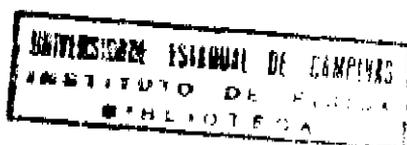


# Universidade Estadual de Campinas Instituto de Física 'Gleb Wataghin'

## Órbitas Periódicas em Sistemas Caóticos



Aluno :Francisco Arpad Bajay

Orientador :Prof. Dr. Marcus Aloizio Martinez de Aguiar

Tese submetida ao Instituto de Física 'Gleb Wataghin' da  
Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos  
para obtenção do grau de Doutor em Ciências

Este exemplar corresponde a redação final da  
tese de Doutorado defendida pelo aluno  
Francisco Arpad Bajay e aprovada pela Comissão Julgadora

24/9/96

A handwritten signature in black ink, consisting of a large, stylized initial 'M' followed by a long horizontal stroke.



INSTITUTO DE FISICA  
GLEB WATAGHIN

**PARECER DE APROVAÇÃO**  
**DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DE**  
***FRANCISCO ARPAD BAJAY***

DATA: 17 / 04 / 96

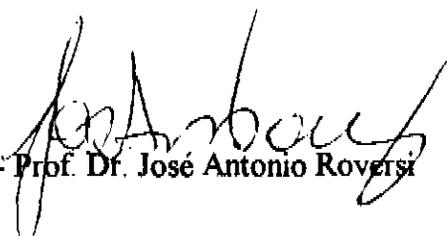
BANCA EXAMINADORA:

  
- Prof. Dr. *Marcus Aloizio Martinez de Aguiar* (Orientador)

  
- Prof. Dr. *Ibero Luiz Caldas*

  
- Prof. Dr. *Ricardo Egydio de Carvalho*

  
- Profa. Dra. *Kyoko Furuya*

  
- Prof. Dr. *José Antonio Roversi*

# Órbitas Periódicas em Sistemas Caóticos

FRANCISCO ARPAD BAJAY

*Instituto de Física "Gleb Watshagin" - UNICAMP*

17 de abril de 1996

**dedico esse trabalho a**

**Regina (in memoriam),  
e Larissa.**

# Agradecimentos

Ao prof. Marcus A. M. Aguiar pela orientação e pela grande ajuda nos momentos mais difíceis desses últimos anos,

Aos profs. do grupo; A. M. Ozorio de Almeida, K. Furuya e J. A. Roversi,

Aos colegas do grupo; Gian, Sandra, Ademir, Fausto e Tulio,

À secretaria da pós-graduação; Maria Inês, Armando e Márcia,

Aos colegas da pós-graduação; Boselli, Mané, Caluzi, João Paulo, e Elis,

E ao apoio financeiro do CNPQ e da CAPES.

# Resumo

Desenvolvemos nesse trabalho um novo método de busca de Órbitas periódicas em sistemas Caóticos. O método é baseado numa varredura unidimensional pela seção de Poincaré, que usa o comportamento das vizinhanças das órbitas periódicas como guia. Esse método é genérico e pode ser aplicado a qualquer sistema com dois graus de liberdade. Como exemplo de aplicação do método, usamos o Potencial Quártico num regime fortemente caótico. Conseguimos com a técnica desenvolvida um conjunto de aproximadamente 850 órbitas periódicas distintas.

# Abstract

In this work we developed a new method to find periodic orbits in chaotic systems. The method is based on a one-dimensional scan at the Poincaré section and uses the behavior of nearby trajectories as a guide in the search. The method is generic and can be applied to any two-degree of freedom system. As an example we have considered the Quartic Potential in a strongly chaotic regime. We found approximately 850 different periodic orbits.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>O Modelo: Potencial Quártico</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>O Método</b>	<b>23</b>
3.1	Método das Árcas . . . . .	24
3.2	Método das Linhas . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>40</b>
4.1	Órbitas Estáveis . . . . .	41
4.2	Órbitas de mesma topologia . . . . .	42
4.3	Órbitas de simetrias especiais . . . . .	50

4.4	O Índice de Maslov . . . . .	50
4.5	Órbitas genéricas . . . . .	54
4.6	Histogramas . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>77</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Uma das áreas de grande interesse na física teórica de hoje é tentar compreender a conexão entre a Mecânica Clássica e a Mecânica Quântica na aproximação semiclássica quando o sistema clássico for não integrável. Do ponto de vista formal, em sistemas não integráveis, não se aplica a regra semiclássica de quantização *EBK* e, nesse caso, a conexão entre a Mecânica Clássica e a Mecânica Quântica não está totalmente compreendida e se apresenta de uma forma muito complexa. Poincaré (1892, Chapter III) [19] achava que órbitas periódicas, i.e., soluções das equações de movimento que retornam às suas condições iniciais, estão densamente distribuídas entre todas as trajetórias clássicas possíveis. Ele sugeriu que o estudo das órbitas periódicas proporcionaria um indício do comportamento de qualquer sistema mecânico como um todo. Em suas palavras :

*"... , ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable."*

que em uma versão livre seria

"o que faz essas soluções periódicas serem tão preciosas é que elas são, por assim dizer, a única brecha por onde nós podemos tentar penetrar neste sítio que tem a reputação de ser inacessível."

Mas a importância das órbitas periódicas só voltou a ser abordada de forma relevante nos trabalhos de Gutzwiller (1967/1971) [11] [12] [13] onde se demonstrou que no limite semiclássico (onde  $\hbar \rightarrow 0$ ), a densidade de níveis de energia, definida como

$$n(E) = \sum_n \delta(E - E_n) \quad (1.1)$$

pode ser escrita como a soma da densidade de Weyl (que é um termo suave) mais uma densidade oscilante. Em outras palavras

$$n(E) = n_{Weyl}(E) + n_{osc.}(E) \quad \text{para} \quad \hbar \rightarrow 0 \quad (1.2)$$

e essa densidade oscilante por sua vez, pode ser totalmente expressa em termos clássicos. Essa fórmula tornou-se conhecida como a *"Fórmula do Traço de Gutzwiller"* e, para sistemas com dois graus de liberdade, é dada por

$$n_{osc.}(E) = \frac{1}{\pi \hbar} \sum_{O.P.} \frac{\tau_o}{\sqrt{T_{rM} - 2}} \cos\left(\frac{S}{\hbar} - \frac{\sigma\pi}{2}\right) \quad (1.3)$$

onde  $O.P.$  são as órbitas periódicas (incluindo suas repetições,  $\tau_n$  é o período da órbita primitiva,  $TrM$  é o traço da matriz de Monodromia,  $S$  é a ação clássica e  $\sigma$  é o índice de maslov da órbita.

Infelizmente o número de órbitas periódicas cresce exponencialmente com o aumento do período. Isso significa que a soma infinita descrita, na fórmula do traço, a não ser em casos especiais, diverge e não pode ser feita facilmente.

Esse problema da divergência tem sido alvo de diversos estudos. Uma das propostas mais interessantes atualmente para contornar essa divergência é a Ressomação de Berry-Keating, aonde se faz uma analogia da fórmula do traço com a função Zeta de Riemann, aonde os números primos fazem o papel das órbitas periódicas. A vantagem dessa técnica é que pode-se usar uma propriedade da função Zeta que diz que a soma até um certo ponto (escolhido de forma conveniente), é aproximadamente igual ao complexo conjugado do restante da soma até o infinito. Em outras palavras, poder-se-ia truncar a soma num ponto conveniente e obtermos o resultado da soma completa.

Em qualquer um dos casos, na fórmula do traço, na ressomação de Berry-Keating ou outras somas clássicas já propostas ou em desenvolvimento, existe um ponto em comum que é fundamental: não podemos testar essas fórmulas sem um conjunto, o mais completo possível, de órbitas periódicas. Além disso para que o teste tenha validade ampla, o sistema escolhido deve ser genérico. Devemos lembrar que as órbitas periódicas obtidas através de dinâmica simbólica não se aplicam aos casos genéricos e sim somente a casos particulares.

Outra área que depende diretamente de um bom conjunto de órbitas periódicas é o das cicatrizes, aonde se verifica as concentrações de auto-funções quânticas relacionados com certas órbitas ou conjunto de órbitas periódicas.

Tudo isso nos levou a tentar desenvolver um método de busca exaustiva de órbitas periódicas dentro de um intervalo de período em sistemas caóticos e esse é o tema central dessa tese.

Outros trabalhos com esse enfoque foram feitos nos últimos anos, especialmente o trabalho de M. Baranger e K. T. R. Davies [3] e de D. Provost [20], que será rapidamente descrito no capítulo 3. O nosso trabalho se propõe, dentro do possível, a fazer uma busca exaustiva e num regime fortemente caótico.

## Capítulo 2

# O Modelo: Potencial Quártico

O modelo usado como motivação para o desenvolvimento de nosso trabalho é um potencial com dois graus de liberdade, conhecido na literatura como Potencial Quártico. Ele é definido como :

$$V(x, y) = \left(\frac{x^2 y^2}{2}\right) + \beta \left(\frac{x^4 + y^4}{4}\right) \quad (2.1)$$

Esse potencial é composto de duas partes, a primeira  $(x^2 y^2)/2$  é um sistema aberto e no espaço de configurações é o responsável pelo formato em cruz do potencial. Frequentemente na literatura encontramos referências a essas "hastes" da cruz como "canais", um na direção  $X$  e outro na direção  $Y$ , que por serem finos e alongados, muitas vezes confinam órbitas nessas regiões. A segunda parte desse potencial  $(x^4 + y^4)/4$  é um potencial fechado propriamente dito e a sua função é exatamente fechar a parte  $(x^2 y^2)/2$ , limitando o potencial quártico como um todo. Ainda temos um parâmetro,  $\beta$ , que tem a função

de estabelecer o peso entre as duas partes do Potencial, ou seja, serve para balancear o quanto se deseja de influência de uma parte sobre a outra.

Dessa forma o nosso Hamiltoniano Quártico pode ser escrito na forma:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + V(x, y) \quad (2.2)$$

ou

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{x^2 y^2}{2} + \beta \frac{x^4 + y^4}{4} \quad (2.3)$$

de onde podemos tirar as equações de movimento

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_x} &= \dot{x} = p_x \\ \frac{\partial H}{\partial p_y} &= \dot{y} = p_y \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= -\dot{p}_x = xy^2 + \beta x^3 \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= -\dot{p}_y = yx^2 + \beta y^3 \end{aligned}$$

Esse potencial também tem a propriedade de ser reescalável, ou seja, se tivermos as coordenadas de posição, velocidade, período ou até mesmo a ação para uma dada energia  $E_0$ , podemos facilmente reescalar esses mesmos parâmetros para uma outra energia  $E$  qualquer.

É fácil demonstrar essa propriedade: dado, por exemplo

$$H_0 = \frac{p_{x0}^2}{2} + \frac{p_{y0}^2}{2} + \left(\frac{x_0^2 y_0^2}{2}\right) + \beta \left(\frac{x_0^4 + y_0^4}{4}\right) = E_0 \quad (2.4)$$

queremos estabelecer uma relação de escala com

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \left(\frac{x^2 y^2}{2}\right) + \beta \left(\frac{x^4 + y^4}{4}\right) = E \neq E_0 \quad (2.5)$$

Vamos supor que exista um fator de escala do tipo  $p_x = (k1)p_{x0}$  e um outro do tipo  $x = (k2)x_0$  para as coordenadas. Como  $p_x$  e  $p_y$  são simétricos, assim como  $x$  e  $y$  também são, os mesmos fatores de escala valem para  $p_y$  e para  $y$ .

Substituindo as relações de escala em (2.5) teremos :

$$H = k1^2\left(\frac{p_{x0}^2}{2} + \frac{p_{y0}^2}{2}\right) + k2^4\left(\frac{x_0^2 y_0^2}{2}\right) + k2^4\beta\left(\frac{x_0^4 + y_0^4}{4}\right) = E \quad (2.6)$$

fazendo  $k = k1^2 = k2^4$  teremos :

$$k(E_0) = E \quad \text{ou} \quad k = \left(\frac{E}{E_0}\right) \quad (2.7)$$

que nos dá os valores de

$$k1 = \left(\frac{E}{E_0}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad k2 = \left(\frac{E}{E_0}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.8)$$

e as relações de escala

$$p_x(t') = \left(\frac{E}{E_0}\right)^{\frac{1}{2}} p_{x0}(t) \quad (2.9)$$

e

$$x(t') = \left(\frac{E}{E_0}\right)^{\frac{1}{4}} x_0(t) \quad (2.10)$$

as relações de  $p_y$  e  $y$  são análogas.

Substituindo as relações acima nas equações de movimento encontraremos a relação de escala para os tempos:

$$t' = \left(\frac{E}{E_0}\right)^{-\frac{1}{2}} t \quad (2.11)$$

Finalmente, usando a definição de ação, temos que

$$S(E) = 2\pi \int pdq \quad (2.12)$$

o que nos dá por substituição direta a relação de escala para as ações

$$S(E) = \left(\frac{E}{E_0}\right)^{\frac{3}{2}} S(E_0) \quad (2.13)$$

Além das relações de escala temos as simetrias do potencial que obedecem as seguintes operações

2 rotações de  $\frac{\pi}{2} \rightarrow 2C_4$

1 rotação de  $\pi \rightarrow C_2$

2 reflexões nos eixos  $\rightarrow 2\sigma_v$

2 reflexões nas diagonais  $\rightarrow 2\sigma_d$

1 rotação de  $2\pi$  (Identidade)  $\rightarrow E$

O conjunto completo de operações de simetria é  $\{E, 2C_4, C_2, 2\sigma_v, 2\sigma_d\}$  que define o grupo de simetria  $C_{4v}$ .

Finalmente vamos tratar do parâmetro de peso entre os dois constituintes do potencial que é o  $\beta$ . Esse parâmetro é o responsável pelo índice de caoticidade do nosso sistema e em termos qualitativos podemos observar a sequência de seções de Poincaré para diversos valores de  $\beta$ . Não variamos o parâmetro de Energia  $E$ , porque como vimos acima, obteríamos exatamente as mesma seções a não ser por um fator de escala.

Levando em conta os inúmeros trabalhos numéricos de H. D. Meyer [17] [7] e outros, temos que para  $\beta \rightarrow 0$  o sistema é fortemente caótico. De fato esses trabalhos tentam por vários caminhos demonstrar que nesse limite o sistema é ergódico.

Escolhemos como parâmetros de nosso trabalho uma energia fixa  $E = 0.50$

e  $\beta = 0.01$ , aonde não podemos mais observar macroscopicamente nenhuma estrutura tipo elíptica presente.

A figura 2.1, a seguir, com  $\beta = 1.00$  mostra uma estrutura regular, como se fosse um sistema integrável, onde se observa a existência de duas grandes ilhas de comportamento tipicamente elíptico. Nesse caso  $V(x, y) = (\frac{x^2+y^2}{2})^2 = \frac{r^4}{4}$ , que é de fato integrável, pois  $L_z = xp_y - yp_x$  é uma constante do movimento.

A figura 2.2, com  $\beta = 0.5$ , já apresenta uma região nitidamente caótica separando as 4 ilhas estáveis. Na figura 2.3, com  $\beta = 0.1$ , já não podemos mais observar qualquer estrutura regular, e aparentemente já estamos num regime totalmente caótico.

Finalmente na figura 2.4 com  $\beta = 0.01$  ou seja uma ordem de grandeza menor que a figura anterior, definitivamente não podemos observar macroscopicamente nenhum tipo de estabilidade. É nessas condições de parâmetros que vamos desenvolver o nosso trabalho.

Não é difícil de se perceber que quanto menor for  $\beta$ , mais rapidamente e intensamente o sistema tenda a ergódico, mas isso é apenas uma observação qualitativa imprecisa. Não podemos fazer afirmativas de que todo o espaço é hiperbólico, apenas numa análise visual de uma seção de Poincaré. Convém realçar que no trabalho de Dahlqvist ele encontrou uma órbita periódica estável com  $\beta = 0$ , derrubando de vez a hipótese de que com  $\beta \rightarrow 0$ , o sistema seria totalmente hiperbólico.

A estabilidade das órbitas periódicas é dada pelo comportamento de trajetórias na sua vizinhança. Escrevendo as equações de Hamilton na forma

## Mapa do Potencial Quartico

$$\beta = 1.00 \quad E=0.500$$

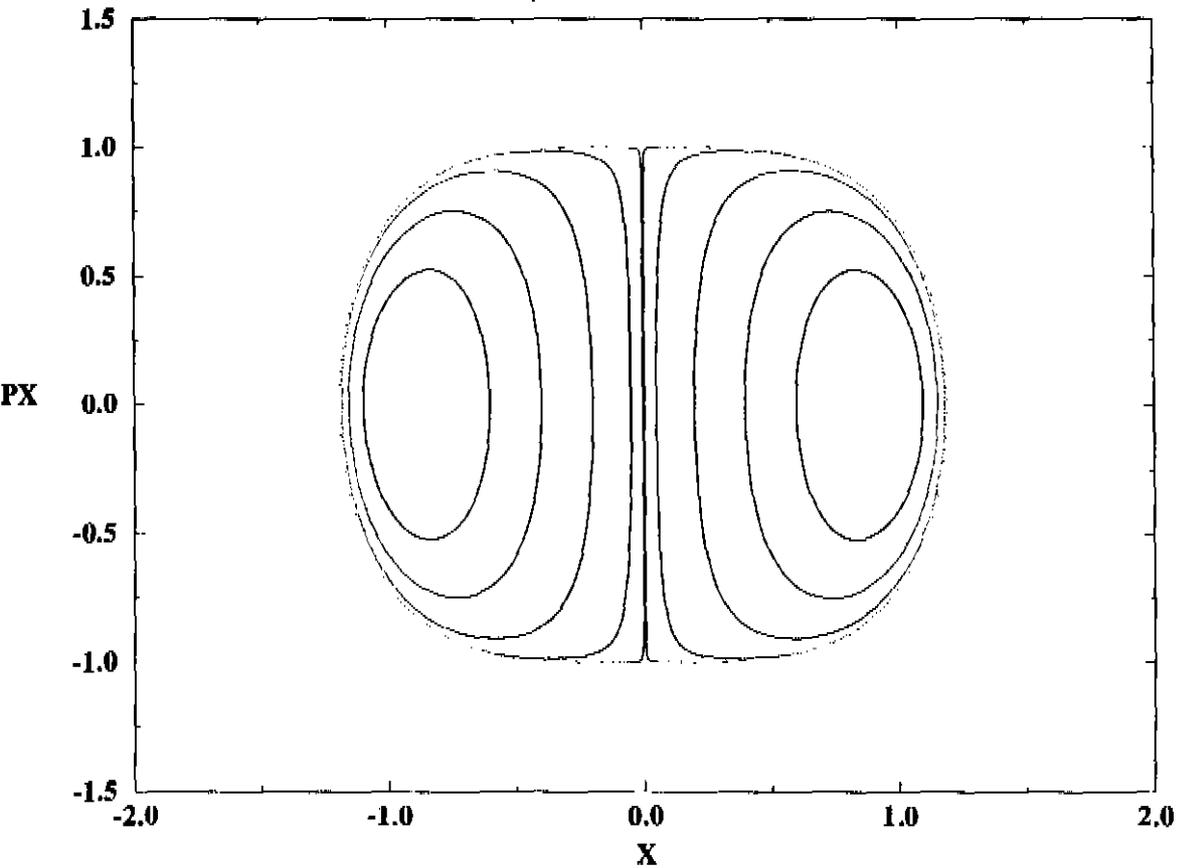


Figura 2.1: - Mapa do Potencial Quártico com  $\beta = 1.00$  e Energia= 0.50, aonde pode-se observar a regularidade das curvas, indicando uma seção típica de um sistema integrável.

## Mapa do Potencial Quartico

$$\beta = 0.50 \quad E=0.500$$

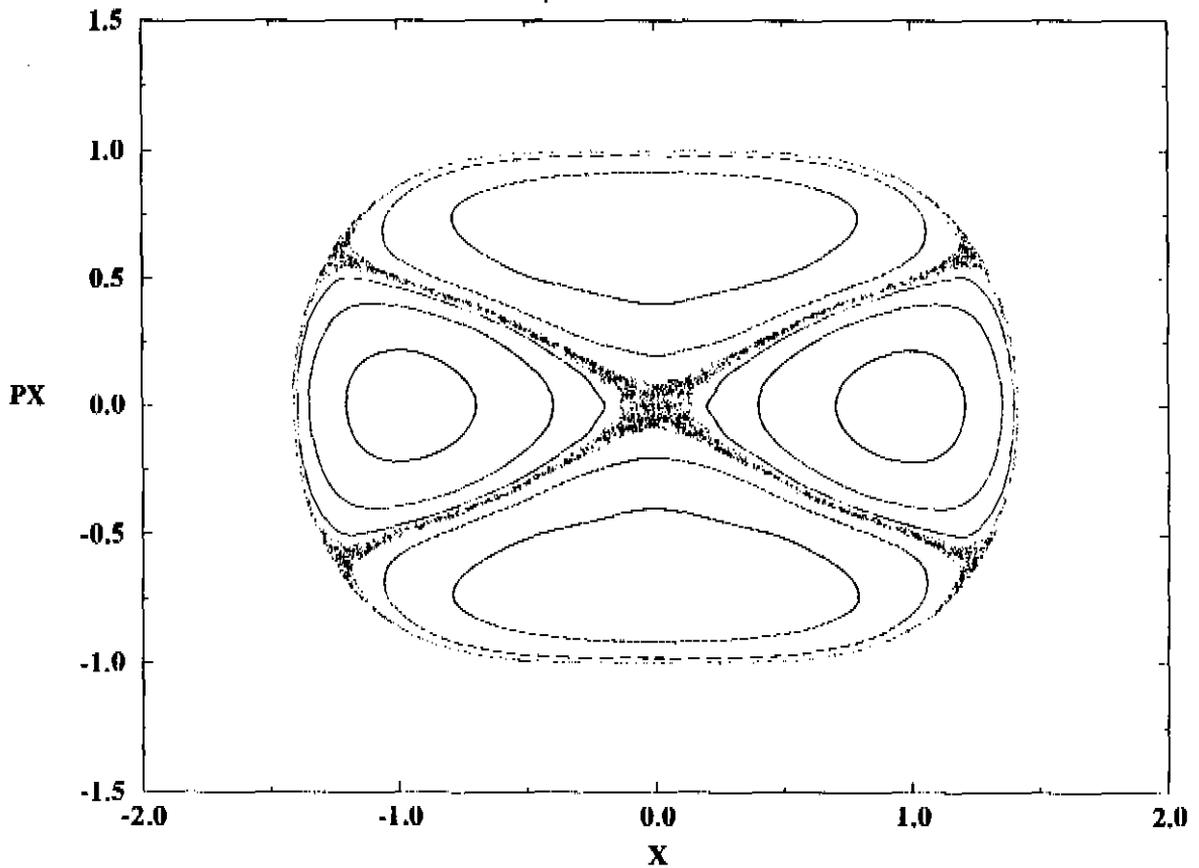


Figura 2.2: - Mapa do Potencial Quártico com  $\beta = 0.5$  e Energia= 0.50, aonde podemos observar 4 grandes ilhas estáveis separadas por uma fronteira caótica, estreita mas bem definida.

