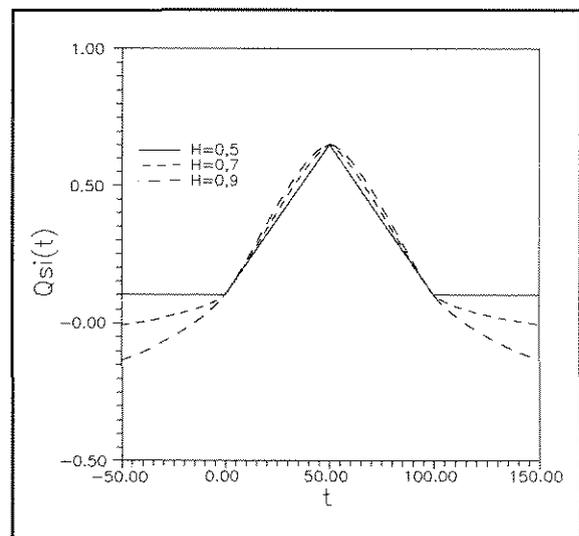


FIG 5.4c - Detalhe para $H > 0,5$ do exemplo acima.

Para valores de $H < 0,5$ evidencia-se um caráter antipersistente na interpolação. Para $H = 0,5$ a interpolação é linear e para $H > 0,5$ observa-se persistência, mantendo-se a continuidade da tendência da interpolação. O mesmo se verifica para extrapolação à direita e à

esquerda dos dados. Estas observações são semelhantes àquelas efetuadas por Mandelbrot e Van Ness (1968), em um contexto diferente ao da krigagem (ver FIG 2.5).

Para interpolações e extrapolações de dados petrofísicos de perfis, o expoente H é da ordem de **0,8** a **0,9** (Tabela 4.4), o que mostra a importância de se familiarizar com o comportamento persistente do processo.

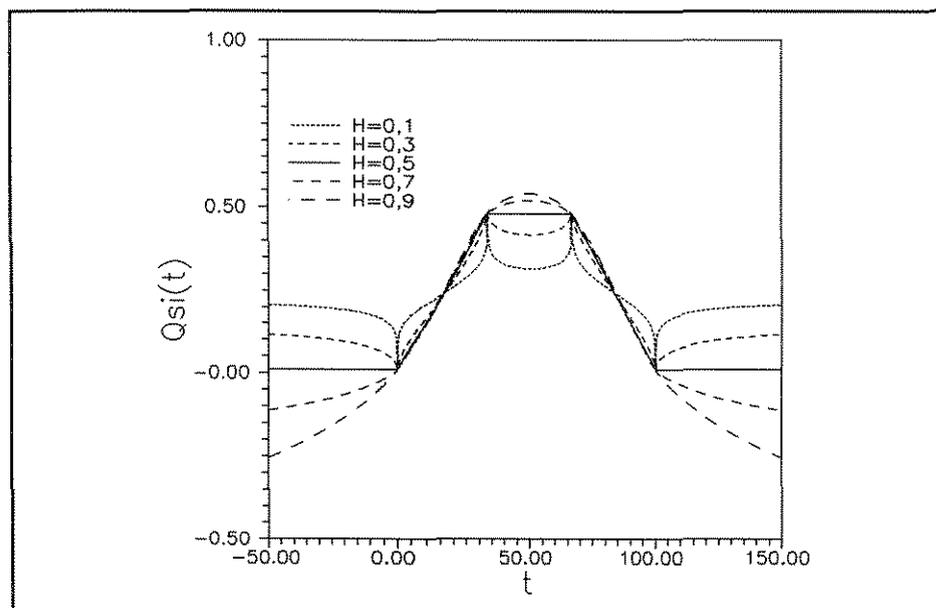


FIG 5.5a - Exemplo de krigagem para 4 pontos conhecidos com vários valores de H .

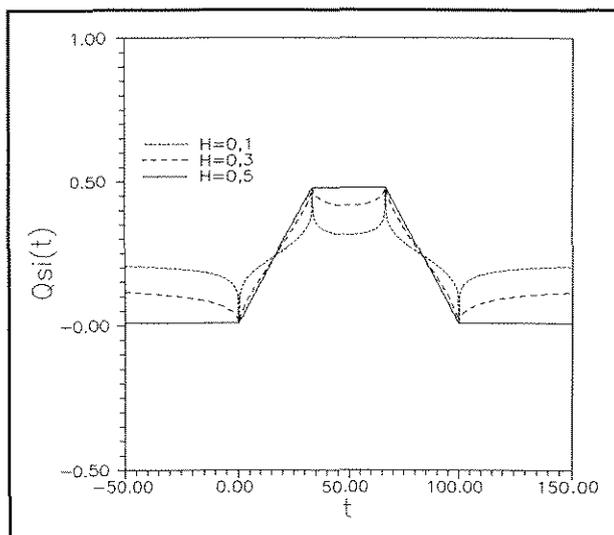


FIG 5.5b - Detalhe para $H < 0,5$ do exemplo acima.

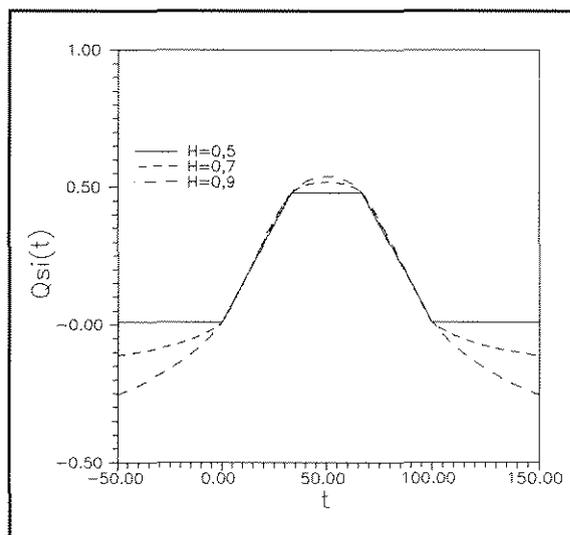


FIG 5.5c - Detalhe para $H > 0,5$ do exemplo acima.

V.5 - SIMULAÇÃO ESTOCÁSTICA

Em muitos estudos de reservatórios não estamos interessados somente no melhor estimador de uma variável em um determinado ponto, mas sim, no impacto da variabilidade da distribuição de uma propriedade no processo.

Este objetivo é alcançado com o auxílio da simulação estocástica, onde a principal meta é reproduzir a estrutura da função de autocovariância da distribuição original.

Existem vários métodos para a simulação estocástica descritos na literatura, como exemplificado em Journel e Huijbregts, 1989; Isaaks e Srivastava, 1989; entre outros.

Para os trabalhos desta tese adotamos um método simples e direto desenvolvido no âmbito da computação gráfica, descrito de forma bastante didática em Voss (1988) e com algoritmos em Saupe (1988). Este método já foi aplicado na área petrolífera por Hewett (1986), Emanuel et al (1989), Hewett e Behrens (1990) e Perez e Chopra (1991), sendo conhecido por adições sucessivas aleatórias. Com ele se produzem múltiplas distribuições equiprováveis de uma propriedade, com uma estrutura de correlação de um **mBf** com intermitência medida pelo parâmetro **H**, definido previamente.

O primeiro passo consiste em determinar um valor interpolado para o ponto médio entre dois pontos amostrais. Esta interpolação pode ser efetuada por um método "spline", ou então, como é o nosso caso, por um processo linear de krigagem.

O segundo passo é adicionar um componente aleatório ao valor, que preserve as suas características espaciais.

O processo passa a ser recursivo, incorporando-se os valores assim determinados ao banco de dados, interpolando-se novamente para o ponto médio da nova escala e adicionando-se outro componente aleatório.

A premissa básica da qual partiu Voss (1988) é supor que os incrementos sucessivos de uma variável $\xi(t)$ sejam estacionários, obedecendo à lei de potência:

$$\text{var}\{\xi(t_2) - \xi(t_1)\} = |t_2 - t_1|^{2H} \sigma^2 \quad (5.31)$$

onde σ^2 é a variância da população gaussiana de onde se tiraram as amostras ξ .

Tomando um exemplo teórico com dois pontos $\xi(0) = 0$ e $\xi(1)$ de uma população $G(0, \sigma^2)$ teremos, para um mBf de $H = 0,5$:

$$\text{var}\{\xi(0) - \xi(1)\} = \sigma^2 \quad (5.32)$$

A interpolação para o ponto médio é feita por krigagem, com a posterior adição de um componente aleatório D_1 , representado por um deslocamento aleatório gaussiano de média 0 e variância Δ_1^2 . Então:

$$\xi\left(\frac{1}{2}\right) = \xi(0) + \frac{1}{2}(\xi(1) - \xi(0)) + D_1 \quad (5.33)$$

Aplicando o operador variância e as relações 5.31 e 5.32 obtemos:

$$\Delta_1^2 = \frac{1}{4} \sigma^2 \quad (5.34)$$

Continuando-se o processo, para uma interpolação de ordem n teremos:

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2^{n+1}} \sigma^2 \quad (5.35)$$

Adotando o mesmo desenvolvimento acima, podemos generalizar estas relações para valores de $H \neq 0,5$, obtendo:

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2^{2nH}} \sigma^2 (1 - 2^{2H-2}) \quad (5.36)$$

Como observado por Voss (1988), este método não preserva a estacionariedade do sistema. Entretanto, é um método muito utilizado para produzir simulações de paisagens e cadeias de montanhas em computação gráfica, embora gere certos alinhamentos indesejáveis nas figuras, que correspondem justamente às primeiras interpolações.

A variante proposta por Voss (1988) consiste em acrescentar um deslocamento aleatório D_n a todos os pontos do estágio n, e não somente aos pontos interpolados. O autor acima acredita que esta técnica permite contornar o problema da perda de estacionariedade.

Outra vantagem deste segundo método é o fato de permitir a interpolação para pontos com um fator de escala r qualquer, não necessariamente igual a 0,5 como no caso anterior. Para

atender às exigências do semi-variograma, é necessário adicionar um componente aleatório D_n a todos os pontos do estágio n , que tenha por variância:

$$\Delta_n^2 \propto (r^n)^{2H} \quad (5.37)$$

Este parâmetro adicional r pode mudar a aparência do fractal. A feição do fractal controlada pelo parâmetro r é denominada de lacunaridade.

Podemos novamente desenvolver o mesmo raciocínio matemático para a interpolação entre dois pontos $\xi(0) = 0$ e $\xi(T)$, amostrados de uma população gaussiana $(0, \sigma^2)$, com escala $T = r^{n-1}$ e $t = r^n$. Após resolver o problema algébrico como em 5.31 a 5.34, chegamos ao valor da variância da perturbação aleatória no passo n :

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2} t^{2nH} \sigma^2 \left(1 - \left(\frac{t}{T}\right)^{2-2H}\right) \quad (5.38)$$

A FIG 5.6 mostra uma aplicação deste método para o problema dos três pontos estudado na krigagem.

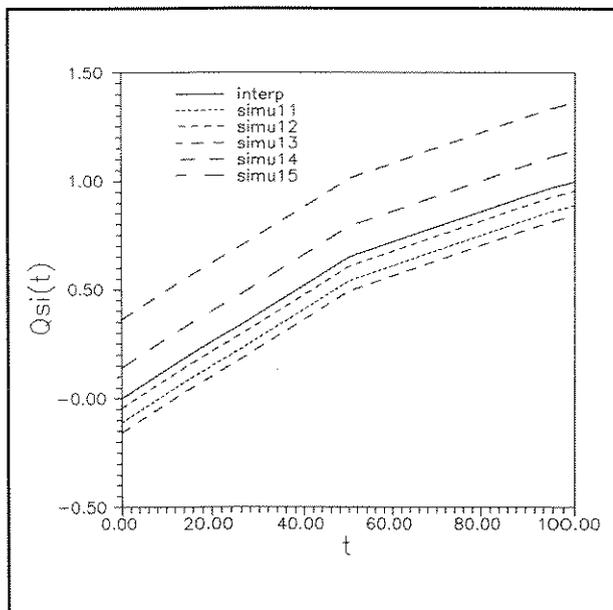


FIG 5.6 - Simulação estocástica pelo algoritmo de Voss, com 3 pontos conhecidos.

