

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”

MAICON ZANIBONI SIQUEIRA

“O CAMPO ELETROMAGNÉTICO QUANTIZADO
SUBMETIDO A RUÍDO E ACOPLADO A UM
OSCILADOR MECÂNICO”

DISSERTAÇÃO DE Mestrado APRESEN-
TADA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM FÍSICA DO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB
WATAGHIN” DA UNIVERSIDADE ESTADUAL
DE CAMPINAS PARA A OBTENÇÃO DO TÍ-
TULO DE MESTRE EM FÍSICA.

ORIENTADOR: PROF. DR. ANTONIO VIDIELLA BARRANCO

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FI-
NAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO
MAICON ZANIBONI SIQUEIRA, E ORIENTADA PELO
PROF. DR. ANTONIO VIDIELLA BARRANCO



CAMPINAS, 2012

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
VALKÍRIA SUCCI VICENTE – CRB8/5398 - BIBLIOTECA DO IFGW
UNICAMP**

Si75c	<p>Siqueira, Maicon Zaniboni, 1986- O campo eletromagnético quantizado submetido a ruído e acoplado a um oscilador mecânico / Maicon Zaniboni Siqueira. -- Campinas, SP : [s.n.], 2012.</p> <p style="text-align: center;">Orientador: Antonio Vidiella Barranco. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física “Gleb Wataghin”.</p> <p style="text-align: center;">1. Ótica quântica. 2. Sistemas optomecânicos. 3. Perda de coerência. I. Vidiella Barranco, Antonio, 1963- II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física “Gleb Wataghin”. III. Título.</p>
-------	--

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: The quantized electromagnetic field submitted to noise and coupled to a mechanical oscillator

Palavras-chave em inglês:

Quantum optics

Optomechanical systems

Loss of coherence

Área de Concentração: Física

Titulação: Mestre em Física

Banca Examinadora:

Antonio Vidiella Barranco [Orientador]

Salomon Sylvain Mizrahi

Thiago Pedro Mayer Alegre

Data da Defesa: 14-05-2012

Programa de Pós-Graduação em: Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE **MAICON ZANIBONI SIQUEIRA – R.A. 062616** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 14/05/2012.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco - Orientador do Candidato
DEQ/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi – DF/UFSCar

Prof. Dr. Thiago Pedro Mayer Alegre – DFA/IFGW/UNICAMP

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à minha família que me apoiou nesses anos da graduação e do mestrado, principalmente à minha mãe, Maria Jose Zaniboni Siqueira, que insistiu bastante para que eu continuasse a escrever a tese, mesmo quando eu estava bem cansado, e que me apoiou de uma maneira que só as melhores mães sabem fazer.

Agradeço também:

Aos amigos com quem eu costumo me reunir no final de semana em Campinas, pois mesmo sendo um grupo pequeno, é um grupo nerd e divertido.

Aos meus amigos que fazem física comigo na Unicamp e com quem divido várias ideias sobre o universo, inclusive os bandejões.

Ao meu orientador e amigo, Antonio Vidiella Barranco, que me aceitou como seu aluno e me ensinou um lado novo da mecânica quântica.

Por fim, quero agradecer à Unicamp como um todo, principalmente aos seus professores, pois passei 6 anos da minha vida aqui, onde conheci muitas pessoas, opiniões e novas ideias, e também agradeço ao CNPq, que me apoiou financeiramente no mestrado.

Resumo

Neste projeto será investigada a influência de ruído no processo de interação da radiação (campo quantizado) com a matéria (sistema mecânico mesoscópico). Consideraremos o modo do campo confinado em uma cavidade de alto fator de qualidade com um espelho fixo e o outro espelho móvel, este tratado como um oscilador mecânico suscetível à pressão de radiação do campo da cavidade. Investigaremos a dinâmica do sistema na situação em que o modo do campo confinado estará submetido a um ruído causando perda de coerência de fase.

Abstract

In this project we will investigate the influence of noise in the process of interaction of radiation (quantized field) with the matter (mesoscopic mechanical system). We will consider the mode field confined in a cavity of high quality factor with a fixed mirror and one moving mirror, this treated as a mechanical oscillator susceptible to radiation pressure from cavity field. We will investigate the system dynamics in the situation that the confined mode field is submitted to noise causing loss of phase coherence.

Sumário

1	Introdução	1
2	Definições	3
2.1	Coerência Quântica	3
2.2	Cavidade óptica	4
2.3	Sistema	4
2.3.1	Vetor Estado	4
2.3.2	Emaranhamento	5
2.3.3	Observável	5
2.3.4	Regra de Born	6
2.3.5	Evolução de um sistema	7
2.3.6	Estado quase-clássico	7
2.4	Ensemble	8
2.4.1	Média sobre um ensemble	9
2.4.2	Relação de Incerteza	9
2.4.3	Ensemble misto	10
2.4.4	Média sobre um ensemble misto	11
2.4.5	Operador densidade	11
2.4.6	Propriedades da matriz densidade	12
2.4.7	Ensemble puro	13
2.4.8	Evolução do ensemble	14
2.4.9	Operador densidade reduzido	14
2.4.10	Medição sobre um ensemble	16
2.5	Entropia Linear	17
2.6	Superoperador	17
2.6.1	Definindo o adjunto de um superoperador	21
2.6.2	Propriedades do operador densidade reduzido	23
2.6.3	Média sobre o operador densidade reduzido	26

2.7	Espaço de Fase	28
3	Interação entre um espelho móvel e a pressão de radiação	31
3.1	Equações do movimento	31
3.2	Hamiltoniana clássica e sua quantização	35
3.3	Aproximação linear	38
4	Teoria Quântica de Amortecimento de Fase	41
4.1	Amortecimento de Amplitude	41
4.2	Amortecimento de Fase	43
4.3	Interação reservatório-sistema	44
4.4	Derivação da equação mestra sob amortecimento de fase	46
5	Campo com amortecimento de fase	51
5.1	Média de alguns observáveis	53
5.1.1	Energia do sistema e número de fótons	54
5.1.2	Dinâmica do espelho	55
5.2	Operador densidade do sistema	57
5.3	Entropia linear do sistema	62
5.4	Entropia Linear do espelho	64
5.5	Medição sobre o espelho	66
5.6	Entropia Linear do Campo	67
5.7	Medições sobre o campo	70
5.7.1	Número de Fótons	70
5.7.2	Quadratura da Amplitude	71
5.7.3	Média da quadratura da amplitude	73
6	Conclusão	81
A	Apêndice	85
A.1	Traço do comutador	85
A.2	Matriz idempotente	87
A.3	Derivação do operador evolução temporal unitário	87

Capítulo 1

Introdução

Informações podem ser armazenadas em cavidades ópticas através de fótons colocados em seu interior que passam a refletir nos espelhos que possuem alto fator de qualidade. Ainda são estudadas maneiras de acessar essas informações sem perdê-las posteriormente, como tentativas de diminuir a perda de coerência de fase tanto do campo como do espelho para o ambiente, ou como diminuir a perda de fótons pelo espelho que não é perfeitamente reflexivo levando a uma perda de energia. O laser (abreviação de Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) é o exemplo mais comum no uso de cavidades ópticas. Num artigo recente [1] é mostrado o desenvolvimento de um ressonador mecânico, que é formado em um microchip de silício em escala nanoscópica, que ao ser acoplado com a pressão de radiação de um laser resfria (diminui) seu movimento mecânico até o estado fundamental (alcançando um número de ocupação médio de fônons de 0.85 ± 0.08). Esse resfriamento é realizado a temperatura ambiente de 20 K, aproximadamente mil vezes maior do que em experimentos anteriores a esse artigo, abrindo caminho para o controle óptico de osciladores mesoscópicos no regime quântico. Em outro artigo recente [2], um sistema optomecânico é montado de maneira a estabelecer uma interferência quântica eficiente entre um oscilador mecânico e fótons ópticos, que podem prover um transporte de estados quânticos livre de decoerência através de fibras ópticas.

Essa dissertação define no Capítulo 2 vários conceitos derivados da mecânica quântica como decoerência quântica, emaranhamento quântico, ensemble, superoperadores, e equação diferencial da média de um operador. Esse capítulo possui alguns desenvolvimentos e definições que fiz no mestrado. No Capítulo 3 é apresentado uma cavidade óptica de alto fator de qualidade com um espelho móvel submetido a um potencial qualquer e com campo eletromagnético dentro da mesma sendo refletido várias vezes. Será montando um hamiltoniano quântico perturbativo num regime não-relativístico, ou seja, tratando o campo como o agente perturbativo e o espelho oscilando em torno de uma posição de equilíbrio, além do

campo ser considerado composto por praticamente um modo de oscilação. No Capítulo 5, um sistema qualquer interage fracamente com um reservatório de temperatura finita criando um amortecimento de fase, fenômeno puramente quântico, no qual não ocorre perda de energia do sistema para o reservatório, mas uma decoerência quântica do sistema, diferindo muito ao ser comparado com um amortecimento de amplitude que é a maneira clássica de que um sistema perde energia para o reservatório.

No último capítulo, estão os resultados que fiz durante meu mestrado, tratando uma cavidade óptica de alto fator de qualidade em que um de seus espelhos é móvel sujeito a uma oscilação harmônica, sendo perturbado por um campo eletromagnético no interior dessa cavidade. Esse campo está sujeito a um amortecimento de fase devido a um acoplamento fraco com um reservatório a altas temperaturas, de maneira a garantir a aproximação Markoviana. Esse reservatório é caracterizado por uma coleção de “espelhos móveis” sujeitos, também, a uma oscilação harmônica. Existe aqui uma semelhança muito grande entre os vários espelhos do reservatório e o espelho móvel da cavidade, sendo diferenciados pela temperatura e pelo acoplamento com o campo.

Capítulo 2

Definições

2.1 Coerência Quântica

Em física, *coerência* é a característica dada a um conjunto de ondas que se interferem formando uma onda estacionária (no tempo e no espaço). Define-se o grau de coerência entre duas ondas eletromagnéticas através de funções de correlação entre os campos elétricos ($E(\vec{r}_1, t_1)$, $E(\vec{r}_2, t_2)$) sobre um ensemble. Se a correlação for igual a 1, então as ondas são ditas coerentes, se igual a 0 são incoerentes e se entre 0 e 1 são parcialmente coerentes.

No experimento da dupla fenda de Young feito com feixes de elétrons é possível reconhecer a coerência. Quando apenas a fenda 1 está aberta, o feixe de elétrons atinge o anteparo e forma uma mancha (concentração de elétrons que colidiram com o anteparo) que possui intensidade que varia com a posição em relação à fenda, ou seja, quanto mais próximo da fenda maior a intensidade e quanto mais longe menor a intensidade. A função intensidade da fenda 1, $I_1(x)$ (onde $x = 0$ é a posição da fenda 1), pode ser obtida através do módulo ao quadrado da função de onda do elétron que passa pela mesma fenda, $\Psi_1(x, t)$ (onde t é o tempo), e portanto $I_1(x) = |\Psi_1(x, t)|^2$. Quando apenas a fenda 2 está aberta, o experimento é análogo, porém com $I_2(x) = I_1(x - d)$, onde d é a distância entre as fendas, e $\Psi_2(x, t) = \Psi_1(x - d, t)$. As funções de onda pertencem a \mathbb{C} e variam com o tempo, porém a intensidade não varia com o tempo.

Quando as duas fendas estão abertas, o resultado não é o intuitivo, ou seja, a função intensidade resultante não é $I_T(x) = I_1(x) + I_2(x)$, e o que se obtém são franjas com um pico de maior intensidade centrado entre as duas fendas e ao se afastar desse pico a intensidade diminui. Aqui ocorre o fenômeno da *sobreposição quântica*, sendo necessário levar em conta as funções de onda do elétron pelas fendas 1 e 2, sendo que as grandezas que se somam são as funções de onda e não as intensidades. Portanto, $\Psi_T(x, t) = \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t)$ e assim $I_T(x) = |\Psi_T(x, t)|^2 = I_1(x) + I_2(x) + I_{12}(x)$, onde $I_{12}(x) = 2\Re\{\Psi_1^*(x, t)\Psi_2(x, t)\}$ que pode ser

negativo.

As ondas $\Psi_1(x, t)$ e $\Psi_2(x, t)$ não são necessariamente estacionárias, porém a onda $\Psi_T(x, t)$ é, já que existe apenas uma diferença de fase entre as ondas 1 e 2, evidenciando assim, que elas são coerentes, ou mais especificamente, possuem *coerência quântica*, pois esse fenômeno ocorre somente em nível quântico. A nível macroscópico, o experimento da dupla fenda de Young feito com feixes de partículas macroscópicas resulta numa função intensidade intuitiva, porque $I_{12}(x)$ é “absorvido” pelo ambiente, ou seja, as funções de onda de cada partícula são modificadas de maneira que a coerência quântica se perde, resultando na *decoerência quântica*. Matematicamente, a função correlação resulta em zero, evidenciando uma incoerência, ou independência, entre as partículas que entram pela fenda 1 e as que entram pela fenda 2, não havendo interferência ou sobreposição entre as mesmas.

2.2 Caverna óptica

Uma caverna óptica é um arranjo de espelhos que aprisiona ondas eletromagnéticas em uma região do espaço chamada caverna por um intervalo de tempo que depende do fator de qualidade dos espelhos, em que as ondas podem refletir muitas vezes e sofrerem pouca atenuação.

A onda aprisionada refletirá várias vezes e, por efeitos de interferência, se tornará estacionária, resultando numa superposição de ondas com frequências bem definidas, devido à interferência construtiva, dependentes apenas do comprimento da caverna, e as outras frequências serão suprimidas por interferência destrutiva.

2.3 Sistema

Em física, um *sistema* é um conjunto de partículas e objetos ou entidades materiais escolhidos para análise que podem interagir entre si e com o ambiente que cerca esse sistema. Para um instante t qualquer, o sistema pode ser inteiramente caracterizado por um *vetor estado* $|\psi(t)\rangle$. Após ser definido, é possível extrair informações do mesmo através do uso de *observáveis*.

2.3.1 Vetor Estado

Seja $|\psi\rangle$ um vetor que pertence ao espaço \mathcal{F} . O espaço \mathcal{F}^* é o espaço adjunto de \mathcal{F} , e o vetor $\langle\psi|$ é o vetor adjunto de $|\psi\rangle$, sendo que essa relação é bijetiva, ou seja, para todo $|\psi\rangle$ existe apenas um vetor adjunto $\langle\psi|$, e vice-versa. Um escalar, $\lambda \in \mathbb{C}$, pode ser usado para modificar a intensidade e a fase de um vetor resultando no produto $\lambda|\psi\rangle$. Simbolicamente, pode-se

escrever a seguinte relação bijetiva entre \mathcal{F} e \mathcal{F}^* :

$$\lambda |\psi\rangle \longleftrightarrow \lambda^* \langle\psi|$$

Um produto interno é um escalar que pode ser definido entre um vetor de \mathcal{F} , $|\beta\rangle$, com um de \mathcal{F}^* , $\langle\alpha|$, dado por $\langle\alpha|\beta\rangle \in \mathbb{C}$. Um vetor unitário é aquele que o produto interno $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, e dois vetores são ortogonais se $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$.

Se um vetor $|\psi\rangle$ pertence ao espaço de Hilbert \mathcal{H} , então ele pode ser descrito como uma combinação linear de um conjunto de vetores ortonormais que formam uma *base* $\{|a_n\rangle\}$:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle \quad (2.3.1)$$

onde $c_n \in \mathbb{C}$ e $\langle a_n | a_m \rangle = \delta_{n,m}$. Um vetor do espaço de Hilbert pode ser chamado de *ket*, e o vetor do espaço adjunto, \mathcal{H}^* , pode ser chamado de *bra*.

Para descrever um sistema físico é necessário definir o espaço estado \mathcal{E} , que é um espaço que está contido em \mathcal{H} e possui apenas vetores unitários, ou seja, além da equação (2.3.1), deve-se acrescentar $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Um vetor desse espaço é chamado de *vetor estado*.

2.3.2 Emaranhamento

Um sistema pode ser composto por subsistemas, sendo que um sistema composto pelos sistemas A e B possuem \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B como seus respectivos espaços de Hilbert, e o estado do sistema todo é dado por $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, por exemplo:

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B \quad (2.3.2)$$

ou também

$$|\psi\rangle = |\xi\rangle_A \otimes |\xi\rangle_B + |\phi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B \quad (2.3.3)$$

As duas equações tratam sistemas diferentes. É importante notar que a equação (2.3.3) não pode ser colocada da forma (2.3.2), ou seja, o estado do sistema descrito em (2.3.3) não é um produto tensorial do estado do sistema A com o estado do sistema B, ou seja é inseparável. Portanto, o estado de A está *emaranhado* com o estado de B.

2.3.3 Observável

Um *observável* \hat{A} é um operador do espaço de Hilbert que é Hermitiano, com seus autovetores formando uma base no espaço estado [3], e possuindo significado físico, ou seja:

- $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$. Condição que implica em autovalores reais.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{g_n} |\alpha_n^i\rangle \langle \alpha_n^i| = \mathbf{1}$ (relação de fechamento), para o caso de um espectro discreto com $\hat{A} |\alpha_n^i\rangle = \alpha_n |\alpha_n^i\rangle$, com $|\alpha_n^i\rangle$ um autoestado de autovalor α_n e g_n é a degenerescência de α_n , além de $\langle \alpha_n^i | \alpha_m^j \rangle = \delta_{n,m} \delta_{i,j}$
- \hat{A} pode ser medido.

Defini-se $\hat{P}_n = \sum_{i=1}^{g_n} |\alpha_n^i\rangle \langle \alpha_n^i|$ como a projeção de um vetor estado no subespaço de α_n . O observável \hat{A} pode ser reescrito por:

$$\hat{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \hat{P}_n \quad (2.3.4)$$

com $\alpha_n \in \mathbb{R}$.

Para o caso do observável ter parte, ou totalidade, do espectro contínuo, usa-se o teorema espectral.

Os operadores posição, momento linear, momento angular e número de fótons são exemplos de observáveis.

2.3.4 Regra de Born

A regra de Born foi formulada por Born num artigo em 1926 [4] e é utilizada para mostrar o que acontece, teoricamente, ao extrair informação de um sistema. Se o observável \hat{A} possui espectro discreto e o sistema está num estado $|\psi\rangle$ normalizado, então:

- ao medi-lo obteremos um dos autovalores α_n de \hat{A} .
- a probabilidade de se medir α_n é dada por $\langle \psi | \hat{P}_n | \psi \rangle = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle \alpha_n^i | \psi \rangle|^2$. Notar que $\hat{P}_n | \psi \rangle$ é a projeção do estado da partícula sobre o subespaço de α_n .

Como consequência da medição, o estado do sistema será projetado sobre o subespaço de valor medido:

$$\frac{\hat{P}_n |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{P}_n | \psi \rangle}} = \frac{\sum_{i=1}^{g_n} \langle \alpha_n^i | \psi \rangle |\alpha_n^i\rangle}{\sqrt{\sum_{i=1}^{g_n} |\langle \alpha_n^i | \psi \rangle|^2}}$$

2.3.5 Evolução de um sistema

Para descrever como um sistema se modifica com o tempo é necessário usar a equação de Schrödinger [5] que foi proposta por Erwin Schrödinger em 1926:

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (2.3.5)$$

com $\hat{H}(t)$ o Hamiltoniano que pode variar com o tempo t , \hbar a constante de Planck dividida por 2π , e i a unidade imaginária.

Se $\hat{H}(t) = \hat{H}$, ou seja, o hamiltoniano não depende do tempo, então a solução da equação de Schrödinger é dada por:

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle$$

onde a exponencial é chamada de operador evolução temporal. Para o caso de um sistema composto de outros sistemas, a evolução temporal é aplicada sobre o estado do sistema todo, não sendo possível, em geral, aplicar, separadamente, para cada um dos sistemas. Por exemplo, se o Hamiltoniano total do sistema é dado por:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{V}$$

onde \hat{V} é o potencial de interação entre os sistemas A e B dado por:

$$\hat{V} = \hat{V}_A \hat{V}_B$$

com \hat{V}_A um operador que atua no sistema A e \hat{V}_B um operador que atua no sistema B, então o operador evolução temporal será dado por:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_A(t-t_0)} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_B(t-t_0)} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{V}_A \hat{V}_B(t-t_0)}$$

que ao ser aplicado sobre um estado inicial não-emaranhado irá torná-lo emaranhado devido ao termo $e^{\frac{i}{\hbar}\hat{V}_A \hat{V}_B(t-t_0)}$.

2.3.6 Estado quase-clássico

Estado quase-clássico é o estado no qual as médias quânticas $\langle \hat{x} \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$ e $\langle \hat{H} \rangle$ são quase iguais aos valores clássicos x , p e H respectivamente, com \hat{x} e \hat{p} os operadores posição e momento respectivamente. Para o caso do oscilador harmônico simples, o Hamiltoniano do sistema é

dado por:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

onde m é a massa da partícula e ω a frequência angular. Aqui são definidos os operadores aniquilação, \hat{a} , e criação \hat{a}^\dagger , que satisfazem:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left(\frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \right) \\ \hat{p} &= \sqrt{\hbar m\omega} \left(\frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}i} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= 1 \\ \hat{n} &= \hat{a}^\dagger\hat{a}\end{aligned}$$

onde os autovetores de \hat{n} (operador número, que para um campo eletromagnético representa o número de fótons) são $\{|n\rangle\}$ com $n \in \mathbb{N}$, no qual formam a base de Fock. Tais vetores respeitam a seguinte relação:

$$\begin{aligned}\hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle\end{aligned}$$

Os autoestados de \hat{H} também são $\{|n\rangle\}$ e as autoenergias são:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Para uma partícula submetida a um potencial harmônico, o estado coerente $|\alpha\rangle$ (com $|\alpha| \gg 1$) é o estado que mais se aproxima de um estado quase-clássico. Um estado coerente é definido por:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

onde $\alpha \in \mathbb{C}$. O estado coerente satisfaz uma relação de incerteza mínima (Ver 2.4.2).

2.4 Ensemble

Um ensemble é uma coleção de muitos sistemas idênticos [6] (a ideia é que, no limite, o número de sistemas tenda ao infinito), em que cada sistema está num estado normalizado

$|\psi\rangle$ [7]. É utilizado para analisar o comportamento estatístico do sistema.

2.4.1 Média sobre um ensemble

A média (de um observável) sobre um ensemble consiste em medir o valor de um observável \hat{A} para cada sistema da coleção e depois fazer a média desses valores:

$$\bar{A} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} N_n \alpha_n}{\sum_{n=1}^{\infty} N_n} \quad (2.4.1)$$

com N_n o número de sistemas que mostraram o valor α_n ao terem \hat{A} medido.

Como a ideia de um ensemble é ter o número de sistemas tendendo ao infinito, usa-se a regra de Born afim de se obter o comportamento estatístico do sistema que está num estado normalizado $|\psi\rangle$:

$$\lim_{N_n \rightarrow +\infty} \frac{N_k}{\sum_{n=1}^{\infty} N_n} = \langle \psi | \hat{P}_k | \psi \rangle \quad (2.4.2)$$

Portanto, aplicando o limite do número de sistemas em (2.4.1), e usando (2.4.2) e (2.3.4), a média sobre um ensemble será:

$$\bar{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle \psi | \hat{P}_n | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \equiv \langle \hat{A} \rangle_{\psi} \quad (2.4.3)$$

2.4.2 Relação de Incerteza

O termo incerteza não possui uma definição única, sendo que a incerteza sobre uma medida de \hat{A} é representada por $\Delta\hat{A}$. Em 1927, Werner Heisenberg estabeleceu um princípio que ficou conhecido como o Princípio de Incerteza de Heisenberg, que diz que existe uma quantidade mínima no produto da incerteza do momento cinético, $\Delta\hat{p}$, com a incerteza da posição, $\Delta\hat{x}$, impossibilitando assim uma medição exata da posição e do momento simultaneamente [8]:

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \approx h$$

porém Heisenberg nunca chegou a dar uma definição clara do que é incerteza, entretanto deu uma explicação plausível sobre como chegar na equação acima.

Ainda em 1927, Kennard foi o primeiro a demonstrar a relação moderna do princípio de

incerteza [9]:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

com σ_A o desvio padrão de medições sobre \hat{A} que é um observável, definido por:

$$\sigma_A = \sqrt{\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}$$

onde a média é feita sobre um ensemble.

Relação de Incerteza de Robertson

Em 1929, Robertson [10] desenvolveu uma relação de incerteza para operadores hermitianos não comutáveis \hat{A} e \hat{B} :

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$$

2.4.3 Ensemble misto

Um ensemble misto é uma coleção de ensembles ordenados de um mesmo sistema, com o n -ésimo ensemble tratando o sistema num estado normalizado $|\psi_n\rangle$ e possuindo uma fração populacional w_n . A soma da fração populacional deve ser igual a uma unidade:

$$\sum_n w_n = 1 \tag{2.4.4}$$

sendo que o número de ensembles pode ser finito ou infinito. É importante notar que a fração populacional é um número real e positivo: $w_n \geq 0$, ou seja, é como se fosse a densidade de cada ensemble da coleção.

É usado para descrever os possíveis estados em que um sistema pode estar. Por exemplo, o estado de um fóton pode ser descrito como uma sobreposição das direções de polarização circular (direita $|\circ\rangle$ ou esquerda $|\oslash\rangle$, com $\langle \oslash|\circ\rangle = 0$), sendo que um possível é $|\updownarrow\rangle = (|\circ\rangle + |\oslash\rangle)/\sqrt{2}$ (polarização linear vertical), e outro é $|\leftrightarrow\rangle = (|\circ\rangle - |\oslash\rangle)/\sqrt{2}$ (polarização linear horizontal). Então, um fóton pode ser descrito por um *estado puro*, que pode ser uma sobreposição de outros estados puros. Agora, quando uma lâmpada incandescente está emitindo luz, essa luz não pode ser descrita por um estado puro, pois seus fótons não estão todos no mesmo estado. Ela é composta de fótons em todos os estados possíveis: $\cos \beta |\circ\rangle + e^{i\theta} \sin \beta |\oslash\rangle$, com $\beta \in [0, \pi[$ e $\theta \in [0, 2\pi[$, equivalendo, no fim das contas, a um ensemble misto composto de 50% $|\circ\rangle$ e 50% $|\oslash\rangle$. Portanto, pode-se chamar luz não-polarizada a luz de uma lâmpada incandescente, e essa luz só pode ser descrita por um *estado misto*.

2.4.4 Média sobre um ensemble misto

A média de um observável sobre um ensemble misto consiste em fazer a média dos valores médios de um observável \hat{A} de cada ensemble de estado $|\psi_n\rangle$ da coleção:

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_n w_n \langle \hat{A} \rangle_n \quad (2.4.5)$$

com $\langle \hat{A} \rangle_n \equiv \langle \psi_n | \hat{A} | \psi_n \rangle$.

