

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”

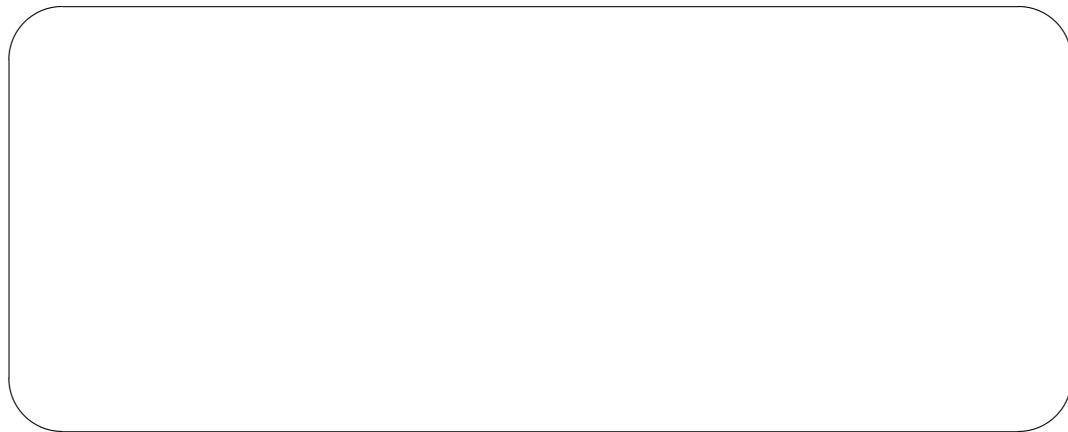
Departamento de Eletrônica Quântica

Grupo de Óptica Quântica

Processamento de Informação Quântica usando um Sistema de Íons Aprisionados e Cavidades

Fernando Luís Semião da Silva

Orientador: Prof. Dr. José Antonio Roversi



Comissão Julgadora:

Prof. Dr. José Antonio Roversi – IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Marcelo A. Marchioli – IFSC/USP

Profa. Dra. Kioko Furuya – IFGW/UNICAMP

Dissertação apresentada ao Instituto de Física “Gleb Wataghin” para a obtenção do título de Mestre em Física.

28 de Agosto de 2002

Dedico esta dissertação aos meus pais pelo apoio e amor incondicionais.

Meu muito obrigado.

“...e o pulso ainda pulsa...”

Titãs

Sumário

Agradecimentos	x
Resumo	xi
Abstract	xii
Introdução	xiii
1 Conceitos Fundamentais	1
1.1 Interação da Radiação com a Matéria	1
1.2 Aprisionamento de Íons numa Armadilha de Paul	6
1.3 Computação e Informação Quântica	12
1.3.1 Qubits e Portas Lógicas Quânticas	12
1.3.2 Universalidade das Matrizes Unitárias de Dois Níveis	15
1.3.3 Paralelismo Quântico e Considerações Físicas	18
2 Descrição do Sistema Físico	25
2.1 Progressos experimentais	26
2.2 Ressonâncias e Bandas Laterais	28
3 Dinâmica e Manipulação Coerente de Estados Quânticos	34
3.1 Geração da Base de Bell	35
3.2 Proposta de Construção da Porta Lógica <i>Controlled-NOT</i>	40
3.3 Dinâmica Dependente da Intensidade do Movimento Iônico	44

Conclusões	52
Apêndices	54
A O Hamiltoniano da Interação Íon-Laser	54
B Cálculo de Operadores de Evolução Temporal	58
B.1 Representação de Interação	58
B.2 Expansão na Base do Átomo de Dois níveis	60
Referências	63

Lista de Figuras

1.1	Armadilha de Paul linear, http://heart-c704.uibk.ac.at	10
1.2	Cadeia de 10 íons $^{40}\text{Ca}^+$, http://www.physik.uni-mainz.de/werth/calcium/ . . .	10
1.3	Íons $^{40}\text{Ca}^+$ aprisionados, http://www.physik.uni-mainz.de/werth/calcium/ . . .	11
1.4	Símbolos num circuito quântico	13
1.5	Símbolo para a porta CNOT	14
1.6	Porta de Toffoli	19
1.7	Circuito clássico implementando uma porta NAND e usando a porta de Toffoli .	20
1.8	Circuito quântico para calcular $f(0)$ e $f(1)$ simultaneamente	21
1.9	Circuito quântico para implementar o algoritmo de Deutsch	22
2.1	Estrutura de níveis do Íon $^{40}\text{Ca}^+$	27
3.1	Inversão de população W em função da variável adimensional gt para tempos longos. Inicialmente o campo é preparado no estado de número $ 0\rangle_c$ (estado de vácuo). O parâmetro de Lamb-Dicke utilizado foi $\eta_c = 0.05$. O movimento do centro de massa está inicialmente preparado no estado coerente $ 2\rangle_v$	47
3.2	Inversão de população W em função da variável adimensional gt . Inicialmente foi tomado $\alpha_c = 5$ e $\alpha_v = 2$. O parâmetro de Lamb-Dicke utilizado foi $\eta_c = 0.02$ em (a) e $\eta_c = 0.04$ em (b).	49
3.3	Inversão de população W em função da variável adimensional gt para tempos longos. Inicialmente fixamos $\alpha_c = 5$ e $\alpha_v = 2$. O parâmetro de Lamb-Dicke usado foi $\eta_c = 0.02$ em (a) e $\eta_c = 0.04$ em (b).	50

3.4	Inversão de população atômica W em função da variável adimensional gt . Inicialmente foi tomado $\alpha_c = 4$ e $\alpha_v = 4$. O parâmetro de Lamb-Dicke usado foi $\eta_c = 0.05$	50
-----	---	----

Agradecimentos

Em primeiro lugar eu agradeço ao Prof. Dr. J. A. Roversi pelo apoio dado ao longo de cinco anos de trabalho, desde a iniciação científica até a presente finalização desta dissertação, me ajudando a procurar bases físicas quando a matemática parecia dominar os trabalhos.

Agradeço ao Prof. Dr. A. Vidiella-Barranco pela oportunidade de termos trabalhado juntos e por contribuir decisivamente nos trabalhos que realizamos e agradeço também à banca examinadora formada pelo Prof. Dr. Marcelo Marchioli e pela Profa. Dra. Kyoko Furuya pelas correções e discussões.

Agora os agradecimentos às pessoas que tenho orgulho de chamar de amigos. Primeiramente, eu gostaria de agradecer ao meu amigo Ricardo José Missori pela presença constante e apoio naqueles momentos difíceis em que somente um amigo pode ajudar. Agradeço muito ao amigo Pablo Parmezani Munhoz por sua sempre pronta disposição a ajudar e por todas as soluções computacionais que você conseguiu e que foram de grande valia para a confecção desta dissertação.

Eu também agradeço a todas as pessoas que formam o grupo de óptica quântica do Instituto de Física “Gleb Wataghin” pois todos contribuíram de uma forma ou outra com meu desenvolvimento pessoal e profissional. Em especial, agradeço ao amigo Álvaro F. Gomes pelos conselhos sempre muito apropriados e ao José Rildo de Oliveira Queiroz pelas discussões físicas que tivemos nesse período.

Por fim, mas de modo algum menos importante, um agradecimento especial à minha querida Camila Sanches cujas palavras de incentivo e ações de apoio me deram muita tranquilidade para desenvolver a parte final desse trabalho e concluir a dissertação. Você dedicou boa parte de seu tempo me ajudando e, sendo uma excelente física, você soube fazer isso muito bem. Dividir a vida com você é a minha maior felicidade. Obrigado meu anjo.

Apoio Financeiro da FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo).

Resumo

Nesta dissertação, são apresentados os principais resultados de nosso estudo sobre a dinâmica e processamento de informação quântica usando um íon aprisionado numa armadilha harmônica interagindo com campos eletromagnéticos clássico (laser) e quântico (cavidade). Propomos um método de geração de estados de Bell envolvendo luz e o estado vibracional do íon através de uma medida condicional de seu estado interno eletrônico. Essa medida é realizada após um tempo de interação apropriado e uma preparação inicial simples. Também propomos um esquema de implementação de portas lógicas nesse sistema. Demonstramos que, pela simples sintonia dos níveis eletrônicos com as frequências dos campos, é possível construir uma porta controlled-NOT tendo os níveis internos do íon, bem como os níveis vibracionais, como qubits. O campo de uma cavidade é usado como qubit auxiliar e permanece basicamente no estado de vácuo, aumentando a robustez de nosso esquema contra efeitos dissipativos na cavidade. Apresentamos também algumas consequências da quantização do campo na dinâmica iônica, em especial, no padrão dos *revivals*. Efeitos dependentes da intensidade e o aparecimento do fenômeno de *super revival* apresentam uma forte dependência com a posição do centro da armadilha relativo ao modo da cavidade e com o valor do parâmetro de Lamb-Dicke.

Abstract

In this thesis we show the main results of our studies in the dynamics and information processing using a trapped ion interacting with classical (laser) and quantum (cavity) electromagnetic fields. We propose a method of generation of Bell states involving light and the ion's vibrational state through a conditional measurement of its internal electronic state. This measurement is made after an appropriate interaction time and a suitable initial preparation. We also propose an implementation scheme of quantum gates in such system. We demonstrate that simply by tuning the electronic levels with the frequencies of the fields, it is possible to construct a controlled-NOT gate having the ion's internal level, as well as the vibrational ones as qubits. A cavity field is used as auxiliary qubit and basically remains in the vacuum state, which increases the robustness of our scheme against dissipation in the cavity. In addition, we show some consequences of the field quantization in the ionic dynamics, especially in the revival patterns. Intensity dependent effects and super revival phenomenon arising are strongly dependent on the position of the trap centre relative to the cavity mode and on the value of the Lamb-Dicke parameter.

Introdução

Um grande número de trabalhos teóricos e experimentais têm investigado a habilidade de controlar coerentemente estados quânticos de íons aprisionados [1–4], moléculas [5, 6] e sistemas ópticos [7–10]. Em especial, o estudo de íons aprisionados interagindo com feixes de laser tem recebido grande atenção nos últimos anos em virtude dos progressos experimentais na geração de estados quânticos nesse sistema [11–14], bem como por sua grande potencialidade no campo do processamento de informação quântica [15–17]. Neste tipo de experimento, a interação do laser com a matéria (íons) é satisfatoriamente descrita por um modelo semi-clássico, no qual a matéria é tratada quanticamente enquanto que o campo continua a ser descrito pela física clássica.

Contudo, uma grande quantidade de fenômenos decorrentes da interação da radiação com a matéria é entendida através de uma descrição inteiramente quântica do sistema, ou seja, tanto matéria e campo eletromagnético são quantizados. Dentre esses fenômenos estão, por exemplo, a emissão espontânea, Lamb shift e a largura de linha do laser [18]. No entanto, poucos trabalhos são encontrados investigando a influência da estatística do campo na dinâmica do íon [1, 19], e a transferência de coerência entre os estados vibracionais e o estado do campo na cavidade [20, 21]. Do lado experimental, um único íon aprisionado foi acoplado, com sucesso, ao campo eletromagnético da cavidade [10, 22]. Mais recentemente, têm aparecido algumas propostas teóricas de implementação de portas lógicas usando eletrodinâmica quântica de cavidades com íons aprisionados, em particular, na Ref. [23] é usado um sistema de dois íons de quatro níveis em interação com o campo de uma cavidade na Ref. [24] é utilizada uma cavidade bastante fora de sintonia com os níveis de energia eletrônicos do íon.

No intuito de compreender o papel da quantização do campo na dinâmica de um íon aprisionado, realizamos alguns estudos gerais e demonstramos que sob certas condições, o sistema apresenta uma dinâmica bastante semelhante àquela observada do modelo de Jaynes-Cummings com constante de acoplamento dependente da intensidade [25, 26]. Contudo, um íon aprisionado

interagindo com o campo quantizado inserido numa cavidade apresenta a vantagem de que o Hamiltoniano não é introduzido fenomenologicamente como ocorre na generalização do Jaynes-Cummings. No caso iônico, mostramos ser possível a dedução de uma constante de acoplamento dependente da intensidade por primeiros princípios, ou seja, a partir do Hamiltoniano deduzido formalmente.

Nossos primeiros estudos já apontavam para a potencialidade do sistema íon-cavidade na manipulação coerente de estados [3,4]. Isso se deve principalmente ao fato de estarmos tratando com três subsistemas interagentes entre si com características individuais já bastante exploradas em diferentes contextos e também ao fato desse sistema poder ser manipulado por um laser externo. Esses fatos nos motivaram a realizar análises sistemáticas das possíveis aplicações dessa interação na geração de estados quânticos, com perspectivas voltadas para a computação quântica. Mostramos que num regime em que o campo manifeste seu caráter quântico, é possível gerar todos os estados que compõem uma base de Bell [3], importante no estudo de fundamentos da teoria quântica, nos esquemas de teletransporte de estados e criptografia [27–29]. Mostramos também que um íon aprisionado interagindo com um modo do campo quantizado pode ser usado para a construção de uma porta lógica quântica Controlled-NOT [4] que, em conjunto com as portas de rotações de qubits, formam um conjunto de portas capaz de efetuar operações computacionais universais [29].

Os capítulos desta dissertação estão organizados como segue. No capítulo 1 são apresentados alguns conceitos básicos sobre a interação da radiação com a matéria, necessários ao entendimento das principais experiências e desenvolvimentos em óptica quântica, e em especial, dos resultados apresentados nesta dissertação. Algumas discussões sobre aprisionamento e manipulação de íons são também realizadas. Ainda nesse capítulo, é apresentada uma revisão de computação quântica ressaltando pontos fundamentais como o paralelismo quântico e a existência de um conjunto universal de portas lógicas quânticas, fatos esses que tem motivado, nos últimos anos, uma grande quantidade de esforços teórico e experimental na busca de sistemas e regimes que possibilitem a implementação desse novo tipo de computação.

No capítulo 2 é apresentado o sistema físico e suas características. Esse sistema consiste de um íon aprisionado inserido no interior de uma cavidade contendo um modo do campo quantizado e interagindo simultaneamente com um laser externo clássico. A função desse laser é manipular coerentemente essa “molécula” íon-cavidade.

No capítulo 3 são apresentados nossos resultados. Primeiramente, apresentamos uma proposta de geração de estados emaranhados envolvendo o estado do campo (fótons) e o estado

do movimento vibracional do centro de massa (fónons). Em especial, mostramos que é possível gerar toda uma base conhecida como base de Bell [3]. Em seguida, ainda explorando a evolução coerente do sistema com perspectivas voltadas a computação quântica, propomos um esquema de implementação da porta controlled-NOT nesse sistema íon-cavidade e laser externo [4]. Esta é uma proposta inovadora quanto aos esquemas anteriores envolvendo íons pois abre a possibilidade de usar fótons como qubits auxiliares, o que pode ter aplicações diretas no transporte de informação de um ponto a outro do espaço numa espécie de rede de informação quântica (*quantum network*) [30] que, apesar de exigir cavidades de altas finesse, nos parece algo “fácil” com a melhora tecnológica das cavidades. Nessa rede, os íons aprisionados funcionariam como os blocos fundamentais de processamento de informação e os fótons como uma espécie de “fio” por onde a informação é transportada. O capítulo termina com um estudo sobre o papel do posicionamento da armadilha e a importância do parâmetro de Lamb-Dicke no caso íon e campo ressonantes. É mostrado que dependendo do estado inicial e do valor desse parâmetro, o sistema pode apresentar evoluções dinâmicas completamente distintas, tais como: o surgimento de colapsos e *revivals* (ressurgimentos) periódicos e o fenômeno de *super revival* caracterizado por ser um revival a longo tempo de uma dinâmica que já apresenta *revival* num tempo mais curto.

O último capítulo é dedicado a discussões dos principais resultados, bem como das perspectivas futuras sobre esse sistema que é composto de um íon aprisionado interagindo com o campo quantizado em uma cavidade. O primeiro apêndice contém a dedução a partir de primeiros princípios do Hamiltoniano do íon aprisionado em interação com o campo eletromagnético que é a base de todo o trabalho desenvolvido nessa dissertação. O segundo e último apêndice traz um procedimento de cálculo do operador de evolução temporal que pode ser usado numa grande variedade de Hamiltonianos incluindo os utilizados nessa dissertação.

Capítulo 1

Conceitos Fundamentais

1.1 Interação da Radiação com a Matéria

Nesta seção discutimos a interação do campo de radiação quantizado com um átomo. Na situação em que é possível restringir a interação para apenas um modo do campo eletromagnético com dois níveis eletrônicos de um átomo/íon, o Hamiltoniano do sistema adquire uma forma simples que admite solução analítica exata. Esse modelo, conhecido como modelo Jaynes-Cummings, é uma importante ferramenta da óptica quântica e sua realização experimental é de fundamental interesse. A implementação desse modelo já é realizada tanto no contexto das cavidades ópticas [31] quanto nas de microondas [9].

O Hamiltoniano da Interação Átomo-Campo

Um elétron de carga e e massa m interagindo com um campo eletromagnético externo (clássico) é descrito pelo seguinte Hamiltoniano de acoplamento mínimo (sem considerar spin):

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{p}} - e \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}, t)]^2 + e U(\hat{\mathbf{r}}, t) + V(\hat{\mathbf{r}}), \quad (1.1)$$

em que $\hat{\mathbf{p}}$ é o operador de momento linear, $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}, t)$ e $U(\hat{\mathbf{r}}, t)$ são os potenciais vetor e escalar do campo externo clássico, respectivamente, e $V(\hat{\mathbf{r}})$ é um potencial central, como por exemplo, o que liga um elétron na posição $\hat{\mathbf{r}}$ ao núcleo atômico. Nesse caso, iremos supor que o núcleo esteja localizado numa posição $\mathbf{r}_0$.

Consideremos agora que o átomo é iluminado por uma onda plana eletromagnética de modo

que o potencial vetor seja dado por

$$\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}, t) = \mathbf{A}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}} + \mathbf{A}^*(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}}. \quad (1.2)$$

Na região óptica ou de microondas, o comprimento de onda da luz é muito maior que a dimensão linear do átomo (valor médio do tamanho da órbita do elétron), ou seja, $\langle \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}} \rangle \ll 1$. Então, em uma primeira aproximação, podemos escrever

$$\begin{aligned} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} &= e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} \left(1 + i\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{r} - \frac{(\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{r})^2}{2} + \dots \right) \\ &\approx e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} \end{aligned} \quad (1.3)$$

a qual é conhecida como *aproximação de dipolo*. É importante salientar que estaremos trabalhando no calibre de Coulomb, isto é,

$$U(\hat{\mathbf{r}}, t) = 0, \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (1.5)$$

Neste caso, a equação de Schrödinger para o Hamiltoniano (1.1) e usando a aproximação de dipolo $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}, t) \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)$, toma então a forma

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\nabla - \frac{ie}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \right]^2 \right\} \Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (1.6)$$

Uma simplificação do problema é permitida com a definição de uma nova função de onda $\Phi(\mathbf{r}, t)$, tal que

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \exp \left[\frac{ie}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \hat{\mathbf{r}} \right] \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (1.7)$$

Com essa nova função a Eq.(1.6) toma a forma

$$[\hat{\mathcal{H}}_0 - e \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)] \Phi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (1.8)$$

no qual

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r}) \quad (1.9)$$

é o Hamiltoniano não-perturbado do átomo. Notamos que o Hamiltoniano total do sistema

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_1 \quad (1.10)$$

com

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = -e \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) \quad (1.11)$$

é agora escrito em termos do campo elétrico $\mathbf{E}$ que é independente do calibre usado.

Até o presente momento o campo eletromagnético foi tratado como uma perturbação externa clássica e, para muitos propósitos, esse tratamento é conveniente e explica os resultados de forma bastante satisfatória. Contudo, existem muitos casos onde o tratamento clássico do campo falha na explicação de fenômenos observados experimentalmente e uma descrição quântica do campo se faz necessária. Um exemplo é a emissão espontânea num sistema atômico. Para um tratamento rigoroso do decaimento atômico no espaço livre, precisamos considerar a interação do átomo com os modos de vácuo do universo. Mesmo no caso simples da interação do átomo com um único modo do campo eletromagnético, numa cavidade por exemplo, as previsões do modelo semiclássico e quântico podem diferir completamente. O modelo semiclássico prevê apenas oscilações de Rabi para a inversão atômica (diferença da probabilidade de ocupação dos dois níveis), enquanto que na descrição quântica da interação átomo-campo é possível a ocorrência do fenômeno de colapso e *revival* devido ao casamento das fases envolvidas na preparação inicial do estado do campo [18].