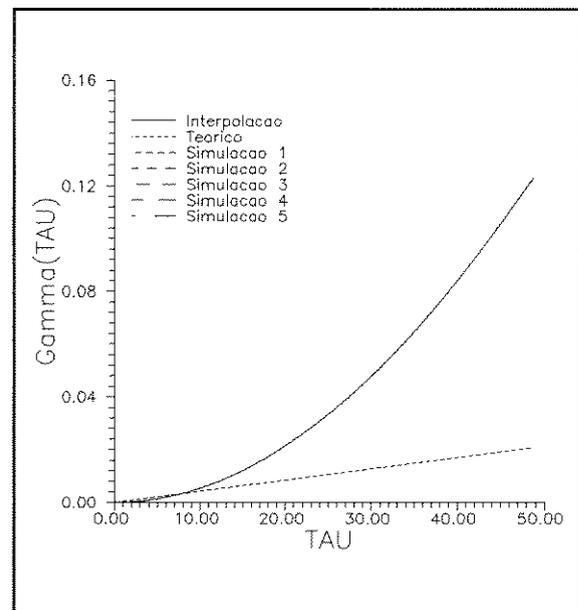


FIG 5.7 - Variogramas da simulação estocástica acima.

Em todas as simulações realizadas observamos que há a preservação da variância total da distribuição, porém o semi-variograma teórico não é preservado. Os semi-variogramas das

simulações coincidem com o da interpolação (FIG 5.7).

Por outro lado, este método não preserva os valores originais, uma vez que as adições aleatórias são efetuadas sobre todos os pontos do domínio, inclusive os amostrais. Desta forma, a simulação estocástica por adições sucessivas aleatórias não é condicional no sentido estrito.

Estamos propondo nesta tese um método para condicionar este procedimento de simulação. Partimos da premissa que, no ponto amostral, temos uma realização da variável aleatória representativa da propriedade em estudo. Devido às características de unicidade da amostragem em fenômenos geológicos, conforme discutido no início deste capítulo, aceitamos esta realização da VA como correspondente ao evento certo, ou seja, a sua probabilidade de ocorrência é igual a 1. Desta forma, a variabilidade aleatória neste ponto é nula, o que equivale a dizer que $\Delta_v^2 = 0$.

À medida que nos afastamos do ponto amostral, a incerteza na determinação do ponto interpolado aumenta, supondo-se que a maior variabilidade deva ocorrer a distâncias acima do alcance ou área de influência da informação. Assim, Δ^2 cresce à medida que nos afastamos dos pontos amostrais até um limite superior, em nosso caso tomado igual à variância de "ensemble" dos dados, como na simulação pelo método de Voss (1988).

Uma primeira solução para este problema foi obtida considerando-se a variância σ^2 de 5.38 calculada por:

$$\sigma^2 = \sigma_n^2 = (\sigma_{n-1}^2)_m d + (\sigma_{n-1}^2)_j (1-d) \quad (5.39)$$

onde: m = posição à esquerda do ponto a interpolar,

j = posição à direita do ponto a interpolar e

d = distância do ponto à esquerda ao ponto a interpolar.

Para a interpolação inicial ao ponto médio, temos $(\sigma_{n-1}^2)_m = (\sigma_{n-1}^2)_j = 0$ e, portanto, fazemos $\sigma_n^2 = \sigma^2$ (ensemble). O valor de σ_n^2 dos novos pontos interpolados no estágio $n > 1$ é obtido pela fórmula acima, ao passo que nos pontos interpolados deste mesmo estágio usa-se a mesma fórmula de recorrência que em Voss (1988), ou seja:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2^{2H}} \sigma_{n-1}^2 \quad (5.40)$$

A FIG 5.8a,b mostra um exemplo de interpolação por este processo, para $H = 0,5$ e $H = 0,8$, com várias sementes de números aleatórios, aplicado ao mesmo problema dos três pontos acima citado.

Observa-se que as simulações passaram a ser condicionadas aos pontos de observação, mas surgiram feições do tipo "bico" no ponto médio entre as amostras, devido principalmente às próprias características do processo de interpolação por krigagem e, secundariamente, ao processo da interpolação da variância, pelo qual os pontos serão perturbados a cada iteração. Para valores de $H > 0,5$ este efeito é um pouco mais suave, porém ainda está presente. Estas feições não são desejáveis em qualquer processo de inferência estatística, podendo ser comparáveis aos alinhamentos observados por Voss (1988) em suas figuras de paisagens.

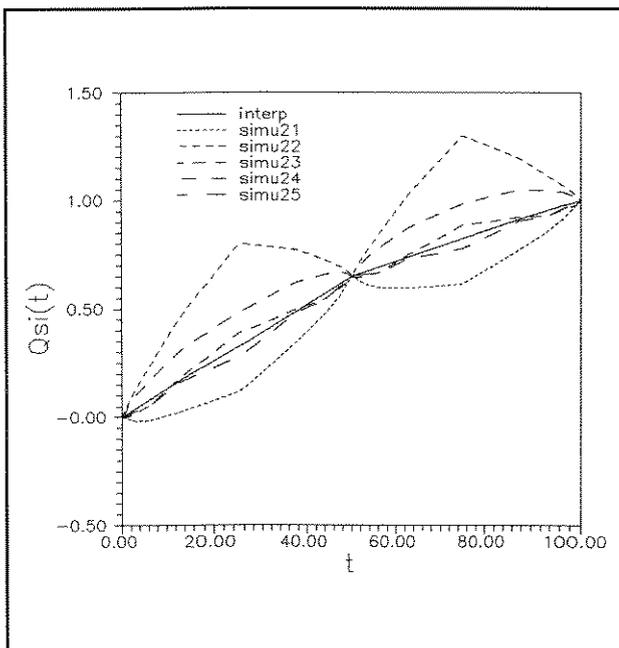


FIG 5.8a - Simulação estocástica pelo 1º algoritmo proposto, para 3 pontos conhecidos, $H = 0,5$.

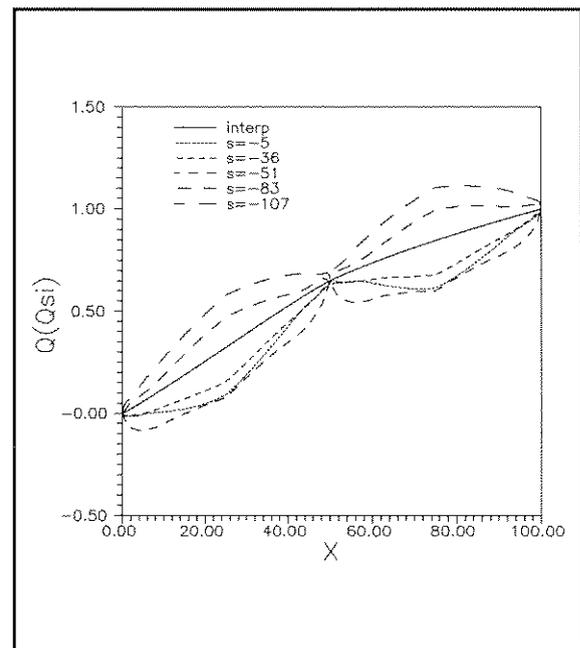


FIG 5.8b - Simulação estocástica pelo 1º algoritmo proposto, para 3 pontos conhecidos, com $H = 0,8$.

Conforme dissemos acima, a informação do ponto amostral tem um alcance de influência. Baseado neste fato, estudamos então um método híbrido entre a simulação não condicional de Voss e a nossa proposta acima. Este alcance da informação deve ser obtido de

fontes externas ao processo de interpolação, quer por conhecimento prévio da geologia, quer por estudos de variografia ou outra ferramenta que possa indicar as características estruturais da propriedade a ser interpolada.

A filosofia desta nova proposta consiste, portanto, em se utilizar o processo de interpolação de Voss nos pontos situados fora do alcance da informação, mesclando-se com a nossa proposta inicial para pontos a distâncias menores que este alcance.

Para controlar o cálculo correto da variância a ser aplicada em cada ponto para cada estágio de interpolação utilizamos uma função tangente hiperbólica, cuja expressão é:

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 \frac{\operatorname{tgh} \beta (t(t-t_0))}{\operatorname{tgh} \beta} \quad (5.41)$$

onde t é a distância do ponto a interpolar para a informação localizada em t_0 .

Este valor de σ^2 passa então pelo processo de recorrência dado por 5.40 para as interpolações sucessivas.

O parâmetro β controla efetivamente a influência do alcance da informação. Representando esta distância de influência por t^* , temos que:

$$\beta = k \frac{1}{(t^*)^2} \quad (5.42)$$

Em nossos exemplos a distância total entre dois pontos amostrais foi de $T = 50$, obtendo-se um valor de $k = 80000$. Se multiplicarmos o valor de T por um fator b qualquer, o valor de k deve ser multiplicado por um fator b^2 , podendo-se então calcular o valor correspondente de β .

Analisando a fórmula 5.41 temos que, para valores altos do argumento da tangente hiperbólica, seu valor se aproxima de 1 , o que faz com que a variância calculada se aproxime da mesma calculada pelo método de Voss (1988). Este fato ocorre para informação com pequenas distâncias de influência e/ou para interpolações em pontos localizados a grandes distâncias da informação. Quando o argumento da função for pequeno, o valor da tangente hiperbólica tende a zero, o que faz com que a variância calculada se aproxime da proposta desta tese. Este resultado é provocado por interpolações em pontos próximos à informação e/ou para grande

alcance da influência da informação.

O conhecimento das correlações espaciais da propriedade a ser interpolada permite o correto dimensionamento do parâmetro β , permitindo o modelamento de situações que vão desde o efeito pepita, ou seja, correlação inferior à distância mínima de amostragem e interpolação, até correlação de longo alcance.

As FIG 5.9 e 5.10 mostram o resultado deste método aplicado ao problema dos três pontos mencionado anteriormente, para diversos valores de H , β e sementes de números aleatórios.

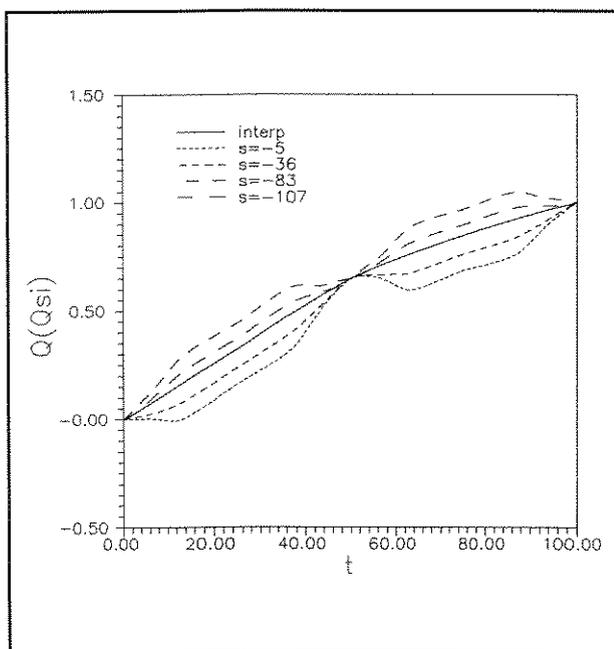


FIG 5.9 - Simulação estocástica pelo 2º algoritmo proposto, com $H = 0,8$, $t^* = 10$.

