

# **Transferência de Coerência Átomo-Campo em um Micromaser de Dois Fótons.**

**ALVARO FERNANDEZ GOMES  
IFGW - UNICAMP**

Orientador: Antonio Vidiella-Barranco  
IFGW - UNICAMP

Tese apresentada ao Instituto de Física 'Gleb Wataghin'  
Da Universidade Estadual de Campinas como parte dos  
Requisitos à obtenção do título de Doutor em Ciências.

Campinas, 28 de Fevereiro 2003

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

Gomes, Álvaro Fernandez

G585t Transferência de corência átomo-campo em um  
micromaser de dois fótons/ Álvaro Fernandez Gomes. –

Campinas, SP: s.n, 2003. Orientador: Antonio Vidiella Barranco.

Tese(doutorado) - Universidade Estadual de

Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Ótica quântica. 2. Jaynes-Cummings, Modelo.

3. Dois fótons 4. Kerr, Efeito de. I. Vidiella Barranco,  
Antonio, II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto  
de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

(vsv/ifgw)

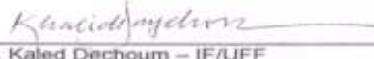
 UNICAMP	 PÓS	<b>Instituto de Física Gleb Wataghin</b>	C.P. 6165 CEP: 13083-970 Tel. (19) 788-5305 e-mail: secpos@ifl.unicamp.br
--	--	--	--

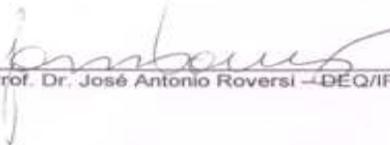
MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE ÁLVARO FERNANDEZ GOMES – R.A. 856092 APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 28 / 02 / 2003.

**COMISSÃO JULGADORA:**

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco (Orientador do Candidato) – IFGW/UNICAMP

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Basílio Baseia – IF/UFF

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Kaled Dechoum – IF/UFF

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. José Antonio Roversi – DEQ/IFGW/UNICAMP

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Kyoko Furuya – DFMC/IFGW/UNICAMP



*Dedico aos meus Pais*

*Alvaro Gomes (in memoriam)*

*Dolores Fernandez Gomes*

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço ao meu orientador e amigo Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco por todos os momentos de proveitosas discussões, que sem dúvida nenhuma me levaram a um bom entendimento dos conceitos da *Ótica Quântica* e contribuíram para minha formação como pesquisador. Agradeço ao amigo Prof. Dr. José Antonio Roversi por ter acompanhado e contribuído com o meu trabalho e também em minha formação como pesquisador.

Agradeço a secretária da Pós-graduação Maria Ignez S.Roquette Mokarzel, por todo o seu apoio e a todo o trabalho administrativo que tem desempenhado para um excelente andamento da Pós. Agradeço ao Armando Mariuzzo Junior, por seu trabalho incansável em me atender sempre nos momentos que precisei, e a todos os funcionários que nesse período passaram por essa secretaria.

Agradeço a todos os funcionários da biblioteca e do centro de computação por todo empenho desenvolvido em suas funções.

Agradeço aos meus amigos e colegas, José Luiz Jimenez por me ter incentivado a trabalhar na área que hoje estou me doutorando; Ana Marcia, Fernando Catalani, Marcelo Hayashi, Germano, Ary Armando, Luiz Américo (que me ajudou na edição de um gráfico para meu artigo), Renato (por todas as discussões sobre coerência, emaranhamento, etc, etc), Christian, Tersio, Jeferson, Zolacir... e a todos que não foram citados mas, com a mesma importância, compartilharam comigo os momentos em que estive nesse instituto.

Agradeço a todos meus companheiros e amigos de grupo, Dagoberto, Daniela, Rildo, Fernando Semião (pelos brilhantes seminários), Giovana, Augusto, Pablo (pelo seu maravilhoso template, que ajudou a todos no grupo e pelas discussões sobre o meio Kerr), Ricardo (pelos discussões sobre o meio Kerr), Paulo (pelos artigos sobre o meio Kerr, eliminação adiabática e pela edição de gráficos no origin ) e o Leandro (pela sua gentileza em me ajudar com os gráficos no origin), por todo o apoio e a todos momentos que compartilhamos nesse período (seminários, discussões sobre conceitos da física, política, etc, etc.)

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pelo suporte financeiro que tornou possível a realização dessa pesquisa.

# Resumo

A construção de estados puros do campo eletromagnético é importante não só para o estudo dos fundamentos da mecânica quântica, como a questão do estado *gato de Schrödinger*, mas também possui um grande potencial de aplicação, como por exemplo, na computação quântica, na criptografia quântica e nas medidas de alta precisão. Nesta tese, apresentamos três propostas onde o ponto central é o estudo da transferência progressiva de coerência dos átomos para o campo eletromagnético, visando gerar um estado com um alto grau de purificação a partir de um estado de mistura estatística. Para isso utilizamos o micromaser com a interação átomo-campo dado pelo modelo Jaynes-Cummings de dois fótons.

No primeiro trabalho consideramos os átomos inicialmente preparados em uma superposição coerente de dois estados (condição necessária para a transferência de coerência átomo-campo) e o campo na cavidade preparado em um estado misturado. Primeiramente determinamos o melhor tempo de interação de cada átomo para que o estado do campo apresentasse o maior grau de purificação possível. Fixamos esse tempo para todos os átomos e determinamos o grau de pureza do estado final do campo, após  $N$ -átomos terem passado pela cavidade.

Em nosso segundo trabalho acrescentamos à cavidade um meio não-linear tipo Kerr. Utilizando o mesmo procedimento do primeiro caso, obtivemos um menor tempo de interação átomo-campo e um grau de purificação maior para o estado do campo gerado na cavidade, em relação ao primeiro trabalho.

Por último, acrescentamos um campo clássico externo interagindo com o átomo dentro da cavidade sem o meio Kerr. Novamente, com o mesmo procedimento dos trabalhos anteriores, verificamos que esse campo, além de influenciar na transferência de coerência átomo-campo, torna desnecessária a preparação dos átomos em uma superposição coerente de dois estados.

Visando a caracterização do estado do campo final gerado, foram calculadas a função de coerência de segunda ordem e a quasiprobabilidade conhecida como a função de Husimi (ou função  $Q$ ).

# Abstract

The construction of pure states of the electromagnetic field is important not only for the study of the foundations of the quantum mechanics, such as the question of the *Schrödinger cat* states, but also for its potential applications, for example, in quantum computation, quantum cryptography and in higher precision measurements. In this thesis, we present three proposals where the central point is the study of the progressive transfer of coherence of atoms to the electromagnetic field, aiming the generation of a state with a higher degree of purity from a mixed state. For this we use the micromaser with the atom-field interaction given by the two-photon Jaynes-Cummings model.

In our first work we initially consider atoms prepared in a coherent superposition of two states (necessary condition for the atom-field transfer of coherence) and the field in the cavity prepared in a mixed state. We determine the best interaction time for each atom so that the state of the field presents the highest possible degree of purification. We fix that time for all atoms and determine the degree of purity of the final state of the field, after  $N$ -atoms have crossed the cavity.

In our second work we add to the cavity a nonlinear Kerr-like medium. Using the same procedure as in the first case, we obtain smaller atom-field interaction times as well as a higher degree of purification for the state of the field generated in the cavity, compared to the first work.

Finally, we add an external classical field interacting with the atom inside the cavity without the Kerr medium. Again, with the same procedure of the previous works, we verify that the external field, besides influencing in the atom-field transfer of coherence turns unnecessary the preparation of atoms in a coherent superposition of two states.

In order to characterize the state of the generated (final) field, we have calculated the second order correlation function as well as the quasiprobability known as the Husimi function (or  $Q$  function).

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos fundamentais</b>	<b>5</b>
2.1	Formalismo da mecânica quântica e o princípio da superposição. . . . .	5
2.1.1	O operador densidade: estados puros e mistura estatística. . . . .	8
2.2	A mecânica quântica de um oscilador harmônico. . . . .	10
2.3	Quantização do campo eletromagnético. . . . .	11
2.4	Propriedades dos estados quânticos da luz. . . . .	14
2.4.1	Função de correlação de segunda ordem. . . . .	14
2.4.2	Parâmetro Q de Mandel. . . . .	15
2.4.3	Compressão do ruído quântico. . . . .	16
2.5	Distribuição de quasiprobabilidades. . . . .	16
2.6	Alguns estados da luz. . . . .	18
2.6.1	O estado de número. . . . .	18
2.6.2	O estado coerente. . . . .	20
2.6.3	O estado térmico. . . . .	22
2.6.4	O estado comprimido coerente . . . . .	24
2.7	Modelo Jaynes-Cummings . . . . .	26
2.8	Micromaser . . . . .	30
2.9	Geração do estado coerente em um micromaser . . . . .	34
2.10	Micromaser de dois fótons . . . . .	37

<b>3</b>	<b>Transferência de coerência átomo-campo e construção de estados quânticos</b>	<b>41</b>
3.1	Transferência de coerência átomo-campo por um processo de dois fótons em um micromaser sem perdas. . . . .	41
3.1.1	Introdução. . . . .	41
3.1.2	Modelo e Solução . . . . .	42
3.1.3	Resultados . . . . .	46
3.1.4	Estudo das Propriedades Não-Clássicas. . . . .	50
3.1.5	Espaço de fase . . . . .	51
3.2	Influência de um meio tipo Kerr na transferência de coerência átomo-campo em um micromaser de dois fótons. . . . .	54
3.2.1	Introdução. . . . .	54
3.2.2	Modelo e Solução. . . . .	55
3.2.3	Resultados . . . . .	59
3.2.4	Influência da fase atômica na transferência de coerência . . . . .	64
3.2.5	Estudo das Propriedades Não-Clássicas. . . . .	65
3.2.6	Distribuição de número de fótons e Função de Quasiprobabilidade. . . . .	67
3.3	Transferência de coerência átomo-campo em um micromaser de dois fótons forçado . . . . .	69
3.3.1	Introdução . . . . .	69
3.3.2	Modelo e Solução. . . . .	70
3.3.3	Resultados . . . . .	76
3.3.4	Estudo das Propriedades Não-Clássicas. . . . .	79
3.3.5	Distribuição de número de fótons e Função de Quasiprobabilidade. . . . .	81
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>85</b>
<b>A</b>	<b>Eliminação Adiabática do nível atômico intermediário .</b>	<b>89</b>
<b>B</b>	<b>Micromaser com Átomos Interagindo na Aproximação Dispersiva</b>	<b>93</b>
<b>C</b>	<b>Hamiltoniano da interação átomo-campo mais um meio não-linear tipo Kerr.</b>	<b>95</b>

# Lista de Figuras

2.1	Função de quasiprobabilidade de Husimi (função $Q$ ) para o estado de número com $\bar{n} = 10$ . . . . .	19
2.2	Distribuição do número de fótons para o estado coerente com $ \alpha ^2 = 10$ (número médio de fótons). . . . .	21
2.3	Função de quasiprobabilidade de Husimi (função $Q$ ) para o estado coerente com $ \alpha ^2 = 10$ (número médio de fótons). . . . .	22
2.4	Distribuição do número de fótons para o estado térmico com $\bar{n} = 10$ (número médio de fótons). . . . .	23
2.5	Função de quasiprobabilidade de Husimi (função $Q$ ) para o estado térmico com $\bar{n} = 10$ (número médio de fótons). . . . .	24
2.6	Distribuição do número de fótons para o estado comprimido, com $r = 2$ e $ \alpha ^2 = 10$ . . . . .	26
2.7	Função de quasiprobabilidade de Husimi (função $Q$ ) para o estado comprimido, com $\bar{n} = 10$ (número médio de fótons) e o parâmetro de compressão $r = 2.0$ . . . . .	27
2.8	Representação esquemática dos quatros termos da interação de dipolo elétrico. A linha ondulada representa o fóton e a linha continua representa o estado atômico . . . . .	28
2.9	Representação esquemática do micromaser. . . . .	31
2.10	Representação esquemática do aparato experimental para geração do <i>gato de Schrödinger</i> . . . . .	33
2.11	Esquema experimental. Os átomos são preparados em uma superposição coerente de dois estados por um campo coerente de microondas na cavidade 1 e injetados na cavidade 2, considerada sem perdas. . . . .	35

2.12	(a) Diagrama dos níveis de energia para o rubídio $40S_{1/2} \rightarrow 39S_{1/2}$ para uma transição de dois fótons degenerada, com um comprimento de onda de $\lambda = 0.43\text{cm}$ . (b) Transferência de população $40S \rightarrow 39S$ em função da sintonia da cavidade, referente à transição de dois fótons (figura retirada de “Radiating Atoms in Confinend space: From Spontaneous Emission to Micromasers”, Phys. Rep. 221, 201 (1992). . . . .	38
3.1	Representação esquemática de um átomo de três níveis, onde $E_e < E_i < E_g$ .	43
3.2	Pureza do campo em função do tempo, sendo o estado inicial o térmico com um número médio de fótons igual a $\bar{n} = 10$ , depois de passarem (a) $N = 1$ átomo, (b) $N = 20$ átomos e (c) $N = 100$ átomos, com $a = b = 1/\sqrt{2}$ , $\Delta/\lambda = \chi/\lambda = 1$ e $\phi = 0$ . Notemos que em todos os casos $t = (N - 1)12.2/\lambda + \tau$ . A linha tracejada indica o melhor tempo de interação $T = 12.2/\lambda$ . . . . .	47
3.3	“Purificação” do <i>estado final</i> do campo em função do tempo de interação. A linha tracejada indica o melhor tempo $T = 12.2/\lambda$ . Utilizamos os mesmos parâmetros da figura 3.2, para $N = 200$ átomos. . . . .	47
3.4	Número médio de fótons do <i>estado final</i> do campo em função do tempo de interação. A linha tracejada indica o melhor tempo $T = 12.2/\lambda$ . Utilizamos os mesmos parâmetros da figura 3.2, para $N = 200$ átomos.	48
3.5	Pureza do estado do campo em função do número de átomos que cruzam a cavidade. (a) para o estado inicial o térmico, (b) para o estado inicial o estado coerente misturado. Número médio de fótons $\bar{n} = 10$ . . . . .	49
3.6	Distribuição de número de fótons do <i>estado final</i> do campo na cavidade ( $N = 200$ átomos). O estado inicial do campo é o estado térmico, com $\bar{n} = 10$ . . . . .	49
3.7	Número médio de fótons do campo em função do número de átomos que cruzam a cavidade. (a) para o estado inicial térmico, (b) para o estado inicial o estado coerente misturado. . . . .	50
3.8	Parâmetro $Q$ de Mandel do campo em função do número de átomos que cruzam a cavidade.(a) para o estado inicial térmico, (b) para o estado inicial o estado coerente misturado. . . . .	51

3.9	Curvas de nível da função $Q$ do campo na cavidade ( $N = 200$ átomos), para o estado inicial do campo o estado térmico, com $\bar{n} = 10$ . . . . .	52
3.10	Função de quasiprobabilidade de Husimi (função $Q$ ), onde $X = Re(\beta)$ e $Y = Im(\beta)$ . $N = 200$ átomos e o estado inicial do campo o estado térmico, com $\bar{n} = 10$ . . . . .	53
3.11	Pureza do campo em função do tempo, passados (a) $N = 1$ átomo, (b) $N = 50$ átomos e (c) $N = 100$ átomos, com $a = b = 1/\sqrt{2}$ , $\Delta/\lambda = \chi/\lambda = \eta/\lambda = 1.0$ ( $\Lambda/\lambda = -1$ ) e $\phi = 0$ . O estado inicial do campo na cavidade é o estado térmico, com um número médio de fótons $\bar{n} = 10$ . Em todos os casos $t = (N - 1)2.71/\lambda + \tau$ . A linha vertical tracejada indica o melhor tempo $T = 2.71/\lambda$ . . . . .	60
3.12	“Purificação” do <i>estado final</i> do campo em função do tempo de interação, para $N=150$ átomos, $\phi = 0.0$ , $a = b = 1/\sqrt{2}$ , $\chi/\lambda = \eta/\lambda = 1.0$ , $\Delta/\lambda = 1.0$ e $\bar{n} = 10$ . A linha tracejada indica o melhor tempo $T = 2.71/\lambda$ . . .	61
3.13	Número médio de fótons em função do tempo de interação , para $N=150$ átomos, $\phi = 0.0$ , $a = b = 1/\sqrt{2}$ , $\chi/\lambda = \eta/\lambda = 1.0$ , $\Delta/\lambda = 1.0$ e $\bar{n} = 10$ . A linha tracejada indica o melhor tempo $T = 2.71/\lambda$ . . . . .	61
3.14	Pureza do campo ( $\zeta$ ) em função do número de átomos que cruzam a cavidade para: (a) Com o meio tipo Kerr e $T = 2.71/\lambda$ , (b) Sem o meio tipo Kerr, com $T = 12.2/\lambda$ , caso anterior, seção 3.1. Dados da figura (3.12). . . . .	62
3.15	Número médio de fótons em função do número de átomos que cruzam a cavidade. Mesmos dados da figura (3.12). (a) Com meio tipo Kerr e $T = 2.71/\lambda$ , (b) Sem o meio tipo Kerr, com $T = 12.2/\lambda$ , caso anterior, seção (3.1). . . . .	62
3.16	Pureza do campo ( $\zeta$ ) em função do número de átomos, sem o meio tipo Kerr. Com $T = 2.71/\lambda$ , $\phi = 0.0$ , $a = b = 1/\sqrt{2}$ , $\chi/\lambda = \eta/\lambda = 1.0$ e $\Delta/\lambda = 1.0$ . . . . .	63
3.17	Número médio de fótons em função do número de átomos. Sem o meio tipo Kerr. Dados da figura (3.16). . . . .	63
3.18	“Purificação” em função da fase atômica $\phi$ . $T = 2.71/\lambda$ , $\bar{n} = 10$ , $\Delta/\lambda = 1.0$ , $a = b = 1/\sqrt{2}$ e $\chi/\lambda = \eta/\lambda = 1.0$ . (a) Com o meio Kerr, (b) sem o meio Kerr. . . . .	65

3.19	Parâmetro $Q$ de Mandel em função do número de átomos, com o meio tipo Kerr. $T = 2.71/\lambda$ , $\bar{n} = 10$ , $\Delta/\lambda = 1.0$ , $a = b = 1/\sqrt{2}$ e $\chi/\lambda = \eta/\lambda = 1.0$ . . . . .	66
3.20	Grau de coerência de segunda ordem em função do número de átomos, com o meio tipo Kerr. $T = 2.71/\lambda$ , $\bar{n} = 10$ , $\Delta/\lambda = 1.0$ , $a = b = 1/\sqrt{2}$ e $\chi/\lambda = \eta/\lambda = 1.0$ . . . . .	66
3.21	Distribuição de probabilidade do número de fótons. $T = 2.71/\lambda$ , $\bar{n} = 10$ , $\Delta/\lambda = 1.0$ , $a = b = 1/\sqrt{2}$ e $\chi/\lambda = \eta/\lambda = 1.0$ , $N = 150$ átomos. . . . .	67
3.22	Função de quasiprobabilidade de Husimi (função Q), onde $X = Re(\beta)$ e $Y = Im(\beta)$ (eq. 2.62). $T = 2.71/\lambda$ , $\bar{n} = 10$ , $\Delta/\lambda = 1.0$ , $a = b = 1/\sqrt{2}$ , $N = 150$ átomos e $\chi/\lambda = \eta/\lambda = 1.0$ . . . . .	68
3.23	Curvas de nível da função de quasiprobabilidade de Husimi (função Q) referente à figura (3.22). . . . .	68
3.24	Representação esquemática de um átomo de três níveis interagindo com um campo quantizado ( $\hat{E}_{cav}$ ) dentro de uma cavidade mais um campo externo ( $\hat{E}_{ext}$ ), com uma dessintonia $\delta$ no nível intermediário $ i\rangle$ . . . .	71
3.25	“Purificação” do <i>estado final</i> do campo em função do tempo de interação, para $N = 30$ átomos inicialmente preparados no excitados - $ e\rangle$ , $\bar{n} = 5$ , $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ e $\varepsilon = 1$ . A linha tracejada indica o melhor tempo $T = 8.9/\lambda$ . . . . .	77
3.26	Número médio de fótons em função do tempo de interação para $N = 30$ átomos inicialmente preparados no excitados - $ e\rangle$ , $\bar{n} = 5$ , $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ e $\varepsilon = 1$ . A linha tracejada indica o melhor tempo $T = 8.9/\lambda$ . . . . .	77
3.27	Parâmetro de pureza $\zeta$ do campo em função do número de átomos para: $T = 8.9/\lambda$ , $\bar{n} = 5$ , $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ , $a = 1$ , (a) $\varepsilon = 1.0$ , (b) $\varepsilon = 2.0$ e (c) $\varepsilon = 3.0$ . . . . .	78
3.28	Número médio de fótons em função do número de átomos para: $T = 8.9/\lambda$ , $\bar{n} = 5$ , $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ , $a = 1$ , (a) $\varepsilon = 1.0$ , (b) $\varepsilon = 2.0$ e (c) $\varepsilon = 3.0$ . . . . .	79
3.29	Parâmetro $Q$ de Mandel em função do número de átomos para: $T = 8.9/\lambda$ , $\bar{n} = 5$ , $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ , $a = 1$ , (a) $\varepsilon = 1.0$ , (b) $\varepsilon = 2.0$ e (c) $\varepsilon = 3.0$ . . . . .	80
3.30	Grau de coerência de segunda ordem em função do número de átomos para: $T = 8.9/\lambda$ , $\bar{n} = 5$ , $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ , $a = 1$ , (a) $\varepsilon = 1.0$ , (b) $\varepsilon = 2.0$ e (c) $\varepsilon = 3.0$ . . . . .	80

3.31	Distribuição do número de fóton. $N = 100$ átomos, $T = 8.9/\lambda$ , $\bar{n} = 5$ , $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ , $a = 1$ para $\varepsilon = 1.0$ . . . . .	81
3.32	Distribuição de quasiprobabilidade (função Q), onde $X = Re(\beta)$ e $Y = Im(\beta)$ . $N = 100$ átomos, $T = 8.9/\lambda$ , $\bar{n} = 5$ , $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ , $a = 1$ para $\varepsilon = 1.0$ . . . . .	82
3.33	Curvas de nível da função de quasiprobabilidade de Husimi (função Q) referente à figura (3.34). $N = 100$ átomos, $T = 8.9/\lambda$ , $\bar{n} = 5$ , $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ , $a = 1$ para $\varepsilon = 1.0$ . . . . .	82
3.34	Distribuição de quasiprobabilidade (função Q), onde $X = Re(\beta)$ e $Y = Im(\beta)$ . $N = 100$ átomos, $T = 8.9/\lambda$ , $\bar{n} = 5$ , $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ , $a = 1$ para $\varepsilon = -1.0$ . . . . .	83
3.35	Curvas de nível da função de quasiprobabilidade de Husimi (função Q) referente à figura (3.34). $N = 100$ átomos, $T = 8.9/\lambda$ , $\bar{n} = 5$ , $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ , $a = 1$ para $\varepsilon = -1.0$ . . . . .	83
A.1	Representação esquemática de um átomo de três níveis. . . . .	90

# Capítulo 1

## Introdução

A radiação emitida por átomos excitados tem desempenhado um papel fundamental no estudo da interação matéria-campo, onde, fenômenos tais como a luz laser e a emissão espontânea são importantes exemplos dessa emissão de radiação. A emissão espontânea resulta da interação do átomo com as flutuações do vácuo eletromagnético em sua vizinhança. Esse tipo de emissão é irreversível quando o átomo excitado se encontra no espaço livre, isto é, uma vez emitido um quanta de energia o átomo não volta mais ao seu estado anterior, absorvendo esse quanta. Tal fenômeno é explicado na eletrodinâmica quântica (QED) [1] como sendo o resultado do acoplamento a um número infinito de graus de liberdade dos modos do campo eletromagnético no espaço livre. De acordo com a QED, modificando os graus de liberdade do campo eletromagnético, confinado-o em uma cavidade, pode-se tornar a emissão espontânea reversível.

Com o desenvolvimento do maser e do laser em laboratório foi retomado o interesse pela interação da matéria com a radiação confinada em um ressonador. Em 1963 Jaynes e Cummings [2] descrevem tal interação, considerando um único átomo de dois níveis e um campo em uma cavidade com um único grau de liberdade. Esse modelo permite interessantes resultados tanto para o átomo como para o campo na cavidade, tais como o controle de emissão espontânea de fótons e a geração de estados quânticos do campo.

Novos métodos de física atômica, em particular a espectroscopia laser de alta resolução, permite uma grande investigação experimental na preparação de estados atômicos excitados, com um número quântico principal  $n$  grande, chamados de *átomos de Rydberg* [3]. Tais átomos apresentam características importantes para o estudo da interação com a radiação, como:

(i) São mais fortemente acoplados à radiação que os átomos com um  $n$  menor. O elemento de matriz do dipolo elétrico entre níveis vizinhos são, para um número quântico principal  $n$  em torno de 30, aproximadamente três ordens de grandeza maior que o estado fundamental, ou estado excitado mais baixo. Isto permite um acoplamento muito forte de um único átomo a um modo do campo em uma cavidade.

(ii) São ressonantes na faixa de transição de comprimento de onda na dimensão de milímetro, o que corresponde razoavelmente às dimensões de uma cavidade com um campo eletromagnético para baixas frequências (em relação ao domínio ótico), o que assegura também um tempo de interação longo (no domínio de  $\mu s$ ), para todos os átomos que passam pela cavidade com uma velocidade térmica.

(iii) O tempo de emissão espontânea é relativamente longo, o que permite desprezar seu acoplamento com os outros modos do campo, durante a interação com o único modo selecionado da cavidade.

Um dispositivo importante para o estudo da interação átomo-campo e usado nesta tese é o *micromaser* [4, 5, 6]. Este consiste na transmissão individual de átomos para uma cavidade previamente preparada. Com esse, é possível realizar modelos teóricos importantes da interação átomo-campo, como o *modelo Jaynes-Cummings*. Com a evolução de muitos métodos para se preparar e investigar os átomos de Rydberg foi possível desenvolver o micromaser. Outro fator importante para tal desenvolvimento foi a construção de cavidades supercondutoras com um alto fator de qualidade  $\mathcal{Q}$  ( $= \omega/\Delta\omega$ ). Desse modo, o micromaser opera em baixas temperaturas também para reduzir a presença da radiação de corpo negro.

A geração de estados puros do campo eletromagnético em um micromaser tem se mostrado nos últimos anos um tópico muito importante para óptica quântica. Estados não-clássicos como o estado comprimido [7] e o *gato de Schrödinger* [8] tem sido gerados e vários esquemas, chamados de engenharia de estados, tem sido propostos para geração de estados quânticos arbitrários.

Nesta tese, apresentamos três propostas diferentes para a maximização da transferência de coerência de átomos para o estado do campo eletromagnético, confinado em uma cavidade. O modelo usado em toda a tese para a interação átomo-campo foi o *modelo Jaynes-Cummings* - MJC [2]. Tal modelo tem possibilitado grandes contribuições para o avanço do entendimento da interação da luz com a matéria. Todos os processos são baseados no micromaser, ou seja, vários átomos preparados inicialmente

em uma superposição coerente de dois estados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ , interagem individualmente com o campo na cavidade, preparado inicialmente em um estado do tipo térmico (*mistura estatística*). Consideraremos que os átomos interagem individualmente com o campo via um processo de dois fótons, isto é, cada átomo emite ou absorve dois fótons de cada vez na cavidade, o que permite, como veremos, uma transferência de coerência átomo-campo mais eficiente. Além disso, investigamos quais os estados gerados nos três modelos (abaixo mencionados), assim como suas propriedades não-clássicas.

Esta tese está organizada da seguinte forma: No segundo capítulo apresentamos um resumo dos conceitos fundamentais da mecânica quântica [9] e de alguns estados quânticos [10, 11] usados em todo o nosso trabalho, além de propriedades não-clássicas importantes na área de óptica quântica [12]. Apresentamos um resumo das funções de quasiprobabilidade [13, 14], muito usados para a classificação dos estados gerados em uma cavidade. Descrevemos também rapidamente o *Modelo Jaynes-Cummings*, os aspectos mais importantes para o funcionamento de um *Micromaser*, de um *Micromaser de dois fótons* e alguns exemplos importantes para a óptica quântica de geração de estados, utilizando tais dispositivos. No terceiro capítulo apresentamos três propostas de maximização de transferência de coerência átomo-campo. Na primeira proposta utilizamos o *modelo Jaynes-Cummings* para uma interação de dois fótons, determinamos o melhor tempo de interação dos átomos com o campo na cavidade, de tal modo a obtermos uma transferência ótima de coerência. Em seguida procuramos classificar o estado do campo gerado na cavidade usando a distribuição do número de fótons e a função de quasiprobabilidade de Husimi (função Q), além de estudar as propriedades não-clássicas desse estado. Na segunda proposta utilizamos o modelo anterior acrescentando à cavidade um meio não-linear tipo Kerr [15]. Determinamos o melhor tempo de interação e investigamos a transferência de coerência, a geração de estados quânticos e as propriedades não-clássicas do estado do campo gerado. Na terceira proposta, adicionamos à interação um campo clássico externo [16] interagindo com os átomos dentro da cavidade e novamente, determinamos o melhor tempo de interação e investigamos a transferência de coerência átomo-campo, as propriedades não-clássicas do campo e a geração de estados. No quarto capítulo apresentamos as conclusões do trabalho.



# Capítulo 2

## Conceitos fundamentais

Neste capítulo apresentamos os conceitos básicos utilizados em toda a tese. Iniciamos com um resumo do formalismo da mecânica quântica utilizado no nosso trabalho e passamos à quantização do campo eletromagnético. Apresentamos as propriedades de alguns estados quânticos da luz e suas funções de quasiprobabilidade. Fazemos uma rápida descrição do Modelo Jaynes-Cummings (MJC), do micromaser de um e dois fótons e apresentamos alguns exemplos importantes para nosso trabalho sobre geração de estados quânticos. Tanto o MJC como o micromaser foram extensamente usados em toda a tese.

### 2.1 Formalismo da mecânica quântica e o princípio da superposição.

Na teoria da mecânica quântica o estado dos sistemas físicos são representados por vetores (subespaço do espaço de Hilbert [9]) denominados de vetor ket ( $|\Psi\rangle$ ), os elementos correspondentes ao espaço dual de vetor bra ( $\langle\Psi|$ ), e as variáveis físicas (observáveis) por operadores lineares hermitianos [26]. Esses vetores ket (e bra) são também representados por matrizes coluna (e linha) e os operadores por matrizes quadradas. A aplicação desses operadores nos estados vetores resultam em outros vetores,

$$\hat{A}|\Psi\rangle = |\Phi\rangle. \quad (2.1)$$

Um caso particular útil para nós é quando o operador muda somente o comprimento do vetor, isto é:

$$\hat{A}|A_i\rangle = A_i|A_i\rangle, \quad (2.2)$$

neste caso  $A_i$  são números complexos chamados de autovalores do operador  $\hat{A}$  e os vetores  $|A_i\rangle$  são denominados autovetores. A série de autovalores constituem o espectro do operador  $\hat{A}$  e representam os possíveis valores que podem ser obtidos pela atuação do operador em seus autovetores.

Como temos um espaço vetorial as noções de produto e de base são muito úteis. O produto escalar de dois kets  $|\Psi\rangle$  e  $|\Phi\rangle$ , por exemplo, é definido como:

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = C, \quad (2.3)$$

onde  $C$  é um número complexo. Já um espaço vetorial é definido como uma base quando satisfaz as relações de ortonormalização e de completeza:

$$\langle A_i|A_j\rangle = \delta_{ij}, \quad \sum |A_i\rangle\langle A_i| = \mathbf{1}, \quad (2.4)$$

sendo  $\mathbf{1}$  o operador identidade. A partir desses conceitos qualquer ket  $|\Psi\rangle$  em um subespaço particular pode ser expandido em termos dos vetores  $|A_i\rangle$  como:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0} c_i |A_i\rangle, \quad (2.5)$$

onde os  $|c_i|^2$  representam a probabilidade de encontrarmos os autovalores  $A_i$  após uma medida, representada pela aplicação do operador  $\hat{A}$  em seus autovetores  $|A_i\rangle$ . Devido a este caráter probabilístico das previsões da mecânica quântica as quantidades físicas são determinadas, em média, calculando-se os valores esperados, definidos por:

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle = A_i, \quad (2.6)$$

sendo os estados  $|\Psi_i\rangle$  conhecidos e normalizados. Além disso, temos como consequência uma flutuação inerente a uma medida, dada por:

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle = \langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2. \quad (2.7)$$

Uma característica importante da mecânica quântica está no fato da impossibilidade de medirmos certas grandezas físicas ao mesmo tempo, representado pela relação de comutação,

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}. \quad (2.8)$$

Como uma consequência dessa relação (2.8) temos que o produto das flutuações entre os operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  tem um limite inferior, isto é,

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{1}{2}|\hat{C}|^2. \quad (2.9)$$

Este é conhecido como o princípio da incerteza de Heisenberg.

Analogamente à mecânica clássica, a dinâmica de um sistema físico na mecânica quântica é determinada conhecendo-se o Hamiltoniano (quântico) do sistema. Assim, pela equação determinística de Schrödinger conhecemos a evolução temporal do vetor de estado:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle. \quad (2.10)$$

Sendo o Hamiltoniano independente do tempo podemos integrar essa equação e obter:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\Psi(0)\rangle, \quad (2.11)$$

onde  $\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar)$  é denominado de operador evolução temporal.

Esta evolução do sistema físico, dada pela evolução do vetor de estado, é denominada representação de Schrödinger. Outra representação equivalente muito útil e usada nessa tese é a representação de interação. Essa é especialmente útil quando o Hamiltoniano pode ser escrito como uma soma de dois termos, da forma:

$$\hat{H}^s = \hat{H}_0^s + \hat{H}_1^s, \quad (2.12)$$

onde  $s$  indica a representação de Schrödinger. O vetor de estado na representação de interação é definido pela transformação unitária  $\hat{U}_0(t, t_0)$  do vetor de estado na representação de Schrödinger, por meio de:

$$|\Psi_I(t)\rangle = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) |\Psi_s\rangle, \quad (2.13)$$

onde  $\hat{U}_0(t, t_0)$  satisfaz a equação

$$i\hbar \frac{d\hat{U}_0}{dt} = \hat{H}_0^s \hat{U}_0, \quad (2.14)$$

com  $\hat{U}_0^\dagger(t, t_0) = \hat{U}_0^{-1}(t, t_0)$  e  $\hat{U}_0(t_0, t_0) = 1$ .

Os operadores transformam-se da representação de Schrödinger para a de interação de acordo com:

$$\hat{A}_I(t) = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{A}_s \hat{U}_0(t, t_0). \quad (2.15)$$

A equação de movimento do operador  $\hat{A}_I(t)$  é dada por:

$$i\hbar \frac{d\hat{A}_I}{dt} = [\hat{A}_I, \hat{H}_0^I] + i\hbar \frac{\partial \hat{A}_I}{\partial t}, \quad (2.16)$$

onde  $\hat{H}_0^I = \hat{U}_0^\dagger \hat{H}_0 \hat{U}_0$  e

$$\frac{\partial \hat{A}_I}{\partial t} = \hat{U}_0^\dagger \frac{\partial \hat{A}_s}{\partial t} \hat{U}_0. \quad (2.17)$$

Pode-se demonstrar que o vetor de estado satisfaz a equação

$$i\hbar \frac{d|\Psi_I(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_1^I |\Psi_I(t)\rangle, \quad (2.18)$$

onde  $\hat{H}_1^I = \hat{U}_0^\dagger \hat{H}_1^s \hat{U}_0$ .

### 2.1.1 O operador densidade: estados puros e mistura estatística.

O operador densidade  $\hat{\rho}$  foi introduzido na teoria quântica por von Neumann [27], como sendo um modo alternativo e mais geral para se representar um estado quântico. Suponhamos que nosso conhecimento sobre o estado do sistema seja limitado, isto é, existe uma probabilidade  $p_i$  ( $\sum_i p_i = 1$  e  $1 \geq p_i \geq 0$ ) do sistema estar no estado  $|\Psi_i\rangle$ . Neste caso podemos calcular o valor esperado do operador  $\hat{A}$  utilizando o conceito de traço de uma matriz, que é a soma dos elementos da diagonal, isto é:

$$\langle \hat{A} \rangle = Tr[\sum_i p_i \hat{A} |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|]. \quad (2.19)$$

Definimos então o operador densidade  $\hat{\rho}$  do estado  $|\Psi_i\rangle$  de um sistema como sendo:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|, \quad (2.20)$$

tal que:

$$\langle \hat{A} \rangle = Tr[\hat{\rho} \hat{A}]. \quad (2.21)$$

Suas propriedades são bem definidas, tais como  $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$  e  $Tr[\hat{\rho}] = 1$  [9]. Se  $p_i = \delta_{ij}$ , isto é, o sistema está precisamente no estado quântico  $|\Psi_i\rangle$ , então  $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ , e  $Tr[\hat{\rho}^2] = 1$ . Neste caso, dizemos que o estado que representa o sistema dado pelo operador  $\hat{\rho}$  se encontra em um *estado puro*. Por outro lado se não conhecemos o estado do sistema precisamente, isto é, existem outros  $p_i$  diferentes de zero, nós teremos  $Tr[\hat{\rho}^2] \leq 1$ , e o estado do sistema é dito de *mistura*, ou estado quântico de *mistura estatística*.

