

Transferência de Estados de Dois Qubits usando Cavidades Acopladas com Átomos em seu Interior

Julio César González Henao

Prof. Dr.: José Antonio Roversi

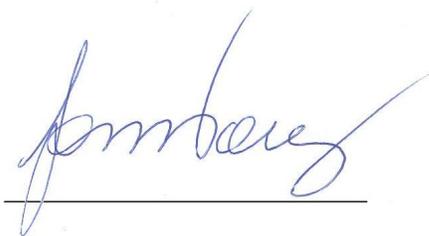
Orientador

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física “Gleb Wataghin” da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de mestre em física.

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Julio César González Henao e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 3 de outubro de 2011.

Prof. Dr. José Antonio Roversi



A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'j. a. roversi', is written above a horizontal line.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
VALKÍRIA SUCCI VICENTE – CRB8/5398 - BIBLIOTECA DO IFGW
UNICAMP

G589t Gonzalez Henao, Julio Cesar, 1987-
Transferência de estados de dois *qubits* usando
cavidades acopladas com átomos em seu interior / Julio
Cesar Gonzalez Henao. -- Campinas, SP : [s.n.], 2011.

Orientador: José Antonio Roversi.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Física “Gleb Wataghin”.

1. Qubits. 2. Cavidades. 3. Átomos. 4. Ótica
quântica. I. Roversi, José Antonio, 1947-
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física
“Gleb Wataghin”. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Transfer of states of two coupled qubits using cavities with atoms
in their interior

Palavras-chave em inglês:

Qubits
Cavities
Atoms
Quantum optics

Área de Concentração: Ótica

Titulação: Mestre em Física

Banca Examinadora:

José Antonio Roversi [Orientador]
Salomon Sylvain Mizrahi
Antonio Vidiella Barranco

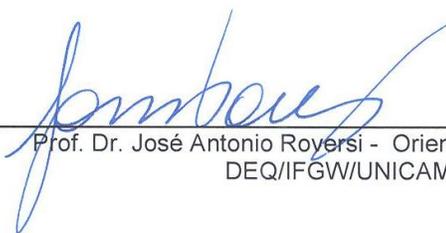
Data da Defesa: 03-10-2011

Programa de Pós-Graduação em: Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **JULIO CESAR GONZALEZ HENAO** – R.A. 098215 APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 03/10/2011.

COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. José Antonio Rovérsi - Orientador do Candidato
DEQ/IFGW/UNICAMP



Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi – DF/UFSCAR



Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco – DEQ/IFGW/UNICAMP

Dedico esta dissertação a minha avó Rafaela Mina. Mulher trabalhadora que, com amor e disciplina, dedica sua vida à sua família.

Dedico esta disertación a mi abuela Rafaela Mina. Mujer trabajadora que, con amor y disciplina, dedica su vida a su familia. .

Agradecimentos

É difícil criar ou ajudar a criar algo sem que outros influenciem de uma ou outra maneira em isso. . . . É por isso que sempre temos a quem agradecer por cruzar em nossa vida.

A realização deste trabalho não é a exceção. Tenho muito que agradecer em primeiro lugar a Deus por ser meu guia em todo momento.

A meu orientador Prof. Dr. Jose Antonio Roversi, por oferecer-me seu apoio, compartilhar sua sabedoria e ter a mim muita paciência.

Aos meus companheiros do grupo de pesquisa, principalmente ao Gustavo, ao Douglas e ao Bruno que me ajudaram, os quais toleravam todas as minhas perguntas e sempre foram muito legais.

Aos meus companheiros colombianos Juan, Jose, Duber e também ao Alexis, Mark e toda a galera.

À minha querida namorada a quem amo muito e sempre me deu um grande apoio, Diana Janikza Corrales.

A meu pai Julio César e minha mãe Fabiola, que são sempre minha inspiração.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Sumário

Resumo	xvii
Abstract	xix
1 Introdução	1
2 Conceitos Fundamentais	5
2.1 Campo Eletromagnético no Vácuo	5
2.1.1 Quantização do Campo Eletromagnético	7
2.1.2 Oscilador Harmônico e estados de Fock	8
2.2 Interação da Radiação com a Matéria	10
2.2.1 Teoria Quântica	12
2.2.2 Modelo de Jaynes-Cummings	13
2.3 Íon aprisionado numa Cavidade	16
2.3.1 Armadilha de Paul	16
2.3.2 Hamiltoniano do sistema	20
2.4 Emaranhamento de Sistemas Quânticos	22
2.4.1 Medidas de emaranhamento	23
3 Transferência de estados de íons aprisionados em cavidades com 1 ou 2 modos normais	25
3.1 Acoplamento Direto entre as Cavidades	25
3.1.1 Diagonalização do Hamiltoniano de Interação entre as Cavidades	27
3.1.2 Aproximações no sistema	29
3.1.3 Solução analítica e Resultados	33
3.1.3.1 Transferência com um modo	35

3.1.3.2	Transferência com dois modos	39
3.2	Acoplamento por Fibra Óptica entre as Cavidades	46
3.2.1	Diagonalização do Hamiltoniano de Interação entre as Cavidades e a fibra	47
3.2.2	Aproximações no sistema	49
3.2.3	Solução analítica e Resultados	52
3.2.3.1	Transferência com um modo	53
3.2.3.2	Transferência com dois modos	55
3.3	Comparação entre transferência com acoplamento direito ou por fibra óptica	57
4	Transferência de estados entre íons aprisionados em cavidades com reser- vatórios térmicos	59
4.1	Reservatórios térmicos e equação mestra	59
4.2	Emissão espontânea	63
4.2.1	Solução analítica	64
4.2.2	Resultados	66
4.3	Perdas na Armadilha	69
4.3.1	Solução Aproximada	70
4.3.2	Resultados	71
5	Conclusões	75
A	Sistemas de Equações Diferenciais	79
A.1	Sistema de equações diferenciais para o sistema de cavidades acopladas por fibra óptica e transferência com dois modos	79
A.2	Sistema de equações diferenciais para o sistema de emissão espontânea	80
	Referências Bibliográficas	84

Lista de Figuras

2.3.1 (a) Esquema da armadilha de Paul e (b) fotografia da armadilha para experimentos com íons de Ca^+ http://www.nat.vu.nl/en/index.asp	17
2.3.2 movimento secular na direção x (a) e movimento secular na direção y (b) onde $\Omega/\omega_x \approx \Omega/\omega_y = 20$, $b = 0.2$ e $x_0 = y_0 = \delta_x = \delta_y = 0$,	19
2.3.3 Íon de dois níveis aprisionado por um potencial efetivo na direção z quadrático em uma cavidade óptica	20
3.1.1 Esquema do sistema composto por duas cavidades acopladas diretamente com íon aprisionados em seu interior onde a região entre as cavidades é um meio dielétrico	27
3.1.2 Fidelidade para $\omega/\eta g = 22.5$, $\theta = \pi/4$ e $\lambda/\eta g = 2.5$. A linha preta representa a transferência feita no caso (A) e a linha verde com o caso (C). a figura da direita é um zoom da figura da esquerda no primeiro máximo $\tau = \pi$	39
3.1.3 Fidelidade para $\omega/\eta g = 22.5$ e $\lambda/\eta g = 2.5$. Na figura da direita temos transferência no caso (A) e na figura da esquerda no caso (C)	39
3.1.4 Fidelidade para $\omega + \lambda/\eta g = 25$ e $\theta = \pi/4$ na escala de tempo τ . A linha preta representa a transferência feita no caso (E) com $\Delta = 5$ e a linha verde com o caso (A). a figura da direita é um zoom da figura da esquerda.	43
3.1.5 Fidelidade na figura (a) com $\omega + \lambda/\eta g = 20$ e $\theta = \pi/4$ na escala de tempo τ . A linha preta representa a transferência feita no caso (F) com $\Delta = 5$ e a linha verde com o caso (A). Na figura (b) temos a fidelidade no caso (E) para diferentes valores de τ e θ	43
3.1.6 Fidelidade para $\omega - \lambda/\eta g = 20$ e $\theta = \pi/4$ na escala de tempo τ . A linha preta representa a transferência feita no caso (F) com $\Delta' = 5$ e a linha verde com o caso (C). a figura da direita é um zoom da figura da esquerda	45

3.1.7 Fidelidade na figura (a) com $\omega - \lambda/\eta g = 20$ e $\theta = \pi/4$ na escala de tempo τ . A linha preta representa a transferência feita no caso (F) com $\Delta' = 5$ e a linha verde com o caso (C). Na figura (b) temos a fidelidade no caso (F) para diferentes valores de τ e θ	46
3.2.1 Esquema do sistema composto de duas cavidades acopladas por uma fibra óptica com íon aprisionados em seu interior.	47
3.2.2 Fidelidade para $\omega/\eta g = 24$, $\theta = \pi/4$ e $\sqrt{2}\tilde{\lambda}/\eta g = 3$. A linha preta representa a transferência feita no caso (E) ,a linha verde com o caso (A) e a linha azul o caso (C).	55
3.2.3 Fidelidade para $\omega/\eta g = 20$ e $\theta = \pi/4$ na escala de tempo τ . A linha preta representa a transferência feita no caso (G) com $\tilde{\Delta} = 5$ e a linha verde com o caso (E). a figura da direita é um zoom da figura da esquerda	57
3.2.4 Fidelidade na figura (a) com $\omega/\eta g = 20$ e $\theta = \pi/4$ na escala de tempo τ . A linha preta representa a transferência feita no caso (G) com $\tilde{\Delta} = 5$ e a linha verde com o caso (E). Na figura (b) temos a fidelidade no caso (G) para diferentes valores de τ e θ	57
3.3.1 Fidelidade em função de τ para $\theta = \pi/4$. nas linhas verde e preta o acoplamento é com fibra óptica onde $\omega/\eta g = 20$ e respectivamente temos o caso (E) e o caso (G) com $\tilde{\Delta} = 5$. Na linha azul o acoplamento é direto considerando o caso (F) com $\omega - \lambda/\eta g = 20$ e $\Delta' = 5$	58
4.2.1 Fidelidade para $\omega/\eta g = 20$, $\theta = \pi/4$, $\tau = \eta g/t$ e $\varphi = 0$.linha azul $\kappa = 0$. Linha verde $m = 1$ e linha preta $m = 2$ onde $\kappa/\eta g = 0.02$. A figura da direita é um zoom da figura da esquerda no primeiro máximo da fidelidade em $\tau = \pi$	67
4.2.2 Fidelidade para $\omega/\eta g = 20$, $\theta = \pi/4$, $\tau = \eta g/t$ e $\varphi = 0$ (a) com $m = 1$ e (b) $m = 2$ onde $\kappa/\eta g = 0.02$	67
4.2.3 Fidelidade para $\omega/\eta g = 20$, $\tau = \eta g/t$ e $\varphi = 0$ (a) com $m = 1$ e (b) $m = 2$ onde $\kappa/\eta g = 0.02$	68
4.2.4 Entropia Linear para $\omega/\eta g = 20$, $\theta = \pi/4$, $\tau = \eta g/t$ e $\varphi = 0$. Linha azul $\kappa = 0$. Linha verde $m = 1$ e linha preta $m = 2$ onde $\kappa/\eta g = 0.02$	69
4.3.1 Fidelidade para $\omega/\eta g = 20$, $\theta = \pi/4$, $\tau = \eta g t$ e $\varphi = 0$. $\chi_{1,2}/\eta g = 0$ para a linha azul, $n = 0$ para a linha roxo, $n = 1$ para a linha verde, e $m = 2$ para a linha preta onde $\chi_{1,2}/\eta g = 0.02$	72

<p>4.3.2 Fidelidade para $\omega/\eta g = 20$, $\theta = \pi/4$, $\tau = \eta g t$ e $\varphi = 0$ onde (a) $\chi_1/\eta g = 0.02$ e $\chi_2 = 0$ e (b) $\chi_2/\eta g = 0.02$ e $\chi_1 = 0$. Nas duas figuras $n = 0, 1, 2$ para as linhas roxo, verde e preta respectivamente e na linha azul $\chi_{1,2} = 0$</p>	<p>72</p>
<p>4.3.3 Fidelidade para $\omega/\eta g = 20$, $\theta = \pi/4$, $\tau = \pi$ e $\varphi = 0$. Para a linha preta $n = 0$ e para a linha roxo $n = 1$ com χ em unidades ηg</p>	<p>73</p>

Lista de Tabelas

3.1	Constantes Θ_{lm}^{iks} em termos das frequências de transição eletrônica ω_a , movimento iônico ν , campo ω e acoplamento entre os campos das cavidades λ	31
3.2	Constantes Ξ_{lm}^{iks} em termos das frequências de transição eletrônica ω_a , frequência do movimento iônico ν , frequência do campo ω e frequência de acoplamento entre os campos das cavidades e a fibra $\tilde{\lambda}$	51
3.3	Hamiltonianos na representação de interação para diferentes aproximações e acoplamentos.	53

Resumo

Nesta dissertação estudamos um sistema formado por dois íons de dois níveis aprisionados em cavidades ópticas acopladas, onde analisamos a transferência de estados de dois qubits a partir dos graus de liberdade (de movimento unidimensional e dos estados internos) de um dos íons para o outro .

Para o acoplamento entre as cavidades consideramos dois mecanismos diferentes: (1) onde acoplamento é dado pela sobreposição dos campos (acoplamento direto) e (2) via fibra óptica. Em ambos casos foram utilizadas aproximações onde participam apenas um ou dois modos normais coletivos na transferência do estado. Também observamos que , na aproximação com dois modos normais, uma melhor transferência dos qubits no sistema acoplado por fibra óptica, quando é comparado com o sistema acoplado diretamente.

Por último, estudamos, na aproximação com um só modo normal de transferência, os efeitos de reservatórios térmicos sobre a transferência dos qubits no sistema de íons aprisionados em cavidades acopladas via fibra óptica. Tais reservatórios foram representados pelos processos de emissão espontânea e flutuações na armadilha a temperaturas $T \geq 0$. Os resultados mostram que os reservatórios geram perdas na fidelidade da transferência dos qubits.

Abstract

In this work we studied a system consisting of a pair of two-level trapped ions in coupled optics cavities, where we analyze the transfer of states of two qubits from the degrees of freedom (of movement and of internal states) of one ion to another.

For the coupling between the cavities we consider two different mechanisms: One where the coupling is given by the overlap of the fields (direct coupling) and one optical fiber. In both cases we use approximations in which only one or two collective normal modes are involved in the transfer of the state. From these calculations we have noted that in the approximations with two normal modes a better transfer of the qubit in the system coupled by optical fiber, compared with the system connected directly.

Finally, we studied the effects of thermal reservoirs in system of trapped ions in cavities coupled via optical fiber in the proximity of the one normal mode transfer. These reservoirs represent the processes of spontaneous emission and fluctuations in the trap for $T \geq 0$.

Capítulo 1

Introdução

Sistemas envolvendo a interação entre campos eletromagnéticos e objetos massivos, como átomos, íons ou pontos quânticos (“quantum dots”), têm fornecido diversos recursos para a análise de fenômenos fundamentais da física quântica, assim como propostas para a implementação de sistemas de informação [1, 2] e computação quântica [3, 4].

Um dos aspectos mais abordados hoje em dia refere-se ao emaranhamento entre as partes que compõem estes tipos de sistemas e seu grau de emaranhamento. Em geral, é observada a transferência de emaranhamento entre corpos massivos (átomos) e campos eletromagnéticos. Além disso, existe também interesse em utilizar sistemas envolvendo átomos e campos para obter a geração de estados emaranhados com propriedades especiais, como por exemplo os estados de Bell em sistemas bipartites ou os estados GHZ e os estados Cluster para sistemas multipartites.

Recentemente [5] foram analisadas as interações de um par de átomos de dois níveis com uma cavidade de um único modo, onde foram observadas as propriedades de emaranhamento quando um dos átomos está em ressonância com a frequência do campo e o outro está dispersivo, i.e., longe da ressonância.

Franco et al, [6] apresentaram um esquema onde é possível gerar estados generalizados de Bernoulli em duas cavidades separadas usando um par de átomos de dois níveis inicialmente em um estado emaranhado. Referente a estados emaranhados multipartite, Guo et al, [7] propuseram a geração de estados do tipo Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) e estados W para um modelo de N átomos de dois níveis idênticos interagindo com uma cavidade no regime dispersivo.

Na realização de experimentos envolvendo sistemas deste tipo são necessárias cavidades

com tempos de vida média relativamente grandes comparado com o tempo de duração dos experimentos. Para frequências na faixa de micro ondas temos as cavidades supercondutoras, onde os fótons têm tempos de vida média na faixa de 1 – 100ms. Alguns experimentos envolvendo a interação de cavidades de micro ondas com átomos já foram realizados, por exemplo, no trabalho feito por Raimond et al [8] é apresentada uma montagem experimental envolvendo a interação entre átomos de Rydberg e a cavidade de Fabry-Perot, montada com dois espelhos esféricos de Niobium.

Para cavidades no regime óptico temos as microcavidades de “corredor sussurrante” (“whispering gallery cavities”) [9], onde as ondas são confinadas no interior de microestruturas dielétricas (em geral feitas de sílica ou quartzo) através de reflexões internas totais contínuas. Para as microcavidades em forma de esferas e toros foram obtidas altas taxas de eficiência no acoplamento entre os modos de “corredor sussurrante” (“whispering gallery modes”) e fibras ópticas, chegando a uma eficiência de acoplamento acima de 99.97% [10]. Atualmente, também existem propostas para a interação destas cavidades com quantum dots e fibras ópticas com o objetivo de montar uma rede quântica [11].

Um dos sistemas mais estudados para implementação de sistemas em computação quântica envolve a interação entre campos eletromagnéticos e íons aprisionados. A proposta mais conhecida nessa área, apresentada por Cirac e Zoller [12], se refere a um arranjo de íons no interior de micro armadilhas, onde um campo externo pode ser aplicado em cada íon individualmente.

Recentemente, foram apresentados modelos onde os íons interagem com modos do campo de uma cavidade eletromagnética. Nesse tema o grupo de optica quântica do IFGW tem apresentado algumas contribuições. Em uma delas Semião et al [13] investigaram a geração de estados de Bell formados pelo movimento do íon e o campo da cavidade. Além disso, no trabalho de Nohama [14] foi apresentado um sistema formado por duas cavidades eletromagnéticas acopladas por uma fibra óptica, cada uma delas envolvendo um íon aprisionado de dois níveis. Neste modelo mostra-se que é possível obter a transferência de estados de dois qubits entre os dois íons, localizados em cavidades diferentes.

Também temos no trabalho de Pablo et al [15], onde foi apresentada uma proposta para geração de estados coerentes emaranhados do tipo cluster entre cavidades ópticas. Nesta proposta também foi possível observar uma supressão da morte súbita de emaranhamento em várias situações físicas.

Propostas similares estão sendo consideradas para aplicação em montagens experimentais do Grupo de Óptica Quântica e Espectroscopia da Universidade de Innsbruck (<http://heart->

c704.uibk.ac.at/). Este grupo já realizou experimentos envolvendo íons aprisionados no interior de cavidades ópticas, como por exemplo no trabalho de Mundt et al [16, 17] onde foi possível obter o acoplamento coerente entre íons de cálcio e o campo na cavidade óptica. Atualmente o grupo está buscando melhorar a qualidade da cavidade para comportar os fótons em tempos maiores e permitir o processamento de informação com os íons.

Nesta dissertação trabalhamos com um sistema formado por dois íons aprisionados por armadilhas em cavidades acopladas. Nossa pesquisa foi direcionada ao estudo da transferência de estados de dois qubits dos íons. Consideramos dois tipos de acoplamento nas cavidades, um direto, onde os campos das cavidades estão superpostos e outro, onde as cavidades têm acoplamento via fibra óptica. Além disso consideramos os efeitos do contato com reservatórios térmicos associados aos fenômenos de emissão espontânea e as perdas na armadilha no sistema acoplado por fibra óptica.

Esta dissertação está organizada como segue: No capítulo 2 apresentamos os principais conceitos utilizados nos capítulos seguintes. Lembrando os modelos utilizados na interação de radiação com a matéria e no aprisionamento de cargas.

No capítulo 3 é feito um estudo da transferência de estados dos íons aprisionados em cavidades acopladas diretamente ou por fibra óptica onde participam um ou dois modos normais coletivos, dessa maneira são comparados os dois tipos de acoplamentos.

No capítulo 4 consideramos os efeitos da emissão espontânea e as perdas na armadilha, descritas por reservatórios térmicos a temperatura maior a zero, no sistema acoplado por fibra óptica onde somente participa um modo normal coletivo.

As conclusões deste trabalho estão no capítulo 5

Capítulo 2

Conceitos Fundamentais

Para estudar quanticamente os sistemas propostos nesta dissertação vamos antes a fazer uma análise dos principais conceitos da óptica quântica. Nesta seção estudaremos de um ponto de vista quântico, as interações de campos eletromagnéticos com a matéria, seguindo com a análise de sistemas que podem confinar cargas elétricas e por último trataremos o emaranhamento de sistemas mistos e os diferentes tipos de medidas de emaranhamento.

2.1 Campo Eletromagnético no Vácuo

No estudo da eletrodinâmica as equações de Maxwell correspondem as ferramentas mais importantes para estudar a dinâmica de campos elétricos e magnéticos ($\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$ respectivamente). No vácuo as equações de Maxwell são:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t); \quad \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \\ \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t); \quad \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0.\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

Para solucionar estas equações podemos utilizar uma série de funções auxiliares chamadas potencial escalar $\Phi(\vec{r}, t)$ e potencial vetorial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ definidos como:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t); \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) - \nabla \Phi(\vec{r}, t),\tag{2.1.2}$$

estas funções não são únicas, temos em geral um conjunto de famílias de funções que satisfazem as relações (2.1.2), pelas quais temos certa liberdade para escolher as funções auxiliares:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &\rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) + \nabla\chi(\vec{r}, t) \\ \Phi(\vec{r}, t) &\rightarrow \Phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\chi(\vec{r}, t),\end{aligned}\tag{2.1.3}$$

cada tipo de família de funções está caracterizada por uma transformação chamada gauge. Um gauge muito utilizado na eletrodinâmica é o gauge de Coulomb, onde temos $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$ e $\Phi(\vec{r}, t) = 0$.

Utilizando estas relações podemos demonstrar que $\vec{A}(\vec{r}, t)$ satisfaz uma equação de onda:

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0.\tag{2.1.4}$$

A solução de (2.1.4) é dada por ondas planas, e pode ser simplificada se damos condições de contorno periódicas sobre um cubo de comprimento L . Desta maneira podemos escrever:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \lambda} \hat{e}_{\vec{k}, \lambda} \left(A_{\vec{k}, \lambda} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + A_{-\vec{k}, \lambda} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right),\tag{2.1.5}$$

onde $\omega_k = kc$ e $\vec{k} = 2\pi/L(n_x \hat{e}_x + n_y \hat{e}_y + n_z \hat{e}_z)$ com $\{n_x, n_y, n_z\} \in \mathbb{Z}$. Considerando o gauge escolhido é claro que $\hat{e}_{\vec{k}, \lambda} \cdot \vec{k} = 0$, isso representa que o vetor de polarização tem que ser perpendicular ao vetor de onda. Como $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ só temos duas possibilidades para λ , utilizamos $\hat{e}_{\vec{k}, 1}$ e $\hat{e}_{\vec{k}, 2}$. Para facilitar os cálculos podemos definir vetores de polarização circular $\hat{e}_{\vec{k}, \pm}$ que definem uma base ortonormal

$$\hat{e}_{\vec{k}, +} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_{\vec{k}, 1} + i\hat{e}_{\vec{k}, 2}) \quad e \quad \hat{e}_{\vec{k}, -} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_{\vec{k}, 1} - i\hat{e}_{\vec{k}, 2}).\tag{2.1.6}$$

Como já temos uma solução bem definida para o potencial vetorial podemos calcular os campos elétricos e de indução magnética

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \lambda} \omega_k \hat{e}_{\vec{k}, \lambda} \left(A_{\vec{k}, \lambda} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} - A_{-\vec{k}, \lambda} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right),\tag{2.1.7}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = - \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{\omega_k}{c} (\vec{k} \times \hat{e}_{\vec{k}, \lambda}) \left(A_{\vec{k}, \lambda} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} - A_{-\vec{k}, \lambda} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right),\tag{2.1.8}$$

respectivamente.

Por último podemos calcular a energia transportada pelo campo utilizando a fórmula:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int E(\vec{r}, t)^2 + c^2 B(\vec{r}, t)^2 dV, \quad (2.1.9)$$

onde ε_0 é a permissividade elétrica no vácuo. Nós podemos utilizar as condições de contorno periódicas para demonstrar :

$$\int e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}} dV = \prod_{i=1}^3 \int_0^L e^{i(k_i-k'_i)x_i} dx_i = \begin{cases} V & \text{se } \vec{k} - \vec{k}' = 0 \\ 0 & \text{se } \vec{k} - \vec{k}' \neq 0 \end{cases} \quad (2.1.10)$$

Substituindo o resultado (2.1.7) e (2.1.9) , e levando em conta (2.1.10), a definição $A_{\pm\vec{k},\lambda}(t) = A_{\vec{k},\lambda} e^{\mp i\omega_k t}$ nos conduz a :

$$\mathcal{W} = V\varepsilon_0 \sum_{\vec{k},\lambda} \omega_k^2 A_{\vec{k},\lambda}(t) \cdot A_{-\vec{k},\lambda}(t). \quad (2.1.11)$$

2.1.1 Quantização do Campo Eletromagnético

Para quantizar o campo eletromagnético é preciso escrever a energia deste em termos de variáveis canônicas. Utilizando as transformações:

$$\begin{aligned} A_{\vec{k},\lambda}(t) &= \frac{1}{\omega_k} \sqrt{\frac{1}{2V\varepsilon_0}} \left(\omega_k Q_{\vec{k},\lambda}(t) + iP_{\vec{k},\lambda}(t) \right) \\ A_{-\vec{k},\lambda}(t) &= \frac{1}{\omega_k} \sqrt{\frac{1}{2V\varepsilon_0}} \left(\omega_k Q_{\vec{k},\lambda}(t) - iP_{\vec{k},\lambda}(t) \right), \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

podemos substituir na Eq. (2.1.11) para ter:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k},\lambda} P_{\vec{k},\lambda}^2(t) + \omega_k^2 Q_{\vec{k},\lambda}^2(t). \quad (2.1.13)$$

Aplicando as transformações inversas:

$$\begin{aligned} Q_{\vec{k},\lambda}(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{2V\varepsilon_0} \left(A_{\vec{k},\lambda}(t) + A_{-\vec{k},\lambda}(t) \right), \\ P_{\vec{k},\lambda}(t) &= -i \frac{\omega_k}{2} \sqrt{2V\varepsilon_0} \left(A_{\vec{k},\lambda}(t) - A_{-\vec{k},\lambda}(t) \right), \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

e $\dot{A}_{\pm\vec{k},\lambda}(t) = \mp i\omega_k A_{\vec{k},\lambda}(t)$, podemos demonstrar as seguinte relações entre as grandezas P e Q :

$$\dot{Q}_{\vec{k},\lambda}(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2V\varepsilon_0} \left(\dot{A}_{\vec{k},\lambda}(t) + \dot{A}_{-\vec{k},\lambda}(t) \right) = P_{\vec{k},\lambda}(t) \quad (2.1.15)$$

$$\dot{P}_{\vec{k},\lambda}(t) = -i\frac{\omega_k}{2}\sqrt{2V\varepsilon_0} \left(\dot{A}_{\vec{k},\lambda}(t) - \dot{A}_{-\vec{k},\lambda}(t) \right) = -\omega_k^2 Q_{\vec{k},\lambda}(t) \quad (2.1.16)$$

Agora, usando as equações de Hamilton-Jacobi¹ temos

$$-\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial Q_{\vec{k},\lambda}} = -\omega_k^2 Q_{\vec{k},\lambda} = \dot{P}_{\vec{k},\lambda}; \quad \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial P_{\vec{k},\lambda}} = P_{\vec{k},\lambda} = \dot{Q}_{\vec{k},\lambda}. \quad (2.1.17)$$

Pela Eq. (2.1.17) é claro que a função $Q_{\vec{k},\lambda}$ é uma coordenada canônica e $P_{\vec{k},\lambda}$ é o momento canônico conjugado de $Q_{\vec{k},\lambda}$. Como identificamos as coordenadas canônicas definimos uma série de operadores que correspondem a estas, podemos definir o comutador entre os operadores utilizando os parêntesis de Poisson, definindo:

$$Q_{\vec{k},\lambda}(t) \rightarrow \hat{Q}_{\vec{k},\lambda}; \quad P_{\vec{k},\lambda}(t) \rightarrow \hat{P}_{\vec{k},\lambda},$$

$$\left\{ Q_{\vec{k},\lambda}(t), P_{\vec{k}',\lambda'}(t) \right\} = \delta_{kk'}\delta_{\lambda\lambda'} \rightarrow \left[\hat{Q}_{\vec{k},\lambda}, \hat{P}_{\vec{k}',\lambda'} \right] = i\hbar\delta_{kk'}\delta_{\lambda\lambda'}.$$

podemos escrever o operador hamiltoniano que representa o campo eletromagnético no vácuo como:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k},\lambda} \hat{P}_{\vec{k},\lambda}^2 + \omega_k^2 \hat{Q}_{\vec{k},\lambda}^2, \quad (2.1.18)$$

que corresponde a uma soma de osciladores harmônicos desacoplados com frequências ω_k .