## Mapa do Potencial Quartico

$$\beta = 0.10 \quad E = 0.500$$

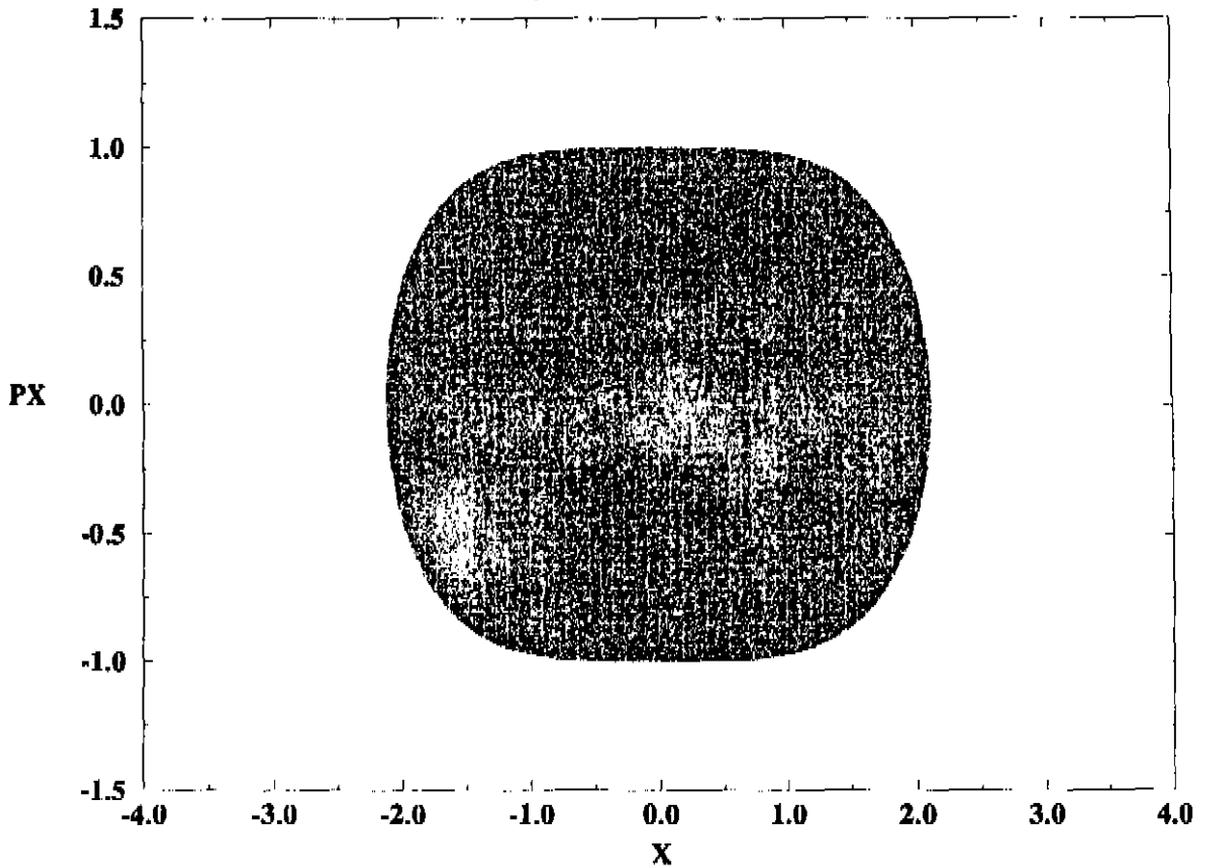


Figura 2.3: - Mapa do Potencial Quártico com  $\beta = 0.1$  e Energia= 0.50, aonde já não é possível observar nenhuma ilha estável.

$$\dot{Z} = J\nabla H \quad (2.14)$$

onde

$$Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

e supondo que  $Z_0(t) = Z_0(t + T)$  seja uma solução periódica, fazemos

$$Z = Z_0(t) + \xi(t) \quad (2.16)$$

e substituindo em 2.14 em primeira ordem obtemos

$$\dot{\xi} = JH'\xi \quad (2.17)$$

cuja solução pode ser escrita como

$$\xi(t) = M(T)\xi(0) \quad (2.18)$$

Depois de um período,  $M(T)$  é chamada Matriz de Monodromia.

Dois autovalores de  $M$  são sempre 1. Os outros dois são da forma  $e^{\pm\mu}$  no caso instável ou  $e^{\pm i\theta}$  no caso estável. Assim, se  $0 < \text{tr}(M) < 4$ , a órbita periódica é estável e se  $\text{tr}(M) > 4$  ou  $\text{tr}(M) < 0$  a órbita periódica é instável.

Com base no método que desenvolvemos aqui, verificamos e constatamos de fato a órbita estável de P. Dahlqvist e G. Russberg [9] existe. Fizemos uma busca em regiões de  $\beta$  próximos de zero (fig 2.5) para observarmos a procedência dessa órbita. Obtivemos o seguinte resultado, na região muito estreita de  $0.00000 < \beta < 0.00040$ : Para  $\beta = 0$  há uma órbita estável (uma rotação assimétrica com traço da matriz de monodromia próximo de 0.07) que é a órbita do artigo em questão. Esta originou-se de uma bifurcação de uma família de librações estáveis, passando para instáveis (cruzando a linha de  $\text{traço}(M) = 4$ ) com  $\beta$  em torno de 0.00002; a libração se estende até a região de  $\beta = 0.00030$ , sofrendo outra bifurcação em  $\beta$  próximo de 0.00009 aonde sai uma outra família de rotações e na região de  $\beta$  próxima de 0.00030, aonde temos mais dois ramos de famílias. Esses dois novos ramos são librações, uma de librações instáveis diretas ( $\text{traço} > 0$ ) e a outra de librações instáveis indiretas ( $\text{traço} < 0$ ).

Esse pequeno tópico é apenas para ilustrar a complexidade dos sistemas caóticos em geral e em particular o do Potencial Quártico que é o objetivo de nosso estudo.

## Mapa do Potencial Quartico

$\beta = 0.01$   $E = 0.500$

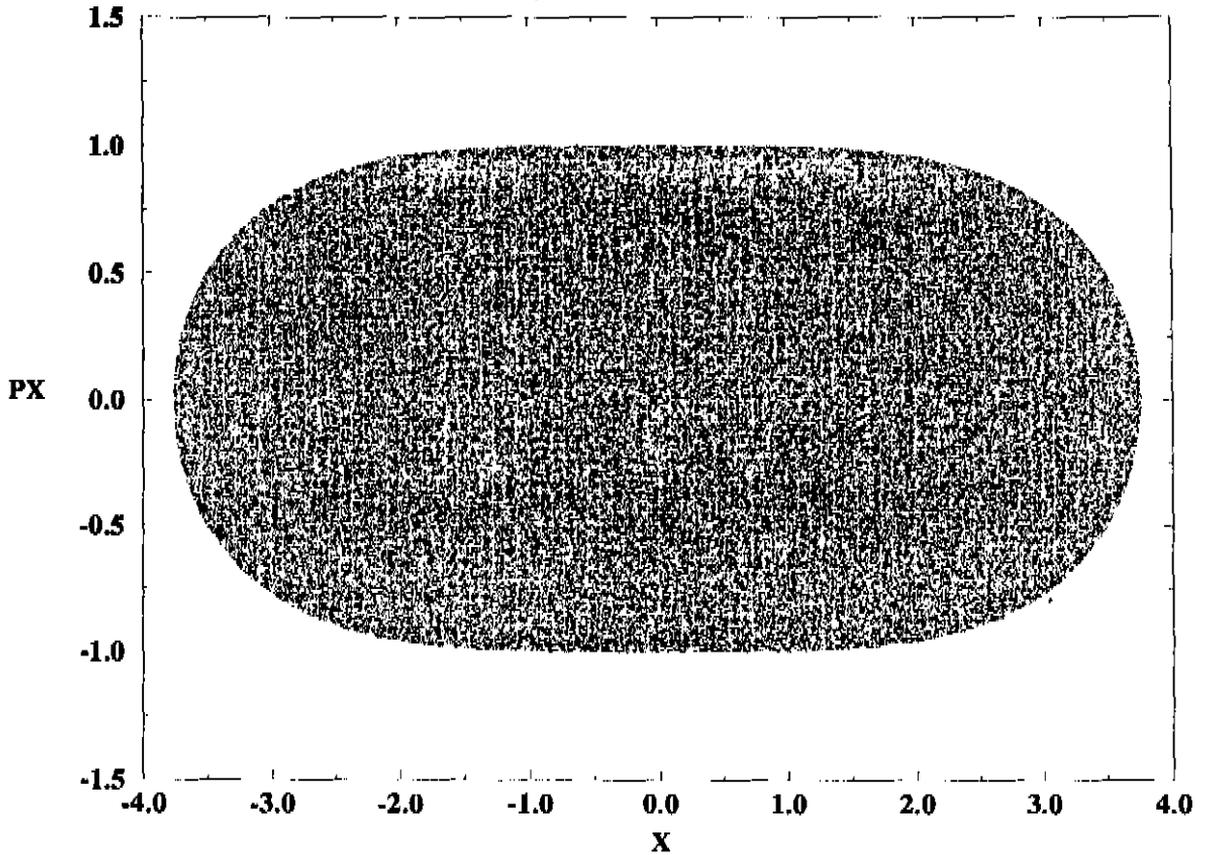


Figura 2.4: - Mapa do Potencial Quártico com  $\beta = 0.01$  e Energia= 0.50, aonde não encontramos nenhum vestígio macroscópico de regiões elípticas.

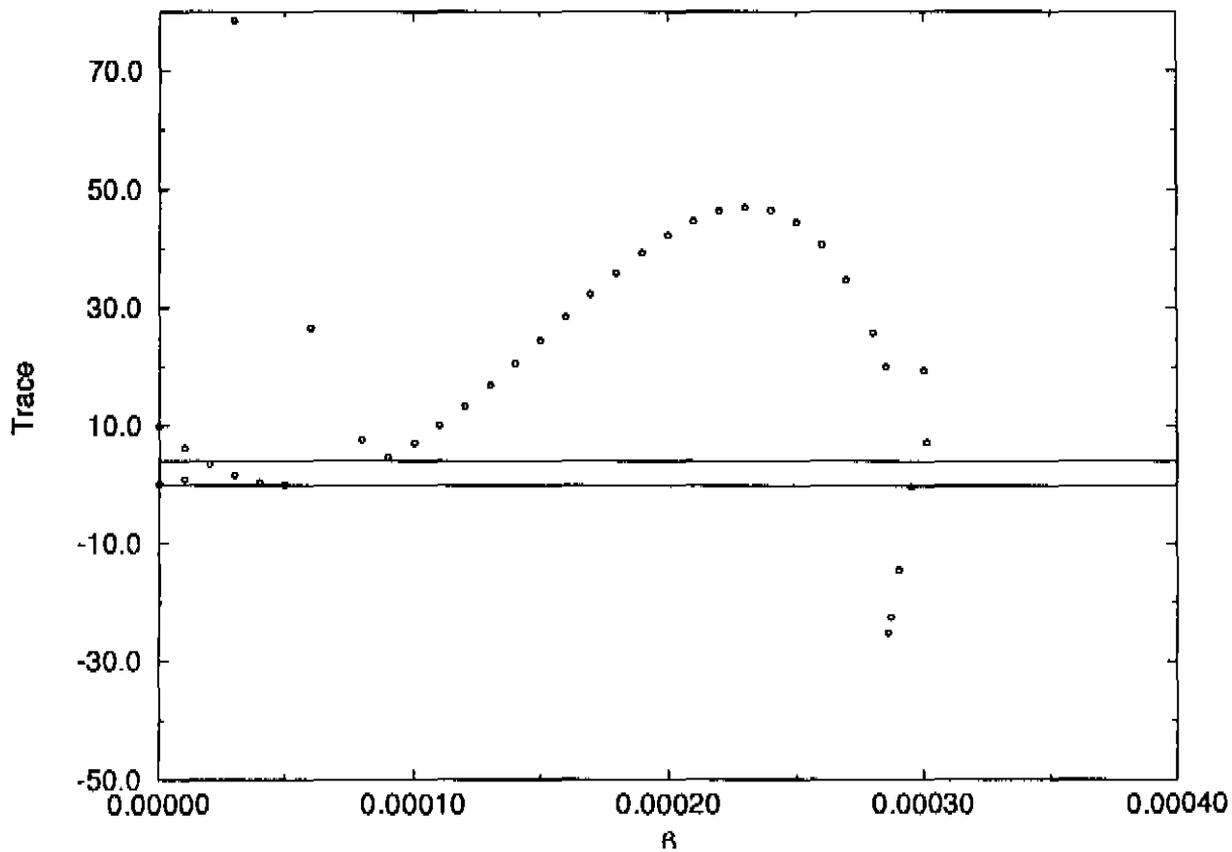


Figura 2.5: Diagrama de Bifurcações da família de órbitas que compõe a órbita estável em  $\beta = 0.000$ .

# Capítulo 3

## O Método

Nesse capítulo vamos analisar dois métodos de busca de Órbitas Periódicas ambos a partir de uma seção de Poincaré do sistema objeto de nosso estudo. A seção de Poincaré adotada para Hamiltonianas de dois graus de liberdade é uma superfície bidimensional parametrizada por  $x$  e  $p_x$ , aonde  $y = 0$  e  $p_y$  é positivo. Isso significa que uma órbita periódica pode ser associada a um único ponto de coordenadas  $(x, p_x)$  dessa seção. A área da seção em estudo estará limitada pelo valor de  $E$  e a linha limite será dada por  $p_x = \sqrt{2E - 2V(x, 0)}$ .

O primeiro método de busca é o que poderíamos denominar de "método das áreas", baseado na evolução temporal de uma pequena área de seção considerada. O segundo método, que foi o desenvolvido em nosso trabalho e que denominamos de "método das linhas", é baseado no comportamento dinâmico das vizinhanças das órbitas periódicas.

## 3.1 Método das Áreas

O princípio usado nesse método sai da própria definição de órbita periódica, ou seja, uma órbita periódica é aquela que saindo de um determinado ponto no espaço de fases, depois de um dado tempo, que é o seu período, retorna ao mesmo ponto.

Sabemos que as órbitas periódicas formam um conjunto denso, ou seja, tão próximo quanto se queira de um determinado ponto no espaço de fase, sempre encontraremos uma órbita periódica. Apesar de formarem um conjunto denso, será um conjunto de medida nula, isso significa que a probabilidade de encontrarmos aleatoriamente uma órbita periódica é zero.

Como é impossível encontrar apenas por tentativa esses pontos que pertencem às órbitas periódicas, porque seriam necessárias infinitas tentativas, o artifício que usaremos consiste em dividir a seção em pequenas áreas finitas e conseqüentemente em um número finito de áreas. Uma vez definidas essas áreas, iremos evoluí-las no tempo, até obtermos uma nova área, que se tiver uma intersecção com a área que a originou, indica a possibilidade da existência de uma órbita periódica nessa intersecção.

Para ilustrar o procedimento, recorreremos a um mapa genérico já estudado por nós em outro trabalho [2] denominado Mapa de Meyer, [18], definido como

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n - p_n \\ p_{n+1} = p_n + \varepsilon + (q_n - p_n)^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

Nesse mapa focalizamos as vizinhanças do ponto fixo hiperbólico, mas as considerações podem ser estendidas também ao ponto fixo elíptico.

Dado um conjunto de pontos qualquer, nas proximidades de um ponto hiperbólico, esse conjunto depois de mapeado, sofrerá uma contração na direção das variedades estáveis e um alongamento na direção das variedades instáveis gerando um novo conjunto. Como estamos tratando de um mapa conservativo, esses dois conjuntos terão necessariamente a mesma área.

Esses dois conjuntos, o original e o mapeado, poderão se apresentar sob o ponto de vista de soluções periódicas, em três casos distintos descritos a seguir.

1 - Os dois conjuntos não tem nenhuma área em comum e consequentemente, não existe a possibilidade de existência de nenhuma órbita periódica no interior da área original, com período igual ao do número de mapeamentos feitos. Isso está representado na fig. 3.1

2 - Os dois conjuntos tem uma área em comum, mas o ponto hiperbólico está fora da intersecção das áreas. Isso significa que, embora as figuras tenha uma área em comum, a área dentro da figura original que deu origem a área de intersecção na figura final, não coincidem e portanto nesse caso também não teremos a possibilidade de existência de uma órbita periódica. Isso pode ser observado na fig 3.2

3 - Os dois conjuntos tem uma área em comum, e o ponto hiperbólico dessa vez está dentro da intersecção das áreas, portanto temos uma

órbita periódica (que é o ponto hiperbólico). fig. 3.3

Tudo isso é apenas ilustrativo, porque sabemos onde está o ponto que representa a órbita periódica, mas no problema real, não temos essa informação, que é justamente o que procuramos. Além disso, no mapa, o período é medido pelo número de aplicações feitas enquanto que num sistema hamiltoniano, temos que evoluir no tempo cada ponto do perímetro da figura e cada um deles terá um período diferente para retornar à seção de corte (seção de Poincaré).

Outro problema que aparece é que num sistema muito instável, que é uma das características do sistema que escolhemos, o processo de contração e estiramento das figuras fica muito acentuado, especialmente quando evoluímos para tempos mais longos, ficando o resultado com características tipicamente unidimensionais em vez de bidimensionais que são as áreas de interseção procuradas.

Vamos mostrar como esse problema se manifesta, fazendo uma divisão da seção em estudo, em pequenos quadrados de lado 0.10. Com excessão das bordas, que terão figuras irregulares, o restante da área ficará mais fácil de ser tratado.

Como a seção de Poincaré é simétrica em relação ao eixo  $x$  e também em relação ao eixo  $p_x$ , usamos apenas um quarto da seção. Na figura 3.4 podemos ver que essa área foi dividida em quadrados. O perímetro desses quadrados é que serão evoluídos no tempo.

O tamanho desses quadrados bem como o número de pontos que compõe cada lado dos quadrados, é ajustado em função do período máximo que será

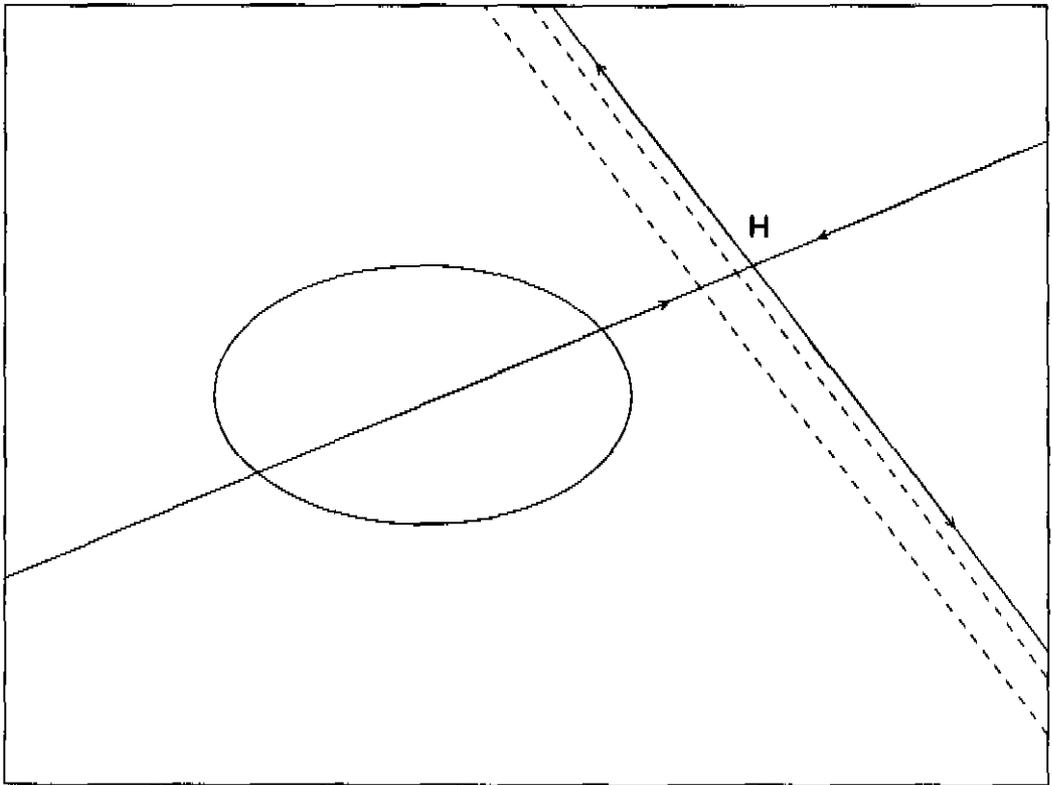


Figura 3.1: - Essa figura no plano  $x, p_x$  mostra uma elipse em linha cheia e o seu mapa em linha pontilhada, nas vizinhanças do ponto hiperbólico assinalado por H que é o cruzamento de duas linhas, um delas é a tangente da variedade estável e a outra da variedade instável. Nesse caso não existe intersecção entre a elipse e o seu mapa, portanto não existe no interior da elipse nenhuma órbita periódica de período 1. De fato o ponto H está fora da elipse.