A extensão para o tratamento quântico se dá identificando as variáveis canonicamente conjugadas (num formalismo lagrangeano) e impondo que sua relação de comutação resulte em $i\hbar$. Essa é a receita proposta por Dirac [33]. Existem excelentes textos que tratam desse problema em detalhe [18, 34, 35]. A extensão direta do Hamiltoniano (1.10) para o caso quântico se dá trocando o campo clássico $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)$ por seu operador observável $\hat{\mathbf{E}}$. No caso de um único modo e tomando $\mathbf{r}_0 = 0$, temos

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\epsilon} \mathcal{E}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \quad (1.12)$$

em que $\hat{\epsilon}$ é um vetor unitário de polarização, $\mathcal{E} = (\hbar \omega_c / 2\epsilon_0 V)$ sendo ω_c a frequência do modo do campo, ϵ_0 a permissividade elétrica do vácuo, V o volume de quantização que nas aplicações encontradas ao longo da dissertação corresponderá ao volume real de uma cavidade sem perdas e $\hat{b}$ ($\hat{b}^\dagger$) são operadores bosônicos do campo eletromagnético que satisfazem a relação de comutação

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1. \quad (1.13)$$

É também necessário acrescentar no Hamiltoniano não-perturbado o termo referente a energia do campo livre

$$\hat{H}_c = \hbar \omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b}. \quad (1.14)$$

Em resumo, a interação de um campo de radiação quantizado monomodo com um único átomo pode ser descrita pelo seguinte Hamiltoniano na aproximação de dipolo:

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_c - e \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}}, \quad (1.15)$$

no qual $\hat{H}_a$ é o operador Hamiltoniano (1.9). A Eq.(1.15) pode ser reescrita numa forma conveniente através da escolha da base atômica $|i\rangle$ correspondente aos autoestados de $\hat{H}_a$ com autovalores E_i . Podemos assim, expressar $\hat{H}_a$ e $e\hat{\mathbf{r}}$ em termos dos operadores de transição atômica

$$\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|, \quad (1.16)$$

lembrando que nesse sub-espço vale a relação $\sum_i |i\rangle\langle i| = \hat{I}$, sendo $\hat{I}$ é o operador identidade. Então

$$\hat{H}_A = \sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii} \quad (1.17)$$

e também

$$e \hat{\mathbf{r}} = \sum_{i,j} e |i\rangle\langle i| \hat{\mathbf{r}} |j\rangle\langle j| = \sum_{i,j} \vec{\wp}_{ij} \hat{\sigma}_{ij}, \quad (1.18)$$

em que $\vec{\wp}_{ij} = e \langle i|\mathbf{r}|j\rangle$ é o elemento de matriz da transição de dipolo elétrico. Com isso

$$\hat{H} = \hbar \omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + \sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii} + \hbar \sum_{i,j} g_{ij} \hat{\sigma}_{ij} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger), \quad (1.19)$$

no qual

$$g_{ij} = -\frac{\vec{\wp}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{e}} \mathcal{E}}{\hbar} \quad (1.20)$$

é então identificada como a constante de acoplamento átomo-campo que, por questão de simplicidade, adotaremos como sendo real. Consideremos agora o caso mais simples que é o de um átomo de dois níveis. Neste caso, obtem-se para $i, j = g, e$ o Hamiltoniano

$$\hat{H} = \hbar \omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + (E_g \hat{\sigma}_{gg} + E_e \hat{\sigma}_{ee}) + \hbar g (\hat{\sigma}_{eg} + \hat{\sigma}_{ge})(\hat{b} + \hat{b}^\dagger), \quad (1.21)$$

com os sub-índices “g” e “e” denotando os estados fundamental (*ground*) e excitado (*excited*), respectivamente.

É útil reescrever esse Hamiltoniano [18] em termos dos operadores de Pauli

$$\hat{\sigma}_z \equiv \hat{\sigma}_{ee} + \hat{\sigma}_{gg} \quad (1.22)$$

$$\hat{\sigma}_+ \equiv \hat{\sigma}_{eg} \quad (1.23)$$

$$\hat{\sigma}_- \equiv \hat{\sigma}_{ge} \quad (1.24)$$

os quais satisfazem as relações de comutação $[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_\pm] = \pm 2 \hat{\sigma}_\pm$, o que nos leva a

$$\hat{H} = \hbar \omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{\hbar \omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \quad (1.25)$$

com $\omega_0 = (E_e - E_g)/\hbar$.

Na representação de interação esse Hamiltoniano assume a forma dependente do tempo

$$\hat{\mathcal{V}}(t) = \hbar g [\hat{\sigma}_+ \hat{b} e^{i(\omega_0 - \omega_c)t} + \hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger e^{-i(\omega_0 - \omega_c)t} + \hat{\sigma}_+ \hat{b}^\dagger e^{i(\omega_0 + \omega_c)t} + \hat{\sigma}_- \hat{b} e^{-i(\omega_0 + \omega_c)t}]. \quad (1.26)$$

No caso em que átomo e o campo eletromagnético estão muito próximos da ressonância, ou seja, $\omega_0 - \omega_c \approx 0$, essa expressão consistirá de dois termos praticamente estáticos (independentes do tempo t), e de mais dois termos dinâmicos que oscilam rapidamente. É possível descartar esses termos na chamada aproximação de onda girante RWA (*Rotating Wave Approximation*) que consiste em desprezar termos os quais oscilam rapidamente em comparação a termos estáticos ou lentamente oscilantes. Nos tempos de interação de interesse, esses termos não contribuem apreciavelmente. Isso pode ser visto mais rigorosamente usando teoria de perturbação dependente do tempo, no qual o termo estático fornece uma contribuição proporcional a $1/(\omega_0 - \omega_c)$, que na condição de ressonância ($\omega_0 \approx \omega_c$) tende a infinito. Dessa forma, efetuando a RWA no Hamiltoniano (1.25) obtém-se

$$\hat{H} = \hbar \omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{\hbar \omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{b} + \hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger). \quad (1.27)$$

Esse é Hamiltoniano que descreve a interação de um átomo de dois níveis interagindo com um modo do campo eletromagnético quantizado, sob as condições de ressonância e aproximação de dipolo elétrico. Essas hipóteses formam o que chamamos de *Modelo Jaynes-Cummings* [36, 37].

Esse modelo é muito importante em óptica quântica por várias razões. Primeiro, o Hamiltoniano (1.27) pode ser resolvido exatamente e exhibe alguns efeitos dinâmicos não previstos na descrição semiclássica como é o caso do colapso seguido de *revival* na inversão atômica [37]. Segundo, esse modelo permite a explicação da emissão espontânea e com isso explica os efeitos

dos vários tipos de estatísticas quânticas do campo em sistemas mais complexos como, por exemplo, o micromaser e o laser. De fato, o decaimento espontâneo de um nível atômico é tratado considerando a interação de um átomo de dois níveis com os modos do universo no estado de vácuo [18].

1.2 Aprisionamento de Íons numa Armadilha de Paul

O surgimento de técnicas experimentais mais avançadas possibilitou o aprisionamento e resfriamento íons atômicos o que tem permitido a observação de *quantum jumps* [38, 39], a manipulação coerente de seus estados quânticos de movimento [11, 13, 40] e o estudo da interação desses estados com o ambiente [41, 42]. Portanto, evidencia-se assim o potencial desse sistema no estudo de tópicos de fundamental importância tanto do ponto de vista acadêmico, quanto do ponto de vista de aplicações práticas. Com relação a essas possíveis aplicações práticas, algumas propriedades desse sistema fazem dos íons aprisionados fortes candidatos a implementação de um computador quântico, dentre as quais destacamos:

- a. a habilidade de manter esses átomos aprisionados por longos períodos de tempo (dias ou até semanas), o que permite longos tempos de interação;
- b. a habilidade de preparação de estados quânticos via lasers externos;
- c. a alta eficiência na leitura do estado eletrônico via técnicas de fluorescência.

Devido a sua carga não neutra, os íons atômicos são aprisionados (confinados) por um arranjo de campos eletromagnéticos. Dois tipos de armadilhas têm sido usadas para o estudo dos íons a baixas temperaturas, a saber:

- *Armadilha de Penning*: que usa uma combinação de campos elétricos e magnéticos estáticos;
- *Armadilha de Paul*: que aprisiona os íons pelo uso de campos elétricos oscilantes.

Nesta seção discutimos a chamada armadilha de Paul linear que, dentre outras vantagens, permite o uso de técnicas que minimizam os chamados micromovimentos do íon, e que devido à sua geometria, facilita também a captação da fluorescência iônica. Um potencial elétrico

$$\phi_0(t) = U_0 + V_0 \cos(\Omega t) \quad (1.28)$$

oscilando com radiofrequência Ω é aplicado entre dois eletrodos lineares (fios) diagonalmente opostos entre si (*rod electrode*), Fig. 1.1. Os eletrodos são acoplados a capacitores (não mostrados na figura) cuja função é manter o potencial (1.28) independente da coordenada z . Os outros dois eletrodos são aterrados. O potencial resultante no eixo da armadilha (paralelo à direção z) é do tipo quadrupolar e assume a forma

$$\phi(t) = \frac{\phi_0}{2r_0^2}(x^2 - y^2) \quad (1.29)$$

sendo r_0 é a distância do eixo da armadilha (eixo z na Fig.(1.1)) à superfície de um dos eletrodos lineares. As equações clássicas de movimento para um íon de massa m e carga q na presença desse campo são

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E} = -q\nabla\phi(t) \quad (\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) \quad (1.30)$$

cujas componentes satisfazem

$$\begin{cases} \ddot{z} = 0, \\ \ddot{y} - \frac{q}{mr_0^2} [U_0 + V_0 \cos(\Omega t)] y = 0, \\ \ddot{x} + \frac{q}{mr_0^2} [U_0 + V_0 \cos(\Omega t)] x = 0. \end{cases} \quad (1.31)$$

Após a substituição

$$a \equiv \frac{4qU_0}{mr_0^2\Omega^2}, \quad b \equiv \frac{2qV_0}{mr_0^2\Omega^2}, \quad \zeta \equiv \frac{\Omega t}{2} \quad (1.32)$$

as equações não nulas de movimento (1.31) tomam a forma de *equações de Mathieu* dadas por

$$\frac{d^2x}{d\zeta^2} + [a + 2b \cos(2\zeta)] x = 0, \quad (1.33)$$

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} - [a + 2b \cos(2\zeta)] y = 0. \quad (1.34)$$

As equações de movimento (1.33) e (1.34) para um íon aprisionado numa armadilha de Paul são equações diferenciais cujos coeficientes são funções oscilantes e pertencem a uma classe de equações diferenciais chamadas de equações de Mathieu [43–45]. Dentre os muitos outros problemas que levam as equações de Mathieu, o mais trivial talvez seja aquele proveniente do método de separação de variáveis aplicado à equação de Helmholtz escrita em coordenadas cilíndricas elípticas. Tais equações possuem soluções que podem não ser estáveis dependendo dos valores de a e b , casos esses que devem ser evitados quando desejamos aprisionar o íon. As

equações de Mathieu podem, em geral, ser resolvidas aproximadamente usando as chamadas *soluções de Floquet*. No regime $a \ll b^2 \ll 1$ a solução aproximada e estável das Eqs.(1.33) e (1.34) pode ser obtida por uma série de Fourier [44, 45] e a solução de ordem mais baixa é dada por

$$x(t) = x_0 \left[1 + \frac{b}{2} \cos \Omega t \right] \cos(\omega_x t + \phi_x), \quad (1.35)$$

$$y(t) = y_0 \left[1 - \frac{b}{2} \cos \Omega t \right] \cos(\omega_y t + \phi_y), \quad (1.36)$$

nos quais

$$\omega_x = \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{b^2}{2} + a} \quad \omega_y = \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{b^2}{2} - a}, \quad (1.37)$$

e x_0, y_0, ϕ_x, ϕ_y são constantes determinadas pelas condições iniciais. Ao analisarmos (1.35) e (1.36) notamos que o movimento de um único íon aprisionado na direção radial é harmônico e com uma amplitude modulada com uma frequência Ω . A oscilação harmônica correspondente as frequências ω_x e ω_y é chamada *movimento secular*, enquanto que a pequena contribuição oscilando na frequência Ω é chamada de *micromovimento*. Esse micromovimento pode ser minimizado sob certas condições como, por exemplo, através da escolha apropriada de potenciais em eletrodos adicionais. Não é nosso objetivo nesta dissertação discutir detalhes sobre a minimização do micromovimento, pois estes podem ser encontrados em [46]. Uma vez desprezado o micromovimento, o íon se comporta como se estivesse confinado num pseudo-potencial harmônico ψ_{2D} na direção radial dado por

$$q \psi_{2D} = \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2) \quad (1.38)$$

que para um caso típico com $U_0 = 0$ ($a = 0$), tem-se $\omega_x = \omega_y$. Consequentemente,

$$q \psi_{2D} = \frac{m \omega_r}{2} (x^2 + y^2) \quad (1.39)$$

sendo ω_r a frequência radial dada por

$$\omega_r = \frac{\Omega b}{2\sqrt{2}} = \frac{q V_0}{m r_0^2 \Omega \sqrt{2}}. \quad (1.40)$$

Conforme Ref. [47], os valores típicos para esses parâmetros são da ordem $V_0 \simeq 300 - 800$ V, $\Omega/2\pi \simeq 16 - 18$ MHz, $r_0 = 0.2$ mm, o que leva a uma frequência radial de $\omega_r/2\pi \simeq 1.4 - 2$ MHz para um íon de Cálcio $^{40}\text{Ca}^+$. Na natureza, 97% do Cálcio consiste desse isótopo.

Para realizar o confinamento na direção z , que nos cálculos anteriores esteve livre, aplica-se os potenciais U_1 e U_2 nos dois eletrodos em forma de anel (*ring electrodes*), mostrados na Fig.1.1. Pode-se escolher $U_1 = U_2 = U_{12}$. Cálculos numéricos [47] mostram que o potencial próximo ao centro da armadilha é harmônico e com frequência axial aproximada ω_z dada por

$$\frac{1}{2}m\omega_z z_0 \approx \xi q U_{12}, \quad (1.41)$$

no qual z_0 é a distância do centro da armadilha até o centro do eletrodo anel, ou seja, a metade do comprimento da armadilha na direção z , e ξ é um fator geométrico. Valores típicos são $\omega_z/2\pi \simeq 500 - 700$ KHz para $U_{12} \simeq 2000$ V e $z_0 \simeq 5$ mm [47]. Assim o pseudopotencial para um íon confinado numa armadilha de Paul em todas as três direções é descrito por

$$q\psi_{3D} = \frac{m\omega_r}{2}(x^2 + y^2) + \frac{m\omega_z^2 z^2}{2}. \quad (1.42)$$

Para os valores experimentais fornecidos anteriormente, obtem-se para a profundidade do poço de potencial na direção axial ($\omega_z/2\pi \simeq 700$ KHz)

$$V_z = \frac{m\omega_z^2 z_0^2}{2} \simeq 100 \text{ eV}, \quad (1.43)$$

bem como na direção radial ($\omega_r/2\pi \simeq 2$ MHz)

$$V_r = \frac{m\omega_r^2 r_0^2}{2} \simeq 820 \text{ eV}. \quad (1.44)$$

O poço de potencial na direção radial é, portanto, muito mais profundo que no eixo da armadilha. Assim, o movimento do íon na direção radial tem pequena amplitude quando comparada à direção axial e será aqui desprezado. Essa característica é a razão dessas armadilhas serem chamadas de lineares. Os íons ficam localizados na direção radial porém oscilando na direção axial, formando uma espécie de linha de íons, conforme mostram as Figs. 1.2 e 1.3.

Por último, apresentamos agora o processo de carregamento dos íons na armadilha como realizado em [48]. Antes de iniciar o carregamento, os potenciais da armadilha são desligados para evitar o aprisionamento de íons residuais não desejados. Um forno atômico produzindo átomos de Cálcio é ligado e a temperatura é aumentada progressivamente. Então um canhão de elétrons é acionado, ionizando os átomos de Cálcio diretamente no volume da armadilha agora ligada. Lasers de resfriamento são direcionados à nuvem de íons contendo algumas centenas de íons ocupando uma área de diâmetro de aproximadamente $200 \mu\text{m}$. A nuvem de

íons gradativamente relaxa para um estado estacionário onde o aquecimento por radiofrequência (devido aos eletrodos) é balanceado pelo resfriamento a laser. O número de íons é reduzido desligando o laser de resfriamento. Para um número pequeno de íons, ocorre uma transição de fase formando uma estrutura cristalina linear (ver Fig. 1.2 e 1.3). Isso é chamado de *cristal iônico* ou *cadeia de íons*. O processo de carregamento leva aproximadamente um minuto.

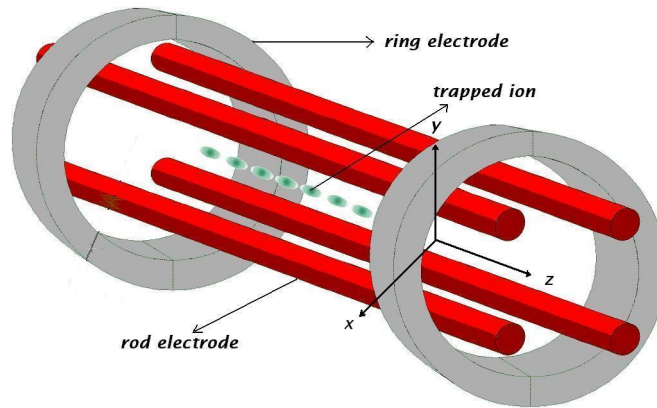


Figura 1.1: Armadilha de Paul linear, <http://heart-c704.uibk.ac.at>

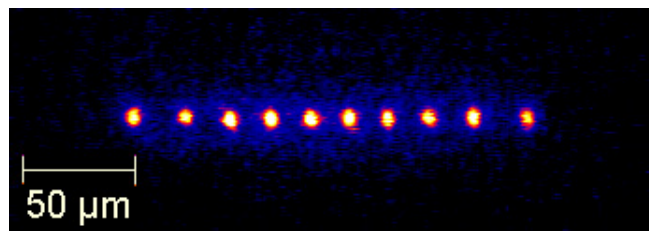


Figura 1.2: Cadeia de 10 íons $^{40}\text{Ca}^+$, <http://www.physik.uni-mainz.de/werth/calcium/>

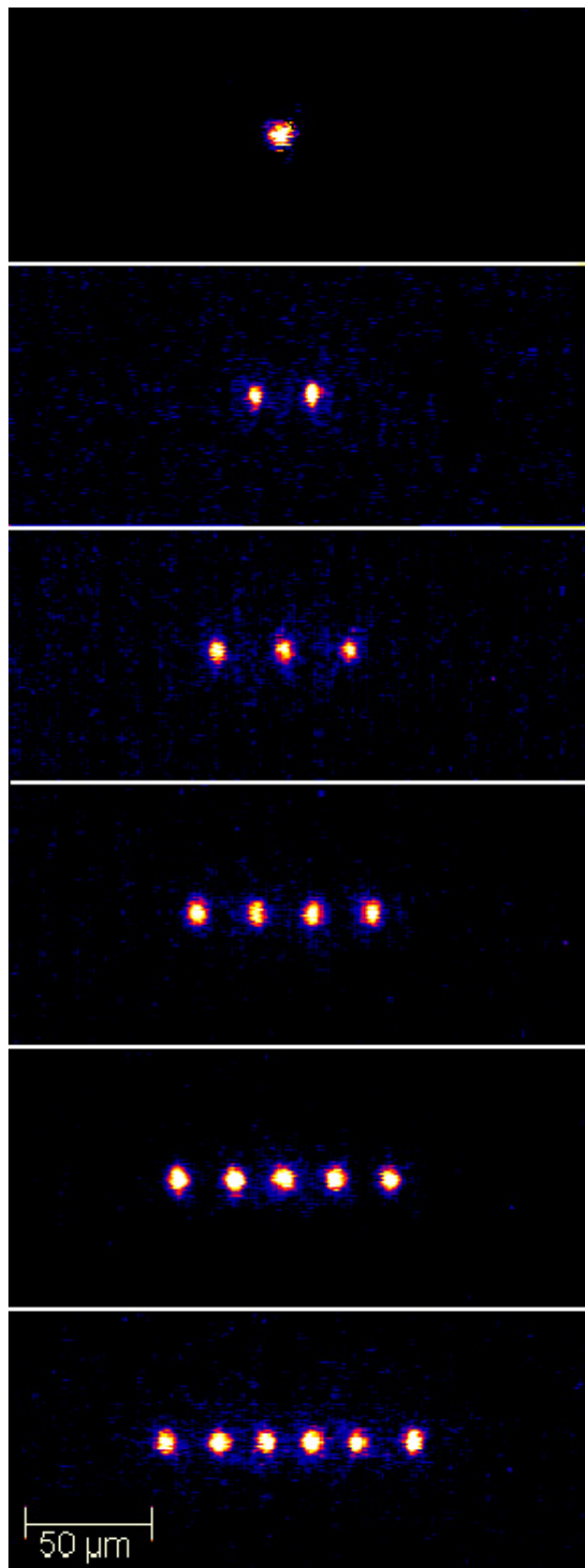


Figura 1.3: Íons $^{40}\text{Ca}^+$ aprisionados, <http://www.physik.uni-mainz.de/werth/calcium/>

1.3 Computação e Informação Quântica

Quando pensamos em computação é usual que tenhamos uma idéia abstrata baseada em conceitos lógicos e argumentos que estão mais próximos da matemática que da física. Contudo, não podemos nos esquecer que o computador é um *objeto físico* e, que portanto, o processo computacional, seja ele efetuado por qualquer hardware, é um processo que obedece as leis da física. Uma vez que a mecânica quântica é uma teoria fundamental, parece natural pensarmos em uma máquina que realize o processamento de informação num nível tal que certas definições como, superposição ou emaranhamento de estados quânticos, possam ser usadas como um novo tipo de *recurso computacional*. Essa é a idéia formalizada por Deutsch [49] num artigo que despertou a atenção da comunidade de físicos para essa área que reúne física, matemática e ciência da computação e que hoje conhecemos pelo nome de computação quântica.

A procura por sistemas físicos capazes de implementar essas idéias de maneira controlada passou então a ser um importante campo de pesquisa. Em [4] nós mostramos que um íon aprisionado interagindo com o campo quantizado tem o potencial para a implementação de um conjunto universal de portas lógicas e que, portanto, pode realizar qualquer operação lógica. No que segue é apresentado alguns conceitos básicos sobre computação quântica, necessários ao entendimento das propostas apresentadas nessa dissertação. Uma boa introdução ao assunto pode ser encontrada em [29].

