

# Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN"

*Departamento de Eletrônica Quântica*

*Grupo de Óptica Quântica*

TESE DE DOUTORADO

## PERDA DE COERÊNCIA E TELETRANSPORTE EM ELETRODINÂMICA QUÂNTICA DE CAVIDADES

***Pablo Parmezani Munhoz***

Prof. Dr. José Antonio Roversi (orientador) – DEQ/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Antonio Vidiella-Barranco (co-orientador) – DEQ/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Marcelo Paleólogo Elefteriadis de França Santos – DF/UFGM

Prof. Dr. Paulo Henrique Souto Ribeiro – IF/UFRJ

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Kyoko Furuya – DFMC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Marcos César de Oliveira – DFMC/IFGW/UNICAMP

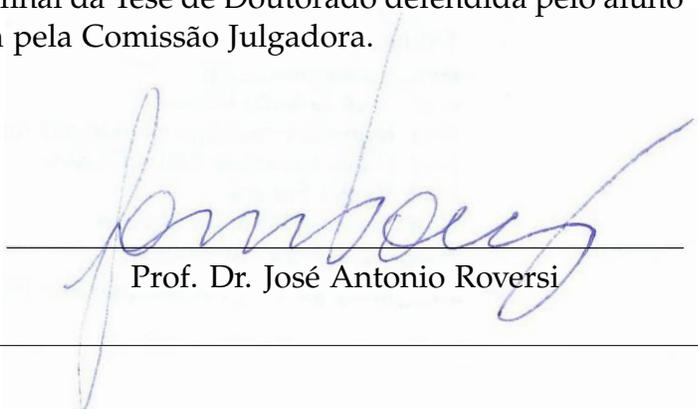
Prof. Dr. Luiz Davidovich (suplente) – IF/UFRJ

Prof. Dr. Marcus Aloízio Martinez de Aguiar (suplente) – DFMC/IFGW/UNICAMP

Tese apresentada ao Instituto de Física  
"Gleb Wataghin" para a obtenção do  
Título de Doutor em Ciências.

Este exemplar corresponde à redação final da Tese de Doutorado defendida pelo aluno Pablo Parmezani Munhoz e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 30 de maio de 2008



Prof. Dr. José Antonio Roversi

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

M925p	<p>Munhoz, Pablo Parmezani Perda de coerência e teletransporte em eletrodinâmica quântica de cavidades / Pablo Parmezani Munhoz. -- Campinas, SP : [s.n.], 2008.</p> <p>Orientadores: José Antonio Roversi e Antonio Vidiella Barranco. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".</p> <p>1. Informação quântica. 2. Ótica quântica. 3. Interação átomo-fóton. 4. Estados coerentes. 5. Estados cluster. I. Roversi, José Antonio. II. Vidiella Barranco, Antonio. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". IV. Título.</p> <p style="text-align: right;">(vsv/ifgw)</p>
-------	--

- **Título em inglês:** Decoherence and teleportation in cavity quantum electrodynamics
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
  1. Quantum information
  2. Quantum optics
  3. Atom-photon interaction
  4. Coherent states
  5. Cluster states
- **Área de concentração:** Física Clássica e Física Quântica ; Mecânica e Campos
- **Titulação:** Doutor em Ciências
- **Banca examinadora:**

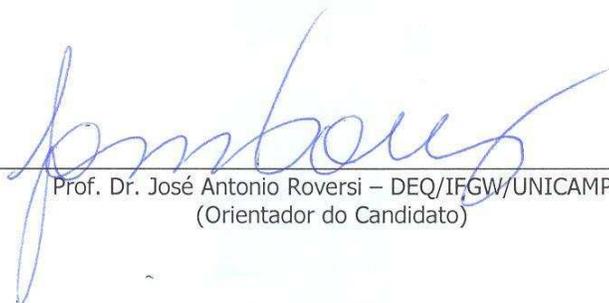
Prof. José Antonio Roversi  
Prof. Marcelo Paleólogo Elefteriadis de França Santos  
Prof. Paulo Henrique Souto Ribeiro  
Prof<sup>a</sup> Kyoko Furuya  
Prof. Marcos Cesar de Oliveira
- **Data da defesa:** 30.05.2008
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



Secretaria de Pós-Graduação - Tel: (19) 3521-5305 FAX: (19) 3521-4142

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **PABLO PARMEZANI MUNHOZ - RA 001053**, APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN" DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 30/05/2008.

**COMISSÃO JULGADORA:**



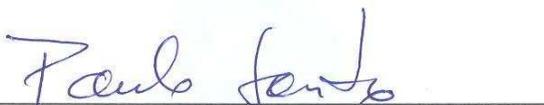

---

Prof. Dr. José Antonio Roversi – DEQ/IFGW/UNICAMP  
(Orientador do Candidato)




---

Prof. Dr. Marcelo Paleologo Elefteriadis de França Santos – DF/UFMG




---

Prof. Dr. Paulo Henrique Souto Ribeiro – IF/UFRJ




---

Profª. Drª. Kyoko Furuya – DFMC/IFGW/UNICAMP




---

Prof. Dr. Marcos César de Oliveira – DFMC/IFGW/UNICAMP



*Dedicada à minha mulher*

*Thalita Chiaramonte*

*pela amizade, ajuda e paciência.*



---

## Agradecimentos

---



eria força de expressão dizer que esses sete anos passaram rapidamente. Passado todo esse tempo e com essa visão do final dessa história de doutorado, tenho a clara percepção de que não poderia ter terminado em melhor hora. Por diversas vezes, esse longo período foi preenchido com horas de diversão, trabalho e novas experiências, as quais tive o privilégio de compartilhar com muitas pessoas igualmente incríveis, sem sombra de dúvida deixando marcas indeléveis na minha formação pessoal e profissional.

É um enorme prazer agradecer a todos que contribuíram para a finalização da presente tese. Meu sincero muito obrigado aos meus orientadores José Antonio Roversi e Antonio Vidiella Barranco. Agradeço o privilégio de fazer parte do Grupo de Óptica Quântica do IFGW/UNICAMP. Nossa convivência somente contribuiu para preservar e instigar a curiosidade científica e continuar em frente com a carreira acadêmica. Agradeço a confiança em meu trabalho, conversas, discussões, a preocupação com o espírito de grupo e o suporte fornecido diante os vários problemas surgidos ao longo desses anos.

Agradeço ao Fernando Luís Semião da Silva a sua decisiva participação nessa tese, cujo desenvolvimento foi consideravelmente beneficiado com a sua colaboração. Desde o início como colega de grupo, com sua paciência acima da média, fui adquirindo uma grande amizade e respeito pela sua pessoa, trabalho, conhecimento sobre a área e demais assuntos. É um daqueles pesquisadores com a distinta capacidade de empolgar as pessoas ao mostrar o seu entusiasmo pelo trabalho. Não é nenhum acidente seu nome aparecer nos trabalhos concluídos aqui.

Agradeço ao Ricardo José Missori o seu apoio ao longo de praticamente todos esses anos de vida acadêmica, nos melhores, piores e demais momentos. São poucas as pessoas que têm a sorte de contar com uma amizade como a sua, que perdura ao menos por toda uma vida. Agradeço principalmente a presteza para 'dissecar' e memorizar as versões dúbias dos vários velhos 'deitados' e frases célebres, a maior parte (coincidentemente as piores) 'maquinada' como sendo de minha autoria.

Agradeço ao CNPq o suporte financeiro para essa pesquisa. Esse trabalho foi também beneficiado pelos projetos L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X e *Mathematica*<sup>®</sup>. Agradeço a todos os envolvidos com a UNICAMP e o IFGW. Durante durante todo esse período, proporcionaram o melhor ambiente possível para a realização dessa pesquisa. Em especial, agradeço à Coordenadoria de Pós-Graduação, Maria Ignez, Armando, Cássia e todos que por ali passaram.

Agradeço às bancas examinadoras do exame de qualificação de doutorado, do seminário pré-requisito de defesa de tese de doutorado e da defesa de tese doutorado as discussões e sugestões de correção.

Uma única página é insuficiente para resumir as inúmeras amizades e histórias vividas ao longo desses anos. Assim, agradeço a todos aqueles que direta e indiretamente desempenharam um importante papel

(não só) para a finalização do meu doutorado.

Agradeço aos meus pais, à minha irmã, aos meus parentes mais próximos e à minha segunda família o apoio inexorável e incondicional. Meus ilimitados agradecimentos e amor à Thalita, quem eu tive o privilégio e honra de tomar como mulher durante o doutorado. Agradeço todas as prediletas horas que passamos juntos ao longo desses anos e o seu jeito único de ser, que me completa.

Finalmente, agradeço a Deus a permissão para que eu chegasse até o final dessas linhas *and keeping the good work*.

***Pablo Parmezani Munhoz***

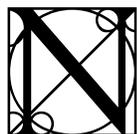
Universidade Estadual de Campinas

Maio de 2008

---

## Resumo

---



este trabalho, analisamos conceitos de Informação Quântica e Óptica Quântica no contexto de Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (CQED). Recentemente, CQED vem apresentando grandes avanços tecnológicos, justificando o interesse em várias propostas de implementação experimental. Na primeira parte do trabalho, consideramos o efeito da emissão espontânea num sistema de dois átomos de dois-níveis idênticos interagindo dispersivamente com o campo eletromagnético quantizado numa cavidade de alto fator de qualidade  $Q$ . Investigamos o efeito destrutivo do decaimento atômico na geração de estados maximamente emaranhados. Em particular, calculamos a fidelidade de teletransporte, obtendo o limite superior para a taxa de decaimento espontâneo dos átomos que ainda permite teletransporte usando tais estados como canal quântico.

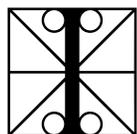
Na segunda parte, apresentamos os Estados Coerentes Emaranhados Tipo-*Cluster* (CTECS) e discutimos suas propriedades. Apresentamos um esquema de geração desses estados em cavidades, mediante escolhas convenientes de interações átomo-cavidade, através do ajuste de dessintonias e aplicação de um campo clássico externo. Após a realização de medidas atômicas, CTECS representando campos eletromagnéticos não-locais em cavidades separadas podem ser gerados. Generalizamos o esquema de geração para  $2p$ -cavidades e analisamos a utilidade do CTECS gerado para teletransporte, considerando perda de fótons nas cavidades.



---

## Abstract

---



In this work, we analyze concepts of Quantum Information and Quantum Optics in the context of Cavity Quantum Electrodynamics (CQED). Nowadays, CQED is achieving great technological advances, justifying the interest in several proposals of experimental implementation. In the first part of the work, we consider the effect of spontaneous emission in a system of two identical two-level atoms dispersively interacting with the quantized electromagnetic field inside a high quality factor  $Q$  cavity. We investigate the destructive effect of the atomic decay in the generation of maximally entangled states. In particular, we compute the fidelity of teleportation, obtaining an upper limit for the spontaneous atomic decay rate which still allows teleportation using those states as quantum channels.

In the second part, we present the cluster-type entangled coherent states (CTECS) and discuss their properties. We present a generation scheme of these states in cavities, by means of convenient choices of atom-field interactions, through adjustments of detunings and application of a classical external field. After the realization of simple atomic measurements, CTECS representing nonlocal electromagnetic fields in separate cavities can be generated. We generalize the scheme for  $2p$ -cavities, analyzing the utility of the generated CTECS for teleportation, considering photon leakage in the cavities.



# Índice

---

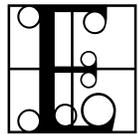
<b>Agradecimentos</b>	vii
<b>Resumo</b>	ix
<b>Abstract</b>	xi
<b>1. Introdução</b>	1
<b>2. Fundamentos</b>	3
2.1. Informação Quântica	3
2.1.1. Mecânica Quântica	3
2.1.2. Emaranhamento	5
2.1.3. Teletransporte	10
2.2. Óptica Quântica	13
2.2.1. Campo Oscilante	13
2.2.2. Sistema de Spin	16
2.2.3. Eletrodinâmica Quântica de Cavidades	19
<b>3. Emaranhamento e Teletransporte sob Emissão Espontânea</b>	25
3.1. Átomos Emaranhados com o Auxílio de uma Cavidade	26
3.2. Solução da Equação Mestra	27
3.3. Dinâmica sob Dissipação	30
3.3.1. Probabilidades de Detecção Conjunta	30
3.3.2. Sinal de Bell	32
3.3.3. Concurrence	33
3.3.4. Fidelidade de Teletransporte	34
<b>4. Estados Coerentes Emaranhados tipo-Cluster</b>	35
4.1. Qubit de Estados Coerentes	35
4.1.1. Estados Coerentes Emaranhados	36
4.2. Proposta de Implementação de CTECS em Cavidades	39
4.2.1. Medida do Campo Coerente na Cavidade	43
4.2.2. Viabilidade experimental	44
4.2.3. Generalização para $2p$ -Cavidades	45
4.3. Perda de Coerência por Perda de Fótons	45
4.3.1. Solução da Equação Mestra	46
4.4. Dinâmica sob Dissipação	48
4.4.1. Base Ortonormal de Estados Coerentes	48
4.4.2. Concurrence	50
4.4.3. Fidelidade de Teletransporte	51
<b>5. Conclusões e Perspectivas Futuras</b>	53

<b>A. Hamiltonianos Efetivos</b>	57
A.1. Modelo de Tavis-Cummings	61
A.2. TCM Fortemente Acoplado	62
<b>B. Sistema-Reservatório</b>	65
B.1. Átomos de Dois-Níveis sob Emissão Espontânea	68
B.2. Cavity sob Perda de Fótons	74
B.3. Desacoplamento do Operador Exponencial	76
<b>Referências</b>	79

---

## 1. INTRODUÇÃO

---



xperimentos de pensamento<sup>a</sup> tiveram um papel fundamental no surgimento e consolidação da Mecânica Quântica. Nos primórdios dessa teoria, os próprios fundadores imaginaram dispositivos simples de experimentos fictícios com átomos e fótons, discutindo as conseqüências esperadas de tais experimentos, mesmo ‘sabendo’ que jamais viriam a ser realizados na realidade [1]. Tal abordagem facilitou a elaboração de uma teoria cada vez mais concisa. É interessante enfatizar que naquele tempo, os pensadores da teoria quântica sequer cogitavam, completamente convencidos, que tais experimentos jamais sairiam de suas imaginações. Esse argumento de impossibilidade de realização de experimentos continuou ao longo da primeira metade do século passado, vivenciado por Erwin Schrödinger. Certamente os brilhantes cientistas da ‘velha’ teoria quântica ficariam surpresos com os incríveis avanços a partir do final do século passado. Podemos agora isolar um único átomo ou um único fóton, definindo e manipulando seus estados de maneira bastante precisa, e até mesmo acompanhando sua evolução em tempo real [1].

O surgimento dessas novas e profundas mudanças na maneira de se entender o mundo que nos cerca, foi acompanhado de conceitos que vão totalmente contra a nossa “ingênua intuição física da realidade”. Na época da ‘velha’ teoria quântica, muitas conseqüências da ‘nova’ teoria quântica estavam ainda sendo desvendadas e encontraram forte oposição dos físicos mais influentes da época, inclusive um dos mais influentes, Albert Einstein, que não se convenceu totalmente sobre as novas interpretações, até o fim de seus dias. O pivô de boa parte das discussões, que continuaram durante praticamente todo o século vinte, e ainda permanecem até o presente, com boas chances de ser um dos maiores enigmas da física atual, é o que conhecemos por emaranhamento. Esse efeito ocorre manifestamente quando dois ou mais sistemas, após uma interação, se encontram num estado cujas propriedades individuais passam a ser inter-dependentes, não mais sendo explicadas por argumentos puramente clássicos.

Os experimentos de pensamento têm deixado cada vez mais de ser apenas fruto da nossa imaginação, e já encontram aplicações em muitas áreas da ciência. Esses experimentos estão de fato colaborando para entender cada vez melhor os fundamentos da Mecânica Quântica, permitindo descobrir novas facetas dessa brilhante teoria, com potenciais aplicações das predições obtidas em Teoria de Informação Quântica (QIT)<sup>b</sup>, e vêm sendo realizados no âmbito da Óptica Quântica. Uma de suas primeiras realizações se deu com a manipulação de átomos em armadilhas de íons [1]. Em outras realizações, o campo é armazenado em cavidades com espelhos altamente refletivos, permitindo que átomos passem por essas cavidades, interagindo com o campo. Tais experimentos, formam uma sub-área de Óptica Quântica,

---

<sup>a</sup> Gedankenexperiment, no original em alemão.

<sup>b</sup> Acrograma para Quantum Information Theory. Adotamos nesta tese os acrogramas em inglês.

denominada Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (CQED)<sup>c</sup> [1]. Atualmente, existe um grande controle desses experimentos, tanto no domínio de microondas, como óptico de frequências [1]. Não fosse pelos problemas impostos pela perda de coerência dos sistemas, seriam certamente uma realização dos experimentos de pensamento mais famosos. Recentemente, um tipo especial de estado emaranhado multipartido, denominado estado *cluster* tem atraído muita atenção devido a potenciais aplicações, pois forma, por exemplo, a base para o modelo de Computação Quântica Baseada em Medidas (MBQC)<sup>d</sup>, uma alternativa à abordagem convencional. Nessa tese, apresentamos propostas teóricas de experimentos de pensamento no contexto de CQED e voltados para a geração de estados tipo-*cluster*, usando estados coerentes. Aplicamos conceitos de Informação Quântica para quantificar o emaranhamento dos estados quânticos produzidos sob a ação de canais de perda de coerência e analisamos a utilidade desses estados para a realização de teletransporte.

Dividimos a apresentação dessa tese como segue: No capítulo 2, resumimos os conceitos fundamentais de Informação Quântica e Óptica Quântica. Revisamos os postulados da Mecânica Quântica com a linguagem de Informação Quântica, introduzindo alguns detalhes sobre o conceito de emaranhamento, descrevendo a medida de emaranhamento que adotamos para os nossos cálculos, a *concurrence*, e o protocolo de teletransporte padrão, terminando com uma discussão da fidelidade de teletransporte para um dado estado bipartido. Nos capítulos 3 e 4 apresentamos os resultados que obtivemos no contexto de Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (CQED) e a geração de Estados Coerentes Emaranhados Tipo-*Cluster* (CTECS)<sup>e</sup>. Finalmente, no capítulo 5, apresentamos as conclusões e as perspectivas de continuidade dos trabalhos apresentados. Nos apêndices A e B, revisamos um método para a obtenção de Hamiltonianos efetivos e a dedução da equação mestra.

---

<sup>c</sup> Acrograma para Cavity Quantum Electrodynamics.

<sup>d</sup> Acrograma para Measurement-Based Quantum Computation.

<sup>e</sup> Acrograma para *Cluster-Type* Entangled Coherent States.

---

## 2. FUNDAMENTOS

---



presente tese versa sobre resultados cujos fundamentos estão concentrados em Informação Quântica e Óptica Quântica. Neste capítulo resumimos os principais fundamentos dessas áreas da física, necessários para o acompanhamento dos resultados apresentados nos próximos capítulos, procurando sempre apontar as principais referências para um desejado aprofundamento no assunto.

### *2.1. Informação Quântica*

A Teoria de Informação Quântica (QIT) trata das leis para o processamento quântico de informação, realizado em sistemas que seguem as leis da Mecânica Quântica. É interessante a simbiose existente entre essas duas teorias e a contribuição que a primeira vem trazendo para o entendimento dos fundamentos da segunda.

Com o propósito inicial de maximizar a capacidade de comunicação de um canal clássico (telefone), no final da primeira metade do século XX, os trabalhos seminais de Shannon deram origem ao que hoje conhecemos por Teoria de Informação. Suas previsões têm se mostrado bastante gerais, servindo como base para muitas aplicações em diversas áreas da ciência, bem como para o subsequente desenvolvimento da versão quântica dessa teoria [2].

A Teoria de Informação Quântica (QIT) é bastante recente e, devido ao grande interesse que vem despertando em muitas áreas da física e de outras ciências, vemos o surgimento de vários livros sobre o assunto. Atualmente, contamos com um número cada vez mais expressivo e eclético de livros-texto [2–6], cobrindo tópicos introdutórios da teoria clássica de informação e incluindo todos os avanços e descobertas da área, assim como excelentes artigos de revisão [7–9]. Assim, procuramos reunir os principais fundamentos em Informação Quântica, os quais são úteis no contexto desta tese.

#### *2.1.1. Mecânica Quântica*

Resumiremos agora alguns fundamentos de Mecânica Quântica. Os fundamentos mais básicos, tais como, notação de Dirac e álgebra de 'bras' e 'kets', espaço de Hilbert, operadores e medidas (projetivas), estados puros e mistos, auto-valores e auto-vetores, decomposição espectral (forma diagonal), traço (parcial), podem ser encontrados em excelentes livros-texto, tradicionais e recentes [1, 2, 10].

**Postulados.** É interessante como os postulados da Mecânica Quântica, em sua forma mais geral, quase nunca são apresentados nos livros-texto sobre o assunto, salvo exemplos como [2, 3, 10]. Já de início, percebemos o benefício que a Informação Quântica vem trazendo para a Mecânica Quântica: uma redução para 3 postulados<sup>a</sup> [6]:

**Estado.** Um sistema é descrito por um estado quântico. Um estado (puro ou misto) é representado por operadores densidade no espaço de Hilbert. Um operador densidade pode ser usado para representar uma distribuição de probabilidade. Assim, em geral, um estado de um sistema é uma distribuição de probabilidade de estados quânticos puros.

**Observável.** Uma quantidade física é representada por um operador Hermiteano. Tal operador possui auto-valores reais, passíveis, portanto, de medição. Enunciando de outra forma, são operadores cujos valores médios (esperados) representam uma grandeza física (observável).

**Evolução.** Um conjunto particular que pode ser usado para a medição do estado de um sistema é dado por projetores (operadores) ortogonais. Contudo, um sistema auxiliar pode ser usado para fazer medições não-ortogonais. Um conjunto qualquer de operadores  $O$  que satisfaz a relação de fechamento  $\sum_i O_i^\dagger O_i = \mathbb{1}$  é denominado mapa completamente positivo<sup>b</sup> (mapa-CP)<sup>c</sup>, mapeando operadores densidade em outros operadores densidade

$$\rho' \rightarrow \sum_i O_i^\dagger \rho O_i. \quad (2.1)$$

Assim, o mapa-CP pode ser usado juntamente com um sistema auxiliar para definir medições, e descreve de maneira conveniente a evolução não-unitária de um sistema quando este interage com outros sistemas, por exemplo, na emissão espontânea. A evolução unitária é um caso especial de mapa-CP, na qual temos apenas um operador na soma (2.1).

É importante enfatizar que nem todo mapa positivo é um mapa-CP, por exemplo a transposição, cuja positividade reside no fato de que qualquer estado  $\rho$  possui transposição  $\rho^T \geq 0$ . A transposição parcial de um dado estado pode resultar num estado que não é positivo (não representa um estado físico), fato que é usado para identificar [11, 12] e quantificar emaranhamento.

O mapa-CP representa a evolução de um sistema, quando não atualizamos nosso conhecimento sobre o resultado (*outcome*) de uma medição particular (distribuição de probabilidade de estados quânticos puros), tal que realizamos um somatório sobre todas as medições possíveis. Por outro lado, ao sabermos o resultado correspondente ao operador  $O_i^\dagger O_i$  (operador de Kraus), o estado do sistema imediatamente após esse resultado é dado por  $O_i^\dagger \rho O_i / \text{tr}(O_i^\dagger O_i \rho)$ . Este é um caso especial do formalismo de medições generalizadas, usualmente referida como medição avaliada de operador positivo, POVM<sup>d</sup>, um conceito

<sup>a</sup> Esse número é adotado aqui e originalmente em [6] com a fusão dos postulados de medida e evolução unitária num só. O número adequado [2] não é ainda um consenso nos livros-texto sobre o assunto, e podemos encontrar até mesmo 10 postulados nas referências mais tradicionais [10].

<sup>b</sup> Operadores da forma  $O^\dagger O$  são sempre positivos para qualquer operador  $O$  [2].

<sup>c</sup> Forma compacta para mapa linear, traço-preservante, completamente positivo.

<sup>d</sup> Acrograma para Positive Operator Valued Measure.

muito importante em Informação Quântica[2]. Como exemplo, dado um estado compartilhado por duas partes  $A$  e  $B$ , qualquer operação mapa-CP realizada localmente numa ou nas duas partes, caracteriza o que chamamos de LOCC<sup>e</sup> [2].

### 2.1.2. Emaranhamento

O emaranhamento é uma propriedade compartilhada (correlação) entre duas ou mais partes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , etc, que não pode ser explicada pela Mecânica Clássica. É uma característica particular da Mecânica Quântica, sendo o ingrediente chave para muitas aplicações em Informação Quântica [13].

Desde sua proposição por Schrödinger [14], a importância desse conceito tem sido demonstrada em estudos que vão desde fundamentos da Mecânica Quântica [15–17], até a afirmação da Informação Quântica [6, 18, 19]. O emaranhamento é atualmente reconhecido como um importante recurso na realização de tarefas sem análogo clássico [20], tais como, teletransporte de estados quânticos [21], codificação densa [22], correção quântica de erros [23] e distribuição quântica de chaves criptográficas [4, 24].

**Classificação de Emaranhamento.** Apesar de sua extrema relevância, muitos aspectos do emaranhamento permanecem ainda não compreendidos. Um exemplo bastante ilustrativo dessa dificuldade é a busca por um critério geral para identificar emaranhamento em estados quânticos multipartidos. As primeiras tentativas, para o caso bipartido, foram baseadas nas observações obtidas da decomposição de Schmidt e das desigualdades de Bell: Sabemos que as desigualdades de Bell sempre são violadas por quaisquer estados emaranhados puros<sup>f</sup>, por exemplo, os denominados estados Bell<sup>g</sup>

$$\begin{aligned} |\Phi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \\ |\Psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Esses estados, assim como qualquer estado unitariamente equivalente a esses, são conhecidos por violarem maximamente as desigualdades de Bell<sup>h</sup>, e são também conhecidos como estados maximamente emaranhados.

Na literatura, existem várias classes de estados que definitivamente não violam as desigualdades de Bell, os denominados estados separáveis ou desemaranhados. Por definição, podemos sempre escrever tais estados na forma [2]

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i. \quad (2.3)$$

No entanto, assim como se pode concluir para a decomposição de Schmidt, um critério de emara-

<sup>e</sup> Acronograma para Local Operations and Classical Communication.

<sup>f</sup> Da decomposição de Schmidt e da relação de idempotência  $\rho^2 = \rho$ , temos que um estado puro é emaranhado se  $\text{tr} \rho_A^2 < 1$ , para  $\rho_A \equiv \text{tr}_B \rho$  [2].

<sup>g</sup> Na notação desta tese, a menos que disposto de outra forma, o primeiro *qubit* refere-se à parte  $A$ , o segundo à parte  $B$ , o terceiro à parte  $C$ , e assim por diante.

<sup>h</sup> Em termos da decomposição de Schmidt, o traço parcial de qualquer das partes, resulta num estado maximamente misturado para a parte restante.

nhamento baseado nas desigualdades de Bell se mostra ineficiente para estados mistos [2]. Um exemplo bastante ilustrativo é dado por uma classe de estados mistos, conhecida como estados Werner [25]. Tais estados são definidos como misturas de estados Bell, onde o grau de mistura é determinado pelo parâmetro  $f = \langle \Psi^- | \rho | \Psi^- \rangle$ :

$$\rho_W = f |\Psi^- \rangle \langle \Psi^-| + \frac{1-f}{3} (|\Psi^+ \rangle \langle \Psi^+| + |\Phi^- \rangle \langle \Phi^-| + |\Phi^+ \rangle \langle \Phi^+|), \quad (2.4)$$

com  $0 \leq f \leq 1$ . O parâmetro  $f$  é denominado Fração de Singlete (*singlet fraction*), uma medida da fidelidade de um dado estado  $\rho$  em relação ao estado singlete da base Bell [26]. Quando  $f = \frac{1}{2}$ , o estado Werner pode ser reescrito como

$$\rho_W = \frac{1}{6} (|\Psi^- \rangle \langle \Psi^-| + |\Psi^+ \rangle \langle \Psi^+|) + \frac{1}{6} (|\Psi^- \rangle \langle \Psi^-| + |\Phi^- \rangle \langle \Phi^-|) + \frac{1}{6} (|\Psi^- \rangle \langle \Psi^-| + |\Phi^+ \rangle \langle \Phi^+|), \quad (2.5)$$

o qual é um estado totalmente separável, pois uma mistura de quaisquer estados maximamente emaranhados é um estado separável. Quando  $f > \frac{1}{2}$ ,  $\rho_W$  não mais pode ser reescrito numa forma separável sendo, portanto, emaranhado. É interessante notar que mesmo emaranhado ( $f > \frac{1}{2}$ ), o estado Werner somente começa a violar as desigualdades de Bell para  $f > 0.78$ . Portanto, é necessário a busca de alternativas para uma classificação de emaranhamento de estados mistos. É importante lembrar que o estado Werner desempenha um papel importante nos protocolos de purificação de emaranhamento de estados mistos, o primeiro deles conhecido como protocolo BBPSSW<sup>i</sup> [27].

Em [11, 12] é apresentado um critério necessário e suficiente para emaranhamento de estados mistos bipartidos de dimensão máxima igual a 5. Tal critério é baseado na positividade do operador densidade parcialmente transposto. Atualmente, os diferentes critérios de detecção de emaranhamento são obtidos usando o que chamamos de testemunha de emaranhamento: basicamente, operadores Hermiteanos que nos auxiliam na tarefa de decidir se um dado estado é emaranhado ou não [2]. Se um dado estado é emaranhado, sabemos que existe uma testemunha de emaranhamento que pode identificá-lo como tal, mas a obtenção dessas testemunhas para sistemas multipartidos e de qualquer dimensão tem se mostrado bastante difícil e dependem do estado analisado.

Portanto, o estudo qualitativo e quantitativo do emaranhamento tem se tornado cada vez mais difundido na literatura da área. O conhecimento atual é muito mais abrangente em sistemas bipartidos. Os diversos resultados obtidos para esse caso particular vão desde definições para quantificar emaranhamento, com as idéias bastante originais de destilação e formação de emaranhamento [26], protocolos de concentração [28] e purificação [27] de emaranhamento, até quantidades que definem a utilidade de um dado estado bipartido para a realização de tarefas quânticas (como por exemplo teletransporte e codificação densa). Neste caso inclusive, para sistemas bipartidos expandidos no espaço de Hilbert  $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$  [29].

No entanto, no caso geral de estados multipartidos, a situação se mostra bastante adversa. Boa parte das dificuldades encontradas têm suas origens no fato de que muitas propriedades observadas no caso bipartido não são imediatamente extensíveis para o caso multipartido, por exemplo, medidas de emara-

<sup>i</sup> Iniciais dos sobrenomes dos autores do trabalho: Bennett, Brassard, Popescu, Schumacher, Smolin e Wootters.

nhamento, decomposição de Schmidt e interconvertibilidade [30].

No caso tripartido, temos duas maneiras inequivalentes de se emaranhar três *qubits* compartilhados entre três partes  $A$ ,  $B$  e  $C$ , os denominados estados GHZ e  $W$ , definidos como [31–33]

$$\begin{aligned} |\text{GHZ}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle), \\ |W\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle). \end{aligned} \quad (2.6)$$

As dificuldades para casos mais gerais, envolvendo mais de 3 partes, foram mencionadas em [31]. Dois anos mais tarde, surgiu uma primeira tentativa de classificação de estados quadripartidos, com 9 diferentes classes de estados emaranhados [34]. O assunto foi recentemente retomado em [35] seguindo a mesma filosofia do trabalho original [31], resultando em 8 maneiras inequivalentes de se emaranhar quatro *qubits*. Assim, o tema de pesquisa em classificação de emaranhamento multipartido continua sendo bastante atual e ainda sem uma resposta definitiva.

**Quantificação de Emaranhamento.** Uma vez que temos alguns mecanismos para saber se determinados estados são ou não emaranhados, é interessante saber o quanto estes estados são emaranhados. Uma maneira pode ser obtida pelo protocolo de destilação ou formação de emaranhamento. Contudo, não sabemos ainda como fazer isso para um estado misto geral [2].

Uma boa maneira de se começar a quantificar emaranhamento é discutindo as propriedades que qualquer medida potencial de emaranhamento deve satisfazer. Mesmo nesse assunto, os pesquisadores desta área não parecem compartilhar as mesmas opiniões [3]. São três as propriedades básicas [2, 3]:

**Discriminação.** A primeira propriedade afirma que um estado desemaranhado não deve possuir qualquer correlação quântica. Portanto, a medida de emaranhamento é zero,  $E(\rho) = 0$ , se e somente se o estado  $\rho$  é separável. Essa propriedade geralmente é apresentada numa versão mais 'suave': Se  $\rho$  é separável, então  $E(\rho) = 0$ , pois a versão mais geral é sempre mais difícil de ser satisfeita devido aos denominados estados emaranhados limites [3].

**Inalteração.** Essa segunda propriedade diz respeito ao comportamento do emaranhamento sob simples operações locais unitárias. É intuitivo que a quantidade de emaranhamento não pode ser alterada desta forma, pois a transformação caracteriza apenas uma mudança de base e é completamente reversível. Assim, para qualquer operação unitária local  $A \otimes B$ , a medida de emaranhamento permanece inalterada, ou seja [2]

$$E(\rho) = E(A^\dagger \otimes B^\dagger \rho A \otimes B). \quad (2.7)$$

**Monotonicidade.** Essa terceira propriedade é a que usualmente traz todas as dificuldades para definir e comprovar medidas potenciais de emaranhamento, sendo ainda mais restritiva que a anterior, pois a medida de emaranhamento não pode aumentar nem mesmo com a ajuda de comunicação clássica, um resultado contrário ao observado para correlações puramente clássicas. Assim, operações locais, comunicação clássica e pós-seleção não podem aumentar o emaranhamento esperado, isto é, se começamos

com um *ensemble* num estado  $\rho$  e terminamos, com probabilidades  $p_i$ , em sub-*ensembles* num estado  $\rho_i$ , devemos ter [2]

$$E(\rho) \geq \sum_i p_i E(\rho_i), \quad (2.8)$$

onde  $\rho_i = A_i^\dagger \otimes B_i^\dagger \rho A_i \otimes B_i / p_i$  e  $p_i = \text{tr}(A_i^\dagger \otimes B_i^\dagger \rho A_i \otimes B_i)$ . Um exemplo dessa propriedade é a adição local de *qubits*. A propriedade anterior pode ser interpretada como um caso particular dessa terceira propriedade, assim como também observamos para o mapa-CP. Quando o estado  $\rho$  se refere a um estado puro, a medida de emaranhamento é a própria entropia de von Neumann (entropia de emaranhamento) [2, 3].

Além dessas três propriedades básicas, existem outras também desejáveis, tais como convexidade, continuidade, aditividade, normalização e computabilidade [3].

**Medidas de Emaranhamento.** Devido às diferentes maneiras de se classificar e quantificar emaranhamento, é de se esperar que também existam várias medidas de emaranhamento, cada uma com seus reveses particulares para as várias propriedades desejáveis. As distâncias de Bures, Traço, Hilbert-Schmidt, Entropia (reversa) Relativa e Robustez são exemplos das chamadas medidas geométricas de emaranhamento [3], em especial, trataremos mais adiante de uma dessas medidas, a Máxima Fração de Singleto ou Fração Totalmente Emaranhada. Algumas medidas são extensões das medidas para estados puros, como é o caso do Emaranhamento de Formação, a partir da qual é definida a *concurrence* de Wootters, Emaranhamento de Purificação e Emaranhamento ‘Esmagado’, esta última, ironicamente, uma medida perfeita, se soubéssemos como calculá-la [3]. As medidas operacionais quantificam emaranhamento de uma maneira abstrata, como é o caso do Custo de Emaranhamento e Emaranhamento Destilável [3]. Finalmente, as medidas algébricas que compreendem a negatividade, negatividade logarítmica, e negatividade de rearrançamento [3]. É importante destacar, que todas elas se reduzem à entropia de emaranhamento (von Neumann), para estados puros.

*Concurrence.* Para os estudos de quantificação de emaranhamento apresentados nessa tese, consideramos a *concurrence* de Wootters. O ponto de partida para a definição da *concurrence* é um fato curioso sobre estados puros de um par de *qubits*. Para tal sistema, é possível definir uma ‘base mágica’ formada pelos estados ortogonais

$$\begin{aligned} |m_1\rangle &= |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \\ |m_2\rangle &= i|\Phi^-\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \\ |m_3\rangle &= i|\Psi^+\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \\ |m_4\rangle &= |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \end{aligned} \quad (2.9)$$

a qual é a base Bell com fases particulares. Quando um estado puro  $|\psi\rangle$  é escrito nessa base particular,  $|\psi\rangle = \sum_i c_i |m_i\rangle$ , podemos quantificar seu emaranhamento de maneira notavelmente simples por [36, 37]

$$C(|\psi\rangle) \equiv \left| \sum_i c_i^2 \right|. \quad (2.10)$$

Portanto, se o estado puro é maximamente emaranhado, vemos que qualquer combinação linear real dos estados que formam a base mágica, também é um estado maximamente emaranhado, ou seja, todo estado maximamente emaranhado pode ser reescrito, a menos de uma fase global, como uma combinação linear dos estados  $|m_i\rangle$  [26]. Assim, para qualquer estado maximamente emaranhado escrito na base mágica, todos os coeficientes  $c_i$  são reais e, portanto,  $C = 1$ , o que justifica a denominação de ‘base mágica’. Caso contrário, a *concurrency* será sempre menor que a unidade, implicando num estado não maximamente emaranhado.

Para apreciar outra característica da base mágica, consideramos a transformação  $|\psi\rangle \rightarrow |\tilde{\psi}\rangle = (\sigma^y \otimes \sigma^y)|\psi\rangle^*$ . Essa operação consiste de conjugação complexa na base padrão (computacional)  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  e, para um sistema de  $spin-\frac{1}{2}$ , esta é a operação reversão temporal, invertendo, de fato, a direção do *spin* (*spin-flip*) [36, 37]. Se o estado é escrito na base mágica, esta transformação é realizada pela simples conjugação complexa. Assim, temos  $C = |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle|$ , tal que a *concurrency*<sup>j</sup> é uma medida da coincidência dos estados  $|\psi\rangle$  e  $|\tilde{\psi}\rangle$ .

Isso vale também para um estado bipartido qualquer descrito pelo operador  $\rho$ , escrito na base mágica. Se trabalharmos na base padrão, essa transformação será dada pelo operador *spin* invertido (*spin-flipped*) [36, 37]

$$\rho \rightarrow \tilde{\rho} = (\sigma^y \otimes \sigma^y)\rho^*(\sigma^y \otimes \sigma^y), \quad (2.11)$$

no qual, novamente, tomamos o complexo conjugado de  $\rho$  na base computacional. Assim, a *concurrency* é dada por

$$C = \max(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4), \quad (2.12)$$

na qual os parâmetros  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), são os auto-valores, em ordem decrescente, do operador Hermiteano

$$R = \sqrt{\sqrt{\tilde{\rho}}\tilde{\rho}\sqrt{\tilde{\rho}}}, \quad (2.13)$$

também interpretado como a raiz quadrada da fidelidade entre  $\rho$  e  $\tilde{\rho}$  [3]. Alternativamente, podemos dizer que os parâmetros  $\lambda_i$ , ( $i = 1, \dots, 4$ ), correspondem às raízes quadradas dos auto-valores do operador não-Hermiteano  $\rho\tilde{\rho}$ . É importante notar que cada  $\lambda_i$  é um número real não-negativo [36, 37].