Das relações acima podemos medir o grau de pureza de um estado quântico usando  $Tr[\hat{\rho}^2]$ . Definimos o parâmetro  $\zeta = 1 - Tr[\hat{\rho}^2]$  relativo a um estado quântico.

Se  $\zeta = 0$  teremos um *estado puro*.

Se  $\zeta \geq 0$  o sistema está em um *estado de mistura* (total ou parcial).

Uma característica importante apresentada pela mecânica quântica é a representação de um sistema através de uma superposição linear de estados. Devido a linearidade da equação de Schrödinger, se  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  são soluções dessa equação, temos que:

$$|\Psi\rangle = a_1|\psi_1\rangle + a_2|\psi_2\rangle, \quad (2.22)$$

também é uma solução ( $a_1$  e  $a_2$  são números complexos, tal que  $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$ ) [9]. Neste caso o operador densidade do sistema é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_p = & |a_1|^2|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |a_2|^2|\psi_2\rangle\langle\psi_2| \\ & + a_1a_2^*|\psi_1\rangle\langle\psi_2| + a_1^*a_2|\psi_2\rangle\langle\psi_1|. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dizemos que o sistema se apresenta em uma superposição coerente de dois estados,  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  (temos um estado puro). Vejamos agora como fica uma superposição incoerente desses dois estados (mistura estatística):

$$\hat{\rho}_m = p_1|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + p_2|\psi_2\rangle\langle\psi_2|. \quad (2.24)$$

Onde  $p_1$  e  $p_2$  são as probabilidades de encontrarmos, antes de uma medida, o sistema no estado  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$ , respectivamente. Como podemos ver, a diferença entre um *estado puro* e um *estado de mistura* é clara, pois neste último não aparecem os termos cruzados, que expressam o efeito de interferência entre os estados  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$ . Os coeficientes  $a_1a_2^*$  e  $a_1^*a_2$  são chamados de *coerências*. Fisicamente isto significa que se um sistema é descrito pelo operador densidade  $\rho_p$  (*estado puro*), não podemos afirmar, antes de efetuada uma medida, que este se encontrava no estado  $|\psi_1\rangle$  ou no estado  $|\psi_2\rangle$ , como é o caso de um estado de *mistura estatística*.

## 2.2 A mecânica quântica de um oscilador harmônico.

O oscilador harmônico desempenha um papel muito importante na física por apresentar uma solução exata tanto na mecânica clássica como na mecânica quântica, e também por descrever sistemas físicos de interesse, como por exemplo, o campo eletromagnético quantizado. A quantização do oscilador harmônico é feita pela conversão das grandezas clássicas, posição  $q$  e o momento linear  $p$ , nos respectivos operadores quântico de posição  $\hat{q}$  e momento linear  $\hat{p}$  [9]. Como exemplo, o oscilador harmônico unidimensional quântico de massa unitária é um caso simples descrito pelo Hamiltoniano ( $m = 1$ ):

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}_x^2 + \omega^2 \hat{x}^2), \quad (2.25)$$

sendo  $\omega$  a frequência angular do oscilador. Os operadores de posição  $\hat{x}$  e de momento linear  $\hat{p}_x$  obedecem a relação usual de comutação:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar. \quad (2.26)$$

Esses operadores são convenientemente substituídos por novos operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  tal que,

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{x} + i\hat{p}); \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{x} - i\hat{p}). \quad (2.27)$$

Para esses novos operadores a relação de comutação (2.26) é dada por:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (2.28)$$

Podemos assim escrever o Hamiltoniano (eq. 2.25) para o oscilador unidimensional em termos dos novos operadores:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.29)$$

A combinação  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$  ocorre frequentemente e é chamada de operador de número do oscilador, que denotamos por  $\hat{n}$ .

Consideramos o ket  $|n\rangle$  como autoestado da energia do oscilador harmônico com autovalores  $E_n$  ( $n$  sendo um número inteiro positivo), isto é:

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (2.30)$$

Multiplicando agora ambos os lados por  $\hat{a}^\dagger$ , encontramos  $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ , autoestado de  $\hat{H}$ , com autoenergias  $E_{n+1} = E_n + \hbar\omega$ . De maneira análoga podemos encontrar os autoestados  $\hat{a}|n\rangle$  do Hamiltoniano, com suas autoenergias  $E_{n-1} = E_n - \hbar\omega$ . Por isso esses operadores são denominados de criação e aniquilação de um quanta de energia, respectivamente. Desse modo então podemos definir as operações [9]:

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle; \quad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (2.31)$$

## 2.3 Quantização do campo eletromagnético.

A teoria quântica da radiação tem uma analogia com a teoria clássica. Os campos vetoriais  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  na teoria quântica são tomados como operadores em vez das quantidades algébricas da teoria clássica, porém ambas teorias são baseadas nas equações de Maxwell. A transição para a mecânica quântica pode ser alcançada mais facilmente se as equações da teoria eletromagnética são colocadas em uma forma conveniente, isto é, a quantização pode ser efetuada mostrando que as variáveis clássicas  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  podem ser expressos em termos de modos normais que satisfazem uma equação do tipo oscilador harmônico, e estão relacionadas com as variáveis posição ( $q$ ) e momento linear ( $p$ ), as quais são substituídas pelos seus respectivos operadores ( $\hat{q}$ ) e ( $\hat{p}$ ).

As equações de Maxwell para os campos eletromagnéticos em um meio não magnético são dadas por: [28],

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \sigma \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.33)$$

onde  $\sigma$  e  $\vec{J}$  são: a densidade de carga elétrica e a densidade de corrente elétrica, respectivamente,  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$ , são, respectivamente, a permitividade elétrica do vácuo e a permeabilidade magnética do vácuo. Podemos escrever as equações de Maxwell em termos do potencial vetor  $\vec{A}$  e do potencial escalar  $\phi$ , utilizando as relações

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}; \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}. \quad (2.34)$$

Considerando o calibre de Coulomb ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ), podemos escrever:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{\nabla} \phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{J} \quad (2.35)$$

$$-\nabla^2 \phi = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (2.36)$$

onde  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  (velocidade da luz). A solução da equação (2.35) é complexa devido ao acoplamento com potencial  $\phi$  (eq. 2.36), porém este pode ser removido com a ajuda do teorema de Helmholtz, que permite escrever qualquer campo vetorial como uma soma de duas componentes, uma das quais o divergente é zero e a outra o rotacional é zero. Assim podemos escrever a densidade de corrente como:  $\vec{J} = \vec{J}_T + \vec{J}_L$ , onde  $\nabla \cdot \vec{J}_T = 0$  e  $\nabla \times \vec{J}_L = 0$ . As componentes  $\vec{J}_T$  e  $\vec{J}_L$  são denominadas de componentes transversal e longitudinal, respectivamente. Pode ser demonstrado também que  $\vec{J}_L = \epsilon_0 \nabla \partial \phi / \partial t$ . Portanto a equação (2.35) torna-se:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu_0 \vec{J}_T = 0. \quad (2.37)$$

A solução da equação (2.37) para uma região do espaço de dimensões  $L$ , similar a uma cavidade cúbica de volume  $V = L^3$ , no vácuo ( $\sigma = 0$  e  $\vec{J}_T = 0$ ), pode ser escrita em termos de uma expansão de Fourier [10],

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k}} [\vec{A}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \vec{A}_{\vec{k}}^*(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}], \quad (2.38)$$

onde as componentes do vetor de onda  $\vec{k}$  assumem os valores discretos dados por:

$$k_x = \frac{2\pi\nu_x}{L}, k_y = \frac{2\pi\nu_y}{L}, k_z = \frac{2\pi\nu_z}{L} \quad (2.39)$$

$$\nu_x, \nu_y, \nu_z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.40)$$

As diferentes componentes de Fourier de  $\vec{A}$  são independentes e satisfazem a equação:

$$\frac{\partial^2 \vec{A}_{\vec{k}}(t)}{\partial t^2} + \omega_{\vec{k}}^2 \vec{A}_{\vec{k}}(t) = 0, \quad (2.41)$$

onde  $\omega_{\vec{k}} = ck$ . O campo eletromagnético pode ser quantizado pela conversão da equação (2.41) em uma equação de um oscilador harmônico quântico. Para isso é útil expressar

o potencial vetor  $\vec{A}_{\vec{k}}$  em termos da posição ( $q$ ) e do momento linear ( $p$ ), associados com o modo na cavidade ( $k$ ). O modo usual para isso se dá primeiramente calculando a energia média clássica do modo normal da cavidade, especificada pelo vetor de onda  $\vec{k}$ , dada por:

$$\bar{\varepsilon}_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \int_{cavidade} (\epsilon_0 \vec{E}_{\vec{k}}^2 + \mu_0^{-1} \vec{B}_{\vec{k}}^2) dV, \quad (2.42)$$

onde a barra denota uma média ciclica.  $\vec{E}_{\vec{k}}$  e  $\vec{B}_{\vec{k}}$  são os vetores dos campos elétricos e magnéticos, respectivamente, associados com o modo  $\vec{k}$ . Das equações (2.34) e da solução da equação (2.41) dada por:

$$\vec{A}_{\vec{k}}(t) = \vec{A}_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t}, \quad (2.43)$$

mais a solução (2.38), podemos escrever os vetores campo elétrico e magnético como:

$$\vec{E}_{\vec{k}} = i\omega_{\vec{k}} (\vec{A}_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \vec{A}_{\vec{k}}^* e^{i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k} \cdot \vec{r}}) \quad (2.44)$$

$$\vec{B}_{\vec{k}} = i\vec{k} \times (\vec{A}_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \vec{A}_{\vec{k}}^* e^{i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k} \cdot \vec{r}}). \quad (2.45)$$

Substituindo os respectivos vetores  $\vec{E}_{\vec{k}}$  e  $\vec{B}_{\vec{k}}$  na equação (2.42) obtemos a energia média dada por:

$$\bar{\varepsilon}_{\vec{k}} = 2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}^2 \vec{A}_{\vec{k}} \cdot \vec{A}_{\vec{k}}^*. \quad (2.46)$$

Agora o potencial vetor  $\vec{A}_{\vec{k}}$  e  $\vec{A}_{\vec{k}}^*$  pode ser escrito convenientemente em função das coordenadas generalizadas de posição  $Q_{\vec{k}}$  e momento linear generalizado  $P_{\vec{k}}$ , como:

$$\begin{aligned} \vec{A}_{\vec{k}} &= (4\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}^2)^{-1/2} (\omega_{\vec{k}} Q_{\vec{k}} + iP_{\vec{k}}) \vec{\epsilon}_{\vec{k}} \\ \vec{A}_{\vec{k}}^* &= (4\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}^2)^{-1/2} (\omega_{\vec{k}} Q_{\vec{k}} - iP_{\vec{k}}) \vec{\epsilon}_{\vec{k}}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

de forma a obtermos a energia média de um oscilador harmônico clássico:

$$\bar{\varepsilon}_{\vec{k}} = \frac{1}{2} (P_{\vec{k}}^2 + \omega_{\vec{k}}^2 Q_{\vec{k}}^2). \quad (2.48)$$

Podemos agora, a partir das transformações (2.47), encontrar os respectivos operadores para o campo elétrico  $\hat{E}_{\vec{k}}$  e para o campo magnético  $\hat{B}_{\vec{k}}$ , substituindo as quantidades clássicas  $Q_{\vec{k}}$  e  $P_{\vec{k}}$  pelos respectivos operadores  $\hat{q}_{\vec{k}}$  e  $\hat{p}_{\vec{k}}$ , tal que:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\vec{k}} &= (4\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}^2)^{-1/2} (\omega_{\vec{k}} \hat{q}_{\vec{k}} + i\hat{p}_{\vec{k}}) \vec{\epsilon}_{\vec{k}} = (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}})^{1/2} \hat{a}_{\vec{k}} \vec{\epsilon}_{\vec{k}} \\ \hat{A}_{\vec{k}}^* &= (4\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}^2)^{-1/2} (\omega_{\vec{k}} \hat{q}_{\vec{k}} - i\hat{p}_{\vec{k}}) \vec{\epsilon}_{\vec{k}} = (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}})^{1/2} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \vec{\epsilon}_{\vec{k}}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Os operadores  $\hat{a}_{\vec{k}}$  e  $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$  são os operadores de aniquilação e de criação de um quanta de energia (eq. 2.27) no modo  $\vec{k}$ , respectivamente, com  $[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$ . Podemos assim escrever o operador potencial vetor  $\vec{A}$  como:

$$\hat{A} = \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}}} \vec{\epsilon}_{\vec{k}} [\hat{a}_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k} \cdot \vec{r}}]. \quad (2.50)$$

A partir das equações (2.50, 2.44 2.45), determinamos os operadores do campo elétrico e do campo magnético no modo  $\vec{k}$  dados por:

$$\hat{E}_{\vec{k}} = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V}} \vec{\epsilon}_{\vec{k}} [\hat{a}_{\vec{k}} e^{-i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k} \cdot \vec{r})} - \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k} \cdot \vec{r})}] \quad (2.51)$$

$$\hat{B}_{\vec{k}} = i \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}}} \vec{k} \times \vec{\epsilon}_{\vec{k}} [\hat{a}_{\vec{k}} e^{-i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k} \cdot \vec{r})} - \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k} \cdot \vec{r})}], \quad (2.52)$$

onde  $h = \hbar 2\pi$  é a constante de Planck.

## 2.4 Propriedades dos estados quânticos da luz.

Apresentamos as propriedades de correlação de segunda ordem, compressão e o parâmetro  $Q$  de Mandel. Estas desempenham um papel muito importante no estudo de fenômenos quânticos associados à luz e são objetos de estudo em toda a ótica quântica [10, 12, 29].

### 2.4.1 Função de correlação de segunda ordem.

Esta função é de grande interesse em ótica quântica, porque permite diferenciar experimentalmente os efeitos clássicos dos quânticos. Ela é definida em termos da correlação de intensidades da luz em dois pontos do espaço-tempo,  $x_1 = (z_1, t_1)$  e  $x_2 = (z_2, t_2)$ . Essas intensidades são medidas por fotodetectores, assim tal correlação é proporcional à taxa de transição para a absorção de fótons nesses dois pontos. O grau de coerência de segunda ordem em mecânica quântica é definido como [10]:

$$g^{(2)}(x_1, x_2; x_1, x_2) = \frac{\langle \hat{E}^-(x_1) \hat{E}^-(x_2) \hat{E}^+(x_2) \hat{E}^+(x_1) \rangle}{\langle \hat{E}^-(x_1) \hat{E}^+(x_1) \rangle \langle \hat{E}^-(x_2) \hat{E}^+(x_2) \rangle}, \quad (2.53)$$

onde  $\hat{E}^-$  e  $\hat{E}^+$  são proporcionais a  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{a}$ , e representam os operadores de criação e aniquilação de fótons em função da posição e do tempo, respectivamente. Os limites para  $g^{(2)}(\tau)$  ( $\tau = t_2 - z_2/c - t_1 + z_1/c$  é o intervalo de tempo entre duas detecções) são:

$$1 > g^{(2)}(\tau) \geq 0. \quad (2.54)$$

Considerando um caso simplificado, de correlação no mesmo ponto do espaço-tempo ( $x_1 = x_2$ ), isto é,  $\tau = 0$ , podemos escrever:

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2}. \quad (2.55)$$

Usando as equações (2.28) e (2.6) obtemos:

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2}. \quad (2.56)$$

Esta função nos informa que a probabilidade de detetar um segundo fóton logo após a detecção do primeiro é menor ou maior em relação à luz do coerente ( $g^{(2)}(0) = 1$ ). Esses efeitos são denominados de anti-agrupamento e agrupamento, respectivamente. O resultado de anti-agrupamento, que caracteriza efeitos quânticos, foi previsto teoricamente em 1976 por Carmichael e Walls [24], e medido primeiramente por Kimble, Dagenais e Mandel em 1977 [30], usando a fluorescência da luz emitida por átomos de sódio excitados por um feixe de laser.

### 2.4.2 Parâmetro Q de Mandel.

Podemos também classificar os estados da luz de acordo com a flutuação no número de fótons, através do parâmetro  $Q$  de Mandel [12, 31] definido como:

$$Q = \langle \hat{n} \rangle [g^{(2)}(0) - 1] = \frac{(\Delta \hat{n})^2 - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle}. \quad (2.57)$$

Se  $Q > 0$  a distribuição estatística do número de fótons é dita super-Poissoniana e a flutuação em seu número de fótons será maior que seu número médio,  $(\Delta \hat{n})^2 > \langle \hat{n} \rangle$ . Se  $Q < 0$  teremos uma distribuição sub-Poissoniana [32] e  $(\Delta \hat{n})^2 < \langle \hat{n} \rangle$ . Este caso representa uma assinatura de um comportamento não-clássico. Agora se  $Q = 0$  a distribuição estatística é dita Poissoniana. Esta classificação tem como padrão a distribuição estatística do número de fótons do estado coerente, por isso leva esse nome.

### 2.4.3 Compressão do ruído quântico.

O princípio da incerteza de Heisenberg nos dá um limite inferior para o produto das flutuações associados a dois operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  (2.9). Dizemos que o estado do sistema apresenta compressão se a flutuação em um dos observáveis, por exemplo  $\hat{A}$ , satisfaz a relação

$$(\Delta\hat{A})^2 < \frac{1}{2}|\langle\hat{C}\rangle|. \quad (2.58)$$

É importante frisar que o princípio da incerteza não é violado, pois ao se reduzir a flutuação de um dos operadores tem-se um aumento no outro. Em nosso caso estendemos esse conceito ao campo eletromagnético quantizado, para um único modo polarizado linearmente, introduzindo os operadores Hermitianos de amplitude

$$\hat{X} = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}); \quad \hat{Y} = \frac{i}{2}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (2.59)$$

Desse modo podemos escrever:

$$\hat{E}(t) = 2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}(\hat{X} \sin \omega t - \hat{Y} \cos \omega t) \sin kz, \quad (2.60)$$

onde  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$  são vistos como amplitudes das duas quadraturas do campo [11]. A compressão se dá quando  $(\Delta\hat{X})^2 < 1/4$  ou  $(\Delta\hat{Y})^2 < 1/4$ , limite este imposto pelos valores da flutuação dos estados coerente e vácuo ( $(\Delta\hat{X})^2 = (\Delta\hat{Y})^2 = 1/4$ ). Podemos determinar também a compressão pelo índice de compressão de segunda ordem [33] definido por:

$$S_x = \frac{[\langle(\Delta\hat{X})^{(2)}\rangle - \frac{1}{4}]}{4}. \quad (2.61)$$

Se  $S_x < 0$  (ou  $S_y < 0$ ) teremos compressão na quadratura  $\hat{X}$  (ou  $\hat{Y}$ ).

Este efeito não-clássico foi previsto teoricamente por vários autores [34, 35] desde 1970 e observado experimentalmente em 1985 por Slusher e colaboradores [7], nos laboratórios da Bell.

## 2.5 Distribuição de quasiprobabilidades.

Um modo conveniente de se representar os estados do campo é através das distribuições de quasiprobabilidades, assim chamadas por serem análogas às distribuições de probabilidade conjuntas (no espaço de fase), porém podendo tomar valores negativos.

Essas representações são muito usadas para o estudo de uma variedade de aspectos dentro da ótica quântica, como por exemplo, para se obter importantes informações qualitativas sobre os estados do campo quantizados.

Essas distribuições podem ser definidas como a transformada de Fourier da função característica quântica  $C(\xi, s)$  [13], parametrizadas por  $s$ , como:

$$P_q(\beta, s) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\xi C(\xi, s) \exp(\beta\xi^* - \beta^*\xi), \quad (2.62)$$

onde  $\beta = x + iy$ ,  $x$  e  $y$  são variáveis re-escaloadas da posição  $q$  e momento linear  $p$ , relacionadas aos operadores de quadratura discutidos na seção anterior,  $\langle \hat{X} \rangle = x$  e  $\langle \hat{Y} \rangle = y$ .  $C(\xi, s)$  é definida em analogia com a definição da teoria de probabilidade, porém levando em consideração as regras de comutação (formula de Baker-Hausdorff:  $\exp(\hat{A} + \hat{B}) = \exp(-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]) \exp(\hat{A}) \exp(\hat{B})$ ), podemos escrever [36]:

$$C(\xi, s) = Tr[\hat{\rho} \exp(\xi\hat{a}^\dagger - \xi^*\hat{a} + s|\xi|^2/2)]. \quad (2.63)$$

Aqui  $\hat{\rho}$  é o operador densidade e o parâmetro  $s \in [-1, 1]$  indica o ordenamento dos operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  na exponencial, o que nos permite observar que teremos um número infinito de funções características (uma para cada  $s$ ). Os ordenamentos mais utilizados em optica quântica são: ordenamento normal,  $s = 1$ , (produto dos operadores de criação e aniquilação), ordenamento anti-normal,  $s = -1$ , (produto dos operadores de aniquilação e criação) e um ordenamento simétrico,  $s = 0$ , ( a média de todas as permutações entre os operadores de aniquilação e criação). Isto é, por exemplo:

$$\begin{aligned} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 & \text{ ordenamento normal} & (2.64) \\ \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger & \text{ ordenamento anti-normal} \\ \frac{1}{3!} (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger) & \text{ ordenamento simétrico.} \end{aligned}$$

Para cada um desses ordenamentos teremos uma função de quasiprobabilidade diferente, isto é, se o ordenamento for anti-normal temos a função de Husimi (função  $Q$ ) [13] dada por:

$$Q(\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\xi Tr[\hat{\rho} \exp(\xi\hat{a}) \exp(-\xi^*\hat{a}^\dagger)] \exp(\beta\xi^* - \beta^*\xi), \quad (2.65)$$

Esta é sempre positiva, não apresenta singularidades e existe para todo operador densidade, porém não fornece as distribuições marginais corretas.

Para o caso do ordenamento simétrico, temos a função de Wigner [37], dada por:

$$W(\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\xi \text{Tr}[\hat{\rho} \exp(\xi\hat{a}^\dagger - \xi^*\hat{a})] \exp(\beta\xi^* - \beta^*\xi). \quad (2.66)$$

Entre outras propriedades, a função de Wigner existe (e é real) para todo operador densidade, porém não pode ser interpretada com uma probabilidade, visto que ela pode apresentar valores negativos. Quando tal comportamento ocorre, é considerado como uma indicação que o estado apresenta alguma espécie de característica não-clássica.

As quasiprobabilidades podem ser obtidas também através de um traço na base de Fock [14],

$$P(\beta; s) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1+s)^k}{(1-s)^{k+1}} \langle k | \hat{D}^\dagger(\beta^*) \hat{\rho} \hat{D}(\beta) | k \rangle, \quad (2.67)$$

ao invés da integração no espaço de fase, o que nos permite agilizar os cálculos computacionais. Se  $s = 1$  temos a função Husimi (função  $Q$ ) e se  $s = 0$  teremos a função de Wigner.  $\hat{D}(\beta) = \exp(\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a})$  é o operador deslocamento de Glauber.

## 2.6 Alguns estados da luz.

### 2.6.1 O estado de número.

Os estados de número  $|n\rangle$  são autoestados de energia do oscilador harmônico, associados com o campo eletromagnético, como vimos anteriormente (eq. 2.30). Eles formam uma série completa de estados constituindo uma base ortonormal.

$$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}, \quad \sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbf{1}. \quad (2.68)$$

Sua distribuição de número de fótons tem uma forma simples,

$$P_m^n = |\langle n|m\rangle|^2 = \delta_{n,m}, \quad (2.69)$$

isto é, a distribuição é centrada em  $\langle \hat{n} \rangle = n$  com uma flutuação ( $\Delta n$ ) igual a zero.

Esse estado apresenta um grau de coerência de segunda ordem dependente de  $n$  e é sempre menor que 1 (para  $n > 0$ ), portanto este apresenta um comportamento de anti-agrupamento.

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{n-1}{n}. \quad (2.70)$$

Para o parâmetro de compressão encontramos  $S_x = n/8$ , o que nos demonstra não haver compressão na quadratura  $\hat{X}$  (analogamente para  $\hat{Y}$ ). O estado de número para  $n = 0$  (estado de vácuo) apresenta uma flutuação mínima nas quadraturas  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$  igual a  $1/4$  ( $S_x = 0$ ).

O parâmetro  $Q$  de Mandel para este estado é  $Q = -1$ , isto é, ele é o mais sub-Poissoniano dos estados que se pode gerar. Podemos também, como vimos, representar qualitativamente esse estado através da função de quasiprobabilidade de Husimi (função  $Q$ ) (figura 2.1), dada por:

$$Q(x, y) = \frac{1}{\pi} \exp -(|x^2 + y^2|) \frac{(x^2 + y^2)^n}{n!}. \quad (2.71)$$

Observemos que para o estado de número a função  $Q$  é centrada na origem e possui em seu centro um vale.

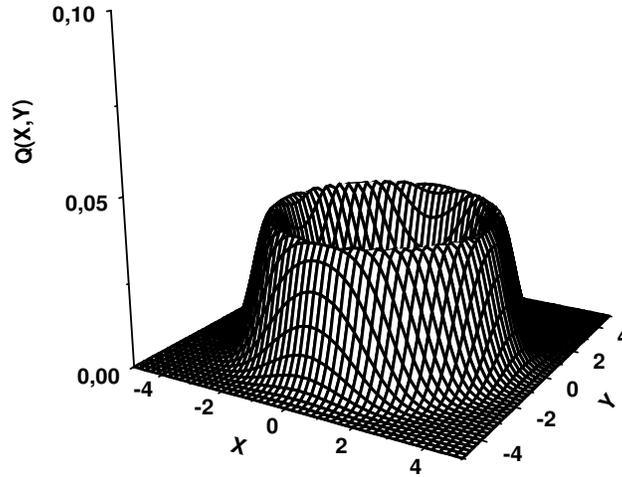


Figura 2.1: Função de quasiprobabilidade de Husimi (função  $Q$ ) para o estado de número com  $\bar{n} = 10$ .

Vários esquemas experimentais foram propostos para a geração desse estado [8].

### 2.6.2 O estado coerente.

O estado coerente é um estado muito importante na teoria quântica da luz [38], é definido como uma superposição de estados de número  $|n\rangle$  [9],

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (2.72)$$

onde  $\alpha$  é um número complexo. São normalizados,

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2) \sum_n \frac{\alpha^{*n}\alpha^n}{n!} = 1, \quad (2.73)$$

porém não são ortogonais,  $|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \exp(-|\alpha - \beta|^2)$ .

Formam uma base dita mais que completa representada pela relação de completeza,

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbf{1} \quad (2.74)$$

onde  $d^2\alpha = d[Re(\alpha)]d[Im(\alpha)]$

O estado coerente  $|\alpha\rangle$  com amplitude  $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$  é autoestado do operador de aniquilação  $\hat{a}$ ,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (2.75)$$

e é a partir dessa definição que se escreve a expansão (2.72). Este pode ser obtido do estado de vácuo, através da aplicação do operador deslocamento de Glauber  $\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})$  [38],

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})|0\rangle. \quad (2.76)$$

Fisicamente o operador deslocamento está aproximadamente conectado ao operador evolução, correspondendo à interação do campo eletromagnético com uma corrente clássica. Essa interação é descrita pelo Hamiltoniano

$$\hat{H}_{int} = \int \vec{J} \cdot \vec{A} d^3r, \quad (2.77)$$

que pode ser escrito na forma  $\hat{H}_{int} = i(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})$ . O operador evolução correspondente a essa interação coincide, a menos de uma fase, com  $\hat{D}(\alpha, \alpha^*)$ . Portanto, a equação (2.76) implica que a corrente clássica  $\vec{J}$  gera o estado coerente a partir do vácuo.

O número médio de fótons e sua flutuação são iguais no estado coerente,

$$\langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = |\alpha|^2, \quad \langle\alpha|(\Delta\hat{n})^2|\alpha\rangle = |\alpha|^2. \quad (2.78)$$

Isso nos dá um parâmetro  $Q$  de Mandel igual a zero, assim esse estado é dito Poissoniano, isto por que sua distribuição de número de fótons é uma distribuição Poissoniana (figura 2.2).

$$P_n^{(c)} = \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (2.79)$$

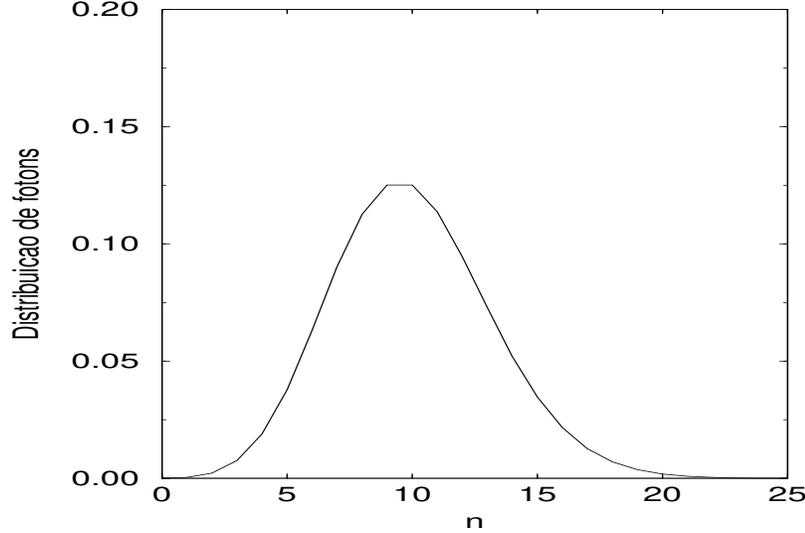


Figura 2.2: Distribuição do número de fótons para o estado coerente com  $|\alpha|^2 = 10$  (número médio de fótons).

O grau de coerência de segunda ordem para esse estado é igual a 1, logo, a probabilidade de se detectar o segundo fóton independe se o primeiro fóton foi detectado.

Assim como o estado de vácuo, o estado coerente, independentemente de seu grau de excitação (para qualquer  $(|\alpha|^2)$ ), apresenta também uma flutuação mínima nas quadraturas  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$ , isto é,  $\Delta\hat{X} = \Delta\hat{Y} = 1/4$  ( $S_x = S_y = 0$ ).

Para o estado coerente a função de quasiprobabilidade de Husimi (função  $Q$ ) (figura 2.3) é dada por [12]:

$$Q(x, y) = \frac{1}{\pi} \exp[-[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]]. \quad (2.80)$$

Esta é uma função Gaussiana das variáveis  $x$  e  $y$  centradas em  $\alpha = |\alpha| \exp(i\phi)$ , com  $\langle x \rangle = |\alpha| \cos \phi$ ,  $\langle y \rangle = |\alpha| \sin \phi$  e  $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (\Delta y)^2 \rangle = 1/4$ , o que se esperaria de um estado de incerteza mínima.

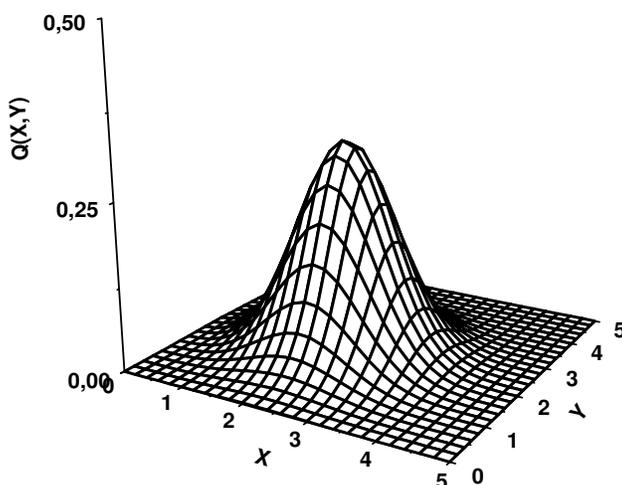


Figura 2.3: Função de quasiprobabilidade de Husimi (função  $Q$ ) para o estado coerente com  $|\alpha|^2 = 10$  (número médio de fótons).

### 2.6.3 O estado térmico.

O estado térmico é o mais comum dos estados conhecidos para luz, pois fontes naturais basicamente emitem luz térmica. Em 1900 Max Planck [9, 39] determinou a distribuição espectral da energia eletromagnética irradiada por uma fonte térmica, postulando que a energia do oscilador harmônico é quantizada. A distribuição de probabilidade (figura 2.4) dos modos normais de excitação desse oscilador (distribuição do número de fótons) em equilíbrio térmico a uma temperatura  $T$  é dada por:

$$P_n = \frac{(\bar{n})^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}}, \quad (2.81)$$

onde  $\bar{n}$  é o número médio de excitações (fótons) dado por:

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_b T) - 1}, \quad (2.82)$$

sendo  $k_b$  a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura em kelvin.

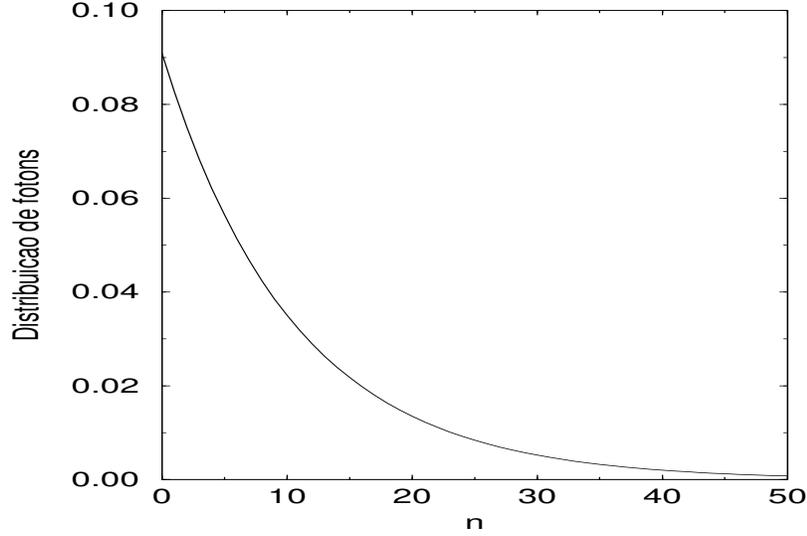


Figura 2.4: Distribuição do número de fótons para o estado térmico com  $\bar{n} = 10$  (número médio de fótons).

A luz térmica possui uma distribuição estatística super-Poissoniana ( $Q > 0$ ) e um grau de coerência de segunda ordem maior que 1, o que significa um aumento na probabilidade de detectar um segundo fóton, logo após ter se detectado o primeiro, isto é, temos um agrupamento de fótons. Este estado não apresenta uma compressão nas quadraturas do campo como podemos ver por:

$$S_x = S_y = \frac{\bar{n}}{8}. \quad (2.83)$$

O estado térmico é descrito pelo operador densidade  $\hat{\rho}$ ,

$$\hat{\rho} = \sum_k P_k |k\rangle \langle k|, \quad (2.84)$$

onde  $P_k$  é dado pela equação (2.81). O estado térmico é classificado como uma *mistura estatística* de estados puros, enquanto os estados coerente e de número são *estados puros*.

Para o estado térmico a função de quasiprobabilidade de Husimi (função  $Q$ ) é dada por:

$$Q(x, y) = \frac{1}{\pi} P_n \exp[-(x^2 + y^2)] \frac{(x^2 + y^2)^n}{n!} \quad (2.85)$$

onde  $P_n$  é a distribuição do número de fótons dada pela equação (2.81).

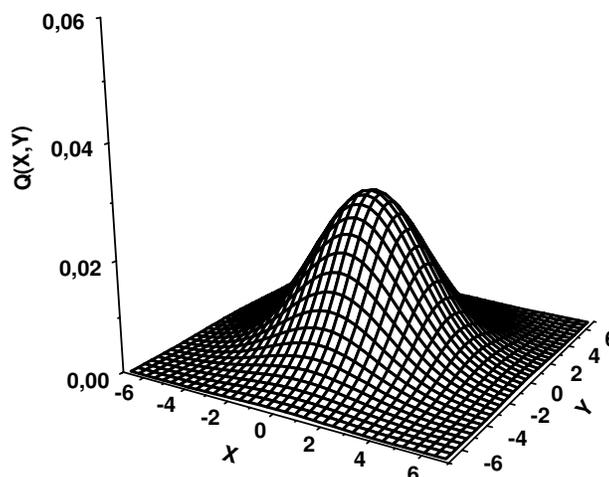


Figura 2.5: Função de quasiprobabilidade de Husimi (função  $Q$ ) para o estado térmico com  $\bar{n} = 10$  (número médio de fótons).