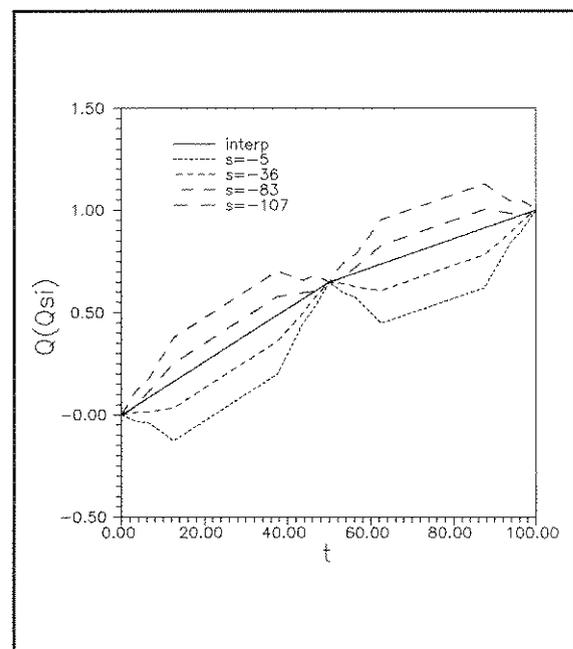


FIG 5.10 - Simulação estocástica pelo 2º algoritmo proposto, com $H = 0,5$ e $t^* = 10$.

Este procedimento foi aplicado em interpolação estocástica de perfis de poços. A FIG 5.11 mostra um exemplo para três perfis teóricos, um em cada extremidade e um no meio do intervalo, simbolizando uma camada de reservatório envolvida por duas camadas de rochas não-reservatório. O valor de β arbitrado foi de **800**.

Na FIG 5.12 apresenta-se um caso real de três perfis de GR. A resolução da interpolação horizontal pode ser adequada à malha geoestatística, ou outra mais conveniente, para evitar problemas de mudança de escala.

O valor de H utilizado foi de **0,887**, obtido das análises R/S dos três poços. A variografia

destes dados indica uma distância de correlação da ordem de 12,5, obtendo-se um valor de β igual a 512.

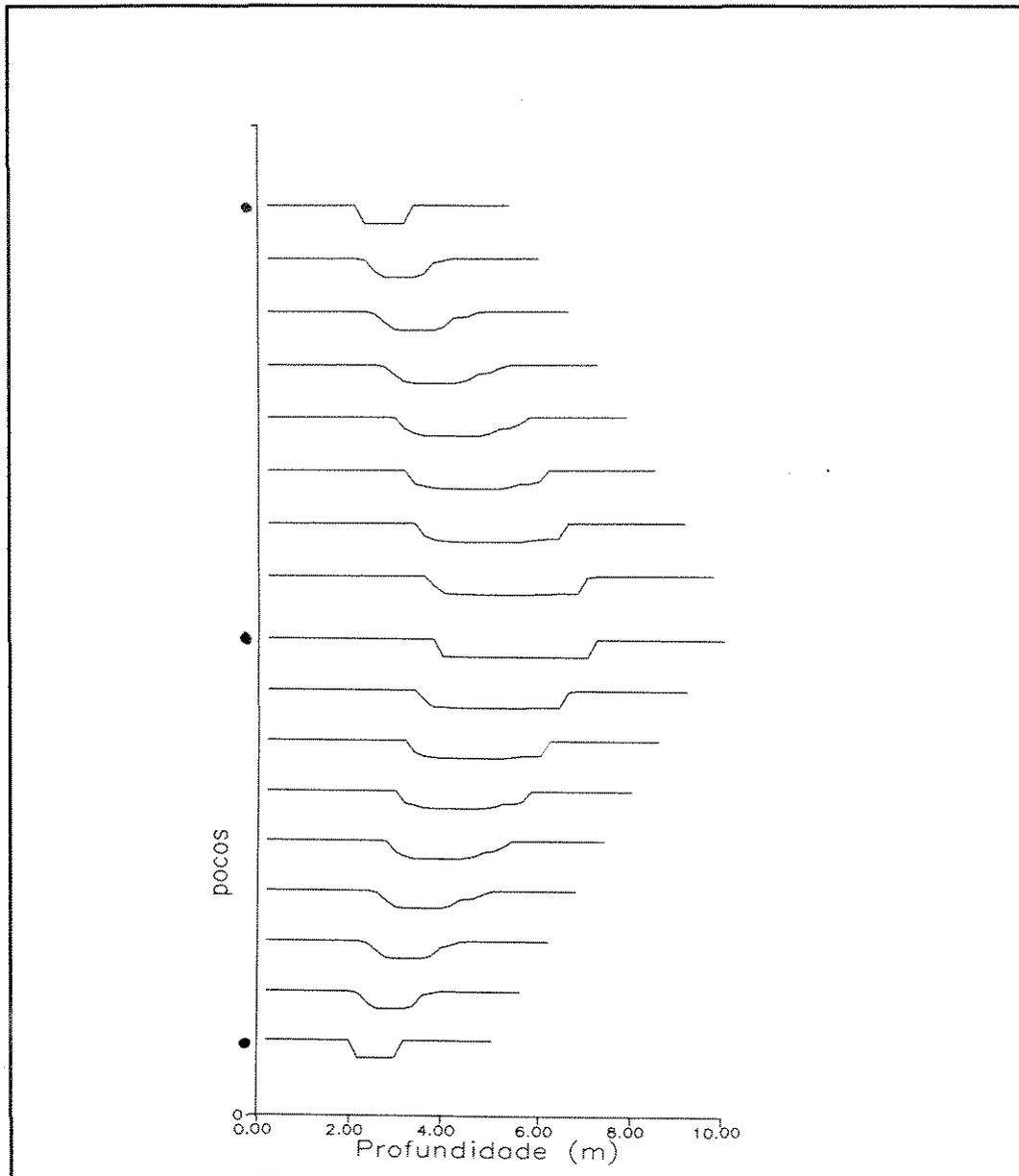


FIG 5.11 - Exemplo de interpolação estocástica com perfis teóricos. • = Localização dos poços conhecidos.

Como conclusão, podemos dizer que a variografia e a análise R/S constituem técnicas complementares para o conhecimento da distribuição espacial de VA.

O método de simulação estocástica de adições sucessivas aleatórias foi condicionado às informações disponíveis com sucesso, tornando-se uma ferramenta auxiliar útil ao estudo da variabilidade e sua influência em estudos de reservatórios de hidrocarbonetos.

Recomendamos prosseguir os estudos para desenvolver novas técnicas de interpolação não-lineares, a partir dos mesmos fundamentos da krigagem, com vistas ao aproveitamento do parâmetro A da análise R/S, informação esta que não é utilizada.

Para a simulação estocástica, estão em aberto ainda a inclusão de outras técnicas mais sofisticadas do que a de adições aleatórias para a geração de distribuições fractais, que constituiriam uma seqüência natural desta tese.

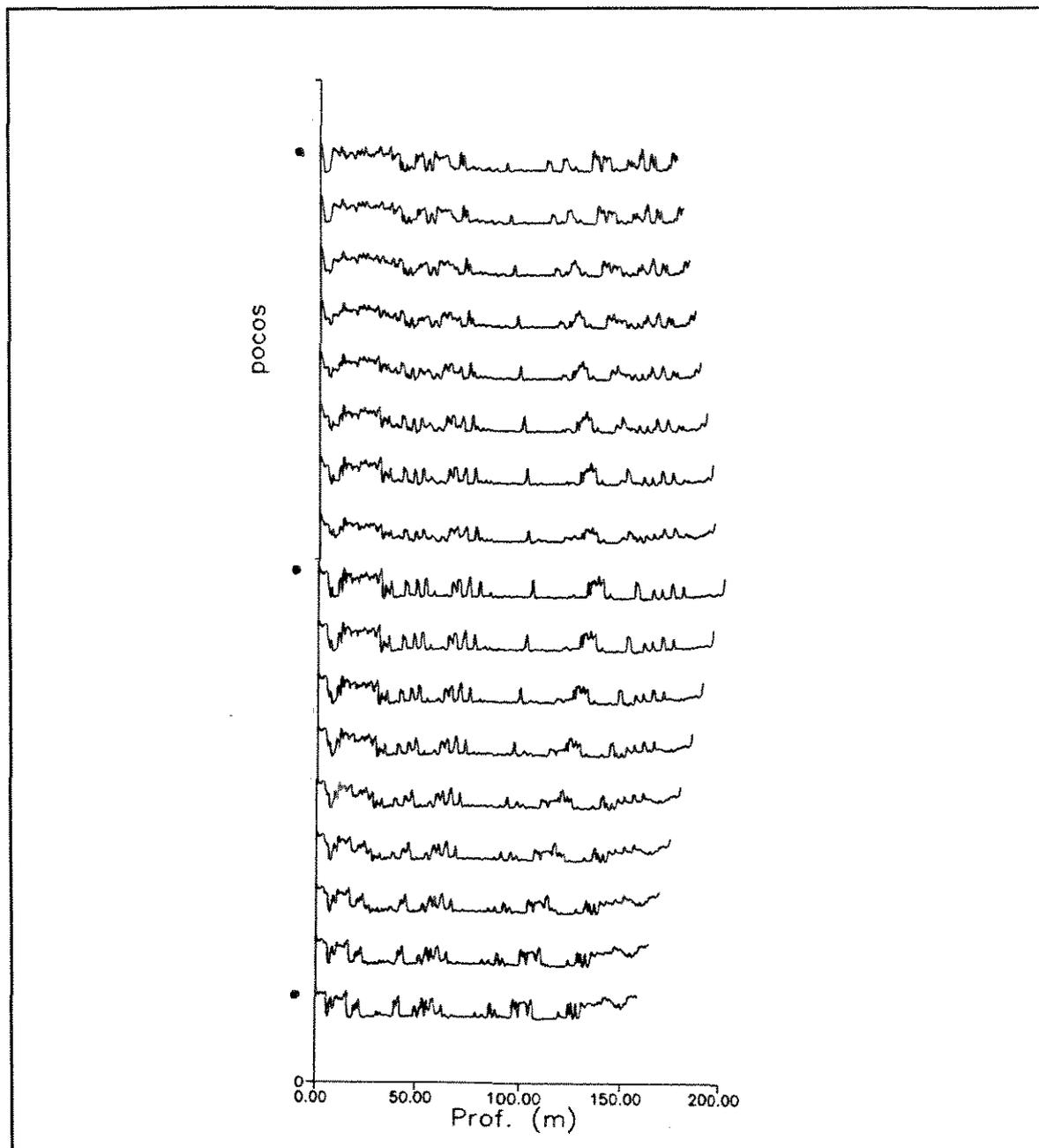


FIG 5.12 - Exemplo de interpolação estocástica com perfis reais de GR. • = Localização dos poços conhecidos.

CONCLUSÕES

A geometria fractal é uma ferramenta útil para caracterizar os fenômenos geológicos e mostrou-se adequada para atender às necessidades da caracterização de reservatórios de hidrocarbonetos.

As famílias de funções mBf e rGf são importantes para o modelamento de perfis elétricos de poços, bem como de propriedades petrofísicas deles derivadas, como a porosidade e a permeabilidade.

A equação logística provê um valioso banco de dados para a calibração do algoritmo para efetuar a análise R/S e o entendimento de sua robustez estatística para a identificação de mudanças no regime fractal ("crossovers").