Essa definição é a mesma que medir o valor de um observável \hat{A} para cada sistema da coleção e depois fazer a média desses valores.

2.4.5 Operador densidade

Escolhendo uma base ortonormal e discreta no espaço estado a relação de fechamento pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\phi_i\rangle \langle \phi_i| = \mathbf{1} \quad (2.4.6)$$

Aplicando (2.4.6) em (2.4.5), a equação é reescrita da seguinte forma:

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_n \sum_{i=1}^{\infty} w_n \langle \psi_n | \phi_i \rangle \langle \phi_i | \hat{A} | \psi_n \rangle \quad (2.4.7)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \langle \phi_i | \hat{A} \left[\sum_n w_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \right] | \phi_i \rangle \quad (2.4.8)$$

O operador densidade de um ensemble misto é:

$$\hat{\rho} \equiv \sum_n w_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (2.4.9)$$

ou seja, é uma expressão matemática que relaciona a densidade de cada ensemble da coleção com o vetor estado dos sistemas correspondentes.

E portanto, a média dos valores de \hat{A} para um ensemble misto pode ser escrita como:

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}\{\hat{A}\hat{\rho}\} \quad (2.4.10)$$

A ordem dos operadores num traço não modifica o resultado final, como foi mostrado em

(A.1.15). A equação (2.4.5) também pode ser escrita como:

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}\{\hat{\rho}\hat{A}\} \quad (2.4.11)$$

2.4.6 Propriedades da matriz densidade

Nem toda matriz pode ser considerada uma matriz densidade. Existem algumas propriedades que ela deve seguir:

- *Hermiticidade*

$$\hat{\rho}^\dagger = \sum_n w_n^* (|\psi_n\rangle \langle \psi_n|)^\dagger \quad (2.4.12)$$

como $w_n \geq 0$, então $w_n^* = w_n$ e $(|\psi_n\rangle \langle \psi_n|)^\dagger = |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$:

$$\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho} \quad (2.4.13)$$

- *Traço unitário*

De acordo com (2.4.11):

$$\text{Tr}\hat{\rho} = \langle \mathbf{1} \rangle \quad (2.4.14)$$

$$= \sum_n w_n \langle \psi_n | \psi_n \rangle \quad (2.4.15)$$

$$= \sum_n w_n \quad (2.4.16)$$

Usando (2.4.4), então:

$$\text{Tr}\hat{\rho} = 1 \quad (2.4.17)$$

- *Semi-positividade*

Olhando a matriz densidade como se fosse um observável, a média de seus valores sobre um sistema de estado normalizado $|\Psi\rangle$ será:

$$\langle \Psi | \hat{\rho} | \Psi \rangle = \sum_n w_n \langle \Psi | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \Psi \rangle \quad (2.4.18)$$

$$= \sum_n w_n |\langle \Psi | \psi_n \rangle|^2 \quad (2.4.19)$$

Como $w_n \geq 0$ e $|\langle \Psi | \psi_n \rangle| \geq 0$, então:

$$\langle \Psi | \hat{\rho} | \Psi \rangle \geq 0 \quad (2.4.20)$$

Observar também que $\langle \Psi | \hat{\rho} | \Psi \rangle = \langle \hat{P}_\Psi \rangle$, com $\hat{P}_\Psi = |\Psi\rangle \langle \Psi|$

2.4.7 Ensemble puro

Um ensemble misto que possui apenas um ensemble em sua coleção é chamado de *ensemble puro*.

O operador densidade de um ensemble puro é:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi| \quad (2.4.21)$$

Para identificar tal ensemble é necessário que ele respeite a propriedade de idempotência:

$$\hat{\rho}^2 = |\psi\rangle \langle \psi | \psi \rangle \langle \psi| = \hat{\rho} \quad (2.4.22)$$

Falta agora verificar se a idempotência da matriz densidade é uma condição suficiente para identificar um ensemble puro.

Uma matriz idempotente pode ser projetada sobre o subespaço de autovalor 1, de acordo com (A.2.6):

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^g |\psi^i\rangle \langle \psi^i| \quad (2.4.23)$$

Como essa matriz também possui as propriedades de uma matriz densidade, então o traço deve ser unitário e independe da base escolhida que pode ser a base de autovetores de $\hat{\rho}$:

$$\text{Tr} \hat{\rho} = g = 1 \quad (2.4.24)$$

Logo:

$$\hat{\rho} = |\psi^1\rangle \langle \psi^1| \quad (2.4.25)$$

ou seja, uma matriz densidade idempotente é um ensemble puro. Comparando com (2.4.21), conclui-se que $|\psi^1\rangle = |\psi\rangle$.

Portanto, um ensemble é puro se, e somente se, sua matriz densidade é idempotente.

2.4.8 Evolução do ensemble

A evolução de um ensemble descreve como o estado de cada sistema da coleção se modifica com o passar do tempo. Para um ensemble misto, a variação temporal do operador densidade é dado por:

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \sum_n w_n \frac{d}{dt} [|\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t)|] \quad (2.4.26)$$

Observar que um ensemble inicialmente puro continua puro após ser evoluído, pois apenas o estado dos sistemas se modificam de maneira igual, já que a equação de Schrödinger é a mesma para todos. Como cada sistema evolui segundo a equação de Schrödinger (2.3.5), então:

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \sum_n w_n \left(\frac{d|\psi_n(t)\rangle}{dt} \langle \psi_n(t)| + |\psi_n(t)\rangle \frac{d\langle \psi_n(t)|}{dt} \right) \quad (2.4.27)$$

$$= \sum_n w_n \left(\frac{1}{i\hbar} \hat{H}(t) |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t)| - \frac{1}{i\hbar} |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t)| \hat{H}(t) \right) \quad (2.4.28)$$

Chegando na equação de von Neumann

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -\frac{1}{i\hbar} [\hat{\rho}(t), \hat{H}(t)] \quad (2.4.29)$$

que é o análogo quântico do Teorema de Liouville da mecânica clássica estatística

$$\frac{d\rho_{clássico}(t)}{dt} = -[\rho_{clássico}(t), H_{clássico}(t)] \quad (2.4.30)$$

onde $\rho_{clássico}$ é a *densidade* de pontos representativos do espaço de fase [11], e o colchetes não é um comutador, é o colchetes de Poisson. Por isso, tal operador recebe o nome de *operador densidade*.

A equação (2.4.29) é muito parecida com a equação do movimento de Heisenberg, diferindo apenas no sinal de menos na frente do comutador, e também é chamada de *evolução unitária*.

2.4.9 Operador densidade reduzido

Seja $\hat{\rho}$ o operador densidade de um sistema composto A+B dado por

$$\hat{\rho} = \sum_n w_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$$

com $|\psi_n\rangle$ um estado possível do sistema, que pode definir um emaranhamento entre A e B.

O *operador densidade reduzido* é uma definição que foi introduzida por Paul Dirac em

1930 [12], que diz que, dado um sistema composto pelos sistemas A e B, o operador densidade de A, $\hat{\rho}_A$, é igual ao traço parcial do operador densidade do sistema composto, $\hat{\rho}$, sobre uma base do sistema B, $\{|b_m\rangle_B\}$:

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B \hat{\rho} = \sum_m {}_B \langle b_m | \hat{\rho} | b_m \rangle_B \quad (2.4.31)$$

Como o estado $|\psi_n\rangle$ é o produto tensorial de dois espaços de Hilbert, então o produto interno da base de B com cada estado do ensemble será ${}_B \langle b_m | \psi_n \rangle \equiv |\psi_{nm}\rangle_A$,

$$\hat{\rho}_A = \sum_{n,m} w_n |\psi_{nm}\rangle_A \langle \psi_{nm}| \quad (2.4.32)$$

observando que ${}_A \langle \psi_{nm} | \psi_{nm} \rangle_A \leq 1$. Como corolário, se o operador $\hat{\rho}$ é um operador densidade, então $\hat{\rho}_A$ também é um operador densidade.

Emaranhamento

Se o operador densidade $\hat{\rho}$ puder ser escrito da forma $\hat{\rho} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$, então o ensemble é dito separável, caso contrário ele é dito emaranhado. Essa condição de emaranhamento é mais geral que a definida em 2.3, pois antes a definição tratava apenas um sistema descrito por um estado puro, agora a definição abrange um sistema descrito por um estado misto. É importante notar que se os estados $|\psi_n\rangle$ são separáveis, ou seja, $|\psi_n\rangle = |\psi_n\rangle_A \otimes |\psi_n\rangle_B$, não implica que o ensemble seja sempre separável. Por exemplo, se $|\psi_n\rangle = |\psi_n\rangle_A \otimes |\beta\rangle_B$, então o ensemble é separável, com

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_A &= \sum_n w_n |\psi_n\rangle_A \langle \psi_n| \\ \hat{\rho}_B &= |\beta\rangle_B \langle \beta| \end{aligned}$$

Evolução temporal

Em geral, a evolução temporal do operador densidade reduzido não respeita a equação de von Neumann (2.4.29), devido ao emaranhamento dos estados entre os sistemas considerados, tendo conseqüentemente sua fração populacional variando com o tempo. A equação que descreve tal evolução é chamada de *equação mestra*.

Média de um observável

Seja \hat{A} um observável que age somente sobre o sistema A, ou seja, $\hat{A} \in \mathcal{H}_A$. A média de \hat{A} sobre o sistema composto é dada por:

$$\langle \hat{A} \rangle_{A,B} = \text{Tr}_{A,B} \{ \hat{\rho} \hat{A} \}$$

como o traço sobre a base B age somente sobre o sistema B, então $\text{Tr}_B \{ \hat{A} \} = \hat{A}$. Assim, a média pode ser reescrita por

$$\langle \hat{A} \rangle_{A,B} = \text{Tr}_A \{ (\text{Tr}_B \hat{\rho}) \hat{A} \} = \text{Tr}_A \{ \hat{\rho}_A \hat{A} \}$$

O último membro da equação acima pode ser identificado como uma média sobre o sistema A somente. Portanto,

$$\langle \hat{A} \rangle_{A,B} = \langle \hat{A} \rangle_A$$

2.4.10 Medição sobre um ensemble

Seja o operador densidade, $\hat{\rho}$, que descreve um ensemble ser dado por:

$$\hat{\rho} = \sum_n w_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$$

O ensemble de estado $|\psi_n\rangle$ é dado por:

$$\hat{\rho}_n = |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$$

Ao escolher um sistema desse ensemble, mede-se o valor do observável \hat{A} com autovetores $\{|\alpha_k\rangle\}$. Pela Regra de Born 2.3.4 o estado do sistema irá colapsar para um dos autovetores de \hat{A} , medindo α_k o sistema colapsa: $|\psi_n\rangle \rightarrow |\alpha_k\rangle$. A probabilidade de medir α_k é $|\langle \alpha_k | \psi_n \rangle|^2$. Ao medir o valor de \hat{A} para todos os sistemas desse ensemble, ele colapsa:

$$\hat{\rho}_n \xrightarrow{\hat{A}} \sum_k |\langle \alpha_k | \psi_n \rangle|^2 |\alpha_k\rangle \langle \alpha_k|$$

reparando que nesse último ensemble $|\langle \alpha_k | \psi_n \rangle|^2$ faz o papel de fração populacional.

Ao fazer o mesmo com $\hat{\rho}$, o ensemble colapsa para:

$$\hat{\rho} \xrightarrow{\hat{A}} \sum_{n,k} w_n |\langle \alpha_k | \psi_n \rangle|^2 |\alpha_k\rangle \langle \alpha_k|$$

reescrevendo esse último ensemble, obtém-se:

$$\hat{\rho} \xrightarrow{\hat{A}} \sum_k \langle \alpha_k | \hat{\rho} | \alpha_k \rangle | \alpha_k \rangle \langle \alpha_k |$$

com $\langle \alpha_k | \hat{\rho} | \alpha_k \rangle$ fazendo o papel de fração populacional, que também pode ser visto como a probabilidade de se medir α_k ao escolher aleatoriamente um sistema de $\hat{\rho}$.

2.5 Entropia Linear

Na mecânica quântica, mais especificamente na teoria de informação quântica, a entropia linear de um ensemble é um escalar definido[13] por:

$$S_L = 1 - \text{Tr}(\hat{\rho}^2) \quad (2.5.1)$$

podendo variar de $S_L = 0$, correspondendo a um ensemble puro ($\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \Rightarrow \text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$), até $S_L = 1 - 1/d$, correspondendo a um estado completamente misto, com d sendo a dimensão da matriz densidade $\hat{\rho}$. Essa definição está intimamente ligada a pureza do sistema, que é definida pelo $\text{Tr}(\hat{\rho}^2)$.

Pode-se definir também o grau do emaranhamento através do valor da entropia. Se $S_L = 1$ significa que o estado do sistema em consideração está totalmente emaranhado com outro sistema. Se $S_L = 0$ significa que o estado do sistema em consideração está desemaranhado de qualquer outro sistema (é como se, naquele momento, o sistema estivesse isolado do exterior).

2.6 Superoperador

Um superoperador, \mathcal{J} , é uma *função linear* que tem como domínio o espaço vetorial de operadores lineares, \mathcal{H} , e como imagem o mesmo espaço vetorial de operadores lineares, \mathcal{H} .

$$\mathcal{J} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

Aqui o termo “função” pode ser substituído por operador, porém o prefixo *super* é utilizado para diferenciar do operador em que está atuando. Os operadores possuem uma representação numérica sob a ação de vetores estado do espaço de Hilbert (por exemplo, seja \hat{A} um operador do espaço de Hilbert, então $\langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle$ é um número), mas os superoperadores não.

Seja \mathcal{J} um superoperador que atua num operador $\hat{\rho}$, então $\mathcal{J}(\hat{\rho})$ ($\hat{\rho}$ não representa, necessariamente, um operador densidade). Por ser linear, respeita as propriedades de homoge-

neidade de grau 1 e aditividade:

- Homogeneidade de grau 1:

$$\mathcal{J}(\lambda\hat{\rho}) = \lambda\mathcal{J}(\hat{\rho})$$

com λ um escalar, tal que $\lambda \in \mathbb{C}$.

- Aditividade:

$$\mathcal{J}(\hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_2) = \mathcal{J}(\hat{\rho}_1) + \mathcal{J}(\hat{\rho}_2)$$

Como é linear, $\mathcal{J}(\hat{\rho})$ pode ser reescrito como $\mathcal{J}\hat{\rho}$, ou seja, como se fosse uma multiplicação de operadores, pois tal propriedade respeita a linearidade. Convém observar que se $\mathcal{J}(\hat{\rho}_1)\hat{\rho}_2 = \mathcal{J}\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2$ e se $\mathcal{J}(\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2) = \mathcal{J}\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2$, então pode levar a conclusão errônea de que $\mathcal{J}(\hat{\rho}_1)\hat{\rho}_2 = \mathcal{J}(\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2)$ que são resultados completamente diferentes, portanto é adequado nessas situações que se coloque um parênteses em torno do superoperador atuando no operador, portanto $\mathcal{J}(\hat{\rho}_1)\hat{\rho}_2 = (\mathcal{J}\hat{\rho}_1)\hat{\rho}_2$ e $\mathcal{J}(\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2) = \mathcal{J}\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2$.

Um superoperador é usado frequentemente para substituir somatórios em que $\hat{\rho}$ é seu argumento:

$$\mathcal{J}\hat{\rho} = \sum_i \hat{a}_i \hat{\rho} \hat{b}_i \quad (2.6.1)$$

com \hat{a}_i e \hat{b}_i operadores. Pode-se ver que a linearidade é respeitada aqui. Seja \mathcal{L} um superoperador, verifica-se também que se $\mathcal{J}\hat{\rho} = \mathcal{L}\hat{\rho}$, para todo $\hat{\rho}$, então $\mathcal{J} = \mathcal{L}$.

Seja a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \hat{A}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{B} \quad (2.6.2)$$

para qualquer operador \hat{A} e \hat{B} que não variam com t . A solução geral dessa equação é dada por:

$$\hat{\rho}(t) = e^{\hat{A}t} \hat{\rho}(0) e^{\hat{B}t}$$

com $\hat{\rho}(0)$ uma condição inicial qualquer. Agora, seja a equação diferencial:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \hat{A}\hat{\rho}\hat{B} \quad (2.6.3)$$

para qualquer operador \hat{A} e \hat{B} que não variam com t . Não existe solução exata para esse tipo de equação para qualquer que seja a condição inicial. É na resolução desse tipo de equação que o uso de superoperadores se torna útil. De acordo com (2.6.1) seja $\mathcal{J}\hat{\rho} = \hat{A}\hat{\rho}\hat{B}$ (notar

que tal definição é válida, pois \mathcal{J} é linear), então a equação (2.6.3) se torna:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \mathcal{J}\hat{\rho}$$

e sua solução formal pode ser dada como:

$$\hat{\rho}(t) = e^{\mathcal{J}t}\hat{\rho}(0) \quad (2.6.4)$$

com a definição usual de exponencial para o superoperador $e^{\mathcal{J}t}$:

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{J}t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{J}^n \\ \hat{\rho}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{J}^n \hat{\rho}(0) \end{aligned}$$

e aplicando várias vezes o superoperador \mathcal{J} :

$$\mathcal{J}^n \hat{\rho} = \hat{A}^n \hat{\rho} \hat{B}^n$$

que por fim resulta em:

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \hat{A}^n \hat{\rho}(0) \hat{B}^n$$

onde se vê que é impossível encontrar uma fórmula em finitos termos de funções conhecidas independentemente da condição inicial $\hat{\rho}(0)$. Para o caso específico em que $[\hat{\rho}(0), \hat{B}] = 0$ e $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, então:

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \hat{A}^n \hat{B}^n \hat{\rho}(0) = e^{\hat{A}\hat{B}t} \hat{\rho}(0)$$

Para testar a validade de (2.6.4) pode-se derivar em t a exponencial, ou seja:

$$\frac{de^{\mathcal{J}t}}{dt} = \mathcal{J}e^{\mathcal{J}t}$$

onde é usado a linearidade de \mathcal{J} para demonstrar essa igualdade, e portanto:

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \mathcal{J}e^{\mathcal{J}t}\hat{\rho}(0) = \mathcal{J}\hat{\rho}(t)$$

e está demonstrado que a solução é válida.

A mesma aplicação de \mathcal{J} pode ser usada para o caso geral:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \sum_i \hat{a}_i \hat{\rho} \hat{b}_i \equiv \mathcal{J} \hat{\rho}$$

Voltando para a equação (2.6.2), pode-se conseguir solucionar tal equação através de comutadores entre superoperadores, chamando:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \hat{\rho} &\equiv \hat{A} \hat{\rho} \\ \mathcal{B} \hat{\rho} &\equiv \hat{\rho} \hat{B} \end{aligned}$$

então:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}}{dt} &= (\mathcal{A} + \mathcal{B}) \hat{\rho} \\ \hat{\rho}(t) &= e^{(\mathcal{A} + \mathcal{B})t} \hat{\rho}(0) \end{aligned}$$

e seria interessante que $e^{(\mathcal{A} + \mathcal{B})t} = e^{\mathcal{A}t} e^{\mathcal{B}t}$, assim facilitaria a aplicação do mesmo. Para verificar a validade dessa equação, deriva-se $e^{\mathcal{A}t} e^{\mathcal{B}t}$:

$$\frac{d e^{\mathcal{A}t} e^{\mathcal{B}t}}{dt} = \mathcal{A} e^{\mathcal{A}t} e^{\mathcal{B}t} + e^{\mathcal{A}t} \mathcal{B} e^{\mathcal{B}t} = (\mathcal{A} + e^{\mathcal{A}t} \mathcal{B} e^{-\mathcal{A}t}) e^{\mathcal{A}t} e^{\mathcal{B}t}$$

notando que foi usado $e^{-\mathcal{A}t} e^{\mathcal{A}t} = 1$ (nem todo superoperador possui seu inverso). Como o comportamento do superoperador é o mesmo do operador, pode-se aplicar o teorema de Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^{\mathcal{A}t} \mathcal{B} e^{-\mathcal{A}t} = \mathcal{B} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{[\mathcal{A}, [\mathcal{A}, \dots [\mathcal{A}, \mathcal{B}] \dots]]}_{n \text{ comutadores}}$$

primeiramente analisa-se os produtos a seguir:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \mathcal{B} \hat{\rho} &= \hat{A} \hat{\rho} \hat{B} \\ \mathcal{B} \mathcal{A} \hat{\rho} &= \hat{A} \hat{\rho} \hat{B} \end{aligned}$$

e agora é possível analisar o comutador entre \mathcal{A} e \mathcal{B} :

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \hat{\rho} \equiv \mathcal{A} \mathcal{B} \hat{\rho} - \mathcal{B} \mathcal{A} \hat{\rho} = 0$$

então $e^{At}\mathcal{B}e^{-At} = \mathcal{B}$ e portanto:

$$\begin{aligned}\frac{de^{At}e^{Bt}}{dt} &= (\mathcal{A} + \mathcal{B})e^{At}e^{Bt} \\ \frac{de^{(A+B)t}}{dt} &= (\mathcal{A} + \mathcal{B})e^{(A+B)t}\end{aligned}$$

mostrando a igualdade como se pretendia fazer:

$$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$$

É possível mostrar que:

$$\begin{aligned}e^{Bt}\hat{\rho} &= \hat{\rho}e^{Bt} \\ e^{At}\hat{\rho} &= e^{At}\hat{\rho}\end{aligned}$$

e finalmente obtendo a solução exata:

$$\hat{\rho}(t) = e^{(A+B)t}\hat{\rho}(0) = e^{At}e^{Bt}\hat{\rho}(0) = e^{At}\hat{\rho}(0)e^{Bt}$$

2.6.1 Definindo o adjunto de um superoperador

Duas definições possíveis serão feitas e discutidas suas vantagens. Partindo da equação (2.6.1):

$$\mathcal{J}\hat{\rho} = \sum_i \hat{a}_i \hat{\rho} \hat{b}_i$$

- *Definição 1:*

$$\mathcal{J}^\dagger \hat{\rho} = \sum_i \hat{a}_i^\dagger \hat{\rho} \hat{b}_i^\dagger$$

- *Definição 2:*

$$\mathcal{J}^\dagger \hat{\rho} = \sum_i \hat{b}_i^\dagger \hat{\rho} \hat{a}_i^\dagger$$

Agora, as vantagens de cada definição serão discutidas, para isso os pontos utilizados serão o adjunto de $\mathcal{J}\hat{\rho}$ e de $\mathcal{J}\mathcal{L}$, e o traço $\text{Tr}\{\eta\mathcal{J}\hat{\rho}\}$, além de analisar o caso específico em que $(\mathcal{J}\hat{\rho})^\dagger = \mathcal{J}\hat{\rho}^\dagger$ que ocorre quando se trabalha com equações mestras.

Adjunto de $\mathcal{J}\hat{\rho}$

Pela equação (2.6.1):

$$(\mathcal{J}\hat{\rho})^\dagger = \sum_i \hat{b}_i^\dagger \hat{\rho}^\dagger \hat{a}_i^\dagger$$

- Pela definição 1: não é possível escrever o adjunto em termos de \mathcal{J} e \mathcal{J}^\dagger .
- Pela definição 2:

$$(\mathcal{J}\hat{\rho})^\dagger = \mathcal{J}^\dagger \hat{\rho}^\dagger$$

e se $(\mathcal{J}\hat{\rho})^\dagger = \mathcal{J}\hat{\rho}$ e $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$, então por essa definição $\mathcal{J}^\dagger = \mathcal{J}$, ou seja, \mathcal{J} é hermitiano.

Adjunto de $\mathcal{J}\mathcal{L}$

Seja \mathcal{L} um superoperador tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\hat{\rho} &= \sum_j \hat{c}_j \hat{\rho} \hat{d}_j \\ \mathcal{J}\mathcal{L}\hat{\rho} &= \sum_{i,j} \hat{a}_i \hat{c}_j \hat{\rho} \hat{d}_j \hat{b}_i \end{aligned}$$

- Pela definição 1:

$$(\mathcal{J}\mathcal{L})^\dagger \hat{\rho} = \sum_{i,j} \hat{c}_j^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{\rho} \hat{b}_i^\dagger \hat{d}_j^\dagger$$

logo

$$(\mathcal{J}\mathcal{L})^\dagger = \mathcal{L}^\dagger \mathcal{J}^\dagger$$

que é mesma conclusão que se chega com matrizes ou operadores.

- Pela definição 2:

$$(\mathcal{J}\mathcal{L})^\dagger \hat{\rho} = \sum_{i,j} \hat{b}_i^\dagger \hat{d}_j^\dagger \hat{\rho} \hat{c}_j^\dagger \hat{a}_i^\dagger$$

logo

$$(\mathcal{J}\mathcal{L})^\dagger = \mathcal{J}^\dagger \mathcal{L}^\dagger$$

Traço $\text{Tr}\{\hat{\eta}\mathcal{J}\hat{\rho}\}$

Seja $\hat{\eta}$ um operador, então:

$$\text{Tr}\{\hat{\eta}\mathcal{J}\hat{\rho}\} = \sum_i \text{Tr}\{\hat{\eta}\hat{a}_i \hat{\rho} \hat{b}_i\} = \sum_i \text{Tr}\{\hat{b}_i \hat{\eta} \hat{a}_i \hat{\rho}\} = \text{Tr}\left\{\sum_i \hat{b}_i \hat{\eta} \hat{a}_i \hat{\rho}\right\}$$

onde foi usado a comutatividade entre os traços (A.1.15), porém nenhuma das duas definições substitui o somatório por \mathcal{J} ou por \mathcal{J}^\dagger . Então, se faz uso do caso específico em equações

mestras, $(\mathcal{J}\hat{\rho})^\dagger = \mathcal{J}\hat{\rho}$ e $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$, onde todo o superoperador \mathcal{J} que satisfaz essas condições pode ser representado por:

$$\mathcal{J}\hat{\rho} = \sum_i \hat{a}_i \hat{\rho} \hat{b}_i + \hat{b}_i^\dagger \hat{\rho} \hat{a}_i^\dagger$$

substituindo no traço, obtém-se:

$$\text{Tr} \{ \hat{\eta} \mathcal{J} \hat{\rho} \} = \text{Tr} \left\{ \sum_i \left(\hat{b}_i \hat{\eta} \hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger \hat{\eta} \hat{b}_i^\dagger \right) \hat{\rho} \right\}$$

- Pela definição 1:

$$\text{Tr} \{ \hat{\eta} \mathcal{J} \hat{\rho} \} = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \mathcal{J}^\dagger \hat{\eta} \} \quad (2.6.5)$$

- Pela definição 2: não existe representação possível em termos de \mathcal{J} e \mathcal{J}^\dagger .