2.1.2 Oscilador Harmônico e estados de Fock

A hamiltoniana (2.1.18) pode ser solucionado definindo uma série de operadores

$$\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} \left(\omega_k \hat{Q}_{\vec{k},\lambda} + i\hat{P}_{\vec{k},\lambda} \right); \quad \hat{a}_{\vec{k},\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} \left(\omega_k \hat{Q}_{\vec{k},\lambda} - i\hat{P}_{\vec{k},\lambda} \right), \quad (2.1.19)$$

que são chamados operadores de criação e destruição respectivamente, os quais satisfazem as regras de comutação:

¹As equações de Hamilton-Jacobi são $\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$ e $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$

$$\left[\hat{a}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger \right] = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (2.1.20)$$

$$\left[\hat{a}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}_{\vec{k}',\lambda'} \right] = 0, \quad (2.1.21)$$

$$\left[\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger \right] = 0. \quad (2.1.22)$$

Aplicando as transformações (2.1.19) no hamiltoniano (2.1.18) obtemos:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.1.23)$$

onde podemos definir o operador número $\hat{N}_{\vec{k},\lambda} = \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k},\lambda}$, o qual é hermitiano e além disso tem propriedades de comutação especiais que facilitam o cálculo dos auto vetores correspondentes. Por exemplo temos:

$$\left[\hat{N}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \right] = \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger; \quad \left[\hat{N}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}_{\vec{k},\lambda} \right] = -\hat{a}_{\vec{k},\lambda}, \quad (2.1.24)$$

logo definindo $\hat{N}_{\vec{k},\lambda} |n_{\vec{k},\lambda}\rangle = n_{\vec{k},\lambda} |n_{\vec{k},\lambda}\rangle$ onde os auto vetores são chamados estados de Fock, estes formam uma base de auto estados ortonormais $\langle n_{\vec{k},\lambda}' | n_{\vec{k},\lambda} \rangle = \delta_{nn'}$. Pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned} \left[\hat{N}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \right] |n_{\vec{k},\lambda}\rangle &= \left(\hat{N}_{\vec{k},\lambda} + n_{\vec{k},\lambda} \right) \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger |n_{\vec{k},\lambda}\rangle \\ \Rightarrow \hat{N}_{\vec{k},\lambda} \left(\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger |n_{\vec{k},\lambda}\rangle \right) &= \left(n_{\vec{k},\lambda} + 1 \right) \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger |n_{\vec{k},\lambda}\rangle, \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

$$\begin{aligned} \left[\hat{N}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}_{\vec{k},\lambda} \right] |n_{\vec{k},\lambda}\rangle &= \left(\hat{N}_{\vec{k},\lambda} - n_{\vec{k},\lambda} \right) \hat{a}_{\vec{k},\lambda} |n_{\vec{k},\lambda}\rangle \\ \Rightarrow \hat{N}_{\vec{k},\lambda} \left(\hat{a}_{\vec{k},\lambda} |n_{\vec{k},\lambda}\rangle \right) &= \left(n_{\vec{k},\lambda} - 1 \right) \hat{a}_{\vec{k},\lambda} |n_{\vec{k},\lambda}\rangle, \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

ou seja, a aplicação dos operadores $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger$ e $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}$ sobre um estado de $\hat{N}_{\vec{k},\lambda}$ gera outro estado com um auto valor maior e menor respectivamente, utilizando a normalização obtemos:

$$\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger |n_{\vec{k},\lambda}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k},\lambda} + 1} |n_{\vec{k},\lambda} + 1\rangle; \quad \hat{a}_{\vec{k},\lambda} |n_{\vec{k},\lambda}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k},\lambda}} |n_{\vec{k},\lambda} - 1\rangle. \quad (2.1.27)$$

Para determinar o espectro de $\hat{N}_{\vec{k},\lambda}$ podemos demonstrar que $n_{\vec{k},\lambda} \geq 0$ porque:

$$n_{\vec{k},\lambda} = \langle n_{\vec{k},\lambda} | \hat{N}_{\vec{k},\lambda} | n_{\vec{k},\lambda} \rangle = \langle n_{\vec{k},\lambda} | \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k},\lambda} | n_{\vec{k},\lambda} \rangle \geq 0. \quad (2.1.28)$$

Agora, se $0 < n_{\vec{k},\lambda} < 1 \Rightarrow n_{\vec{k},\lambda} - 1 < 0$ o que implica pela Eq. (2.1.26) que $\hat{N}_{\vec{k},\lambda}$ tem autovalores negativos, isso contradiz a Eq.(2.1.28) , então podemos concluir que $n_{\vec{k},\lambda} \notin [0, 1]$, $\hat{a}_{\vec{k},\lambda} | 0 \rangle = 0$ e $n_{\vec{k},\lambda} \min = 0$. desta maneira temos definido o espectro de $\hat{N}_{\vec{k},\lambda}$ e as energias do oscilador harmônico:

$$E_n = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_k \left(n_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right); \quad n_{\vec{k},\lambda} = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.1.29)$$

Os autovalores do operador número podem ser interpretados como números de ocupação dos quantos de luz chamados fótons, estes se caracterizam por ter energia $\hbar\omega_k$ [18].

Por último podemos escrever o vetor potencial e os campos eletromagnéticos em termos dos operadores de criação e destruição na forma:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k},\lambda} \hat{e}_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2V\varepsilon_0\omega_k}} \left(\hat{a}_{\vec{k},\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right), \quad (2.1.30)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = i \sum_{\vec{k},\lambda} \hat{e}_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2V\varepsilon_0}} \left(\hat{a}_{\vec{k},\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right), \quad (2.1.31)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = i \frac{1}{c} \sum_{\vec{k},\lambda} (\hat{k} \times \hat{e}_{\vec{k},\lambda}) \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2V\varepsilon_0}} \left(\hat{a}_{\vec{k},\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right). \quad (2.1.32)$$

2.2 Interação da Radiação com a Matéria

Na mecânica clássica a hamiltoniana de um sistema composto de um elétron submetido a um potencial atômico $V(r)$ e um campo eletromagnético definido pelos campos $\vec{A}(\vec{r}, t)$ e $\Phi(\vec{r} + \vec{r}_0, t)$ é:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - q\vec{A}(\vec{r} + \vec{r}_0, t) \right)^2 + q\Phi(\vec{r} + \vec{r}_0, t) + V(r) + \mathcal{W}, \quad (2.2.1)$$

onde \vec{r} é a coordenada de posição do elétron de carga q e momento \vec{P} referente ao núcleo em \vec{r}_0 , $\vec{A}(\vec{r} + \vec{r}_0, t)$ e $\Phi(\vec{r} + \vec{r}_0, t)$ são os potenciais vetoriais e escalares do campo eletromagnético com energia \mathcal{W} e $V(r)$ é o potencial atômico.

Adotando o gauge de Coulomb, e uma representação em ondas planas para o potencial

vetorial , considerando o comprimento de onda do campo maior que o deslocamento médio do elétron, podemos considerar só o termo de ordem zero, isto é,

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r} + \vec{r}_0, t) &= \sum_{\vec{k}, \lambda} \hat{e}_{\vec{k}, \lambda} \left(A_{\vec{k}, \lambda}(t) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} + \vec{r}_0)} + A_{-\vec{k}, \lambda}(t) e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r} + \vec{r}_0)} \right) \\
&\approx \sum_{\vec{k}, \lambda} \hat{e}_{\vec{k}, \lambda} \left(A_{\vec{k}, \lambda}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_0} \left(1 + i\vec{k} \cdot \vec{r} + \dots \right) + A_{-\vec{k}, \lambda}(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_0} \left(1 - i\vec{k} \cdot \vec{r} + \dots \right) \right) \\
&\approx \vec{A}(\vec{r}_0, t).
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Com o potencial vetorial nesta aproximação não temos dependência da posição e podemos escolher um novo gauge dado pela função de transformação $\chi(\vec{r}, t) = -\vec{A}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{r}$ onde:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r} + \vec{r}_0, t) &\rightarrow \Phi(\vec{r} + \vec{r}_0, t) - \frac{\partial}{\partial t} \chi(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{r} = -\vec{E}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{r} \\
\vec{A}(\vec{r} + \vec{r}_0, t) &\rightarrow \vec{A}(\vec{r} + \vec{r}_0, t) + \nabla \chi(\vec{r}, t) = 0,
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

substituindo na Eq. (2.2.1) temos:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \vec{P}^2 + V(r) - q\vec{E}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{r} + \mathcal{W} \tag{2.2.4}$$

logo definimos as hamiltonianas:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{atom} &= \frac{1}{2m} \vec{P}^2 + V(r), \\
\mathcal{H}_{inter} &= -q\vec{E}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{r}, \\
\mathcal{H}_{cam} &= \mathcal{W}.
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

A hamiltoniana \mathcal{H}_{atom} contém todos os termos de interação entre átomo e elétron. \mathcal{H}_{cam} é a hamiltoniana de energia do campo eletromagnético estudada na seção anterior e \mathcal{H}_{inter} é a hamiltoniana de interação dipolar entre o campo e o momento de dipolo atômico.

2.2.1 Teoria Quântica

No tratamento quântico de qualquer sistema é preciso conhecer a hamiltoniana clássica. Na seção anterior obtivemos o hamiltoniano de um sistema composto de um elétron submetido a um potencial atômico e a um campo eletromagnético, onde explicitamos três termos \mathcal{H}_{atom} , \mathcal{H}_{cam} e \mathcal{H}_{inter} . Para quantizar nosso sistema escrevemos as funções que definem estas hamiltonianas em seus equivalentes quânticos.

Se nós assumirmos uma base ortonormal discreta que diagonaliza $\hat{\mathcal{H}}_{atom}$ com auto estados $|i\rangle$ que representam estados eletrônicos com as propriedades:

$$\hat{\mathcal{H}}_{atom} |i\rangle = \hbar\nu_i |i\rangle, \quad \langle i | j \rangle = \delta_{ij} \text{ e } 1 = \sum_i |i\rangle \langle i|, \quad (2.2.6)$$

pode-se escrever \mathcal{H}_{atom} da seguinte maneira:

$$\hat{\mathcal{H}}_{atom} = \sum_{i,j} |i\rangle \langle i| \hat{\mathcal{H}}_{atom} |j\rangle \langle j| = \sum_i \hbar\nu_i |i\rangle \langle i|, \quad (2.2.7)$$

logo, para $\hat{\mathcal{H}}_{inter}$ é preciso escrever o campo elétrico em termos de operadores quânticos. Aplicando a Eq. (2.1.31) temos nesta situação:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}_0, t) \rightarrow \vec{\hat{E}}(\vec{r}_0) &= Re \left\{ i \sum_{\vec{k}, \lambda} \hat{e}_{\vec{k}, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2V\epsilon_0}} \left(\hat{a}_{\vec{k}, \lambda} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_0} - \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_0} \right) \right\} \\ &= \sum_{\vec{k}, \lambda} \hat{e}_{\vec{k}, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2V\epsilon_0}} \left(\hat{a}_{\vec{k}, \lambda} + \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \right) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}_0) \\ &= \sum_{\vec{k}, \lambda} \hat{e}_{\vec{k}, \lambda} \epsilon_k \left(\hat{a}_{\vec{k}, \lambda} + \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \right) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}_0), \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

em seguida podemos também escrever $\hat{\mathcal{H}}_{inter}$ na base da base dos $|i\rangle$, onde:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{inter} &= \sum_{i,j} |i\rangle \langle i| \hat{\mathcal{H}}_{inter} |j\rangle \langle j| \\ &= - \sum_{i,j} \sum_{\vec{k}, \lambda} |i\rangle \langle i| q \hat{e}_{\vec{k}, \lambda} \cdot \vec{r} \epsilon_k \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}_0) |j\rangle \langle j| \left(\hat{a}_{\vec{k}, \lambda} + \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \right) \\ &= \sum_{i,j} \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar g_{\vec{k}, \lambda}^{ij} |i\rangle \langle j| \left(\hat{a}_{\vec{k}, \lambda} + \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \right), \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

onde o termo $g_{\vec{k},\lambda}^{ij}$ é conhecido como constante de acoplamento dipolar entre o campo e o átomo, esta constante é importante porque está relacionada com os elementos da matriz de transição dipolar no sistema definido como $\vec{D}_{ij} = \langle i | q\vec{r} | j \rangle$. Observando a definição de $g_{\vec{k},\lambda}^{ij}$ temos:

$$g_{\vec{k},\lambda}^{ij} = \frac{-\varepsilon_k \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}_0) \hat{e}_{\vec{k},\lambda} \cdot \langle i | q\vec{r} | j \rangle}{\hbar} = \frac{-\varepsilon_k \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}_0) \hat{e}_{\vec{k},\lambda} \cdot \vec{D}_{ij}}{\hbar}, \quad (2.2.10)$$

é importante destacar o fato de que $g_{\vec{k},\lambda}^{ii} = 0$ porque as funções próprias de $\hat{\mathcal{H}}_{atom}$ tem paridade definida devido ao potencial radial $V(r)$, para demonstrar isso só é preciso calcular o termo diagonal da matriz de transição dipolar:

$$\vec{D}_{ii} = \langle i | q\vec{r} | i \rangle = q \int |\psi_i(\vec{r})|^2 \vec{r} dV, \quad (2.2.11)$$

onde $\psi_i(\vec{r})$ é uma função com paridade definida o que implica que $|\psi_i(\vec{r})|^2$ é uma função par, logo, \vec{r} é uma função ímpar, a integral sobre todo o espaço é nula. Além disso assumiremos que a matriz \vec{D}_{ij} é de termos reais, isso implica que $\vec{D}_{ij} = \vec{D}_{ij}^* = \vec{D}_{ji}$.

Utilizando os resultados obtidos nas Eq. (2.2.7) (2.2.9) e lembrando o hamiltoniano quantizada do campo eletromagnético calculada na seção (2.1.2) temos que:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_i \hbar\nu_i |i\rangle \langle i| + \sum_{i,j} \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar g_{\vec{k},\lambda}^{ij} |i\rangle \langle j| \left(\hat{a}_{\vec{k},\lambda} + \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \right) + \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.2.12)$$

2.2.2 Modelo de Jaynes-Cummings

O modelo Jaynes-Cummings consiste em um sistema onde uma cavidade eletromagnética tem um campo elétrico polarizado linearmente com um só modo modelado quanticamente que interage com um átomo de dois níveis, além disso o campo tem que estar perto da ressonância com a frequência de transição do átomo.

Para modelar o campo elétrico podemos utilizar o resultado obtido na seção 2.1.2, onde calculamos o campo elétrico com condições de contorno periódicas sobre uma caixa de comprimento L . Para definir os níveis do átomo tomamos $|g\rangle$ como o estado base do átomo ou íon e $|e\rangle$ como o estado excitado. Utilizando a Eq. (2.2.12) temos :

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\nu_g |g\rangle \langle g| + \hbar\nu_e |e\rangle \langle e| + \hbar g (|g\rangle \langle e| + |e\rangle \langle g|) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.2.13)$$

Assim em termos da frequência de transição $\omega_a = \nu_e - \nu_g$, o primeiro termo do hamiltoniano (2.2.13) é escrito da forma:

$$\begin{aligned} \hbar\nu_g |g\rangle \langle g| + \hbar\nu_e |e\rangle \langle e| &= \frac{\hbar\omega_a}{2} (|g\rangle \langle g| - |e\rangle \langle e|) + \hbar(\nu_e - \nu_g) (|g\rangle \langle g| + |e\rangle \langle e|) \\ &= \frac{\hbar\omega_a}{2} (|g\rangle \langle g| - |e\rangle \langle e|) + \hbar(\nu_e - \nu_g) \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

onde $\mathbf{1}$ é o operador identidade. Nessa equação podemos desprezar o termo proporcional ao operador unitário e na Eq. (2.2.13) podemos fazer o mesmo com o termo $\frac{\hbar\omega}{2}$ porque eles não geram mudanças na evolução do sistema. Além disso utilizando os operadores $\hat{\sigma}_z$ que corresponde a um operador de inversão atômica, o operador $\hat{\sigma}_+$ que leva um estado base a um estado excitado e o operador $\hat{\sigma}_-$ que leva um estado excitado a um estado base:

$$\hat{\sigma}_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|; \quad \hat{\sigma}_+ = |e\rangle \langle g|; \quad \hat{\sigma}_- = |g\rangle \langle e|, \quad (2.2.15)$$

e que satisfazem propriedades de comutação das matrizes de Pauli relacionadas com o spin:

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_z, \quad [\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_z] = -2\hat{\sigma}_+, \quad [\hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_z] = 2\hat{\sigma}_-. \quad (2.2.16)$$

A substituição das Eqs. (2.2.14), (2.2.15) na Eq. (2.2.13) conduz a :

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (2.2.17)$$

escrevendo $\hat{\mathcal{H}}_A = \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z$; $\hat{\mathcal{H}}_C = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}$; $\hat{\mathcal{H}}_I = \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ a Eq. (2.2.17) resulta em:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_A + \hat{\mathcal{H}}_C + \hat{\mathcal{H}}_I \quad (2.2.18)$$

No hamiltoniano da Eq. (2.2.17) temos que $\hat{\mathcal{H}}_A$ é diagonal na base dos operadores do átomo, quer dizer na base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$, e $\hat{\mathcal{H}}_C$ é diagonal na base do operador número que corresponde a base dos estados de Fock. Para estudar a dinâmica deste hamiltoniano podemos escrever $\hat{\mathcal{H}}_I$ na representação de interação onde $\hat{\mathcal{H}}_0 = \hat{\mathcal{H}}_A + \hat{\mathcal{H}}_C$.

$$\hat{\mathbb{H}}_I = e^{\frac{i\hat{\mathcal{H}}_0 t}{\hbar}} \hat{\mathcal{H}}_I e^{-\frac{i\hat{\mathcal{H}}_0 t}{\hbar}}, \quad (2.2.19)$$

Sabendo que os operadores atômicos e de campos comutam entre si, $\hat{\mathbb{H}}_I$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{H}}_I &= e^{\frac{i\hat{\mathcal{H}}_0 t}{\hbar}} \hat{\mathcal{H}}_I e^{-\frac{i\hat{\mathcal{H}}_0 t}{\hbar}} = \hbar g \left\{ e^{\frac{i\hat{\mathcal{H}}_0 t}{\hbar}} (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) e^{-\frac{i\hat{\mathcal{H}}_0 t}{\hbar}} \right\} \\ &= \hbar g \left\{ e^{\frac{i\hat{\mathcal{H}}_0 t}{\hbar}} (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) e^{-\frac{i\hat{\mathcal{H}}_0 t}{\hbar}} e^{\frac{i\hat{\mathcal{H}}_0 t}{\hbar}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) e^{-\frac{i\hat{\mathcal{H}}_0 t}{\hbar}} \right\} \\ &= \hbar g \left\{ e^{i\frac{\omega_a}{2} t \hat{\sigma}_z} (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) e^{-i\frac{\omega_a}{2} t \hat{\sigma}_z} e^{i\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} t} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) e^{-i\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Utilizando a fórmula de Hadamard ² pode-se mostrar que :

$$e^{i\frac{\omega_a}{2} t \hat{\sigma}_z} \hat{\sigma}_\pm e^{-i\frac{\omega_a}{2} t \hat{\sigma}_z} = \hat{\sigma}_\pm e^{\pm i\omega_a t}, \quad (2.2.21)$$

$$e^{i\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{a}^\dagger e^{-i\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} t} = \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}, \quad (2.2.22)$$

$$e^{i\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{a} e^{-i\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} t} = \hat{a} e^{-i\omega t}, \quad (2.2.23)$$

as quais substituídas na Eq. (2.2.20) nos dá:

$$\hat{\mathbb{H}}_I = \hbar g \left(\hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{i(\omega_a - \omega)t} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger e^{i(\omega_a + \omega)t} + \hat{\sigma}_- \hat{a} e^{-i(\omega_a + \omega)t} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger e^{-i(\omega_a - \omega)t} \right). \quad (2.2.24)$$

No hamiltoniano $\hat{\mathbb{H}}_I$ os termos $\hat{\sigma}_+ \hat{a}$ e $\hat{\sigma}_- \hat{a}$ são multiplicados por exponenciais complexas com frequências $\omega_a - \omega$, esses termos são chamados girantes. Os termos $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$ e $\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger$ são multiplicados por exponenciais complexas com frequência $\omega_a + \omega$ são chamados contra girantes. Como utilizamos no início desta seção que o modo do campo tem que estar em ressonância com a frequência atômica, isso é $\omega_a \approx \omega$. Isso implica que os termos girantes são multiplicados por exponenciais que tendem a 1. Os termos contra girantes são multiplicados por exponenciais $e^{\pm 2i\omega_a t}$ onde a média temporal sobre um intervalo $[0, T]$ é dada por:

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{\pm 2i\omega_a t} dt = \pm \frac{e^{\pm 2i\omega_a T} - 1}{2i\omega_a T}. \quad (2.2.25)$$

²A fórmula de Hadamard é $e^X Y e^{-X} = Y + [X, Y] + \frac{1}{2!}[X, [X, Y]] + \frac{1}{3!}[X, [X, [X, Y]]] + \dots$

Para ter uma média temporal perto do zero é preciso que $\omega_a T \gg 1$, mas T deve ser da ordem de $\frac{1}{g}$, pelo qual podemos deduzir que $\omega_a \gg g$, esta aproximação é chamada aproximação de onda girante (RWA em inglês). Assim na RWA podemos desprezar os termos contra girantes e escrever $\hat{\mathbb{H}}_I$ como:

$$\hat{\mathbb{H}}_I = \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger). \quad (2.2.26)$$

e também podemos escrever $\hat{\mathcal{H}}$ como:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) \quad (2.2.27)$$

o hamiltoniano (2.2.27) é conhecido como hamiltoniano Jaynes-Cummings.

2.3 Íon aprisionado numa Cavidade

Nesta seção estudaremos as condições para que uma carga possa ser confinada numa região limitada no espaço. Esta possibilidade é muito importante na computação e informação quântica, experimentalmente se tem tido avanços nesta área e experimentalmente existem vários tipos de armadilha. Neste trabalho utilizamos uma armadilha de Paul que tem sido desenvolvida para operacionalizar o uso de íons aprisionados [19], na qual temos um aprisionamento por meio de campos eletromagnéticos estáticos e dinâmicos.

2.3.1 Armadilha de Paul

Experimentalmente podemos ter aprisionamento de átomos e íons, mas atualmente pode-se confinar íons em regiões do espaço sem gerar mudanças na sua configuração eletrônica, o que gera grandes vantagens na manipulação de sistemas onde se deseja transições controladas de estados eletrônicos via campos externos.

Classicamente, temos que um confinamento estável de uma carga pode ser gerado por um potencial elíptico

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{2} (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2), \quad (2.3.1)$$

se queremos que este potencial seja gerado por um campo eletrostático no vácuo a equação de Laplace para $\Phi(\vec{r})$ deve ser satisfeita, ou seja

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = 0 \rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0, \quad (2.3.2)$$

logo, se α , β ou γ são negativos o movimento vai ser instável numa direção, este resultado mostra que não é possível confinar uma carga em um campo elétrico estático, mas é possível confinar cargas utilizando campos eletromagnéticos.

Experimentalmente já existem diferentes tipos de armadilhas [20, 21] empregadas para aprisionar íons, uma das mais utilizadas é a armadilha de Paul linear (ilustrada na Fig. 2.3.1).

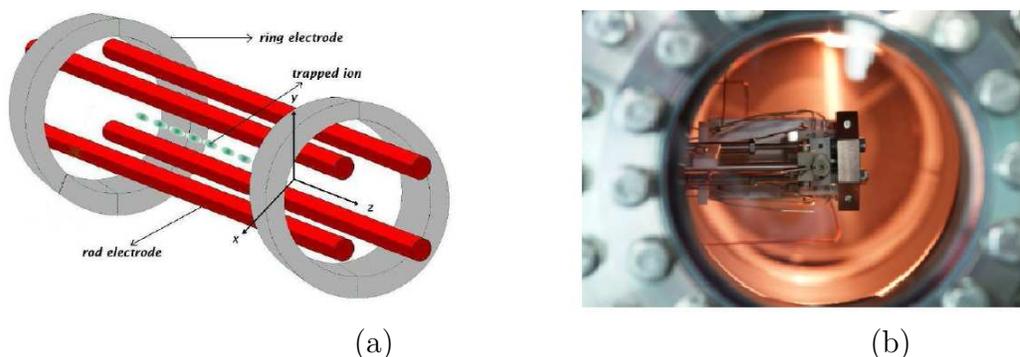


Figura 2.3.1: (a) Esquema da armadilha de Paul e (b) fotografia da armadilha para experimentos com íons de Ca^+ <http://www.nat.vu.nl/en/index.asp>

Nestas armadilhas utiliza-se uma distribuição que gera um potencial elétrico periódico

$$\Phi_0(t) = \Phi_0 + V_0 \cos(\Omega t) \quad (2.3.3)$$

nos eletrodos lineares diagonalmente opostos, outros eletrodos de forma linear são aterrados enquanto que aqueles em forma de anel são colocados a um potencial constante U .

O potencial no centro da armadilha em função das coordenadas x e y é dado por [19] :

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{\Phi_0(t)}{x_0^2 + y_0^2} (x^2 - y^2), \quad (2.3.4)$$

onde x_0 , y_0 correspondem às distancias do centro da armadilha aos eletrodos lineares. Para estudar a dinâmica do problema podemos utilizar as equações da mecânica clássica, consequentemente para um íon de carga q e massa m as equações de movimento do centro de massa deste são:

$$m\ddot{x} = -2q \left[\frac{\Phi_0 + V_0 \cos(\Omega t)}{x_0^2 + y_0^2} \right] x, \quad (2.3.5)$$

$$m\ddot{y} = 2q \left[\frac{\Phi_0 + V_0 \cos(\Omega t)}{x_0^2 + y_0^2} \right] y. \quad (2.3.6)$$

Se definimos a constante $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$ e :

$$a = \frac{4q\Phi_0}{mr_0^2\Omega^2}, \quad b = \frac{4qV_0}{mr_0^2\Omega^2}, \quad \xi = \frac{\Omega t}{2}, \quad (2.3.7)$$

temos as equações diferenciais de segunda ordem lineares:

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + [a + 2b \cos(2\xi)]x = 0, \quad \frac{d^2y}{d\xi^2} + [a - 2b \cos(2\xi)]y = 0. \quad (2.3.8)$$

os quais tem a forma de uma equação diferencial de Mathieu. De acordo com o teorema de Floquet [22] para Eq. 2.3.8 pode-se propor uma solução do tipo:

$$k(\xi) = A_k e^{i\beta_k \xi} \phi(\xi) + B_k e^{-i\beta_k \xi} \phi(-\xi). \quad (2.3.9)$$

Na Eq.(2.3.9) $k = x, y$ e $\phi(\xi) = \phi(\xi + \pi)$, as constantes A_k e B_k dependem das condições iniciais do problema. Para uma solução que represente um equilíbrio estável as constantes β_k tem que ser reais. Assim nas condições onde $a \ll b \ll 1$, a carga vai ter um equilíbrio estável onde as soluções podem ser escritas como:

$$x(t) = x_0 \left(1 + \frac{b}{2} \cos \Omega t \right) \cos(\omega_x t + \delta_x), \quad (2.3.10)$$

$$y(t) = y_0 \left(1 - \frac{b}{2} \cos \Omega t \right) \cos(\omega_y t + \delta_y), \quad (2.3.11)$$

com

$$\omega_x = \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{b^2}{2} + a}, \quad \omega_y = \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{b^2}{2} - a}. \quad (2.3.12)$$

O movimento da carga está definido por dois tipos de oscilações. O movimento dado pela frequência Ω é chamado oscilação secular e a oscilação definida com a frequência ω é chamado micro movimento, os valores de $x_0, y_0, \delta_x,$ e $\delta_y,$ são calculados pelas condições iniciais da carga. Considerando o fato de que $a \ll b \ll 1$ é claro que $\Omega \gg \omega_x, \omega_y$, desta forma

podemos supor que o micro movimento não vai modificar consideravelmente a amplitude do movimento secular e $\omega_x \approx \omega_y$. Na figura 2.3.2 a temos um gráfico da posição da carga em x e y onde pode-se ver que o movimento fica definido aproximadamente só com o movimento secular.

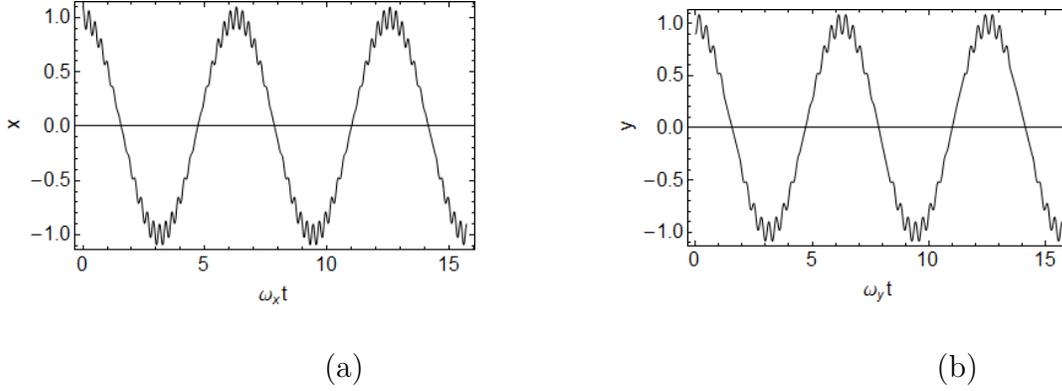


Figura 2.3.2: movimento secular na direção x (a) e movimento secular na direção y (b) onde $\Omega/\omega_x \approx \Omega/\omega_y = 20$, $b = 0.2$ e $x_0 = y_0 = \delta_x = \delta_y = 0$,

desta forma temos que o movimento da carga é aproximadamente:

$$x(t) \approx x_0 \cos(\omega_x t + \delta_x), \quad y(t) \approx y_0 \cos(\omega_y t + \delta_y). \quad (2.3.13)$$

Para este movimento podemos assumir um pseudo potencial quadrático, além disso como temos um confinamento na direção z gerado pelos eletrodos em forma de anel, podemos associar a esse movimento um potencial quadrático com frequência ω_z . Então o potencial na armadilha é aproximadamente:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{m}{2q} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (2.3.14)$$

experimentalmente pode-se implementar sistemas onde a amplitude do movimento na direção x e y seja pequeno em comparação no movimento na direção z . Neste trabalho só consideraremos oscilações na direção z .