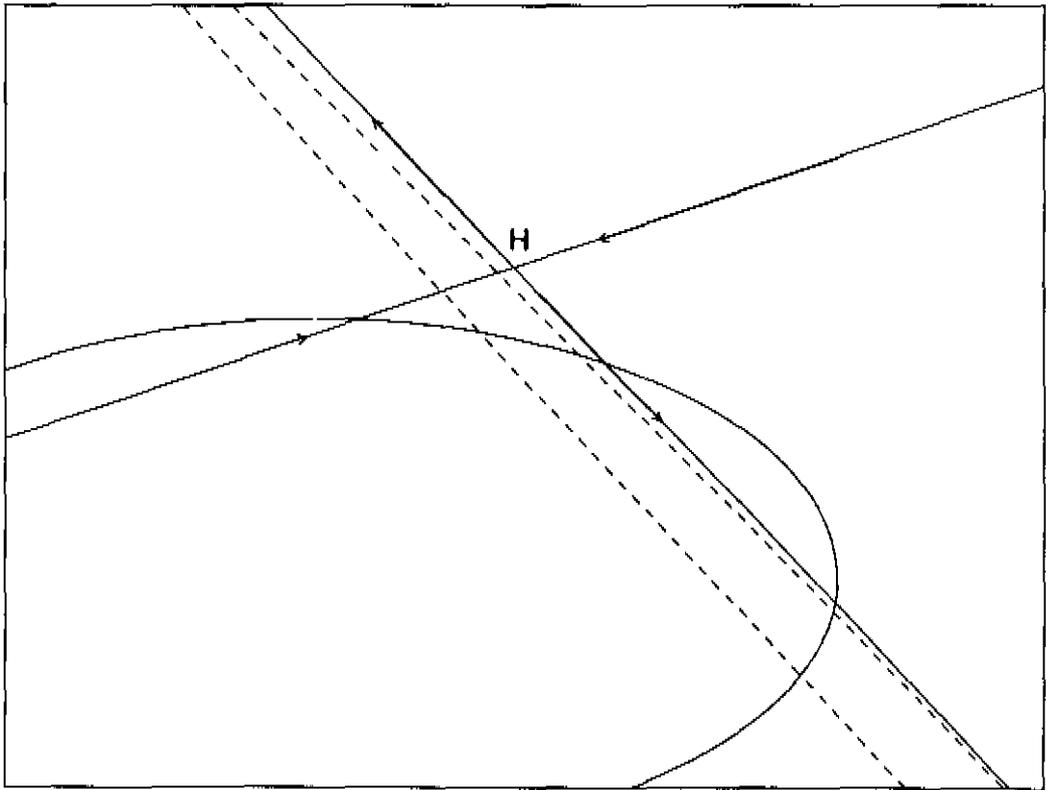


Figura 3.2: - Nessa figura já temos uma intersecção entre a elipse em linha cheia e o seu mapa, em linha pontilhada, porém o ponto hiperbólico  $H$ , no cruzamento das variedades estáveis e instáveis está fora da elipse. Portanto mesmo com intersecção nesse caso não temos nenhuma órbita periódica.

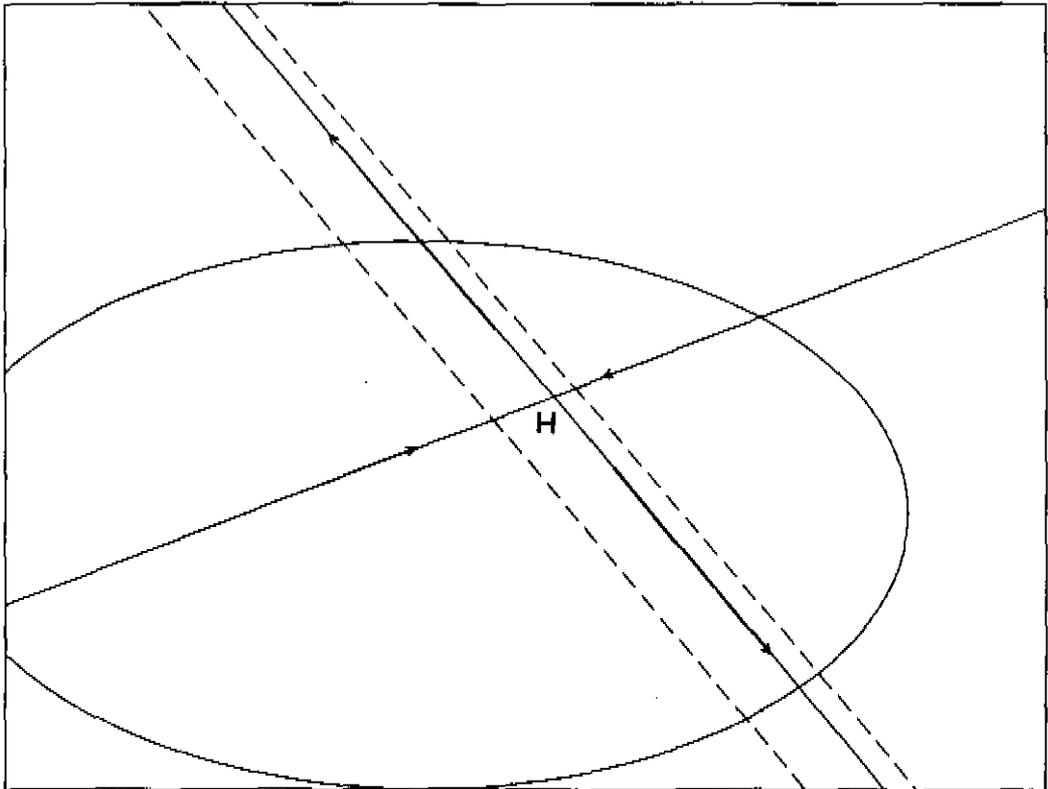


Figura 3.3: – Nesse caso, também temos uma intersecção entre a elipse em linha cheia e o seu mapa em linha pontilhada, mas neste caso, o ponto hiperbólico está dentro da elipse e conseqüentemente também dentro da figura mapeada e temos uma órbita periódica

### Quadrados para o Potencial Quartico

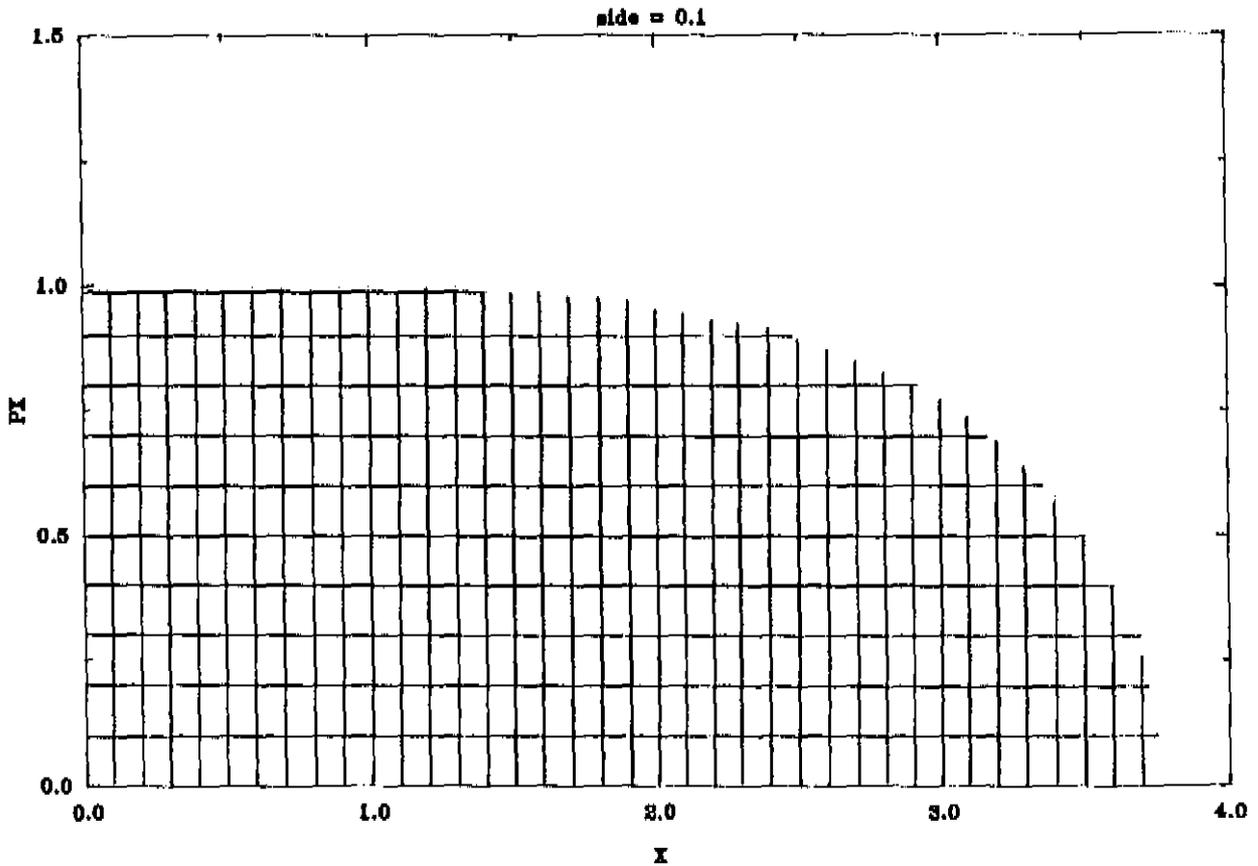


Figura 3.4: – Essa figura é um quarto da seção de Poincaré e mostra como a seção foi dividida em pequenos quadrados para se fazer a busca das órbitas periódicas

Mapa do Quadrado  
(0.0,0.0) (0.1,0.0) (0.1,0.1) (0.0,0.1)

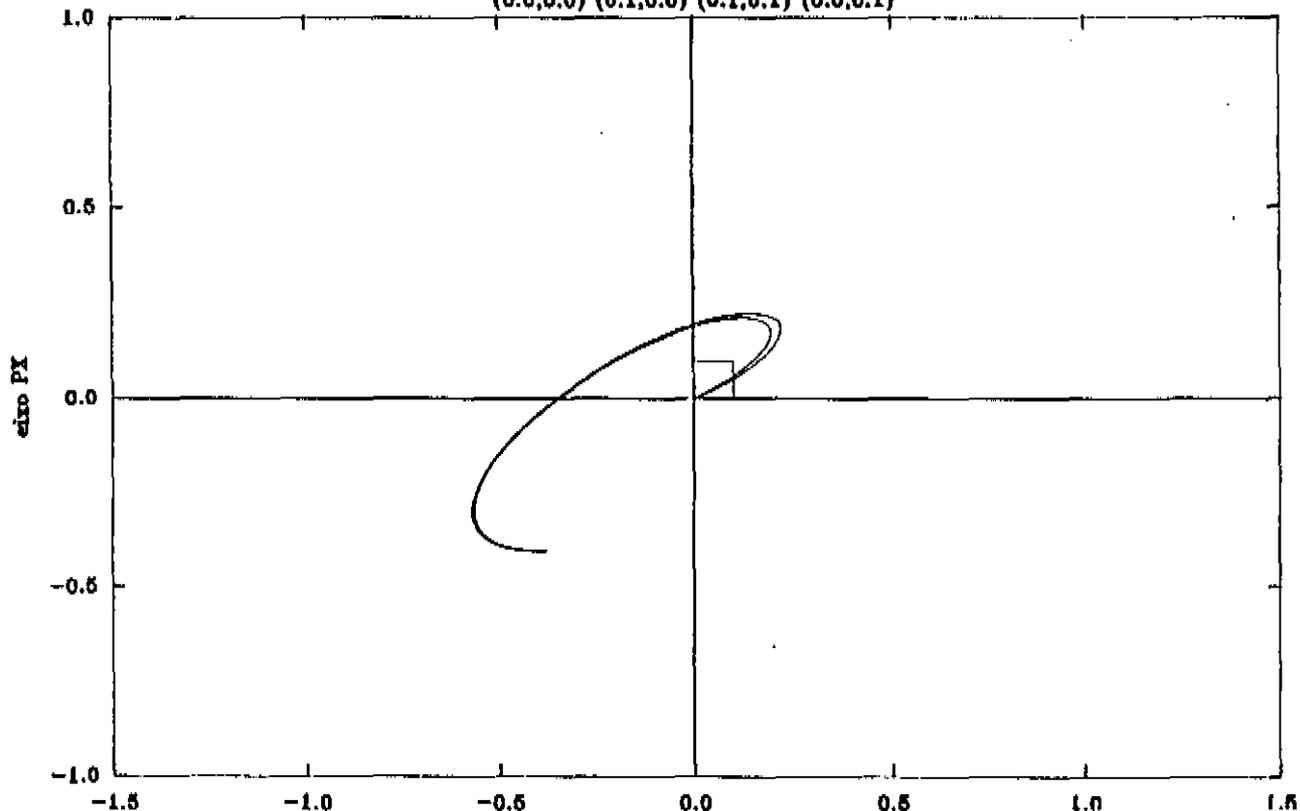


Figura 3.5: - Nessa figura vemos um único quadrado da grade mostrada na fig. 3.4 e seu respectivo mapa de apenas uma volta. Podemos observar que existe intersecção entre o quadrado e o seu mapa, Isso significa que existe a possibilidade de uma órbita periódica no interior do quadrado.

Mapa do Quadrado  
(0.1,0.0) (0.2,0.0) (0.2,0.1) (0.1,0.1)

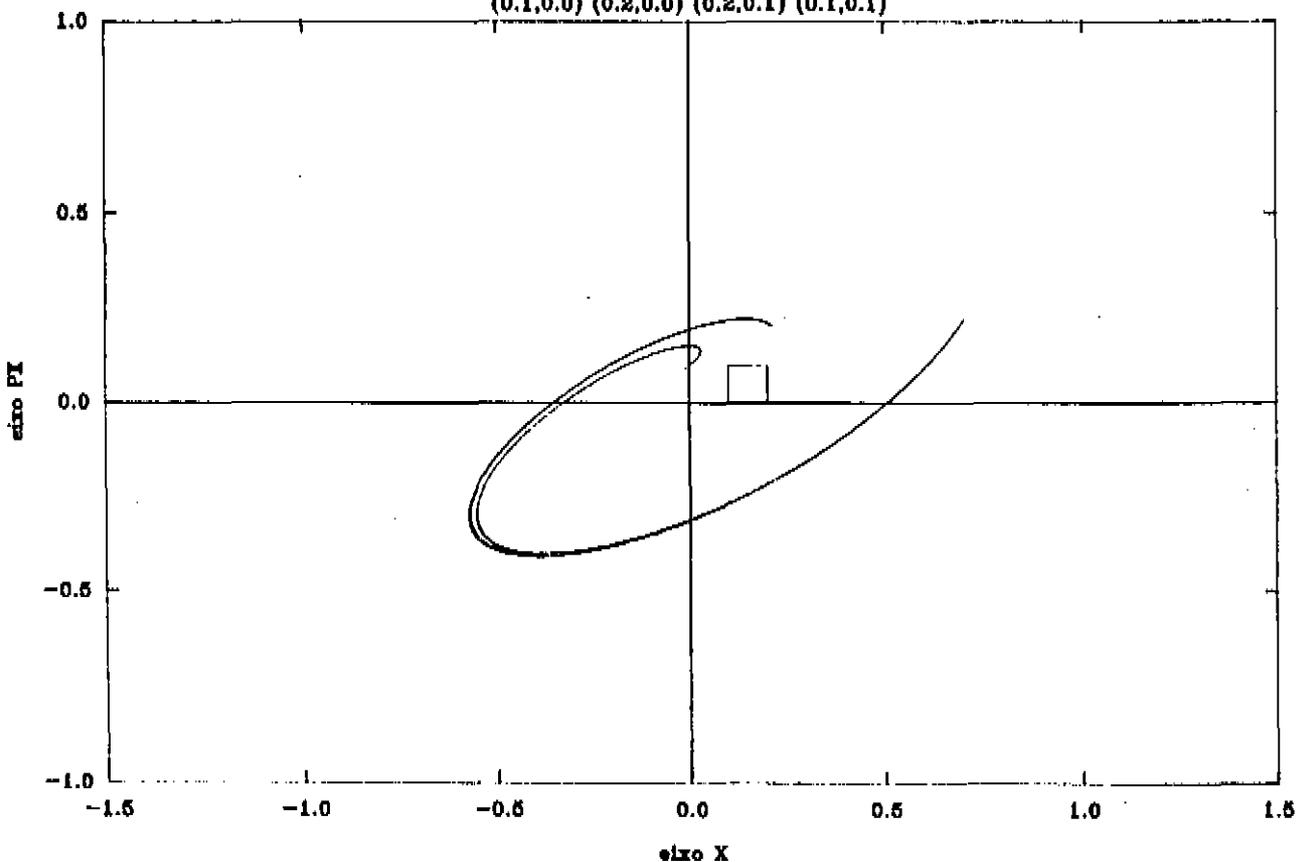


Figura 3.6: - Essa outra figura mostra um outro quadrado da grade da fig. 3.4 mas nesse caso não existe nenhuma intersecção entre o quadrado e seu respectivo mapa, não havendo possibilidade de nenhuma órbita periódica no interior do quadrado. Isso para apenas uma volta.

rastreado bem como em função da região que apresentar a maior dispersão possível de pontos durante a evolução temporal, ou seja, aonde o expoente de Lyapunov for maior.

Adotamos a terminologia de "número de voltas" sempre que nos referimos a evolução temporal de uma figura, até que os pontos que compõem essa figura cruzem novamente a seção de superfície. Portanto uma volta significará que o quadrado ou qualquer outro conjunto de pontos saídos da seção, serão marcados na primeira interseção com a seção de Poincaré, duas voltas, a segunda interseção e assim por diante.

A evolução do quadrado de coordenadas  $(0,0,0,0)$ ,  $(0,1,0,0)$ ,  $(0,1,0,1)$  e  $(0,0,0,1)$  é mostrada na figura 3.5, onde podemos ver o caso em que a nova figura gerada a partir do quadrado, intercepta a figura original, significando a possibilidade de existência de uma órbita periódica.

Ao contrário do caso anterior, na figura 3.6, um outro quadrado depois de uma volta, produz uma figura que não intercepta o quadrado original, ou seja, para esse número de voltas, não existe a possibilidade de existência de nenhuma órbita periódica dentro do perímetro do quadrado.

Quando aumentamos o número de voltas de um quadrado original, a complexidade da figura resultante aumenta exponencialmente, tornando-se quase que uma figura unidimensional, que se retorce por toda a região permitida na seção. Devemos lembrar que independentemente da complexidade da figura resultante, a sua área total continuará a mesma que do quadrado original. A figura 3.7 ilustra essa complexidade em apenas 3 voltas no espaço de fases.

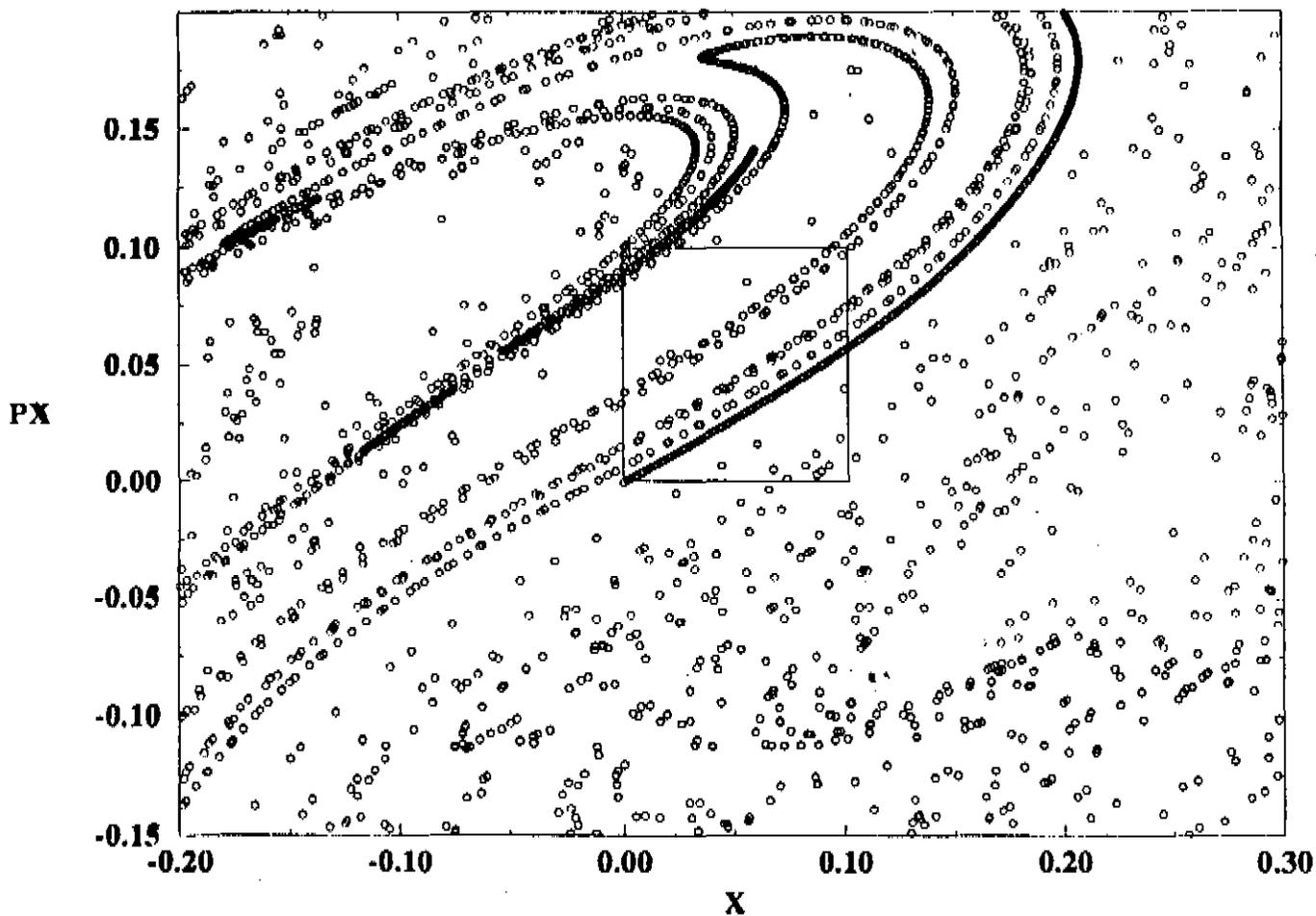


Figura 3.7: - Mapa de 3 voltas do quadrado mostrado na fig. 3.4, evidencia a complexidade crescente dos dados gráficos obtidos e conseqüentemente a complexidade na sua manipulação.

Uma série de artifícios costumam ser adotados para viabilizar esse método em termos computacionais: trabalha-se com o perímetro em vez da área propriamente dita e frequentemente, propaga-se o quadrado tanto no sentido positivo do tempo como no sentido negativo dele, para se tentar uma melhor precisão da área de interseção resultante, que foi a técnica adotada por D. Provost [20]. Mesmo com tudo isto, a área obtida como promissora, ainda não é uma órbita periódica, podendo nem mesmo existir uma na área encontrada. Precisamos então de um passo a mais, que de fato é simplesmente uma adaptação do método de Newton, para a convergência de órbitas periódicas, desenvolvido por M. Baranger e K. R. T. Davies [3]. Com isso concluímos o método.

## 3.2 Método das Linhas

Diferentemente do método anterior, aonde a seção é dividida em áreas, esse método faz um grid de linhas ao longo da seção, e evolui temporalmente essas linhas tomando as interseções dessas linhas como uma primeira aproximação de órbitas periódicas.

Da mesma forma que no método anterior, fizemos um primeiro estudo do comportamento das vizinhanças de um ponto fixo hiperbólico, usando o mapa de Meyer [18]. Para isso, primeiramente traçamos uma reta que passa por cima do ponto hiperbólico e colocamos o mapa dessa reta na mesma figura. A interseção da reta com o seu mapa nesse caso, nos dá exatamente o ponto hiperbólico, ou seja, o ponto da órbita periódica. A figura 3.8 mostra exatamente essa situação.

