Dissertação de Mestrado

Órbitas Periódicas e suas Bifurcações em Bilhares Magnéticos

Março / 1996 - Outubro / 1997

Luis Gregório G. de V. Dias da Silva Orientador: Prof. Dr. Marcus A. M. de Aguiar

DFESCM - Instituto de Física "Gleb Wataghin" - UNICAMP

Tese apresentada ao IFGW para a obtenção do Grau de Mestre em Física em 21 de novembro de 1997

Este exemption corresponde à redaije fimil de les de Mestra des defendéds publications duis gregoines G. de V Dies de Silva e Aprovinder julie comissão julignidiona. 1 U#ICAMP TECA CENTRAL



PARECER DE APROVAÇÃO

DEFESA DE TESE DE MESTRADO

LUIS GREGÓRIO GODOY DE VASCONCELLOS DIAS DA SILVA

DATA: 21 / 11 / 97

BANCA EXAMINADORA:

- Prof. Dr. Marcus Aloízio Martinez de Aguiar (Orientador do Candidato)

- Prof. Dr. Caio Henrique Lewenkopf

- Prof. Dr. José Antonio Rov

Agradecimentos

Dedico:

Ao meu pai, Mário Dias, que infelizmente não está mais entre nós para compartilhar este momento à sua maneira peculiar. À minha mãe Eliane e minha irmã Joana por serem mais do que família: por serem minhas amigas e pelas tantas demonstrações do amor que nos une.

Agradeço também:

A Milena R. de Oliveira, cujo o apoio, compreensão e carinho tornaram este trabalho possível.

Aos amigos que estiveram na Defesa e que agüentaram firmes (sem dormir!) a fala deste autor. Espero ainda o dia onde a clareza e objetividade sejam tais que dispensem um jargão tecnicista para se expor uma idéia em Física ou em qualquer outra área.

A Pipail I. Sedonne pelo incentivo e pela amizade mais do que bem-vindas neste momento tão importante.

A Adilson Motter e Murilo Tiago pelas frutíferas discussões e sugestões que apenas enriqueceram o texto e pela amizade, demonstrada, por exemplo, na disposição em ler a versão original da dissertação.

A Marcus Aguiar pelas várias idéias, conselhos e dicas, enfim, por uma orientação participativa. Devo dizer que foi (e está sendo) um privilégio estar envolvido no trabalho do Grupo de Sistemas Dinâmicos.

Enfim, a todos que, direta (turma de 92) ou indiretamente (os corais e Paulo Rowlands) participaram na elaboração e confecção desta Dissertação de Mestrado. Muito Obrigado.

Agradeço à FAPESP pelo suporte financeiro concedido a este projeto.

RESUMO

Neste trabalho fizemos um estudo detalhado no que concerne a busca de órbitas periódicas em dois tipos de Bilhares com Campo Magnético ortogonal aplicado: o Bilhar Quadrado e o Bilhar de Sinai. Implementamos um método eficiente de procura diretamente no Mapa de Seção de Birkhoff, baseado em um processo de iterações sucessivas a partir de uma "órbita-teste" e obtendo a convergência para uma órbita efetivamente periódica, tendo como parâmetro de convergência a Matriz de Monodromia da órbita. Conseguimos obter um total aproximado de 2000 órbitas para ambos os sistemas, as quais foram catalogadas por estabilidade, ação e período. Fizemos estatísticas analisando o Número de órbitas como função de vários parâmetros. Verificou-se um crescimento aproximadamente exponencial em termos de pe:íodo e Ação. Observou-se que, para campos baixos, o No. de órbitas com 2n "bounces" cresce mais rapidamente que com 2n+1 bounces no Bilhar Quadrado. Observou-se também o aparecimento de órbitas "aprisionadoras" no Bilhar de Sinai para campos inetermediários.

ABSTRACT

In this work we have made a detailed study on the search for periodic orbits on two types of Billiards with a ortoghonal magnetic field applied: the Square Billiard and Sinai's Billiard. We have implemented an efficient method of searching directly on Birkhoff's Section Map, which is based on a process of successive iterations, starting from a "test-orbit" and getting the convergence to an "effectively periodic" orbit, having as a convergence parameter the Monodromy Matrix of the orbit. We have obtained about 2000 orbits for both systems, which have been catalogued by stability, action and period. We have made a statistical analysis centered on the number of orbits as a function of several parameters. It was detected a nearexponential growth as a function of period and action. For low values of the Magnetic Field, the number of orbits with 2n bounces grows more rapidly than the number of orbits with 2n+1 bounces on the Square Billiard. It was observed the presence of "trapping" orbits on Sinai's Billiard for intermediary Magnetic Fields.