Terminamos considerando uma família de estados interessante, denominados estados Horodecki [4], a qual surge como uma combinação convexa de um estado Bell com um estado ortogonal separável [3]

$$\rho_H = a|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + (1-a)|00\rangle\langle 00|. \quad (2.14)$$

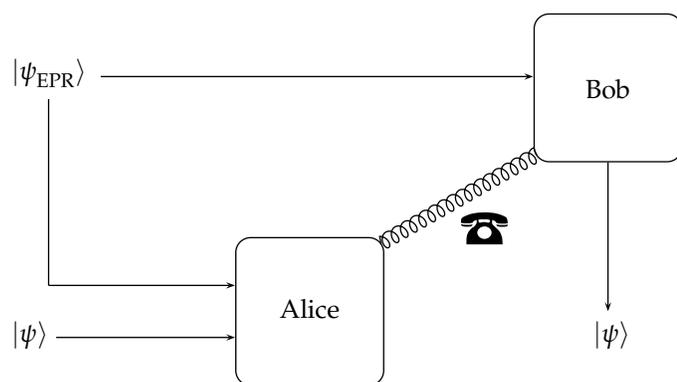
A *concurrency* para esses estados é, por construção, igual ao parâmetro  $a$ :  $C = a$ . Como veremos no próximo capítulo, obtemos estados desse tipo ao considerarmos o emaranhamento de átomos emitindo espontaneamente, interagindo dispersivamente com uma cavidade.

<sup>j</sup> A tradução usual em português é concorrência.

### 2.1.3. Teletransporte

A geração e o controle coerente de estados maximamente emaranhados é de fundamental importância na realização das várias tarefas de processamento de informação, tais como codificação densa [22] e teletransporte [21]. Se um estado puro, mas não maximamente emaranhado, é usado para realizar o esquema de teletransporte padrão, nos deparamos com duas possibilidades: ou é possível teletransportar apenas estados particulares, ou o teletransporte é feito com fidelidade reduzida. Algumas idéias bem pensadas, com a pretensão de aumentar tal fidelidade de teletransporte têm sido relatadas. Uma possibilidade é concentrar emaranhamento parcial usando operações locais e comunicação clássica (LOCC) [28]. Neste caso, o emissor (Alice) e o receptor (Bob) são equipados com  $n$  pares de estados parcialmente emaranhados idênticos e, para um número  $n$  grande, a fração de estados maximamente emaranhados obtida é dada por  $nE$ , sendo  $E$  a entropia de von Neumann (entropia de emaranhamento) da matriz densidade obtida traçando um dos subsistemas. Uma outra possibilidade interessante é o desenvolvimento de estratégias ótimas que modificam ligeiramente o protocolo padrão, para maximizar a probabilidade de realizar teletransporte perfeito [38]. Numa situação mais realística, contudo, o estado compartilhado por Alice e Bob terminará num estado de mistura, devido a ruídos indesejáveis e imperfeições. Neste caso, ainda assim é possível destilar algum emaranhamento desses estados. Se a fidelidade do estado misto relativa ao singleto perfeito é maior que  $\frac{1}{2}$  e Alice e Bob estão providos com muitos estados idênticos, ainda existe um esquema de purificação que produz alguma pequena fração de estados singleto perfeitamente puros, que podem ser usados para aumentar a fidelidade de teletransporte [27].

**Protocolo Padrão.** No protocolo de teletransporte padrão [21], duas partes, Alice e Bob, compartilham um par de partículas num estado maximamente emaranhado,  $|\psi_{\text{EPR}}\rangle$ . Tal estado funciona como um canal quântico para teletransportar a informação contida numa terceira partícula sob a posse de Alice, a qual é representada por um estado puro desconhecido  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ . Após reunir o estado desconhecido com sua parte do par EPR, Alice realiza uma medida de Bell – uma projeção de dois qubits sobre um dos quatro estados maximamente emaranhados [40] da base Bell (2.2). Em seguida, Alice envia o resultado obtido (dois bits de informação clássica) a Bob, usando um canal clássico (por exemplo, um telefone). Como o canal quântico é maximamente emaranhado, não importa qual seja o resultado da medida de Bell que Alice obtém, Bob poderá sempre realizar uma de quatro operações – ( $\mathbb{1}$ ,  $\sigma^x$ ,  $\sigma^y$ ,  $\sigma^z$ ) – em seu qubit (sua parte do estado emaranhado inicialmente compartilhado com Alice) e transformá-lo numa réplica exata do estado  $|\psi\rangle$  [40]. É importante enfatizar que o procedimento de teletransporte é totalmente consistente com o



**Figura 1** – Esquema de teletransporte de um estado quântico desconhecido  $|\psi\rangle$ . Alice e Bob compartilham um canal quântico gerado previamente, um par EPR. Após reunir  $|\psi\rangle$  com sua parte do par EPR, Alice realiza uma medida de Bell e informa o resultado a Bob (telefone). Bob realiza a operação correta em sua parte do par EPR e recupera a informação do estado original. Figura extraída de [39].

teorema da não-clonagem [41], uma vez que não ocorre a duplicação do estado  $|\psi\rangle$ , ou seja, o estado original é destruído. O protocolo é esquematizado na figura 1.

Assim, estados maximamente emaranhados proporcionam um canal quântico que permite o teletransporte perfeito da informação contida num estado desconhecido de uma parte para outra. Após o trabalho seminal [21], pareceu natural procurar por conexões entre teletransporte, desigualdades de Bell e inseparabilidade [42–46]. Uma das primeiras coisas que foram observadas foi o fato de que um estado de mistura pode ainda assim ser útil para teletransporte, embora imperfeito [42]. Foi demonstrado que a fidelidade de transmissão de um estado desconhecido pode ser relacionada com o tipo de estado que forma o canal quântico. Na verdade, um canal clássico pode fornecer uma fidelidade de até  $\frac{2}{3}$ . Isto pode ser obtido se Alice simplesmente realizar uma medida no estado desconhecido e contar o resultado a Bob [42]. Mostramos esse resultado formalmente no próximo parágrafo.

**Fidelidade.** Com que fidelidade Bob adivinha o estado de Alice<sup>k</sup>  $|\psi\rangle$ ? Quando apenas se permite que Bob adivinhe o estado, sem que Alice realize qualquer medida em seu estado, a fidelidade que obtém é dada por

$$F = |\langle\psi|\psi'\rangle|^2 = \text{tr}(\varrho\varrho') = \frac{1}{2}[1 + \cos\theta\cos\theta' + \cos(\varphi - \varphi')\sin\theta\sin\theta'], \quad (2.15)$$

onde  $(\theta, \varphi)$  é a direção real  $\hat{\mathbf{n}}$  e  $(\theta', \varphi')$  a direção adivinhada  $\hat{\mathbf{n}}'$ . Para avaliar o sucesso dessa estratégia de adivinhação, consideramos uma distribuição uniforme de direções possíveis na esfera de Bloch,  $dD(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{4\pi}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$  [42], e obtemos o resultado [42, 44]

$$\bar{F} = \int dD(\hat{\mathbf{n}})F = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta\,d\varphi\,\sin\theta F = \frac{1}{2}. \quad (2.16)$$

Assim, uma vez que Alice e Bob não podem se comunicar, Bob pode apenas tentar adivinhar o estado de Alice, preparando vários estados, aleatoriamente, dos quais sabe apenas que obedecem a distribuição de direções conhecida,  $dD(\hat{\mathbf{n}})$ , tal que o resultado médio desse esquema de adivinhação será sempre  $\frac{1}{2}$  [40, 42, 44].

Por outro lado, se Alice e Bob estão conectados apenas por um canal clássico, a melhor estratégia possível resultará numa fidelidade igual a  $\frac{2}{3}$  [40, 42, 44]. Uma maneira particular de se obter esse resultado é considerar que Alice repete um mesmo experimento, preparando um estado *numa* dada direção<sup>1</sup>. A cada repetição, Alice projeta o estado numa *mesma* direção escolhida, tal que o efeito do aparato de medida é levar o conhecimento de Alice sobre o estado para a forma de um estado de mistura

$$\varrho = \cos^2(\theta/2)|0\rangle\langle 0| + \sin^2(\theta/2)|1\rangle\langle 1|, \quad (2.17)$$

e informa o resultado a Bob, que prepara o seu estado ao longo da mesma direção. Nesse caso, a fidelidade é a generalização para estados mistos, resultando em

$$F = \langle\psi|\varrho|\psi\rangle = \cos^4(\theta/2) + \sin^4(\theta/2), \quad (2.18)$$

<sup>k</sup> Forma mais geral para um estado definido na esfera de Bloch:  $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\varphi}\sin(\theta/2)|1\rangle$ . Equivalentemente,  $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ , onde  $\hat{\mathbf{n}} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$  [40].

<sup>1</sup> É importante enfatizar a diferença desse procedimento em relação à tomografia de estado quântico, na qual Alice dispõe de *muitas* cópias do estado, e realiza medidas em *diferentes* direções, reconstruindo completamente o estado [6, 47].

a qual, integrada numa distribuição uniforme de direcções na esfera de Bloch, resulta em  $\bar{F} = \frac{2}{3}$ , a Fidelidade Máxima de Teletransporte obtida por estratégias puramente clássicas [42, 44]. Finalmente, se Alice e Bob estão conectados tanto por um canal clássico como por um canal quântico ideal, a fidelidade obtida é 1, pois podem realizar o esquema de teletransporte padrão [42].

**Máxima Fração de Singlete.** Como mencionamos anteriormente, a Máxima Fração de Singlete, também denominada Fração Totalmente Emaranhada (*fully entangled fraction*), é uma medida de emaranhamento. Essa é também uma medida de fidelidade do estado, e faz parte da classe de medidas geométricas de emaranhamento. Falando estritamente, no entanto, não é exatamente uma medida de emaranhamento, pois não satisfaz nem mesmo a versão mais 'suave' da propriedade de discriminação (se  $\rho$  é separável,  $E(\rho) = 0$ ). Contudo, essa quantidade proporciona uma maneira conveniente de caracterizar a utilidade de um dado estado  $\rho$  para a realização de várias tarefas quânticas, por exemplo, teletransporte [3].

Para qualquer estado  $\rho$  definido no espaço de Hilbert  $d$ -dimensional  $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ , a quantidade  $f = \langle \Psi^- | \rho | \Psi^- \rangle$  define a chamada Fração de Singlete [4]. Essa quantidade pode ser maximizada, resultando na Fração Totalmente Emaranhada, definida originalmente em [26]:

$$f_{\max} = \max_{|\psi\rangle} \langle \psi | \rho | \psi \rangle, \quad (2.19)$$

na qual a maximização é realizada sobre todos os estados maximamente emaranhados  $|\psi\rangle = U_A \otimes U_B |\Psi^+\rangle$ , sendo [4]

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d |i\rangle |i\rangle, \quad (2.20)$$

o estado maximamente emaranhado<sup>m</sup> do espaço de Hilbert  $d$ -dimensional e  $U_A$  e  $U_B$  são transformações unitárias. Assim, em [29] foi demonstrado que estados deste espaço de Hilbert devem ter  $f_{\max} > 1/d$ , para serem úteis para a realização de teletransporte com fidelidade maior que a conseguida por estratégias puramente clássicas.

Especificamente para o caso  $d = 2$ , usando a representação no espaço de Hilbert-Schmidt, temos o estado arbitrário de dois *qubits* dado por [43]

$$\rho = \frac{1}{4} (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \sum_{n,m=1}^3 t_{nm} \sigma_n \otimes \sigma_m), \quad (2.21)$$

na qual  $\mathbb{1}$  é operador identidade,  $\{\sigma_n\}_{n=1}^3$  são os operadores de Pauli,  $\mathbf{r}(\mathbf{s}) \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 r(s)_i \sigma_i$ , são os vetores de Bloch tridimensionais, os quais são parâmetros locais que determinam as reduções de  $\rho$

$$\rho_A \equiv \text{tr}_B \rho = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad \rho_B \equiv \text{tr}_A \rho = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (2.22)$$

e os coeficientes

$$t_{nm} = \text{tr}(\rho \sigma_n \otimes \sigma_m), \quad (2.23)$$

<sup>m</sup> O estado  $|\Psi^+\rangle$  usado nesta definição geral da Fração de Singlete é na verdade uma transformação local do verdadeiro estado singlete  $|\Psi^-\rangle$  (base Bell  $d$ -dimensional). Essa modificação é realizada por ser mais conveniente para os cálculos [4].

formam uma matriz  $3 \times 3$  real, denotada por  $T$ . Tal matriz é responsável pelas correlações do estado do sistema. Assim, para encontrar a Máxima Fração de Singleto de um dado estado bipartido emaranhado, é suficiente encontrar rotações que diagonalizam  $T$  [48]. Para estados com  $T$  diagonal, a Máxima Fração de Singleto é dada por

$$f_{\max} = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + \sum_i |t_{ii}|) & \text{se } \det T \leq 0 \\ \frac{1}{4}(1 + \max_{i \neq k \neq j} (|t_{ii}| + |t_{jj}| - |t_{kk}|)) & \text{se } \det T > 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

cuja relação com a Fidelidade Máxima de Teletransporte é [29, 48]

$$F_{\max} = \frac{2f_{\max} + 1}{3}. \quad (2.25)$$

É importante destacar que a Fração Totalmente Emaranhada foi originalmente considerada em [26], onde os autores descrevem um algoritmo simples para calcular  $f_{\max}$ : Se escrevermos o estado  $\varrho$  na base mágica  $\{m_i\}$ ,  $f_{\max}$  é simplesmente o maior autovalor da parte real de  $\varrho$ , escrito nesta base. Portanto, um estado bipartido definido no espaço  $2 \times 2$  é inútil para teletransporte quando  $F_{\max} \leq \frac{2}{3}$ . É digno de nota que existem estados com fidelidade de teletransporte menor que a melhor estratégia clássica de ‘adivinhação’, mesmo sendo emaranhados.

## 2.2. Óptica Quântica

Nesta seção abordamos conceitos básicos da teoria quântica da luz. Nos concentramos nos principais tópicos estritamente relacionados aos estudos realizados na presente tese, os quais podem ser resumidos na chamada Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (CQED). Afortunadamente, atualmente existe um número cada vez mais expressivo de livros que versam bastante satisfatoriamente sobre os mais diversos conceitos de Óptica Quântica. Recomendamos [1, 49] para excelentes e recentes introduções históricas sobre essa surpreendente teoria. Assim como a confirmação experimental do deslocamento Lamb (*shift*) foi um estímulo para a Eletrodinâmica Quântica (QED) moderna [50], o denominado efeito Purcell pode ser considerado o marco para o crescente interesse em CQED, seguido pelo formidável desenvolvimento e brilhante estágio atual tanto teórico como experimental, até mais recentemente com o uso de materiais de estado sólido, que prometem revolucionar ainda mais esta área [1, 49]. O encanto de CQED é em parte devido ao fato desta ser considerada uma versão ‘domesticada’ da Teoria Quântica de Campos (QFT)<sup>n</sup>, permitindo inclusive que seja um primeiro contato com essa última, após um curso de Eletromagnetismo Clássico [51] e Mecânica Quântica [13, 52].

### 2.2.1. Campo Oscilante

Nos atemos agora aos principais pontos do procedimento de quantização do campo de radiação, conhecido como quantização canônica. A física do oscilador harmônico é a chave para obter um modelo

<sup>n</sup> Acrograma para Quantum Field Theory.

bastante simples para o campo eletromagnético quantizado.

**Campo Eletromagnético.** Usualmente, livros-texto de Óptica Quântica [5, 50, 53–59] iniciam a discussão sobre a quantização do campo de radiação apresentando as equações de Maxwell no espaço vazio (vácuo), ou seja, na ausência de cargas e correntes. Recomendamos o livro de Mandel e Wolf [53] como base para esse procedimento, no qual, usualmente, introduzimos os potenciais escalar  $\Phi(\mathbf{r})$  e vetorial  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , obtendo um conjunto menor de equações diferenciais de segunda ordem e, aproveitando a liberdade de escolha do *gauge* mais conveniente (o que resulta nos diferentes estilos de dedução encontrados na literatura), resolvemos a equação de onda para o potencial vetor (equivalente a resolver as equações de Maxwell para os campos elétrico e magnético). A idéia é escrever o potencial vetor para o campo eletromagnético, derivando as expressões para os vetores campo elétrico e magnético e substituir na expressão do Hamiltoniano para o campo eletromagnético, a qual se mostra formalmente equivalente ao Hamiltoniano de um oscilador harmônico simples de massa unitária. Para um campo (mono ou multi-modal) no espaço livre ou confinado num volume finito (cavidade) o procedimento é análogo.

**Quantização Canônica.** Com isso, podemos prontamente realizar a quantização canônica do campo de radiação tal como é feito para o oscilador harmônico. Denotando por  $|n_{\mathbf{k}s}\rangle$  o estado Fock (número) para o modo  $\mathbf{k}$  com polarização  $s$ , introduzimos os operadores criação  $a_{\mathbf{k}s}^\dagger$  e aniquilação  $a_{\mathbf{k}s}$  de fótons do campo, resumindo suas principais relações [5, 50, 53]

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}s}^\dagger, a_{\mathbf{k}'s'}^\dagger] &= 0, & [a_{\mathbf{k}s}, a_{\mathbf{k}'s'}] &= 0, & [a_{\mathbf{k}s}, a_{\mathbf{k}'s'}^\dagger] &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_{ss'}, \\ a_{\mathbf{k}s}^\dagger |n_{\mathbf{k}s}\rangle &= \sqrt{n_{\mathbf{k}s} + 1} |n_{\mathbf{k}s} + 1\rangle, & a_{\mathbf{k}s} |n_{\mathbf{k}s}\rangle &= \sqrt{n_{\mathbf{k}s}} |n_{\mathbf{k}s} - 1\rangle, & a_{\mathbf{k}s} |0\rangle &= 0, \\ n_{\mathbf{k}s} |n_{\mathbf{k}s}\rangle &\equiv a_{\mathbf{k}s}^\dagger a_{\mathbf{k}s} |n_{\mathbf{k}s}\rangle = n_{\mathbf{k}s} |n_{\mathbf{k}s}\rangle, \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde  $|0\rangle$  é o estado vácuo. O campo de radiação quantizado é dado por [50, 53, 55, 57, 60]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i \sum_{\mathbf{k}s} \mathcal{E}_{\mathbf{k}s} [e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\varphi)} a_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s}^* - e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\varphi)} a_{\mathbf{k}s} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s}], \quad (2.27)$$

sendo  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}s} = \sqrt{\hbar\omega_{\mathbf{k}s}/2\epsilon_0 V}$  o ‘campo elétrico por fóton’ no modo  $\mathbf{k}s$  [59], representando a amplitude do campo elétrico rms do vácuo no modo  $\mathbf{k}s$  e dependente apenas da frequência e do volume (geometria, no caso de uma cavidade) [1]. Portanto, a definição para o fóton no seu sentido mais estrito é [58]: a excitação de um modo do campo eletromagnético. O Hamiltoniano para (2.27) é dado por [50, 53, 55, 57, 58]

$$H_f = \sum_{\mathbf{k}s} \hbar\omega_{\mathbf{k}s} a_{\mathbf{k}s}^\dagger a_{\mathbf{k}s}, \quad (2.28)$$

o qual descreve a energia do fóton multiplicada pelo número de fótons do modo  $\mathbf{k}s$  (é usual redefinir o referencial de energia, eliminando o termo (constante)  $\sum_{\mathbf{k}s} \frac{1}{2} \hbar\omega_{\mathbf{k}s}$  devido às flutuações do vácuo, a denominada energia de ponto-zero). Os estados Fock (número)  $|n_{\mathbf{k}s}\rangle$  são os auto-estados do Hamiltoniano (2.28), tal que o espectro e todas as propriedades do campo de radiação derivam diretamente desse simples Hamiltoniano e das relações de comutação (2.26) para os operadores  $a_{\mathbf{k}s}^\dagger$  e  $a_{\mathbf{k}s}$  [1, 50]. No decorrer dessa tese, sempre que analisarmos um único modo do campo de radiação, omitiremos o índice  $\mathbf{k}s$ .

**Estado Coerente.** O estado coerente é de central importância em Mecânica Quântica, sendo o estado quântico que simula o movimento clássico de uma partícula num potencial quadrático [56], bem como o estado de um pacote de onda de mínima incerteza [61]. Existem diferentes maneiras equivalentes de se definir um estado coerente (ou estado Glauber), por exemplo, como sendo a radiação emitida por uma distribuição de corrente clássica [50]. Em Óptica Quântica, esse estado foi pioneiramente estudado por Glauber [62] e Klauder e Sudarshan [63]. Em particular, no contexto de campo eletromagnético quantizado, esse estado é facilmente gerado (definido) a partir do estado vácuo [47, 50, 55, 57]

$$|\alpha\rangle \equiv D(\alpha)|0\rangle, \quad (2.29)$$

ou seja, atuando o operador deslocamento de Glauber  $D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$  no estado vácuo, obtemos o estado coerente com uma amplitude  $\alpha$ . Uma definição equivalente à anterior pode ser obtida diretamente da equação de autovalor  $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$  [56], mediante o uso da relação de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH).

*Relação de Baker-Campbell-Hausdorff.* Para dois operadores  $A$  e  $B$

$$e^{zA} B e^{-zA} = \begin{cases} e^{z[A, \cdot]} B = \sum_n \frac{z^n}{n!} [A, \cdot]^n B = \sum_n \frac{z^{2n}}{(2n)!} [A, \cdot]^{2n} B + \sum_n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} [A, \cdot]^{2n+1} B \\ e^{ic[A, \cdot]} B = \cos(c[A, \cdot])B + i \sin(c[A, \cdot])B, \quad \text{para } z = ic \end{cases}, \quad (2.30)$$

é a relação de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH), na qual usamos a notação de super-operadores. Alternativamente, (2.30) pode ser reescrita como

$$[e^{zA}, B] = e^{z[A, \cdot]} B e^{zA} \quad \text{ou} \quad [B e^{-zA}, \cdot] = e^{-zA} e^{z[A, \cdot]} B, \quad (2.31)$$

e, quando  $A$  e  $B$  comutam com  $[A, B]$ , temos a relação multiplicativa usual [53, 55, 56, 61]

$$e^{z(A+B)} = e^{zA} e^{zB} e^{-\frac{1}{2}z^2[A, B]} = e^{zB} e^{zA} e^{\frac{1}{2}z^2[A, B]}, \quad (2.32)$$

na qual observamos o fator extra para a comutação de exponenciais de operadores

$$e^{zA} e^{zB} = e^{zB} e^{zA} e^{z^2[A, B]}. \quad (2.33)$$

*Propriedades.* Usando a relação (2.32), observando que  $e^{\alpha^* a} |0\rangle = |0\rangle$ , obtemos a representação de  $|\alpha\rangle$  em termos do estado Fock  $|n\rangle$  [56]

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} a^{\dagger n} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.34)$$

Dentre outras muitas propriedades dos estados coerentes, as quais são usualmente encontradas nos livros sobre o assunto assim como em livros de Óptica Quântica, citamos a relação de identidade (fecha-

mento)

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbf{1}, \quad (2.35)$$

a não-ortogonalidade (produto interno)

$$\langle \beta | \alpha \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\beta - \alpha|^2} = e^{-\frac{1}{2}(|\beta|^2 + |\alpha|^2) + \beta^* \alpha}, \quad (2.36)$$

e a expansão em termos de estados coerentes

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\beta |\beta\rangle \langle \beta | \alpha \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\beta e^{-\frac{1}{2}|\beta - \alpha|^2} |\beta\rangle, \quad (2.37)$$

a qual implica que estes estados formam um conjunto sobre-completo. Usando a relação (2.30), podemos provar as identidades

$$D(\alpha) \mathbf{a} D(-\alpha) = \mathbf{a} - \alpha, \quad D(\alpha) D(\beta) = D(\alpha + \beta) e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)}, \quad D(\alpha) |\beta\rangle = e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)} |\alpha + \beta\rangle, \quad (2.38)$$

as quais desempenham um papel importante em Óptica Quântica, por exemplo, para descrever técnicas de detecção homódina [1], bem como para a implementação de medida do campo coerente de uma cavidade, conforme descreveremos no capítulo 4. Também úteis para os desenvolvimentos obtidos nessa tese, temos as relações

$$\int d^2\beta |\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = \pi \quad \text{e} \quad \int d^2\beta \langle \beta | \alpha \rangle \langle -\alpha | \beta \rangle = \pi e^{-2|\alpha|^2}. \quad (2.39)$$

### 2.2.2. Sistema de Spin

A física descrita por modelos para o campo eletromagnético quantizado é bastante rica, mas sozinha não é suficiente para obter vários efeitos em Óptica Quântica [1]. A interação da radiação com a matéria é que permite um acesso realmente completo a todo o potencial da Mecânica Quântica. O sistema massivo mais simples que se pode considerar é o denominado átomo de dois-níveis e resumimos agora o modelo que o descreve, análogo ao usado para um sistema de  $spin-\frac{1}{2}$  [5, 61].

**Átomo de Dois-Níveis.** O átomo de dois-níveis é descrito por um nível eletrônico superior (excitado)  $|e\rangle$  e um nível inferior (fundamental)  $|g\rangle$ , conectados por uma transição de dipolo elétrico a uma frequência  $\omega_{eg}$ . O átomo é modelado como um sistema de (pseudo)  $spin-\frac{1}{2}$ , com energias  $E_e$  e  $E_g$ , sendo a diferença de energia dada por  $E_e - E_g = \hbar\omega_{eg}$ . Em analogia com o sistema de  $spin-\frac{1}{2}$ , consideramos o átomo de dois-níveis com um elétron de carga  $q$  e massa  $m_q$  sob a ação de um potencial de força central  $V(r)$ , onde  $r = |\mathbf{r}|$  é a posição do elétron em relação à origem do potencial (simetria esférica) [5]. O Hamiltoniano do átomo de dois-níveis é então dado por

$$\mathbf{H}_a = \frac{\mathbf{p}_q^2}{2m_q} + V(r), \quad (2.40)$$

onde  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$  é o operador momento do elétron.

A solução do sistema é obtida resolvendo a equação de Schrödinger para o Hamiltoniano (2.40), após a escolha do *gauge* de Coulomb<sup>o</sup>, de onde identificamos o operador momento angular orbital. Apesar de ser possível obter uma interpretação clássica para o *spin*, esta não é uma analogia estritamente válida de um ente girante dentro do elétron [5]. Assim, consideramos o momento angular intrínseco (de *spin*), o qual obedece a álgebra de momento angular usual, com o operador *spin* dado por  $s \equiv \frac{1}{2}\sigma$ , definido pela soma dos quadrados dos operadores de Pauli  $\sigma^x$ ,  $\sigma^y$  e  $\sigma^z$ . Assim, o elétron possui um momento magnético interno  $\mu_q$  relacionado ao *spin* por  $\mu_q = \mu_B\sigma$ , onde  $\mu_B = -q\hbar/2m_qc$  é o magnéton de Bohr [5, 61].

Logo, escrevendo o Hamiltoniano em termos dos operadores *spin* (Pauli), temos [1, 5, 61]

$$\mathbf{H}_a = \hbar\omega_{eg}\sigma^+\sigma^- = \frac{1}{2}(E_e + E_g) + \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}(\sigma^+\sigma^- - \sigma^-\sigma^+) \rightarrow \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\sigma^z, \quad (2.41)$$

na qual usamos a relação de fechamento  $|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| = \mathbf{1}$  e escolhemos o zero de energia na metade do caminho (energia média) entre os dois níveis. Os dois níveis são auto-estados do operador inversão  $\sigma^z$ , com os operadores abaixamento  $\sigma^- = |g\rangle\langle e|$  e levantamento  $\sigma^+ = |e\rangle\langle g|$  de excitação eletrônica do átomo e as relações de comutação e anti-comutação usuais [61]

$$\begin{aligned} [\sigma^-, \sigma^z] &= 2\sigma^-, & [\sigma^+, \sigma^z] &= -2\sigma^+, & [\sigma^+, \sigma^-] &= \sigma^z, \\ \{\sigma^-, \sigma^z\} &= 0, & \{\sigma^+, \sigma^z\} &= 0, & \{\sigma^+, \sigma^-\} &= \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

**Qubits.** Seguindo a convenção em Informação Quântica, consideramos a correspondência  $|e\rangle \rightarrow |0\rangle$  e  $|g\rangle \rightarrow |1\rangle$ , tal que a ação dos operadores *spin* é

$$\begin{aligned} \sigma^z|e\rangle &= \sigma^z|0\rangle = |e\rangle = |0\rangle, & \sigma^z|g\rangle &= \sigma^z|1\rangle = -|g\rangle = -|1\rangle, \\ \sigma^-|e\rangle &= \sigma^-|0\rangle = |g\rangle = |1\rangle, & \sigma^+|g\rangle &= \sigma^+|1\rangle = |e\rangle = |0\rangle, \\ \sigma^-|g\rangle &= \sigma^-|1\rangle = 0, & \sigma^+|e\rangle &= \sigma^+|0\rangle = 0, \end{aligned} \quad (2.43)$$

o que pode gerar alguma confusão inicial, pois em Óptica Quântica é usual fazer a correspondência inversa [1, 6].

**Aproximação de Dipolo Elétrico.** Até aqui tratamos átomo e campo separadamente. O acoplamento do campo de radiação com a matéria é um dos tópicos essenciais em Óptica Quântica. Na presença de um campo eletromagnético clássico, e no *gauge* de Coulomb<sup>p</sup>, o Hamiltoniano (2.41) é modificado para [1, 5, 55, 61]

$$\mathbf{H}_{af} = \frac{1}{2m_q} [\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r})]^2 + V(r), \quad (2.44)$$

<sup>o</sup> Este *gauge* não é relativisticamente invariante, em contraste com o *gauge* de Lorentz, contudo, em Óptica Quântica, na maior parte dos casos, é não-relativística, e não temos nenhuma inconsistência [55].

<sup>p</sup> Neste *gauge*, o campo, considerado longe de suas fontes, é descrito por um potencial vetor não-divergente, ou seja,  $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ , tal que o seu potencial escalar pode ser desprezado [1].

onde  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  é o potencial vetor do campo na posição do elétron. Devido ao *gauge* de Coulomb, temos a identidade comutativa  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{p}$ , tal que podemos separar o Hamiltoniano livre do Hamiltoniano de interação em (2.44). Resolvendo a equação de onda para o potencial vetor, vemos que este depende de  $\mathbf{r}$  através de funções exponenciais do produto escalar  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ . Assim, podemos considerar que, comparado ao raio de Bohr  $a_0$ , o comprimento de onda do campo de radiação descrito pelo potencial vetor é suficientemente grande, tal que  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{A}(0) \equiv \mathbf{A}$  é espacialmente uniforme ( $a_0 \ll \lambda$ ). Isso equivale a fazer  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \lesssim ka_0 \ll 1$ , na chamada aproximação de dipolo e obter o Hamiltoniano átomo-campo

$$H_{af} = H_0 - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.45)$$

onde  $H_0$  é o Hamiltoniano livre (2.41), o vetor campo elétrico  $\mathbf{E}$  é resolvido na posição do átomo e  $\mathbf{d} = q\mathbf{r}$  é o vetor de dipolo atômico [1, 5, 55].

**Oscilação de Rabi.** A habilidade de preparar e manipular o *spin* num estado qualquer da esfera de Bloch é essencial para a implementação de diversos experimentos em Óptica Quântica. Esta manipulação é possível realizando rotações (transformações) unitárias induzidas por campos clássicos ressonantes ou quase ressonantes com a transição atômica [1]. Para obter tais operações unitárias, consideramos o campo clássico

$$\mathbf{E}_c = -i\mathcal{E}_c [\hat{\mathbf{e}}_c^* e^{i(\omega_c t + \varphi')} - \hat{\mathbf{e}}_c e^{-i(\omega_c t + \varphi')}], \quad (2.46)$$

na equação (2.44), sendo  $\mathcal{E}_c$ ,  $\omega_c$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_c$ , e  $\varphi'$ , respectivamente, a amplitude, frequência, versor de polarização e fase do campo. Supondo níveis de paridades opostas, o operador dipolo atômico  $\mathbf{d}$  é puramente não-diagonal no espaço de Hilbert expandido pelos níveis atômicos de acordo com [1]

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}\sigma^+ + \mathbf{d}^*\sigma^-, \quad (2.47)$$

onde  $\mathbf{d} = d\hat{\mathbf{d}} = q\langle g|\mathbf{r}|e\rangle$ , e  $d$  são os elementos de matriz do momento de dipolo de transição e  $\hat{\mathbf{d}}$  é o versor de polarização atômica. Para os versores do sistema cartesiano temos  $\hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}})$ , para uma transição circularmente polarizada- $\sigma^\pm$ . Uma transição polarizada- $\pi$  corresponde a  $\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{z}}$  [1].

Fazendo uma mudança para a representação de interação, o Hamiltoniano torna-se independente do tempo. Dois dos quatro termos resultantes da expansão de  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_c$  oscilam rapidamente no tempo com frequência  $\pm 2\omega_c$ , e podem ser desprezados na chamada aproximação de onda girante. Assim, obtemos o denominado modelo de Rabi, com o Hamiltoniano [1]

$$H_{\text{Rabi}} = \frac{1}{2}\Delta\sigma^z + \frac{1}{2}i\hbar\Omega(e^{i\varphi}\sigma^- - e^{-i\varphi}\sigma^+), \quad (2.48)$$

no qual  $\Delta = \omega_{eg} - \omega_c$  é a dessintonia átomo-campo e

$$\Omega = 2\frac{d}{\hbar\mathcal{E}_c}\hat{\mathbf{d}}^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_c e^{i\varphi_0}, \quad (2.49)$$

é a frequência de Rabi clássica, onde fizemos  $\varphi' = \varphi + \varphi_0$ , para ajustar  $\Omega$  tal que seja real e positiva [1].

No caso ressonante, a oscilação de Rabi é uma mera rotação de *spin*, permitindo preparar de maneira simples um estado qualquer na esfera de Bloch. Para um tempo de interação, ou seja, um pulso  $\Omega t = \theta$ , temos a rotação arbitrária [1]

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -e^{-i\varphi} \sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Assim, o átomo pode ser manipulado por campos clássicos e preparado num estado de superposição arbitrário. Em particular, um pulso- $\pi/2$  corresponde a  $\Omega t = \pi/2$  e resulta em

$$|e\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + e^{i\varphi}|g\rangle), \quad |g\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-e^{-i\varphi}|e\rangle + |g\rangle), \quad (2.51)$$

ou seja, essa transformação superpõe  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  com pesos iguais (superposição coerente atômica). O pulso- $\pi/2$  representa um papel importante em interferometria atômica de Ramsey, se comportando como um divisor de feixe (*beam-splitter*) para o estado atômico [1]. A ação de um pulso- $\pi$  resulta em  $|e\rangle \rightarrow e^{i\varphi}|g\rangle$  e  $|g\rangle \rightarrow -e^{-i\varphi}|e\rangle$ , enquanto que a ação de um pulso- $2\pi$  resulta em  $|e\rangle \rightarrow -|e\rangle$  e  $|g\rangle \rightarrow -|g\rangle$  (mesma energia atômica) [1]. Portanto, para obter exatamente o mesmo estado inicial, devemos realizar um pulso- $4\pi$  (duas voltas completas na esfera de Bloch)<sup>9</sup>. A combinação de dois pulsos de campos clássicos (pulsos- $\pi/2$ ), consiste num interferômetro de Ramsey atômico (também conhecido como zona de Ramsey), análogo ao interferômetro de Mach-Zehnder [1].

### 2.2.3. Eletrodinâmica Quântica de Cavidades

Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (CQED) pode ser definida como a física de um *spin* e um oscilador [1]. Esse é um exemplo dos sistemas físicos que têm possibilitado trazer os famosos experimentos de pensamento para o mundo real. No entanto, a realização experimental aparentemente simples encontra sérios impedimentos, ainda longe de serem totalmente resolvidos pela tecnologia atual.

**Emissão Espontânea.** No Hamiltoniano (2.28) omitimos um termo de energia constante, denominada energia de ponto-zero, a energia das flutuações do vácuo. Essa energia é responsável por muitos efeitos que não podem ser explicados com campos clássicos, como a emissão espontânea, o efeito Casimir e o deslocamento Lamb (*shift*) [50, 58, 64]. Nos anos iniciais, a CQED era desenvolvida em paralelo com a teoria de super-radiância, quando ainda se consideravam átomos (no plural) entre espelhos ou em cavidades com  $Q$  moderados, e um dos objetivos almejados era analisar os efeitos nas propriedades radiativas de átomos, causados pelo confinamento do vácuo em cavidades, resultando no aumento ou inibição da taxa de emissão espontânea ou modificações do deslocamento Lamb (*shift*) [1].

**Emissão Espontânea no Espaço Livre.** Para um átomo de dois níveis, a emissão espontânea é o salto de um elétron do nível  $|e\rangle$  para o nível  $|g\rangle$  com emissão de um fóton. Durante muitos anos a emissão espontânea atômica foi considerada uma propriedade intrínseca da matéria [60, 64]. No apêndice B apresentamos

<sup>9</sup> Didaticamente ilustrado na famosa ‘experiência do copo d’água’ de Davidovich.

com mais detalhes o procedimento usual para obter a equação mestra (na forma de Lindblad) que descreve as propriedades estatísticas da emissão espontânea de átomos de dois-níveis no espaço livre. Para um átomo de dois-níveis com dipolo elétrico  $d$ , a taxa de emissão espontânea no espaço livre (vácuo), ou seja, a probabilidade  $\gamma_0$  de emissão de um fóton por unidade de tempo (o coeficiente  $A$  de Einstein) é obtida da regra de ouro de Fermi [1, 64]

$$\gamma_0 = \frac{\omega^3 d^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3}. \quad (2.52)$$

Essa probabilidade pode ser aumentada ou inibida, dependendo das propriedades do ambiente em que o átomo se encontra [60, 64].

*Emissão Espontânea numa Cavidade.* A estrutura de modos do campo é dramaticamente alterada numa cavidade cujo tamanho é pequeno comparado ao espaço livre. Se a cavidade está ressonante com a transição atômica, temos essencialmente a presença de um único modo do campo, distribuído sobre a largura  $\Delta\omega = \omega/Q$ , tal que sua largura de banda é convenientemente descrita pelo fator de qualidade  $Q$  (regime de microondas<sup>r</sup>). Na situação de super-amortecimento, a emissão espontânea do átomo numa cavidade é dada por [1]

$$\gamma = \eta\gamma_0, \quad \eta = \frac{3}{4\pi^2} \frac{Q\lambda^3}{V}, \quad (2.53)$$

onde  $\lambda = 2\pi c/\omega$  é o comprimento de onda do campo da cavidade, ressonante com a transição atômica [1]. Assim, para valores de  $Q$  e  $V$  satisfazendo  $\eta \gg 1$  e  $Q \ll \omega/4g$ , a taxa de emissão espontânea do átomo pode ser enormemente aumentada em relação ao valor obtido no espaço livre, o denominado efeito Purcell, primeiramente observado no contexto de ressonância magnética [1, 5, 60, 64].

Por outro lado, a taxa de emissão espontânea atômica pode ser também inibida. Por exemplo, isso é obtido com uma cavidade em grande dessintonia com a transição atômica. Assim, para uma cavidade com alto  $Q$ ,  $\gamma$  é significativamente reduzida [60]. Os efeitos de aumento e inibição de  $\gamma$  têm sido observados por vários grupos tanto no regime de microondas como óptico [64].