1.3.1 Qubits e Portas Lógicas Quânticas

Em computação clássica, a menor unidade de informação, o *bit*, pode assumir dois estados: 0 ou 1. Sua generalização quântica se dá no contexto de sistemas de dois níveis, em que o estado geral para esse bit quântico (*qubit*), é dado por

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (1.45)$$

o qual é parametrizado por dois números complexos a e b satisfazendo a relação $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Existem infinitas possibilidades para o estado de um qubit, podendo estar numa superposição coerente de 0 e 1. Essa característica dá origem a um paralelismo sem análogo clássico e que já foi explorado na criação de algoritmos quânticos eficientes na solução de problemas de grande complexidade computacional. Um exemplo que ilustra bem a eficiência da computação quântica é o problema da fatoração de grandes números inteiros. Esse problema demanda um

tempo exponencial de solução no melhor algoritmo clássico conhecido. Foi demonstrado [50] que um computador quântico seria capaz de solucionar esse problema num tempo polinomial, o chamado *algoritmo de Shor*, o que vem motivando a pesquisa em algoritmos quânticos e consolidando a expectativa sobre o poder computacional de tais máquinas.

Operações sobre o qubit (1.45) devem preservar sua norma, e portanto, devem ser descritas por matrizes unitárias 2×2 . Em princípio, qualquer operação unitária pode ser imaginada como uma *porta lógica quântica*. Num espaço de dimensão 2, ou seja, de um único qubit, o efeito da aplicação de operações unitárias pode ser visualizado como a rotação de um vetor unitário na chamada esfera de Bloch [29]. Por esse motivo, operações unitárias em um único qubit são freqüentemente chamadas de rotações de qubits.

Dentre todas as rotações possíveis, algumas das mais importantes são as matrizes de Pauli:

$$X \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

a matriz de Hadamard (denotada por H), a de fase de 1 qubit (denotada por S) e a também a $\pi/8$ (denotada por T), as quais são dadas por

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad T \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/8} \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

respectivamente.

No intuito de simplificar a visualização e o entendimento sobre os algoritmos quânticos é usual representar essas portas num circuito. Na Fig.1.4 são mostrados alguns desses símbolos.

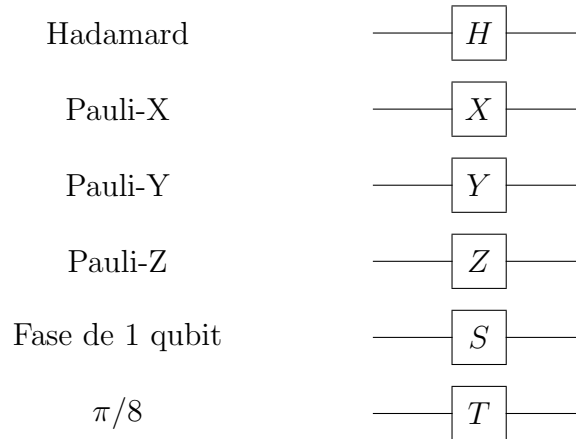


Figura 1.4: Símbolos num circuito quântico

Um conceito básico envolvido num processo computacional, seja ele clássico ou quântico, é o conceito de *operação controlada*. Entendemos esse conceito como uma operação condicionada à resposta de uma dada pergunta como, por exemplo, *se A é verdadeiro, então faça B*. Um exemplo de tal operação controlada é a chamada Controlled-NOT (usualmente referida como CNOT). Essa operação consiste de uma porta com dois qubits de entrada $|c, t\rangle$, conhecidos como qubit de controle $|c\rangle$ e qubit alvo $|t\rangle$, respectivamente. Em termos da base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, a ação da CNOT é dada por $|c\rangle|t\rangle \Rightarrow |c\rangle|t \oplus c\rangle$, onde $\oplus$ denota a soma de módulo 2. Em resumo, se o qubit de controle está no estado $|1\rangle$, então o qubit alvo é flipado (trocado), caso contrário, ele permanece inalterado:

$$\begin{aligned} |0, 0\rangle &\Rightarrow |0, 0\rangle, \\ |0, 1\rangle &\Rightarrow |0, 1\rangle, \\ |1, 0\rangle &\Rightarrow |1, 1\rangle, \\ |1, 1\rangle &\Rightarrow |1, 0\rangle. \end{aligned} \tag{1.48}$$

A representação dessa porta num circuito quântico é apresentada na Fig.1.5.

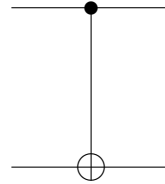


Figura 1.5: Símbolo para a porta CNOT

Outro exemplo de operação controlada importante em nosso trabalho é a porta de fase de 2 qubits. Sua ação na base computacional é dada por

$$\begin{aligned} |0, 0\rangle &\Rightarrow |0, 0\rangle, \\ |0, 1\rangle &\Rightarrow |0, 1\rangle, \\ |1, 0\rangle &\Rightarrow |1, 0\rangle, \\ |1, 1\rangle &\Rightarrow -|1, 1\rangle, \end{aligned} \tag{1.49}$$

isto é, apenas o estado $|1, 1\rangle$ ganha um sinal negativo, enquanto os demais estados da base computacional permanecem inalterados.

Nas próximas seções são discutidos o exemplo do Algoritmo de Deutsch e também os conceitos de universalidade e paralelismo quântico.

1.3.2 Universalidade das Matrizes Unitárias de Dois Níveis

Em computação clássica, para se computar uma função arbitrária são necessárias pelo menos três portas lógicas: AND, OR, NOT [29]. Dizemos que tal conjunto de portas é *universal para a computação clássica*. Para a computação quântica, existe um resultado similar de universalidade quando qualquer operação unitária puder ser aproximada, com precisão arbitrária, por um circuito quântico envolvendo apenas tal conjunto de portas. Nessa seção, descreveremos uma das possíveis construções de universalidade para computação quântica baseada no conceito de matriz unitária de dois níveis. Existem outras construções de universalidade [29], em especial, aquela onde qualquer operação unitária pode ser aproximada, com precisão arbitrária, usando as portas CNOT, Hadamard, fase e $\pi/8$. Uma vez que as três últimas portas citadas são matrizes de rotação, é usual enunciar esse importante resultado como: “qualquer operação unitária pode ser aproximada, com precisão arbitrária, usando as portas CNOT e rotações de qubits”.

Com o objetivo de mostrar que a matriz U pode ser decomposta num produto de matrizes *unitárias de dois níveis*, ou seja, matrizes unitárias que atuam não trivialmente apenas em duas ou menos componentes de um vetor d -dimensional, consideraremos uma matriz unitária U que atua num espaço com a mesma dimensão do vetor. Para melhor exemplificar a idéia por traz dessa decomposição, consideraremos primeiro o caso em que U é uma matriz complexa 3×3 ($d = 3$):

$$U = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

Neste caso devemos procurar por matrizes unitárias de dois níveis U_1, U_2 e U_3 tais que:

$$U_3 U_2 U_1 U = I, \quad (1.51)$$

sendo I é a matriz identidade. De (1.51) segue que

$$U = U_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger. \quad (1.52)$$

Demonstrando (1.51), automaticamente teremos demonstrado (1.52), ou seja, que U pode ser decomposta num produto de matrizes unitárias de dois níveis. Portanto, começaremos

a demonstração pela construção de U_1 . Para $b = 0$, vamos supor que:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.53)$$

Por outro lado, para $b \neq 0$, suporemos:

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{a^*}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} & \frac{b^*}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} & 0 \\ \frac{b}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} & \frac{-a}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.54)$$

É importante notar que em ambos os casos U_1 é uma matriz unitária de dois níveis e que quando multiplicamos U_1 por U obtem-se:

$$U_1 U = \begin{pmatrix} a' & d' & g' \\ 0 & e' & h' \\ c' & f' & j' \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

Foram usados elementos de matriz genéricos denotados com ‘linha’, pois seus verdadeiros valores são irrelevantes para a demonstração. O importante é que construindo U_1 da maneira (1.53) ou (1.54), o elemento de matriz $(U_1 U)_{21}$ torna-se igual a zero. Esse é o ponto chave da demonstração. Aplicamos agora um procedimento semelhante para encontrar U_2 tal que $(U_2 U_1 U)_{31}$ seja também nulo. Sendo $c' = 0$, vamos admitir que

$$U_2 = \begin{pmatrix} a'^* & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.56)$$

Se $c' \neq 0$, iremos supor

$$U_2 = \begin{pmatrix} \frac{a'^*}{\sqrt{|a'|^2 + |c'|^2}} & 0 & \frac{c'^*}{\sqrt{|a'|^2 + |c'|^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{c'}{\sqrt{|a'|^2 + |c'|^2}} & 0 & \frac{-a'}{\sqrt{|a'|^2 + |c'|^2}} \end{pmatrix}. \quad (1.57)$$

Em ambos os casos, quando realizamos a multiplicação matricial obtemos

$$U_2 U_1 U = \begin{pmatrix} 1 & d'' & g'' \\ 0 & e'' & h'' \\ 0 & f'' & j'' \end{pmatrix}. \quad (1.58)$$

Uma vez que a matriz (1.58) é unitária (produto de matrizes unitárias é também uma matriz unitária), devemos ter as seguintes relações satisfeitas para os elementos de matriz complexos:

$$\begin{aligned} d'' &= g'' = 0 \\ |e''|^2 + |h''|^2 &= |f''|^2 + |j''|^2 = 1 \\ f'' e''^* + h'' j''^* &= 0. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Finalmente, ao admitirmos

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e''^* & h''^* \\ 0 & f''^* & j''^* \end{pmatrix}, \quad (1.60)$$

podemos facilmente verificar que $U_3 U_2 U_1 U = I$.

Num caso mais geral, U atua num espaço d -dimensional. Então, de maneira similar, podemos encontrar matrizes unitárias de dois níveis $U_1, \dots, U_d$ tais que a matriz $U_{d-1} U_{d-2} \dots U_1 U$ tenha seu elemento $(U_{d-1} U_{d-2} \dots U_1 U)_{11} = 1$, e o restante da primeira linha e da primeira coluna todos iguais a zero. O processo é repetido para as $d-1$ submatrizes unitárias até que a matriz U possa ser escrita como

$$U = V_1 \dots V_k, \quad (1.61)$$

nos quais as matrizes V_k são *matrizes unitárias de dois níveis* e $k \leq (d-1) + (d-2) + \dots + 1 = d(d-1)/2$.

Uma consequência direta dessa demonstração é que uma matriz unitária arbitrária num sistema de n qubits, pode ser escrita como um produto de no máximo $2^{n-1}(2^n - 1)$ matrizes unitárias de dois níveis. Para matrizes unitárias específicas e com um número maior de elementos nulos é possível encontrar decomposições envolvendo um menor número de matrizes unitárias de dois níveis, e portanto mais eficiente.

No próximo capítulo, mostraremos como o sistema de íons aprisionados inseridos numa cavidade e interagindo com um campo externo pode ser usado para a implementação das matrizes unitárias de Hadamard (1.47) e de fase (1.49).

1.3.3 Paralelismo Quântico e Considerações Físicas

Uma vez que é possível realizar operações lógicas com os aparatos da mecânica quântica, surgem algumas questões importantes, como por exemplo:

- Que classe de problemas computacionais pode ser realizada usando circuitos quânticos?
- Como essa classe pode ser comparada com aquelas realizáveis num circuito lógico clássico?
- É possível encontrar uma tarefa em que o computador quântico seja mais eficiente que o clássico?

Começamos essa discussão apresentando como simular um circuito lógico clássico num circuito quântico. Ressaltamos que a discussão em termos de circuitos é igualmente rigorosa a discussão com operadores e seu uso nessa dissertação se deve ao seu forte poder elucidativo.

Essa questão não é trivial pois a computação quântica é baseada em operadores unitários cujas ações são claramente reversíveis. Já os circuitos clássicos possuem muitas portas lógicas irreversíveis como, por exemplo, a porta NAND [29], cuja ação é tomar dois bits de entrada a e b de modo a realizar a operação AND seguida por uma operação NOT. Mas um importante resultado da computação clássica resolve completamente o problema: “*qualquer circuito clássico pode ser trocado por um circuito equivalente contendo apenas elementos reversíveis*”. Tal fato é realizado com o uso da porta de Toffoli.

A porta de Toffoli possui três bits de entrada e três de saída, conforme ilustrado na Fig. 1.6. Esse circuito implementa a tabela (1.1). Dois dos bits de entrada são os bits de controle e permanecem inalterados pela aplicação da porta de Toffoli. O terceiro bit é um bit alvo que é trocado se ambos os bits de controle são iguais a 1, caso contrário permanece inalterado.

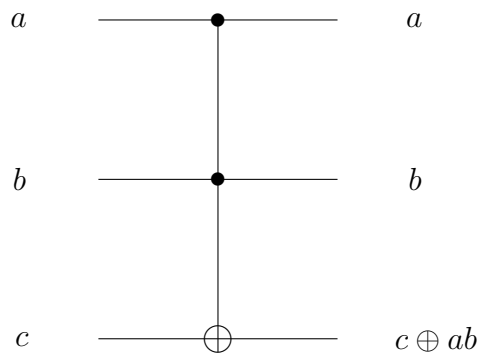


Figura 1.6: Porta de Toffoli

Inputs			Outputs		
a	b	c	a'	b'	c'
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

Tabela 1.1: Tabela da verdade para a porta de Toffoli

Para provar que a porta de Toffoli é reversível, notamos que a aplicação sucessiva desta leva

$$(a, b, c) \rightarrow (a, b, c \oplus ab) \rightarrow (a, b, c) \quad (1.62)$$

e que portanto, essa porta possui uma inversa simples que é ela mesma. Como um exemplo de que a porta de Toffoli pode simular portas irreversíveis, consideremos a porta NAND. Se

tomamos o bit c igual a 1, conforme Fig. 1.7, a ação é justamente a porta desejada, ou seja, o terceiro bit é a saída da NAND. Um bit preparado de maneira conveniente para a realização de uma dada operação controlada é usualmente chamado de *ancilla*.

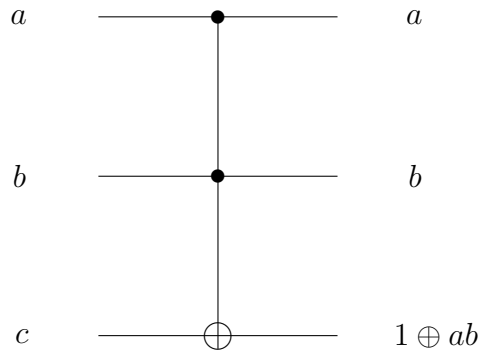


Figura 1.7: Circuito clássico implementando uma porta NAND e usando a porta de Toffoli

A porta de Toffoli está sendo discutida como uma porta clássica, contudo ela pode ser implementada como uma porta lógica quântica. Por definição, a implementação quântica da porta de Toffoli apenas permuta os estados da base computacional da mesma maneira que seu análogo clássico. Por exemplo, se o estado de entrada é $|110\rangle$, a porta troca o terceiro qubit porque os outros dois estão no estado $|1\rangle$, o que resulta em $|111\rangle$. É possível demonstrar que a matriz que realiza tais permutações é uma matriz unitária e que portanto a porta de Toffoli é também uma legítima porta quântica.

É claro que se a habilidade em simular computadores clássicos fosse a única coisa que um computador quântico é capaz de fazer, não haveria sentido em prosseguir com a exploração dos efeitos quânticos para complicar. A vantagem de um computador quântico é a maneira como ele calcula funções em paralelo. De modo simplificado, o paralelismo quântico é a capacidade que tais máquinas têm de calcular uma função $f(x)$ para muitos diferentes valores de x simultaneamente.

Para entender como isso ocorre, consideremos o caso simples de uma função $f(x) : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$. Para que a operação seja reversível é conveniente guardar junto ao valor de $f(x)$ o valor da variável x . Isso pode ser feito com a aplicação de uma sequência apropriada de portas lógicas [29] transformando o estado inicial $|x, y\rangle$, no qual o primeiro qubit é um registrador de

dados e o segundo um registrador alvo, em $|x, y \oplus f(x)\rangle$. A transformação $|x, y\rangle \rightarrow |x, y \oplus f(x)\rangle$ é usualmente denotada por U_f e é claramente reversível. No caso $y = 0$, o estado do segundo qubit é exatamente o valor $f(x)$.

Consideremos agora o circuito mostrado na Fig. 1.8 que aplica U_f num input não pertencente a base computacional, isto é, o registrador de dados está numa superposição dos estados dessa base, $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. Esse estado pode ser criado com a aplicação da porta de Hadamard (1.47) em $|0\rangle$. A aplicação de U_f resulta no estado

$$|\psi\rangle = \frac{|0, f(0)\rangle + |1, f(1)\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (1.63)$$

Esse é um estado que contém informação sobre $f(0)$ e $f(1)$, é como se tivessemos calculado $f(x)$ para dois valores de x simultaneamente. Essa característica é chamada *paralelismo quântico*.

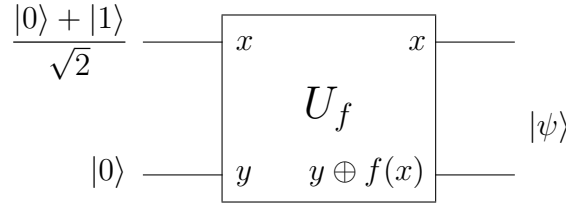


Figura 1.8: Circuito quântico para calcular $f(0)$ e $f(1)$ simultaneamente

Ao contrário do paralelismo clássico, em que circuitos múltiplos são construídos para computar simultaneamente $f(x)$ e cada um deles para um valor de x , no caso quântico um único circuito é empregado no cálculo da função para diferentes valores de x simultaneamente, que é uma consequência direta do fato de um bit quântico poder estar num estado de superposição.

O paralelismo quântico permite que todos os valores da função f sejam calculados simultaneamente, ainda que tenhamos calculado essa função uma única vez. Contudo, esse paralelismo não é imediatamente útil, isso porque uma medida resultará em apenas um único valor da função. Em nosso exemplo, a medida resultará ou no estado $|0, f(0)\rangle$ ou no estado $|1, f(1)\rangle$. Claramente, qualquer computador clássico pode fazer isso muito bem. Deve existir então alguma coisa a mais que torne o paralelismo quântico algo útil, ou seja, algo que nos permita extrair mais informação de superposições do tipo $\sum_x |x, f(x)\rangle$, do que apenas um único valor de $f(x)$. A seguir veremos um exemplo de como informação adicional pode ser retirada de problemas desse tipo.

O algoritmo de Deutsch [49] combina de forma clara duas propriedades importantes: *paralelismo quântico* e *interferência*, sendo esse último efeito o responsável em tornar o paralelismo útil na obtenção de mais informação sobre a função com apenas um único passo. Esse algoritmo é representado esquematicamente no circuito na Fig. 1.9.

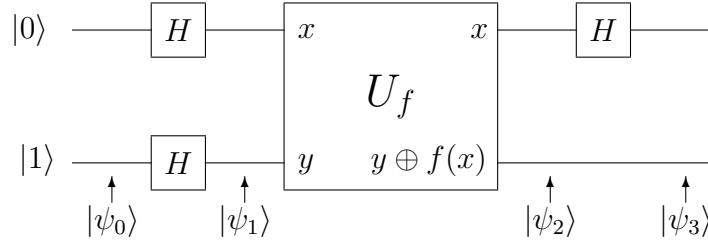


Figura 1.9: Circuito quântico para implementar o algoritmo de Deutsch

Neste caso, o estado de entrada (*input*) é escolhido como

$$|\psi_0\rangle = |01\rangle. \quad (1.64)$$

Esse estado é enviado à duas portas de Hadamard, o que resulta em

$$|\psi_1\rangle = \left[\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right]. \quad (1.65)$$

Em seguida, esse estado é enviado à porta U_f . Notamos que a aplicação de U_f em estados do tipo $|x\rangle(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ resulta

$$\begin{aligned} U_f|x\rangle(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2} &= \frac{|x, 0 \oplus f(x)\rangle - |x, 1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= |x\rangle \frac{|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= (-1)^{f(x)}|x\rangle \frac{(|0\rangle - |1\rangle)}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Usando esse resultado obtem-se

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}(-1)^{f(0)}|0\rangle \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] + \frac{1}{2}(-1)^{f(1)}|1\rangle \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right]. \quad (1.67)$$

Logo

$$|\psi_2\rangle = \begin{cases} \pm \left[\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] & \text{se } f(0) = f(1), \\ \pm \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] & \text{se } f(0) \neq f(1). \end{cases} \quad (1.68)$$

Uma aplicação final da porta de Hadamard no primeiro qubit resulta

$$|\psi_3\rangle = \begin{cases} \pm |0\rangle \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] & \text{se } f(0) = f(1), \\ \pm |1\rangle \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] & \text{se } f(0) \neq f(1). \end{cases} \quad (1.69)$$

Notando que $f(0) \oplus f(1)$ é igual a zero se $f(0) = f(1)$, e igual a um de outro modo, podemos reescrever (1.69) concisamente na forma

$$|\psi_3\rangle = \pm |f(0) \oplus f(1)\rangle \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \quad (1.70)$$

Medindo o primeiro qubit pode-se então determinar $f(0) \oplus f(1)$. Logo, o circuito quântico na Fig. 1.9 nos deu a habilidade de determinar uma propriedade global de $f(x)$, que é $f(0) \oplus f(1)$, com um único cálculo da função f . Isso já supera um circuito (computador) clássico que precisaria de no mínimo dois cálculos a saber, $f(0)$ e $f(1)$.