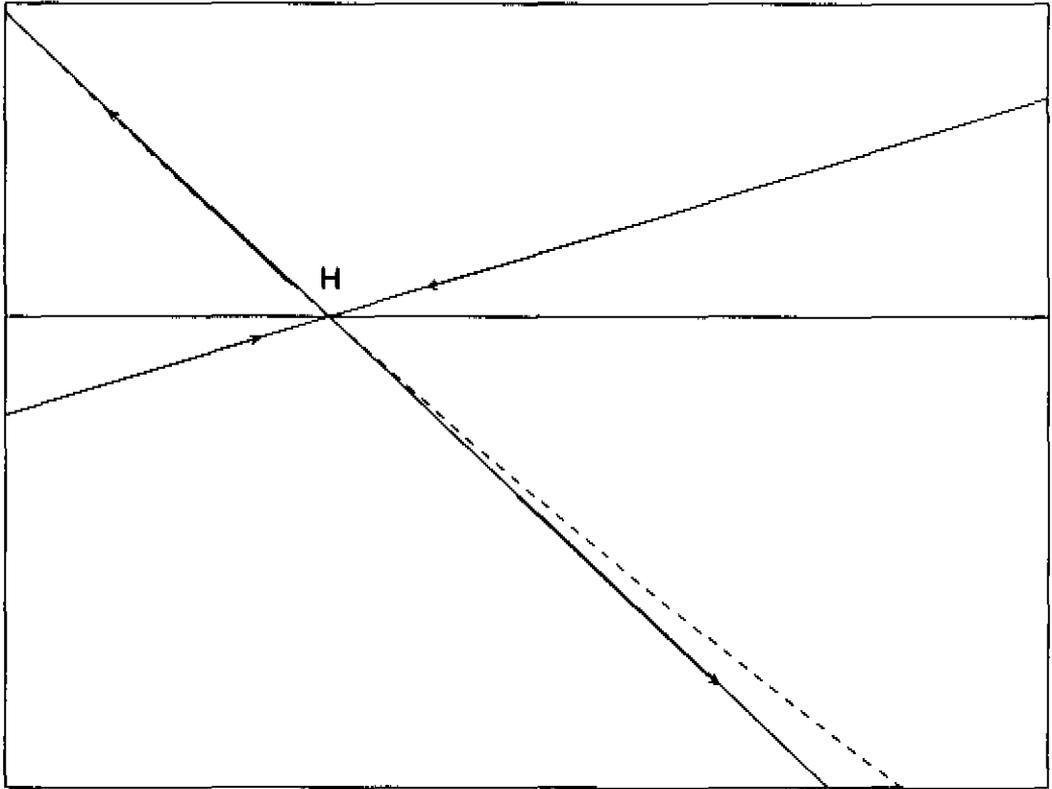


Figura 3.8: – As duas retas que tem as setas são as variedades estáveis e instáveis e a sua intersecção é o ponto hiperbólico. A reta horizontal é que é mapeada na linha pontilhada e se intercepta no próprio ponto hiperbólico.

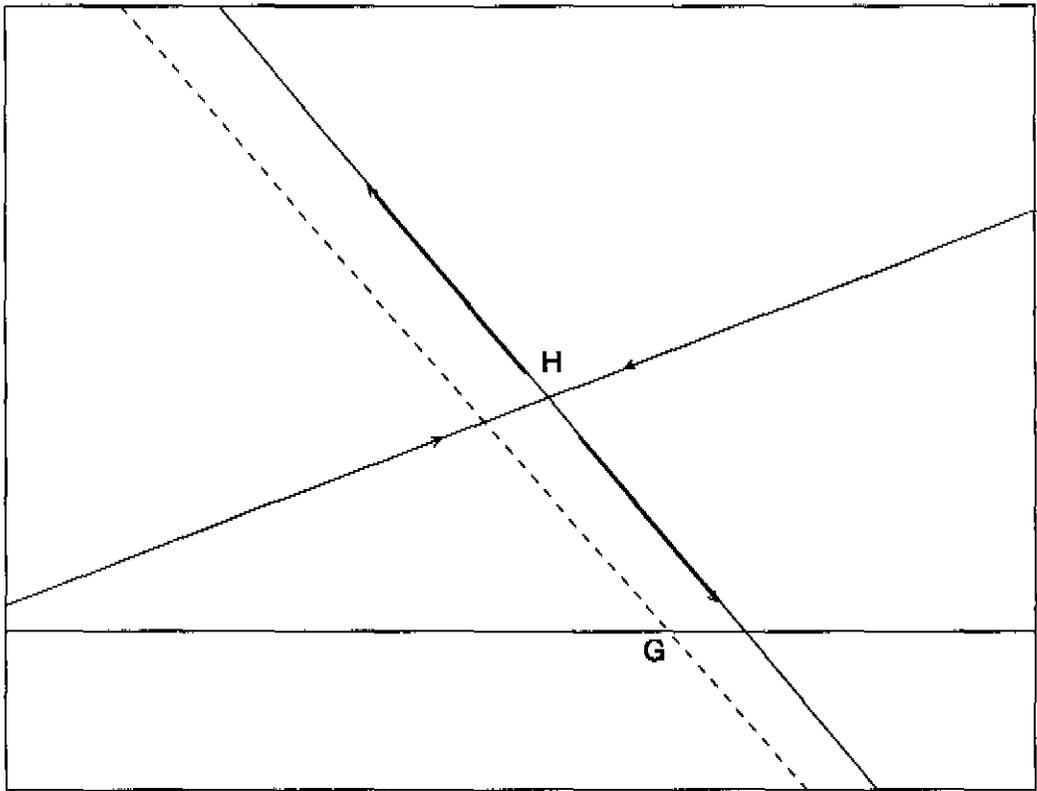


Figura 3.9: - A reta horizontal não passa em cima do ponto hiperbólico, mas sim nas suas vizinhanças. Continua existindo uma intersecção entre a reta (linha cheia) e o seu mapa (linha pontilhada), representada pela letra  $G$ , que não é um ponto periódico, mas sim uma espécie de imagem do ponto periódico  $H$ .

Tudo isso também se aplica ao sistema hamiltoniano que estamos usando, porém nesse caso a complexidade é muito maior pois temos infinitos pontos hiperbólicos dentro do emaranhado homoclínico que preenche o espaço de fases. Por isso mais um fator será necessário nas nossas considerações, que é o espaçamento entre as linhas do grid. Esse espaçamento será o responsável pelo limite de instabilidade do conjunto de órbitas obtidas.

Diante disso temos duas situações distintas, se a reta teste que estamos usando passar exatamente em cima de uma órbita periódica, podemos encontrar essa órbita apenas pela sua interseção com a linha do mapa. Como dissemos num tópico atrás, a probabilidade de estarmos em cima de uma órbita periódica é zero, mas temos um caso especial em que isso não se aplica: é quando estamos em cima de uma linha de simetria. Se houver alguma órbita simétrica, ela obrigatoriamente estará sobre esta linha e portanto pode ser encontrada com esse método.

Do ponto de vista numérico não temos, de fato, uma reta. Temos uma sequência de pontos em linha reta com um certo espaçamento. Devemos portanto adotar um espaçamento tal que seja viável diante do equipamento e tempo disponíveis. Uma vez detetado um cruzamento entre a linha original e o seu mapa (independentemente do número de voltas que foram dadas no espaço de fases), voltamos apenas o ponto anterior ao cruzamento e o imediatamente posterior ao cruzamento e entre eles diminuimos o espaçamento, repetindo o processo quantas vezes for necessário, até a precisão desejada. Não será necessário nenhum tipo de convergência extra para as órbitas periódicas sobre as linhas de simetria além disso.

Como dissemos acima, o outro caso, que é o genérico e não o particular das linhas de simetria, não irá aproximar sucessivamente o ponto da reta com o cruzamento do seu mapa e nesse caso, teremos apenas uma boa aproximação para a topologia da órbita periódica desejada, que está nas proximidades. Dessa forma o ponto de origem do ponto de cruzamento será usado como ponto tentativa para a convergência de uma órbita periódica, aí sim, usando o método de Newton desenvolvido por M. Baranger e K. T. R. Davies [3], que se encarregará de fazer a convergência até a precisão desejada.

# Capítulo 4

## Resultados

Nesse capítulo vamos apresentar os resultados conseguidos com o método da linha que desenvolvemos e a partir da análise desses dados pretendemos estimar a qualidade e o alcance do método em si.

Primeiramente devemos realçar que o total de órbitas encontradas, está diretamente ligado ao passo do grid adotado. No nosso caso usamos um grid total de 200 linhas ( o que equivale a um espaçamento de 0.005 no eixo  $p_x$ ). O outro fator limitante é obviamente o período, que no nosso caso se limitou a 70 unidades de tempo.

A instabilidade das órbitas é dada pelo valor do expoente  $\mu$  do traço da Matriz de Monodromia, definido como  $TrM = e^\mu + e^{-\mu} + 2$ . Essa instabilidade estende de 0 a cerca de 30 nas órbitas encontradas.

Como as órbitas quase sempre atravessam a seção mais de uma vez, é natural que o método encontre esses diferentes pontos para uma mesma órbita, além de encontrarmos a mesma órbita em diferentes posições possíveis de simetria. Por isso o nosso conjunto total de órbitas com repetições foi de aproximadamente 4500 órbitas, das quais cerca de 850 órbitas diferentes. Entre elas duas órbitas estáveis, que não constam de nenhum trabalho anterior e que serão comentadas na próxima seção.

## 4.1 Órbitas Estáveis

Durante o processo de rastreamento das órbitas periódicas, encontramos duas órbitas estáveis, o que por si só, demonstra que o método desenvolvido para encontrar órbitas hiperbólicas, também consegue detectar, ainda mais facilmente, órbitas elípticas, pois as vizinhanças dos pontos elípticos são estáveis.

As órbitas encontradas são uma libração e uma rotação, mostradas nas fig. 4.1 e 4.2 respectivamente. A estabilidade pode ser observada pelos autovalores complexos da matriz de monodromia ou simplesmente pela observação direta do comportamento das vizinhanças da órbita na seção de Poincaré, aonde podemos observar as ilhas elípticas mostradas nas fig. 4.3 e 4.4.

Próximo a essa libração estável encontramos também uma rotação instável, com período equivalente ao triplo do período da libração. Essa rotação foi destacada por dois motivos; primeiramente por estar numa região limítrofe entre a região de estabilidade e a região de instabilidade, portanto de difícil

convergência; em segundo lugar por ser a órbita de menor instabilidade encontrada por nós. É óbvio que quanto mais próximos estivermos de regiões estáveis, menos instáveis serão as nossas órbitas e sempre encontraremos uma órbita menos instável, porém sempre com períodos crescentes. No nosso caso, para períodos menores que 70 unidades de tempo, a menos instável que encontramos foi essa rotação, que de fato é o resultado de uma triplicação de período da libração estável num valor de  $\beta > 0.01$ , conforme podemos observar na fig 4.4

## 4.2 Órbitas de mesma topologia

Um dos pontos importantes para destacarmos é a existência de órbitas de mesma topologia, porém de fato totalmente distintas. Essas órbitas possuem o mesmo período, ação e aparentemente a mesma projeção no espaço de configurações, dentro dos limites de precisão adotados, porém com os traços da matriz de monodromia bastante distintos. Um conjunto de órbitas foi escolhido como exemplo desse tipo de comportamento, típico de regiões instáveis com proliferação de bifurcações.

Essas órbitas estão na fig. 4.5, aonde não podemos distinguir as 3 órbitas presentes, e apenas uma ampliação da região central fig. 4.6 pode nos mostrar como as diferentes órbitas se apresentam no espaço de configurações.

Esse fato nos levou a colocar em nosso conjunto de dados o  $\text{Tr } M$  além do valor da instabilidade  $\mu$ , pois frequentemente encontramos órbitas com período

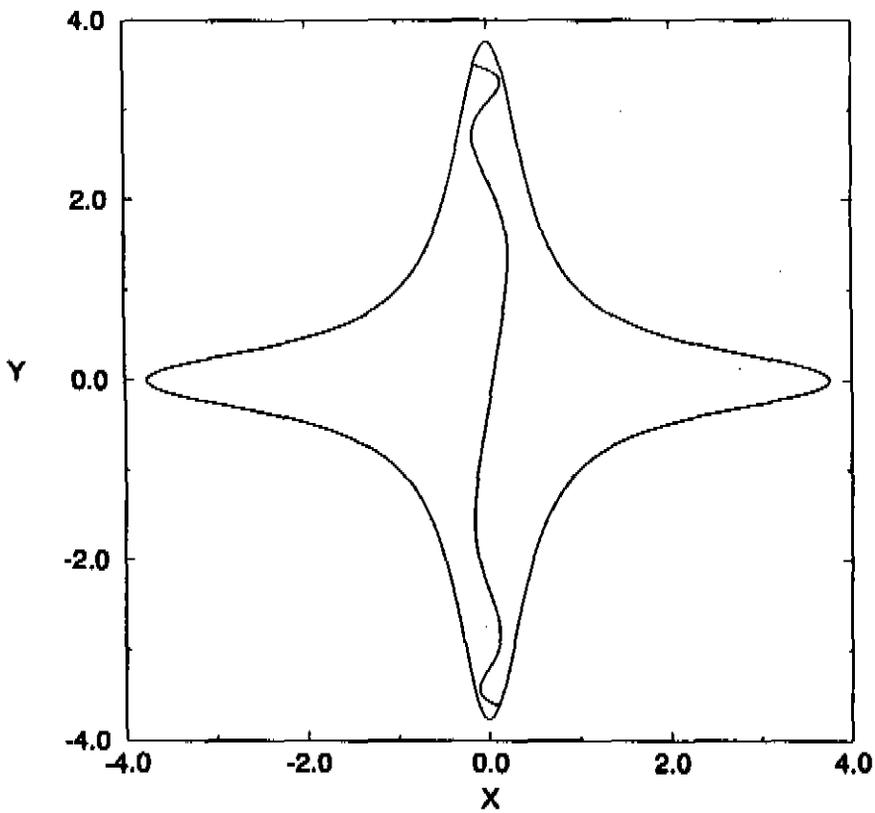


Figura 4.1: Plano  $x,y$  aonde podemos observar a libração estável

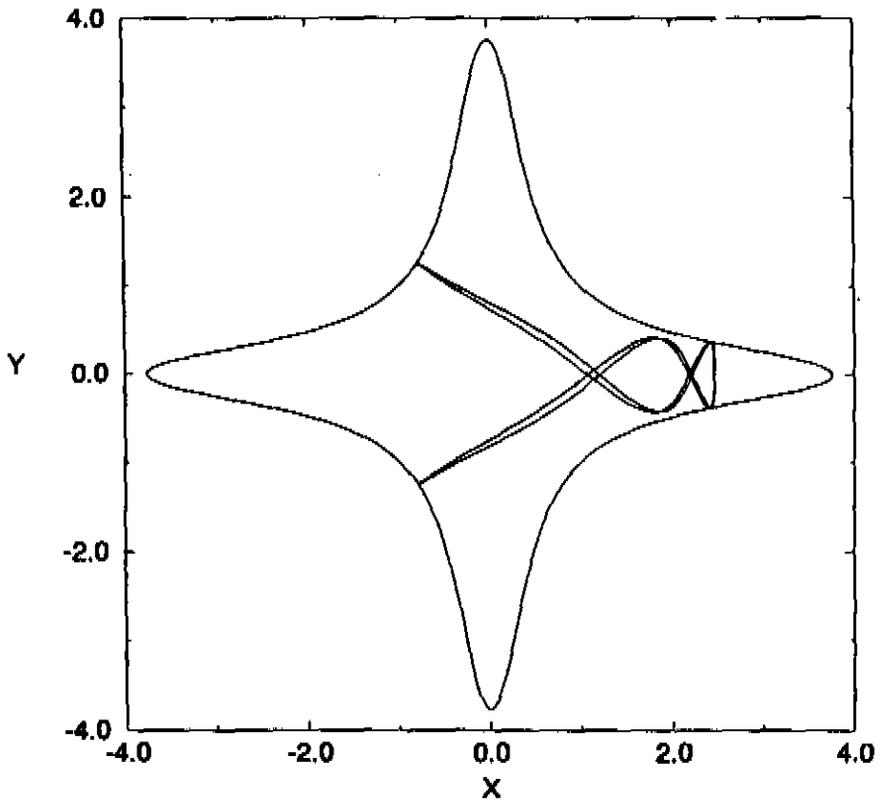


Figura 4.2: Plano  $x,y$  aonde podemos ver a rotação estável

## Libração Estável e uma Rotação Instável

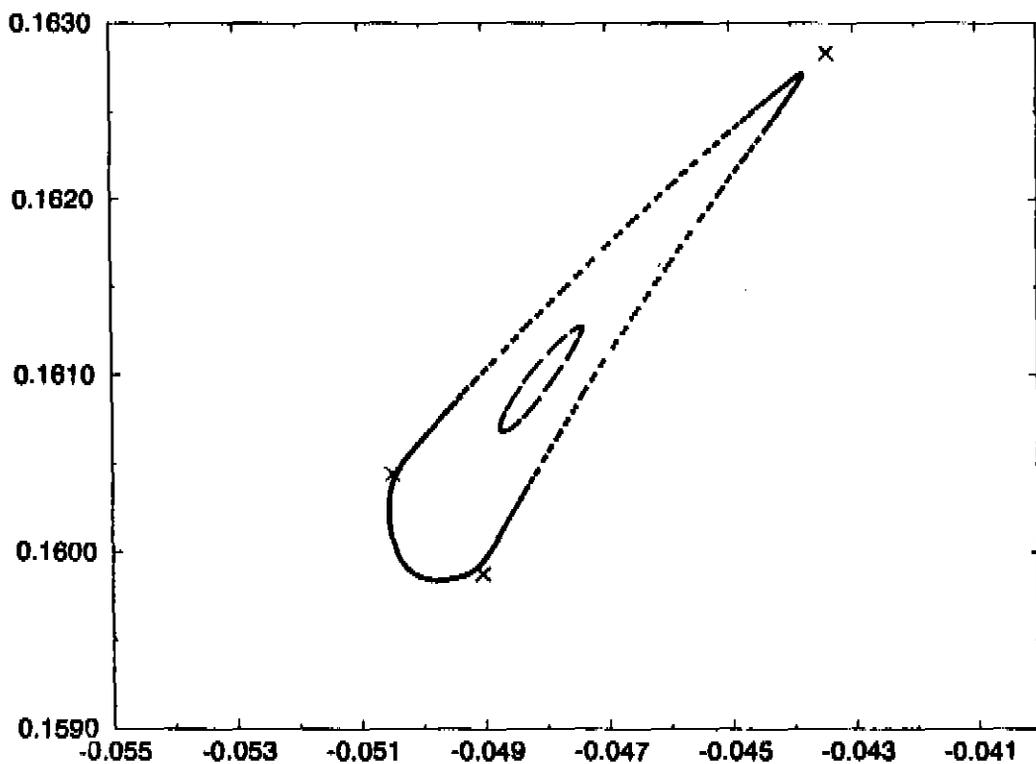


Figura 4.3: Plano  $x, px$  com destaque para a ilha estável ao redor da libração estável. Nessa figura incluímos também a rotação ao redor da libração, na região limite de estabilidade.

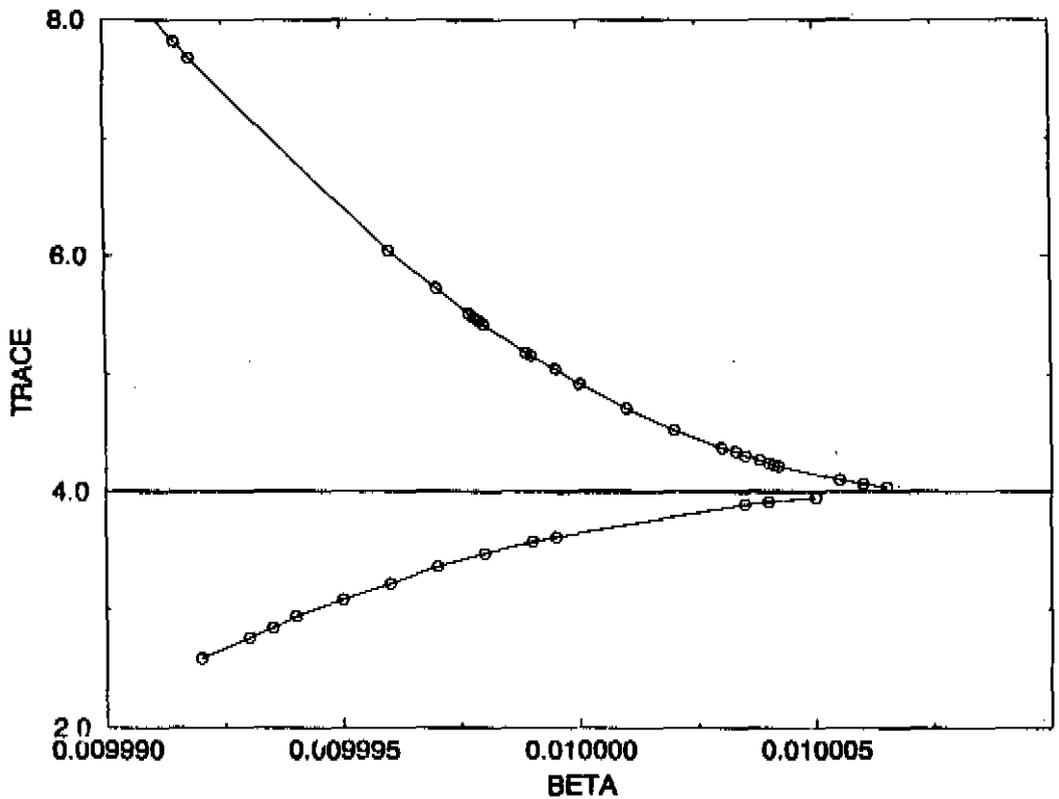


Figura 4.4: Traço da matriz de monodromia em função de  $\beta$ , aonde podemos ver na linha inferior, a evolução do traço da libração estável e na linha superior, o traço da rotação instável e as duas linhas se originando no valor 4 de traço, que é o valor em que ocorre a bifurcação (no caso uma triplicação).