### 2.6.4 O estado comprimido coerente .

Os estados coerentes comprimidos [10] formam uma classe de estados de incerteza mínima e, em geral, apresentam flutuações em uma das quadraturas ( $\hat{X}$  ou  $\hat{Y}$ ) abaixo do mínimo do estado coerente ou do estado de vácuo. O princípio da incerteza não é violado, pois ao se reduzir as flutuações em uma das quadratura tem-se um aumento proporcional na outra. Estes estados são definidos por:

$$|\alpha, r\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(r)|0\rangle, \quad (2.86)$$

onde  $\hat{D}(\alpha)$  é o operador deslocamento de Glauber, com  $\alpha$  sendo um número complexo.  $\hat{S}(r)$  é o operador de compressão, dado por [34]:

$$\hat{S}(r) = \exp\left(\frac{1}{2}r^*\hat{a}^2 - \frac{1}{2}r\hat{a}^{\dagger 2}\right), \quad (2.87)$$

onde  $r$  é um número complexo ( $r = se^{i\theta}$ ,  $s = |r|$ ), chamado parâmetro de compressão.

Podemos escrever o estado comprimido como uma expansão de estados de número como [35]:

$$\begin{aligned}
|\alpha, r\rangle &= \sum_n \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}e^{i\theta} \tanh r)^n}{n! \cosh r}} \\
&\times \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + \alpha^2 e^{-i\theta} \tanh r)\right] H_n\left[\frac{\alpha + \alpha^* e^{i\theta} \tanh r}{\sqrt{2e^{i\theta} \tanh r}}\right] |n\rangle,
\end{aligned} \tag{2.88}$$

onde  $H_n$  são os polinômios de Hermite de ordem  $n$  [40].

O número médio de fótons e sua flutuação são dados por:

$$\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 r \tag{2.89}$$

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = |\alpha|^2 (e^{-2r} \cos^2 \varphi + e^{2r} \sin^2 \varphi) + \frac{1}{2} \sinh^2 r, \tag{2.90}$$

onde  $\varphi$  é a fase do estado coerente ( $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$ ).

O estado comprimido com uma dada amplitude  $\alpha$ , pode ser super-Poissoniano, Poissoniano ou sub-Poissoniano, dependendo do valor do parâmetro  $r$  de compressão. Se  $r < 0$  e  $r > r_0$ , temos  $Q > 0$  (super-Poissoniano); para  $0 < r < r_0$ , temos  $Q < 0$  (sub-Poissoniano) [41]. Aqui  $r_0$  é um parâmetro de compressão crítico. Para  $r = 0$ , naturalmente, temos o estado coerente com estatística Poissoniana.

A distribuição de fótons desse estado é dada por:

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{(\frac{1}{2} \tanh r)^n}{n! \cosh r} \times \\
&\times \exp\left[-|\alpha|^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha^{*2}) \tanh r\right] \left| H_n \left[ \frac{\alpha + \alpha^* \tanh r}{\sqrt{2 \tanh r}} \right] \right|^2.
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Observamos (figura 2.6) que a distribuição do número de fótons para o estado comprimido apresenta oscilações ( $r = 2$ ). Tal resultado é entendido como sendo devido ao caráter quadrático do operador de compressão ou como um resultado da interferência no espaço de fase [42]. Temos também que a distribuição decresce quando  $n$  aumenta e o envelope da oscilação é a distribuição de probabilidade do número de fótons para um estado térmico.

Para este estado as flutuações das quadraturas dependem de  $r$  e  $\theta$ , como podemos ver pelo índice de compressão:

$$S_x = \frac{1}{16} \left[ e^{-2r} \cos^2 \left( \frac{1}{2} \theta \right) + e^{2r} \sin^2 \left( \frac{1}{2} \theta \right) \right] - \frac{1}{16}, \tag{2.92}$$

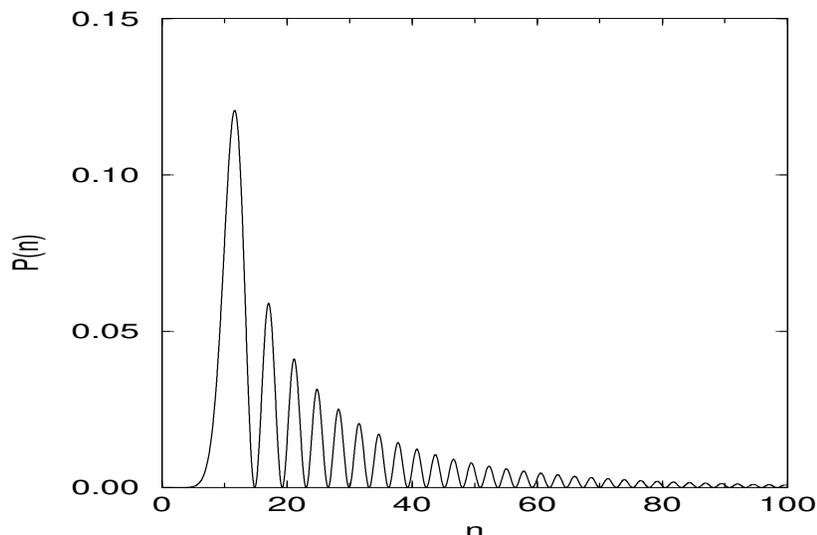


Figura 2.6: Distribuição do número de fótons para o estado comprimido, com  $r = 2$  e  $|\alpha|^2 = 10$

$$S_y = \frac{1}{16} \left[ e^{-2r} \sin^2 \left( \frac{1}{2}\theta \right) + e^{2r} \cos^2 \left( \frac{1}{2}\theta \right) \right] - \frac{1}{16}. \quad (2.93)$$

Assim, para certos valores desses parâmetros podemos ter uma flutuação abaixo do mínimo, fixado pelo estado coerente e estado de vácuo. Além disso, enquanto uma das quadraturas aumenta a outra diminui, satisfazendo o princípio da incerteza, como pode ser visto pelas equações acima. A função de quasiprobabilidade de Husimi (função  $Q$ ) para esse estado, nos dá (figura 2.7) uma Gaussiana achatada em umas das quadraturas ( $Y$ ), o que é uma característica de uma compressão nessa quadratura.

## 2.7 Modelo Jaynes-Cummings

O *modelo Jaynes-Cummings* (MJC) [2] consiste na interação de um átomo de dois níveis com um único modo do campo eletromagnético, confinado em uma cavidade perfeita (sem perdas), que admite solução exata. Este é um modelo teórico simples e muito importante para ótica quântica.

Nesse modelo o acoplamento entre o átomo e o campo é dado pela interação de dipolo elétrico, descrita pelo Hamiltoniano:

$$\hat{H}_{int} = -\hat{D} \cdot \hat{E}, \quad (2.94)$$

onde  $\hat{E}$  é o operador do campo quantizado,  $\hat{D} = e\hat{r}$  é o operador dipolo elétrico,

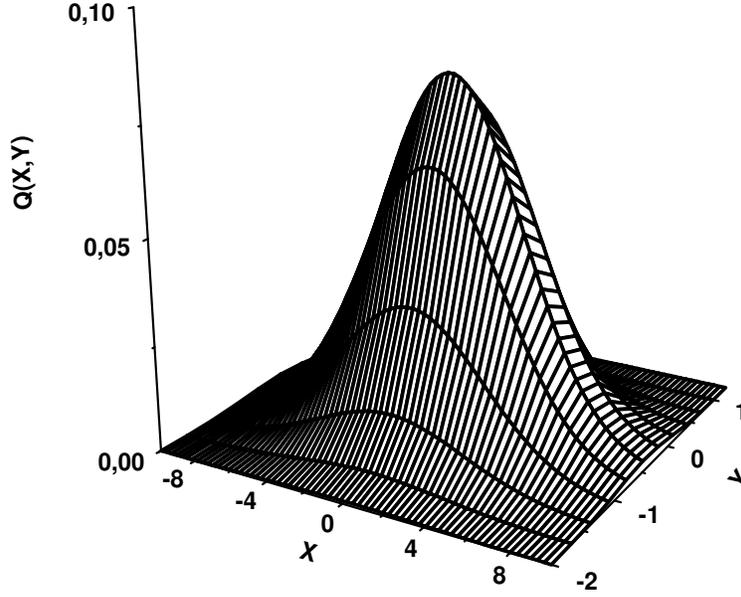


Figura 2.7: Função de quasiprobabilidade de Husimi (função  $Q$ ) para o estado comprimido, com  $\bar{n} = 10$  (número médio de fótons) e o parâmetro de compressão  $r = 2.0$ .

sendo “ $e$ ” a carga do elétron e “ $\hat{r}$ ” o operador de posição relativo ao elétron, dado por:

$$\hat{D} = e\vec{D}_{ge}(|g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g|), \quad (2.95)$$

com  $\vec{D}_{ge} = \langle g|\hat{D}|e\rangle$  o elemento da matriz dipolo. Temos assim que, o Hamiltoniano de interação é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} &= \hbar g (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ &= \hbar g (|e\rangle\langle g|\hat{a} + |g\rangle\langle e|\hat{a}^\dagger \\ &\quad + |g\rangle\langle e|\hat{a} + |e\rangle\langle g|\hat{a}^\dagger), \end{aligned} \quad (2.96)$$

onde  $\hbar$  é a constante de Planck,  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{a}$  os operadores de criação e aniquilação de fótons e  $g$  a constante de acoplamento,

$$g = e\sqrt{\frac{\omega}{\epsilon_0\hbar V}} \vec{\epsilon} \cdot \langle g|\hat{D}|e\rangle, \quad (2.97)$$

sendo  $\omega$  a frequência do campo na cavidade.

Observemos que da equação (2.96) temos quatro termos distintos e cada um produz um estado final bem definido para o sistema átomo-campo, quando apropriadamente aplicado ao um estado inicial. Esses quatro termos são representados na figura (2.8). À direita temos o estado inicial e à esquerda o estado final, após a atuação do Hamiltoniano de interação  $\hat{H}_{int.}$ . Suponhamos que o estado  $|e\rangle$  tenha uma energia maior que o estado  $|g\rangle$  ( $\hbar\omega_e > \hbar\omega_g$ ). Na figura (2.8) observamos que no ítem (a) a absorção de um fóton com um vetor de onda  $\vec{k}$  pelo átomo no estado  $|g\rangle$  é acompanhada por sua excitação, levando ao estado  $|e\rangle$ , enquanto no ítem (b) temos o processo inverso, uma emissão de um fóton corresponde à transição do estado atômico  $|e\rangle$  para o estado  $|g\rangle$ . Esses processos (a) e (b) são os mais importante quando há ressonância ( $\omega \approx \omega_0$ ,  $\omega_0 = \omega_e - \omega_g$  a frequência entre os níveis atômicos), que os representados pelos itens (c) e (d). Como em nosso trabalho estaremos interessados nas interações próximas da ressonância, negligenciamos então as contribuições dos itens (c) e (d), tal procedimento é conhecido como “aproximação de onda girante” [10].

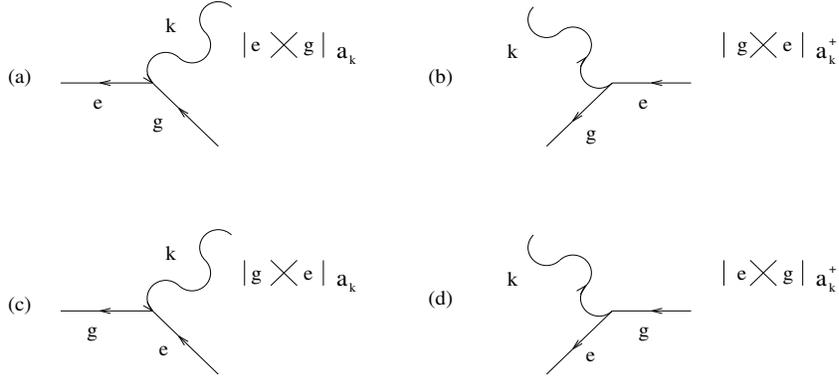


Figura 2.8: Representação esquemática dos quatro termos da interação de dipolo elétrico. A linha ondulada representa o fóton e a linha contínua representa o estado atômico

Portanto, o Hamiltoniano total do modelo Jaynes-Cummings, na aproximação de onda girante, para a interação átomo-campo é dado por:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g (\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger), \quad (2.98)$$

onde o primeiro termo é o Hamiltoniano referente ao átomo, com  $\hat{\sigma}_z$  definido como  $\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$  (fixamos o zero da energia no meio, entre os estado  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ ) e  $\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|$  e  $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$  sendo os operadores de transição atômica; o segundo termo

é o Hamiltoniano do campo com frequência  $\omega$  e o último termo é o Hamiltoniano de interação na aproximação de onda girante.

Conhecendo o vetor de estado inicial de um sistema

$$|\Psi(0)\rangle = |\psi\rangle_c \otimes |e\rangle, \quad (2.99)$$

onde o campo é preparado no estado  $|\psi(0)\rangle_c = \sum_n P_n |n\rangle$  e o átomo no estado excitado  $|e\rangle$ , podemos determinar o vetor de estado  $|\Psi(t)\rangle$ , resolvendo a equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = \hat{H}_I |\Psi\rangle, \quad (2.100)$$

onde utilizamos a representação de interação.

A atuação do Hamiltoniano de interação  $H_I$  (na aproximação de onda girante) no vetor de estado inicial nos dará

$$(\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) |n\rangle |e\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle |g\rangle. \quad (2.101)$$

Desse modo é conveniente expandir o vetor de estado total  $|\Psi(t)\rangle$  em termos dos estados:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n e^{-i\omega(n+1)t} [C_{n,e}(t) |n\rangle |e\rangle + C_{n+1,g}(t) |n+1\rangle |g\rangle]. \quad (2.102)$$

Substituindo  $|\Psi(t)\rangle$  na equação de Schrödinger (2.100) obtem-se a solução ( $C_{n,e}$  e  $C_{n+1,g}$ ), para o caso em que as frequências do campo e do átomo são iguais a  $\omega_0$  (ressonantes).

$$\begin{aligned} C_{n,e} &= \cos(gt\sqrt{n+1}) \\ C_{n+1,g} &= \sin(gt\sqrt{n+1}). \end{aligned} \quad (2.103)$$

Conhecendo o vetor de estado  $|\Psi(t)\rangle$  podemos determinar toda a dinâmica quântica do sistema átomo-campo.

Para este modelo encontramos vários resultados interessantes no estudo da dinâmica tanto para o átomo como para o campo. Por exemplo, quando a interação átomo-campo é ressonante ( $\omega = \omega_0$ ) ou próximo da ressonância ( $\omega = \omega_0 + \Delta$ , onde  $\Delta$  representa uma pequena dessintonia entre o campo e o átomo), encontramos: oscilações de Rabi [43, 44], colapso e ressurgimento (inversão atômica) [45, 23], estatística sub-Poissoniana [32], compressão em uma das quadraturas do campo eletromagnético [46] e outros. Em todos os casos a evolução temporal depende da estatística inicial do estado

campo na cavidade, o que permite estudar o comportamento dessa interação para vários estados.

Este modelo foi também generalizado e modificado de vários modos, como por exemplo: interação átomo-campo com transições de mais de um fóton [47, 48, 49], a interação átomo-campo+um meio não-linear colocado na cavidade [15, 50, 51], a interação átomo-campo+um campo clássico externo injetado na cavidade, interagindo com o átomo [16, 52, 53], outros [54, 55, 56].

## 2.8 Micromaser

O micromaser [4, 5] é um importante dispositivo para o estudo da interação átomo-campo. Através dele é possível investigar vários resultados do modelo Jaynes-Cummings. Este dispositivo consiste num arranjo no qual os átomos são transmitidos individualmente através da cavidade ( $C$ ) (figura 2.9), na qual um campo eletromagnético previamente preparado em um estado conhecido é confinado. Os átomos são inicialmente emitidos de uma fonte ( $O$ ) e sua velocidade é selecionada pelos feixes de laser  $L'_1$  e  $L_1$ . Em seguida eles são preparados em um estado denominado *estado circular de Rydberg* [3, 25] em  $B$ , cujo espectro de energia forma a série de Rydberg (estado com um elétron altamente excitado). Para  $n^* \approx 60$  (número quântico principal efetivo), os comprimentos de onda para transições de estados vizinhos de uma série de Rydberg dados por:

$$\lambda_{n,n\pm 1} \approx \left( \frac{hc}{2R_M} \right) n^{*3}, \quad (2.104)$$

estão no domínio de milímetro ( $R_M$  constante de Rydberg), o que permite a utilização de uma cavidade ( $C$ ) com um alto grau de precisão no ajuste da frequência do campo. Tais átomos apresentam também momento de dipolo elétrico e tempo de decaimento grandes, o que permite um acoplamento forte com um campo relativamente fraco na cavidade ( $C$ ) e uma maior probabilidade de que os átomos não decaiam antes de entrarem na mesma.

Na cavidade ( $C$ ), átomo e campo podem trocar energia com uma frequência conhecida como “frequência de Rabi”,

$$\Omega_n = \Omega_0 \sqrt{n+1}, \quad (2.105)$$

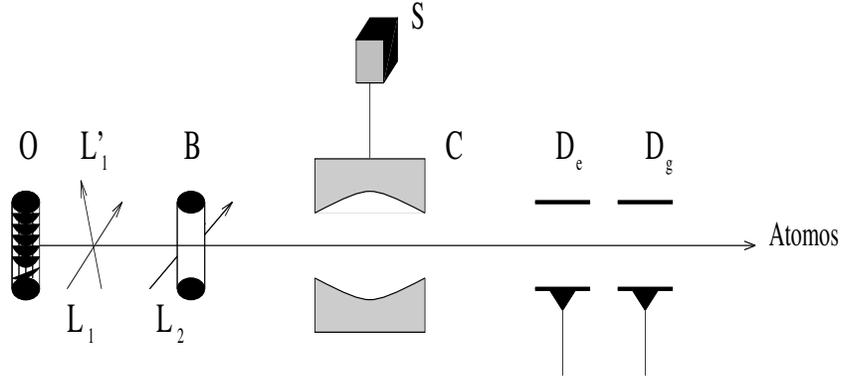


Figura 2.9: Representação esquemática do micromaser.

quando a diferença de frequência entre os níveis atômicos for bem próxima da frequência do campo (ressonância).  $\Omega_0$  é função do acoplamento de dipolo  $\vec{D}$  e da intensidade do campo  $\vec{E}$ , representado pelo número de ocupação de fótons “n”

$$\Omega_0 = \vec{D} \cdot \vec{E}_0 / \hbar, \quad (2.106)$$

onde  $E_0$  é o campo para  $n = 0$ . Para tais cavidades e átomos de *Rydberg* com um número quântico principal entre 40 e 65,  $\Omega$  está tipicamente entre  $10^4 s^{-1}$  e  $10^5 s^{-1}$ .

As condições necessárias para a realização do micromaser de modo geral dependem de três parâmetros: o tempo de interação átomo-campo ( $t_{int}$ ), o tempo de voo entre os átomos ( $t_{at}$ ) e o tempo de decaimento da cavidade ( $t_{cav}$ ). Para termos somente um átomo de cada vez na cavidade é necessário que:

$$t_{at} > t_{int}, \quad (2.107)$$

e para que o campo fique confinado na cavidade (intervalo de tempo em que a perda de fótons é  $\approx 0$ ), o número de átomos que cruzam a mesma devem ser:

$$N = t_{cav} / t_{at}. \quad (2.108)$$

Desse modo devemos ter um intervalo de tempo entre a passagem de dois átomos dado por:

$$t_{int} < t_{at} < t_{cav} / N. \quad (2.109)$$

O tempo de decaimento da cavidade depende do seu fator de qualidade, definido como:  $\mathcal{Q} = \omega / \Delta\omega$ , isto é,  $t_{cav} = \mathcal{Q} / \omega$  ( $\omega$  é a frequência da cavidade).

O valor do tempo de interação  $t_{int}$  é igual a  $L/v$ , onde  $L$  é o comprimento da cavidade e  $v$  a velocidade do átomo. Para cavidades da ordem de cm e  $v$  entre  $100m/s$  e  $300m/s$  temos  $t_{int}$  entre  $20\mu s$  e  $100\mu s$ . O intervalo de tempo médio entre dois átomos consecutivos,  $t_{at}$  ( $= 2 \cdot 10^{-3}s$ ), é igual ao inverso da taxa de bombeio atômico e pode variar infinitamente. O tempo de amortecimento de fótons na cavidade é igual a  $k^{-1}$ , onde  $k = \omega/Q$  é a taxa de decaimento da cavidade. Para um micromaser operando em um modo  $TE_{121}$  de  $20GHz$ , com um  $Q = 3 \times 10^{10}$  à temperatura de  $0.5K$ , temos  $t_{cav} = 0.2s$ . O valor de  $t_{cav}$  pode diminuir para,  $10^{-1}s$  e  $10^{-3}s$  para temperaturas de  $1K$  e  $3K$ .

Com a troca de energia o estado inicial do campo na cavidade pode ser modificado, átomo e campo se tornam emaranhados, isto é, o estado do campo e do átomo não podem ser fatorados. Por um processo de medida seletiva, efetuados pelos detectores  $D_e$  e  $D_g$ , pode-se determinar o estado do campo após  $N$  átomos terem passado pela cavidade (C). Com esse processo podemos construir estados quânticos do campo, tais como o estado de número [57, 58], o estado coerente [59] e outros. Podemos também gerar outros estados, como o gato de Schrödinger [60, 61], através de uma interação dispersiva, isto é, sem troca de energia entre o átomo e o campo.

As gerações de estados utilizando o micromaser são possíveis através de várias condições impostas aos átomos, ao estado inicial do campo e ao tempo de interação átomo-campo. Por exemplo, para a geração do estado de número (estado de Fock), os átomos devem ser inicialmente preparados no estado excitado, o campo na cavidade (C) em um estado próximo ao vácuo, com um número médio de fótons térmicos igual  $10^{-4}$  e o tempo de interação deve ser fixado de tal modo que as oscilações de Rabi, que o átomo sofre na cavidade, seja igual a um número inteiro de  $\pi$  ( $gt_{int}\sqrt{n+1} = k\pi$ , onde  $g$  é a constante de acoplamento átomo-campo,  $t_{int}$  o tempo de interação e  $k$  um número inteiro). Desse modo, com a passagem de um certo número átomos ( $N = 50$ ) pela cavidade (micromaser) e a medida condicional realizada pelo detectores  $D_g$  e  $D_e$ , temos a formação do estado de número para o campo na cavidade.

Para a construção do *gato de Schrödinger*, por exemplo, o procedimento é mais complexo. Os átomos inicialmente são preparados no estado excitado  $|e\rangle$  (em B) e transmitidos individualmente a uma cavidade  $R_1$  (como mostra a figura 2.10), onde um campo clássico é mantido na faixa de microondas ressonante com a frequência de transição entre os estados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ . A intensidade nessa cavidade é então escolhida de

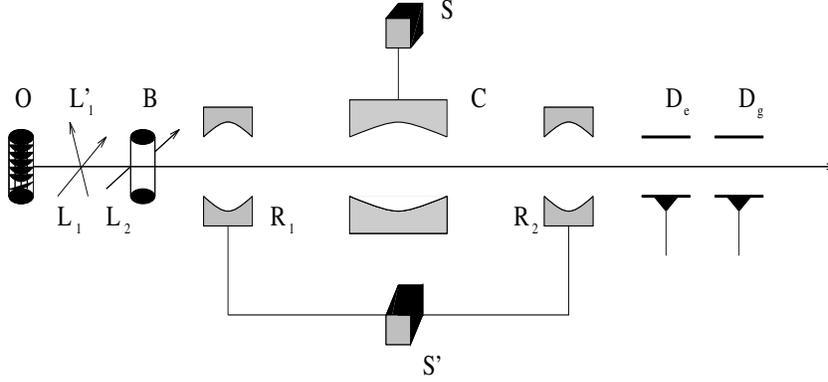


Figura 2.10: Representação esquemática do aparato experimental para geração do *gato de Schrödinger*.

maneira que um pulso  $\pi/2$  é aplicado a ele, resultando no estado

$$|\psi_{at}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle). \quad (2.110)$$

Esse átomo sai da cavidade  $R_1$  e logo em seguida entra na cavidade  $C$ , preparada com um campo no estado coerente fora da ressonância (dessintonia  $\delta$ ) com a respectiva transição  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ . Conseqüentemente átomo e campo não trocam energia mas sofrem uma mudança de frequência dispersiva ( $1/\delta$ ) nos níveis atômico. O campo também sofre uma mudança de fase igual e oposta aos estados atômicos. Por simplicidade pode-se considerar a velocidade dos átomos de tal modo que a mudança na fase seja de  $\pi$ . Assim, para geração do estado de gato, correlaciona-se a cada estado atômico uma superposição de estados coerentes com diferentes fases. Isto é realizado, submetendo o átomo que sai da cavidade  $C$  a um segundo pulso  $\pi/2$  na segunda cavidade  $R_2$ , de tal modo que o estado torna-se

$$|\psi_{at+campo}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle|\alpha_-\rangle + |g\rangle|\alpha_+\rangle), \quad (2.111)$$

onde os estados são definidos por: gato par (+) e impar (-) como sendo  $|\alpha_{\pm}\rangle = N_{\pm}^{-1}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$  com  $N_{\pm}^2 = 2(1 \pm \exp(-2|\alpha|^2))$ . Isto demonstra que o estado par ou impar é gerado na cavidade conforme a detecção condicional do átomo for  $|g\rangle$  ou  $|e\rangle$ , respectivamente. Esse estado (*gato de Schrödinger*) sofre uma rápida perda de coerência [62] devido à inevitável presença de dissipação na cavidade.

Existem outros métodos para se gerar estados puros sem a necessidade de se realizar medidas condicionais dos estados atômicos. Por exemplo, para a geração do

estado de número [49] pode-se utilizar uma interação aproximadamente ressonante entre átomo e campo, onde os átomos são primeiramente preparados em um estado de superposição coerente de dois estados ( $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ ) e a cavidade no estado de térmico ( $\bar{n} = 10$ ). As perdas na cavidade são desprezadas, tal que a radiação tenha um tempo de vida muito longo. Após a interação obtém-se um estado emaranhado descrito por um operador densidade entre o átomo e o campo. Efetuando o traço parcial sobre o operador densidade total nas variáveis atômicas, obtemos o operador densidade do campo. Então, controlando-se os tempos de voo dos átomos, pode-se construir o estado de número (estado de Fock) na cavidade (C), sem realizar medidas seletivas. Portanto, resultados fundamentais para a mecânica quântica, como a geração de estados quânticos puros, são obtidos com esse dispositivo.

Podemos também estudar as propriedades não-clássicas dos estados do campo, como veremos no próximo capítulo.

Nesta tese utilizamos o micromaser para investigar a construção de estados quânticos puros, através da transferência de coerência dos átomos para o campo.

## 2.9 Geração do estado coerente em um micromaser

Como nos processos anteriores os átomos são inicialmente preparados, um de cada vez, no estado excitado  $|e\rangle$  (em B) e, neste caso, passam por uma cavidade (1) que os prepara em uma superposição coerente dos estado  $|e_k\rangle$  e  $|g_k\rangle$  com uma fase relativa  $\phi$  ( figura 2.11).

$$|\phi_k^a\rangle = b|g_k\rangle + ae^{i\phi}|e_k\rangle, \quad (2.112)$$

com  $a^2 + b^2 = 1$ . Consideraremos  $|g_k\rangle$  como o estado “fundamental” e  $|e_k\rangle$  como o estado excitado. Em seguida eles passam pela cavidade 2, inicialmente preparada no estado de vácuo  $|0\rangle$ . Temos assim, que o sistema átomo-campo em  $t = 0$ , para  $N$  átomos atravessando a cavidade uma a um; é descrito por [59]:

$$|\Psi_N^{(i)}(0)\rangle = \left( \prod_{k=1}^N |\phi_k^a\rangle \right) \otimes |0\rangle. \quad (2.113)$$

Após os  $N$ -átomos passarem pela cavidade 2 o estado do sistema será:

$$|\Psi_N^{ac}\rangle = \prod_{k=1}^N \hat{U}_k(\tau) |\Psi^{(i)}(0)\rangle, \quad (2.114)$$

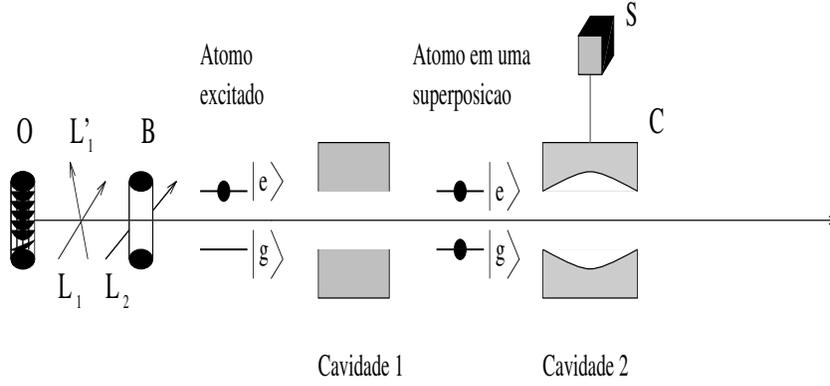


Figura 2.11: Esquema experimental. Os átomos são preparados em uma superposição coerente de dois estados por um campo coerente de microondas na cavidade 1 e injetados na cavidade 2, considerada sem perdas.

sendo  $\hat{U}_k(\tau)$  o operador de evolução temporal e  $\tau$  o tempo de interação do átomo com o campo na cavidade 2 (igual para todos os  $N$ -átomos). Na base de estados de números podemos escrever:

$$|\Psi_N^{ac}\rangle = \sum_n \langle n | \Psi_{N-1} \rangle \hat{U}_N(\tau) |\phi_N^a; n\rangle \quad (2.115)$$

O primeiro termo depois da somatória tem toda a informação da interação dos  $(N-1)$ -átomos com o campo na cavidade 2 e o termo posterior registra a evolução da passagem do último átomo. O operador de evolução temporal é dado por

$\hat{U}(\tau) = \exp(-i\hat{H}\tau/\hbar)$ , onde  $\hat{H}$  é o Hamiltoniano do modelo Jaynes-Cummings (2.98).

Podemos agora determinar o estado do campo calculando o traço parcial do operador densidade total, nas variáveis atômicas, e obter os elementos de matriz do operador densidade do campo:

$$\rho_N^c(n, n') = \text{Tr}_{(a)} [ \langle n | \Psi_N^{ac} \rangle \langle \Psi_N^{ac} | n' \rangle ]. \quad (2.116)$$

Com esse procedimento não há necessidade de se realizar medidas condicionais sobre os átomos emergentes, como realizadas na engenharia de estados quânticos [17], onde todo átomo que sai da cavidade deve necessariamente estar no estado fundamental, pois tal resultado está condicionado à geração do estado desejado. Caso o estado medido do átomo não seja o estado desejado (o estado fundamental, por exemplo), deve-se começar toda a experiência novamente.

Calculado então o traço parcial encontramos:

$$\rho_N^c(n, n') = [ a^2 C_{n+1} C_{n'+1} + b^2 C_n C_{n'} ] \rho_{N-1}^c(n, n')$$

$$\begin{aligned}
& + a^2 S_{n+1} S_{n'+1} \rho_{N-1}^c(n+1, n'+1) \\
& + b^2 S_n S_{n'} \rho_{N-1}^c(n-1, n'-1) \\
& + iabe^{i\phi} C_{n+1} S_{n'+1} \rho_{N-1}^c(n, n'+1) \\
& + iabe^{-i\phi} C_n S_{n'} \rho_{N-1}^c(n, n'-1) \\
& - iabe^{-i\phi} S_{n+1} C_{n'+1} \rho_{N-1}^c(n+1, n') \\
& - iabe^{i\phi} S_n C_{n'} \rho_{N-1}^c(n-1, n') ], \tag{2.117}
\end{aligned}$$

onde  $C_n = \cos(g\tau\sqrt{\bar{n}})$  e  $S_n = \sin(g\tau\sqrt{\bar{n}})$  (2.103). Introduzindo agora uma transformação conveniente:

$$\rho_N^c(n, n') = (ie^{-i\phi})^{n-n'} \left( \prod_{k=1}^n S_k \prod_{l=1}^{n'} S_l \right) a^{n+n'} \tilde{\rho}_N(n, n'), \tag{2.118}$$

isso nos permite simplificar a expressão (2.117) e obter uma relação mais simples entre  $\tilde{\rho}_N^c$  e os  $\tilde{\rho}_{N-1}^c$ . Considerando também o caso em que a interação átomo-campo é fraca, isto é,  $g\tau \ll 1$  e  $g\tau\sqrt{\bar{n}} \ll 1$ , onde  $\bar{n}$  é o número médio de fótons na cavidade, obtemos a seguinte relação de recorrência para os elementos de matriz do operador densidade do campo,

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_N(n, n') & = \tilde{\rho}_{N-1}(n, n') + \tilde{\rho}_{N-1}(n-1, n'-1) \\
& + b[\tilde{\rho}_{N-1}(n, n'-1) + \tilde{\rho}_{N-1}(n-1, n')], \tag{2.119}
\end{aligned}$$

cuja solução é dada por:

$$\tilde{\rho}_N(n, n') = \sum_p \frac{N! b^{n+n'-2p}}{p!(n-p)!(n'-p)!(N-n-n'+p)!}. \tag{2.120}$$

Substituindo essa solução na equação (2.118) obtemos,

$$\begin{aligned}
\rho_N^c(n, n') & = (ie^{-i\phi})^{n-n'} (g\tau a)^{n+n'} \sqrt{n!n'!} x \\
& \sum_p \frac{N! b^{n+n'-2p}}{p!(n-p)!(n'-p)!(N-n-n'+p)!}. \tag{2.121}
\end{aligned}$$

Tomando agora a razão entre o  $(p+1)$ -ésimo termo e o  $p$ -ésimo termo da equação (2.121) verifica-se que o primeiro termo ( $p=0$ ) é o dominante dessa soma e ainda, usando a aproximação  $N!/(N-n-n')! \simeq N^{n+n'}$  podemos escrever

$$\rho_N^c(n, n') \simeq (ie^{-i\phi})^{n-n'} (g\tau N a b)^{n+n'} \frac{1}{\sqrt{n!n'!}}. \tag{2.122}$$

Estes são os elementos da matriz densidade para o estado coerente  $|\beta\rangle$  com amplitude  $\beta = -ie^{i\phi}g\tau Nab$ . Notemos também que apesar de termos calculado um traço parcial sobre as variáveis atômicas foi possível obter um estado puro.

Neste esquema é importante observar que os átomos devem estar em uma superposição coerente dos estados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  (eq. 2.112). Caso contrário não será possível gerar o estado coerente  $|\beta\rangle$ .

Como podemos verificar com esse exemplo, o micromaser é um dispositivo extremamente importante para o estudo da interação átomo-campo.

## 2.10 Micromaser de dois fótons

O micromaser de dois fótons [6] consiste basicamente na interação individual de átomos com um campo eletromagnético confinado em uma cavidade, analogamente ao micromaser descrito anteriormente (de um fóton). Porém agora o campo é sintonizado na frequência de transição atômica de dois fótons  $((\omega_e - \omega_g)/2)$ , isto é, os átomos passam a emitir ou absorver dois fótons de cada vez. Uma importante diferença entre os dois processos está na rapidez com que átomo e campo trocam suas energias, chamada de frequência de Rabi ( $\Omega_n$ ). No processo de um fóton  $\Omega_n$  é proporcional a  $\sqrt{n}$  (eq. 2.105), enquanto no processo de dois fótons é proporcional  $n$  (se  $n \gg 1$ ).

Os átomos de Rydberg apresentam também características propícias para as transições de dois fótons. Um esquema típico dos níveis de energia para o átomo de rubídio (Rb), figura (2.12a), nos mostra um terceiro nível  $i$  ( $39P$ ) intermediário, de paridade oposta, situado aproximadamente no meio dos níveis  $e$  ( $40S$ ) e  $g$  ( $39S$ ), de mesma paridade [63, 64]. Esse nível intermediário possui uma dessintonia ( $\delta$ ) que inibe uma transição em cascata, de um fóton ( $|e\rangle \rightarrow |i\rangle \rightarrow |g\rangle$ ), quando a cavidade é sintonizada exatamente na frequência  $(\omega_e - \omega_g)/2$ . Devido á presença desse nível  $|i\rangle$  a amplitude de transição de dois fótons entre os estados “ e ” e “ g ” é fortemente aumentada [6]. Na figura (2.12b) observamos que a transição do nível  $40S$  para o nível  $39S$  ocorre quando a cavidade é sintonizada com a frequência igual a 68.415875 GHz, isto é,  $(\omega_e - \omega_g)/2$ . A dessintonia é dada pela diferença entre a energia do nível intermediário “ i ” e a média entre os níveis “ e ” e “ g ” -  $\hbar\delta = E_i - (E_e + E_g)/2$  ( $\delta/2\pi = -39MHz$  somente).