Conteúdo

| 1 | Intr | rodução | 8 |
|------|------------|---|----|
| | 1.1 | Resultados experimentais | 9 |
| | 1.2 | Cálculo de Magnetização e Susceptibilidade | 9 |
| | 1.3 | Bilhares Magnéticos Clássicos | 10 |
| | 1.4 | Objetivos | 11 |
| 2 | Br | eve descrição dos Sistemas Físicos estudados: Bilhar Qua- | |
| drad | do e | Bilhar de Sinai | 13 |
| | 2.1 | Descrição | 13 |
| | 2.2 | Coordenadas de Birkhoff | 14 |
| | 2.3 | O Bilhar Quadrado | 16 |
| | | 2.3.1 O caso livre | 16 |
| | | 2.3.2 A quebra de Integrabilidade com a introdução do campo | 17 |
| | 2.4 | O Bilhar de Sinai | 21 |
| | | 2.4.1 O caso livre | 21 |
| | | 2.4.2 A introdução do campo | 23 |
| 3 | Ар | rocura por Órbitas Periódicas no Mapa de Seção | 25 |
| | 3.1^{-1} | Procura das Órbitas-teste | 25 |
| | | 3.1.1 Órbitas-teste no Bilhar Quadrado | 26 |
| | | 3.1.2 Procura diretamente no Mapa de Seção | 30 |
| 4 | 0 | Método Numérico de Convergência de órbitas | 35 |
| | 4.1 | Solucionando problemas de convergência | 38 |
| | 4.2 | A Matriz de Monodromia e suas propriedades | 40 |
| | | 4.2.1 Aplicações anteriores | 41 |
| 5 | Bifu | ırcações | 42 |
| | 5.1 | Um exemplo conhecido | 42 |
| | 5.2 | Famílias e bifurcações em bilhares magnéticos | 45 |

| | 5.3 | O Traço de M | 50 |
|---|-------------|--|-----------|
| 6 | Re | sultados e discussão | 52 |
| | 6.1 | Crescimento exponencial do número de órbitas | 53 |
| | | 6.1.1 Campos Baixos | 53 |
| | | 6.1.2 Campos intermediários | 58 |
| | | 6.1.3 Análise em função do Comprimento e da Ação | 60 |
| | 6.2 | Aparecimento de órbitas com N ímpar no Bilhar Quadrado \dots | 68 |
| | 6.3 | Aprisionamento no Bilhar de Sinai | 70 |
| 7 | Con | iclusões finais | 72 |
| A | Açã | o em Bilhares Magnéticos | 74 |
| в | Con | npêndio de Órbitas Periódicas | 76 |
| | B .1 | Órbitas com $B = 0.5$ | 76 |
| | B.2 | Órbitas com $B = 3$ | 86 |

Capítulo 1 Introdução

A dinâmica de elétrons confinados em potenciais integráveis e caóticos pode ser, em várias situações de interesse, muito bem aproximada pelo movimento em poços de potencial infinito, os chamados *bilhares*. Os bilhares são sistemas físicos bidimensionais onde uma partícula é confinada em uma região delimitada por uma *fronteira*. No interior desta região, a partícula move-se livremente ou sob a ação de forças e sofre reflexões especulares quando atinge a fronteira. No caso do movimento livre, a geometria da fronteira determina a característica caótica ou integrável do movimento.

Nas referências [1, 2, 3] encontramos a descrição de um gás de elétrons bidimensional confinado através do modelamento com Bilhares. Colocando um campo magnético ortogonal ao plano do Bilhar, é possível estudar propriedades magnéticas importantes do gás, tais como magnetização e susceptibilidade magnética [4].

Na descrição desta dinâmica de elétrons confinados, se destacam as *órbitas* periódicas. Em geral, o estudo do papel das órbitas periódicas e suas bifurcações dentro da teoria semiclássica de sistemas caóticos constitui uma poderosa ferramenta na descrição do comportamento de tais sistemas. As propriedades magnéticas de um gás de elétrons semiclássico podem ser descritas em termos de órbitas periódicas curtas e do fluxo magnético que as atravessa [5, 6, 7, 8].

Neste trabalho, é dado enfoque na busca de órbitas periódicas em duas classes de bilhares: o Bilhar Quadrado (integrável) e o Bilhar de Sinai (caótico). Em ambos os casos, temos um campo magnético ortogonal ao plano do Bilhar agindo sobre a partícula carregada. No caso do Bilhar de Sinai, também estamos interessados no papel de órbitas *aprisionadoras*, nas quais o elétron colide várias vezes com o círculo central do bilhar sem colidir com a fronteira quadrada.

Existem na literatura várias publicações anteriores no estudo de Bilhares com um campo magnético ortogonal (doravante denominados genericamente de "Bilhares Magnéticos"). Estes trabalhos deram uma grande contribuição em termos de motivação e referência em nosso estudo. Destacamos aqui alguns deles, resumindo seus principais resultados.