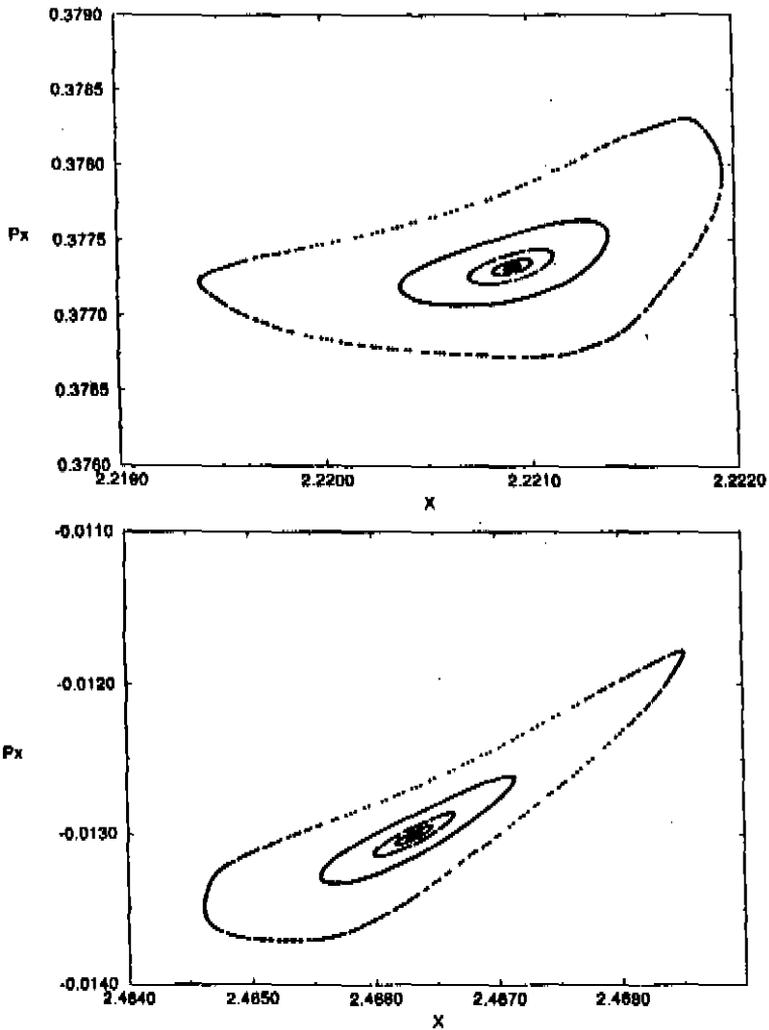


Figura 4.5: Plano  $x, p_x$  com destaque para duas das 5 ilhas estáveis ao redor dos pontos de intersecção da rotação estável com a seção de Poincaré

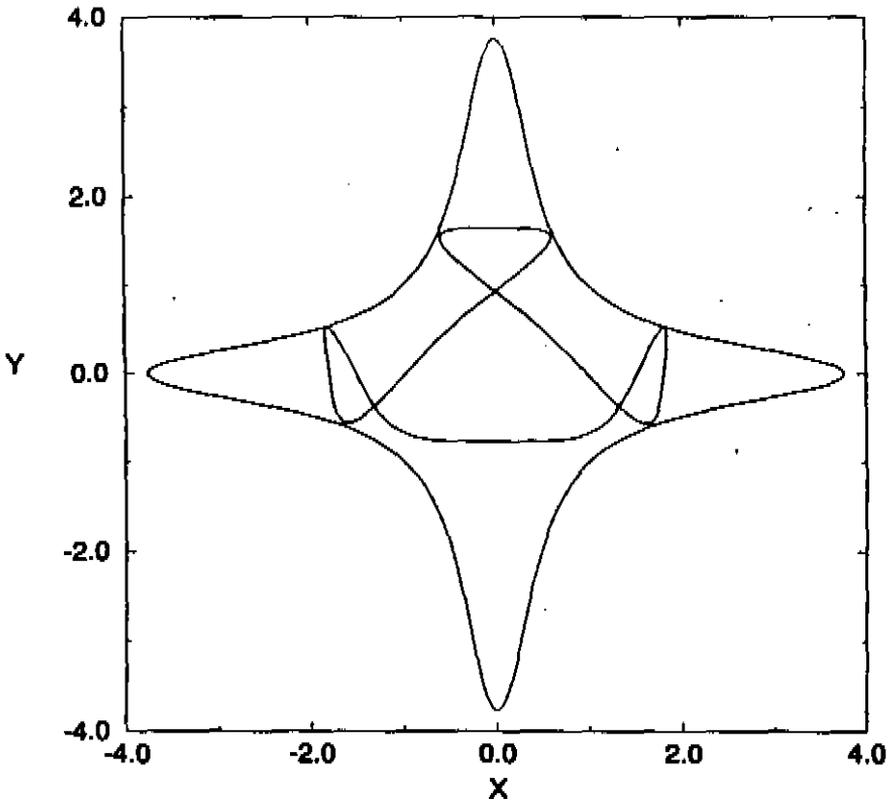


Figura 4.6: Plano x,y com as 3 órbitas sobrepostas, aparentemente todas idênticas

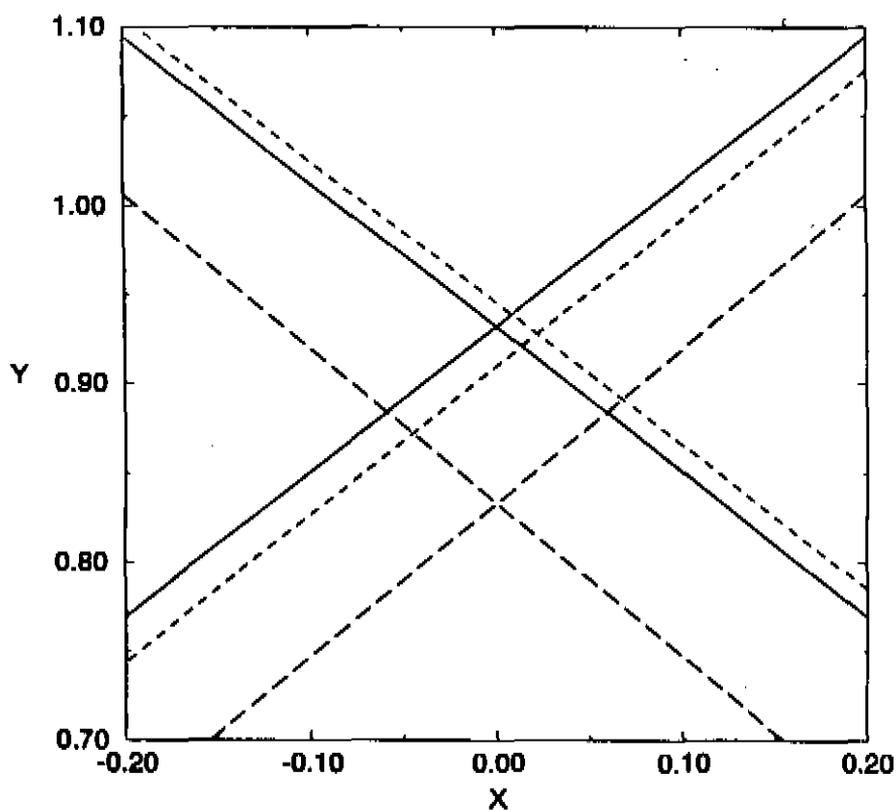


Figura 4.7: Plano  $x,y$  mostrando uma ampliação da figura anterior, aonde de fato temos 3 órbitas distintas. A linha cheia é a órbita que tem traço =  $+21.36$ , a linha com tracejado grande é a órbita com traço =  $-29.39$  e a linha com tracejado pequeno é a órbita com traço =  $+434.48$ . Como vemos, todas as três órbitas são distintas, embora muito parecidas.

e instabilidade muito próximos, porém um com traço positivo e outro com traço negativo.

### 4.3 Órbitas de simetrias especiais

Chamamos de órbitas de simetrias especiais, aquelas que se encontram sobre uma dada linha de simetria e como vimos nas seções anteriores, permitem a sua determinação diretamente pelo nosso método, sem o auxílio de outras técnicas de convergência. Como exemplo de aplicação, vamos mostrar o mapa da linha  $p_x = 0$  da seção de Poincaré (fig. 4.8 ) aonde pode-se observar um grande número de intersecções com o eixo  $x$ . Somente seis dessas intersecções, no entanto são órbitas que estão sobre a linha de simetria, três são librações instáveis simétricas e três são rotações instáveis simétricas. Essas órbitas estão na fig. 4.9.

### 4.4 O Índice de Maslov

Não podemos deixar de tratar do cálculo do índice de Maslov, que pode ser obtido de muitas formas, a que nos pareceu mais interessante é a tratada por B. Eckhardt [10].

Em linhas gerais, mostra-se que a matriz de monodromia, pode ser escrita como um produto de duas matrizes simpléticas, uma simétrica ( $T$ ) e uma ortogonal ( $R$ ) [15]. Na forma de blocos de matrizes de  $2 \times 2$  temos:

# Mapa do Potencial Quartico

eixo X com uma iteraçao

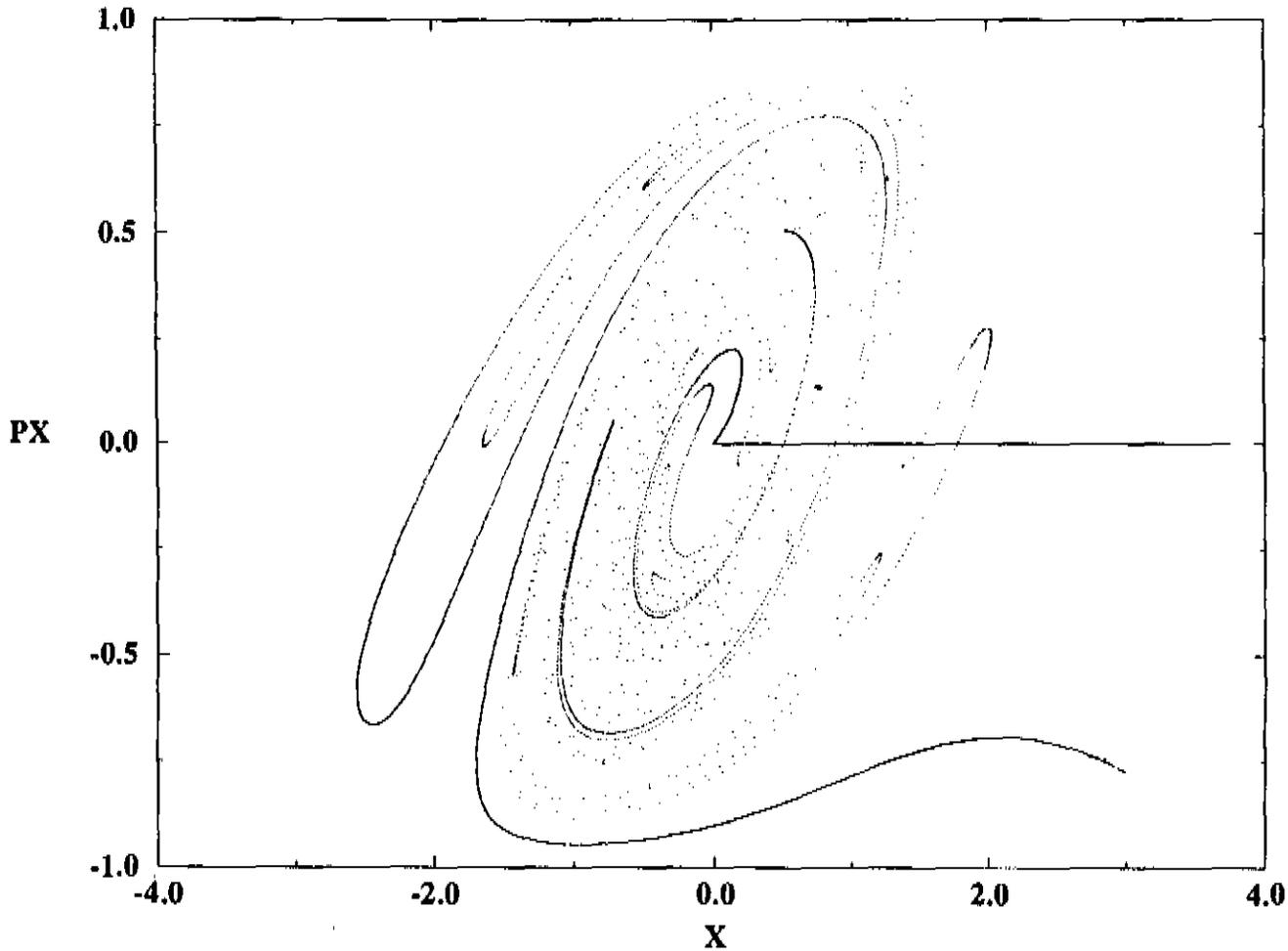


Figura 4.8: Mapa da linha  $p_x = 0$  mostrando as muitas intersecções com o eixo  $x$  e o grande número de possibilidades de existência de órbitas periódicas, porém somente seis delas estão de fato sobre o eixo.

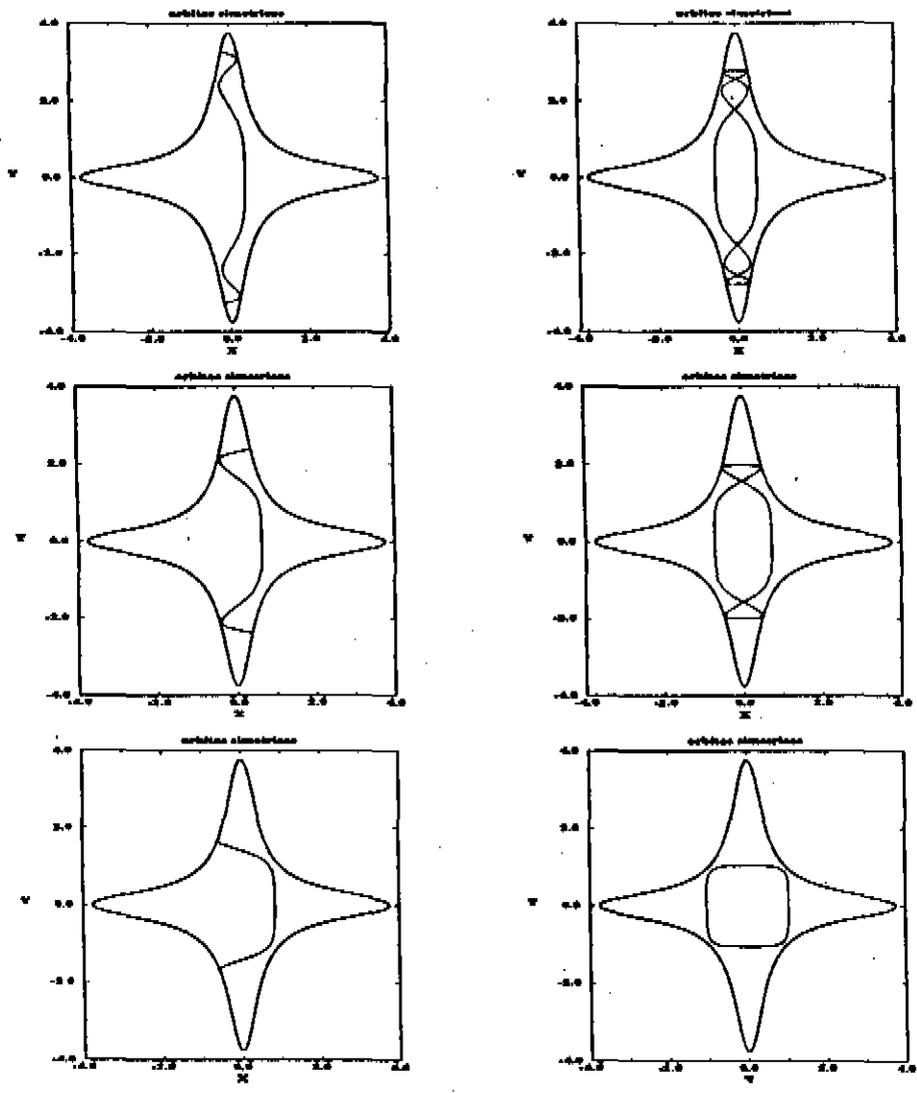


Figura 4.9: Essas são as seis órbitas que estão sobre o eixo  $x$ , para apenas uma única volta no espaço de fases.

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2^+ & T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ -R_2 & R_1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

e o número de rotação está contido na matriz ortogonal ( $R$ ). Portanto podemos escrever  $\det(R_1 + iR_2) = \exp(2\pi i\phi)$ , que é exatamente a fase desejada. Na prática porém, essa decomposição de  $M$  como produto de  $TR$  não é necessária; podemos escrever diretamente

$$\det(A + iB) = e^{2\pi i\phi} \det(T_1) \det(I + iT_1^{-1}T_2) \quad (4.2)$$

e a fase total será

$$\psi = \arg \det(A + iB) = 2\pi(\phi + \nu) \quad (4.3)$$

Pode-se mostrar que  $\nu$  sempre estará entre 0 e  $\frac{1}{2}$  [16], o que significa que teremos o valor da parte inteira de  $\frac{\psi}{2\pi}$  como o valor exato que desejamos ou aumentado de 1. No entanto, como sabemos que o valor do índice de maslov é par para  $\text{tr}(M) > 0$  e ímpar para  $\text{tr}(M) < 0$  [8], sempre saberemos se temos o valor correto ou se ele está acrescido de 1 por causa de  $\nu$ .

## 4.5 Órbitas genéricas

Quando tratamos de órbitas genéricas, convém lembrar que apesar do grande número de librações e também do grande número de rotações simétricas, as rotações instáveis assimétricas é que dominam o conjunto de órbitas periódicas, especialmente quando aumentamos o intervalo de período e instabilidade.

A seguir vamos mostrar os dados das 100 primeiras órbitas instáveis do total de 850, em ordem crescente de período, em forma de tabela.

A tabela mostra na primeira coluna a numeração das órbitas em ordem crescente de período. Na coluna seguinte temos o valor do período das órbitas. A coluna seguinte nos dá o valor da ação clássica correspondente. A coluna seguinte nos dá o índice de instabilidade  $\mu$ . Depois temos o traço da matriz de monodromia, lembrando que se ele for  $> 4$ , teremos uma órbita instável direta, se for  $< 0$  teremos uma órbita instável indireta e se estiver entre 0 e 4, teremos uma órbita estável, que não está listada nesta tabela. Na coluna seguinte colocamos o índice de Maslov correspondente e finalmente na última coluna o tipo de órbita (libração ou rotação) e a sua multiplicidade no que diz respeito às simetrias. Essas multiplicidades podem ser 1,2,4 ou 8, conforme podemos ver nos exemplos das figuras 4.10 a 4.12:

Logo a seguir da tabela, vamos mostrar as 42 primeiras órbitas no espaço de configurações, obedecendo a mesma ordem da tabela.

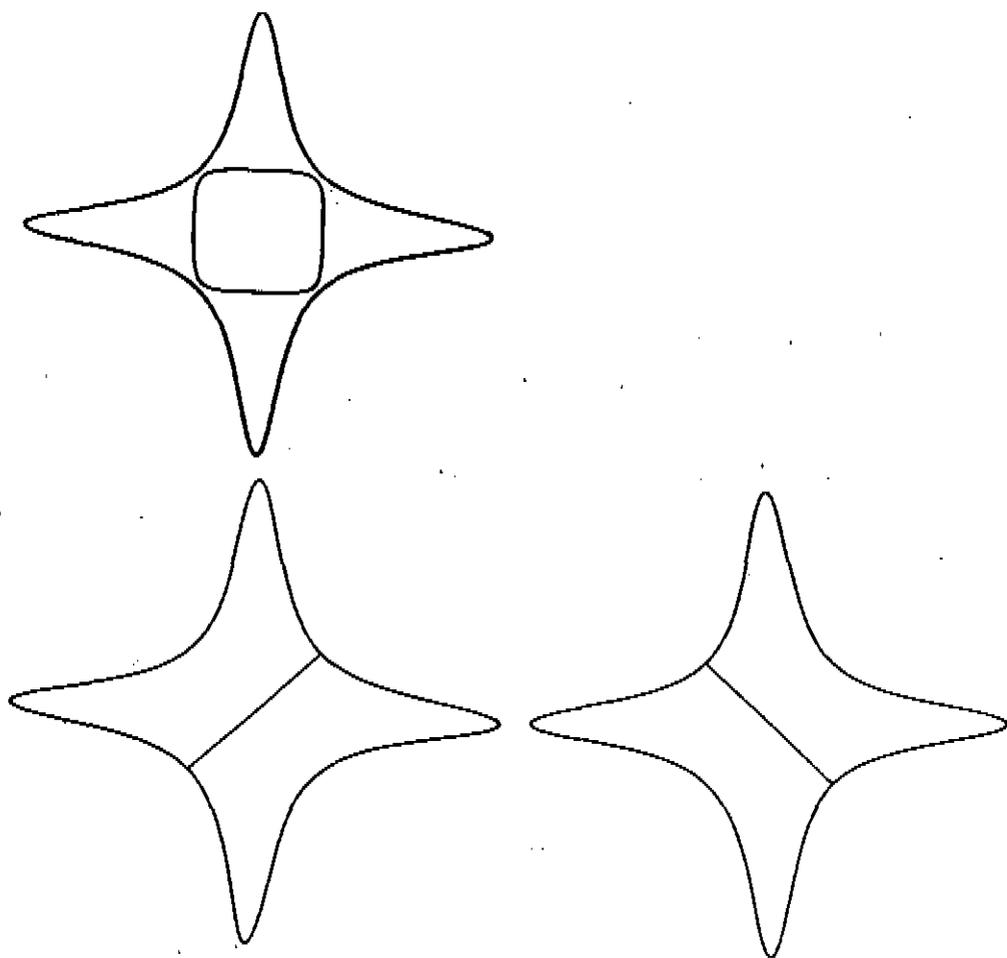


Figura 4.10: A figura superior tem multiplicidade 1, enquanto que nas duas figuras abaixo temos um exemplo de multiplicidade 2.