Quando  $Q$  se aproxima do valor correspondente à transição para o regime de acoplamento forte ( $Q = \omega/4g$ ), o que corresponde a um acoplamento átomo-campo muito maior que a largura de linha tanto do átomo como do campo, a relação (2.53) não é mais válida, e o regime de super-amortecimento irreversível se transforma continuamente no regime oscilatório [1].

*Modelo de Jaynes-Cummings.* Com o subsequente desenvolvimento de cavidades (ressonadores) melhores, o acoplamento do átomo com um modo do campo na cavidade (devido ao aumento do fator de qualidade  $Q$ ) tornou-se um efeito dominante na evolução do sistema. As propriedades radiativas neste regime de forte acoplamento manifestam comportamento totalmente diferentes daqueles observados no espaço livre [1, 64]. Como exemplo, a emissão espontânea é reversível, sendo substituída pela denominada oscilação de Rabi quântica [1].

<sup>r</sup> No domínio óptico de frequências, *finesse*  $F$  [65].

O modelo que descreve o acoplamento de um átomo de dois-níveis, modelado por um sistema de *spin*- $\frac{1}{2}$  e um campo de radiação quantizado, modelado por um oscilador harmônico, é também utilizado, com poucas modificações, em muitos outros sistemas físicos, por exemplo, em estado sólido. Historicamente, o modelo foi introduzido por Jaynes e Cummings [66] como uma idealização da interação átomo-campo no espaço livre, tornando-se uma descrição bastante precisa das situações experimentais reais, devido aos recentes avanços em CQED [1].

Considerando apenas um modo do campo eletromagnético e a aproximação de dipolo elétrico, a versão completamente quântica do modelo de Rabi é conhecida como modelo de Jaynes-Cummings (JCM)<sup>s</sup>, cujo Hamiltoniano é dado por

$$\mathbf{H}_{\text{JCM}} = \hbar\omega \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg} \sigma^z - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.54)$$

no qual  $\mathbf{E}$  é o operador campo elétrico na posição do átomo. Aqui tratamos o caso simplificado em que o átomo passa pelo centro da cavidade [1].

*Aproximação de Onda Girante.* A expansão do produto escalar do Hamiltoniano de interação átomo-campo (2.54), na aproximação de dipolo elétrico, resulta em quatro termos. O termo proporcional a  $\mathbf{a}^\dagger \sigma^+$  ( $\mathbf{a} \sigma^-$ ) corresponde à transição de  $|g\rangle$  ( $|e\rangle$ ) para  $|e\rangle$  ( $|g\rangle$ ) com a criação (aniquilação) de um fóton. Quando as frequências  $\omega_{eg}$  e  $\omega$  estão próximas da ressonância, esses dois termos correspondem a processos altamente não-ressonantes e contribuem com mínimas alterações na dinâmica, quando comparado com os termos proporcionais a  $\mathbf{a}^\dagger \sigma^-$  e  $\mathbf{a} \sigma^+$ , responsáveis pela dinâmica usual de emissão e absorção de fóton [1]. Podemos então desprezar os termos não-ressonantes (contra-girantes), na chamada aproximação de onda girante (RWA)<sup>t</sup>, a qual utilizamos também para obter o modelo de Rabi clássico. Logo, considerando um campo mono-modo e  $\varphi = 0$  na equação(2.27), o Hamiltoniano átomo-campo se reduz a

$$\mathbf{H}_{\text{JCM}} = \hbar\omega \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg} \sigma^z + i\hbar g (\mathbf{a}^\dagger \sigma^- - \mathbf{a} \sigma^+), \quad (2.55)$$

no qual introduzimos a ‘frequência de Rabi do vácuo’<sup>u</sup>

$$\mathbf{g} = \frac{d\mathcal{E}}{\hbar} \hat{\mathbf{d}}^* \cdot \hat{\mathbf{e}}, \quad (2.56)$$

a qual mede a intensidade do acoplamento átomo-campo, proporcional à energia de interação do dipolo atômico e um campo clássico com amplitude do vácuo na cavidade [1].

*Estados Vestidos.* Existem muitas maneiras de se resolver a dinâmica do modelo de Jaynes-Cummings [1, 5, 50, 55–57, 59]. Um procedimento importante consiste em encontrar os estados estacionários do modelo. Os auto-estados ‘desacoplados’ (‘nus’) do Hamiltoniano livre são  $|e, n\rangle$  e  $|g, n\rangle$  com auto-energias  $\hbar(n\omega \pm \frac{1}{2}\omega_{eg})$ . Quando a dessintonia átomo-campo  $\Delta = \omega_{eg} - \omega$  ( $\Delta \geq 0$ ) é nula ou pequena, comparada a  $\omega$ , os estados ‘nus’  $|e, n\rangle$  e  $|g, n+1\rangle$  são degenerados ou quase-degenerados e, a menos do estado  $|g, 0\rangle$ ,

<sup>s</sup> Acrograma para Jaynes-Cummings Model.

<sup>t</sup> Acrograma para Rotating Wave Approximation.

<sup>u</sup> Por simplicidade, consideramos  $\hat{\mathbf{d}}^* \cdot \hat{\mathbf{e}}$  reais e, portanto,  $g$  [1].

formam uma ‘escada’ infinita de níveis dubletos de energia, separados pela energia  $\hbar\omega$  com a diferença de energia entre dubletos  $|e, n\rangle$  e  $|g, n+1\rangle$  dada por  $\hbar\Delta$  [1]. O operador número total de excitação  $N = a^\dagger a + \sigma^+ \sigma^-$ , é uma constante do movimento, já que  $[N, H_{\text{JCM}}] = 0$ .

Uma vez que o espaço de Hilbert desse modelo é expandido por  $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , podemos escrever o Hamiltoniano (2.55) como a soma em  $H_n$ , o Hamiltoniano para o  $n$ -ésimo dubleto. Introduzindo a frequência de Rabi de  $n$ -fótons  $g_n = g\sqrt{n+1}$ , podemos escrever  $H_n$  na forma matricial

$$H_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})\mathbf{1} + \frac{1}{2}\hbar(\Delta\sigma^z + g_n\sigma^y). \quad (2.57)$$

Assim, obtemos as auto-energias de  $H_n$  [1]

$$E_n^\pm = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \pm \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\Delta^2 + g_n^2}, \quad (2.58)$$

com os auto-vetores, os denominados ‘estados vestidos’

$$\begin{aligned} |+, n\rangle &= \cos(\theta_n/2)|e, n\rangle + i\sin(\theta_n/2)|g, n+1\rangle, \\ |-, n\rangle &= \sin(\theta_n/2)|e, n\rangle - i\cos(\theta_n/2)|g, n+1\rangle, \end{aligned} \quad (2.59)$$

sendo  $\theta_n = \arctan(g_n/\Delta)$  o ângulo com a direção  $\hat{z}$  na esfera de Bloch [1].

*JCM Ressonante.* No caso ressonante,  $\theta_n = \pi/2$  para todo  $n$ , tal que os estados vestidos ficam separados pela energia  $\hbar g_n$  e são dados por

$$|\pm, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, n\rangle \pm i|g, n+1\rangle). \quad (2.60)$$

A separação desses estados corresponde à frequência de troca de energia átomo-campo, podendo ser interpretada como a versão quântica da oscilação de Rabi [1].

*JCM Dispersivo.* Um fenômeno notável, que pode ser interpretado como efeitos de índice de refração de um átomo, são obtidos para o sistema átomo-campo não-ressonante. Para  $\Delta \gg g_n$ , os estados vestidos tendem para os estados ‘nus’. No limite  $\Delta \rightarrow \infty$   $|+, n\rangle \rightarrow |e, n\rangle$  e  $|-, n\rangle \rightarrow |g, n+1\rangle$ , donde concluímos que a probabilidade de transição atômica seguida de absorção ou emissão de fóton é desprezível [1]. Contudo as auto-energias dos estados vestidos e ‘nus’ ainda são ligeiramente diferentes, como mostrado na expansão até primeira ordem nas potências de  $g_n/\Delta$

$$E_n^\pm = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \pm \frac{1}{2}\hbar(\frac{1}{2}\Delta + g_n^2/\Delta), \quad (2.61)$$

cujo efeito é o deslocamento de energia em dois dubletos adjacentes do sistema átomo-campo [1]. Quantitativamente, observamos o deslocamento  $\Delta_{e,n} = \hbar(n+1)\lambda$  para  $|e, n\rangle$  e  $\Delta_{g,n} = -\hbar n\lambda$  para  $|g, n\rangle$  com  $\lambda = g^2/\Delta$ , dependendo do estado do átomo. O Hamiltoniano efetivo é dado por [1]

$$\mathbf{H}_{\text{JCM}}^{\text{eff}} = \hbar\omega \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg} \sigma^z + \hbar\lambda(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \sigma^z + \sigma^+ \sigma^-), \quad (2.62)$$

no qual o efeito de índice de refração atômico é válido apenas quando o limite dispersivo é satisfeito, ou seja,  $\Delta \gg g_n$ , implicando que é um efeito linear contanto que o número de fótons não seja muito grande  $n \ll (\Delta/g)^2$ . Se isso não for satisfeito, o espaçamento entre os níveis  $|+, n\rangle$  e  $|+, n+1\rangle$  se torna dependente de  $n$ , não sendo possível definir uma frequência  $\omega$  independente da intensidade [1].

*Átomos e Cavidades.* Os experimentos para o modelo de Jaynes-Cummings são geralmente realizados com cavidades de microondas<sup>v</sup> super-condutoras e átomos de Rydberg com máximo momento angular eletrônico (estados ‘circulares’). Essa constitui uma realização quase ideal do modelo [1]. Muitos outros detalhes experimentais sobre esses átomos e cavidades supercondutoras, bem como alguns dos mais importantes experimentos realizados nesse contexto, podem ser encontrados no excelente livro texto [1], fonte principal das linhas dessa tese até aqui, bem como em [49, 60, 67, 68].

*Átomos circulares de Rydberg.* Átomos de Rydberg [68] são ferramentas magníficas nesses experimentos, devido ao fato de que possuem um alto dipolo elétrico e por serem bastante estáveis, com tempo de vida na cavidade correspondente a  $T_{\text{at}} = 30$  ms, bem como terem seus estados medidos seletivamente por detectores de ionização de campo de maneira bastante eficiente [1]. O átomo de Rubídio é o mais utilizado nesses experimentos, com três níveis circulares relevantes:  $|e\rangle$  (|51C)),  $|g\rangle$  (|50C)) e  $|i\rangle$  (|49C)), este último usado como referência em alguns experimentos [1]. A frequência de transição atômica é  $\omega_{eg}/2\pi = 51.099$  GHz, com um alto elemento de matriz de dipolo  $d = 1775|q|a_0$ . Nesses experimentos, os átomos circulares de Rydberg representam vários papéis, podendo atuar como fontes, divisores de feixe ou detectores para o campo [1].

*Cavidades Super-Conductoras.* O aprisionamento de fótons de microondas em cavidades (fechadas) super-condutoras de nióbio de altíssimo-Q tem sido decisivo para os atuais experimentos em CQED<sup>v</sup>. No domínio de microondas, os melhores refletores são metais super-condutores, os de nióbio produzindo os mais altos fatores de qualidade  $Q$  [1]. Os experimentos mais recentes em CQED com átomos de Rydberg, usam cavidades de Fabry-Perot abertas, para que os átomos possam ser manipulados (mantendo a estabilidade) por campos estáticos. Essas cavidades possuem dois espelhos esféricos altamente polidos, com as faces paralelas entre si, pelos quais se aplica uma voltagem produzindo um campo praticamente homogêneo no interior da cavidade, esta com  $D = 50$  mm de diâmetro,  $R = 40$  mm de raio de curvatura,  $L = 27$  mm de largura ( $\approx k\lambda/2$ ,  $\lambda$  sendo o comprimento de onda associado ao modo do campo na cavidade) e com frequência ressonante próxima da transição atômica  $|51C\rangle \rightarrow |50C\rangle$  (51 GHz) [1]. Bastante recentemente, foi construída, por um dos grupos experimentais mais ativos atualmente [69], uma cavidade super-condutora de nióbio (ressonador de microondas Fabry-Perot) com uma técnica especial de fabricação, para o qual o tempo de armazenamento de fótons é  $T_{\text{cav}} = 130$  ms, a 51 GHz e 0.8 K, correspondendo a uma *finesse*  $F = 4.6 \times 10^9$ , a maior jamais alcançada em qualquer domínio de frequências, um resultado que trás inúmeras perspectivas para processamento de informação quântica, perda de

<sup>v</sup> Paralelamente um desenvolvimento semelhante tem sido observado no domínio óptico de frequências [65].

coerência e estudos de não-localidade [69, 70]. Com isso, agora podemos falar de cavidades de micro-ondas armazenando fótons num tempo entre um milésimo e pouco mais de um décimo de segundo, ou seja, de 3 até 5 vezes maior que o tempo de decaimento dos átomos, enquanto que o período de Rabi pode ser tão curto quanto algumas dezenas de nano-segundos, satisfazendo plenamente o regime de forte acoplamento [1, 69].

Atualmente, a CQED tem atraído cada vez mais o interesse da comunidade de física do estado-sólido. Progressivamente, os fundamentos de CQED estão sendo aplicados no campo da optrônica, que estende a tecnologia de semicondutores para a óptica, o que promete revolucionar ainda mais esta fascinante área da física [1, 5, 49].

---

### 3. EMARANHAMENTO E TELETRANSPORTE SOB EMISSÃO ESPONTÂNEA

---



implementação prática de teletransporte requer um alto grau de controle sobre sistemas físicos. CQED foi o cenário para a primeira proposta teórica de teletransporte [71]. O primeiro teletransporte experimental relatado fez uso de pares de fótons correlacionados, produzidos por conversão paramétrica descendente [72]. Desde então, teletransporte tem sido realizado numa grande variedade de sistemas [73–80]. Em CQED, uma das propostas mais interessantes é baseada na interação dispersiva de dois átomos idênticos com um campo mono-modo de uma cavidade (colisões atômicas auxiliadas pela cavidade) [81]. No caso ideal, este processo resultaria na geração de estados perfeitamente emaranhados (canal sem-ruído).

Do ponto de vista experimental, apesar de o teletransporte usando esse sistema não ter ainda sido realizado, o acoplamento coerente entre átomos numa cavidade já foi demonstrado [82]. Imperfeições experimentais, como por exemplo, colisões de três átomos, fazem com que a fidelidade e o grau de emaranhamento do estado gerado diminuam, e estes efeitos destrutivos podem ser indiretamente vistos nas probabilidades de detecção conjunta, experimentalmente acessíveis. No experimento da referência [82], dois átomos de Rydberg atravessam uma cavidade não-ressonante e se tornam emaranhados pela emissão e absorção virtual de fótons da cavidade. Como consequência, tal procedimento é suposto insensível a fótons térmicos e perda de fótons da cavidade. Contudo, a existência de mecanismos de perda de coerência para os átomos, tais como emissão espontânea, podem trazer efeitos destrutivos. Se um dos átomos decai, o estado global atômico torna-se separável e todo o emaranhamento é perdido.

Neste capítulo, incluímos a emissão espontânea no sistema de átomos de dois-níveis interagindo com um campo de uma cavidade e analisamos o problema da geração de estados maximamente emaranhados, bem como a utilidade para teletransporte. Calculamos as probabilidades de detecção conjunta e analisamos a dependência com relação à taxa de decaimento atômico, para diferentes dessintonias átomo-campo. Uma vez que a emissão espontânea leva o sistema de átomos de dois-níveis para um estado misto, destacamos o principal resultado desse capítulo: o limite superior para o valor da taxa de emissão espontânea, abaixo do qual ainda é possível realizar teletransporte usando este canal ruidoso em particular.

Gostaríamos de chamar atenção para o fato de que embora a dissipação normalmente tenha efeitos destrutivos na coerência quântica, ela também pode permitir a geração de estados atômicos emaranhados [83] e estados não-clássicos do movimento vibratório de um íon aprisionado [84]. Em outros estudos é mostrado que uma condução adequada do sistema pode compensar as perdas, produzindo a estabilização do emaranhamento entre os átomos [85], bem como se considerarmos interação dipolar direta do sistema atômico [86, 87].

### 3.1. Átomos Emaranhados com o Auxílio de uma Caverna

Nesta seção, consideramos um sistema que consiste de dois átomos idênticos de dois-níveis interagindo com um campo eletromagnético quantizado encerrado numa caverna de alto fator  $Q$  [88, 89], conforme esquematizado na figura 2. O modelo que descreve esse sistema é conhecido como Modelo de Tavis-Cummings (TCM) [90, 91], uma generalização do Modelo de Jaynes-Cummings (JCM) [66] para mais de um átomo.

O Hamiltoniano para esse sistema, na representação de Schrödinger, considerando as aproximações de onda girante (RWA) e de dipolo, é dado por [81]

$$\mathbf{H}_{\text{TCM}} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\text{int}}, \quad (3.1)$$

com

$$\mathbf{H}_0 = \hbar\omega \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2} \hbar\omega_{eg} (\sigma_1^z + \sigma_2^z), \quad (3.2)$$

e

$$\mathbf{H}_{\text{int}} = \hbar g [\mathbf{a}^\dagger (\sigma_1^- + \sigma_2^-) + \mathbf{a} (\sigma_1^+ + \sigma_2^+)], \quad (3.3)$$

onde  $g$  é a constante de acoplamento átomo-campo,  $\mathbf{a}^\dagger$  e  $\mathbf{a}$  são os operadores criação e aniquilação de fótons no modo do campo da caverna,  $\sigma_i^z = \sigma_i^+ \sigma_i^- - \sigma_i^- \sigma_i^+$ ,  $\sigma_i^- = |g_i\rangle\langle e_i|$  e  $\sigma_i^+ = |e_i\rangle\langle g_i|$  são, respectivamente os operadores inversão, abaixamento e levantamento de excitação eletrônica, sendo  $|g_i\rangle$  ( $|e_i\rangle$ ) o estado fundamental (excitado) do átomo  $i$  e  $\delta = \omega_{eg} - \omega$  é a dessintonia átomo-campo.

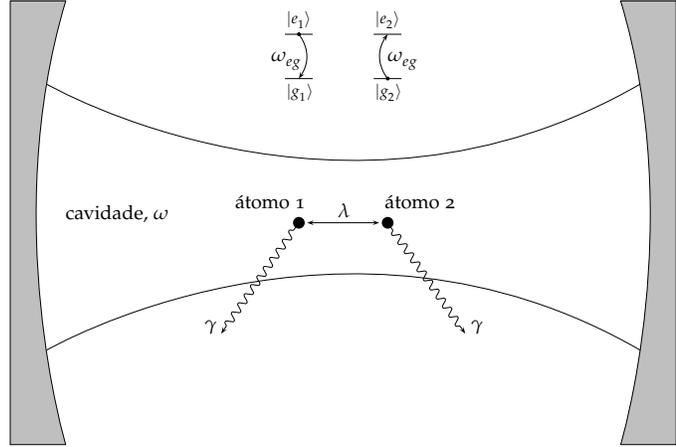
É mais conveniente tratar o problema na representação de interação, onde a dependência temporal do sistema é unicamente devida ao Hamiltoniano de interação. A transformação que leva da representação de Schrödinger para a representação de interação é dada por

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{U}_0^\dagger(t) \mathbf{H}_{\text{int}} \mathbf{U}_0(t), \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{U}_0(t) = e^{-i\mathbf{H}_0 t/\hbar}$ . Assim, para esse sistema, o Hamiltoniano de interação na representação de interação é dado por

$$\mathbf{H}(t) = \hbar g [e^{-i\delta t} \mathbf{a}^\dagger (\sigma_1^- + \sigma_2^-) + e^{i\delta t} \mathbf{a} (\sigma_1^+ + \sigma_2^+)]. \quad (3.5)$$

Como na proposta original de geração de estado maximamente emaranhado entre dois átomos [81], consideramos o limite dispersivo ( $\delta \gg g$ ) do modelo, no qual não há, efetivamente, trocas energéticas entre o sistema atômico e o campo da caverna. Então, o Hamiltoniano efetivo (veja apêndice A) é dado



**Figura 2** – Esboço de um sistema constituído de um par de átomos de dois-níveis (de frequência  $\omega_{eg}$ ), numa caverna (de frequência  $\omega$ ) de alto  $Q$  com grande dessintonia. Os átomos interagem entre si através do acoplamento efetivo auxiliado pela caverna  $\lambda$ . Consideramos que a taxa de emissão espontânea  $\gamma$  é a mesma para cada átomo.

por [81]

$$H_{\text{eff}} = \hbar\lambda(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \sigma_1^z + \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \sigma_2^z + \sigma_1^+ \sigma_1^- + \sigma_2^+ \sigma_2^- + \sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+), \quad (3.6)$$

onde  $\lambda = g^2/\delta$  é a constante efetiva de acoplamento átomo-átomo auxiliado pela cavidade. Os dois primeiros termos descrevem os Stark-*shifts* dependentes do número de fótons e os dois últimos a interação dipolar entre os dois átomos induzida pelo modo da cavidade [81].

Se não existe inicialmente nenhum fóton na cavidade (estado vácuo), o sistema pode ser descrito por um Hamiltoniano efetivo de dois átomos dado por [81]

$$H = \hbar\lambda(\sigma_1^+ \sigma_1^- + \sigma_2^+ \sigma_2^- + \sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+). \quad (3.7)$$

O Hamiltoniano acima governa a dinâmica desse sistema no caso ideal onde perdas não estão incluídas, o qual permite a geração de um estado maximamente emaranhado para determinados tempos de interação com o campo da cavidade. Considerando, por exemplo, que o átomo 1 é inicialmente preparado no estado  $|e_1\rangle$  e o átomo 2 no estado  $|g_2\rangle$ , tal que o estado global dos dois átomos é  $|\psi\rangle = |e_1\rangle \otimes |g_2\rangle \equiv |eg\rangle$ , o estado evoluído será [81]

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\lambda t} [\cos(\lambda t)|eg\rangle - i \sin(\lambda t)|ge\rangle]. \quad (3.8)$$

Assim, para<sup>a</sup> tempos de interação  $t_k = (2k + 1)\pi/4\lambda$  ( $k$  inteiro) o estado (3.8) corresponde ao par EPR maximamente emaranhado

$$|\psi_{\text{EPR}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg\rangle - i|ge\rangle), \quad (3.9)$$

o qual pode ser usado para realizar teletransporte fidedigno, conforme relatado em [81].

### 3.2. Solução da Equação Mestra

Contudo, numa situação mais realística, mecanismos de perda podem estar presentes. Dois dos mais importantes canais de dissipação são a perda de fótons pela cavidade e a emissão espontânea de fótons dos átomos em outros modos que não o modo do campo da cavidade. Em geral, perdas podem ser descritas como o acoplamento irreversível do sistema a um grande reservatório (veja apêndice B). No caso de temperatura igual a zero, e considerando o campo da cavidade inicialmente no estado vácuo, as perdas devido ao amortecimento da cavidade são irrelevantes, de acordo com o Hamiltoniano efetivo (3.7). Por esta razão, consideramos aqui apenas a emissão espontânea atômica, a qual tende a degradar a máxima quantidade de emaranhamento no estado (3.9) até que o sistema atinja o equilíbrio térmico com o reservatório, ou seja, seu estado fundamental  $|gg\rangle$  (estado desemaranhado). Nas aproximações de onda girante (RWA) e de Born-Markov (veja apêndice B), o operador densidade para o estado dos dois

<sup>a</sup> Ou, equivalentemente, dessintonias  $\delta_k = 4g^2t/(2k + 1)\pi$ .

átomos obedece a seguinte equação mestra [57, 92]

$$i\hbar\dot{\rho}(t) = [\mathbf{H}, \rho(t)] + i\hbar\mathcal{L}_a\rho(t), \quad (3.10)$$

com o Liouvilleano

$$\mathcal{L}_a = 2\gamma(\sigma_1^- \cdot \sigma_1^+ + \sigma_2^- \cdot \sigma_2^+ - \frac{1}{2}\{\sigma_1^+ \sigma_1^- + \sigma_2^+ \sigma_2^-, \cdot\}), \quad (3.11)$$

onde  $\gamma = 1/T_{\text{at}}$  é a taxa de emissão espontânea<sup>b</sup>. Na equação acima usamos a notação de super-operadores, a ser usada daqui em diante. Super-operadores diferem dos operadores convencionais no sentido de que apenas atuam da esquerda para a direita e apenas entre si e num operador densidade (a atuação num vetor de estado é indefinida) [93]. Como desenvolvido no apêndice B, tanto os termos correspondentes à interação dipolar entre os átomos como os termos correspondentes às taxas de emissão espontânea coletivas, ambos efeitos induzidos pelo acoplamento com o reservatório (no vácuo), não estão incluídos na equação mestra (3.10) acima, uma vez que estamos considerando os átomos distantes o suficiente para podermos desprezar os seus efeitos.

Agora mostramos que a equação mestra (3.10) é resolvida exatamente pela aplicação da seguinte transformação unitária [94]

$$\mathbf{U} = e^{-\frac{\pi}{4}(\sigma_1^+ \sigma_2^- - \sigma_1^- \sigma_2^+)}, \quad (3.12)$$

a qual, usando as relações (2.42) e de BCH (2.30), resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^\dagger \sigma_1^- \mathbf{U} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1^- + \sigma_2^-) \sigma_1^z \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_1^z (\sigma_1^- - \sigma_2^-), \\ \mathbf{U}^\dagger \sigma_1^+ \mathbf{U} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_1^z (\sigma_1^+ + \sigma_2^+) \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1^+ - \sigma_2^+) \sigma_1^z, \\ \mathbf{U}^\dagger \sigma_2^- \mathbf{U} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1^- - \sigma_2^-) \sigma_2^z \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_2^z (\sigma_1^- + \sigma_2^-), \\ \mathbf{U}^\dagger \sigma_2^+ \mathbf{U} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_2^z (\sigma_1^+ - \sigma_2^+) \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1^+ + \sigma_2^+) \sigma_2^z, \end{aligned} \quad (3.13)$$

para os operadores transição atômica,

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{H} \mathbf{U} = \hbar\lambda(\sigma_1^+ \sigma_1^- + \sigma_2^+ \sigma_2^-) + \frac{1}{2}\hbar\lambda(\sigma_1^z - \sigma_2^z) \equiv 2\hbar\lambda\sigma_1^+ \sigma_1^-, \quad (3.14)$$

para o Hamiltoniano (3.7) e

$$\tilde{\mathcal{L}}_a = \mathbf{U}^\dagger \mathcal{L}_a \mathbf{U} = 2\gamma(\sigma_1^- \cdot \sigma_1^+ + \sigma_2^- \cdot \sigma_2^+ - \frac{1}{2}\{\sigma_1^+ \sigma_1^- + \sigma_2^+ \sigma_2^-, \cdot\}) \equiv \mathcal{L}_a, \quad (3.15)$$

para o Liouvilleano (3.11), o qual é efetivamente invariante sob a transformação, pois  $\sigma_i^- \sigma_k^z \cdot \sigma_k^z \sigma_j^+ \rightarrow$

<sup>b</sup> Por simplicidade, consideramos que ambos os átomos são do mesmo tipo e que estão situados dentro da cavidade em posições nas quais o campo elétrico é essencialmente o mesmo (figura 2), sendo  $T_{\text{at}}$  o tempo de relaxação dos átomos. Nessas condições, portanto, os átomos devem apresentar taxas de emissão espontânea iguais.

$\sigma_i^- \cdot \sigma_j^+$  ( $i, j, k = 1, 2$ ) para qualquer estado inicial do sistema. Logo, a equação mestra (3.10) torna-se

$$i\hbar\dot{\tilde{\rho}}(t) = i\hbar\mathbf{U}^\dagger\dot{\rho}(t)\mathbf{U} = [\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\rho}(t)] + i\hbar\mathcal{L}_a\tilde{\rho}(t), \quad (3.16)$$

onde  $\tilde{\rho}(t) = \mathbf{U}^\dagger\rho(t)\mathbf{U}$ . É importante notar que o Hamiltoniano do sistema, outrora, no espaço original (representação de interação), descrevendo Stark-shifts (deslocamentos) nos níveis de ambos os átomos, acompanhados de uma interação dipolar entre os átomos induzida pelo modo do campo da cavidade, agora, segundo a transformação acima, meramente desloca os níveis atômicos do átomo 1 [94].

O operador  $\mathbf{U}$  comuta com  $N = \sigma_1^+\sigma_1^- + \sigma_2^+\sigma_2^-$ , ou seja,  $[\mathbf{U}, N] = 0$ , de modo que a transformação acima preserva o número de excitação total  $N$ , simplificando a solução do problema em casos onde o número de excitação inicial é bem definido. Aqui, consideramos o caso  $N \leq 1$ , pois é consistente com a preparação inicial em que estamos interessados, escolhida em [81], e pelo fato de  $|ee\rangle$  não ser contemplado pela dinâmica do modelo. Então, de acordo com o Hamiltoniano (3.7) e a equação mestra (3.16), podemos nos restringir ao subespaço de Hilbert expandido pela base  $\{|eg\rangle, |ge\rangle, |gg\rangle\}$ . Assim, mudando para um referencial de acordo com a transformação unitária

$$\mathbf{V}(t) = e^{-i\tilde{\mathbf{H}}t/\hbar} = e^{-2i\lambda t\sigma_1^+\sigma_1^-}, \quad (3.17)$$

a equação mestra (3.16) resulta numa forma mais simples [39]

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) \equiv \mathbf{T}^\dagger\dot{\rho}(t)\mathbf{T} = \mathcal{L}_a\tilde{\rho}(t), \quad (3.18)$$

onde  $\mathbf{T} = \mathbf{UV}(t)$  e  $\tilde{\rho}(t) = \mathbf{T}^\dagger\rho(t)\mathbf{T}$ . Logo, após definirmos os super-operadores [93]

$$\begin{aligned} J &= J_1 + J_2, & J_i &= \sigma_i^- \cdot \sigma_i^+, \\ L &= L_1 + L_2, & L_i &= -\frac{1}{2}\{\sigma_i^+ \sigma_i^-, \cdot\}, \end{aligned} \quad (i = 1, 2) \quad (3.19)$$

a equação mestra (3.18) pode ser escrita na forma mais compacta

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = 2\gamma(J + L)\tilde{\rho}(t), \quad (3.20)$$

cuja solução formal é

$$\tilde{\rho}(t) = \exp[2\gamma t(J + L)]\tilde{\rho}, \quad (3.21)$$

na qual o estado inicial é transformado de acordo com  $\tilde{\rho} = \mathbf{T}^\dagger\rho\mathbf{T} \equiv \mathbf{U}^\dagger\rho\mathbf{U}$ , pois  $\mathbf{V} = \mathbb{1}$  em  $t = 0$ .

A utilidade desta solução reside no fato de que pode ser simplificada pelo desacoplamento do operador exponencial (veja apêndice B). Uma vez que o comutador dos super-operadores  $J$  e  $L$  é dado por  $[J, L] = -J$ , podemos simplificar a solução (3.21). Do procedimento descrito no apêndice B, podemos usar uma das duas formas seguintes [93]

$$\exp[2\gamma t(J + L)] = \exp(2\gamma tL) \exp[(1 - e^{-2\gamma t})J], \quad (3.22)$$

ou

$$\exp [2\gamma t(J + L)] = \exp [(e^{2\gamma t} - 1)J] \exp(2\gamma tL). \quad (3.23)$$

Por conveniência, adotaremos aqui a segunda forma acima, e a solução (3.21) toma a forma

$$\tilde{\rho}(t) = \exp [(e^{2\gamma t} - 1)J] \exp(2\gamma tL)\tilde{\rho}. \quad (3.24)$$

O estado inicial no qual estamos interessados é  $\rho = |eg\rangle\langle eg| = \sigma_1^+ \sigma_1^- \sigma_2^- \sigma_2^+$ . No referencial dado pela transformação  $T$  esse estado torna-se [39]

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2}(\sigma_1^+ \sigma_1^- \sigma_2^- \sigma_2^+ - \sigma_1^+ \sigma_2^- - \sigma_1^- \sigma_2^+ + \sigma_1^- \sigma_1^+ \sigma_2^+ \sigma_2^-). \quad (3.25)$$

A solução (3.24) em termos do operador exponencial desacoplado permite obter mais rapidamente formas fechadas mais simples para o operador densidade evoluído do sistema. Assim, é fácil mostrar que a atuação do operador exponencial (3.23) transforma cada termo do estado inicial desse sistema de dois átomos (3.25) de acordo com

$$\begin{aligned} \exp [(e^{2\gamma t} - 1)J] \exp(2\gamma tL)\sigma_1^+ \sigma_1^- \sigma_2^- \sigma_2^+ &= e^{-2\gamma t} [\sigma_1^+ \sigma_1^- + (e^{2\gamma t} - 1)\sigma_1^- \sigma_1^+] \sigma_2^- \sigma_2^+, \\ \exp [(e^{2\gamma t} - 1)J] \exp(2\gamma tL)\sigma_1^+ \sigma_2^- &= e^{-2\gamma t} \sigma_1^+ \sigma_2^-, \\ \exp [(e^{2\gamma t} - 1)J] \exp(2\gamma tL)\sigma_1^- \sigma_2^+ &= e^{-2\gamma t} \sigma_1^- \sigma_2^+, \\ \exp [(e^{2\gamma t} - 1)J] \exp(2\gamma tL)\sigma_1^- \sigma_1^+ \sigma_2^+ \sigma_2^- &= e^{-2\gamma t} \sigma_1^- \sigma_1^+ [\sigma_2^+ \sigma_2^- + (e^{2\gamma t} - 1)\sigma_2^- \sigma_2^+], \end{aligned} \quad (3.26)$$

tal que o operador densidade desse sistema de dois átomos sob a transformação  $T$  é dado por

$$\tilde{\rho}(t) = \frac{1}{2} e^{-2\gamma t} [\sigma_1^+ \sigma_1^- \sigma_2^- \sigma_2^+ - \sigma_1^+ \sigma_2^- - \sigma_1^- \sigma_2^+ + \sigma_1^- \sigma_1^+ \sigma_2^+ \sigma_2^- + 2(e^{2\gamma t} - 1)\sigma_1^- \sigma_1^+ \sigma_2^- \sigma_2^+]. \quad (3.27)$$

Não é difícil mostrar que, quando transformado de volta para o espaço original, o estado (3.27) se reduz a (3.8) no caso ideal ( $\gamma = 0$ ). Uma vez de posse do operador densidade transformado  $\tilde{\rho}$ , todas as propriedades estatísticas desse sistema de dois átomos podem ser facilmente obtidas<sup>c</sup>.

### 3.3. Dinâmica sob Dissipação

Agora, nos atemos ao estudo do efeito da emissão espontânea atômica na dinâmica do sistema. Consideramos duas quantidades que podem ser obtidas experimentalmente para esse sistema [82, 95].

#### 3.3.1. Probabilidades de Detecção Conjunta

A primeira quantidade é a probabilidade de detectar os dois átomos em um dos quatro estados produto da base (computacional)  $\{|ee\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |gg\rangle\}$ , auto-estados do sistema. Uma vez que não existe nenhum mecanismo de bombeio, o estado  $|ee\rangle$  permanece despovoado.

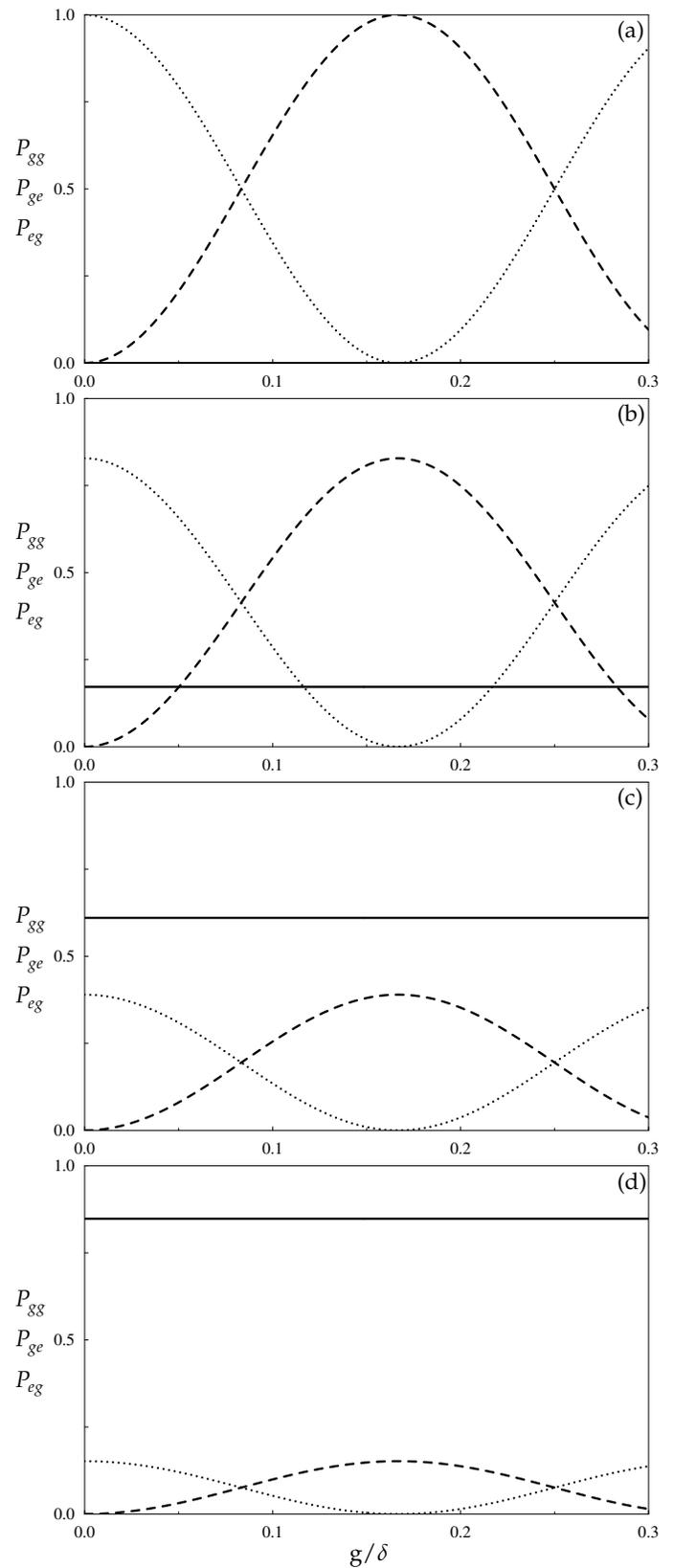
<sup>c</sup> Basta lembrar que para um dado operador observável  $A$ , seu valor esperado  $\langle A \rangle$  é dado tanto por  $\text{tr}[A\rho(t)]$  como por  $\text{tr}[\tilde{A}\tilde{\rho}(t)]$ , sendo este último referente a qualquer espaço transformado por operações unitárias.