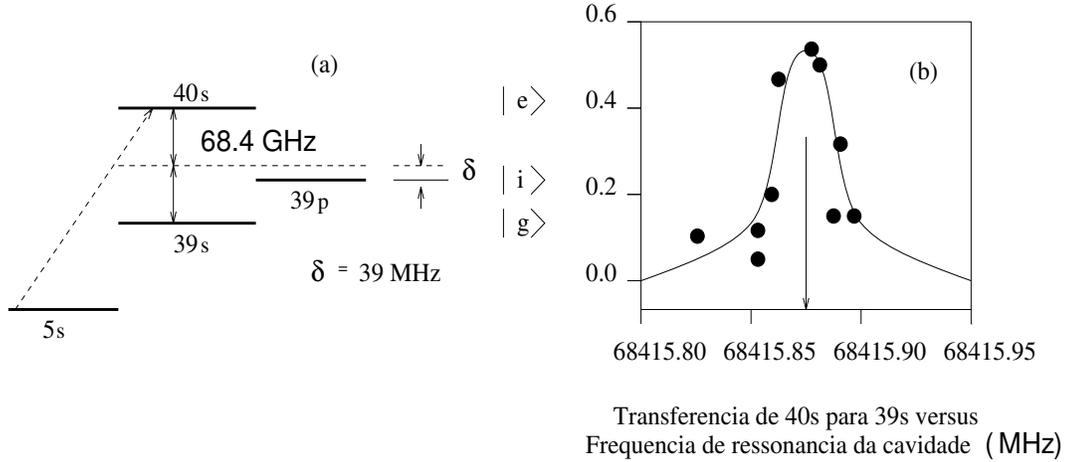


Figura 2.12: (a) Diagrama dos níveis de energia para o rubídio  $40S_{1/2} \rightarrow 39S_{1/2}$  para uma transição de dois fótons degenerada, com um comprimento de onda de  $\lambda = 0.43cm$ . (b) Transferência de população  $40S \rightarrow 39S$  em função da sintonia da cavidade, referente à transição de dois fótons (figura retirada de “Radiating Atoms in Confinend space: From Spontaneous Emission to Micromasers”, Phys. Rep. *221*, 201 (1992)).

Haroche et al [6] em 1987 apresentam a teoria do micromaser para átomos de Rydberg num processo de dois fótons. Eles mostram detalhadamente como os átomos de rubídio e césio apresentam uma dessintonia para o terceiro nível, de modo a permitir uma transição de dois fótons.

O sistema átomo-campo para uma transição de dois fótons é descrito pelo Hamiltoniano  $\hat{H} = \hat{H}_{at} + \hat{H}_c + \hat{H}_{int}$  onde:

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{at} &= E_e |e\rangle\langle e| + E_i |i\rangle\langle i| + E_g |g\rangle\langle g|, \\
 \hat{H}_c &= \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}, \\
 \hat{H}_{int} &= \hbar g_{ei} (\hat{a} |e\rangle\langle i| + \hat{a}^\dagger |i\rangle\langle e|) \\
 &\quad + \hbar g_{ig} (\hat{a} |i\rangle\langle g| + \hat{a}^\dagger |g\rangle\langle i|),
 \end{aligned} \tag{2.123}$$

onde  $E_e < E_i < E_g$  são as energias dos respectivos estados  $|e\rangle$ ,  $|i\rangle$  e  $|g\rangle$ .  $\hat{H}_{at}$ ,  $\hat{H}_c$  e  $\hat{H}_{int}$  são os Hamiltonianos do átomo, do campo e da interação, na aproximação de onda girante, respectivamente. As constantes de acoplamento dos respectivos estados  $|e\rangle$ ,  $|i\rangle$  e  $|g\rangle$  com o campo na cavidade são  $g_{ei}$  e  $g_{ig}$ .

Considerando agora que o nível intermediário  $|i\rangle$  está longe da ressonância [65], este pode ser eliminado adiabaticamente (apêndice A)[66], permitindo um acoplamento efetivo de dois fótons entre os estado  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ . Desse modo, podemos escrever o

Hamiltoniano efetivo [67]:

$$\begin{aligned}
 H_{ef} &= \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\left(\frac{\omega_0}{2} + \chi\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\sigma_z \\
 &+ \hbar\lambda\left[\hat{a}^{\dagger 2}|g\rangle\langle e| + \hat{a}^2|e\rangle\langle g|\right],
 \end{aligned}
 \tag{2.124}$$

onde o parâmetro  $\chi = 2g^2/\delta$  (eq.A.15) (com  $g = g_{ei} = g_{gi}$ ) surge com essa eliminação e ocasiona o denominado “efeito Stark dinâmico”, com  $\delta = E_i - (E_e + E_g)/2$  sendo a dessintonia do terceiro nível eliminado adiabaticamente;  $\omega_0 = \omega_e - \omega_g$  é a frequência de transição do átomo,  $\lambda = 2g^2/\delta$  é a constante de acoplamento efetiva (eq.A.14) do campo com o átomo e  $\omega$  é a frequência do campo na cavidade. Observemos agora que o Hamiltoniano de interação  $H_i = \hbar\lambda\left[\hat{a}^{\dagger 2}|g\rangle\langle e| + \hat{a}^2|e\rangle\langle g|\right]$  difere do Hamiltoniano de interação do modelo Jaynes-Cummings de um fóton (eq. 2.98), nos operadores de aniquilação e de criação de fótons. Temos agora os operadores  $\hat{a}^2$  e  $\hat{a}^{\dagger 2}$ , respectivamente, que representam o fato de o campo perder ou ganhar dois fótons, a cada transição atômica.



# Capítulo 3

## Transferência de coerência átomo-campo e construção de estados quânticos

### 3.1 Transferência de coerência átomo-campo por um processo de dois fótons em um micromaser sem perdas.

#### 3.1.1 Introdução.

A geração de estados puros do campo eletromagnético em um micromaser tem se mostrado nos últimos anos um tópico muito importante para óptica quântica, como vimos no capítulo anterior. Estados não-clássicos como o estado comprimido [7] e o *gato de Schrödinger* [8] foram gerados e vários esquemas, denominados de “engenharia” de estados, foram propostos para a geração de estados quânticos arbitrários. Normalmente esses métodos tem o estado de vácuo  $|0\rangle$  como o estado inicial do campo e a energia necessária para construção de um dado estado pode ser obtida pelos átomos [17], por acréscimo coerente de um fóton [18], ou por um bombeamento de um campo clássico [23, 52]. Em qualquer caso os fótons são coerentemente adicionados ao campo que já está no estado puro (vácuo). Portanto seria interessante verificar como a geração de estados quânticos se realizaria em condições iniciais menos favoráveis, isto é, com um estado inicial de mistura estatística, por exemplo. O ponto central do método é a transferência progressiva de coerência dos átomos para o campo na cavidade. Os átomos são preparados inicialmente em uma superposição de estados circulares de Rydberg

(quando cruzam uma zona de Ramsey) e enviados um de cada vez a uma cavidade (com um alto  $Q$ ) onde um campo eletromagnético com um único modo é mantido inicialmente em um estado de mistura estatística. Os átomos interagem com o campo aproximadamente ressonante com a transição atômica.

Inicialmente determinamos o melhor tempo de interação para um único átomo, de tal forma que ocorra a máxima transferência de coerência do átomo para o campo. Fixamos esse tempo para todos os demais átomos e verificamos como se dá a transferência em função de cada átomo. Verificamos também que após um certo número de átomos passarem pela cavidade não ocorre mais a transferência de coerência, onde o campo na cavidade atinge um estado que denominamos de *estado final*. Nesta caso, classificamos esse estado quanto às propriedades não-clássicas da luz (parâmetro  $Q$  de Mandel e correlação de segunda ordem). Estudamos também o estado do campo gerado, utilizando a função de Husimi (função  $Q$ ) e a distribuição de probabilidade de fótons ( $P_n$ ).

A transferência de coerência dos átomos, convenientemente preparados, para o campo na cavidade consiste de um mecanismo importante para a investigação de aspectos quânticos da luz e da matéria. Ele também conduz a interessantes efeitos, tais como aprisionamento atômico de população [21, 22], por exemplo.

### 3.1.2 Modelo e Solução

Nosso modelo consiste na interação individual de  $N$  átomos (micromaser), considerados de três níveis em uma configuração tipo degrau (figura 3.1), com um campo eletromagnético quantizado, aprisionado em uma cavidade considerada perfeita. Tal modelo é descrito pelo Hamiltoniano de Jaynes-Cummings:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= E_e \hat{\sigma}_{ee} + E_i \hat{\sigma}_{ii} + E_g \hat{\sigma}_{gg} + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ &+ \hbar g_{ig} (\hat{a} \hat{\sigma}_{ig} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{gi}) + \hbar g_{ei} (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{ie} + \hat{a} \hat{\sigma}_{ei}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde os três primeiros termos representam as energias ( $E_g < E_i < E_e$ ) dos respectivos níveis atômico  $|g\rangle$ ,  $|i\rangle$ ,  $|e\rangle$  (figura 3.1). Os operadores de aniquilação e criação relativo ao modo da cavidade são dados por:  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ . Os operadores de transição dos níveis no subespaço do átomo são dados por:  $\hat{\sigma}_{ig} = |i\rangle\langle g|$ ,  $\hat{\sigma}_{gi} = |g\rangle\langle i|$ ,  $\hat{\sigma}_{ie} = |i\rangle\langle e|$  e  $\hat{\sigma}_{ei} = |e\rangle\langle i|$

e os operadores  $\hat{\sigma}_{ee}$ ,  $\hat{\sigma}_{ii}$ ,  $\hat{\sigma}_{gg}$  representam o número de ocupação dos respectivos níveis. As constantes de acoplamento relativos à cada nível são dadas por:  $g_{ig}$  e  $g_{ei}$ .

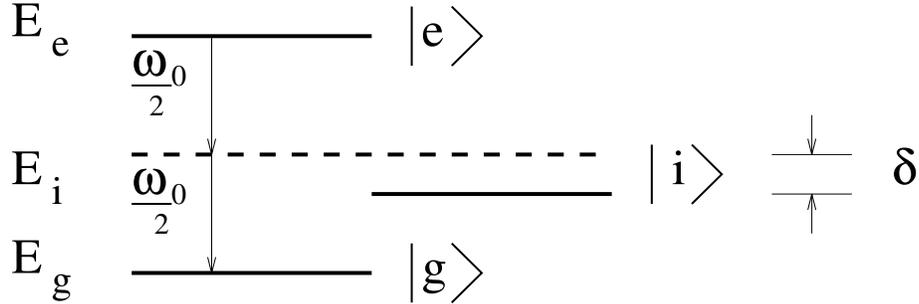


Figura 3.1: Representação esquemática de um átomo de três níveis, onde  $E_e < E_i < E_g$ .

Com a eliminação adiabática do nível intermediário  $|i\rangle$  (apêndice A), o Hamiltoniano efetivo na representação de interação é dado por [68]:

$$\hat{H}_I = \hbar \left( \frac{\omega_0}{2} + \chi \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) \hat{\sigma}_z + \hbar \lambda (\hat{a}^{\dagger 2} \hat{\sigma}_- + \hat{a}^2 \hat{\sigma}_+), \quad (3.2)$$

onde  $\lambda = 2g^2/\delta$  (com  $g = g_{ei} = g_{gi}$ ) é a constante de acoplamento efetiva átomo-campo (eq.A.14), com  $\delta = E_i - (E_e + E_g)/2$  sendo a dessintonia do terceiro nível eliminado adiabaticamente;  $\omega_0$  é a frequência de transição atômica;

$\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ ,  $\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|$  e  $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$  são os operadores atômicos, onde fixamos o ponto zero da energia entre os dois níveis  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ ;  $\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{a}$  são os operadores do campo. O coeficiente Stark dinâmico é dado por  $\chi = 2g^2/\delta$  (eq.A.15).

Dado o Hamiltoniano (3.2) determinamos o operador de evolução [69] desse sistema na base atômica:

$$\hat{U}^\dagger(t) = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_n(\gamma) & \hat{\beta}_n(\gamma) \\ \hat{\beta}_n(\epsilon) & \hat{\alpha}_n^\dagger(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

onde

$$\hat{\alpha}_n(\gamma) = \cos(\hat{\gamma}_n \lambda t) + i \frac{\sin(\hat{\gamma}_n \lambda t)}{\hat{\gamma}_n} \left( \frac{\Delta}{2\lambda} + \frac{\chi}{\lambda} (\hat{n} + 1) \right), \quad (3.4)$$

$$\hat{\alpha}_n(\epsilon) = \cos(\hat{\epsilon}_n \lambda t) + i \frac{\sin(\hat{\epsilon}_n \lambda t)}{\hat{\epsilon}_n} \left( \frac{\Delta}{2\lambda} + \frac{\chi}{\lambda} (\hat{n} - 1) \right), \quad (3.5)$$

$$\hat{\beta}_n(\gamma) = i \hat{a}^{\dagger 2} \frac{\sin(\hat{\gamma}_n \lambda t)}{\hat{\gamma}_n}, \quad (3.6)$$

$$\hat{\beta}_n(\epsilon) = i\hat{a}^2 \frac{\sin(\hat{\epsilon}_n \lambda t)}{\hat{\epsilon}_n}, \quad (3.7)$$

com

$$\hat{\gamma}_n^2 = \left( \frac{\Delta}{2\lambda} + \frac{\chi}{\lambda}(\hat{n} + 1) \right)^2 + (\hat{n} + 1)(\hat{n} + 2), \quad (3.8)$$

e

$$\hat{\epsilon}_n^2 = \left( \frac{\Delta}{2\lambda} + \frac{\chi}{\lambda}(\hat{n} - 1) \right)^2 + \hat{n}(\hat{n} - 1). \quad (3.9)$$

Onde  $\Delta = \omega_0 - 2\omega$  é uma pequena dessintonia entre a frequência do átomo ( $\omega_0$ ) e a do campo ( $\omega$ ).

Conhecendo o operador de evolução temporal e utilizando o operador densidade ( $\hat{\rho}^{ac}$ ) para descrever o sistema átomo-campo temos que:

$$\hat{\rho}^{ac}(t) = \hat{U}(t)\hat{\rho}^{ac}(0)\hat{U}^\dagger(t). \quad (3.10)$$

Onde, para  $t = 0$ , consideramos que átomo e campo podem ser fatorados, isto é,  $\hat{\rho}^{ac}(0) = \hat{\rho}^a(0) \otimes \hat{\rho}^c(0)$ . Com  $\hat{\rho}^a(0) = |\psi\rangle\langle\psi|$  o operador densidade do átomo, considerado em um estado puro e  $\hat{\rho}^c(0)$  o operador densidade do campo, inicialmente considerado em uma mistura estatística.

Os átomos são convenientemente preparados em uma superposição coerente de dois estados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ , antes de entrarem na cavidade, dados por:

$$|\psi\rangle = b|g\rangle + ae^{i\phi}|e\rangle, \quad (3.11)$$

onde  $a$  e  $b$  são números reais (diferentes de zero) e  $\phi$  uma fase relativa.

Após  $N$  átomos passarem pela cavidade encontramos uma relação de recorrência para os elementos de matriz do operador densidade do campo na base de estado de número (capítulo 2 eq. 2.117), obtido pelo traço parcial nas variáveis atômicas do operador densidade total do sistema, isto é,  $\hat{\rho}^c(t) = Tr_a[\hat{\rho}^{ac}(t)]$ :

$$\begin{aligned} \rho_N^c(n, n') &= \left[ a^2 \alpha_n(\gamma) \alpha_{n'}^*(\gamma) + b^2 \alpha_n(\epsilon) \alpha_{n'}^*(\epsilon) \right] \rho_{N-1}^c(n, n') \\ &+ a^2 \beta_n(\gamma) \beta_{n'}^*(\gamma) \sqrt{(n+2)(n+1)(n'+2)(n'+1)} \rho_{N-1}^c(n+2, n'+2) \\ &+ b^2 \beta_n(\epsilon) \beta_{n'}^*(\epsilon) \sqrt{n(n-1)n'(n'-1)} \rho_{N-1}^c(n-2, n'-2) \\ &+ iabe^{i\phi} \alpha_n(\gamma) \beta_{n'}^*(\gamma) \sqrt{(n'+2)(n'+1)} \rho_{N-1}^c(n, n'+2) \\ &+ iabe^{-i\phi} \alpha_n(\epsilon) \beta_{n'}^*(\epsilon) \sqrt{n'(n'+1)} \rho_{N-1}^c(n, n'-2) \\ &- iabe^{-i\phi} \beta_n(\gamma) \alpha_{n'}^*(\gamma) \sqrt{(n+2)(n+1)} \rho_{N-1}^c(n+2, n') \\ &- iabe^{i\phi} \beta_n(\epsilon) \alpha_{n'}^*(\epsilon) \sqrt{n(n-1)} \rho_{N-1}^c(n-2, n'). \end{aligned} \quad (3.12)$$

A partir dos elementos de matriz desse operador podemos encontrar as condições necessárias para a “purificação” do campo. Antes de determinarmos tais condições é importante observar que se os átomos forem previamente preparados no estado  $|e\rangle$  (ou  $|g\rangle$ ),  $b = 0$  (ou  $a = 0$ ), por exemplo, teríamos o campo descrito por:

$$\begin{aligned} \rho_N^c(n, n') &= a^2 \alpha_n(\gamma) \alpha_{n'}^*(\gamma) \rho_{N-1}^c(n, n') \\ + a^2 \beta_n(\gamma) \beta_{n'}^*(\gamma) &\sqrt{(n+2)(n+1)(n'+2)(n'+1)} \rho_{N-1}^c(n+2, n'+2). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Neste caso, não conseguiremos purificar o estado do campo na cavidade, se este for preparado inicialmente em um estado de mistura estatística (nosso caso), pois os elementos de matriz do operador densidade do campo, dado acima, só possui elementos na diagonal, sendo os demais todos nulos, logo  $\rho_N^c(n, n')$  será sempre nulo para  $n \neq n'$ . Isto é, vejamos o elemento da matriz densidade  $\rho_1^c(0, 1)$ , por exemplo, para o caso do primeiro átomo ( $N = 1$ , excitado) ter passado pela cavidade, teremos:

$$\begin{aligned} \rho_1^c(0, 1) &= a^2 \alpha_0(\gamma) \alpha_1(\gamma) \rho_0^c(0, 1) \\ + a^2 \beta_0(\gamma) \beta_1(\gamma) &2\sqrt{3} \rho_0^c(2, 3). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Podemos observar que  $\rho_1^c(0, 1)$  se anula, pois inicialmente o campo na cavidade está em um estado de mistura estatística, isto é,  $\rho_0^c(0, 1)$  e  $\rho_0^c(2, 3)$  são nulos.

Para determinar o grau de pureza (transferência de coerência) usamos o parâmetro  $\zeta$  definido como,

$$\zeta = 1 - Tr [(\rho^c)^2] = 1 - \sum_{n, n'} |\rho_N^c(n, n')|^2. \quad (3.15)$$

Se  $\zeta = 0$ , isto significa que  $\hat{\rho}^c$  representa um estado puro. Podemos agora verificar quais são as melhores condições para que isso ocorra. Neste trabalho consideramos para o estado do campo inicial dois estado de mistura em particular, separadamente. O estado térmico ( $\langle \hat{n}(0) \rangle = \bar{n}$ ),

$$\hat{\rho}_T^c(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n} + 1)^{n+1}} |n\rangle \langle n|, \quad (3.16)$$

e o “estado coerente misturado”, com  $\langle \hat{n}(0) \rangle = |\alpha|^2$ , dado por:

$$\hat{\rho}_{co}^c(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!} |n\rangle \langle n|. \quad (3.17)$$

### 3.1.3 Resultados

Tomamos primeiramente como procedimento a inspeção da evolução temporal de  $\zeta(t)$  após a passagem de um átomo. A partir desse escolhemos o tempo de interação que melhor purificou o estado inicial, assim os próximos átomos encontrarão o campo na cavidade em um estado menos misturado. A figura (3.2) mostra  $\zeta$  em função do tempo depois de passados 1, 20 e 100 átomos, todos preparados igualmente com  $a = b = 1/\sqrt{2}$ ,  $\Delta/\lambda = \chi/\lambda = 1$  e  $\phi = 0$ . Isto é, tomamos o campo inicialmente no estado térmico com  $\bar{n} = 10$ , calculamos a “purificação” em função do tempo primeiramente para um átomo (figura 3.2a). Escolhemos o tempo ( $\tau = 12.2/\lambda$ ) que melhor “purificou” o estado inicial do campo na cavidade, sem que o número médio de fótons diminuisse. Novamente preparamos o campo na cavidade em um estado térmico igual ao anterior, enviamos 19 átomos, um de cada vez, considerando o tempo de interação encontrando anteriormente ( $\tau = 12.2/\lambda$ ) para cada átomo, depois calculamos a “purificação” em função do tempo para o vigésimo átomo (figura 3.2b) e verificamos qual o tempo que melhor “purificou” o estado do campo gerado pelos 19 átomos. Analogamente, preparamos a cavidade em um estado térmico com  $\bar{n} = 10$  e geramos um estado enviando 99 átomos, um de cada vez. Fixado o tempo de interação encontrado anteriormente para cada átomo, calculamos a “purificação” em função do tempo para o centésimo átomo (figura 3.2c). Há vários tempos que purificam o estado inicial, porém nem todos mantêm  $\bar{n} \geq 10$ . Assim, outra consideração imposta foi que o número médio de fótons dentro da cavidade deveria aumentar ou permanecer constante. A fim de determinarmos o melhor tempo de interação, agora com a nova condição, examinamos o estado após  $N$  átomos passarem pela cavidade, e fixamos que o estado final do campo deveria ser mais puro que o estado inicial. Por simplicidade escolhemos o mesmo tempo de interação para todos os átomos.

A figura (3.3) nos mostra  $\zeta$  em função de  $\lambda T$  para o estado final, isto é, passamos 199 átomos pela cavidade, um de cada vez, e determinamos  $\zeta(T)$  para o ducentésimo átomo. A partir dessas condições observamos pelas figuras (3.3) e (3.4) que o melhor tempo para a “purificação” é  $T \approx 12.2/\lambda$ .

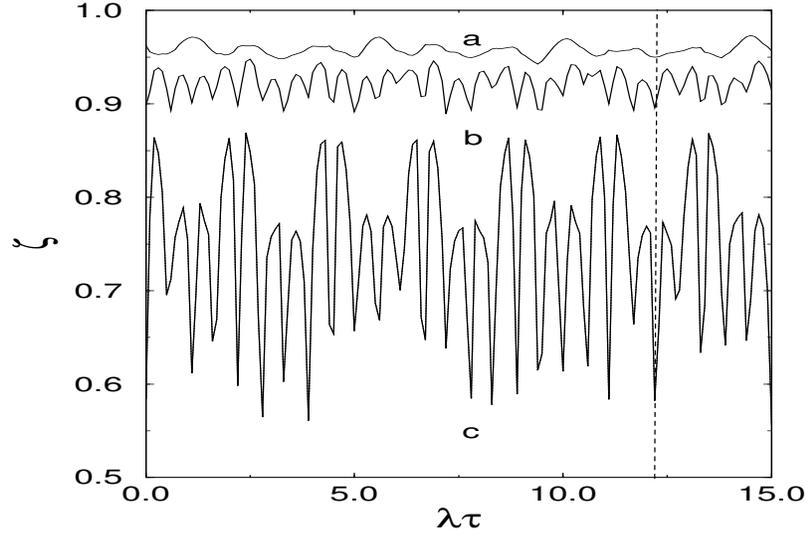


Figura 3.2: Pureza do campo em função do tempo, sendo o estado inicial o térmico com um número médio de fótons igual a  $\bar{n} = 10$ , depois de passarem (a)  $N = 1$  átomo, (b)  $N = 20$  átomos e (c)  $N = 100$  átomos, com  $a = b = 1/\sqrt{2}$ ,  $\Delta/\lambda = \chi/\lambda = 1$  e  $\phi = 0$ . Notemos que em todos os casos  $t = (N - 1)12.2/\lambda + \tau$ . A linha tracejada indica o melhor tempo de interação  $T = 12.2/\lambda$ .

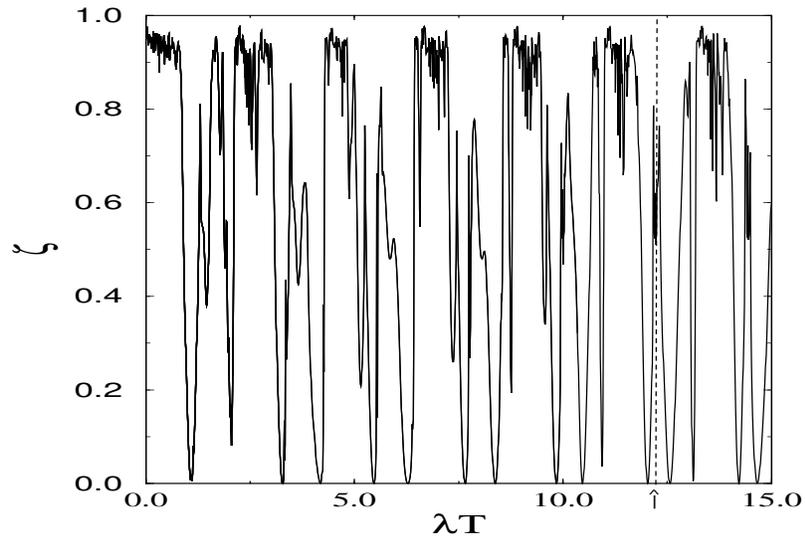


Figura 3.3: “Purificação” do *estado final* do campo em função do tempo de interação. A linha tracejada indica o melhor tempo  $T = 12.2/\lambda$ . Utilizamos os mesmos parâmetros da figura 3.2, para  $N = 200$  átomos.

Observemos também que para outros tempos a “purificação” é mais acentuada, porém não temos um aumento de energia (número médio de fótons), pelo contrário, os átomos subtraem os que já estavam na cavidade (figura 3.4).

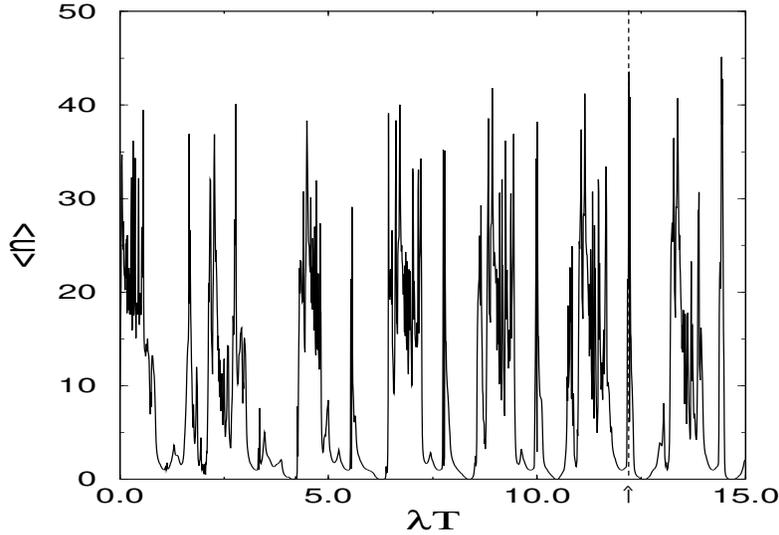


Figura 3.4: Número médio de fótons do *estado final* do campo em função do tempo de interação. A linha tracejada indica o melhor tempo  $T = 12.2/\lambda$ . Utilizamos os mesmos parâmetros da figura 3.2, para  $N = 200$  átomos.

Fixado o melhor tempo podemos analisar como o campo muda com os sucessivos átomos entrando na cavidade. Na figura (3.5) temos  $\zeta$  como função do número de átomos, para ambos os estado iniciais do campo, o térmico e o coerente misturado. Notemos, primeiramente, que a partir de 100 átomos a “purificação” se altera substancialmente, para ambos os estados, e satura ( $\zeta \approx 0.53$ ) em torno de  $N = 200$  átomos, isto é, os próximos átomos ao entrarem na cavidade não modificam mais a “purificação”. Para o estado coerente misturado observamos que o ganho de coerência, para os primeiros 100 átomos, é mais acentuada que a do estado térmico. Tal comportamento pode ser entendido se compararmos a distribuição do número de fótons iniciais para ambos os estados, com a distribuição final do estado gerado.

Na figura (3.6) temos a distribuição do número de fótons para o estado final, sendo o estado inicial o térmico. Notemos que esta têm uma forma global similar a uma distribuição Poissoniana, a despeito das oscilações. Portanto é razoável esperar que o estado final gerado para esse tempo seja alcançado mais facilmente quando o estado inicial é o estado coerente misturado, do que quando é o térmico, este com uma

distribuição não simétrica (geométrica). O campo gerado apresenta também uma forte oscilação em sua distribuição de número de fótons, figura (3.6) que caracteriza o estado do tipo “gato-de-Schrödinger” [70]. Verificamos também, figura (3.7), o comportamento do número médio de fótons na cavidade em função do número de átomos. Encontramos um aumento da energia na cavidade ( $\bar{n} \approx 32$  fótons) para ambos os estados iniciais, após 200 átomos passarem pela cavidade, partindo de  $\bar{n} = 10$ .

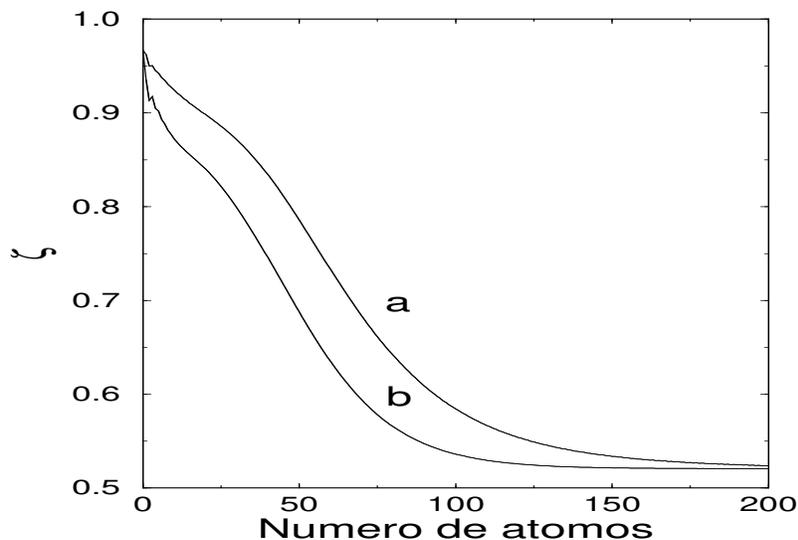


Figura 3.5: Pureza do estado do campo em função do número de átomos que cruzam a cavidade. (a) para o estado inicial o térmico, (b) para o estado inicial o estado coerente misturado. Número médio de fótons  $\bar{n} = 10$ .

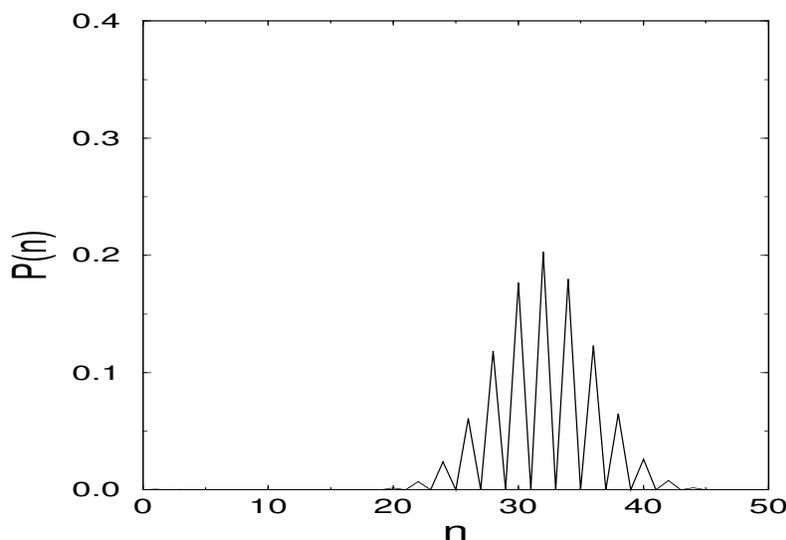


Figura 3.6: Distribuição de número de fótons do *estado final* do campo na cavidade ( $N = 200$  átomos). O estado inicial do campo é o estado térmico, com  $\bar{n} = 10$ .

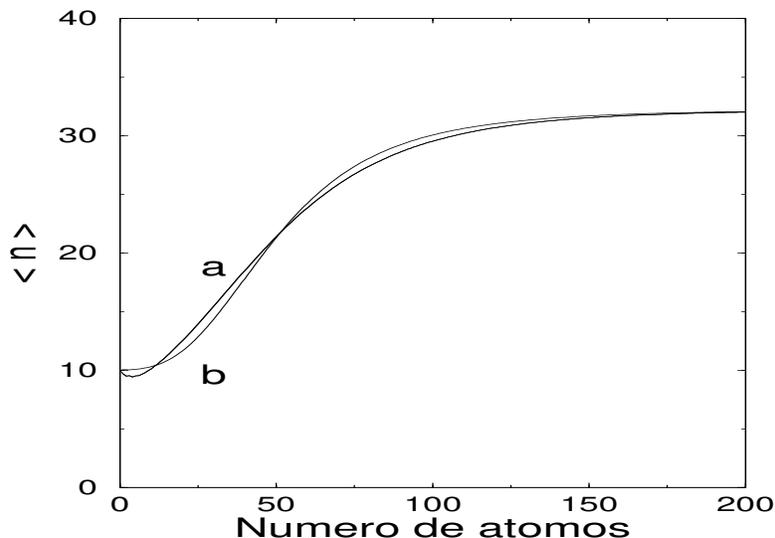


Figura 3.7: Número médio de fótons do campo em função do número de átomos que cruzam a cavidade. (a) para o estado inicial térmico, (b) para o estado inicial o estado coerente misturado.

### 3.1.4 Estudo das Propriedades Não-Clássicas.

Outro aspecto interessante, além de os campos gerados serem mais puros que o inicial, são as propriedades não-clássicas, no sentido de que eles podem apresentar estatísticas sub-Poissonianas e/ou anti-agrupamento. Na figura (3.8) temos o parâmetro  $Q$  de Mandel, definido como  $Q = \Delta \hat{n}^2 / \langle \hat{n} \rangle - 1$ , em função do número de átomos. Observemos que ambos os estados, térmico figura (3.8a) e coerente misturado figura (3.8b), tornam-se sub-Poissoniano após 100 átomos terem cruzado a cavidade. Contudo, existe uma importante diferença entre os dois casos, quando poucos átomos passam pela cavidade. Sendo o estado inicial o térmico o campo torna-se menos super-Poissoniano suavemente, enquanto que, sendo o estado inicial o estado coerente misturado, este torna-se super-Poissoniano, isto é, o parâmetro  $Q$  aumenta até um valor máximo (aproximadamente depois de 30 átomos passarem pela cavidade) e começa a decrescer suavemente tornado-se sub-Poissoniano, com um valor de  $Q$  bem próximo ao do estado gerado a partir do estado térmico. Em ambos os casos o campo torna-se anti-agrupado após a injeção de 100 átomos.

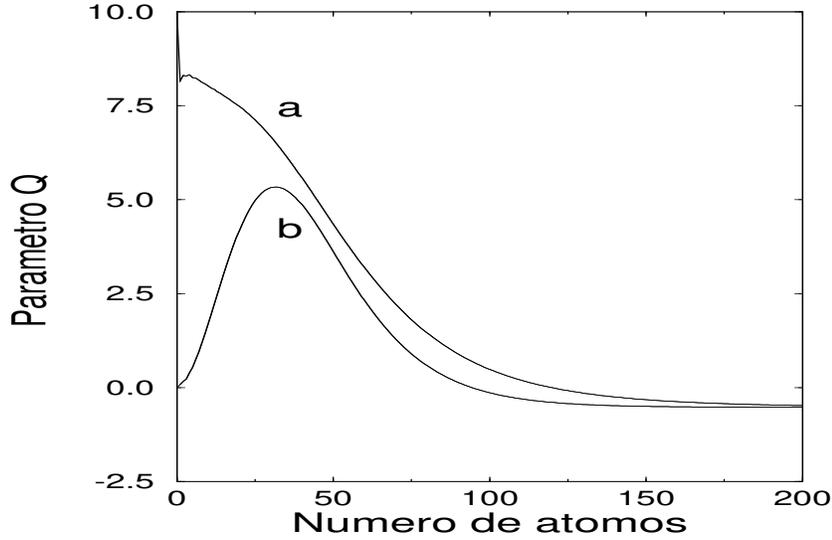


Figura 3.8: Parâmetro  $Q$  de Mandel do campo em função do número de átomos que cruzam a cavidade. (a) para o estado inicial térmico, (b) para o estado inicial o estado coerente misturado.