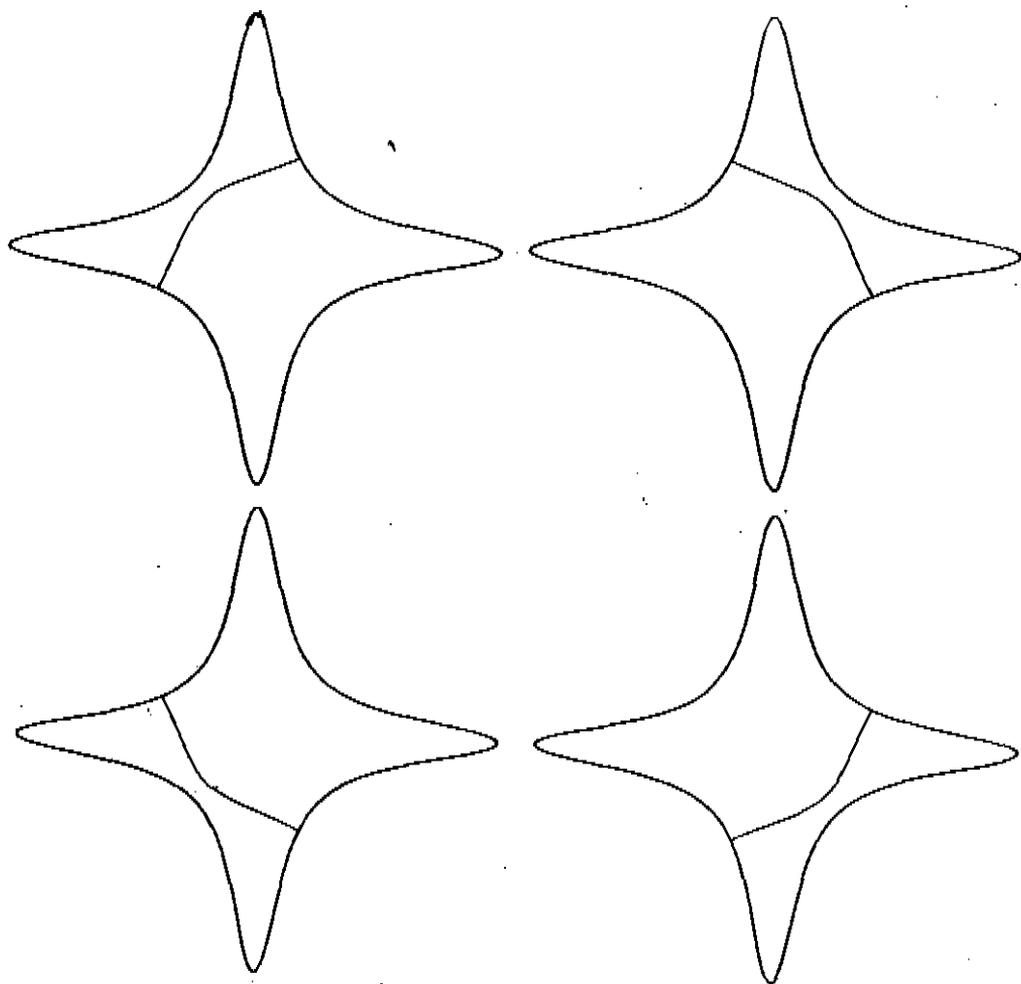


Figura 4.11: As quatro figuras apresentadas mostram as 4 possibilidades dessa órbita, por isso ela tem multiplicidade 4.