Um resultado importante deste estudo é o fato de que o potencial (2.3.14) não induz mudanças na configuração eletrônica do íon porque este só depende das coordenadas espaciais do centro de massa do íon.

2.3.2 Hamiltoniano do sistema

Nesta seção utilizaremos os resultados apresentados na seção anterior para determinar o hamiltoniano de um íon aprisionado numa armadilha de Paul que está contida numa cavidade óptica de um só modo de frequência ω . Para nosso sistema primeiro determinaremos o hamiltoniano correspondente ao movimento do íon para depois estudar o acoplamento da cavidade com este. Um esquema do sistema é apresentado na figura 2.3.3.

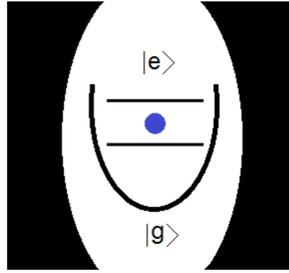


Figura 2.3.3: Íon de dois níveis aprisionado por um potencial efetivo na direção z quadrático em uma cavidade óptica

Na seção anterior conseguimos demonstrar que existem modelos que predizem o confinamento de íons onde a configuração eletrônica deste não muda. Como o potencial é quadrático e só depende da coordenada z do centro de massa do íon definida desde o centro da armadilha, podemos modelar quânticamente a dinâmica do sistema íon armadilha como um oscilador harmônico com frequência ν . Desta forma temos o hamiltoniano:

$$\hat{\mathcal{H}}_{mov} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + \frac{1}{2}m\nu^2\hat{Z}^2, \quad (2.3.15)$$

onde definimos os operadores de criação e destruição em termos dos operadores de momento \hat{P} e de posição \hat{Z} na direção z :

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\nu}}(m\nu\hat{Z} + i\hat{P}); \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\nu}}(m\nu\hat{Z} - i\hat{P}), \quad (2.3.16)$$

Seguindo os mesmos passos da seção (2.1.2) temos o hamiltoniano:

$$\hat{\mathcal{H}}_{mov} = \hbar\nu\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right), \quad (2.3.17)$$

Os auto valores do operador $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ representam números quânticos associados a fônons.

Agora devemos estudar a interação da cavidade com o íon considerando o movimento deste. Utilizando a aproximação dipolar da seção (2.2) temos que o campo elétrico depende da posição do centro de massa do íon. Para simplificar o sistema vamos supor que a armadilha está orientada na mesma direção de propagação do campo elétrico. definindo a posição do centro da armadilha como \vec{r}_{ca} , a posição do íon com respeito ao centro da armadilha será $\vec{r}_0 = Z \hat{e}_z \rightarrow \hat{Z} \hat{e}_z$ e os operadores de criação e destruição de fótons na cavidade \hat{b} e \hat{b}^\dagger , assim o campo elétrico na posição do íon fica dada por:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}_0) &= \hat{e}_\lambda \varepsilon (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \sin(\vec{k} \cdot (\vec{r}_0 + \vec{r}_{ca})) \\ &= \hat{e}_\lambda \varepsilon (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \sin(k\hat{Z} + kr_{ca}) \\ &= \hat{e}_\lambda \varepsilon (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \cos\left(k\hat{Z} + kr_{ca} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \hat{e}_\lambda \varepsilon (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \cos(k\hat{Z} + \phi). \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Nesta equação $\phi = kr_{ca} - \frac{\pi}{2}$, desta maneira podemos falar que para $\phi = 0$ o centro da armadilha está num nodo e para $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ está num antinodo. Este campo pode ser escrito em termos de operadores de criação e destruição associados ao grau de liberdade translacional. Fazendo a transformação inversa em (2.3.16) escrevemos :

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \hat{e}_\lambda \varepsilon (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \cos(\eta(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + \phi), \quad (2.3.19)$$

onde $\eta = k\sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}}$ é conhecida como a constante de Lamb-Dicke. Esta constante está relacionada com a amplitude de oscilação do íon em termos do comprimento de onda do campo elétrico. Considerando a Eq. (2.3.19) o hamiltoniano de interação entre o campo e o íon temos:

$$\hat{\mathcal{H}}_I = \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \cos(\eta(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + \phi). \quad (2.3.20)$$

Dessa forma utilizando os resultados anteriores temos que o hamiltoniano que descreve o sistema é:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \hbar\nu\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar\omega_a}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b} \\ &+ \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \cos(\eta(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + \phi). \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Este hamiltoniano é importante porque representa a base do modelo de cavidades acopladas com íons aprisionados que será estudado nas próximas seções.

2.4 Emaranhamento de Sistemas Quânticos

O estudo da dinâmica de sistemas quânticos está relacionado fortemente ao número de subsistemas deste. Um sistema composto por vários subsistemas preparados como um único estado é conhecido como ensemble puro. Este pode ser representado por uma base gerada pelo produto tensorial dos estados de cada uma das bases dos subsistemas. Se temos por exemplo um ensemble puro composto de 2 subsistemas com bases discretas $\{|l^{(i)}\rangle\}$ onde $l = 1, 2, 3 \dots$ e $i = 1, 2$ o estado deste sistema pode ser representado por:

$$|\psi\rangle = \sum_{l,l'} c_{ll'} |l^{(1)}\rangle \otimes |l'^{(2)}\rangle = \sum_{l,l'} c_{ll'} |l^{(1)}l'^{(2)}\rangle. \quad (2.4.1)$$

Mas em sistemas preparados como uma mistura estatística de estados, o ensemble é misto e precisamos definir outro objeto matemático para descrever a dinâmica deste. Neste caso utilizamos o conceito de operador densidade definido como:

$$\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle\psi_j|; \quad 0 \leq p_j; \quad \sum_j p_j = 1, \quad (2.4.2)$$

onde os p_j representam as probabilidades do sistema estar num estado particular $|\psi_j\rangle$, o operador densidade satisfaz as propriedades:

$$Tr \{\rho\} = 1, \quad \rho^\dagger = \rho \quad (2.4.3)$$

e particularmente temos que para ensembles puros que ρ é uma matriz idempotente, quer dizer $\rho^2 = \rho$, além de ter um auto valor igual a um e os outros zero.

Uma das características mais singulares na mecânica quântica é o fato de ter sistemas compostos onde a medição de uma quantidade física depende diretamente de uma medição anterior onde os subsistemas não interagem. Estes sistemas são chamados emaranhados [18, 23, 24]. Um exemplo de sistema emaranhado é o estado singlete de duas partículas com spin $\frac{1}{2}$:

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle), \quad (2.4.4)$$

onde qualquer medição sobre o spin na direção z de uma partícula define o estado de spin da outra. Em geral para sistemas definidos com 2 subsistemas de duas dimensões cada um temos um conjunto ortonormal de estados que são chamados estados de Bell:

$$\begin{aligned}
|\phi_{00}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \\
|\phi_{01}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \\
|\phi_{10}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \\
|\phi_{11}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

nestes sistemas qualquer medição feita sobre a primeira partícula deixa definido o estado da outra sem importar o quão longe estejam uma da outra. Este tipo de sistemas emaranhados são importantes no campo da computação e criptografia quântica para implementar sistema de teleportação e protocolos quânticos [25].

Uma definição geral de emaranhamento é apresentada no trabalho de Peres [24], onde é definido como a impossibilidade de escrever o sistema de forma separável. Para um ensemble de n sub-sistemas definidos por uma matriz densidade $\hat{\rho}_s$ diremos que este é emaranhado se:

$$\hat{\rho}_s \neq \sum_i p_i \hat{\rho}_i^{(1)} \otimes \hat{\rho}_i^{(2)} \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_i^{(n)}, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1. \tag{2.4.6}$$

onde os $\hat{\rho}_i^{(j)}$ representam matrizes densidade do subsistema j .

2.4.1 Medidas de emaranhamento

Para quantificar o emaranhamento de sistemas quânticos é necessário definir alguma medida que possa indicar quando um sistema é separável e quando este emaranhado.

Para isso podem ser definidas em sistemas puros medidas entrópicas de emaranhamento, onde para valores máximo de entropia associamos estados de máximo emaranhamento. Para sistemas bipartites temos por exemplo a entropia de Von Neuman dada pela expressão:

$$S[\hat{\rho}^{(i)}] = -Tr[\hat{\rho}^{(i)} \ln \hat{\rho}^{(i)}], \quad i = 1, 2 \tag{2.4.7}$$

onde $\hat{\rho}^{(i)}$ é a matriz densidade reduzida do subsistema i definida como o traço da matriz

densidade sobre o subsistema $j \neq i$. A entropia de Von Neuman é uma extensão do conceito de entropia na mecânica estatística, está tem valor máximo $S_{max} [\hat{\rho}^{(i)}] = \ln N$ onde N é a dimensão de $\hat{\rho}^{(i)}$. Levando em conta que os autovalores do operador $\hat{\rho}^{(i)}$ são dados por $\lambda_k^{(i)}$, podemos escrever a Eq.(2.4.7) como:

$$S [\hat{\rho}^{(i)}] = - \sum_{k=1}^N \lambda_k^{(i)} \ln \lambda_k^{(i)}. \quad (2.4.8)$$

Outra medida utilizada é a entropia linear. Para calcular está não precisamos de uma diagonalização da matriz $\hat{\rho}^{(i)}$ e está dada pela expressão:

$$\varepsilon_\ell [\hat{\rho}^{(i)}] = 1 - Tr \left[(\hat{\rho}^{(i)})^2 \right]. \quad (2.4.9)$$

A entropia linear é uma aproximação da entropia de Von Neuman e tem como característica comum ser nula quando o sistema é separável. Quando calculamos a entropia de Von Neuman ou a entropia linear para sistemas mistos multipartite elas só podem ser consideradas como critério de separabilidade. Assim, se $S [\hat{\rho}^{(i)}] = \varepsilon_\ell [\hat{\rho}^{(i)}] = 0$ podemos falar que o subsistema i é separável dos outros elementos do sistema.

Capítulo 3

Transferência de estados de íons aprisionados em cavidades com 1 ou 2 modos normais

Este capítulo é dedicado ao estudo da transferência de estados quânticos de um sistema composto de duas cavidades onde cada uma tem um íon aprisionado no seu interior. Dois tipos de acoplamento serão considerados: um onde as cavidades ficam num meio dielétrico sendo possível utilizar um modelo de acoplamento direto e outro onde o acoplamento é feito com uma fibra óptica modelada com um único modo. Para cada um destes acoplamentos analisaremos a influência da sintonização das frequências envolvidas no sistema.

Nos dois modelos de acoplamento consideraremos como mecanismos de transferências os modos das cavidades no caso do acoplamento direto e o modo da fibra no acoplamento ao longo desta mesma. Em uma primeira aproximação podemos levar em conta somente um modo normal onde demonstramos analiticamente que para certos tipos de sintonizações pode ser possível fazer uma transferência perfeita do estado. Num caso mais geral estudamos a transferência de estados quânticos levando em consideração dois modos normais. Em ambas situações foi possível fazer cálculos analíticos para a medida da fidelidade da transferência.

3.1 Acoplamento Direto entre as Cavidades

No estudo de íons aprisionados em cavidades nós conseguimos na seção (2.3.2) obter um hamiltoniano que descreve o sistema cavidade, íon e armadilha. Se consideramos duas cavi-

dades com íons aprisionados em seu interior que interagem fracamente pode-se considerar uma interação entre os sistemas só através dos campos das cavidades.

Nesta aproximação trabalhos anteriores [14, 26] propõem um modelo onde as cavidades que estão separadas por um meio dielétrico e os espelhos das cavidades tem baixa taxa de transmitância. O hamiltoniano é obtido fenomenologicamente onde se modela o potencial vetorial total como uma soma dos potenciais vetoriais gerados por cada cavidade, desta forma se definimos o potencial de cada cavidade como $\vec{A}_1(\vec{r}, t)$ e $\vec{A}_2(\vec{r}, t)$ temos que o potencial total é:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_1(\vec{r}, t) + \vec{A}_2(\vec{r}, t), \quad (3.1.1)$$

onde cada operador $\vec{A}_i(\vec{r}, t)$ com $i = 1, 2$ pode ser escrito em função de seus operadores de criação \hat{b}_i^\dagger e destruição \hat{b}_i de fótons, desta maneira temos:

$$\vec{A}_i(\vec{r}) = u_i(\vec{r})\hat{b}_i^\dagger + u_i^*(\vec{r})\hat{b}_i, \quad (3.1.2)$$

logo podemos definir o hamiltoniano em termos dos operadores $\vec{A}_i^{(+)}(\vec{r}) = u_i(\vec{r})\hat{b}_i^\dagger$ e $\vec{A}_i^{(-)}(\vec{r}) = (\vec{A}_i^{(+)}(\vec{r}))^\dagger$ pela expressão:

$$\hat{\mathcal{H}}_C \propto \int \vec{A}^{(+)}(\vec{r}) \vec{A}^{(-)}(\vec{r}) dV, \quad (3.1.3)$$

onde fazendo as contas pertinentes sobre (3.1.3) se chega a um hamiltoniano de interação da forma:

$$\hat{\mathcal{H}}_{CC} = \hbar\lambda (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1), \quad (3.1.4)$$

com a constante de acoplamento λ sendo proporcional à integral:

$$\lambda \propto \int u_1(\vec{r}) u_2(\vec{r}) dV.$$

Na figura que segue temos um esquema do sistema:

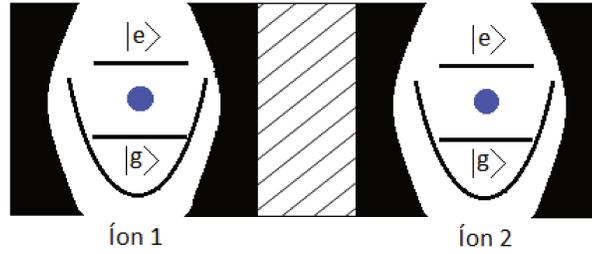


Figura 3.1.1: Esquema do sistema composto por duas cavidades acopladas diretamente com íon aprisionados em seu interior onde a região entre as cavidades é um meio dielétrico

Nesse sistema, as cavidades, os íons e as armadilhas têm as mesmas características, de maneira que as cavidades tem a mesma frequência ω , os íons têm as mesmas frequências de transição ω_a e as armadilhas as mesmas frequências de oscilação ν . Com isso pode-se escrever o hamiltoniano na forma:

$$\begin{aligned} \hat{H}_s = & \sum_{i=1}^2 \hbar\omega \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i + \hbar\nu \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hbar\frac{\omega_a}{2} \sigma_{iz} + \hbar g (\sigma_{i+} + \sigma_{i-}) (\hat{b}_i^\dagger + \hat{b}_i) \cos(\eta(\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i) + \phi) \\ & + \hbar\lambda (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1), \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

onde \hat{b}_i^\dagger e \hat{b}_i são os operadores de criação e aniquilação correspondentes à cavidade i , \hat{a}_i^\dagger e \hat{a}_i são os operadores de criação e aniquilação de movimento do íon i , σ_{i-} e σ_{i+} são os operadores que levam o íon do estado eletrônico superior para o estado eletrônico inferior e viceversa respectivamente, g é a constante de acoplamento entre o íon i e o campo da cavidade i onde η é a constante de Lamb-Dicke.

3.1.1 Diagonalização do Hamiltoniano de Interação entre as Cavidades

Os termos relacionados com o número de fótons nas cavidades e a interação entre eles pode ser facilmente diagonalizado como segue:

$$\sum_{i=1}^2 \hbar\omega \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i + \hbar\lambda (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1) = \sum_{i=1}^2 \hbar\Omega_i \hat{d}_i^\dagger \hat{d}_i, \quad (3.1.6)$$

onde \hat{d}_i^\dagger e \hat{d}_i são operadores bosônicos de criação e aniquilação e Ω_i constantes reais, que devem satisfazer as relações:

$$\begin{aligned} [\hat{d}_1, \hat{d}_1^\dagger] &= 1, \\ [\hat{d}_2, \hat{d}_2^\dagger] &= 1, \\ [\hat{d}_1, \hat{d}_2^\dagger] &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Deste modo definimos os operadores da forma:

$$\hat{d}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha \hat{b}_1 + \beta \hat{b}_2); \quad \hat{d}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma \hat{b}_1 + \delta \hat{b}_2), \quad (3.1.8)$$

onde as constantes α, β, γ e $\delta \in \mathbb{R}$. Substituindo (3.1.8) nas Eq. (3.1.7) temos:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= 2, \\ \gamma^2 + \delta^2 &= 2, \\ \alpha\gamma + \beta\delta &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

e que desse sistema de equações (3.1.9) obtém-se $\alpha = -\delta$ e $\beta = \gamma$. Por último substituindo as transformações (3.1.8) em (3.1.6) obtém-se:

$$\sum_{i=1}^2 \hbar \omega \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i + \hbar \lambda (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1) = \sum_{i=1}^2 \hbar \Omega_i \hat{d}_i^\dagger \hat{d}_i + \hbar \Delta (\hat{d}_1^\dagger \hat{d}_2 + \hat{d}_2^\dagger \hat{d}_1). \quad (3.1.10)$$

onde $\Omega_{1,2} = \omega \pm \lambda \alpha \beta$ e

$$\Delta = \lambda (\alpha^2 - \beta^2). \quad (3.1.11)$$

a condição $\Delta = 0$, que $\alpha = \beta$, e por tanto de (3.1.9) temos que $\alpha = 1$. Substituindo consegue-se demonstrar que $\Omega_i = \omega + (-1)^{i+1} \lambda$ e

$$\hat{d}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{b}_1 + (-1)^{i+1} \hat{b}_2). \quad (3.1.12)$$

Os operadores número $\hat{d}_i^\dagger \hat{d}_i$ tem uma base ortonormal de estados $\{|l\rangle_{di}\}$ que pode-se escrever em termos da base dos operadores $\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$ que chamaremos $\{|k\rangle_{bi}\}$. Utilizando $|0\rangle_{b1} |0\rangle_{b2} = |0\rangle_{d1} |0\rangle_{d2}$ obtemos a expressão:

$$\begin{aligned}
|l_1\rangle_{d1} |l_2\rangle_{d2} &= \frac{(\hat{d}_1^\dagger)^{l_1}}{\sqrt{l_1!}} \frac{(\hat{d}_2^\dagger)^{l_2}}{\sqrt{l_2!}} |0\rangle_{d1} |0\rangle_{d2} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{l_1+l_2} \frac{(\hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_2^\dagger)^{l_1}}{\sqrt{l_1!}} \frac{(\hat{b}_1^\dagger - \hat{b}_2^\dagger)^{l_2}}{\sqrt{l_2!}} |0\rangle_{b1} |0\rangle_{b2} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{l_1+l_2} \sum_{k_1, k_2=0}^{l_1, l_2} \frac{(-1)^{k_2+l_2} \sqrt{l_1! l_2!} (\hat{b}_1^\dagger)^{k_1+k_2} (\hat{b}_2^\dagger)^{l_1+l_2-k_1-k_2}}{k_1! k_1! (l_1 - k_1)! (l_2 - k_2)!} |0\rangle_{b1} |0\rangle_{b2} \\
&= \sum_{k_1, k_2=0}^{l_1, l_2} P(l_1, l_2, k_1, k_2) |k_1 + k_2\rangle_{b1} |l_1 + l_2 - k_1 - k_2\rangle_{b2}. \tag{3.1.13}
\end{aligned}$$

onde

$$P(l_1, l_2, k_1, k_2) = (-1)^{k_2+l_2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{l_1+l_2} \frac{\sqrt{l_1! l_2!} (k_1 + k_2)! (l_1 + l_2 - k_1 - k_2)!}{k_1! k_1! (l_1 - k_1)! (l_2 - k_2)!}.$$

Por exemplo, podemos escrever o estados $|1\rangle_{d1} |0\rangle_{d2}$ e $|0\rangle_{d1} |1\rangle_{d2}$ como:

$$|1\rangle_{d1} |0\rangle_{d2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_{b1} |1\rangle_{b2} + |1\rangle_{b1} |0\rangle_{b2}). \tag{3.1.14}$$

$$|0\rangle_{d1} |1\rangle_{d2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_{b1} |1\rangle_{b2} - |1\rangle_{b1} |0\rangle_{b2}). \tag{3.1.15}$$

que são estados emaranhados de Bell na base $\{|k\rangle_{bi}\}$.

3.1.2 Aproximações no sistema

Escrevendo o hamiltoniano (3.1.5) em termos dos operadores número $\hat{d}_i^\dagger \hat{d}_i$ pode-se separar o mesmo em um hamiltoniano diagonal e um outro de interação:

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^2 \hbar \Omega_i \hat{d}_i^\dagger \hat{d}_i + \hbar \nu \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{\hbar \omega_a}{2} \sigma_{iz}. \quad (3.1.16)$$

$$\hat{H}_I = \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} (\sigma_{i+} + \sigma_{i-}) (\hat{d}_1^\dagger + \hat{d}_1 + (-1)^{i+1} (\hat{d}_2^\dagger + \hat{d}_2)) \cos \left(\eta (\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i) + \phi \right) \right\}. \quad (3.1.17)$$

$$\hat{H}_s = \hat{H}_0 + \hat{H}_I. \quad (3.1.18)$$

Para simplificar nossa análise o hamiltoniano (3.1.17) podemos assumir que o comprimento de onda dos campos nas cavidades é maior do que as amplitudes de oscilação dos íons.

Admitindo esta hipótese a constante de Lamb-Dicke η é muito pequena ($\eta \ll 1$), deste modo podemos utilizar uma expansão em série de potências de η . Assumiremos então que os íons estão nos antinodos das cavidades, ou seja $\phi = -\frac{\pi}{2}$, em consequência obtemos:

$$\begin{aligned} \cos \left(\eta (\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i) - \frac{\pi}{2} \right) &= \sin \left(\eta (\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i) \right) \\ &= \eta (\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i) - \frac{\eta^3}{3!} (\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i)^3 \dots \\ &\approx \eta (\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i), \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Nessa aproximação o hamiltoniano de interação fica:

$$\hat{H}_I = \sum_{i=1}^2 \frac{\hbar \eta g}{\sqrt{2}} (\sigma_{i+} + \sigma_{i-}) (\hat{d}_1^\dagger + \hat{d}_1 + (-1)^{i+1} (\hat{d}_2^\dagger + \hat{d}_2)) (\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i). \quad (3.1.20)$$

Para analisar a dinâmica deste sistema é conveniente estudar a parte de interação. Para isso definimos a transformação unitária:

$$\hat{\hat{H}}_I = e^{i \frac{\hat{H}_0 t}{\hbar}} \hat{H}_I e^{-i \frac{\hat{H}_0 t}{\hbar}}. \quad (3.1.21)$$

A determinação do operador $\hat{\hat{H}}_I$ pode ser simplificada se levamos em consideração o fato de que todos os operadores com subíndices 1 e 2 comutam, além disso, que os operadores de campo, níveis eletrônicos e movimento do íon também comutam. Assim aplicando as transformações:

$$e^{i\frac{\omega_a}{2}t\hat{\sigma}_z}\hat{\sigma}_{i\pm}e^{-i\frac{\omega_a}{2}t} = \hat{\sigma}_{\pm}e^{\pm i\omega_a t}, \quad (3.1.22)$$

$$e^{i\nu\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i t}\hat{a}_i^\dagger e^{-i\nu\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i t} = \hat{a}_i^\dagger e^{i\nu t}, \quad (3.1.23)$$

$$e^{i\nu\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i t}\hat{a}_i e^{-i\nu\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i t} = \hat{a}_i e^{-i\nu t}, \quad (3.1.24)$$

$$e^{i\Omega_i\hat{d}_i^\dagger\hat{d}_i t}\hat{d}_i^\dagger e^{-i\Omega_i\hat{d}_i^\dagger\hat{d}_i t} = \hat{d}_i^\dagger e^{i\Omega_i t}, \quad (3.1.25)$$

$$e^{i\Omega_i\hat{d}_i^\dagger\hat{d}_i t}\hat{d}_i e^{-i\Omega_i\hat{d}_i^\dagger\hat{d}_i t} = \hat{d}_i e^{-i\Omega_i t}, \quad (3.1.26)$$

e substituindo-as na Eq. (3.1.21) temos:

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= \sum_{i=1}^2 \frac{\hbar\eta g}{\sqrt{2}} \left(\sigma_{i+} e^{i\omega_a t} + \sigma_{i-} e^{-i\omega_a t} \right) \left(\hat{d}_1^\dagger e^{i\Omega_1 t} + \hat{d}_1 e^{-i\Omega_1 t} \right) \\ &+ (-1)^{i+1} \left(\hat{d}_2^\dagger e^{i\Omega_2 t} + \hat{d}_2 e^{-i\Omega_2 t} \right) \left(\hat{a}_i^\dagger e^{i\nu t} + \hat{a}_i e^{-i\nu t} \right). \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

É claro de (3.1.27) que o hamiltoniano de interação pode conter até 32 termos no total. Assim para compactar a expressão do hamiltoniano definimos:

$$\hat{H}_I = \sum \frac{\hbar\eta g}{\sqrt{2}} C_{lm}^{iks} \sigma_{ik} \hat{a}_i^l \hat{d}_s^m e^{i\Theta_{lm}^{iks} t}. \quad (3.1.28)$$

Onde os índices $i = 1, 2$ e $s = 1, 2$, os índices k, l e m podem representar operadores de criação ou destruição sobre o operador no qual estejam aplicados e além disso C_{lm}^{iks} é uma constante adimensional, Θ_{lm}^{iks} é outra constante com unidades de frequência que assume um papel importante na análises que seguem.

Considerando a forma geral do hamiltoniano \hat{H}_I tem-se que $\Theta_{lm}^{1ks} = \Theta_{lm}^{2ks}$. A tabela (3.1) mostra os possíveis valores dessas constantes.

	\hat{d}_1^\dagger	\hat{d}_1	\hat{d}_2^\dagger	\hat{d}_2
$\sigma_{i+}\hat{a}_i^\dagger$	$\omega_a + \nu + \omega + \lambda$	$\omega_a + \nu - \omega - \lambda$	$\omega_a + \nu + \omega - \lambda$	$\omega_a + \nu - \omega + \lambda$
$\sigma_{i+}\hat{a}_i$	$\omega_a - \nu + \omega + \lambda$	$\omega_a - \nu - \omega - \lambda$	$\omega_a - \nu + \omega - \lambda$	$\omega_a - \nu - \omega + \lambda$
$\sigma_{i-}\hat{a}_i^\dagger$	$-\omega_a + \nu + \omega + \lambda$	$-\omega_a + \nu - \omega - \lambda$	$-\omega_a + \nu + \omega - \lambda$	$-\omega_a + \nu - \omega + \lambda$
$\sigma_{i-}\hat{a}_i$	$-\omega_a - \nu + \omega + \lambda$	$-\omega_a - \nu - \omega - \lambda$	$-\omega_a - \nu + \omega - \lambda$	$-\omega_a - \nu - \omega + \lambda$

Tabela 3.1: Constantes Θ_{lm}^{iks} em termos das frequências de transição eletrônica ω_a , movimento iônico ν , campo ω e acoplamento entre os campos das cavidades λ .

Observando a tabela (3.1) podemos simplificar o hamiltoniano se levamos em consideração as hipóteses:

- (i) Um regime onde temos um acoplamento fraco entre os campos e a frequência de oscilação dos íons comparada com a frequências eletrônicas de transição e as frequências dos campos das cavidades.
- (ii) Um acoplamento dipolar fraco entre os campos das cavidades e os íons comparado com o acoplamento direto entre os campos das cavidades e a frequência de oscilação do íon.
- (iii) Uma frequência de movimento do íon muito menor que a frequência de acoplamento das cavidades.

Essas considerações são validas simultaneamente se as desigualdades:

$$(i) \omega_a, \omega \gg \lambda, \nu; \quad (ii) \lambda, \nu \gg g; \quad (iii) \lambda - \nu \gg g, \quad (3.1.29)$$

forem validas.