As probabilidades de detecção conjunta para a preparação inicial (3.25) pode ser calculada usando o operador densidade evoluído transformado (3.27) e são dadas por

$$\begin{aligned} P_{gg} &= \langle \tilde{\mathcal{P}}_{gg} \rangle = \text{tr}[\tilde{\mathcal{P}}_{gg} \tilde{\mathcal{Q}}(t)] = 1 - e^{-2\gamma t}, \\ P_{ge} &= \langle \tilde{\mathcal{P}}_{ge} \rangle = \text{tr}[\tilde{\mathcal{P}}_{ge} \tilde{\mathcal{Q}}(t)] = e^{-2\gamma t} \sin^2(\lambda t), \\ P_{eg} &= \langle \tilde{\mathcal{P}}_{eg} \rangle = \text{tr}[\tilde{\mathcal{P}}_{eg} \tilde{\mathcal{Q}}(t)] = e^{-2\gamma t} \cos^2(\lambda t), \\ P_{ee} &= \langle \tilde{\mathcal{P}}_{ee} \rangle = \text{tr}[\tilde{\mathcal{P}}_{ee} \tilde{\mathcal{Q}}(t)] = 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

ou seja, os valores médios dos projetores no espaço transformado  $\tilde{\mathcal{P}}_{ij} = \mathbf{T}^\dagger |ij\rangle \langle ij| \mathbf{T}$ , ( $i, j = e, g$ ).

Na figura 3, mostramos essas probabilidades em função da dessintonia átomo-campo, seguindo as linhas da referência [82], na qual a curva experimental é apresentada. Nesta figura, é possível ver que a emissão espontânea desempenha um importante papel nas probabilidades de detecção conjunta [39]. No caso ideal ( $\gamma/g = 0$ ), ou seja, na ausência de emissão espontânea, existem valores da razão  $g/\delta$  para os quais  $P_{eg}$  é igual a  $P_{ge}$ , ocorrendo a geração do par EPR (3.9), sendo que nem  $|gg\rangle$  nem  $|ee\rangle$  estão populadas. A situação é bastante diferente quando se considera um caso mais realístico, onde os átomos podem decair espontaneamente. Embora  $P_{eg}$  e  $P_{ge}$  ainda sejam iguais para determinados valores de  $g/\delta$ , suas amplitudes agora se tornam suprimidas, pois quanto maior a taxa de decaimento  $\gamma$  mais importante se torna a mistura com a componente  $|gg\rangle$ . Não surpreendentemente, este deve ser o caso, pois espera-se que o estado fundamental se torne mais populado conforme os níveis atômicos acoplam cada vez mais fortemente ao reservatório. Quando comparamos esses resultados com as curvas experimentais, imediatamente encontramos características comuns. Como apontado em [82], imperfeições tais como contagens errôneas na detecção ou um terceiro átomo atravessando a cavidade, podem levar ao aparecimento de probabilidades não-



**Figura 3** – Probabilidades de detecção conjunta em função da razão  $g/\delta$ .  $P_{gg}$ ,  $P_{ge}$  e  $P_{eg}$  são representadas por linhas sólidas, tracejadas e pontilhadas, respectivamente. Para todos os casos,  $gt$  é considerado igual a  $3\pi$ . (a)  $\gamma/g = 0$ ; (b)  $\gamma/g = 0.01$ ; (c)  $\gamma/g = 0.05$ ; (d)  $\gamma/g = 0.1$ .

nulas ilegítimas para  $P_{gg}$  e  $P_{ee}$  e, conseqüentemente, à supressão das probabilidades de detecção conjunta envolvendo outros estados [82, 96]. Contudo, de acordo com o que é mostrado aqui, mesmo se todas essas imperfeições experimentais fossem eliminadas, por exemplo, permitindo apenas dois átomos dentro da cavidade num dado tempo e melhorando a eficiência da detecção, ainda teríamos uma população espúria no estado fundamental devido à emissão espontânea. Pela mesma razão a quantidade  $P_{eg}$  deve ser suprimida no limite  $g/\delta \rightarrow 0$  (dessintonia infinita). Claro que esses efeitos tornam-se menos importantes quando átomos com longos tempos de relaxação são escolhidos. À medida que a dessintonia vai se tornando pequena, devemos usar o Hamiltoniano original (3.5) ao invés do Hamiltoniano efetivo (dispersivo) dado pela equação (3.7). Para o propósito da geração do estado maximamente emaranhado, contudo, é mais interessante o limite dispersivo, o qual começa a ser uma boa aproximação para  $\delta > 3g$  [82].

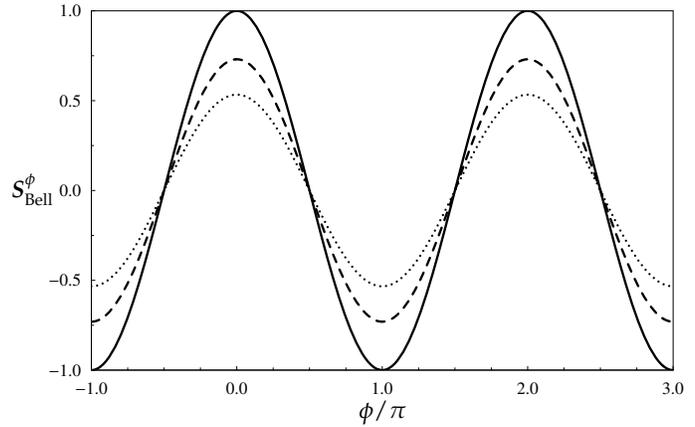
### 3.3.2. Sinal de Bell

A segunda quantidade de interesse é o valor esperado  $S_{\text{Bell}}^\phi \equiv \langle \sigma_1^x \sigma_2^\phi \rangle$ , na qual  $\sigma_i^\phi = \sigma_i^x \cos \phi + \sigma_i^y \sin \phi$ , onde  $\sigma_i^x$  e  $\sigma_i^y$  são os operadores de Pauli para o átomo  $i$ . Fixando o tempo de interação em  $t_k = (2k + 1)\pi/4\lambda$  ( $k$  inteiro), a variação do sinal de Bell (em função de  $\phi$ ) mede as correlações angulares entre as componentes transversas associadas aos átomos. Conseqüentemente, esta quantidade fornece uma medida da pureza do estado gerado. É fácil mostrar que uma mistura igualmente ponderada dos estados  $|eg\rangle$  e  $|ge\rangle$  resultaria em  $S_{\text{Bell}}^\phi = 0$  para qualquer  $\phi$ . Desta forma, olhar apenas para as probabilidades de detecção conjunta não é suficiente para decidir se um par EPR foi gerado perfeitamente. Em outras palavras, as probabilidades de detecção conjunta apenas fornecem informações a respeito dos elementos diagonais da matriz densidade, enquanto que o sinal de Bell fornece informações adicionais a respeito dos elementos fora da diagonal da matriz. Como qualquer valor esperado, esta quantidade pode ser calculada diretamente do operador densidade transformado (3.27) e o resultado é

$$\tilde{S}_{\text{Bell}}^\phi \equiv \langle \tilde{\sigma}_1^x \tilde{\sigma}_2^\phi \rangle = \text{tr}[\tilde{\sigma}_1^x \tilde{\sigma}_2^\phi \tilde{\rho}(t)] = e^{-2\gamma t} \sin(2\lambda t) \cos \phi, \quad (3.29)$$

onde definimos  $\tilde{\sigma}_1^x \tilde{\sigma}_2^\phi = T^\dagger \sigma_1^x \sigma_2^\phi T$  para o operador sinal de Bell transformado.

Particularizando para os tempos específicos de interesse  $t_k = (2k + 1)\pi/4\lambda$ , nos quais ocorre a geração de um par EPR maximamente emaranhado entre os átomos (caso ideal), essa quantidade é dada por [39]



**Figura 4** – Sinal de Bell em função da variável angular  $\phi$ . Para todos os gráficos,  $\lambda t$  é considerado igual a  $\pi/4$ . Consideramos a razão  $\gamma/\lambda = 0$  (linha sólida),  $\gamma/\lambda = 0.2$  (linha tracejada), e  $\gamma/\lambda = 0.4$  (linha pontilhada).

$$\tilde{S}_{\text{Bell}}^\phi = e^{-\frac{1}{2}(2k+1)\pi\gamma/\lambda} \cos \phi. \quad (3.30)$$

Novamente, o efeito da emissão espontânea dos átomos é causar uma redução da visibilidade das oscilações, como mostrado na figura 4. O mesmo comportamento foi experimentalmente observado em [82].

### 3.3.3. Concurrence

Nesta seção analisamos a quantidade de emaranhamento que é compartilhada entre os dois átomos sob o efeito de emissão espontânea. Para isso usaremos a *concurrence* de Wootters [36, 37]. Como a *concurrence* não é um observável, precisamos antes de mais nada transformar o estado evoluído (3.27) de volta para a representação de interação. Assim, o estado evoluído do sistema no referencial original é dado por

$$\begin{aligned} \varrho(t) = T\tilde{\varrho}(t)T^\dagger = \frac{1}{2} e^{-2\gamma t} [2 \cos^2(\lambda t) \sigma_1^+ \sigma_1^- \sigma_2^- \sigma_2^+ + i \sin(2\lambda t) \sigma_1^+ \sigma_2^- - i \sin(2\lambda t) \sigma_1^- \sigma_2^+ \\ + 2 \sin^2(\lambda t) \sigma_1^- \sigma_1^+ \sigma_2^+ \sigma_2^- + 2(e^{2\gamma t} - 1) \sigma_1^- \sigma_1^+ \sigma_2^- \sigma_2^+]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Os métodos gerais mais convenientes para o cálculo da *concurrence* foram apresentados no capítulo 2. Aqui, observamos que o estado acima apresenta a forma (base computacional  $\{|ee\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |gg\rangle\}$ )

$$\varrho(t) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & z & 0 \\ 0 & z^* & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

a qual aparece naturalmente em uma grande variedade de situações físicas [97–99]. Estados como (3.32), possuem uma expressão bastante compacta para a *concurrence*, dada por [98]

$$C = 2 \max [0, |z| - \sqrt{ad}]. \quad (3.33)$$

Como já vimos no capítulo 2, a *concurrence* varia de 0, para estados separáveis, até um 1, para estados maximamente emaranhados. Assim, para o sistema que estamos considerando aqui, a *concurrence* é dada pela expressão

$$C = e^{-2\gamma t} |\sin(2\lambda t)|. \quad (3.34)$$

Na figura 5, mostramos o gráfico da *concurrence* em função do tempo e da taxa de emissão espontânea dos átomos.

O efeito da emissão espontânea no emaranhamento dos átomos, após um tempo  $t_k = (2k + 1)\pi/4\lambda$  de interação com a cavidade, é introduzir um ruído no canal ideal, conforme observamos pela simples substituição desses tempos  $t_k$  na equação (3.31)

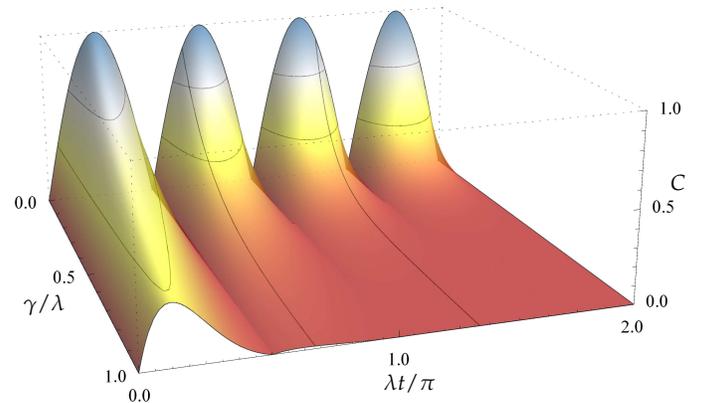


Figura 5 – Concurrence em função do tempo escalonado  $\lambda t$  e da razão  $\gamma/\lambda$ .

$$\rho(t_k) = f|\psi_{\text{EPR}}\rangle\langle\psi_{\text{EPR}}| + (1-f)|gg\rangle\langle gg|. \quad (3.35)$$

Observando que o estado acima é localmente equivalente ao estado

$$\rho = f|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + (1-f)|gg\rangle\langle gg|, \quad (3.36)$$

vemos que se trata de um estado Horodecki, mencionado no capítulo 2, tal que

$$f = \langle\psi_{\text{EPR}}|\rho(t_k)|\psi_{\text{EPR}}\rangle = \langle\Psi^-|\rho(t_k)|\Psi^-\rangle = e^{-\frac{1}{2}(2k+1)\pi\gamma/\lambda} = C. \quad (3.37)$$

Assim, para os tempos de interação  $t_k$ , a Fração de Singlete nesse estado equivale ao emaranhamento quantificado pela *concurrence*.

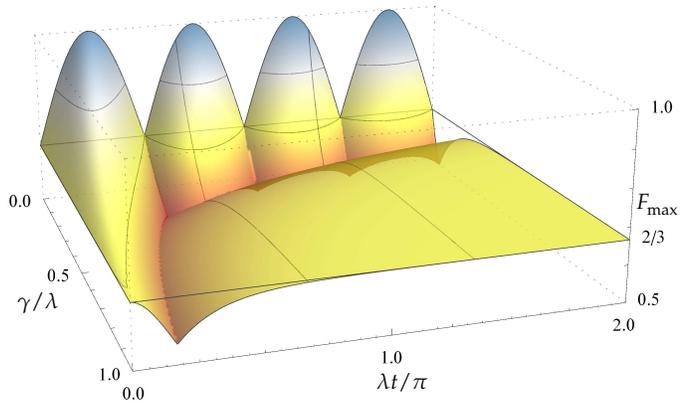
### 3.3.4. Fidelidade de Teletransporte

No sistema tratado aqui, os dois átomos se tornam maximamente emaranhados em tempos de interação específicos quando nenhuma imperfeição ou perdas são consideradas no modelo. Então, uma questão prática que naturalmente aparece é: Qual o máximo valor da taxa de decaimento espontâneo dos átomos  $\gamma$  que ainda permite a realização de teletransporte legítimo, embora imperfeito? Respondemos essa questão usando a fidelidade de teletransporte. No tempo de interação  $t_k = (2k+1)\pi/4\lambda$ , a Fidelidade Máxima de Teletransporte que pode ser obtida usando o estado (3.9) como canal quântico é dada por [39]

$$F_{\text{max}} = \begin{cases} \frac{2}{3}(\frac{1}{2} + C), & \text{para } \frac{\gamma}{\lambda} \leq \frac{2 \ln(2)}{(2k+1)\pi}, \\ \frac{2}{3}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.38)$$

na qual observamos que a *concurrence* e a Fração de Singlete também representam os valores máximos locais para a Máxima Fração de Singlete (Fração Totalmente Emaranhada)  $f_{\text{max}}$  (2.24). Logo, para uma *concurrence*  $C < \frac{1}{2}$  ou, para uma Fração de Singlete  $f < \frac{1}{2}$ , o canal quântico é inútil para fins de teletransporte. Quanto maior a taxa de emissão espontânea  $\gamma$ , mais rápido o sistema atômico vai para o estado fundamental  $|gg\rangle$ . Assim, agora podemos responder a questão levantada acima: o sistema provê um canal quântico adequado para teletransporte, no tempo de interação  $t_k = (2k+1)\pi/4\lambda$ , contanto que a taxa de emissão espontânea  $\gamma$  não exceda o limite superior  $\gamma = 2 \ln(2)\lambda/(2k+1)\pi$ . Caso contrário, uma estratégia clássica de transmissão da informação que se deseja teletransportar oferece sempre maior fidelidade que o teletransporte através desse canal quântico.

Da figura 6, é evidente que não é apenas para os tempos de interação  $t_k$  que se obtém  $F_{\text{max}} > \frac{2}{3}$ . Precisamente para esses tempos a função  $F_{\text{max}}$  apresenta um máximo local para qualquer  $\gamma$ .

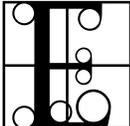


**Figura 6** – Fidelidade Máxima de Teletransporte em função do tempo escalonado  $lt$  e da razão  $\gamma/\lambda$ .

---

## 4. ESTADOS COERENTES EMARANHADOS TIPO-CLUSTER

---

 Estados emaranhados multipartidos são vitais para uma completa exploração de protocolos de comunicação e computação quântica. Um tipo especial de estados emaranhados multipartidos, denominados estados *cluster* [100] têm atraído muita atenção devido a suas potenciais aplicações. Por exemplo, tais estados formam a base para o modelo de Computação Quântica uni-direcional (*one-way*), também conhecido como Computação Quântica Baseada em Medidas (MBQC) [19, 101, 102], uma alternativa à abordagem convencional de circuitos [6]. A geração experimental de estados *cluster* codificados no estado de polarização de quatro fótons e suas aplicações para a implementação do algoritmo de busca de Grover já foram relatados [103]. Questões mais fundamentais como conceitos fundamentais de Mecânica Quântica também têm sido estudados no escopo de estados *cluster* [104]. Protocolos de Informação Quântica incluindo teletransporte e codificação densa têm sido propostos recentemente [105]. A implementação física de tais estados é então de grande importância e vários sistemas físicos diferentes têm sido considerados com esse propósito. Mencionamos propostas envolvendo fótons [106–110], íons aprisionados [111–113], Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (CQED) [114–123], sistemas híbridos envolvendo CQED e elementos de óptica linear [124, 125], e circuitos quânticos supercondutores [126–128], dentre muitos outros.

Estados *cluster* têm sido concebidos em sistemas discretos finitos, tipicamente numa estrutura de produto tensorial do tipo  $\mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2$  (*qubits*). Motivados pelo grande potencial observado no uso de sistemas de variáveis contínuas de dimensão infinita em protocolos de Informação Quântica [129–132], apresentamos uma extensão do estado *cluster* baseado em *qubits* (sistemas de variáveis discretas de dimensão finita) para o caso contínuo. Para tanto, propomos o uso de estados coerentes [57], visto que a geração e manipulação de tais estados já é bem estabelecida em várias propostas experimentais, tais como cavidades de microondas [133] e íons aprisionados [134]. Adicionalmente, estados coerentes têm sido considerados previamente para teletransporte [74, 135, 136], processamento quântico de informação [137, 138], e teste de realismo local [139, 140]. Todas essas aplicações e características interessantes são determinantes para a escolha de estados coerentes para a nossa proposta, os estados coerentes emaranhados tipo-*cluster*, CTECS. É digno de nota que outros tipos de estados *cluster* de variáveis contínuas baseados em outros tipos de estados (não coerentes) já têm sido discutidos na literatura [141–144].

### 4.1. Qubit de Estados Coerentes

Os estados básicos usados nesse capítulo são os estados coerentes  $|\alpha\rangle$  e  $|\!-\alpha\rangle$ , definidos como  $|\pm\alpha\rangle = D(\pm\alpha)|0\rangle$  (estado vácuo deslocado), onde  $D(\pm\alpha) = e^{\pm(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)}$ , é o operador deslocamento

de Glauber [57]. Os estados coerentes possuem a propriedade útil de que a sobreposição  $\langle \alpha | -\alpha \rangle$  decai exponencialmente com a amplitude  $\alpha$ . Para  $\alpha = 2$ , por exemplo, a sobreposição é da ordem de  $10^{-4}$ , e para aplicações práticas podem ser usados para codificar um *qubit*  $|\psi_\alpha\rangle$  no espaço de Hilbert  $\mathbb{C}^2$  como [137, 138]

$$|\psi_\alpha\rangle = \cos(\theta/2)|\alpha\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta/2)|-\alpha\rangle. \quad (4.1)$$

Os estados coerentes  $|\alpha\rangle$  e  $|-\alpha\rangle$  podem ser discriminados (com alta probabilidade) por um esquema de medida bastante simples, o qual envolve um divisor de feixe (*beam-splitter*) 50 – 50 conforme explicado em [137, 138]. Além disso, partindo de um estado coerente  $|\alpha\rangle$ , um estado arbitrário de um *qubit* da forma (4.1) pode ser preparado, a menos de fases globais, usando deslocadores de fase (*phase-shifters*), divisores de feixe, meios não-lineares, e estados coerentes auxiliares [137, 138]. Em outras palavras, portas lógicas quânticas arbitrárias de um *qubit*  $|\psi_\alpha\rangle$  podem ser obtidas combinando componentes ópticos e campos. Para que um conjunto universal de portas lógicas quânticas seja completo, uma porta lógica controlada de dois *qubits* da forma (4.1) se faz necessária além de manipulações arbitrárias de um *qubit*. Essa porta lógica controlada pode ser obtida empregando um protocolo de teletransporte [137, 138, 145]. De face a todos esses fatos, vemos que um *qubit* envolvendo estados coerentes é uma escolha alternativa potencial para codificar informação e manipulação em computação quântica.

#### 4.1.1. Estados Coerentes Emaranhados

Então, podemos dar um passo adiante e investigar sistemas multipartidos descritos por estados coerentes emaranhados. A tentativa é novamente usar sistemas de infinitos graus de liberdade (modos) para descrever um estado num espaço de Hilbert de dimensão finita.

**ECS tipo-Bell.** O caso mais simples é dado no cenário bipartido, no qual o estado é descrito no espaço de Hilbert  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . Trabalhos anteriores [135, 136, 139, 140, 146] propõem e investigam as propriedades de estados coerentes emaranhados tipo-Bell, dados por

$$\begin{aligned} |\Phi_\alpha^\pm\rangle &= \sqrt{N_2^\pm} (|\alpha, \alpha\rangle \pm |-\alpha, -\alpha\rangle), \\ |\Psi_\alpha^\pm\rangle &= \sqrt{N_2^\pm} (|\alpha, -\alpha\rangle \pm |-\alpha, \alpha\rangle), \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde  $N_2^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm e^{-4|\alpha|^2})^{-1}$  são as normalizações. Esses estados são também denominados estados quase-Bell, em analogia com os estados Bell (2.2)

$$\begin{aligned} |\Phi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle), \\ |\Psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle), \end{aligned} \quad (4.3)$$

os quais formam uma base ortonormal no espaço de Hilbert  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , denotada aqui como  $\mathcal{B}_{\text{Bell}}$ . Os estados (4.2) não podem ser formalmente chamados de estados Bell, uma vez que não são mutuamente ortogonais para valores finitos da amplitude  $\alpha$ . Contudo, a sobreposição  $\langle \alpha | -\alpha \rangle$  tende a zero muito

rapidamente (tal que  $\sqrt{N_2^\pm} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$ ) com o aumento de  $\alpha$ , conforme mencionado anteriormente. Assim, os estados quase-Bell (4.2) constituem uma base não-ortonormal, denotada aqui como  $\mathcal{B}_{\text{Bell}}^\alpha$ . Uma das primeiras propostas de geração de estados como (4.2) em CQED é relatada em [147].

**ECS tipo-GHZ.** Assim, estamos interessados em generalizações de importantes estados multipartidos baseados em *qubits* envolvendo estados coerentes. No caso tripartido foi mostrada [31] a existência de dois tipos de estados emaranhados. Quanto às respectivas generalizações envolvendo estados coerentes, a saber, ECS tipo-GHZ<sub>3</sub> e ECS tipo-W<sub>3</sub>, foi mostrado que violam a versão de Mermin da desigualdade de Bell [148]. Como exemplo, escrevemos a base para os ECS tipo-GHZ<sub>3</sub>,  $\mathcal{B}_{\text{GHZ}_3}^\alpha$ :

$$\begin{aligned} |\text{GHZ}_{\alpha,3}^\pm\rangle &= \sqrt{N_3^\pm} (|\alpha, \alpha, \alpha\rangle \pm |-\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle), \\ |\text{G}_{\alpha,3}^\pm\rangle &= \sqrt{N_3^\pm} (|\alpha, -\alpha, \alpha\rangle \pm |-\alpha, \alpha, -\alpha\rangle), \\ |\text{H}_{\alpha,3}^\pm\rangle &= \sqrt{N_3^\pm} (|-\alpha, \alpha, \alpha\rangle \pm |\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle), \\ |\text{Z}_{\alpha,3}^\pm\rangle &= \sqrt{N_3^\pm} (|-\alpha, -\alpha, \alpha\rangle \pm |\alpha, \alpha, -\alpha\rangle), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde  $N_3^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm e^{-6|\alpha|^2})^{-1}$  são as normalizações. Esses estados também podem ser denominados quase-GHZ<sub>3</sub>, em analogia com a base ortonormal de estados GHZ<sub>3</sub> [149]

$$\begin{aligned} |\text{GHZ}_3^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle \pm |111\rangle), \\ |\text{G}_3^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|010\rangle \pm |101\rangle), \\ |\text{H}_3^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|100\rangle \pm |011\rangle), \\ |\text{Z}_3^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|110\rangle \pm |001\rangle), \end{aligned} \quad (4.5)$$

definida no espaço de Hilbert  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , a qual denotamos aqui como  $\mathcal{B}_{\text{GHZ}_3}$ . De maneira semelhante aos estados quase-Bell (4.2), não são mutuamente ortogonais para valores finitos de  $\alpha$ . Os estados quase-GHZ<sub>3</sub> não podem ser formalmente chamados de estados GHZ. Exemplos de propostas originais de geração desses estados em CQED são [150] para o estado quase-GHZ<sub>3</sub> e [151] para o estado quase-W<sub>3</sub>.

**ECS tipo-cluster: CTECS.** Como já mencionamos, usando o mesmo método indutivo de [31], foi mostrada recentemente a existência de 8 tipos diferentes de estados emaranhados genuinamente quadripartidos [35]. De maneira similar, é possível obter as respectivas generalizações em termos de estados coerentes, por exemplo, para os ECS tipo-GHZ<sub>4</sub> e tipo-W<sub>4</sub>. Aqui, direcionamos nossa atenção para uma dessas classes de estados quadripartidos na forma do estado *cluster-4* original [19, 100]:

$$|\text{CLUSTER}_4^+\rangle = \frac{1}{2} (|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle). \quad (4.6)$$

Em analogia com a base Bell no caso de dois *qubits*, definimos agora uma base ortonormal  $\mathcal{B}_{\text{C}_4}$  no

espaço  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  para o caso quadripartido. Esta base contém os elementos [152]

$$\begin{aligned}
|\text{CLUSTER}_4^\pm\rangle &= \frac{1}{2}(\pm|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle \mp |1111\rangle), \\
|\text{C}_4^\pm\rangle &= \frac{1}{2}(|0000\rangle \pm |0011\rangle \mp |1100\rangle + |1111\rangle), \\
|\text{L}_4^\pm\rangle &= \frac{1}{2}(\pm|0001\rangle \mp |0010\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle), \\
|\text{U}_4^\pm\rangle &= \frac{1}{2}(|0001\rangle + |0010\rangle \pm |1101\rangle \mp |1110\rangle), \\
|\text{S}_4^\pm\rangle &= \frac{1}{2}(\pm|0100\rangle + |0111\rangle \mp |1000\rangle + |1011\rangle), \\
|\text{T}_4^\pm\rangle &= \frac{1}{2}(|0100\rangle \pm |0111\rangle + |1000\rangle \mp |1011\rangle), \\
|\text{E}_4^\pm\rangle &= \frac{1}{2}(\pm|0101\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle \mp |1010\rangle), \\
|\text{R}_4^\pm\rangle &= \frac{1}{2}(|0101\rangle \pm |0110\rangle \mp |1001\rangle + |1010\rangle).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Notamos que os elementos da base  $\mathcal{B}_{C_4}$  definidos em (4.7) são localmente equivalentes pela simples aplicação de operações locais de *bit-flip*. Como consequência desse fato, os elementos dessa base possuem a mesma quantidade de emaranhamento. Também podemos mostrar facilmente que realizando a operação traço parcial em três das quatro partes que formam qualquer dos elementos da base (4.7), a parte remanescente é deixada no estado maximamente misturado definido por  $\rho = \mathbb{1}/d$ , onde  $d = 2$  para *qubits*. Então, o mapeamento entre os elementos presentes em  $\mathcal{B}_{C_4}$  apenas faz uso de *bit-flips*, a qual é uma característica notável, ausente em  $\mathcal{B}_{\text{Bell}}$ . Ainda, nem mesmo a base ortonormal  $\mathcal{B}_{\text{GHZ}_3}$  tem tal propriedade, ou seja, mais de um tipo de operação local deve ser usado para mapear os estados da base entre si [152].

Propomos agora uma generalização desses estados *cluster* usando a codificação de estados coerentes, a qual nomeamos de estados coerentes tipo-*cluster* (CTECS). Assim, a generalização do estado (4.6) é dada por [152]

$$|\text{CLUSTER}_{\alpha,4}^+\rangle = \frac{1}{2}(|\alpha, \alpha, \alpha, \alpha\rangle + |\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha\rangle + |-\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha\rangle - |-\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle), \tag{4.8}$$

e, em completa analogia com a base quase-Bell, usamos  $\mathcal{B}_{C_4}$  para *definir* a base de estados coerentes generalizada (base CTECS)  $\mathcal{B}_{C_4}^\alpha$  composta dos elementos [152]

$$\begin{aligned}
|\text{CLUSTER}_{\alpha,4}^\pm\rangle &= \frac{1}{2}(\pm|\alpha, \alpha, \alpha, \alpha\rangle + |\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha\rangle + |-\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha\rangle \mp |-\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle), \\
|\text{C}_{\alpha,4}^\pm\rangle &= \frac{1}{2}(|\alpha, \alpha, \alpha, \alpha\rangle \pm |\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha\rangle \mp |-\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha\rangle + |-\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle), \\
|\text{L}_{\alpha,4}^\pm\rangle &= \frac{1}{2}(\pm|\alpha, \alpha, \alpha, -\alpha\rangle \mp |\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha\rangle + |-\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha\rangle + |-\alpha, -\alpha, -\alpha, \alpha\rangle), \\
|\text{U}_{\alpha,4}^\pm\rangle &= \frac{1}{2}(|\alpha, \alpha, \alpha, -\alpha\rangle + |\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha\rangle \pm |-\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha\rangle \mp |-\alpha, -\alpha, -\alpha, \alpha\rangle), \\
|\text{S}_{\alpha,4}^\pm\rangle &= \frac{1}{2}(\pm|\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha\rangle + |\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle \mp |-\alpha, \alpha, \alpha, \alpha\rangle + |-\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha\rangle), \\
|\text{T}_{\alpha,4}^\pm\rangle &= \frac{1}{2}(|\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha\rangle \pm |\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle + |-\alpha, \alpha, \alpha, \alpha\rangle \mp |-\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha\rangle), \\
|\text{E}_{\alpha,4}^\pm\rangle &= \frac{1}{2}(\pm|\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha\rangle + |\alpha, -\alpha, -\alpha, \alpha\rangle + |-\alpha, \alpha, \alpha, -\alpha\rangle \mp |-\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha\rangle), \\
|\text{R}_{\alpha,4}^\pm\rangle &= \frac{1}{2}(|\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha\rangle \pm |\alpha, -\alpha, -\alpha, \alpha\rangle \mp |-\alpha, \alpha, \alpha, -\alpha\rangle + |-\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha\rangle).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

*Propriedades.* Agora, discutimos algumas propriedades simples da base  $\mathcal{B}_{C_4}^\alpha$ . Primeiro, é digno de nota que os elementos nesta base continuam sendo interconvertíveis entre si através de operações *bit-flip* generalizadas, agora definidas usando a codificação de estados coerentes como [153]

$$\begin{aligned} X|\alpha\rangle &= P(\pi)|\alpha\rangle = |-\alpha\rangle, \\ X|-\alpha\rangle &= P(\pi)|-\alpha\rangle = |\alpha\rangle, \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde  $P(\pi) = e^{i\pi n}$  é o operador paridade, sendo  $n$  o operador número de um campo bosônico. Dessa primeira segue uma segunda propriedade, a qual estipula que todos os elementos da base  $\mathcal{B}_C^\alpha$  tem a mesma quantidade de emaranhamento dependente de  $\alpha$ . Essa propriedade pode ser rapidamente observada ausente tanto na base  $\mathcal{B}_{\text{Bell}}^\alpha$  como  $\mathcal{B}_{\text{GHZ}_3}^\alpha$  acima. Dessas duas primeiras propriedades chegamos a uma terceira propriedade, a qual diz respeito à normalização dos estados dessa base CTECS em particular, a qual é dada por  $N_4^\pm = \frac{1}{2}$ . Uma outra propriedade básica para esses estados é relativa ao operador densidade reduzido de qualquer das partes que compõem o estado global (obtido realizando a operação traço parcial em quaisquer outras três partes), o qual é uma função da amplitude  $\alpha$

$$\rho_\alpha = \frac{1}{2} [|\alpha\rangle\langle\alpha|(1 + e^{-4|\alpha|^2}) + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|(1 - e^{-4|\alpha|^2})]. \quad (4.11)$$

Da equação (4.11), podemos ver que no limite de  $\alpha \rightarrow \infty$ , o estado  $\rho_\alpha$  tende a um estado maximamente misturado no espaço de Hilbert  $\mathbb{C}^2$ , pois a sobreposição  $\langle\alpha|-\alpha\rangle$  se aproxima de zero. Isto significa que a base (4.7) pode ser formalmente obtida em termos de estados coerentes (4.9) neste limite.

## 4.2. Proposta de Implementação de CTECS em Cavidades

Nesta seção apresentamos uma proposta de implementação dos CTECS no contexto de Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (CQED). O esquema que temos em mente é retratado na figura 7. Consideramos dois átomos de dois-níveis preparados no estado puro  $|\psi_a\rangle = |g_1\rangle|g_2\rangle = |gg\rangle$ , sendo  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ , respectivamente, os estados eletrônicos excitado e fundamental usuais. Conforme descrevemos abaixo, os átomos são enviados para atravessar cavidades de alto fator de qualidade  $Q$ , as quais sustentam estados coerentes (mantidos por fontes  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ )<sup>a</sup>, tal que o estado inicial do sistema global é dado por [152]

$$|\psi_{af}\rangle = |\psi_a\rangle|\alpha_1\rangle|\alpha_2\rangle|\alpha_3\rangle|\alpha_4\rangle = |gg\rangle|\alpha, \alpha, \alpha, \alpha\rangle. \quad (4.12)$$

Como mostrado na figura 7, o átomo 1 atravessa as cavidades  $C_1$  e  $C_2$  em seqüência e o átomo 2 atravessa as cavidades  $C_3$  e  $C_4$ .

Assim, primeiramente, cada átomo é enviado para zonas de Ramsey separadas  $R_1$  e  $R_2$ , nas quais seus estados eletrônicos sofrem uma rotação de um pulso- $\pi/2$ <sup>b</sup>, preparando cada átomo numa

<sup>a</sup> No intuito de um melhor controle sobre a fase dos diferentes estados coerentes envolvidos, a fonte em cada cavidade não pode ser independente [47].

<sup>b</sup> Em nossos cálculos, consideramos  $\varphi = \pi$  para a fase do campo clássico da zona de Ramsey.

superposição coerente de seus níveis eletrônicos  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |e\rangle)$ . O átomo 1 (2), então, interage dispersivamente, em seqüência, com os campos das cavidades 1 e 2 (3 e 4), conforme mostrado na figura 7. A interação é dada de acordo com o Hamiltoniano do Modelo de Jaynes-Cummings (JCM) [66], na aproximação dispersiva. Nessa aproximação do modelo, não há, efetivamente, qualquer troca de energia direta entre o átomo e o campo e este regime é alcançado quando a dessintonia entre a frequência do átomo e a frequência do campo  $\Delta$  é muito maior que a constante de acoplamento átomo-campo  $g$ . Contudo, o átomo e o campo da cavidade ainda estão acoplados e tanto as fases do átomo como as fases do campo mudam no tempo. Nesse limite dispersivo, conforme mostramos no apêndice A, o Hamiltoniano de interação efetivo, nas aproximações de onda girante (RWA) e de dipolo, pode ser facilmente derivado [154–156] e é dado por

$$H = \hbar\lambda(a^\dagger a \sigma^z + \sigma^+ \sigma^-), \quad (4.13)$$

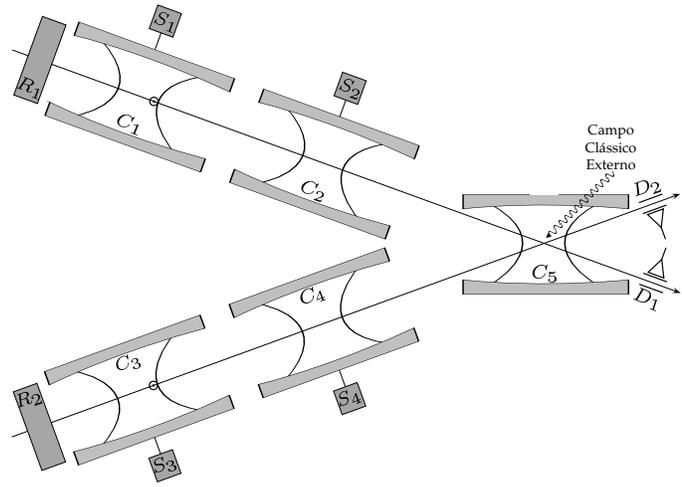
onde  $a^\dagger$  e  $a$  são os operadores criação e aniquilação de fótons do campo da cavidade,  $\sigma^z = \sigma^+ \sigma^- - \sigma^- \sigma^+$ ,  $\sigma^- = |g\rangle\langle e|$  e  $\sigma^+ = |e\rangle\langle g|$  são os operadores inversão, abaixamento e levantamento de excitação eletrônica do átomo, e  $\lambda = g^2/\Delta$  é a constante efetiva de acoplamento átomo-campo. Como já mencionamos, o Hamiltoniano de interação (4.13) não promove troca de energia entre os subsistemas. Ao invés disso, após um tempo apropriado de interação  $t$ , uma fase clássica é adicionada na amplitude do campo coerente. Tal deslocamento na fase adquire sinais opostos, dependendo do estado do átomo. Este processo pode ser resumido como [70]

$$\begin{aligned} |g\rangle|\alpha\rangle &\rightarrow |g\rangle|\alpha e^{i\lambda t}\rangle, \\ |e\rangle|\alpha\rangle &\rightarrow e^{-i\lambda t}|e\rangle|\alpha e^{-i\lambda t}\rangle. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Logo, após dispender um tempo de interação  $t = \pi/2\lambda$  em cada uma das duas cavidades, o átomo  $i$  ( $i = 1, 2$ ) e as cavidades respectivas são encontrados no estado [152]

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_i\rangle|\beta, \beta\rangle - |e_i\rangle|-\beta, -\beta\rangle), \quad (i = 1, 2) \quad (4.15)$$

onde  $\beta = i\alpha$ . Portanto, o estado do sistema todo, logo antes dos átomos atravessarem simultaneamente



**Figura 7** – Esboço do esquema proposto. Cada átomo viajante atravessa uma zona de Ramsey e duas cavidades, as quais sustentam estados coerentes de mesma amplitude. Ambos os átomos interagem com uma quinta cavidade e um campo clássico externo, os quais aplicam uma porta de fase controlada entre os átomos antes de serem medidos nos detectores. Figura extraída de [152].

uma quinta (última) cavidade, é dado por [152]

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \frac{1}{2}(|gg\rangle|\beta, \beta, \beta, \beta\rangle - |ge\rangle|\beta, \beta, -\beta, -\beta\rangle - |eg\rangle|-\beta, -\beta, \beta, \beta\rangle + |ee\rangle|-\beta, -\beta, -\beta, -\beta\rangle). \quad (4.16)$$

A fim de obter a geração do CTECS, precisamos agora realizar a operação porta de fase controlada (CPG) que atue na base Hadamard atômica  $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle \pm |e\rangle)$ , seguida da medida dos estados atômicos. A transformação CPG desejada é representada pelo operador unitário  $\mathbf{U}_{\text{CPG}}$ , cuja ação na base Hadamard atômica é dada por [152]

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\text{CPG}}|++\rangle &= -|++\rangle, \\ \mathbf{U}_{\text{CPG}}|+-\rangle &= |+-\rangle, \\ \mathbf{U}_{\text{CPG}}|-+\rangle &= |-+\rangle, \\ \mathbf{U}_{\text{CPG}}|--\rangle &= |--\rangle. \end{aligned} \quad (4.17)$$

A transformação (4.17) acima pode ser implementada nesse sistema com o auxílio de uma quinta (última) cavidade (veja figura 7) conforme explicamos agora. Os átomos são então enviados para atravessar essa última cavidade ao mesmo tempo, e interagem simultaneamente tanto com o campo quantizado da cavidade como com o campo clássico, externamente aplicado. O Hamiltoniano que descreve esse sistema, na representação de Schrödinger e nas aproximações de onda girante (RWA) e de dipolo, é dado por [157]

$$\mathbf{H}' = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\Sigma^z + \hbar g'(a^\dagger\Sigma^- + a\Sigma^+) + \hbar\Omega(e^{-i\omega_c t}\Sigma^+ + e^{i\omega_c t}\Sigma^-), \quad (4.18)$$

no qual  $a^\dagger$  e  $a$  são os operadores criação e aniquilação de fótons do campo dessa última cavidade,  $\Sigma^z = \sigma_1^z + \sigma_2^z$ ,  $\Sigma^- = \sigma_1^- + \sigma_2^-$  e  $\Sigma^+ = \sigma_1^+ + \sigma_2^+$ , são os operadores inversão, abaixamento e levantamento de excitação eletrônica coletivos dos átomos,  $\delta = \omega_{eg} - \omega$  é a dessintonia átomo-campo,  $g'$  é a constante de acoplamento átomo-campo,  $\Omega$  é frequência de Rabi e os átomos estão ressonantes com o campo clássico externo ( $\omega_{eg} = \omega_c$ ). Conforme a dedução apresentada em mais detalhes no apêndice A, o Hamiltoniano de interação na representação de interação é escrito como [158–160]

$$\mathbf{H}'(t) = \hbar\Omega\Sigma^x + \hbar g'(e^{-i\delta t} a^\dagger\Sigma^- + e^{i\delta t} a\Sigma^+), \quad (4.19)$$

onde  $\Sigma^x = \Sigma^+ + \Sigma^-$ . Mudando para a base de estados vestidos definida por

$$|\pm_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_i\rangle \pm |e_i\rangle), \quad (4.20)$$

a qual define também a base Hadamard atômica, e movendo para um referencial de acordo com a transformação unitária

$$\mathbf{U}'_0(t) = e^{-i\mathbf{H}'_0 t/\hbar}, \quad (4.21)$$

onde  $H'_0 = \hbar\Omega\Sigma^x$ , consideramos o regime de forte acoplamento do campo clássico com os átomos, ou seja,  $\Omega \gg \{g', \delta\}$ , desprezando os termos que oscilam rapidamente na aproximação de onda girante (RWA), como mostrado no apêndice A. Assim, o Hamiltoniano (4.19) se reduz a [157, 158]

$$\tilde{H}'(t) = \frac{1}{2}\hbar g'(e^{-i\delta t} \mathbf{a}^\dagger + e^{i\delta t} \mathbf{a})\Sigma^x. \quad (4.22)$$

Como discutido em [158, 161, 162], o operador evolução temporal para o Hamiltoniano acima é *exato*. Escolhendo o tempo de interação de forma a satisfazer a condição

$$\delta t = 2\pi, \quad (4.23)$$

sendo  $m$  um inteiro, o operador evolução temporal se reduz a (veja apêndice A)

$$\mathbf{U}'(t) = e^{-i\Omega\Sigma^x t} e^{-\frac{1}{4}i\lambda'(\Sigma^x)^2 t}, \quad (4.24)$$

onde  $\lambda' = g'^2/\delta$ .