Esse exemplo ilustra a diferença existente entre o paralelismo quântico e os algoritmos clássicos aleatórios (*randomized algorithms*). O estado $|0, f(0)\rangle + |1, f(1)\rangle\sqrt{2}$ **não** corresponde a um computador clássico que calcula $f(0)$ com probabilidade 1/2 e $f(1)$ também com probabilidade 1/2, isso porque num computador clássico essas duas alternativas são excludentes e num computador quântico é possível que as duas alternativas interfiram uma com a outra para gerar algum tipo de propriedade global da função f . Isso é realizado com uso de portas do tipo Hadamard que combinam as diferentes alternativas, como é feito no algoritmo de Deutsch.

A essência e a dificuldade do desenvolvimento de algoritmos quânticos é justamente a escolha apropriada dos qubits de entrada e da transformação final. Essas escolhas devem permitir uma determinação eficiente de propriedades globais da função f , propriedades essas que requeririam do computador clássico maior quantidade de cálculos da função.

Até esse ponto tratamos basicamente dos conceitos matemáticos que estruturam a computação e informação quântica. Contudo, não passaria de uma curiosidade matemática se a natureza não se comportasse de acordo com essas leis. O problema é que todas essas argumentações foram idealizadas para um *sistema fechado*, isto é, evoluindo unitariamente durante todo o tempo. Na realidade, os sistemas físicos não estão completamente isolados e isso deve ser levado em consideração quando pensa-se na implementação experimental desses computadores.

As unidades elementares da teoria são os qubits, ou seja, sistemas de dois níveis. Para a implementação de um computador quântico, os qubits devem ter uma representação física robusta que retenha suas propriedades quânticas de superposição. O sistema físico escolhido deve evoluir da maneira desejada e deve permitir a preparação dos qubits em algum conjunto especificado de estados iniciais. Esse sistema deve também permitir a medida eficiente do estado final após a realização das operações lógicas que corresponde fisicamente a sua evolução temporal.

É um grande desafio experimental a realização desses requerimentos básicos e normalmente eles são apenas parcialmente satisfeitos. Uma moeda tem dois estados, cara ou coroa, mas é um qubit muito ruim porque não apresenta qualquer efeito de superposição desses dois estados, ou equivalentemente, esses efeitos não duram tempo suficiente para qualquer observação. Um único spin nuclear pode ser um ótimo qubit porque superposições, de um estado alinhado na direção a favor ou contra um campo magnético externo, podem durar por muito tempo, alguns dias [29]. Porém, pode ser difícil construir um computador a partir de spins nucleares porque eles acoplam muito fracamente com qualquer interação externa o que torna extremamente difícil a medição da orientação de um único núcleo. O que é uma vantagem do ponto de vista da coerência da superposição torna-se uma dificuldade no ponto de vista da medida.

Um computador quântico deve ser bem isolado para manter suas propriedades quânticas. Ao mesmo tempo, seus qubits devem ser acessíveis para a manipulação externa, tanto para a realização das operações lógicas quanto para a medida de seu estado no final da operação. Uma implementação realista deve satisfazer um balanço delicado entre esses dois vínculos.

Nos próximos capítulos é apresentado como o sistema de íons aprisionados interagindo com o campo quantizado pode ser empregado na implementação física das idéias expostas nesta seção. A evolução dinâmica do sistema e os regimes de operação são estudados tendo em mente o compromisso entre manipulação externa e coerência quântica.

Capítulo 2

Descrição do Sistema Físico

No processamento de informação quântica é desejável que os qubits (sistemas de dois níveis) possuam um tempo de coerência suficientemente longo para a realização das operações lógicas necessárias. O uso de estados eletrônicos metaestáveis de um íon aprisionado já se mostrou bastante promissor nessa direção [16, 48]. Contudo, nesse sistema o transporte de informação para outros lugares do espaço não parece ser uma tarefa fácil já que se trata de um sistema bastante localizado. O uso de fótons como “*qubit carrier*”, ou seja, que carrega informação para outro lugar no espaço, parece uma escolha mais adequada. No âmbito da eletrodinâmica quântica em cavidades (CQED), o acoplamento fóton-átomo é realizado enviando os átomos à cavidade num esquema tipo micromaser. Essas experiências foram realizadas com bastante sucesso pelo grupo de S. Haroche (França) [9]. O problema nesse caso é que o sistema está sujeito a flutuações no feixe atômico térmico que atravessa a cavidade, incluindo flutuações no número de átomos e na intensidade da constante de acoplamento. Ainda nesse tipo de experimento, a interação átomo-campo se dá num intervalo de tempo bastante curto, que é o tempo que o átomo demora para atravessar a cavidade. Seria desejável obter tempos de interação mais longos, principalmente quando pensamos em manipulação de estados e no estudo dos mecanismos de perda de coerência.

O uso de íons aprisionados em experimentos CQED vem ao encontro da eliminação desses problemas. Principalmente, os tempos de interação íon-campo são muito maiores já que um íon pode permanecer aprisionado por muito tempo (dias) [51]. Em função disso, o número de íons na armadilha não flutua. É claro que inserir uma armadilha de Paul numa cavidade não é uma tarefa experimental fácil. Porém, discutiremos um trabalho experimental recente [22] que indica ser possível a manipulação coerente da interação íon aprisionado-campo cavidade, o que

é fundamental para a implementação das idéias expostas nesta dissertação.

2.1 Progressos experimentais

Recentemente, grupos experimentais já tradicionais na manipulação de micromasers como é o caso do grupo de H. Walther (Inst. Max Planck, Alemanha), ou ainda na manipulação coerente de íons aprisionados interagindo com campos de laser, como é o caso do grupo de R. Blatt (Univ. Innsbruck, Austria), têm realizado experiências envolvendo íons aprisionados interagindo com o campo quantizado numa cavidade óptica [10, 22]. Dentre esses trabalhos, o mais direcionado ao uso desse sistema na manipulação coerente de estados é o do grupo de Innsbruck. Nessa seção, é discutido de maneira sucinta o aparato experimental e alguns detalhes das experiências realizadas por esse grupo. Essa apresentação é útil para dar embasamento físico às propostas apresentadas no próximo capítulo.

Esse grupo utiliza íons de cálcio $^{40}\text{Ca}^+$ que possuem a estrutura de níveis, frequências de transição e larguras de linha apropriadas para a manipulação coerente das transições, além de possuir uma massa apropriada para o aprisionamento e cristalização numa armadilha de Paul [48].

Os dois níveis eletrônicos usados são $S_{1/2}$ e $D_{5/2}$ que têm uma separação $\lambda = 729\text{ nm}$, Fig. 2.1. A transição entre esses dois níveis é claramente do tipo dipolo-proibida e a razão dessa escolha é que um nível acoplado dipolarmente a outro possui um tempo de vida muito curto (emissão espontânea), o que certamente destrói a coerência da evolução do sistema. É necessário, portanto, a escolha de níveis no mínimo metaestáveis. Algumas alternativas seriam o uso de transições Raman acoplando níveis hiperfinos [11] ou uma transição do tipo quadrupolo-permitida acoplando um nível metaestável ao estado fundamental do átomo. Essa é a escolha adotada para o cálcio (transição S-D) que não possui estrutura hiperfina. Lembremos que uma transição do tipo dipolo-permitida envolve uma regra de seleção em que os níveis devem ter uma diferença de momento angular igual a um, como é o caso de uma transição S-P, e que uma transição tipo quadrupolo-permitida envolve a regra de que a diferença de momento angular deve ser igual a dois, como ocorre na transição S-D.

A determinação da probabilidade de excitação (ocupação do nível D) é feita via técnicas de fluorescência, mais especificamente, numa técnica conhecida como *electron shelving technique*, onde a discriminação entre dois estados eletrônicos pode ser realizada com uma certeza de praticamente 100%. A probabilidade de excitação é medida com o uso de uma segunda transição

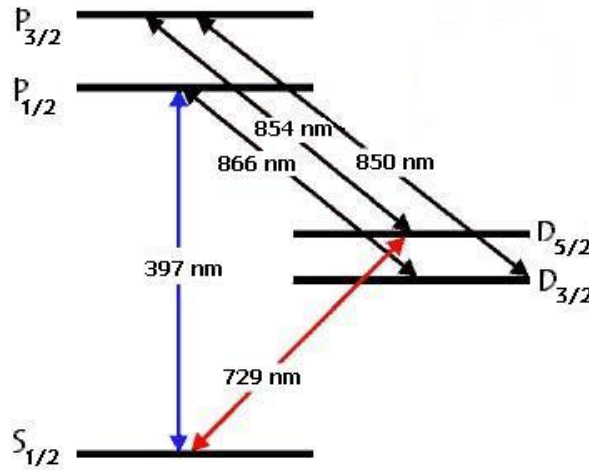


Figura 2.1: Estrutura de níveis do Íon $^{40}\text{Ca}^+$

bastante intensa do tipo dipolo-permitida S-P excitada com o uso de um laser externo. Quando a fluorescência dessa transição forte cessar (*dark period*), significa que o átomo se encontra no estado D. Repetindo a preparação inicial do estado e medindo a fluorescência dessa transição S-P por um número muito grande de vezes é possível determinar a ocupação do estado D. No caso do cálcio, a fluorescência é registrada com a transição $S_{1/2} - P_{1/2}$ de separação de $\lambda = 397\text{ nm}$, Fig. 2.1. Essa transição é também usada no resfriamento Doppler do movimento vibracional do íon.

Para acoplar a transição entre os estados S-D é injetado na cavidade o campo de um laser de Ti:Sa com $\lambda = 729\text{ nm}$ e largura de 1 kHz. Para resfriar e registrar a fluorescência é usado também um laser de Ti:Sa porém com $\lambda = 794\text{ nm}$ e largura de linha menor que 300 kHz. Esse laser é dobrado em frequência para se obter o comprimento de onda $\lambda = 397\text{ nm}$.

A cavidade utilizada [22] é do tipo confocal, de raio de curvatura $R = 25\text{ mm}$ e separação entre os espelhos de $L = 21\text{ mm}$. Essa cavidade possui uma finesse medida de $\mathcal{F} = 35000$ em $\lambda = 729\text{ nm}$ e no modo fundamental TEM_{00} . O modo sustentado na cavidade é do tipo Gaussiano com uma cintura (waist) $w_0 = 54\text{ }\mu\text{m}$. Os espelhos são acoplados a dois cristais PZT que permitem a variação da separação entre eles por meio da aplicação de um voltagem.

Os íons de cálcio são aprisionados numa armadilha de Paul (rf) cujos eletrodos e *end-caps* (separados um do outro por 1.2 mm) são feitos de molibdênio e produzem frequências $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ iguais a $2\pi(2.9, 3.9, 7.4)$ MHz numa potência do campo rf de 1 W [22]. Aqui, a direção z representa o eixo da armadilha, x e y são as direções radiais. O ângulo entre o eixo da

cavidade e o eixo da armadilha (z) é de 45° . Essa é uma escolha apropriada para a realização do resfriamento e para outros detalhes mais específicos que não são importantes no entendimento básico da situação experimental.

Com o aparato descrito anteriormente, o grupo deu um passo importante em direção ao uso de íons aprisionados em esquemas de computação e informação quântica, envolvendo o acoplamento do íon com o campo da cavidade. Em [22] é demonstrada a possibilidade de controlar de maneira coerente o acoplamento dos estados eletrônicos e vibracionais do íon com o campo quantizado.

Um dos trabalhos surgidos durante nossos estudos [3] foi a proposta de um esquema de geração da base de Bell, que é importante em muitos aspectos na teoria de informação quântica. Propusemos o uso desse sistema que acopla o movimento de um íon aprisionado, seus graus internos de liberdade (eletrônicos) e o campo quantizado. Em [22] Mundt et al. (grupo experimental de Innsbruck) cita nosso esquema de geração como uma das aplicações decorrentes do controle coerente desse sistema.

Esses recentes trabalhos experimentais no sistema de íons aprisionados interagindo com o campo quantizado dão suporte e justificam o estudo realizado nessa dissertação. Na próxima seção é apresentado o modelo Hamiltoniano para esse sistema e também alguns dos diferentes regimes de operação que permitem uma grande diversidade de dinâmicas distintas.

2.2 Ressonâncias e Bandas Laterais

Consideramos um íon de dois níveis aprisionado num potencial harmônico e inserido no interior de uma cavidade contendo um modo do campo eletromagnético quantizado (frequência ω_c). Uma possível base para descrever o sistema seria aquela formada pelo produto direto das bases que descrevem os sistemas livres $\{|e\rangle, |g\rangle\} \otimes \{|m\rangle_v\} \otimes \{|n\rangle_c\}$. Esses kets referem-se a estrutura interna do átomo de dois níveis $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ (autoestados de $\hat{\sigma}_z$), ao movimento do *centro de massa do íon* $\{|m\rangle_v\}$ com $m = 0, 1, 2, \dots$, (autoestados de $\hat{a}^\dagger \hat{a}$) e ao *campo monomodo* intracavidade $\{|n\rangle_c\}$ com $n = 0, 1, 2, \dots$, (autoestados de $\hat{b}^\dagger \hat{b}$). Nessa base, os operadores para o subespaço dos dois níveis podem ser escritos como

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_+ &= |e\rangle\langle g|, \\ \hat{\sigma}_- &= |g\rangle\langle e|, \\ \hat{\sigma}_z &= |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|,\end{aligned}\tag{2.1}$$

os quais satisfazem as relações de comutação já especificadas anteriormente.

Esse sistema é ainda forçado por um laser propagante externo (frequência ω_L). O propósito de incluir o laser é a manipulação coerente do sistema íon + cavidade. Essa é uma perturbação dependente do tempo cujo movimento é imposto externamente e que portanto, não nos interessa sua dinâmica. Nessas condições, o laser externo pode ser satisfatoriamente descrito como um campo clássico.

O Hamiltoniano para esse sistema (A) pode ser escrito na forma:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{cav} + \hat{H}_{ext}, \quad (2.2)$$

em que $\hat{H}_0$ é o Hamiltoniano livre do sistema, $\hat{H}_{cav}$ é o Hamiltoniano de interação do íon com o campo da cavidade e $\hat{H}_{ext}$ é o Hamiltoniano de interação do íon com o campo externo, sendo dados por:

$$\hat{H}_0 = \hbar \nu \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar \frac{\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z \quad (2.3)$$

$$\hat{H}_{cav} = \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \cos[\eta_c (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \phi] \quad (2.4)$$

$$\hat{H}_{ext} = \hbar \Omega (\hat{\sigma}_+ e^{i[\eta_L (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) - \omega_L t + \theta]} + \hat{\sigma}_- e^{-i[\eta_L (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) - \omega_L t + \theta]}). \quad (2.5)$$

Nas Eqs. (2.3), (2.4) e (2.5) temos que $\hat{a}^\dagger(\hat{a})$ são os operadores de criação (aniquilação) relativos as excitações no movimento vibracional (frequência ν), $\hat{b}^\dagger(\hat{b})$ são os operadores de criação (aniquilação) das excitações no campo da cavidade (frequência ω_c), $\hat{\sigma}_+(\hat{\sigma}_-)$ são os operadores atômicos de levantamento (abaixamento), ω_a é a frequência atômica, ν é a frequência vibracional iônica, $\eta_L = 2\pi a_0/\lambda_L$ e $\eta_c = 2\pi a_0/\lambda_c$ são, respectivamente, os parâmetros de Lamb-Dicke relativos aos campos do laser e da cavidade sendo a_0 a largura do poço harmônico, λ_L (λ_c) o comprimento de onda do campo do laser (cavidade), Ω a constante de acoplamento laser-íon e g a constante de acoplamento campo da cavidade-íon. As fases ϕ e θ dão a posição do centro da armadilha (centro do potencial harmônico) com relação ao modo do campo quantizado e ao campo inicial do laser, respectivamente.

Vamos assumir a seguir um “duplo” regime de Lamb-Dicke, ou seja, $\eta_L \ll 1$ e $\eta_c \ll 1$, tal que possamos aproximar o cosseno e as exponenciais presentes, respectivamente, em (2.4) e

(2.5) por

$$\exp [i \eta_L (\hat{a}^\dagger + \hat{a})] \approx 1 + i \eta_L (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \cos [\eta_c (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \phi] &\approx \left[1 - \frac{\eta_c^2 (1 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a})}{2} - \frac{\eta_c^2 (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2)}{2} \right] \cos \phi \\ &\quad - \eta_c (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \sin \phi. \end{aligned} \quad (2.7)$$

É fundamental notar que retemos termos até segunda ordem no parâmetro de Lamb-Dicke. Nessa aproximação e já na representação de interação, o Hamiltoniano $\hat{H}_i = \hat{H}_{cav} + \hat{H}_{ext}$ assume a forma

$$\begin{aligned} \hat{H}_i &= \hbar \Omega [e^{i\theta} \hat{\sigma}_+ e^{i\delta_{aL}t} + h.c.] \\ &\quad + i \eta_L \hbar \Omega [e^{i\theta} \hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{i(\delta_{aL}-\nu)t} + e^{i\theta} \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger e^{i(\delta_{aL}+\nu)t} - h.c.] \\ &\quad + \hbar g \cos \phi [1 - \frac{\eta_c^2}{2} (1 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a})] [\hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger e^{i\delta_{ac}t} + \hat{\sigma}_+ \hat{b} e^{i(\delta_{ac}+2\omega_c)t} + h.c.] \\ &\quad - \eta_c \hbar g \sin \phi [\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger e^{i(\delta_{ac}+\nu+2\omega_c)t} + \hat{\sigma}_+ \hat{a} \hat{b}^\dagger e^{i(\delta_{ac}-\nu+2\omega_c)t} + h.c.] \\ &\quad - \eta_c \hbar g \sin \phi [\hat{\sigma}_+ \hat{a} \hat{b} e^{i(\delta_{ac}-\nu)t} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger \hat{b} e^{i(\delta_{ac}+\nu)t} + h.c.] \\ &\quad - \frac{\eta_c^2}{2} \hbar g \cos \phi [\hat{\sigma}_+ \hat{a}^{\dagger 2} \hat{b}^\dagger e^{i(\delta_{ac}+2\nu+2\omega_c)t} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^2 \hat{b}^\dagger e^{i(\delta_{ac}-2\nu+2\omega_c)t} + h.c.] \\ &\quad - \frac{\eta_c^2}{2} \hbar g \cos \phi [\hat{\sigma}_- \hat{a}^{\dagger 2} \hat{b}^\dagger e^{i(-\delta_{ac}+2\nu)t} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^2 \hat{b}^\dagger e^{i(-\delta_{ac}-2\nu)t} + h.c.], \end{aligned} \quad (2.8)$$

em que $\delta_{aL} = \omega_a - \omega_L$ e $\delta_{ac} = \omega_a - \omega_c$ são as dessintonias átomo-laser e átomo-campo da cavidade, respectivamente. Temos agora duas dessintonias que podem ser variadas experimentalmente e esse é um ganho devido ao acréscimo do campo externo no aparato experimental. O aumento no número de parâmetros reflete a possibilidade de melhor controle sobre o sistema ou pelo menos uma maior riqueza de regimes manipulados, por exemplo, via pulsos do laser externo. A seguir, explicitamos alguns Hamiltonianos e, portanto, possíveis operações unitárias decorrentes das escolhas de δ_{aL} e δ_{ac} , e da realização da aproximação de onda girante em (2.8). Essa aproximação é válida somente num regime de acoplamento fraco ($\Omega, g \ll \nu$).

Primeiramente vejamos o caso $\delta_{ac} \neq k\nu$ (k inteiro) ou $g=0$ (**sem a cavidade**)

$$\begin{aligned} \hat{H}_i &= \hbar \Omega [e^{i\theta} \hat{\sigma}_+ e^{i\delta_{aL}t} + h.c.] \\ &\quad + i \eta_L \hbar \Omega [e^{i\theta} \hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{i(\delta_{aL}-\nu)t} + e^{i\theta} \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger e^{i(\delta_{aL}+\nu)t} - h.c.], \end{aligned} \quad (2.9)$$

no qual surgem três possíveis escolhas para δ_{aL} :

- $\delta_{aL} = 0$ (“carrier”)

$$\hat{H}_i = \hbar \Omega (\hat{\sigma}_+ e^{i\theta} + \hat{\sigma}_- e^{-i\theta}). \quad (2.10)$$

Tal interação causa transições apenas entre os dois níveis internos do íon sem alterar o estado do campo ou do movimento de centro de massa. É interessante notar que apesar de haver três subsistemas interagentes, a ressonância entre o campo externo e os dois níveis eletrônicos é ainda capaz de induzir o aparecimento desse tipo simples de interação. Esse Hamiltoniano permite a implementação da porta lógica de Hadamard. No próximo capítulo, mostramos como utilizar esse Hamiltoniano na construção de uma porta *controlled-NOT* nesse sistema.

- $\delta_{aL} = \nu$ (“primeira banda lateral vermelha”)

$$\hat{H}_i = i \eta_L \hbar \Omega (\hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{i\theta} - \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger e^{-i\theta}). \quad (2.11)$$

Esse é um Hamiltoniano do tipo Jaynes-Cummings usual e descreve um processo em que o íon se excita (ou decai) enquanto que o movimento vibracional massivo sofre uma decaimento (ou excitação) de um quantum de energia. Além de todas as propriedades dinâmicas já bastante conhecidas, esse Hamiltoniano é utilizado, no caso do íon, para trazer sua energia vibracional até o do estado fundamental. Esse esquema é conhecido como *resfriamento de banda lateral resolvida* [52].