A análise R/S é uma ferramenta estatística com potencial para caracterizar o grau de intermitência de uma curva de perfil, através do parâmetro H , não se observando fenômenos de "crossover" nas escalas estudadas. Os valores de $H > 1/2$ mostram que estes registros apresentam correlação em grande escala na direção vertical.

A ausência de "crossovers" pode ser explicada pelo fato de a seção sedimentar estudada ser constituída praticamente só por intercalações de folhelhos e arenitos, com exceção da porção basal, onde ocorrem pequenas espessuras de carbonatos, não havendo amostragem suficiente para gerar um possível "crossover".

Outras ferramentas geoestatísticas, como o variograma e o coeficiente de correlação, estão sujeitas ao efeito de deriva provocado pelas diferentes camadas geológicas, o que limita a sua utilização para caracterizar somente a pequena escala na direção vertical.

Para os dados de perfis disponíveis nesta tese, os valores de H variaram entre 0,768 e 0,946 para a curva GR; 0,867 e 0,945 para a curva ILD; 0,840 e 0,945 para a curva DT; 0,790 e 0,910 para NPHI e 0,793 e 0,900 para RHOB. O parâmetro A variou respectivamente entre 0,450 e 0,683; 0,463 e 0,567; 0,482 e 0,584; 0,479 e 0,626 e 0,485 e 0,724. Os valores dos parâmetros entre as diversas curvas em um mesmo poço mostram-se próximos, indicando a

utilidade da análise R/S para identificar **H** e **A** usando diversas propriedades físico-químicas.

O método de adições sucessivas aleatórias foi generalizado para permitir o condicionamento aos dados originais em uma simulação estocástica, gerando distribuições de propriedades de rocha que podem ser utilizadas em estudos de reservatórios de hidrocarbonetos.

A incorporação do parâmetro **β** para monitorar o alcance da influência de um ponto amostral constitui uma feição interessante para o método de adições sucessivas aleatórias.

RECOMENDAÇÕES

Estudar a aplicação da análise R/S em perfis de mergulho (dipmeter), que, por terem maior resolução de amostragem que os outros perfis, podem ser de grande utilidade para a caracterização correta do expoente **H** e, portanto, da dimensão fractal.

Estudar o desenvolvimento de técnicas geoestatísticas não-lineares nos mesmos moldes da krigagem, que propiciem o aproveitamento do parâmetro **A** além de **H**, gerados pela análise R/S. Nos procedimentos de krigagem simples e ordinária, por serem lineares, este parâmetro é eliminado por simplificação de variáveis, não sendo utilizado.

Desenvolver o algoritmo para possibilitar a realização de simulação estocástica pelo método generalizado de adições sucessivas aleatórias com maior número de poços, não alinhados (simulação a 3-D).

Estudar a implementação de outras técnicas mais sofisticadas do que a adição sucessiva aleatória para gerar distribuições de caráter fractal, que constitui uma extensão natural desta tese.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AASUM, Yngve; KELKAR, Mohan G. e GUPTA, Surendra P.. **An Application of Geostatistics and Fractal Geometry for Reservoir Characterization**. SPEFE, p. 11-19. mar 1991.
- ALEMANY, P.A. e ZANETTE, D.H.. Phys. Rev. E 49. 956. 1994.
- ARCHIE, G.E.. **The Electrical Resistivity Log as an Aid in Determining Some Reservoir Characteristics**. Petroleum Transactions of the AIME. v. 146. p. 54-62. 1942.
- AVNIR, David; FARIN, Dina e PFEIFER, Peter. **Molecular Fractal Surfaces**. Nature, v. 308, p. 261-263. 1984.
- BARTON, C.C. e HSIEH, P.A.. **Physical and Hydrologic-Flow Properties of Fractures**. In: INTERNATIONAL GEOLOGICAL CONGRESS FIELD TRIP GUIDEBOOK T385, 1989, Washington. Trans... Washington: American Geophysical Union, p.36. 1989.
- BEER, Rudolfo; TSALLIS, Constantino; NASCIMENTO, H.A.D. e SILVA, L.R.. **R/S Analysis of the Chaotic Attractors of the $1 - a | \dot{x} |^2$ Map**. A ser publicado.
- BLASKOWSKI, Paulo R. e MOREIRA, José V.. **Geologia de Desenvolvimento e Comportamento de Produção do Campo de Carapeba**. In: SEMINÁRIO DE GEOLOGIA DE DESENVOLVIMENTO E RESERVATÓRIO, 1993, Rio de Janeiro. Anais... Rio de Janeiro: Petrobrás/Depex, p. 375-380. 1993.
- BOES, D.C.. **Schemes Exhibiting Hurst Behavior**. In: PROBABILITY AND STATISTICS. ESSAYS IN HONOR OF F.A.GRAYBILL ed. J.N. Srivastava. New York: Elsevier Science Publishers. p. 21-42. 1988.
- BROWN, R.. **On the Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies**. Phil. Mag.. v. 4. p. 162-173. 1828.
- BROWN, S.R. e SCHOLZ, C.H.. **Broad Bandwidth Study of the Topography of Natural Rock Surfaces**. Journal of Geophysical Research, v. 90, p. 12575-12582. 1985.
- CANDIDO, Aladino. **Características de Reservatório do Campo de Carapeba**. In: SEMINÁRIO DE GEOLOGIA DE DESENVOLVIMENTO E RESERVATÓRIO, 1988, Salvador. Anais... Salvador:

Petrobrás/Depex, p.390-401. 1988.

- CHHABRA, Ashvin e JENSEN, Roderick V.. **Direct Determination of the $f(\alpha)$ Singularity Spectrum**. Physical Review Letters, v. 62, n. 12, p. 1327-1330. mar 20, 1989.

- COULLET, P. e TRESSER, J.. **Iterations d'Endomorphismes et Groupe de Renormalisation**. Paris: J. Phys. Coll.. v. 39. p. C5-25. 1978.

- CRANE, S.D.; TUBMAN, K.M.. **Reservoir Variability and Modeling with Fractals**. In: SPE ANNUAL TECHNICAL CONFERENCE AND EXHIBITION, 1990, New Orleans. Trans... New Orleans: SPE, p. 803-810, SPE 20606. sep 1990.

- CURADO, Evaldo M.F. e TSALLIS, Constantino. **Generalized Statistical Mechanics: Connection with Thermodynamics**. J. Phys. A: Math. Gen. v. 24. n. 2. L69-L72. 1991.

- DREW, L.J.; SCHUENEMEYER, J.H. e BAWIEC, W.J.. **Estimation of the Future Rates of Oil and Gas Discoveries in the Western Gulf of Mexico**. US Geol. Surv. Prof. Pap.. n. 1252. 26p. 1982.

- EMANUEL, A.S.; ALAMEDA, G.K.; BEHRENS, R.A. et al. **Reservoir Performance Prediction Methods Based on Fractal Geostatistics**. SPERE, p. 311-318. aug 1989.

- FEDER, Jens. **Fractals**. New York: Plenum Press, 1988. 283p.

- FEIGENBAUM, Mitchell J.. **Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations**. Journal of Statistical Physics, v. 19, n. 1, p. 25-52. 1978.

- FREITAS, Luis C.S.. **Estudo de Reservatório do Membro Carapebus (Cretáceo) no Campo de Carapeba, Bacia de Campos, Rio de Janeiro**. Ouro Preto: UFOP, Tese de Mestrado, jul 1987.

- GROSSMANN, S. e THOMAE, S.. **Invariant Distributions and Stationary Correlation Functions of One-Dimensional Discrete Processes**. Z. Naturforsch. v. 32A. n. 1353. 1977.

- HACK, J.T.. **Studies of Longitudinal Stream Profiles in Virginia and Maryland**. U.S. Geol. Surv. Prof. Pap.. v. 294-B. p. 45-97. 1957.

- HAUSER, P.R.; TSALLIS, Constantino e CURADO, Evaldo M.F.. **Criticality of the Routes to Chaos of the $1 - a|X|^2$ Map**. Physical Review A, v. 30, n. 4, p. 2074-2079. oct 1984.

- HEMMER, P.C.. **The Exact Invariant Density for a Cusp-shaped Return Map.** J> Phys. A:Math. Gen. v. 17. L247-L249. 1984
- HEWETT, Thomas A.. **Fractal Distributions fo Reservoir Heterogeneity and their Influence on Fluid Transport.** In: SPE ANNUAL TECHNICAL CONFERENCE AND EXHIBITION, 1986, New Orleans. Trans... New Orleans: SPE, p. 67-82, SPE 15386. oct 1986.
- HEWETT, Thomas A. e BEHRENS, Ronald A.. **Conditional Simulation of Reservoir Heterogeneity with Fractals.** SPEFE, p. 217-225. sep 1990.
- HURST, H.E.. **Long Term Storage Capacity of Reservoirs.** Trans. Am. Soc. Civ. Eng.. v. 116. p. 770-808. 1951.
- ISAAKS, E.H. e SRIVASTAVA, R.M.. **Applied Geostatistics.** New York: Oxford University Press. 1989.
- JOURNEL, Andre G.. **Fundamentals of Geostatistics in Five Lessons.** Stanford: Stanford University, 1988. Paginação Irregular.
- JOURNEL, Andre G. e HUIJBREGTS, Charles J.. **Mining Geostatistics.** San Diego: Academic Press, 1989. 600p. ISBN 0-12-391056-0.
- KATZ, A.J. e THOMPSON,A.H.. **Fractal Sandstone Pores: Implications for Conductivity and Pore Formation.** Physical Review Letters, v. 54, p. 1325-1328. 1985.
- KOLMOGOROV, A.N.. USSR:Dokl. Akad. Nauk.. v. 98. n. 527. 1959.
- KORVIN, Gabor. **Fractal Models in the Earth Sciences.** Amsterdam: Elsevier, 1992. 396p. ISBN 0-444-88907-8.
- LANDAU, L.D. e LIFSHITZ, E.M.. **Fluid Mechanics.** Oxford: Pergamon. 1959.
- LLOYD, E.H.. **Stochastic Reservoir Theory.** Adv. Hydrosci. v. 4. p. 281-339. 1967.
- LORENZ, E.N.. **Deterministic Nonperiodic Flow.** J. Atmos. Sci.. v. 20. n. 130. 1963.
- MANDELBROT, Benoit B.. **How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractal Dimension.** Science, v. 155. p. 636-638. 1967.
- MANDELBROT, Benoit B.. **The Fractal Geometry of Nature.** New York: W. H. Freeman and Company. 1983.

- MANDELBROT, Benoit B.. **Self-Affine Fractal Sets**. In: FRACTALS IN PHYSICS ed. L.Pietronero e E. Tosatti, Amsterdam: New-Holland. p. 3-28. 1986.
- MANDELBROT, Benoit B.. **Multifractal Measures, Especially for the Geophysicist**. PAGEOPH. v. 131, n. 1/2, p. 5-42. 1989.
- MANDELBROT, Benoit B. and VAN NESS, John W.. **Fractional Brownian Motions. Fractional Noises and Applications**. SIAM Review, v. 10, n.4, p. 422-437. oct 1968.
- MANDELBROT, Benoit B. and WALLIS, James R.. **Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises. Part 1, Averages and Variances**. Water Resources Research, v. 5, n. 1, p. 228-241. feb 1969a.
- MANDELBROT, Benoit B. and WALLIS, James R.. **Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises. Part 2, Rescaled Ranges and Spectra**. Water Resources Research, v. 5, n. 1, p. 242-259. feb 1969b.
- MANDELBROT, Benoit B. and WALLIS, James R.. **Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises. Part 3, Mathematical Appendix**. Water Resources Research, v. 5, n. 1, p. 260-267. feb 1969c.
- MANDELBROT, Benoit B. and WALLIS, James R.. **Some Long-Run Properties of Geophysical Records**. Water Resources Research, v. 5, n. 2, p. 321-340. feb 1969d.
- MANDELBROT, Benoit B. and WALLIS, James R.. **Robustness of the Rescaled Range R/S in the Measurements of Noncyclic Long Run Statistical Dependence**. Water Resources Research, v. 5, n. 2, p. 967-988. oct 1969e.
- MAY, Robert M.. **Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics**. Nature. v. 261, p. 459-467. jun 10, 1976.
- McCAULEY, Joseph L.. **Introduction to Multifractals in Dynamical Systems Theory and Fully Developed Fluid Turbulence**. Physics Reports (Review Section of Physics Letters) 189. North-Holland, n. 5, p. 225-266. 1990.
- MENEVEAU, Charles e SREENIVASAN, K.R.. **Measurement of $f(\alpha)$ from Scaling of Histograms and Applications to Dynamical Systems and Fully Developed Turbulence**.