Por outro lado, se sintonizamos as frequências de forma que nosso sistema fique em ressonância, automaticamente os termos que estão muito fora da ressonância serão eliminados. Se ainda utilizamos a aproximação de onda girante juntamente com as desigualdades (3.2.15) para ressonâncias na primeira banda lateral azul (BLA) e na primeira banda lateral vermelha (BLV) obtemos:

- (A) $\omega_a - \omega - \lambda = -\nu$ (BLA, ressonância com \hat{d}_1)

$$\hat{H}_I = \sum_{i=1}^2 \frac{\hbar \eta g}{\sqrt{2}} \left(\sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_1 + \sigma_{i-} \hat{a}_i \hat{d}_1^\dagger \right); \quad (3.1.30)$$

- (B) $\omega_a - \omega - \lambda = \nu$ (BLV, ressonância com \hat{d}_1)

$$\hat{H}_I = \sum_{i=1}^2 \frac{\hbar \eta g}{\sqrt{2}} \left(\sigma_{i-} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_1^\dagger + \sigma_{i+} \hat{a}_i \hat{d}_1 \right); \quad (3.1.31)$$

- (C) $\omega_a - \omega + \lambda = -\nu$ (BLA, ressonância com \hat{d}_2)

$$\hat{H}_I = \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \frac{\hbar\eta g}{\sqrt{2}} \left(\sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_2 + \sigma_{i-} \hat{a}_i \hat{d}_2^\dagger \right); \quad (3.1.32)$$

- (D) $\omega_a - \omega + \lambda = \nu$ (BLV, ressonância com \hat{d}_2)

$$\hat{H}_I = \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \frac{\hbar\eta g}{\sqrt{2}} \left(\sigma_{i-} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_2^\dagger + \sigma_{i+} \hat{a}_i \hat{d}_2 \right); \quad (3.1.33)$$

Num modelo mais realista considera-se uma frequência de movimento do íon comparável com a frequência de acoplamento das cavidades. Nesse caso a hipótese (iii) não é válida, conduzindo a:

- (E) $\omega_a - \omega - \lambda = -\nu$ (BLA, ressonância com \hat{d}_1), com

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= \sum_{i=1}^2 \frac{\hbar\eta g}{\sqrt{2}} \left(\sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_1 + \sigma_{i-} \hat{a}_i \hat{d}_1^\dagger \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{i+1} \left(\sigma_{i-} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_2^\dagger e^{-2i(\lambda-\nu)t} + \sigma_{i+} \hat{a}_i \hat{d}_2 e^{2i(\lambda-\nu)t} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

- (F) $\omega_a - \omega + \lambda = -\nu$ (BLA, ressonância com \hat{d}_2) e,

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= \sum_{i=1}^2 \frac{\hbar\eta g}{\sqrt{2}} \left((-1)^{i+1} \left(\sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_2 + \sigma_{i-} \hat{a}_i \hat{d}_2^\dagger \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\sigma_{i-} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_1^\dagger e^{2i(\lambda+\nu)t} + \sigma_{i+} \hat{a}_i \hat{d}_1 e^{-2i(\lambda+\nu)t} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

Na transferência de estados bipartite formados por estados de dois qubits formados pelos estados eletrônicos e estados de movimento dos íons, os modos \hat{d}_i são em realidade os transmissores desses qubits. Assim podemos dizer que nos casos (A) até (D) a transferência é feita através de um único modo, (A) e (B) a través do modo transmissor é \hat{d}_1 e em (C) e (D) com o modo é \hat{d}_2 . Nos casos (E) e (F) temos dois modos de transferência que são os modos \hat{d}_1 e \hat{d}_2 .

3.1.3 Solução analítica e Resultados

Nohama *et.al* [14] estudaram um sistema de duas cavidades com íons aprisionados no seu interior onde o acoplamento entre os subsistemas é estabelecido via fibra óptica na aproximação de um modo de transferência e em contato com reservatórios térmicos a temperaturas

iguais a zero. Nesse trabalho Nohama *et.al* demonstraram que sistemas sintonizados na primeira banda lateral azul têm a transferência de estados melhor que aqueles com sistemas sintonizados na primeira banda lateral vermelha.

Como o objetivo de estudar diferentes condições que ajudem a melhorar a transferência de estados, em nossas análises só consideramos ressonâncias na banda lateral azul.

Considerando o estado inicial de nosso sistema como :

$$|\Psi(0)\rangle = \left(\cos\theta |g\rangle_1 |0\rangle_{a1} + \sin\theta e^{i\varphi} |e\rangle_1 |1\rangle_{a1} \right) |0\rangle_{d1} |0\rangle_{d2} |g\rangle_2 |0\rangle_{a2}, \quad (3.1.36)$$

onde o íon 1 fica num estado específico dependendo dos parâmetros θ e φ . Para certos valores destes podemos ter um estado maximamente emaranhado.

Particularmente damos relevância ao valor $\theta = \frac{\pi}{4}$ que define um estado inicial onde os graus de liberdade do íon 1 estão maximamente emaranhados. Para $\theta = \frac{\pi}{4}$ o estado inicial é escrito na forma:

$$|\Psi(0)\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |g\rangle |0\rangle_{a1} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} |e\rangle_1 |1\rangle_{a1} \right) |0\rangle_{d1} |0\rangle_{d2} |g\rangle_2 |0\rangle_{a2}. \quad (3.1.37)$$

Nosso objetivo é determinar se o sistema pode transferir o estado do íon 1 para o íon 2, é dizer, que para algum tempo o íon 2 está no estado

$$|\psi\rangle_{ion2} = |\xi\rangle = \cos\theta |g\rangle_2 |0\rangle_{a2} + \sin\theta e^{i\varphi} |e\rangle_2 |1\rangle_{a2}, \quad (3.1.38)$$

A dinâmica do sistema neste caso consiste em resolver a equação Schrödinger:

$$\hat{H}_I |\tilde{\Psi}(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\Psi}(t)\rangle, \quad (3.1.39)$$

onde $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$ é um estado na representação de interação. Utilizando a transformação:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}_0 t}{\hbar}} |\tilde{\Psi}(t)\rangle, \quad (3.1.40)$$

podemos calcular o estado $|\Psi(t)\rangle$ que está na representação de Schrödinger

Na forma em que os hamiltonianos (3.2.16) (3.1.35) estão associados aos operadores de movimento do íon, níveis eletrônicos e campos nas cavidades, é adequado propor uma solução da forma:

$$\begin{aligned}
|\tilde{\Psi}(t)\rangle &= \sum_{k_1, k_2, l_1, l_2=0}^{\infty} \left[C_{k_1, k_2, l_1, l_2}^{gg}(t) |g\rangle_1 |g\rangle_2 + C_{k_1, k_2, l_1, l_2}^{eg}(t) |e\rangle_1 |g\rangle_2 \right. \\
&\quad \left. + C_{k_1, k_2, l_1, l_2}^{ge}(t) |g\rangle_1 |e\rangle_2 + C_{k_1, k_2, l_1, l_2}^{ee}(t) |e\rangle_1 |e\rangle_2 \right] |k_1\rangle_{a1} |k_2\rangle_{a2} |l_1\rangle_{d1} |l_2\rangle_{d2},
\end{aligned} \tag{3.1.41}$$

de maneira que a solução da dinâmica desses sistemas consiste no cálculo do conjunto de funções com coeficientes $C(t)$.

3.1.3.1 Transferência com um modo

Primeiramente apresentamos o caso (A) onde o modo \hat{d}_1 transmite o estado na primeira banda lateral azul e é representado pelo hamiltoniano (3.2.16). Como esse hamiltoniano é independente do modo \hat{d}_2 é claro que não há mudanças no número de fótons associados á esse operador, em consequencia, na solução proposta em (3.1.41) pode-se suprimir a soma em l_2 tendo por tantos:

$$\begin{aligned}
|\tilde{\Psi}(t)\rangle &= \sum_{k_1, k_2, l_1=0}^{\infty} \left[C_{k_1, k_2, l_1}^{gg}(t) |g\rangle_1 |g\rangle_2 + C_{k_1, k_2, l_1}^{eg}(t) |e\rangle_1 |g\rangle_2 + C_{k_1, k_2, l_1}^{ge}(t) |g\rangle_1 |e\rangle_2 \right. \\
&\quad \left. + C_{k_1, k_2, l_1}^{ee}(t) |e\rangle_1 |e\rangle_2 \right] |k_1\rangle_{a1} |k_2\rangle_{a2} |l_1\rangle_{d1} |0\rangle_{d2},
\end{aligned} \tag{3.1.42}$$

cujas únicas condições iniciais não nulas são $C_{0,0,0}^{gg}(0) = \cos \theta$ e $C_{1,0,0}^{eg}(0) = e^{i\varphi} \sin \theta$.

Substituímos estas, (3.1.42) em (3.1.39) para $\tau = \eta gt$, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
i \frac{d}{d\tau} C_{k_1, k_2, l_1}^{gg}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{l_1} \left(\sqrt{k_1 + 1} C_{k_1+1, k_2, l_1-1}^{eg}(\tau) + \sqrt{k_2 + 1} C_{k_1, k_2+1, l_1-1}^{ge}(\tau) \right) \\
i \frac{d}{d\tau} C_{k_1, k_2, l_1}^{ee}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{l_1 + 1} \left(\sqrt{k_1} C_{k_1-1, k_2, l_1+1}^{ge}(\tau) + \sqrt{k_2} C_{k_1, k_2-1, l_1+1}^{eg}(\tau) \right) \\
i \frac{d}{d\tau} C_{k_1, k_2, l_1}^{ge}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{l_1 (k_1 + 1)} C_{k_1+1, k_2, l_1-1}^{ee}(\tau) + \sqrt{k_2 (l_1 + 1)} C_{k_1, k_2-1, l_1+1}^{gg}(\tau) \right) \\
i \frac{d}{d\tau} C_{k_1, k_2, l_1}^{eg}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{k_1 (l_1 + 1)} C_{k_1-1, k_2, l_1+1}^{gg}(\tau) + \sqrt{l_1 (k_2 + 1)} C_{k_1, k_2+1, l_1-1}^{ee}(\tau) \right)
\end{aligned} \tag{3.1.43}$$

cujos únicos elementos não nulos são:

$$\begin{aligned}
 i \frac{d}{d\tau} C_{0,0,0}^{gg}(\tau) &= 0; \\
 i \frac{d}{d\tau} C_{0,0,1}^{gg}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(C_{1,0,0}^{eg}(\tau) + C_{0,1,0}^{ge}(\tau) \right); \\
 i \frac{d}{d\tau} C_{1,0,0}^{eg}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} C_{0,0,1}^{gg}(\tau); \\
 i \frac{d}{d\tau} C_{0,1,0}^{ge}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} C_{0,0,1}^{gg}(\tau),
 \end{aligned} \tag{3.1.44}$$

e a solução é dada por:

$$\begin{aligned}
 C_{0,0,0}^{gg}(\tau) &= \cos \theta; & C_{0,0,1}^{gg}(\tau) &= -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \sin \theta \sin \tau; \\
 C_{0,1,0}^{ge}(\tau) &= -e^{i\varphi} \sin \theta \sin^2 \frac{\tau}{2}; & C_{1,0,0}^{eg}(\tau) &= e^{i\varphi} \sin \theta \cos^2 \frac{\tau}{2},
 \end{aligned} \tag{3.1.45}$$

e por consequência o estado do sistema na representação de Schrödinger é dado por:

$$\begin{aligned}
 |\Psi(\tau)\rangle &= \left[\cos \theta e^{i\frac{\omega_a \tau}{\eta g}} |g\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} |0\rangle_{d1} \right. \\
 &- \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \sin \theta \sin e^{-i\frac{\nu t}{\eta g}} |g\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} |1\rangle_{d1} \\
 &+ e^{i\varphi} \sin \theta e^{-i\frac{\nu t}{\eta g}} \left(-\sin^2 \frac{\tau}{2} |g\rangle_1 |e\rangle_2 |0\rangle_{a1} |1\rangle_{a2} |0\rangle_{d1} \right. \\
 &\left. \left. + \cos^2 \frac{\tau}{2} |e\rangle_1 |g\rangle_2 |1\rangle_{a1} |1\rangle_{a2} |0\rangle_{d1} \right) \right] |0\rangle_{d2}.
 \end{aligned} \tag{3.1.46}$$

Para estudar a possibilidade de transferência do estado do íon 1 da primeira cavidade para o íon 2 da segunda podemos analisar o grau de fidelidade, que representa a projeção do sistema sobre o estado desejado do íon 2 (i.e graus de liberdade associados ao íon 2) , desta maneira temos que:

$$\mathcal{F}(\theta, \tau) = \langle \xi | \hat{\rho}_2(\tau) | \xi \rangle, \tag{3.1.47}$$

onde $\hat{\rho}_2(\tau)$ é o operador densidade reduzido do íon 2 definido por,

$$\hat{\rho}_2(\tau) = Tr_{a1}\{Tr_{r1}\{Tr_{d1}\{Tr_{d2}\{\{|\Psi(\tau)\rangle\langle\Psi(\tau)|\}\}\}\}\}, \quad (3.1.48)$$

dá a medida da fidelidade da transmissão do estado requerido.

Substituindo (3.1.46) em (3.1.48), obtemos de (3.1.47) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(A)}(\theta, \tau) &= \cos^4 \theta + \sin^4 \theta \sin^4 \frac{\tau}{2} \\ &+ \cos^2 \theta \sin^4 \theta \left(\frac{1}{2} \sin^2 \tau + \cos^4 \frac{\tau}{2} - 2 \cos \frac{(\omega + \lambda)}{\eta g} \tau \sin^2 \frac{\tau}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

Semelhante ao estudo feito para o caso (A) onde o hamiltoniano é independente do modo \hat{d}_2 . Vamos analisar a transferência de estados no caso (C) onde o modo de transmissão é o \hat{d}_2 (Eq. (3.1.32)). Nesse caso a solução proposta não precisa da soma sobre todos os estados possíveis de correspondentes á base de estados de $\hat{d}_1^\dagger \hat{d}_1$. Assim proporemos uma solução na forma:

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}(t)\rangle &= \sum_{k_1, k_2, l_2=0}^{\infty} \left[C_{k_1, k_2, l_2}^{gg}(t) |g\rangle_1 |g\rangle_2 + C_{k_1, k_2, l_2}^{eg}(t) |e\rangle_1 |g\rangle_2 + C_{k_1, k_2, l_2}^{ge}(t) |g\rangle_1 |e\rangle_2 \right. \\ &+ \left. C_{k_1, k_2, l_2}^{ee}(t) |e\rangle_1 |e\rangle_2 \right] |k_1\rangle_{a1} |k_2\rangle_{a2} |l_2\rangle_{d2} |0\rangle_{d1}, \end{aligned} \quad (3.1.50)$$

que substituindo (3.1.50) em (3.1.39) com (3.1.32) e utilizando a mesma escala de tempo $\tau = \eta g t$ temos:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{d\tau} C_{k_1, k_2, l_2}^{gg}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{l_2} \left(\sqrt{k_1 + 1} C_{k_1+1, k_2, l_2-1}^{eg}(\tau) - \sqrt{k_2 + 1} C_{k_1, k_2+1, l_2-1}^{ge}(\tau) \right) \\ i \frac{d}{d\tau} C_{k_1, k_2, l_2}^{ee}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{l_2 + 1} \left(\sqrt{k_1} C_{k_1-1, k_2, l_2+1}^{ge}(\tau) - \sqrt{k_2} C_{k_1, k_2-1, l_2+1}^{eg}(\tau) \right) \\ i \frac{d}{d\tau} C_{k_1, k_2, l_2}^{ge}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{l_2} (k_1 + 1) C_{k_1+1, k_2, l_2-1}^{ee}(\tau) - \sqrt{k_2} (l_2 + 1) C_{k_1, k_2-1, l_2+1}^{gg}(\tau) \right) \\ i \frac{d}{d\tau} C_{k_1, k_2, l_2}^{eg}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{k_1} (l_2 + 1) C_{k_1-1, k_2, l_2+1}^{gg}(\tau) - \sqrt{l_2} (k_2 + 1) C_{k_1, k_2+1, l_2-1}^{ee}(\tau) \right) \end{aligned} \quad (3.1.51)$$

Como temos o estado inicial (3.1.36), as condições iniciais são as mesmas dada para

solucionar a dinâmica do caso (A). onde temos que os únicos elementos não nulos são $C_{0,0,0}^{gg}(0) = \cos \theta$ e $C_{1,0,0}^{eg}(0) = e^{i\varphi} \sin \theta$. Aqui o sistema de equações diferenciais fica reduzido a:

$$\begin{aligned}
 i \frac{d}{d\tau} C_{0,0,0}^{gg}(\tau) &= 0; \\
 i \frac{d}{d\tau} C_{0,0,1}^{gg}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(C_{1,0,0}^{eg}(\tau) - C_{0,1,0}^{ge}(\tau) \right); \\
 i \frac{d}{d\tau} C_{1,0,0}^{eg}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} C_{0,0,1}^{gg}(\tau); \\
 i \frac{d}{d\tau} C_{0,1,0}^{ge}(\tau) &= - \frac{1}{\sqrt{2}} C_{0,0,1}^{gg}(\tau),
 \end{aligned} \tag{3.1.52}$$

cujas soluções são :

$$\begin{aligned}
 C_{0,0,0}^{gg}(\tau) &= \cos \theta; & C_{0,0,1}^{gg}(\tau) &= -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \sin \theta \sin \tau; \\
 C_{0,1,0}^{ge}(\tau) &= e^{i\varphi} \sin \theta \sin^2 \frac{\tau}{2}; & C_{1,0,0}^{eg}(\tau) &= e^{i\varphi} \sin \theta \cos^2 \frac{\tau}{2},
 \end{aligned} \tag{3.1.53}$$

Na representação de Schrödinger , o estado do sistema no tempo τ é dado por:

$$\begin{aligned}
 |\Psi(\tau)\rangle &= \left[\cos \theta e^{i\frac{\omega_a \tau}{\eta g}} |g\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} |0\rangle_{d1} \right. \\
 &- \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \sin \theta \sin e^{-i\frac{\nu t}{\eta g}} |g\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} |1\rangle_{d1} \\
 &+ e^{i\varphi} \sin \theta e^{-i\frac{\nu t}{\eta g}} \left(\sin^2 \frac{\tau}{2} |g\rangle_1 |e\rangle_2 |0\rangle_{a1} |1\rangle_{a2} |0\rangle_{d1} \right. \\
 &\left. \left. + \cos^2 \frac{\tau}{2} |e\rangle_1 |g\rangle_2 |1\rangle_{a1} |1\rangle_{a2} |0\rangle_{d1} \right) \right] |0\rangle_{d2}.
 \end{aligned} \tag{3.1.54}$$

e a fidelidade:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{(C)}(\theta, \tau) &= \cos^4 \theta + \sin^4 \theta \sin^4 \frac{\tau}{2} \\
 &+ \cos^2 \theta \sin^4 \theta \left(\frac{1}{2} \sin^2 \tau + \cos^4 \frac{\tau}{2} + 2 \cos \frac{(\omega - \lambda)}{\eta g} \tau \sin^2 \frac{\tau}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{3.1.55}$$

Nas funções $\mathcal{F}_{(A)}(\theta, \tau)$ e $\mathcal{F}_{(C)}(\theta, \tau)$ não temos uma dependência com a fase inicial φ , isso

implica que esta fase não gera mudanças na transferência do estado.

Um resultado importante dessas soluções está no fato de ter a possibilidade de transferir o estado perfeitamente, i.e. ter uma fidelidade igual a um. No caso (A) a transferência perfeita é completada se $\frac{(\omega+\lambda)}{\eta g} = 2l + 1$ e no caso (C) se $\frac{(\omega-\lambda)}{\eta g} = 2l$. Nestas condições o tempo de transferência é dado por $\tau = (2n + 1) \pi$ onde n e l são inteiro.

Para ilustrar esses resultados, temos as fidelidades para os casos (A) e (C) mostrados nas figuras 3.1.2 e 3.1.3.

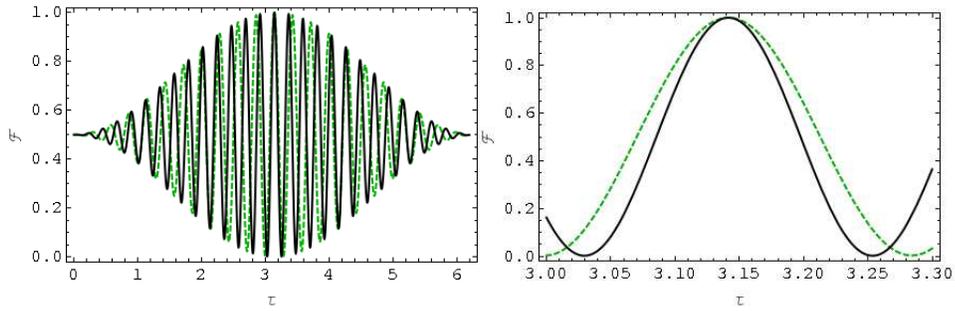


Figura 3.1.2: Fidelidade para $\omega/\eta g = 22.5$, $\theta = \pi/4$ e $\lambda/\eta g = 2.5$. A linha preta representa a transferência feita no caso (A) e a linha verde com o caso (C). a figura da direita é um zoom da figura da esquerda no primeiro máximo $\tau = \pi$.

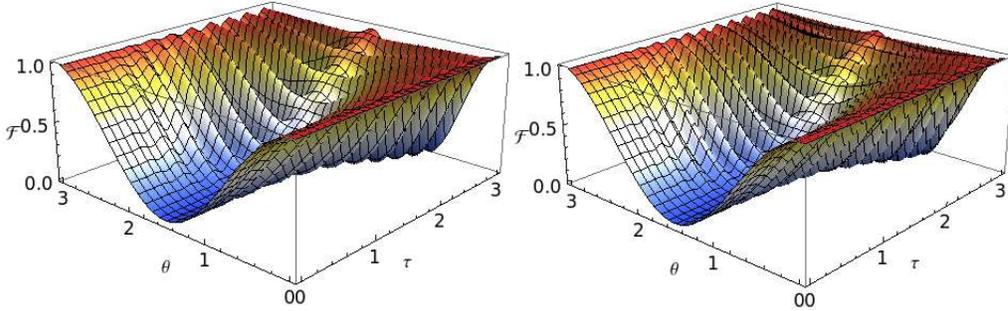


Figura 3.1.3: Fidelidade para $\omega/\eta g = 22.5$ e $\lambda/\eta g = 2.5$. Na figura da direita temos transferência no caso (A) e na figura da esquerda no caso (C)

3.1.3.2 Transferência com dois modos

Os hamiltonianos (3.1.34) e (3.1.35) são operadores dependentes do tempo, isso implica que o sistema de equações diferenciais a resolver no estudo da dinâmica do sistema não vai ser de

coeficientes constantes como na seção anterior, tornando as soluções analíticas desses casos mais complicadas. A solução analítica deste problema foi feita utilizando transformadas de laplace transladadas para o espaço de frequências. O tratamento seguido nesse caso será apresentado no que segue.

No caso (E) que corresponde á transferência de estados com um modo normal ressonante \hat{d}_1 e um modo normal não ressonante \hat{d}_2 a solução proposta vem dada por (3.1.41). onde substituindo na equação de interação em termos do hamiltoniano (3.1.34) com a escala temporal é $\tau' = \frac{\eta g t}{\sqrt{2}}$ obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
 i \frac{d}{d\tau'} C_{k_1, k_2, l_1, l_2}^{gg}(\tau') &= \sqrt{l_1} \left(\sqrt{k_1 + 1} C_{k_1+1, k_2, l_1-1, l_2}^{eg}(\tau') + \sqrt{k_2 + 1} C_{k_1, k_2+1, l_1-1, l_2}^{eg}(\tau') \right) \\
 &+ \sqrt{l_2} \left(\sqrt{k_1} C_{k_1-1, k_2, l_1, l_2-1}^{eg}(\tau') e^{-i\Delta\tau'} - \sqrt{k_2} C_{k_1, k_2-1, l_1, l_2-1}^{ge}(\tau') e^{-i\Delta\tau'} \right) \\
 i \frac{d}{d\tau'} C_{k_1, k_2, l_1, l_2}^{ee}(\tau') &= \sqrt{l_1 + 1} \left(\sqrt{k_1} C_{k_1-1, k_2, l_1+1, l_2}^{eg}(\tau') + \sqrt{k_2} C_{k_1, k_2-1, l_1+1, l_2}^{eg}(\tau') \right) \\
 &+ \sqrt{l_2 + 1} \left(\sqrt{k_1 + 1} C_{k_1+1, k_2, l_1, l_2+1}^{ge}(\tau') e^{i\Delta\tau'} \right. \\
 &\left. - \sqrt{k_2 + 1} C_{k_1, k_2+1, l_1, l_2+1}^{eg}(\tau') e^{i\Delta\tau'} \right) \\
 i \frac{d}{d\tau'} C_{k_1, k_2, l_1, l_2}^{ge}(\tau') &= \left(\sqrt{l_1} (k_1 + 1) C_{k_1+1, k_2, l_1-1, l_2}^{ee}(\tau') + \sqrt{k_2} (l_1 + 1) C_{k_1, k_2-1, l_1+1, l_2}^{gg}(\tau') \right) \\
 &- \sqrt{(l_2 + 1) (k_2 + 1)} C_{k_1, k_2+1, l_1, l_2+1}^{gg}(\tau') e^{i\Delta\tau'} \\
 &+ \sqrt{l_2 k_1} C_{k_1-1, k_2, l_1, l_2-1}^{ee}(\tau') e^{-i\Delta\tau'} \\
 i \frac{d}{d\tau'} C_{k_1, k_2, l_1, l_2}^{eg}(\tau') &= \left(\sqrt{k_1} (l_1 + 1) C_{k_1-1, k_2, l_1+1, l_2}^{gg}(\tau') + \sqrt{l_1} (k_2 + 1) C_{k_1, k_2+1, l_1-1, l_2}^{eg}(\tau') \right) \\
 &+ \sqrt{(l_2 + 1) (k_1 + 1)} C_{k_1+1, k_2, l_1, l_2+1}^{gg}(\tau') e^{i\Delta\tau'} \\
 &- \sqrt{l_2 k_2} C_{k_1, k_2-1, l_1, l_2-1}^{ee}(\tau') e^{-i\Delta\tau'}
 \end{aligned} \tag{3.1.56}$$

onde $\Delta = \frac{2\sqrt{2}}{\eta g} (\lambda - \nu)$. Desse sistema os únicos elementos não nulos evoluem de acordo ao sistema de equações:

$$\begin{aligned}
i \frac{d}{d\tau'} C_{0,0,0,0}^{gg}(\tau') &= 0; \\
i \frac{d}{d\tau'} C_{1,0,0,0}^{eg}(\tau') &= C_{0,0,1,0}^{gg}(\tau') + \sqrt{2} C_{2,0,0,1}^{gg}(\tau') e^{i\Delta\tau'}; \\
i \frac{d}{d\tau'} C_{2,0,0,1}^{gg}(\tau') &= \sqrt{2} C_{1,0,0,0}^{eg}(\tau') e^{-i\Delta\tau'}; \\
i \frac{d}{d\tau'} C_{0,0,1,0}^{gg}(\tau') &= C_{1,0,0,0}^{eg}(\tau') + C_{0,1,0,0}^{ge}(\tau'); \\
i \frac{d}{d\tau'} C_{0,1,0,0}^{ge}(\tau') &= C_{0,0,1,0}^{gg}(\tau') - \sqrt{2} C_{0,2,0,1}^{gg}(\tau') e^{i\Delta\tau'}; \\
i \frac{d}{d\tau'} C_{0,2,0,1}^{gg}(\tau') &= -\sqrt{2} C_{0,1,0,0}^{ge}(\tau') e^{-i\Delta\tau'}. \tag{3.1.57}
\end{aligned}$$

Este é um sistema de equações diferenciais que não pode ser resolvido de forma convencional [27] pelo fato de não ser de coeficientes constantes, mas tem a vantagem de ter dependência temporal em termos de exponenciais complexas. Assim para resolver este complexo sistema de equações calculamos a transformada de Laplace ¹ com o que obtivemos:

$$\begin{aligned}
i \left(s F_{1,0,0,0}^{eg}(s) - C_{1,0,0,0}^{eg}(0) \right) &= F_{0,0,1,0}^{gg}(s) + \sqrt{2} F_{2,0,0,1}^{gg}(s - i\Delta); \\
i s F_{2,0,0,1}^{gg}(s) &= \sqrt{2} F_{1,0,0,0}^{eg}(s + i\Delta); \\
i s F_{0,0,1,0}^{gg}(s) &= F_{1,0,0,0}^{eg}(s) + F_{0,1,0,0}^{ge}(s); \\
i s F_{0,1,0,0}^{ge}(s) &= F_{0,0,1,0}^{gg}(s) - \sqrt{2} F_{0,2,0,1}^{gg}(s - i\Delta); \\
i s F_{0,2,0,1}^{gg}(s) &= -\sqrt{2} F_{0,1,0,0}^{ge}(s + i\Delta). \tag{3.1.58}
\end{aligned}$$

Observando o sistema de equações (3.1.58) vê-se que este não é fechado em termos do seu número de variáveis, já que temos como incógnitas as funções e suas translações que em total são todas 9. Para solucionar este problema utilizamos o seguinte truque.

Fazendo-se uma translação $s \rightarrow s + \frac{i\Delta}{2}$ nas linhas 1, 3 e 4 do sistema (3.1.58) e $s \rightarrow s - \frac{i\Delta}{2}$ nas linhas 2 e 5 obtém-se o sistema de equações onde é possível colocar em evidência a seguinte matriz associada ao sistema:

¹A transformada de Laplace de uma função $C(t)$ é $F(s) = \mathcal{L}\{C(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} C(t) dt$.

$$\begin{pmatrix} -i\left(s+\frac{i\Delta}{2}\right) & \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -i\left(s-\frac{i\Delta}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -i\left(s+\frac{i\Delta}{2}\right) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i\left(s+\frac{i\Delta}{2}\right) & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & -i\left(s-\frac{i\Delta}{2}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{1,0,0,0}^{eg}\left(s+\frac{i\Delta}{2}\right) \\ F_{2,0,0,1}^{gg}\left(s-\frac{i\Delta}{2}\right) \\ F_{0,0,1,0}^{gg}\left(s+\frac{i\Delta}{2}\right) \\ F_{0,1,0,0}^{ge}\left(s+\frac{i\Delta}{2}\right) \\ F_{0,2,0,1}^{gg}\left(s-\frac{i\Delta}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iC_{1,0,0,0}^{eg}(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.59)$$

Nesse sistema de equações lineares podemos agora calcular as transformadas diretas e inversa, e por consequência obtemos uma solução analítica do problema.