Estudamos também mais detalhes do campo gerado através da função de quasiprobabilidade no espaço de fase.

### 3.1.5 Espaço de fase

As distribuições de quasiprobabilidade tem-se tornado uma importante ferramenta não somente para caracterizar os estados quânticos, mas também para a reconstrução desses estados [71]. Nós a utilizaremos para caracterizar o campo produzido na cavidade. Para este caso é útil a representação de quasiprobabilidades em séries [14]

$$P(\beta; s) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1+s)^k}{(1-s)^{k+1}} \langle \beta, k | \hat{\rho}_N^c | \beta, k \rangle. \quad (3.18)$$

Podemos representar o operador densidade do campo como  $\hat{\rho}_N^c = \sum_{n,n'} \rho_N^c(n, n') |n\rangle \langle n'|$ , onde os elementos de matriz  $\rho_N^c(n, n')$  são dados pela equação (3.12). Para  $s = -1$  temos a função de Husimi (função  $Q$ ) e para  $s = 0$  a função de Wigner. Na figura (3.9) temos as curvas de nível da função  $Q$  depois de  $N = 200$  átomos passarem pela cavidade, para um campo inicialmente preparado no estado térmico. Notemos que 4 picos são formados em torno da origem, indicando que uma certa simetria da função  $Q$  em torno da origem é preservada durante o processo de geração. É importante também ressaltar que, para uma escolha conveniente dos parâmetros podemos obter uma subtração de fótons na cavidade levando o campo a um estado de um fóton. Este

caso simples não foi objeto de estudo em nosso trabalho, pois estamos interessados nos casos em que possamos construir um estado em que não haja subtração de energia, como estabelecido inicialmente.

A quasiprobabilidade fortemente sugere que o estado final do campo é constituído por uma superposição de 4 distribuições tipo Gaussiana deformadas, semelhantes a um estado comprimido (figuras 3.9 e 3.10). Conjecturamos assim que o estado resultante é de fato alguma espécie de superposição de 4 estados que apresentam “compressão”. Este é também reforçado pelo fato que a distribuição do número de fótons apresenta uma forte oscilação, característica desse tipo de superposição [72]. Devido ao fato que nosso método é baseado em uma interação de dois fótons, condição essa usada para geração de estados comprimidos, é de se esperar tal comportamento [73, 74, 75]. Ressaltamos que nosso objetivo principal foi encontrar um processo de “purificação” de estados, mesmo partindo de um estado altamente misturado, e não estabelecer mais um esquema de engenharia de estados.

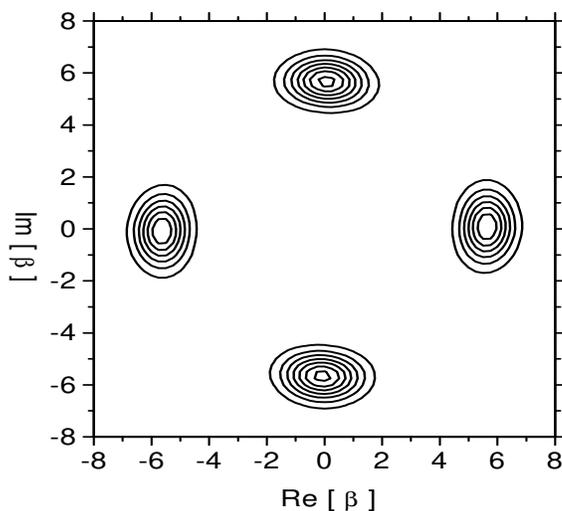


Figura 3.9: Curvas de nível da função  $Q$  do campo na cavidade ( $N = 200$  átomos), para o estado inicial do campo o estado térmico, com  $\bar{n} = 10$ .

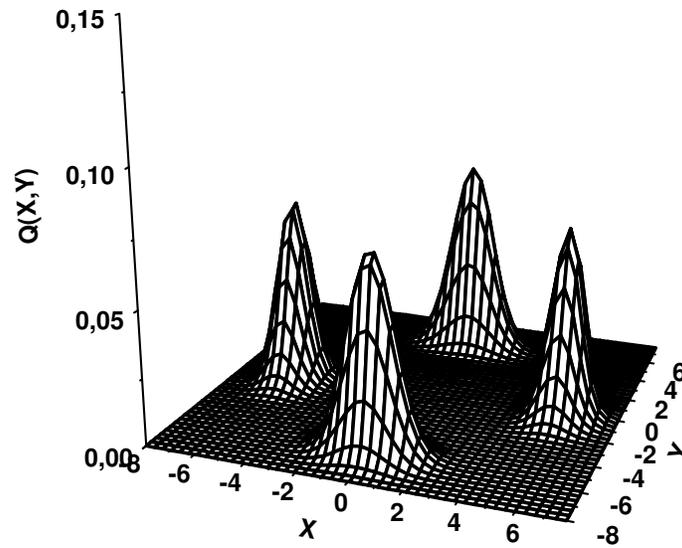


Figura 3.10: Função de quasiprobabilidade de Husimi (função  $Q$ ), onde  $X = Re(\beta)$  e  $Y = Im(\beta)$ .  $N = 200$  átomos e o estado inicial do campo o estado térmico, com  $\bar{n} = 10$

## 3.2 Influência de um meio tipo Kerr na transferência de coerência átomo-campo em um micromaser de dois fótons.

### 3.2.1 Introdução.

Nesta seção investigamos a transferência de coerência dos átomos para o campo utilizando novamente o MJC de dois fótons, acrescentando agora um meio tipo Kerr [50, 76, 77]. Discutimos também as propriedades não-clássicas do campo quantizado gerado na cavidade, como o parâmetro  $Q$  de Mandel e a coerência de segunda ordem. Utilizamos a distribuição de fótons e a função de quasiprobabilidade de Husimi (função  $Q$ ) para caracterizar o estado do campo gerado.

O sistema considerado é análogo ao estudado na seção anterior (3.1), isto é,  $N$ -átomos de dois níveis preparados inicialmente em uma superposição coerente de dois estados (eq. 3.11), são injetados um de cada vez em uma cavidade sem perdas, inicialmente no estado térmico. Os átomos interagem com o campo quantizado e com o meio tipo Kerr dentro da cavidade, cuja frequência do campo é sintonizada para que haja uma transição de dois fótons. Este meio pode ser entendido, em analogia com a mecânica clássica, como um oscilador anarmônico [15, 78, 79].

Encontramos vários trabalhos que utilizam esse meio tipo Kerr para o estudo da interação átomo-campo, como por exemplo: R. R. Agarwal et al [15]; nesse trabalho eles propõem que esse meio tipo Kerr possa ser realizado considerando dois átomos de Rydberg na cavidade, um deles comportando-se como um átomo de dois níveis, sofrendo transições de dois fótons e o outro como um oscilador anarmônico com frequência igual a do campo. Encontramos também no trabalho de Buzek et al [50], a proposta de considerar este meio como um cristal que preenche toda a cavidade, sendo que este possui um orifício de tal modo que o átomo possa entrar na cavidade. Em ambos modelos e em nosso caso também, o tempo de resposta desse meio é considerado rápido, de tal modo que o mesmo acompanha o campo adiabaticamente. Ainda, no trabalho Yurke et al [80] encontramos a utilização de um meio não-linear para a geração do estado *gato de Schrödinger*. D. F. Walls et al, [81] com base no trabalho de Imamoglu et al [82], propõem a geração de um meio não-linear tipo Kerr, com um único átomo

colocado em uma microcavidade. Neste, se investiga o sistema acoplado átomo-campo na representação dos estados vestidos utilizando o Hamiltoniano efetivo  $\hat{H}_{nl} = \eta(\hat{a}^\dagger)^2\hat{a}^2$  para descrever a interação do meio não-linear.

O interesse por esse sistema tem crescido nos últimos anos, o que nos motivou a utilizá-lo na investigação da transferência de coerência e das propriedades não-clássicas dos estados quânticos gerados. De modo análogo ao trabalho anterior [49], procuramos determinar através de uma análise baseada na inspeção das variáveis envolvidas na interação átomo-campo, os melhores valores que permitisse uma transferência de coerência mais eficaz sem que houvesse perdas de fótons na cavidade. Como o número de variáveis é grande procuramos determinar o menor tempo de interação fixando os demais parâmetros, buscando assim a otimização da transferência de coerência átomo-campo. Com a determinação desse tempo inspecionamos as outras variáveis a fim de melhorar ainda mais nossos resultados. Lembrando também que a outra condição imposta foi que o número médio de fótons na cavidade não diminuísse, isto é, os átomos não deveriam retirar energia da cavidade. Obtidos os melhores parâmetros investigamos o estado do campo gerado através do cálculo das funções  $Q$  e  $e$  e da distribuição de probabilidade do número de fótons.

### 3.2.2 Modelo e Solução.

Um átomo de três níveis interagindo com um único modo de um campo eletromagnético quantizado aprisionado em uma cavidade (considerada perfeita) mais um meio não-linear tipo Kerr (na aproximação de onda girante) é dado por [83]:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= E_e\hat{\sigma}_{ee} + E_i\hat{\sigma}_{ii} + E_g\hat{\sigma}_{gg} + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \\ &+ \omega'\hat{b}^\dagger\hat{b} + q\hat{b}^{\dagger 2}\hat{b}^2 + p(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{b}^\dagger\hat{a}) \\ &+ \hbar g_{ig}(\hat{a}\hat{\sigma}_{ig} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{gi}) + \hbar g_{ei}(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{ie} + \hat{a}\hat{\sigma}_{ei}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

O meio não-linear é modelado como um oscilador anarmônico [15, 78, 79] onde  $\hat{b}^\dagger$  e  $\hat{b}$  são, respectivamente, os operadores de criação e aniquilação do meio não-linear; e  $\omega'$  a frequência desse meio. O parâmetro  $q$  nos dá a anarmonicidade e  $p$  o acoplamento do meio tipo Kerr com o modo do campo. Assim,  $\omega'\hat{b}^\dagger\hat{b}$  representa o campo gerado pelo meio;  $q\hat{b}^{\dagger 2}\hat{b}^2$  a não-linearidade do meio e  $p(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{b}^\dagger\hat{a})$  a interação do meio com o campo na cavidade.

Considerando o tempo de resposta do meio rápido o suficiente, de tal modo que este segue o campo adiabaticamente, o Hamiltoniano total (3.19) pode ser escrito (apêndice C):

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} = & E_e \hat{\sigma}_{ee} + E_i \hat{\sigma}_{ii} + E_g \hat{\sigma}_{gg} + \hbar \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \\ & + \hbar \eta \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 + \hbar g_{ig} (\hat{a} \hat{\sigma}_{ig} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{gi}) + \hbar g_{ei} (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{ie} + \hat{a} \hat{\sigma}_{ei}).\end{aligned}\quad (3.20)$$

onde  $\omega_c = \omega - p^2/\Delta'$  é a nova frequência do campo, com  $\Delta' = \omega - \omega'$ ;  $\eta = qp^4/\Delta'^4$  é a parte dispersiva da não-linearidade de terceira ordem do meio tipo Kerr (C.13).

Realizando agora a eliminação adiabática (apêndice A) do terceiro nível obtemos [84]:

$$\hat{H}_{ef} = \hbar \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \left( \frac{\omega_0}{2} + \chi \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) \hat{\sigma}_z + \hbar \eta \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 + \hbar \lambda (\hat{a}^{\dagger 2} \hat{\sigma}_- + \hat{a}^2 \hat{\sigma}_+), \quad (3.21)$$

onde  $\lambda = 2g^2/\delta$  (com  $g = g_{ei} = g_{gi}$ ) é a constante de acoplamento efetiva átomo-campo (eq.A.14), com  $\delta = E_i - (E_e + E_g)/2$  sendo a dessintonia do terceiro nível eliminado adiabaticamente;  $\omega_0$  a frequência do átomo. Os operadores de transição atômica são  $\hat{\sigma}_{-/+}$  e  $\hat{\sigma}_z$ ;  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  são os operadores de aniquilação e de criação de fótons na cavidade. O coeficiente do efeito Stark dinâmico é dado por  $\chi$  (apêndice A).

Utilizando o método do Stenholm [69] obtemos a solução exata do operador evolução  $\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar)$  para o Hamiltoniano efetivo acima (3.21). Analisando cuidadosamente esse Hamiltoniano podemos reescrevê-lo como:

$$\hat{H}_{ef} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I + \hat{H}_{II} + \hat{H}_{III} \quad (3.22)$$

onde

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \hbar \omega_c (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_z) \\ \hat{H}_I &= -\hbar (\chi - 2\eta) \\ \hat{H}_{II} &= \hbar \eta [(\hat{n}^2 - \hat{n}) + (2\hat{n} - 1) \hat{\sigma}_z] \\ \hat{H}_{III} &= \hbar \left[ \frac{\Delta}{2} + \hat{n} (\chi - 2\eta) + \eta \right] \hat{\sigma}_z \\ &+ \hbar (\chi - 2\eta) + \hbar \lambda (\hat{a}^{\dagger 2} \hat{\sigma}_- + \hat{a}^2 \hat{\sigma}_+).\end{aligned}\quad (3.23)$$

Novamente, consideramos uma dessintonia entre o átomo ( $\omega_0$ ) e o campo+meio ( $\omega_c$ ) dada por  $\Delta = \omega_0 - 2\omega_c$ .

Com a divisão do Hamiltoniano efetivo (3.22) obtemos as relações de comutação  $[\hat{H}_i, \hat{H}_j] = 0$  para  $i, j = 0, I, II, III$ , o que nos permite escrever, na representação

de interação, o operador evolução desse sistema como um produto de operadores de evolução, referentes aos respectivos Hamiltonianos  $\hat{H}_I$ ,  $\hat{H}_{II}$  e  $\hat{H}_{III}$ :

$$\hat{U}(t) = \hat{U}_I(t)\hat{U}_{II}(t)\hat{U}_{III}(t). \quad (3.24)$$

Onde:

$$\hat{U}_I(t) = e^{-i(\chi-2\eta)t}, \quad (3.25)$$

representa uma mudança de fase global, podendo ser desprezada pois não influencia nas medidas físicas. É interessante notar que o coeficiente  $\chi - 2\eta$  pode ser entendido como uma competição entre o efeito Stark dinâmico ( $\chi$ ) e o meio tipo Kerr ( $\eta$ ).

Agora para:

$$\hat{U}_{II}(t) = \begin{pmatrix} e^{i\Theta_2(\hat{n})} & 0 \\ 0 & e^{i\Theta_1(\hat{n})} \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

onde:

$$\Theta_1(\hat{n}) = (\hat{n}^2 - 3\hat{n} + 1)\eta t \quad (3.27)$$

$$\Theta_2(\hat{n}) = (\hat{n}^2 + \hat{n} - 1)\eta t. \quad (3.28)$$

Temos uma contribuição também dada por uma fase, porém relativa, pois essa é dependente do número de fótons  $n$ . Aqui temos somente a influência do meio tipo Kerr ( $\eta$ ) agindo sobre o sistema átomo-campo. Para  $\hat{U}_{III}$  temos:

$$\hat{U}_{III}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_n(\gamma) & \hat{\beta}_n(\gamma) \\ \hat{\beta}_n(\epsilon) & \hat{\alpha}_n^\dagger(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

onde

$$\hat{\alpha}_n(\gamma) = \cos(\hat{\gamma}_n \lambda t) + i \frac{\sin(\hat{\gamma}_n \lambda t)}{\hat{\gamma}_n} \left( \frac{\Delta}{2\lambda} + \frac{\Lambda}{\lambda}(\hat{n} + 1) + \frac{\eta}{\lambda} \right) \quad (3.30)$$

$$\hat{\beta}_n(\gamma) = i \hat{a}^{\dagger 2} \frac{\sin(\hat{\gamma}_n \lambda t)}{\hat{\gamma}_n} \quad (3.31)$$

$$\hat{\beta}_n(\epsilon) = i \hat{a}^2 \frac{\sin(\hat{\epsilon}_n \lambda t)}{\hat{\epsilon}_n} \quad (3.32)$$

$$\hat{\alpha}_n(\epsilon) = \cos(\hat{\epsilon}_n \lambda t) + i \frac{\sin(\hat{\epsilon}_n \lambda t)}{\hat{\epsilon}_n} \left( \frac{\Delta}{2\lambda} + \frac{\Lambda}{\lambda}(\hat{n} - 1) + \frac{\eta}{\lambda} \right) \quad (3.33)$$

e

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_n^2 &= \left[ \frac{\Delta}{2\lambda} + \frac{\Lambda}{\lambda}(\hat{n} + 1) + \frac{\eta}{\lambda} \right]^2 + (\hat{n} + 1)(\hat{n} + 2), \\ \hat{\epsilon}_n^2 &= \left[ \frac{\Delta}{2\lambda} + \frac{\Lambda}{\lambda}(\hat{n} - 1) + \frac{\eta}{\lambda} \right]^2 + \hat{n}(\hat{n} - 1),\end{aligned}\quad (3.34)$$

com:

$$\Lambda = \chi - 2\eta. \quad (3.35)$$

Conhecendo o operador de evolução do sistema átomo-campo obtemos o operador densidade:

$$\hat{\rho}^{ac}(t) = \hat{U}_{II}(t) \hat{U}_{III}(t) \hat{\rho}^{ac}(0) \hat{U}_{III}^\dagger(t) \hat{U}_{II}^\dagger(t), \quad (3.36)$$

onde  $\hat{\rho}^{ac}(0) = \hat{\rho}^a(0) \otimes \hat{\rho}^c(0)$ , com os respectivos operadores densidades do átomo e do campo dados pelas equações:

$$\hat{\rho}_T^c(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n} + 1)^{n+1}} |n\rangle \langle n|, \quad (3.37)$$

$$\hat{\rho}^a(0) = |\psi\rangle \langle \psi|, \quad (3.38)$$

com  $|\psi\rangle = b|g\rangle + ae^{i\phi}|e\rangle$ .

Pelo traço parcial nas variáveis atômica do operador densidade total do sistema (3.36) obtemos o operador densidade do campo,  $\hat{\rho}^c(t) = Tr_a[\hat{\rho}^{ac}(t)]$ . Assim, após  $N$  átomos passarem pela cavidade, determinamos uma relação de recorrência para os elementos da matriz densidade do campo  $\rho_N^c(n, n')$  na base de estado de número.

$$\begin{aligned}\rho_N^c(n, n') &= \left[ a^2 e^{i[\Theta_1(n') - \Theta_1(n)]} \alpha_n(\gamma) \alpha_{n'}^\dagger(\gamma) + b^2 e^{i[\Theta_2(n') - \Theta_2(n)]} \alpha_n(\epsilon) \alpha_{n'}^\dagger(\epsilon) \right] \rho_{N-1}^c(n, n') \\ &+ a^2 e^{i[\Theta_1(n') - \Theta_1(n)]} \beta_n(\gamma) \beta_{n'}(\gamma) \sqrt{(n+2)(n+1)(n'+2)(n'+1)} \rho_{N-1}^c(n+2, n'+2) \\ &+ b^2 e^{i[\Theta_2(n') - \Theta_2(n)]} \beta_n(\epsilon) \beta_{n'}(\epsilon) \sqrt{n(n-1)n'(n'-1)} \rho_{N-1}^c(n-2, n'-2) \\ &+ iabe^{i[\Theta_1(n') - \Theta_1(n) + \phi]} \alpha_n(\gamma) \beta_{n'}(\gamma) \sqrt{(n'+2)(n'+1)} \rho_{N-1}^c(n, n'+2) \\ &+ iabe^{i[\Theta_2(n') - \Theta_2(n) - \phi]} \alpha_n(\epsilon) \beta_{n'}(\epsilon) \sqrt{n'(n'+1)} \rho_{N-1}^c(n, n'-2) \\ &- iabe^{i[\Theta_1(n') - \Theta_1(n) - \phi]} \beta_n(\gamma) \alpha_{n'}^\dagger(\gamma) \sqrt{(n+2)(n+1)} \rho_{N-1}^c(n+2, n') \\ &- iabe^{i[\Theta_2(n') - \Theta_2(n) + \phi]} \beta_n(\epsilon) \alpha_{n'}^\dagger(\epsilon) \sqrt{n(n-1)} \rho_{N-1}^c(n-2, n'),\end{aligned}\quad (3.39)$$

Neste caso também, a transferência de coerência só será possível se os  $N$ -átomos estiverem em uma superposição coerente de dois estados. Se os átomos inicialmente

forem preparados no estado excitado ( $b = 0$ , por exemplo), teremos para a relação de recorrência acima (3.39):

$$\begin{aligned} \rho_N^c(n, n') &= a^2 e^{i[\Theta_1(n') - \Theta_1(n)]\eta t} \alpha_n(\gamma) \alpha_{n'}^\dagger(\gamma) \rho_{N-1}^c(n, n') \\ &+ a^2 e^{i[\Theta_1(n') - \Theta_1(n)]\eta t} \beta_n(\gamma) \beta_{n'}(\gamma) \\ &\quad \sqrt{(n+2)(n+1)(n'+2)(n'+1)} \rho_{N-1}^c(n+2, n'+2). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Observemos, analogamente ao caso anterior (3.13), que os elementos da matriz densidade do campo  $\rho_N^c(n, n')$  dependem somente dos elementos  $\rho_{N-1}^c(n, n')$  e  $\rho_{N-1}^c(n+2, n'+2)$ . Como inicialmente consideramos o campo no estado de mistura estatística (3.37), a matriz densidade do campo permanecerá diagonal, após os  $N$ -átomos passarem pela cavidade.

Desse modo o meio tipo Kerr contribui com as fases (eq. 3.25 e eq. 3.26) e na mudança da frequência de Rabi, não alterando assim a relação de recorrência entre os elementos  $\rho_N^c(n, n')$  e  $\rho_{N-1}^c(n, n')$  (eq. 3.39), de tal modo a eliminar a condição dos átomos terem que ser preparados inicialmente no estado de superposição de dois estados, para que o campo na cavidade seja “purificado”.

### 3.2.3 Resultados

De modo análogo ao procedimento adotado no caso da seção anterior, seção 3.1, procuramos primeiramente o melhor tempo de interação átomo-campo fixando os demais parâmetros, para que a transferência progressiva de coerência dos átomos para o campo na cavidade fosse máxima, sem que houvesse perdas de fótons na cavidade.

Na figura (3.11) temos a variação temporal de  $\zeta = 1 - Tr[(\rho^c)^2]$  como uma medida da transferência de coerência dos átomos para o campo (“purificação”), em função do tempo, para (a) 1 átomo, (b) 50 átomos e c) 100 átomos. Podemos observar que o melhor tempo para uma ótima transferência progressiva de coerência de cada átomo, considerando que o número médio de fótons na cavidade não diminua, é  $T = 2.71/\lambda$  (linha vertical tracejada). Salientamos que existem outros tempos que nos permitem obter uma boa “purificação”, entretanto é conveniente escolher o menor deles, pois isto nos permite trabalhar num regime de tempo em que é possível passar todos os átomos sem considerar o amortecimento do campo na cavidade.

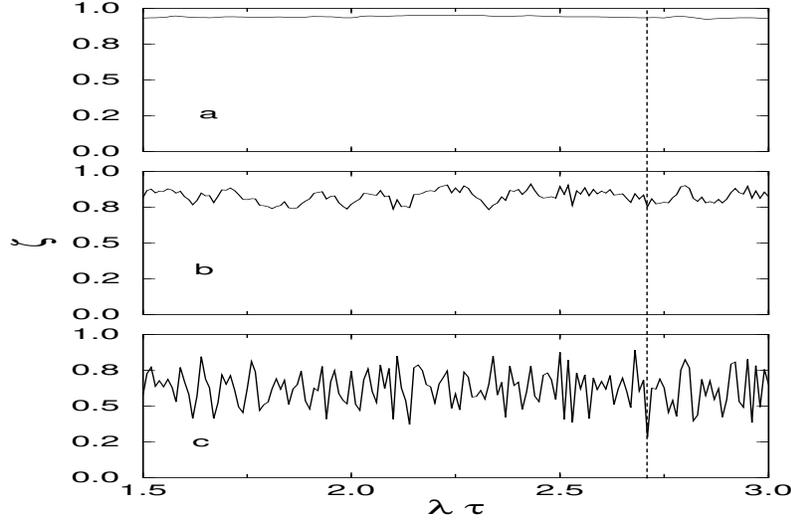


Figura 3.11: Pureza do campo em função do tempo, passados (a)  $N = 1$  átomo, (b)  $N = 50$  átomos e (c)  $N = 100$  átomos, com  $a = b = 1/\sqrt{2}$ ,  $\Delta/\lambda = \chi/\lambda = \eta/\lambda = 1.0$  ( $\Lambda/\lambda = -1$ ) e  $\phi = 0$ . O estado inicial do campo na cavidade é o estado térmico, com um número médio de fótons  $\bar{n} = 10$ . Em todos os casos  $t = (N - 1)2.71/\lambda + \tau$ . A linha vertical tracejada indica o melhor tempo  $T = 2.71/\lambda$ .

Nas figuras (3.12 e 3.13) mostramos  $\zeta$  e o número médio de fótons em função do tempo total de interação dos  $N$ -átomos, quando o estado do campo na cavidade se torna o *estado final*. Tomamos  $\phi = 0.0$ ,  $a = b = 1/\sqrt{2}$ ,  $\chi/\lambda = \eta/\lambda = 1.0$ ,  $\Delta/\lambda = 1.0$  e utilizamos  $N = 150$  átomos. Lembrando também que, inicialmente o estado do campo é o térmico com um  $\bar{n} = 10$ . A linha tracejada indica o tempo  $T = 2.71/\lambda$ . Podemos observar que o meio tipo Kerr mantém o caráter periódico obtido no caso anterior (seção 3.1, figuras 3.3 e 3.4), porém, encontramos agora mais oscilações para os tempos onde o campo é menos puro. Tal resultado pode ser compreendido observando que esse meio modifica as frequências  $\lambda\gamma_n$  e  $\lambda\epsilon_n$  (eq. 3.34).

Escolhido o mesmo tempo de interação para todos os átomos, determinamos a “purificação” ( $\zeta$ ) em função do número de átomos que passam pela cavidade. Observamos que a transferência de coerência dos átomos para o campo (figura 3.14a) é mais acentuada ( $\zeta \approx 0.24$ ) quando o meio tipo Kerr está presente na cavidade, em comparação com o caso estudado na seção anterior (3.1) ( $\zeta \approx 0.54$ ) (figura 3.14b). Já o número médio de fótons (figura 3.15a) tem inicialmente um decréscimo nos primeiros 5 átomos, voltando a crescer chegando a  $\bar{n} \approx 38$  fótons, em comparação com o caso anterior  $\bar{n} \approx 32$  fótons (figura 3.15b).

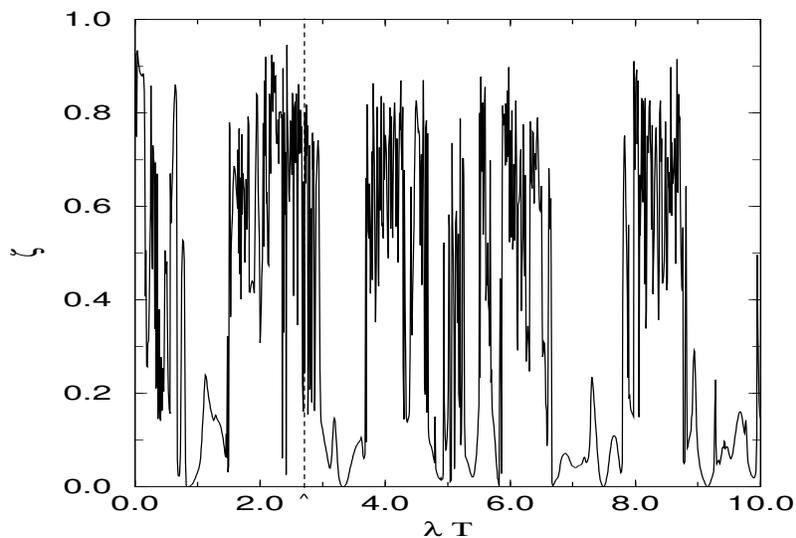


Figura 3.12: “Purificação” do *estado final* do campo em função do tempo de interação, para  $N=150$  átomos,  $\phi = 0.0$ ,  $a = b = 1/\sqrt{2}$ ,  $\chi/\lambda = \eta/\lambda = 1.0$ ,  $\Delta/\lambda = 1.0$  e  $\bar{n} = 10$ . A linha tracejada indica o melhor tempo  $T = 2.71/\lambda$ .

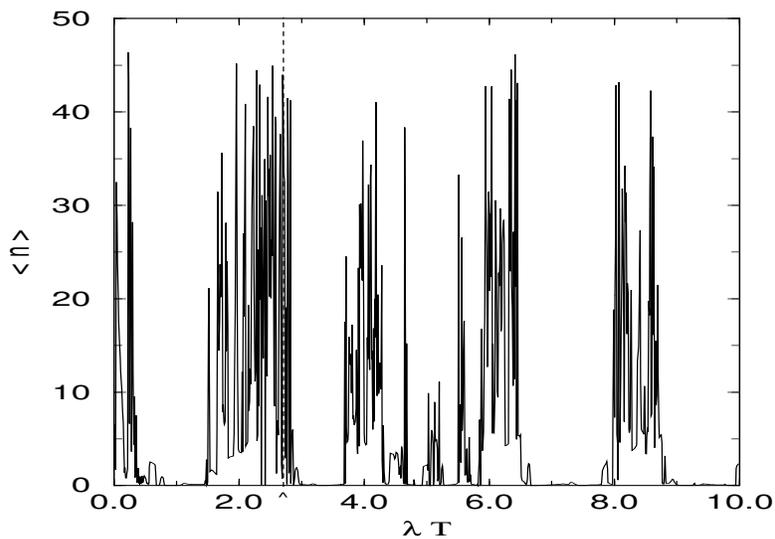


Figura 3.13: Número médio de fótons em função do tempo de interação, para  $N=150$  átomos,  $\phi = 0.0$ ,  $a = b = 1/\sqrt{2}$ ,  $\chi/\lambda = \eta/\lambda = 1.0$ ,  $\Delta/\lambda = 1.0$  e  $\bar{n} = 10$ . A linha tracejada indica o melhor tempo  $T = 2.71/\lambda$ .

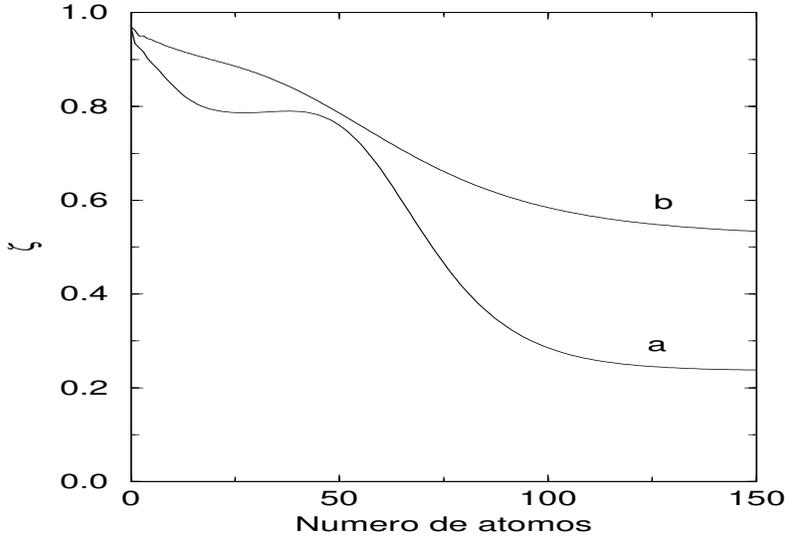


Figura 3.14: Pureza do campo ( $\zeta$ ) em função do número de átomos que cruzam a cavidade para: (a) Com o meio tipo Kerr e  $T = 2.71/\lambda$ , (b) Sem o meio tipo Kerr, com  $T = 12.2/\lambda$ , caso anterior, seção 3.1. Dados da figura (3.12).

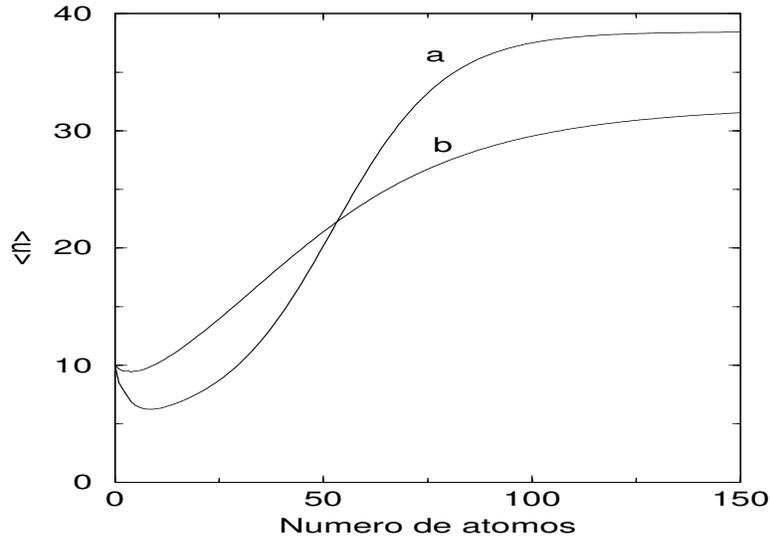


Figura 3.15: Número médio de fótons em função do número de átomos que cruzam a cavidade. Mesmos dados da figura (3.12). (a) Com meio tipo Kerr e  $T = 2.71/\lambda$ , (b) Sem o meio tipo Kerr, com  $T = 12.2/\lambda$ , caso anterior, seção (3.1).

Ao retirarmos a influência desse meio ( $\eta = 0$ ) e considerando o tempo de interação  $T = 2.71/\lambda$ , verificamos (figura 3.16) que o estado do campo praticamente não se altera, permanecendo em uma mistura estatística ( $\zeta \approx 0.9$ ), com um crescimento lento do número médio de fótons ( $\bar{n} = 12$ ) (figura 3.17), passados os mesmos números de átomos. Portanto, constatamos neste caso que o meio tipo Kerr propicia uma ótima transferência de coerência, além de, também diminuir sensivelmente o tempo de inte-

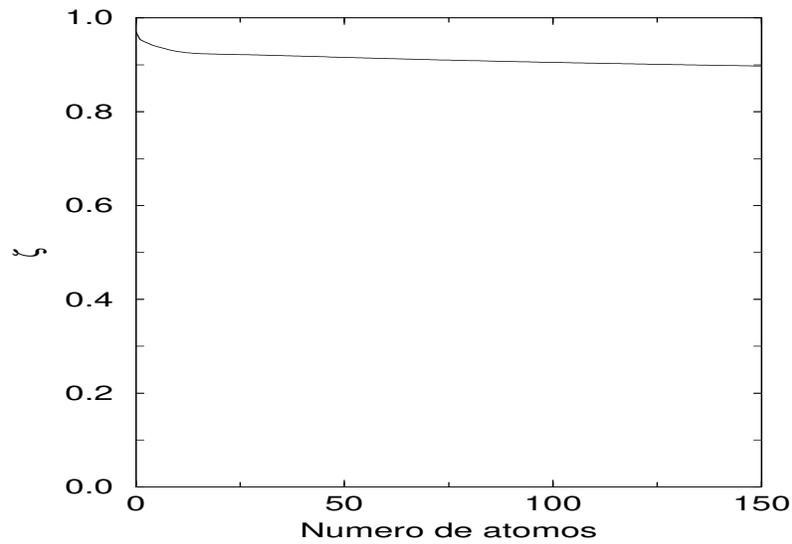


Figura 3.16: Pureza do campo ( $\zeta$ ) em função do número de átomos, sem o meio tipo Kerr. Com  $T = 2.71/\lambda$ ,  $\phi = 0.0$ ,  $a = b = 1/\sqrt{2}$ ,  $\chi/\lambda = \eta/\lambda = 1.0$  e  $\Delta/\lambda = 1.0$ .