Physics Letters A, v. 137, n. 3, p. 103-112. may 8, 1989.

- MULLER, J.; NITTEBERG, J.; QVALE, H. et al.. **Quantification and Modelling of Reservoir Heterogeneities Based on Multifractal Scaling**. PROFIT Report n. IFE/KR/F-92/171. nov 20, 1992.

- NEWHOUSE, S.; RUELLE, D. e TAKENS, F.. **Occurrence of Strange Axiom-A Attractors Near Quasiperiodic Flow on T^m , $m \geq 3$** . Commun. Math. Phys.. v. 64. n. 35. 1978.

- PEREZ, G. and CHOPRA, A. K.. **Evaluation of Fractal Models to Describe Reservoir Heterogeneity and Performance**. In: SPE ANNUAL TECHNICAL CONFERENCE AND EXHIBITION, 1991, Dallas. Trans... Dallas: SPE, p. 25-36, SPE 22694. oct 1991.

- POINCARÉ, H.. **Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste**. Gauthier-Villar, Paris; em Ingles: NASA Translation TT F-450/452. Sprigfield: U.S. Fed. Clearinghouse. 1967. Original Frances 1892.

- RICHARDSON, L.F.. **The Problem of Contiguity. An Appendix to the "Statistics of Deadly Quarrels"**. Gen. Sys. v. 6. p. 139-187. 1961.

- RUELLE, D. e TAKENS, F.. **On the Nature of Turbulence**. Commun. Math. Phys.. v. 20. n. 167. 1971.

- SAUPE, Dietmar. **Algorithms for Random Fractals**. In: THE SCIENCE OF FRACTAL IMAGES: ed. Heinz-Otto Peitgen e Dietmar Saupe, 1988. New York: Springer-Verlag, 312p. p. 71-113. 1988. ISBN 0-387-96608-0.

- SCHUSTER, Heinz Georg. **Deterministic Chaos an Introduction**. Weinheim: Physik-Verlag, 220p. 1984. IBSN 3-87664-101-2.

- SHIAO, T.W. e HU, D.J.. **The Fractal Characteristics of Subsurface Wireline Logs of Tertiary Strata in Offshore Taiwan - A Preliminary Study**. PETROL. GEOL. TAIWAN, n. 27, p. 225-236, dec 1992. ISSN 0553-8890.

- de SOUZA VIEIRA, M.C.; LAZO, E. e TSALLIS, C.. **New Road to Chaos**. Physical Review A, v. 35, n. 2, p. 945-948, jan 15, 1987.

- STANLEY, H.Eugene e MEAKIN, Paul. **Multifractal Phenomena in Physics and Chemistry**.

Nature, v. 335, p. 405-409. sep 29, 1988.

- TAKAYASU, H. **Fractals in the Physical Sciences**. New York: Manchester University Press, 170p. 1990. ISBN 0-7190-3434-5.

- TAMARIT, Francisco; CANNAS, Sergio; PENNA, Thadeu J.P. et al.. **O Infinito em Cores**. Ciência Hoje, v. 14, n. 80, p. 41-46. mar/abr 1992.

- THE TECHNICAL REVIEW. **Fractals and Rocks**. Ridgefield: Schlumberger, v.36, n. 1, p. 32-26. 1988.

- TÉL, Tamás. **Fractals, Multifractals and Thermodynamics. An Introductory Review**. Z. Naturforsch, Budapest, v. 43a, p. 1154-1174. 1988.

- TSALLIS, Constantino. **Caos, Determinismo e Probabilidade**. In: CAOS, ACASO E DETERMINISMO NAS CIÊNCIAS, ARTES E FILOSOFIA, ed. S. Fuks et al. Editora Campos, 1993.

- TSALLIS, Constantino; CURADO, Evaldo M.F.; SOUZA, M.S.; ELIAS, Vera L.; BETTINI, Cláudio; SCUTA, Maximiano S. e BEER, Rudolfo. **Generalized Archie Law - Application to Petroleum Reservoirs**. Physica A, v. 191, p. 277-283. 1992.

- TURCOTTE, Donald L.. **Fractals and Chaos in Geology and Geophysics**. Cambridge: Cambridge University Press, 221p. 1992.

- VOSS, Richard F.. **Fractals in Nature: From Characterization to Simulation**. In: THE SCIENCE OF FRACTAL IMAGES: ed. Heinz-Otto Peitgen e Dietmar Saupe, 1988. New York: Springer-Verlag, 312p. p. 21-70. 1988. ISBN 0-387-96608-0.

- WIENER, N.. **Differential-Space**. J. Math. Phys.. Mass. Inst. Technol.. v. 2. p. 131-174. 1923.

- WONG, Po-zen; HOWARD, James e LIN, Jar-shyong. **Surface Roughening and the Fractal Nature of Rocks**. Physical Review Letters, v. 57, p. 637-640. 1986.

APÊNDICE 1

```
c
c
c Programa para gerar a analise R/S dos dados de perfis de
c   pocos de petroleo, elaborado por RUDOLFO BEER,
c     fazendo a acumulacao das diferencas em
c     relacao a media do intervalo
c     como em FEDER, 1988
c
$large
  program fpocosrs
  parameter (ntaus=24,nloc1=15,nloc2=5)
  dimension qsi(5000),qsig(0:5000),
  *   depth(5000),gr(5000),ild(5000),dt(5000),
  *   rhob(5000),nphi(5000),vdep(5000)
  real *8 qsi, qsimed, xissum, dif, sdev, rs,amaxof,
  * aminof,ars,rsoma,qsig,var,varsum,range,depth,gr,
  * ild,dt,rhob,nphi,vdep,aux
  integer itaus(ntaus),iloc(nloc1),npass,t,s,num1,nuzer,
  *   iloc1(nloc1),iloc2(nloc2)
  character *30 arq
  character *4 resp

c
c valores de tau para fazer a analise R/S
c
  data itaus/2,3,4,5,7,10,15,20,30,40,50,60,70,80,90,
  *   100,200,400,700,1000,2000,3000,4000,5000/
  data iloc1/1, 100,200,300,400,500,600, 700,800,900,
  *   1000,1100,1200,1300,1400/
  data iloc2/1000,1500,2000,3000,4000/

c
c abertura do arquivo de entrada
c
  print *, 'Entre com o nome do arquivo de entrada'
  read (*,'(a)') arq
  open (unit=1, file=arq, status='unknown')

c
c loop para leitura dos dados
c
  do 10 i = 1, 10000
    read (1,500,end=15) depth(i),gr(i),ild(i),rhob(i),
  *   nphi(i),dt(i),vdep(i)
10  continue
15  num1 = i - 1
16  print *, 'Qual a variavel escolhida para analise?'
    read (*,'(a)') resp
    print *, 'Entre com o nome do arquivo de dados reais'
    read (*,'(a)') arq
    open (unit=2, file=arq, status='unknown')
    print *, 'Entre com o nome do arquivo de dados medios'
    read (*,'(a)') arq
    open (unit=3, file=arq, status='unknown')

c
c loop para gerar qsi(i) e qsig(i)
```

```

c
  qsig(0) = 0.0
  nuzer = 0
  do 19 i= 1, num1
    if (resp .eq. 'gr') aux = gr(i)
    if (resp .eq. 'ild') aux = ild(i)
    if (resp .eq. 'rhob') aux = rhob(i)
    if (resp .eq. 'nphi') aux = nphi(i)
    if (resp .eq. 'dt') aux = dt(i)
    if (aux .eq. -99.) go to 19
    nuzer = nuzer + 1
    qsi(nuzer) = aux
    qsig(nuzer) = qsig(nuzer - 1) + aux
19 continue
  print *
  print *, 'O numero total de dados do pocoo e = ',num1
  print *, 'O numero de dados da variavel ',resp,' e = ',nuzer
  print *

c
c loop para fazer as iteracoes em tau
c
  do 20 j = 1, ntaus
    rsoma = 0.
    s = itaus(j)
    npass = 0
    if (s .gt. 500) go to 22
    nloc = nloc1
    do 21 jl = 1, nloc
      iloc(jl) = iloc1(jl)
21 continue
    go to 24
22 nloc = nloc2
    do 23 jl = 1, nloc
      iloc(jl) = iloc2(jl)
23 continue
24 do 25 jj = 1, nloc
    t = iloc(jj)
    k = t + s
    if (k .gt. nuzer) go to 11

c
c calculo da media aritmetica local para cada "s"
c
  qsimed = (qsig(k) - qsig(t))/s

c
c loop para calcular e somar as diferencas em relacao a media
c local
c
  amaxof = 0.
  aminof = 0.
  xissum = 0.
  do 40 m = 1, s
    dif = qsi(t+m) - qsimed
    xissum = xissum + dif
    if (xissum .gt. amaxof) amaxof = xissum

```

```

        if (xissum .lt. aminof) aminof = xissum
40      continue
c
c calculo da variacao maxima em cada tau
c
        range = amaxof - aminof
c
c calculo do desvio padrao
c
        varsum = 0.
        do 60 mn = 1,s
            varsum = varsum + (qsi(t+mn) - qsimed)**2
60      continue
        var = varsum/s
        if (var .le. 0.) then
            go to 25
        end if
        sdev = sqrt(var)
c
c calculo do fator R/S
c
        ars = range/sdev
        if (ars .eq. 0.0) go to 25
        rsoma = rsoma + ars
        npass = npass + 1
        write (2, 510) itaus(j),ars,range,sdev,var
25      continue
11     if (npass .gt. 0) then
            rs = rsoma / npass
            else
                go to 20
        end if
c
c escrevendo os resultados nos arquivos de saida
c
        write (3,520) itaus(j),rs
20     continue
        print *, 'Voce deseja repetir a analise com outra variavel?'
        * (s/n)'
        read (*,'(a)') resp
        if (resp .eq. 's') go to 16
500    format (1x,f10.2, 6(1x,f10.4))
510    format (i10, 4f10.3)
520    format (i10,f10.3)
99     stop
        end

```

APÊNDICE 2

RESOLUÇÃO DE SISTEMA DE KRIGAGEM PARA TRÊS PONTOS ALINHADOS

Sejam três pontos conhecidos e alinhados. Desejamos estimar o valor desconhecido no ponto t qualquer. Definimos:

- α distância entre o ponto 1 e o ponto 2
- θ distância entre o ponto 1 e o ponto 3
- Ω distância entre o ponto 1 e o ponto a determinar.