Depois de analisar esses três pontos, será escolhida a definição 1¹, pois além de ter uma definição mais próxima do hermitiano $\mathcal{J}\mathcal{L}$, uma representação em termos de \mathcal{J}^\dagger para o hermitiano $\mathcal{J}\hat{\rho}$ não possui tanta necessidade para o que vai ser usado nas equações mestras, e o traço é um ponto importante para a média de observáveis como vai ser mostrado mais adiante.

2.6.2 Propriedades do operador densidade reduzido

As vezes, uma equação mestra é modelada antes da mesma ser demonstrada por princípios estabelecidos. Por isso, é necessário que ela atenda algumas propriedades para que sua solução possa resultar em um operador densidade reduzido. Seja $\hat{\rho}$ o suposto operador densidade reduzido que satisfaz:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \mathcal{J}\hat{\rho} \quad (2.6.6)$$

Hermiticidade

Um operador densidade satisfaz $\hat{\rho}^\dagger(t) = \hat{\rho}(t)$ para qualquer instante t . Para verificar tal condição a partir de (2.6.6), aplica-se o hermitiano sobre essa equação:

$$\frac{d\hat{\rho}^\dagger}{dt} = (\mathcal{J}\hat{\rho})^\dagger$$

¹ Coincidentemente, verifiquei que tal definição é a mesma que a descrita por Zwanzig em 1964 [14], porém utilizando um processo matemático mais formal e rigoroso para descrever as propriedades de um superoperador (ou do inglês: “tetrads” [15]). Basicamente, defini-se um produto interno $\langle A|B \rangle = \text{Tr} \{ A^\dagger B \}$, com A e B operadores. Um superoperador \mathcal{J} possui a seguinte propriedade: $\langle \mathcal{J}A|B \rangle = \langle A|\mathcal{J}^\dagger B \rangle \quad \forall A, B$, que coincidentemente, esse \mathcal{J}^\dagger possui a mesma forma da definição 1 que sugeri no texto.

Para todo instante t , se:

$$\hat{\rho}^\dagger(t) = \hat{\rho}(t) \Leftrightarrow \frac{d\hat{\rho}^\dagger}{dt} = \frac{d\hat{\rho}}{dt} \Leftrightarrow (\mathcal{J}\hat{\rho})^\dagger = \mathcal{J}\hat{\rho}$$

dessa última igualdade, é possível ver que $(\mathcal{J}\hat{\rho})^\dagger = \mathcal{J}\hat{\rho} = \mathcal{J}\hat{\rho}^\dagger$, pois foi admitido que $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$. Então, sem admitir que $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$, se:

$$(\mathcal{J}\hat{\rho})^\dagger = \mathcal{J}\hat{\rho}^\dagger \quad \forall \hat{\rho} \Leftrightarrow \frac{d\hat{\rho}^\dagger}{dt} = \mathcal{J}\hat{\rho}^\dagger \Leftrightarrow \hat{\rho}^\dagger(t) = e^{\mathcal{J}(t-t_0)}\hat{\rho}^\dagger(t_0)$$

e de (2.6.6) as soluções ficam:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^\dagger(t) &= e^{\mathcal{J}(t-t_0)}\hat{\rho}^\dagger(t_0) \\ \hat{\rho}(t) &= e^{\mathcal{J}(t-t_0)}\hat{\rho}(t_0) \end{aligned}$$

portanto, para que essas duas equações satisfaçam $\hat{\rho}^\dagger(t) = \hat{\rho}(t)$ é necessário que para um dado instante qualquer t_0 , $\hat{\rho}^\dagger(t_0) = \hat{\rho}(t_0)$, e assim:

$$\hat{\rho}^\dagger(t) = \hat{\rho}(t) \quad \forall t \Leftrightarrow [\hat{\rho}^\dagger(t_0) = \hat{\rho}(t_0)] \cap [(\mathcal{J}\hat{\rho})^\dagger = \mathcal{J}\hat{\rho} \quad \forall \hat{\rho}]$$

Traço unitário

Um operador densidade satisfaz $\text{Tr}\hat{\rho}(t) = 1$ para qualquer instante t . Para verificar tal condição a partir de (2.6.6), aplica-se o traço sobre essa equação:

$$\frac{d\text{Tr}\hat{\rho}}{dt} = \text{Tr}\{\mathcal{J}\hat{\rho}\} = \text{Tr}\{\hat{\rho}\mathcal{J}^\dagger\mathbf{1}\}$$

onde foi usado (2.6.5).

Então, se:

$$\mathcal{J}^\dagger\mathbf{1} = 0 \Rightarrow \frac{d\text{Tr}\hat{\rho}}{dt} = 0$$

e se:

$$\frac{d\text{Tr}\hat{\rho}}{dt} = 0 \Rightarrow \text{Tr}\{\hat{\rho}(t)\mathcal{J}^\dagger\mathbf{1}\} = 0 \quad \forall t$$

seja $\{|j_n\rangle\}$ a base de autovetores do operador $\mathcal{J}^\dagger\mathbf{1}$ com autovalores j_n , então se:

$$\text{Tr}\{\hat{\rho}(t)\mathcal{J}^\dagger\mathbf{1}\} = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} j_n \rho_n(t) = 0$$

com $\rho_n(t) \equiv \langle j_n | \hat{\rho}(t) | j_n \rangle$. Como tal equação deve ser válida para todo t , inclusive para a

condição inicial $t = t_0$, então:

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_n \rho_n(t_0) = 0 \quad (2.6.7)$$

existindo a liberdade de escolher qualquer $\hat{\rho}(t_0)$, pois de acordo (2.6.6):

$$\hat{\rho}(t) = e^{\mathcal{J}(t-t_0)} \hat{\rho}(t_0)$$

portanto escolhendo, nesse conjunto de condições, de maneira arbitrária $\rho_n(t_0)$, conclui-se que $j_n = 0$ para todo n , mostrando que $\mathcal{J}^\dagger \mathbf{1} = 0$. Concluindo que:

$$\frac{d\text{Tr}\hat{\rho}(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow \text{Tr}\hat{\rho}(t) = \text{Tr}\hat{\rho}(t_0)$$

Para que seja considerado uma matriz densidade, deve satisfazer a condição $\text{Tr}\hat{\rho}(t_0) = 1$.

Logo:

$$\text{Tr}\hat{\rho}(t) = 1 \quad \forall t \Leftrightarrow [\text{Tr}\hat{\rho}(t_0) = 1] \bigcap [\mathcal{J}^\dagger \mathbf{1} = 0]$$

Semipositividade

Um operador densidade satisfaz $\langle \psi | \hat{\rho}(t) | \psi \rangle \geq 0$ para qualquer t e para todo $|\psi\rangle$ que pertence ao espaço estado de Hilbert. É possível verificar uma condição suficiente a partir de (2.6.6). Usa-se a notação $\eta \geq 0$ para indicar que um operador é semipositivo definido.

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &= e^{\mathcal{J}(t-t_0)} \hat{\rho}(t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \mathcal{J}^n \hat{\rho}(t_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle \psi | \hat{\rho}(t) | \psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \langle \psi | \mathcal{J}^n \hat{\rho}(t_0) | \psi \rangle \end{aligned}$$

Se

$$[\mathcal{J}\eta \geq 0 \quad \forall (\eta \geq 0)] \bigcap [\hat{\rho}(t_0) \geq 0 \text{ com } t_0 \leq t] \Rightarrow \hat{\rho}(t) \geq 0$$

essa é uma condição suficiente (e não necessária). Sua demonstração é a seguinte, se:

$$[\mathcal{J}\eta \geq 0 \quad \forall (\eta \geq 0)] \bigcap [\hat{\rho}(t_0) \geq 0 \text{ com } t_0 \leq t] \Rightarrow \mathcal{J}\hat{\rho}(t_0) \geq 0 \Rightarrow \mathcal{J}^2\hat{\rho}(t_0) \geq 0 \Rightarrow \mathcal{J}^n\hat{\rho}(t_0) \geq 0$$

e como $t - t_0 \geq 0$, então $\hat{\rho}(t) \geq 0$.

2.6.3 Média sobre o operador densidade reduzido

A média de um observável $\hat{A} \equiv \hat{A}(t)$, na representação de Schrödinger, sobre um ensemble de sistemas no estado $|\psi(t)\rangle$ pode ser dado pelo Teorema de Ehrenfest:

$$\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = -\langle\mathcal{H}\hat{A}\rangle + \left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle \quad (2.6.8)$$

com $\langle\hat{A}\rangle(t) = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$ e \mathcal{H} o superoperador evolução unitária:

$$\mathcal{H}\hat{A} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{A}] \quad (2.6.9)$$

com \hat{H} o Hamiltoniano do sistema. Tal equação é útil quando se conhece apenas o estado inicial do sistema $|\psi(0)\rangle$ (ou a média inicial $\langle\hat{A}\rangle(0)$) a evolução temporal do mesmo é complicada, e o produto interno $\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$ gera muitas contas. É possível demonstrar a partir dessa equação relações clássicas, por exemplo, para o caso geral em que uma partícula de massa m está sob a ação de um potencial $\hat{V}(\hat{x}, t)$, o operador hamiltoniano é dado por:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x}, t)$$

e deseja-se saber a média da posição da partícula $\langle\hat{x}\rangle(t)$, então:

$$\frac{d\langle\hat{x}\rangle}{dt} = -\frac{1}{i\hbar} \langle[\hat{H}, \hat{x}]\rangle + \left\langle\frac{\partial\hat{x}}{\partial t}\right\rangle$$

na notação de Schrödinger:

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{x}] &= \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{x}\right] = -\frac{i\hbar}{m}\hat{p} \\ \frac{\partial\hat{x}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

e portanto:

$$\frac{d\langle\hat{x}\rangle}{dt} = \frac{\langle\hat{p}\rangle}{m}$$

que é a equação clássica que define o momento linear cinético. Fazendo o mesmo raciocínio para calcular $\langle\hat{p}\rangle(t)$, então:

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{p}] &= [\hat{V}(\hat{x}, t), \hat{p}] = i\hbar\frac{\partial\hat{V}}{\partial\hat{x}} \equiv -i\hbar\hat{F}(\hat{x}, t) \\ \frac{\partial\hat{p}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

onde $\hat{F}(\hat{x}, t)$ representa o operador força, e portanto:

$$\frac{d\langle\hat{p}\rangle}{dt} = \langle\hat{F}\rangle$$

que é a equação clássica que define força, essa conclusão apoia o princípio da correspondência.

Agora, é possível fazer o mesmo quando se trata de um ensemble misto, ainda mais, é possível fazer o mesmo quando se conhece apenas a equação mestra de parte do ensemble, por exemplo, um ensemble sistema+reservatório em que se conhece apenas o operador densidade reduzido do sistema, $\hat{\rho}$. Então, deseja-se encontrar a média de um observável $\hat{A} \equiv \hat{A}(t)$, na representação de Schrödinger, que como foi definido:

$$\langle\hat{A}\rangle(t) = \text{Tr}\{\hat{\rho}(t)\hat{A}(t)\} \quad (2.6.10)$$

e o operador $\hat{\rho}$, respeita a seguinte equação mestra:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \mathcal{J}\hat{\rho}$$

onde foi definido $\hat{\rho} \equiv \hat{\rho}(t)$ para simplificar. Multiplicando ambos os lados da equação mestra por \hat{A} :

$$\hat{A}\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \hat{A}\mathcal{J}\hat{\rho}$$

e como \hat{A} pode variar com o tempo, então se substitui a seguinte igualdade:

$$\hat{A}\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{A}\hat{\rho}) - \frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\hat{\rho}$$

obtendo:

$$\frac{d(\hat{A}\hat{\rho})}{dt} = \hat{A}\mathcal{J}\hat{\rho} + \frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\hat{\rho}$$

Traçando ambos os lados da equação:

$$\frac{d\text{Tr}\{\hat{A}\hat{\rho}\}}{dt} = \text{Tr}\{\hat{A}\mathcal{J}\hat{\rho}\} + \text{Tr}\left\{\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\hat{\rho}\right\}$$

como a notação usada é a de Schrödinger, os vetores da base não variam com o tempo e assim a função traço pode comutar com a derivada temporal, ou seja:

$$\text{Tr}\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}\text{Tr}$$

Usando (2.6.10) e (2.6.5) se obtém uma equação parecida com Teorema de Ehrenfest:

$$\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \langle\mathcal{J}^\dagger\hat{A}\rangle + \left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle \quad (2.6.11)$$

Para o caso específico em que a evolução é unitária $\mathcal{J} = \mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}\hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]$$

então se verifica que o superoperador \mathcal{H} é anti-hermitiano:

$$\mathcal{H}^\dagger = -\mathcal{H}$$

pois $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$ e $(\frac{1}{i\hbar})^* = -\frac{1}{i\hbar}$, e portanto a média de um observável \hat{A} , usando sobre esse ensemble é:

$$\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = -\langle\mathcal{H}\hat{A}\rangle + \left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle$$

que aparentemente é idêntica a (2.6.8), porém, aqui, o ensemble é misto.

2.7 Espaço de Fase

Espaço de fase é um espaço onde todos os estados possíveis de um sistema são representados por um ponto de coordenadas posição×momento. Para o caso quântico, as coordenadas do ponto são (posição média)×(momento médio), ou seja, abscissa representa a posição média e a ordenada o momento médio. Costuma-se representar a incerteza (desvio padrão) no espaço de fase em torno da vizinhança do ponto que representa o estado possível. Para conseguir fazer isso em todas as direções é necessário representar o mesmo ponto em coordenadas rotacionadas.

Seja Q_θ um eixo que cruza a origem dos eixos da posição X e do momento P e que faz um ângulo θ com o eixo X . Classicamente, se um ponto no espaço de fase possui coordenada x em X e coordenada p em P , então esse ponto terá coordenada q_θ em Q_θ que satisfaz a relação:

$$q_\theta = x \cos \theta + p \sin \theta$$

onde $q_0 = x$ e $q_{\frac{\pi}{2}} = p$, e com $\theta \in [0, \pi[$. Quanticamente, defini-se o seguinte operador

$$\hat{q}_\theta = \hat{x} \cos \theta + \hat{p} \sin \theta$$

onde a média sobre um ensemble irá representar o valor da coordenada, e para evitar problemas com unidades de medida, utiliza-se transformações que tornam adimensionais as coordenadas (Ver Sub. 2.3.6) através do uso das *quadraturas*:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{2} \\ \hat{p} &= \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{2i}\end{aligned}$$

assim a relação de comutação e a relação de incerteza ficam:

$$\begin{aligned}[\hat{x}, \hat{p}] &= \frac{i}{2} \\ \sigma_x \sigma_p &\geq \frac{1}{4}\end{aligned}$$

O conjunto de operadores $\{\hat{q}_\theta\}$ obedece a seguinte relação de comutação:

$$[\hat{q}_\theta, \hat{q}_{\theta'}] = \frac{i}{2} \sin(\theta' - \theta)$$

observando que se $\Delta\theta \equiv \theta' - \theta = \frac{\pi}{2}$, o comutador se iguala a $\frac{i}{2}$, que é a comutação canônica.

A incerteza em torno do ponto (x, p) é dada pelo desvio padrão, σ_θ , do operador \hat{q}_θ , assim:

$$\sigma_\theta^2 = \sigma_x^2 \cos^2 \theta + (\langle\{\hat{x}, \hat{p}\}\rangle - 2\langle\hat{x}\rangle\langle\hat{p}\rangle) \sin \theta \cos \theta + \sigma_p^2 \sin^2 \theta \quad (2.7.1)$$

onde $\{\hat{x}, \hat{p}\} = \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}$. Notar que o segundo termo se trata da função correlação entre a posição e o momento.

Para o caso de um oscilador harmônico simples com estado coerente $|\alpha\rangle$ (Ver Sub. 2.3.6), a média da posição e do momento é dado por:

$$\begin{aligned}\langle\hat{x}\rangle &= \Re\{\alpha\} \\ \langle\hat{p}\rangle &= \Im\{\alpha\} \\ \langle\{\hat{x}, \hat{p}\}\rangle &= 2\Re\{\alpha\}\Im\{\alpha\}\end{aligned}$$

mostrando que o ponto possui coordenadas retangulares $(\Re\{\alpha\}, \Im\{\alpha\})$, e coordenadas polares

$(|\alpha\rangle, \xi)$, onde $\alpha = |\alpha| e^{i\xi}$. As incertezas são dadas por

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{2} \\ \sigma_p &= \frac{1}{2} \\ \sigma_x \sigma_p &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

mostrando que a relação de incerteza é mínima. A incerteza em torno de toda a vizinhança pode ser calculada através de (2.7.1):

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}$$

que mostra uma circunferência de diâmetro $\frac{1}{2}$. Na figura abaixo é mostrado um exemplo de espaço de fase de um oscilador harmônico em que a seta indica o centro da circunferência de diâmetro $\frac{1}{2}$ que representa a incerteza em torno do ponto de coordenadas $(3, 3)$. Conforme o tempo passa, o ponto irá girar em torno da origem mantendo o mesmo raio de comprimento $3\sqrt{2}$.

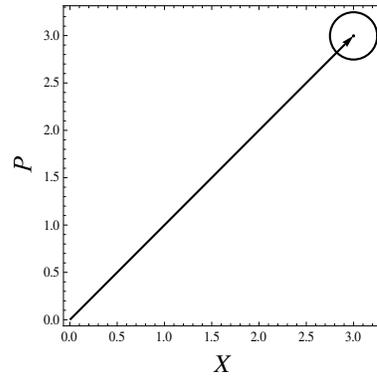


Figura 2.1: Espaço de fase de uma partícula no estado coerente $|\alpha = 3 + 3i\rangle$, onde o ponto $(3,3)$ representa a média da quadratura da posição no eixo X (parte Real de α) e a média da quadratura do momento no eixo P (parte Imaginária de α), respectivamente. Um diâmetro da circunferência concêntrica ao ponto $(3,3)$, que possui comprimento 0.5 e faz um ângulo θ com o eixo X, representa a incerteza da medida do operador $\hat{q}_\theta = \hat{x} \cos \theta + \hat{p} \sin \theta$ de uma partícula no estado coerente $|\alpha\rangle$.

Capítulo 3

Interação entre um espelho móvel e a pressão de radiação

A interação mecânica entre um espelho móvel e a radiação de um campo é um tópico importante quando se trata da realização de experimentos de detecção de ondas gravitacionais em interferômetros ópticos de alta precisão, onde a pressão dessa radiação não pode ser ignorada [16, 17, 18]. O estudo dessa interação não é usado só para o cálculo de flutuações quânticas, como as causadas pela gravidade, esse estudo é visto como um sistema fundamental na óptica quântica, pois dele dependem previsões como a emissão de fótons de um espelho móvel [19], o surgimento da pressão do vácuo pelo efeito Casimir [20, 21] e o efeito bloqueio do modo vácuo [22]. Além de previsões, existem experimentos indicando que a pressão de radiação e um espelho móvel podem ser usados para gerar luz comprimida (squeezed light)[23] e realizar medições quânticas sem demolição (quantum nondemolition measurement)[24].

Uma questão fundamental em relação ao sistema espelho móvel+campo é o formalismo matemático e o rigor com relação ao hamiltoniano. Nesse capítulo será apresentado tal hamiltoniano, porém no regime não relativístico, mostrando a existência de um acoplamento entre o espelho e a radiação, e o surgimento da energia de Casimir. Primeiramente, será feito o formalismo clássico identificando os operadores posição e momento canônico, para depois quantizar e realizar aproximações chegando a um hamiltoniano composto exclusivamente de apenas um modo do campo e seu acoplamento de primeira ordem com o espelho. Esse capítulo será baseado na referência [25].

3.1 Equações do movimento

Começando com formalismo clássico, seja uma cavidade óptica em uma dimensão ilustrada na Figura 3.1, onde o campo se propaga apenas na coordenada denotada por x , e com espelhos

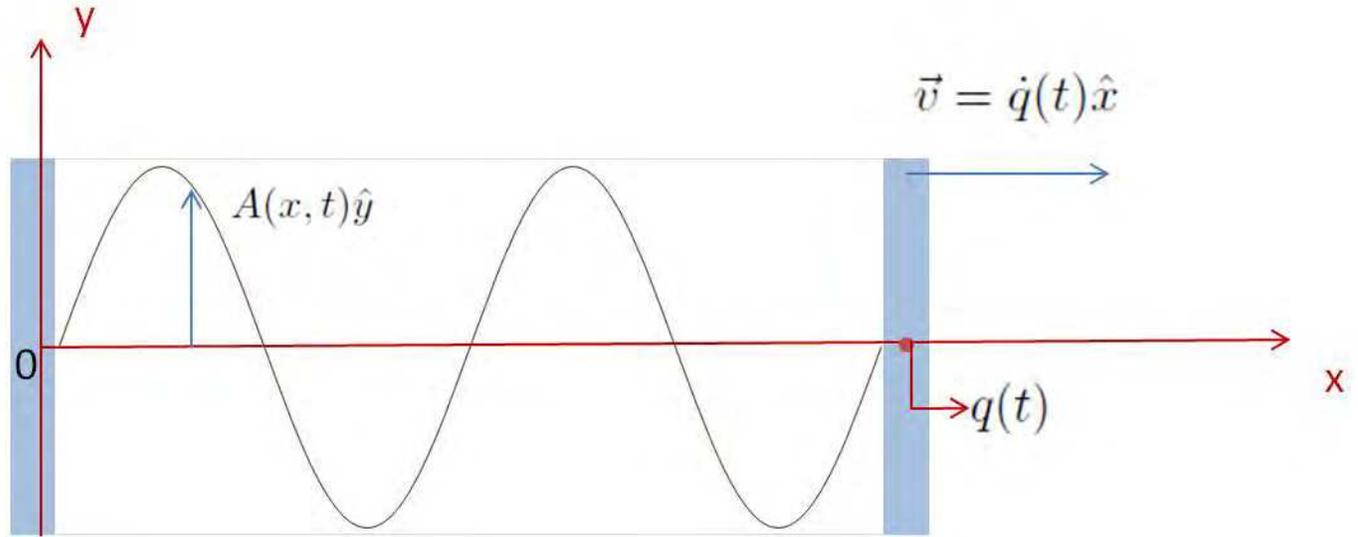


Figura 3.1: Cavidade óptica com um espelho fixo posicionado em $x = 0$ e um espelho móvel posicionado em $x = q(t)$, com t a variável temporal. Os espelhos são planos, paralelos entre si e refletem totalmente o campo eletromagnético que está aprisionado entre os espelhos, e é representado pelo potencial vetor que é perpendicular ao eixo x e possui componente $A(x, t)\hat{y}$. Devido à pressão de radiação o espelho móvel percorre o eixo x com velocidade $\vec{v} = \dot{q}(t)\hat{x}$.

de coeficiente de reflectância igual a 1, ou seja, espelhos perfeitos. Um dos espelhos está fixo na posição $x = 0$ e o outro, com massa m , se move no eixo x , sob a ação de um poço de potencial $V(q)$, com $q \equiv q(t)$ sua posição em função do tempo t , e com $\vec{v} = \dot{q}(t)\hat{x}$ sua velocidade. O potencial está restrito a:

$$V(q) = +\infty \text{ para } q \leq 0 \quad (3.1.1)$$

assim um espelho não colide com o outro. O espelho e o campo constituem um sistema conservativo. Seja $A(x, t)$ o potencial vetor do campo na cavidade, que deve estar restrito a condição de contorno:

$$A(x, t) = 0 \text{ para } x \leq 0 \text{ e } x \geq q(t) \quad (3.1.2)$$

já que o campo eletromagnético está relacionado com o potencial vetor e deve ser nulo do lado de fora da cavidade, indicando que não há transmissão, pois o coeficiente de reflectância é igual a 1.

Como a densidade de carga dentro da cavidade é nula e o campo se propaga no vácuo, então o potencial vetor deve respeitar a equação de onda obtida através das equações de

Maxwell (adotando a velocidade da luz igual a uma unidade, $c = 1$):

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.1.3)$$

onde essa equação é respeitada para um referencial em repouso em relação ao espelho fixo em $x = 0$.

A equação do movimento não-relativístico do espelho é dada por:

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A(x, t)}{\partial t} \right)^2 \Big|_{x=q(t)} \quad (3.1.4)$$

onde o segundo termo da equação é derivado da pressão de radiação. Portanto, se o potencial vetor, em $x = q$, varia de um instante para outro, então o campo aplica uma força sobre o espelho que é sempre positiva e dirigida para fora da cavidade (de $x = 0$ para $x = q$).

O potencial vetor, entre os pontos $x = 0$ a $x = q$, pode ser expandido numa série de Fourier em que se usa apenas uma série de senos. Tal expansão será feita da seguinte maneira, primeiro define-se uma função ímpar e periódica $f(z, t)$:

$$f(z, t) = \begin{cases} A(z, t) & \text{para } 0 \leq z \leq q \\ -A(-z, t) & \text{para } -q \leq z < 0 \end{cases}$$

e com

$$f(z + 2qn, t) = f(z, t) \text{ para } n \in \mathbb{Z}$$

Essa função é contínua, pois de acordo com (3.1.2) $A(0, t) = A(q(t), t) = 0$. A expansão será:

$$f(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) \sin\left(\frac{k\pi z}{q}\right) + d_k(t) \cos\left(\frac{k\pi z}{q}\right)$$

os coeficientes que multiplicam as funções senos e cossenos são:

$$\begin{aligned} c_k(t) &= \frac{1}{q(t)} \int_{-q(t)}^{q(t)} f(z, t) \sin\left(\frac{k\pi z}{q}\right) dz = \frac{2}{q(t)} \int_0^{q(t)} A(z, t) \sin\left(\frac{k\pi z}{q}\right) dz \\ d_k(t) &= \frac{1}{q(t)} \int_{q(t)}^{-q(t)} f(z, t) \cos\left(\frac{k\pi z}{q}\right) dz = 0 \end{aligned}$$

A amplitude do modo k é definida como:

$$Q_k(t) \equiv \sqrt{\frac{2}{q(t)}} \int_0^{q(t)} A(z, t) \sin\left(\frac{k\pi z}{q(t)}\right) dz$$

Como $f(z, t) = A(z, t)$ para $0 \leq z \leq q(t)$, então:

$$A(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) \sqrt{\frac{2}{q(t)}} \sin\left(\frac{k\pi x}{q(t)}\right) \quad (3.1.5)$$

notar que $\sqrt{\frac{2}{q(t)}} \sin\left(\frac{k\pi x}{q(t)}\right)$ são funções ortonormais e também são as autofunções de uma partícula aprisionada num poço de potencial infinito, e o valor k identifica um modo específico do campo eletromagnético, ou seja, o campo dentro da cavidade é uma sobreposição de ondas em que apenas algumas frequências são permitidas:

$$\omega_k(q) = \frac{k\pi}{q} \quad (3.1.6)$$

Essas frequências não possuem unidade de $\frac{1}{\text{metro}}$, pois foi definido que a velocidade da luz é $c = 1$. Ao passar para a unidade de $\frac{1}{\text{segundo}}$, a frequência do modo k passa a ser :

$$\omega_k(q) = \frac{k\pi c}{q}$$

com $c \approx 3 \times 10^8 \text{m/s}$.