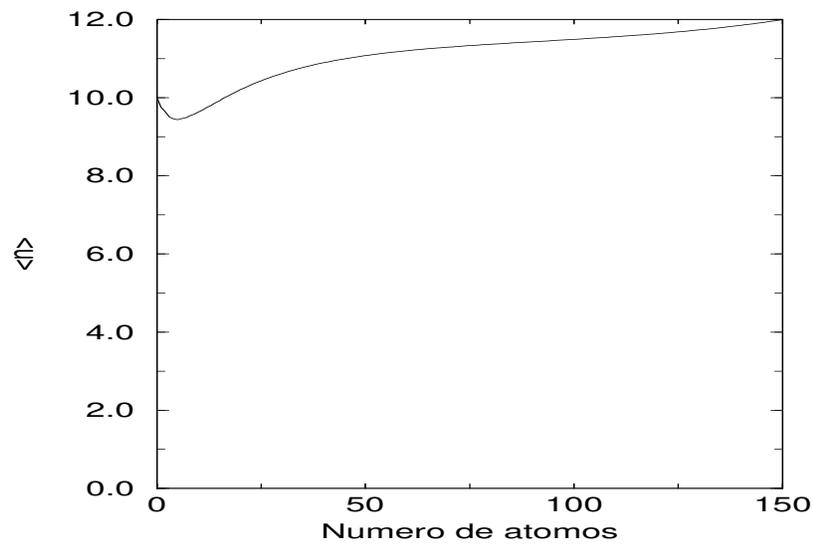


Figura 3.17: Número médio de fótons em função do número de átomos. Sem o meio tipo Kerr. Dados da figura (3.16).

ração átomo-campo em relação ao tempo usado na seção anterior (3.1) (sem o meio tipo Kerr).

Observamos nas equações (3.34) que a inclusão do meio tipo Kerr na cavidade modifica as frequências  $\lambda\gamma_n$  e  $\lambda\epsilon_n$ , entre outras mudanças. Temos também uma competição entre o efeito Stark dinâmico ( $\chi$ ) e o efeito não-linear, representado pelo parâmetro  $\Lambda = \chi - 2\eta$  (eq. 3.35), produzido pelo meio tipo Kerr ( $2\eta$ ). Desse modo, podemos anular a influência do efeito Stark com uma escolha apropriada para  $\eta$  ( $\eta = \chi/2$ ). Com essa escolha investigamos a transferência de coerência dos átomos para o campo na cavidade, fixando o mesmo tempo  $T = 2.71/\lambda$ . Constatamos que não houve uma melhora na “purificação” ( $\zeta \approx 0.56$ ), além do número de fótons na cavidade diminuir ( $\bar{n} \approx 2$ ). Tal resultado pode ser devido ao fato de as frequências  $\lambda\gamma_n$  e  $\lambda\epsilon_n$  se tornarem menores, o que resulta em uma troca de energia numa taxa mais baixa entre átomo e campo, e conseqüentemente uma perda de eficiência no mecanismo de transferência de coerência, visto que, com uma interação no limite dispersivo (sem troca de energia) não há transferência de coerência (apêndice B). Como fixamos o mesmo tempo de interação encontrado anteriormente, procuramos então determinar, ainda para  $\Lambda = 0$ , o melhor tempo de interação que nos desse uma melhor “purificação”. Neste caso, o resultado encontrado foi  $T = 2.12/\lambda$ , com uma menor “purificação” ( $\zeta = 0.32$ ), em relação ao primeiro caso (para  $T = 2.71/\lambda$ , com o meio Kerr), com  $\bar{n} \approx 47$  fótons.

Encontramos outros tempos que proporcionaram uma boa “purificação”, com um ganho no número médio de fótons, porém esses são várias ordens de grandeza maiores que os apresentados nessa tese. Lembrando que a escolha do menor tempo não foi uma condição inicial imposta, mas ela é conveniente, visto que, isto reforça a condição que assumimos em todo os nossos cálculos, de considerarmos a cavidade como sendo perfeita, isto é, não estamos considerando perdas pela mesma. Assim, ao escolhermos o menor tempo de interação podemos aproximar a condição ideal da real (cavidade com um fator de qualidade  $Q$  finito).

### 3.2.4 Influência da fase atômica na transferência de coerência

Na figura (3.18) mostramos que o meio tipo Kerr torna a transferência de coerência sensível à fase atômica ( $\phi$ ). Com uma escolha convenientemente de:  $\phi = (0.1 + l)\pi/2$ , onde  $l = 0, 2, 4, \dots$ , conseguimos otimizar a “purificação” do campo na cavidade e obter  $\zeta \approx 0.22$ . Observemos que o meio tipo Kerr vincula à interação átomo-campo (eq.

3.39) duas fases  $\Theta_1 = i(n^2 - 3n + 1)\eta t$  e  $\Theta_2 = i(n^2 + n - 1)\eta t$ , referentes aos coeficientes do operador evolução  $\hat{U}_{II}(t)$ . Essas fases se combinam com a fase atômica  $\phi$ , o que nos permite obter melhores resultados para a transferência de coerência átomo-campo variando  $\phi$ . Retirando a influência do meio tipo Kerr ( $\eta = 0$ ) verificamos que  $\zeta$  em função de  $\phi$  tem uma pequena alteração, mantendo ainda o campo em estado muito mais próximo de uma mistura estatística.

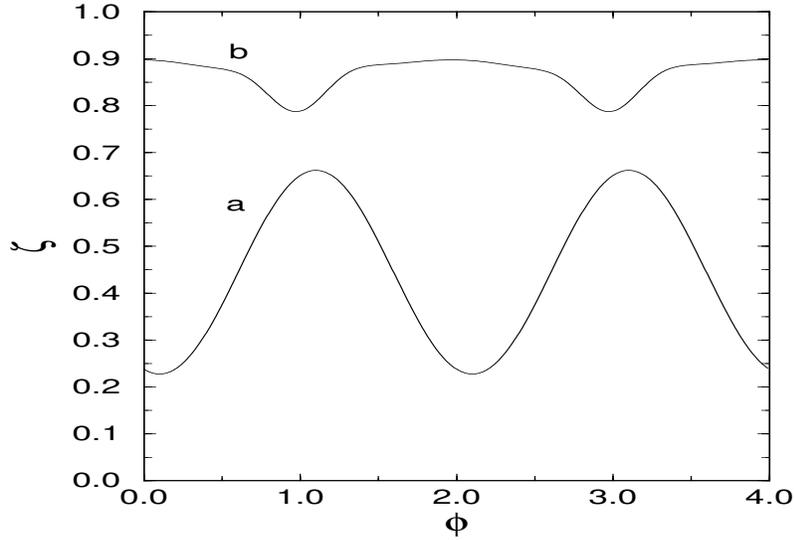


Figura 3.18: “Purificação” em função da fase atômica  $\phi$ .  $T = 2.71/\lambda$ ,  $\bar{n} = 10$ ,  $\Delta/\lambda = 1.0$ ,  $a = b = 1/\sqrt{2}$  e  $\chi/\lambda = \eta/\lambda = 1.0$ . (a) Com o meio Kerr, (b) sem o meio Kerr.

### 3.2.5 Estudo das Propriedades Não-Clássicas.

Observamos na figura (3.19) que o parâmetro  $Q$  de Mandel cresce para os primeiros 37 átomos, tal que o campo torna-se cada vez mais super-Poissoniano, chegando a  $Q \approx 16$ . A partir de então, com a passagem dos próximos átomos  $Q$  volta a cair e com  $N = 100$  átomos o campo torna-se sub-Poissoniano ( $Q \approx -0.2$ ), chegando aproximadamente a  $Q = -1$  após  $N = 150$  átomos. Na figura (3.20) observamos um comportamento análogo para coerência de segunda ordem  $g(2)$ , com aproximadamente 17 átomos temos um crescimento de  $g(2)$ , tornando o campo cada vez mais agrupado. A partir de então temos uma queda e para  $N = 100$  o campo já apresenta um caracter de anti-agrupamento, sofrendo pouca variação com os próximos 50 átomos.

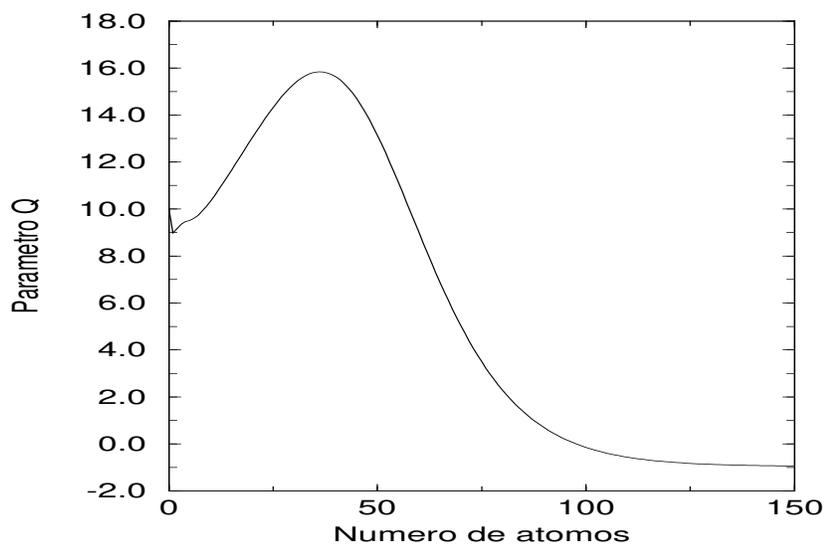


Figura 3.19: Parâmetro  $Q$  de Mandel em função do número de átomos, com o meio tipo Kerr.  $T = 2.71/\lambda$ ,  $\bar{n} = 10$ ,  $\Delta/\lambda = 1.0$ ,  $a = b = 1/\sqrt{2}$  e  $\chi/\lambda = \eta/\lambda = 1.0$ .

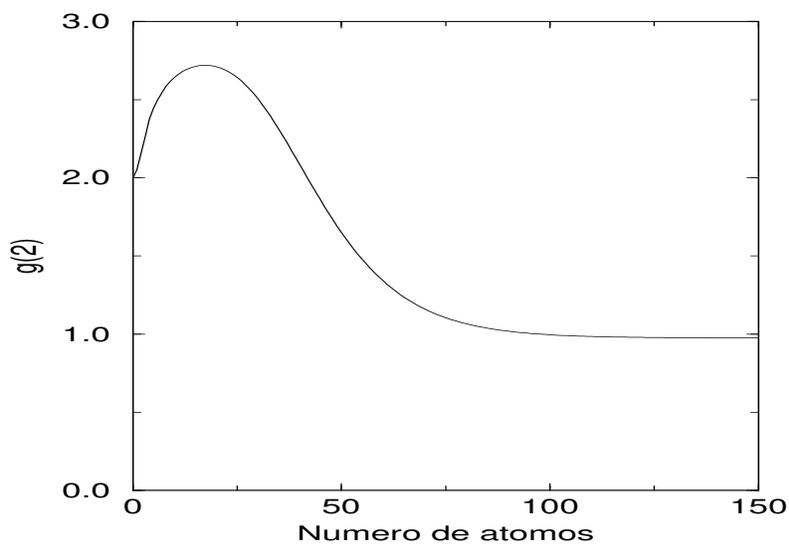


Figura 3.20: Grau de coerência de segunda ordem em função do número de átomos, com o meio tipo Kerr.  $T = 2.71/\lambda$ ,  $\bar{n} = 10$ ,  $\Delta/\lambda = 1.0$ ,  $a = b = 1/\sqrt{2}$  e  $\chi/\lambda = \eta/\lambda = 1.0$ .

### 3.2.6 Distribuição de número de fótons e Função de Quasiprobabilidade.

Na distribuição de probabilidade do número de fótons  $P(n)$  (figura 3.21) podemos observar que o estado final do campo gerado na cavidade apresenta um pico centrado no número médio de fótons ( $\langle \hat{n} \rangle = 38$ ) com uma flutuação ( $\Delta n$ ) bem pequena. Tal comportamento é semelhante ao do estado de número (estado de Fock). Podemos também observar algumas oscilações, onde a  $P(n)$  se anula para  $n$ 's iguais aos números ímpares. Essa é uma característica de um estado formado pela superposição de estados coerentes, denominado estado coerente par [85].

Quanto ao parâmetro  $Q$  de Mandel e o grau de coerência de segunda ordem, respectivamente, o campo gerado apresenta um comportamento sub-Poissoniano, com um valor bem próximo de  $-1$  e anti-agrupamento, com  $g^{(2)} < 1$ , comportamentos semelhantes ao estado de número (O estado coerente par apresenta um comportamento super-Poissoniano, isto é,  $Q > 1$ ).

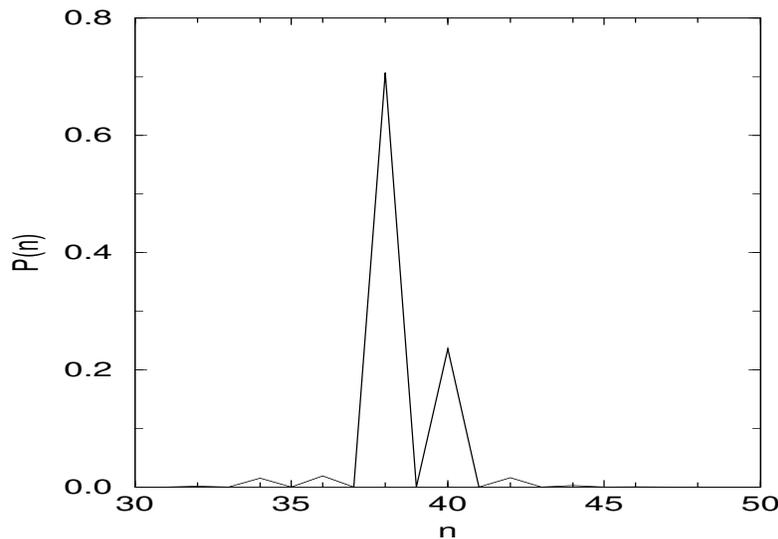


Figura 3.21: Distribuição de probabilidade do número de fótons.  $T = 2.71/\lambda$ ,  $\bar{n} = 10$ ,  $\Delta/\lambda = 1.0$ ,  $a = b = 1/\sqrt{2}$  e  $\chi/\lambda = \eta/\lambda = 1.0$ ,  $N = 150$  átomos.

Na figura (3.22) temos a função de quasiprobabilidade de Husimi para o estado final do campo na cavidade. Está apresenta um comportamento semelhante ao estado de número (figura 2.1) e condizente com os resultados apresentados pela  $P(n)$ . Observamos também, pelas curvas de níveis (figura 3.23), uma leve tendência para a formação de dois picos e uma rotação em relação à origem. Portanto temos a geração de um estado que se assemelha a estados conhecidos, mas que é um estado distinto.

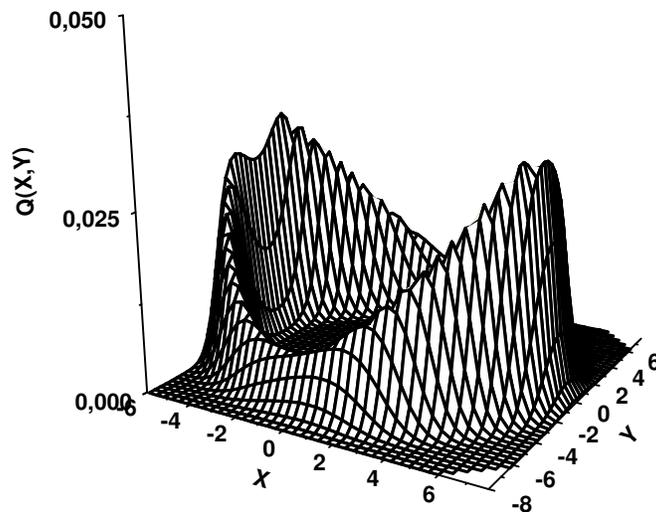


Figura 3.22: Função de quasiprobabilidade de Husimi (função  $Q$ ), onde  $X = \text{Re}(\beta)$  e  $Y = \text{Im}(\beta)$  (eq. 2.62).  $T = 2.71/\lambda$ ,  $\bar{n} = 10$ ,  $\Delta/\lambda = 1.0$ ,  $a = b = 1/\sqrt{2}$ ,  $N = 150$  átomos e  $\chi/\lambda = \eta/\lambda = 1.0$ .

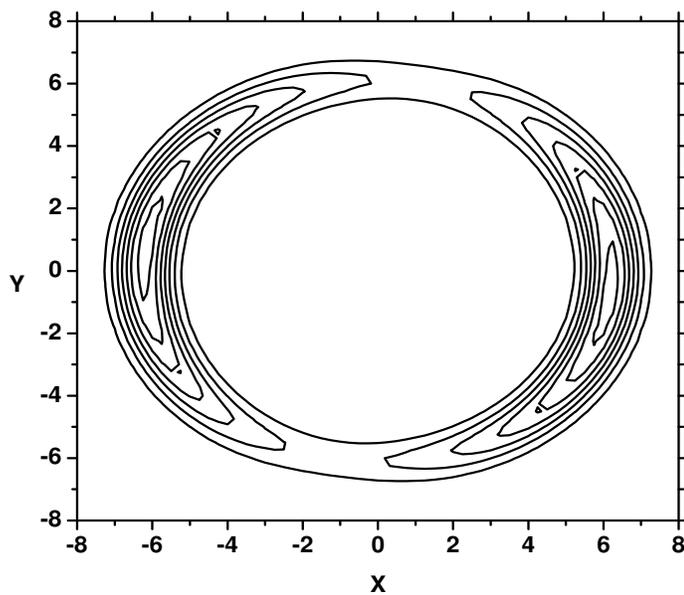


Figura 3.23: Curvas de nível da função de quasiprobabilidade de Husimi (função  $Q$ ) referente à figura (3.22).

## 3.3 Transferência de coerência átomo-campo em um micromaser de dois fótons forçado

### 3.3.1 Introdução

Nessa tese estudamos também, analogamente aos dois trabalhos anteriores apresentados nas seções 3.1 e 3.2, a transferência de coerência átomo-campo e as propriedades não-clássicas do campo gerado em um micromaser sem perdas, utilizando agora o modelo Jaynes-Cummings forçado (MJCF).

O modelo de Jaynes-Cummings pode ser verificado experimentalmente usando cavidades supercondutoras e átomos devidamente preparados no estados de Rydberg, como vimos no capítulo 2 desta tese. Neste modelo, átomo e campo estão em geral emaranhados a ponto de se comportarem como uma “molécula”, a qual pode ser estudada experimentalmente utilizando-se um campo externo como sonda [86]. Alsing, Guo e Carmichael [16] propuseram o modelo de Jaynes-Cummings forçado (MJCF). Nesse modelo, um átomo de dois níveis interage com um modo do campo na cavidade mais um campo clássico externo. Encontramos também o trabalho de Dutra, Knight e Moya-Cessa [52], onde eles estudam a dinâmica de um átomo em uma cavidade no MJCF, num regime de tempo em que as perdas e o amortecimento do campo não interferem nos resultados. Eles encontram colapsos e ressurgimentos no número médio de fótons, para uma escala de tempo muito maior que o encontrado no modelo Jaynes-Cummings comum. Examinam também a estatística do número de fótons para tal modelo, encontrando um campo na cavidade sub-Poissonian para certos tempos de interação. Mais recentemente Joshi et al [87] estudam o fenômeno de colapso e ressurgimento no MJCF de dois fótons para escalas de tempo muito maiores que os obtidos para o MJC de 1 fóton. Estudam também a influência do efeito Stark nesse modelo e observam que a dinâmica é fortemente influenciada por esse efeito.

Em nosso trabalho, utilizamos o micromaser baseado no MJCF de dois fótons [87] visando a geração de um estado puro do campo em uma cavidade ideal, inicialmente no estado de mistura estatística [88]. Nesse esquema,  $N$ -átomos interagem individualmente (micromaser) com o campo quantizado dentro da cavidade mais um campo clássico externo, injetado na cavidade. Neste caso, não há necessidade de preparar

inicialmente os átomos em uma superposição coerente de dois estados. Com o mesmo procedimento utilizado nos dois trabalhos anteriores, procuramos inicialmente determinar o melhor tempo de interação átomo-campo para obtermos um estado final, do campo na cavidade, com um alto grau de “purificação” sem que o número médio de fótons diminua. Determinado esse tempo, procuramos melhorar ainda mais a pureza do estado do campo variando a amplitude do campo externo.

Estudamos as características não-clássicas do campo gerado, parâmetro  $Q$  de Mandel e coerência de segunda ordem. Investigamos também o estado do campo gerado utilizando a distribuição de probabilidade do número de fótons na cavidade e a função de quasiprobabilidade de Husimi.

### 3.3.2 Modelo e Solução.

Seja um átomo de três níveis (antes da eliminação “adiabática”) interagindo com um campo quantizado, aprisionado em uma cavidade sem perdas, mais um campo externo coerente (figura 3.24). Essa interação átomo-campo é descrita pelo modelo Jaynes-Cummings, na aproximação de onda girante, dada pelo Hamiltoniano (A.2):

$$\begin{aligned} \hat{H} = & E_e \hat{\sigma}_{ee} + E_i \hat{\sigma}_{ii} + E_g \hat{\sigma}_{gg} + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \omega' \hat{b}^\dagger \hat{b} \\ & + \hbar g_{ig} (\hat{a} \hat{\sigma}_{ig} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{gi}) + \hbar g_{ei} (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{ie} + \hat{a} \hat{\sigma}_{ei}) \\ & + \hbar g_{ig} (\hat{b} \hat{\sigma}_{ig} + \hat{b}^\dagger \hat{\sigma}_{gi}) + \hbar g_{ei} (\hat{b}^\dagger \hat{\sigma}_{ie} + \hat{b} \hat{\sigma}_{ei}). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Os três primeiros termos representam as energias ( $E_g < E_i < E_e$ ) dos respectivos níveis atômico  $|g\rangle$ ,  $|i\rangle$ ,  $|e\rangle$  (figura 3.24). Os operadores de aniquilação e criação de fótons relativo ao modo da cavidade e ao campo externo são  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{b}$ ,  $\hat{b}^\dagger$ , respectivamente. Os operadores no subespaço do átomo são  $\hat{\sigma}_{kj}$  ( $k, j = g, i, e$ ), sendo  $\hat{\sigma}_{kk}$  o número de ocupação do nível e  $\hat{\sigma}_{kj}$  ( $k \neq j$ ) sendo o operador de transição dos níveis  $j$  para  $k$ . O campo na cavidade e o campo externo possuem as frequências  $\omega$  e  $\omega'$ , respectivamente, e estão acoplados ao átomo, onde  $g_{ig}$  e  $g_{ei}$  são as respectivas constantes de acoplamento.

Conhecendo o Hamiltoniano podemos determinar a evolução temporal do sistema dado pela equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (3.42)$$

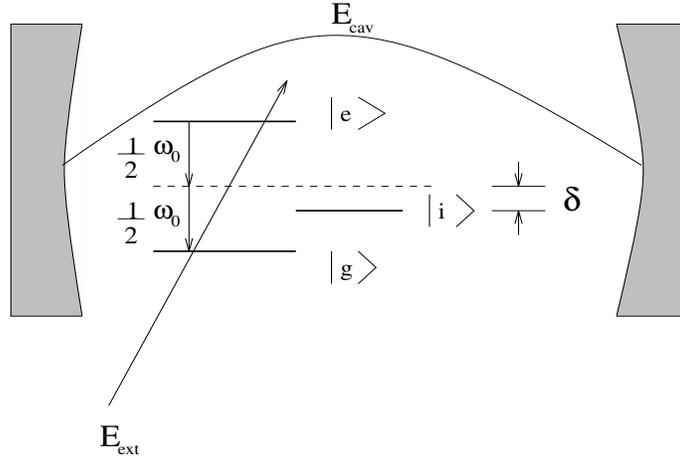


Figura 3.24: Representação esquemática de um átomo de três níveis interagindo com um campo quantizado ( $\hat{E}_{cav}$ ) dentro de uma cavidade mais um campo externo ( $\hat{E}_{ext}$ ), com uma dessintonia  $\delta$  no nível intermediário  $|i\rangle$

Por conveniência podemos fazer uma transformação unitária dada por:

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-i\omega't\hat{b}^\dagger\hat{b})|\phi(t)\rangle. \quad (3.43)$$

Obtemos assim a equação de movimento para  $|\phi(t)\rangle$ :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t)\rangle = \hat{H}'(t)|\phi(t)\rangle, \quad (3.44)$$

onde agora:

$$\begin{aligned} \hat{H}'(t) = & E_e\hat{\sigma}_{ee} + E_i\hat{\sigma}_{ii} + E_g\hat{\sigma}_{gg} + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \\ & + \hbar g_{ig}(\hat{a}\hat{\sigma}_{ig} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{gi}) + \hbar g_{ei}(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{ie} + \hat{a}\hat{\sigma}_{ei}) \\ & + \hbar g_{ig}(\hat{b}e^{-i\omega't}\hat{\sigma}_{ig} + \hat{b}^\dagger e^{i\omega't}\hat{\sigma}_{gi}) + \hbar g_{ei}(\hat{b}^\dagger e^{i\omega't}\hat{\sigma}_{ie} + \hat{b}e^{-i\omega't}\hat{\sigma}_{ei}). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Consideremos a seguinte transformação [89]:

$$\hat{H}'' = D^\dagger(\varepsilon)\hat{H}'D(\varepsilon), \quad (3.46)$$

onde  $D(\varepsilon) = \exp(\varepsilon\hat{b}^\dagger - \varepsilon^*\hat{b})$  é o operador de deslocamento de Glauber. Podemos então escrever  $\hat{H}'' = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$ , onde:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 = & E_e\hat{\sigma}_{ee} + E_i\hat{\sigma}_{ii} + E_g\hat{\sigma}_{gg} + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \\ & + \hbar g_{ig}(\hat{a}\hat{\sigma}_{ig} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{gi}) + \hbar g_{ei}(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{ie} + \hat{a}\hat{\sigma}_{ei}) \\ & + \hbar g_{ig}(\varepsilon^*e^{-i\omega't}\hat{\sigma}_{ig} + \varepsilon e^{i\omega't}\hat{\sigma}_{gi}) + \hbar g_{ei}(\varepsilon^*e^{-i\omega't}\hat{\sigma}_{ie} + \varepsilon e^{i\omega't}\hat{\sigma}_{ei}). \end{aligned} \quad (3.47)$$

e

$$\hat{H}_2 = \hbar g_{ig}(\hat{b}e^{-i\omega't}\hat{\sigma}_{ig} + \hat{b}^\dagger e^{i\omega't}\hat{\sigma}_{gi}) + \hbar g_{ei}(\hat{b}^\dagger e^{i\omega't}\hat{\sigma}_{ie} + \hat{b}e^{-i\omega't}\hat{\sigma}_{ei}). \quad (3.48)$$

A equação (3.48) descreve o efeito sobre o sistema da flutuação do vácuo referente ao campo externo [90]. Desprezamos esse termo considerando um regime de tempo ( $\tau_{vacuo} \ll \Omega_0^{-1}$  eq.(2.106)) [91] em que somente as flutuações quânticas dos modos do campo aprisionado na cavidade são importantes. Desse modo, consideramos somente sua parte clássica dada pelo último termo da equação (3.47), onde  $\varepsilon$  representa a amplitude do campo externo.

Podemos agora agrupar os termos do Hamiltoniano (3.47) e escrever:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 = & E_e \hat{\sigma}_{ee} + E_i \hat{\sigma}_{ii} + E_g \hat{\sigma}_{gg} + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ & + \hbar g_{ig} [(\hat{a} + \varepsilon^* e^{-i\omega't}) \hat{\sigma}_{ig} + (\hat{a}^\dagger + \varepsilon e^{i\omega't}) \hat{\sigma}_{gi}] \\ & + \hbar g_{ei} [(\hat{a}^\dagger + \varepsilon^* e^{-i\omega't}) \hat{\sigma}_{ie} + (\hat{a} + \varepsilon e^{i\omega't}) \hat{\sigma}_{ei}]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Realizando agora a eliminação adiabática do nível intermediário  $|i\rangle$  (apêndice A) teremos o Hamiltoniano, na aproximação de onda girante, dado por:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = & \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \left[ \frac{\omega_0}{2} + \chi (\hat{a}^\dagger + \varepsilon e^{-i\omega't}) (\hat{a} + \varepsilon e^{i\omega't}) \right] \hat{\sigma}_z \\ & + \lambda \left[ (\hat{a}^\dagger + \varepsilon e^{-i\omega't})^2 \hat{\sigma}_- + (\hat{a} + \varepsilon e^{i\omega't})^2 \hat{\sigma}_+ \right]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Onde, novamente, a constante de acoplamento efetiva é dada por:  $\lambda = 2g^2/\delta$ , tal que  $g = g_{ig} = g_{ei}$  (eq. 2.97) ( $\delta = E_i - (E_e + E_g)/2$ );  $\hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_{eg}$ ,  $\hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_{ge}$  e  $\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{gg}$  são os operadores transição atômica, com  $g_{eg} = g_{ei}g_{ig}$ . O parâmetro  $\chi = 2g^2/\delta$  é devido ao efeito Stark dinâmico (apêndice A). Fixamos a frequência  $\omega'$  do campo clássico externo, bombeado para a cavidade [52], ressonante com a frequência de transição atômica  $\omega_0/2$ . A amplitude desse campo, dada por  $\varepsilon$ , será considerada real.

Tomemos agora esse Hamiltoniano na representação de interação [87]:

$$\hat{\mathcal{H}}_I = \hbar \left[ \frac{\Delta}{2} + \chi (\hat{a}^\dagger + \varepsilon) (\hat{a} + \varepsilon) \right] \hat{\sigma}_z + \lambda \hbar \left[ (\hat{a}^\dagger + \varepsilon)^2 \hat{\sigma}_- + (\hat{a} + \varepsilon)^2 \hat{\sigma}_+ \right], \quad (3.51)$$

onde  $\Delta = \omega_0 - 2\omega$  é uma pequena dessintonia entre a frequência  $\omega_0$  do átomo e a

frequência  $2\omega$  do campo na cavidade (figura 3.24). Observemos que, utilizando novamente o operador deslocamento de Glauber dado por  $\hat{D}(\varepsilon) = \exp(\varepsilon\hat{a}^\dagger - \varepsilon^*\hat{a})$  e a propriedade:

$$\hat{D}^\dagger(\varepsilon)\hat{a}\hat{D}(\varepsilon) = \hat{a} + \varepsilon, \quad (3.52)$$

podemos escrever o Hamiltoniano (3.51) em termos do Hamiltoniano de Jaynes-Cummings de dois fótons (na representação de interação) (3.2) como:

$$\hat{\mathcal{H}}_I = \hat{D}^\dagger(\varepsilon)\hat{H}_{MJC}\hat{D}(\varepsilon), \quad (3.53)$$

onde:

$$\hat{H}_{MJC} = \hbar \left[ \left( \frac{\Delta}{2} + \chi\hat{a}^\dagger\hat{a} \right) \hat{\sigma}_z + \lambda(\hat{a}^{\dagger 2}\hat{\sigma}_- + \hat{a}^2\hat{\sigma}_+) \right]. \quad (3.54)$$

Com essa transformação podemos escrever o operador evolução temporal do sistema átomo-campos, como:

$$\hat{U}(t) = \hat{D}^\dagger(\varepsilon^*) \hat{U}_{MJC}^\dagger(t) \hat{D}(\varepsilon), \quad (3.55)$$

com:

$$\hat{U}_{MJC}(t) = \exp \left[ -i\lambda t \left( \frac{\Delta}{2\lambda} \hat{\sigma}_z + \frac{\chi}{\lambda} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z + \hat{a}^{\dagger 2} \hat{\sigma}_- + \hat{a}^2 \hat{\sigma}_+ \right) \right], \quad (3.56)$$

onde  $\hat{U}_{MJC}$  é o operador evolução temporal no modelo Jaynes-Cummings de dois fótons. Desse modo podemos, em analogia à equação (2.115), escrever o estado evoluído como:

$$|\Psi_N^{ac}(t)\rangle = \sum_n \langle n | \Psi_{N-1} \rangle \hat{D}^\dagger(\varepsilon^*) \hat{U}_{MJC}^\dagger(t) \hat{D}(\varepsilon) |\phi_N^a; n\rangle, \quad (3.57)$$

onde agora o operador evolução temporal é dado pela equação (3.55). Novamente consideramos o átomo em uma superposição coerente de dois estados (2.112),

$$|\phi^a\rangle = b|g_k\rangle + ae^{i\phi}|e_k\rangle, \quad (3.58)$$

e o campo no estado térmico,

$$\hat{\rho}_T^c(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n}+1)^{n+1}} |n\rangle\langle n|. \quad (3.59)$$

Da equação (3.57) obtemos assim a relação de recorrência entre os elementos da matriz densidade do campo  $\rho_N^c(n, n')$  e  $\rho_{N-1}^c(n, n')$  na base de estado de número, de modo análogo à equação (3.12). Temos:

$$\begin{aligned}
\rho_N^c(n, n') &= \sum_{m, m'} \rho_{N-1}^c(m, m') \sum_{j, j'} e_{j, m} e_{j', m'}^* [ [ a^2 \alpha_j(\gamma) \alpha_{j'}^\dagger(\gamma) + b^2 \alpha_j(\epsilon) \alpha_{j'}^\dagger(\epsilon) ] e_{j, n} e_{n', j'}^* \\
&+ b^2 \beta_j(\gamma) \beta_{j'}(\gamma) \sqrt{(j+2)(j+1)(j'+2)(j'+1)} e_{j+2, n} e_{n', j+2}^* \\
&+ a^2 \beta_j(\epsilon) \beta_{j'}(\epsilon) \sqrt{j(j-1)j'(j'-1)} e_{j-2, n} e_{n', j-2}^* \\
&+ iabe^{-i\phi} \alpha_j(\gamma) \beta_{j'}(\gamma) \sqrt{(j'+2)(j'+1)} e_{j, n} e_{n', j'+2}^* \\
&+ iabe^{i\phi} \alpha_j(\epsilon) \beta_{j'}(\epsilon) \sqrt{j'(j'-1)} e_{j, n} e_{n', j'-2}^* \\
&- iabe^{i\phi} \beta_j(\gamma) \alpha_{j'}^\dagger(\gamma) \sqrt{(j+2)(j+1)} e_{j+2, n} e_{n', j'}^* \\
&- iabe^{-i\phi} \beta_j(\epsilon) \alpha_{j'}^\dagger(\epsilon) \sqrt{j(j-1)} e_{j-2, n} e_{n', j'}^* ], \tag{3.60}
\end{aligned}$$

sendo os coeficientes  $e_{j, n}$  e  $e_{n', j'}^*$  dados por:

$$\begin{aligned}
e_{(j, n)} &= \langle j | \varepsilon; n \rangle = e^{-\frac{|\varepsilon|^2}{2}} \varepsilon^{j-n} \sqrt{\frac{n!}{j!}} \mathcal{L}_n^{j-n}(|\varepsilon|^2) \\
e_{(n', j')}^* &= \langle n'; \varepsilon | j' \rangle = e^{-\frac{|\varepsilon|^2}{2}} (\varepsilon^*)^{n'-j'} \sqrt{\frac{j'!}{n'!}} \mathcal{L}_{j'}^{n'-j'}(|\varepsilon|^2), \tag{3.61}
\end{aligned}$$

onde  $|\varepsilon; n\rangle = \hat{D}(\varepsilon)|n\rangle$  é o estado de número deslocado [41], resultado da aplicação do operador deslocamento de Glauber sobre o estado de número  $|n\rangle$ . A função  $\mathcal{L}_n^{j-n}$  é a função de Laguerre associada e os coeficientes  $\hat{\alpha}_n(\gamma)$  e  $\hat{\beta}_n(\epsilon)$  são dados por:

$$\hat{\alpha}_n(\gamma) = \cos(\hat{\gamma}_n \lambda t) + i \frac{\sin(\hat{\gamma}_n \lambda t)}{\hat{\gamma}_n} \left( \frac{\Delta}{2\lambda} + \frac{\chi}{\lambda} (\hat{n} + 1) \right), \tag{3.62}$$

$$\hat{\alpha}_n(\epsilon) = \cos(\hat{\epsilon}_n \lambda t) + i \frac{\sin(\hat{\epsilon}_n \lambda t)}{\hat{\epsilon}_n} \left( \frac{\Delta}{2\lambda} + \frac{\chi}{\lambda} (\hat{n} - 1) \right), \tag{3.63}$$

$$\hat{\beta}_n(\gamma) = i \hat{a}^{\dagger 2} \frac{\sin(\hat{\gamma}_n \lambda t)}{\hat{\gamma}_n}, \tag{3.64}$$

$$\hat{\beta}_n(\epsilon) = i \hat{a}^2 \frac{\sin(\hat{\epsilon}_n \lambda t)}{\hat{\epsilon}_n}, \tag{3.65}$$

com:

$$\hat{\gamma}_n^2 = \left( \frac{\Delta}{2\lambda} + \frac{\chi}{\lambda} (\hat{n} + 1) \right)^2 + (\hat{n} + 1)(\hat{n} + 2), \tag{3.66}$$

$$\hat{\epsilon}_n^2 = \left( \frac{\Delta}{2\lambda} + \frac{\chi}{\lambda} (\hat{n} - 1) \right)^2 + \hat{n}(\hat{n} - 1). \tag{3.67}$$

Primeiramente podemos observar que o campo externo interagindo diretamente sobre o átomo não modifica as frequências  $\lambda\gamma_n$  e  $\lambda\epsilon_n$ , isto é, a rapidez da troca de energia entre os átomos e o campo na cavidade não se altera. Observemos que se o campo externo é desligado ( $\epsilon = 0$ ) obtemos novamente a equação (3.12), pela redução dos termos:

$$e_{(j,n)} \cdot e_{(n',j')}^* = \begin{cases} 1 & , \text{ para } j = n \text{ e } n' = j' \\ 0 & , \text{ para } j \neq n \text{ e } n' \neq j' \end{cases} \quad (3.68)$$

Logo  $e_{(j,m)}$  e  $e_{(m',j')}^*$  serão igual a 1 somente quando  $m = n$  e  $m' = n'$ , assim o operador  $\rho_{N-1}^c(m, m')$  volta a depender de  $n$  e  $n'$ , isto é, retomamos o operador densidade do campo  $\rho_{N-1}^c(n, n')$ , equação (3.12), sem o campo externo. Para o caso em que o campo externo ( $\vec{E}_{ext}$ ) não é nulo ( $\epsilon \neq 0$ ), sua influência é descrita pelos elementos  $e_{j,n}$ , os quais modificam as amplitudes dos coeficientes do operador densidade (3.60). Um resultado particularmente importante é que a transferência de coerência dos átomos para o campo na cavidade deverá ocorrer mesmo que estes sejam preparados no estado excitado ( $|e\rangle$ ), antes de entrarem na cavidade. Ou seja, não há necessidade de prepara-los numa superposição coerente de  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ . Isto pode ser visto considerando  $b = 0$ , por exemplo, na expressão (3.60):

$$\begin{aligned} \rho_N^c(n, n') &= \sum_{m,m'} \rho_{N-1}^c(m, m') \sum_{j,j'} e_{j,m} e_{j',m'}^* [ a^2 \alpha_j(\gamma) \alpha_{j'}^\dagger(\gamma) e_{j,n} e_{n',j'}^* \\ &+ a^2 \beta_j(\epsilon) \beta_{j'}(\epsilon) \sqrt{j(j-1)j'(j'-1)} e_{j-2,n} e_{n',j-2}^* ]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Neste caso, mesmo que o campo na cavidade seja preparado inicialmente em um estado de mistura estatística, sua evolução após a interação individual de  $N$  átomos não resultará necessariamente em um estado misturado. Diferente do que ocorre no caso visto na seção (3.1) equação (3.13), como podemos ver pela equação (3.69) os elementos fora da diagonal ( $n \neq n'$ ) da matriz densidade do campo  $\rho_N^c(n, n')$  não serão necessariamente zeros, pois a somatória em  $m$  e  $m'$  é independente de  $n$  e  $n'$  quando  $\epsilon \neq 0$ , garantido assim um valor total diferente de zero para  $\rho_N^c(n, n')$ . Isto é, vejamos o elemento da matriz densidade  $\rho_1^c(0, 1)$ , por exemplo, para o caso do primeiro átomo (excitado) ter passado pela cavidade ( $N = 1$ ). Teremos:

$$\begin{aligned} \rho_1^c(0, 1) &= \sum_{m, m'} \rho_0^c(m, m') \sum_{j, j'} e_{j, m} e_{j', m'}^* [ a^2 \alpha_j(\gamma) \alpha_{j'}^\dagger(\gamma) e_{j, 0} e_{1, j'}^* \\ &+ a^2 \beta_j(\epsilon) \beta_{j'}(\epsilon) \sqrt{j(j-1)j'(j'-1)} e_{j-2, 0} e_{1, j-2}^* ]. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Portanto  $\rho_1^c(0, 1)$  será diferente de zero mesmo  $\rho_0^c(m, m')$  tendo somente elementos na diagonal. Isso é devido a somatória em  $m$  e  $m'$  não depender de  $n$  e  $n'$ .