O sistema de krigagem será dado pelas equações:

$$\begin{bmatrix} \gamma(\xi(1), \xi(1)) & \gamma(\xi(1), \xi(2)) & \gamma(\xi(1), \xi(3)) & 1 \\ \gamma(\xi(2), \xi(1)) & \gamma(\xi(2), \xi(2)) & \gamma(\xi(2), \xi(3)) & 1 \\ \gamma(\xi(3), \xi(1)) & \gamma(\xi(3), \xi(2)) & \gamma(\xi(3), \xi(3)) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(\xi(1), \xi(t)) \\ \gamma(\xi(2), \xi(t)) \\ \gamma(\xi(3), \xi(t)) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A2.1})$$

onde μ são interpoladores de Lagrange.

Este sistema pode ser resolvido por substituição de variáveis, considerando que o semi-variograma é dado pela lei de potência:

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{2} V_H |\tau|^{2H} \quad (\text{A2.2})$$

onde τ representa a distância entre os pontos.

Escrevendo o sistema de equações temos:

$$\lambda_1 \frac{1}{2} V_H |0|^{2H} + \lambda_2 \frac{1}{2} V_H |\alpha|^{2H} + \lambda_3 \frac{1}{2} V_H |\theta|^{2H} - \mu = \frac{1}{2} V_H |\Omega|^{2H} \quad (\text{A2.3})$$

$$\lambda_1 \frac{1}{2} V_H |\alpha|^{2H} + \lambda_2 \frac{1}{2} V_H |0|^{2H} + \lambda_3 \frac{1}{2} V_H |\theta - \alpha|^{2H} - \mu = \frac{1}{2} V_H |\Omega - \alpha|^{2H} \quad (\text{A2.4})$$

$$\lambda_1 \frac{1}{2} V_H |\theta|^{2H} + \lambda_2 \frac{1}{2} V_H |\theta - \alpha|^{2H} + \lambda_3 \frac{1}{2} V_H |0|^{2H} - \mu = \frac{1}{2} V_H |\Omega - \theta|^{2H} \quad (\text{A2.5})$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \quad (\text{A2.6})$$

Isolando o valor de μ a partir da equação A2.3 e definindo as variáveis auxiliares **A**, **B** e **C** como sendo:

$$A = |\Omega - \alpha|^{2H} - |\Omega|^{2H} \quad (\text{A2.7})$$

$$B = |\Omega - \theta|^{2H} - |\Omega|^{2H} \quad (\text{A2.8})$$

$$C = |\theta - \alpha|^{2H} - |\theta|^{2H} - |\alpha|^{2H} \quad (\text{A2.9})$$

podemos facilmente calcular:

$$\lambda_3 = \left[\frac{1}{\frac{C^2}{2|\alpha|^{2H}} - 2|\theta|^{2H}} \right] \left[B - |\theta|^{2H} - \frac{C}{2} + \frac{CA}{2|\alpha|^{2H}} \right] \quad (\text{A2.10})$$

$$\lambda_2 = \left[\frac{1}{2|\alpha|^{2H}} \right] \left[|\alpha|^{2H} + C\lambda_3 - A \right] \quad (\text{A2.11})$$

$$\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 \quad (\text{A2.12})$$

O ponto incógnito será determinado por:

$$\xi(t) = \lambda_1 \xi(1) + \lambda_2 \xi(2) + \lambda_3 \xi(3) \quad (\text{A2.13})$$

APÊNDICE 3

RESOLUÇÃO DE SISTEMA DE KRIGAGEM PARA QUATRO PONTOS ALINHADOS

Sejam quatro pontos conhecidos e alinhados. Desejamos estimar o valor desconhecido no ponto t qualquer. Definimos:

- α distância entre o ponto 1 e o ponto 2;
- θ distância entre o ponto 1 e o ponto 3;
- Φ distância entre o ponto 1 e o ponto 4;
- Ω distância entre o ponto 1 e o ponto a determinar.

O sistema de krigagem será dado pelas equações:

$$\begin{bmatrix} \gamma(\xi(1), \xi(1)) & \gamma(\xi(1), \xi(2)) & \gamma(\xi(1), \xi(3)) & \gamma(\xi(1), \xi(4)) & 1 \\ \gamma(\xi(2), \xi(1)) & \gamma(\xi(2), \xi(2)) & \gamma(\xi(2), \xi(3)) & \gamma(\xi(2), \xi(4)) & 1 \\ \gamma(\xi(3), \xi(1)) & \gamma(\xi(3), \xi(2)) & \gamma(\xi(3), \xi(3)) & \gamma(\xi(3), \xi(4)) & 1 \\ \gamma(\xi(4), \xi(1)) & \gamma(\xi(4), \xi(2)) & \gamma(\xi(4), \xi(3)) & \gamma(\xi(4), \xi(4)) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(\xi(1), \xi(t)) \\ \gamma(\xi(2), \xi(t)) \\ \gamma(\xi(3), \xi(t)) \\ \gamma(\xi(4), \xi(t)) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.1})$$

onde μ são interpoladores de Lagrange.

Este sistema pode ser resolvido por substituição de variáveis, considerando que o semi-variograma é dado pela lei de potência:

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{2} V_H |\tau|^{2H} \quad (\text{A3.2})$$

onde τ representa a distância entre os pontos.

Escrevendo o sistema de equações temos:

$$\lambda_1 \frac{1}{2} V_H |0|^{2H} + \lambda_2 \frac{1}{2} V_H |\alpha|^{2H} + \lambda_3 \frac{1}{2} V_H |\theta|^{2H} + \lambda_4 \frac{1}{2} V_H |\Phi|^{2H} - \mu = \frac{1}{2} V_H |\Omega|^{2H} \quad (\text{A3.3})$$

$$\lambda_1 \frac{1}{2} V_H |\alpha|^{2H} + \lambda_2 \frac{1}{2} V_H |0|^{2H} + \lambda_3 \frac{1}{2} V_H |\theta - \alpha|^{2H} + \lambda_4 \frac{1}{2} V_H |\Phi - \alpha|^{2H} - \mu = \frac{1}{2} V_H |\Omega - \alpha|^{2H} \quad (\text{A 3.4})$$

$$\lambda_1 \frac{1}{2} V_H |\theta|^{2H} + \lambda_2 \frac{1}{2} V_H |\theta - \alpha|^{2H} + \lambda_3 \frac{1}{2} V_H |0|^{2H} + \lambda_4 \frac{1}{2} V_H |\Phi - \theta|^{2H} - \mu = \frac{1}{2} V_H |\Omega - \theta|^{2H} \quad (\text{A 3.5})$$

$$\lambda_1 \frac{1}{2} V_H |\Phi|^{2H} + \lambda_2 \frac{1}{2} V_H |\Phi - \alpha|^{2H} + \lambda_3 \frac{1}{2} V_H |\Phi - \theta|^{2H} + \lambda_4 \frac{1}{2} V_H |0|^{2H} - \mu = \frac{1}{2} V_H |\Omega - \Phi|^{2H} \quad (\text{A 3.6})$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \quad (\text{A3.7})$$

Isolando o valor de μ a partir da equação A3.3 e definindo as variáveis auxiliares A, B, C, D, E, F, G e O como sendo:

$$A = |\Omega - \alpha|^{2H} - |\Omega|^{2H} \quad (\text{A3.8})$$

$$B = |\Omega - \theta|^{2H} - |\Omega|^{2H} \quad (\text{A3.9})$$

$$C = |\Omega - \Phi|^{2H} - |\Omega|^{2H} \quad (\text{A3.10})$$

$$D = |\theta - \alpha|^{2H} - |\theta|^{2H} - |\alpha|^{2H} \quad (\text{A3.11})$$

$$E = |\Phi - \alpha|^{2H} - |\Phi|^{2H} - |\alpha|^{2H} \quad (\text{A3.12})$$

$$F = |\Phi - \theta|^{2H} - |\Phi|^{2H} - |\theta|^{2H} \quad (\text{A3.13})$$

$$G = \left[\frac{1}{\frac{D^2}{2|\alpha|^{2H}} - 2|\theta|^{2H}} \right] \left[B - |\theta|^{2H} - \frac{D}{2} + \frac{DA}{2|\alpha|^{2H}} \right] \quad (\text{A3.14})$$

$$O = \left[\frac{1}{\frac{D^2}{2|\alpha|^{2H}} - 2|\theta|^{2H}} \right] \left[\frac{DE}{2|\alpha|^{2H}} + F \right] \quad (\text{A3.15})$$

podemos calcular:

$$\lambda_4 = \left[\frac{1}{\frac{E^2}{2|\alpha|^{2H}} - 2|\Phi|^{2H} - \frac{EDO}{2|\alpha|^{2H}} - FO} \right] \left[C - |\Phi|^{2H} - \frac{E}{2} + \frac{EA}{2|\alpha|^{2H}} - \left(\frac{ED}{2|\alpha|^{2H}} + F \right) G \right] \quad (\text{A3.16})$$

$$\lambda_3 = G - O\lambda_4 \quad (\text{A3.17})$$

$$\lambda_2 = \left[\frac{1}{2|\alpha|^{2H}} \right] \left[|\alpha|^{2H} + D\lambda_3 + E\lambda_4 - A \right] \quad (\text{A3.18})$$

$$\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 \quad (\text{A3.19})$$

O ponto incógnito será determinado por:

$$\xi(t) = \lambda_1 \xi(1) + \lambda_2 \xi(2) + \lambda_3 \xi(3) + \lambda_4 \xi(4) \quad (\text{A3.20})$$

APÊNDICE 4

```
C *****C
C Programa para simulacao condicional pelo algoritmo I de
C BEER & TSALLIS, 1993, com interpolacao por krigagem
c em quatro pontos e suavizacao pela tangente hiperbolica
c multiplicando 2h por n no calculo de delta e utilizando
c a formula  $\sigma_1 \cdot \tanh(\beta x) / \tanh(\beta)$  para sigma
C EXEMPLO DE POCO
C *****
$large
  program simupoco
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  common /intp3/ aqsia,aqsib,aqsic,alfa,teta,omega
  common /intp4/ aqsid,phi
  common /leitur/ depth,numer
  common /leitu1/ gr
  common /unifo/ gro
  common /escrit/ qsi
  dimension qsi(17,1050),delta(3,17),sigma(3,17),
  * depth(3,1050),gr(3,1050),numer(3),gro(3,1050)
  real *8 qsi,delta,agauss,d,di,b,a,h,n,anum,sigma,
  * sigma1,aqsia,aqsib,aqsic,zest,aqsid,xstar,x,x0,depth,gr,
  * gro,dt,argx,beta,flag,alfa,teta,phi,omega,bet1
  integer level,ipos,nrand,i4,i5,isem,numer

C
c leitura dos dados de entrada
C
  call leitura
C
c interpolacao do GR para uniformizar amostragem
C
  call uniform
C
c calculo das estatisticas basicas para sigma inicial
C
  call statbas(sigma1)
C
c entrada do parametro H determinado na analise R/S
C
  print *, 'qual o valor de h desejado? [0,1]'
  read (*,*) h
C
c entrada do alcance da informacao
C
  print *, 'qual o valor do alcance da informacao? {dist} '
  read (*,*) xstar
C
c entrada do valor da semente para subrotina de numeros
c aleatorios
C
  print *, 'qual o valor da semente para ran3?'
  read (*,*) isem
C
c inicializacao dos dados e parametros
```

```

c
  n = 100.
  d = 50.
  di = 25.
  level = 1
  nrand = 10
  flag = 1.

c
c O intervalo considerado vai de 0 a 100. Caso multipliquemos o
c intervalo por um fator "b", bet1 deve ser multiplicado por
c um fator igual a "b*b"
c
  bet1 = 80000
  beta = bet1/(xstar * xstar)
  x0 = 0.0
  do 100 i = 1, numer(2)
    qsi(1,i) = gro(1,i)
    qsi(9,i) = gro(2,i)
    qsi(17,i) = gro(3,i)
100 continue

c
c programa principal
c
110 call gaussian (nrand, isem, agauss)
  if (level .ne. 1) go to 111
  if (agauss .lt. 0.0) flag = -1.
111  if (di .ge. xstar) go to 200

c
c Reinicializa os tres pocos de dados quando a distancia fica
c Menor do que XSTAR
c
  do 180 i = 1, numer(2)
    qsi(1,i) = gro(1,i)
    qsi(9,i) = gro(2,i)
    qsi(17,i) = gro(3,i)
180 continue
200 do 210 a=di,n-di,d

c
c Posicao atual de calculo
c
  anum = a
  call posicao(anum,ipos)
  i = ipos

c
c Posicao imediatamente anterior ao ponto de calculo
c
  anum = a-di
  call posicao(anum,ipos)
  i = ipos

c
c Posicao imediatamente posterior ao ponto de calculo
c
  anum = a+di
  call posicao(anum,ipos)