- $\delta_{aL} = -\nu$ (“primeira banda lateral azul”)

$$\hat{H}_i = i \eta_L \hbar \Omega (\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger e^{i\theta} - \hat{\sigma}_- \hat{a} e^{-i\theta}). \quad (2.12)$$

Trata-se de um Hamiltoniano conhecido como anti-Jaynes-Cummings e representa um processo de duplo decaimento (ou excitação) onde os graus de liberdade internos e de movimento vibracional do íon decaem (ou excitam-se) simultaneamente de um quantum de energia cada. Tal processo não é encontrado na eletrodinâmica quântica de cavidades padrão. Esse tipo de interação tem sido utilizado experimentalmente no NIST para o estudo de uma série de estados não clássicos do movimento do centro de massa do íon [11].

Temos ainda outras situações possíveis para o Hamiltoniano de interação, decorrentes agora do ajuste da sintonia átomo-campo da cavidade.

No caso $\delta_{aL} \neq k\nu$ (k inteiro) ou $\Omega = 0$ (**laser desligado**), temos que (2.8) se reduz a

$$\begin{aligned} \hat{H}_i = & \hbar g \cos \phi [1 - \eta_c^2 (1 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a})/2] [\hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger e^{i\delta_{ac}t} + \hat{\sigma}_+ \hat{b}^\dagger e^{i(\delta_{ac}+2\omega_c)t} + h.c.] \\ & - \eta_c \hbar g \sin \phi [\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger e^{i(\delta_{ac}+\nu+2\omega_c)t} + \hat{\sigma}_+ \hat{a} \hat{b}^\dagger e^{i(\delta_{ac}-\nu+2\omega_c)t} + h.c.] \\ & - \eta_c \hbar g \sin \phi [\hat{\sigma}_+ \hat{a} \hat{b} e^{i(\delta_{ac}-\nu)t} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger \hat{b} e^{i(\delta_{ac}+\nu)t} + h.c.] \\ & - \frac{\eta_c^2}{2} \hbar g \cos \phi [\hat{\sigma}_+ \hat{a}^{\dagger 2} \hat{b}^\dagger e^{i(\delta_{ac}+2\nu+2\omega_c)t} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^2 \hat{b}^\dagger e^{i(\delta_{ac}-2\nu+2\omega_c)t} + h.c.] \\ & - \frac{\eta_c^2}{2} \hbar g \cos \phi [\hat{\sigma}_- \hat{a}^{\dagger 2} \hat{b}^\dagger e^{i(-\delta_{ac}+2\nu)t} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^2 \hat{b}^\dagger e^{i(-\delta_{ac}-2\nu)t} + h.c.], \end{aligned} \quad (2.13)$$

no qual destacamos algumas escolhas de δ_{ac} que geram Hamiltonianos estudados no desenvolvimento deste trabalho, ou seja, na obtenção da base de Bell, portas lógicas e acoplamento dependente da intensidade do movimento iônico.

- $\delta_{ac} = 0$

$$\hat{H}_i = \hbar g \cos \phi [1 - \eta_c^2 (1 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a})/2] [\hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger + \hat{\sigma}_+ \hat{b}]. \quad (2.14)$$

Também um Hamiltoniano do tipo Jaynes-Cummings porém com a particularidade de que a constante de acoplamento depende, em nosso caso, da intensidade do movimento do centro de massa do íon ($\hat{a}^\dagger \hat{a}$). Isso trará importantes consequências à dinâmica do sistema como veremos no próximo capítulo. Destaca-se nesse caso o aparecimento do fenômeno de *super revival*.

- $\delta_{ac} = -\nu$

$$\hat{H}_i = -\eta_c \hbar g \sin \phi [\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{\sigma}_- \hat{a} \hat{b}^\dagger]. \quad (2.15)$$

Esse é um Hamiltoniano que descreve um processo onde o campo perde (ou ganha) um fóton, enquanto que o íon e seu graus de liberdade vibracional e eletrônico ganham (ou perdem) um quantum de energia. Essa interação é utilizada no próximo capítulo para a geração da base de Bell e também na proposta de uma porta lógica *controlled-NOT*.

- $\delta_{ac} = \nu$

$$\hat{H}_i = -\eta_c \hbar g \sin \phi [\hat{\sigma}_+ \hat{a} \hat{b} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger]. \quad (2.16)$$

O processo físico descrito nesse Hamiltoniano é o que o campo e o movimento vibracional do íon perdem (ou ganham) um quantum de energia cada, enquanto que a parte eletrônica perde (ou ganha) um quantum de energia. Esse Hamiltoniano é também utilizado no próximo capítulo para gerar a base de Bell.

Fica então claro que este sistema, em virtude da diversidade de Hamiltonianos, tem um potencial bastante grande para a manipulação de estados quânticos. O próximo capítulo é

dedicado a exploração dessas diferentes escolhas de dessintonias para a geração e manipulação de estados quânticos com perspectivas voltadas a computação e informação quântica. Também apresentamos um estudo dos fenômenos de *super revival* e periodicidade decorrentes, dentre outras condições, do posicionamento do centro da armadilha com relação ao nodo do campo da cavidade.

Capítulo 3

Dinâmica e Manipulação Coerente de Estados Quânticos

Nesse capítulo são apresentados os principais resultados de nossos estudos sobre a interação do campo eletromagnético quantizado em uma cavidade óptica com um íon aprisionado num potencial harmônico gerado por uma armadilha de Paul. É apresentado nas seções 3.1 e 3.2 como esse sistema físico permite a geração da Base de Bell e da porta lógica *Controlled-NOT*. Os esquemas envolvem preparações iniciais factíveis do estado do sistema e um ajuste apropriado das frequências do campo e do íon. Todo o processo é realizado com pulsos, isto é, tempos de interação de duração finita e as medidas sobre o sistema são realizadas pela coleta da fluorescência iônica, que é um processo que possui uma alta eficiência. Na geração da porta controlled-NOT, pulsos de laser externo ao sistema são aplicados o que torna possível a obtenção da evolução necessária à construção da importante porta de Hadamard. Esse é um ponto importante pois a capacidade de poder manipular o sistema íon-cavidade com campos externos abre muitas possibilidades e regimes de operação, discutidas no capítulo anterior e aqui aplicadas.

Uma questão importante nesse sistema é saber o quanto a localização do movimento vibracional do íon, ou seja, a largura do poço harmônico com relação ao comprimento de onda dos campos envolvidos na interação, influencia a dinâmica do sistema. Essa informação é traduzida no parâmetro de Lamb-Dicke que usualmente é muito pequeno, tomando valores máximos em torno de 0.2 nos experimentos [11–14]. Esse valor pequeno permite as expansões usuais do Hamiltoniano de interação em primeira ordem nesse parâmetro. Essa é a chamada aproximação de Lamb-Dicke e além de apropriada para a descrição correta de uma série de

resultados, simplifica bastante os cálculos nesse sistema. Contudo, apresentamos na seção 3.3 algumas situações em que essa aproximação não é apropriada mesmo no caso de valores do parâmetro de Lamb-Dicke muito menores que 0.2. É necessário, nesse caso, uma expansão até segunda ordem nesse parâmetro. Consequentemente, uma série de fenômenos interessantes surgem em função desse novo termo e da preparação adequada do estado do sistema, no qual destacamos o surgimento do fenômeno do *super revival*.

3.1 Geração da Base de Bell

Para um sistema formado por dois subsistemas de dois níveis $|0\rangle$ e $|1\rangle$ (interagentes ou não), é possível contruir uma base que é simplesmente o produto direto das bases de cada subsistema, no caso, $\mathcal{A} = \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, em que foi usada a notação abreviada de $|a\rangle_{\text{sistema1}} \otimes |b\rangle_{\text{sistema2}} = |ab\rangle$. Sabemos que essa escolha não é única e que para diferentes tipos de problemas, a escolha de outra base pode ser mais conveniente para cálculos e para a visualização de propriedades do sistema.

Uma outra escolha possível seria $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)\}$. Essa base é importante no tratamento de uma série de problemas em física, como por exemplo, na soma de momento angular 1/2 no qual esses kets recebem o nome de estados singlete e tripleto e em informação e computação quântica nos quais são chamados estados de Bell ou pares EPR. O seu uso como base é de fundamental importância nos estudos e aplicações do emaranhamento quântico [29]. Como exemplo, consideraremos o estado

$$|\Psi\rangle_+ = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (3.1)$$

Esse estado é responsável por muitas surpresas em computação e informação quântica, incluindo o teletransporte de estados quânticos [27]. O estado de Bell (3.1) tem a propriedade de que uma medida sobre um dos qubits tem dois resultados possíveis: 0 com probabilidade 1/2, levando ao estado $|\phi'\rangle = |00\rangle$; 1 com probabilidade 1/2, levando ao estado $|\phi'\rangle = |11\rangle$. Assim, uma medida no outro qubit sempre dará o mesmo resultado que a medida no primeiro qubit, significando assim que o resultado das medidas estão *correlacionados*. Ainda mais, outros tipos de medida podem ser realizadas no primeiro ou segundo qubit, e as correlações entre os resultados das medidas ainda existirão. Essas correlações têm sido objeto de grande interesse desde o famoso trabalho de Einstein, Podolsky e Rosen no qual eles apontaram pela primeira

vez essas estranhas propriedades do estado de Bell [53]. Essas correlações foram estudadas por John Bell [28] que provou um resultado muito interessante e surpreendente: “as correlações medidas no estado de Bell são mais fortes que qualquer outra que possa existir nos sistemas clássicos”. Esses resultados foram talvez a primeira indicação de que a mecânica quântica permite o processamento de informação além do que é possível no mundo clássico.

Apresentamos agora um esquema de geração de toda a base de Bell usando o sistema de íons aprisionados interagindo com o campo quantizado numa cavidade. Voltando aos Hamiltonianos do capítulo anterior, consideremos agora a evolução temporal do sistema para alguns estados iniciais específicos. Em especial, adotaremos

$$|\Psi(0)\rangle = |n\rangle_c \otimes |m\rangle_v \otimes (\cos \Theta |e\rangle + e^{i\varphi} \sin \Theta |g\rangle), \quad (3.2)$$

ou seja, a cavidade contendo n fótons no estado de Fock $|n\rangle_c$, com o íon descrito pelos estados vibracionais de Fock $|m\rangle_v$ e os estados eletrônicos preparados numa superposição coerente dos estados excitado $|e\rangle$ e fundamental $|g\rangle$.

Consideraremos primeiramente o caso $\delta_{ac} = \nu$ que é descrito pelo Hamiltoniano (2.16), e nessa equação fixaremos $\phi = -\pi/2$. O operador de evolução temporal $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ pode ser calculado, por exemplo, através de uma expansão na base atômica $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ conforme explicado no apêndice B. Neste caso,

$$\hat{U}_\nu(t) = \hat{C}_{n+1}|e\rangle\langle e| + \hat{C}_n|g\rangle\langle g| - i\hat{S}_{n+1}\hat{a}\hat{b}|e\rangle\langle g| - i\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{S}_{n+1}|g\rangle\langle e|, \quad (3.3)$$

com

$$\hat{C}_{n+1} = \cos \left(\eta_c g \sqrt{(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)(\hat{b}^\dagger\hat{b} + 1)} t \right), \quad (3.4)$$

$$\hat{C}_n = \cos \left(\eta_c g \sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b}} t \right), \quad (3.5)$$

e

$$\hat{S}_{n+1} = \frac{\sin \left(\eta_c g \sqrt{(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)(\hat{b}^\dagger\hat{b} + 1)} t \right)}{\sqrt{(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)(\hat{b}^\dagger\hat{b} + 1)}}. \quad (3.6)$$

A evolução do estado inicial (3.2), obtida com a aplicação de (3.3) é dada por

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & [\cos \Theta \cos(\eta_c g \sqrt{(n+1)(m+1)} t) |n\rangle_c |m\rangle_v \\ & -i e^{i\varphi} \sin \Theta \sin(\eta_c g \sqrt{nm} t) |n-1\rangle_c |m-1\rangle_v] |e\rangle \\ & + [e^{i\varphi} \sin \Theta \cos(\eta_c g \sqrt{nm} t) |n\rangle_c |m\rangle_v \\ & -i \cos \Theta \sin(\eta_c g \sqrt{(n+1)(m+1)} t) |n+1\rangle_c |m+1\rangle_v] |g\rangle \end{aligned} \quad (3.7)$$

que é um estado emaranhado envolvendo os graus de liberdade internos do íon (dois níveis eletrônicos), o movimento vibracional (centro de massa) e o campo na cavidade.

Experimentalmente as medidas realizadas nesse tipo de sistema são medidas de fluorescência do íon, ou seja, ilumina-se o íon com um laser externo e detecta-se a luz que ele emite em decorrência dessa excitação, conforme explicado no capítulo anterior (*electron shelving technique*). A análise dessa radiação fornece informação sobre os estados eletrônicos do íon e é usada para projetar o estado interno em $|e\rangle$ ou $|g\rangle$. Uma medida desse tipo irá colapsar o estado total do sistema (3.7) num estado emaranhado envolvendo o movimento vibracional e o campo na cavidade. Se considerarmos em (3.7) que inicialmente o movimento do íon é resfriado até o estado fundamental $|0\rangle_v$ e que não há fótons na cavidade (vácuo) $|0\rangle_c$, então, uma medida de fluorescência que resulte em $|g\rangle$ projetará o campo e o movimento vibracional no estado

$$|\psi\rangle = [\cos \Theta \cos(\eta_c g t) + e^{i\varphi} \sin \Theta] |0\rangle_c |0\rangle_v - i \cos \Theta \sin(\eta_c g t) |1\rangle_c |1\rangle_v. \quad (3.8)$$

Se a medida é realizada para tempos de interação dados por

$$t_k = \frac{\pi(4k+1)}{2\eta_c g}, \quad (3.9)$$

vemos da equação (3.8) que o estado gerado para $\Theta = \pi/4$,

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\varphi} |0\rangle_c |0\rangle_v - i |1\rangle_c |1\rangle_v), \quad (3.10)$$

é um estado do tipo Bell envolvendo como subsistemas dois sistemas físicos distintos; um íon aprisionado e o campo eletromagnético numa cavidade. Notamos que a fase relativa φ , envolvida na superposição dos níveis eletrônicos, é completamente transferida para o estado emaranhado resultante (3.10).

Consideraremos agora a evolução temporal do estado inicial (3.2) para o caso $\delta_{ac} = -\nu$,

descrito pelo Hamiltoniano (2.15), fixando também $\phi = -\pi/2$. O operador de evolução neste regime é dado por

$$\hat{U}_{-\nu}(t) = \hat{C}'_{n+1}|e\rangle\langle e| + \hat{C}'_n|g\rangle\langle g| - i\hat{S}'_n\hat{b}\hat{a}^\dagger|e\rangle\langle g| - i\hat{b}^\dagger\hat{a}\hat{S}'_n|g\rangle\langle e|, \quad (3.11)$$

em que

$$\hat{C}'_{n+1} = \cos\left(\eta_c g \sqrt{(\hat{b}^\dagger\hat{b} + 1)\hat{a}^\dagger\hat{a}} t\right), \quad (3.12)$$

$$\hat{C}'_n = \cos\left(\eta_c g \sqrt{\hat{b}^\dagger\hat{b}(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)} t\right), \quad (3.13)$$

e

$$\hat{S}'_n = \frac{\sin\left(\eta_c g \sqrt{(\hat{b}^\dagger\hat{b} + 1)\hat{a}^\dagger\hat{a}} t\right)}{\sqrt{(\hat{b}^\dagger\hat{b} + 1)\hat{a}^\dagger\hat{a}}}. \quad (3.14)$$

A evolução do estado inicial (3.2), obtida com a aplicação de (3.11) é dada por

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= [\cos\Theta \cos\left(\eta g \sqrt{(n+1)m} t\right) |n\rangle_c |m\rangle_v \\ &\quad - i e^{i\varphi} \sin\Theta \sin\left(\eta g \sqrt{n(m+1)} t\right) |n-1\rangle_c |m+1\rangle_v] |e\rangle \\ &\quad + [e^{i\varphi} \sin\Theta \cos\left(\eta g \sqrt{n(m+1)} t\right) |n\rangle_c |m\rangle_v \\ &\quad - i \cos\Theta \sin\left(\eta g \sqrt{(n+1)m} t\right) |n+1\rangle_c |m-1\rangle_v] |g\rangle. \end{aligned} \quad (3.15)$$

No caso em que o íon é inicialmente preparado no primeiro estado excitado $|1\rangle_v$ e o campo ainda no estado de vácuo $|0\rangle_c$, teremos para os mesmos tempos de interação (3.9) e para $\Theta = \pi/4$ que uma detecção do íon no estado eletrônico $|g\rangle$ resultará na geração do estado:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\varphi} |0\rangle_c |1\rangle_v - i |1\rangle_c |0\rangle_v), \quad (3.16)$$

que também é um estado do tipo Bell envolvendo o campo e estado vibracional do íon aprisionado. De fato, fixando $\varphi = \pm\pi/2$ nas eqs.(3.10) e (3.16) obtemos a chamada *base de Bell*:

$$|\Psi\rangle_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_c |0\rangle_v \pm |1\rangle_c |1\rangle_v) \quad (3.17)$$

e

$$|\Phi\rangle_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_c |1\rangle_v \pm |1\rangle_c |0\rangle_v), \quad (3.18)$$

a menos de uma fase global $e^{i\pi/2}$ que multiplica ambas as situações.

Em resumo, para gerar a base de Bell nesse sistema é preciso resfriar o íon até seu estado fundamental de movimento ($|0\rangle_v$) para obter dois dos quatro estados da base, ou partir de seu primeiro estado excitado ($|1\rangle_v$) para obter o resto da base. A geração desse primeiro estado excitado, ou seja, de um estado de Fock com um fóton (fónon) já foi realizada no sistema de íons aprisionados [40]. A cavidade deve ser preparada no estado de vácuo e a frequência do modo do campo eletromagnético deve ser ajustada em $\delta_{ac} = \pm\nu$. Uma medida no estado interno do íon que resulte em $|g\rangle$ colapsa o estado do sistema naqueles que formam a base de Bell, envolvendo o movimento do íon e o estado do campo da cavidade.

É importante realizar uma estimativa do tempo t_k (3.9) necessário para a geração desses estados. No caso $k = 0$, que é o menor tempo possível, temos que $t_0 = \pi/2\eta_c g$. Para $\eta_c \approx 0.2$ e $g \approx 2\pi \times 10^5$ MHz que são estimativas bastante realísticas [11, 20, 21], obtem-se $t_0 \approx 0.1\mu\text{s}$ como o tempo de evolução necessário para a geração de um dos estados (3.17) e (3.18).

Na implementação experimental desse esquema é preciso ter em mente que os tempos de decoerência não podem superar, ou mesmo ser da mesma magnitude que t_0 . É sabido que as escalas de tempo para a decoerência do movimento iônico em experimentos recentes são da ordem de milissegundos ou mais [21], e que a emissão espontânea pode ser suprimida usando níveis metaestáveis com tempos de vida da ordem de segundos. O maior problema está realmente nas cavidades ópticas que apresentam os menores tempos de coerência no sistema, da ordem de microsegundo [20]. Uma vez que a nossa estimativa de t_0 é cerca de uma ordem de grandeza menor que o principal tempo de decoerência do sistema, o esquema apresentado aqui nos parece factível com os recursos experimentais atuais.

Algumas outras propostas de geração de estados de Bell em outros sistemas podem ser encontradas na literatura, incluindo esquemas usando quantum dots [55], dois íons aprisionados [56], ou ainda os trabalhos [21, 54] usando íons ou átomos neutros aprisionados em três dimensões interagindo com campos de lasers e de cavidades afastadas espacialmente. Cada um desses esquemas tem suas características próprias que podem ser mais ou menos apropriadas para o tipo de pesquisa ou aplicação de interesse. O que destaca a proposta apresentada nessa dissertação, das demais citadas, é o fato da base de Bell, em nosso caso, envolver o emaranhamento entre dois subsistemas distintos e de grande interesse: o oscilador harmônico massivo (íon aprisionado) e o campo eletromagnético (fótons). Por um lado, tem-se um sistema bastante

localizado (íon) e de relativamente fácil manipulação via, por exemplo, pulsos de laser externos. Por outro lado, tem-se um sistema pouco localizado e ideal para enviar informação a pontos distantes do espaço que é o fóton. Apesar da base de Bell ter sido gerada dentro da cavidade, o fóton pode ser transportado a outros pontos do espaço, como por exemplo, através de guias de onda.

Essa característica pode ter aplicações em testes de fundamentos de mecânica quântica, como não localidade e desigualdades de Bell, ou ainda em criptografia e no envio de informação quântica. Essas aplicações ainda estão sendo estudadas e são uma continuação natural desse trabalho.

3.2 Proposta de Construção da Porta Lógica *Controlled-NOT*

Nessa seção é apresentado um esquema para a manipulação de estados quânticos do sistema físico formado por um íon aprisionado interagindo com o campo eletromagnético de uma cavidade que permite a construção da porta de Hadamard e da porta de fase de 2 qubits, tornando possível a implementação da porta CNOT. A porta CNOT é equivalente a aplicação sucessiva de: uma porta de Hadamard no qubit alvo, uma porta de fase de 2 qubits e ainda outra Hadamard no qubit alvo. Por exemplo, considere a sequência

$$\begin{aligned}
 |1, 0\rangle &\xrightarrow{H} |1\rangle \frac{(|0\rangle + |1\rangle)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + |1, 1\rangle) \rightarrow \\
 &\xrightarrow{fase} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle - |1, 1\rangle) \rightarrow \\
 &\xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle \frac{(|0\rangle + |1\rangle)}{\sqrt{2}} - |1\rangle \frac{(|0\rangle - |1\rangle)}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= |1, 1\rangle,
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

que é exatamente a ação da porta *controlled-NOT* em $|1, 0\rangle$. É fácil verificar que essa decomposição da controlled-NOT numa sequência de portas de Hadamard e de fase vale para os outros estados da base computacional, ou seja, para $|0, 0\rangle$, $|0, 1\rangle$ e $|1, 1\rangle$. Essa decomposição é bastante útil pois, em nosso sistema, as portas de Hadamard e de fase puderam ser obtidas diretamente da evolução temporal de um estado inicial apropriado do sistema numa situação em que os regimes de ressonâncias e bandas laterais são escolhidos de maneira conveniente.