### 3.3.3 Resultados

Com os mesmos procedimentos usados anteriormente, determinamos o melhor tempo de interação átomo-campo, visando um boa transferência de coerência e um aumento do número médio de fótons na cavidade. Também mantivemos constante os valores dos parâmetros  $\Delta$  e  $\chi$ . Fixamos inicialmente os  $N$ -átomos no estado excitado ( $|e\rangle$ ), pois como já verificamos através dos elementos da matriz densidade do campo (eq. 3.60), não há necessidade que os mesmos estejam inicialmente em uma superposição coerente de dois estados, para que ocorra a transferência de coerência dos átomos para o campo na cavidade. Consideramos também o campo na cavidade inicialmente preparado no estado térmico com um número médio de fótons  $\bar{n} = 5$ .

Como podemos observar pelas figuras (3.25 e 3.26), encontramos o tempo de interação  $T = 8.9/\lambda$  para cada átomo, de tal modo a obtermos uma boa transferência de coerência sem que a energia da cavidade diminuísse. Foram necessários somente 30 átomos para se obter uma boa “purificação” do estado inicial do campo na cavidade. Neste caso utilizamos para o campo clássico externo  $\varepsilon = 1$ .

Determinado o tempo de interação ( $T = 8.9/\lambda$ ) calculamos o parâmetro de “purificação”  $\zeta$  e o número médio de fótons em função dos átomos que passam pela cavidade. Observamos pelas figuras (3.27a e 3.27b), que foram necessários um número muito reduzido de átomos para se obter um alto grau de “purificação”, em relação aos resultados obtidos nas seções (3.1 e 3.2). Obtivemos também, uma redução significativa no tempo total do experimento (Número de átomos vezes o tempo de interação) em relação à seção (3.1).

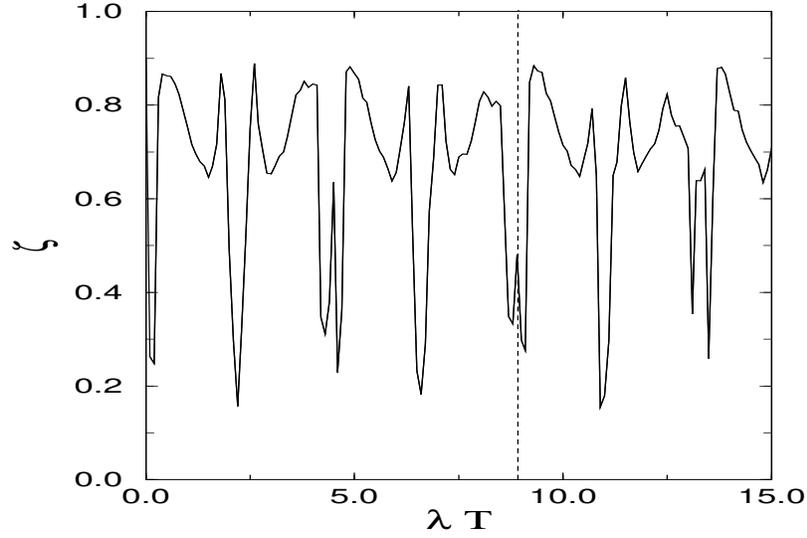


Figura 3.25: “Purificação” do *estado final* do campo em função do tempo de interação, para  $N = 30$  átomos inicialmente preparados no excitados -  $|e\rangle$ ,  $\bar{n} = 5$ ,  $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$  e  $\varepsilon = 1$ . A linha tracejada indica o melhor tempo  $T = 8.9/\lambda$ .

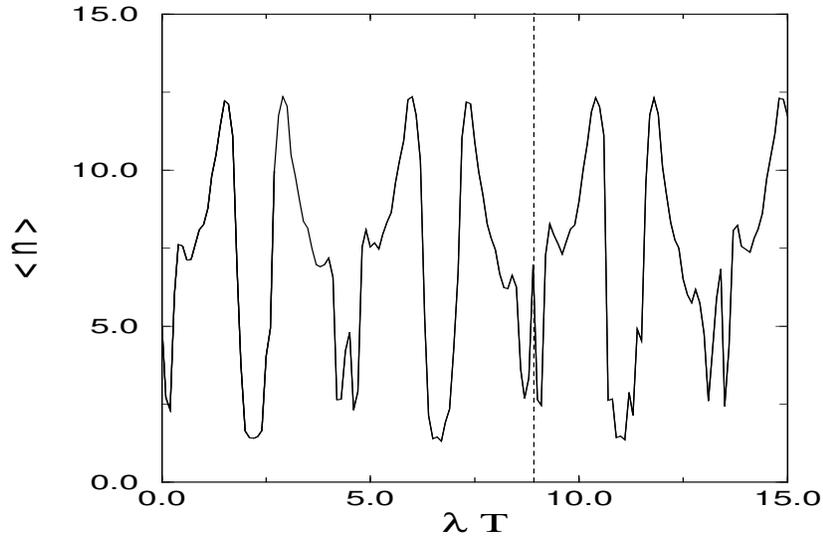


Figura 3.26: Número médio de fótons em função do tempo de interação para  $N = 30$  átomos inicialmente preparados no excitados -  $|e\rangle$ ,  $\bar{n} = 5$ ,  $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$  e  $\varepsilon = 1$ . A linha tracejada indica o melhor tempo  $T = 8.9/\lambda$ .

Estudamos também a influência do campo externo, representado pelo parâmetro  $\varepsilon$ , no processo de transferência de coerência. Notamos que a influência do campo externo pode ajudar a melhorar tal processo, porém isto não se dá de uma forma proporcional a  $\varepsilon$ . Calculando  $\zeta$  em função do número de átomos para três valores distintos de  $\varepsilon$  ( $=1.0, 2.0, 3.0$ ), figura (3.27), verificamos que a influência desse campo melhora muito o processo de transferência de coerência para os 50 primeiros átomos, quando aumentamos  $\varepsilon$  de 1.0 para 2.0 ( $\zeta \approx 0.22$  e  $\zeta \approx 0.19$ , respectivamente). Porém,

passando mais 50 átomos pela cavidade podemos obter um campo mais puro ( $\zeta \approx 0.07$ ) para  $\varepsilon = 1.0$ . Para o caso em que  $\varepsilon = 3.0$  observamos que a transferência de coerência é bem menos acentuada, fixando em torno de  $\zeta = 0.5$ , o que demonstra que a transferência de coerência não é proporcional à amplitude do campo externo ( $\varepsilon$ ).

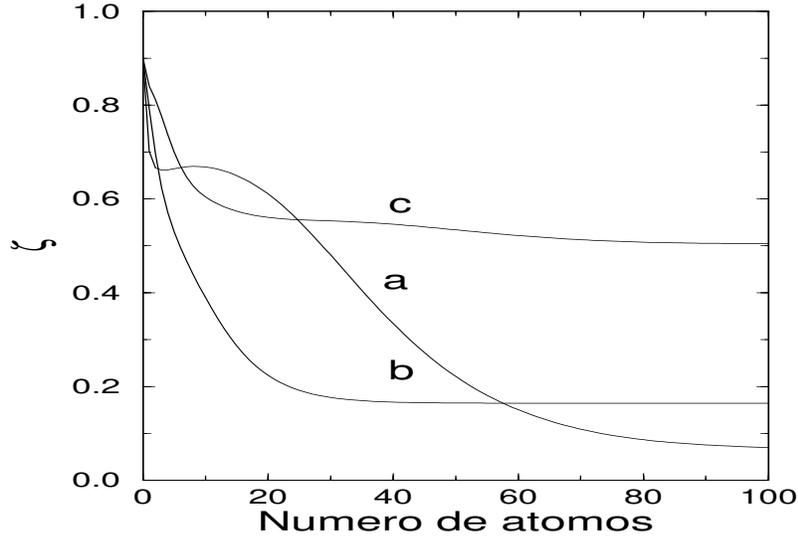


Figura 3.27: Parâmetro de pureza  $\zeta$  do campo em função do número de átomos para:  $T = 8.9/\lambda$ ,  $\bar{n} = 5$ ,  $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ ,  $a = 1$ , (a)  $\varepsilon = 1.0$ , (b)  $\varepsilon = 2.0$  e (c)  $\varepsilon = 3.0$ .

Pela figura (3.28) notamos que para todos os valores tomados para  $\varepsilon$  o número médio de fótons na cavidade em função do número de átomos aumenta. Somente para  $\varepsilon = 3.0$  temos uma particularidade para o primeiro átomo, onde o  $\bar{n}$  diminui, mas logo volta crescer. Deve-se observar também que nos três casos estudados, o campo gerado na cavidade alcança o *estado final*, no que diz respeito à sua pureza e no número médio de fótons, após 100 átomos passarem pela cavidade. Com isso podemos concluir que a transferência de coerência átomo-campo está intimamente ligada com a transferência de energia do átomo para a cavidade, para esses casos. Isso é reforçado também pelo fato que se a interação átomo-campo não for ressonante (sem troca de energia) não teremos no final de todo o processo um campo puro (apêndice B).

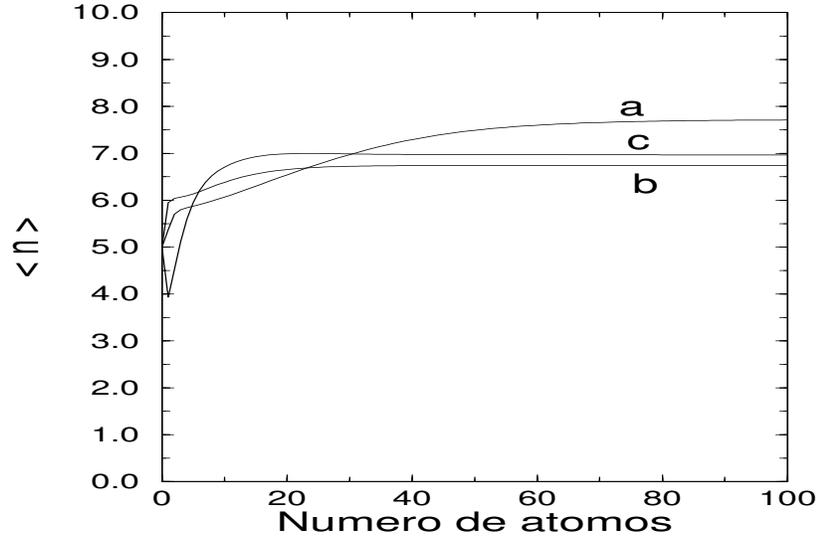


Figura 3.28: Número médio de fótons em função do número de átomos para:  $T = 8.9/\lambda$ ,  $\bar{n} = 5$ ,  $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ ,  $a = 1$ , (a)  $\varepsilon = 1.0$ , (b)  $\varepsilon = 2.0$  e (c)  $\varepsilon = 3.0$ .

### 3.3.4 Estudo das Propriedades Não-Clássicas.

Observamos pela figura (3.29) que o parâmetro  $Q$  de Mandel, em função do número de átomos que passam pela cavidade, diminui para os casos em que  $\varepsilon = 1.0$  e  $3.0$ . O que nos dá um estado do campo menos super-Poissoniano que o estado inicial (estado térmico). Com  $\varepsilon = 2.0$ , para o primeiro átomo, observamos uma pequena queda abrupta no valor de  $Q$ , porém logo em seguida volta a crescer, permanecendo super-Poissoniano com aproximadamente o mesmo  $Q$  ( $= 5.0$ ) do estado inicial. Na figura (3.30) temos a de coerência de segunda ordem em função do número de átomos que passam pela cavidade. Observamos que para os três casos ( $\varepsilon = 1.0, 2.0, 3.0$ ) os fótons do campo estão menos agrupados que no estado inicial. Com  $\varepsilon = 3.0$ , para o primeiro átomo, observamos um crescimento abrupto de  $g^{(2)}$ , porém esse volta a decrescer com os próximos átomos.

Em todos os casos encontramos um regime em que não ocorre mais a transferência de coerência, após os 100 átomos terem passados pela cavidade.

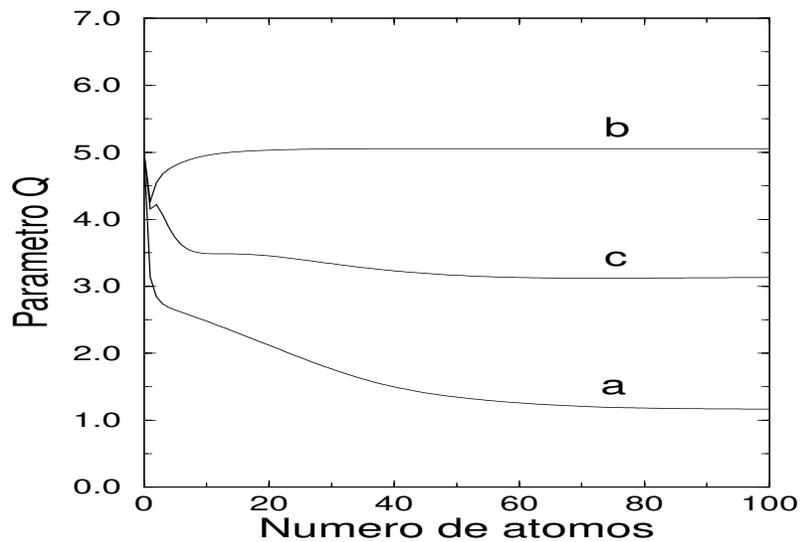


Figura 3.29: Parâmetro  $Q$  de Mandel em função do número de átomos para:  $T = 8.9/\lambda$ ,  $\bar{n} = 5$ ,  $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ ,  $a = 1$ , (a)  $\varepsilon = 1.0$ , (b)  $\varepsilon = 2.0$  e (c)  $\varepsilon = 3.0$ .

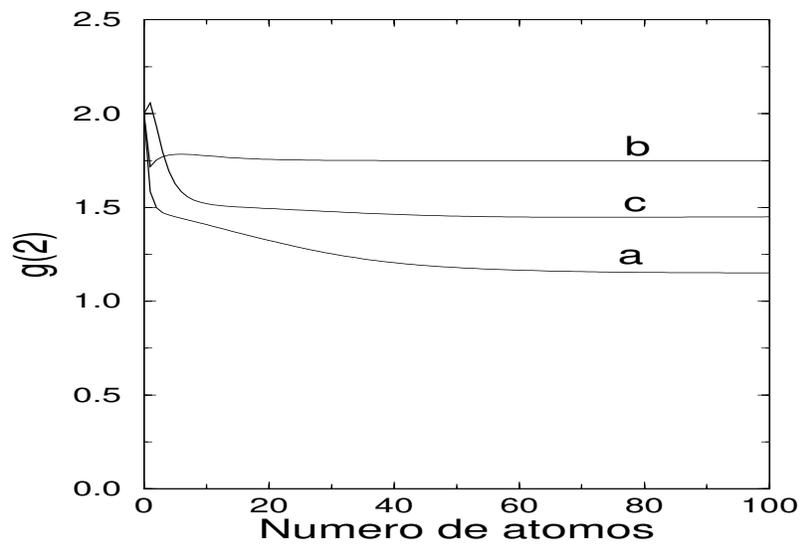


Figura 3.30: Grau de coerência de segunda ordem em função do número de átomos para:  $T = 8.9/\lambda$ ,  $\bar{n} = 5$ ,  $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ ,  $a = 1$ , (a)  $\varepsilon = 1.0$ , (b)  $\varepsilon = 2.0$  e (c)  $\varepsilon = 3.0$ .

### 3.3.5 Distribuição de número de fótons e Função de Quasiprobabilidade.

A distribuição do número de fótons para o estado gerado na cavidade, figura (3.31), apresenta oscilações como podemos ver, o que é um comportamento típico de estados não-clássicos do campo, tais como o estado de gato [8] e o estado comprimido [7]. Tal resultado está de acordo com o processo de interação que utilizamos - Modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons. Esse resultado é reforçado pela função de quasiprobabilidade  $Q$ , figura (3.32), onde observamos dois picos deslocados da origem no eixo  $x$  devido à aplicação de um campo clássico externo. Na figura (3.33) temos as curvas de nível da função  $Q$  o que nos permite observar com mais clareza o deslocamento em relação à origem no sentido positivo de  $X$ . Este deslocamento se dá porque tomamos a amplitude ( $\epsilon$ ) do campo externo como sendo real e positiva. Quando consideramos ( $\epsilon$ ) negativa podemos ver, tanto pela função de Husimi (3.34) como pelas curvas de nível (3.35), que o deslocamento em relação à origem se dá no sentido negativo do eixo  $x$ .

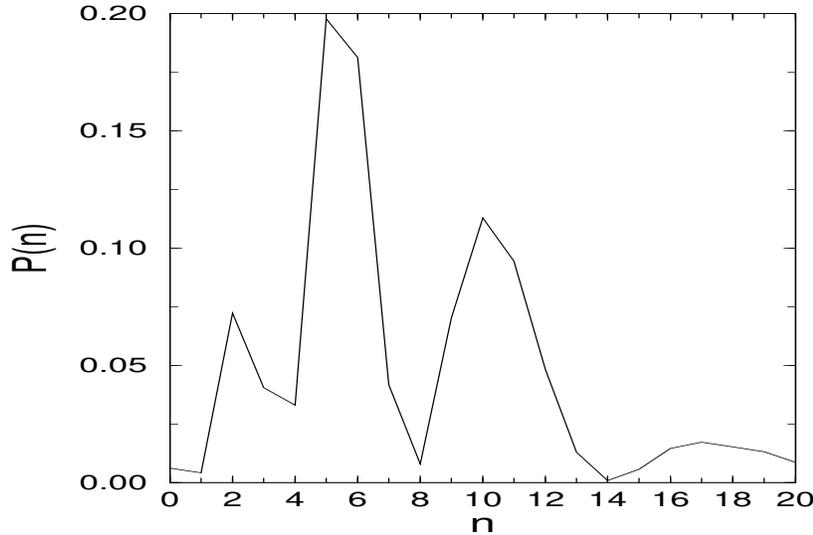


Figura 3.31: Distribuição do número de fóton.  $N = 100$  átomos,  $T = 8.9/\lambda$ ,  $\bar{n} = 5$ ,  $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ ,  $a = 1$  para  $\epsilon = 1.0$ .

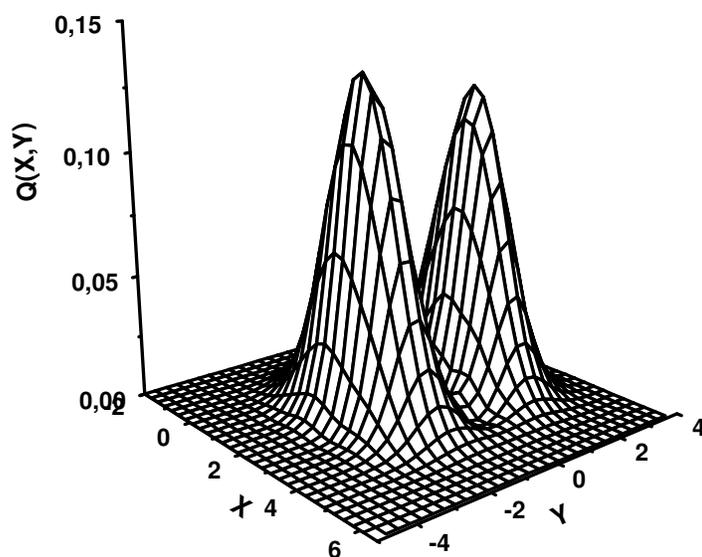


Figura 3.32: Distribuição de quasiprobabilidade (função  $Q$ ), onde  $X = \text{Re}(\beta)$  e  $Y = \text{Im}(\beta)$ .  $N = 100$  átomos,  $T = 8.9/\lambda$ ,  $\bar{n} = 5$ ,  $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ ,  $a = 1$  para  $\varepsilon = 1.0$ .

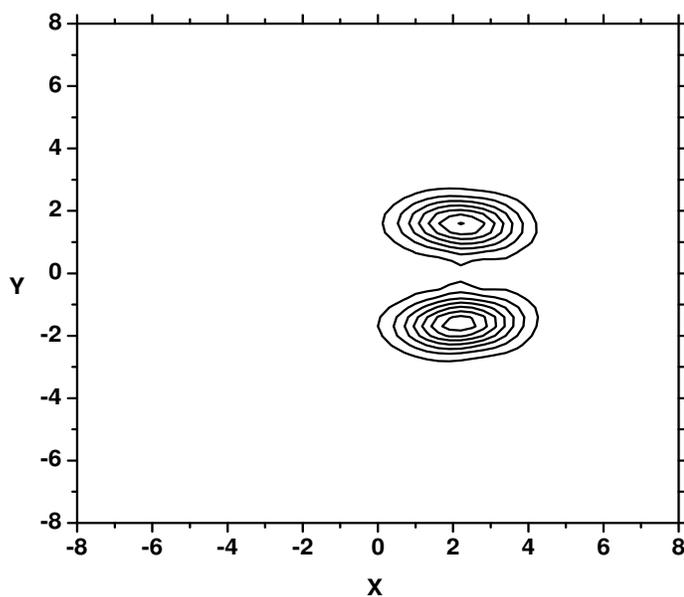


Figura 3.33: Curvas de nível da função de quasiprobabilidade de Husimi (função  $Q$ ) referente à figura (3.34).  $N = 100$  átomos,  $T = 8.9/\lambda$ ,  $\bar{n} = 5$ ,  $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ ,  $a = 1$  para  $\varepsilon = 1.0$ .

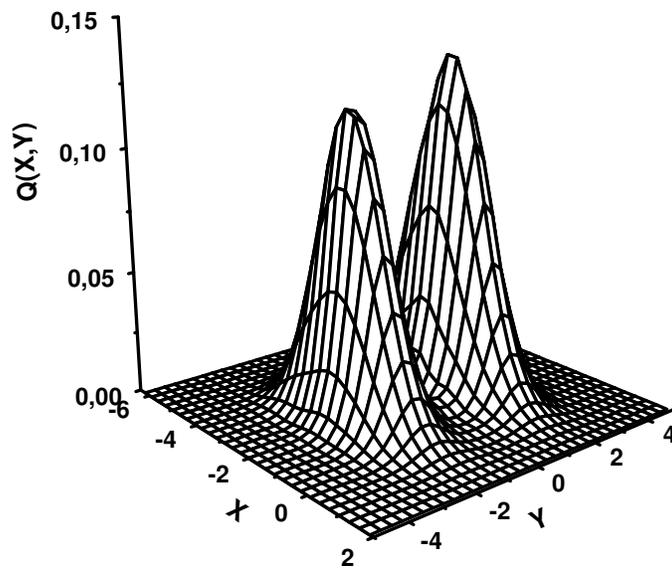


Figura 3.34: Distribuição de quasiprobabilidade (função  $Q$ ), onde  $X = \text{Re}(\beta)$  e  $Y = \text{Im}(\beta)$ .  $N = 100$  átomos,  $T = 8.9/\lambda$ ,  $\bar{n} = 5$ ,  $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ ,  $a = 1$  para  $\varepsilon = -1.0$ .

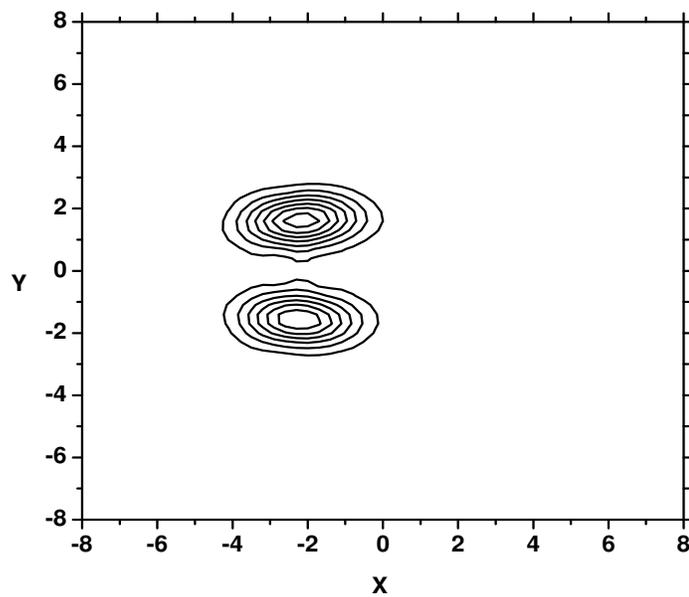


Figura 3.35: Curvas de nível da função de quasiprobabilidade de Husimi (função  $Q$ ) referente à figura (3.34).  $N = 100$  átomos,  $T = 8.9/\lambda$ ,  $\bar{n} = 5$ ,  $\chi/\lambda = \Delta/\lambda = 1$ ,  $a = 1$  para  $\varepsilon = -1.0$ .



# Capítulo 4

## Conclusão

Apresentamos nesta tese três propostas tratando da transferência de coerência de átomos para o campo eletromagnético confinado em uma cavidade (sem perdas), inicialmente preparado em um estado de mistura estatística. Nosso objetivo principal foi gerar um estado puro, sem que o número médio de fótons na cavidade diminuísse. Além disso, estudamos as suas propriedades não-clássicas: parâmetro  $Q$  de Mandel e coerência de segunda ordem, para o estado do campo gerado na cavidade. Utilizamos também a função de quasiprobabilidade de Husimi (função  $Q$ ) e a distribuição de probabilidade do número de fótons, para refinar a caracterização de tal estado.

Em nossa primeira proposta, seção (3.1) [49], investigamos o processo de geração de um estado não-clássico a partir de um estado térmico por meio de um micromaser de dois fótons. Um razoável grau de “purificação” do campo foi atingido e o campo gerado apresentou propriedades não-clássicas tais como um caráter sub-Poissoniano. Portanto o procedimento de “purificação” também conduziu à geração de estados não-clássicos. Observamos também que após  $N = 100$  átomos passarem pela cavidade, aproximadamente, foi possível obter um grau de “purificação” ( $\zeta \approx 0.53$ ) (figura 3.5) muito melhor, que o apresentado pelo micromaser de um fóton ( $\zeta \approx 0.65$ ) [92], considerando o caso em que o número médio de fótons do campo aumenta. Naturalmente, quanto mais intenso for o campo inicial ( $\bar{n}$  grande) mais difícil será purificá-lo. Obtivemos assim um bom grau de “purificação” mesmo começando com um campo relativamente ruidoso, contendo em torno de  $\bar{n} = 10$  fótons térmicos.

De modo geral identificamos dois tipos de estados gerados; primeiramente uma distribuição de 4 picos (figura (3.9)), e o caso trivial onde os fótons são retirados da cavidade pelos átomos, conduzindo ao estado de vácuo ou de 1 fóton. Ambos os estados

tem uma representação simétrica no espaço de fase em relação à origem, similar ao estado inicial. Neste trabalho negligenciamos as perdas na cavidade e também esperamos que o decaimento venha competir com o processo de “purificação”. Em nosso caso, o tempo total do experimento, considerando o tempo de interação para cada átomo  $12.2/\lambda$ , excede o tempo de decaimento das atuais cavidades, porém há de se salientar a importância do estudo de situações ideais para o questionamento da dinâmica átomo-campo.

Em nosso segundo estudo, seção (3.2), acrescentamos ao MJC de dois fótons uma interação tipo Kerr [77], com a finalidade de tornar mais eficiente a transferência de coerência átomo-campo, isto é, um alto grau de “purificação” com poucos átomos e também um tempo de interação reduzido. Como constatamos em nossos resultados tal proposta foi bem sucedida; conseguimos reduzir o tempo de interação em aproximadamente 78% (de  $T = 12.2/\lambda$  para  $T = 2.71/\lambda$ ), em relação ao trabalho da seção (3.1). Conseguimos uma “purificação” maior ( $\zeta \approx 0.24$  em relação a  $\zeta \approx 0.53$ ), com um número bem reduzido de átomos (150 átomos contra 200 átomos, da proposta anterior).

Verificamos que o acréscimo de um meio não-linear tipo Kerr no MJC de dois fótons produz duas modificações no modelo usado anteriormente (seção 3.1). Primeiramente, acrescenta à interação duas fases relativas ( $\Theta_1 = i(n^2 + n - 1)\eta t$  e  $\Theta_2 = i(n^2 - 3n + 1)\eta t$ , referentes aos coeficientes do operador evolução  $\hat{U}_{II}(t)$  (eq. 3.26), que dependem somente do coeficiente do meio não-linear ( $\eta$ ); em segundo, as frequências  $\lambda\gamma_n$  e  $\lambda\epsilon_n$  (eq. 3.34) também são alteradas, pelo fator  $\Lambda = \chi - 2\eta$ , onde nesse caso, temos uma competição, entre o efeito Stark dinâmico ( $\chi$ ), que surge devido à eliminação adiabática do terceiro nível ( $|i\rangle$ ), e o meio não-linear tipo Kerr ( $\eta$ ). Verificamos a influência na transferência de coerência dos átomos para o campo na cavidade, considerando  $\eta = \chi/2$  ( $\Lambda = 0$ ), o que nos permitiu uma completa eliminação do efeito Stark dinâmico. Com essa escolha constatamos que não houve uma melhora na transferência de coerência ( $\zeta \approx 0.56$ ), além do número médio de fótons diminuir ( $\bar{n} \approx 2$ ). Nesse caso, consideramos o mesmo tempo de interação obtido inicialmente ( $T = 2.71/\lambda$ ). O próximo passo foi procurar, nesse caso, outros tempos, e o melhor resultado que encontramos para a “purificação” e o número médio de fótons foi, respectivamente,  $\zeta \approx 0.32$  e  $\bar{n} \approx 47$ , para um tempo de interação  $T = 2.12/\lambda$ . Tal resultado não representou uma melhora aos primeiros resultados obtidos nesse modelo.

A fim de verificamos a influência da fase atômica em todo esse processo, cal-

culamos o grau de “purificação”  $\zeta$  variando a fase  $\phi$ . Como essa fase se combina às fases  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$ , constatamos que houve uma melhora relativa no grau de “purificação” ( $\zeta \approx 0.22$ ) quando  $\phi$  toma os valores  $\phi = (0.1 + l)\pi/2$  ( $l = 0, 2, 4\dots$ ), para  $T = 2.71/\lambda$ .

Quanto ao estado do campo gerado, encontramos um comportamento para a distribuição de número de fótons  $P(n)$  (figura 3.21) semelhante ao apresentado pelo estado de número, com um pico centrado no número médio de fótons, com uma flutuação próxima de zero. Encontramos também para as propriedades não-clássicas, parâmetro  $Q$  de Mandel e a coerência de segunda ordem, um comportamento típico apresentado por esse estado de número, isto é, uma estatística sub-Poissoniana máxima ( $Q = -1$ ) e um comportamento de anti-agrupamento de fótons pouco pronunciado, com um valor para  $g(2)$  próximo de 1, porém menor (eq. 2.70).

Como uma representação no espaço de fase desse estado utilizamos a função de Husimi (função  $Q$ ). Observamos (figura 3.22) um comportamento semelhante ao apresentado pelo estado de número (figura 2.1). Através das curvas de nível (figura 3.23), observamos uma rotação em relação à origem e a tendência para a formação de dois picos.

Como no modelo anterior, aqui também o estado inicial do campo não estava em um estado puro mas sim em uma mistura estatística, isto é, em condições menos favoráveis, pois o ruído desse estado dificulta a transferência de coerência.

Em nosso último trabalho, seção (3.3), acrescentamos ao modelo da seção (3.1), modelo Jaynes - Cummings de dois fótons, um campo clássico externo. Verificamos que a transferência de coerência do átomo para o campo na cavidade foi favorecida com essa interação. Obtivemos um estado para o campo na cavidade com um altíssimo grau de “purificação” ( $\zeta \approx 0.07$ ), com um número médio de fótons  $\bar{n} \approx 7.7$  fótons (inicialmente  $\bar{n} = 5$  fótons), utilizando somente 100 átomos. Verificamos também que não foi preciso considerar, inicialmente, os átomos em uma superposição coerente de dois estados, como nos dois trabalhos apresentados anteriormente nessa tese. Trabalhamos com os átomos inicialmente preparados em um estado excitado ( $|e\rangle$ ), pois como vimos a interação do campo externo com o átomo, dentro da cavidade, estimulou a transferência de coerência para o campo quantizado na cavidade, sem que previamente (fora da cavidade) o átomo estivesse preparado em um estado de superposição, de modo que a sua coerência fosse transferida para o campo na cavidade.

Estudamos também o comportamento da transferência de coerência alterando

a influência do campo externo ( $\epsilon$ ). Calculamos o grau de “purificação”  $\zeta$  e o número médio de fótons  $\bar{n}$  para os valores de  $\epsilon = 1.0, 2.0, 3.0$  e verificamos que todo o processo não é proporcional à intensidade do campo externo, como poderíamos esperar, visto que a contribuição desse se dá alterando proporcionalmente os elementos da matriz do operador densidade do campo (eq. 3.60), em relação ao caso estudado anteriormente (seção 3.1).

Calculamos a distribuição de número de fótons  $P(n)$  para o estado final gerado na cavidade. Observamos certas oscilações típicas de um comportamento apresentado por estados não-clássicos. Neste caso também utilizamos a função de quasiprobabilidade de Husimi (função  $Q$ ) para representar o estado final gerado na cavidade. Encontramos dois picos, que são uma característica do processo de dois fótons, deslocados da origem devido à ação do campo clássico externo. Verificamos que os dois picos se deslocam quando tomamos valor de  $\epsilon$  negativo, em sentido oposto ao caso em que  $\epsilon$  é positivo. Isso está ligado com o fato que o Hamiltoniano que descreve tal interação (eq. 3.55) é o resultado da aplicação do operador deslocamento sob o Hamiltoniano do Modelo Jaynes-Cummings (eq. 3.2).