```

```

    m = ipos
    if (a .gt. di .and. a .lt. (n-di)) go to 260
    if (a .gt. 50.) go to 230
c
c Segunda posicao posterior ao ponto de calculo
c
220 anum = a + di + d
    call posicao(anum,ipos)
    i4 = ipos
    alfa = d
    teta = 2.*d
    omega = di
c
c Interpolacao para cada nivel com krigagem de 3 pontos
c
    do 225 ik = 1, numer(2)
        aqsia = qsi(l,ik)
        aqsib = qsi(m,ik)
        aqsic = qsi(i4,ik)
        call intera3(h,zest)
        qsi(i,ik) = zest
225 continue
    go to 210
c
c Segunda posicao anterior ao ponto de calculo
c
230 anum = a - di - d
    call posicao(anum,ipos)
    i4 = ipos
    alfa = d
    teta = 2.*d
    omega = di
c
c Interpolacao para cada nivel com krigagem de 3 pontos
c
    do 235 ik = 1, numer(2)
        aqsia = qsi(m,ik)
        aqsib = qsi(l,ik)
        aqsic = qsi(i4,ik)
250 call intera3(h,zest)
        qsi(i,ik) = zest
235 continue
    go to 210
c
c Segunda posicao posterior ao ponto de calculo
c
260 anum = a + di + d
    call posicao(anum,ipos)
    i5 = ipos
c
c Segunda posicao anterior ao ponto de calculo
c
    anum = a - di - d
    call posicao(anum,ipos)

```

```

i4 = ipos
dt = d
alfa = d
teta = 2.*d
phi = 3.*d
omega = d + di
c
c Interpolacao para cada nivel com krigagem de 4 pontos
c
do 265 ik = 1, numer(2)
  aqsia = qsi(i4,ik)
  aqsib = qsi(l,ik)
  aqsic = qsi(m,ik)
  aqsid = qsi(i5,ik)
  call intera4(h,zest)
  qsi(i,ik) = zest
265 continue
210 continue
c
c Calculo do SIGMA em cada posicao pela TANHIP ou SIGMA1,
c dependendo de XSTAR
c
300 do 400 b = 0, n, di
  anum = b
  call posicao(anum,ipos)
  if (b .le. 25.0) x = b/100.
  if (b .gt. 25.0) x = (50. - b)/100.
  if (b .gt. 50.0) x = (b - 50.0)/100.
  if (b .gt. 75.0) x = (100. - b)/100.
  argx = beta*x*(x - x0)
  sigma(level,ipos) = sigma1*tanhip(argx)/tanhip(beta)
  if (di .ge. xstar) sigma(level,ipos) = sigma1
400 continue
c
c Calculo da perturbacao aleatoria DELTA
c
500 do 600 c = 0,n,di
  anum = c
  call posicao(anum,ipos)
620 delta(level,ipos)=dsqrt(sigma(level,ipos))*(0.5**(level*h))
  *      *dsqrt(0.5)*dsqrt(1.-2.**((2.*h-2.))
c
c Perturbacao da variavel interpolada pelo aleatorio delta
c
if (di .ne. 6.25) go to 625
do 622 ik = 1, numer(2)
  qsi(ipos,ik) = qsi(ipos,ik)+flag*delta(level,ipos)*agauss
622 continue
go to 600
625 do 627 ik = 1, numer(2)
  qsi(ipos,ik) = qsi(ipos,ik) + delta(level,ipos)*agauss
627 continue
600 continue
c

```

```

c Preparando para novo nivel de resolucao de interpolacao
c
  d = d/2.
  di = di/2.
  level = level + 1
  if (di .gt. 6.00) go to 110
c
c Escrevendo os arquivos de saida
c
  level = level - 1
  di = 2*di
  d = 2*d
  call escrita(di,n)
700 format (1x,i4,1x,f12.8,5(1x,f12.7))
710 format (1x,f11.7,1x,i2,1x,f10.7,4(1x,f12.7))
  stop
  end
c *****
c inicio das subrotinas e funcoes
c *****
c
c subrotina gaussian para retornar numero com distribuicao
c gaussiana de media 0 e variancia 1
c
c *****
c
  subroutine gaussian(nrand,isem,agauss)
  implicit double precision (a-h,o-z)
  real *8 arand, sum, agauss,gadd,gfac
  integer *2 ihr,imin,isec,i100th
  integer nrand, isem
  arand = 1.
  gadd = dsqrt(3.*nrand)
  gfac = 2*gadd/(nrand*arand)
  sum = 0.
  call gettim (ihr,imin,isec,i100th)
  do 10 k = 1, nrand
    sum = sum + ran3(isem)
400 format (5x,i2,2x,f10.5,2x,f10.5)
  10 continue
  agauss = gfac * sum - gadd
410 format(10x,3f15.5)
  return
  end
c *****
c
c subrotina para calcular a posicao do vetor x
c
c *****
c
  subroutine posicao(anum,ipos)
  implicit double precision (a-h,o-z)
  real *8 anum
  integer ipos
  if (anum .eq. 0.0) ipos = 1
  do 10 j = 1,16

```

```

c   do 10 j = 1,64
c   do 10 j = 1,128
c   do 10 j = 1,256
c   do 10 j = 1,512
c   do 10 j = 1,1024
    if (anum .eq. j*6.25) ipos = j + 1
c   if (anum .eq. j*1.5625) ipos = j + 1
c   if (anum .eq. j*0.78125) ipos = j + 1
c   if (anum .eq. j*0.390625) ipos = j + 1
c   if (anum .eq. j*0.1953125) ipos = j + 1
c   if (anum .eq. j*0.09765625) ipos = j + 1
10 continue
    return
    end
* *****
*   DOUBLE PRECISION FUNCTION RAN3(IDUM)
* *****
*   IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
*   Funcao Randomica
*   PARAMETER (MBIG=1000000000,MSEED=161803398,MZ=0,FAC=1.E-9)
*   COMMON /RAN1/ IFF,MJ,MK,INEXT,INEXTP,MA(55)
*   DATA IFF /0/
*   INEXT=0
*   INEXTP=31
*   IF(IDUM.LT.0.OR.IFF.EQ.0)THEN
*       IFF=1
*       MJ=MSEED-IABS(IDUM)
*       MJ=MOD(MJ,MBIG)
*       MA(55)=MJ
*       MK=1
*       DO 11 I=1,54
*           II=MOD(21*I,55)
*           MA(II)=MK
*           MK=MJ-MK
*           IF(MK.LT.MZ)MK=MK+MBIG
*           MJ=MA(II)
11  CONTINUE
*       DO 13 K=1,4
*           DO 12 I=1,55
*               MA(I)=MA(I)-MA(1+MOD(I+30,55))
*               IF(MA(I).LT.MZ)MA(I)=MA(I)+MBIG
12  CONTINUE
13  CONTINUE
*       INEXT=0
*       INEXTP=31
*       IDUM=1
*   ENDIF
*   INEXT=INEXT+1
*   IF(INEXT.EQ.56)INEXT=1
*   INEXTP=INEXTP+1
*   IF(INEXTP.EQ.56)INEXTP=1
*   MJ=MA(INEXT)-MA(INEXTP)
*   IF(MJ.LT.MZ)MJ=MJ+MBIG
*   MA(INEXT)=MJ

```

```

RAN3=MJ*FAC
RETURN
END
C*****
C
C   subrotina de interpolacao por krigagem de tres pontos
C
C*****
C   subroutine intera3(h,zest)
C   implicit double precision (a-h,o-z)
C   common /intp3/ aqsia,aqsib,aqsic,alfa,teta,omega
C   real *8 aux1,aux2,aux3,aux4,aux5,aux6,aux7,aux8,alamb1,
C * alamb2,alamb3,aqsia,aqsib,aqsic,zest,h,aa,ab,ac,aux00,aux0
C   aux00 = 2.*h
C   aux1 = alfa**aux00
C   aux0 = 2.*aux1
C   aux2 = teta**aux00
C   aux3 = omega**aux00
C   aux4 = omega - alfa
C   if (aux4 .lt. 0.) aux4 = (-1)*aux4
C   aux4 = aux4**aux00
C   aux5 = omega - teta
C   if (aux5 .lt. 0.) aux5 = (-1)*aux5
C   aux5 = aux5**aux00
C   aux6 = teta - alfa
C   if (aux6 .lt. 0.0) aux6 = (-1)*aux6
C   aux6 = aux6**aux00
C   aa = aux4 - aux3
C   ab = aux5 - aux3
C   ac = aux6 - aux2 - aux1
C   aux7 = ac*ac/aux0 - 2.*aux2
C   aux8 = ab - aux2 - ac/2. + ac*aa/aux0
C   alamb3 = 1./aux7*aux8
C   alamb2 = 1./aux0*(aux1 + ac*alamb3 -aa)
C   alamb1 = 1. - alamb2 - alamb3
C   zest = aqsia*alamb1 + aqsib*alamb2 + aqsic*alamb3
C   return
C   end
C*****
C
C   subrotina de interpolacao por krigagem de quatro pontos
C
C*****
C   subroutine intera4(h,zest)
C   implicit double precision (a-h,o-z)
C   common /intp3/ aqsia,aqsib,aqsic,alfa,teta,omega
C   common /intp4/ aqsid,phi
C   real *8 zest,aux00,aux0,aux1,aux2,aux3,aux4,aux5,aux6,aux7,
C * aux8,aux9,aux10,aux11,aux12,aux13,aux14,aa,ab,ac,
C * alamb1,alamb2,alamb3,alamb4,aqsia,aqsib,aqsic,aqsid,
C * phi,omega,h,ad,ae,af,ag,ao,alfa,teta
10 aux00 = 2.*h
C   aux1 = alfa**aux00
C   aux0 = 2.*aux1

```

```

aux2 = teta**aux00
aux3 = phi**aux00
aux4 = omega**aux00
aux5 = omega - alfa
if (aux5 .lt. 0.0) aux5 = (-1)*aux5
aux5 = aux5**aux00
aux6 = omega - teta
if (aux6 .lt. 0.0) aux6 = (-1)*aux6
aux6 = aux6**aux00
aux7 = omega - phi
if (aux7 .lt. 0.0) aux7 = (-1)*aux7
aux7 = aux7**aux00
aux8 = teta - alfa
if (aux8 .lt. 0.0) aux8 = (-1)*aux8
aux8 = aux8**aux00
aux9 = phi - alfa
if (aux9 .lt. 0.0) aux9 = (-1)*aux9
aux9 = aux9**aux00
aux10 = phi - teta
if(aux10 .lt. 0.0) aux10 = (-1)*aux10
aux10 = aux10**aux00
aa = aux5 - aux4
ab = aux6 - aux4
ac = aux7 - aux4
ad = aux8 - aux2 - aux1
ae = aux9 - aux3 - aux1
af = aux10 - aux3 - aux2
aux11 = 1./(ad*ad/aux0 - 2.*aux2)
aux12 = ab + aa*ad/aux0 - ad/2. - aux2
ag = aux11*aux12
aux13 = ad*ae/aux0 + af
ao = aux11*aux13
aux14 = ae*ae/aux0 - 2.*aux3 - aux13*ao
alamb4 = 1./aux14*(ac + aa*ae/aux0 - ae/2. - aux3 - aux13*ag)
alamb3 = ag - ao*alamb4
alamb2 = 1./aux0*(aux1 + ad*alamb3 + ae*alamb4 - aa)
alamb1 = 1. - alamb2 - alamb3 - alamb4
zest = aqsia*alamb1 + alamb2*aqsib + alamb3*aqsic +
*      alamb4*aqsid
return
end