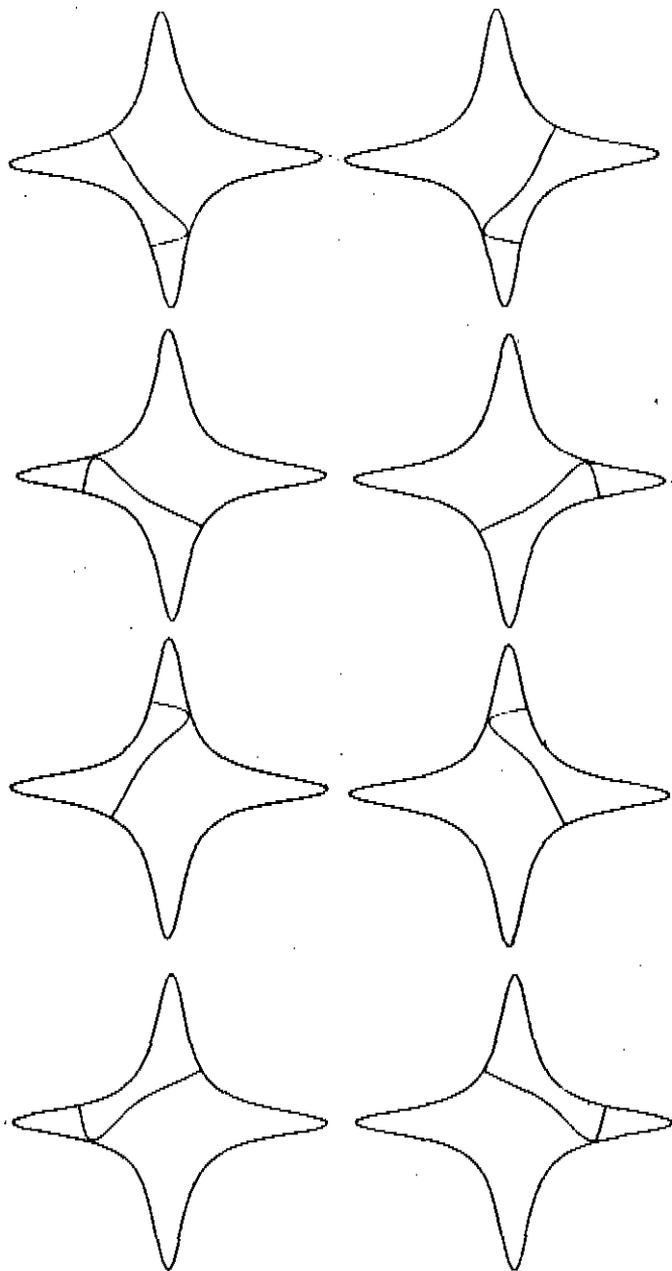


Figura 4.12: As oito figuras se referem a multiplicidade 8 dessa órbita

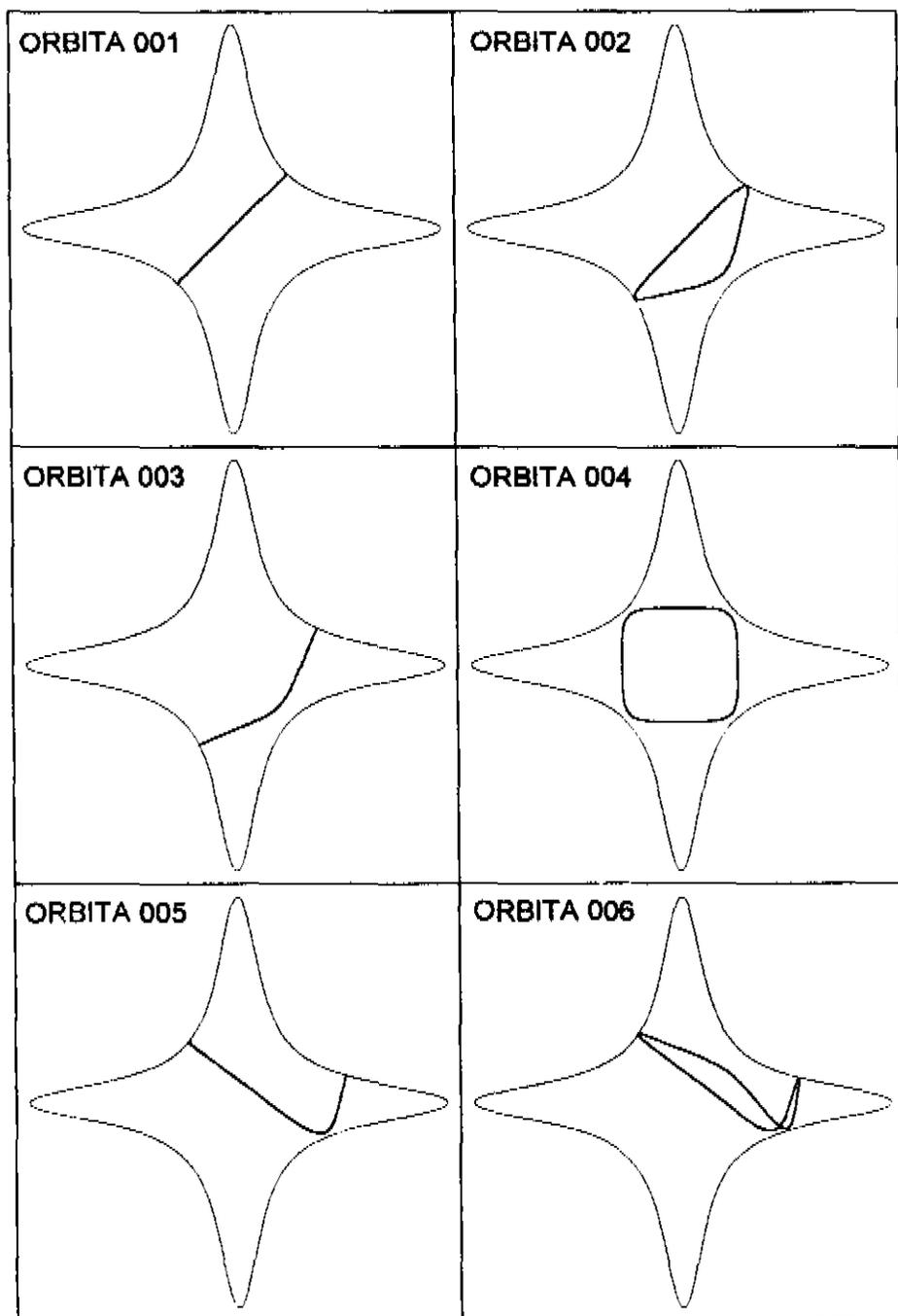


Figura 4.13: Órbitas de 1 a 6

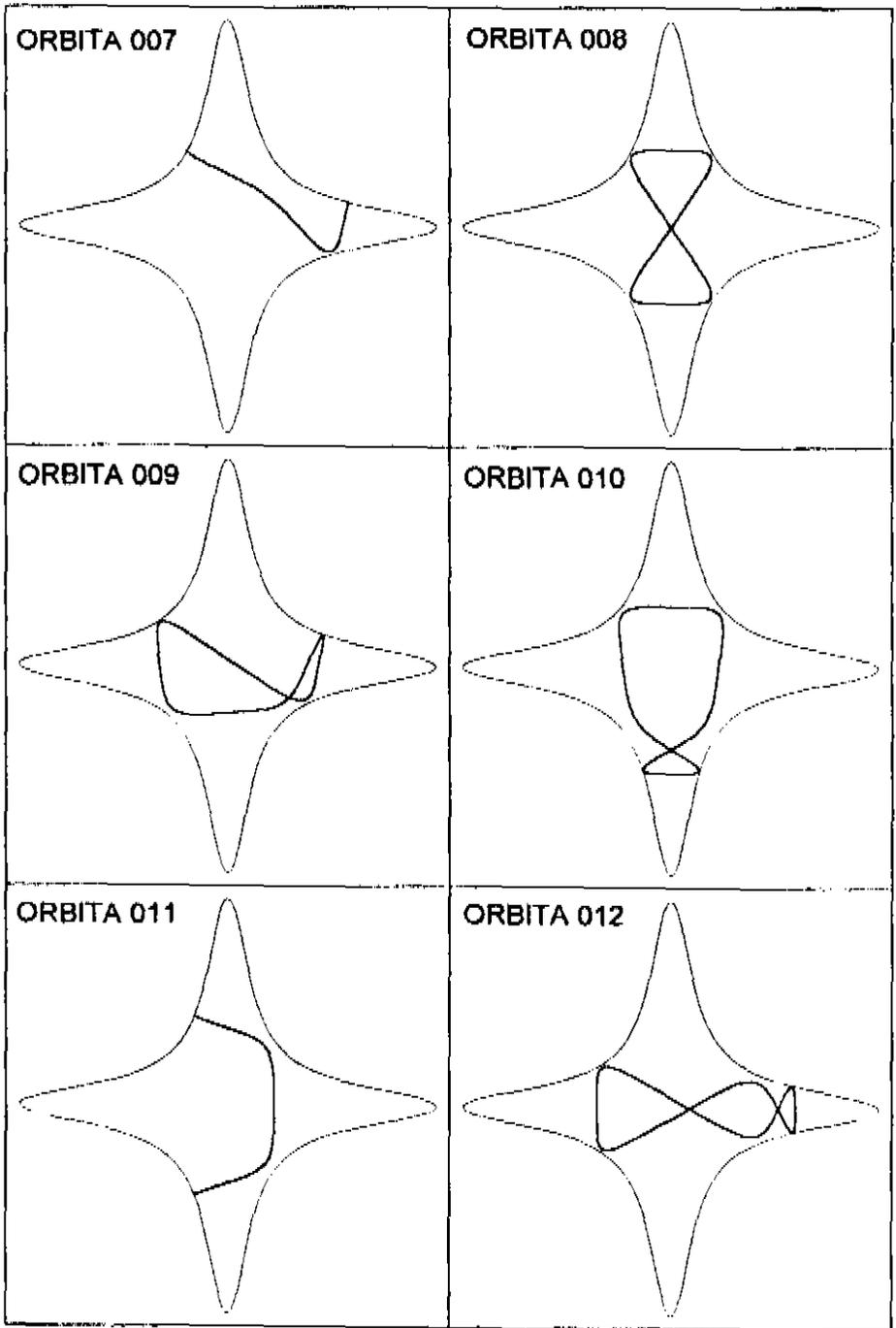


Figura 4.14: Órbitas de 7 a 12

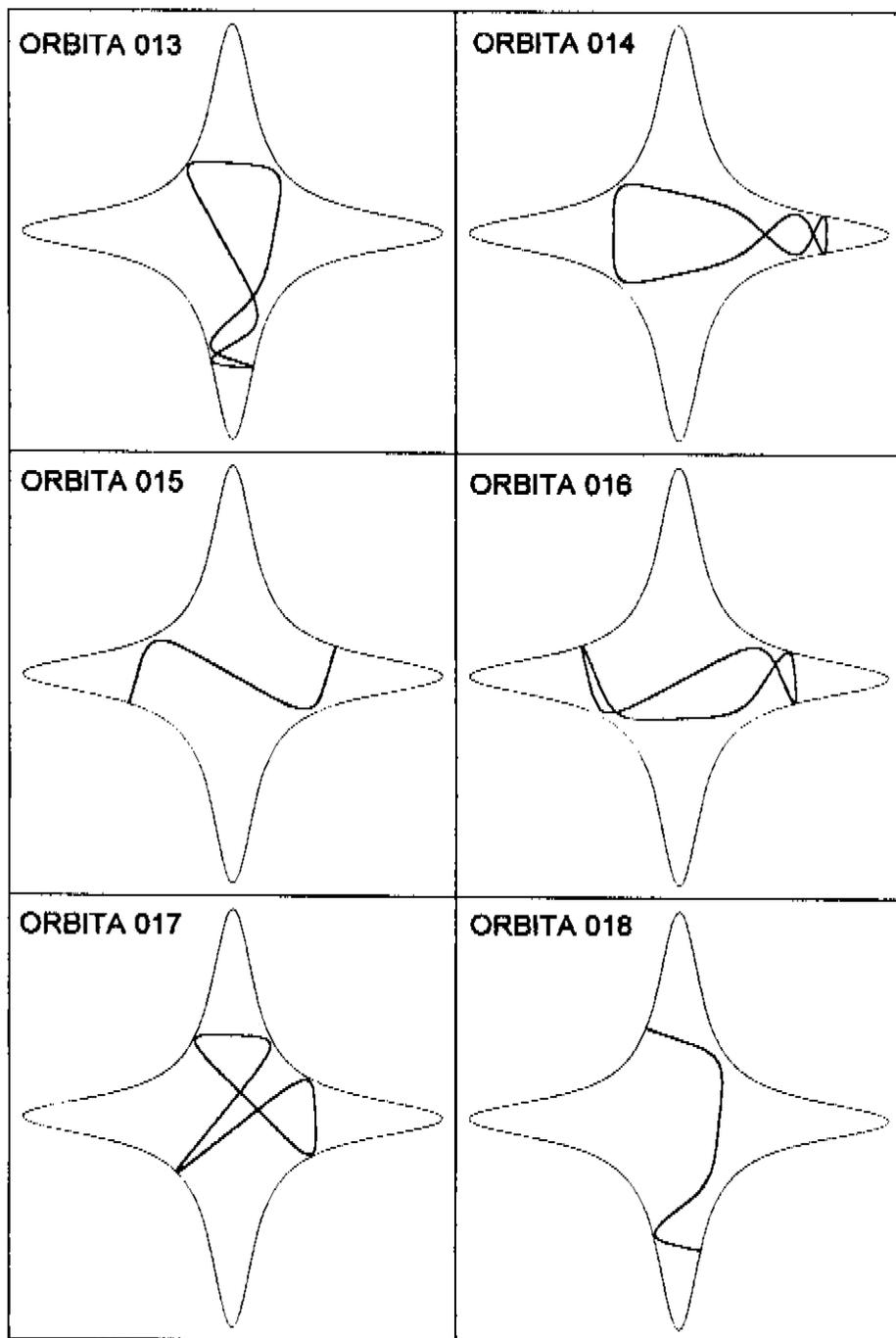


Figura 4.15: Órbitas de 13 a 18

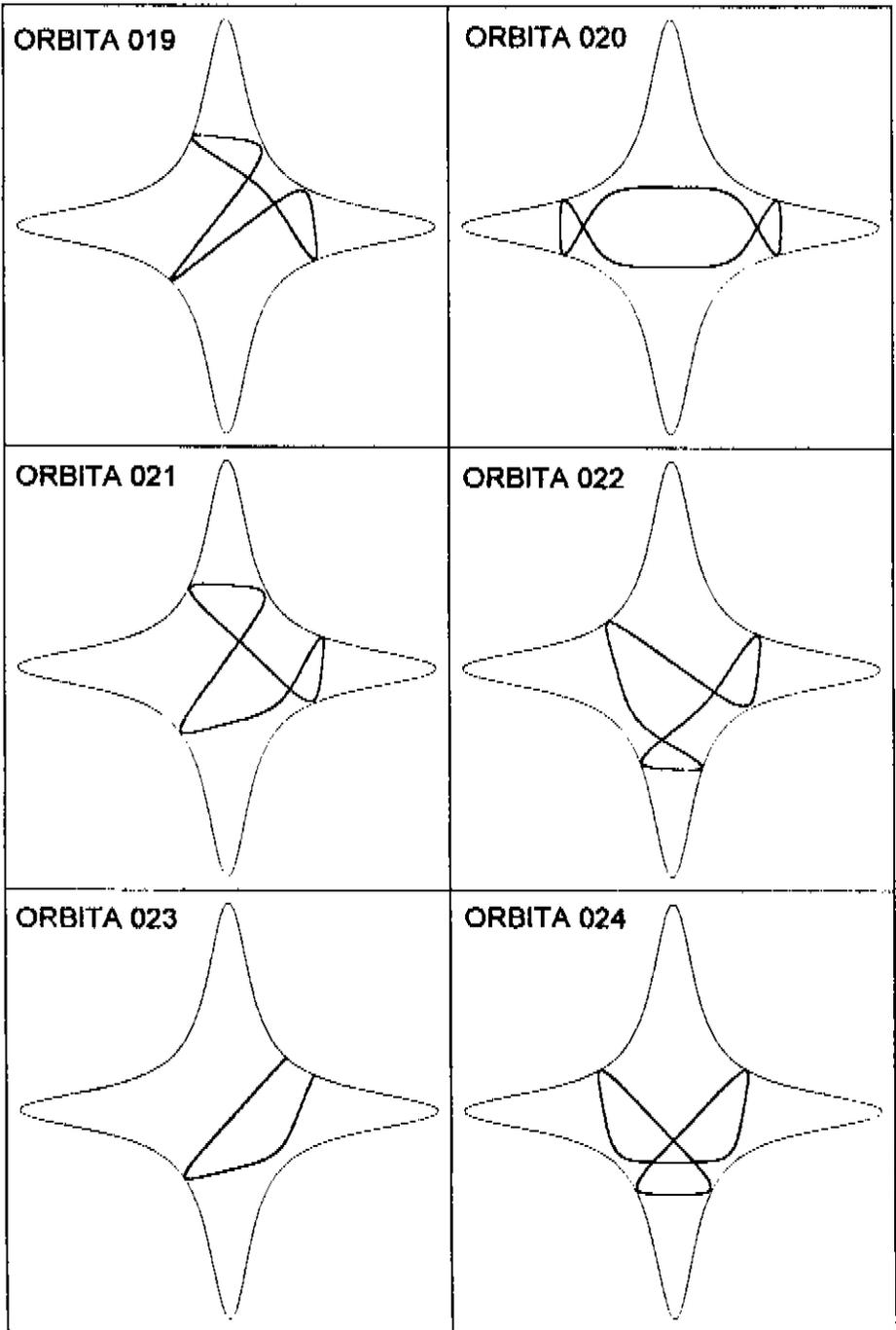


Figura 4.16: Órbitas de 19 a 24

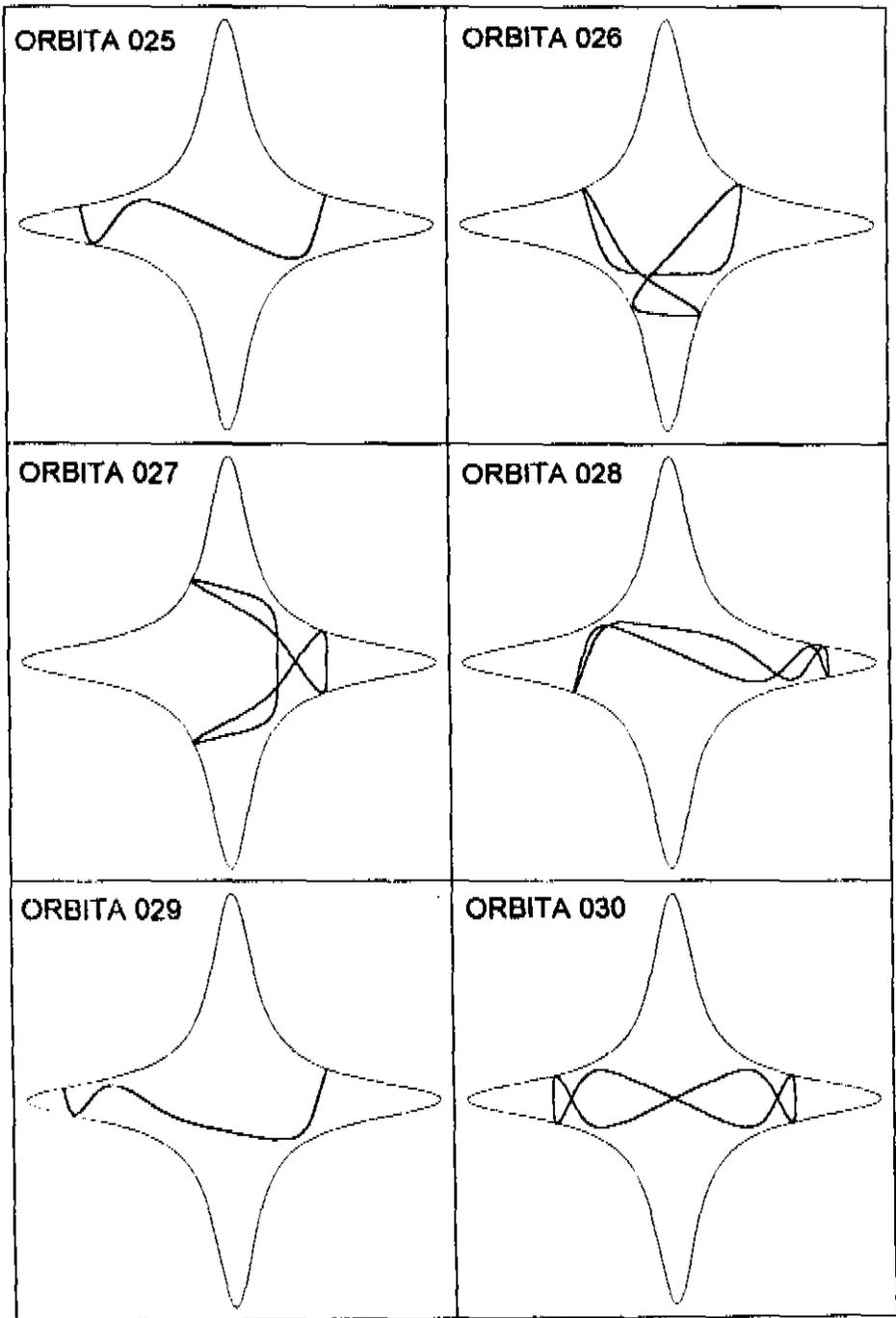


Figura 4.17: Órbitas de 25 a 30

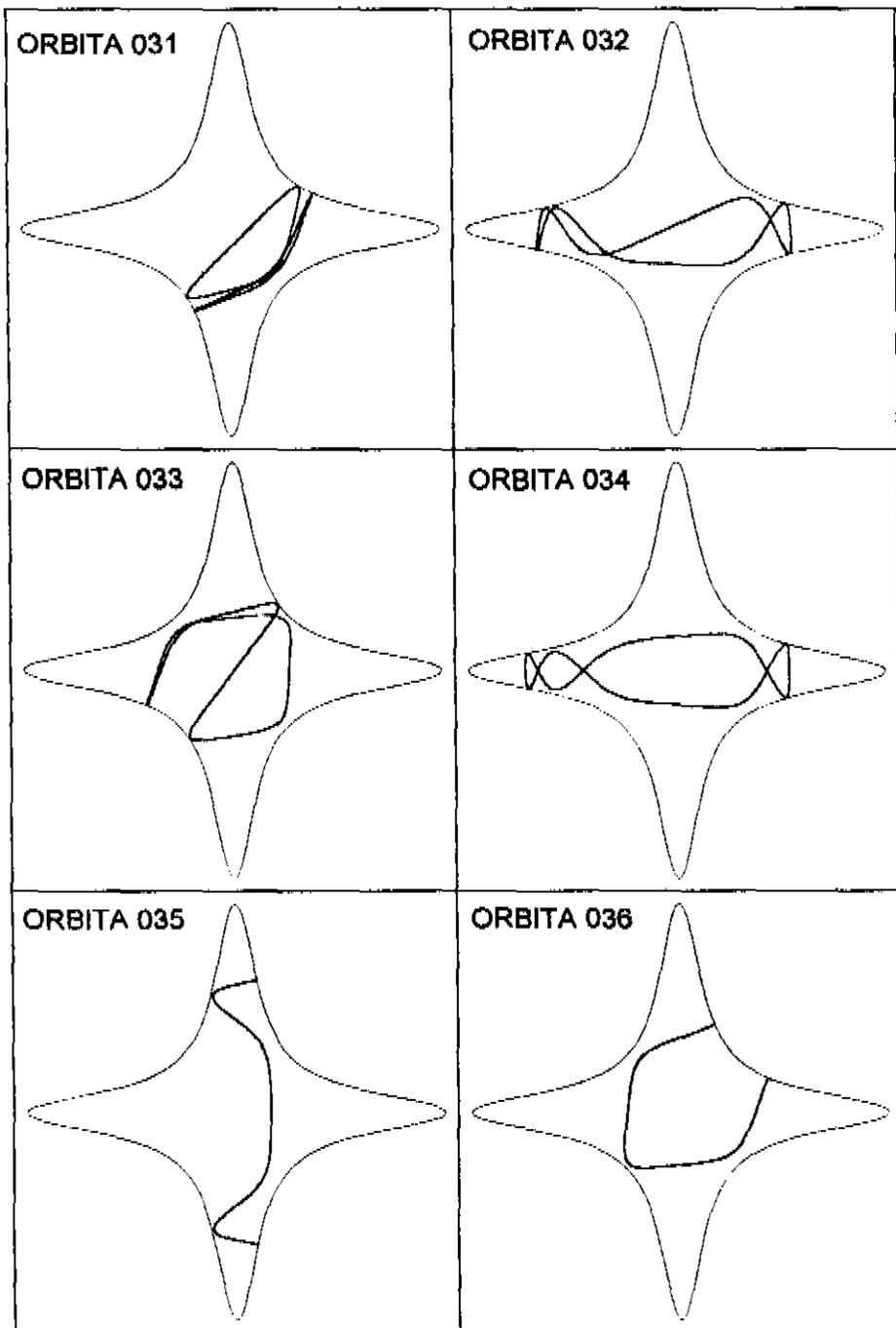


Figura 4.18: Órbitas de 31 a 36

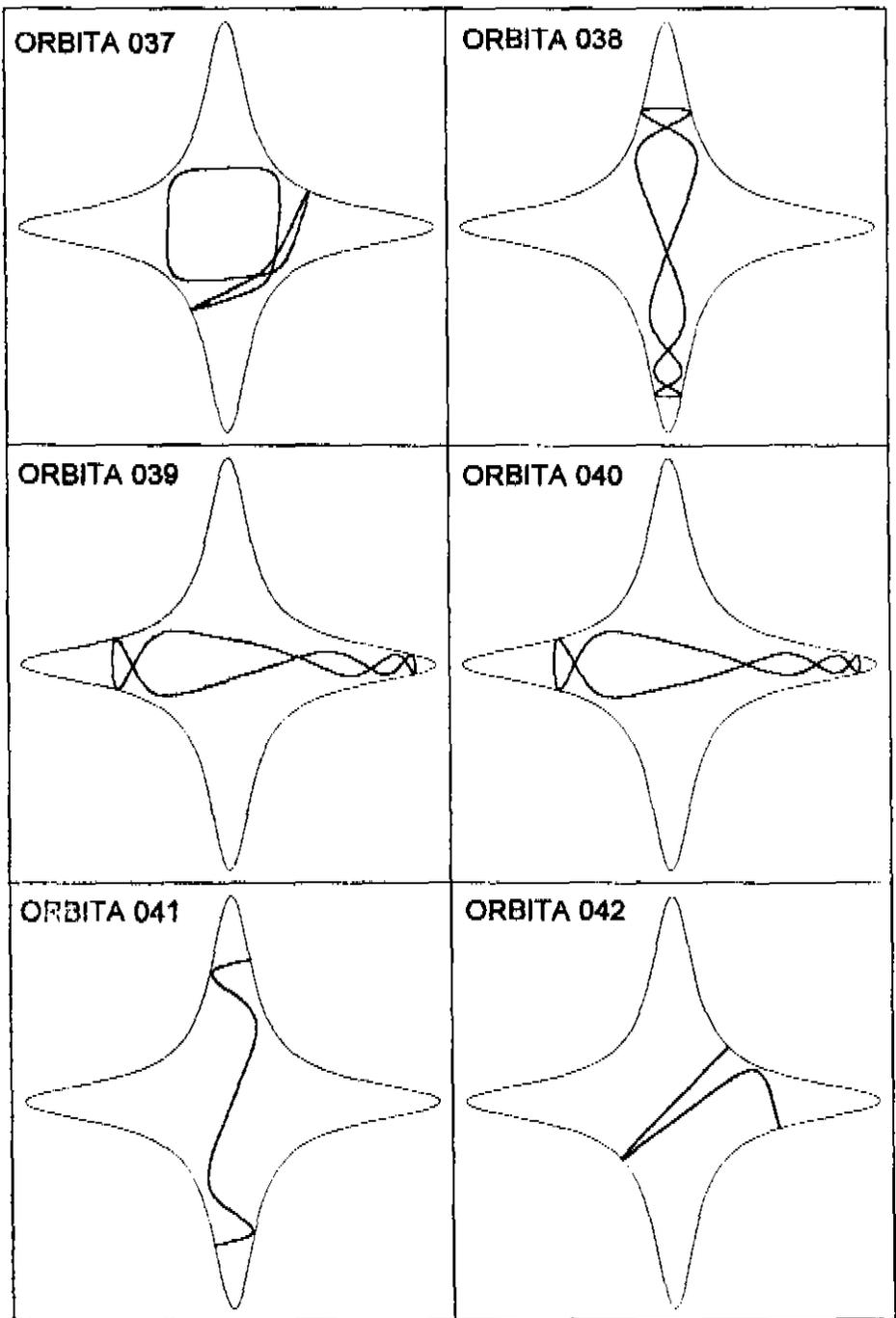


Figura 4.19: Órbitas de 37 a 42

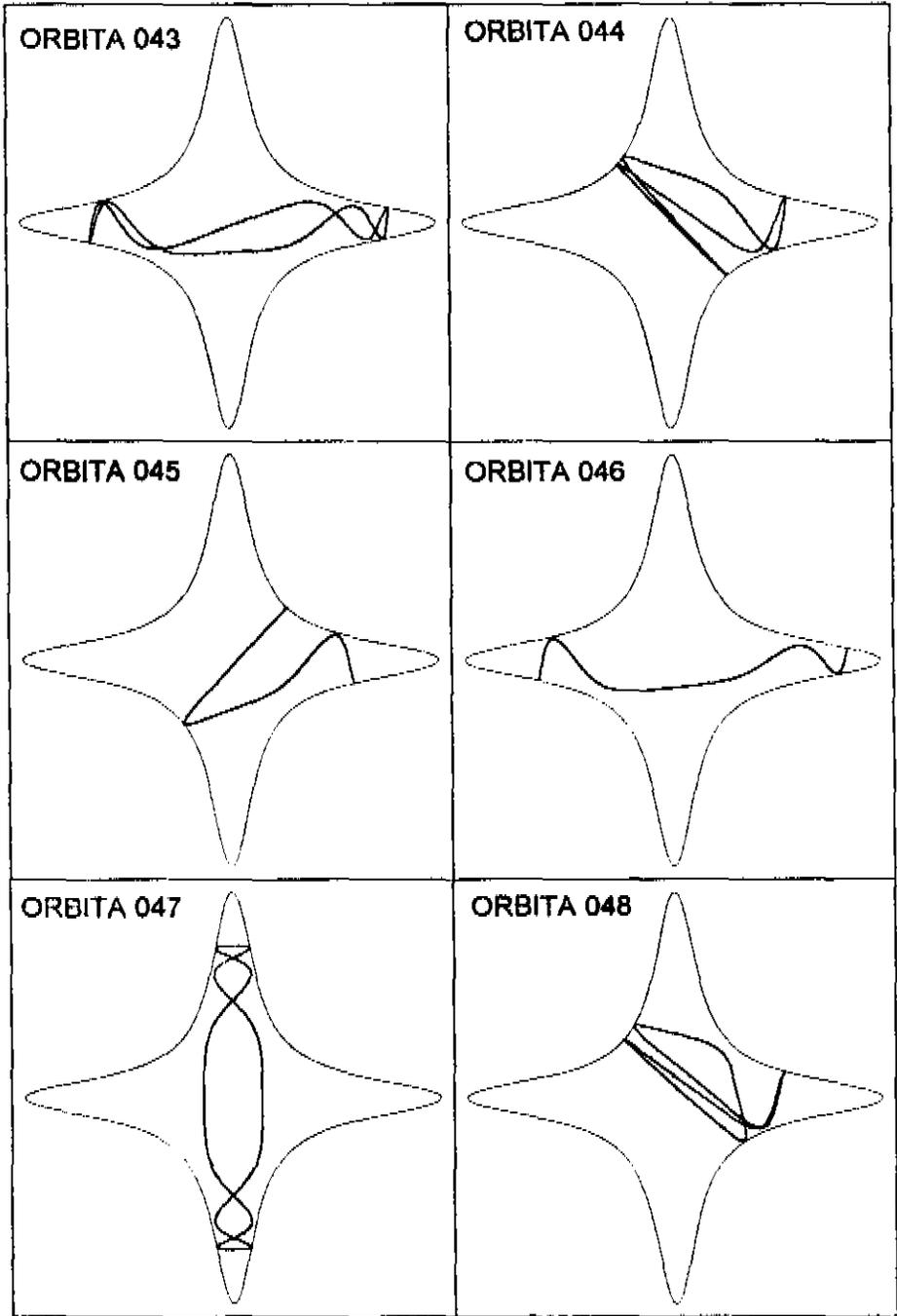


Figura 4.20: Órbitas de 43 a 48

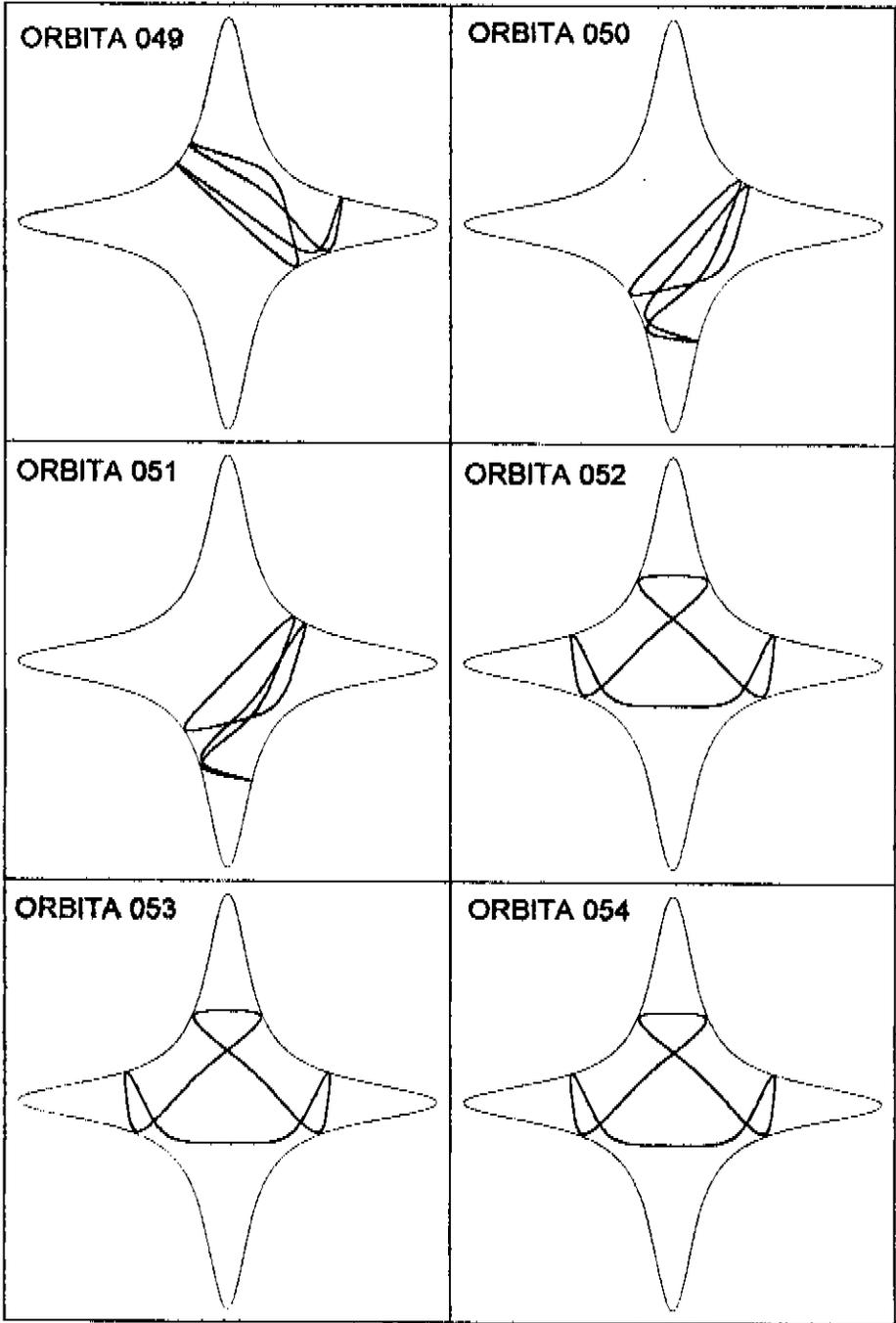


Figura 1.21: Órbitas de 49 a 54

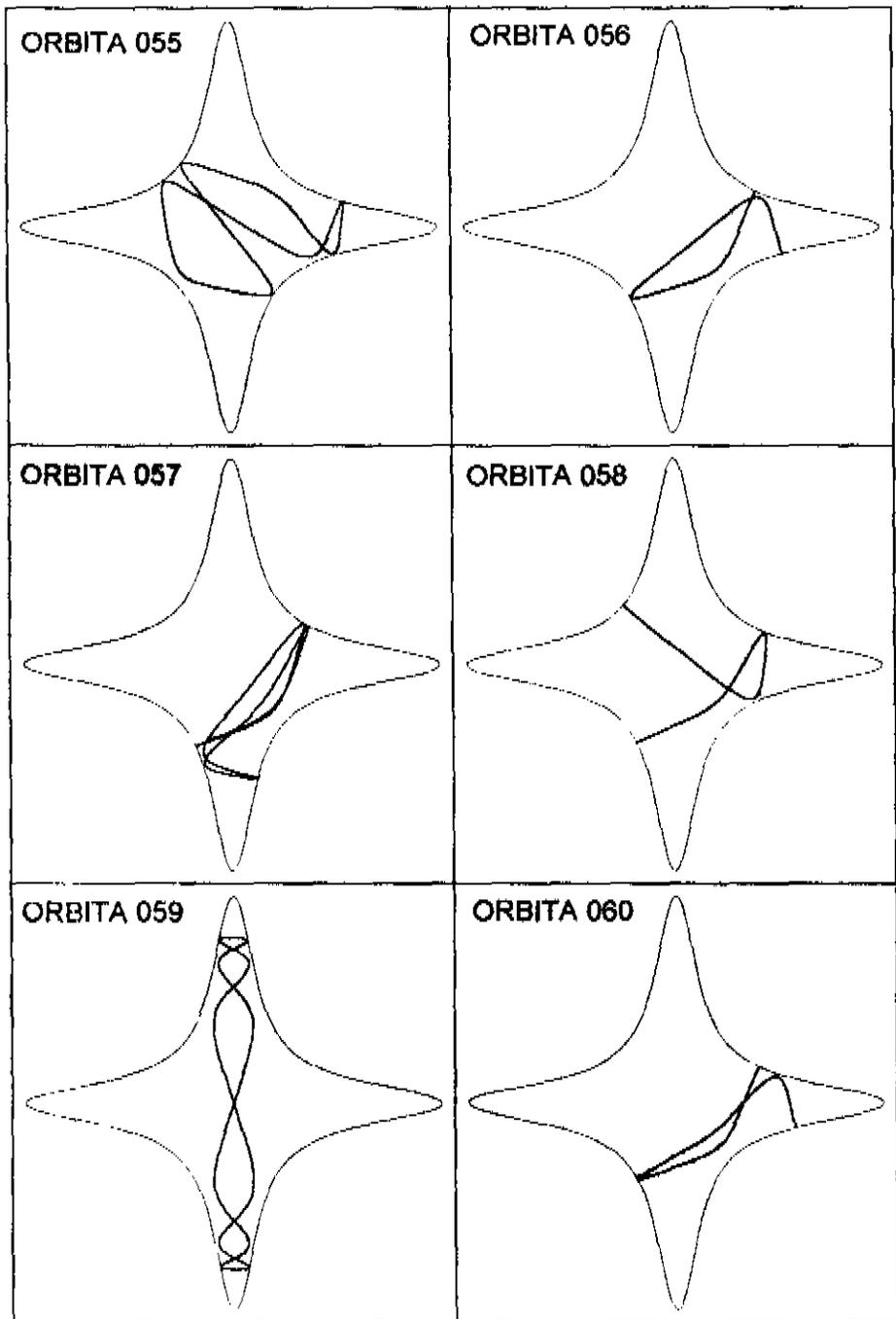


Figura 4.22: Órbitas de 55 a 60

Orbita	Periodo	Ação	$\mu$	Tr M	Maslov	tipo
1	7.3979	0.784939	4.7713	0.120075E+03	2	L 2
2	8.0462	0.853726	4.6039	-0.978843E+02	3	R 4
3	8.2891	0.879496	4.2046	0.690107E+02	4	L 4
4	9.3264	0.989567	5.5842	0.268185E+03	4	R 1
5	10.6287	1.127743	5.2489	0.192360E+03	4	L 8
6	10.7299	1.138481	4.3898	-0.786369E+02	5	R 8
7	10.7592	1.141588	3.9372	0.532947E+02	6	L 8
8	11.3391	1.203120	6.7153	0.826915E+03	4	R 2
9	11.9256	1.265344	6.6799	-0.794262E+03	5	R 8
10	12.3195	1.307144	6.4779	0.652605E+03	6	R 4
11	12.7114	1.348719	6.9155	0.100978E+04	6	L 4
12	13.7570	1.459668	6.8642	0.959412E+03	6	R 4
13	13.9630	1.481524	6.4424	-0.625921E+03	7	R 8
14	14.0882	1.494804	6.0514	0.426694E+03	6	R 4
15	14.1158	1.497737	7.4043	0.164496E+04	6	L 4
16	14.5917	1.548223	7.3046	-0.148510E+04	7	R 8
17	14.8810	1.578918	8.1664	-0.351880E+04	5	R 4
18	14.9309	1.584222	7.0903	0.120221E+04	8	L 8
19	14.9406	1.585245	7.7520	0.232816E+04	6	R 4
20	15.1863	1.611312	7.3667	0.158446E+04	8	R 2
21	15.1879	1.611488	7.5338	0.187228E+04	6	R 8
22	15.2062	1.613425	7.2446	-0.139852E+04	5	R 8
23	15.8913	1.686120	9.2240	0.101396E+05	6	L 8
24	15.9036	1.687428	8.5902	0.538052E+04	6	R 4
25	15.9764	1.695146	6.9952	0.109338E+04	8	L 8