Outro resultado importante obtido foi a diminuição do tempo de interação de cada átomo,  $T = 8.9/\lambda$ , em relação ao primeiro caso estudado (seção 3.1).

Em todos os casos apresentados nessa tese verificamos que escolhido o tempo de interação, os parâmetros inicialmente fixados ( $\Delta, \chi$ ), ficaram fortemente vinculados a esta escolha, isto é, à variação de qualquer um deles não trouxe uma melhora para os resultados encontrados.

Nos três trabalhos apresentados nessa tese, não consideramos as perdas de energia na cavidade, isto é, nosso modelo de interação átomo-campo (na cavidade) não levava em conta as supostas perdas de energia pela cavidade, sendo assim, uma perspectiva para um trabalho futuro está em considerar as perdas de energia e verificar como se dá a competição entre a transferência de coerência para o campo, pelos átomos, e essas perdas.

# Apêndice A

## Eliminação Adiabática do nível atômico intermediário .

Consideremos inicialmente um átomo de três níveis (figura A.1) interagindo com um único modo de um campo quantizado aprisionado em uma cavidade sem perdas. As respectivas energias dos níveis atômicos  $|g\rangle, |i\rangle, |e\rangle$  são dadas por:  $E_g < E_i < E_e$ . O nível intermediário  $|i\rangle$  possui uma dessintonia dada por:

$$\hbar\delta = E_i - \frac{E_e + E_g}{2}. \quad (\text{A.1})$$

Fixamos o zero na linha tracejada.

Essa interação átomo-campo é descrita pelo modelo Jaynes-Cummings, na aproximação de onda girante, dada pelo Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & E_e \hat{\sigma}_{ee} + E_i \hat{\sigma}_{ii} + E_g \hat{\sigma}_{gg} + \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \\ & \hbar g_{ig} (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{gi} + \hat{a} \hat{\sigma}_{ig}) + \hbar g_{ei} (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{ie} + \hat{a} \hat{\sigma}_{ei}), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{a}$  são os operadores de criação e aniquilação de fótons do campo na cavidade. Os operadores no subespaço do átomo são  $\hat{\sigma}_{kj}$  ( $k, j = g, i, e$ ), com  $\hat{\sigma}_{kk}$  sendo o número de ocupação do nível e  $\hat{\sigma}_{kj}$  ( $k \neq j$ ) sendo o operador de transição dos níveis  $j$  para  $k$ . O campo na cavidade está na frequência  $\omega$  e os níveis de energia do átomo, conforme o esquema (3.1), são dados por:  $E_e - E_i = \hbar\omega_0/2 - \delta\hbar$  e  $E_i - E_g = \hbar\omega_0/2 + \delta\hbar$ , com  $\omega_0$  a frequência atômica entre os níveis de energia  $E_e$  e  $E_g$ . O acoplamento entre os níveis atômicos são dados pelas respectivas constantes  $g_{ig}$  e  $g_{ei}$  (eq. 2.97).

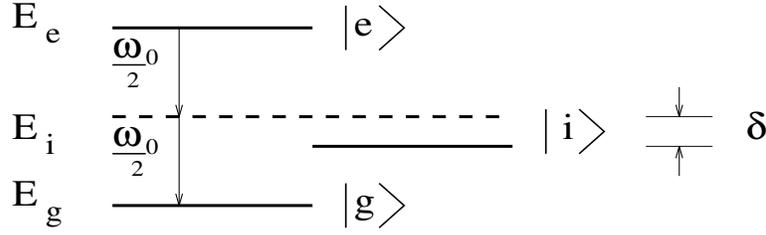


Figura A.1: Representação esquemática de um átomo de três níveis.

Demonstraremos que o Hamiltoniano (A.2) se reduz a um Hamiltoniano efetivo (3.2), quando o nível intermediário  $|i\rangle$  é eliminado adiabaticamente.

A equação de Heisenberg para a evolução temporal de um operador que não depende explicitamente do tempo é dada por:

$$i\hbar\dot{\hat{A}} = [\hat{A}, \hat{H}]. \quad (\text{A.3})$$

Calculando  $[\hat{\sigma}_{ig}, \hat{H}]$  e  $[\hat{\sigma}_{ei}, \hat{H}]$  para o Hamiltoniano (A.2) e substituindo na equação acima (A.3) obtemos:

$$i\hbar\dot{\hat{\sigma}}_{ig} = (E_g - E_i)\hat{\sigma}_{ig} + \hbar g_{ig}\hat{a}^\dagger(\hat{\sigma}_{ii} - \hat{\sigma}_{gg}) - \hbar g_{ei}\hat{a}\hat{\sigma}_{eg}. \quad (\text{A.4})$$

$$i\hbar\dot{\hat{\sigma}}_{ei} = (E_i - E_e)\hat{\sigma}_{ei} + \hbar g_{gi}\hat{a}\hat{\sigma}_{eg} + \hbar g_{ei}\hat{a}^\dagger(\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{ii}). \quad (\text{A.5})$$

Façamos agora uma transformação de variáveis dadas por:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ig} &= \tilde{\sigma}_{ig}e^{i\frac{\omega_0}{2}t}, & \hat{\sigma}_{ei} &= \tilde{\sigma}_{ei}e^{i\frac{\omega_0}{2}t} \\ \hat{\sigma}_{ii} &= \tilde{\sigma}_{ii}, & \hat{\sigma}_{gg} &= \tilde{\sigma}_{gg} \\ \hat{\sigma}_{eg} &= \tilde{\sigma}_{eg}e^{i\omega_0 t} \\ \hat{a}^\dagger &= \tilde{a}^\dagger e^{i\frac{\omega_0}{2}t}, & \hat{a} &= \tilde{a}e^{-i\frac{\omega_0}{2}t}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Calculando  $\dot{\hat{\sigma}}_{ig}$  e  $\dot{\hat{\sigma}}_{ei}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\sigma}}_{ig} &= \dot{\tilde{\sigma}}_{ig}e^{i\frac{\omega_0}{2}t} + \left(i\frac{\omega_0}{2}\right)\tilde{\sigma}_{ig}e^{i\frac{\omega_0}{2}t} \\ \dot{\hat{\sigma}}_{ei} &= \dot{\tilde{\sigma}}_{ei}e^{i\frac{\omega_0}{2}t} + \left(i\frac{\omega_0}{2}\right)\tilde{\sigma}_{ei}e^{i\frac{\omega_0}{2}t}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Substituindo as equações acima (A.6 e A.7) em (A.4 e A.5) e considerando que  $E_e - E_i = \hbar\omega_0/2 - \delta\hbar$  e  $E_i - E_g = \hbar\omega_0/2 + \delta\hbar$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
i\dot{\tilde{\sigma}}_{ig} &= -\delta\tilde{\sigma}_{ig} + g_{ig}\hat{a}^\dagger(\tilde{\sigma}_{ii} - \tilde{\sigma}_{gg}) - g_{ei}\hat{a}\tilde{\sigma}_{eg} \\
i\dot{\tilde{\sigma}}_{ei} &= \delta\tilde{\sigma}_{eg} + g_{ig}\hat{a}\tilde{\sigma}_{eg} + g_{ei}\hat{a}^\dagger(\tilde{\sigma}_{ee} - \tilde{\sigma}_{ii}).
\end{aligned} \tag{A.8}$$

A solução “adiabática” é obtida no limite quando a dessintonia  $\delta$  é grande, o que implica em  $\dot{\tilde{\sigma}}_{ig} = 0$  e  $\dot{\tilde{\sigma}}_{ei} = 0$ , desse modo podemos eliminar o nível intermediário ( $\dot{\tilde{\sigma}}_{ii} = 0$ ). Logo, obtemos:

$$\tilde{\sigma}_{ig} = \frac{1}{\delta}[g_{ig}\hat{a}^\dagger\tilde{\sigma}_{gg} + g_{ei}\hat{a}\tilde{\sigma}_{eg}] \tag{A.9}$$

$$\tilde{\sigma}_{eg} = \frac{1}{\delta}[g_{ig}\hat{a}\tilde{\sigma}_{eg} + g_{ei}\hat{a}^\dagger\tilde{\sigma}_{ee}]. \tag{A.10}$$

Retomando aos operadores  $\hat{\sigma}$ 's e  $\hat{a}$ 's acima, teremos:

$$\hat{\sigma}_{ig} = \frac{1}{\delta}[g_{ig}\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{gg} + g_{ei}\hat{a}\hat{\sigma}_{eg}] \tag{A.11}$$

$$\hat{\sigma}_{eg} = \frac{1}{\delta}[g_{ig}\hat{a}\hat{\sigma}_{eg} + g_{ei}\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{ee}]. \tag{A.12}$$

Substituindo as expressões acima no Hamiltoniano (A.2), obtemos o Hamiltoniano efetivo dado por:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{ef} &= E_e\hat{\sigma}_{ee} + E_g\hat{\sigma}_{gg} + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \\
&\hbar(\chi_1\hat{\sigma}_{ee} + \chi_2\hat{\sigma}_{gg})\hat{a}^\dagger\hat{a} + \lambda\hbar(\hat{a}^2\hat{\sigma}_{eg} + \hat{a}^{\dagger 2}\hat{\sigma}_{ge}),
\end{aligned} \tag{A.13}$$

onde

$$\lambda = \frac{2g_{ig}g_{ei}}{\delta}; \tag{A.14}$$

$$\chi_1 = \frac{2g_{ei}^2}{\delta}; \quad \chi_2 = \frac{2g_{ig}^2}{\delta}. \tag{A.15}$$

Podemos estender essa eliminação aos dois outros modelos usados nessa tese, respectivamente, o Modelo Jaynes-Cummings com um meio não-linear tipo Kerr e o MJC forçado. No primeiro caso, MJC mais o meio tipo Kerr, temos o Hamiltoniano:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= E_e\hat{\sigma}_{ee} + E_i\hat{\sigma}_{ii} + E_g\hat{\sigma}_{gg} + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \\
&+ \hbar\eta\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 + \hbar g_{ig}(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{gi} + \hat{a}\hat{\sigma}_{ig}) + \hbar g_{ei}(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{ie} + \hat{a}\hat{\sigma}_{ei}).
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Onde o Hamiltoniano  $H_{Kerr} = \hbar\eta\hat{a}^\dagger\hat{a}^2$  representa a interação com o meio não-linear, sendo  $\eta$  a parte dispersiva da não-linearidade de terceira ordem do meio tipo Kerr. Calculando agora  $[\hat{\sigma}_{ig}, \hat{H}]$  e  $[\hat{\sigma}_{ei}, \hat{H}]$  para o Hamiltoniano (A.16) e substituindo na equação (A.3), observamos que o resultado será o mesmo obtido anteriormente (equações A.19), pois  $\hat{\sigma}_{ig}$  e  $\hat{\sigma}_{ei}$  comutam com  $H_{Kerr}$ . Sendo assim o meio tipo Kerr não têm qualquer participação na eliminação adiabática do nível intermediário  $|i\rangle$  do átomo.

Para o Modelo Jaynes-Cummings Forçado temos o Hamiltoniano:

$$\begin{aligned}\hat{H}_1 = & E_e\hat{\sigma}_{ee} + E_i\hat{\sigma}_{ii} + E_g\hat{\sigma}_{gg} + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \\ & + \hbar g_{ig}[(\hat{a} + \varepsilon^* e^{-i\omega't})\hat{\sigma}_{ig} + (\hat{a}^\dagger + \varepsilon e^{i\omega't})\hat{\sigma}_{gi}] \\ & + \hbar g_{ei}[(\hat{a}^\dagger + \varepsilon^* e^{-i\omega't})\hat{\sigma}_{ie} + (\hat{a} + \varepsilon e^{i\omega't})\hat{\sigma}_{ei}],\end{aligned}\quad (\text{A.17})$$

descrevendo a interação do átomo + o campo na cavidade + o campo externo. Calculando agora  $[\hat{\sigma}_{ig}, \hat{H}_1]$  e  $[\hat{\sigma}_{ei}, \hat{H}_1]$  e substituindo na equação (A.3), obtemos:

$$i\hbar\dot{\hat{\sigma}}_{ig} = (E_g - E_i)\hat{\sigma}_{ig} + \hbar g_{ig}(\hat{a}^\dagger + \varepsilon^* e^{-i\omega't})(\hat{\sigma}_{ii} - \hat{\sigma}_{gg}) - \hbar g_{ei}(\hat{a} + \varepsilon e^{i\omega't})\hat{\sigma}_{eg}. \quad (\text{A.18})$$

$$i\hbar\dot{\hat{\sigma}}_{ei} = (E_i - E_e)\hat{\sigma}_{ei} + \hbar g_{gi}(\hat{a} + \varepsilon e^{i\omega't})\hat{\sigma}_{eg} + \hbar g_{ei}(\hat{a}^\dagger + \varepsilon^* e^{-i\omega't})(\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{ii}). \quad (\text{A.19})$$

Como o campo externo é representado por um termo aditivo (não operador) aos respectivos operadores de criação ( $\hat{a}^\dagger$ ) e aniquilação ( $\hat{a}$ ) do campo na cavidade, podemos observar que o Hamiltoniano final após as respectivas transformações de variáveis (A.6), considerando  $\omega' = \omega_0/2$  e fazendo as mesmas substituições realizadas anteriormente (primeiro caso), será:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} = & \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar \left[ \frac{\omega_0}{2} + \chi(\hat{a}^\dagger + \varepsilon e^{-i(\omega_0/2)t})(\hat{a} + \varepsilon e^{i(\omega_0/2)t}) \right] \hat{\sigma}_z \\ & + \lambda \left[ (\hat{a}^\dagger + \varepsilon e^{-i(\omega_0/2)t})^2 \hat{\sigma}_- + (\hat{a} + \varepsilon e^{i(\omega_0/2)t})^2 \hat{\sigma}_+ \right].\end{aligned}\quad (\text{A.20})$$

Onde a constante de acoplamento efetiva é  $\lambda = 2g^2/\delta$ , tal que  $g = g_{ig} = g_{ei}$  [6] ( $\delta = E_i - (E_e + E_g)/2$ );  $\hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_{eg}$ ,  $\hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_{ge}$  e  $\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{gg}$  são os operadores transição atômica, com  $g_{eg} = g_{ei}g_{ig}$ . O parâmetro  $\chi = 2g^2/\delta$  é devido ao efeito Stark dinâmico.

# Apêndice B

## Micromaser com Átomos Interagindo na Aproximação Dispersiva

Como vimos na seção (2.7) o modelo Jaynes-Cummings (MJC) descreve a interação de um átomo de dois níveis com um único modo de um campo eletromagnético quantizado, aprisionado em um cavidade perfeita. A interação desse átomo com o campo pode ser ressonante (ou próximo da ressonância) ou dispersiva (muito fora da ressonância). Em toda essa tese trabalhamos com o caso próximo da ressonância. Veremos nesse apêndice, como no caso dispersivo não teremos transferência de coerência dos átomos para o campo.

O Hamiltoniano que descreve a interação dispersiva entre átomo e campo, na aproximação de onda girante, é dado por [8]:

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g\hat{a}^\dagger\hat{a}(\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{gg}), \quad (\text{B.1})$$

onde a frequência do campo na cavidade é dada por  $\omega$  e  $\omega_0 = \omega_e - \omega_g$  é a frequência entre os níveis atômicos  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ . Observamos que nesse caso o último termo do Hamiltoniano, referente a interação átomo-campo, não leva a uma troca de energia entre o átomo e o campo, pois  $\hat{\sigma}_{ee}$  e  $\hat{\sigma}_{gg}$  representam o número de ocupação dos respectivos níveis  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ , isto é, não são operadores de transição atômica.

Dado o Hamiltoniano (B.1) podemos determinar o operador de evolução temporal  $\hat{U}(t) = \exp(iH_I t/\hbar)$ , onde  $H_I = \hbar g\hat{a}^\dagger\hat{a}(\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{gg})$  é o Hamiltoniano na representação de interação. Assim:

$$\hat{U}(t) = \begin{bmatrix} \hat{a}_n & 0 \\ 0 & \hat{a}_n^* \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

onde  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  e  $\hat{\alpha}_n = \cos(gt\hat{n}) - i \sin(gt\hat{n})$ .

Considerando agora o mesmo sistema estudado em toda essa tese, isto é, N-átomos inicialmente preparados em uma superposição coerente de dois estados,

$$|\phi^a\rangle = b|g_k\rangle + ae^{i\phi}|e_k\rangle, \quad (\text{B.3})$$

interagindo, um de cada vez, com um campo aprisionado em uma cavidade sem perdas, teremos que o estado do sistema, na base de esta de número, será:

$$|\Psi_N^{ac}\rangle = \sum_n \langle n | \Psi_{N-1} \rangle \hat{U}_N(t) |\phi_N^a; n\rangle \quad (\text{B.4})$$

onde  $\hat{U}_N(t)$  o operador de evolução temporal dado por (B.2) e  $t$  o tempo de interação do átomo com o campo na cavidade (igual para todos os N-átomos). O primeiro termo depois da somatória tem toda a informação da interação dos  $(N - 1)$ -átomos com o campo na cavidade e o termo posterior registra a evolução da passagem do último átomo.

Podemos agora determinar os elementos de matriz do operador densidade do campo calculando o traço parcial nas variáveis atômicas do operador densidade total átomo-campo:

$$\rho_N^c(n, n') = \text{Tr}_{(a)} [ \langle n | \Psi_N^{ac} \rangle \langle \Psi_N^{ac} | n' \rangle ]. \quad (\text{B.5})$$

Desse modo, podemos determinar uma relação de recorrência entre os elementos de matriz do operador densidade do campo após  $(N - 1)$  átomos ( $\hat{\rho}_{N-1}^c(n, n')$ ) passarem pela cavidade, com os elementos de matriz do operador densidade do campo gerado com a passagem do N-ésimo átomo ( $\hat{\rho}_N^c(n, n')$ ), analogamente à equação (2.117). Obtemos, assim:

$$\rho_N^c(n, n') = \rho_{N-1}^c(n, n') \left[ \alpha_n \alpha_{n'}^* a^2 + \alpha_n^* \alpha_{n'} b^2 \right]. \quad (\text{B.6})$$

Como podemos observar neste caso, se inicialmente o campo estiver em um estado de mistura estatística, após a interação com os N-átomos o campo permanecerá em um estado misturado. Portanto, para uma interação dispersiva, isto é, sem troca de energia entre os átomos e o campo, não é possível transferir a coerência dos átomos para o campo na cavidade.

# Apêndice C

## Hamiltoniano da interação átomo-campo mais um meio não-linear tipo Kerr.

A interação de um átomo de três níveis, cujo terceiro nível foi eliminado adiabaticamente (apêndice A), com um único modo de um campo eletromagnético confinado em uma cavidade (modelo MJC com a aproximação de onda girante) mais uma meio não-linear tipo Kerr, é descrito pelo Hamiltoniano [84]:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega'\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hbar\left(\frac{\omega_0}{2} + \chi\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\hat{\sigma}_z \\ & + q\hbar\hat{b}^{\dagger 2}\hat{b}^2 + p\hbar(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{b}^\dagger\hat{a}) + \lambda\hbar(\hat{a}^{\dagger 2}\hat{\sigma}_- + \hat{a}^2\hat{\sigma}_+), \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

O meio não-linear é modelado como um oscilador anarmônico [78, 79, 15] com frequência  $\omega'$ . Analogamente aos operadores de criação e aniquilação,  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{a}$ , de fótons para o campo na cavidade, os operadores  $\hat{b}^\dagger$  e  $\hat{b}$  representam os operadores de criação e aniquilação referente ao meio tipo Kerr. O parâmetro  $q$  representa a anarmonicidade e  $p$  a constante de acoplamento do meio tipo Kerr com o modo do campo.

Demonstraremos que o sistema átomo-campo + meio não-linear, descrito pelo Hamiltoniano (C.1), pode ser reduzido ao Hamiltoniano efetivo (C.12).

A equação de Heisenberg para a evolução temporal de um operador que não depende explicitamente do tempo é dada por:

$$i\hbar\dot{\hat{A}} = [\hat{A}, \hat{H}]. \quad (\text{C.2})$$

Calculando  $[\hat{b}^\dagger, \hat{H}]$  e  $[\hat{b}, \hat{H}]$  para o Hamiltoniano (C.1) obtemos:

$$[\hat{b}^\dagger, \hat{H}] = -\omega'\hbar\hat{b}^\dagger - 2q\hbar\hat{b}^{\dagger 2}\hat{b} - p\hbar\hat{a}^\dagger, \quad (\text{C.3})$$

$$[\hat{b}, \hat{H}] = \omega' \hbar \hat{b} + 2q \hbar \hat{b}^\dagger \hat{b}^2 + p \hbar \hat{a}. \quad (\text{C.4})$$

Substituindo esse resultado na equação (C.2) teremos:

$$i \dot{\hat{b}}^\dagger = -\omega' \hat{b}^\dagger - 2q \hat{b}^\dagger \hat{b}^2 - p \hat{a}^\dagger, \quad (\text{C.5})$$

$$i \dot{\hat{b}} = \omega' \hat{b} - 2q \hat{b}^\dagger \hat{b}^2 + p \hat{a}. \quad (\text{C.6})$$

Façamos agora a transformações de variáveis dadas por:

$$\begin{aligned} \hat{b}^\dagger &= \hat{b}^\dagger e^{i\omega t}, & \hat{b} &= \hat{b} e^{-i\omega t}, \\ \hat{a}^\dagger &= \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}, & \hat{a} &= \hat{a} e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Calculando  $\dot{\hat{b}}^\dagger$  e  $\dot{\hat{b}}$  obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{b}}^\dagger &= \dot{\hat{b}}^\dagger e^{i\omega t} + i\omega \hat{b}^\dagger e^{i\omega t} \\ \dot{\hat{b}} &= \dot{\hat{b}} e^{i\omega t} - i\omega \hat{b} e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Substituindo as equações acima (C.7 e C.8) em (C.5 e C.6) obtemos:

$$\begin{aligned} i \dot{\hat{b}}^\dagger &= (\omega - \omega') \hat{b}^\dagger - 2q \hat{b}^\dagger \hat{n}_b - p \hat{a}^\dagger, \\ i \dot{\hat{b}} &= -(\omega - \omega') \hat{b} + 2q \hat{n}_b \hat{b} + p \hat{a}, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

onde  $\hat{n}_b = \hat{b}^\dagger \hat{b}$ , o número de fótons do meio não-linear.

Se o tempo de resposta do meio não-linear for rápida, de tal modo que este segue o campo de maneira adiabática, teremos:  $\dot{\hat{b}}^\dagger = 0$ ,  $\dot{\hat{b}} = 0$  e  $n_b = 0$ . Retomando aos operadores  $\hat{b}$ 's e  $\hat{a}$ 's obtemos:

$$\hat{b}^\dagger = \frac{p}{\Delta'} \hat{a}^\dagger \quad (\text{C.10})$$

$$\hat{b} = \frac{p}{\Delta'} \hat{a}. \quad (\text{C.11})$$

Onde  $\Delta' = \omega - \omega'$ . No limite adiabático a frequência dos dois osciladores  $\omega'$  e  $\omega$  estão longe uma da outra, de tal modo que  $p/\Delta' \ll 1$ , o que permite introduzir uma susceptibilidade de terceira ordem [84].

Substituindo as expressões acima (C.10 e C.11) no Hamiltoniano (C.1), encontramos o Hamiltoniano efetivo:

$$\hat{H}_{ef} = \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\left(\frac{\omega_0}{2} + \chi\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\hat{\sigma}_z + \hbar\eta\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 + \hbar\lambda\left(\hat{a}^{\dagger 2}\hat{\sigma}_- + \hat{a}^2\hat{\sigma}_+\right). \quad (\text{C.12})$$

Onde a nova frequência  $\omega_c$  e o parâmetro  $\eta$  estão relacionadas com  $p$  e  $q$  dados por:

$$\eta = \frac{qp^4}{\Delta'^4}, \quad \omega_c = \omega - \frac{p^2}{\Delta'}, \quad \Delta' = \omega - \omega'. \quad (\text{C.13})$$

O parâmetro  $\eta$  representa a parte dispersiva da não-linearidade de terceira ordem do meio tipo Kerr [15]. Temos também: a constante de acoplamento efetiva átomo-campo (apêndice A) dado por  $\lambda$ ;  $\omega_0$  a frequência do átomo e  $\omega_c$  a nova frequência;  $\hat{\sigma}_-$ ,  $\hat{\sigma}_+$  e  $\hat{\sigma}_z$  são os operadores atômicos;  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  são os operadores de aniquilação e de criação de fótons na cavidade. O coeficiente do efeito Stark dinâmico (apêndice A) é dado por  $\chi$ .



# Bibliografia

- [1] S. Haroche, “*Cavity Quantum Electrodynamics*”, course 13, Systèmes fondamentaux en optique quantique, Les Houches (1990).
- [2] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. Inst. Elect. Electron. Engrs, **51**, 89 (1963).
- [3] R. G. Hulet and D. Kleppner, Phys. Rev. Lett., **51**, 1430 (1983); A. Nussenzveig, J. Hare, A. M. Steinberg, L. Moi, M. Gross, and S. Haroche, Europhysics Lett., **14**, 755 (1991).
- [4] P. Filipowicz, J. Javanainen and P. Meystre, Phys. Rev. A, **34**, 3077 (1986); P. Filipowicz, J. Javanainen and P. Meystre, Opt. Communications **58**, 327 (1986).
- [5] J. Krause, M. O. Scully, and H. Walther, Phys. Rev. A, **34**, 2032 (1986).
- [6] L. Davidovich, J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, Phys. Rev. A, **36**, 3771 (1987).
- [7] R. E. Slusher, L. W. Holberg, B. Yurke, J. C. Mertz and J. F. Valley, Phys. Rev. Lett. **55**, 2409 (1985).
- [8] M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich and N. Zagury, Phys. Rev. A, **45**, 5193 (1992).
- [9] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, “*Quantum Mechanics*”, 2<sup>nd</sup> edition (Wiley, New York and Hermann, Paris, 1977).
- [10] R. Loudon, “*Quantum Theory of Light*”, 2<sup>nd</sup> edition (Clarendon Press, Oxford, 1986).

- [11] M. Sargent III, M. O. Scully, and W. E. Lamb Jr. “*Laser Physics*”, (Addison-Wesley, Reading, MA, 1974).
- [12] D. F. Walls and G. J. Milburn, “*Quantum Optics*” , 2<sup>end</sup> edition (Springer-Verlag, New York, 1995).
- [13] M. Hillery, R. F. O’Connell, M. O. Scully and E. P. Wigner, Phys. Report, **106**, 123 (1984).
- [14] H. Moya-Cessa and P. L. Knight, Phys. Rev. A, **48**, 2479 (1993).
- [15] G. S. Agarwal and R. R. Puri, Phys. Rev. A, **39**, 2969 (1989).
- [16] P. Alsing, D. S. Guo and H. J. Carmichael, Phys. Rev. A, **45**, 5135, (1992); S. Zheng and G. Guo, Quant. Semicl. Opt. **8**, 951 (1996).
- [17] K. Vogel, V. M. Akulin and W. P. Schleich, Phys. Rev. Lett., **71**, 1816 (1993).
- [18] M. Dakna, J. Clausen, L. Knöll and D. G. Welsch, Phys. Rev. A, **59**, 1658 (1999).
- [19] C. K. Law and J. H. Eberly, Phys. Rev. Lett., **76**, 1055 (1996).
- [20] A. Vidiella-Barranco and J.A. Roversi, Phys. Rev. A, **58**, 3349 (1998).
- [21] K. Zaheer and M. S. Zubairy, Phys. Rev. A, **39**, 2000 (1989).
- [22] D. Jonathan, K. Furuya and A. Vidiella-Barranco, J. Mod. Opt., **46**, 1697 (1999).
- [23] J. H. Eberly, N. B. Narozhny and J. J. Sanchez-Mondragon, Phys. Rev. Lett. **44**, 1323 (1980).
- [24] H. J. Carmichael and D. F. Walls, J. Phys. **B9**, 1199 (1976).
- [25] P. Nussenzevig, F. Bernardot, M. Brune, J. Hare, J. M. Raimond, S. Haroche, and W. Gawlik, Phys. Rev. A, **48**, 3991 (1993).
- [26] P. A. M. Dirac, “*Principles of Quantum Mechanics*”, 4<sup>end</sup> edition (Oxford University Press, Oxford, 1958).

- [27] J. von Neumann, “*Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*” (Princeton University Press, Princeton, 1955).
- [28] J. D. Jackson, “*Classical Electrodynamics*”, 3<sup>rd</sup> edition (Wiley, New York, 1975).
- [29] A. Nussenzveig, “*Introduction to Quantum Optics*” (Gordon and Breach Science Publishers, London, 1973).
- [30] H. J. Kimble, M. Dagenais and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **39**, 691 (1977).
- [31] L. Mandel, Opt. Lett., **4**, 205 (1979).
- [32] R. Short and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **51**, 384 (1983).
- [33] A. Vidiella-Barranco and J. A. Roversi, Phys. Rev. A, **50**, 5233 (1994).
- [34] D. Stoler, Phys. Rev. D, **1**, 3271 (1970).
- [35] H. P. Yuen, Phys. Rev. A, **13**, 2226 (1976).
- [36] K. E. Cahill and R. J. Glauber, Phys. Rev. **177**, 1857 (1969); *ibid* **177**, 1882 (1969).
- [37] E. P. Wigner, Phys. Rev. **40**, 769 (1932).
- [38] R. J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963); *ibid* Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
- [39] D. Ter Haar, “*The Old Quantum Theory*” (Pergamon, Oxford, 1967).
- [40] G. Arfken, “*Mathematical Methods for Physicists*”, New York : Academic, press 1970.
- [41] F. A. M. De Oliveira, M. S. Kim, P. L. Knight and V. Buzek, Phys. Rev. A, **41**, 2645 (1990).
- [42] W. P. Schleich and L. A. Wheeler, J. Opt. Soc. Am. B, **4**, 1715 (1987); *ibid* Phys. Rev. A, **38**, 1177 (1988).
- [43] J. J. Sanchez-Mondragon, N. B. Narozhny and J. F. Eberly, Phys. Rev. Lett. **51**, 550 (1983).

- [44] G. S. Agarwal, Phys. Rev. Lett. **53**, 1732 (1984).
- [45] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond and S. Haroche, Phys. Rev. Lett., **76**, 1800 (1996).
- [46] P. Meystre and M. S. Zubairy, Phys. Lett. A, **89**, 390 (1982).
- [47] R. R. Puri and R. K. Bullough, J. Opt. Soc. Am. B, **5**, 2021 (1988).
- [48] A. Joshi and R. R. Puri, J. Mod. Opt., **36**, 225 (1989).
- [49] A. F. Gomes, J. A. Roversi and A. Vidiella-Barranco, J. Mod. Opt., **46**, 1421 (1999).
- [50] V. Buzek and I. Jex, Opt. Commun. **78**, 425 (1990).
- [51] S. Du, S. Gong, Z. Xu and C. Gong, Quant. Semicl. Opt. **9**, 941 (1997).
- [52] S. D. Dutra, P. L. Knight and H. Moya-Cessa, Phys. Rev. A, **49**, 1993 (1994).
- [53] Fu-li Li, Shaon-yan Gao, Phys. Rev. A, **62**, 1993 (2000).
- [54] V. Buzek, J. Mod. Opt. **36**, 1151 (1989).
- [55] M. S. Abdala, S. S. Hassan and A. S. F. Obada, Phys. Rev. A, **34**, 4869 (1986).
- [56] C. V. Sukumar and B. Buck, Phys. Lett. A **81**, 132 (1981); J. Phys. Mat. Gen., **17**, 877 (1984).
- [57] F. W. Cummings and A. K. Rajagopal, Phys. Rev. A, **39**, 3414 (1989).
- [58] J. Krause, M. O. Scully and H. Walther, Phys. Rev. A, **36**, 4547 (1987).
- [59] F. L. Kien, M. O. Scully and H. Walther, Found. Phys., **23**, 177 (1993).
- [60] D. Vitali, P. Tombesi and G. J. Milburn, Phys. Rev. Lett., **79**, 2442 (1997).
- [61] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond and S. Haroche, Phys. Rev. Lett., **77**, 4887 (1996).

- [62] A. O. Caldeira and A. J. Legget, Phys. Rev. A, **31**, 1059 (1985); D. F. Walls and G. J. Milburn, Phys. Rev. A, **31**, 2403 (1985).
- [63] M. Brune, J. M. Raimond and S. Haroche, Phys. Rev. A, **35**, 154 (1987),
- [64] M. Brune, J. M. Raimond, P. Goy, L. Davidovich, and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **59**, 1899 (1987).
- [65] Ying Wu, Phys. Rev. A, **54**, 1586 (1996).
- [66] P. Alsing and M. S. Zubairy, J. Opt. Soc. Am. B, **4**, 177 (1987).
- [67] H. Moya-Cessa, P. L. Knight and A. Rosenhouse-Dantsker, Phys. Rev. A, **50**, 1814 (1994).
- [68] S. J. D. Phoenix and P.L. Knight, Ann. Phys. (N.Y.), **186**, 381 (1988).
- [69] S. Stenholm, Phys. Rep., **6**, 1 (1973).
- [70] E. Schrödinger, Naturwissenschaften **23**, 807,823,844 (1935), Traduzido para o Inglês por J. D. Trimmer, Proc. Am. Phys. Soc. **124**, 3325 (1980); V. Bužek, A. Vidiella-Barranco and P. L. Knight, Phys. Rev. A, **45**, 6570 (1992).
- [71] U. Leonhardt, “*Measuring the Quantum State of Light*” (Cambridge, Cambridge University Press) (1997), and references therein.
- [72] A. Vidiella-Barranco and H. Moya-Cessa, Braz. J. Phys., **25**, 44 (1995).
- [73] C. Q. Cao, X. H. Ding, Phys. Rev. A, **46**, 6042 (1992).
- [74] A. H. Toor and M. S. Zubairy, Phys. Rev. A, **45**, 4951 (1992).
- [75] P. A. M. Neto, L. Davidovich, J. M. Raimond, Phys. Rev. A, **43**, 5073 (1991).
- [76] M. J. Werner and H. Risken, Phys. Rev. **44**, 4623 (1991); *ibid* Quantum Opt., **3**, 185 (1991).
- [77] A. F. Gomes, J. A. Roversi and A. Vidiella-Barranco, “*Influence of a Kerr medium on the atom-field transfer of coherence in a two-photon micromaser*”,

- Anais do XXII Encontro Nacional de Física da Matéria Condensada (ENFMC), pag. 42, Minas Gerais, Caxambu, 1999.
- [78] D. Drummond and D. F. Walls, *J. Phys. A*, **13**, 725 (1980).
- [79] M. Kitagawa and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. A*, **34**, 3974 (1986).
- [80] B. Yurke and D. Stoler, *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 13 (1986).
- [81] S. Rebic, S. M. Tan, A. S. Parkins and D. F. Walls, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **1**, 490 (1999).
- [82] A. Imamoglu, H. Schmidt, G. Woods and M. Deutsch, *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 1467 (1997).
- [83] V. Bartzis and N. Patargias, *Physica A*, **206**, 725 (1994).
- [84] A. Joshi and R. R. Puri, *Phys. Rev. A*, **45**, 5056 (1992).
- [85] W. P. Schleich and J. A. Wheeler, *J. Opt. Soc. Am. B*, **4**, 1715 (1987).
- [86] R. J. Thompson, G. Rempe and H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1132 (1992).
- [87] A. Joshi, *Phys. Rev. A*, **62**, 043812 (2000).
- [88] A. F. Gomes and A. Vidiella-Barranco, “*Transfer of (atom-field) coherence in a two photon micromaser assisted by an external classical field*”, Anais do XXV Encontro Nacional de Física da Matéria Condensada (ENFMC), Minas Gerais, Caxambu, 2002.
- [89] D. T. Pegg, “*In Laser Physics*”, edited by D. F. Walls and J. D. Harvey (Academic, Sydney, 1980).
- [90] Cohen-Tannoudji, Jacques Dupont-Roc and Gilbert Grynberg, “*Atom-Photon interactions*”, edited by John Wiley and Sons, Inc., New York, 1988.
- [91] S. D. Dutra, P. L. Knight and H. Moya-Cessa, *Phys. Rev. A*, **48**, 3168 (1993); P. L. Knight and P. M. Radmore, *Phys. Rev. A*, **26**, 676 (1982).
- [92] C. A. Arancibia-Bulnes, H. Moya-Cessa and J. J. Sánchez-Mondragón, *Phys. Rev. A*, **51**, 5032 (1995).