É fácil perceber que, num tempo satisfazendo a condição (4.23), os dois subsistemas (campo da cavidade e átomos) estão desemaranhados. O campo da cavidade retorna para seu estado original [162]. Esse fato permite que o campo quantizado da cavidade seja o estado vácuo ou até mesmo o estado térmico, deixando essa última cavidade insensível inclusive a perda de fótons [158, 159].

Podemos demonstrar facilmente que o operador evolução temporal (4.24) realiza a seguinte operação na base Hadamard atômica [152]

$$\begin{aligned} \mathbf{U}'(t)|++\rangle &= e^{-i(\Omega + \frac{1}{4}\lambda')t}|++\rangle, \\ \mathbf{U}'(t)|+-\rangle &= |+-\rangle, \\ \mathbf{U}'(t)|-+\rangle &= |-+\rangle, \\ \mathbf{U}'(t)|--\rangle &= e^{-i(\Omega - \frac{1}{4}\lambda')t}|--\rangle, \end{aligned} \quad (4.25)$$

e é adequado para a implementação da porta de fase controlada (4.17) como previamente observado em [158, 159, 162]. Seguindo as linhas desses trabalhos, se fizermos os átomos dispenderem um tempo de vôo  $t'$  nesta última cavidade satisfazendo [152]

$$\lambda' t' = 2\pi, \quad (4.26)$$

e

$$\Omega t' = (2k + \frac{1}{2})\pi, \quad (4.27)$$

sendo  $k$  um inteiro, teremos a CPG desejada. Ainda, podemos fazer  $\delta = g'$ , tal que  $g' t' = 2\pi$ , satisfazendo as condições (4.23) e (4.26) e escolher a frequência de Rabi  $\Omega$  apropriadamente para satisfazer a condição (4.27).

Logo, a transformação realizada pelo operador evolução temporal (4.24) é equivalente à operação CPG

(4.20), a qual, na base computacional atômica, é dada por [152]

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{\text{CPG}}|gg\rangle &= \frac{1}{2}(|gg\rangle - |ge\rangle - |eg\rangle - |ee\rangle), \\
\mathbf{U}_{\text{CPG}}|ge\rangle &= \frac{1}{2}(-|gg\rangle + |ge\rangle - |eg\rangle - |ee\rangle), \\
\mathbf{U}_{\text{CPG}}|eg\rangle &= \frac{1}{2}(-|gg\rangle - |ge\rangle + |eg\rangle - |ee\rangle), \\
\mathbf{U}_{\text{CPG}}|ee\rangle &= \frac{1}{2}(-|gg\rangle - |ge\rangle - |eg\rangle + |ee\rangle).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

A transformação (4.28) acima leva então o estado global do sistema (4.16) para [152]

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{2}(|gg\rangle|\text{CLUSTER}_{\beta,4}^+\rangle - |ge\rangle|C_{\beta,4}^+\rangle - |eg\rangle|C_{\beta,4}^-\rangle + |ee\rangle|\text{CLUSTER}_{\beta,4}^-\rangle). \tag{4.29}$$

Os estados atômicos são então medidos nos detectores seletivos de estado por ionização de campo  $D_1$  e  $D_2$  (veja figura 7). É interessante notar que, independente do resultado das medidas dos estados atômicos, *sempre* obtemos um estado coerente emaranhado tipo-cluster entre as quatro cavidades espacialmente separadas, pertencente à base  $\mathcal{B}_{C_4}^\alpha$ . Por exemplo, nos eventos em que os átomos são detectados no estado  $|gg\rangle$ , obtemos o estado [152]

$$|\text{CLUSTER}_{\beta,4}^+\rangle = \frac{1}{2}(|\beta, \beta, \beta, \beta\rangle + |\beta, \beta, -\beta, -\beta\rangle + |-\beta, -\beta, \beta, \beta\rangle - |-\beta, -\beta, -\beta, -\beta\rangle). \tag{4.30}$$

Além disso, podemos observar que outras preparações iniciais como  $|\psi_{af}\rangle = |gg\rangle|\alpha, \alpha, \alpha, -\alpha\rangle$ ,  $|\psi_{af}\rangle = |gg\rangle|\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha\rangle$ , e  $|\psi_{af}\rangle = |gg\rangle|\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha\rangle$  são suficientes para gerar os outros elementos da base  $\mathcal{B}_{C_4}^\alpha$ . Alternativamente, isso pode também ser obtido após a geração, enviando átomos para atravessar cada cavidade, adicionando assim fases clássicas na amplitude dos campos coerentes, constituindo operações *bit-flip* [152].

#### 4.2.1. Medida do Campo Coerente na Cavidade

Como já mencionamos, estados *cluster* são bem conhecidos por suas aplicações em Computação Quântica Baseada em Medidas (MBQC), ou seja, Computação Quântica de uni-direcional [19, 101, 102]. Em se tratando de *qubits*, um estado *cluster* altamente emaranhado é preparado *a priori* e um conjunto de operações locais e medidas, auxiliadas por comunicação clássica entre as partes, são cuidadosamente escolhidas e realizadas em cada *qubit*, a fim de obter a computação desejada. Para que nossa implementação de CTECS em cavidades seja útil em esquemas similares de computação baseada em medidas, precisamos considerar um mecanismo para medir cada campo das cavidades na base  $\{|\alpha\rangle, |-\alpha\rangle\}$ . Um esquema possível de medida é relatado em [163], o qual é delineado aqui para completeza. O esquema reside na escolha do operador medida (projetor) [152]

$$\mathbf{P}_\alpha = |\alpha\rangle\langle\alpha|, \tag{4.31}$$

e do operador complementar a este

$$Q_\alpha = \mathbb{1} - P_\alpha. \quad (4.32)$$

Podemos facilmente observar que tais operadores satisfazem a relação de fechamento

$$P_\alpha^\dagger P_\alpha + Q_\alpha^\dagger Q_\alpha = \mathbb{1}, \quad (4.33)$$

a qual expressa o fato de que as probabilidades associadas com a cada resultado somam a unidade [6]. Uma maneira possível de projetar o campo da cavidade no estado  $|\alpha\rangle$  é aplicar o operador deslocamento  $D(-\alpha)$ , realizando a transformação  $P_\alpha \rightarrow |0\rangle\langle 0|$ , seguida por uma proposital diminuição do fator de qualidade  $Q$  da cavidade, permitindo que o campo escape da cavidade. Assim, nos eventos em que nenhum fóton é detectado fora da cavidade, o estado do campo é projetado em  $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ , efetivamente realizando a medida  $P_\alpha$ . A fim de projetar o estado do campo em  $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ , devemos seguir esse mesmo procedimento apenas alterando o sinal de  $\alpha$ .

Desafortunadamente, este esquema é intrinsecamente probabilístico, o que parece colocar um limite na qualidade da medida do campo da cavidade na base  $\{|\alpha\rangle, |-\alpha\rangle\}$ . Contudo, acreditamos que novos esquemas podem ser propostos num futuro próximo, visto que estados coerentes vem sendo extensivamente considerados nos campos de Óptica Quântica e, mais recentemente, Informação Quântica.

Vale a pena enfatizar que este nosso esquema de geração não é limitado a sistemas de Óptica Quântica. Na verdade, o Modelo de Jaynes-Cummings (JCM) e suas diferentes generalizações são possíveis de serem implementados em muitos sistemas de matéria condensada interessantes, tais como junções supercondutoras [164], bem como mais recentemente em sistema híbridos de óptica e semicondutores [1, 49]. Assim, nossas idéias podem ser, em princípio, bem convenientes para implementação em tais sistemas.

#### 4.2.2. Viabilidade experimental

Agora apresentamos algumas considerações a respeito da viabilidade experimental do esquema, num sistema real consistindo de átomos de Rydberg e cavidades de microondas [165, 166]. Primeiramente, devemos notar que a preparação de estados coerentes em cavidades de microondas é basicamente a injeção de um campo clássico antes da passagem do átomo. Isto pode ser realizado com facilidade atualmente [165, 166]. No que concerne os átomos, zonas de Ramsey são conhecidas por realizar as rotações iniciais, também com boa fidelidade, na situação atual dos experimentos em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (CQED) [165, 166]. Assim, não se exige tanto da preparação inicial do estado do sistema.

Agora, o aspecto mais importante a ser investigado é a comparação entre o tempo total que os átomos dispõem ao atravessar todas as cavidades, com os tempos de relaxação envolvidos no problema. Cada cavidade possui um tempo de armazenamento de fótons  $T_{\text{cav}} = 130$  ms [69, 167], e os tempos radiativos  $T_{\text{at}}$  para átomos de Rydberg são da ordem de 30 ms [165, 166]. Desprezando a separação espacial entre as cavidades, o protocolo de geração leva um tempo  $T = 2 \times \pi/2\lambda + 2\pi/\lambda'$ . Considerando  $g = g' = 2\pi \times 25$  kHz e  $\Delta = 2\pi \times 8g$ , observando as condições (4.23) e (4.26), temos o tempo total de

geração do CTECS dado por  $T \approx 1.045$  ms. Logo, temos  $T_{\text{cav}}/T \approx 124$  e  $T_{\text{at}}/T \approx 29$  o que indica que a implementação de nosso esquema [152] pode ser viável no presente estado-da-arte em sistemas de cavidades super-condutoras. Contudo, enfatizamos que uma análise mais completa deve exigir o estudo da evolução temporal do estado inicial do sistema (dois átomos e cinco cavidades) sob a presença de mecanismos de relaxação e amortecimento da fase, durante o tempo de geração<sup>c</sup>.

#### 4.2.3. Generalização para $2p$ -Cavidades

Quando se pensa nas aplicações potenciais em Computação Quântica Baseada em Medidas (MBQC) [19, 101, 102], é interessante estender nosso esquema de geração para um número arbitrário de cavidades. Para esse propósito, ao invés de atravessarem apenas duas cavidades, cada um dos dois átomos devem agora atravessar  $p$ -cavidades em linha antes de interagir, segundo o Hamiltoniano (4.13), com a última cavidade. A interação átomo-campo em cada uma das  $2p$ -cavidades é ainda dispersiva, conforme descrita pelo Hamiltoniano (4.13). Então, o estado inicial do sistema seria escrito como

$$|\psi_{\text{af}}\rangle = |gg\rangle|\alpha\rangle^{\otimes p}|\alpha\rangle^{\otimes p}, \quad (4.34)$$

e todos os tempos de interação são ainda dados por  $\pi/2\lambda$ , ou seja, são independentes de  $p$ . Assim, antes de atravessar a última cavidade, o estado do átomo  $i$ , e suas respectivas  $p$ -cavidades seria dado por

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_i\rangle|\beta\rangle^{\otimes p} + (-i)^p|e_i\rangle|-\beta\rangle^{\otimes p}). \quad (4.35)$$

Logo, após um tempo de interação  $2\pi\lambda'$  com a última cavidade (também independente de  $p$ ), e uma medida subsequente dos estados atômicos, por exemplo, em  $|gg\rangle$ , o estado das  $2p$ -cavidades colapsa no estado [152]

$$|\text{CLUSTER}_{\beta,2p}^+\rangle = \sqrt{N_{2p}^+}(|\beta\rangle^{\otimes p}|\beta\rangle^{\otimes p} - z_p|\beta\rangle^{\otimes p}|-\beta\rangle^{\otimes p} - z_p|-\beta\rangle^{\otimes p}|\beta\rangle^{\otimes p} - z_p^2|-\beta\rangle^{\otimes p}|-\beta\rangle^{\otimes p}), \quad (4.36)$$

onde  $N_{2p}^+ = \frac{1}{4}[1 + \frac{1}{2}(1 - z_p)e^{-4p|\alpha|^2}]^{-1}$  é a normalização e  $z_p = (-i)^p$  é uma fase. Este é um exemplo de CTECS envolvendo  $2p$  elementos, sendo  $p$  um número inteiro positivo arbitrário.

### 4.3. Perda de Coerência por Perda de Fótons

Analizamos agora o efeito da perda de coerência no CTECS logo após completar o protocolo de geração. Como já medimos os átomos e a última cavidade do protocolo também não faz parte do estado gerado, consideramos aqui apenas as perdas devido ao amortecimento das amplitudes dos campos das demais cavidades, ou seja, a perda de fótons pelas paredes das cavidades que formam o CTECS até que

<sup>c</sup> Uma vez que, durante a geração, átomos e campos se emaranham, o tempo de perda de coerência passa a depender da amplitude inicial dos campos.

esse estado, compartilhado pelas  $2p$ -cavidades, se degrade totalmente. Por simplicidade, consideramos iguais as taxas  $\kappa$  de perda de fótons em cada cavidade do CTECS.

Como mostramos mais adiante, realizamos uma recodificação dos elementos que formam o CTECS das  $2p$ -cavidades expandidos no espaço de Hilbert  $2p$ -dimensional  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \dots \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  para o espaço bidimensional  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . Com isso, resolvemos a equação mestra do problema obtendo a evolução do CTECS sob a ação de perda de fótons nas cavidades, analisando o emaranhamento através da *concurrence* de Wootters e a Fidelidade Máxima de Teletransporte que pode ser obtida com esse canal ruidoso em função dos parâmetros envolvidos, a amplitude inicial do campo coerente nas cavidades  $\alpha$  e a taxa de amortecimento das cavidades  $\kappa$ . Para obter tais resultados, como veremos, é necessário também a construção de uma base ortonormal de estados coerentes, para contornar os problemas com a ortogonalidade e fechamento, característicos de estados coerentes.

#### 4.3.1. Solução da Equação Mestra

Observando a simetria do estado CTECS (4.36), gerado entre as  $2p$ -cavidades, podemos reescrever esse estado na forma

$$|\text{CLUSTER}_{\beta,2p}^+\rangle \equiv \sqrt{N_{2p}^+} (|\beta_p, \beta_p\rangle - z_p |\beta_p, -\beta_p\rangle - z_p |-\beta_p, \beta_p\rangle - z_p^2 |-\beta_p, -\beta_p\rangle), \quad (4.37)$$

na qual  $|\beta_p\rangle = |\beta\rangle^{\otimes p}$ , e  $|-\beta_p\rangle = |-\beta\rangle^{\otimes p}$ , representam os novos *qubits* de estados coerentes *recodificados*, de forma a responderem como *qubits* de um espaço de Hilbert de duas dimensões. Assim, as  $p$  primeiras cavidades do estado (4.36), as quais foram atravessadas pelo átomo 1 durante o protocolo de geração, são agora definidas como sendo um *qubit* e as  $p$  últimas cavidades do mesmo estado, as quais foram atravessadas pelo átomo 2 nas mesmas condições observadas para o conjunto de cavidades do átomo 1, são agora definidas como sendo outro *qubit*, formando assim um estado emaranhado bipartido de estados coerentes, dependente do número de cavidades que formam o CTECS.

Após a geração do CTECS, o mecanismo de perda de coerência mais importante é o amortecimento das amplitudes iniciais dos campos coerentes das cavidades que formam o estado, o qual, portanto, consideramos aqui. Modelamos aqui reservatórios individuais para cada uma das cavidades, todas elas com taxas de decaimento de fótons iguais  $\kappa$ . Assim, para reservatórios no vácuo, o canal quântico emaranhado inicial

$$\begin{aligned} \rho &\equiv |\text{CLUSTER}_{\beta,2p}^+\rangle \langle \text{CLUSTER}_{\beta,2p}^+| = \\ &N_{2p}^+ (|\beta_p, \beta_p\rangle \langle \beta_p, \beta_p| - z_p^* |\beta_p, \beta_p\rangle \langle \beta_p, -\beta_p| - z_p |\beta_p, \beta_p\rangle \langle -\beta_p, \beta_p| - z_p^2 |\beta_p, \beta_p\rangle \langle -\beta_p, -\beta_p| \\ &- z_p |\beta_p, -\beta_p\rangle \langle \beta_p, \beta_p| + |\beta_p, -\beta_p\rangle \langle \beta_p, -\beta_p| + |z_p|^2 |\beta_p, -\beta_p\rangle \langle -\beta_p, \beta_p| + z_p^* |\beta_p, -\beta_p\rangle \langle -\beta_p, -\beta_p| \\ &- z_p |-\beta_p, \beta_p\rangle \langle \beta_p, \beta_p| + |z_p|^2 |-\beta_p, \beta_p\rangle \langle \beta_p, -\beta_p| + |-\beta_p, \beta_p\rangle \langle -\beta_p, \beta_p| + z_p^* |-\beta_p, \beta_p\rangle \langle -\beta_p, -\beta_p| \\ &- z_p^2 |-\beta_p, -\beta_p\rangle \langle \beta_p, \beta_p| + z_p |-\beta_p, -\beta_p\rangle \langle \beta_p, -\beta_p| + z_p |-\beta_p, -\beta_p\rangle \langle -\beta_p, \beta_p| + |-\beta_p, -\beta_p\rangle \langle -\beta_p, -\beta_p|), \end{aligned} \quad (4.38)$$

evolui para um estado de mistura estatística, perdendo fótons a uma taxa  $\kappa = 1/T_{\text{cav}}$ , sendo  $T_{\text{cav}}$  o tempo

de armazenamento (relaxação) de fótons em cada cavidade, até que o sistema atinja o equilíbrio térmico com os reservatórios, ou seja, o estado vácuo  $|0\rangle^{\otimes p}|0\rangle^{\otimes p}$ , perdendo completamente o emaranhamento inicial. Nas aproximações de onda girante (RWA) e Born-Markov (veja apêndice B) o operador densidade para o CTECS obedece a seguinte equação mestra [93, 136, 168]

$$\dot{\varrho}(t) = \mathcal{L}_f \varrho(t), \quad (4.39)$$

com o Liouvilleano

$$\mathcal{L}_f = 2\kappa \sum_i (a_i \cdot a_i^\dagger - \frac{1}{2}\{a_i^\dagger a_i, \cdot\}), \quad (4.40)$$

que representa o Liouvilleano coletivo de todas as  $2p$ -cavidades.

Assim, após definirmos os super-operadores [93, 168, 169]

$$\begin{aligned} J &= \sum_i J_i, & J_i &= a_i \cdot a_i^\dagger, \\ L &= \sum_i L_i, & L_i &= -\frac{1}{2}\{a_i^\dagger a_i, \cdot\}, \end{aligned} \quad (i = 1, 2) \quad (4.41)$$

a equação mestra (4.39) pode ser escrita na forma mais compacta

$$\dot{\varrho}(t) = 2\kappa(J + L)\varrho(t), \quad (4.42)$$

cujas solução formal é

$$\varrho(t) = \exp[2\kappa t(J + L)]\varrho. \quad (4.43)$$

Como mostrado no apêndice B, essa solução pode ser simplificada pelo desacoplamento do operador exponencial. O cálculo do comutador dos super-operadores  $J$  e  $L$  resulta em  $[J, L] = -J$ , tal que podemos reescrever (veja apêndice B) o operador exponencial como [93]

$$\exp[2\kappa t(J + L)] = \exp(2\kappa tL) \exp[(1 - e^{-2\kappa t})J], \quad (4.44)$$

ou

$$\exp[2\kappa t(J + L)] = \exp[(e^{2\kappa t} - 1)J] \exp(2\kappa tL). \quad (4.45)$$

Como estamos considerando decaimento em modos de cavidades preparadas inicialmente em estados coerentes, daqui em diante, adotaremos a primeira forma acima, e a solução (3.21) toma a forma

$$\varrho(t) = \exp(2\kappa tL) \exp[(1 - e^{-2\kappa t})J]\varrho. \quad (4.46)$$

Essa forma da solução da equação mestra é mais conveniente aqui, pois o estado coerente  $|\alpha\rangle\langle\alpha|$  é um auto-operador do super-operador  $J$  [93]. Assim, a ação do operador (4.44) num elemento não-diagonal

do estado inicial (4.38) é dada por

$$\exp(2\kappa t \mathbf{L}) \exp[(1 - e^{-2\kappa t}) \mathbf{J}] |\beta_p\rangle \langle \beta'_p| = e^{-2pr^2|\alpha|^2} |\tilde{\beta}_p\rangle \langle \tilde{\beta}'_p|, \quad (4.47)$$

na qual  $|\tilde{\beta}_p\rangle = |\beta_p \tau\rangle$ ,  $\tau = \exp(-2\kappa t)$  e  $r = \sqrt{1 - \tau^2}$  é o tempo normalizado. Quando  $t = 0$ ,  $\tau = 1$  e  $r = 0$ . Quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $\tau \rightarrow 0$  e  $r \rightarrow 1$ . Assim, o operador densidade evoluído é dado por

$$\begin{aligned} \rho(t) = & N_{2p}^+ (|\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p\rangle \langle \tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p| - \tilde{z}_p^* |\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p\rangle \langle \tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p| - \tilde{z}_p |\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p\rangle \langle -\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p| - \tilde{z}_p^2 |\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p\rangle \langle -\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p| \\ & - \tilde{z}_p |\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p\rangle \langle \tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p| + |\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p\rangle \langle \tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p| + |\tilde{z}_p|^2 |\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p\rangle \langle -\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p| + \tilde{z}_p^* |\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p\rangle \langle -\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p| \\ & - \tilde{z}_p |\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p\rangle \langle \tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p| + |\tilde{z}_p|^2 |\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p\rangle \langle \tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p| + |\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p\rangle \langle -\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p| + \tilde{z}_p^* |\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p\rangle \langle -\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p| \\ & - \tilde{z}_p^2 |\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p\rangle \langle \tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p| + \tilde{z}_p |\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p\rangle \langle \tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p| + \tilde{z}_p |\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p\rangle \langle -\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p| + |\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p\rangle \langle -\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p|), \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde  $\tilde{z}_p = (-i)^p e^{-2pr^2|\alpha|^2}$ . Observamos que este estado evoluído, segundo a dinâmica da equação (4.43), possui a distintiva característica de manter sua normalização independente do tempo.

#### 4.4. Dinâmica sob Dissipação

Nesta seção o intuito é analisar os efeitos da perda de fótons pelas cavidades usando as definições de medida de emaranhamento dada pela *concurrence* de Wootters [36, 37] e de fidelidade de teletransporte [48], já bem estabelecidas para sistemas bipartidos. Agora que recodificamos o nosso CTECS de modo a satisfazer uma expansão nesse espaço de Hilbert bidimensional, devemos construir uma base ortogonal a partir dos estados coerentes não-ortogonais  $|\alpha\rangle$  e  $|\alpha\rangle$  que formam o CTECS no espaço recodificado, definidos na seção anterior, de modo a permitir a obtenção das quantidades desejadas sem enfrentar problemas com a questão da ortogonalidade presente nos estados da base de estados coerente original.

##### 4.4.1. Base Ortonormal de Estados Coerentes

Como já vimos, é possível considerar estados coerentes num espaço de Hilbert bidimensional  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . No nosso caso, antes, tivemos que fazer uma segunda codificação para que um estado definido no espaço de Hilbert  $2p$ -dimensional  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \dots \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  pudesse ser considerado no espaço bipartido de interesse, uma vez que isso torna o problema o mais simples possível, pois estados emaranhados de dois *qubits* são bastante bem entendidos atualmente, com definições totalmente esclarecidas sobre o emaranhamento entre as partes que formam o estado de interesse.

Do teorema de Gram-Schmidt, sabemos ser sempre possível construir uma base ortonormal expandida num espaço  $n$ -dimensional partindo de  $n$  vetores lineares independentes [136]. Um dos exemplos mais simples é construir a base ortonormal formada pelos denominados estados coerentes par e ímpar (estados gato par e ímpar) [170–173], superposições dos estados não-ortogonais e lineares que já estamos

considerando aqui,  $|\beta\rangle$  e  $|\beta\rangle$ . Assim, temos a base de estados coerentes par e ímpar dada por

$$|\beta^\pm\rangle = \sqrt{N^\pm}(|\beta\rangle \pm |\beta\rangle), \quad (4.49)$$

onde  $N^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm e^{-2|\alpha|^2})^{-1}$  são as normalizações.

Na recodificação considerada aqui, temos produtos de  $2p$  estados coerentes, sendo os  $p$  primeiros (últimos) estados coerentes formando o primeiro (segundo) *qubit* de estados coerentes emaranhados recodificados no espaço bidimensional. Assim, vamos agora, de uma maneira similar, definir a seguinte base ortonormal<sup>d</sup> em termos dos estados  $|\beta_p\rangle$  e  $|\beta_p\rangle$

$$|\beta_p^\pm\rangle \equiv \sqrt{N_p^\pm}(|\beta_p\rangle \pm |\beta_p\rangle), \quad (4.50)$$

onde  $N_p^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm e^{-2p|\alpha|^2})^{-1}$  são as normalizações.

Usando essa base  $\{|\beta_p^+\rangle, |\beta_p^-\rangle\}$  que acabamos de escrever, definimos agora uma base padrão ortonormal no espaço de Hilbert  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , conveniente para os propósitos neste capítulo:

$$\{|\beta_p^+, \beta_p^+\rangle, |\beta_p^+, \beta_p^-\rangle, |\beta_p^-, \beta_p^+\rangle, |\beta_p^-, \beta_p^-\rangle\}. \quad (4.51)$$

É fácil mostrar que a base padrão acima é ortonormal para qualquer valor de  $\alpha$ . Sua forma em termos dos estados  $|\pm\beta_p\rangle$  é dada por

$$\begin{aligned} |\beta_p^+, \beta_p^+\rangle &= N_p^+ (|\beta_p, \beta_p\rangle + |\beta_p, -\beta_p\rangle + |-\beta_p, \beta_p\rangle + |-\beta_p, -\beta_p\rangle), \\ |\beta_p^+, \beta_p^-\rangle &= \sqrt{N_p^+ N_p^-} (|\beta_p, \beta_p\rangle - |\beta_p, -\beta_p\rangle + |-\beta_p, \beta_p\rangle - |-\beta_p, -\beta_p\rangle), \\ |\beta_p^-, \beta_p^+\rangle &= \sqrt{N_p^+ N_p^-} (|\beta_p, \beta_p\rangle + |\beta_p, -\beta_p\rangle - |-\beta_p, \beta_p\rangle - |-\beta_p, -\beta_p\rangle), \\ |\beta_p^-, \beta_p^-\rangle &= N_p^- (|\beta_p, \beta_p\rangle - |\beta_p, -\beta_p\rangle - |-\beta_p, \beta_p\rangle + |-\beta_p, -\beta_p\rangle). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Para proceder com a restrição para o espaço de Hilbert  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  até mesmo para estados mistos, os vetores da base ortonormal (4.50) são agora dependentes de  $t$

$$|\tilde{\beta}_p^\pm\rangle = \sqrt{\tilde{N}_p^\pm}(|\tilde{\beta}_p\rangle \pm |-\tilde{\beta}_p\rangle), \quad (4.53)$$

onde  $\tilde{N}_p^\pm = \frac{1}{2}[2(1 - e^{-4p\tau^2|\alpha|^2})]^{-1}$ . Da mesma forma, a base padrão (4.52) dependente de  $t$  é

$$\begin{aligned} |\tilde{\beta}_p^+, \tilde{\beta}_p^+\rangle &= \tilde{N}_p^+ (|\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p\rangle + |\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p\rangle + |-\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p\rangle + |-\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p\rangle), \\ |\tilde{\beta}_p^+, \tilde{\beta}_p^-\rangle &= \sqrt{\tilde{N}_p^+ \tilde{N}_p^-} (|\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p\rangle - |\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p\rangle + |-\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p\rangle - |-\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p\rangle), \\ |\tilde{\beta}_p^-, \tilde{\beta}_p^+\rangle &= \sqrt{\tilde{N}_p^+ \tilde{N}_p^-} (|\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p\rangle + |\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p\rangle - |-\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p\rangle - |-\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p\rangle), \\ |\tilde{\beta}_p^-, \tilde{\beta}_p^-\rangle &= \tilde{N}_p^- (|\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p\rangle - |\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p\rangle - |-\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_p\rangle + |-\tilde{\beta}_p, -\tilde{\beta}_p\rangle). \end{aligned} \quad (4.54)$$

<sup>d</sup> Observar que  $|\beta_p^\pm\rangle \neq |\beta^\pm\rangle^{\otimes p}$ , ou seja, representa uma mera notação.

Embora sejam estados dependentes do tempo, a ortogonalidade é sempre mantida até  $t \rightarrow \infty$  [174].

Assim, ao reescrever o estado (4.48) na base ortonormal (4.54), estamos em perfeitas condições de analisar perda de coerência e teletransporte com *qubits* de estados coerentes emaranhados recodificados no espaço de Hilbert bidimensional, inclusive para estados de mistura.

#### 4.4.2. Concurrence

Uma maneira conveniente de calcular a *concurrence* para o estado (4.48) é reescrever tal estado na base ortonormal (4.54), que pode ser considerada a base padrão para os estados coerentes recodificados considerados aqui. Assim, dos possíveis procedimentos para calcular a *concurrence* discutidos no capítulo 2, consideramos

$$C = \max(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4), \quad (4.55)$$

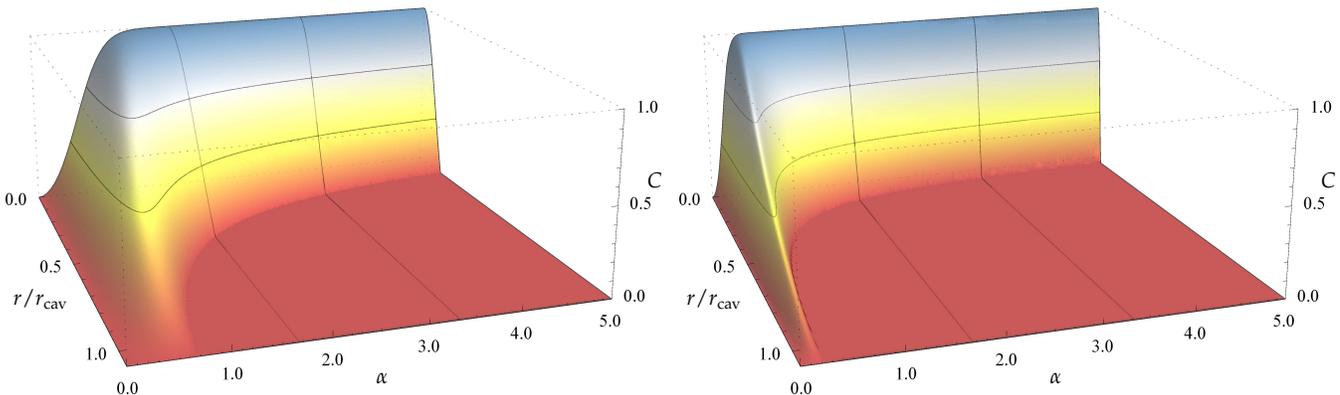
onde os parâmetros  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) são as raízes quadradas dos auto-valores, em ordem decrescente, do operador não-Hermitiano  $\rho\tilde{\rho}$ , escrito na base padrão de estados ortonormais que escrevemos na seção anterior (4.54) [136], e

$$\tilde{\rho} = (\sigma^y \otimes \sigma^y) \rho^* (\sigma^y \otimes \sigma^y), \quad (4.56)$$

é o operador *spin-flipped*, onde  $\rho^*$  é complexo conjugado de  $\rho$ .

O gráfico da *concurrence* em função da amplitude e do tempo de decaimento normalizado  $r/r_{\text{cav}}$  revela um efeito interessante para esses estados CTECS restritos ao espaço de Hilbert bidimensional: a morte súbita de emaranhamento (ESD) [99]. Observando a figura 8, vemos que para pequenos valores da amplitude inicial  $\alpha$ , o canal desemaranha apenas quando  $r \rightarrow \infty$ . Quanto maior a amplitude inicial  $\alpha$  mais rápida a morte súbita do emaranhamento (figura 8).

Observamos também a existência de uma compensação da não-ortogonalidade entre  $|\alpha\rangle$  e  $|\alpha\rangle$  com o aumento do número de pares de cavidades  $p$ . Em princípio, é possível ajustar o número  $p$  de pares de cavidades para o qual temos uma máxima quantidade de emaranhamento para valores pequenos da amplitude inicial  $\alpha$ .



**Figura 8** – Concurrence em função de  $r/r_{\text{cav}}$  ( $r_{\text{cav}} = \sqrt{1 - e^{-2}}$ ) e  $\alpha$  para  $p = 1$  (esquerda) e  $p = 10$  (direita).

### 4.4.3. Fidelidade de Teletransporte

Suponhamos agora que Alice quer teletransportar um estado de superposição de estados coerentes como

$$|\psi\rangle = a|\tilde{\beta}_p\rangle + b|-\tilde{\beta}_p\rangle, \quad (4.57)$$

com coeficientes não-conhecidos  $a$  e  $b$  usando o canal ruidoso  $\varrho(t)$  [136]. O estado acima pode também ser representado em termos da base ortonormal (4.53)

$$|\psi\rangle = a'|\tilde{\beta}_p\rangle + b'|-\tilde{\beta}_p\rangle. \quad (4.58)$$

Assim, uma vez compartilhando com Bob o canal emaranhado  $\varrho(t)$ , Alice pode realizar o protocolo padrão de teletransporte. É importante frisar a complexidade da realização experimental desse procedimento nesse sistema que estamos considerando. Quanto maior o número  $p$  de cavidades que formam o CTECS compartilhado entre Alice e Bob maior deve ser a dificuldade em se realizar as operações previstas para completar essa tarefa. Um primeiro problema é a questão da medida dos campos dessas cavidades como já discutido. A outra dificuldade adicional é o sincronismo que deve existir entre as medidas individuais de cada uma das  $p$  cavidades de cada laboratório para resultar numa única medida (projeção na base Bell) efetiva para o espaço recodificado bidimensional. A seguir analisamos a fidelidade de realização de teletransporte nesse sistema, deixando de lado esses inconvenientes, os quais esperamos que sejam resolvidos em trabalhos subseqüentes.

Como vimos no capítulo 2, a Fidelidade Máxima de Teletransporte obtida usando um estado bipartido como canal quântico é dada por [48]:

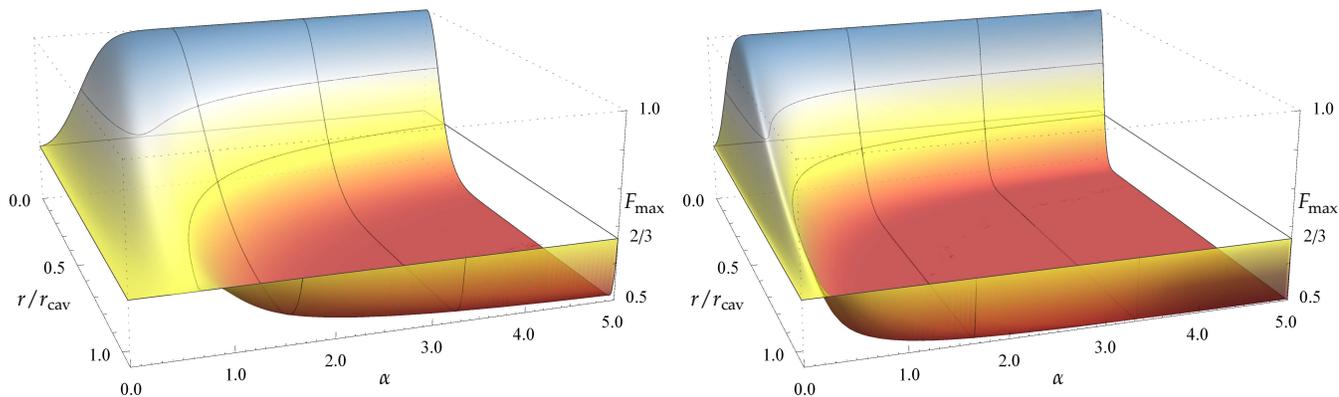
$$F_{\max} = \frac{2f_{\max} + 1}{3}, \quad (4.59)$$

onde  $f_{\max}$  é a Fração Totalmente Emaranhada [26]:

$$f_{\max} = \max_{|\psi\rangle} \langle \psi | \varrho | \psi \rangle, \quad (4.60)$$

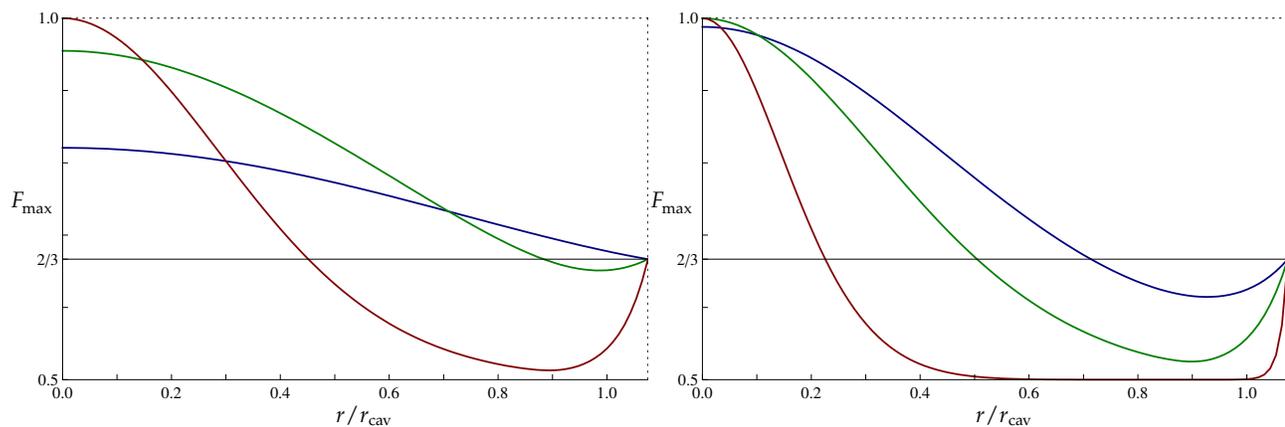
com o máximo tomado sobre todos estados maximamente emaranhados. Seguimos aqui o mesmo procedimento descrito em [26] para calcular  $f_{\max}$ : Escrevemos  $\varrho(t)$  na base mágica  $|m_i\rangle$  (2.9), agora em termos dos estados da base (4.53), tal que  $f_{\max}$  é simplesmente o maior autovalor da parte real de  $\varrho(t)$  quando escrito nesta base. Ressaltamos que também poderíamos ter considerado essa mesma base mágica de estados gato par e ímpar, para o cálculo que fizemos para obter a *concurrence* para esses estados CTECS recodificados no espaço de Hilbert bidimensional. Assim, substituindo o resultado encontrado para  $f_{\max}$  em (4.59) obtemos os gráficos para a Fidelidade Máxima de Teletransporte para o estado  $\varrho(t)$  (4.48).