Observando que não é possível medir apenas uma frequência de campo nessa cavidade, mas é possível que um modo seja muito mais intenso que outros, permitindo a medição de uma única frequência.

Os graus de liberdade do potencial vetor são as amplitudes de cada modo e a posição do espelho, que podem ser vistas como coordenadas e que precisam satisfazer as equações (3.1.4) e (3.1.3). Substituindo (3.1.5) em (3.1.3) e em (3.1.4), e usando a ortonormalidade das funções senos, obtém-se as equações clássicas do movimento:

$$\ddot{Q}_k = -\omega_k^2(q)Q_k + 2\frac{\dot{q}}{q} \sum_j g_{kj} \dot{Q}_j + \frac{\ddot{q}q - \dot{q}^2}{q^2} \sum_j g_{kj} Q_j + \frac{\dot{q}^2}{q^2} \sum_{jl} g_{jk} g_{jl} Q_l \quad (3.1.7)$$

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} + \frac{1}{q} \sum_{kj} (-1)^{k+j} \omega_k(q)\omega_j(q)Q_k Q_j \quad (3.1.8)$$

com os coeficientes adimensionais:

$$g_{kj} = \begin{cases} (-1)^{k+j} \frac{2kj}{j^2 - k^2} & \text{para } k \neq j \\ 0 & \text{para } k = j \end{cases} \quad (3.1.9)$$

3.2 Hamiltoniana clássica e sua quantização

A partir das equações do movimento (3.1.7), e (3.1.8) é possível construir a função Lagrangiana L :

$$L(q, \dot{q}, Q_k, \dot{Q}_k) = \frac{1}{2} \sum_k \left[\dot{Q}_k - \omega_k^2(q) Q_k^2 \right] + \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) - \frac{\dot{q}}{q} \sum_{jk} g_{kj} \dot{Q}_k Q_j + \frac{\dot{q}^2}{2q^2} \sum_{jkl} g_{kj} g_{kl} Q_l Q_j \quad (3.2.1)$$

sendo que essa lagrangiana substitui com apenas uma equação todo o conjunto de equações do movimento. A função Hamiltoniana associada a L é dada por:

$$H(q, p, Q_k, P_k) = p\dot{q} + \sum_k P_k \dot{Q}_k - L(q, \dot{q}, Q_k, \dot{Q}_k) \quad (3.2.2)$$

sendo que p e P_k são os momentos canônicos conjugados a q e Q_k , respectivamente, e são obtidos através da lagrangiana pela definição:

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} \\ p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \end{aligned}$$

chegando a:

$$P_k = \dot{Q}_k - \frac{\dot{q}}{q} \sum_j g_{kj} Q_j \quad (3.2.3)$$

$$p = m\dot{q} - \frac{1}{q} \sum_{jk} g_{kj} \dot{Q}_k Q_j + \frac{\dot{q}}{q^2} \sum_{jkl} g_{kj} g_{kl} Q_l Q_j \quad (3.2.4)$$

isolando \dot{Q}_k em (3.2.3) e substituindo em (3.2.4):

$$p = m\dot{q} - \frac{1}{q} \sum_{jk} g_{kj} P_k Q_j \quad (3.2.5)$$

agora isolando \dot{Q}_k em (3.2.3) e \dot{q} em (3.2.5) e substituindo na lagrangiana (3.2.1) e depois substituindo em (3.2.2), obtém-se a hamiltoniana clássica do sistema:

$$H = \frac{(p + \Gamma)^2}{2m} + V(q) + \frac{1}{2} \sum_k \left[P_k^2 + \omega_k^2(q) Q_k^2 \right] \quad (3.2.6)$$

com

$$\Gamma \equiv \frac{1}{q} \sum_{jk} g_{kj} P_k Q_j$$

observando que o primeiro termo em (3.2.6) se refere a energia cinética do espelho, sendo que p não é o momento cinético do mesmo ($m\dot{q}$). O último termo se refere à energia mecânica de uma partícula submetida à ação de um potencial harmônico, e que é o mesmo comportamento que a amplitude de cada modo da radiação irá descrever.

Como foi dito, essa é a solução clássica e a partir das equações do movimento (3.1.8) e (3.1.7) é possível determinar como as amplitudes, Q_k , e a posição do espelho vão variar com o tempo. O hamiltoniano foi desenvolvido para efetuar a transformação para a mecânica quântica, através do princípio de correspondência, ou seja, as coordenadas e momentos canônicos passam a ser interpretados como operadores, em que devem satisfazer a relação de comutação canônica:

$$\begin{aligned} [\hat{q}, \hat{Q}_j] &= [\hat{q}, \hat{P}_k] = [\hat{p}, \hat{Q}_j] = [\hat{p}, \hat{P}_k] = 0 \\ [\hat{q}, \hat{p}] &= i\hbar \quad [\hat{Q}_j, \hat{P}_k] = i\hbar \delta_{jk} \end{aligned}$$

os comutadores nulos representam operadores de espaços de Hilbert diferentes, por exemplo, o comutador de um operador do modo k com um operador do espelho deve ser nulo, pois representam objetos diferentes, e mesmo o comutador de modos diferentes do campo são nulos, no hamiltoniano clássico esses modos são considerados graus de liberdade, e no quântico operadores de espaços de Hilbert diferentes.

De maneira a especificar o estado quântico do campo na cavidade no espaço de Fock, define-se os operadores de criação e aniquilação dos modos do campo dependentes do comprimento da cavidade:

$$\hat{a}_k(\hat{q}) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\hat{\omega}_k(\hat{q})}} \left[\hat{\omega}_k(\hat{q})\hat{Q}_k + i\hat{P}_k \right] \quad (3.2.7)$$

$$\hat{a}_k^\dagger(\hat{q}) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\hat{\omega}_k(\hat{q})}} \left[\hat{\omega}_k(\hat{q})\hat{Q}_k - i\hat{P}_k \right] \quad (3.2.8)$$

Para uma dada posição do espelho, q , os vetores que constituem uma base no espaço de Fock para o sistema são dados por $|\{n\}, q\rangle$, onde $\{n\} \equiv \{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$ representando o conjunto do número de fótons em cada modo, n_k :

$$\begin{aligned} \hat{a}_k^\dagger(\hat{q})\hat{a}_k(\hat{q}) |\{n\}, q\rangle &= n_k |\{n\}, q\rangle \\ \hat{q} |\{n\}, q\rangle &= q |\{n\}, q\rangle \end{aligned}$$

Portanto, esse conjunto de estados formam uma base ortonormal completa, sendo que qualquer estado do sistema, $|\psi\rangle$, pode ser expresso como uma sobreposição da projeção sobre esses estados:

$$|\psi\rangle = \sum_{\{n\}} \int_0^\infty dq \langle \{n\}, q | \psi \rangle |\{n\}, q\rangle$$

notando que $q > 0$, devido a (3.1.1).

O operador hamiltoniano quântica fica:

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p} + \hat{\Gamma}(\hat{q}))^2}{2m} + \hat{V}(\hat{q}) + \hbar \sum_k \hat{\omega}_k(\hat{q}) \left[\hat{a}_k^\dagger(\hat{q}) \hat{a}_k(\hat{q}) + \frac{1}{2} \right] \quad (3.2.9)$$

onde

$$\hat{\Gamma}(\hat{q}) = \frac{i\hbar}{2\hat{q}} \sum_{kj} g_{kj} \sqrt{\frac{k}{j}} \left[\hat{a}_k^\dagger(\hat{q}) \hat{a}_j^\dagger(\hat{q}) - \hat{a}_k(\hat{q}) \hat{a}_j(\hat{q}) + \hat{a}_k^\dagger(\hat{q}) \hat{a}_j(\hat{q}) - \hat{a}_j^\dagger(\hat{q}) \hat{a}_k(\hat{q}) \right] \quad (3.2.10)$$

A energia do vácuo que aparece em (3.2.9) diverge. Classicamente, essa divergência não acontece, pois a energia do vácuo de cada modo é dada como nula, e portanto a soma da energia do vácuo de todos os modos continua nula. Quanticamente, o estado de menor energia que um modo do campo pode estar é o vácuo, e essa energia, diferentemente do modelo clássico, é igual a $\frac{1}{2}\hbar\omega_k$, que é muito pequena quando comparada a energia de um estado quase-clássico do modo k do campo, ou seja, estado no qual existem muitos fótons, tornando desprezível a contribuição do vácuo desse modo.

O campo confinado é composto por uma soma de infinitos modos, e de acordo com o modelo quântico, mesmo que não haja fótons na cavidade, existe energia do vácuo de cada modo, que ao ser somada diverge para o infinito, e essa energia é responsável por uma pressão sobre as paredes da cavidade, forçando-a a expandir. E ainda de acordo com o modelo quântico, fora da cavidade o vácuo pode ser tratado como um campo composto por infinitos modos, no qual nenhum dos modos possui fótons, e a energia do vácuo de cada modo é somada e diverge para o infinito, sendo essa energia responsável por uma pressão que comprime as paredes da cavidade. A soma da energia do vácuo do campo confinado com a energia do vácuo do lado externo da cavidade resulta num valor finito \hat{E}_{Casimir} , descrito na referência [26], e que, por fim, comprime a cavidade. Observando que quanto mais próximo o espelho móvel e o espelho fixo estão um do outro maior é a pressão sobre a cavidade. Esse fenômeno, previsto teoricamente, é chamado de Efeito Casimir-Polder, que foi proposto pela primeira vez pelos físicos holandeses Hendrik B. G. Casimir e Dirk Polder em 1948 [27] para explicar a força de atração entre placas paralelas a uma distância muito pequena. Após tais

considerações, o Hamiltoniano fica:

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p} + \hat{\Gamma}(\hat{q}))^2}{2m} + \hat{V}(\hat{q}) + \hbar \sum_k \hat{\omega}_k(\hat{q}) \hat{a}_k^\dagger(\hat{q}) \hat{a}_k(\hat{q}) + \hat{E}_{\text{Casimir}} \quad (3.2.11)$$

o valor da Energia de Casimir é muito baixo comparado com a energia do campo que possui, em geral, muitos fótons.

3.3 Aproximação linear

Classicamente, quando o campo não está em contato com o espelho, o mesmo encontra-se parado numa posição de equilíbrio ($q(0) = q_0$). Após o contato com o campo, o espelho começa a se movimentar. Se o campo atua somente como uma perturbação sobre o espelho, então o espelho oscila em torno da posição de equilíbrio, ou seja $q(t) \approx q_0$. Quanticamente, na representação de Heisenberg, o operador posição do espelho em função do tempo pode ser aproximado para $\hat{q}(t) \approx q_0 \mathbf{1}$, com q_0 escalar. Como os operadores de (3.2.11) estão na notação de Schrödinger, \hat{q} não varia com o tempo, mas pode-se dizer que ao medir a posição do espelho num instante t , ela estará muito próxima a q_0 . Definindo o operador deslocamento do espelho, \hat{x}_m :

$$\hat{x}_m = \hat{q} - q_0 \mathbf{1}$$

é possível expandir todos os operadores que estão em função de \hat{q} em torno de \hat{x}_m e descartar termos de ordem maior que 2, ou seja, descartar $\mathcal{O}(\hat{x}_m^2)$, pois está implícito que serão observados apenas valores pequenos de \hat{x}_m (ou seja, o módulo dos autovalores de \hat{x}_m que forem observados devem respeitar $|x_m| \ll q_0$). Então, por (3.1.6), (3.2.7) e (3.2.10), obtém-se:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_k(\hat{q}) &= \frac{k\pi}{(\hat{x}_m + q_0 \mathbf{1})} \approx \omega_k \left(\mathbf{1} - \frac{\hat{x}_m}{q_0} \right) \\ \hat{a}_k(\hat{q}) &\approx \hat{a}_k - \frac{\hat{x}_m}{2q_0} \hat{a}_k^\dagger \\ \hat{\Gamma}(\hat{q}) &\approx \hat{\Gamma}_0 \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}\omega_k &= \frac{k\pi}{q_0} \\ \hat{a}_k &= \hat{a}_k(q_0\mathbf{1}) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k}} \left[\omega_k \hat{Q}_k + i\hat{P}_k \right] \\ \hat{\Gamma}_0 &= \hat{\Gamma}(q_0\mathbf{1}) = \frac{i\hbar}{2q_0} \sum_{kj} g_{kj} \sqrt{\frac{k}{j}} \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_k \hat{a}_j + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j - \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \right]\end{aligned}$$

Substituindo essas aproximações no hamiltoniano (3.2.11), e depois fazendo uma transformação unitária tal que o novo hamiltoniano do sistema seja:

$$\hat{H}' = \hat{T}^\dagger \hat{H} \hat{T}$$

com

$$\hat{T} = \exp \left[\frac{i\hat{x}_m \hat{\Gamma}_0}{\hbar} \right]$$

então, o novo hamiltoniano fica:

$$\hat{H}' \approx \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{u}(\hat{x}_m) + \hbar \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \hat{x}_m \hat{\mathcal{E}}_0 \quad (3.3.1)$$

onde

$$\hat{u}(\hat{x}_m) = \hat{V}(\hat{q}) + \hat{E}_{\text{Casimir}}$$

$$\hat{\mathcal{E}}_0 = \frac{\hbar}{2q_0} \sum_{kj} (-1)^{k+j} \sqrt{\omega_k \omega_j} \left(\hat{a}_k \hat{a}_j + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \right)$$

O momento canônico \hat{p} em \hat{H}' se torna o mesmo que o momento cinético. O termo de interação espelho-campo é da forma $\hat{x}_m \hat{\mathcal{E}}_0$ e é análogo a energia potencial de interação dipolo elétrico $x\mathcal{E}$ com x a distância entre a carga positiva e a negativa de mesmo módulo, e com \mathcal{E} a componente do campo elétrico num dado ponto do espaço, que é paralela a linha que liga as cargas.

O campo na cavidade possui vários modos sobrepostos, e para o caso específico em que existe um modo que é muito mais intenso que os outros, ou seja, quando existe um modo k em que sua energia é muito maior que a dos outros modos, então pode ser feita a aproximação de (3.3.1) para o Hamiltoniano citado na referencia [18] através da *aproximação de onda girante*

(Rotating Wave Approximation):

$$\hat{H}' \approx \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{u}(\hat{x}_m) + \hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \frac{\hbar\omega_k}{q_0} \hat{x}_m \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \quad (3.3.2)$$

É necessário ainda que o movimento do espelho seja adiabaticamente lento para que ele escoe a perda de energia do modo k para outros modos, mantendo assim a condição específica de que o modo k é muito mais intenso que os outros modos. Mais rigorosamente, a frequência do movimento do espelho, ω_m , deve ser muito menor do que a frequência do modo fundamental do campo $\omega_1 = \pi/q_0$, essa condição recebe o nome de *regime óptico*.

Capítulo 4

Teoria Quântica de Amortecimento de Fase

Quando em contato com um reservatório, o estado de um sistema pode sofrer amortecimento do tipo amplitude (escoamento de energia para o reservatório) ou do tipo fase (perda de coerência do sistema), sendo que a temperatura do reservatório pode estar relacionada com o amortecimento. Nesse capítulo, inicialmente, será descrito a evolução temporal, através de exemplos desenvolvidos na referência [28], de um sistema sujeito a amortecimento de amplitude ou sujeito a amortecimento de fase. Depois será mostrado um desenvolvimento geral, onde a equação mestra do operador densidade reduzido do sistema será resolvida até a segunda ordem. Na última seção, será feita a aproximação Markoviana sobre um reservatório específico caracterizado por uma coleção de osciladores e um potencial de interação específico entre sistema e reservatório. A referência [29] é utilizada em conjunto com [30] para mostrar como desenvolver a equação mestra e resolver as funções de correlação.

4.1 Amortecimento de Amplitude

A descrição de um sistema que *dissipa energia* é feita pela operação conhecida como *amortecimento de amplitude* (do inglês: amplitude damping). Algumas situações que a energia é dissipada são: um átomo que emite espontaneamente um fóton, um sistema com spin à alta temperatura que se aproxima do equilíbrio com o ambiente, e um fóton em um interferômetro ou cavidade que está sujeito ao espalhamento ou atenuação.

Para ilustrar essa operação, suponha um oscilador harmônico (sistema principal) que interage com o ambiente, modelado como outro oscilador harmônico, através do Hamiltoniano

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{b}^\dagger\hat{a})$$

onde \hat{a} e \hat{b} são os operadores aniquilação do sistema principal e do ambiente. Seja o estado inicial do sistema todo em $t = 0$ é $|\psi(0)\rangle = (c_0 |0\rangle_A + c_1 |1\rangle_A) \otimes |0\rangle_B$, com $|0\rangle_A$ e $|1\rangle_A$ os autoestados de $\hat{a}^\dagger \hat{a}$, e o estado inicial do ambiente é o estado vácuo $|0\rangle_B$.

A evolução do estado do sistema é dada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^n}{n!} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a})^n (c_0 |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + c_1 |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B)$$

com

$$(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a})^n |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B = \begin{cases} |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B & \text{para } n = 0 \\ 0 & \text{para } n \geq 1 \end{cases}$$

$$(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a})^n |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B = \begin{cases} |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B & \text{para } n \text{ ímpar} \\ |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

e portanto

$$|\psi(t)\rangle = c_0 |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + c_1 (\cos(\omega t) |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B - i \sin(\omega t) |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B)$$

Lembrando que esse estado foi obtido levando-se em conta apenas o Hamiltoniano de interação, sendo que Hamiltoniano que trata cada um dos sistemas de maneira individual foi ignorado nesse processo com o fim de ilustrar apenas.

A matriz densidade do sistema principal é dada pelo traço sobre o ambiente do operador densidade do sistema todo:

$$\hat{\rho}_A(t) = \text{Tr}_B(|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|) = \begin{bmatrix} |c_0|^2 + |c_1|^2 \sin^2(\omega t) & c_0 c_1^* \cos(\omega t) \\ c_0^* c_1 \cos(\omega t) & |c_1|^2 \cos^2(\omega t) \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

Conforme o tempo passa, o sistema principal perde energia (fótons) para o ambiente, que pode ser observado pela amplitude da componente $|1\rangle_A \langle 1|$ que é $|c_1|^2 \cos^2(\omega t)$, ou seja, para $t = \frac{\pi}{2\omega}$ toda a energia se dissipa, restando apenas o vácuo. E para $t = \frac{\pi}{\omega}$, toda a energia dissipada para o ambiente retorna para o sistema. A dissipação de energia é caracterizada nessa matriz como o amortecimento da amplitude do elemento de matriz diagonal referente a um fóton (além de amortecer a fase relativa entre os estados $|0\rangle_A$ e $|1\rangle_A$ caracterizados pelos elementos não-diagonais).

4.2 Amortecimento de Fase

A descrição de um sistema que amortece a fase relativa entre os autoestados de energia e *não dissipa energia* é feita pela operação conhecida como *amortecimento de fase*. Matricialmente, na base de autoenergia do Hamiltoniano do sistema, apenas os termos não-diagonais sofrem o amortecimento. Na matriz da equação (4.1.1), os elementos não-diagonais que caracterizam a fase relativa entre os estados $|0\rangle_A$ e $|1\rangle_A$ são amortecidos de $t = 0$ até $t = \frac{\pi}{2\omega}$, porém os termos da diagonal que caracterizam a energia do sistema também são amortecidos e dissipam assim, energia para o ambiente.

Algumas situações em que ocorre amortecimento de fase são: um fóton espalhando aleatoriamente numa guia de onda, e estados eletrônicos num átomo perturbados pela interação com cargas elétricas distantes.

Da mesma maneira feita na seção anterior, será usado o exemplo de dois osciladores harmônicos que interagem para assim ilustrar melhor essa operação. Dessa vez, o Hamiltoniano de interação é dado por

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)$$

e o estado inicial é o mesmo $|\psi(0)\rangle$.

Portanto,

$$\begin{aligned} e^{-i\hat{H}\omega t} |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B &= |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B \\ e^{-i\hat{H}\omega t} |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B &= e^{-i\omega t(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)} |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B = |1\rangle_A \otimes |-i\omega t\rangle_B \end{aligned}$$

com $|-i\omega t\rangle_B$ um estado coerente. Assim:

$$|\psi(t)\rangle = c_0 |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + c_1 |1\rangle_A \otimes |-i\omega t\rangle_B$$

e a matriz densidade do sistema principal é

$$\hat{\rho}_A = \begin{bmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* e^{-\frac{(\omega t)^2}{2}} \\ c_0^* c_1 e^{-\frac{(\omega t)^2}{2}} & |c_1|^2 \end{bmatrix}$$

Conforme o tempo passa, os termos não-diagonais são amortecidos exponencialmente sem que a energia seja dissipada para o ambiente pelos termos diagonais. No limite ($t \rightarrow +\infty$), os termos não-diagonais se tornam nulos caracterizando a *perda de coerência* do sistema.

4.3 Interação reservatório-sistema

Seja um sistema S descrito pelo hamiltoniano \hat{H} . Esse sistema está em contato com um *reservatório* que é uma enorme coleção de sistemas, cada um com vários graus de liberdade e descrito por um hamiltoniano que ao serem somados resultam em \hat{R} . O acoplamento entre o sistema e o reservatório é descrito pela energia de interação \hat{V} , que é nula para $t < t_0$ e para $t = t_0$ ela é “ligada”. O hamiltoniano total descrito pelo sistema S e reservatório é então:

$$\hat{H}_T = \hat{H} + \hat{R} + \hat{V} \equiv \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (4.3.1)$$

Como o sistema total está isolado de qualquer outra perturbação, então seu ensemble satisfaz a equação do movimento dada por uma evolução unitária:

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [H_T, \hat{\rho}] = [H + R + V, \hat{\rho}] = [H_0 + V, \hat{\rho}] \quad (4.3.2)$$

com a normalização:

$$\text{Tr}_{R,S} \hat{\rho}(t) = 1 \quad (4.3.3)$$

onde todos os operadores estão na *representação de Schrödinger* e o traço do ensemble é feito sobre o sistema e o reservatório. Como em $t = t_0$ o sistema está desacoplado com o reservatório o operador densidade é separável:

$$\hat{\rho}(t_0) = \hat{\rho}_R(t_0) \hat{S}(t_0) \quad (4.3.4)$$

com $\hat{S}(t_0)$ descrevendo o estado inicial do sistema e $\hat{\rho}_R(t_0)$ o estado inicial do reservatório. Usando a definição de operador densidade reduzido:

$$\hat{S}(t) = \text{Tr}_R \hat{\rho}(t) \quad (4.3.5)$$

$$\hat{\rho}_R(t) = \text{Tr}_S \hat{\rho}(t) \quad (4.3.6)$$

A definição da equação mestra do sistema S para um instante qualquer é dada pelo traço sobre o reservatório da equação (4.3.2), respeitando a normalização (4.3.3) e a condição inicial (4.3.4).

Seguem os passos para remover explicitamente o operador \hat{R} passando da representação de Schrödinger para a representação de *Interação*. O operador densidade na representação de Interação é $\hat{\chi}(t)$:

$$\hat{\rho}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t-t_0)} \hat{\chi}(t) e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t-t_0)} \quad (4.3.7)$$

lembrando que $\hat{H}_0 = \hat{H} + \hat{R}$. As duas representações coincidem quando $t = t_0$:

$$\hat{\rho}(t_0) = \hat{\chi}(t_0)$$

Como $[\hat{H}, \hat{R}] = 0$ para todo instante t , então é possível separar os termos da exponencial em (4.3.7) e usando (4.3.5), obtém-se:

$$\hat{S}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} \text{Tr}_R \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{R}(t-t_0)} \hat{\chi}(t) e^{\frac{i}{\hbar}\hat{R}(t-t_0)} \right\} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}$$

e como:

$$\text{Tr}_R \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{R}(t-t_0)} \hat{\chi}(t) e^{\frac{i}{\hbar}\hat{R}(t-t_0)} \right\} = \text{Tr}_R \left\{ \hat{\chi}(t) e^{\frac{i}{\hbar}\hat{R}(t-t_0)} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{R}(t-t_0)} \right\} = \text{Tr}_R \{ \hat{\chi}(t) \}$$

então se define \hat{s} , que é o operador densidade reduzido do sistema na representação de Interação:

$$\hat{s}(t) \equiv \text{Tr}_R \{ \hat{\chi}(t) \} \quad (4.3.8)$$

$$\hat{S}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} \hat{s}(t) e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} \quad (4.3.9)$$

Os primeiros passos para obter a equação mestra do sistema começam aqui. Diferenciar (4.3.9):

$$\frac{d\hat{S}}{dt} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} \left\{ \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{s}(t)] + \frac{d\hat{s}}{dt} \right\} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} \quad (4.3.10)$$

obtendo uma relação entre as equações do movimento nas duas representações. Essa equação será usada no final desta seção. Diferenciando (4.3.7):

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_0, \hat{\rho}] + e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(t-t_0)} \frac{d\hat{\chi}}{dt} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(t-t_0)} \quad (4.3.11)$$

e comparando com (4.3.2) conclui-se que:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(t-t_0)} \frac{d\hat{\chi}}{dt} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(t-t_0)} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{V}, \hat{\rho}] \quad (4.3.12)$$

passando para a representação de Interação os operadores do comutador:

$$\hat{V} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{V}(t-t_0) e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(t-t_0)} \quad (4.3.13)$$

chegando na equação do movimento para $\hat{\chi}$:

$$\frac{d\hat{\chi}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{V}(t-t_0), \hat{\chi}] \quad (4.3.14)$$

Não é possível, em geral, resolver exatamente tal equação, então se faz uso de uma solução por aproximação. Integrando (4.3.14) de t_0 a t , e usando o teorema fundamental do cálculo:

$$\hat{\chi}(t) = \hat{\chi}(t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t [\hat{V}(t' - t_0), \hat{\chi}(t')] dt' \quad (4.3.15)$$

Substituindo (4.3.15) nela mesma, ou seja, no lugar de $\chi(t')$, e repetindo esse processo, obtém-se:

$$\hat{\chi}(t) = \hat{\chi}(t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t [\hat{V}(t' - t_0), \hat{\chi}(t_0)] dt' + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} [\hat{V}(t' - t_0), [\hat{V}(t'' - t_0), \hat{\chi}(t'')]] dt'' dt' \quad (4.3.16)$$

Notando que essa última equação não é uma aproximação, porém servirá para uma futura aproximação.