```

C*****

C

C funcao para calcular a tangente hiperbolica

C

C*****

```

double precision function tanhip(arg)
implicit double precision (a-h,o-z)
anume = 1. - dexp(-2.*arg)
deno = 1. + dexp(-2.*arg)
tanhip = anume/deno
return
end

```

```

C*****
C
C   leitura dos dados de entrada
C
C*****
C   subroutine leitura
C   implicit double precision (a-h,o-z)
C   common /leitur/ depth,numer
C   common /leitu1/ gr
C   dimension depth(3,1050),gr(3,1050),numer(3)
C   real *8 depth,gr
C   integer *2 j
C   integer numer
C   character *20 arq1
C   print *, '*****'
C   print *, '   abrindo os arquivos de entrada   '
C   print *, '*****'
C
C   abertura dos arquivos de entrada de dados
C
C   do 50 j = 1,3
C     print *, 'Qual o nome do arquivo de entrada do poco',j,'?'
C     read (*,'(a)') arq1
C     open (unit=j, file=arq1, status='unknown')
C 50 continue
C
C   leitura dos dados de entrada
C
C   do 100 j = 1, 3
C     print *, '*****'
C     print *, '   lendo o arquivo do poco',j
C     print *, '*****'
C     do 110 i= 1, 1500
C       read (j,900,end=120) depth(j,i),gr(j,i)
C 110 continue
C 120 numer(j) = i - 1
C 100 continue
C 900 format (2f10.0)
C     return
C   end
C*****
C
C   Subrotina para uniformizar as amostragens com interpolacao
C   linear *
C   o resultado esta na curva GRO(poco,profundidade)
C
C*****
C   subroutine uniform
C   implicit double precision (a-h,o-z)
C   common /leitur/ depth,numer
C   common /leitu1/ gr
C   common /unifo/ gro
C   dimension depth(3,1050),gr(3,1050),numer(3),
C *     gro(3,1050),prof(3),dep(3,1050)

```

```

      real *8 depth,gr,gro,prof,ainc1,ainc3,xdep,xgr,dep
      integer *2 j
      integer numer
c
c calculo da espessura de cada poco
c
      do 100 j = 1, 3
         prof(j) = depth(j,numer(j)) - depth(j,1)
100 continue
c
c calculo dos novos incrementos
c
      ainc1 = prof(1)/numer(2)
      ainc3 = prof(3)/numer(2)
c
c calculo das profundidades remarcadas
c
      do 200 j = 1, 3
         dep(j,1) = 0.
200 continue
      do 300 i = 2, numer(2)
         dep(1,i) = dep(1,i-1) + ainc1
         dep(2,i) = depth(2,i)
         dep(3,i) = dep(3,i-1) + ainc3
300 continue
c
c interpolacao do GR nas novas profundidades
c
      do 400 j = 1, 3, 2
         do 450 i = 1, numer(2)
            xdep = dep(j,i)
            call deriva(j,xdep,xgr)
            gro(j,i) = xgr
450 continue
400 continue
      do 500 i = 1, numer(2)
         gro(2,i) = gr(2,i)
500 continue
      return
      end
c*****
c
c subrotina para interpolar leituras de perfis em um poco
c fornecendo o resultado na variavel XGR
c
c*****
      subroutine deriva(j,xdep,xgr)
      implicit double precision (a-h,o-z)
      common /leitur/ depth,numer
      common /leitu1/ gr
      dimension depth(3,1050),gr(3,1050),numer(3)
      real *8 depth,gr,xdep,xgr,dyo
      integer *2 j
      integer numer

```

```

c
c Extrapolando pontos acima dos dados
c
  if (xdep .lt. depth(j,1)) then
    dyo = (gr(j,2) - gr(j,1))/(depth(j,2)-depth(j,1))
    xgr = gr(j,1) - dyo*(depth(j,1) - xdep)
    else
    go to 30
  endif
  goto 100
c
c Extrapolando pontos abaixo dos dados
c
30 if (xdep .gt. depth(j, numer(j))) then
  dyo=(gr(j, numer(j))-gr(j, numer(j)-1))/(depth(j, numer(j)) -
  *   depth(j, numer(j)-1))
  xgr = gr(j, numer(j)) + dyo*(xdep - depth(j, numer(j)))
  else
  go to 40
endif
goto 100
c
c Interpolando a curva entre os dados
c
40 do 50 i = 1, numer(j)-1
  if (xdep .ge. depth(j,i) .and. xdep .lt. depth(j,i+1)) then
    dyo = (gr(j,i+1) - gr(j,i))/(depth(j,i+1) -
    *   depth(j,i))
    xgr = gr(j,i) + dyo*(xdep - depth(j,i))
    go to 100
  else
  go to 50
  endif
50 continue
100 return
  end
c*****
c
c subrotina para calcular a media e sigma1 dos tres pocos
c
c*****
  subroutine statbas(sigma1)
  implicit double precision (a-h,o-z)
  common /leitur/ depth,numer
  common /leitu1/ gr
  dimension depth(3,1050),gr(3,1050),numer(3)
  real *8 depth,gr,sumgr,svargr,grmed,sigma1
  integer *2 j
  integer numer
c
c Fazendo o somatorio de GR nos 3 pocos
c
  sumgr = 0.0
  do 100 j = 1, 3

```

```

        do 110 i = 1, numer(j)
            sumgr = sumgr + gr(j,i)
110    continue
100 continue
c
c Calculando o GR medio
c
    grmed = sumgr/(numer(1)+numer(2)+numer(3))
c
c Fazendo o somatorio do valor quadratico do GR-GRMED
c
    svargr = 0.0
    do 200 j = 1, 3
        do 210 i = 1, numer(j)
            svargr = svargr + (gr(j,i) - grmed)**2
210    continue
200 continue
c
c Calculo da variancia geral dos dados - SIGMA1
c
    sigma1 = svargr/(numer(1)+numer(2)+numer(3))
    return
    end

```

```

c*****

```

```

c
c Subrotina Escrita para escrever os arquivos de saida

```

```

c*****

```

```

    subroutine escrita(di,n)
    implicit double precision (a-h,o-z)
    common /leitur/ depth,numer
    common /escrit/ qsi
    common /clprof/ depth1,prof1
    dimension qsi(17,1050),numer(3),depth1(17,1050),
*          prof1(17),depth(3,1050)
    real *8 qsi,anum,depth1,prof1,depth,xdep,xgr,n,di
    integer numer,ipos,num
    character *20 arq1

```

```

c
c Calculando as profundidades para cada poco

```

```

c
    call calprof(di,n)

```

```

c
c Calculando as profundidades verdadeiras

```

```

c
    do 200 a = di, n-di, di
        if (a .eq. 50) go to 200
        anum = a
        call posicao(anum,ipos)
        print *, 'Qual o arquivo de saida',ipos+3, '?'
        read (*, '(a)') arq1
        open (unit=ipos+2, file=arq1, status='unknown')
        xdep = 0.0

```

```

xgr = qsi(ipos,1)
write (ipos+2, 800) xdep, xgr
num = prof1(ipos)/0.2 + 1
do 210 i = 2, num
  xdep = xdep + 0.2
  if (xdep .gt. prof1(ipos)) go to 200
  call deriva1(depth1,qsi,ipos,numer(2),xdep,xgr)
  write (ipos+2,800) xdep, xgr
210 continue
close (unit=ipos+2)
200 continue
800 format (f10.6,2x,f10.3)
return
end
C*****
C
C Subrotina para calcular a Profundidade segundo os incrementos
C dos *
C pocos considerando o numero de amostras igual a numer(2).
C Variavel de retorno e DEPTH1
C
C*****
subroutine calprof(di,n)
implicit double precision(a-h,o-z)
common /leitur/ depth,numer
common /clprof/ depth1,prof1
dimension numer(3),prof1(17),ainc(17),
* depth1(17,1050),depth(3,1050)
real *8 depth,n,prof1,depth1,ainc,dep1,dep2,di,anum,a
integer numer,ipos
C
C Calculo das profundidades finais e do incremento a cada "di"
C
prof1(1) = depth(1,numer(1)) - depth(1,1)
prof1(9) = depth(2,numer(2)) - depth(2,1)
prof1(17) = depth(3,numer(3)) - depth(3,1)
ainc(1) = prof1(1)/numer(2)
ainc(9) = 0.2
ainc(17) = prof1(17)/numer(2)
do 100 a = di, n-di, di
  if (a .eq. 50) go to 100
  anum = a
  call posicao(anum,ipos)
  if (a .gt. 50.) go to 50
  dep1 = depth(2,numer(2)) - depth(1,numer(1))
  dep2 = dep1 * a/50.
  prof1(ipos) = depth(1,numer(1)) + dep2
  ainc(ipos) = prof1(ipos)/numer(2)
  go to 100
50 dep1 = depth(2,numer(2)) - depth(3,numer(3))
  dep2 = dep1 * (n - a)/50.
  prof1(ipos) = depth(3,numer(3)) + dep2
  ainc(ipos) = prof1(ipos)/numer(2)
100 continue

```

```

c
c Calculo das Profundidades em cada incremento
c
  do 200 a = di, n-di, di
    if (a .eq. 50.) go to 200
    anum = a
    call posicao(anum,ipos)
    depth1(ipos,1) = 0.0
    do 150 i = 2, numer(2)
      depth1(ipos,i) = depth1(ipos,i-1) + ainc(ipos)
150  continue
200 continue
    return
  end
c*****
c
c subrotina para calcular os perfis em profundidade verdadeira
c
c*****
c
  subroutine deriva1(depth1,qsi,ipos,numero,xdep,xgr)
  implicit double precision (a-h,o-z)
  dimension depth1(17,1050),qsi(17,1050)
  real *8 depth1,qsi,xdep,xgr
  integer numero,ipos
  if (xdep .lt. depth1(ipos,1)) then
    dyo=(qsi(ipos,2)-qsi(ipos,1))/(depth1(ipos,2)-depth1(ipos,1))
    xgr = qsi(ipos,1) - dyo*(depth1(ipos,1) - xdep)
  else
    go to 30
  endif
  go to 100
30 if (xdep .gt. depth1(ipos,numero)) then
  dyo = (qsi(ipos,numero)-qsi(ipos,numero-1)) /
  *   (depth1(ipos,numero)-depth1(ipos,numero-1))
  xgr = qsi(ipos,numero) + dyo*(xdep - depth1(ipos,numero))
  else
    go to 40
  endif
  go to 100
40 do 50 i = 1, numero-1
  if (xdep .ge. depth1(ipos,i) .and. xdep .lt.
  *   depth1(ipos,i+1)) then
    dyo = (qsi(ipos,i+1)-qsi(ipos,i))/(depth1(ipos,i+1)-
  *   depth1(ipos,i))
    xgr = qsi(ipos,i) + dyo*(xdep - depth1(ipos,i))
    go to 100
  else
    go to 50
  endif
50 continue
100 return
  end

```