Por último temos que o estado do sistema agora vem dado por:

$$\begin{aligned} |\Psi(\tau')\rangle &= \cos\theta e^{i\frac{\sqrt{2}\omega_a\tau'}{\eta g}} |g\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} |0\rangle_{d1} |0\rangle_{d2} \\ &+ C_{0,0,1,0}^{gg}(\tau') e^{-i\frac{\sqrt{2}\nu\tau'}{\eta g}} |g\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} |1\rangle_{d1} |0\rangle_{d2} \\ &+ e^{-i\frac{\sqrt{2}\nu\tau'}{\eta g}} \left(C_{0,1,0,0}^{ge}(\tau') |g\rangle_1 |e\rangle_2 |0\rangle_{a1} |1\rangle_{a2} |0\rangle_{d1} |0\rangle_{d2} \right. \\ &+ \left. C_{1,0,0,0}^{eg}(\tau') |e\rangle_1 |g\rangle_2 |1\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} |0\rangle_{d1} |0\rangle_{d2} \right) \\ &+ e^{i\left(\Delta-\frac{\sqrt{2}\nu}{\eta g}\right)\tau'} \left(C_{0,2,0,1}^{gg}(\tau') |g\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_{a1} |2\rangle_{a2} |0\rangle_{d1} |1\rangle_{d2} \right. \\ &\quad \left. C_{2,0,0,1}^{gg}(\tau') |g\rangle_1 |g\rangle_2 |2\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} |0\rangle_{d1} |1\rangle_{d2} \right), \end{aligned} \quad (3.1.60)$$

e a fidelidade adquire a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(E)}(\theta, \tau') &= \cos^2\theta \left(\cos^2\theta + |C_{0,0,1,0}^{gg}(\tau')|^2 + |C_{1,0,0,0}^{eg}(\tau')|^2 + |C_{2,0,0,1}^{gg}(\tau')|^2 \right) \\ &+ \sin^2\theta |C_{0,1,0,0}^{ge}(\tau')|^2 + 2Re \left\{ \cos\theta e^{\frac{\sqrt{2}i(\omega+\lambda)\tau'}{\eta g}} C_{0,1,0,0}^{ge}(\tau')^* \right\}. \end{aligned} \quad (3.1.61)$$

Em (3.1.60) temos que $|\Psi(\tau')\rangle$ representa os estados de movimento iônico associados ao segundo nível, i.e estados $|2\rangle_{ai}$. Esta situação não era possível no caso de transferência com um só modo normal e gera um novo termo na expressão da fidelidade comparada com as obtidas nas Eq. (3.1.49) e (3.1.55).

Nas figuras (3.1.4) e (3.1.5) temos a fidelidade para diferentes parâmetros.

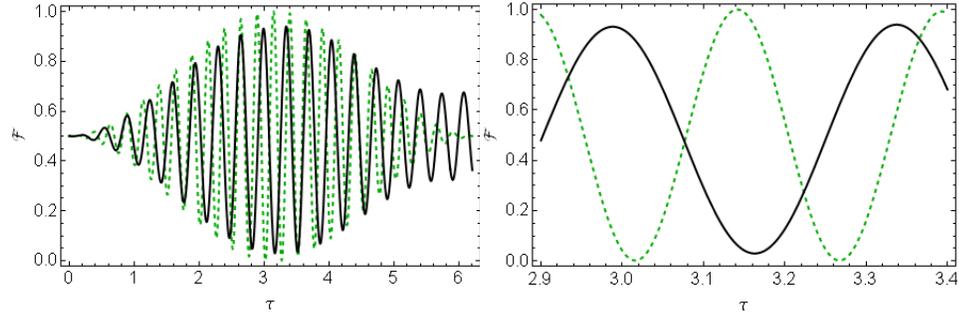


Figura 3.1.4: Fidelidade para $\omega + \lambda/\eta g = 25$ e $\theta = \pi/4$ na escala de tempo τ . A linha preta representa a transferência feita no caso (E) com $\Delta = 5$ e a linha verde com o caso (A). a figura da direita é um zoom da figura da esquerda.

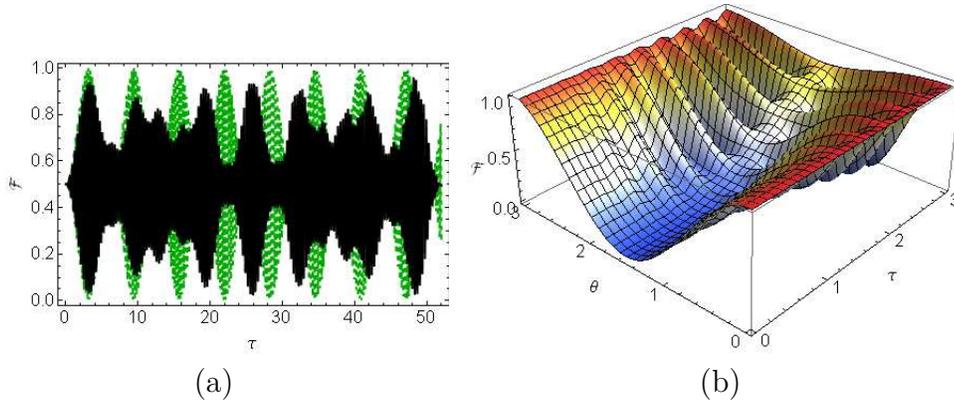


Figura 3.1.5: Fidelidade na figura (a) com $\omega + \lambda/\eta g = 20$ e $\theta = \pi/4$ na escala de tempo τ . A linha preta representa a transferência feita no caso (F) com $\Delta = 5$ e a linha verde com o caso (A). Na figura (b) temos a fidelidade no caso (E) para diferentes valores de τ e θ .

Nestas figuras observamos que no caso com dois modos normais para a transferência de estados (caso (E)) temos uma fidelidade menor que um para o tempo em que era esperado o primeiro máximo ($\tau = \pi$) e também uma mudança na fase. Na figura (3.1.4) caso (E), vê-se uma fidelidade máxima de 0.94, que ocorre para $\tau = 3.38$.

Além disso, Fig. (3.1.5)-(a) o tempo para que o sistema volte ao estado inicial é muito maior comparado com aquele de um só modo normal.

Para o caso (F), a evolução é devida ao hamiltoniano (3.1.34), que representa um sistema onde o modo normal ressonante de transferência é \hat{d}_2 e o modo fora da ressonância é o modo \hat{d}_1 . Nesse caso definido $\Delta' = \frac{2\sqrt{2}}{\eta g} (\lambda + \nu)$ e substituindo (3.1.41) em (3.1.39) temos:

$$\begin{aligned}
i \frac{d}{d\tau'} C_{k_1, k_2, l_1, l_2}^{gg}(\tau') &= \sqrt{l_2} \left(\sqrt{k_1 + 1} C_{k_1+1, k_2, l_1, l_2-1}^{eg}(\tau') - \sqrt{k_2 + 1} C_{k_1, k_2+1, l_1, l_2-1}^{eg}(\tau') \right) \\
&+ \sqrt{l_1} \left(\sqrt{k_1} C_{k_1-1, k_2, l_1-1, l_2}^{eg}(\tau) e^{i\Delta'\tau'} + \sqrt{k_2} C_{k_1, k_2-1, l_1-1, l_2}^{ge}(\tau) e^{i\Delta'\tau'} \right) \\
i \frac{d}{d\tau'} C_{k_1, k_2, l_1, l_2}^{ee}(\tau') &= \sqrt{l_2 + 1} \left(\sqrt{k_1} C_{k_1-1, k_2, l_1, l_2+1}^{ge}(\tau') - \sqrt{k_2} C_{k_1, k_2-1, l_1, l_2+1}^{eg}(\tau') \right) \\
&+ \sqrt{l_1 + 1} \left(\sqrt{k_1 + 1} C_{k_1+1, k_2, l_1+1, l_2}^{ge}(\tau') e^{-i\Delta'\tau'} \right. \\
&\left. - \sqrt{k_2 + 1} C_{k_1, k_2+1, l_1+1, l_2}^{eg}(\tau') e^{i\Delta'\tau'} \right) \\
i \frac{d}{d\tau'} C_{k_1, k_2, l_1, l_2}^{ge}(\tau') &= \left(\sqrt{l_2} (k_1 + 1) C_{k_1+1, k_2, l_1, l_2-1}^{ee}(\tau') - \sqrt{k_2} (l_2 + 1) C_{k_1, k_2-1, l_1, l_2+1}^{gg}(\tau') \right) \\
&+ \sqrt{(l_1 + 1) (k_2 + 1)} C_{k_1, k_2+1, l_1+1, l_2}^{gg}(\tau') e^{-i\Delta'\tau'} \\
&+ \sqrt{l_1 k_1} C_{k_1-1, k_2, l_1-1, l_2}^{ee}(\tau') e^{i\Delta'\tau'} \\
i \frac{d}{d\tau'} C_{k_1, k_2, l_1, l_2}^{eg}(\tau') &= \left(\sqrt{k_1} (l_2 + 1) C_{k_1-1, k_2, l_1, l_2+1}^{gg}(\tau') - \sqrt{l_2} (k_2 + 1) C_{k_1, k_2+1, l_1, l_2-1}^{eg}(\tau') \right) \\
&+ \sqrt{(l_1 + 1) (k_1 + 1)} C_{k_1+1, k_2, l_1+1, l_2}^{gg}(\tau') e^{-i\Delta'\tau'} \\
&+ \sqrt{l_2 k_2} C_{k_1, k_2-1, l_1-1, l_2}^{ee}(\tau') e^{i\Delta'\tau'}
\end{aligned} \tag{3.1.62}$$

nesse caso os únicos termos não nulos são:

$$\begin{aligned}
i \frac{d}{d\tau'} C_{0,0,0,0}^{gg}(\tau') &= 0; \\
i \frac{d}{d\tau'} C_{1,0,0,0}^{eg}(\tau') &= C_{0,0,0,1}^{gg}(\tau') + \sqrt{2} C_{2,0,1,0}^{gg}(\tau') e^{-i\Delta'\tau'}; \\
i \frac{d}{d\tau'} C_{2,0,1,0}^{gg}(\tau') &= \sqrt{2} C_{1,0,0,0}^{eg}(\tau') e^{i\Delta'\tau'}; \\
i \frac{d}{d\tau'} C_{0,0,0,1}^{gg}(\tau') &= C_{1,0,0,0}^{eg}(\tau') - C_{0,1,0,0}^{ge}(\tau'); \\
i \frac{d}{d\tau'} C_{0,1,0,0}^{ge}(\tau') &= -C_{0,0,0,1}^{gg}(\tau') + \sqrt{2} C_{0,2,1,0}^{gg}(\tau') e^{-i\Delta'\tau'}; \\
i \frac{d}{d\tau'} C_{0,2,1,0}^{gg}(\tau') &= \sqrt{2} C_{0,1,0,0}^{ge}(\tau') e^{-i\Delta'\tau'}.
\end{aligned} \tag{3.1.63}$$

Esse sistema de equações diferenciais é semelhante ao sistema da Eq.(3.1.57) , De maneira análoga fazendo a transformada de Laplace com as translações adequadas sobre o sistema (3.1.63) obtemos o seguinte sistema de equações separáveis:

$$\begin{pmatrix} -i\left(s-\frac{i\Delta'}{2}\right) & \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -i\left(s+\frac{i\Delta'}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -i\left(s-\frac{i\Delta'}{2}\right) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -i\left(s-\frac{i\Delta'}{2}\right) & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -i\left(s+\frac{i\Delta'}{2}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{1,0,0,0}^{eg}\left(s-\frac{i\Delta'}{2}\right) \\ F_{2,0,1,0}^{gg}\left(s+\frac{i\Delta'}{2}\right) \\ F_{0,0,0,1}^{gg}\left(s-\frac{i\Delta'}{2}\right) \\ F_{0,1,0,0}^{ge}\left(s-\frac{i\Delta'}{2}\right) \\ F_{0,2,1,0}^{gg}\left(s+\frac{i\Delta'}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Upsilon \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.64)$$

onde $\Upsilon = -iC_{1,0,0,0}^{eg}(0)$. Nesse caso obtido e o estado do sistema, o cálculo da fidelidade resultou em:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(F)}(\theta, \tau') &= \cos^2 \theta \left(\cos^2 \theta + |C_{0,0,0,1}^{gg}(\tau')|^2 + |C_{1,0,0,0}^{eg}(\tau')|^2 + |C_{2,0,1,0}^{gg}(\tau')|^2 \right) \\ &+ \sin^2 \theta |C_{0,1,0,0}^{ge}(\tau')|^2 + 2Re \left\{ \cos \theta e^{\frac{\sqrt{2}i(\omega-\lambda)\tau'}{\eta g}} C_{0,1,0,0}^{ge}(\tau')^* \right\}, \quad (3.1.65) \end{aligned}$$

que esta mostradas nas figuras:

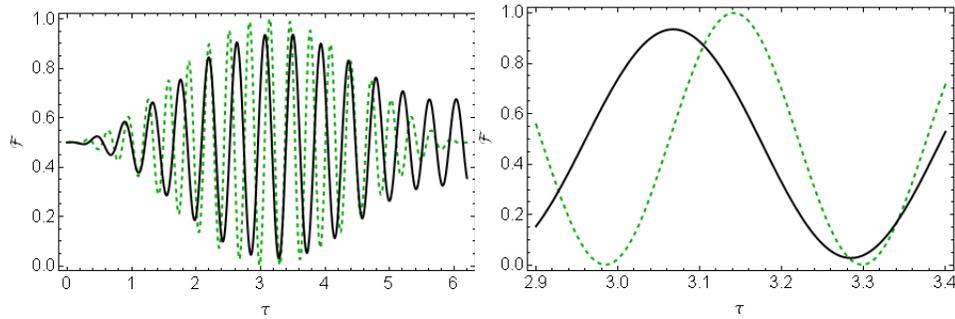


Figura 3.1.6: Fidelidade para $\omega - \lambda/\eta g = 20$ e $\theta = \pi/4$ na escala de tempo τ . A linha preta representa a transferência feita no caso (F) com $\Delta' = 5$ e a linha verde com o caso (C). a figura da direita é um zoom da figura da esquerda

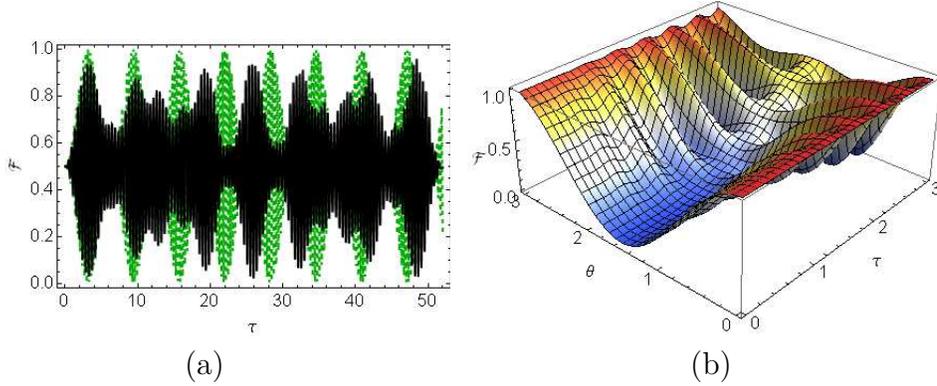


Figura 3.1.7: Fidelidade na figura (a) com $\omega - \lambda/\eta g = 20$ e $\theta = \pi/4$ na escala de tempo τ . A linha preta representa a transferência feita no caso (F) com $\Delta' = 5$ e a linha verde com o caso (C). Na figura (b) temos a fidelidade no caso (F) para diferentes valores de τ e θ .

Semelhante ao caso (E) observamos uma perda da fidelidade e uma mudança na fase do sistema. Na Fig. (3.1.6) no caso (F) a fidelidade máxima obtida é de 0.94 em $\tau = 3.50$. Na Fig. (3.1.7) observa-se um aumento no tempo necessário que o sistema para volte à condição inicial. Esse resultado de certa forma já era esperado, uma vez que um segundo modo passou a funcionar como um “reservatório externo”.

3.2 Acoplamento por Fibra Óptica entre as Cavidades

No estudo de um sistema composto de duas cavidades com íons aprisionados no seu interior, acopladas por uma fibra óptica, foi considerado o regime de fibra curta. Neste caso só um modo da fibra é considerado na interação com as cavidades. Esse modelo pode ser aplicado se o comprimento da fibra é pequeno comparado com a taxa de dissipação na cavidade. O hamiltoniano adotado na interação dos modos das cavidades com o modo da fibra é da forma:

$$\hat{\mathcal{H}}_{Cf} = \hbar\tilde{\lambda} \left[\hat{c} (\hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_2^\dagger) + \hat{c}^\dagger (\hat{b}_2 + \hat{b}_1) \right], \quad (3.2.1)$$

onde $\tilde{\lambda}$ é a constante de acoplamento cavidade-fibra, \hat{c} e \hat{c}^\dagger são operadores de criação e destruição do modo da fibra e \hat{b}_i e \hat{b}_i^\dagger são os operadores dos campos das cavidades onde $i = 1, 2$. Além desses termos é preciso incluir o termo de energia do modo da fibra óptica, neste caso $\hbar\beta\hat{c}^\dagger\hat{c}$, onde β é a frequência do modo da fibra. Assim o hamiltoniano total do sistema é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{H}_s = & \sum_{i=1}^2 \hbar\omega \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i + \hbar\nu \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hbar \frac{\omega_a}{2} \sigma_{iz} + \hbar g (\sigma_{i+} + \sigma_{i-}) (\hat{b}_i^\dagger + \hat{b}_i) \cos(\eta(\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i) + \phi) \\ & + \hbar\beta \hat{c}^\dagger \hat{c} + \hbar\tilde{\lambda} [\hat{c}(\hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_2^\dagger) + \hat{c}^\dagger(\hat{b}_2 + \hat{b}_1)]. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Na fig. (3.2.1) temos uma representação esquemática sistema.

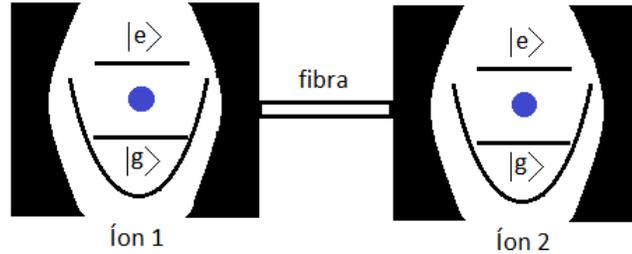


Figura 3.2.1: Esquema do sistema composto de duas cavidades acopladas por uma fibra óptica com íon aprisionados em seu interior.

3.2.1 Diagonalização do Hamiltoniano de Interação entre as Cavidades e a fibra

De maneira análoga ao caso de acoplamento direto, os termos do hamiltoniano (3.2.2) correspondentes as cavidade, as fibras e sua interação podem ser diagonalizados definindo os operadores \hat{d}_i de acordo com:

$$\hat{H} = \hbar\omega \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hbar\omega \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hbar\beta \hat{c}^\dagger \hat{c} + \hbar\tilde{\lambda} [\hat{c}(\hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_2^\dagger) + \hat{c}^\dagger(\hat{b}_2 + \hat{b}_1)] = \sum_{i=1}^3 \hbar\Omega_i \hat{d}_i^\dagger \hat{d}_i. \quad (3.2.3)$$

Os operadores \hat{d}_i devem satisfazer as propriedades de operadores bosônicos:

$$\begin{aligned} [\hat{d}_i, \hat{d}_i^\dagger] &= 1; & [\hat{d}_1, \hat{d}_2^\dagger] &= 0; \\ [\hat{d}_1, \hat{d}_3^\dagger] &= 0; & [\hat{d}_2, \hat{d}_3^\dagger] &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Na seção 3.1.1 foi estudado um sistema semelhante, onde foi proposta uma combinação linear dos modos das cavidades para definir os novos operadores \hat{d}_i . Aqui ilustramos um

outro método para essa combinação linear que consiste em definir uma matriz associada ao operador \hat{H} .

Escrevendo \hat{H} como uma operação matricial definida por $M_{3 \times 3}$ e um vetor de componente \hat{b}_1, \hat{b}_2 e \hat{c} temos:

$$\hat{H} = \hbar \hat{\Lambda}^\dagger M \hat{\Lambda} = \hbar \begin{pmatrix} \hat{b}_1^\dagger & \hat{b}_2^\dagger & \hat{c}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 0 & \tilde{\lambda} \\ 0 & \omega & \tilde{\lambda} \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\lambda} & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{c} \end{pmatrix}. \quad (3.2.5)$$

O operador \hat{H} escrito nessa tem uma forma onde fica claro que uma transformação que diagonalize M diagonalizará \hat{H} . Assim definindo,

$$\begin{aligned} \hat{d}_1 &= \Gamma_{11} \hat{b}_1 + \Gamma_{12} \hat{b}_2 + \Gamma_{13} \hat{c}, \\ \hat{d}_2 &= \Gamma_{21} \hat{b}_1 + \Gamma_{22} \hat{b}_2 + \Gamma_{23} \hat{c}, \\ \hat{d}_3 &= \Gamma_{31} \hat{b}_1 + \Gamma_{32} \hat{b}_2 + \Gamma_{33} \hat{c}, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

temos que o conjunto de Eq. (3.2.4) definem em (3.2.6) uma transformação ortonormal. Geometricamente falando podemos afirmar que a transformação que diagonaliza o hamiltoniano é uma rotação na base dos auto-vetores de M que muda os vetores $(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{c})$ para os vetores $(\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3)$.

Vamos estudar o caso em que o modo da fibra está em ressonância com os modos das cavidades, i.e. $\beta = \omega$. Dessa forma temos que a diagonalização de M vem dada por:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega + \sqrt{2}\tilde{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \omega - \sqrt{2}\tilde{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.7)$$

onde temos que $\Omega_{1,2} = \omega \pm \sqrt{2}\tilde{\lambda}$, $\Omega_3 = \omega$ e:

$$\begin{aligned}
\hat{d}_1 &= \frac{1}{2} (\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \sqrt{2}\hat{c}); \\
\hat{d}_2 &= \frac{1}{2} (\hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \sqrt{2}\hat{c}); \\
\hat{d}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{b}_1 - \hat{b}_2).
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

que substituindo no hamiltoniano (3.2.2) conduz a:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_s &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \hbar\omega\hat{b}_i^\dagger\hat{b}_i + \hbar\nu\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i + \hbar\frac{\omega_a}{2}\sigma_{iz} \right\} + \sum_{i=1}^3 \hbar\Omega_i\hat{d}_i^\dagger\hat{d}_i \\
&+ \sum_{i=1}^2 \frac{\hbar g}{2} \left\{ (\sigma_{i+} + \sigma_{i-}) (\hat{d}_1^\dagger + \hat{d}_1 + \hat{d}_2^\dagger + \hat{d}_2 \right. \\
&+ \left. (-1)^{i+1} \sqrt{2} (\hat{d}_3^\dagger + \hat{d}_3)) \cos \left(\eta (\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i) + \phi \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

3.2.2 Aproximações no sistema

Utilizaremos no tratamento os mesmos tipos de aproximações utilizadas no modelo de acoplamento direto. Primeiro considerando o comprimento de onda dos campos das cavidades maior em termos das amplitudes de oscilação dos íons, de maneira que a constante de Lamb-Dicke η seja muito menor a um, e também que o centro de massa dos íons está no antinodo onde $\phi = -\frac{\pi}{2}$. Assim temos que o termo do cosseno pode ser aproximado da forma:

$$\cos \left(\eta (\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i) - \frac{\pi}{2} \right) \approx \eta (\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i). \tag{3.2.10}$$

e em consequência o hamiltoniano do sistema pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_0 &= \sum_{i=1}^3 \hbar \Omega_i \hat{d}_i^\dagger \hat{d}_i + \sum_{i=1}^2 \hbar \nu \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{\hbar \omega_a}{2} \sigma_{iz}. \\
 \hat{H}_I &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\hbar g \eta}{2} (\sigma_{i+} + \sigma_{i-}) (\hat{d}_1^\dagger + \hat{d}_1 + \hat{d}_2^\dagger + \hat{d}_2 \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^{i+1} \sqrt{2} (\hat{d}_3^\dagger + \hat{d}_3)) (\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i) \right\}. \\
 \hat{H}_s &= \hat{H}_0 + \hat{H}_I.
 \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Aqui também é conveniente escrever o hamiltoniano na representação de interação

$$\hat{H}_I = e^{i \frac{\hat{H}_0}{\hbar} t} \hat{H}_I e^{-i \frac{\hat{H}_0}{\hbar} t}, \tag{3.2.12}$$

de forma que utilizando os resultados das Eq. (3.1.22) até (3.1.26) podemos ter um equivalente para obter o hamiltoniano de interação na forma

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_I &= \sum_{i=1}^2 \frac{\hbar \eta g}{2} (\sigma_{i+} e^{i\omega_a t} + \sigma_{i-} e^{-i\omega_a t}) (\hat{d}_1^\dagger e^{i\Omega_1 t} + \hat{d}_1 e^{-i\Omega_1 t} + \hat{d}_2^\dagger e^{i\Omega_2 t} + \hat{d}_2 e^{-i\Omega_2 t} \\
 &\quad + (-1)^{i+1} \sqrt{2} (\hat{d}_3^\dagger e^{i\Omega_3 t} + \hat{d}_3 e^{-i\Omega_3 t})) (\hat{a}_i^\dagger e^{i\nu t} + \hat{a}_i e^{-i\nu t}).
 \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

e que escrito na forma compacta, de maneira análoga ao que foi feito na seção 3.1.2 , tem-se

$$\hat{H}_I = \sum \frac{\hbar \eta g}{2} C_{lm}^{iks} \sigma_{ik} \hat{a}_i^l \hat{a}_s^m e^{i\Xi_{lm}^{iks} t}. \tag{3.2.14}$$

aqui $i = 1, 2$ e $s = 1, 2, 3$, os índices k, l e s representam operadores de criação ou destruição, C_{lm}^{iks} é uma constantes adimensional, e Ξ_{lm}^{iks} é uma frequência. Pelo fato de ter íons com as mesmas características não precisamos fazer distinção sobre o índice i , então $\Xi_{lm}^{1ks} = \Xi_{lm}^{2ks}$. Na tabela 3.2 temos essas frequências.

	\hat{d}_1^\dagger	\hat{d}_1	\hat{d}_2^\dagger	\hat{d}_2	\hat{d}_3^\dagger	\hat{d}_3
$\sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger$	$\omega_a + \nu + \omega + \sqrt{2}\tilde{\lambda}$	$\omega_a + \nu - \omega - \sqrt{2}\tilde{\lambda}$	$\omega_a + \nu + \omega - \sqrt{2}\tilde{\lambda}$	$\omega_a + \nu - \omega + \sqrt{2}\tilde{\lambda}$	$\omega_a + \nu + \omega$	$\omega_a + \nu - \omega$
$\sigma_{i+} \hat{a}_i$	$\omega_a - \nu + \omega + \sqrt{2}\tilde{\lambda}$	$\omega_a - \nu - \omega - \sqrt{2}\tilde{\lambda}$	$\omega_a - \nu + \omega - \sqrt{2}\tilde{\lambda}$	$\omega_a - \nu - \omega + \sqrt{2}\tilde{\lambda}$	$\omega_a - \nu + \omega$	$\omega_a - \nu - \omega$
$\sigma_{i-} \hat{a}_i^\dagger$	$-\omega_a + \nu + \omega + \sqrt{2}\tilde{\lambda}$	$-\omega_a + \nu - \omega - \sqrt{2}\tilde{\lambda}$	$-\omega_a + \nu + \omega - \sqrt{2}\tilde{\lambda}$	$-\omega_a + \nu - \omega + \sqrt{2}\tilde{\lambda}$	$-\omega_a + \nu + \omega$	$-\omega_a + \nu - \omega$
$\sigma_{i-} \hat{a}_i$	$-\omega_a - \nu + \omega + \sqrt{2}\tilde{\lambda}$	$-\omega_a - \nu - \omega - \sqrt{2}\tilde{\lambda}$	$-\omega_a - \nu + \omega - \sqrt{2}\tilde{\lambda}$	$-\omega_a - \nu - \omega + \sqrt{2}\tilde{\lambda}$	$-\omega_a - \nu + \omega$	$-\omega_a - \nu - \omega$

Tabela 3.2: Constantes Ξ_{lm}^{iks} em termos das frequências de transição eletrônica ω_a , frequência do movimento iônico ν , frequência do campo ω e frequência de acoplamento entre os campos das cavidades e a fibra $\tilde{\lambda}$.