4.4 Derivação da equação mestra sob amortecimento de fase

Seja o hamiltoniano total do sistema e reservatório dado pela equação:

$$\hat{H}_T = \hat{H} + \hat{R} + \hat{V} = \hat{H}_0 + \hat{V}$$

e seja o hamiltoniano do reservatório dado por uma soma de vários osciladores harmônicos de frequência ω_i cada um:

$$\hat{R} = \sum_i \hbar\omega_i \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$$

com \hat{b}_i o operador de aniquilação bosônico e \hat{b}_i^\dagger o operador de criação bosônico. Seja o hamiltoniano de interação \hat{V} dado por:

$$\hat{V} = \hat{H} \sum_{i=1}^3 \hat{F}_i \quad (4.4.1)$$

com \hat{F}_i sendo operadores do reservatório [30]:

$$\hat{F}_1 = \hbar \sum_i C_i \hat{b}_i \quad \hat{F}_2 = \hbar \sum_i C_i \hat{b}_i^\dagger \quad \hat{F}_3 = \hbar^2 \hat{H} \sum_i \frac{|C_i|^2}{2m_i \omega_i^2}$$

O operador interação comuta com o hamiltoniano do sistema, podendo caracterizar assim um amortecimento de fase. O último termo é uma renormalização semelhante àquela feita no

modelo de Caldeira-Leggett [31] que utiliza o operador posição \hat{x} no lugar do hamiltoniano \hat{H} . Os escalares $|C_i|$ são muito pequenos em relação aos elementos de matriz de \hat{H} , o que caracteriza um acoplamento fraco entre o sistema e o reservatório.

Traçando ambos os lados da equação (4.3.16) sobre o reservatório, obtém-se o operador densidade reduzido do sistema $\hat{s} = \text{Tr}_R \hat{\chi}$:

$$\begin{aligned} \hat{s}(t) &= \hat{s}(t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t \text{Tr}_R \left[\hat{H} \sum_i \hat{F}_i(t'), \hat{s}(t_0) \hat{\rho}_R(t_0) \right] dt' + \\ &+ \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \text{Tr}_R \left[\hat{V}(t'), [\hat{V}(t''), \hat{\chi}(t'')] \right] \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

e o sistema e reservatório estão desacoplados no instante inicial t_0 , ou seja, $\hat{\chi}(t_0) = \hat{s}(t_0) \hat{\rho}_R(t_0)$.

Para prosseguir, é feita a suposição que o reservatório possui uma distribuição de Boltzmann, pois, em geral, o reservatório está em equilíbrio térmico a uma temperatura T em $t = t_0$, e portanto o operador densidade é descrito por:

$$\hat{\rho}_R(t_0) = \hat{\rho}_R(\hat{R}) = \frac{e^{-\beta \hat{R}}}{\text{Tr}_R e^{-\beta \hat{R}}} \quad (4.4.3)$$

com

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad (4.4.4)$$

sendo k_B a constante de Boltzmann.

O valor médio dos operadores \hat{F}_i são:

$$\langle \hat{F}_1 \rangle_R = \langle \hat{F}_2 \rangle_R = 0 \quad \langle \hat{F}_3 \rangle_R = \Delta\omega \hat{H}$$

onde $\Delta\omega$ é um escalar, e por ser um acoplamento fraco esse escalar é muito pequeno (em relação aos elementos de \hat{H}).

O operador densidade total [29] pode ser expresso como

$$\hat{\chi}(t) = \hat{s}(t) \hat{\rho}_R(t) + \hat{\chi}_C(t)$$

onde $\hat{\chi}_C(t)$ representa a correlação entre o sistema e o reservatório descrito pelo operador densidade $\hat{\rho}_R(t)$ no instante t ,

$$\frac{d\hat{\chi}_C(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{V}(t), \hat{s}(t) \hat{\rho}_R(t) \right]$$

O acoplamento entre reservatório e sistema é assumido fraco, e portanto a correlação entre

o sistema e o reservatório é fraca, ou seja, os elementos de matriz do operador correlação, $\hat{\chi}_C(t)$ são muito menores que os elementos de matriz de $\hat{s}(t)\hat{\rho}_R(t)$.

A suposição feita sobre o reservatório nos permite ter $\hat{\rho}_R(t) = \hat{\rho}_R(t_0)$. Então, a equação (4.4.2) se torna:

$$\begin{aligned} \hat{s}(t) - \hat{s}(t_0) &= -(t - t_0) \Delta\omega \left[\hat{H}, \left[\hat{H}, \hat{s}(t_0) \right] \right] + \\ &+ \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \left\{ \text{Tr}_R \left[\hat{V}(t'), \left[\hat{V}(t''), \hat{s}(t'')\hat{\rho}_R(t_0) \right] \right] + \right. \\ &+ \left. \text{Tr}_R \left[\hat{V}(t'), \left[\hat{V}(t''), \hat{\chi}_C(t'') \right] \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

O termo $\left[\hat{H}, \left[\hat{H}, \hat{s}(t_0) \right] \right]$ possui a mesma ordem de $\hat{s}(t_0)$. O operador $\hat{\chi}_C(t)$ possui mesma ordem do operador potencial de interação $\hat{V}(t)$ (interação fraca), que é definido como uma ordem maior que a ordem de $\hat{s}(t_0)$. O termo $\left[\hat{V}(t'), \left[\hat{V}(t''), \hat{s}(t'')\hat{\rho}_R(t_0) \right] \right]$ possui uma ordem maior que $\hat{V}(t)$. E o termo $\left[\hat{V}(t'), \left[\hat{V}(t''), \hat{\chi}_C(t'') \right] \right]$ possui uma ordem maior que $\left[\hat{V}(t'), \left[\hat{V}(t''), \hat{s}(t'')\hat{\rho}_R(t_0) \right] \right]$. Preservando somente os termos até segunda ordem em $\hat{V}(t)$, então o termo $\left[\hat{V}(t'), \left[\hat{V}(t''), \hat{\chi}_C(t'') \right] \right]$ será descartado [32].

Depois de descartar o termo de correlação em (4.4.5), diferencia-se ambos os lados com respeito ao tempo:

$$\frac{d\hat{s}(t)}{dt} = -\Delta\omega \left[\hat{H}, \left[\hat{H}, \hat{s}(t_0) \right] \right] + \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt' \text{Tr}_R \left[\hat{V}(t'), \left[\hat{V}(t'), \hat{s}(t')\hat{\rho}_R(t_0) \right] \right] \quad (4.4.6)$$

onde a integração em t' é feita sobre as funções de correlação do reservatório, que são caracterizadas por um tempo que é curto, mas finito.

Substituindo o termo de interação $\hat{V} = \hat{H} \sum_i \hat{F}_i$ com uma mudança de variável $t' = t - \tau$ na equação (4.4.6), desprezando os termos de ordem \hbar^4 , sob a aproximação Markoviana $\hat{s}(t') = \hat{s}(t)$, então se pode reescrever (4.4.6) como:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{s}(t)}{dt} &= -\Delta\omega \left[\hat{H}, \left[\hat{H}, \hat{s}(t_0) \right] \right] - \left[\hat{H}, \left[\hat{H}, \hat{s}(t_0) \right] \right] \sum_{i,j=1}^2 \int_0^\infty d\tau W_{ij}(\tau) - \\ &- \left[\hat{H}, \hat{s}(t_0) \right] \hat{H} \sum_{i,j=1}^2 \int_0^\infty d\tau \left[W_{ij}(\tau) - W'_{ij}(\tau) \right] \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

onde as funções de correlação sobre o reservatório são definidas como

$$\begin{aligned} W_{ij}(\tau) &= \text{Tr}_{\text{R}}\{\hat{F}_i(t)\hat{F}_j(t-\tau)\hat{\rho}_{\text{R}}(t_0)\} = \langle \hat{F}_i(t)\hat{F}_j(t-\tau) \rangle_{\text{R}} \\ W'_{ij}(\tau) &= \text{Tr}_{\text{R}}\{\hat{F}_i(t-\tau)\hat{F}_j(t)\hat{\rho}_{\text{R}}(t_0)\} = \langle \hat{F}_i(t-\tau)\hat{F}_j(t) \rangle_{\text{R}} \end{aligned}$$

com todos os operadores na representação de Interação. Na derivação da equação (4.4.7), foi usado $W_{i3}(\tau) = W_{3i}(\tau) = W'_{i3}(\tau) = W'_{3i}(\tau) = 0$ para $i = 1$ e $i = 2$. As funções de correlação necessárias em (4.4.7) foram calculadas em [29].

Para temperaturas suficientemente altas a aproximação Markoviana é válida, e a equação (4.4.7) é reduzida para:

$$\frac{d\hat{s}(t)}{dt} = -\gamma \left[\hat{H}, \left[\hat{H}, \hat{s}(t_0) \right] \right]$$

e para converter para a representação de Schrödinger basta seguir os seguintes passos:

$$\hat{S}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(t-t_0)}\hat{s}(t)e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(t-t_0)}$$

chegando em:

$$\frac{d\hat{S}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{H}, \hat{S}(t) \right] - \gamma \left[\hat{H}, \left[\hat{H}, \hat{S}(t) \right] \right]$$

que na notação de superoperador fica:

$$\frac{d\hat{S}(t)}{dt} = (1 + \gamma\hbar^2\mathcal{H})\mathcal{H}\hat{S}(t)$$

onde \mathcal{H} foi descrito na equação (2.6.9):

$$\mathcal{H}\hat{S}(t) = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{H}, \hat{S}(t) \right]$$

Capítulo 5

Campo com amortecimento de fase

Seja uma cavidade óptica com reflectividade total em seu interior e com um dos espelhos móveis, sujeito a uma oscilação harmônica simples, e com um campo eletromagnético em seu interior que está acoplado a um reservatório térmico, de maneira que o reservatório perturba o campo, como se fosse uma coleção de espelhos sujeitos a uma oscilação harmônica simples.

O Hamiltoniano do sistema campo+espelho é dado pela equação aproximada (3.3.2):

$$\hat{H}' \approx \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{u}(\hat{x}_m) + \hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \frac{\hbar\omega_k}{q_0} \hat{x}_m \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \quad (5.0.1)$$

que possui predominância do modo k e um regime óptico $\omega_k \gg \omega_m$. Para simplificar a notação, o operador número de fótons do modo k do campo, $\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$, será substituído por \hat{n}_a . O operador deslocamento do espelho:

$$\begin{aligned} \hat{x}_m = \hat{q} - q_0 \mathbf{1} &= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_m}} \left(\frac{\hat{b} + \hat{b}^\dagger}{2} \right) \equiv \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_m}} \hat{x}_b \\ \hat{p} &= \sqrt{2\hbar m\omega_m} \left(\frac{\hat{b} - \hat{b}^\dagger}{2i} \right) \equiv \sqrt{2\hbar m\omega_m} \hat{p}_b \\ \hat{n}_b &\equiv \hat{b}^\dagger \hat{b} \end{aligned} \quad (5.0.2)$$

verificando que os novos operadores posição e momento do espelho são adimensionais (quadraturas), com a relação de comutação canônica adimensional $[\hat{x}_b, \hat{p}_b] = \frac{i}{2}$. O acoplamento entre campo e espelho será identificado pela constante de acoplamento g , que possui unidade de frequência, identificada na equação (5.0.1) como:

$$g = \frac{\omega_k}{q_0} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_m}} \quad (5.0.3)$$

Sendo um movimento harmônico simples que o espelho sofre devido a perturbação do campo, então:

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{u}(\hat{x}_m) = \hbar\omega_m \left(\hat{n}_b + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar\pi}{24\hat{q}} \approx \hbar\omega_m \hat{n}_b$$

a energia de Casimir pode ser desprezada, pois o regime óptico garante isso. A energia do vácuo do espelho também pode ser desprezada, pois o número de fótons do mesmo será muito alto de maneira a obter uma situação quase-clássica. O Hamiltoniano do sistema pode ser reescrito como:

$$\hat{H} = \hbar\omega_k \hat{n}_a + \hbar\omega_m \hat{n}_b - \hbar g \hat{n}_a \hat{x}_b \quad (5.0.4)$$

Supondo que o reservatório age como uma coleção de espelhos em oscilação harmônica, então o hamiltoniano do reservatório será:

$$\hat{R} = \sum_i \hbar\omega_i \hat{n}_{c_i}$$

com o operador número de fótons de cada oscilador do reservatório dado por:

$$\hat{n}_{c_i} = \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i$$

A energia de interação do campo com o reservatório é semelhante à energia de interação campo-espelho:

$$\hat{V} = \hat{n}_a \sum_{i=1}^3 \hat{F}_i$$

com

$$\hat{F}_1 = -\hbar \sum_i g_i \hat{c}_i \quad \hat{F}_2 = -\hbar \sum_i g_i \hat{c}_i^\dagger \quad \hat{F}_3 = \hbar^2 \hat{n}_a \sum_i \frac{|g_i|^2}{2m_i \omega_i^2}$$

onde

$$\hat{n}_a \left(\hat{F}_1 + \hat{F}_2 \right) = -\hbar \sum_i g_i \hat{n}_a \hat{x}_{c_i}$$

e assim g_i é a constante de acoplamento entre campo e o elemento i do reservatório. Lembrando que \hat{F}_3 é um fator de renormalização, análogo ao modelo de Caldeira-Leggett que utiliza o operador posição \hat{x} no lugar de \hat{n}_a . O Hamiltoniano \hat{H} dado por (5.0.4) comuta com \hat{V} , identificando assim um amortecimento de fase. A interação entre campo e reservatório é uma interação fraca, sendo possível usar o desenvolvimento feito na seção Amortecimento de Fase com as condições da aproximação Markoviana sob altas temperaturas para o reservató-

rio, que leva à equação mestra na representação de Schrödinger:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = (\mathcal{H} - \gamma\mathcal{N}_a^2) \hat{\rho} \quad (5.0.5)$$

com γ sendo um valor positivo muito pequeno, e os superoperadores são descritos por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\hat{\rho} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] \\ \mathcal{N}_a\hat{\rho} &= [\hat{n}_a, \hat{\rho}] \end{aligned}$$

5.1 Média de alguns observáveis

Analisando o adjunto desse superoperadores, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\dagger &= -\mathcal{H} \\ \mathcal{N}_a^\dagger &= \mathcal{N}_a \end{aligned}$$

e assim a média de um observável \hat{A} pode ser dada pela equação:

$$\frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} = -\langle (\mathcal{H} + \gamma\mathcal{N}_a^2) \hat{A} \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle \quad (5.1.1)$$

Tal equação mestra respeita certas propriedades demonstradas na Subseção 2.6.2, como ser hermitiana, pois:

$$\begin{cases} (\mathcal{H}\hat{\rho})^\dagger = \mathcal{H}\hat{\rho}^\dagger \\ (\mathcal{N}_a^2\hat{\rho})^\dagger = \mathcal{N}_a^2\hat{\rho}^\dagger \end{cases} \Rightarrow \hat{\rho}^\dagger(t) = \hat{\rho}(t)$$

e a propriedade do traço estacionário, pois:

$$-(\mathcal{H} + \gamma\mathcal{N}_a^2) \mathbf{1} = 0 \implies \frac{d\text{Tr}\hat{\rho}}{dt} = 0$$

agora, quanto a semipositividade, ela será analisada depois.

5.1.1 Energia do sistema e número de fótons

Para analisar a média de energia do sistema, primeiramente se aplica os superoperadores sobre o Hamiltoniano \hat{H} , dado por (5.0.4):

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\hat{H} &= 0 \\ \mathcal{N}_a\hat{H} &= 0 \\ \frac{\partial\hat{H}}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

concluindo por (5.1.1) que:

$$\frac{d\langle H \rangle}{dt} = 0$$

confirmando a hipótese do amortecimento de fase, que diz que a energia não vaza do sistema para o reservatório num regime de alta temperatura.

Uma análise pode ser feita sobre a qualidade de armazenagem de informação na cavidade, ou seja, sobre o número de fótons do campo. É válido notar que pelo espelho não devem vazar fótons, pois o mesmo, a princípio, possui perfeita reflexão, e o mesmo deve ocorrer com o reservatório que possui uma coleção de “espelhos” perfeitamente reflexivos:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\hat{n}_a &= 0 \\ \mathcal{N}_a\hat{n}_a &= 0 \\ \frac{\partial\hat{n}_a}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

concluindo por (5.1.1) que:

$$\frac{d\langle\hat{n}_a\rangle}{dt} = 0 \Rightarrow \langle\hat{n}_a\rangle(t) = \langle\hat{n}_a\rangle(0) \equiv N_k \quad (5.1.2)$$

confirmando que o número de fótons, N_k , do campo do modo k na cavidade permanece inalterado.

5.1.2 Dinâmica do espelho

É interessante verificar o que ocorre com o deslocamento do espelho no ensemble todo e notar se respeitam as relações clássicas do movimento:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\hat{x}_b &= \frac{1}{i\hbar}\hbar\omega_m[\hat{n}_b, \hat{x}_b] = -\omega_m\hat{p}_b \\ \mathcal{N}_a\hat{x}_b &= 0 \\ \frac{\partial\hat{x}_b}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

concluindo por (5.1.1) que:

$$\frac{d\langle\hat{x}_b\rangle}{dt} = \omega_m\langle\hat{p}_b\rangle \quad (5.1.3)$$

mostrando que $\langle\hat{p}_b\rangle$ recobra a definição clássica de momento linear cinético. Fazendo a mesma análise para o momento do espelho:

$$\mathcal{H}\hat{p}_b = \frac{1}{i\hbar}(\hbar\omega_m[\hat{n}_b, \hat{p}_b] - \hbar g\hat{n}_a[\hat{x}_b, \hat{p}_b]) = \omega_m\hat{x}_b - g\hat{n}_a$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_a\hat{p}_b &= 0 \\ \frac{\partial\hat{p}_b}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

concluindo por (5.1.1) que:

$$\frac{d\langle\hat{p}_b\rangle}{dt} = -\omega_m\langle\hat{x}_b\rangle + gN_k \quad (5.1.4)$$

onde foi usada a equação (5.1.2). Essa equação descreve a dinâmica clássica do espelho, ou seja, a força resultante que é a soma da força de oscilação $-\omega_m\langle\hat{x}_b\rangle$ que é contrária ao deslocamento $\langle\hat{x}_b\rangle$ e pela pressão de radiação do campo que é positiva e tenta afastar o espelho móvel do fixo da cavidade óptica. Esses resultados são importantes, pois mostram que, em média, o espelho não é afetado pela dinâmica do reservatório que está em contato com o campo. As equações (5.1.3) e (5.1.4) podem ser resolvidas definindo a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + B$$

e para o caso que A seja invertível, a solução geral é dada por:

$$X(t) = e^{At} (A^{-1}B + X(0)) - A^{-1}B \quad (5.1.5)$$

Identificando tais matrizes, obtém-se:

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} \langle \hat{x}_b \rangle \\ \langle \hat{p}_b \rangle \end{pmatrix} (t) \\ A &= \omega_m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ B &= gN_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

encontrando os autovalores e autovetores normalizados de A :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} i \Rightarrow & |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ -i \Rightarrow & |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \end{cases}$$

a inversa de A é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\omega_m} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}B = \frac{gN_k}{\omega_m} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e a exponencial é obtida através dos autovetores:

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{i\omega_m t} |+\rangle \langle +| + e^{-i\omega_m t} |-\rangle \langle -| \\ &= \frac{e^{i\omega_m t}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{-i\omega_m t}}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega_m t) & \sin(\omega_m t) \\ -\sin(\omega_m t) & \cos(\omega_m t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

encontrando assim a posição e o momento pela equação (5.1.5):

$$\langle \hat{x}_b \rangle(t) = \left(\langle \hat{x}_b \rangle(0) - \frac{gN_k}{\omega_m} \right) \cos(\omega_m t) + \langle \hat{p}_b \rangle(0) \sin(\omega_m t) + \frac{gN_k}{\omega_m} \quad (5.1.6)$$

$$\langle \hat{p}_b \rangle(t) = - \left(\langle \hat{x}_b \rangle(0) - \frac{gN_k}{\omega_m} \right) \sin(\omega_m t) + \langle \hat{p}_b \rangle(0) \cos(\omega_m t) \quad (5.1.7)$$

É importante lembrar, de acordo com a Seção 3.3, que o deslocamento do espelho é muito menor que o comprimento da cavidade óptica, ou seja, $q - q_0 \ll q_0$ que é o mesmo que

$q(t) \approx q_0$ (mantendo a aproximação em primeira ordem que mostra um campo perturbativo) e que $\omega_m \ll \omega_k$ (mostrando que a energia do modo k não é espalhada para outros modos). Em (5.1.6), chamando:

$$v \sin u = \langle \hat{x}_b \rangle(0) - \frac{gN_k}{\omega_m} \quad (5.1.8)$$

$$v \cos u = \langle \hat{p}_b \rangle(0) \quad (5.1.9)$$

então

$$v = \sqrt{\left(\langle \hat{x}_b \rangle(0) - \frac{gN_k}{\omega_m} \right)^2 + (\langle \hat{p}_b \rangle(0))^2}$$

$$u = \arctan \left(\frac{\langle \hat{x}_b \rangle(0) - \frac{gN_k}{\omega_m}}{\langle \hat{p}_b \rangle(0)} \right)$$

Substituindo (5.1.8) e (5.1.9) em (5.1.6), então:

$$\langle \hat{x}_b \rangle(t) = v \sin(\omega_m t + u) + \frac{gN_k}{\omega_m}$$

e o valor máximo do deslocamento do espelho é dado por $v + \frac{gN_k}{\omega_m}$. Para respeitar a condição de que o deslocamento é muito menor que o comprimento q_0 , então:

$$\langle \hat{x}_m \rangle(t) \leq \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}} \left(v + \frac{gN_k}{\omega_m} \right) \ll q_0 \implies \frac{g}{\sqrt{2}} \left(v + \frac{gN_k}{\omega_m} \right) \ll \omega_k$$

aonde foi usada a Eq. (5.0.2) e (5.0.3).

5.2 Operador densidade do sistema

É possível resolver a equação mestra através do método dos superoperadores, e a partir da equação (5.0.5) a solução formal fica:

$$\hat{\rho}(t) = e^{(\mathcal{H} - \gamma \mathcal{N}_a^2)t} \hat{\rho}(0)$$

com

$$[\mathcal{H}, \mathcal{N}_a^2] = 0$$

sendo possível separar os termos da exponencial:

$$\hat{\rho}(t) = e^{\mathcal{H}t} e^{-\gamma \mathcal{N}_a^2 t} \hat{\rho}(0)$$

O superoperador \mathcal{N}_a^2 é separável também:

$$\mathcal{N}_a^2 \hat{\rho} = [\hat{n}_a, [\hat{n}_a, \hat{\rho}]] = -2\hat{n}_a \hat{\rho} \hat{n}_a + \hat{n}_a^2 \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{n}_a^2 \equiv (\mathcal{J} + \mathcal{L}) \hat{\rho}$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{J} \hat{\rho} &= -2\hat{n}_a \hat{\rho} \hat{n}_a \\ \mathcal{L} \hat{\rho} &= \hat{n}_a^2 \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{n}_a^2 \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

observando a comutação entre esses superoperadores $[\mathcal{J}, \mathcal{L}] = 0$. Portanto:

$$\hat{\rho}(t) = e^{\mathcal{H}t} e^{-\gamma \mathcal{L}t} e^{-\gamma \mathcal{J}t} \hat{\rho}(0)$$

Algumas exponenciais possuem uma forma exata por operador, ou seja:

$$\hat{\rho}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} e^{-\gamma \hat{n}_a^2 t} [e^{-\gamma \mathcal{J}t} \hat{\rho}(0)] e^{-\gamma \hat{n}_a^2 t} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} \quad (5.2.2)$$

não é possível achar uma forma exata para $e^{-\gamma \mathcal{J}t}$, mas dependendo da condição inicial $\hat{\rho}(0)$ é possível. Agora é possível determinar se $\hat{\rho}$ é semipositivo ou não. Aplicando o bra-ket em $\hat{\rho}(t)$ para um estado arbitrário $|\psi\rangle$, o escalar produzido será

$$\langle \psi | \hat{\rho}(t) | \psi \rangle = \langle \psi | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} e^{-\gamma \hat{n}_a^2 t} [e^{-\gamma \mathcal{J}t} \hat{\rho}(0)] e^{-\gamma \hat{n}_a^2 t} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} | \psi \rangle \quad (5.2.3)$$

notando que as exponenciais aplicadas aos ket e bra produzem

$$e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} |\psi\rangle \equiv |\psi'(t)\rangle \longleftrightarrow \langle \psi | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} = \langle \psi'(t) | \quad (5.2.4)$$

onde a seta de duplo sentido \longleftrightarrow leva o espaço estado \mathcal{E} ao espaço estado adjunto \mathcal{E}^\dagger e vice-versa, ou seja:

$$\hat{A} |\psi\rangle = |\psi'\rangle \longleftrightarrow \langle \psi | \hat{A}^\dagger = \langle \psi' |$$

com A um operador do espaço de Hilbert. Substituindo (5.2.4) em (5.2.3), então

$$\langle \psi | \hat{\rho}(t) | \psi \rangle = \langle \psi'(t) | e^{-\gamma \hat{n}_a^2 t} [e^{-\gamma \mathcal{J}t} \hat{\rho}(0)] e^{-\gamma \hat{n}_a^2 t} | \psi'(t) \rangle \quad (5.2.5)$$

Novamente, as exponenciais aplicadas aos ket e bra produzem

$$e^{-\gamma\hat{n}_a^2 t} |\psi'(t)\rangle \equiv |\psi''(t)\rangle \longleftrightarrow \langle\psi'(t)| e^{-\gamma\hat{n}_a^2 t} = \langle\psi''(t)| \quad (5.2.6)$$

e substituindo (5.2.6) em (5.2.5), então

$$\langle\psi|\hat{\rho}(t)|\psi\rangle = \langle\psi''(t)| [e^{-\gamma\mathcal{J}t}\hat{\rho}(0)] |\psi''(t)\rangle \quad (5.2.7)$$

É necessário analisar a série infinita produzida pela aplicação do superoperador \mathcal{J} numa condição inicial arbitrária $\hat{\rho}(0)$. Expandindo $e^{-\gamma\mathcal{J}t}$

$$e^{-\gamma\mathcal{J}t}\hat{\rho}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\gamma t)^n}{n!} \mathcal{J}^n \hat{\rho}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\gamma t)^n}{n!} \hat{n}_a^n \hat{\rho}(0) \hat{n}_a^n \quad (5.2.8)$$

onde foi usada a equação (5.2.1). Substituindo (5.2.8) em (5.2.7), então

$$\langle\psi|\hat{\rho}(t)|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\gamma t)^n}{n!} \langle\psi''(t)| \hat{n}_a^n \hat{\rho}(0) \hat{n}_a^n |\psi''(t)\rangle \quad (5.2.9)$$

Cada operador desse somatório aplicados aos ket e bra produzem

$$\hat{n}_a^n |\psi''(t)\rangle \equiv |\psi_n''(t)\rangle \longleftrightarrow \langle\psi_n''(t)| \hat{n}_a^n = \langle\psi_n''(t)| \quad (5.2.10)$$

e portanto, ao substituir (5.2.10) em (5.2.9) chega-se a forma final

$$\langle\psi|\hat{\rho}(t)|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\gamma t)^n}{n!} \langle\psi_n''(t)| \hat{\rho}(0) |\psi_n''(t)\rangle \quad (5.2.11)$$

sendo que $|\psi_n''(t)\rangle \in \mathcal{E}$. Basta que, como condição inicial, o operador $\hat{\rho}(0)$ seja semipositivo para que $\hat{\rho}(t)$ seja também. Portanto, se

$$\hat{\rho}(0) \geq 0 \implies \langle\psi_n''(t)| \hat{\rho}(0) |\psi_n''(t)\rangle \geq 0 \implies \hat{\rho}(t) \geq 0 \quad \forall \gamma \geq 0$$

provando assim a semipositividade de $\hat{\rho}(t)$.