Consideramos também a interação do íon na cavidade com um campo externo clássico de um laser resultando no Hamiltoniano (2.2). Vamos supor o centro da armadilha localizado no antinodo do campo da cavidade, o que é feito fixando $\phi = -\pi/2$ na Eq. (2.4). Para um “duplo” regime de Lamb-Dicke em que $\eta_L \ll 1$ e $\eta_c \ll 1$, podemos escrever $\exp[i\eta_L(\hat{a}^\dagger + \hat{a})] \approx 1 + i\eta_L(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ e $\sin\eta_c(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \approx \eta_c(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$, o que nos leva a obter na representação de interação a seguinte expressão para o Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} \hat{H}_i = & \hbar\Omega [\hat{\sigma}_+ e^{-i\theta} \exp(i\delta_{aL}t) + h.c.] \\ & + i\eta_L \hbar\Omega [\hat{\sigma}_+ e^{-i\theta} \hat{a} \exp\{i(\delta_{aL} - \nu)t\} - h.c.] \\ & + i\eta_L \hbar\Omega [\hat{\sigma}_+ e^{-i\theta} \hat{a}^\dagger \exp\{i(\delta_{aL} + \nu)t\} - h.c.] \\ & + \eta_c \hbar g [\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \exp\{i(\delta_{ac} + \nu + 2\omega_c)t\} + h.c.] \\ & + \eta_c \hbar g [\hat{\sigma}_+ \hat{a} \hat{b}^\dagger \exp\{i(\delta_{ac} - \nu + 2\omega_c)t\} + h.c.] \\ & + \eta_c \hbar g [\hat{\sigma}_+ \hat{a} \hat{b} \exp\{i(\delta_{ac} - \nu)t\} + h.c.] \\ & + \eta_c \hbar g [\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger \hat{b} \exp\{i(\delta_{ac} + \nu)t\} + h.c.], \end{aligned} \quad (3.20)$$

em que $\delta_{aL} = \omega_a - \omega_L$ e $\delta_{ac} = \omega_a - \omega_c$. No sistema considerado, podemos implementar a porta de Hadamard por meio da evolução descrita pelo Hamiltoniano

$$\hat{H}_{\delta_{aL}=0} = \hbar\Omega [\hat{\sigma}_+ e^{-i\theta} + \hat{\sigma}_- e^{i\theta}], \quad (3.21)$$

o qual é obtido tomando $\delta_{aL} = 0$ em (3.20), e efetuando uma aproximação de onda girante. O operador de evolução temporal para esse Hamiltoniano, na base atômica $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ é dado

$$\begin{aligned} \hat{U}_{\delta_{aL}=0}(t) &= \cos(\Omega t) |e\rangle\langle e| + \cos(\Omega t) |g\rangle\langle g| - ie^{-i\theta} \sin(\Omega t) |g\rangle\langle e| - ie^{i\theta} \sin(\Omega t) |e\rangle\langle g| \\ &= \cos(\Omega t) \hat{I}_a - i \sin(\Omega t) (e^{-i\theta} |g\rangle\langle e| + e^{i\theta} |e\rangle\langle g|). \end{aligned} \quad (3.22)$$

no qual $\hat{I}_a = |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|$. Aplicando esse operador de evolução aos estados $|g\rangle$ e $|e\rangle$ obtemos, respectivamente, os estados

$$\hat{U}_{\delta_{aL}=0}(t)|g\rangle = \cos(\Omega t) |g\rangle - ie^{i\theta} \sin(\Omega t) |e\rangle \quad (3.23)$$

$$\hat{U}_{\delta_{aL}=0}(t)|e\rangle = \cos(\Omega t) |e\rangle - ie^{-i\theta} \sin(\Omega t) |g\rangle \quad (3.24)$$

que para $\Omega t = \pi/4$ (*pulso* $\pi/2$) e $\theta = \pi/2$ fixos obtém-se como resultado a aplicação da porta

de Hadamard:

$$\begin{aligned}\hat{U}_{\delta_{aL}=0} |g\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle + |e\rangle) \\ \hat{U}_{\delta_{aL}=0} |e\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle - |e\rangle).\end{aligned}$$

Para implantarmos a porta de fase (1.49) é necessário o Hamiltoniano de interação

$$\hat{H}_{\delta_{ac}=-\nu} = \eta_c \hbar g [\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{\sigma}_- \hat{a} \hat{b}^\dagger], \quad (3.25)$$

obtido ao fixarmos $\delta_{ac} = \omega_a - \omega_c = -\nu$ e realizando uma outra aproximação de onda girante.

A evolução temporal com o Hamiltoniano (3.25) é idêntica àquela mostrada na obtenção da base de Bell (3.15), bastando apenas fixar $\Theta = 0$ ou $\pi/2$ nos casos em que o átomo está preparado inicialmente nos estados excitado $|e\rangle$ ou fundamental $|g\rangle$, respectivamente. A aplicação de um pulso 2π ($\eta_c g t = \pi$) nos estados $\{|0\rangle_v, |1\rangle_v\} \otimes \{|e\rangle, |g\rangle\} \otimes \{|0\rangle_c\}$ realiza as seguintes transformações:

$$\begin{aligned} [|0\rangle_v |g\rangle] |0\rangle_c &\longrightarrow [|0\rangle_v |g\rangle] |0\rangle_c, \\ [|0\rangle_v |e\rangle] |0\rangle_c &\longrightarrow [|0\rangle_v |e\rangle] |0\rangle_c, \\ [|1\rangle_v |g\rangle] |0\rangle_c &\longrightarrow [|1\rangle_v |g\rangle] |0\rangle_c, \\ [|1\rangle_v |e\rangle] |0\rangle_c &\longrightarrow -[|1\rangle_v |e\rangle] |0\rangle_c, \end{aligned} \quad (3.26)$$

que reflete justamente a ação da porta de fase (1.49). Ao se completar a operação (i.e., após um pulso 2π), o campo da cavidade permanece no estado de vácuo e é deixado pronto para novas operações, como vemos em (3.26). O sistema descrito pelo Hamiltoniano (3.20) torna possível a implementação de uma porta de Hadamard e de uma porta de fase simplesmente pela sintonia independente dos níveis atômicos relativamente aos campos do laser e da cavidade. Se $\delta_{aL} = \omega_a = \omega_L = 0$ em (3.20) (após aplicação da aproximação de onda girante), nós terminamos com o Hamiltoniano necessário para a implementação de uma porta de Hadamard. Por outro lado, se $\delta_{ac} = \omega_a - \omega_c = -\nu$, o Hamiltoniano obtido será precisamente aquele necessário para a operação da porta de fase de 2 qubits (3.25). Uma vez que é necessária uma aplicação sequencial de uma porta de Hadamard, uma porta de fase e outra porta de Hadamard novamente para se ter uma porta *controlled-NOT*, precisamos então de uma rápida mudança no Hamiltoniano de interação (3.21) para o Hamiltoniano (3.25) e de volta para o Hamiltoniano (3.21). Isso pode ser realizado pela aplicação de campos elétricos estáticos (via efeito Stark, por exemplo) para

sintonizar os níveis atômicos de energia com os campos do laser e da cavidade.

Uma questão importante que naturalmente surge é o efeito da decoerência na operação da porta. Aqui temos fontes de decoerência provenientes do movimento do íon aprisionado (aquecimento) e também do campo da cavidade. Essas fontes irão afetar a evolução unitária necessária para a realização das operações lógicas quânticas. Nos experimentos realizados até o presente momento usando um íon aprisionado inserido numa cavidade [10, 22], os campos estão no regime óptico e as cavidades ópticas disponíveis atualmente [54] têm um tempo de decaimento $\tau_c \approx 1.0 \mu\text{s}$. No caso do grupo de Innsbruck esse valor chega a $\tau_c \approx 8.0 \mu\text{s}$ [57]. Em nossa proposta, levaria $\tau_{Had} = \pi/4\Omega$ para realizar uma porta de Hadamard e $\tau_{ph} = \pi/\eta_c g$ para realizar uma porta de fase. Utilizando novamente $\eta_c \approx 0.2$ e $\Omega = g \approx 2\pi \times 10^5 \text{MHz}$, estimamos que um tempo mínimo de $\tau_{opt} \approx 5 \mu\text{s}$ é necessário para o procedimento dos três passos no caso óptico, o que está muito próximo do tempo de decaimento da cavidade. Uma tentativa seria o uso de cavidades no regime de microondas onde o tempo de vida do fóton é muito maior, $\tau_c \approx 0.2 \text{s}$ [10]. Entretanto, experimentos similares pelo que conhecemos na literatura não foram ainda realizados no domínio de microondas. Parece então que avanços na tecnologia presente são necessários para a implementação do esquema descrito nesta seção.

Novamente existem muitos outros esquemas de implementação de portas lógicas usando íons aprisionados. A proposta pioneira foi a de Cirac e Zoller [15] que utiliza íons de três níveis interagindo com campo eletromagnético de um laser descrito classicamente. Recentemente, foram divulgadas algumas propostas envolvendo íons e cavidades mas ainda utilizando ou níveis eletrônicos extras ou outros regimes bem diferentes do apresentado aqui [23, 24].

É importante ressaltar em nossa proposta que o qubit auxiliar (campo da cavidade) permaneceu basicamente no estado de vácuo, o que reforça a robustez de nosso esquema contra dissipação na cavidade. O uso de fótons nesse esquema pode vir a ser útil na transmissão de informação a pontos distantes do espaço, mais especificadamente entre cavidades. Outra vantagem em nosso esquema é que o controle é feito de maneira relativamente simples através da aplicação de pulsos sucessivos numa sequência de três passos.

Na próxima seção será discutido o papel da localização relativa do íon aprisionado em interação com o campo eletromagnético quantizado e alguns tempos característicos do sistema são apresentados em conformidade com os padrões de *revival* e colapso na inversão atômica.

3.3 Dinâmica Dependente da Intensidade do Movimento Iônico

Nesta seção, continuamos explorando as consequências de se ter um íon aprisionado em interação com o campo eletromagnético quantizado. É mostrado, que sob certas condições, a natureza quântica do campo é capaz de induzir efeitos dependentes da intensidade na dinâmica do íon aprisionado, algo de certa forma análogo aos modelos dependentes da intensidade presentes na eletrodinâmica quântica em cavidades [25, 26]. Contudo, nesses modelos a dependência da constante de acoplamento com algum tipo de intensidade é introduzida fenomenologicamente, enquanto que no caso apresentado nesta seção, é possível uma dedução dessa dependência por primeiros princípios, ou seja, num formalismo Hamiltoniano.

Consideramos novamente um único íon aprisionado numa armadilha de Paul, inserido no interior de uma cavidade óptica de alta finesse e contendo um único modo do campo eletromagnético quantizado. O movimento vibracional é acoplado ao campo bem como aos graus internos de liberdade de tal modo que o Hamiltoniano do sistema, para $\phi = 0$ na Eq.(2.4), pode ser escrito como

$$\hat{H} = \hbar\nu \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar \frac{\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \cos[\eta_c (\hat{a}^\dagger + \hat{a})]. \quad (3.27)$$

Consideramos o laser desligado ($\Omega = 0$) pois não é necessário a manipulação externa do estado do sistema na obtenção dos resultados apresentados nessa seção. É importante ressaltar que o caso $\phi = 0$ corresponde a configuração em que o centro da armadilha (o mínimo do potencial harmônico) coincide com o antinodo do modo do campo eletromagnético da cavidade, diferentemente do considerado nas seções anteriores ($\phi = -\pi/2$) que corresponde ao centro da armadilha no antinodo do campo da cavidade.

No regime de Lamb-Dicke $\eta_c \ll 1$ (o íon confinado numa região muito menor que o comprimento de onda do campo da cavidade), podemos aproximar

$$\cos[\eta_c (\hat{a}^\dagger + \hat{a})] \approx 1 - \frac{\eta_c^2 (1 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a})}{2} - \frac{\eta_c^2 (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2)}{2}. \quad (3.28)$$

A parte de interação do Hamiltoniano (3.27) passa então a ser escrita como:

$$\hat{H}_i = \hbar g \left[1 - \frac{\eta_c^2(1 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a})}{2} - \frac{\eta_c^2(\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2)}{2} \right] (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{b}^\dagger + \hat{b}). \quad (3.29)$$

Nós podemos escrever o Hamiltoniano acima na representação de interação para então aplicar a aproximação de onda girante. Sintonizando o campo de modo tal que fique em ressonância com a transição atômica, $\omega_a - \omega_c = 0$, podemos eliminar os termos rapidamente oscilantes e obter o seguinte Hamiltoniano de interação:

$$\hat{H}_i^I = \hbar g \left[1 - \frac{\eta_c^2(1 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a})}{2} \right] (\hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger + \hat{\sigma}_+ \hat{b}). \quad (3.30)$$

O Hamiltoniano resultante é semelhante ao Hamiltoniano Jaynes-Cummings (1.27) e descreve a aniquilação de um fóton e a simultânea excitação atômica ($\hat{b}^\dagger$ e $\hat{b}$ são *operadores do campo*), mas tendo uma constante de acoplamento efetiva que depende do número de excitação ($\hat{a}^\dagger \hat{a}$) do oscilador iônico. Mostraremos que isso trará conseqüências interessantes à dinâmica das populações dos níveis internos (eletrônicos) de energia como, por exemplo, os fenômenos do *super revival* e periodicidade. Ressaltamos ainda que retemos termos da ordem de η_c^2 na expansão do cosseno (3.28) que são na verdade muito menores que um. O motivo é que $\eta_c^2 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ não é desprezível para um número de excitação suficientemente grande, e portanto, a estatística do movimento harmônico massivo passa a ter considerável importância na dinâmica atômica, como veremos mais claramente a seguir. Entretanto, é importante ressaltar que o valor de $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ não pode ser arbitrariamente grande, caso contrário, somente poderemos truncar a expansão em série de $\cos[\eta_c (\hat{a}^\dagger + \hat{a})]$ em ordem superior a η_c^2 .

O operador de evolução associado ao Hamiltoniano (3.30) pode ser escrito como

$$\hat{U}(t) = \hat{C}_{m,n+1} |e\rangle\langle e| + \hat{C}_{m,n} |g\rangle\langle g| - i \hat{S}_{m,n+1} \hat{b} |e\rangle\langle g| - i \hat{S}_{m,n+1} \hat{b}^\dagger |g\rangle\langle e|, \quad (3.31)$$

com

$$\hat{C}_{m,n+1} = \cos \left(g \left[1 - \eta_c^2(1 + 2\hat{m})/2 \right] \sqrt{(\hat{n} + 1)} t \right), \quad (3.32)$$

$$\hat{C}_{m,n} = \cos \left(g \left[1 - \eta_c^2(1 + 2\hat{m})/2 \right] \sqrt{\hat{n}} t \right), \quad (3.33)$$

e

$$\hat{S}_{m,n+1} = \frac{\sin \left(g \left[1 - \eta_c^2(1 + 2\hat{m})/2 \right] \sqrt{(\hat{n} + 1)} t \right)}{\sqrt{(\hat{n} + 1)}}, \quad (3.34)$$

no qual usamos a notação $\hat{m} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ e $\hat{n} = \hat{b}^\dagger \hat{b}$. Consideramos agora o seguinte estado (produto) inicial

$$\hat{\rho}(0) = |e\rangle\langle e| \otimes \hat{\rho}_c(0) \otimes \hat{\rho}_v(0), \quad (3.35)$$

ou seja, o nível interno de energia (eletrônico) preparado no estado excitado $|e\rangle\langle e|$, o campo preparado num estado genérico $\hat{\rho}_c(0)$, e o movimento vibracional do movimento do centro de massa do íon preparado também num estado genérico $\hat{\rho}_v(0)$. Sua evolução temporal, governada pelo operador de evolução (3.31) resulta, num tempo t , no seguinte estado conjunto do sistema:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) = & \hat{C}_{m,n+1} \hat{\rho}_c(0) \hat{\rho}_v(0) \hat{C}_{m,n+1} |e\rangle\langle e| + \hat{b}^\dagger \hat{S}_{m,n+1} \hat{\rho}_c(0) \hat{\rho}_v(0) \hat{S}_{m,n+1} \hat{b} |g\rangle\langle g| \\ & + i \hat{C}_{m,n+1} \hat{\rho}_c(0) \hat{\rho}_v(0) \hat{S}_{m,n+1} \hat{b} |e\rangle\langle g| - i \hat{b}^\dagger \hat{S}_{m,n+1} \hat{\rho}_c(0) \hat{\rho}_v(0) \hat{C}_{m,n+1} |g\rangle\langle e|, \end{aligned} \quad (3.36)$$

em que os operadores $\hat{C}$ e $\hat{S}$ são aqueles (3.32), (3.33) e (3.34). O estado resultante em (3.36) é, em geral, um estado emaranhado envolvendo os graus de liberdade internos do íon, o movimento vibracional e o campo da cavidade.

A dinâmica dos níveis internos do íon dependerão das distribuições iniciais da excitação tanto do campo da cavidade quanto do movimento vibracional do centro de massa, dadas por $\langle n | \hat{\rho}_c(0) | n \rangle = \rho_{n,n}^c(0)$ e $\langle m | \hat{\rho}_v(0) | m \rangle = \rho_{m,m}^v(0)$, respectivamente. Por exemplo, a inversão de população atômica será:

$$W(t) = Tr [\hat{\sigma}_z \hat{\rho}(t)] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{n,n}^c(0) \rho_{m,m}^v(0) \cos \left[2g \left(1 - \eta_c^2 (1 + 2m)/2 \right) \sqrt{n+1} t \right]. \quad (3.37)$$

Deve ser ressaltado que para o caso de n fixo, isto é, a cavidade num estado de número $|n\rangle_c$, a inversão $W(t)$ apresenta um comportamento periódico conforme mostrado na Fig. 3.1, é dado por

$$\begin{aligned} W(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{m,m}^v(0) \cos \left[2g \left(1 - \eta_c^2 (1 + 2m)/2 \right) \sqrt{n+1} t \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{m,m}^v(0) \cos [(A + m B)gt] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos [m Bgt] + d_n \sin [m Bgt], \end{aligned} \quad (3.38)$$

com $A = 2(1 - \eta_c^2/2)\sqrt{n+1}$, $B = -2\eta_c^2\sqrt{n+1}$, $c_m = \rho_{m,m}^v(0) \cos A$ e $d_m = \rho_{m,m}^v(0) \sin A$. A Eq. (3.38) é exatamente uma série de Fourier de uma função periódica, Fig. 3.1. Por outro

lado, se o movimento vibracional do íon está num estado de número $|m\rangle_v$, a inversão $W(t)$ é exatamente aquela do modelo Jaynes-Cummings com uma constante de acoplamento dada por $g[-\eta_c^2(1+2m)/2]$

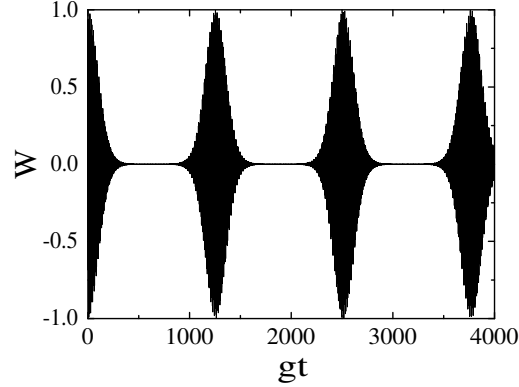


Figura 3.1: Inversão de população W em função da variável adimensional gt para tempos longos. Inicialmente o campo é preparado no estado de número $|0\rangle_c$ (estado de vácuo). O parâmetro de Lamb-Dicke utilizado foi $\eta_c = 0.05$. O movimento do centro de massa está inicialmente preparado no estado coerente $|2\rangle_v$.