Analisando a figura 9, observamos que para pequenos valores de  $\alpha$  o canal permanece útil para teletransporte até  $t \rightarrow \infty$ . Para tempos muito menores que o tempo de relaxação das cavidades, o canal é sempre útil para teletransporte, mesmo para amplitudes iniciais dos campos das cavidades em torno de  $\alpha = 1$  ou maiores. Porém, como esperado, os efeitos da perda de fótons se tornam maiores à medida



**Figura 9** – Fidelidade Máxima de Teletransporte em função de  $r/r_{\text{cav}}$  e  $\alpha$  para  $p = 1$  (esquerda) e  $p = 10$  (direita).

que consideramos amplitudes iniciais maiores. Devido à compensação entre  $\alpha$  e  $p$ , é possível obter uma Fidelidade Máxima de Teletransporte acima do limite clássico, mesmo para valores de  $\alpha$  menores que 1. Tal situação é melhor ilustrada na figura 10. Quando  $\alpha = 0.5$ , é melhor dispor de  $p = 10$  pares de cavidades se o teletransporte for realizado durante um tempo  $r \approx 0.15r_{\text{cav}}$ ,  $p = 2$  se realizado até  $r \approx 0.7r_{\text{cav}}$  e  $p = 1$  mesmo depois de  $r = r_{\text{cav}}$ . Quando  $\alpha \geq 1$  é sempre melhor dispor de um número pequeno de pares de cavidades.



**Figura 10** – Fidelidade Máxima de Teletransporte em função de  $r/r_{\text{cav}}$  para  $\alpha = 0.5$  (esquerda) e  $\alpha = 1.0$  (direita), com  $p = 1$  (azul),  $p = 2$  (verde) e  $p = 10$  (vermelho).

---

## 5. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

---

**R**esumimos agora as conclusões para os principais resultados obtidos nesta tese, apresentando em seguida as perspectivas de trabalhos futuros e eventualmente extensões que podem ser prontamente verificadas a partir dos resultados obtidos aqui.

No capítulo 3, investigamos o efeito da emissão espontânea atômica na geração de estados maximamente emaranhados, com enfoque na utilidade para realização de teletransporte. Mostramos que observáveis experimentais, tais como probabilidades de detecção conjunta e funções de correlação envolvendo componentes transversas das matrizes de Pauli (Sinal de Bell) sofrem uma redução na visibilidade devido ao efeito do decaimento atômico. Calculamos a quantidade de emaranhamento (*concurrence*) entre os átomos, na qual mostramos que uma quantidade apreciável de emaranhamento é necessária para permitir a realização de teletransporte com o canal quântico compartilhado entre os átomos. Através do cálculo da Fidelidade Máxima de Teletransporte, encontramos o limite superior para o valor da taxa de emissão espontânea, abaixo do qual ainda é possível realizar teletransporte usando o canal ruidoso formado pelos átomos. O conhecimento desse limite superior para a taxa de decaimento que ainda permite a realização de teletransporte, tal como encontramos aqui, é de importância central para a implementação desse canal quântico num experimento real. O efeito considerado aqui, pode ser reduzido se a emissão espontânea é desprezível em comparação com o tempo necessário para a realização de teletransporte. Esse é caso se escolhermos átomos com longo tempo de relaxação [82]. Contudo, se estivermos interessados numa situação mais geral, os efeitos da emissão espontânea não são desprezíveis e devem ser levados em conta.

No capítulo 4, propusemos um novo tipo de estados emaranhados multipartidos envolvendo estados coerentes (CTECS) que generalizam os estados *cluster* usuais. Tais estados formam uma base interessante para expandir estados de 4 *qubits* gerais uma vez que todos os elementos dessa base possuem a mesma quantidade de emaranhamento. Acreditamos que tal base pode encontrar muitas aplicações em protocolos de teletransporte baseados em nossa proposta, os CTECS. Apresentamos também uma proposta de implementação real em um sistema de Óptica Quântica, o qual consiste de átomos de Rydberg e cavidades de microondas, e concluímos que nossas idéias podem, em princípio, ser implementadas com a tecnologia atual.

Consideramos também uma extensão do esquema de geração dos CTECS para  $2p$ -cavidades. Fazendo uma recodificação desses estados multipartidos para o espaço de Hilbert bidimensional, auxiliada pela consideração de uma base ortonormal, escolhida convenientemente, para contornar os problemas com a não-ortogonalidade de estados coerentes, investigamos o efeito da perda de coerência por perda de fótons, pelas paredes das cavidades do estado CTECS gerado entre esses  $2p$  elementos (cavidades),

quantificando numericamente seu emaranhamento através da *concurrence* e sua utilidade para fins de teletransporte através do cálculo da Fidelidade Máxima de Teletransporte. Analisamos, numericamente, os valores das amplitudes iniciais das cavidades e taxas de decaimento de fótons, bem como o número  $p$  de cavidades que formam o canal quântico, para os quais o CTECS é útil para a realização de teletransporte com fidelidade maior que a melhor das estratégias clássicas.

Apesar de CQED ser um sistema quase ideal para a realização do modelo de Jaynes-Cummings, nossas idéias podem ser, em princípio, melhor adaptadas para sistemas de estado sólido, aplicando os conhecimentos adquiridos em CQED com a tecnologia de semicondutores para a óptica. Esse novo e importante passo experimental já se encontra em fase de realização nos mais importantes centros de pesquisa experimental desta área.

Apresentamos agora algumas propostas de continuidade dos trabalhos realizados nessa tese. Com relação ao sistema de átomos emaranhados, julgamos que seria interessante analisar o efeito da emissão espontânea numa extensão do problema para  $n$ -átomos interagindo simultaneamente com a cavidade dispersiva, verificando o papel representado pelo aumento do número de átomos.

Um estudo mais completo deve considerar acoplamentos diferentes dos átomos com o campo, evidenciando, por exemplo, a dependência da visibilidade no Sinal de Bell com a estrutura espacial do modo do campo da cavidade e posições dos átomos na cavidade.

Uma outra extensão dos resultados, que pode inclusive ser rapidamente obtida, é a consideração de um campo clássico externo atuando ao mesmo tempo que o campo da cavidade, analisando o efeito da frequência de Rabi clássica em conjunto com o efeito da emissão espontânea na geração de emaranhamento entre os átomos, bem como a sua ação para uma eventual melhora na Fidelidade Máxima de Teletransporte que se pode obter usando o canal gerado entre os átomos dessa forma.

É interessante investigar com mais detalhes a relação existente entre as principais testemunhas de emaranhamento discutidas no capítulo 3. Em particular, entre o Sinal de Bell e a *concurrence*, permitindo, por exemplo, obter uma maneira simples, no contexto de CQED, a segunda, através da medida da primeira, experimentalmente acessível.

Com relação ao CTECS, existem vários tópicos que podem ser extensivamente explorados. Num primeiro exemplo, podemos buscar novos esquemas de geração dos estados CTECS, bem como esquemas de geração de outros estados coerentes emaranhados multipartidos. Atualmente existem propostas para estados GHZ,  $W$  e, pioneiramente, a nossa proposta de CTECS. Como mencionamos, sabemos que existem 8 ou 9 maneiras distintas de formar um emaranhamento quadripartido. Esse número aumenta exponencialmente com o número de *qubits* presentes. Com isso é interessante apresentar propostas de implementação dos mais diversos estados multipartidos possíveis, explorando, sempre que possível, a versatilidade de um dado arranjo experimental para obter diferentes estados coerentes emaranhados. Podemos também considerar um passo anterior a esse, analisando essas possibilidades para sistemas de *qubits* discretos, como usual, e então estender para sistemas de *qubits* de variáveis contínuas, em especial, estados coerentes.

Os resultados que obtivemos para a generalização para  $2p$ -cavidades revela um tópico bastante interessante em Informação Quântica: a utilização de correção de erros quântica durante a realização de diferentes tarefas quânticas, auxiliando numa melhor eficiência das mesmas. É interessante então buscar

por simetrias existentes em estados emaranhados multipartidos, como as que existem nos estados GHZ e *cluster* (variáveis discretas e contínuas), que permitem a (re)codificação de *qubits* em novos *qubits*, tal que seja possível considerar técnicas de tolerância a erros durante a execução de tarefas quânticas.

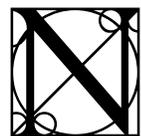
Devido aos problemas com a não-ortogonalidade e, conseqüentemente, a dificuldade na realização de medidas e rotações com estados coerentes, é interessante investigar o esquema de geração de CTECS considerando a codificação de *qubits* envolvendo estados gato par e ímpar. Nesse caso, o esquema de geração deve ser analisado com mais cuidado, devido à preparação inicial ser mais suscetível à perda de coerência. Uma vez que são estados que formam uma base dicotômica, contornam os problemas com a não-ortogonalidade, sendo uma alternativa para a realização de computação quântica [175, 176] e teletransporte [177] com estados coerentes.



---

## A. HAMILTONIANOS EFETIVOS

---



este apêndice apresentamos um dos métodos usuais para se obter Hamiltonianos efetivos quando as frequências dos sistemas envolvidos estão bastante fora da ressonância, ou seja, a dessintonia é grande, a chamada aproximação dispersiva [55, 56]. Outros procedimentos comuns na literatura são considerados em [54, 178]. Obteremos os Hamiltonianos efetivos dos três casos estudados nesta tese, muito embora uma generalização para uma forma geral de Hamiltoniano possa ser facilmente obtida por esse método, conhecido como método do operador evolução.

O procedimento do método se resume em expandir o operador evolução temporal do sistema até segunda ordem e, então, identificar o Hamiltoniano efetivo na expansão realizada.

Considerando um Hamiltoniano, na representação de interação, da forma

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\text{int}}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\mathbf{H}_0$  é o Hamiltoniano livre e  $\mathbf{H}_{\text{int}}$  é o Hamiltoniano de interação [55]. A equação de Schrödinger dependente do tempo, na representação de Schrödinger, é dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\varphi(t)\rangle = \mathbf{H} |\varphi(t)\rangle, \quad (\text{A.2})$$

e podemos integrá-la formalmente obtendo

$$|\varphi(t)\rangle = \mathbf{U}(t) |\varphi\rangle, \quad (\text{A.3})$$

onde  $|\varphi\rangle$  é o estado inicial do sistema e o operador evolução temporal (unitário) é definido pela equação

$$i\hbar \dot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{H} \mathbf{U}(t), \quad (\text{A.4})$$

com  $\mathbf{U} = \mathbf{1}$  em  $t = 0$  [50].

É mais interessante considerar o problema na representação de interação, onde a dependência temporal do vetor de estado é unicamente devida ao Hamiltoniano de interação. Logo, definindo o vetor de estado na representação de interação

$$|\psi(t)\rangle = \mathbf{U}_0^\dagger(t) |\varphi(t)\rangle, \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\mathbf{U}_0(t) = e^{-i\mathbf{H}_0 t/\hbar}, \quad (\text{A.6})$$

temos

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \dot{\mathbf{U}}_0^\dagger(t)|\varphi(t)\rangle + \mathbf{U}_0^\dagger(t)\frac{\partial}{\partial t}|\varphi(t)\rangle, \quad (\text{A.7})$$

e, portanto, das equações (A.2), (A.5) e (A.6), a equação de Schrödinger na representação de interação é

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \mathbf{H}(t)|\psi(t)\rangle, \quad (\text{A.8})$$

onde

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{U}_0^\dagger(t)\mathbf{H}_{\text{int}}\mathbf{U}_0(t), \quad (\text{A.9})$$

é o Hamiltoniano de interação na representação de interação [50]. Desta forma, a transformação de um operador qualquer  $\mathbf{O}$  na representação de Schrödinger para a representação de interação é dada por

$$\mathbf{O}(t) = \mathbf{U}_0^\dagger(t)\mathbf{O}\mathbf{U}_0(t), \quad (\text{A.10})$$

assim como seu valor esperado é obtido de

$$\langle \mathbf{O} \rangle = \langle \varphi(t)|\mathbf{O}|\varphi(t)\rangle = \langle \psi(t)|\mathbf{U}_0^\dagger(t)\mathbf{O}\mathbf{U}_0(t)|\psi(t)\rangle = \langle \psi(t)|\mathbf{O}(t)|\psi(t)\rangle = \langle \mathbf{O}(t) \rangle. \quad (\text{A.11})$$

A solução formal de (A.8) é

$$|\psi(t)\rangle = \mathbf{U}_I(t)|\psi\rangle, \quad (\text{A.12})$$

onde temos a igualdade  $|\psi\rangle = |\varphi\rangle$  para o estado inicial e

$$\mathbf{U}_I(t) = \mathcal{T} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \mathbf{H}(t') \right], \quad (\text{A.13})$$

é o operador evolução na representação de interação [50], no qual  $\mathcal{T}$  é o operador ordenamento temporal

$$\mathcal{T}[A(t')B(t'')] = \begin{cases} B(t'')A(t'), & \text{para } t'' > t' \\ A(t')B(t''), & \text{para } t' > t'' \end{cases}, \quad (\text{A.14})$$

que garante que todos os operadores em tempos anteriores estejam à direita dos operadores em tempos posteriores [56].

Fazendo a expansão perturbativa da exponencial em (A.13), temos[55]

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_I^\dagger(t) &= \mathcal{T} \left[ \mathbf{1} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_0^t dt'' \mathbf{H}(t'') + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \mathbf{H}(t') \mathbf{H}(t'') + \dots \right] \\
&= \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \mathbf{H}(t') - \frac{1}{2\hbar^2} \mathcal{T} \left[ \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \mathbf{H}(t') \mathbf{H}(t'') \right] + \dots \\
&= \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \mathbf{H}(t') - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \mathbf{H}(t') \mathbf{H}(t'') + \dots \\
&= \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \mathbf{H}(t') - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \mathbf{H}(t') \int_0^{t'} dt'' \mathbf{H}(t'') + \dots, \tag{A.15}
\end{aligned}$$

onde ordenamos temporalmente o último termo [55, 56]

$$\mathcal{T} \left[ \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \mathbf{H}(t') \mathbf{H}(t'') \right] = 2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \mathbf{H}(t') \mathbf{H}(t'') = 2 \int_0^t dt' \mathbf{H}(t') \int_0^{t'} dt'' \mathbf{H}(t''). \tag{A.16}$$

Suficiente para os propósitos dessa tese, consideramos Hamiltonianos da forma (A.1), cujo termo de interação é suposto ter a forma geral

$$\mathbf{H}_{\text{int}} = \hbar g (\mathbf{X}^\dagger + \mathbf{X}), \tag{A.17}$$

onde  $g$  é a constante de acoplamento,  $\mathbf{X}^\dagger$  e  $\mathbf{X}$  representam produtos de operadores que descrevem a interação, sem dependência temporal explícita [55]. Assim, de (A.9), a forma do Hamiltoniano de interação na representação de interação, em geral, toma a forma

$$\mathbf{H}(t) = \hbar g (e^{-i\delta t} \mathbf{X}^\dagger + e^{i\delta t} \mathbf{X}), \tag{A.18}$$

onde  $\delta$  é a dessintonia, cuja forma depende do Hamiltoniano em consideração [55].

Substituindo (A.18) em (A.15), resolvemos a primeira integral

$$\begin{aligned}
\int_0^t dt' \mathbf{H}(t') &= \hbar g \left[ \left( \int_0^t dt' e^{-i\delta t'} \right) \mathbf{X}^\dagger + \left( \int_0^t dt' e^{i\delta t'} \right) \mathbf{X} \right] \\
&= \hbar g \left[ \frac{e^{-i\delta t}}{(-i\delta)} \Big|_0^t \mathbf{X}^\dagger + \frac{e^{i\delta t}}{i\delta} \Big|_0^t \mathbf{X} \right] \\
&= \frac{\hbar g}{i\delta} [(1 - e^{-i\delta t}) \mathbf{X}^\dagger - (1 - e^{i\delta t}) \mathbf{X}], \tag{A.19}
\end{aligned}$$

na qual obtemos um fator adicional  $\delta$  no denominador além de termos constantes oscilantes no tempo

[56]. Usamos o resultado acima no cálculo da contribuição de segunda ordem da expansão (A.15)

$$\begin{aligned}
\int_0^t dt' \mathbf{H}(t') \int_0^{t'} dt'' \mathbf{H}(t'') &= \int_0^t dt' \hbar g (e^{-i\delta t'} \mathbf{X}^\dagger + e^{i\delta t'} \mathbf{X}) \frac{\hbar g}{i\delta} [(1 - e^{-i\delta t'}) \mathbf{X}^\dagger - (1 - e^{i\delta t'}) \mathbf{X}] \\
&= \frac{\hbar^2 g^2}{i\delta} \int_0^t dt' [e^{-i\delta t'} (\mathbf{X}^\dagger)^2 - e^{-2i\delta t'} (\mathbf{X}^\dagger)^2 - e^{i\delta t'} (\mathbf{X})^2 + e^{2i\delta t'} (\mathbf{X})^2 \\
&\quad - (e^{-i\delta t'} - 1) \mathbf{X}^\dagger \mathbf{X} + (e^{i\delta t'} - 1) \mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger] \\
&= \frac{\hbar^2 g^2}{i\delta} \left\{ \left. \frac{e^{-i\delta t}}{(-i\delta)} \right|_0^t (\mathbf{X}^\dagger)^2 - \left. \frac{e^{-2i\delta t}}{(-2i\delta)} \right|_0^t (\mathbf{X}^\dagger)^2 - \left. \frac{e^{i\delta t}}{i\delta} \right|_0^t (\mathbf{X})^2 + \left. \frac{e^{2i\delta t}}{2i\delta} \right|_0^t (\mathbf{X})^2 \\
&\quad - \left[ \left. \frac{e^{-i\delta t}}{(-i\delta)} - t \right]_0^t \mathbf{X}^\dagger \mathbf{X} + \left[ \left. \frac{e^{i\delta t}}{i\delta} - t \right]_0^t \mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger \right\} \\
&= \frac{\hbar^2 g^2}{\delta^2} [(e^{-i\delta t} - 1)(\mathbf{X}^\dagger)^2 - \frac{1}{2}(e^{-2i\delta t} - 1)(\mathbf{X}^\dagger)^2 + (e^{i\delta t} - 1)(\mathbf{X})^2 - \frac{1}{2}(e^{2i\delta t} - 1)(\mathbf{X})^2 \\
&\quad - (e^{-i\delta t} - 1) \mathbf{X}^\dagger \mathbf{X} - (e^{i\delta t} - 1) \mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger] + \frac{\hbar^2 g^2}{i\delta} [\mathbf{X}^\dagger \mathbf{X} t - \mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger t], \tag{A.20}
\end{aligned}$$

no qual obtemos mais um fator  $\delta$  no denominador e novos termos oscilantes e constantes no tempo [56]. Os termos com  $g^2/\delta^2$  são pequenos para grandes dessintonias e, portanto, podem ser descartados [55], tal que a equação acima simplifica consideravelmente para

$$\int_0^t dt' \mathbf{H}(t') \int_0^{t'} dt'' \mathbf{H}(t'') \approx \frac{\hbar^2 g^2}{i\delta} [\mathbf{X}^\dagger, \mathbf{X}] t. \tag{A.21}$$

Assim, até segunda ordem, temos

$$\mathbf{U}_I(t) \approx \mathbf{1} - \frac{g}{\delta} [(1 - e^{-i\delta t}) \mathbf{X}^\dagger - (1 - e^{i\delta t}) \mathbf{X}] - i \frac{g^2}{\delta} [\mathbf{X}, \mathbf{X}^\dagger] t, \tag{A.22}$$

onde, comparando as contribuições de primeira e segunda ordem, observamos que ambas são lineares com o inverso da dessintonia. Contudo, enquanto a contribuição de primeira ordem é constante ou oscilante no tempo, a contribuição de segunda ordem é linear no tempo [56] e, portanto, podemos desprezar a de primeira ordem quando comparada com a de segunda ordem, obtendo

$$\mathbf{U}_I(t) \approx \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar} \mathbf{H}_{\text{eff}} t, \tag{A.23}$$

da qual identificamos o Hamiltoniano efetivo

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \hbar \lambda [\mathbf{X}, \mathbf{X}^\dagger], \tag{A.24}$$

onde  $\lambda = g^2/\delta$  é a constante de acoplamento efetivo.

Para demonstrar a utilidade do método que acabamos de apresentar, nas seções abaixo obtemos os Hamiltonianos efetivos dos modelos considerados nessa tese.

### A.1. Modelo de Tavis-Cummings

Nesta seção deduzimos o Hamiltoniano efetivo para o Modelo de Tavis-Cummings (TCM), equivalente ao Modelo de Jaynes-Cummings (JCM) com  $n$  átomos. O Hamiltoniano para este modelo (na representação de Schrödinger), considerando as aproximações de onda girante (RWA) e de dipolo, é dado por

$$\mathbf{H}_{\text{TCM}} = \underbrace{\hbar\omega\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\boldsymbol{\Sigma}^z}_{\mathbf{H}_0} + \underbrace{\hbar g(\mathbf{a}^\dagger\boldsymbol{\Sigma}^- + \mathbf{a}\boldsymbol{\Sigma}^+)}_{\mathbf{H}_{\text{int}}}, \quad (\text{A.25})$$

onde  $\mathbf{a}^\dagger$  ( $\mathbf{a}$ ) é o operador criação (aniquilação) de fótons,  $\boldsymbol{\Sigma}^z = \sum_i \sigma_i^z$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}^- = \sum_i \sigma_i^-$  e  $\boldsymbol{\Sigma}^+ = \sum_i \sigma_i^+$  são os operadores inversão, abaixamento e levantamento coletivos dos átomos,  $\delta = \omega_{eg} - \omega$  é a dessintonia átomo-campo e  $g$  é a constante de acoplamento átomo-campo. É importante salientar que aqui os átomos estão afastados o suficiente para podermos desprezar interações diretas.

Logo, de (A.9), obtemos o Hamiltoniano de interação na representação de interação

$$\mathbf{H}(t) = \hbar g(e^{-i\delta t}\mathbf{a}^\dagger\boldsymbol{\Sigma}^- + e^{i\delta t}\mathbf{a}\boldsymbol{\Sigma}^+). \quad (\text{A.26})$$

Comparando com a equação (A.17), identificamos  $\mathbf{X}^\dagger = \mathbf{a}^\dagger\boldsymbol{\Sigma}^-$  e  $\mathbf{X} = \mathbf{a}\boldsymbol{\Sigma}^+$ , tal que

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \hbar\lambda[\mathbf{a}\boldsymbol{\Sigma}^+, \mathbf{a}^\dagger\boldsymbol{\Sigma}^-] = \hbar\lambda(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\boldsymbol{\Sigma}^z + \boldsymbol{\Sigma}^+\boldsymbol{\Sigma}^-), \quad (\text{A.27})$$

onde usamos a propriedade do comutador  $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ , e as relações de comutação

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = \mathbf{1}, \quad [\boldsymbol{\Sigma}^-, \boldsymbol{\Sigma}^z] = \boldsymbol{\Sigma}^-, \quad [\boldsymbol{\Sigma}^+, \boldsymbol{\Sigma}^z] = -\boldsymbol{\Sigma}^+, \quad [\boldsymbol{\Sigma}^+, \boldsymbol{\Sigma}^-] = \boldsymbol{\Sigma}^z. \quad (\text{A.28})$$

Assim, para um único átomo interagindo com a cavidade

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \hbar\lambda(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\sigma^z + \sigma^+\sigma^-), \quad (\text{A.29})$$

recuperamos o Hamiltoniano dispersivo do Modelo de Jaynes-Cummings (JCM). Para dois átomos interagindo simultaneamente com a cavidade, temos

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \hbar\lambda(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\sigma_1^z + \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\sigma_2^z + \sigma_1^+\sigma_1^- + \sigma_2^+\sigma_2^- + \sigma_1^+\sigma_2^- + \sigma_1^-\sigma_2^+), \quad (\text{A.30})$$

o qual, para a cavidade no estado vácuo, se reduz ao Hamiltoniano efetivo para um sistema de dois átomos

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \hbar\lambda(\sigma_1^+\sigma_1^- + \sigma_2^+\sigma_2^- + \sigma_1^+\sigma_2^- + \sigma_1^-\sigma_2^+). \quad (\text{A.31})$$

## A.2. TCM Fortemente Acoplado

Consideramos agora o mesmo modelo da seção anterior, agora com os átomos interagindo simultaneamente com o campo da cavidade e um campo clássico externo (SDTCM)<sup>a</sup>. O Hamiltoniano para esse sistema, considerando as aproximações de onda girante (RWA) e de dipolo, é dado por

$$H_{\text{SDTCM}} = \underbrace{\hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\Sigma^z}_{H'_0} + \underbrace{\hbar g'(a^\dagger \Sigma^- + a \Sigma^+) + \hbar\Omega(e^{-i\omega_c t} \Sigma^+ + e^{i\omega_c t} \Sigma^-)}_{H'_{\text{int}}}, \quad (\text{A.32})$$

onde  $g'$  é a constante de acoplamento átomo-campo,  $\Omega$  é frequência de Rabi e os átomos estão ressonantes com o campo clássico externo ( $\omega_{eg} = \omega_c$ ).

Assim, de (A.9), temos o Hamiltoniano de interação na representação de interação

$$H'(t) = \hbar\Omega\Sigma^x + \hbar g'(e^{-i\delta t} a^\dagger \Sigma^- + e^{i\delta t} a \Sigma^+), \quad (\text{A.33})$$

onde  $\Sigma^x = \Sigma^+ + \Sigma^-$ . Realizando uma mudança para a base de estados vestidos  $\{|\pm_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_i\rangle \pm |e_i\rangle)\}$ , auto-estados de  $\sigma_i^x = \sigma_i^+ + \sigma_i^-$ , temos as relações

$$\Sigma^- = \frac{1}{2}(\Sigma_\pm^z + \Sigma_\pm^- - \Sigma_\pm^+), \quad \Sigma^+ = \frac{1}{2}(\Sigma_\pm^z + \Sigma_\pm^+ - \Sigma_\pm^-), \quad \Sigma^z = -(\Sigma_\pm^- + \Sigma_\pm^+) \equiv -\Sigma_\pm^x, \quad \Sigma^x = \Sigma_\pm^z, \quad (\text{A.34})$$

nas quais  $\Sigma_\pm^z = \sum_i (|+i\rangle\langle +i| - |-i\rangle\langle -i|)$ ,  $\Sigma_\pm^- = \sum_i |-i\rangle\langle +i|$  e  $\Sigma_\pm^+ = \sum_i |+i\rangle\langle -i|$ , tal que

$$H'(t) = \underbrace{\hbar\Omega\Sigma_\pm^z}_{\tilde{H}'_0} + \underbrace{\frac{1}{2}\hbar g' [e^{-i\delta t} a^\dagger (\Sigma_\pm^z + \Sigma_\pm^- - \Sigma_\pm^+) + e^{i\delta t} a (\Sigma_\pm^z + \Sigma_\pm^+ - \Sigma_\pm^-)]}_{\tilde{H}'_{\text{int}}}. \quad (\text{A.35})$$

Fazendo a transformação unitária

$$\tilde{H}'(t) = \tilde{U}'^\dagger(t) \tilde{H}'_{\text{int}} \tilde{U}'_0(t), \quad (\text{A.36})$$

na qual

$$\tilde{U}'_0(t) = e^{-i\tilde{H}'_0 t/\hbar}, \quad (\text{A.37})$$

temos

$$\tilde{H}'(t) = \frac{1}{2}\hbar g' [e^{-i\delta t} a^\dagger (\Sigma_\pm^z + e^{-2i\Omega t} \Sigma_\pm^- - e^{2i\Omega t} \Sigma_\pm^+) + e^{i\delta t} a (\Sigma_\pm^z + e^{2i\Omega t} \Sigma_\pm^+ - e^{-2i\Omega t} \Sigma_\pm^-)]. \quad (\text{A.38})$$

Quando os átomos estão fortemente acoplados com o campo clássico externo ( $\Omega \gg \{g, \delta\}$ ), os termos

<sup>a</sup> Acrograma para Strong-Driving Tavis-Cummings Model.

com  $e^{\pm 2i\Omega t}$  são rapidamente oscilantes no tempo e podem ser desprezados na aproximação de onda girante (RWA), tal que

$$\tilde{H}'(t) = \frac{1}{2}\hbar g'(e^{-i\delta t} \mathbf{a}^\dagger + e^{i\delta t} \mathbf{a})\Sigma^x, \quad (\text{A.39})$$

onde usamos o último resultado de (A.34).

Comparando com a equação (A.17), identificamos agora  $\mathbf{X}^\dagger = \frac{1}{2}\mathbf{a}^\dagger\Sigma^x$  e  $\mathbf{X} = \frac{1}{2}\mathbf{a}\Sigma^x$ , tal que

$$\tilde{H}'_{\text{eff}} = \frac{1}{4}\hbar\lambda'[\mathbf{a}\Sigma^x, \mathbf{a}^\dagger\Sigma^x] = \frac{1}{4}\hbar\lambda'(\Sigma^x)^2, \quad (\text{A.40})$$

onde  $\lambda' = g'^2/\delta$ .

Assim, observamos que, para um único átomo nesse sistema, a dinâmica se reduz meramente a uma mudança de fase global, portanto, irrelevante. Para dois átomos, escrevendo em termos dos operadores individuais de cada átomo, obtemos o Hamiltoniano

$$\tilde{H}'_{\text{eff}} = \frac{1}{4}\lambda'(\mathbf{1} + \sigma_1^+ \sigma_2^+ + \sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+ + \sigma_1^- \sigma_2^-). \quad (\text{A.41})$$

Surpreendentemente, para este último modelo, podemos considerar a interação sem a necessidade de restringir os parâmetros a um regime no qual nenhuma população seja transferida entre os estados do sistema. Para tanto, basta verificar que o Hamiltoniano (A.39), reescrito como

$$\tilde{H}'(t) = \frac{1}{2}\hbar g'(e^{-i\delta t} \mathbf{a}^\dagger + e^{i\delta t} \mathbf{a})\Sigma^x = b(t)\Sigma^x \mathbf{a} + c(t)\Sigma^x \mathbf{a}^\dagger, \quad (\text{A.42})$$

apresenta o seguinte operador evolução temporal (propagador) *exato*, representado pelo *ansatz* [158, 161]

$$\tilde{U}'(t) = e^{-iA(t)(\Sigma^x)^2} e^{-iB(t)\Sigma^x \mathbf{a}} e^{-iC(t)\Sigma^x \mathbf{a}^\dagger}. \quad (\text{A.43})$$

Podemos provar a validade desse propagador pela simples substituição na equação (A.4), da qual obtemos

$$B(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t dt' b(t') = \frac{1}{2}g' \int_0^t dt' e^{i\delta t'} = \frac{g'}{2i\delta} (e^{i\delta t} - 1), \quad (\text{A.44})$$

$$C(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t dt' c(t') = \frac{1}{2}g' \int_0^t dt' e^{-i\delta t'} = \frac{g'}{(-2i\delta)} (e^{-i\delta t} - 1), \quad (\text{A.45})$$

$$A(t) = \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' B(t')c(t') = \frac{g'^2}{4\delta} \int_0^t dt' (1 - e^{-i\delta t'}) = \frac{g'^2}{4\delta} \left[ t + \frac{1}{i\delta} (e^{-i\delta t} - 1) \right]. \quad (\text{A.46})$$

Assim, o truque é fazer com que as funções  $B(t)$  e  $C(t)$  sejam nulas após um determinado período

de tempo  $\tau$  [161]. Decorrido esse período  $\tau$ , o campo da cavidade retorna a seu estado original e o propagador (A.43) é reduzido à forma

$$\tilde{\mathbf{U}}'(\tau) = e^{-iA(\tau)(\Sigma^x)^2}, \quad (\text{A.47})$$

ou seja, os dois subsistemas (campo da cavidade + átomos) se desemaranham e a dinâmica é reduzida ao sistema de átomos, tornando-se independente do campo da cavidade [161, 162].

Logo, a própria dinâmica do sistema se encarrega de cancelar as contribuições maiores que as de segunda ordem na expansão (A.15). Portanto, para o modelo apresentado nesta seção, o operador evolução temporal efetivo, obtido no limite dispersivo é, na realidade, exato. Então, escolhendo  $\tau$  para satisfazer a condição  $\tau = \delta t = 2\pi$ , temos a situação desejada  $B(t) = C(t) = 0$ , e o propagador (A.47) é dado por

$$\tilde{\mathbf{U}}'(\tau) = e^{-\frac{1}{4}i\lambda'(\Sigma^x)^2 t}, \quad (\text{A.48})$$

no qual  $\lambda' = g'^2/\delta$ . Assim, o operador evolução temporal do sistema é dado por [158]

$$\mathbf{U}'(t) = \tilde{\mathbf{U}}'_0(t)\tilde{\mathbf{U}}'(t) = e^{-iH'_0 t/\hbar}\tilde{\mathbf{U}}'(t) = e^{-i\Omega\Sigma^x t} e^{-\frac{1}{4}i\lambda'(\Sigma^x)^2 t}, \quad (\text{A.49})$$

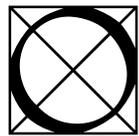
onde usamos a equação (A.37).

É importante ressaltar que nos procedimentos para obter os Hamiltonianos desse apêndice, consideramos que os átomos atravessam a cavidade simultaneamente e distantes o suficiente para podermos desprezar interações diretas.

---

## B. SISTEMA-RESERVATÓRIO

---



problema da dissipação em sistemas físicos desperta grande interesse por ser crucial para a compreensão do comportamento de uma situação experimental real. Especialmente depois do advento do *laser*, diferentes métodos matemáticos foram desenvolvidos para tratar esse assunto em diversos sistemas físicos. A equação de Lindblad ou equação mestra na forma de Lindblad é o tipo mais geral de processos Markovianos para a descrição da evolução não-unitária (dissipativa) do operador densidade (positivo-definido e traço-preservante)  $\rho$ , da condição inicial de qualquer sistema físico de interesse.

Consideramos a situação descrita por um Hamiltoniano da forma

$$H = H_s + H_r + H_{sr}, \quad (\text{B.1})$$

onde os Hamiltonianos descrevem, respectivamente, o sistema, o reservatório e a interação entre eles. Em geral, o reservatório<sup>a</sup> é meramente descrito com o intuito de modelar a dissipação da energia do sistema a uma dada taxa de decaimento.

Definindo  $\rho_{sr}$  como o operador densidade global na representação de Schrödinger, temos o operador densidade reduzido do sistema obtido da operação traço parcial nas variáveis do reservatório

$$\rho_s(t) = \text{tr}_r[\rho_{sr}(t)], \quad (\text{B.2})$$

a partir do qual teremos condições de obter qualquer propriedade do sistema de interesse, com as propriedades do reservatório presentes apenas como parâmetros, através da chamada equação mestra quântica Markoviana.

A equação de movimento de Liouville-von Neumann, é obtida diretamente da equação de Schrödinger para a evolução temporal do operador densidade global

$$i\hbar\dot{\rho}_{rs}(t) = [H, \rho_{sr}(t)]. \quad (\text{B.3})$$

Resolver esta equação, em geral, é uma tarefa impossível. Como estamos interessados apenas na evolução do sistema, precisamos de um método para calcular o valor esperado de qualquer operador

$$\langle O \rangle = \text{tr}_{sr}[O\rho_{sr}(t)] = \text{tr}_s\{\text{tr}_r[O\rho_{sr}(t)]\} \equiv \text{tr}_s[O\rho_s(t)]. \quad (\text{B.4})$$

---

<sup>a</sup> Os termos 'banho' e 'ambiente' são também usados na literatura.