Orbita	Periodo	Ação	$\mu$	Tr M	Maslov	tipo
26	16.0065	1.698347	8.0521	-0.313845E+04	7	R 8
27	16.0705	1.705137	7.6175	0.203557E+04	8	R 4
28	16.1288	1.711322	6.4768	-0.647883E+03	9	R 8
29	16.2050	1.719407	6.0146	0.411364E+03	10	L 8
30	16.2501	1.724186	7.4787	0.177195E+04	8	R 2
31	16.3201	1.731616	8.8350	-0.686857E+04	7	R 4
32	16.6238	1.763841	7.3030	-0.148267E+04	9	R 8
33	16.8381	1.786573	9.7215	-0.166697E+05	7	R 8
34	16.8774	1.790750	7.0165	0.111692E+04	10	R 4
35	17.0924	1.813558	7.2877	0.146424E+04	10	L 4
36	17.4412	1.850567	9.7223	0.166877E+05	8	L 4
37	17.5339	1.860403	9.7331	0.168681E+05	8	R 4
38	17.6194	1.869473	6.0989	0.447384E+03	10	R 4
39	17.6631	1.874112	4.6354	-0.101078E+03	11	R 8
40	17.6663	1.874456	4.0698	0.605639E+02	10	R 4
41	17.8905	1.898243	7.0266	0.112817E+04	10	L 4
42	18.0395	1.914052	10.1930	0.267163E+05	6	L 8
43	18.1577	1.926596	6.7272	-0.832790E+03	11	R 8
44	18.1784	1.928790	9.7063	-0.164195E+05	7	R 8
45	18.2740	1.938934	9.2809	0.107332E+05	8	L 8
46	18.3031	1.942022	6.2925	0.542527E+03	10	L 8
47	18.5181	1.964836	6.6829	0.800647E+03	12	R 2
48	18.6447	1.978261	9.4732	-0.130044E+05	7	L 8
49	18.6695	1.980898	9.1236	0.917159E+04	8	R 8
50	18.7611	1.990613	8.5322	0.507754E+04	8	R 8

Orbita	Periodo	Ação	$\mu$	Tr M	Maslov	tipo
51	18.7668	1.991220	8.3243	-0.412101E+04	9	R 8
52	18.7857	1.993227	6.0695	0.434486E+03	8	R 4
53	18.7863	1.993290	2.9608	0.213661E+02	10	R 4
54	18.7863	1.993290	3.4457	-0.293981E+02	9	R 4
55	18.9332	2.008871	10.1623	0.259106E+05	8	R 8
56	19.0224	2.018336	8.7485	0.630298E+04	8	L 8
57	19.0506	2.021331	8.2062	-0.366151E+04	9	R 8
58	19.0513	2.021404	9.7708	0.175172E+05	8	L 8
59	19.0585	2.022166	5.8314	0.342832E+03	12	R 2
60	19.0658	2.022942	7.8078	0.246162E+04	10	L 8
61	19.0858	2.025069	9.7619	0.173615E+05	8	R 4
62	19.1507	2.031957	9.5706	0.143395E+05	8	R 4
63	19.1938	2.036529	5.0517	-0.154299E+03	13	R 8
64	19.2169	2.038981	4.4378	0.866046E+02	14	R 4
65	19.2372	2.041134	10.4812	0.356420E+05	8	L 8
66	19.2449	2.041945	9.1452	-0.936739E+04	9	R 8
67	19.3504	2.053145	8.6404	0.565783E+04	10	L 4
68	19.4407	2.062726	5.2259	0.188037E+03	14	L 4
69	19.4973	2.068729	10.7470	0.464919E+05	8	R 8
70	19.6477	2.084683	10.1933	0.267253E+05	8	R 8
71	19.6580	2.085782	10.9336	0.560305E+05	8	R 8
72	19.6690	2.086948	9.8980	-0.198890E+05	9	R 8
73	19.6745	2.087530	1.2851	0.589171E+01	14	L 4
74	19.7210	2.092467	1.6813	0.755855E+01	16	L 2
75	19.8651	2.107755	10.6117	-0.406037E+05	9	R 8

Orbita	Periodo	Ação	$\mu$	Tr M	Maslov	tipo
76	19.9168	2.113234	10.8606	0.520829E+05	8	R 8
77	19.9603	2.117855	11.2213	0.747092E+05	8	R 8
78	20.9328	2.221038	9.8079	0.181780E+05	8	R 4
79	20.9607	2.223998	9.1971	-0.986612E+04	7	R 8
80	20.9747	2.225484	8.7592	0.637131E+04	10	R 4
81	21.0302	2.231371	9.3492	0.114917E+05	10	L 8
82	21.0718	2.235792	8.7197	-0.612004E+04	9	R 8
83	21.0885	2.237560	8.2811	0.395053E+04	12	L 8
84	21.2575	2.255486	10.4978	0.362368E+05	8	L 8
85	21.3079	2.260836	11.1239	0.677731E+05	8	L 4
86	21.3629	2.266678	9.7360	-0.169131E+05	9	R 8
87	21.4146	2.272157	9.1800	0.970346E+04	10	L 8
88	21.4336	2.274177	9.1108	0.905452E+04	10	L 8
89	21.4503	2.275953	10.4627	0.349895E+05	10	R 8
90	21.4599	2.276962	8.7796	0.650234E+04	10	R 8
91	21.4866	2.279798	8.3933	-0.441533E+04	11	R 8
92	21.5184	2.283177	7.8744	0.263115E+04	12	L 8
93	21.6440	2.296495	10.1682	0.260631E+05	10	R 8
94	21.9509	2.329064	11.0159	0.608367E+05	10	R 8
95	22.0394	2.338448	9.9447	0.208425E+05	12	L 4
96	22.0672	2.341401	11.2492	-0.768182E+05	9	R 8
97	22.0904	2.343865	10.5429	-0.379057E+05	11	R 8
98	22.1298	2.348044	11.7531	-0.127150E+06	9	R 8
99	22.1982	2.355302	9.7215	-0.166694E+05	9	R 8
100	22.1985	2.355335	9.6429	0.154138E+05	10	R 8

## 4.6 Histogramas

Quando temos um grande conjunto de dados, a análise individual de cada órbita tem pouco significado, mas o conjunto como um todo é muito significativo. Vamos primeiramente observar o histograma das instabilidades. Podemos ver nitidamente um crescimento exponencial do número de órbitas até a instabilidade entre 9 e 10, e logo a seguir uma queda também exponencial no número de órbitas para instabilidades maiores.

A primeira parte nos dá uma indicação que o conjunto obtido até a instabilidade em torno de 9 é um conjunto bastante completo, como era o nosso objetivo. Se isso de fato fosse verdade, indicaria que se tomássemos um grid menor nas linhas, só encontraríamos órbitas com instabilidades acima desse valor. Testamos para um intervalo entre duas linhas um espaçamento dez vezes menor e de fato nenhuma órbita diferente com instabilidade abaixo de 9 foi encontrada, mas apenas órbitas distintas de instabilidade acima desse valor. Da mesma forma podemos concluir que não temos um conjunto completo para valores de instabilidade acima de 9, pois o comportamento esperado era de um crescimento exponencial e não uma queda exponencial no número de órbitas.

O histograma dos períodos, no conjunto de órbitas que obtivemos, não mostra com clareza o crescimento exponencial no número de órbitas, com o crescimento do período, isso se deve em parte ao fato que no histograma não estão incluídas as repetições das órbitas.

Finalmente temos o histograma que denominamos de histograma do índice de Guztwiller, que de fato é a contagem do número de órbitas em função do

fator  $\frac{T}{\sqrt{\text{tr}(M)-2}}$  tirado da fórmula do traço. Nesse histograma conseguimos observar com clareza o crescimento exponencial no número de órbitas que contribuem cada vez com um peso menor na fórmula do traço, mas que são justamente os responsáveis pela divergência da fórmula.

Esses histogramas mostram qualitativamente que o conjunto de órbitas que obtivemos é bastante completo e suficiente para mostrar alguns comportamentos exponenciais, mesmo tendo um conjunto finito de órbitas.

## Histograma da Instabilidade

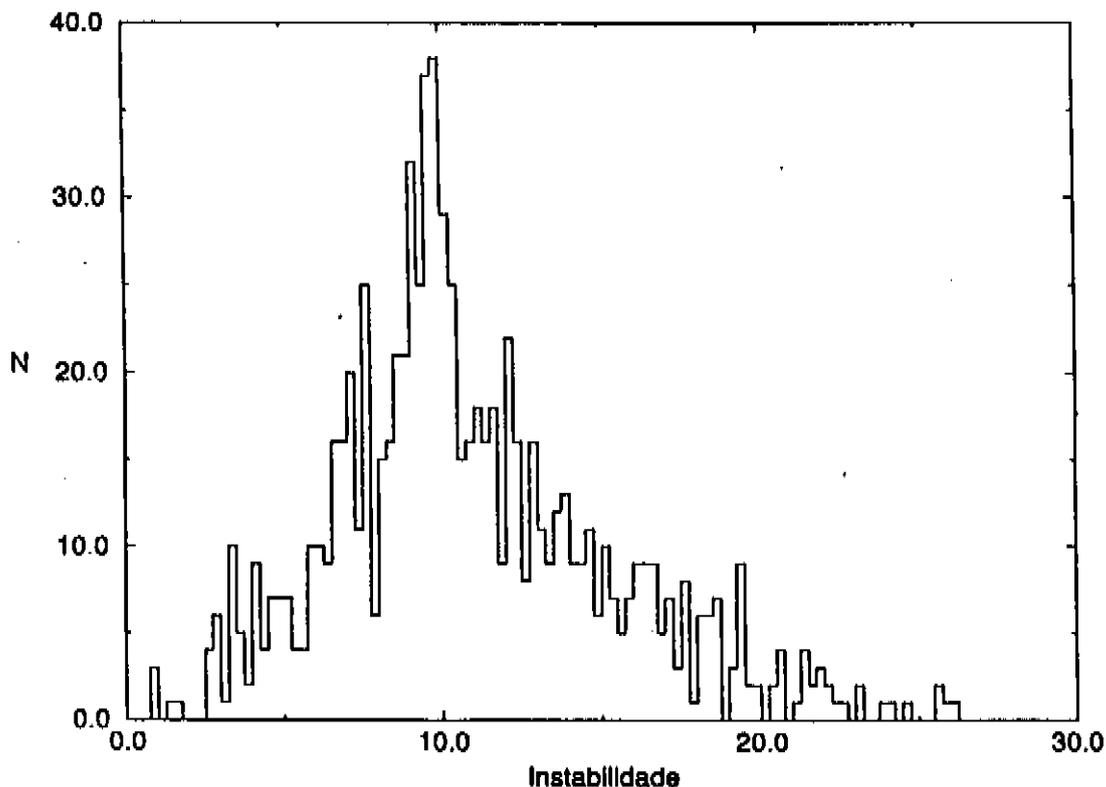


Figura 4.23: Histograma das instabilidades, podemos observar com facilidade o crescimento exponencial do número de órbitas até pouco antes do valor 10 de instabilidade e depois uma queda também de caráter exponencial, até o final dos dados.

## Histograma dos Periodos

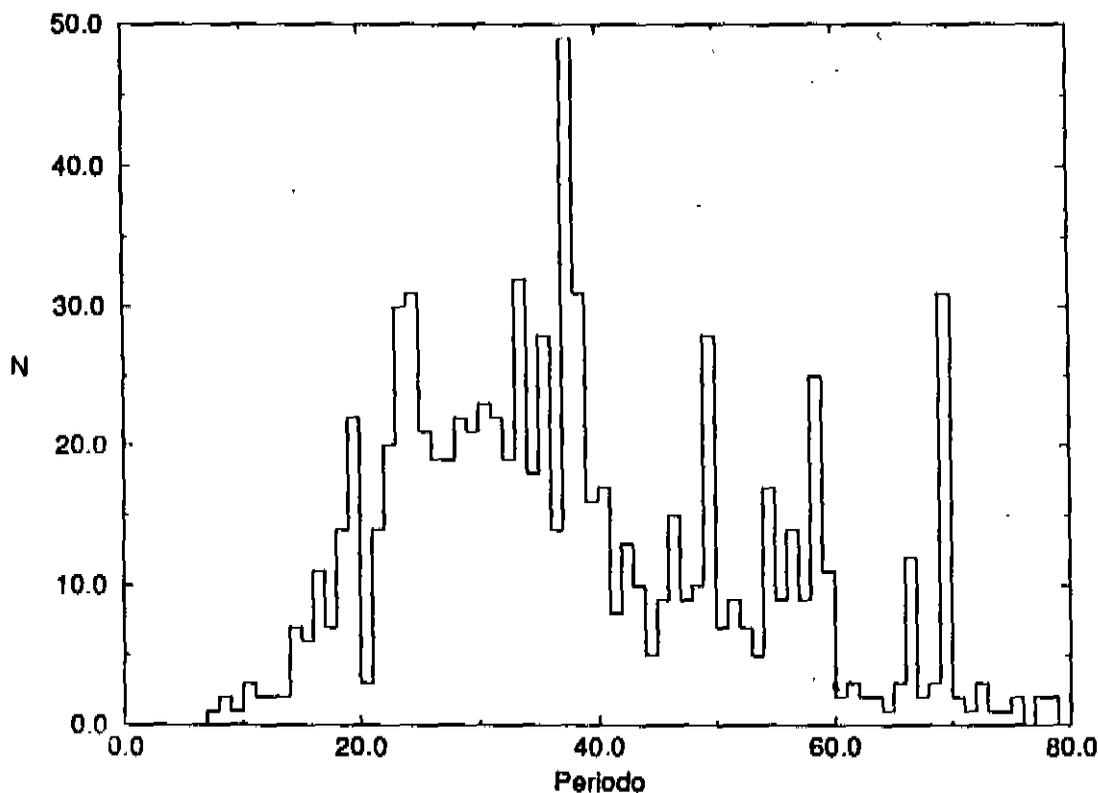


Figura 4.24: Histograma dos períodos. Diferentemente do histograma anterior o crescimento exponencial das órbitas em função do período, não está evidente. Esse histograma não inclui as repetições, o que sem dúvida acentuaria o caráter exponencial do histograma.

## Histograma do Índice de Gutzwiller

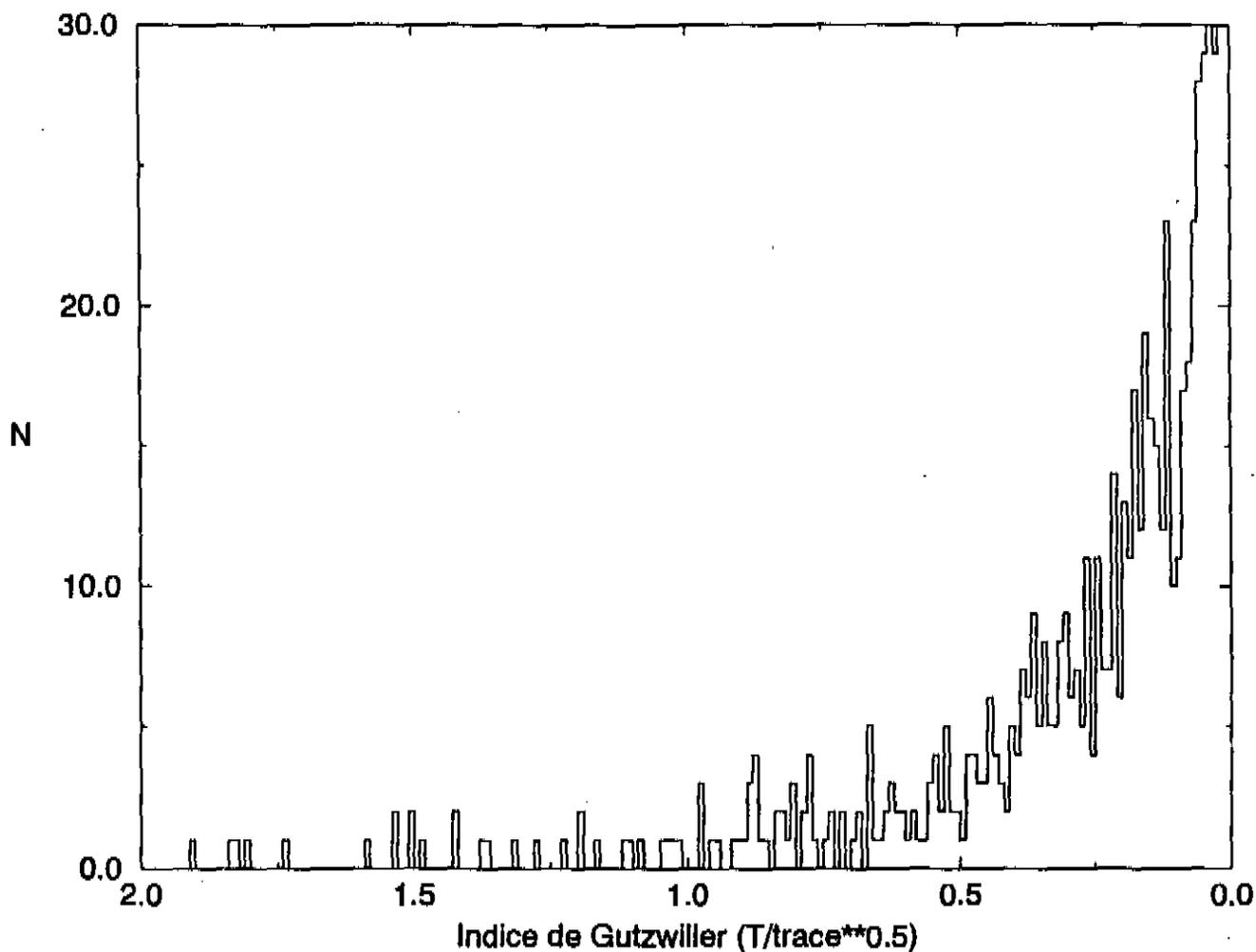


Figura 4.25: Este histograma mostra o peso do fator da fórmula do traço e podemos observar que apesar do nosso conjunto ser finito, ele consegue mostrar um crescimento exponencial no número de órbitas com contribuições cada vez menores, mas em maior número.

# Capítulo 5

## Conclusões

O objetivo principal descrito na introdução desse trabalho foi plenamente atingido, ou seja, conseguimos desenvolver um método de busca de órbitas periódicas tanto estáveis como intáveis, que num sistema caótico, um conjunto quase completo de órbitas para um dado intervalo de período e instabilidade. Aqui o termo quase completo é no sentido que não podemos garantir com absoluta certeza que não exista mais nenhuma órbita fora da lista de resultados.

Esse método pode ser empregado em dois casos específicos distintos que são:

I – Caso das linhas especiais; é aquele em que as linhas passam exatamente sobre órbitas periódicas, por exemplo algumas linhas de simetria ou linhas de bordas de potenciais. Com esse método nesses casos podemos encontrar todas as órbitas periódicas que estão sobre essas linhas, com a precisão desejada, sem

recorreremos a nenhum outro método de convergência auxiliar.

II – Caso das linhas genéricas; é aquele em que as linhas passam nas vizinhanças das órbitas periódicas, de onde obtemos uma boa aproximação para a órbita procurada, mas que depois necessitamos de métodos convencionais de convergência para chegarmos a precisão que desejamos.

Outro resultado importante obtido é o conjunto de órbitas resultante desse trabalho, enquanto o conjunto mais completo para o Potencial Quártico encontrado na literatura foi o de Eckhart [1] com 150 órbitas distintas, o nosso método encontrou cerca de 850 órbitas distintas para o mesmo range.

Diante disso, nossas perspectivas futuras também são em duas frentes distintas, uma para o método e outra para o conjunto de órbitas que foi obtido.

Para o método é nossa intenção fazer uma extensão a outros potenciais, tentar adaptar a técnica a bilhares, estender para 3 graus de liberdade, usar em potenciais bidimensionais periódicos e verificar a viabilidade do método das linhas das vizinhanças, se poderia ser usado para a convergência direta sem as técnicas auxiliares vigentes, entre outras possibilidades.

Para o conjunto de dados, é nossa intenção usá-lo para verificarmos a fórmula do traço ou outras fórmulas existentes ou em desenvolvimento usar conjuntos selecionados para o estudo de cicatrizes e montarmos um tipo de atlas das órbitas periódicas do Potencial Quártico para os parâmetros que foram usados nesse trabalho.

Todas essas extensões, do método e das aplicações dos dados deverão ser

desenvolvidos nos próximos anos, em colaboração com outros pesquisadores e outros centros de pesquisa.

# Bibliografia

- [1] G. Hose B. Eckhardt and E. Pollak. Quantum mechanics of a classically chaotic system: Observations on scars, periodic orbits and vibrational adiabaticity. *Phys. Rev. A*, **38**:3776, (1989).
- [2] F. A. Bajay. órbitas periódicas em conjuntos homoclínicos a um parâmetro. Master's thesis, I.F.G.W. – Unicamp, (1992).
- [3] M. Baranger and K. T. R. Davies. Periodic trajectories for a two-dimensional nonintegrable hamiltonian. *Ann. Phys.*, **177**:330–358, (1987).
- [4] M. Baranger, K. T. R. Davies, and J. H. Mahoney. The calculation of periodic trajectories. *Ann. Phys.*, **186**:95–110, (1988).
- [5] M. V. Berry. Regular and irregular motion. *AIP Conference Proceedings*, **46**:16–120, (1978). Ed. Jorna.
- [6] J. Botina and H. Rabitz. Finding regular orbits. *Phys. Rev. Lett.*, **75**:2948, (1995).

- [7] A. Carnegie and J. C. Percival. Regular and chaotic motion in some quartic potentials. *J. Phys. A*, **17**:801, (1984).
- [8] S. C. Creagh, J. M. Robbins, and R. G. Littlejohn. Geometrical properties of maslov indices in the semiclassical trace formula for the density of states. *Phys. Rev. A*, **42**:1907, (1990).
- [9] P. Dahlqvist and G. Russberg. Existence of stable orbits in the  $x^2y^2$  potential. *Phys. Rev. Lett.*, **65**:2837, (1990).
- [10] B. Eckhardt and D. Wintgen. Indices in classical mechanics. *J. Phys. A*, **24**:4335, (1991).
- [11] M. C. Gutzwiller. Periodic orbits and classical quantization conditions. *J. Math. Phys.*, **12**:343, (1971).
- [12] M. C. Gutzwiller. *J. Math. Phys.*, **14**:139, (1973).
- [13] M. C. Gutzwiller. *J. Math. Phys.*, **18**:806, (1977).
- [14] M. Henon. On the numerical computation of poincaré maps. *Physica D*, **5**:412, (1982).
- [15] R. G. Littlejohn. *Phys. Rep.*, **138**:193, (1986).
- [16] R. G. Littlejohn. *Phys. Rev. Lett.*, **61**:2159, (1988).
- [17] H. D. Meyer. *J. Chem. Phys.*, **84**:3147, (1986).
- [18] K. R. Meyer. Generic bifurcation of periodic points. *Transactions of the American Mathematical Society*, **149**:95-107, (1970).

- [19] H. Poincaré. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Gauthier-Villars, Paris, (1899).
- [20] D. Provost. *The signature of classical periodic orbits on quantum wavefunctions*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, (1992).
- [21] J. M. Robbins. Maslov indices in the gutzwiller trace formula. *Nonlinearity*, **4**:343, (1991).
- [22] G. K. Saviddy. *Phys. Lett.*, **130 B**:303, (1983).
- [23] G. K. Saviddy. *Nucl. Phys.*, **B 246**:302, (1984).