Voltando à equação (5.2.2), o operador \hat{H} possui termos que não comutam entre si para tornar a sua exponencial separável. Seguindo o processo feito no Apêndice A.3, é possível separar tais termos:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = e^{-ir\hat{n}_a t} e^{is^2\hat{n}_a^2(t-\sin t)} e^{s\hat{n}_a(\eta\hat{b}^\dagger - \eta^*\hat{b})} e^{-i\hat{n}_b t} \quad (5.2.12)$$

onde $\eta = 1 - e^{-it}$, $s = g/(2\omega_m)$ é o parâmetro de acoplamento reescalado, $r = \omega_k/\omega_m$, e t representa o tempo reescalado, sendo o tempo dimensional em segundos multiplicado por ω_m , tornando-se adimensional. Para valores de s da ordem de uma unidade, os experimentos se tornam praticáveis ($\omega_k \sim 10^{16}\text{Hz}$, $\omega_m \sim 10^3\text{Hz}$, $q_0 \sim 1\text{m}$, e $m \sim 10^{-5}\text{kg}$) [33, 34, 35]. No segundo membro, a terceira exponencial, da esquerda para a direita, é o operador deslocamento que atua sobre o espelho:

$$\hat{D}_b(s\eta\hat{n}_a) \equiv e^{s\hat{n}_a(\eta\hat{b}^\dagger - \eta^*\hat{b})}$$

A partir de (5.2.12) e (5.2.2) é possível aplicar uma condição inicial arbitrária para campo e espelho. Supor que, inicialmente, o ensemble seja puro e o estado seja coerente. Essa suposição é feita, pois a preparação de um estado coerente para o campo pode ser feita através de um laser, que é injetado dentro da cavidade através de suas paredes que, externamente, possuem índice de reflexão muito baixo. E a preparação do espelho num estado coerente é feita, por exemplo, utilizando a força de compressão entre o espelho e uma mola que, por serem objetos macroscópicos, produzem um movimento clássico, preparando-o assim, num estado quase-clássico. Portanto, inicialmente o sistema pode ser descrito por um estado puro:

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle_a \otimes |\beta\rangle_b$$

onde $|\alpha\rangle_a$ e $|\beta\rangle_b$ são os estados coerentes iniciais do campo e do espelho, respectivamente. O ensemble inicialmente é escrito como:

$$\hat{\rho}(0) = |\alpha\rangle \langle\alpha| \otimes |\beta\rangle \langle\beta|$$

Para analisar a evolução temporal, primeiramente, aplica-se o superoperador $e^{-\gamma t \mathcal{J}}$ sobre o ensemble, que é o responsável por torná-lo misto, emaranhando campo e reservatório:

$$\begin{aligned} e^{-\gamma t \mathcal{J}} \hat{\rho}(0) &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{l,n,m=0}^{\infty} \frac{(2\gamma t)^l}{l!} \frac{\alpha^n \alpha^{*m}}{\sqrt{n!m!}} \hat{n}_a^l |n\rangle \langle m| \hat{n}_a^l \otimes |\beta\rangle \langle\beta| \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \alpha^{*m}}{\sqrt{n!m!}} e^{2\gamma m n t} |n\rangle \langle m| \otimes |\beta\rangle \langle\beta| \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

onde $|n\rangle$ denota o estado de Fock do campo da cavidade.

Agora, aplica-se os operadores $e^{-\gamma\hat{n}_a^2 t}$ de cada lado do ensemble dado pela equação (5.2.13):

$$\begin{aligned} e^{-\gamma\hat{n}_a^2 t} [e^{-\gamma\mathcal{J}t}\hat{\rho}(0)] e^{-\gamma\hat{n}_a^2 t} &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \alpha^{*m}}{\sqrt{n!m!}} e^{2\gamma m n t} e^{-\gamma(n^2+m^2)t} |n\rangle \langle m| \otimes |\beta\rangle \langle\beta| \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \alpha^{*m}}{\sqrt{n!m!}} e^{-\gamma(n-m)^2 t} |n\rangle \langle m| \otimes |\beta\rangle \langle\beta| \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

que após essa última transformação, os termos $n \neq m$ serão amortecidos, obtendo após se passar muito tempo uma decoerência quântica para o campo. Antes de aplicar a evolução unitária, é preciso reescalar o tempo substituindo $\omega_m t$ por t , e γ/ω_m por σ . Por fim, aplicando a evolução temporal unitária que é a responsável por emaranhar o campo com o espelho, obtém-se:

$$\hat{\rho}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} e^{-\gamma\hat{n}_a^2 t} [e^{-\gamma\mathcal{J}t}\hat{\rho}(0)] e^{-\gamma\hat{n}_a^2 t} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$$

Aplicando separadamente as exponenciais da equação (5.2.12) sobre (5.2.14) pela esquerda e pela direita, obtém-se:

$$\begin{aligned} e^{-i\hat{n}_b t} |n\rangle \otimes |\beta\rangle &= |n\rangle \otimes |\beta e^{-it}\rangle \\ \hat{D}_b(s\eta\hat{n}_a) |n\rangle \otimes |\beta e^{-it}\rangle &= |n\rangle \otimes |\beta e^{-it} + s\eta n\rangle \end{aligned}$$

onde foi usado $\hat{D}_b(s\eta\hat{n}_a) |n\rangle = \hat{D}_b(s\eta n) |n\rangle$. As duas outras exponenciais que contém o operador \hat{n}_a serão aplicadas sobre seus autovetores $|n\rangle$. Esse raciocínio foi feito para o lado esquerdo do operador densidade, porém é possível fazer o mesmo ao aplicar para o lado direito, notando que é necessário conjugar os operadores. A forma final do operador densidade é:

$$\hat{\rho}(t) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-irt})^n (\alpha e^{-irt})^{*m}}{\sqrt{n!m!}} e^{-\sigma(n-m)^2 t} e^{is^2(n^2-m^2)(t-\sin t)} |n\rangle \langle m| \otimes |\phi_n(t)\rangle \langle\phi_m(t)| \quad (5.2.15)$$

com $|\phi_n(t)\rangle$ denotando um estado coerente para o espelho dado por:

$$|\phi_n(t)\rangle = |\beta e^{-it} + sn(1 - e^{-it})\rangle \quad (5.2.16)$$

5.3 Entropia linear do sistema

O cálculo da entropia linear associado a matriz densidade $\hat{\rho}(t)$ permite dizer o quanto o sistema está emaranhado com o reservatório. Primeiro, calcula-se $\hat{\rho}^2(t)$.

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(t) &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{nm}(t) |n\rangle \langle m| \otimes |\phi_n(t)\rangle \langle \phi_m(t)| \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{\rho}^2(t) &= \sum_{n,m,l=0}^{\infty} \rho_{nl}(t) \rho_{lm}(t) |n\rangle \langle m| \otimes |\phi_n(t)\rangle \langle \phi_m(t)|\end{aligned}\quad (5.3.1)$$

onde foi usada a ortonormalidade dos vetores de Fock e o produto interno unitário de vetores coerentes iguais.

Seja $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$ vetores estados arbitrários do espaço de Hilbert \mathcal{H} , então é válida a seguinte identidade

$$\text{Tr} \{|\varphi\rangle \langle \psi|\} = \langle \psi | \varphi \rangle \quad (5.3.2)$$

onde o traço é feito sobre o espaço \mathcal{H} .

Efetuando o traço sobre (5.3.1) e usando (5.3.2), obtém-se:

$$\text{Tr} \{\hat{\rho}^2(t)\} = \sum_{n,l=0}^{\infty} \rho_{nl}(t) \rho_{ln}(t)$$

usando a propriedade que toda matriz densidade é hermitiana, então $\rho_{nl}^*(t) = \rho_{ln}(t)$ e portanto:

$$\text{Tr} \{\hat{\rho}^2(t)\} = \sum_{n,l=0}^{\infty} |\rho_{nl}(t)|^2 \quad (5.3.3)$$

essa equação só foi possível devido a ortonormalidade dos vetores de Fock.

A entropia linear do sistema é alcançada usando a equação (2.5.1), assim:

$$S_L(t) = 1 - e^{-2|\alpha|^2} \sum_{n,l=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(l+n)}}{l!n!} e^{-2\sigma(l-n)^2 t} \quad (5.3.4)$$

Cada linha da Figura 5.1 é representada por um valor absoluto de α de acordo com a legenda. Esse gráfico mostra que quanto maior $|\alpha|$, mais rapidamente a entropia se aproxima de 1, ou seja, maior é o grau do emaranhamento do sistema com o reservatório. Caso haja vácuo na cavidade, então a entropia permanece nula o tempo todo, ou seja, o espelho permanece num movimento harmônico simples de estado $|\beta\rangle$.

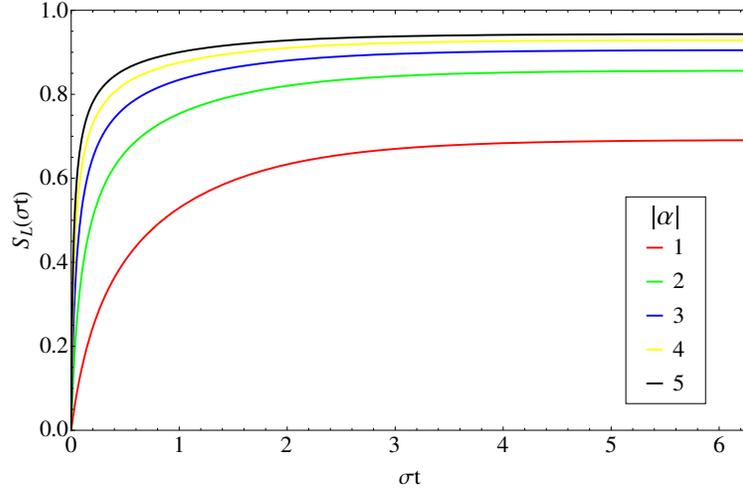


Figura 5.1: Entropia Linear do Sistema em função da variável temporal σt . O Sistema é composto por uma cavidade óptica com um espelho móvel submetido a um potencial harmônico acoplado a um campo eletromagnético confinado em seu interior. O campo está acoplado a um reservatório que realiza amortecimento de fase sobre o sistema. No instante $t = 0$, o campo está no estado coerente $|\alpha\rangle$ e o espelho móvel no estado coerente $|\beta\rangle$. Cada linha do gráfico representa um valor diferente de $|\alpha|$ dado pela legenda de cores.

Para $t = 0$ o sistema está desemaranhado do reservatório com $S_L = 0$ e para $t \gg \sigma^{-1}$ a entropia converge para:

$$S_L(|\alpha|) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} S_L(t) = 1 - e^{-2|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{4n}}{n!^2} \quad (5.3.5)$$

com o somatório representando uma função de Bessel modificada de primeiro tipo, $I_0(2|\alpha|^2)$. O ensemble do sistema para $t \gg \sigma^{-1}$ converge para:

$$\hat{\rho}(t \gg \sigma^{-1}) \cong e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |n\rangle \langle n| \otimes |\phi_n(t)\rangle \langle \phi_n(t)| \quad (5.3.6)$$

com uma distribuição de Poisson para cada estado possível do sistema, ou seja, o sistema se encontra nos estados ortonormais $|\psi(t)\rangle = |n\rangle \otimes |\phi_n(t)\rangle$ com probabilidade $e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n} / n!$, e portanto, se for possível medir o número de fótons na cavidade, então é possível saber em que estado quase-clássico o espelho se encontra.

De acordo com a Figura 5.2, verifica-se que o sistema emaranha totalmente com o reservatório para estados inicialmente quase-clássicos ($|\alpha| \gg 1$), e o ensemble se torna completamente aleatório (ou seja, incoerente). Para $|\alpha| = 0$ o número de fótons na cavidade é zero, ou seja, o campo está no estado de vácuo e permanece assim durante todo o tempo, e o ensemble permanece puro.

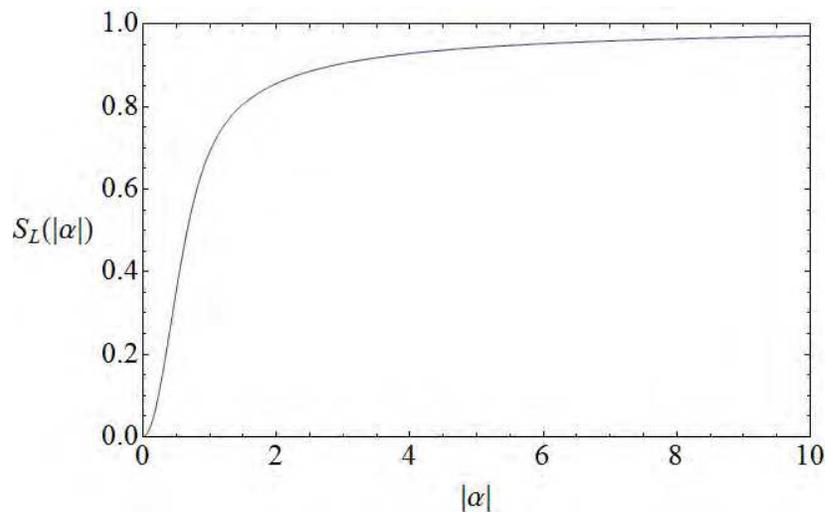


Figura 5.2: Entropia Linear do Sistema para tempos muito longos em função módulo $|\alpha|$. Cada ponto do gráfico representa o valor limite da entropia linear do sistema associado a cada curva da Figura 5.1. O sistema, que está acoplado ao reservatório através do campo, é amortecido de maneira a conservar a energia.

5.4 Entropia Linear do espelho

O operador densidade reduzido do espelho é dado por:

$$\hat{\rho}_m(t) \equiv \text{Tr}_a \{ \hat{\rho}(t) \} = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |\phi_n(t)\rangle \langle \phi_n(t)| \quad (5.4.1)$$

mostrando que a distribuição é de Poisson, sendo invariante com o tempo. Observando que na equação(5.2.15) a única informação sobre o reservatório é o termo σ (que é o fator de amortecimento de fase) e quando $\sigma = 0$ significa que não há acoplamento entre sistema e reservatório. Na equação acima (5.4.1) não existe nenhuma informação sobre o reservatório, mostrando que a equação é a mesma se $\sigma = 0$, ou seja, o acoplamento do sistema com o reservatório não modifica o comportamento do espelho. Além disso, não importa a configuração inicial do ensemble, $\hat{\rho}(0)$, o espelho não vai ter seu comportamento afetado pelo reservatório.

Elevando o operador densidade ao quadrado, obtém-se:

$$\hat{\rho}_m^2(t) = e^{-2|\alpha|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(n+m)}}{n!m!} \langle \phi_n(t) | \phi_m(t) \rangle |\phi_n(t)\rangle \langle \phi_m(t)|$$

notando que não é possível usar a equação 5.3.3 devido a não-ortonormalidade dos estados coerentes.

Usando 5.3.2, a entropia linear do espelho é dada por:

$$S_{\text{LM}}(t) = 1 - \text{Tr} \{ \hat{\rho}_m^2(t) \} = 1 - e^{-2|\alpha|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(n+m)}}{n!m!} |\langle \phi_n(t) | \phi_m(t) \rangle|^2$$

o termo em bracket é calculado a seguir

$$\begin{aligned} \langle \phi_n(t) | \phi_m(t) \rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\phi_n(t)-\phi_m(t)|^2} e^{-i\Im\{\phi_m(t)(\phi_n(t)-\phi_m(t))^*\}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle \phi_n(t) | \phi_m(t) \rangle &= e^{-2s^2(n-m)^2 \sin^2(\frac{t}{2})} e^{is(n-m)(\Re\{\beta\} \sin t + \Im\{\beta\}(1-\cos t))} \Rightarrow \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

$$\Rightarrow |\langle \phi_n(t) | \phi_m(t) \rangle|^2 = e^{-4s^2(n-m)^2 \sin^2(\frac{t}{2})} \quad (5.4.3)$$

onde foi usada a equação (5.2.16) para descrever o comportamento de $\phi_n(t)$, com \Re e \Im representando as componentes Real e Imaginária de seu argumento, respectivamente. A equação final para a entropia do espelho é dada por:

$$S_{\text{LM}}(t) = 1 - e^{-2|\alpha|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(n+m)}}{n!m!} e^{-4s^2(n-m)^2 \sin^2(\frac{t}{2})} \quad (5.4.4)$$

notando que sua entropia independe da informação do valor de β , porém é necessário que o estado do espelho seja inicialmente um estado coerente.

A dinâmica do espelho que se destaca das equações (5.2.15) e (5.4.4) mostra que depois de um tempo $t = 2\pi$ (que equivale, classicamente, a uma oscilação inteira do espelho), ele retorna, quanticamente, ao seu estado original $|\beta\rangle$ desemaranhando campo e espelho. Para todos os instantes entre $t = 0$ e $t = 2\pi$ o estado do espelho está emaranhado com o estado do campo, sendo máximo para $t = \pi$. A dependência temporal do emaranhamento é mostrado na Figura 5.3 e para um valor fixo de $|\alpha|$, quanto maior o valor do acoplamento s , a entropia se aproxima mais de 1 e mais rapidamente isso ocorre, ou seja, maior é a intensidade do emaranhamento do espelho com o campo e por mais tempo permanecem altamente emaranhados.

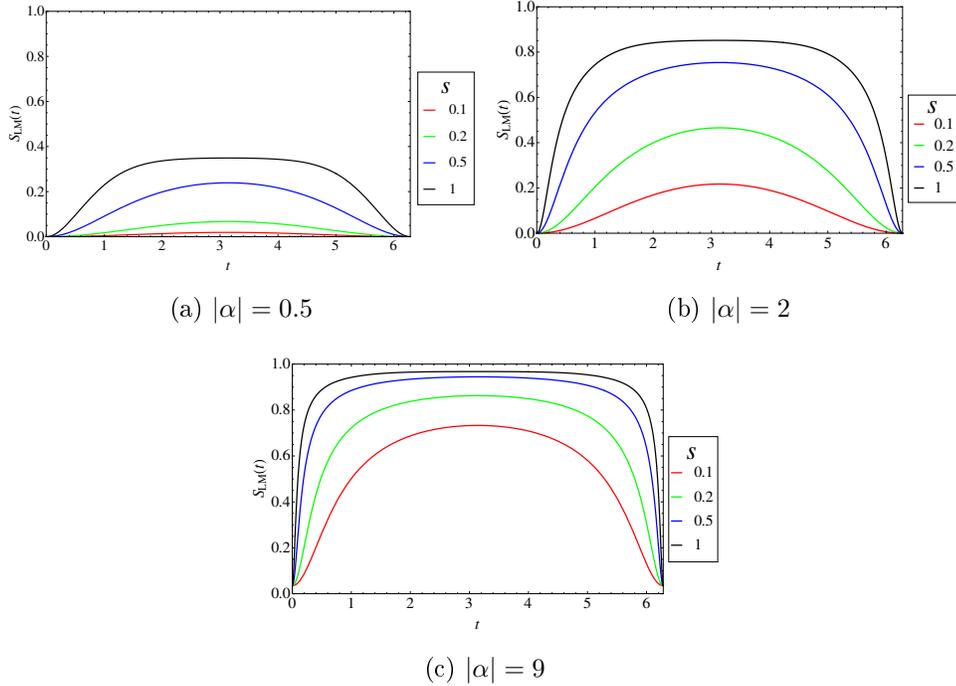


Figura 5.3: Entropia Linear do Espelho, $S_{\text{LM}}(t)$, em função do tempo t . Cada gráfico está associado a um estado inicial coerente $|\alpha\rangle$ do campo, onde cada linha representa um valor do acoplamento campo-espelho s distinto. Os gráficos estão plotados para o período de uma oscilação do espelho, ou seja, de $t = 0$ a $t = 2\pi$.

5.5 Medição sobre o espelho

Aqui serão feitas medições sequenciais. Primeiramente, será medida a posição do espelho, mostrando como ensemble do sistema ficará após colapsar. E depois, será feita uma medição sobre o número de fótons do sistema e será analisado como a primeira medição altera a análise final. O processo feito aqui nessa seção segue um processo parecido feito na referência [36].

Ao medir a posição do espelho, o ensemble do sistema colapsa para:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &\xrightarrow{\hat{x}_b} \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle x | \hat{\rho}(t) | x \rangle_b |x\rangle_b \langle x| = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{(\alpha e^{-irt})^n (\alpha e^{-irt})^{*m}}{\sqrt{n!m!}} \times \\ &\times e^{-\sigma(n-m)^2 t} e^{is^2(n^2-m^2)(t-\sin t)} \langle x | \phi_n(t) \rangle \langle \phi_m(t) | x \rangle |n\rangle \langle m| \otimes |x\rangle \langle x| \end{aligned}$$

Medindo, então, o número de fótons, o ensemble do sistema colapsa para:

$$\hat{\rho}(t) \xrightarrow{\hat{x}_b, \hat{n}_a} e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |\langle x | \phi_n(t) \rangle|^2 |n\rangle \langle n| \otimes |x\rangle \langle x|$$

A fração populacional é dada por

$$f_n(x, t) = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |\langle x | \phi_n(t) \rangle|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} e^{-2(x - \Re\{\phi_n(t)\})^2} \quad (5.5.1)$$

que não depende do fator de amortecimento σ que foi eliminado ao medir o número de fótons e notando que a ordem das medições não altera o resultado final, pois $[\hat{x}_b, \hat{n}_a] = 0$. A parte Real de $\phi_n(t)$ é dada por

$$\Re\{\phi_n(t)\} = |\beta| \cos(\xi - t) + sn(1 - \cos t) \quad (5.5.2)$$

e aqui ocorre um fato interessante que permite estimar o número de fótons na cavidade com grande precisão: se ao medir a posição do espelho, o valor obtido for:

$$x \approx \Re\{\phi_n(t)\}$$

então o número de fótons na cavidade é muito provavelmente igual a n , pois a função gaussiana decai rapidamente tornando os termos com o número de fótons diferente de n desprezíveis. Isso é possível, pois são conhecidos os valores: do estado inicial do sistema que foi preparado como $\hat{\rho}(0) = |\alpha\rangle \langle \alpha| \otimes |\beta\rangle \langle \beta|$, com $\beta = |\beta| e^{i\xi}$; do acoplamento espelho-campo s ; e do instante t em que é feita a medição da posição do espelho. Então, o valor de $\Re\{\phi_n(t)\}$ também é conhecido para todo n .

5.6 Entropia Linear do Campo

O operador densidade reduzido do campo é dado a partir da equação (5.2.15) por

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_c(t) \equiv \text{Tr}_b \{ \hat{\rho}(t) \} &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-irt})^n (\alpha e^{-irt})^{*m}}{\sqrt{n!m!}} \times \\ &\times e^{-\sigma(n-m)^2 t} e^{is^2(n^2-m^2)(t-\sin t)} \langle \phi_m(t) | \phi_n(t) \rangle |n\rangle \langle m| \end{aligned} \quad (5.6.1)$$

onde o traço foi feito sobre o estado do espelho (que possui operadores de índice b), sendo possível a substituição do produto interno dos vetores coerentes por (5.4.2). Como os vetores de Fock são ortonormais, então é possível usar 5.3.3 para chegar na entropia linear do campo:

$$S_{\text{LC}}(t) = 1 - e^{-2|\alpha|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(n+m)}}{n!m!} e^{-\sigma(n-m)^2 t} e^{-4s^2(n-m)^2 \sin^2(\frac{t}{2})} \quad (5.6.2)$$

onde foi usado a relação (5.4.3).

Na Figura 5.4, a abscissa é definida pelo tempo adimensional e a ordenada é definida pela entropia dada por (5.6.2). A abscissa foi plotada até 6π que equivale a três oscilações completas do espelho, servindo para mostrar que a cada oscilação do espelho, a amplitude de oscilação da entropia diminui em relação a $s = 0$ (ou seja, quando o espelho sofre ação apenas de uma força harmônica), fenômeno relacionado ao fator de amortecimento σ . Além disso, quanto maior é o acoplamento, s , entre campo e espelho, maior é a amplitude de oscilação da entropia do campo em relação a $s = 0$, mostrando que medições sobre o campo sofrem maiores alterações para tempos curtos em relação a $s = 0$, devido ao acoplamento com o espelho. Também é possível notar que quanto maior o valor do fator de amortecimento, menores são as oscilações da entropia, independente do valor de s , mostrando que o campo parece não estar em contato com o espelho e que medições sobre o mesmo levam em conta apenas a influência do reservatório, ou seja, em relação a situação em que o campo não está nem em contato com espelho, nem com o reservatório, o campo perde coerência para o reservatório, como mostra os gráficos (g), (h) e (i). O reservatório, em teoria, sofre uma pequena perturbação, sendo que sua entropia permanece praticamente zero, ou seja, qualquer medição feita sobre o mesmo deverá produzir os mesmos valores caso não estivesse em contato com o sistema. Pela equação (5.6.2) e pela Figura 5.4, é possível observar que para tempos muito longos a entropia do campo se iguala a entropia limite do sistema (5.3.5), mostrando que o campo atinge um emaranhamento limite com o reservatório, resultando num ensemble incoerente. Quanto maior é o valor de $|\alpha|$, maior é esse valor limite, e maior é o valor da entropia para $s = 0$. Portanto, em situações inicialmente quase-clássicas, o campo quase instantaneamente perde toda sua coerência para o reservatório, resultando num sistema com o campo exatamente no estado de Fock (ensemble incoerente), e a função distribuição da posição do espelho é dada por $f_n(x, t)$ (equação (5.5.1)), e portanto é provável que uma medição da posição do espelho esteja próxima de $\Re\{\phi_n(t)\}$ determinando com mais exatidão (quando comparada a uma situação inicial que não é quase-clássica, onde o estado do campo é uma sobreposição do número de fótons) o número de fótons dentro da cavidade.