A estratégia que usaremos para a dedução da equação mestra é bastante simples: resolvemos o problema até segunda ordem em teoria de perturbação, fazemos o traço nas variáveis do reservatório, o qual é usualmente considerado suficientemente grande em relação ao sistema para realizar a aproximação de Born-Markov, e obtemos diretamente uma equação de movimento para  $\rho_s(t)$ , a qual é válida para tempos longos comparados ao tempo de correlação térmica do reservatório [59]. Dada a importância de não confundir o tempo de evolução livre (rápida) do sistema com o tempo de correlação do reservatório, trabalharemos na representação de interação, na qual todas as evoluções livres são eliminadas. Nesta representação, o operador densidade é transformado segundo a identidade

$$\rho_{\text{sr}}(t) \equiv e^{i(H_s+H_r)t/\hbar} \rho_{\text{sr}}(t) e^{-i(H_s+H_r)t/\hbar}, \quad (\text{B.5})$$

de onde, diferenciando parcialmente com relação ao tempo ambos os lados da igualdade, obtemos a equação de Liouville-von Neumann na representação de interação

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{\rho}_{\text{sr}}(t) &= (H_s + H_r) \rho_{\text{sr}}(t) + i\hbar e^{i(H_s+H_r)t/\hbar} \dot{\rho}_{\text{sr}}(t) e^{-i(H_s+H_r)t/\hbar} - (H_s + H_r) \rho_{\text{sr}}(t) \\ &= e^{i(H_s+H_r)t/\hbar} [H, \rho_{\text{sr}}(t)] e^{-i(H_s+H_r)t/\hbar} - [H_s + H_r, \rho_{\text{sr}}(t)] = [H_{\text{sr}}(t), \rho_{\text{sr}}(t)], \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

onde usamos as equações (B.1) e (B.3), a identidade  $\mathbb{1} = e^{-i(H_s+H_r)t/\hbar} e^{i(H_s+H_r)t/\hbar}$ , e o Hamiltoniano de interação explicitamente dependente do tempo na representação de interação [179, 180]

$$H_{\text{sr}}(t) = e^{i(H_s+H_r)t/\hbar} H_{\text{sr}} e^{-i(H_s+H_r)t/\hbar}. \quad (\text{B.7})$$

O procedimento a ser usado envolve teoria de perturbação, donde se obtém uma forma para a equação de movimento em termos da expansão em séries de potências do Hamiltoniano de interação  $H_{\text{sr}}$ , truncada até uma ordem conveniente. Desta forma, integrando formalmente a equação (B.6)

$$i\hbar \rho_{\text{sr}}(t) = i\hbar \rho_{\text{sr}} + \int_0^t dt' [H_{\text{sr}}(t'), \rho_{\text{sr}}(t')], \quad (\text{B.8})$$

substituímos esse resultado no comutador para obter a forma integro-diferencial da equação de Liouville-von Neumann

$$i\hbar \dot{\rho}_{\text{sr}}(t) = [H_{\text{sr}}(t), \rho_{\text{sr}}] + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' [H_{\text{sr}}(t), [H_{\text{sr}}(t'), \rho_{\text{sr}}(t')]]. \quad (\text{B.9})$$

Traçando agora ambos os lados da equação acima nas variáveis do reservatório e usando a relação (B.2), temos

$$i\hbar \dot{\rho}_s(t) = \text{tr}_r\{[H_{\text{sr}}(t), \rho_{\text{sr}}]\} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \text{tr}_r\{[H_{\text{sr}}(t), [H_{\text{sr}}(t'), \rho_{\text{sr}}(t')]]\}. \quad (\text{B.10})$$

Até esse passo da dedução, não foram realizadas quaisquer aproximações e, mesmo com o traço nas

variáveis do reservatório, a equação de movimento para o sistema ainda é exata. Se necessário fosse (para obter uma lei de decaimento exponencial, por exemplo [92]), poderíamos realizar inúmeras iterações. Para os nossos propósitos, a forma integro-diferencial acima será suficiente [5].

Notando que a interação  $H_{sr}(t)$  permanece sempre bilinear (envolvendo apenas produtos) nos operadores do sistema e do reservatório podemos, no instante de tempo inicial  $t = 0$ , considerar que o operador densidade do reservatório é diagonal na representação de auto-estados de energia, representando um sistema em equilíbrio a uma certa temperatura. Se assim não fosse, certamente significaria que o reservatório estaria interagindo com um terceiro sistema de magnitude similar, mas com outra temperatura [5]. Uma vez que a interação ocorre apenas a partir de  $t = 0$ , podemos considerar que não existe correlação inicial entre o sistema e o reservatório, logo  $\rho_{sr} = \rho_s \otimes \rho_r = \rho_s \otimes \rho_r \equiv \rho_s \rho_r$ . Assim, sob estas condições, temos

$$\text{tr}_r\{[H_{sr}(t), \rho_{sr}]\} = \text{tr}_r\{[H_{sr}(t), \rho_s \rho_r]\} = 0, \quad (\text{B.11})$$

pois, com o traço, os elementos diagonais (na base dos auto-estados  $H_r$ ) dos operadores do reservatório contidos em  $H_{sr}(t)$  desaparecem [5]. Dito de outra forma, o Hamiltoniano de interação sistema-reservatório é tal que não possui elementos diagonais na base em que  $H_r$  é diagonal. Isso não caracteriza qualquer restrição, pois sempre podemos redefinir  $H_s$  e  $H_r$  para anular os elementos diagonais em  $H_{sr}$  [92].

Para evitar a presença do operador densidade global na (B.10) podemos, com base nas considerações a respeito dos tamanhos relativos entre o sistema e o reservatório, realizar uma primeira aproximação, conhecida como aproximação de Born ou aproximação de acoplamento fraco. Essa aproximação é bastante usual em teoria de espalhamento e, como o próprio nome sugere, consiste em considerar um acoplamento fraco, tal que a influência do sistema no reservatório seja pequena, o que equivale a desprezar os termos de ordem superior a dois (teoria de perturbação) em  $H_{sr}$ . Logo, podemos considerar  $\rho_{sr}(t')$  aproximadamente igual a  $\rho_s(t')\rho_r$ , pois o reservatório praticamente mantém seu estado inicial durante a interação com o sistema. Assim, sob a aproximação de Born e mudando a variável temporal de acordo com  $t' = t - \tau$ , a equação mestra (B.10) torna-se

$$\dot{\rho}_s(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \text{tr}_r\{[H_{sr}(t), [H_{sr}(t-\tau), \rho_s(t-\tau)\rho_r]]\}. \quad (\text{B.12})$$

Esta equação relaciona a variação temporal de  $\rho_s(t-\tau)$  a  $\rho_s(t)$  para qualquer tempo  $t-\tau \leq t$ . Tais considerações não implicam que não existem excitações no reservatório causadas pelo sistema, mas que tais excitações decaem muito rapidamente para o estado de equilíbrio. A equação acima é também conhecida como equação de Redfield [181, 182], obtida várias décadas atrás no contexto de ressonância magnética [5]. É importante ressaltar que a equação (B.12) ainda não faz qualquer restrição para um tipo específico de reservatório ou mesmo sobre seu estado inicial [92].

Um conjunto infinito de osciladores harmônicos é o mais conveniente e usual modelo para um reservatório, descrito pelo Hamiltoniano (2.28), o qual representa de fato o campo de radiação livre (2.27). Usualmente, o reservatório é considerado em equilíbrio térmico a uma temperatura  $T$ , ou seja, um campo

de radiação livre multi-modo num estado caótico. Neste caso, o reservatório possui uma distribuição de Boltzmann descrita pelo operador densidade

$$\rho_r = \frac{e^{-H_r/k_B T}}{Z_r} = \bigotimes_{\mathbf{k}_s} (1 - e^{-\hbar\omega_{\mathbf{k}_s}/k_B T}) e^{-\hbar\omega_{\mathbf{k}_s} a_{\mathbf{k}_s}^\dagger a_{\mathbf{k}_s}} = \bigotimes_{\mathbf{k}_s} \sum_{n_{\mathbf{k}_s}} \frac{\langle n_{\mathbf{k}_s} \rangle_r^{n_{\mathbf{k}_s}}}{(1 + \langle n_{\mathbf{k}_s} \rangle_r)^{n_{\mathbf{k}_s} + 1}} |n_{\mathbf{k}_s}\rangle \langle n_{\mathbf{k}_s}|, \quad (\text{B.13})$$

no qual consideramos osciladores independentes, sendo  $Z_r$  a função de partição do reservatório,  $k_B$  a constante de Boltzmann [61], e  $\langle n_{\mathbf{k}_s} \rangle_r$  o número médio de fótons no modo de frequência  $\omega_{\mathbf{k}_s}$ , dado pela lei de Planck [5]

$$\langle n_{\mathbf{k}_s} \rangle_r \equiv \langle a_{\mathbf{k}_s}^\dagger a_{\mathbf{k}_s} \rangle_r = \frac{e^{-\hbar\omega_{\mathbf{k}_s}/k_B T}}{1 - e^{-\hbar\omega_{\mathbf{k}_s}/k_B T}} \equiv \bar{n}(\omega_{\mathbf{k}_s}). \quad (\text{B.14})$$

Nas duas seções seguintes abordamos dois sistemas de interesse, deduzindo a equação mestra para o operador densidade de um sistema de vários átomos e de um campo quantizado mono-modo, os quais estão presentes nos trabalhos apresentados nesta tese.

### B.1. Átomos de Dois-Níveis sob Emissão Espontânea

Apresentamos nesta seção a equação mestra para o operador densidade um sistema de vários átomos de dois-níveis interagindo com um reservatório térmico, através de um desenvolvimento bastante geral com o intuito de justificar as aproximações consideradas no capítulo 3. Consideramos então um sistema de vários átomos de dois-níveis, cada um descrito pelo Hamiltoniano (2.41), acoplados ao reservatório representado pelo campo de radiação livre (2.27).

Os níveis de energia de cada átomo são conectados por uma transição de dipolo elétrico com momento de dipolo  $\mathbf{d}_i$ . Nessa etapa da dedução, consideramos os átomos ocupando diferentes posições  $\mathbf{r}_i$ , com diferentes frequências de transição  $\omega_{eg}^{(i)}$  e diferentes momentos de dipolo de transição  $\mathbf{d}_i$ , e operador momento de dipolo atômico total do sistema de átomos de dois-níveis pode ser escrito na forma [60]

$$\mathbf{d} = \sum_i (\mathbf{d}_i \sigma_i^+ + \mathbf{d}_i^* \sigma_i^-), \quad (\text{B.15})$$

onde  $\mathbf{d}_i = d_i \hat{\mathbf{d}}_i = q \langle g | \mathbf{r}_i | e \rangle$ , e  $d_i$  são os elementos de matriz dos momentos de dipolo de transição do átomo  $i$  e  $q$  é a carga elétrica.

Na aproximação de dipolo elétrico o campo de radiação livre (2.27) pode ser considerado uniforme mediante as dimensões dos átomos, tal que

$$\begin{aligned} H_{\text{sr}} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_i) = i\hbar \sum_{\mathbf{k}_s} \sum_i & [\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}_s}^*(\mathbf{r}_i) a_{\mathbf{k}_s}^\dagger \sigma_i^+ + \mathbf{d}_i^* \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}_s}(\mathbf{r}_i) a_{\mathbf{k}_s}^\dagger \sigma_i^- \\ & - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}_s}(\mathbf{r}_i) a_{\mathbf{k}_s} \sigma_i^+ - \mathbf{d}_i^* \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}_s}(\mathbf{r}_i) a_{\mathbf{k}_s} \sigma_i^-], \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

onde consideramos a fase  $\varphi = 0$  e definimos a função

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}s}(\mathbf{r}_i) = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}s}}{2\epsilon_0\hbar V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s}, \quad (\text{B.17})$$

a qual descreve os modos do campo de radiação multi-modo tridimensional no espaço livre, sendo  $V$  o volume de normalização. Esta função é resolvida na posição  $\mathbf{r}_i$  de cada átomo do sistema e pode ser considerada independente do tempo, o que é válido dentro da aproximação de dipolo elétrico.

Da equação (B.7) obtemos o Hamiltoniano de interação (B.16) na representação de interação

$$\begin{aligned} H_{\text{sr}}(t) = i\hbar \sum_{\mathbf{k}s} \sum_i & [\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}^*(\mathbf{r}_i) e^{i(\omega_{\mathbf{k}s} - \omega_{\text{eg}}^{(i)})t} \mathbf{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \sigma_i^+ + \mathbf{d}_i^* \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}(\mathbf{r}_i) e^{i(\omega_{\mathbf{k}s} + \omega_{\text{eg}}^{(i)})t} \mathbf{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \sigma_i^- \\ & - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}(\mathbf{r}_i) e^{-i(\omega_{\mathbf{k}s} - \omega_{\text{eg}}^{(i)})t} \mathbf{a}_{\mathbf{k}s} \sigma_i^+ - \mathbf{d}_i^* \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}(\mathbf{r}_i) e^{-i(\omega_{\mathbf{k}s} + \omega_{\text{eg}}^{(i)})t} \mathbf{a}_{\mathbf{k}s} \sigma_i^-]. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Expandindo os comutadores e usando as propriedades do traço, podemos reescrever o traço sob as variáveis do reservatório em (B.12) como [60]

$$\begin{aligned} \text{tr}_r \{ [H_{\text{sr}}(t), [H_{\text{sr}}(t-\tau), \rho_s(t-\tau) \rho_r]] \} = \text{tr}_r & [H_{\text{sr}}(t) H_{\text{sr}}(t-\tau) \rho_s(t-\tau) \rho_r] \\ & + \text{tr}_r [\rho_s(t-\tau) \rho_r H_{\text{sr}}(t-\tau) H_{\text{sr}}(t)] \\ & - \text{tr}_r [H_{\text{sr}}(t) \rho_s(t-\tau) \rho_r H_{\text{sr}}(t-\tau)] \\ & - \text{tr}_r [H_{\text{sr}}(t-\tau) \rho_s(t-\tau) \rho_r H_{\text{sr}}(t)]. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Substituindo as expressões para  $H_{\text{rs}}(t)$  e  $H_{\text{rs}}(t-\tau)$  o primeiro traço da expansão acima é dado por

$$\begin{aligned} \text{tr}_r [H_{\text{sr}}(t) H_{\text{sr}}(t-\tau) \rho_s(t-\tau) \rho_r] = -\hbar^2 \sum_{\mathbf{k}s} \sum_{\mathbf{k}'s'} & \{ D_i^\dagger(t) D_j^\dagger(t-\tau) \text{tr}_r [\rho_r \mathbf{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) \mathbf{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger(t-\tau)] \\ & - D_i^\dagger(t) D_j(t-\tau) \text{tr}_r [\rho_r \mathbf{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) \mathbf{a}_{\mathbf{k}'s'}(t-\tau)] \\ & - D_i(t) D_j^\dagger(t-\tau) \text{tr}_r [\rho_r \mathbf{a}_{\mathbf{k}s}(t) \mathbf{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger(t-\tau)] \\ & + D_i(t) D_j(t-\tau) \text{tr}_r [\rho_r \mathbf{a}_{\mathbf{k}s}(t) \mathbf{a}_{\mathbf{k}'s'}(t-\tau)] \} \rho_s(t-\tau), \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

onde  $\mathbf{a}_{\mathbf{k}s}(t) = e^{-i\omega_{\mathbf{k}s}t} \mathbf{a}_{\mathbf{k}s}$  e

$$D_i(t) = \sum_i [\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}(\mathbf{r}_i) e^{i\omega_{\text{eg}}^{(i)}t} \sigma_i^+ + \mathbf{d}_i^* \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}(\mathbf{r}_i) e^{-i\omega_{\text{eg}}^{(i)}t} \sigma_i^-]. \quad (\text{B.21})$$

De (B.20) percebemos que a evolução do operador densidade do sistema depende das funções de correlação de segunda ordem dos operadores do reservatório. Como já dissemos, estamos considerando um reservatório em equilíbrio térmico a uma temperatura  $T$ , ou seja, um campo de radiação livre multi-modo num estado caótico (corpo-negro). Portanto, nesse caso, as funções de correlação do reservatório

se reduzem a [5, 60, 183]

$$\begin{aligned}
\text{tr}_r [\rho_r a_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) a_{\mathbf{k}'s'}^\dagger(t-\tau)] &= \text{tr}_r [\rho_r a_{\mathbf{k}s}(t) a_{\mathbf{k}'s'}(t-\tau)] = 0, \\
\text{tr}_r [\rho_r a_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) a_{\mathbf{k}'s'}(t-\tau)] &= \bar{n}(\omega_{\mathbf{k}s}) e^{i(\omega_{\mathbf{k}s}-\omega_{\mathbf{k}'s'})t} e^{i\omega_{\mathbf{k}'s'}\tau} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \delta_{ss'}, \\
\text{tr}_r [\rho_r a_{\mathbf{k}s}(t) a_{\mathbf{k}'s'}^\dagger(t-\tau)] &= [\bar{n}(\omega_{\mathbf{k}s}) + 1] e^{-i(\omega_{\mathbf{k}s}-\omega_{\mathbf{k}'s'})t} e^{-i\omega_{\mathbf{k}'s'}\tau} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \delta_{ss'},
\end{aligned} \tag{B.22}$$

onde  $\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$  é a função delta de Dirac tridimensional. Assim, a equação (B.20) torna-se

$$\text{tr}_r [\mathbf{H}_{\text{sr}}(t) \mathbf{H}_{\text{sr}}(t-\tau) \rho_s(t-\tau) \rho_r] = \hbar^2 \sum_{\mathbf{k}s} [D_i(t) D_j^\dagger(t-\tau) e^{-i\omega_{\mathbf{k}s}\tau} + D_i^\dagger(t) D_j(t-\tau) e^{i\omega_{\mathbf{k}s}\tau}] \rho_s(t-\tau). \tag{B.23}$$

Esse procedimento é análogo para os outros três termos de (B.19). De posse desses resultados, podemos agora resolver a soma sobre os modos  $\mathbf{k}s$ . Considerando que todos os modos do reservatório estão disponíveis para a interação com as transições atômicas, podemos tomar o limite do contínuo do espaço livre  $V \rightarrow \infty$ , o que permite substituir a soma nos vetores de onda  $\mathbf{k}$  por uma integral da densidade de modos com frequências entre  $\omega_{\mathbf{k}s}$  e  $\omega_{\mathbf{k}s} + d\omega_{\mathbf{k}s}$  no ângulo sólido  $d\Omega_k$  [5, 60, 183]

$$\sum_{\mathbf{k}s} \rightarrow \frac{V}{(2\pi c)^3} \sum_s \int_0^\infty d\omega_{\mathbf{k}s} \omega_{\mathbf{k}s}^2 \int_{\Omega_k} d\Omega_k, \tag{B.24}$$

onde  $\Omega_k = (\theta_k, \phi_k)$  é o ângulo sólido no qual os modos estão distribuídos. É importante notar que a expressão acima é válida para átomos no espaço livre. Para reservatórios diferentes, tais como cavidades, guias de onda e materiais fotônicos, a densidade de modos na qual o sistema radiante pode emitir será diferente [60].

Agora, fazendo uma segunda aproximação a chamada aproximação de onda girante (RWA), na qual ignoramos todos os termos oscilantes no tempo  $t$  com frequências  $2\omega_{eg}^{(i)}$  e  $\omega_{eg}^{(i)} + \omega_{eg}^{(j)}$  (os chamados termos contra-girantes), a equação mestra (B.12) torna-se

$$\dot{\rho}_s(t) = \sum_{ij} \{ [\sigma_j^- X_{ij}(t), \sigma_i^+] + [\sigma_j^-, X_{ji}^\dagger(t) \sigma_i^+] + [\sigma_j^+ Y_{ij}(t), \sigma_i^-] + [\sigma_j^+, Y_{ji}^\dagger(t) \sigma_i^-] \}, \tag{B.25}$$

na qual os operadores dependentes do tempo são dados por

$$\begin{aligned}
X_{ij}(t) &= \frac{V}{(2\pi c)^3} \int_0^\infty d\omega_{\mathbf{k}s} \omega_{\mathbf{k}s}^2 e^{i(\omega_{eg}^{(i)} - \omega_{eg}^{(j)})t} \int_{\Omega_k} d\Omega_k F_{ij}^{(-)}(\mathbf{k}s, t), \\
Y_{ij}(t) &= \frac{V}{(2\pi c)^3} \int_0^\infty d\omega_{\mathbf{k}s} \omega_{\mathbf{k}s}^2 e^{-i(\omega_{eg}^{(i)} - \omega_{eg}^{(j)})t} \int_{\Omega_k} d\Omega_k F_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}s, t),
\end{aligned} \tag{B.26}$$

com os operadores  $F_{ij}^{(\pm)}(\mathbf{k}s, t)$  envolvendo uma integral sobre o tempo retardado  $\tau$  e o operador densi-

dade retardado [60]

$$F_{ij}^{(\pm)}(\mathbf{k}s, t) = \sum_s \int_0^t d\tau \varrho_s(t - \tau) \{ [\bar{n}(\omega_{\mathbf{k}s}) + 1] e^{-i(\omega_{\mathbf{k}s} \pm \omega_{eg}^{(j)})\tau} [\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}(\mathbf{r}_i)] [\mathbf{d}_i^* \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}^*(\mathbf{r}_j)] + \bar{n}(\omega_{\mathbf{k}s}) e^{i(\omega_{\mathbf{k}s} \mp \omega_{eg}^{(j)})\tau} [\mathbf{d}_i^* \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}(\mathbf{r}_i)] [\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}^*(\mathbf{r}_j)] \}. \quad (\text{B.27})$$

Como vemos, a equação (B.25) ainda relaciona a derivada de  $\dot{\varrho}_s(t)$  a  $\varrho_s(t - \tau)$ . Isto não implica que o sistema não cause excitações no reservatório, mas que tais excitações, ditadas pelo Hamiltoniano de interação, decaem muito rapidamente para o estado de equilíbrio [5]. Portanto, esta ainda é uma equação mestra não-Markoviana, uma vez que a evolução temporal do operador densidade do sistema ainda depende explicitamente da preparação inicial ( $t = 0$ ) [5, 183]. Para eliminar essa dependência, consideramos agora uma terceira aproximação, a aproximação de Markov, na qual a integral sobre o atraso de tempo  $\tau$  contém funções que decaem a zero para um tempo de correlação curto  $\tau_c$ , tal que podemos substituir  $\varrho_s(t - \tau)$  por  $\varrho_s(t)$  e estender o limite de integração para  $t \rightarrow \infty$ , resolvendo a integral sobre  $\tau$  considerando o limite [5, 60, 183]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t d\tau \varrho_s(t - \tau) e^{\pm i x \tau} \approx \pi \delta(x) \pm \frac{i\mathcal{P}}{x}, \quad (\text{B.28})$$

no qual  $\mathcal{P}$  denota o valor principal de Cauchy

$$\mathcal{P} \int_{-a}^b dx \frac{f(x)}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-a}^{-\epsilon} dx \frac{f(x)}{x} + \int_{\epsilon}^b dx \frac{f(x)}{x} \right]. \quad (\text{B.29})$$

No caso dos átomos, o tempo de correlação é da ordem da escala de tempo dos processos radiativos e é formalmente equivalente a considerar que a largura de banda do campo eletromagnético é muito maior que a largura de linha do átomo. Para um átomo típico, o operador densidade muda numa escala de tempo correspondente à taxa de emissão espontânea,  $t_s \approx 10^{-8}$  s e, se  $\omega_{eg}$  é uma frequência óptica, os expoentes oscilam na escala de tempo  $t_o \approx 10^{-15}$  s, a qual é muito menor que a escala de tempo atômica. Assim, a aproximação de Markov é justificada para átomos interagindo com o vácuo ordinário. Para um campo térmico, as considerações acima devem ser satisfeitas, e podemos aproximar  $\bar{n}(\omega_{\mathbf{k}s}) = \bar{n}(\omega_{eg}) \equiv \bar{n}$ , ou seja, seus valores resolvidos para a frequência média  $\omega_{eg}$  das transições atômicas [60]. Assim, sob as aproximações de Born-Markov e RWA, reescrevemos (B.27) como

$$F_{ij}^{(\pm)}(\mathbf{k}s, t) = \sum_s \left\{ (\bar{n} + 1) [\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}(\mathbf{r}_i)] [\mathbf{d}_i^* \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}^*(\mathbf{r}_j)] \left[ \pi \delta(\omega_{\mathbf{k}s} \pm \omega_{eg}^{(j)}) - \frac{i\mathcal{P}}{\omega_{\mathbf{k}s} \pm \omega_{eg}^{(j)}} \right] + \bar{n} [\mathbf{d}_i^* \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}(\mathbf{r}_i)] [\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}^*(\mathbf{r}_j)] \left[ \pi \delta(\omega_{\mathbf{k}s} \mp \omega_{eg}^{(j)}) + \frac{i\mathcal{P}}{\omega_{\mathbf{k}s} \mp \omega_{eg}^{(j)}} \right] \right\} \varrho_s(t). \quad (\text{B.30})$$

Falta agora integrar sobre o ângulo sólido  $\Omega_k$  e  $\omega_{\mathbf{k}s}$  e somar sobre as polarizações  $s$ . Assim, introduzindo coordenadas cartesianas tal que a direção  $z$  coincida com a direção do vetor inter-atômico

$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ , consideramos que os momentos de dipolo sejam paralelos e polarizados no plano  $xy$  como

$$\mathbf{d}_i = |\mathbf{d}_i|[\sin \alpha, 0, \cos \alpha], \quad \mathbf{d}_j = |\mathbf{d}_j|[\sin \alpha, 0, \cos \alpha], \quad (\text{B.31})$$

no qual,  $\alpha$  é o ângulo entre os momentos de dipolo e  $\mathbf{r}_{ij}$ . Assim, usando coordenadas esféricas, escolhendo a direção de propagação do vetor  $\mathbf{k}$  de modo a formar o ângulo  $\theta_k$  com  $\mathbf{r}_{ij}$ , tal que

$$\mathbf{k} = |\mathbf{k}|[\sin \theta_k \cos \phi_k, \sin \theta_k \sin \phi_k, \cos \theta_k], \quad (\text{B.32})$$

na qual  $\theta_k$  e  $\phi_k$  são os ângulos esféricos e escolhendo os versores de polarização de acordo com as escolhas anteriores

$$\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}1} = [-\cos \theta_k \cos \phi_k, -\cos \theta_k \sin \phi_k, \sin \theta_k], \quad \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}2} = [\sin \phi_k, -\cos \phi_k, 0], \quad (\text{B.33})$$

a soma sobre as polarizações é dada por [60]

$$\begin{aligned} \sum_s [\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}(\mathbf{r}_i)] [\mathbf{d}_j^* \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}^*(\mathbf{r}_j)] &= \sum_s [\mathbf{d}_i^* \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}(\mathbf{r}_i)] [\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}^*(\mathbf{r}_j)] \\ &= \frac{\omega_{\mathbf{k}s} |\mathbf{d}_i| |\mathbf{d}_j|}{2\epsilon_0 \hbar V} [\sin^2 \alpha (\cos^2 \theta_k \cos^2 \phi_k + \sin^2 \phi_k) \\ &\quad + \cos^2 \alpha \sin^2 \theta_k - \frac{1}{4} \sin 2\alpha \sin 2\theta_k \cos \phi_k] e^{ikr_{ij} \cos \theta_k}, \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

onde  $k = |\mathbf{k}|$  e  $r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$  é a distância entre os átomos  $i$  e  $j$ . Assim, a integração sobre o ângulo sólido produz

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} d\Omega_k \sum_s [\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}(\mathbf{r}_i)] [\mathbf{d}_j^* \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}^*(\mathbf{r}_j)] &= \int_{\Omega_k} d\Omega_k \sum_s [\mathbf{d}_i^* \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}(\mathbf{r}_i)] [\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}^*(\mathbf{r}_j)] \\ &= \frac{2\pi \omega_{\mathbf{k}s} |\mathbf{d}_i| |\mathbf{d}_j|}{\epsilon_0 \hbar V} \left\{ [1 - (\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij})^2] \frac{\sin(kr_{ij})}{kr_{ij}} + [1 - 3(\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij})^2] \left[ \frac{\cos(kr_{ij})}{(kr_{ij})^2} - \frac{\sin(kr_{ij})}{(kr_{ij})^3} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

onde  $\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{d}}_i = \hat{\mathbf{d}}_j$  e  $\hat{\mathbf{r}}_{ij}$  são versores ao longo dos momentos de dipolo de transição atômica e do versor de separação interatômica, respectivamente [60]. Logo, substituindo os resultados (B.26) e (B.30), notando que a função  $\delta(\omega_{\mathbf{k}s} + \omega_{eg}^{(j)})$  retorna um valor nulo na integração sobre  $\omega_{\mathbf{k}s}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{ij}(t) &= [(\bar{n} + 1)(\frac{1}{2}\gamma_{ij} - i\Lambda_{ij}^{(-)}) + i\bar{n}\Lambda_{ij}^{(+)}] \boldsymbol{\rho}_s(t) e^{-i(\omega_{eg}^{(i)} - \omega_{eg}^{(j)})t}, \\ \mathbf{Y}_{ij}(t) &= [\bar{n}(\frac{1}{2}\gamma_{ij} + i\Lambda_{ij}^{(-)}) - i(\bar{n} + 1)\Lambda_{ij}^{(+)}] \boldsymbol{\rho}_s(t) e^{i(\omega_{eg}^{(i)} - \omega_{eg}^{(j)})t}, \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

onde o termo diagonal

$$\gamma_{ii} \equiv \gamma_i = \frac{(\omega_{eg}^{(i)})^3 d_i^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3}, \quad (\text{B.37})$$

é a taxa de emissão espontânea do átomo  $i$  (no espaço livre) e os termos não-diagonais

$$\gamma_{ij} \equiv \gamma_{ji} = \sqrt{\gamma_i \gamma_j} F(kr_{ij}), \quad (i \neq j) \quad (\text{B.38})$$

sendo

$$F(kr_{ij}) = \frac{3}{2} \left\{ [1 - (\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij})^2] \frac{\sin(kr_{ij})}{kr_{ij}} + [1 - 3(\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij})^2] \left[ \frac{\cos(kr_{ij})}{(kr_{ij})^2} - \frac{\sin(kr_{ij})}{(kr_{ij})^3} \right] \right\}, \quad (\text{B.39})$$

as taxas de emissão espontânea coletivas que aparecem do acoplamento dos átomos induzido pelo reservatório [60]. Na equação acima,  $k = \omega_{eg}/c$ , onde  $\omega = (\omega_{eg}^{(i)} + \omega_{eg}^{(j)})/2$ , e consideramos que as diferenças entre as frequências de transição atômica são pequenas quando comparadas com a frequência de transição atômica média,  $(\omega_{eg}^{(i)} - \omega_{eg}^{(j)}) \ll \omega_{eg}$  [60]. Os parâmetros  $\Lambda_{ij}^{(\pm)}$  contribuem para o deslocamento dos níveis atômicos e são dados por

$$\Lambda_{ij}^{(\pm)} = \frac{\sqrt{\gamma_i \gamma_j}}{2\pi\omega_{eg}^3} \mathcal{P} \int_0^\infty d\omega_{\mathbf{k}s} \omega_{\mathbf{k}s}^3 \frac{F(\omega_{\mathbf{k}s} r_{ij}/c)}{\omega_{\mathbf{k}s} \pm \omega_{eg}^{(j)}}, \quad (\text{B.40})$$

com  $F(\omega_{\mathbf{k}s} r_{ij}/c)$  dado por (B.39), substituindo  $k$  por  $\omega_{\mathbf{k}s}/c$  [60]. Com essa forma explícita dos operadores dependentes do tempo (B.52), a equação mestra do sistema de átomos não-idênticos interagindo com o reservatório térmico é dada por ( $\varrho_s = \varrho$ )

$$\begin{aligned} \dot{\varrho}(t) = & (\bar{n} + 1) \sum_{ij} \gamma_{ij} [\sigma_j^- \varrho(t) \sigma_i^+ - \frac{1}{2} \{\sigma_i^+ \sigma_j^-, \varrho(t)\}] e^{i(\omega_{eg}^{(i)} - \omega_{eg}^{(j)})t} \\ & + \bar{n} \sum_{ij} \gamma_{ij} [\sigma_j^+ \varrho(t) \sigma_i^- - \frac{1}{2} \{\sigma_i^- \sigma_j^+, \varrho(t)\}] e^{-i(\omega_{eg}^{(i)} - \omega_{eg}^{(j)})t} \\ & - i \sum_i \delta_i [\sigma_i^z, \varrho(t)] - i \sum_{i \neq j} \Lambda_{ij} [\sigma_i^+ \sigma_j^-, \varrho(t)] e^{i(\omega_{eg}^{(i)} - \omega_{eg}^{(j)})t}, \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

onde os termos diagonais

$$\delta_i = (2\bar{n} + 1)(\Lambda_{ii}^{(+)} - \Lambda_{ii}^{(-)}), \quad (\text{B.42})$$

representam uma parte do deslocamento Lamb (*shift*) dependent da intensidade dos níveis atômicos e os termos não-diagonais

$$\Lambda_{ij} = -(\Lambda_{ij}^{(+)} + \Lambda_{ij}^{(-)}), \quad (i \neq j) \quad (\text{B.43})$$

representam a interação coerente (dipolo-dipolo) entre os átomos, induzida pelo vácuo [60]. Os parâmetros  $\delta_i$  são usualmente absorvidos mediante uma redefinição das frequências atômicas e muitas vezes não são explicitamente incluídos na equação mestra [184]. É bem conhecido que para obter um cálculo

completo do Lamb *shift* (B.42), é necessário estender os cálculos para um Hamiltoniano de multi-níveis de segunda ordem, incluindo a renormalização da massa do elétron [50, 184]. Como o parâmetro  $\Lambda_{ij}$  independe da intensidade  $\bar{n}$  do campo térmico, as interações coletivas entre os átomos não só resultam em emissões espontâneas modificadas como também levam a um acoplamento coerente entre os átomos, induzido pelo reservatório. Fisicamente, o parâmetro  $\gamma_{ij}$  é a parte real e o parâmetro  $\Lambda_{ij}$  é a parte imaginária da interação entre os átomos  $i$  e  $j$ , mediada pelo reservatório [60].

Usando integração de contorno, encontramos a partir de (B.43) a forma explícita para  $\Lambda_{ij}$  [184]

$$\Lambda_{ij} = \frac{3}{4} \sqrt{\gamma_i \gamma_j} \left\{ - [1 - (\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij})^2] \frac{\cos(kr_{ij})}{kr_{ij}} + [1 - 3(\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij})^2] \left[ \frac{\sin(kr_{ij})}{(kr_{ij})^2} + \frac{\cos(kr_{ij})}{(kr_{ij})^3} \right] \right\}. \quad (\text{B.44})$$

Os parâmetros coletivos  $\gamma_{ij}$  e  $\Lambda_{ij}$ , ambos dependentes da separação interatômica, determinam as propriedades coletivas do sistema de átomos de dois-níveis. Considerando o comprimento de onda ressonante  $\lambda = 2\pi/k$ , temos três situações de interesse [60]: (i)  $r_{ij} \gg \lambda$ , a qual corresponde a átomos suficientemente separados (tal como considerado na presente tese), tal que  $\gamma_{ij} = \Lambda_{ij} \approx 0$ , (ii)  $r_{ij} < \lambda/2$ , para a qual os parâmetros  $\gamma_{ij}$  e  $\Lambda_{ij}$  começam a ter efeitos importantes na dinâmica e (iii)  $r_{ij} \ll \lambda$ , a qual corresponde ao modelo de Dicke (*small sample model*), no qual os parâmetros  $\gamma_{ij}$  e  $\Lambda_{ij}$  alcançam seus valores máximos [91].

Podemos entender  $\bar{n}$  como sendo o número médio de fótons com a frequência de transição atômica média  $\omega_{eg}$ . Considerando dois átomos (idênticos) de dois-níveis na situação (i) acima, no limite  $\bar{n} \rightarrow 0$  (reservatório à temperatura  $T = 0$ ), relevante quando  $k_B T \ll \hbar \omega_{eg}$ , obtemos a equação mestra considerada no capítulo 3

$$\dot{\rho}(t) = 2\gamma(\sigma_1^- \cdot \sigma_1^+ + \sigma_2^- \cdot \sigma_2^+ - \frac{1}{2}\{\sigma_1^+ \sigma_1^- + \sigma_2^+ \sigma_2^-\})\rho(t) \equiv \mathcal{L}_a \rho(t), \quad (\gamma = \frac{1}{2}\gamma_i) \quad (\text{B.45})$$

a qual descreve o decaimento espontâneo de dois átomos de dois-níveis através do acoplamento com o reservatório no vácuo.

## B.2. Cavidade sob Perda de Fótons

A dedução da equação mestra para o operador densidade de um dado sistema acoplado a um grande reservatório pode ser obtida por diferentes formalismos, como por exemplo o abordado até aqui. Nesta seção obteremos a equação mestra para o operador densidade de um sistema representado por um campo mono-modo de uma cavidade acoplado a um reservatório de osciladores harmônicos, um problema completamente análogo ao da seção anterior. O campo da cavidade é descrito pelos operadores criação  $a^\dagger$  e aniquilação  $a$  de fótons, os quais obedecem as relações de comutação bosônicas padrões (2.26). O Hamiltoniano desse sistema é dado por  $H_s = \hbar \omega a^\dagger a$ , onde  $\omega$  é a frequência do modo. Os auto-estados de  $H_s$  são os estados Fock (número)  $|n\rangle$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), tal que, na representação de auto-estados de energia, os operadores  $a$  e  $a^\dagger$  podem ser expandidos como

$$a = \sum_n \sqrt{n} |n-1\rangle \langle n|, \quad a^\dagger = \sum_n \sqrt{n} |n\rangle \langle n-1|, \quad (\text{B.46})$$

tal que  $H_s$  pode ser escrito como

$$H_s = \sum_n \hbar \omega_n |n\rangle \langle n|, \quad \omega_n \equiv n\omega. \quad (\text{B.47})$$

O operador para o sistema de um campo mono-modo encerrado numa cavidade pode ser escrito como

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} a^\dagger + \mathbf{v}^* a, \quad (\text{B.48})$$

onde  $\mathbf{v}$  são os elementos da matriz de acoplamento. No caso de perdas por transmissão,  $\mathbf{v}$  é determinado pelo coeficiente de transmissão do campo elétrico dos espelhos da cavidade, enquanto que, por perdas por absorção,  $\mathbf{v}$  representa o acoplamento do campo da cavidade com elétrons de valência do sólido, os quais excitam os fônons do material. Em geral  $\mathbf{v}$  pode ser dependente da frequência, no entanto, devido às aproximações usuais para obter a equação mestra, pode ser considerada aproximadamente constante [5].

Como já comentamos, a dedução da equação mestra para o operador densidade de um campo mono-modo encerrado numa cavidade é formalmente análogo ao procedimento descrito com mais detalhes para o sistema de vários átomos da seção anterior. Então, seguindo um procedimento análogo, obtemos a equação mestra

$$\dot{\rho}_s(t) = \{[aX(t), a^\dagger] + [a, X^\dagger(t)a^\dagger] + [a^\dagger Y(t), a] + [a^\dagger, Y^\dagger(t)a]\}. \quad (\text{B.49})$$

Da mesma forma, a soma sobre os modos  $\mathbf{k}_s$  pode ser substituída por uma integral

$$\sum_{\mathbf{k}_s} \rightarrow \int_0^\infty d\omega_{\mathbf{k}_s} D(\omega_{\mathbf{k}_s}), \quad (\text{B.50})$$

onde  $D(\omega_{\mathbf{k}_s})$  é a densidade de modos do reservatório em torno de  $\omega_{\mathbf{k}_s}$ . Se o reservatório é representado pelo campo de radiação livre infinito, a densidade de modos é obtida por um procedimento análogo ao realizado para o sistema de átomos da seção anterior. Se o reservatório for o campo de fônons do material que encobre a cavidade, a densidade de modos é determinada pelos parâmetros do sólido [5]. Em qualquer dos casos, no entanto, consideramos tanto a densidade de modos do reservatório como o acoplamento deste com o campo da cavidade

$$g(\omega_{\mathbf{k}_s}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathcal{E}_{\mathbf{k}_s}}{\hbar}, \quad \mathcal{E}_{\mathbf{k}_s} = \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}_s}}{2\epsilon_0 V}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}_s}, \quad (\text{B.51})$$

suave e lentamente variantes em função de  $\omega_{\mathbf{k}_s}$  nos arredores da ressonância da cavidade  $\omega$  [5], motivo pelo qual podemos também, nessas mesmas condições, considerar  $\bar{n}(\omega_{\mathbf{k}_s}) = \bar{n}(\omega) \equiv \bar{n}$ . Assim, sob

as aproximações de Born-Markov e RWA, as quais inclusive validam as condições que acabamos de considerar, resolvemos os operadores dependentes do tempo da equação mestra (B.49), obtendo

$$\begin{aligned} X(t) &= [(\bar{n} + 1)(\frac{1}{2}\kappa - i\Lambda^{(-)} + i\bar{n}\Lambda^{(+)})] \varrho_s(t), \\ Y(t) &= [\bar{n}(\frac{1}{2}\kappa + i\Lambda^{(-)} - i(\bar{n} + 1)\Lambda^{(+)})] \varrho_s(t), \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

onde

$$\kappa = 2\pi D(\omega_{\mathbf{k}s}) |g(\omega_{\mathbf{k}s})|^2, \quad (\text{B.53})$$

é a taxa de decaimento ou largura de banda do modo da cavidade, e

$$\Lambda^{(\pm)} = \mathcal{P} \int_0^{\infty} d\omega_{\mathbf{k}s} D(\omega_{\mathbf{k}s}) \frac{|g(\omega_{\mathbf{k}s})|^2}{\omega_{\mathbf{k}s} \pm \omega}, \quad (\text{B.54})$$

representam os deslocamentos de frequência, os quais podem ser incorporados no modo de frequência  $\omega$  [5], tal que obtemos finalmente a equação mestra para o campo da cavidade

$$\dot{\varrho}(t) = (\bar{n} + 1)\kappa [a\varrho(t)a^\dagger - \frac{1}{2}\{a^\dagger a, \varrho(t)\}] + \bar{n}\kappa [a^\dagger \varrho(t)a - \frac{1}{2}\{aa^\dagger, \varrho(t)\}], \quad (\text{B.55})$$

onde  $\bar{n}$  denota  $\bar{n}(\omega)$ , o número médio de fótons na frequência do modo da cavidade. No limite  $\bar{n} \rightarrow 0$  (reservatório à temperatura  $T = 0$ ), relevante quando  $k_B T \ll \hbar\omega$ , obtemos a equação mestra considerada no capítulo 4

$$\dot{\varrho}(t) = 2\kappa' (a \cdot a^\dagger - \frac{1}{2}\{a^\dagger a, \cdot\}) \varrho(t) \equiv \mathcal{L}_f \varrho(t), \quad (\kappa' = \frac{1}{2}\kappa), \quad (\text{B.56})$$

a qual descreve a perda de fótons do campo da cavidade através do acoplamento com o reservatório no vácuo.