Outro caso interessante ocorre quando o campo e o oscilador massivo são preparados nos estados coerentes $|\alpha_c\rangle$ e $|\alpha_v\rangle$, respectivamente. Nesse caso podemos estimar alguns tempos característicos da dinâmica da inversão atômica (3.37) que são os tempos de *revival* e de colapso. Os tempos são obtidos reconhecendo que as somas em (3.37) podem ser agrupadas de duas maneiras:

$$W(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{m,m}^v(0) \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{n,n}^c(0) \cos(2\Omega_{m,n}t) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{n,n}^c(0) \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{m,m}^v(0) \cos(2\Omega_{m,n}t), \quad (3.39)$$

em que

$$\Omega_{m,n} = g \left(1 - \eta_c^2(1+2m)/2 \right) \sqrt{n+1}. \quad (3.40)$$

Com isso é possível estimar dois tempos de *revival* que marcam o instante em que os termos vizinhos em (3.39) diferem por um múltiplo inteiro de 2π , ou seja,

$$2(\Omega_{\bar{m},\bar{n}} - \Omega_{\bar{m},\bar{n}-1})t_r^1 = 2k\pi, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.41)$$

e também

$$2(\Omega_{\bar{m},\bar{n}} - \Omega_{\bar{m}-1,\bar{n}})t_r^2 = 2k\pi, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.42)$$

No limite de grandes números médios $(\sqrt{\bar{n}+1} - \sqrt{\bar{n}}) \approx 1/(2\sqrt{\bar{n}})$ e para distribuições com um

único máximo, que é o caso do estado coerente, temos

$$gt_r^1 = \frac{2k\pi\sqrt{\bar{n}}}{\left[1 - \frac{\eta_c^2(1+2\bar{m})}{2}\right]}, \quad (3.43)$$

e

$$gt_r^2 = \frac{k\pi}{\eta_c^2\sqrt{\bar{n}+1}}. \quad (3.44)$$

Podemos obter uma estimativa dos tempos de colapso de forma análoga,

$$(\Omega_{\bar{m},\bar{n}+\sqrt{\bar{n}}} - \Omega_{\bar{m},\bar{n}-\sqrt{\bar{n}}})t_c^1 \approx 1 \quad (3.45)$$

e também

$$(\Omega_{\bar{m}+\sqrt{\bar{m}},\bar{n}} - \Omega_{\bar{m}-\sqrt{\bar{m}},\bar{n}})t_c^2 \approx 1. \quad (3.46)$$

Esses tempos são dados explicitamente por

$$gt_c^1 \sim \frac{1}{\left(1 - \frac{\eta_c^2(1+2\bar{m})}{2}\right)}, \quad (3.47)$$

e

$$gt_c^2 \sim \frac{1}{\eta_c^2\sqrt{\bar{m}(\bar{n}+1)}}. \quad (3.48)$$

No caso em que o estado inicial do campo e do oscilador são estados coerentes, a somatória em m na expressão (3.37) pode ser efetuada e o resultado é dado por

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{n,n}^c(0) w_n(t), \quad (3.49)$$

na qual

$$\begin{aligned} w_n(t) &= \exp \left\{ -\bar{m} \left[1 - \cos \left(2\eta_c^2 \sqrt{n+1} gt \right) \right] \right\} \\ &\times \cos \left[2 \left(1 - \frac{\eta_c^2}{2} \right) \sqrt{n+1} gt - \bar{m} \sin \left(2\eta_c^2 \sqrt{n+1} gt \right) \right] \end{aligned} \quad (3.50)$$

e $\bar{m}$ é o número médio de excitação do movimento vibracional num estado coerente.

No que segue, é apresentado o comportamento de $W(t)$ para diferentes preparações do es-

tado inicial do sistema. Em todos os casos apresentados o campo e o estado vibracional do íon foram inicialmente preparados no estado coerente $|\alpha_c\rangle$ e $|\alpha_v\rangle$, respectivamente, e o estado eletrônico do átomo no estado excitado $|e\rangle$. Todos os comportamentos apresentados a seguir podem ser compreendidos como uma competição entre as diferentes frequências envolvidas o que se traduz nos tempos característicos apresentados anteriormente. São as ordens de magnitude desses tempos que vão determinar o padrão ou a forma da curva $W(t)$. Na Fig. 3.2, o comportamento a tempos curtos apresenta o fenômeno de colapso e *revival* e um amortecimento das oscilações de Rabi que é bastante sensível ao valor do parâmetro de Lamb-Dicke η_c , de modo que quanto maior seu valor, maior o amortecimento. Esse amortecimento depende

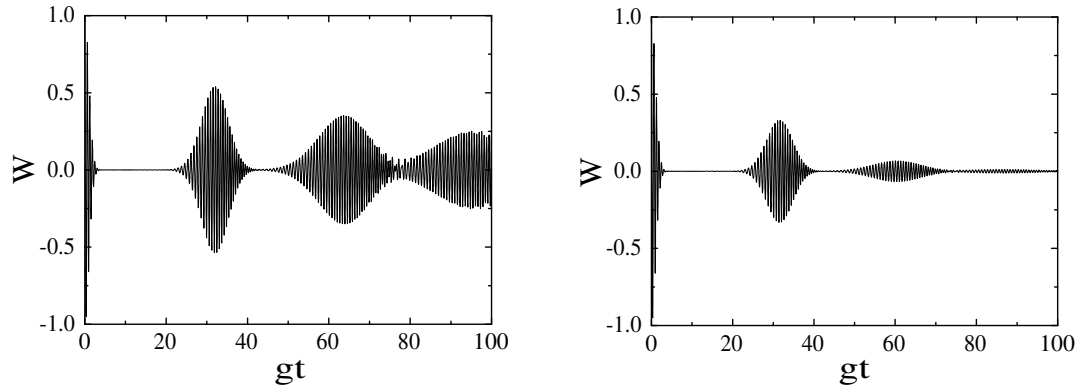


Figura 3.2: Inversão de população W em função da variável adimensional gt . Inicialmente foi tomado $\alpha_c = 5$ e $\alpha_v = 2$. O parâmetro de Lamb-Dicke utilizado foi $\eta_c = 0.02$ em (a) e $\eta_c = 0.04$ em (b).

de η_c é compreendido analisando o tempo de colapso gt_c^2 na Eq.(3.48) que depende do inverso do quadrado do parâmetro de Lamb-Dicke, mostrando que quanto maior o valor desse parâmetro mais rápido as oscilações são atenuadas. A presença desse colapso a tempos longos levanta a hipótese da existência de um *revival* dessas oscilações. De fato, para a mesma preparação inicial dos gráficos apresentados na Fig. 3.2 temos a tempos longos o aparecimento do fenômeno do *super revival*, Fig. 3.3. O tempo de *super revival* é dado pela Eq.(3.44) e diminui com o aumento de η_c .

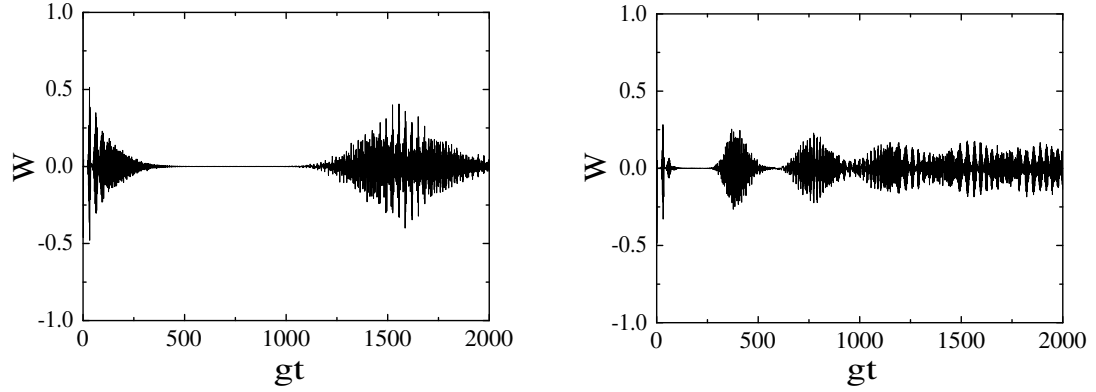


Figura 3.3: Inversão de população W em função da variável adimensional gt para tempos longos. Inicialmente fixamos $\alpha_c = 5$ e $\alpha_v = 2$. O parâmetro de Lamb-Dicke usado foi $\eta_c = 0.02$ em (a) e $\eta_c = 0.04$ em (b).

Diferentes magnitudes dos estados coerentes iniciais gerarão diferentes padrões de *revivals*. No caso em que o número médio de fónons se iguala ao número médio de fótons Fig. 3.4, a inversão de população apresenta uma série de batimentos devido ao interferências das frequências de *revival* dadas pelas Eqs.(3.43) e (3.44).

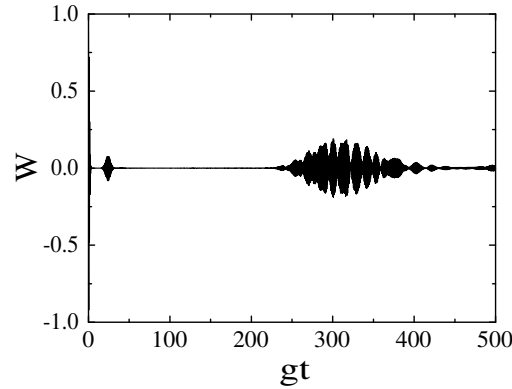


Figura 3.4: Inversão de população atômica W em função da variável adimensional gt . Inicialmente foi tomado $\alpha_c = 4$ e $\alpha_v = 4$. O parâmetro de Lamb-Dicke usado foi $\eta_c = 0.05$.

Desses resultados, fica claro que, na expansão (3.28), quando o centro da armadilha é posicionado no antinodo ($\phi = 0$) do campo da cavidade, a inclusão de termos em η_c^2 é necessária para a correta descrição da dinâmica do sistema na condição íon-campo em ressonância. Esses termos de segunda ordem juntamente com as estatísticas do campo e do movimento vibracional são responsáveis pelos diferentes padrões de *revival* e colapso que dão origem a periodicidades

(Fig. 3.1) e a *super revivals* (Fig. 3.3). Contudo, se o parâmetro de Lamb-Dicke η_c e o número médio de excitação $\bar{m}$ forem muito grandes, tal que o produto $\eta_c^4 \bar{m}^2$ se torna da ordem de $\eta_c^2 \bar{m}$ ou maior, a expansão (3.28) deverá obrigatoriamente conter termos de ordem superior a η_c^2 para a correta descrição da evolução temporal do sistema.

Por fim deve ser ressaltado que os mecanismos de decoerência atuam negativamente na observação desses fenômenos e sabemos que, em geral, eles causam um amortecimento nas oscilações que serão mais ou menos acentuados dependendo da qualidade da cavidade e do controle dos outros canais de decoerência iônicos. Apesar disso, alguns fenômenos descritos nessa seção ocorrem em tempos curtos e sua obtenção experimental parece ser possível com os recursos experimentais atuais.

Conclusões

Apresentamos nesta dissertação os principais resultados obtidos em nossos estudos sobre a interação de íons aprisionados com campos clássicos e quantizados. Mostramos que é possível gerar toda a base de Bell com uma preparação apropriada do estado inicial do sistema seguida por uma medida de fluorescência que projete o estado do sistema num estado emaranhado envolvendo o movimento vibracional do íon aprisionado e o campo da cavidade [3]. Essa preparação inicial consiste basicamente em resfriar o íon a seu estado fundamental ou no primeiro estado excitado, preparar uma superposição atômica dos níveis eletrônicos de energia (algo feito com pulsos de laser externo) e por fim, a preparação de uma cavidade no estado de vácuo. Foi também mostrado como os ajustes de dessintonia geram vários Hamiltonianos de interação, em particular, destacamos o caso em que o Hamiltoniano envolve um acoplamento dependente da intensidade do movimento do íon.

O uso de um laser externo na manipulação do sistema íon-cavidade permitiu a implementação da porta *controlled-NOT* [4] nesse sistema. O controle via laser externo foi fundamental na operação do sistema físico em tempos específicos para a evolução temporal necessária à geração da porta. Nossa proposta utiliza a decomposição da *controlled-NOT* numa aplicação sequencial de portas de Hadamard e de fase, portas essas obtidas pelo ajuste das dessintonias íon-campo num duplo regime de Lamb-Dicke no qual o íon se move numa região do espaço muito menor que o comprimento de onda do campo da cavidade e do laser externo. A mudança de dessintonia para a implementação das portas pode ser obtida, por exemplo, pela aplicação de campos elétricos estáticos (efeito Stark).

Uma importante característica que diferencia nosso tratamento de uma CNOT dos demais envolvendo íons aprisionados é que o qubit auxiliar (normalmente um terceiro nível) utilizado em nosso esquema é o próprio estado do campo quantizado. Esse fato pode, em futuros esquemas, propiciar a construção de redes quânticas de informação, onde o fóton da cavidade pode ser utilizado no envio de informação de um lugar a outro do espaço, ou mais precisamente, entre

duas cavidades, por exemplo, via guias de onda.

Também exploramos a influência da quantização do campo eletromagnético na interação com um íon aprisionado. Um resultado interessante ocorre no caso ressonante com a inclusão de termos de segunda ordem em η_c combinado com o posicionamento do centro da armadilha de maneira conveniente, isto é, no nodo do campo da cavidade. Nessa situação, foi possível a obtenção de um Hamiltoniano dependente da intensidade do movimento vibracional, ou seja, do número médio de fónons $\hat{a}^\dagger \hat{a}$. Em virtude da inclusão de termos de segunda ordem η_c , obtivemos uma grande variedade de comportamentos fortemente dependentes do valor η_c e da preparação do estado inicial do sistema. Esses comportamentos diversos podem ser entendidos como uma competição de dois tipos de *revivals* e colapsos. Em particular, analisamos a sensibilidade dos padrões de revivals para diferentes estados iniciais e para diferentes valores de η_c . Quando o estado inicial do campo é um estado de número verificamos que a dinâmica se torna periódica, guardando muita semelhança aos resultados obtidos no modelo Jaynes-Cummings dependente da intensidade [25], tendo porém, a vantagem de que em nosso tratamento, ao contrário de [25], o Hamiltoniano é *deduzido por primeiros princípios e não introduzido fenomenologicamente*.

Esse estudo inicial nos permitiu entender melhor a interação da radiação com a matéria e alguns resultados interessantes foram obtidos. Contudo, ainda muitas perguntas estão em aberto e alguns problemas interessantes que são a continuação natural desse trabalho merecem ser estudados. Um deles é o encadeamento de várias cavidades contendo íons aprisionados construindo assim a rede quântica de informação já citada. Com essa rede, seria interessante buscar a implementação de protocolos de criptografia e também a implementação do problema fundamental de teleportação de estados. Ainda no campo da informação quântica, seria interessante buscar nesse sistema estados robustos à perda de coerência, os chamados estados ponteiro [60] e construir a partir deles, uma base para a manipulação de informação, em especial, tentar utilizá-los como qubits num registrador.

O maior problema na implementação experimental desse sistema parece ser as cavidades. Os progressos no acoplamento do íon com o campo quantizado têm sido realizados no âmbito das cavidades ópticas. Essas cavidades possuem atualmente um tempo de decaimento do fóton em torno de $1\mu s$, o que é ainda pouco para o processamento de informação quântica de alta fidelidade. Contudo, esses progressos já indicam a possibilidade de manipulação coerente desse sistema e alguns dos resultados apresentados nessa dissertação parecem factíveis com as possibilidades experimentais atuais.

Apêndice A

O Hamiltoniano da Interação Íon-Laser

A interação de um íon aprisionado com um laser é um problema complicado mas que em geral pode ser modelado simplificadaamente como a interação de um sistema de dois níveis com um oscilador harmônico simples. Os dois níveis correspondem a dois estados eletrônicos do íon que é forçado a se mover numa região restrita do espaço por meio do uso de uma armadilha eletromagnética como, por exemplo, uma armadilha de Paul explicada na seção 1.2. Uma vez que o íon pode ter sua energia cinética reduzida até valores muito baixos, o seu movimento neste caso deve ser tratado como o de um oscilador harmônico quântico. O acoplamento dos níveis eletrônicos com os graus de liberdade vibracionais é realizado com a aplicação de uma laser. Tal acoplamento é possível pelo fato de que a absorção e emissão de fótons são acompanhadas por um recuo do íon. Neste apêndice, apresentamos a dedução do Hamiltoniano desse sistema e também o tratamento do caso em que o laser é substituído pelo campo eletromagnético quantizado contido em uma cavidade óptica de alta finesse.

A Hamiltoniana clássica livre para um íon de massa m preso num potencial harmônico unidimensional é dada por

$$H_{vib} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\nu^2 x^2}{2} \quad (\text{A.1})$$

na qual ν é a frequência angular do movimento vibracional, x é o deslocamento do íon com relação a posição de equilíbrio (tomada como sendo a origem) e p corresponde ao momento conjugado a coordenada x . O movimento do íon pode ser quantizado introduzindo os operadores $\hat{x}$ e $\hat{p}$ com a relação de comutação canônica $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. É conveniente escrever estes operadores como combinações lineares de outros dois operadores $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$ que podem ser interpretados como operadores de criação e aniquilação de excitações no oscilador harmônico quântico [18]. Essas

combinações lineares são dadas por

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad (\text{A.2})$$

$$\hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar m\nu}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (\text{A.3})$$

Com o uso da relação de comutação entre $\hat{x}$ e $\hat{p}$ pode-se mostrar que esses novos operadores satisfazem $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. O Hamiltoniano livre do oscilador pode então ser escrito como

$$\hat{H}_{vib} = \hbar\nu(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2) \quad (\text{A.4})$$

cujos autoestados são os chamados estados de número (Fock) $|n\rangle$ que correspondem aos estados com energia $\hbar\nu(n + 1/2)$ e número de excitação n bem definidos. Os estados $|n\rangle$ formam uma base e portanto qualquer estado do oscilador pode se escrito como uma combinação linear desses autoestados de $\hat{H}_{vib}$. Um caso importante é o chamado estado coerente $|\alpha\rangle$ definido como o autoestado do operador de aniquilação $\hat{a}$ com autovalor α , ou seja, $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, [18]. Esse estado é expandido na base de Fock $|n\rangle$ como

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (\text{A.5})$$

Acabamos de tratar o grau de liberdade vibracional do íon que, como sabemos, possui também uma estrutura interna eletrônica e isso se apresenta como um novo grau de liberdade. Vamos considerar que o íon tem apenas dois níveis internos denotados por $|g\rangle$ e $|e\rangle$ com energias correspondentes a E_g e E_e respectivamente, sendo por definição $E_g < E_e$ que leva a uma frequência de transição eletrônica (atômica) $\omega_a = (E_e - E_g)/\hbar$. O Hamiltoniano livre associado com os graus de liberdade internos é então dado por

$$\hat{H}_{int} = E_e|e\rangle\langle e| + E_g|g\rangle\langle g| = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{E_e + E_g}{2}\hat{I} \quad (\text{A.6})$$

no qual $\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ e $\hat{I} = |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|$. Conhecidos os Hamiltonianos dos dois subsistemas, podemos finalmente escrever o Hamiltoniano livre total do sistema composto

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_{int} + \hat{H}_{vib} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\nu\hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (\text{A.7})$$

no qual descartamos os termos constantes pois eles representam apenas uma fase global na

evolução temporal.

Consideraremos agora a aplicação de um laser externo que aproximaremos como uma onda propagante monocromática seguindo os passos da referência [47]. Neste caso, o campo elétrico do laser é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\hat{\mathbf{q}}, t) &= \hat{\mathbf{e}} E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{q}} - \omega_L t + \theta) \\ &= \frac{\hat{\mathbf{e}} E_0}{2} [e^{i(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{q}} - \omega_L t + \theta)} + e^{-i(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{q}} - \omega_L t + \theta)}], \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

em que E_0 é a amplitude real do campo elétrico, $\hat{\mathbf{e}}$ é um vetor unitário de polarização, ω_L é a frequência do laser, $\mathbf{k}$ é o vetor de onda com $k = \omega_L/c$, c é a velocidade da luz, $\hat{\mathbf{q}}$ é o operador de posição do centro de massa do íon e θ é um fator de fase.

O Hamiltoniano de interação assumindo um átomo com uma configuração eletrônica tipo hidrogênio, ou seja, com um único elétron na camada de valência, pode ser expandido em primeira ordem resultando no Hamiltoniano de interação na aproximação de dipolo dado por

$$\hat{H}_1 = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{q}}, t), \quad (\text{A.9})$$

no qual $\hat{\boldsymbol{\mu}} = e\mathbf{r}_{el}$ é o operador de momento de dipolo elétrico do átomo e $\mathbf{r}_{el}$ é o operador da posição relativa entre o elétron e o núcleo do íon. No intuito de simplificar a visualização do problema, tomaremos agora o caso unidimensional no qual o íon se move na direção x e o laser também está alinhado nesta direção. Neste caso, podemos escrever $\hat{\mathbf{q}} = (\hat{x}, 0, 0)$ com $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ e, usando a relação de fechamento $\hat{I} = |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|$, teremos

$$\hat{H}_1 = \hbar\Omega(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)\{e^{i[\eta_L(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) - \omega_L t + \theta]} + e^{-i[\eta_L(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) - \omega_L t + \theta]}\}, \quad (\text{A.10})$$

em que $\eta_L = 2\pi a_0/\lambda_L$ é o chamado parâmetro de Lamb-Dicke sendo $a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}}$ que equivale a largura do poço harmônico e $\Omega = -|\langle e|\hat{\boldsymbol{\mu}}|g\rangle|E_0/2\hbar$ é a frequência de Rabi que fornece a magnitude do acoplamento na interação entre o íon e o laser. O Hamiltoniano (A.10) pode ser simplificado através de uma aproximação de onda girante em que descartamos termos oscilantes com frequência $\omega_L + \omega_a$ (comparados a termos com frequência $\omega_L - \omega_a$) e o resultado é o Hamiltoniano de interação

$$\hat{H}_1 = \hbar\Omega(\hat{\sigma}_+ e^{i[\eta_L(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) - \omega_L t + \theta]} + \hat{\sigma}_- e^{-i[\eta_L(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) - \omega_L t + \theta]}). \quad (\text{A.11})$$

Quando o íon é inserido numa cavidade óptica de alta finesse contendo um modo do campo

eletromagnético, é necessário considerar o efeito do íon nas propriedades físicas do campo cuja dinâmica dependerá do acoplamento entre esses dois subsistemas. Assim, para a correta descrição desse sistema, o campo deve ser tratado quanticamente e isso é realizado identificando as variáveis canonicamente conjugadas e impondo a relação de comutação apropriada [34, 35]. Nesse formalismo, o operador campo elétrico é dado por

$$\hat{\mathbf{E}}(x) = \hat{\epsilon} \mathcal{E}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \cos(kx + \phi) \quad (\text{A.12})$$

em que $\hat{\epsilon}$ é um vetor unitário de polarização, $\mathcal{E} = (\hbar \omega_c / 2\epsilon_0 V)$ sendo ω_c a frequência do modo do campo, ϵ_0 a permissividade elétrica do vácuo, V o volume de quantização e $\hat{b}$ ($\hat{b}^\dagger$) são operadores bosônicos do campo eletromagnético que satisfazem a relação de comutação

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1. \quad (\text{A.13})$$

É também necessário acrescentar no Hamiltoniano não-perturbado do sistema (A.7) o termo referente a energia do campo livre

$$\hat{H}_c = \hbar \omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b}. \quad (\text{A.14})$$

A interação é ainda dada pela Eq.(A.9), porém no lugar do campo clássico $\mathbf{E}(\hat{x}, t)$ é necessário usar o operador observável (A.12). Neste caso,

$$\hat{H}'_1 = \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \cos[\eta_c (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \phi], \quad (\text{A.15})$$

no qual $g = -|\langle e | \hat{\boldsymbol{\mu}} \mathcal{E} | g \rangle| / \hbar$ e η_c é o parâmetro de Lamb-Dicke relativo ao campo da cavidade.