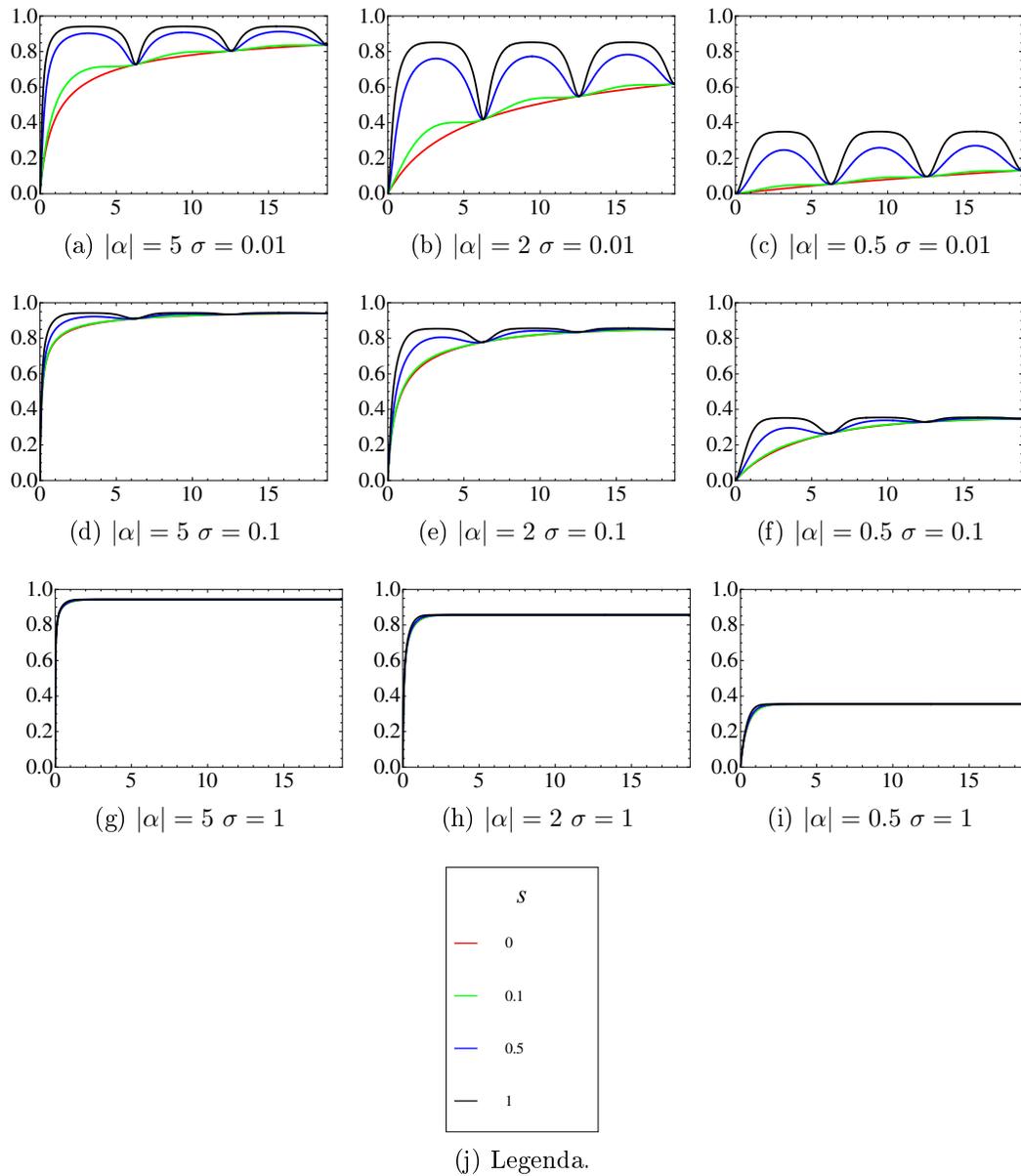


Figura 5.4: Entropia Linear do Campo, $S_{LC}(t)$, em função do tempo t . Cada gráfico está associado a um estado inicial coerente $|\alpha\rangle$ do campo, onde cada linha representa um valor do acoplamento campo-espelho s distinto descritos pela legenda de cores. Os gráficos estão plotados para o período de três oscilação do espelho, ou seja, de $t = 0$ a $t = 6\pi$.

5.7 Medições sobre o campo

Não é possível usar a equação (5.1.1) para encontrar uma fórmula exata para a média de um operador arbitrário do campo, sem saber exatamente qual a condição inicial $\hat{\rho}(0)$, pois, em geral, ao tentar efetuar esse processo, é necessário conhecer o comportamento da média de um segundo operador do campo que surge nessa equação diferencial (5.1.1). Esse segundo operador, ao passar também por (5.1.1), irá dar origem a um terceiro operador do campo (distinto do primeiro e do segundo), que ao passar por (5.1.1) irá dar origem a um quarto operador do campo (distinto dos três operadores anteriores) sendo que esse processo pode ser realizado infinitamente, ou seja, não é possível encontrar uma fórmula exata para a média do primeiro operador em questão. Existem algumas exceções que não entram nesse processo infinito, e o caso mais simples é de operadores que comutam com os operadores do potencial de interação, \hat{V} . Isso ocorre devido ao superoperador $e^{-\gamma\mathcal{J}t}$ não possuir uma forma exata ao ser aplicado sobre uma condição inicial arbitrária $\hat{\rho}(0)$, sendo exibido apenas como uma série infinita. Para encontrar a média de operadores do espelho é possível usar apenas (5.1.1), porque \mathcal{J} atua apenas em estados do campo.

Continuando com a condição inicial quase-clássica $\hat{\rho}(0) = |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta|$, então será encontrada a média da quadratura da amplitude, \hat{x}_a , do campo de modo k .

5.7.1 Número de Fótons

Se for possível acessar diretamente o campo eletromagnético, então ao medir o número de fótons de (5.6.1), o estado do sistema colapsará para:

$$\hat{\rho}_c(t) \xrightarrow{\hat{n}_a} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{\rho}_c(t) | n \rangle |n\rangle\langle n|$$

onde $\langle n | \hat{\rho}_c(t) | n \rangle$ é a fração populacional do número de fótons, e o novo ensemble possui traço unitário. A fração populacional fica:

$$\langle n | \hat{\rho}_c(t) | n \rangle = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$$

mostrando que não há modificação com o tempo.

5.7.2 Quadratura da Amplitude

\hat{x}_a é o operador quadratura da amplitude do modo k do campo definido por:

$$\hat{x}_a \equiv \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}} \hat{Q}_k$$

que é um operador adimensional. Lembrar que \hat{Q}_k é o operador amplitude do modo k do campo. Classicamente, o campo eletromagnético é

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ 0 &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} \end{aligned} \quad (5.7.1)$$

com \vec{E} e \vec{B} os campos elétrico e o magnético, respectivamente, e \vec{A} e ϕ são o potencial vetor e o potencial elétrico escalar, respectivamente. Na situação do experimento físico proposto, não existem cargas livres na cavidade óptica nem corrente elétrica. O potencial vetor e o potencial escalar são dados por

$$\begin{aligned} \vec{A}(x, t) &= A(x, t)\hat{y} \\ \phi(x, t) &= 0 \end{aligned}$$

onde $\phi(x, t)$ é calculado usando (5.7.1) e usando o fato que não existem cargas livres.

Usando a equação (5.6.1) é possível encontrar a média de \hat{x}_a :

$$\langle \hat{x}_a \rangle(t) = \text{Tr} \{ \hat{\rho}_c(t) \hat{x}_a \} \quad (5.7.2)$$

Aplicando \hat{x}_a sobre um estado de Fock, obtém-se

$$\hat{x}_a |n\rangle = \frac{1}{2} \left(\sqrt{n} |n-1\rangle + \sqrt{n+1} |n+1\rangle \right) \quad (5.7.3)$$

Substituindo (5.7.3) em (5.7.2), então

$$\langle \hat{x}_a \rangle(t) = \frac{1}{2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{nm}^c(t) \left(\sqrt{n} \text{Tr} \{ |n-1\rangle \langle m| \} + \sqrt{n+1} \text{Tr} \{ |n+1\rangle \langle m| \} \right) \quad (5.7.4)$$

onde

$$\rho_{nm}^c(t) = e^{-|\alpha|^2} \frac{(\alpha e^{-irt})^n (\alpha e^{-irt})^{*m}}{\sqrt{n!m!}} e^{-\sigma(n-m)^2 t} e^{is^2(n^2-m^2)(t-\sin t)} \langle \phi_m(t) | \phi_n(t) \rangle$$

Usando a identidade (5.3.2) em (5.7.4)

$$\langle \hat{x}_a \rangle(t) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} \rho_{n,n-1}^c(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m} \rho_{m-1,m}^c(t) \right)$$

pela propriedade hermitiana de $\hat{\rho}_c(t)$, então $(\rho_{n,n-1}^c(t))^* = \rho_{n-1,n}^c(t)$ e como n e m são índices mudos na equação acima, a média passa a ser

$$\langle \hat{x}_a \rangle(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} \Re \{ \rho_{n,n-1}^c(t) \} = \Re \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} \rho_{n,n-1}^c(t) \right\}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}_a \rangle(t) &= e^{-|\alpha|^2} e^{-\sigma t} e^{-2s^2 \sin^2(\frac{t}{2})} \times \\ &\times \Re \left\{ \alpha e^{-irt} e^{is(\Re\{\beta\} \sin t + \Im\{\beta\}(1-\cos t))} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(n-1)}}{(n-1)!} e^{is^2(2n-1)(t-\sin t)} \right\} \end{aligned}$$

alterando o índice $n \mapsto n+1$, então

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}_a \rangle(t) &= e^{-|\alpha|^2} e^{-\sigma t} e^{-2s^2 \sin^2(\frac{t}{2})} \times \\ &\times \Re \left\{ \alpha e^{-irt} e^{is(\Re\{\beta\} \sin t + \Im\{\beta\}(1-\cos t))} e^{is^2(t-\sin t)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|\alpha| e^{is^2(t-\sin t)})^{2n}}{n!} \right\} \quad (5.7.5) \end{aligned}$$

onde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|\alpha| e^{is^2(t-\sin t)})^{2n}}{n!} = e^{|\alpha|^2 \cos(2s^2(t-\sin t))} e^{i|\alpha|^2 \sin(2s^2(t-\sin t))} - 1 \quad (5.7.6)$$

Substituindo (5.7.6) em (5.7.5)

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}_a \rangle(t) &= |\alpha| e^{-(|\alpha|^2 + \sigma t + 2s^2 \sin^2(\frac{t}{2}))} \left[e^{|\alpha|^2 \cos(2s^2(t-\sin t))} \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos(z + |\alpha|^2 \sin(2s^2(t-\sin t))) - \cos(z) \right] \quad (5.7.7) \end{aligned}$$

onde a nova função z , substitui termos repetidos:

$$z = \theta + rt + s(\Re\{\beta\} \sin t + \Im\{\beta\}(1-\cos t)) + s^2(t-\sin t)$$

com

$$\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$$

O escalar que caracteriza o estado inicial do espelho pode ser reescrito como

$$\beta = |\beta| e^{i\xi}$$

5.7.3 Média da quadratura da amplitude

A equação (5.7.7) é muito complexa para ser analisada, porém o valor do acoplamento s é fundamental em sua compreensão, pois com o aumento de sua intensidade se verifica que o gráfico $t \times \langle \hat{x}_a \rangle(t)$ se agrupa de maneira a criar intervalos de tempo em que $\langle \hat{x}_a \rangle(t) \approx 0$ em relação ao valor das amplitudes que ocorre nos agrupamentos. Por exemplo:

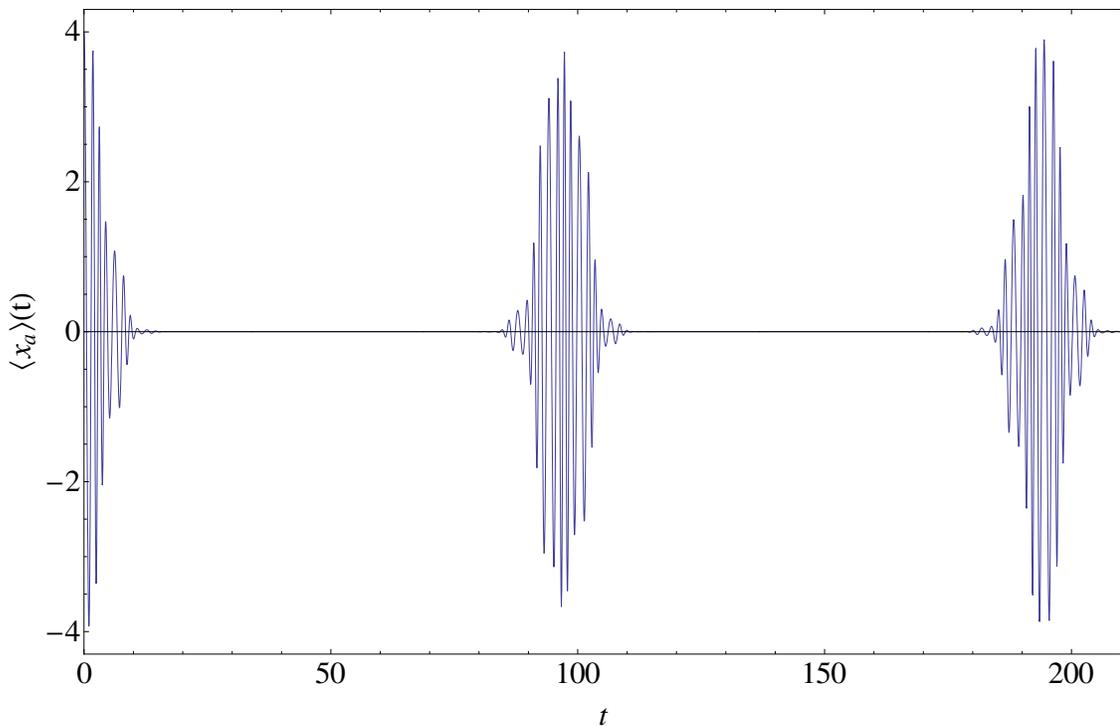


Figura 5.5: Média da quadratura da amplitude do campo, $\langle \hat{x}_a \rangle(t)$, em função do tempo, t . O número médio de fótons na cavidade óptica é $|\alpha| = 4$, o fator de acoplamento entre o campo e o espelho móvel é $s = 0.18$ e a razão entre a frequência do campo e a frequência de oscilação do espelho é $r = 3$. Não há amortecimento do campo por parte do reservatório, $\sigma = 0$. O estado inicial do espelho é o vácuo, $\beta = 0$, e a fase do campo é nula, $\theta = 0$.

Reparando que existem intervalos que a média da quadratura da amplitude quase se anula. Ao aumentar o valor de s , então o gráfico fica:

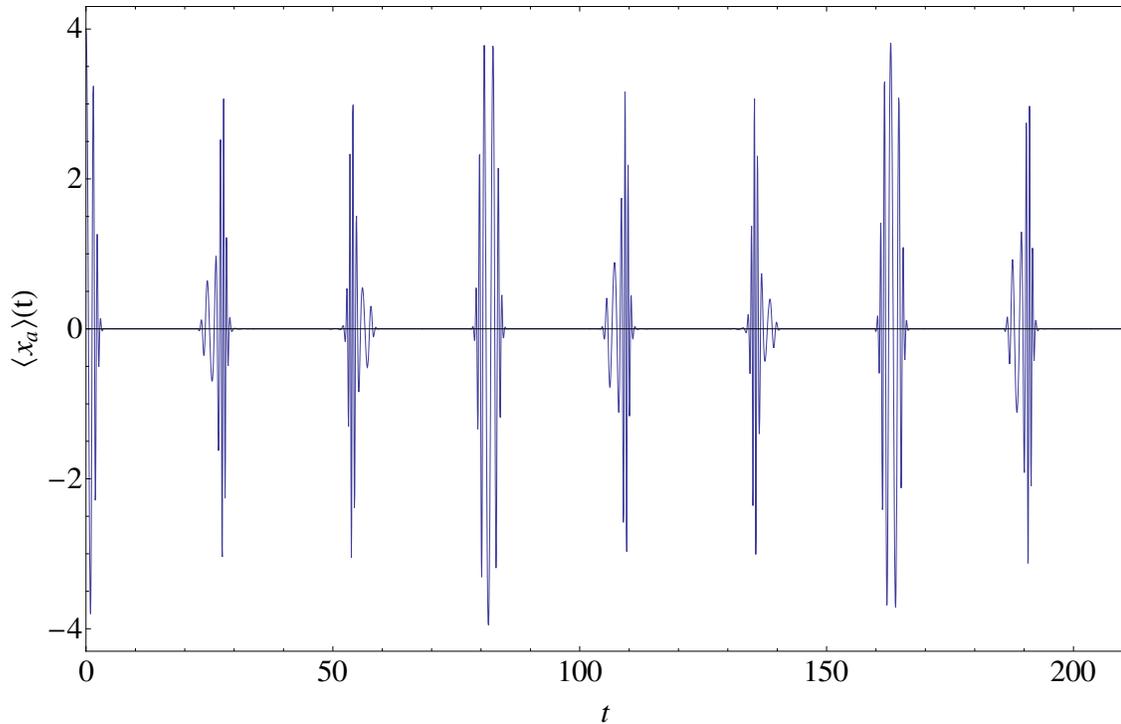


Figura 5.6: Média da quadratura da amplitude do campo, $\langle \hat{x}_a \rangle(t)$, em função do tempo, t . O número médio de fótons na cavidade óptica é $|\alpha| = 4$, o fator de acoplamento entre o campo e o espelho móvel é $s = 0.34$ e a razão entre a frequência do campo e a frequência de oscilação do espelho é $r = 3$. Não há amortecimento do campo por parte do reservatório, $\sigma = 0$. O estado inicial do espelho é o vácuo, $\beta = 0$, e a fase do campo é nula, $\theta = 0$.

Os grupos da Figura 5.6 se aproximam e contraem sua largura em relação aos da Figura 5.5, além de alguns diminuírem sua intensidade. O fator s altera a largura de cada grupo e o espaçamento entre eles, sendo que é possível unir grupos, além de alterar o valor máximo da amplitude de um grupo. E de acordo com as figuras 5.7 e 5.8, o número médio de fótons na cavidade dado por $N_k = |\alpha|^2$ altera o valor máximo da amplitude de cada grupo, além de alterar a largura de um grupo. O valor de r altera o número de picos e vales dos grupos. O valor de β altera o espaçamento entre dois vales consecutivos e o número de vezes que cada grupo cruza o eixo t . O valor de θ altera a fase dos vales no grupo. O fator de amortecimento σ ao ser aumentado, destrói rapidamente grupos mais afastados de $t = 0$. A partir de um certo valor de σ ($\sigma = 1$ pode ser considerado um valor bem alto) sobra apenas o primeiro grupo que começa em $t = 0$ e termina aonde determina os valores de s e de $|\alpha|$.

Para uma situação inicialmente quase-clássica ($|\alpha| \gg 1$), mesmo que não haja amortecimento ($\sigma = 0$), os grupos se afastam tanto que, por um longo período de tempo, existirá

apenas o primeiro grupo, onde a média da quadratura da amplitude oscila apenas nos primeiros instantes e depois passa a ser praticamente nula por um longo período. Para a situação quântica, por exemplo a Figura 5.7, onde é mostrada uma situação com acoplamento fraco entre campo e espelho, nota-se que os grupos ainda não se formaram, e o espaço entre eles não é nulo, e que ao ser amortecido com $\sigma = 0.008$, o gráfico se torna a Figura 5.8.

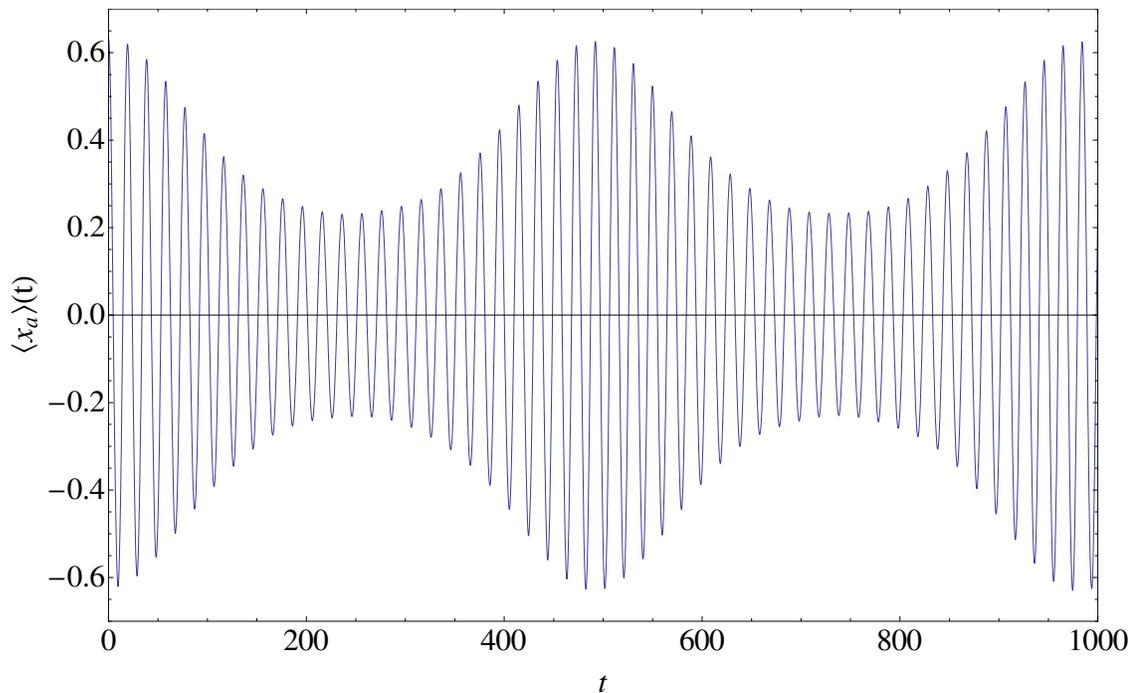


Figura 5.7: Média da quadratura da amplitude do campo, $\langle \hat{x}_a \rangle(t)$, em função do tempo, t . O número médio de fótons na cavidade óptica é $|\alpha| = 1$, o fator de acoplamento entre o campo e o espelho móvel é $s = 0.08$ e a razão entre a frequência do campo e a frequência de oscilação do espelho é $r = 0.3$. Não há amortecimento do campo por parte do reservatório, $\sigma = 0$. O estado inicial do espelho é o vácuo, $\beta = 0$, e a fase do campo é nula, $\theta = 0$.

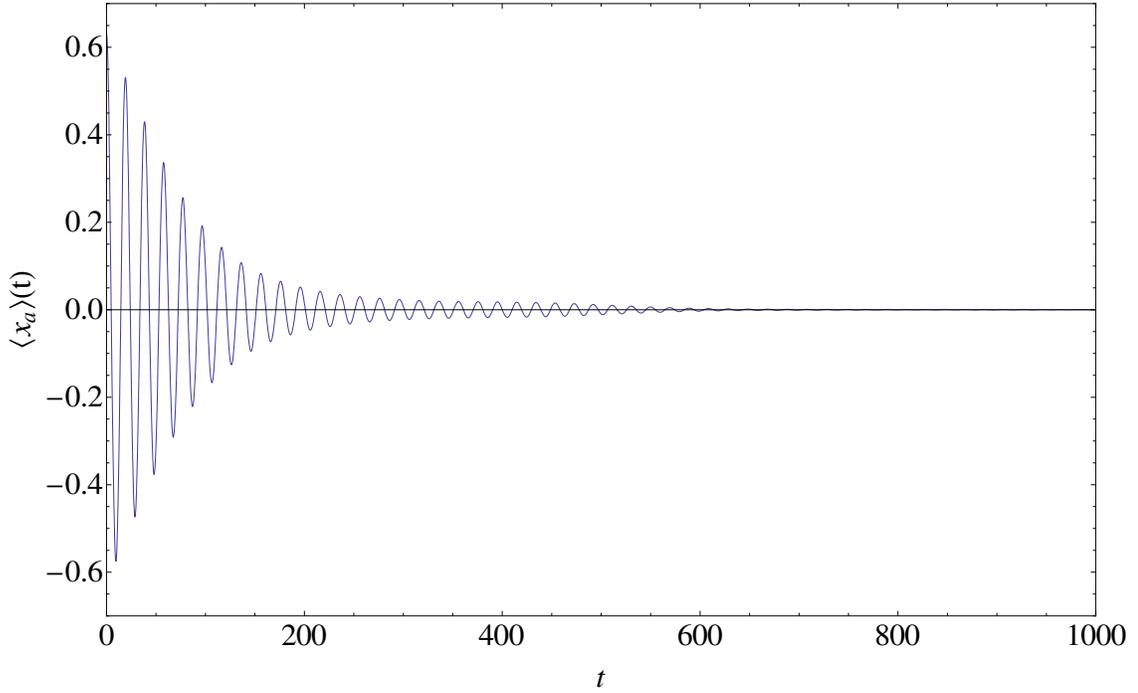


Figura 5.8: Média da quadratura da amplitude do campo, $\langle \hat{x}_a \rangle(t)$, em função do tempo, t . O número médio de fótons na cavidade óptica é $|\alpha| = 1$, o fator de acoplamento entre o campo e o espelho móvel é $s = 0.08$ e a razão entre a frequência do campo e a frequência de oscilação do espelho é $r = 0.3$. Existe amortecimento de fase do campo por parte do reservatório, $\sigma = 0.008$. O estado inicial do espelho é o vácuo, $\beta = 0$, e a fase do campo é nula, $\theta = 0$.

Durante os instantes em que a média da quadratura da amplitude é praticamente nula, não significa que o campo eletromagnético também é nulo, pois a energia do campo deve se manter constante, como foi calculado ao mostrar que o número de fótons do modo k na cavidade é constante. O que ocorre é que os gráficos mostraram o comportamento da *média* da quadratura da amplitude do potencial vetor, e isso indica que uma situação inicialmente quase-clássica se torna quântica com o passar do tempo. Usando a teoria desenvolvida na Subseção 2.4.10 e medindo a quadratura da amplitude do estado do campo, ele colapsará para:

$$\hat{\rho}_C(t) \xrightarrow{\hat{x}_a} \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle x | \hat{\rho}_C(t) | x \rangle |x\rangle \langle x|$$

onde $\langle x | \hat{\rho}_C(t) | x \rangle$ representa a fração populacional, e o novo ensemble acima não possui traço unitário, já que o vetor posição não é normalizável. Analisando a fração populacional, obtém-

se:

$$f(x, t) \equiv \langle x | \hat{\rho}_C(t) | x \rangle = \frac{e^{-|\alpha|^2 - 2x^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|/\sqrt{2})^{n+m}}{n!m!} e^{-(\sigma t + 2s^2 \sin^2(t/2))(n-m)^2} H_n(\sqrt{2}x) H_m(\sqrt{2}x) \times \\ \times \cos [(\theta - rt + s|\beta|(\sin(t - \xi) - \sin \xi))(n - m) + s^2(n^2 - m^2)(t - \sin t)]$$

onde foi usado $\beta = |\beta| e^{i\xi}$, e as autofunções energias representadas em coordenadas de posição:

$$\langle x | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-x^2} H_n(\sqrt{2}x)$$

com H_n sendo o polinômio de Hermite.