### B.3. Desacoplamento do Operador Exponencial

A equação mestra do estado de um sistema, sob a ação de um reservatório a temperatura zero, é

$$\dot{\varrho}(t) = \mathcal{L}_s \varrho(t), \quad (\text{B.57})$$

com o Liouvilleano dado por

$$\mathcal{L}_s = 2\zeta \sum_i (s_i \cdot s_i^\dagger - \frac{1}{2}\{s_i^\dagger s_i, \cdot\}), \quad (\text{B.58})$$

onde  $\zeta$  é a taxa de decaimento do sistema.

Definindo os super-operadores [93, 168, 169]

$$\begin{aligned} J &= \sum_i J_i, & J_i &= s_i \cdot s_i^\dagger, \\ L &= \sum_i L_i, & L_i &= -\frac{1}{2}\{s_i^\dagger s_i, \cdot\}, \end{aligned} \quad (i = 1, 2) \quad (\text{B.59})$$

os quais representam, respectivamente, a ação de ‘salto’ (*jump*) e de perda (*loss*) no sistema. Definido isso, a equação mestra (B.57) pode ser escrita na forma mais compacta

$$\dot{\varrho}(t) = 2\zeta(J + L)\varrho(t), \quad (\text{B.60})$$

cujas solução formal é

$$\varrho(t) = \exp[2\zeta t(J + L)]\varrho. \quad (\text{B.61})$$

A utilidade desta solução reside no fato de que pode ser simplificada pelo desacoplamento do operador exponencial. O cálculo do comutador dos super-operadores  $J$  e  $L$  envolve os super-operadores  $J_i$  e  $L_i$  ( $i = 1, 2$ ), mais especificamente o comutador [93, 168]

$$\begin{aligned} [J_i, L_i] &= -\frac{1}{2}[s_i \cdot s_i^\dagger, \{s_i^\dagger s_i, \cdot\}] = -\frac{1}{2}([s_i \cdot s_i^\dagger, s_i^\dagger s_i \cdot] + [s_i \cdot s_i^\dagger, \cdot s_i^\dagger s_i]) \\ &= -\frac{1}{2}(s_i s_i^\dagger s_i \cdot s_i^\dagger - s_i^\dagger s_i s_i \cdot s_i^\dagger + s_i \cdot s_i^\dagger s_i s_i^\dagger - s_i \cdot s_i^\dagger s_i^\dagger s_i) = -s_i \cdot s_i^\dagger = -J_i, \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

resultado esse obtido tanto para a álgebra fermiônica como bosônica, usando as relações de comutação pertinentes. Disso, é fácil mostrar que  $[J, L] = -J$ . Assim, podemos simplificar a solução (B.61) desacoplando o operador exponencial. Ainda, pode ser mais vantajoso expressar o operador exponencial numa forma na qual as ocorrências do super-operador  $J$  ( $L$ ) apareçam sempre à esquerda de todas as ocorrências de  $L$  ( $J$ ). Isso pode ser obtido usando repetidamente o comutador  $[J, L]$  para inverter a ordem sempre que necessário. Para obtermos tais expressões, reescrevemos o operador exponencial na forma

$$e^{c(J+L)} = F(c) e^{cL}, \quad (\text{B.63})$$

onde  $c = 2\zeta t$ . Diferenciando em relação a  $c$ , obtemos a equação

$$\frac{dF(c)}{dc} = F(c) e^{-cL} J e^{cL}. \quad (\text{B.64})$$

Usando a relação de BCH (2.30), temos

$$e^{-cL} J e^{cL} = \sum_n \frac{c^n}{n!} [L, \cdot]^n J = \sum_n \frac{c^n}{n!} J = e^c J, \quad (\text{B.65})$$

na qual usamos  $[L, \cdot]^n J = J$ . Logo, a equação (B.64) se torna

$$\frac{dF(c)}{dc} = F(c) e^c J, \quad (\text{B.66})$$

cuja solução, com a condição de contorno  $F(0) = 1$ , é dada por

$$F(c) = \exp [(e^c - 1)J], \quad (\text{B.67})$$

Portanto, um operador exponencial contendo a soma de dois operadores  $J$  e  $L$ , pode ser reescrito como [93, 168]

$$\exp [2\zeta t(J + L)] = \exp(2\zeta tL) \exp [(1 - e^{-2\zeta t})J], \quad (\text{B.68})$$

ou

$$\exp [2\zeta t(J + L)] = \exp [(e^{2\zeta t} - 1)J] \exp(2\zeta tL). \quad (\text{B.69})$$

---

## Referências

---

- [1] S. HAROCHE E J.-M. RAIMOND, *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities and Photons*, Oxford University Press, New York, 1a. ed., 2006.
- [2] V. VEDRAL, *Introduction to Quantum Information Science*, Oxford University Press, New York, 1a. ed., 2006.
- [3] I. BENGTSOON E K. ŻYCKOWSKI, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*, Cambridge University Press, New York, 1a. ed., 2006.
- [4] G. ALBER, T. BETH, M. HORODECKI, P. HORODECKI, R. HORODECKI, M. RÖTTELER, H. WEINFURTER, R. WERNER, E A. ZEILINGER, *Quantum Information: An Introduction to Basic Theoretical Concepts and Experiments*, Springer Verlag, Berlin, 1a. ed., 2001.
- [5] P. LAMBROPOULOS E D. PETROSYAN, *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1a. ed., 2006.
- [6] M. A. NIELSEN E I. L. CHUANG, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, 1a. ed., 2000.
- [7] A. GALINDO E M. A. MARTÍN-DELGADO, *Information and computation: Classical and quantum aspects*, Rev. Mod. Phys. **74**, 347 (2002).
- [8] M. B. PLENIO E V. VEDRAL, *Teleportation, entanglement and thermodynamics in the quantum world*, Contemp. Phys. **39**, 431 (1998).
- [9] R. HORODECKI, P. HORODECKI, M. HORODECKI, E K. HORODECKI, *Quantum entanglement*, quant-ph/0702225 (2007).
- [10] C. COHEN-TANNOUJDI, B. DIU, E F. LALÖE, *Quantum Mechanics*, Hermann, John Wiley & Sons, França, 2a. ed., 1977.
- [11] A. PERES, *Separability Criterion for Density Matrices*, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
- [12] M. HORODECKI, P. HORODECKI, E R. HORODECKI, *Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions*, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).
- [13] A. PERES, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Kluwer, Dordrecht, 1a. ed., 1993.
- [14] E. SCHRÖDINGER, *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik*, Naturwissenschaften **23**, 807, 823, 844 (1935).
- [15] A. EINSTEIN, B. PODOLSKY, E N. ROSEN, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [16] J. S. BELL, *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*, Physics **1**, 195 (1964).
- [17] J. S. BELL, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2a. ed., 1987.
- [18] D. DEUTSCH E A. EKERT, *Quantum Computation*, Physics World **11**, 47 (1998).
- [19] R. RAUSSENDORF E H. J. BRIEGEL, *A One-Way Quantum Computer*, Phys. Rev. Lett. **86**, 5188 (2001).
- [20] C. H. BENNETT E D. P. DIVINCENZO, *Quantum information and computation*, Nature (London) **404**, 247 (2000).
- [21] C. H. BENNETT, G. BRASSARD, C. CRÉPEAU, R. JOZSA, A. PERES, E W. K. WOOTTERS, *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [22] C. H. BENNETT E S. J. WIESNER, *Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states*, Phys. Rev. Lett. **69**, 2881 (1992).
- [23] D. GOTTESMAN, *Stabilizer Codes and Quantum Error Correction*, PhD thesis, California Institute of Technology, quant-ph/9705052, 1997.
- [24] C. H. BENNETT E G. BRASSARD, *Quantum Cryptography: Public key distribution and coin tossing*, Proceedings of the IEEE International Conference on Computer, Systems, and Signal Processing, Bangalore, Índia , 175 (1984).
- [25] R. F. WERNER, *Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model*, Phys. Rev. A **40**, 4277 (1989).

- [26] C. H. BENNETT, D. P. DIVINCENZO, J. A. SMOLIN, E W. K. WOOTTERS, *Mixed-state entanglement and quantum error correction*, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996).
- [27] C. H. BENNETT, G. BRASSARD, S. POPESCU, B. SCHUMACHER, J. A. SMOLIN, E W. K. WOOTTERS, *Purification of Noisy Entanglement and Faithful Teleportation via Noisy Channels*, Phys. Rev. Lett. **76**, 722 (1996).
- [28] C. H. BENNETT, H. J. BERNSTEIN, S. POPESCU, E B. SCHUMACHER, *Concentrating partial entanglement by local operations*, Phys. Rev. A **53**, 2046 (1996).
- [29] M. HORODECKI, P. HORODECKI, E R. HORODECKI, *General teleportation channel, singlet fraction, and quasidistillation*, Phys. Rev. A **60**, 1888 (1999).
- [30] C. H. BENNETT, S. POPESCU, D. ROHRLICH, J. A. SMOLIN, E A. V. THAPLIYAL, *Exact and asymptotic measures of multipartite pure-state entanglement*, Phys. Rev. A **63**, 012307 (2000).
- [31] W. DÜR, G. VIDAL, E J. I. CIRAC, *Three qubits can be entangled in two inequivalent ways*, Phys. Rev. A **62**, 062314 (2000).
- [32] A. ACÍN, E. JANÉ, W. DÜR, E G. VIDAL, *Optimal Distillation of a Greenberger-Horne-Zeilinger State*, Phys. Rev. Lett. **85**, 4811 (2000).
- [33] F. VERSTRAETE, J. DEHAENE, E B. DE MOOR, *Lorentz singular-value decomposition and its applications to pure states of three qubits*, Phys. Rev. A **65**, 032308 (2002).
- [34] F. VERSTRAETE, J. DEHAENE, B. DE MOOR, E H. VERSCHELDE, *Four qubits can be entangled in nine different ways*, Phys. Rev. A **65**, 052112 (2002).
- [35] L. LAMATA, J. LEÓN, D. SALGADO, E E. SOLANO, *Inductive classification of multipartite entanglement under stochastic local operations and classical communication*, Phys. Rev. A **74**, 052336 (2006).
- [36] S. HILL E W. K. WOOTTERS, *Entanglement of a Pair of Quantum Bits*, Phys. Rev. Lett. **78**, 5022 (1997).
- [37] W. K. WOOTTERS, *Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
- [38] W.-L. LI, C.-F. LI, E G.-C. GUO, *Probabilistic teleportation and entanglement matching*, Phys. Rev. A **61**, 034301 (2000).
- [39] P. P. MUNHOZ, J. A. ROVERSI, A. VIDIELLA-BARRANCO, E F. L. SEMIÃO, *Spontaneous emission and teleportation in cavity QED*, J. Phys. B **38**, 3875 (2005).
- [40] J. PRESKILL, *Lecture Notes*, disponível em <http://theory.caltech.edu/preskill/ph229/>.
- [41] W. K. WOOTTERS E W. H. ZUREK, *A Single Quantum Cannot be Cloned*, Nature (London) **299**, 802 (1982).
- [42] S. POPESCU, *Bell's inequalities versus teleportation: What is nonlocality?*, Phys. Rev. Lett. **72**, 797 (1994).
- [43] R. HORODECKI, M. HORODECKI, E P. HORODECKI, *Teleportation, Bell's inequalities and inseparability*, Phys. Lett. A **222**, 21 (1996).
- [44] S. MASSAR E S. POPESCU, *Optimal Extraction of Information from Finite Quantum Ensembles*, Phys. Rev. Lett. **74**, 1259 (1995).
- [45] N. GISIN, *Hidden quantum nonlocality revealed by local filters*, Phys. Lett. A **210**, 151 (1996).
- [46] N. GISIN, *Nonlocality criteria for quantum teleportation*, Phys. Lett. A **210**, 157 (1996).
- [47] H.-A. BACHOR E T. C. RALPH, *A Guide to Experiments in Quantum Optics*, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2a. ed. rev., 1968.
- [48] P. BADZIAG, M. HORODECKI, P. HORODECKI, E R. HORODECKI, *Local environment can enhance fidelity of quantum teleportation*, Phys. Rev. A **62**, 012311 (2000).
- [49] S. M. DUTRA, *Cavity Quantum Electrodynamics: the strange theory of light in a box*, John Wiley & Sons, New Jersey, 1a. ed., 2005.
- [50] M. O. SCULLY E M. S. ZUBAIRY, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, United Kingdom, 1a. ed., 1997.
- [51] J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New Jersey, 3a. ed., 1994.
- [52] J. J. SAKURAI, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, New Jersey, ed. rev., 1994.
- [53] L. MANDEL E E. WOLF, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, United Kingdom, 1a. ed., 1995.
- [54] R. R. PURI, *Mathematical Methods of Quantum Optics*, Springer, Berlin, 1a. ed., 2001.
- [55] C. GERRY E P. KNIGHT, *Introductory Quantum Optics*, Cambridge University Press, United Kingdom, 1a. ed., 2004.
- [56] W. P. SCHLEICH, *Quantum Optics in Phase Space*, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 1a. ed., 2001.
- [57] D. F. WALLS E G. J. MILBURN, *Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin, 1a. ed., 1995.
- [58] V. VEDRAL, *Modern Foundations of Quantum Optics*, Imperial College Press, London, 1a. ed., 2005.
- [59] P. MEYSTRE E M. SARGENT III, *Elements of Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [60] Z. FICEK E S. SWAIN, *Quantum Interference and Coherence: Theory and Experiments*, Springer Science+Business

- Media, Inc., New York, 1a. ed., 2004.
- [61] W. H. LOUISELL, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, John Wiley and Sons Inc., New York, 2a. ed., 1990.
- [62] R. J. GLAUBER, *The Quantum Theory of Optical Coherence*, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963).
- [63] J. R. KLAUDER E E. C. G. SUDARSHAN, *Fundamentals of Quantum Optics*, W. A. Benjamin, New York, 1a. ed., 1968.
- [64] Y. YAMAMOTO, F. TASSONE, E H. CAO, *Semiconductor Cavity Quantum Electrodynamics*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1a. ed., 2000.
- [65] A. D. BOOZER, A. BOCA, R. MILLER, T. E. NORTHUP, E H. J. KIMBLE, *Reversible State Transfer between Light and a Single Trapped Atom*, Phys. Rev. Lett. **98**, 193601 (2007).
- [66] E. T. JAYNES E F. W. CUMMINGS, *Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation Theory with Application to the Beam Maser*, IEEE **51**, 89 (1963).
- [67] K. VAHALA, *Optical Microcavities*, World Scientific Publishing, 1a. ed., 2004.
- [68] T. F. GALLAGHER, *Rydberg Atoms*, Cambridge University Press, United Kingdom, 1a. ed., 1994.
- [69] S. KUHR, S. GLEYZES, C. GUERLIN, J. BERNU, U. B. HOFF, S. DELEGLISE, S. OSNAGHI, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, S. HAROCHE, E. JACQUES, P. BOSLAND, E B. VISENTIN, *Ultrahigh finesse Fabry-Pérot superconducting resonator*, Appl. Phys. Lett. **90**, 164101 (2007).
- [70] P. MILMAN, A. AUFFEVEES, F. YAMAGUCHI, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, E S. HAROCHE, *A proposal to test Bell's inequalities with mesoscopic non-local states in cavity QED*, Eur. Phys. J. D **32**, 233 (2005).
- [71] L. DAVIDOVICH, N. ZAGURY, M. BRUNE, J. RAIMOND, E S. HAROCHE, *Teleportation of an atomic state between two cavities using nonlocal microwave fields*, Phys. Rev. A **50**, R895 (1994).
- [72] D. BOUWMEESTER, J.-W. PAN, K. MATTLE, M. EIBL, H. WEINFURTER, E A. ZEILINGER, *Experimental quantum teleportation*, Nature (London) **390**, 575 (1997).
- [73] D. BOSCHI, S. BRANCA, F. D. MARTINI, L. HARDY, E S. POPESCU, *Experimental Realization of Teleporting an Unknown Pure Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels*, Phys. Rev. Lett. **80**, 1121 (1998).
- [74] A. FURUSAWA, J. L. SØRENSEN, S. L. BRAUNSTEIN, C. A. FUCHS, H. J. KIMBLE, E E. S. POLZIK, *Unconditional Quantum Teleportation*, Science **282**, 706 (1998).
- [75] M. A. NIELSEN, E. KNILL, E R. LAFLAMME, *Complete quantum teleportation using nuclear magnetic resonance*, Nature (London) **396**, 52 (1998).
- [76] J.-W. PAN, M. DANIELL, S. GASPARONI, G. WEIHS, E A. ZEILINGER, *Experimental Demonstration of Four-Photon Entanglement and High-Fidelity Teleportation*, Phys. Rev. Lett. **86**, 4435 (2001).
- [77] I. MARCIKIC, H. DE RIEDMATTEN, W. TITTEL, H. ZBINDEN, E N. GISIN, *Long-distance teleportation of qubits at telecommunication wavelengths*, Nature (London) **421**, 509 (2002).
- [78] D. FATTAL, E. DIAMANTI, K. INOUE, E Y. YAMAMOTO, *Quantum Teleportation with a Quantum Dot Single Photon Source*, Phys. Rev. Lett. **92**, 037904 (2004).
- [79] M. RIEBE, H. HÄFFNER, C. F. ROSS, W. HÄNSEL, J. BENHELM, G. P. T. LANCASTER, T. W. KÖRBER, C. BECHER, F. SCHMIDT-KALER, D. F. V. JAMES, E R. BLATT, *Deterministic quantum teleportation with atoms*, Nature (London) **429**, 734 (2004).
- [80] M. D. BARRETT, J. CHIAVERINI, T. SCHAEZT, J. BRITTON, W. M. ITANO, J. D. JOST, E. KNILL, C. LANGER, D. LEIBFRIED, R. OZERI, E D. J. WINELAND, *Deterministic quantum teleportation of atomic qubits*, Nature (London) **429**, 737 (2004).
- [81] S.-B. ZHENG E G.-C. GUO, *Efficient Scheme for Two-Atom Entanglement and Quantum Information Processing in Cavity QED*, Phys. Rev. Lett. **85**, 2392 (2000).
- [82] S. OSNAGHI, P. BERTET, A. AUFFEVEES, P. MAIOLI, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, E S. HAROCHE, *Coherent Control of an Atomic Collision in a Cavity*, Phys. Rev. Lett. **87**, 037902 (2001).
- [83] M. B. PLENIO, S. F. HUELGA, A. BEIGE, E P. L. KNIGHT, *Cavity-loss-induced generation of entangled atoms*, Phys. Rev. A **59**, 2468 (1999).
- [84] F. L. SEMIÃO E A. VIDIELLA-BARRANCO, *Coherent-state superpositions in cavity quantum electrodynamics with trapped ions*, Phys. Rev. A **71**, 065802 (2005).
- [85] ÖZGÜR ÇAKIR, A. A. KLYACHKO, E A. S. SHUMOVSKY, *Steady-state entanglement of two atoms created by classical driving field*, Phys. Rev. A **71**, 034303 (2005).
- [86] L. S. AGUIAR, P. P. MUNHOZ, A. VIDIELLA-BARRANCO, E J. A. ROVERSI, *The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms in a cavity interacting with a thermal field*, J. Opt. B **7**, S769 (2005).
- [87] L. S. AGUIAR, P. P. MUNHOZ, A. VIDIELLA-BARRANCO, E J. A. ROVERSI, *Erratum: The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms in a cavity interacting with a thermal field*, J. Phys. B **39**, 2619 (2006).

- [88] L. YE E G.-C. GUO, *Scheme for implementing quantum dense coding in cavity QED*, Phys. Rev. A **71**, 034304 (2005).
- [89] J.-B. XU E S.-B. LI, *Control of the entanglement of two atoms in an optical cavity via white noise*, New J. Phys. **7**, 72 (2005).
- [90] M. TAVIS E F. W. CUMMINGS, *Exact Solution for an N-Molecule—Radiation-Field Hamiltonian*, Phys. Rev. **170**, 379 (1968).
- [91] R. H. DICKE, *Coherence in Spontaneous Radiation Processes*, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
- [92] C. W. GARDINER E P. ZOLLER, *Quantum Noise: A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications to Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 3a. ed., 2004.
- [93] S. M. BARNETT E P. M. RADMORE, *Methods in Theoretical Quantum Optics*, Oxford, Clarendon, 1a. ed., 1997.
- [94] S. NICOLOSI, A. NAPOLI, A. MESSINA, E F. PETRUCCIONE, *Dissipation-induced stationary entanglement in dipole-dipole interacting atomic samples*, Phys. Rev. A **70**, 022511 (2004).
- [95] M. BRUNE, E. HAGLEY, J. DREYER, X. MAÎTRE, A. MAALI, C. WUNDERLICH, J.-M. RAIMOND, E S. HAROCHE, *Observing the Progressive Decoherence of the “Meter” in a Quantum Measurement*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4887 (1996).
- [96] G.-P. GUO, C.-F. LI, J. LI, E G.-C. GUO, *Scheme for the preparation of multiparticle entanglement in cavity QED*, Phys. Rev. A **65**, 042102 (2002).
- [97] J. S. PRATT, *Universality in the Entanglement Structure of Ferromagnets*, Phys. Rev. Lett. **93**, 237205 (2004).
- [98] T. YU E J. H. EBERLY, *Evolution from entanglement to decoherence of bipartite “X” states*, Quant. Inf. Comp. **7**, 459 (2007).
- [99] T. YU E J. H. EBERLY, *Finite-Time Disentanglement Via Spontaneous Emission*, Phys. Rev. Lett. **93**, 140404 (2004).
- [100] H. J. BRIEGEL E R. RAUSSENDORF, *Persistent Entanglement in Arrays of Interacting Particles*, Phys. Rev. Lett. **86**, 910 (2001).
- [101] R. RAUSSENDORF, D. E. BROWNE, E H. J. BRIEGEL, *The one-way quantum computer—a non-network model of quantum computation*, J. Mod. Opt. **49**, 1299 (2002).
- [102] R. RAUSSENDORF, D. E. BROWNE, E H. J. BRIEGEL, *Measurement-based quantum computation on cluster states*, Phys. Rev. A **68**, 022312 (2003).
- [103] P. WALTHER, K. J. RESCH, T. RUDOLPH, E. SCHENCK, H. WEINFURTER, V. VEDRAL, M. ASPELMEYER, E A. ZEILINGER, *Experimental One-Way Quantum Computing*, Nature (London) **434**, 169 (2005).
- [104] V. SCARANI, A. ACÍN, E. SCHENCK, E M. ASPELMEYER, *Nonlocality of cluster states of qubits*, Phys. Rev. A **71**, 042325 (2005).
- [105] X.-W. WANG, Y.-G. SHAN, L.-X. XIA, E M.-W. LU, *Dense coding and teleportation with one-dimensional cluster states*, Phys. Lett. A **364**, 7 (2007).
- [106] X. ZOU E W. MATHIS, *Generating a four-photon polarization-entangled cluster state*, Phys. Rev. A **71**, 032308 (2005).
- [107] A.-N. ZHANG, C.-Y. LU, X.-Q. ZHOU, Y.-A. CHEN, Z. ZHAO, T. YANG, E J.-W. PAN, *Experimental construction of optical multiqubit cluster states from Bell states*, Phys. Rev. A **73**, 022330 (2006).
- [108] R. PREVEDEL, P. WALTHER, F. TIEFENBACHER, P. BÖHI, R. KALTENBAEK, T. JENNEWEIN, E A. ZEILINGER, *High-speed linear optics quantum computing using active feed-forward*, Nature (London) **445**, 65 (2007).
- [109] K. CHEN, C.-M. LI, Q. ZHANG, Y.-A. CHEN, A. GOEBEL, S. CHEN, A. MAIR, E J.-W. PAN, *Experimental Realization of One-Way Quantum Computing with Two-Photon Four-Qubit Cluster States*, Phys. Rev. Lett. **99**, 120503 (2007).
- [110] C.-Y. LU, X.-Q. ZHOU, O. GÜHNE, W.-B. GAO, J. ZHANG, Z.-S. YUAN, A. GOEBEL, T. YANG, E J.-W. PAN, *Experimental entanglement of six photons in graph states*, Nature Physics **3**, 91 (2007).
- [111] S.-B. ZHENG, *Generation of cluster states in ion-trap systems*, Phys. Rev. A **73**, 065802 (2006).
- [112] Z.-M. ZHAN, W.-X. YANG, W.-B. LI, E J.-H. LI, *Efficient Scheme for Greenberger-Horne-Zeilinger State and Cluster State with Trapped Ions*, Chin. Phys. Lett. **23**, 1984 (2006).
- [113] W.-X. YANG, *Preparation of Cluster States with Trapped Ions in Thermal Motion*, Chin. Phys. Lett. **24**, 104 (2007).
- [114] D. E. BROWNE E T. RUDOLPH, *Resource-Efficient Linear Optical Quantum Computation*, Phys. Rev. Lett. **95**, 010501 (2005).
- [115] J. CHO E H.-W. LEE, *Generation of Atomic Cluster States through the Cavity Input-Output Process*, Phys. Rev. Lett. **95**, 160501 (2005).
- [116] X. ZOU E W. MATHIS, *Schemes for generating the cluster states in microwave cavity QED*, Phys. Rev. A **72**, 013809 (2005).
- [117] P. DONG, Z.-Y. XUE, M. YANG, E Z.-L. CAO, *Generation of cluster states*, Phys. Rev. A **73**, 033818 (2006).
- [118] P. J. BLYTHE E B. T. H. VARCOE, *A cavity-QED scheme for cluster-state quantum computing using crossed atomic beams*, New J. Phys. **8**, 231 (2006).
- [119] L. YE, *Generation of a four-qubit cluster state for atoms in a thermal cavity*, Eur. Phys. J. D **41**, 413 (2007).
- [120] L. YE E G.-C. GUO, *Generation of a four-atom entangled cluster state in cavity QED*, Phys. Lett. A **361**, 460 (2007).

- [121] W.-B. L. ZHI-MING ZHAN, *Possible Realization of Cluster States and Quantum Information Transfer in Cavity QED via Raman Transition*, *Chin. Phys. Lett.* **24**, 344 (2007).
- [122] S. G. R. LOUIS, K. NEMOTO, W. J. MUNRO, E T. P. SPILLER, *Weak nonlinearities and cluster states*, *Phys. Rev. A* **75**, 042323 (2007).
- [123] W.-X. YANG E Z.-X. GONG, *Efficient scheme for one-way quantum computing in thermal cavities*, [quant-ph/0704.2297](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0704.2297) (2007).
- [124] S. D. BARRETT E P. KOK, *Efficient high-fidelity quantum computation using matter qubits and linear optics*, *Phys. Rev. A* **71**, 060310 (2005).
- [125] X. L. ZHANG, K. L. GAO, E M. FENG, *Efficient and high-fidelity generation of atomic cluster states with cavity QED and linear optics*, *Phys. Rev. A* **75**, 034308 (2007).
- [126] T. TANAMOTO, Y. XI LIU, S. FUJITA, X. HU, E F. NORI, *Producing Cluster States in Charge Qubits and Flux Qubits*, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 230501 (2006).
- [127] X.-H. ZHENG, P. DONG, Z.-Y. XUE, E Z.-L. CAO, *Generation of cluster states with Josephson charge qubits*, *Phys. Lett. A* **365**, 156 (2007).
- [128] G.-P. GUO, H. ZHANG, T. TU, E G.-C. GUO, *One-step preparation of cluster states in quantum-dot molecules*, *Phys. Rev. A* **75**, 050301 (2007).
- [129] L. VAIDMAN, *Teleportation of quantum states*, *Phys. Rev. A* **49**, 1473 (1994).
- [130] R. E. S. POLKINGHORNE E T. C. RALPH, *Continuous Variable Entanglement Swapping*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2095 (1999).
- [131] M. BAN, *Quantum dense coding via a two-mode squeezed-vacuum state*, *J. Opt. B* **1**, L9 (1999).
- [132] S. LLOYD E S. L. BRAUNSTEIN, *Quantum Computation over Continuous Variables*, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1784 (1999).
- [133] M. BRUNE, F. SCHMIDT-KALER, A. MAALI, J. DREYER, E. HAGLEY, J. M. RAIMOND, E S. HAROCHE, *Quantum Rabi Oscillation: A Direct Test of Field Quantization in a Cavity*, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1800 (1996).
- [134] D. M. MEEKHOF, C. MONROE, B. E. KING, W. M. ITANO, E D. J. WINELAND, *Generation of Nonclassical Motional States of a Trapped Atom*, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1796 (1996).
- [135] S. J. VAN ENK E O. HIROTA, *Entangled coherent states: Teleportation and decoherence*, *Phys. Rev. A* **64**, 022313 (2001).
- [136] H. JEONG, M. S. KIM, E J. LEE, *Quantum-information processing for a coherent superposition state via a mixedentangled coherent channel*, *Phys. Rev. A* **64**, 052308 (2001).
- [137] H. JEONG E M. S. KIM, *Efficient quantum computation using coherent states*, *Phys. Rev. A* **65**, 042305 (2002).
- [138] M. YANG E Z.-L. CAO, *Quantum information processing using coherent states in cavity QED*, *Physica A* **366**, 243 (2006).
- [139] B. C. SANDERS, *Entangled coherent states*, *Phys. Rev. A* **45**, 6811 (1992).
- [140] B. C. SANDERS, *Erratum: Entangled coherent states [Phys. Rev. A 45, 6811 (1992)]*, *Phys. Rev. A* **46**, 2966 (1992).
- [141] J. ZHANG E S. L. BRAUNSTEIN, *Continuous-variable Gaussian analog of cluster states*, *Phys. Rev. A* **73**, 032318 (2006).
- [142] N. C. MENICUCCI, P. VAN LOOCK, M. GU, C. WEEDBROOK, T. C. RALPH, E M. A. NIELSEN, *Universal Quantum Computation with Continuous-Variable Cluster States*, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 110501 (2006).
- [143] M. V. DEN NEST, A. MIYAKE, W. DÜR, E H. J. BRIEGEL, *Universal Resources for Measurement-Based Quantum Computation*, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 150504 (2006).
- [144] X. SU, A. TAN, X. JIA, J. ZHANG, C. XIE, E K. PENG, *Experimental Preparation of Quadripartite Cluster and Greenberger-Horne-Zeilinger Entangled States for Continuous Variables*, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 070502 (2007).
- [145] D. GOTTESMAN E I. L. CHUANG, *Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations*, *Nature (London)* **402**, 390 (1999).
- [146] O. HIROTA E M. SASAKI, *Entangled state based on nonorthogonal state*, [quant-ph/0101018](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0101018) (2001).
- [147] L. DAVIDOVICH, A. MAALI, M. BRUNE, J. M. RAIMOND, E S. HAROCHE, *Quantum switches and nonlocal microwave fields*, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2360 (1993).
- [148] H. JEONG E N. B. AN, *Greenberger-Horne-Zeilinger-type and W-type entangled coherent states: Generation and Bell-type inequality tests without photon counting*, *Phys. Rev. A* **74**, 022104 (2006).
- [149] G. GORDON E G. RIGOLIN, *Generalized quantum-state sharing*, *Phys. Rev. A* **73**, 062316 (2006).
- [150] C. C. GERRY, *Proposal for a mesoscopic cavity QED realization of the Greenberger-Horne-Zeilinger state*, *Phys. Rev. A* **54**, R2529 (1996).
- [151] C.-H. YUAN, Y.-C. OU, E Z.-M. ZHANG, *A Scheme for Preparation of W-Type Entangled Coherent State of Three-Cavity Fields*, *Chin. Phys. Lett.* **23**, 1695 (2006).
- [152] P. P. MUNHOZ, F. L. SEMIÃO, A. VIDIELLA-BARRANCO, E J. A. ROVERSI, *Cluster-type entangled coherent states*,

- Phys. Lett. A **372**, 3580 (2008).
- [153] A. GILCHRIST, K. NEMOTO, W. J. MUNRO, T. C. RALPH, S. GLANCY, S. L. BRAUNSTEIN, E G. J. MILBURN, *Schrödinger cats and their power for quantum information processing*, J. Opt. B **6**, S828 (2004).
- [154] M. J. HOLLAND, D. F. WALLS, E P. ZOLLER, *Quantum nondemolition measurements of photon number by atomic beam deflection*, Phys. Rev. Lett. **67**, 1716 (1991).
- [155] M. BRUNE, S. HAROCHE, J. M. RAIMOND, L. DAVIDOVICH, E N. ZAGURY, *Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling: Quantum-nondemolition measurements and generation of “Schrödinger cat” states*, Phys. Rev. A **45**, 5193 (1992).
- [156] J. G. PEIXOTO DE FARIA E M. C. NEMES, *Dissipative dynamics of the Jaynes-Cummings model in the dispersive approximation: Analytical results*, Phys. Rev. A **59**, 3918 (1999).
- [157] E. SOLANO, G. S. AGARWAL, E H. WALTHER, *Strong-Driving-Assisted Multipartite Entanglement in Cavity QED*, Phys. Rev. Lett. **90**, 027903 (2003).
- [158] S.-B. ZHENG, *Quantum-information processing and multiatom-entanglement engineering with a thermal cavity*, Phys. Rev. A **66**, 060303 (2002).
- [159] S.-B. ZHENG, *Generation of entangled states for many multilevel atoms in a thermal cavity and ions in thermal motion*, Phys. Rev. A **68**, 035801 (2003).
- [160] R.-C. YANG, H.-C. LI, M.-X. CHEN, E X. LIN, *Generation of four-atom cluster states in thermal cavity and implementing remote controlled not gate*, Chin. Phys. **15**, 2315 (2006).
- [161] A. SØRENSEN E K. MØLMER, *Entanglement and quantum computation with ions in thermal motion*, Phys. Rev. A **62**, 022311 (2000).
- [162] X. ZOU, K. PAHLKE, E W. MATHIS, *Quantum phase-gate implementation for trapped ions in thermal motion*, Phys. Rev. A **66**, 044307 (2002).
- [163] J. LEE, M. PATERNOSTRO, M. S. KIM, E S. BOSE, *Entanglement Reciprocity between Qubits and Continuous Variables*, Phys. Rev. Lett. **96**, 080501 (2006).
- [164] A. BLAIS, R.-S. HUANG, A. WALLRAFF, S. M. GIRVIN, E R. J. SCHOELKOPF, *Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation*, Phys. Rev. A **69**, 062320 (2004).
- [165] J. M. RAIMOND, M. BRUNE, E S. HAROCHE, *Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity*, Rev. Mod. Phys. **73**, 565 (2001).
- [166] F. YAMAGUCHI, P. MILMAN, M. BRUNE, J. M. RAIMOND, E S. HAROCHE, *Quantum search with two-atom collisions in cavity QED*, Phys. Rev. A **66**, 010302 (2002).
- [167] S. GLEYZES, S. KUHR, C. GUERLIN, J. BERNU, S. DELÉGLISE, U. B. HOFF, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, E S. HAROCHE, *Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity*, Nature (London) **446**, 297 (2007).
- [168] S. J. D. PHOENIX, *Wave-packet evolution in the damped oscillator*, Phys. Rev. A **41**, 5132 (1990).
- [169] S. M. BARNETT E P. L. KNIGHT, *Dissipation in a fundamental model of quantum optical resonance*, Phys. Rev. A **33**, 2444 (1986).
- [170] V. V. DODONOV, I. A. MALKIN, E V. I. MAN’KO, *Even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator*, Physica **72**, 597 (1974).
- [171] V. BUŽEK, A. VIDIELLA-BARRANCO, E P. L. KNIGHT, *Superpositions of coherent states: Squeezing and dissipation*, Phys. Rev. A **45**, 6570 (1992).
- [172] C. C. GERRY, *Non-classical properties of even and odd coherent states*, J. Mod. Opt. **40**, 1053 (1993).
- [173] C. C. GERRY E P. L. KNIGHT, *Quantum superpositions and Schrödinger cat states in quantum optics*, Am. J. Phys. **65**, 964 (1997).
- [174] D. WILSON, H. JEONG, E M. S. KIM, *Quantum Nonlocality for a Mixed Entangled Coherent State*, J. Mod. Opt. **49**, 851 (2002).
- [175] M. C. DE OLIVEIRA E W. J. MUNRO, *Quantum computation with mesoscopic superposition states*, Phys. Rev. A **61**, 042309 (2000).
- [176] M. C. DE OLIVEIRA, M. H. Y. MOUSSA, E S. S. MIZRAHI, *Continuous pumping and control of a mesoscopic superposition state in a lossy QED cavity*, Phys. Rev. A **61**, 063809 (2000).
- [177] M. C. DE OLIVEIRA E G. J. MILBURN, *Discrete teleportation protocol of continuum spectra field states*, Phys. Rev. A **65**, 032304 (2002).
- [178] A. B. KLIMOV, L. L. SÁNCHEZ-SOTO, A. NAVARRO, E E. C. YUSTAS, *Effective Hamiltonians in quantum optics: a systematic approach*, J. Mod. Opt. **49**, 2211 (2002).
- [179] H. J. CARMICHAEL, *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1a. ed.
- [180] H. J. CARMICHAEL, *Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations*,

- Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2a. imp. corr., 2002.
- [181] A. G. REDFIELD, *On the theory of relaxation processes*, IBM J. Res. Dev. **1**, 19 (1957).
- [182] F. BLOCH, *Generalized Theory of Relaxation*, Phys. Rev. **105**, 1206 (1957).
- [183] H.-P. BREUER E F. PETRUCCIONE, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford University Press Inc., New York, 1a. ed., 2002.
- [184] Z. FICEK E R. TANÁŠ, *Entangled states and collective non-classical effects in two-atom systems*, Phys. Rep. **372**, 369 (2002).