De forma análoga ao acoplamento direto consideramos:

- (i) Um regime onde o acoplamento cavidades-fibra e a frequência de oscilação dos íons são pequenas comparadas com as frequências eletrônicas de transição eletrônica e as frequências dos campos das cavidades;
- (ii) Um acoplamento dipolar fraco entre os campos das cavidades e os íons comparado com o acoplamento cavidades-fibra e a frequência de oscilação do íon;
- (iii) Uma frequência de movimento do íon muito menor que a frequência de acoplamento cavidades-fibra,

Logo, em função das hipóteses (i) (ii) e (iii) temos as desigualdades:

$$(i) \omega_a, \omega \gg \sqrt{2}\tilde{\lambda}, \nu; \quad (ii) \sqrt{2}\tilde{\lambda}, \nu \gg g; \quad (iii) \sqrt{2}\tilde{\lambda} - 2\nu \gg g. \quad (3.2.15)$$

Assumindo as condições (i), (ii) e (iii) e considerando ressonâncias na primeira banda lateral azul (BLA) e na primeira banda lateral vermelha (BLV) temos na aproximação de onda girante:

- (A) $\omega_a - \omega - \sqrt{2}\tilde{\lambda} = -\nu$ (BLA, ressonância com \hat{d}_1)

$$\hat{H}_I = \sum_{i=1}^2 \frac{\hbar\eta g}{2} (\sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_1 + \sigma_{i-} \hat{a}_i \hat{d}_1^\dagger). \quad (3.2.16)$$

- (B) $\omega_a - \omega - \sqrt{2}\tilde{\lambda} = \nu$ (BLV, ressonância com \hat{d}_1)

$$\hat{H}_I = \sum_{i=1}^2 \frac{\hbar\eta g}{2} (\sigma_{i-} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_1^\dagger + \sigma_{i+} \hat{a}_i \hat{d}_1). \quad (3.2.17)$$

- (C) $\omega_a - \omega + \sqrt{2}\tilde{\lambda} = -\nu$ (BLA, ressonância com \hat{d}_2)

$$\hat{H}_I = \sum_{i=1}^2 \frac{\hbar\eta g}{2} \left(\sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_2 + \sigma_{i-} \hat{a}_i \hat{d}_2^\dagger \right). \quad (3.2.18)$$

- (D) $\omega_a - \omega + \sqrt{2}\tilde{\lambda} = \nu$ (BLV, ressonância com \hat{d}_2)

$$\hat{H}_I = \sum_{i=1}^2 \frac{\hbar\eta g}{2} \left(\sigma_{i-} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_2^\dagger + \sigma_{i+} \hat{a}_i \hat{d}_2 \right). \quad (3.2.19)$$

- (E) $\omega_a - \omega = -\nu$ (BLA, ressonância com \hat{d}_3)

$$\hat{H}_I = \sum_{i=1}^2 \frac{\hbar\eta g}{\sqrt{2}} (-1)^{i+1} \left(\sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_3 + \sigma_{i-} \hat{a}_i \hat{d}_3^\dagger \right). \quad (3.2.20)$$

- (F) $\omega_a - \omega = \nu$ (BLV, ressonância com \hat{d}_3)

$$\hat{H}_I = \sum_{i=1}^2 \frac{\hbar\eta g}{\sqrt{2}} (-1)^{i+1} \left(\sigma_{i-} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_3^\dagger + \sigma_{i+} \hat{a}_i \hat{d}_3 \right). \quad (3.2.21)$$

Nos casos de (A) a (F) temos hamiltonianos onde só temos um dos modos bosônicos das cavidades e as fibras. Pode-se ainda estudar um caso particular onde temos uma sintonização $\omega_a - \omega = -\nu$, com a condição (iii) não seja válida. dessa forma temos o caso (G),

- (G) $\omega_a - \omega = -\nu$ (BLA, ressonância com \hat{d}_3)

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= \sum_{i=1}^2 \frac{\hbar\eta g}{\sqrt{2}} \left((-1)^{i+1} \left(\sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_3 + \sigma_{i-} \hat{a}_i \hat{d}_3^\dagger \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sigma_{i-} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_1^\dagger e^{-i(\sqrt{2}\tilde{\lambda}-2\nu)t} + \sigma_{i+} \hat{a}_i \hat{d}_1 e^{i(\sqrt{2}\tilde{\lambda}-2\nu)t} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

3.2.3 Solução analítica e Resultados

Considerando um estado inicial equivalente ao estudado na seção 3.1.3, para a transferência de estados do íon 1 para o íon 2, adotamos agora como estado inicial o seguinte estado:

$$|\Psi(0)\rangle = \left(\cos\theta |g\rangle_1 |0\rangle_{a1} + \sin\theta e^{i\varphi} |e\rangle_1 |1\rangle_{a1} \right) |0\rangle_{d1} |0\rangle_{d2} |0\rangle_{d3} |g\rangle_2 |0\rangle_{a2}. \quad (3.2.23)$$

e calculamos a possibilidade de ter o sistema numa situação onde o íon 2 evolua num dado t_0 para o estado:

$$|\psi\rangle_{ion2} = |\xi\rangle = \cos\theta |g\rangle_2 |0\rangle_{a2} + \sin\theta e^{i\varphi} |e\rangle_2 |1\rangle_{a2}. \quad (3.2.24)$$

Nesse caso proporemos, como no caso anterior, uma solução na representação de interação da forma:

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\Psi}(t)\rangle &= \sum_{k,l=0}^{\infty} \left[C_{k_1,k_2,l_1,l_2,l_3}^{gg}(t) |g\rangle_1 |g\rangle_2 \right. \\
 &+ C_{k_1,k_2,l_1,l_2,l_3}^{eg}(t) |e\rangle_1 |g\rangle_2 + C_{k_1,k_2,l_1,l_2,l_3}^{ge}(t) |g\rangle_1 |e\rangle_2 \\
 &\left. + C_{k_1,k_2,l_1,l_2,l_3}^{ee}(t) |e\rangle_1 |e\rangle_2 \right] |k_1\rangle_{a1} |k_2\rangle_{a2} |l_1\rangle_{d1} |l_2\rangle_{d2} |l_3\rangle_{d3}. \quad (3.2.25)
 \end{aligned}$$

que com (3.1.39) podemos calcular as funções $C(t)$.

3.2.3.1 Transferência com um modo

Na análise da transferência de estados com um único modo normal consideraremos apenas os casos (A), (C) e (E). Comparando os hamiltonianos na representação de interação de cada caso com os obtidos com acoplamento direto (seção 3.1.2 casos (A) e (C)) observamos que os operadores \hat{H}_I , que define a evolução temporal do sistema são equivalentes.

Dessa forma, a solução das equações diferenciais do sistema com acoplamento por fibra são as mesmas que definem os estados dos casos com acoplamento direto, quando fazemos mudanças de escala temporal e nas frequências. Na tabela 3.3 podemos ver as comparações dos hamiltonianos

Casos	\hat{H}_I - acoplamento direto	Casos	\hat{H}_I -acoplamento com fibra
(A)	$\sum_{i=1}^2 \frac{\hbar\eta g}{\sqrt{2}} (\sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_1 + \sigma_{i-} \hat{a}_i \hat{d}_1^\dagger)$	(A)	$\sum_{i=1}^2 \frac{\hbar\eta g}{2} (\sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_1 + \sigma_{i-} \hat{a}_i \hat{d}_1^\dagger)$
(C)	$\sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \frac{\hbar\eta g}{\sqrt{2}} (\sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_2 + \sigma_{i-} \hat{a}_i \hat{d}_2^\dagger)$	(C)	$\sum_{i=1}^2 \frac{\hbar\eta g}{2} (\sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_2 + \sigma_{i-} \hat{a}_i \hat{d}_2^\dagger)$
		(E)	$\sum_{i=1}^2 \frac{\hbar\eta g}{\sqrt{2}} (-1)^{i+1} (\sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_3 + \sigma_{i-} \hat{a}_i \hat{d}_3^\dagger)$

Tabela 3.3: Hamiltonianos na representação de interação para diferentes aproximações e acoplamentos.

Para obter as soluções para os estados do sistema nos casos (A) e (C) do acoplamento com fibra basta mudar a frequência do modo normal \hat{d}_1 $\omega + \lambda$ do acoplamento direto, pelas correspondentes frequências dos modos normais \hat{d}_1 e \hat{d}_2 do acoplamento por fibra, $\omega \pm \sqrt{2}\tilde{\lambda}$ respectivamente, e fazer uma transformação no tempo, nos hamiltonianos do acoplamento por fibra de $t \rightarrow \sqrt{2}t$.

Já no caso (E) do acoplamento com fibra temos uma equivalência direta com o caso (C) do acoplamento direto. Nesta situação apenas é necessário mudar, nas soluções do caso (C)

com fibra, a frequência do modo $\hat{d}_2 \omega + \lambda$ pela frequência do modo \hat{d}_3, ω .

Feito essas observações temos para as fidelidades em cada caso as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(A)}(\theta, \tau) &= \cos^4 \theta + \sin^4 \theta \sin^4 \frac{\tau}{2\sqrt{2}} \\ &+ \cos^2 \theta \sin^4 \theta \left(\frac{1}{2} \sin^2 \frac{\tau}{\sqrt{2}} + \cos^4 \frac{\tau}{2\sqrt{2}} - 2 \cos \frac{(\omega + \sqrt{2}\tilde{\lambda})}{\eta g \sqrt{2}} \tau \sin^2 \frac{\tau}{2\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(C)}(\theta, \tau) &= \cos^4 \theta + \sin^4 \theta \sin^4 \frac{\tau}{2\sqrt{2}} \\ &+ \cos^2 \theta \sin^4 \theta \left(\frac{1}{2} \sin^2 \frac{\tau}{\sqrt{2}} + \cos^4 \frac{\tau}{2\sqrt{2}} - 2 \cos \frac{(\omega - \sqrt{2}\tilde{\lambda})}{\eta g \sqrt{2}} \tau \sin^2 \frac{\tau}{2\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(E)}(\theta, \tau) &= \cos^4 \theta + \sin^4 \theta \sin^4 \frac{\tau}{2} \\ &+ \cos^2 \theta \sin^4 \theta \left(\frac{1}{2} \sin^2 \tau + \cos^4 \frac{\tau}{2} + 2 \cos \frac{\omega}{\eta g} \tau \sin^2 \frac{\tau}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Uma diferença notável entre os casos (A), (C) e (E) está no tempo de máxima transferência. Para as funções $\mathcal{F}_{(A)}(\theta, \tau)$ e $\mathcal{F}_{(C)}(\theta, \tau)$ os máximos da fidelidade estão nos valores $\tau_n = \sqrt{2}(2n + 1)\pi$ com $n \in \mathbb{Z}^+$, a transferência perfeita do estado também está condicionada pela frequência, neste casos temos que só é possível uma fidelidade 1 para os tempos τ_n se $\frac{(\omega \pm \sqrt{2}\tilde{\lambda})}{\eta g} = 2l + 1$ onde $l \in \mathbb{Z}^+$.

No caso (E) temos que a função $\mathcal{F}_{(E)}(\theta, \tau)$ é igual a 1 para tempos $\tau_n = (2n + 1)\pi$ se $\frac{\omega}{\eta g} = 2l$. Uma característica importante deste caso é o fato de ter uma transferência de estados independente da constante de acoplamento $\tilde{\lambda}$ entre as cavidades e a fibra. Esta condição não é observada em nenhum outro caso já estudado. Como a constante de acoplamento $\tilde{\lambda}$ entre os campos das cavidades e a fibra não é um parâmetro que pode-se mudar facilmente a nível experimental a transferência de estados com o modo \hat{d}_3 vem se mostrar mais adequada.

Na Fig. 3.2.2 é mostrado as fidelidades para cada caso (Eqs. (3.2.26), (3.2.27) e (3.2.28)).

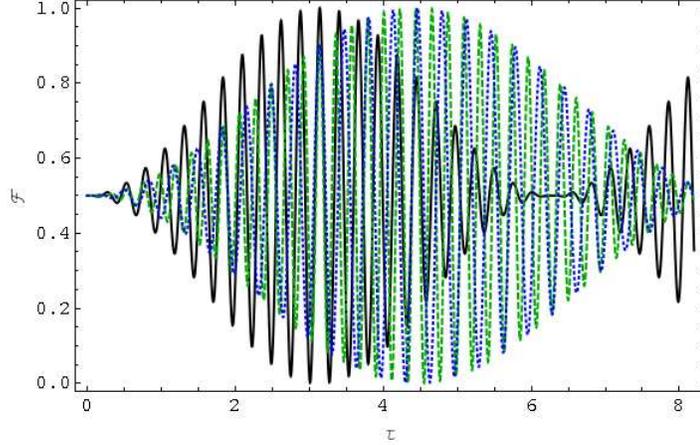


Figura 3.2.2: Fidelidade para $\omega/\eta g = 24$, $\theta = \pi/4$ e $\sqrt{2}\tilde{\lambda}/\eta g = 3$. A linha preta representa a transferência feita no caso (E), a linha verde com o caso (A) e a linha azul o caso (C).

3.2.3.2 Transferência com dois modos

O caso (G) é caracterizado por uma transferência de estados com um modo normal ressonante \hat{d}_3 e um modo fora da ressonância \hat{d}_2 . O sistema de equações diferenciais associado ao hamiltoniano (3.2.22) com a solução proposta (3.2.25) com $\tau' = \frac{\eta g t}{\sqrt{2}}$ e $\tilde{\Delta} = \frac{\sqrt{2}}{\eta g} (\sqrt{2}\tilde{\lambda} - 2\nu)$, vem dado por o sistema (A.1.1) descrito no apêndice A.1. Desse sistema de equações os únicos elementos não nulos são:

$$\begin{aligned}
 i \frac{d}{d\tau'} C_{1,0,0,0}^{eg}(\tau') &= C_{0,0,0,1}^{gg}(\tau') + C_{2,0,1,0}^{gg}(\tau') e^{i\tilde{\Delta}\tau'}; \\
 i \frac{d}{d\tau'} C_{2,0,1,0}^{gg}(\tau') &= C_{1,0,0,0}^{eg}(\tau') e^{-i\tilde{\Delta}\tau'}; \\
 i \frac{d}{d\tau'} C_{0,0,0,1}^{gg}(\tau') &= C_{1,0,0,0}^{eg}(\tau') - C_{0,1,0,0}^{ge}(\tau'); \\
 i \frac{d}{d\tau'} C_{0,1,0,0}^{ge}(\tau') &= -C_{0,0,0,1}^{gg}(\tau') + C_{0,2,1,0}^{gg}(\tau') e^{i\tilde{\Delta}\tau'}; \\
 i \frac{d}{d\tau'} C_{0,2,1,0}^{gg}(\tau') &= C_{0,1,0,0}^{ge}(\tau') e^{-i\tilde{\Delta}\tau'}.
 \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

cuja solução vem dado através do método da transformada de Fourier. fazendo a transformação em cada linha de (3.2.29) e fazendo as translações $s \rightarrow s + \frac{i\tilde{\Delta}}{2}$ nas linhas 1, 3 e 4 do sistema e $s \rightarrow s - \frac{i\tilde{\Delta}}{2}$ nas linhas 2 e 5 obtemos o sistema de equações, onde foi colocada em evidência a matriz associada ao sistema:

$$\begin{pmatrix} -i\left(s+\frac{i\bar{\Delta}}{2}\right) & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -i\left(s-\frac{i\bar{\Delta}}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -i\left(s+\frac{i\bar{\Delta}}{2}\right) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -i\left(s+\frac{i\bar{\Delta}}{2}\right) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i\left(s-\frac{i\bar{\Delta}}{2}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{1,0,0,0}^{eg}\left(s+\frac{i\bar{\Delta}}{2}\right) \\ F_{2,0,1,0}^{gg}\left(s-\frac{i\bar{\Delta}}{2}\right) \\ F_{0,0,0,1}^{gg}\left(s+\frac{i\bar{\Delta}}{2}\right) \\ F_{0,1,0,0}^{ge}\left(s+\frac{i\bar{\Delta}}{2}\right) \\ F_{0,2,1,0}^{gg}\left(s-\frac{i\bar{\Delta}}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Upsilon \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.30}$$

onde $\Upsilon = -iC_{1,0,0,0}^{eg}(0)$, a transformada inversa correspondente as funções conduzem ao estado do sistema na forma:

$$\begin{aligned} |\Psi(\tau')\rangle &= \cos\theta e^{i\frac{\sqrt{2}\omega_a\tau'}{\eta g}} |g\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} |0\rangle_{d1} |0\rangle_{d2} \\ &+ C_{0,0,1,0}^{gg}(\tau') e^{-i\frac{\sqrt{2}\nu\tau'}{\eta g}} |g\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} |0\rangle_{d2} |1\rangle_{d3} \\ &+ e^{-i\frac{\sqrt{2}\nu\tau'}{\eta g}} \left(C_{0,1,0,0}^{ge}(\tau') |g\rangle_1 |e\rangle_2 |0\rangle_{a1} |1\rangle_{a2} |0\rangle_{d2} |0\rangle_{d3} \right. \\ &+ \left. C_{1,0,0,0}^{eg}(\tau') |e\rangle_1 |g\rangle_2 |1\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} |0\rangle_{d2} |0\rangle_{d3} \right) \\ &+ e^{i\left(\bar{\Delta}-\frac{\sqrt{2}\nu}{\eta g}\right)\tau'} \left(C_{0,2,0,1}^{gg}(\tau') |g\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_{a1} |2\rangle_{a2} |1\rangle_{d2} |0\rangle_{d3} \right. \\ &\quad \left. C_{2,0,0,1}^{gg}(\tau') |g\rangle_1 |g\rangle_2 |2\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} |1\rangle_{d2} |0\rangle_{d3} \right), \end{aligned} \tag{3.2.31}$$

a fidelidade como segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(G)}(\theta, \tau') &= \cos^2\theta \left(\cos^2\theta + |C_{0,0,0,1}^{gg}(\tau')|^2 + |C_{1,0,0,0}^{eg}(\tau')|^2 + |C_{2,0,1,0}^{gg}(\tau')|^2 \right) \\ &+ \sin^2\theta |C_{0,1,0,0}^{ge}(\tau')|^2 + 2Re \left\{ \cos\theta e^{\frac{i\omega\tau'}{\eta g}} C_{0,1,0,0}^{ge}(\tau')^* \right\}. \end{aligned} \tag{3.2.32}$$

graficamente os resultados para $\mathcal{F}_{(G)}$ são vistos nas figuras 3.2.3 e 3.2.4.

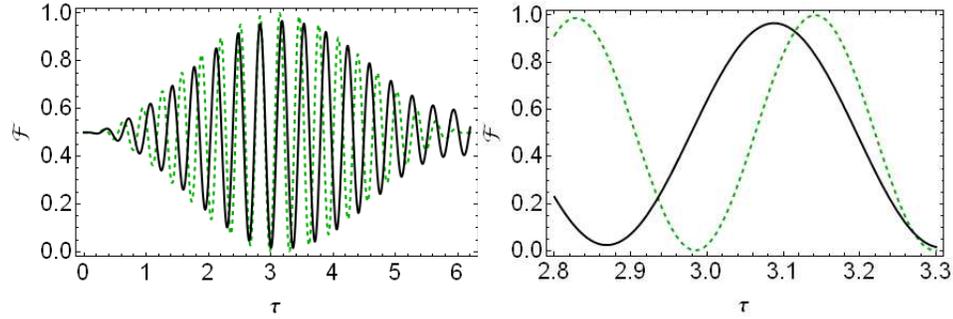


Figura 3.2.3: Fidelidade para $\omega/\eta g = 20$ e $\theta = \pi/4$ na escala de tempo τ . A linha preta representa a transferência feita no caso (G) com $\tilde{\Delta} = 5$ e a linha verde com o caso (E). a figura da direita é um zoom da figura da esquerda

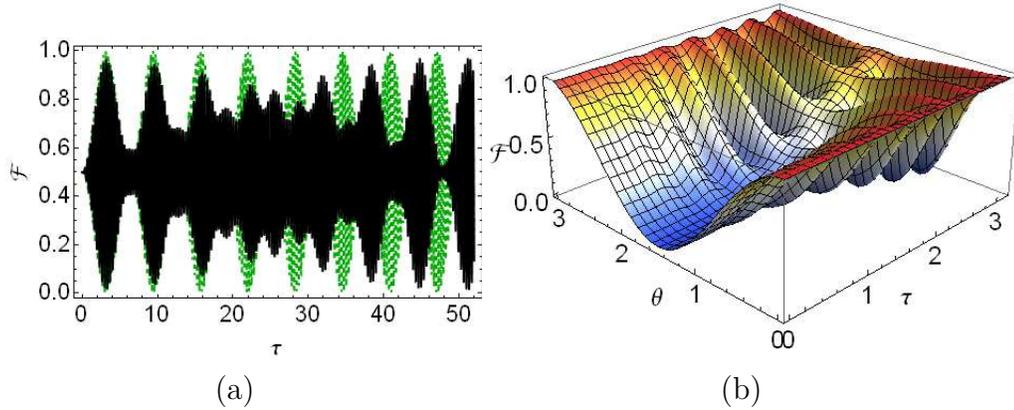


Figura 3.2.4: Fidelidade na figura (a) com $\omega/\eta g = 20$ e $\theta = \pi/4$ na escala de tempo τ . A linha preta representa a transferência feita no caso (G) com $\tilde{\Delta} = 5$ e a linha verde com o caso (E). Na figura (b) temos a fidelidade no caso (G) para diferentes valores de τ e θ .

A fidelidade no caso (G) tem uma mudança na fase e uma perda na transferência do estado quando é comparada com o caso (E). O tempo de máxima transferência é $\tau = 3.09$ quando a fidelidade chega a 0.97.

3.3 Comparação entre transferência com acoplamento direito ou por fibra óptica

Nos dois tipos de acoplamentos estudados neste capítulo a transferência de estados quânticos de um íon a outro com um único modo é possível para frequências diferentes nos dois tipos de acoplamentos.

Os tempos de transferência perfeita (fidelidade igual a 1) , na escala reduzida τ , são múltiplos de π ou $\sqrt{2}\pi$. Na escala de tempo real t (em segundos) temos que os tempos de máximas transferências são múltiplos de $\frac{\pi}{\eta g}$ ou $\frac{\sqrt{2}\pi}{\eta g}$. Se consideramos uma constante de acoplamento íon-campo $g \approx 2\pi \times 500kHz$ e a constante de Lamb-Dicke $\eta = 0.2$, que podem ser medida experimentalmente, os tempos de menor transferência do estado são da ordem $t \approx 5ns$ que é uma escala de tempo admissível experimentalmente [12].

Na transferência de estados no caso com dois modos é relevante a escolha do tipo de acoplamento para aumentar a eficiência da transferência. Para ilustrar esta ideia utilizamos os caso (F) do acoplamento direto e o caso (G) do acoplamento com fibra, além disso comparamos estes com o caso (E) do acoplamento direto que representa um sistema com uma transferência de estados perfeita.

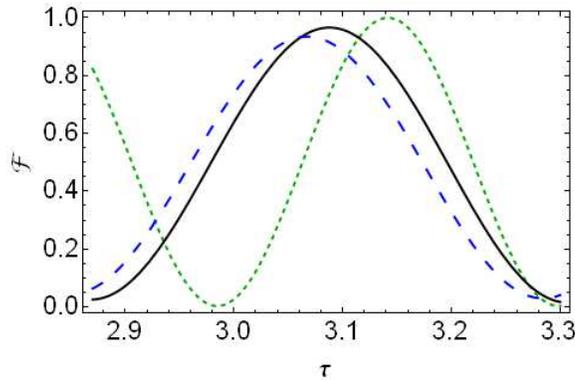


Figura 3.3.1: Fidelidade em função de τ para $\theta = \pi/4$. nas linhas verde e preta o acoplamento é com fibra óptica onde $\omega/\eta g = 20$ e respectivamente temos o caso (E) e o caso (G) com $\tilde{\Delta} = 5$. Na linha azul o acoplamento é direto considerando o caso (F) com $\omega - \lambda/\eta g = 20$ e $\Delta' = 5$.

Na figura 3.3.1 temos $\mathcal{F} = 1$ no caso (E) do acoplamento por fibra para $\tau = \pi$ que corresponde ao primeira tempo de transferência ótima, para o caso (F) do acoplamento direto temo o primeiro máximo num tempo $\tau = 3.05$ onde $\mathcal{F} = 0.94$ e no caso (G) do acoplamento com fibra óptica temos o primeiro máximo em $\tau = 3.09$ com $\mathcal{F} = 0.97$.

Comparando os casos onde o acoplamento é feito diretamente ou por fibra óptica com dois modos, chegamos à conclusão que a transferência de estados é melhor se o acoplamento do sistema é feito por fibra óptica (Fig 3.3.1), uma vez que a fidelidade na transferência do estado é maior e a diferença de fase é muito menor com um acoplamento das cavidades por fibra óptica do que no caso do acoplamento direto.

Capítulo 4

Transferência de estados entre íons aprisionados em cavidades com reservatórios térmicos

Nesta seção estudaremos a influência de reservatórios térmicos na transferência de estados de dois íons aprisionados em cavidades que estão acopladas por uma fibra óptica.

Essas dissipações serão tratadas no quadro da aproximação Markoviana [28] onde os reservatórios estão em equilíbrio térmico a temperaturas diferentes de zero. No caso de emissão espontânea obtivemos uma solução analítica da evolução temporal do sistema que permitiu estudar a separabilidade do estado do íon 2 com os graus de liberdade do íon 1 e os campos do sistema.

No caso de dissipação nas armadilhas foi obtida uma solução aproximada utilizando uma expansão truncada de um super operador [29]. Com este método aproximado calculamos a fidelidade em função do tempo para diferentes valores de temperatura e taxas de dissipação. Por último foi calculada a fidelidade no caso particular onde só uma das armadilhas tem dissipação. Esse tratamento foi com o objetivo de determinar em qual dos subsistemas (1 ou 2) o reservatório influi mais na transferência do estado.

4.1 Reservatórios térmicos e equação mestra

Quando analisamos um sistema complexo compostos de vários subsistemas onde o nosso interesse é focado em um deles, é natural procurar aproximações que simplifiquem a dinâmica.

A matriz densidade total tem a informação geral do estado do sistema . No entanto, temos interesse em apenas na matriz densidade de um dos subsistemas. Vamos supor que temos um sistema U definido por 2 subsistemas S e R . Assim, no caso do sistema S consistir de um oscilador harmônico de frequência ω com operadores de criação e destruição \hat{s}^\dagger e \hat{s} respectivamente, e o sistema R , que será o reservatório do sistema, ser uma coleção de osciladores harmônicos com frequências ϑ_l e operadores de criação e destruição \hat{h}^\dagger e \hat{h} , nosso objetivo sera estudar a dinâmica do sistema S . Para isso precisamos calcular a matriz densidade reduzida deste. i.e

$$\hat{\rho}_S(t) = Tr_R \{ \hat{\rho}_U(t) \}. \quad (4.1.1)$$

Além disso vamos supor que os subsistemas interagem fracamente. Nesse caso o hamiltoniano do sistema esta dado por :

$$\hat{H}_S = \hbar\omega\hat{s}^\dagger\hat{s} \quad (4.1.2)$$

$$\hat{H}_R = \sum_j \hbar\vartheta_j\hat{h}_j^\dagger\hat{h}_j \quad (4.1.3)$$

$$\hat{H}_{SR} = \hbar(\hat{s}^\dagger\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}^\dagger\hat{s}) \quad (4.1.4)$$

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_{SR}, \quad (4.1.5)$$

\hat{H}_S e \hat{H}_R correspondem às partes diagonais de S e R respectivamente e \hat{H}_{SR} é o hamiltoniano de interação com $\hat{\Gamma} = \sum_j k_j\hat{h}_j$ onde os k_j são as constantes de acoplamento entre os subsistemas.

Se os subsistemas são separáveis inicialmente a matriz densidade para o tempo inicial é

$$\hat{\rho}_U(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_R. \quad (4.1.6)$$

Supondo que o reservatório (subsistema R) está em equilíbrio térmico, a matriz densidade deste esta dada por

$$\hat{\rho}_R = \prod_j \left(1 - e^{-\hbar\vartheta_j/k_B T} \right) e^{-\hbar\vartheta_j\hat{h}_j^\dagger\hat{h}_j/k_B T}, \quad (4.1.7)$$

onde k_B é a constante de Baletômana e T a temperatura associada ao subsistema R . Dadas as características do reservatório pode-se assumir que este não têm mudanças significativas

na interação com S devido à interação fraca com este. Dessa forma podemos assumir que na evolução temporal do sistema não haverá correlações entre os subsistemas, logo podemos propor

$$\hat{\rho}_U(t) \approx \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_R. \quad (4.1.8)$$

Utilizamos a equação de Von Neumann que define a evolução do sistema temos:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_U(t)}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}_U(t)], \quad (4.1.9)$$

que na representação de interação esta equação esta dada por

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\rho}_U(t)}{\partial t} = [\tilde{H}_{RS}(t'), \tilde{\rho}_U(t)]; \quad \tilde{\rho}_U(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_R)} \hat{\rho}_U(t) e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_R)}, \quad (4.1.10)$$

integrando (4.1.10) obtemos

$$\tilde{\rho}_U(t) = \tilde{\rho}_U(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t [\tilde{H}_{RS}(t'), \tilde{\rho}_U(t')] dt', \quad (4.1.11)$$

que substituída em (4.1.10) nos permite escrever,

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_U(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_{RS}, \tilde{\rho}_U(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t [\tilde{H}_{RS}, [\tilde{H}_{RS}, \tilde{\rho}_U(t')]] dt'. \quad (4.1.12)$$

O traço da função (4.1.12) em termos de R esta escrita como:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_S(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar^2} Tr_R \left\{ \int_0^t [\tilde{H}_{RS}(t'), [\tilde{H}_{RS}(t'), \tilde{\rho}_U(t')]] dt' \right\}, \quad (4.1.13)$$

onde $Tr_R \left\{ [\tilde{H}_{RS}(t'), \tilde{\rho}_U(0)] \right\} = 0$ devido a que $Tr_R \left\{ \tilde{H}_{RS}(t') \hat{\rho}_R \right\} = 0$. Expandindo a equação (4.1.13) temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tilde{\rho}_S(t)}{\partial t} = & - \int_0^t \left\{ [\hat{s}\hat{s}\tilde{\rho}_S(t') - \hat{s}\tilde{\rho}_S(t')\hat{s}]e^{-i\omega(t+t')} \left\langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t)\tilde{\Gamma}^\dagger(t') \right\rangle_R + h.c. \right. \\
 & + [\hat{s}^\dagger\hat{s}^\dagger\tilde{\rho}_S(t') - \hat{s}^\dagger\tilde{\rho}_S(t')\hat{s}^\dagger]e^{i\omega(t+t')} \left\langle \tilde{\Gamma}(t)\tilde{\Gamma}(t') \right\rangle_R + h.c. \\
 & + [\hat{s}\hat{s}^\dagger\tilde{\rho}_S(t') - \hat{s}^\dagger\tilde{\rho}_S(t')\hat{s}]e^{-i\omega(t-t')} \left\langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t)\tilde{\Gamma}(t') \right\rangle_R + h.c. \\
 & \left. + [\hat{s}^\dagger\hat{s}\tilde{\rho}_S(t') - \hat{s}\tilde{\rho}_S(t')\hat{s}^\dagger]e^{i\omega(t-t')} \left\langle \tilde{\Gamma}(t)\tilde{\Gamma}^\dagger(t') \right\rangle_R + h.c. \right\} dt',
 \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Assim pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned}
 \left\langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t)\tilde{\Gamma}^\dagger(t') \right\rangle_R &= Tr_R \left\{ \tilde{\Gamma}^\dagger(t)\tilde{\Gamma}^\dagger(t')\hat{\rho}_R \right\} = 0, \\
 \left\langle \tilde{\Gamma}(t)\tilde{\Gamma}(t') \right\rangle_R &= Tr_R \left\{ \tilde{\Gamma}(t)\tilde{\Gamma}(t')\hat{\rho}_R \right\} = 0, \\
 \left\langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t)\tilde{\Gamma}(t') \right\rangle_R &= Tr_R \left\{ \tilde{\Gamma}^\dagger(t)\tilde{\Gamma}(t')\hat{\rho}_R \right\} = \sum_j |k_j|^2 e^{i\vartheta_j(t-t')} \bar{n}(\vartheta_j, T), \\
 \left\langle \tilde{\Gamma}(t)\tilde{\Gamma}^\dagger(t') \right\rangle_R &= Tr_R \left\{ \tilde{\Gamma}^\dagger(t)\tilde{\Gamma}(t')\hat{\rho}_R \right\} = \sum_j |k_j|^2 e^{-i\vartheta_j(t-t')} (\bar{n}(\vartheta_j, T) + 1),
 \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

onde $\bar{n}(\vartheta_j, T)$ é o número médio de fótons para um oscilador de frequência ϑ_j escrito na forma

$$\bar{n}(\vartheta_j, T) = \frac{e^{-\hbar\vartheta_j/k_B T}}{(1 - e^{-\hbar\vartheta_j/k_B T})}. \tag{4.1.16}$$

Para simplificar as duas ultimas linhas da Eq. (4.1.15) pode-se mudar a somatória por uma integral, onde $g(\vartheta) d\vartheta$ é o número de modos com frequências entre ϑ e $\vartheta + d\vartheta$ logo

$$\sum_j \rightarrow \int_0^\infty g(\vartheta) d\vartheta. \tag{4.1.17}$$

Substituindo as duas primeiras linhas das Eq. (4.1.15) em (4.1.14) temos :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\rho}_S(t)}{\partial t} &= - \int_0^t \left\{ [\hat{s} \hat{s}^\dagger \tilde{\rho}_S(t') - \hat{s}^\dagger \tilde{\rho}_S(t') \hat{s}] e^{-i\omega(t-t')} \left\langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t') \right\rangle_R + h.c. \right. \\
&\quad \left. + [\hat{s}^\dagger \hat{s} \tilde{\rho}_S(t') - \hat{s} \tilde{\rho}_S(t') \hat{s}^\dagger] e^{i\omega(t-t')} \left\langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \right\rangle_R + h.c. \right\} dt',
\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

na equação (4.1.18) a evolução do sistema S depende do passado deste através da integral sobre $\tilde{\rho}_S(t')$. Se o tempo de correlação do reservatório R é muito pequeno comparado com o tempo de decaimento do sistema S podemos considerar que as mudanças de $\tilde{\rho}_S(t')$ na integral são muito pequenas, pelo qual podemos aplicar uma aproximação Markoviana, que consiste em processos nos quais os sistemas não dependem dos estados em tempos anteriores (processos sem memória), e fazer $\tilde{\rho}_S(t') = \tilde{\rho}_S(t)$. Desta maneira a equação mestre é dada como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\rho}_S(t)}{\partial t} &= \frac{\gamma}{2} (\bar{n} + 1) \left(2\hat{s} \tilde{\rho}_S(t) \hat{s}^\dagger - \hat{s}^\dagger \hat{s} \tilde{\rho}_S(t) - \tilde{\rho}_S(t) \hat{s}^\dagger \hat{s} \right) \\
&\quad + \frac{\gamma}{2} \bar{n} \left(2\hat{s}^\dagger \tilde{\rho}_S(t) \hat{s} - \hat{s} \hat{s}^\dagger \tilde{\rho}_S(t) - \tilde{\rho}_S(t) \hat{s} \hat{s}^\dagger \right),
\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

onde $\gamma = 2\pi g(\omega) |k(\omega)|^2$ é a taxa de dissipação no sistema e $\bar{n} \equiv \bar{n}(\omega, T)$ é o número médio de fótons no reservatório com frequência ω .