Na Figura 5.9 são mostradas a quadratura da amplitude na abscissa e a fração populacional na ordenada, sendo que o instante é $t = 30$, assim a comparação pode ser feita com a Figura 5.5 que mostra uma média nula nesse instante.

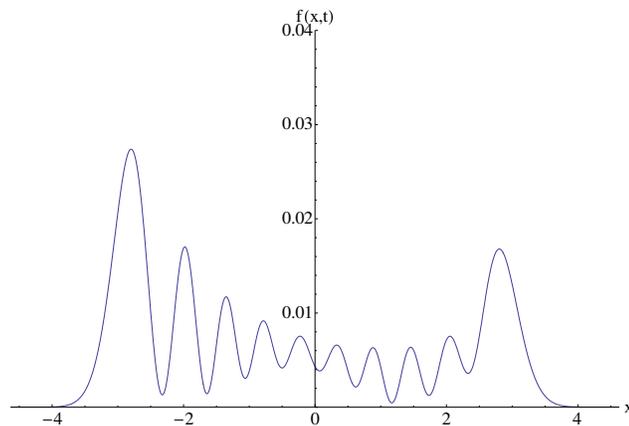


Figura 5.9: Fração populacional da quadratura da amplitude do campo, $f(x, t)$, no instante $t = 30$, em função da quadratura da amplitude do campo x . O número médio de fótons na cavidade óptica é $|\alpha| = 4$, o fator de acoplamento entre o campo e o espelho móvel é $s = 0.18$ e a razão entre a frequência do campo e a frequência de oscilação do espelho é $r = 3$. Não há amortecimento do campo por parte do reservatório, $\sigma = 0$. O estado inicial do espelho é o vácuo, $\beta = 0$, e a fase do campo é nula, $\theta = 0$.

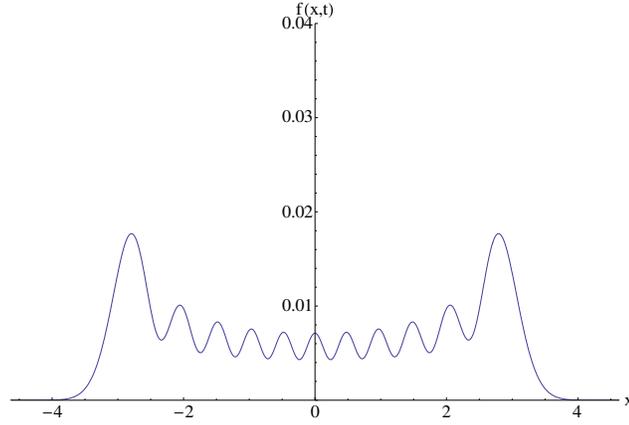


Figura 5.10: Fração populacional da quadratura da amplitude do campo, $f(x, t)$, no instante $t = 30$, em função da quadratura da amplitude do campo x . O número médio de fótons na cavidade óptica é $|\alpha| = 4$, o fator de acoplamento entre o campo e o espelho móvel é $s = 0.18$ e a razão entre a frequência do campo e a frequência de oscilação do espelho é $r = 3$. Existe amortecimento de fase do campo por parte do reservatório, $\sigma = 0.1$. O estado inicial do espelho é o vácuo, $\beta = 0$, e a fase do campo é nula, $\theta = 0$.

Ficando evidente nas Figuras 5.9 e 5.10 que a quadratura da amplitude não é nula, e portanto o campo eletromagnético também não é. Nota-se na Figura 5.9 que a população com amplitude positiva é parecida com a de amplitude negativa, evidenciando que a média é quase nula, como mostrado na Figura 5.5 para o instante $t = 30$. Essa semelhança aumenta muito, quando o amortecimento aparece na Figura 5.10, onde a fração populacional pode ser reescrita como se $\sigma \gg 1$:

$$\langle x | \hat{\rho}_C(t) | x \rangle = \frac{e^{-|\alpha|^2 - 2x^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2/2)^n}{n!^2} H_n^2(\sqrt{2}x)$$

Esses pontos foram enfatizados para mostrar que o estado do campo que começa como quase-clássico $|\alpha\rangle$ ($|\alpha| \gg 1$), não continuará quase-clássico, pois, classicamente, se não há amortecimento, a amplitude não permanece nula por longos períodos de tempo. Uma das explicações para isso é que a energia clássica do campo que é dada por:

$$\frac{1}{2} \int_0^{q(t)} dx \left[\left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (5.7.8)$$

e não deve variar com o tempo, como foi mostrado tanto classicamente como quanticamente. Assim, para que a média da amplitude, $\langle \hat{Q}_k \rangle$, corresponda sempre aos valores clássicos, ela não pode se anular por longos períodos. Tal comportamento não pode ocorrer, como foi mostrado nas Figuras 5.5 e 5.6, pois a derivada temporal de $\langle \hat{Q}_k \rangle$, que seria usado na equação (5.7.8),

iria quase se anular, alterando, assim, o valor da energia do campo na cavidade. Portanto, não deve haver a criação de grupos para que o estado continue quase-clássico. Uma outra explicação para que o estado do campo não continue quase-clássico é o valor que a incerteza sobre a medição da quadratura da amplitude produz, pois:

$$\langle \hat{x}_a^2 \rangle \gg \langle \hat{x}_a \rangle^2 \quad (5.7.9)$$

sendo que se o estado continuasse sempre quase-clássico esses valores seriam aproximadamente iguais. Conclui-se, então, que a equação (5.7.7) (com $\sigma = 0$) não é solução da equação clássica (3.1.7).

Capítulo 6

Conclusão

A equação do operador densidade do sistema (5.2.15) trata uma cavidade óptica com um campo eletromagnético e um espelho, ambos preparados em estados coerentes (campo preparado no estado $|\alpha\rangle$ e o espelho em $|\beta\rangle$), sendo que o campo interage com um reservatório, no qual o fator de amortecimento de fase é σ . Tal equação foi desenvolvida a partir do formalismo Hamiltoniano de um campo eletromagnético dentro de uma cavidade, tendo esta um espelho móvel, juntamente com a teoria do amortecimento de fase. Foi verificado para tempos longos ($t \gg \sigma^{-1}$) que o ensemble perde coerência devido ao amortecimento (equação (5.3.6)), sendo que esse processo é irreversível como mostra a entropia linear do sistema na equação (5.3.4) ou no gráfico (5.1), observando que para valores de $|\alpha| \gg 1$ (estado inicialmente quase-clássico) o ensemble chega a se tornar completamente misto (entropia igual a 1). Entretanto campo permanece sem perder energia para o reservatório que é um resultado esperado, já que esse reservatório foi modelado por uma coleção de espelhos sujeitos às mesmas condições do espelho móvel da cavidade, diferindo apenas na intensidade do acoplamento com o campo e no valor da temperatura para que possa valer a aproximação Markoviana. Lembrando que a equação (5.2.15) é válida somente para quando um modo do campo é muito mais intenso que os outros modos, num regime óptico, ou seja, para a frequência do campo muito maior que a do espelho, além do desenvolvimento ser não-relativístico, assim o espelho não atinge frequências muito altas.

Ao analisar o comportamento do espelho pela equação (5.4.1) foi possível concluir que o comportamento do espelho não é alterado pela presença do reservatório, pois ao variar o valor do amortecimento de fase, σ , a equação continua a mesma que $\sigma = 0$, ou seja, o acoplamento do sistema com o reservatório não modifica o comportamento do espelho. Essa conclusão foi feita para uma condição inicial coerente $|\alpha\rangle \langle\alpha| \otimes |\beta\rangle \langle\beta|$, porém não importa a configuração inicial do ensemble, $\hat{\rho}(0)$, o espelho não vai ter seu comportamento afetado pelo reservatório. Portanto, a entropia linear do espelho possui o mesmo comportamento comparado com o caso

em que o campo não está em contato com o reservatório. Pelos gráficos mostrados na Figura 5.3, temos um processo reversível, em que a entropia varia periodicamente de forma que quanto maior o valor do acoplamento do campo-espelho, s , mais próximo de um ensemble completamente aleatório ele chega para $t = \pi$ (instante de emaranhamento máximo entre campo e espelho).

Medindo a posição do espelho móvel é possível determinar com certa precisão o número de fótons confinados na cavidade óptica. De acordo com a equação (5.5.1), a fração populacional da posição do espelho é uma função gaussiana com os valores dos picos variando com o número de fótons na cavidade, ou seja, os picos estão localizados em $\Re\{\phi_n(t)\}$ (equação (5.5.2)) com n o número de fótons. Isso é possível, pois são conhecidos os valores: do estado inicial do sistema que foi preparado como $\hat{\rho}(0) = |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta|$, com $\beta = |\beta|e^{i\xi}$; do acoplamento espelho-campo s ; e do instante t em que é feita a medição da posição do espelho. Então, o valor de $\Re\{\phi_n(t)\}$ também é conhecido para todo n . Portanto, se o valor da posição estiver próximo a um desses picos, então o número de fótons na cavidade é provavelmente igual a n , pois a função gaussiana decai rapidamente ao se afastar de seu pico, tornando a possibilidade de termos com o número de fótons diferente de n desprezíveis.

Quanto ao campo confinado na cavidade, sua entropia do linear é descrita pela equação (5.6.2) que apresenta uma sobreposição de características da entropia do sistema com a entropia do espelho, que pode ser melhor visualizada ao comparar o gráfico da entropia do campo na Figura 5.4 com as Figuras 5.3 e 5.1. A perda de coerência do campo ocorre para tempos longos ($t \gg \sigma^{-1}$), onde a entropia atinge um limite, e quanto maior o valor de $|\alpha|$, mais próximo de um ensemble incoerente o campo chega.

Classicamente, a energia do campo está relacionada com a amplitude do campo e sua variação temporal, e na mecânica quântica um estado quase-clássico deve relacionar, da mesma maneira que o modelo clássico, a média da energia do campo com a média da amplitude do campo e sua variação temporal. Porém, para o sistema composto por uma cavidade óptica com um campo confinado e um espelho móvel, ambos descritos inicialmente por estados coerentes demonstrou que sua evolução temporal leva a média da quadratura da amplitude do campo a se comportar como nos gráficos 5.5 e 5.6, ou seja, para certos intervalos de tempo a média da amplitude é quase nula, formando grupos. Quanticamente, a média da quadratura a amplitude é nula nesses intervalos, e a média da energia não é nula e nem varia com o tempo, e assim essas médias não podem ser relacionadas pela equação clássica da energia. A conclusão é que o estado do sistema que era inicialmente quase-clássico deixa de ser com o passar do tempo, diferindo assim da descrição feita pelo modelo clássico.

Ao acoplar o campo com um reservatório, a média da quadratura da amplitude do campo se aproxima de zero com o passar do tempo, como mostrado no gráfico 5.8, e aparentemente

“destrói” o campo conservando a energia do campo na cavidade (devido ao amortecimento de fase), porém essa destruição ocorre apenas para a média da amplitude do campo, pois de acordo com o gráfico 5.10 o campo continua a existir, apenas a distribuição das amplitudes se modifica de maneira que o lado com amplitude positiva desse gráfico é idêntico ao lado com amplitude negativa. O gráfico 5.10 explica de maneira semelhante o que ocorre com a média amplitude do campo que se anula durante intervalos de tempo do gráfico 5.5.

Apêndice A

Apêndice

A.1 Traço do comutador

O traço do produto de dois operadores \hat{A} e \hat{B} feito sobre uma base discreta é dado por:

$$\text{Tr}\{\hat{A}\hat{B}\} = \sum_i \langle \phi_i | \hat{A}\hat{B} | \phi_i \rangle \quad (\text{A.1.1})$$

e sobre uma base contínua é dado por:

$$\text{Tr}\{\hat{A}\hat{B}\} = \int du \langle \phi(u) | \hat{A}\hat{B} | \phi(u) \rangle \quad (\text{A.1.2})$$

Para uma base discreta com N vetores, o traço pode ser reescrito como:

$$\text{Tr}\{\hat{A}\hat{B}\} = \sum_{i=1}^N \langle \phi_i | \hat{A}\hat{B} | \phi_i \rangle \quad (\text{A.1.3})$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle \phi_i | \hat{A} | \phi_j \rangle \langle \phi_j | \hat{B} | \phi_i \rangle \quad (\text{A.1.4})$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle \phi_j | \hat{B} | \phi_i \rangle \langle \phi_i | \hat{A} | \phi_j \rangle \quad (\text{A.1.5})$$

$$= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \langle \phi_j | \hat{B} | \phi_i \rangle \langle \phi_i | \hat{A} | \phi_j \rangle \quad (\text{A.1.6})$$

$$= \sum_{j=1}^N \langle \phi_j | \hat{B}\hat{A} | \phi_j \rangle \quad (\text{A.1.7})$$

$$= \text{Tr}\{\hat{B}\hat{A}\} \quad (\text{A.1.8})$$

Para uma base contínua com vetores no intervalo fechado $u \in [a, b]$, o traço pode ser reescrito como:

$$\text{Tr}\{\hat{A}\hat{B}\} = \int_a^b du \langle \phi(u) | \hat{A}\hat{B} | \phi(u) \rangle \quad (\text{A.1.9})$$

$$= \int_a^b du \int_a^b dv \langle \phi(u) | \hat{A} | \phi(v) \rangle \langle \phi(v) | \hat{B} | \phi(u) \rangle \quad (\text{A.1.10})$$

$$= \int_a^b du \int_a^b dv \langle \phi(v) | \hat{B} | \phi(u) \rangle \langle \phi(u) | \hat{A} | \phi(v) \rangle \quad (\text{A.1.11})$$

$$= \int_a^b dv \int_a^b du \langle \phi(v) | \hat{B} | \phi(u) \rangle \langle \phi(u) | \hat{A} | \phi(v) \rangle \quad (\text{A.1.12})$$

$$= \int_a^b dv \langle \phi(v) | \hat{B}\hat{A} | \phi(v) \rangle \quad (\text{A.1.13})$$

$$= \text{Tr}\{\hat{B}\hat{A}\} \quad (\text{A.1.14})$$

E portanto, o traço sobre o comutador de dois operadores \hat{A} e \hat{B} (feito sobre uma base finita) é:

$$\text{Tr}\{[\hat{A}, \hat{B}]\} = \text{Tr}\{\hat{A}\hat{B}\} - \text{Tr}\{\hat{B}\hat{A}\} = 0 \quad (\text{A.1.15})$$

Porém esse resultado não é sempre válido para bases discretas com infinitos vetores e para bases contínuas com intervalo infinito, pois nem sempre é possível comutar a ordem de uma soma dupla (como foi feito na passagem (A.1.5) à (A.1.6)) ou integral dupla (como foi feito na passagem (A.1.11)à(A.1.12)) quando seus intervalos são infinitos. Nesse caso, para que a comutação seja possível, é necessário que o valor do traço ((A.1.1) e (A.1.2)) seja convergente. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\} &= \text{Tr}\{\mathbf{1}\} = +\infty \\ \text{Tr}\{[\hat{x}, \hat{p}]\} &= i\hbar \text{Tr}\{\mathbf{1}\} = +i\infty \end{aligned}$$

não satisfazendo assim (A.1.15).

A média de um observável, \hat{A} , sobre um ensemble descrito pelo operador densidade $\hat{\rho}$ é dado por:

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}\{\hat{A}\hat{\rho}\}$$

onde o traço é feito sobre uma base infinita. Como uma média qualquer nunca resultará num valor infinito, então é sempre possível comutar os operadores \hat{A} e $\hat{\rho}$ no argumento da função traço. Na dissertação existem trechos em que somas duplas com infinitos termos foram comutadas, porque o valor da soma dupla em questão é finito.

A.2 Matriz idempotente

Uma matriz idempotente \hat{A} é uma matriz que ao ser multiplicada por ela mesma resulta nela mesma:

$$\hat{A}^2 = \hat{A} \quad (\text{A.2.1})$$

ou seja, é uma matriz que possui a mesma potência natural sempre:

$$\hat{A}^N = \hat{A} \quad (\text{A.2.2})$$

com $N \in \mathbb{N}^*$.

Seja $|\alpha_n^i\rangle$ um autovetor normalizado de \hat{A} , usando esses autovetores em (A.2.1):

$$(\alpha_n)^2 |\alpha_n^i\rangle = \alpha_n |\alpha_n^i\rangle \quad (\text{A.2.3})$$

conclui-se que os autovalores são:

$$\alpha_1 = 0 \quad (\text{A.2.4})$$

$$\alpha_2 = 1 \quad (\text{A.2.5})$$

Logo, a matriz \hat{A} pode ser escrita como:

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{g_2} |\alpha_2^i\rangle \langle \alpha_2^i| \quad (\text{A.2.6})$$

com g_2 o grau de degenerescência do subespaço de autovalor 1.

A.3 Derivação do operador evolução temporal unitário

Nessa seção será seguido o procedimento da referência [36]. A evolução temporal unitária é dada por:

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = e^{-ir\hat{n}_a} e^{-i\hat{n}_b t + is\hat{n}_a(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)t}$$

onde t é o tempo adimensional reescalado, ou seja, o tempo usual dimensional dado em segundos multiplicado pela frequência ω_m , $s = g/(2\omega_m)$, e $r = \omega_k/\omega_m$. Considerando uma transformação unitária usando o operador deslocamento definido por:

$$\hat{D} \equiv \hat{D}_b(-s\hat{n}_a) = e^{-is\hat{n}_a(\hat{b}^\dagger - \hat{b})}$$

Notando que a amplitude de deslocamento é proporcional ao número de fótons na cavidade, e que o adjunto do operador deslocamento é $\hat{D}^\dagger = \hat{D}_b(s\hat{n}_a)$. Usando o Teorema de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH), e aplicando a transformação unitária, obtém-se:

$$\begin{aligned}\hat{D}\hat{b}\hat{D}^\dagger &= \hat{b} + s\hat{n}_a \\ \hat{D}\hat{b}^\dagger\hat{D}^\dagger &= \hat{b}^\dagger + s\hat{n}_a \\ \hat{D}\hat{n}_a\hat{D}^\dagger &= \hat{n}_a\end{aligned}$$

Usando o fato que

$$\hat{U}f(\{\hat{X}_i\})\hat{U}^\dagger = f(\{\hat{U}\hat{X}_i\hat{U}^\dagger\}) \quad (\text{A.3.1})$$

para qualquer função f , operador unitário \hat{U} , e conjunto arbitrário de operadores $\{\hat{X}_i\}$, o efeito da transformação sobre o operador evolução temporal é calculado e se torna:

$$\hat{D}\hat{U}(t)\hat{D}^\dagger = e^{-ir\hat{n}_at}e^{is^2\hat{n}_a^2t}e^{-i\hat{n}_bt}$$

Multiplicando pela esquerda por \hat{D}^\dagger e pela direita por \hat{D} é desfeito a transformação unitária, voltando a obter $\hat{U}(t)$, porém com uma forma diferente:

$$\hat{U}(t) = e^{-ir\hat{n}_at}e^{is^2\hat{n}_a^2t}\hat{D}^\dagger e^{-i\hat{n}_bt}\hat{D}$$

pois \hat{D} comuta com \hat{n}_a . Como $e^{-i\hat{n}_bt}e^{i\hat{n}_bt} = \mathbf{1}$, então:

$$\hat{U}(t) = e^{-ir\hat{n}_at}e^{is^2\hat{n}_a^2t}\hat{D}^\dagger e^{-i\hat{n}_bt}\hat{D}e^{i\hat{n}_bt}e^{-i\hat{n}_bt}$$

notando que $e^{-i\hat{n}_bt}$ é um operador unitário, e aplicando a transformação unitária em \hat{D} através de (A.3.1) e usando o teorema BCH, obtém-se:

$$e^{-i\hat{n}_bt}\hat{D}e^{i\hat{n}_bt} = e^{-s\hat{n}_a(\hat{b}^\dagger e^{-it} - \hat{b}e^{it})} = \hat{D}_b(-se^{-it}\hat{n}_a)$$

e pela propriedade da adição de argumentos em operadores deslocamento:

$$\hat{D}_b(s\hat{n}_a)\hat{D}_b(-se^{-it}\hat{n}_a) = \hat{D}_b(s(1 - e^{-it})\hat{n}_a)e^{-is^2\hat{n}_a^2 \sin t}$$

Logo:

$$\hat{U}(t) = e^{-ir\hat{n}_at}e^{is^2\hat{n}_a^2(t - \sin t)}e^{s\hat{n}_a(\eta\hat{b}^\dagger - \eta^*\hat{b})}e^{-i\hat{n}_bt}$$

com $\eta = 1 - e^{-it}$.

Referências Bibliográficas

- [1] Jasper Chan, T. P. Mayer Alegre, Amir H. Safavi-Naeini, Jeff T. Hill, Alex Krause, Simon Gröblacher, Markus Aspelmeyer e Oskar Painter (2011). “Laser cooling of a nanomechanical oscillator into its quantum ground state”, *Nature*, Vol. 478, pág. 89.
- [2] E. Verhagen, S. Deléglise, S. Weis, A. Schliesser e T. J. Kippenberg (2012). “Quantum-coherent coupling of a mechanical oscillator to an optical cavity mode”, *Nature*, Vol. 482, pág. 63.
- [3] Cohen-Tannoudji, Claude; Diu, Bernard; Lalöe, Franck. “Quantum Mechanics”, Vol. 1.
- [4] Born, Max (1926). “Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge”, *Journal of Physics* (em alemão).
- [5] Schrödinger, E. (1926). “An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules”. *Physical Review*, Vol. 28, pág. 1049.
- [6] Kittel, Charles; Herbert Kroemer (1980). “Thermal Physics”, Second Edition. San Francisco: W.H. Freeman and Company. pág. 31.
- [7] Sakurai, Jun John (1994). “Modern Quantum Mechanics”, Revised Edition, pág. 174.
- [8] Heisenberg, W. (1927), "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik", *Zeitschrift für Physik*, Vol. 43 (3–4), pág. 172–198.
- [9] Kennard, E. H. (1927), "Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen", *Zeitschrift für Physik*, Vol. 44 (4–5), pág. 326
- [10] Robertson, H. P. (1929). "The Uncertainty Principle". *Physical Review*, Vol. 34, pág. 163–164.
- [11] Sakurai, Jun John (1994). “Modern Quantum Mechanics”, Revised Edition, pág. 181.
- [12] P. A. M. Dirac (1930). “Note on Exchange Phenomena in the Thomas Atom”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 26, pág. 376–385.

- [13] Gabriel Drobný, Igor Jex e Vladimír Bužek (1993). “Mode entanglement in nondegenerate down-conversion with quantized pump”, *Physical Review A*, Vol. 48, pág. 569-579.
- [14] William R. Frensley (1995). “Linear Algebra of Superoperators”, University of Texas at Dallas, internet website <http://www.utdallas.edu/~frensley/technical/opensyst/node7.html>
- [15] Morse, P. M. and Feshbach, H. (1953). “Methods of Theoretical Physics, Part 1”, New York: McGraw-Hill, pág. 72-73.
- [16] C. M. Caves (1980). “Quantum-Mechanical Radiation-Pressure Fluctuations in an Interferometer”, *Physical Review Letters*, Vol. 45, 75.
- [17] R. Loudon (1981). “Quantum Limit on the Michelson Interferometer used for Gravitational-Wave Detection”, *Physical Review Letters*, Vol. 47, 815.
- [18] A. F. Pace, M. J. Collett, e D. F. Walls (1993). “Quantum limits in interferometric detection of gravitational radiation”, *Physical Review A*, Vol. 47, 3173.
- [19] G. T. Moore (1970). “Quantum Theory of the Electromagnetic Field in a Variable Length One Dimensional Cavity”, *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 11, 2679.
- [20] M. T. Jaekel e S. Reynaud (1990). “Quantum Limits in Interferometric Measurements”, *Europhysics Letters* Vol. 13, 301.
- [21] V. V. Dodonov, A. B. Klimov, e D. E. Nikonov (1993). “Quantum phenomena in resonators with moving walls”, *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 34, 2742.
- [22] C. K. Law (1994). “Resonance Response of the Quantum Vacuum to an Oscillating Boundary”, *Physical Review Letters*, Vol. 73, 1931.
- [23] S. Mancini, e P. Tombesi (1994). “Quantum noise reduction by radiation pressure”, *Physical Review A*, Vol. 49, pág. 4055.
- [24] K. Jacobs, P. Tombesi, M. J. Collett, e D. F. Walls (1994). “Quantum-nondemolition measurement of photon number using radiation pressure”, *Physical Review A*, Vol. 49, pág. 1961.
- [25] C. K. Law (1995). “Interaction between a moving mirror and radiation pressure: A Hamiltonian formulation”, *Physical Review A*, Vol. 51, 2537.
- [26] Plunien, Günter; Müller, Berndt; Greiner, Walter (1986). “The Casimir effect”, *Physics Reports*, Vol. 134, pág. 87-193.

- [27] H. B. G. Casimir e D. Polder (1948). “The Influence of Retardation on the London-van der Waals Forces”, *Physical Review Online Archive*, Vol. 73, pág. 360-372.
- [28] Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang (2010). “Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition”, Cambridge University Press, pág. 387.
- [29] Louisell, William H. (1990). “Quantum Statistical Properties fo Radiation”, pág. 331-343.
- [30] Le-Man Kuang, Xin Chen, Guang-Hong Chen and Mo-Lin Ge (1997). “Jaynes-Cummings model with phase damping”, *Physical Review A*, Vol. 56, pág. 3139-3149.
- [31] A. O. Caldeira, e A. J. Leggett (1983). “Quantum tunneling in a dissipative system”, *Annals of Physics*, Vol. 149, pág. 374-456.
- [32] Gautam Gangopadhyay e Deb Shankar Ray (1992). “Non-Markovian master equation for linear and nonlinear systems”, *Physical Review A*, Vol. 46, pág. 1507-1515.
- [33] S. Mancini, V. I. Man’ko, e P. Tombesi (1996). “Ponderomotive control of quantum macroscopic coherence”, *Physical Review A*, Vol. 55, pág. 3042-3050.
- [34] P. Meystre, E. M. Wright, J. D. McCullen, e E. Vignes (1985). “Theory of radiation-pressure-driven interferometers”, *Journal of the Optical Society of America B*, Vol. 2, pág. 1830.
- [35] A. Dorsel, J. D. McCullen, P. Meystre, E. Vignes e H. Walther (1983). “Optical Bistability and Mirror Confinement Induced by Radiation Pressure”, *Physical Review Letters*, Vol. 51, pág. 1550.
- [36] S. Bose, K. Jacobs, e P. L. Knight (1997). “Preparation of nonclassical states in cavities with a moving mirror”, *Physical Review A*, Vol. 56, pág. 4175-4186.