Apêndice B

Cálculo de Operadores de Evolução Temporal

Ao longo desta dissertação foram utilizados vários Hamiltonianos distintos e, conseqüentemente, foi necessária a realização do cálculo de muitos operadores de evolução temporal. Com esse operador calculado, é possível descrever a dinâmica do sistema para qualquer preparação de seu estado inicial. Esse é o caso da computação quântica em que se prepara um registrador contendo n -qubits e é necessário determinar seu estado de saída, uma vez conhecido o tipo de interação física ou, equivalentemente, o tipo de porta lógica que atua neste registrador.

B.1 Representação de Interação

Uma abordagem útil quando estamos interessados na evolução temporal de um sistema quântico consiste em fixar toda a dependência temporal do vetor de estado (ou operador densidade) na energia de interação. Isso é realizado através de uma transformação unitária do vetor de estado na equação de Schrödinger e essa descrição no novo espaço transformado recebe o nome de representação de interação. Consideremos a equação de Schrödinger

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi(t)\rangle \quad (\text{B.1})$$

na qual H é o Hamiltoniano total do sistema que consiste de um termo H_0 não perturbado (livre) mais um termo de interação H_1 . No modelo Jaynes-Cummings apresentado na seção 1.1

temos

$$\hat{H}_0 = \hbar \omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{\hbar \omega_0}{2} \hat{\sigma}_z \quad (\text{B.2})$$

e

$$\hat{H}_1 = \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{b} + \hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger). \quad (\text{B.3})$$

Uma vez que a Eq.(B.1) é linear e homogênea, segue que a evolução temporal de um estado inicial $|\psi(0)\rangle$ até o estado $|\psi(t)\rangle$ deve ser realizada por meio de um operador unitario $\hat{U}(t)$ chamado operador de evolução temporal

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle \quad \hat{U}(0) = I \quad (\text{B.4})$$

em que I é o operador identidade. Substituindo (B.4) em (B.1) obtemos a seguinte equação de movimento para o operador $\hat{U}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t) = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \hat{U} \quad (\text{B.5})$$

Na representação de interação definimos o vetor de estado $|\psi_I(t)\rangle$ por

$$|\psi_I(t)\rangle \equiv \hat{U}_0^\dagger(t) |\psi(t)\rangle \quad (\text{B.6})$$

na qual

$$\hat{U}_0(t) \equiv \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t \right). \quad (\text{B.7})$$

Com essa definição segue que

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_0^\dagger(t) |\psi(t)\rangle + \hat{U}_0^\dagger(t) \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle, \quad (\text{B.8})$$

e assim, com o uso das Eqs.(B.1),(B.6) e (B.7) obtemos finalmente a equação que descreve a evolução temporal do vetor de estado nessa representação que é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{V}}(t) |\psi_I(t)\rangle, \quad (\text{B.9})$$

na qual

$$\hat{\mathcal{V}}(t) = \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{H}_1 \hat{U}_0(t), \quad (\text{B.10})$$

é o operador Hamiltoniano na representação de interação. De fato, qualquer operador $\hat{O}$ na representação de Schrödinger irá se transformar conforme

$$\hat{O}(t) = \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{O} \hat{U}_0(t). \quad (\text{B.11})$$

Isso pode ser visto através do cálculo do valor médio do operador $\hat{O}$ no estado $|\psi(t)\rangle$ que deve, é claro, permanecer invariante numa mudança de representação. A solução formal da Eq.(B.9) é dada por

$$|\psi_I(t)\rangle \equiv \hat{U}_1(t) |\psi_I(0)\rangle, \quad (\text{B.12})$$

na qual

$$\hat{U}_1(t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt_1 \hat{\mathcal{V}}(t_1) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \hat{\mathcal{V}}(t_1) \hat{\mathcal{V}}(t_2) + \dots \quad (\text{B.13})$$

Em muitos casos interessantes, $\hat{\mathcal{V}}$ independe do tempo t e então a Eq.(B.13) gera simplesmente a expansão em série da função exponencial

$$\begin{aligned} \hat{U}_1(t) &= 1 + \frac{(-i\hat{\mathcal{V}}t/\hbar)}{1} + \frac{(-i\hat{\mathcal{V}}t/\hbar)^2}{2 \cdot 1} + \frac{(-i\hat{\mathcal{V}}t/\hbar)^3}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \dots \\ &= \sum_0^\infty \frac{(-i\hat{\mathcal{V}}t/\hbar)^n}{n!} \\ &= \exp\left(-\frac{i\hat{\mathcal{V}}t}{\hbar}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Neste caso, devemos saber aplicar essa exponencial num estado inicial genérico e para isso é conveniente calcular explicitamente esse operador numa base conveniente para o problema. Na próxima seção é apresentado um método de cálculo da exponencial (B.14) na base do átomo de dois níveis que pode ser aplicado para uma série de Hamiltonianos de interação, incluindo os utilizados nessa dissertação.

B.2 Expansão na Base do Átomo de Dois níveis

Nesta seção é calculado o operador de evolução temporal para Hamiltonianos de interação do tipo

$$\hat{\mathcal{V}} = \hbar \lambda (\hat{\sigma}_+ \hat{A} + \hat{\sigma}_- \hat{B}) \quad (\text{B.15})$$

no qual $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são operadores genéricos de outro subsistema como, por exemplo, operadores do campo eletromagnético ou do movimento do centro de massa de um íon aprisionado num potencial harmônico. Na base de dois níveis $|e\rangle, |g\rangle$ com representação matricial

$$|e\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |g\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.16})$$

podemos escrever o Hamiltoniano (B.15) na forma

$$\hat{\mathcal{V}} = \hbar \lambda \begin{pmatrix} 0 & \hat{A} \\ \hat{B} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.17})$$

Para obtermos a exponencial (B.14) é necessário calcular as potências do Hamiltoniano (B.17) mantendo o cuidado de não trocar a ordem de aparência de $\hat{A}$ e $\hat{B}$ pois em princípio eles não precisam comutar. Calculando as primeiras quatro potências de $\hat{\mathcal{V}}$ teremos

$$\hat{\mathcal{V}}^2 = (\hbar \lambda)^2 \begin{pmatrix} \hat{A}\hat{B} & 0 \\ 0 & \hat{B}\hat{A} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.18})$$

$$\hat{\mathcal{V}}^3 = (\hbar \lambda)^3 \begin{pmatrix} 0 & (\hat{A}\hat{B})\hat{A} \\ \hat{B}(\hat{A}\hat{B}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.19})$$

$$\hat{\mathcal{V}}^4 = (\hbar \lambda)^4 \begin{pmatrix} (\hat{A}\hat{B})^2 & 0 \\ 0 & (\hat{B}\hat{A})^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.20})$$

$$\hat{\mathcal{V}}^5 = (\hbar \lambda)^5 \begin{pmatrix} 0 & (\hat{A}\hat{B})^2\hat{A} \\ \hat{B}(\hat{A}\hat{B})^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.21})$$

podemos perceber que as demais potências começarão a repetir o mesmo padrão. O operador de evolução temporal (B.14) para esse Hamiltoniano pode ser então calculado componente a componente, ou seja

$$\hat{U}_1(t) = \begin{pmatrix} \hat{U}_{11} & \hat{U}_{12} \\ \hat{U}_{21} & \hat{U}_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.22})$$

no qual

$$\begin{aligned} U_{11} &= 1 - \frac{(\hat{A}\hat{B})(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\hat{A}\hat{B})^2(\lambda t)^4}{4!} - \dots \\ &= \cos(\lambda t \sqrt{\hat{A}\hat{B}}). \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned}
 \hat{U}_{12} &= -\hat{A}\lambda t + i\frac{(\hat{A}\hat{B})\hat{A}(\lambda t)^3}{3!} - i\frac{(\hat{A}\hat{B})^2\hat{A}(\lambda t)^5}{5!} + \dots \\
 &= -i\left[\lambda t - \frac{(\hat{A}\hat{B})(\lambda t)^3}{3!} + \frac{(\hat{A}\hat{B})^2(\lambda t)^5}{5!}\right]\hat{A} \\
 &= -i\frac{\sin(\lambda t\sqrt{\hat{A}\hat{B}})}{\sqrt{\hat{A}\hat{B}}}\hat{A}.
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

Semelhantemente, os demais componentes podem ser calculados resultando em

$$\hat{U}_{21} = -i\hat{B}\frac{\sin(\lambda t\sqrt{\hat{A}\hat{B}})}{\sqrt{\hat{A}\hat{B}}}, \tag{B.25}$$

$$\hat{U}_{22} = \cos(\lambda t\sqrt{\hat{B}\hat{A}}). \tag{B.26}$$

Finalmente obtemos a forma geral

$$\hat{U}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda t\sqrt{\hat{A}\hat{B}}) & -i\frac{\sin(\lambda t\sqrt{\hat{A}\hat{B}})}{\sqrt{\hat{A}\hat{B}}}\hat{A} \\ -i\hat{B}\frac{\sin(\lambda t\sqrt{\hat{A}\hat{B}})}{\sqrt{\hat{A}\hat{B}}} & \cos(\lambda t\sqrt{\hat{B}\hat{A}}) \end{pmatrix}. \tag{B.27}$$

Como um exemplo de aplicação do resultado acima, consideremos $\lambda = g$, $\hat{A} = \hat{b}$ e $\hat{B} = \hat{b}^\dagger$ que corresponde ao Hamiltoniano Jaynes-Cummings (B.3). Neste caso,

$$\hat{U}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda t\sqrt{\hat{b}\hat{b}^\dagger}) & -i\frac{\sin(\lambda t\sqrt{\hat{b}\hat{b}^\dagger})}{\sqrt{\hat{b}\hat{b}^\dagger}}\hat{b} \\ -i\hat{b}^\dagger\frac{\sin(\lambda t\sqrt{\hat{b}\hat{b}^\dagger})}{\sqrt{\hat{b}\hat{b}^\dagger}} & \cos(\lambda t\sqrt{\hat{b}^\dagger\hat{b}}) \end{pmatrix}. \tag{B.28}$$

Usando os projetores desse espaço de dois níveis podemos reescrever o operador de evolução (B.28) na forma

$$\begin{aligned}
 \hat{U}_1(t) &= \cos(\lambda t\sqrt{\hat{b}\hat{b}^\dagger})|e\rangle\langle e| + \cos(\lambda t\sqrt{\hat{b}^\dagger\hat{b}})|g\rangle\langle g| \\
 &\quad -i\frac{\sin(\lambda t\sqrt{\hat{b}\hat{b}^\dagger})}{\sqrt{\hat{b}\hat{b}^\dagger}}\hat{b}|e\rangle\langle g| - i\hat{b}^\dagger\frac{\sin(\lambda t\sqrt{\hat{b}\hat{b}^\dagger})}{\sqrt{\hat{b}\hat{b}^\dagger}}|g\rangle\langle e|
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

Referências

- [1] V. Bužek, G. Drobný, M. S. Kim, G. Adam e P. L. Knight. *Cavity QED with cold trapped ions*. Phys. Rev. A **56**, 2352 (1998).
- [2] J. I. Cirac e P. Zoller. *A scalable quantum computer with ions in an array of microtraps*. Nature **404**, 579 (2000).
- [3] F. L. Semião, A. Vidiella-Barranco e J. A. Roversi. *Entanglement between motional states of a single trapped ion and light*. Phys. Rev. A **64**, 024305 (2001).
- [4] F. L. Semião, A. Vidiella-Barranco e J. A. Roversi. *A proposal of quantum logic gates using cold trapped ions in a cavity*. Phys. Lett. A **299**, 423 (2002).
- [5] N. A. Gerschenfeld e I. L. Chuang. *Bulk spin-resonance quantum computation*. Science **275**, 350 (1997).
- [6] D. DeMille. *Quantum computation with trapped polar molecules*. Phys. Rev. Lett. **88**, 067901-1 (2002).
- [7] L. Davidovich, A. Maali, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche. *Quantum switches and nonlocal microwave fields*. Phys. Rev. Lett. **71**, 2360 (1993).
- [8] L. Davidovich, N. Zagury, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche. *Teleportation of an atomic state between two cavities using nonlocal microwave fields*. Phys. Rev. A **50**, R895 (1994).
- [9] J. M. Raimond, M. Brune e S. Haroche, *Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity*. Rev. Mod. Phys. **73**, 565 (2001).
- [10] G.R. Guthöhrlein, M. Keller, K. Hayasaka, W. Lange e H. Walther. *A single ion as a probe of an optical field*. Nature **414** 49 (2001).

- [11] D. M. Meekhof, C. Monroe, B.E. King, W. M. Itano e D. J. Wineland. *Generation of nonclassical motional states of a trapped atom*. Phys. Rev. Lett. **76**, 1796 (1996).
- [12] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King e D. M. Wineland. “A Schrödinger cat” superposition state of an atom. Science **272**, 1131 (1996).
- [13] D. Leibfried, M. D. Meekhof, B. E. King, C. Monroe, W. M. Itano e D. J. Wineland. *Experimental determination of the motional quantum state of a trapped atom*. Phys. Rev. Lett. **77**, 4281 (1996).
- [14] D. Leibfried, D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano e D. J. Wineland. *Experimental preparation and measurement of quantum states of motion of a trapped atom*. J. Mod. Opt **44**, 2485 (1997).
- [15] J. I. Cirac e P. Zoller. *Quantum computation with cold trapped ions*. Phys. Rev. Lett. **74**, 4091 (1995).
- [16] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano e D. J. Wineland. *Demonstration of a fundamental quantum logic gate* Phys. Rev. Lett. **75**, 4714 (1995).
- [17] J. F. Poyatos, J. I. Cirac e P. Zoller, *Quantum gates with “hot” trapped ions*. Phys. Rev. Lett. **81**, 1322 (1998).
- [18] Marlan O. Scully e M. Suhail Zubairy. *Quantum optics*. Cambrigde University Press (1999).
- [19] H. Zeng e F. Lin. *Quantum conversion between the cavity fields and the center-of-mass motion of ions in a quantized trap*. Phys. Rev. A **50**, R3589 (1994).
- [20] A. S. Parkins e H. J. Kimble. *Quantum state transfer between motion and light*. J. Opt. B: Quantum Semicalss Opt. **1**, 494 (1999).
- [21] A. S. Parkins e E. Larsabal. *Preparation and light-mediated distribution of motional state entanglement*. Phys. Rev. A **63**, 012304 (2000).
- [22] A. B. Mundt, A. Kreuter, C. Becher, D. Leibfried, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler e R. Blatt. *Coupling a single atomic quantum bit to a high finesse optical cavity*, quant-ph/0202112.
- [23] J. Pachos e H. Walther. *Quantum computation with optical cavities and decaying trapped ions*. quant-ph/0111088.

-
- [24] E. Jané, M. B. Plenio e D. Jonathan. *Quantum information processing in strongly detuned optical cavities* quant-ph/0111147.
- [25] Dagoberto S. Freitas, A. Vidiella-Barranco e J.A. Roversi. *Field purification in the intensity-dependent Jaynes-Cummings model*. Phys. Lett. A **249**, 275 (1998).
- [26] B. Buck e C. V. Sukumar. *Exactly Soluble model of atom-phonon coupling showing periodic decay and revival*. Phys. Lett. A **81**, 132 (1981).
- [27] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Josza, Asher Peres e William K. Wootters. *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*. Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [28] J. S. Bell. *On the problem of hidden variables in quantum mechanics*. Rev. Mod Phys. **38**, 447 (1966).
- [29] Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang. “Quantum Computation and Quantum Information”. Cambridge University Press (2000).
- [30] J. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble e H. Mabuchi. *Quantum State Transfer and Entanglement Distribution among Distant Nodes in a Quantum Network*. Phys. Rev. Lett. **78**, 3221 (1997).
- [31] Gerhard Rempe. *Atoms in an optical cavity: quantum electrodynamics in confined space*. Contemporary Physics **34**, 119 (1993).
- [32] S. J. van Enk, J. McKeever, H. J. Kimble e J. Ye. *Cooling of a single atom in an optical trap inside a resonator*. Phys. Rev. A **64**, 013407 (2001).
- [33] P. A. M. Dirac. *Principles of Quantum Mechanics*. Oxford 1958.
- [34] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc e G. Grynberg. *Photons and Atoms, Introduction to Quantum Electrodynamics*, Wiley. New York 1989.
- [35] R. Loudon. *The Quantum Theory of Light*. Oxford University Press, New York 1970.
- [36] E. T. Jaynes e F. W. Cummings *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*. Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
- [37] Bruce W. Shore e Peter L. Knight *Topical review the Jaynes-Cummings*. J. Mod. Opt. **40**, 1195 (1993).

- [38] J. C. Berquist, Randall G. Hulet, Wayne M. Itano e D. J. Wineland, *Observation of Quantum Jumps in a Single Atom* Phys. Rev. Lett. **57**, 1699 (1986).
- [39] Warren Nagourney, Jon Sandberg e Hans Dehmelt. *Shelved optical electron amplifier: Observation of quantum jumps*. Phys. Rev. Lett. **56** 2797 (1986)
- [40] Ch. Roos, Th. Zeiger, H. Rohde, H. C. Nägerl, J. Eschner, D. Leibfried, F. Schmidt-Kaler e R. Blatt. *Quantum State Engineering on an Optical Transition and Decoherence in a Paul Trap*. Phys. Rev. Lett. **83**, 4713 (1999).
- [41] C. J. Myatt, B. E. King, Q. A. Turchete, C. A. Sackett, D. Kielpinski, W. M. Itano, C. Monroe e D. J. Wineland, *Decoherence of motional states of trapped ions*. J. Mod. Opt. **47**, 2181 (2000).
- [42] Q. A. Turchette, C. J. Myatt, B. E. King, C. A. Sackett, D. Kielpinski, W. M. Itano, C. Monroe e D. J. Wineland. *Decoherence and decay of motional quantum states of a trapped atom coupled to engineered reservoirs*. Phys. Rev. A **62**, 053807 (2000).
- [43] M. Abramowitz e I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover New York (1964).
- [44] Philip M. Morse e Herman Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. Mcgraw Hill Book Company (1953).
- [45] Z. X. Wang e D. R. Guo. *Special Functions*. World Scientific (1989).
- [46] D. J. Berkeland, J. D. Miller, J. C. Berquist, W. M. Itano e D. J. Wineland. *Minimization of ion micromotion in a Paul trap*. J. Appl. Phys. **83**, 5025 (1998).
- [47] Marek Šašura e Vladimír Bužek. *Cold Trapped Ions as Quantum Information Processors*. quant-ph/0112041.
- [48] H. C. Nägerl, W. Bechter, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler e R. Blatt. *Ion strings for quantum gates*. Appl. Phys. B **66**, 603 (1998).
- [49] D. Deutsch, *Quantum theory, the Church-Turing machine principle and the universal quantum computer*. Proc. R. Soc. Lond. A **400**, 97 (1985).
- [50] Peter W. Shor. *Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer*. quant-ph/9508027.

-
- [51] G. Zs. K. Horvath, R. C. Thompson e P. L. Knight. *Fundamental physics with trapped ions* Contemp. Phys. **38**, 25 (1997).
- [52] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, S. R. Jefferts, W. M. Itano e D. J. Wineland. *Resolved-Sideband Raman Cooling of a Bound Atom to the 3D Zero-Point Energy*. Phys. Rev. Lett. **75**, 4011 (1995).
- [53] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen. *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete*. Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [54] A. S. Parkins e H. J. Kimble. *Position-momentum Einstein-Podolsky-Rosen state of distantly separated trapped atoms*. Phys. Rev. A **61**, 052104 (2000).
- [55] X. X. Yi, G. R. Jin e D. L. Zhou. *Creating Bell states and decoherence effects in quantum dots system*. quant-ph/0011058.
- [56] E. Solano, R.L. de Matos Filho e N. Zagury. *Deterministic Bell states and measurement of the motional state of two trapped ions*. Phys. Rev. A **59**, R2539 (1999).
- [57] Ch. F. Roos. *Controlling the quantum state of trapped ions*. PhD thesis, Universität Innsbruck (2000).
- [58] H. Moya-Cessa, A. Vidiella-Barranco, J. A. Roversi, Dagoberto S. Freitas e S. M. Dutra. *Long-time-scale revivals in ion traps*. Phys. Rev. A **59**, 2518 (1999).
- [59] S. M. Dutra, P. L. Knight e H. Moya-Cessa. *Large-scale fluctuations in the driven Jaynes-Cummings model*. Phys. Rev. A **49**, 1993 (1994).
- [60] A. R. R. Carvalho, P. Milman, R. L. de Matos Filho e L. Davidovich. *Decoherence, pointer engineering, and quantum state protection*. Phys. Rev. Lett. **86**, 4988 (2001).