Este modelo de reservatório térmico é usado em diferentes tipos de fenômenos, por exemplo, os modos do reservatório podem representar um campo radiante no vácuo pelo qual um íon excitado pode decair por emissão espontânea. De igual forma os modos do reservatório podem representar os modos de fônons na armadilha pelos quais está pode ter perdas.

4.2 Emissão espontânea

No estudo dos efeitos da emissão espontânea na transferência de estados, cada íon aprisionado na cavidade está em contato com um reservatório térmico próprio. Assim o hamiltoniano total do sistema é

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I + \hat{H}_R + \hat{H}_{SR}, \tag{4.2.1}$$

onde \hat{H}_0 e \hat{H}_I correspondem aos hamiltonianos das Eq. (3.2.11), \hat{H}_0 representando o hamiltoniano diagonal do sistema de íons aprisionados em cavidades acopladas com fibra óptica e \hat{H}_I o hamiltoniano de interação entre os íons, as cavidades e a fibra. Em total \hat{H}_0 e \hat{H}_I representam o hamiltoniano do sistema de interesse S .

\hat{H}_R representa dois conjuntos de osciladores harmônicos e \hat{H}_{SR} a interação entre estes com os estados eletrônicos de cada íon, pelo qual temos que os hamiltonianos

$$\hat{H}_R = \sum_{i=1}^2 \sum_j \hbar \vartheta_{ij} \hat{h}_{ij}^\dagger \hat{h}_{ij}; \quad \hat{H}_{SR} = \sum_{i=1}^2 \hbar (\sigma_{i+} \hat{\Gamma}_i + \hat{\Gamma}_i^\dagger \sigma_{i-}); \quad (4.2.2)$$

$$\hat{\Gamma}_i = \sum_j k_{ij} \hat{h}_{ij}. \quad (4.2.3)$$

Em relação ao sistema S consideraremos o caso (E), do acoplamento com fibra óptica estudado na seção 3.2 (íons aprisionados em cavidades em ressonância na primeira banda lateral azul com o modo normal \hat{d}_3). Logo em função destas considerações, a equação mestra na representação de interação que define a evolução do sistema com perdas por emissão espontânea pode ser escrita da forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}_S(t)}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar} \left[\tilde{H}_I, \tilde{\rho}_S(t) \right] + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\kappa}{2} (m+1) (2\sigma_{i-} \tilde{\rho}_S(t) \sigma_{i+} - \sigma_{i+} \sigma_{i-} \tilde{\rho}_S(t)) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\rho}_S(t) \sigma_{i+} \sigma_{i-} + \frac{\kappa}{2} m (2\sigma_{i+} \tilde{\rho}_S(t) \sigma_{i-} - \sigma_{i-} \sigma_{i+} \tilde{\rho}_S(t) - \tilde{\rho}_S(t) \sigma_{i-} \sigma_{i+}) \right\}, \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

onde \tilde{H}_I^1 é o hamiltoniano da Eq. (3.2.20), κ é a taxa de dissipação por emissão espontânea e m é o número médio de fótons no reservatório com frequências ω_a e temperatura T .

4.2.1 Solução analítica

Uma estratégia para resolver a Eq. (4.2.4) é escrever a matriz densidade do sistema $\tilde{\rho}_S(t)$ na base dos estados próprios do operador \hat{H}_0 , se definimos

$$M_{i',j',k',l',r'}^{i,j,k,l,r}(t) = \langle i_1, j_2, k_{a1}, l_{a2}, r_{d3} | \tilde{\rho}_S(t) | i'_1, j'_2, k'_{a1}, l'_{a2}, r'_{d3} \rangle, \quad (4.2.5)$$

¹Na seção (3.2.2) temos $\tilde{H}_I = \sum_{i=1}^2 \frac{\hbar \eta g}{\sqrt{2}} (-1)^{i+1} (\sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_3 + \sigma_{i-} \hat{a}_i \hat{d}_3^\dagger)$.

onde $k, l, r, k', l', r' \in \mathbb{Z}^+$ e i, j, i', j' representando um estado excitado e ou um estado fundamental g . As únicas condições iniciais não nulas dadas pelo estado inicial $\tilde{\rho}_S(0) = |\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|$ onde $|\Psi(0)\rangle^2$ é o mesmo estado inicial dado na seção (3.2.3) são:

$$\begin{aligned} M_{gg000}^{gg000}(0) &= \cos^2 \theta; & M_{eg100}^{gg000}(0) &= e^{i\varphi} \sin \theta \cos \theta; \\ M_{eg100}^{eg100}(0) &= \sin^2 \theta; & M_{gg000}^{eg100}(0) &= M_{eg100}^{gg000*}, \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

que aplicadas na equação mestra (4.2.4) geram conjuntos de sistemas de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes. Cada constante da Eq. (4.2.6) está associada a um conjunto de equações diferenciais homogêneas do tipo:

$$\begin{aligned} M_{gg000}^{gg000}(0) &\rightarrow \frac{d}{dt} \vec{M}_1(t) = A_{4x4} \vec{M}_1(t), \\ M_{eg100}^{gg000}(0) &\rightarrow \frac{d}{dt} \vec{M}_2(t) = B_{6x6} \vec{M}_2(t), \\ M_{eg100}^{eg100}(0) &\rightarrow \frac{d}{dt} \vec{M}_3(t) = C_{22x22} \vec{M}_3(t), \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

sendo $\vec{M}_1(t)$, $\vec{M}_2(t)$ e $\vec{M}_3(t)$ são funções vetoriais, cujas componentes são elementos de $\tilde{\rho}_S(t)$ e, A_{4x4} , B_{6x6} e C_{22x22} são as matrizes associadas a cada sistema de equações. É claro pelas propriedades da matriz densidade que o sistema relacionado à constante $M_{gg000}^{eg100}(0)$ é equivalente ao sistema de equações de $M_{eg100}^{gg000}(0)$. Os sistemas de equações estão anexados no apêndice A.

Normalmente os sistemas de equações diferenciais dados na Eq. (4.2.7) podem ser solucionados da seguinte forma: Se em geral temos um sistema de equações diferenciais definido por uma função vetorial $\vec{M}(t)$ e uma matriz K de coeficientes constantes, a solução esta dada por:

$$\frac{d}{dt} \vec{M}(t) = K \vec{M}(t) \implies \vec{M}(t) = e^{Kt} \vec{M}(0). \quad (4.2.8)$$

Quando procuramos resolver a primeira e a terça linha dos sistemas de equações diferenciais (4.2.7) com a equação (4.2.8) e utilizando qualquer linguagem típica de programação (Programas como Wolfram Mathematica ou MatLab) este gera erros e impede obter a

² $|\Psi(0)\rangle = (\cos \theta |g\rangle_1 |0\rangle_{a1} + \sin \theta e^{i\varphi} |e\rangle_1 |1\rangle_{a1}) |0\rangle_{d1} |0\rangle_{d2} |0\rangle_{d3} |g\rangle_2 |0\rangle_{a2},$

solução analítica do problema.

No entanto como a matriz densidade $\tilde{\rho}_S(t)$ tem traço constante por blocos, esta propriedade faz com que algumas componentes das funções vetoriais $\vec{M}_1(t)$ e $\vec{M}_3(t)$ dependam das outras. Pelo qual as matrizes A_{4x4} e C_{22x22} são linearmente dependentes, isso implica que A_{4x4} e C_{22x22} têm pelo menos um autovalor zero sendo difícil de detectar numericamente e gera erro nos cálculos.

Para solucionar o problema de forma eficiente podemos transformar os sistemas associado a $\vec{M}_1(t)$ e $\vec{M}_3(t)$ de tal forma que as matrizes dos novos sistemas sejam linearmente independente. Assim, podemos subtrair uma das componentes das funções vetoriais mencionadas e escrever um novo sistema onde o tamanho da matriz que define o sistema de equações diferenciais diminui. Desta maneira temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{M}_1 &= A_{4x4}\vec{M}_1 \rightarrow \frac{d}{dt}\vec{M}_1 = \tilde{A}_{3x3}\vec{M}_1 + \vec{A}; \\ \frac{d}{dt}\vec{M}_3 &= C_{22x22}\vec{M}_3 \rightarrow \frac{d}{dt}\vec{M}_3 = \tilde{C}_{21x21}\vec{M}_3 + \vec{C}, \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

onde \vec{A} e \vec{C} são vetores constantes. Esta modificação gera um novo sistema de equações diferenciais que não é homogêneo. Em geral se temos um sistema da forma:

$$\frac{d}{dt}\vec{M}(t) = K\vec{M}(t) + \vec{P} \quad (4.2.10)$$

onde \vec{P} é um vetor constante temos a solução

$$\vec{M}(t) = e^{Kt} \left(\vec{M}(0) + K^{-1}\vec{P} \right) - K^{-1}\vec{P} \quad (4.2.11)$$

de maneira que aplicando (4.2.11) nos sistemas dados na Eq. (4.2.9) obtém-se soluções analíticas para o sistema, que estamos estudando.

4.2.2 Resultados

No que segue apresentamos a fidelidade para diferentes parâmetros do sistema considerando temperaturas do reservatórios diferentes de zero, Assim calculamos a fidelidade em termos do número médio de fótons no reservatório que é um parâmetro mais geral, particularmente $m = 1$ ou $m = 2$.

Nas seguintes figuras mostramos os resultados da transferência de estados através da

fidelidade definida no capítulo anterior, seção 3.1.3.1 Eq. (3.1.47). É uma comparação com um sistema que não está em contato com reservatórios térmicos. Nesse caso utilizamos um sistema onde a transferência entre os íons é feita somente através do modo \hat{d}_3 em ressonância na primeira banda lateral azul que corresponde ao caso (E) da seção 3.2 do capítulo anterior. Em termos da equação mestra (4.2.4) o caso (E) representa simplesmente tomar $\kappa = 0$

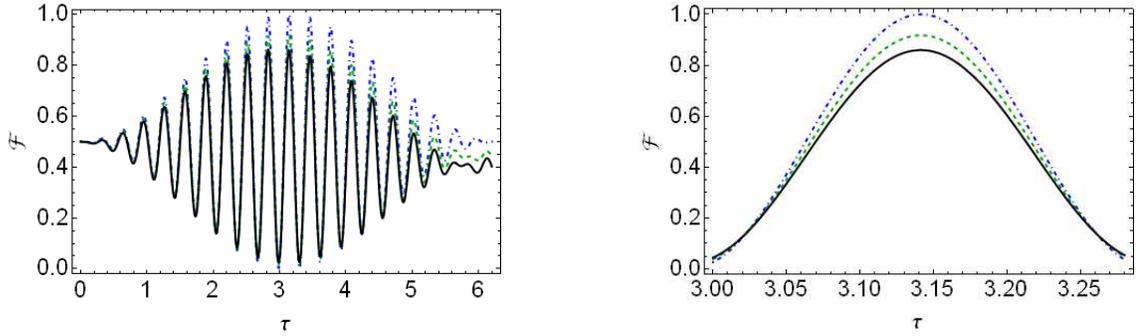


Figura 4.2.1: Fidelidade para $\omega/\eta g = 20$, $\theta = \pi/4$, $\tau = \eta g/t$ e $\varphi = 0$. linha azul $\kappa = 0$. Linha verde $m = 1$ e linha preta $m = 2$ onde $\kappa/\eta g = 0.02$. A figura da direita é um zoom da figura da esquerda no primeiro máximo da fidelidade em $\tau = \pi$.

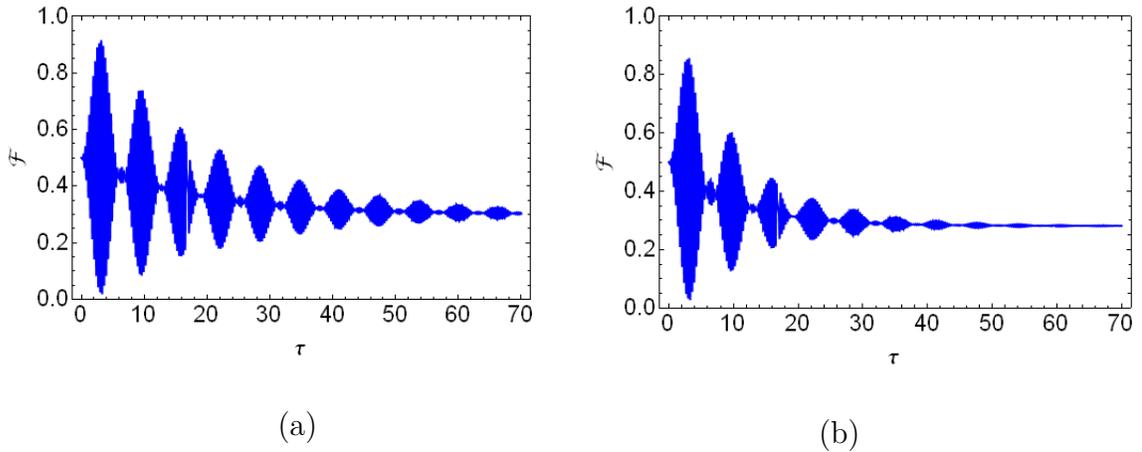


Figura 4.2.2: Fidelidade para $\omega/\eta g = 20$, $\theta = \pi/4$, $\tau = \eta g/t$ e $\varphi = 0$ (a) com $m = 1$ e (b) $m = 2$ onde $\kappa/\eta g = 0.02$

Da figura (4.2.1) e (4.2.2) podemos ver que o sistema não pode transferir o estado do íon 1 para o íon 2 completamente. Das soluções analíticas obtidas pode-se ver que o tempo para a máxima transferência de estado não muda quando se consideram os reservatórios térmicos porém a possibilidade de transferir o estado é máxima em $\tau = \pi$. Das figuras vemos que

primeiro máximo obtido das fidelidades é $\mathcal{F} = 0.92$ para $m = 1$ e $\mathcal{F} = 0.86$ para $m = 2$. Para tempos longos pode-se ver na figura (4.2.2) que temos valores estacionários na fidelidade, em $\tau \rightarrow \infty$ $\mathcal{F} = 0.30$ e $\mathcal{F} = 0.20$ para $m = 1$ e $m = 2$ respectivamente. Este resultado é devido ao fato de que o estado inicial é preparado numa superposição de estados de tal forma que os campos das cavidades e os estados de movimento dos íons podem estar no vácuo. Desta maneira o reservatório conserva parte desse estado.

Na figura (4.2.3) temos uma superfície da fidelidade em termos do tempo τ e o ângulo θ de preparação inicial do sistema .

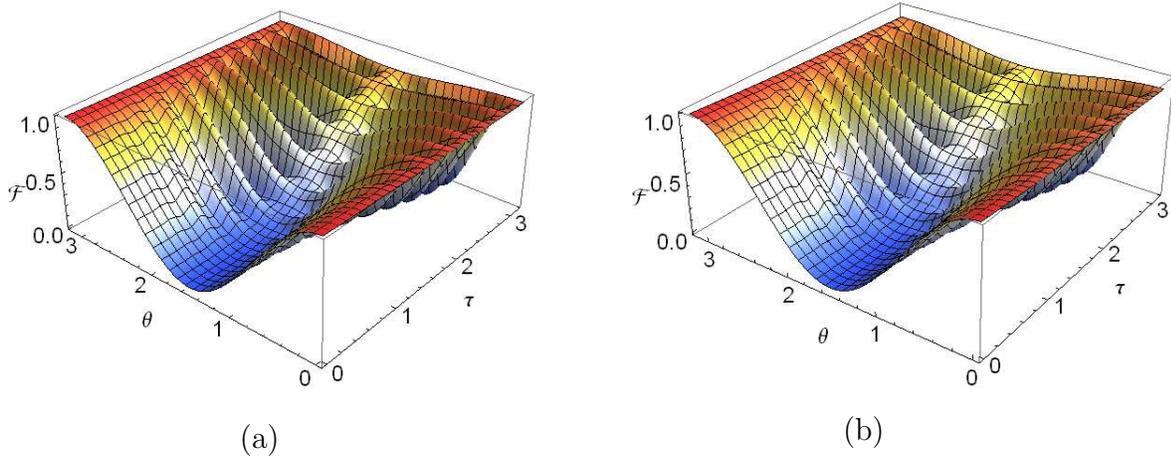


Figura 4.2.3: Fidelidade para $\omega/\eta g = 20$, $\tau = \eta g/t$ e $\varphi = 0$ (a) com $m = 1$ e (b) $m = 2$ onde $\kappa/\eta g = 0.02$

Por último calculamos a entropia linear dada por:

$$\varepsilon_\ell [\rho_2(t)] = 1 - Tr \{ (\rho_2(t))^2 \}, \quad (4.2.12)$$

Para determinar os tempos para os quais os graus de liberdade do íon 2 são separáveis³ dos outros elementos do sistema (estados do íon 1, campos da cavidade e fibra).

³Temos que lembrar que a entropia linear para sistemas mistos multipartites só pode ser considerada como critério de separabilidade e esta não fornece informação sobre o grau de emaranhamento do sistema.

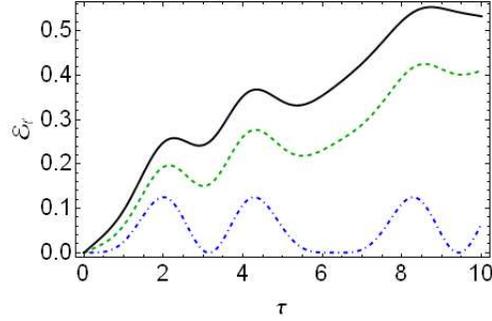


Figura 4.2.4: Entropia Linear para $\omega/\eta g = 20$, $\theta = \pi/4$, $\tau = \eta g/t$ e $\varphi = 0$. Linha azul $\kappa = 0$. Linha verde $m = 1$ e linha preta $m = 2$ onde $\kappa/\eta g = 0.02$

Uma característica particular no sistema sem emissão espontânea é o fato de ser separável somente quando a transferência do estado é perfeita ou o sistema volta ao estado inicial. Da figura 4.2.4 vê-se que a emissão espontânea impede que os graus de liberdade do íon 2 sejam separáveis dos demais elementos do sistema para tempos maiores que zero.

4.3 Perdas na Armadilha

No estudo das flutuações na armadilha vamos considerar que os modos de oscilação de cada um dos íons estão em contato com um reservatório térmico. O hamiltoniano do sistema é por tanto:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I + \hat{H}_R + \hat{H}_{SR}, \quad (4.3.1)$$

onde \hat{H}_0 e \hat{H}_I corresponde aos hamiltonianos das Eq. (3.2.11) e

$$\hat{H}_R = \sum_{i=1}^2 \sum_j \hbar \vartheta_{ij} \hat{h}_{ij}^\dagger \hat{h}_{ij}; \quad \hat{H}_{SR} = \sum_{i=1}^2 \hbar (\hat{a}_i^\dagger \hat{\Gamma}_i + \hat{\Gamma}_i^\dagger \hat{a}_i); \quad (4.3.2)$$

$$\hat{\Gamma}_i = \sum_j k_{ij} \hat{h}_{ij}. \quad (4.3.3)$$

De maneira similar ao caso da seção anterior, consideraremos o caso (E) do acoplamento com fibra óptica estudado na seção 3.2 para descrever a interação entre os íons e as cavidades. A equação mestra na representação de interação do sistema na aproximação Markoviana está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}_S(t)}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_I, \tilde{\rho}_S(t) \right] + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\chi_i}{2} (n+1) \left(2\hat{a}_i \tilde{\rho}_S(t) \hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \tilde{\rho}_S(t) - \tilde{\rho}_S(t) \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \right) \right. \\ &+ \left. \frac{\chi_i}{2} n \left(2\hat{a}_i^\dagger \tilde{\rho}_S(t) \hat{a}_i - \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \tilde{\rho}_S(t) - \tilde{\rho}_S(t) \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

onde \hat{H}_I é o hamiltoniano da Eq. (3.2.20). χ_i é a taxa de dissipação na armadilha i e n é o número médio de fótons no reservatório com frequências ν e temperatura T .

Este tipo de equação mestra com a condição inicial $\tilde{\rho}_S(0) = |\Psi(0)\rangle \langle \Psi(0)|$ dada na seção 4.2.1 não tem associado um sistema de equações diferenciais lineares na base dos estados próprios de \hat{H}_0 . Para calcular uma solução do sistema devemos escrever a equação mestre numa outra base que simplifique nossos cálculos ou utilizar outras ferramentas para solucionar o sistema na base \hat{H}_0 .

4.3.1 Solução Aproximada

Para solucionar a Eq. (4.3.4) pode-se utilizar os super operadores. No trabalho de Moya [29] temos a aplicação deste método para solucionar de forma analítica diferentes sistemas de interação entre matéria e radiação. Nós utilizamos uma expansão em série de potencias de um super operador para solucionar a Eq. (4.3.4) de forma aproximada para tempos pequenos.

Um super operador é um operador linear que atua sobre espaços vetoriais de operadores lineares. Em nosso problema podemos definir o super operador :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{C}}(\tilde{\rho}_S(t)) &= -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_I, \tilde{\rho}_S(t) \right] + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\chi_i}{2} (n+1) \left(2\hat{a}_i \tilde{\rho}_S(t) \hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \tilde{\rho}_S(t) \right) \right. \\ &- \left. \tilde{\rho}_S(t) \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \right\} + \frac{\chi_i}{2} n \left(2\hat{a}_i^\dagger \tilde{\rho}_S(t) \hat{a}_i - \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \tilde{\rho}_S(t) - \tilde{\rho}_S(t) \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \right). \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Se substituirmos o super operador anterior na equação mestra podemos escrever a solução deste da forma:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_S(t)}{\partial t} = \hat{\mathbb{C}}(\tilde{\rho}_S(t)) \Rightarrow \tilde{\rho}_S(t) = \text{Exp}[t\hat{\mathbb{C}}]\tilde{\rho}_S(0),$$

mas também pode-se escrever a solução como uma série do super operador $Exp[t\hat{C}]$ como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\rho}_S(t)}{\partial t} = \hat{C}(\tilde{\rho}_S(t)) &\Rightarrow \tilde{\rho}_S(t) = \tilde{\rho}_S(0) + \int_0^t \hat{C}(\tilde{\rho}_S(\tau)) d\tau \\
&\Rightarrow \tilde{\rho}_S(t) = \tilde{\rho}_S(0) + \int_0^t \hat{C} \left(\tilde{\rho}_S(0) + \int_0^{\tau} \hat{C}(\tilde{\rho}_S(\tau')) d\tau' \right) d\tau \\
&\Rightarrow \tilde{\rho}_S(t) = \tilde{\rho}_S(0) + t\hat{C}(\tilde{\rho}_S(0)) + \int_0^t \int_0^{\tau} \hat{C}(\hat{C}(\tilde{\rho}_S(\tau'))) d\tau' d\tau \\
&\vdots \\
&\Rightarrow \tilde{\rho}_S(t) = \tilde{\rho}_S(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \hat{C}^i(\tilde{\rho}_S(0)). \tag{4.3.6}
\end{aligned}$$

Desta maneira, se não temos explicitamente o operador $Exp[t\hat{C}]$ e desejamos uma solução num intervalo de tempo dado, só precisamos fazer um número de iterações na somatória com as quais a solução tenha um comportamento convergente.

A implementação deste método de solução aproximada depende da forma do super operador \hat{C} . Por exemplo, se \hat{C} pode ser escrito em uma base finita do espaço \hat{H}_0 é possível implementar um programa para calcular a somatória da Eq. (4.3.6) em qualquer linguagem com opção de escrever matrizes (C++, Matlab, Mathematica etc). No caso contrario é preciso de um pacote de objetos quânticos (Linguagem para escrever vetores na representação de Dirac, operadores, adjuntos etc) para implementar uma rotina⁴.

4.3.2 Resultados

Nesta seção apresentamos os resultados sobre a fidelidade, para diferentes parâmetros do sistema tendo como número médio de fótons do reservatório $n = 0, 1, 2$. As temperaturas associadas a estes valores de n podem ser calculadas pela expressão

$$\frac{\hbar\nu}{k_B T} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right). \tag{4.3.7}$$

Experimentalmente as frequências de oscilação típicas são da ordem de $\nu \approx 1.4 - 2 MHz$ [30]. Estes valores representam temperaturas da ordem $T \approx 15 \mu K$ para $n = 1, 2$.

⁴Pode-se fazer download de um pacote de objetos quânticos na pagina <http://homepage.cem.itesm.mx/lgoomez/quantum/>

De forma similar ao caso da emissão espontânea, vamos comparar o caso com perdas na armadilha com aquele sem dissipação que corresponde ao caso (E) da seção 3.2.

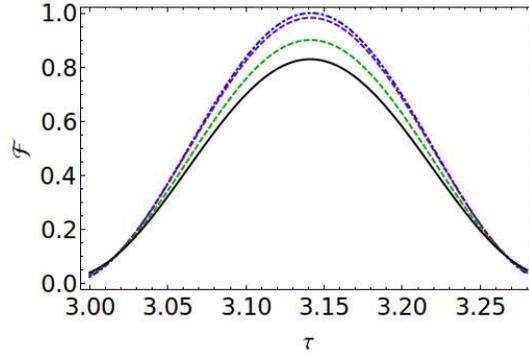


Figura 4.3.1: Fidelidade para $\omega/\eta g = 20$, $\theta = \pi/4$, $\tau = \eta g t$ e $\varphi = 0$. $\chi_{1,2}/\eta g = 0$ para a linha azul, $n = 0$ para a linha roxo, $n = 1$ para a linha verde, e $m = 2$ para a linha preta onde $\chi_{1,2}/\eta g = 0.02$

Na figura 4.3.1 temos a fidelidade na transferência de um estado maximamente emaranhado para $n = 0, 1, 2$. Desta podemos ver que o primeiro tempo de máxima transferência, $\tau = \pi$, não muda com o número meio de fótons do reservatório. De igual forma para valores de $n = 1, 2$ o decaimento na fidelidade se torna mais claro. Para $\tau = \pi$ e $n = 1$ tem $\mathcal{F} = 0.93$ e para $n = 2$ $\mathcal{F} = 0.824$ respectivamente.

A ilustração do efeito da dissipação em uma única armadilha é apresentado na figura 4.3.2

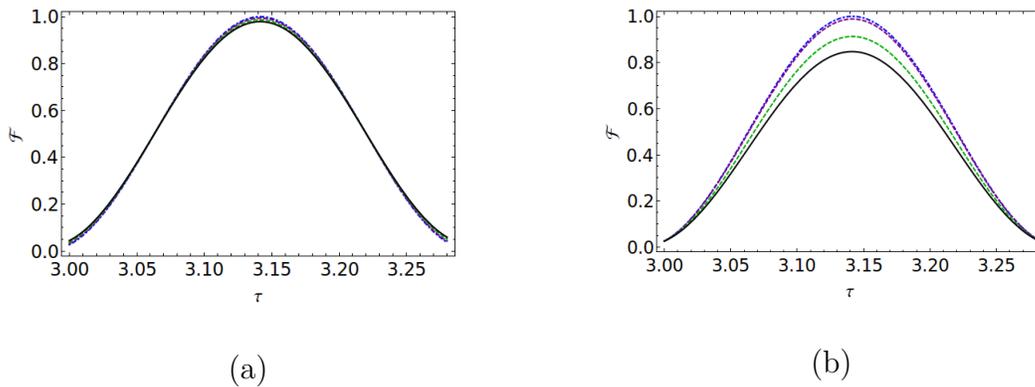


Figura 4.3.2: Fidelidade para $\omega/\eta g = 20$, $\theta = \pi/4$, $\tau = \eta g t$ e $\varphi = 0$ onde (a) $\chi_1/\eta g = 0.02$ e $\chi_2 = 0$ e (b) $\chi_2/\eta g = 0.02$ e $\chi_1 = 0$. Nas duas figuras $n = 0, 1, 2$ para as linhas roxo, verde e preta respectivamente e na linha azul $\chi_{1,2} = 0$

Podemos afirmar que a dissipação na armadilha 2 (que está recebendo o estado) afeta

mais a fidelidade do estado transferido do que uma dissipação na armadilha 1, que transmite o estado.

Por último temos na figura 4.3.3 a fidelidade para um sistema com dissipação nas duas armadilhas onde fixamos o tempo em $\tau = \pi$ para determinar a variação na transferência em termos da taxa de dissipação χ .

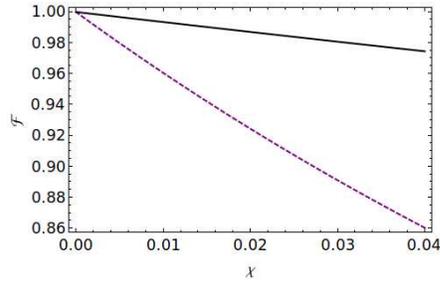


Figura 4.3.3: Fidelidade para $\omega/\eta g = 20$, $\theta = \pi/4$, $\tau = \pi$ e $\varphi = 0$. Para a linha preta $n = 0$ e para a linha roxa $n = 1$ com χ em unidades ηg

O que se observa aqui é que o aumento da taxa de dissipação altera a fidelidade do estado transferido com mais relevância quando a temperatura do reservatório é maior que zero. Isso é visto pelo aumento do coeficiente de inclinação da curva em função de n .

Capítulo 5

Conclusões

Nesta dissertação de mestrado estudamos a transferência de estados de dois qubits entre íons com dois graus de liberdade aprisionados em cavidades. Inicialmente considerados dois tipos de acoplamento, um direto, onde os campos das cavidades estão superpostos e outro, onde as cavidades têm acoplamento via fibra óptica.

O objetivo deste trabalho foi focado a determinar as condições nas quais o sistema pode transferir os estados de qubits entre os íons considerando dois situações: (1) incluindo modos normais fora da ressonância e (2) colocando o sistema em contato com reservatórios térmicos a temperaturas diferentes de zero.

Nas aproximações onde a transferência do estado do íon 1, preparados na base $\{|g\rangle |0\rangle, |e\rangle |1\rangle\}$, é feita com um único modo normal em ressonância na primeira banda lateral azul, foi possível demonstrar analiticamente que a transferência é perfeita para tempos $t_n = (2n + 1) \pi / \eta g$ (n inteiro) no acoplamento direto e no acoplamento com fibra no caso onde o modo normal ressonante é \hat{d}_3 . No caso da transferência com um só modo no acoplamento com fibra com os modos normais ressonantes \hat{d}_1 e \hat{d}_2 o tempo de transferência perfeita é $t_n = \sqrt{2} (2n + 1) \pi / \eta g$. Isso ocorre sempre que $\Omega_i / \eta g$ seja um número inteiro que depende do modo normal ressonante e do tipo de acoplamento.

No caso mais geral onde a transferência dos qubits é feita com dois modos normais, com apenas um deles é ressonante, observa-se nos dois tipos de acoplamento que o modo normal não ressonante atua no sistema como um “ reservatório externo ”. Este acaba modificando a fase e a amplitude do estado em evolução de maneira que a fidelidade na transferência não seja perfeita. Além disso, o período da fidelidade também muda gerando um aumento no tempo para o qual o sistema retorna ao seu estado inicial. Nos dois tipos de acoplamento, o

primeiro máximo (máxima fidelidade obtida) foi obtido para tempos da ordem $t = \pi/\eta g$.

Comparando os acoplamentos direto e por fibra óptica pode-se dizer que na aproximação com um modo normal a dinâmica dos sistemas é equivalente (mesma forma dos hamiltonianos) com resultados similares. Na aproximação com dois modos temos que, em condições de sintonizações semelhantes, a transferência de estados é melhor para o acoplamento com fibra óptica. Isso pode ser explicado pelo fato de que a fibra está em ressonância com os campos das cavidades.

No estudo de transferência de estados sob efeitos do meio ambiente (emissão espontânea ou perdas na cavidade) observa-se uma perda da fidelidade na transmissão dos estados do íon 1 ao íon 2 resultante dessas interações com os reservatórios e a parte do sistema em consideração.

Também vimos que o tempo de máxima transferência não muda quando levamos em conta os reservatórios térmicos que são representados pela emissão espontânea e perdas na armadilha. Em particular no estudo da transferência do estado $\frac{1}{\sqrt{2}}|g\rangle|0\rangle_{a1} + \frac{1}{\sqrt{2}}|e\rangle_1|1\rangle_{a1}$, onde o acoplamento é feito com fibra óptica com um único modo (na primeira banda lateral azul), os tempos de máxima transferência são $t_n = (2n + 1)\pi/\eta g$ onde $\omega/\eta g = 2l$ (l inteiro).

O número de fótons gerados e perdidos pela emissão espontânea e as perdas na armadilha alteram fortemente a fidelidade, desta maneira a temperatura muda a transmissão do estado e impede a transferência perfeita.

Considerando tempos longos, a emissão espontânea levam à fidelidade de transmissão a um estado estacionários. Isso ocorre devido ao fato de estarmos preparando o estado inicial de tal forma que os campos das cavidades e os estados de movimento dos íons têm componentes de estado de vácuo.

No que se refere à entropia linear vimos que ela depende fortemente da temperatura no caso da emissão espontânea. Além disso, o segundo mínimo local desta muda também com a temperatura. Disso pode-se inferir que o reservatório não permite mais que os graus de liberdade do íon 2 sejam separáveis dos graus de liberdade do íon 1 e os campos do sistema para tempos longos.

Já com respeito à dissipação na armadilha 2 (aquela que esta recebendo o estado transferido) vimos que esta afeta mais a fidelidade de transmissão do estado dos íons que a uma dissipação equivalente na armadilha 1. Isso pode ser explicado pelo fato de que o sistema 1 é o emissor do estado que tem certa quantidade de energia inicial. Quando temos dissipação na armadilha 2, a energia do sistema tem que se distribuir entre os graus, de liberdade do íon, dos campos e os reservatórios, que é o que gera perdas e perda na fidelidade de transferência,

tornando-a mais deficiente a transferência do estado.

Perspectivas futuras: Na próxima etapa deste projeto pretendemos estudar sistemas onde temos dissipações nas cavidades e na fibra óptica e solucionar a dinâmica destes sistemas aproximadamente com o método do super operador. Outra Ideá é considerar um sistema formado por redes de cavidades e estudar a possibilidade de transferir informação de uma cavidade a outra. Também é possível incluir nos sistema mais modos de transferência e estudar seus efeitos. Por ultimo podem ser incluídos nas análises a influencia de campos externos que permita a medição dos graus de liberdade do íon

Apêndice A

Sistemas de Equações Diferenciais

A.1 Sistema de equações diferenciais para o sistema de cavidades acopladas por fibra óptica e transferência com dois modos

A equação de Schrödinger $\hat{H}_I |\tilde{\Psi}(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\Psi}(t)\rangle$ onde \hat{H}_I esta dado pela Eq. (3.2.22) ¹e $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$ é a solução proposta (3.2.25) tem associado um sistema de equações diferenciais com a com $\tau' = \frac{\eta g t}{\sqrt{2}}$ e $\tilde{\Delta} = \frac{\sqrt{2}}{\eta g} (\sqrt{2}\tilde{\lambda} - 2\nu)$, este sistema esta representado pela Eq. (A.1.1).

¹A equação é $\hat{H}_I = \sum_{i=1}^2 \frac{\hbar \eta g}{\sqrt{2}} (-1)^{i+1} \left((\sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_3 + \sigma_{i-} \hat{a}_i \hat{d}_3^\dagger) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_{i-} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_1^\dagger e^{-i \frac{\eta g}{\sqrt{2}} \tilde{\Delta} t} + \sigma_{i+} \hat{a}_i \hat{d}_1 e^{i \frac{\eta g}{\sqrt{2}} \tilde{\Delta} t}) \right)$.

$$\begin{aligned}
i \frac{d}{d\tau'} C_{k_1, k_2, l_2, l_3}^{gg}(\tau') &= \sqrt{l_3} \left(\sqrt{k_1 + 1} C_{k_1+1, k_2, l_2, l_3-1}^{eg}(\tau') - \sqrt{k_2 + 1} C_{k_1, k_2+1, l_2, l_3-1}^{eg}(\tau') \right) \\
&+ \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{k_1} C_{k_1-1, k_2, l_1-1, l_2}^{eg}(\tau) e^{-i\tilde{\Delta}\tau'} + \sqrt{k_2} C_{k_1, k_2-1, l_1-1, l_2}^{ge}(\tau) e^{-i\tilde{\Delta}\tau'} \right) \\
i \frac{d}{d\tau'} C_{k_1, k_2, l_2, l_3}^{ee}(\tau') &= \sqrt{l_3 + 1} \left(\sqrt{k_1} C_{k_1-1, k_2, l_2, l_3+1}^{ge}(\tau') - \sqrt{k_2} C_{k_1, k_2-1, l_2, l_3+1}^{eg}(\tau') \right) \\
&+ \frac{\sqrt{l_2 + 1}}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{k_1 + 1} C_{k_1+1, k_2, l_2+1, l_3}^{ge}(\tau') e^{i\tilde{\Delta}\tau'} \right. \\
&\left. - \sqrt{k_2 + 1} C_{k_1, k_2+1, l_2+1, l_3}^{eg}(\tau') e^{i\tilde{\Delta}\tau'} \right) \\
i \frac{d}{d\tau'} C_{k_1, k_2, l_2, l_3}^{ge}(\tau') &= \left(\sqrt{l_3} (k_1 + 1) C_{k_1+1, k_2, l_2, l_3-1}^{ee}(\tau') - \sqrt{k_2} (l_2 + 1) C_{k_1, k_2-1, l_2, l_3+1}^{gg}(\tau') \right) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(l_2 + 1) (k_2 + 1)} C_{k_1, k_2+1, l_2+1, l_3}^{gg}(\tau') e^{i\tilde{\Delta}\tau'} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{l_1 k_1} C_{k_1-1, k_2, l_1-1, l_2}^{ee}(\tau') e^{-i\tilde{\Delta}\tau'} \\
i \frac{d}{d\tau'} C_{k_1, k_2, l_2, l_3}^{eg}(\tau') &= \left(\sqrt{k_1} (l_3 + 1) C_{k_1-1, k_2, l_2, l_3+1}^{gg}(\tau') - \sqrt{l_3} (k_2 + 1) C_{k_1, k_2+1, l_2, l_3-1}^{eg}(\tau') \right) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(l_2 + 1) (k_1 + 1)} C_{k_1+1, k_2, l_2+1, l_3}^{gg}(\tau') e^{i\tilde{\Delta}\tau'} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{l_3 k_2} C_{k_1, k_2-1, l_2-1, l_3}^{ee}(\tau') e^{-i\tilde{\Delta}\tau'} \tag{A.1.1}
\end{aligned}$$

A.2 Sistema de equações diferenciais para o sistema de emissão espontânea

Os sistemas de equações diferenciais da Eq. (4.2.7) esta dado na notação

$$M_{i', j', k', l', r'}^{i, j, k, l, r}(t) = \langle i_1, j_2, k_{a1}, l_{a2}, r_{d3} | \tilde{\rho}_S(t) | i'_1, j'_2, k'_{a1}, l'_{a2}, r'_{d3} \rangle, \tag{A.2.1}$$

onde $k, l, r, k', l', r' \in \mathbb{Z}^+$ e $i, j, i', j' = g, e$. e sera representado por 1 e g por 0. No que segue temos os sistemas de equações onde $\alpha = -i \frac{ng}{\sqrt{2}}$.

- Conjunto I (Associado a $M_{gg000}^{gg000}(0) = M_{00000}^{00000}(0)$)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}M_{00000}^{00000}(t) &= \frac{1}{2}(m+1)K \left(2M_{01000}^{01000}(t) + 2M_{10000}^{10000}(t) \right) - 2nKM_{00000}^{00000}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{01000}^{01000}(t) &= \frac{1}{2}mK \left(2M_{00000}^{00000}(t) - 2M_{01000}^{01000}(t) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(m+1)K \left(2M_{11000}^{11000}(t) - 2M_{01000}^{01000}(t) \right); \\
\frac{d}{dt}M_{10000}^{10000}(t) &= \frac{1}{2}mK \left(2M_{00000}^{00000}(t) - 2M_{10000}^{10000}(t) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(m+1)K \left(2M_{11000}^{11000}(t) - 2M_{10000}^{10000}(t) \right); \\
M_{11000}^{11000}(t) &= \cos^2\theta^2 - M_{00000}^{00000}(t) - M_{10000}^{10000}(t) - M_{01000}^{01000}(t), \tag{A.2.2}
\end{aligned}$$

- Conjunto II (Associado a $M_{eg100}^{gg000}(0) = M_{10100}^{00000}(0)$)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}M_{10100}^{00000}(t) &= -\frac{3}{2}mKM_{10100}^{00000}(t) + \frac{1}{2}(m+1)K \left(2M_{11100}^{01000}(t) - M_{10100}^{00000}(t) \right) \\
&\quad - \alpha M_{00001}^{00000}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{00001}^{00000}(t) &= -2mKM_{00001}^{00000}(t) + \frac{1}{2}(m+1)K \left(2M_{01001}^{01000}(t) + 2M_{10001}^{10000}(t) \right) \\
&\quad + \alpha \left(M_{01010}^{00000}(t) - M_{10100}^{00000}(t) \right); \\
\frac{d}{dt}M_{11100}^{01000}(t) &= \frac{1}{2}mK \left(2M_{10100}^{00000}(t) - M_{11100}^{01000}(t) \right) - \frac{3}{2}(m+1)KM_{11100}^{01000}(t), \\
&\quad - \alpha M_{01001}^{01000}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{01010}^{00000}(t) &= -\frac{3}{2}mKM_{01010}^{00000}(t) + \frac{1}{2}(m+1)K \left(2M_{11010}^{10000}(t) - M_{01010}^{00000}(t) \right) \\
&\quad + \alpha M_{00001}^{00000}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{01001}^{01000}(t) &= \frac{1}{2}mK \left(2M_{00001}^{00000}(t) - 2M_{01001}^{01000}(t) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(m+1)K \left(2M_{11001}^{11000}(t) - 2M_{01001}^{01000}(t) \right) - \alpha M_{11100}^{01000}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{10001}^{10000}(t) &= \frac{1}{2}mK \left(2M_{00001}^{00000}(t) - 2M_{10001}^{10000}(t) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(m+1)K \left(2M_{11001}^{11000}(t) - 2M_{10001}^{10000}(t) \right) - \alpha M_{11010}^{10000}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{11010}^{10000}(t) &= \frac{1}{2}mK \left(2M_{01010}^{00000}(t) - M_{11010}^{10000}(t) \right) - \frac{3}{2}(m+1)KM_{11010}^{10000}(t) \\
&\quad + \alpha M_{10001}^{10000}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{11001}^{11000}(t) &= \frac{1}{2}mK \left(2M_{01001}^{01000}(t) + 2M_{10001}^{10000}(t) \right) - 2(m+1)KM_{11001}^{11000}(t), \tag{A.2.3}
\end{aligned}$$

- Conjunto III (Associado a $M_{eg100}^{eg100}(0) = M_{10100}^{10100}(0)$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_{10100}^{10100}(t) &= \frac{1}{2} mK \left(2M_{00100}^{00100}(t) - 2M_{10100}^{10100}(t) \right) \\ &+ \frac{1}{2} (m+1)K \left(2M_{11100}^{11100}(t) - 2M_{10100}^{10100}(t) \right) + \alpha \left(M_{10100}^{00001}(t) - M_{00001}^{10100}(t) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_{10100}^{00001}(t) &= -\frac{3}{2} mK M_{10100}^{00001}(t) + \frac{1}{2} (m+1)K \left(2M_{11100}^{01001}(t) - M_{10100}^{00001}(t) \right) \\ &+ \alpha \left(-M_{00001}^{00001}(t) - M_{10100}^{01010}(t) + M_{10100}^{10100}(t) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_{00001}^{10100}(t) &= -\frac{3}{2} mK M_{00001}^{10100}(t) + \frac{1}{2} (m+1)K \left(2M_{01001}^{11100}(t) - M_{00001}^{10100}(t) \right) \\ &+ \alpha \left(M_{00001}^{00001}(t) + M_{01010}^{10100}(t) - M_{10100}^{10100}(t) \right); \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} M_{00100}^{00100}(t) = \frac{1}{2} (m+1)K \left(2M_{01100}^{01100}(t) + 2M_{10100}^{10100}(t) \right) - 2mK M_{00100}^{00100}(t);$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_{11100}^{11100}(t) &= \frac{1}{2} mK \left(2M_{01100}^{01100}(t) + 2M_{10100}^{10100}(t) \right) - 2(m+1)K M_{11100}^{11100}(t) \\ &+ \alpha \left(M_{11100}^{01001}(t) - M_{01001}^{11100}(t) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_{11100}^{01001}(t) &= \frac{1}{2} mK \left(2M_{10100}^{00001}(t) - M_{11100}^{01001}(t) \right) - \frac{3}{2} (m+1)K M_{11100}^{01001}(t) \\ &+ \alpha \left(M_{11100}^{11100}(t) - M_{01001}^{01001}(t) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_{00001}^{00001}(t) &= -2mK M_{00001}^{00001}(t) + \frac{1}{2} (m+1)K \left(2M_{01001}^{01001}(t) + 2M_{10001}^{10001}(t) \right) \\ &+ \alpha \left(M_{01010}^{00001}(t) - M_{10100}^{00001}(t) - M_{00001}^{01010}(t) + M_{00001}^{10100}(t) \right); \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} M_{10100}^{01010}(t) = \alpha \left(-M_{10100}^{00001}(t) - M_{00001}^{01010}(t) \right) - mK M_{10100}^{01010}(t) - (m+1)K M_{10100}^{01010}(t);$$

$$\frac{d}{dt} M_{01010}^{10100}(t) = \alpha \left(M_{10100}^{00001}(t) + M_{00001}^{10100}(t) \right) - mK M_{01010}^{10100}(t) - (m+1)K M_{01010}^{10100}(t);$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_{01001}^{11100}(t) &= \frac{1}{2} mK \left(2M_{00001}^{10100}(t) - M_{01001}^{11100}(t) \right) - \frac{3}{2} (m+1)K M_{01001}^{11100}(t) \\ &+ \alpha \left(M_{01001}^{01001}(t) - M_{11100}^{11100}(t) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_{01100}^{01100}(t) &= \frac{1}{2} mK \left(2M_{00100}^{00100}(t) - 2M_{01100}^{01100}(t) \right) \\ &+ \frac{1}{2} (m+1)K \left(2M_{11100}^{11100}(t) - 2M_{01100}^{01100}(t) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_{01001}^{01001}(t) &= \frac{1}{2} mK \left(2M_{00001}^{00001}(t) - 2M_{01001}^{01001}(t) \right) \\ &+ \frac{1}{2} (m+1)K \left(2M_{11001}^{11001}(t) - M_{01001}^{01001}(t) \right) + \alpha \left(M_{01001}^{11100}(t) - M_{11101}^{01001}(t) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}M_{10001}^{10001}(t) &= \frac{1}{2}mK \left(2M_{00001}^{00001}(t) - 2M_{10001}^{10001}(t) \right) \\
&+ \frac{1}{2}(m+1)K \left(2M_{11001}^{11001}(t) - 2M_{10001}^{10001}(t) \right) + \alpha \left(M_{11010}^{10001}(t) - M_{10001}^{11010}(t) \right); \\
\frac{d}{dt}M_{10100}^{00001}(t) &= -\frac{3}{2}mKM_{01010}^{00001}(t) + \frac{1}{2}(m+1)K \left(2M_{11010}^{10001}(t) - M_{01010}^{00001}(t) \right) \\
&+ \alpha \left(M_{00001}^{00001}(t) - M_{01001}^{01001}(t) + M_{01010}^{10100}(t) \right); \\
\frac{d}{dt}M_{00001}^{01010}(t) &= \alpha \left(-M_{00001}^{00001}(t) + M_{01001}^{01001}(t) - M_{10100}^{01010}(t) \right) \\
&+ \frac{1}{2}(m+1)K \left(2M_{10001}^{11010}(t) - M_{00001}^{01010}(t) \right) - \frac{3}{2}mKM_{00001}^{01010}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{11001}^{11001}(t) &= \frac{1}{2}mK \left(2M_{01001}^{01001}(t) + 2M_{10001}^{10001}(t) \right) - 2(m+1)KM_{11001}^{11001}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{11010}^{10001}(t) &= \frac{1}{2}mK \left(2M_{01010}^{00001}(t) - M_{11010}^{10001}(t) \right) - \frac{3}{2}(m+1)KM_{11010}^{10001}(t) + \\
&+ \alpha \left(M_{10001}^{10001}(t) - M_{11010}^{11010}(t) \right); \\
\frac{d}{dt}M_{10001}^{11010}(t) &= \frac{1}{2}mK \left(2M_{00001}^{01010}(t) - M_{10001}^{11010}(t) \right) - \frac{3}{2}(m+1)KM_{10001}^{11010}(t) \\
&+ \alpha \left(M_{11010}^{11010}(t) - M_{10001}^{10001}(t) \right); \\
\frac{d}{dt}M_{01001}^{01001}(t) &= \alpha \left(M_{00001}^{01010}(t) - M_{01010}^{00001}(t) \right) + \frac{1}{2}mK \left(2M_{00010}^{00010}(t) - 2M_{01010}^{01010}(t) \right) \\
&+ \frac{1}{2}(m+1)K \left(2M_{11010}^{11010}(t) - 2M_{01010}^{01010}(t) \right); \\
\frac{d}{dt}M_{11010}^{11010}(t) &= \frac{1}{2}mK \left(2M_{10010}^{10010}(t) + 2M_{01010}^{01010}(t) \right) + \alpha \left(M_{10001}^{11010}(t) - M_{11010}^{10001}(t) \right) \\
&- 2(m+1)KM_{11010}^{11010}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{00010}^{00010}(t) &= \frac{1}{2}(m+1)K \left(2M_{10010}^{10010}(t) + 2M_{01010}^{01010}(t) \right) - 2mKM_{00010}^{00010}(t); \\
M_{10010}^{10010}(t) &= \sin^2 \theta - M_{10100}^{10100}(t) - M_{00100}^{00100}(t) - M_{11100}^{11100}(t) - M_{00001}^{00001}(t) \\
&- M_{01001}^{01001}(t) - M_{01100}^{01100}(t) - M_{10001}^{10001}(t) - M_{11001}^{11001}(t) - M_{01001}^{01001}(t) \\
&- M_{11010}^{11010}(t) - M_{00010}^{00010}(t). \tag{A.2.4}
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] A. Steane, *Quantum computing*, Rep. Prog. Phys.61, 117 (1998).
- [2] D. Bouwmeester, A. Ekert and A. Zeilinger, *The Physics of Quantum Information: Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computation*, Ed. Springer (2000).
- [3] E. Jan, M.B. Plenio e D. Jonathan, *Quantum-information processing in strongly detuned optical cavities*, Phys. Rev. A65, 050302 (2002).
- [4] F. Yamaguchi, P. Milman, M. Brune, J.M. Raimond e S. Haroche, *Quantum search with two-atom collisions in cavity QED*, Phys. Rev. A66, 010302 (2002).
- [5] J.A. Roversi, A. Vidiella-Barranco e H. Moya-Cessa, *Dynamics of two atoms coupled to a cavity field*, Mod.Phys.Lett. B 17 219 (2003).
- [6] R. Lo Franco, G. Compagno, A. Messina e A. Napoli, *Bell's inequality violation for entangled generalized Bernoulli states in two spatially separate cavities*, Phys Rev. A 72, 053806 (2005).
- [7] Guo-Ping Guo, Chuan-Feng Li, Jian Li e Guang-Can Guo, *Scheme for the preparation of multiparticle entanglement in cavity QED*, Phys. Rev. A65, 042102 (2002).
- [8] J.M. Raimond, T. Meunier, P. Bertet, S. Gleyzes, P. Maioli, A. Auffeves, G. Nogues, M. Brune e S. Haroche, *Probing a quantum field in a photon box*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 38, S535 (2005).
- [9] K.J. Vahala, *Optical microcavities*, Nature 424, 839 (2003).
- [10] S. M. Spillane, T. J. Kippenberg, O. J. Painter, e K. J. Vahala, *Ideality in a Fiber-Taper-Coupled Microresonator System for Application to Cavity Quantum Electrodynamics*, Phys. Rev. Lett. 91, 043902 (2003).

-
- [11] W. Yao, Ren-Bao Liu, and L.J. Sham, *Theory of Control of the Spin-Photon Interface for Quantum Networks*, Phys. Rev. Lett. 95, 030504 (2005).
- [12] J.I. Cirac, P. Zoller, *A scalable quantum computer with ions in an array of microtraps*, Nature 404, 579 (2000).
- [13] F.L. Semião, A. Vidiella-Barranco e J.A. Roversi, *Entanglement between motional states of a single trapped ion and light*, Phys.Rev A64, 024305 (2001).
- [14] F.K. Nohama e J.A. Roversi, *Two-qubit state transfer between trapped ions using electromagnetic cavities coupled by an optical fibre*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 41 045503 (2008).
- [15] P.P. Munhoz, F.L. Semião, A. Vidiella-Barranco e J.A. Roversi, *Cluster-type entangled coherent states*, Phys. Lett. A 372, 3580 (2008).
- [16] A.B. Mundt, A. Kreuter, C. Becher, D. Leibfried, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler e R. Blatt, *Coupling a Single Atomic Quantum Bit to a High Finesse Optical Cavity*, Phys. Rev. Lett. 89, 103001 (2002).
- [17] A.B. Mundt, A. Kreuter, C. Russo, C. Becher, D. Leibfried, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler e R. Blatt, *Coherent coupling of a single Ca^+ ion to a high-finesse optical cavity*, Appl. Phys. B 76, 117 (2003).
- [18] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics (Revised Edition)*. Ed. Addison-Wesley (1994).
- [19] J.M. Vargas-Martínez, E.A. Martí-Panameño e H. Moya-Cessa, *Interacción de un láser con un ion atrapado incluyendo dependencia temporal*, Revista Mexicana De Física 55 (2) 176–190 (2009).
- [20] A. Friedenauer, H. schmitz, J. T. Glueckert, D. Porras e T. Schaetz, *Simulating a quantum magnet with trapped ions*, Nature Physics 4, 757 - 761 (2008).
- [21] D. L. Moehring, P. Maunz, S. Olmschenk, K. C. Younge, D. N. Matsukevich, L.-M. Duan e C. Monroe, *Entanglement of single-atom quantum bits at a distance*, Nature 449, 68-71 (2007).

-
- [22] Abramowitz e M. Stegun, *I.A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas*, Dover Publications (1972).
- [23] A. Peres, *Separability Criterion for Density Matrices*, Phys. Rev. Lett. 77, 1413 (1996).
- [24] A. F. R. de Toledo Piza, *Sistemas quânticos compostos e emaranhamento, a sistemas quânticos abertos e decoerência*. Notas de aula 12/08/2009.
- [25] M. A. Nielsen e I L . Chuang, *Quantum computation and quantum information* , Cambridge University press (2000).
- [26] H. Zoubi, M. Orenstein e A. Ron, *Coupled microcavities with dissipation*, Phys. Rev. A62, 033801 (2000).
- [27] George B. Arfken, Hans J. Weber e Frank Harris. *Mathematical Methods for Physicists* , 6th Edition, Elsevier (2005).
- [28] H.J. Carmichael, *Lectures Notes in Physics: An Open System aproach to Quantum Optics*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg (1993).
- [29] H Moya-Cessa. *Decoherence in atom–field interactions: A treatment using superoperator techniques*, Physics Reports 432 (2006).
- [30] A.B. Mundt, A. Kreuter, C. Becher, D. Leibfried, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler e R. Blatt, *Coupling a single atomic quantum bit to a high finesse optical cavity*, Phys. Rev. Lett. 89, 103001 (2002).