1.1 Resultados experimentais

O estudo de partículas confinadas em poços de potenciais ganhou certa notoriedade com o advento de novas técnicas de litografia em Heteroestruturas, que possibilitam a observação da dinâmica de elétrons confinados. Um recente artigo de Lévy et al.[2] mostra que é possível obter arranjos experimentais em sistemas mesoscópicos onde o livre caminho médio dos elétrons seja grande comparado com as dimensões do sistema de modo que o comportamento do elétron seja muito bem aproximado por um aprisionamento em bilhar, via um modelo de partícula independente.

Foram feitas medidas de susceptibilidade e magnetização, obtendo-se uma grande variação em relação à susceptibilidade de Landau, indicando experimentalmente que a presença da fronteira tem um efeito muito grande na susceptibilidade magnética. Concluiu-se também que tais estruturas em regime balístico apresentam grande sensibilidade a efeitos do tipo Aharonov-Bohm, ou seja, as *órbitas* dos elétrons nestas estruturas (em particular as órbitas curtas) têm um papel importante e as fases geradas pelo fluxo magnético através destas órbitas podem ocasionar uma forte perda de coerência (no sentido em que as ações não são relacionadas por comensurabilidade), que poderia ser uma assinatura do comportamento caótico clássico no sistema quântico. Este trabalho de Lévy et al. abriu novas perspectivas no estudo teórico de modelos do tipo "gás de elétrons" confinado.

1.2 Cálculo de Magnetização e Susceptibilidade

O cálculo de propriedades M.gnéticas para elétrons não iteragentes em Bilhares e em potenciais suaves também foi amplamente discutido do ponto de vista puramente teórico. Nakamura e Thomas [1], por exemplo, tentam estabelecer uma conexão entre a dinâmica caótica e os observáveis macroscópicos. É apresentada uma comparação entre as curvas de susceptibilidade $\chi(B)$ de um Bilhar Elíptico com campo, não-integrável para $B \neq 0$, e de um Bilhar Circular, que permanece integrável mesmo depois de submetido ao campo ortogonal. É sugerida a hipótese de que os picos na suceptibilidade, ocasionados pelos cruzamentos de níveis existentes no caso do Bilhar Circular e inexistentes no caso do Bilhar Elíptico, seriam uma "assinatura" de dinâmica clássica caótica. Além disso, o valor de χ para campo nulo também dependeria de o sistema ser caótico ou não. No entanto, tais conclusões não se sustentam totalmente, conforme foi mostrado posteriormente por diversos autores (Prado et al., Ullmo, Oppen, Agam [5, 6, 7, 8]). O valor de χ com B = 0 não seria determinado pela ausência ou não de integrabilidade clássica mas sim dependeria fortemente do "termo de Weyl", i.e do valor médio da função densidade de níveis, que traduziria apenas propriedades globais do sistema. Ao mesmo tempo, foi também estudado o Oscilador Harmônico em duas dimensões [5, 9], e é mostrado que ocorrem picos na curva de magnetização, mesmo sendo o sistema clássicamente integrável, e que o valor médio de $\chi(B = 0)$ depende da razão entre as freqüências dos osciladores.

Mesmo assim, ainda aparecem "assinaturas" da dinâmica caótica do sistema nas flutuações da magnetização em torno de seu valor médio e é mostrado, em uma análise semi-clássica, que estas flutuações provém de um soma sobre as órbitas periódicas, via fórmula de Gutzwiller.

Deste modo, para que se possa aplicar tais métodos semi-clássicos, é extremente desejável um conhecimento profundo da dinâmica clássica e, em particular, informações sobre as órbitas periódicas clássicas e sobre suas propriedades gerais, tais como estabilidade, ação, período etc.

1.3 Bilhares Magnéticos Clássicos

Um outro ponto de motivação para o estudo de Bilhares magnéticos é o problema de comportamento integrável versus caótico em sistemas hamiltonianos e de como ocorre a transição entre eles. A introdução do campo magnético em bilhares tem como efeito em geral a quebra de integrabilidade, exceção feita aos bilhares com simetria circular. Deste modo, o campo magnético *B* surge como parâmetro natural para a visualização da transição ordem-caos.

Os bilhares clássicos têm sido tema de várias análises e, no que diz respeito ao comportamento integrável ou caótico da dinâmica envolvida, têm-se feito progressos no sentido de encontrar propriedades gerais, em particular no caso de Bilhares Magnéticos. Destacamos dois exemplos.

Uma descrição mais geral sobre bilhares em um campo magnético pode ser encontrada no trabalho de Robnik e Berry [4], onde temos uma análise de estabilidade para fronteiras convexas "sem pontas", onde tanto o raio de curvatura $\rho(s)$ como o bordo da fronteira são diferenciáveis e não apresentam descontinuidades. A convexidade da fronteira implica que $\rho(s)$ estará limitado por constantes positivas: $0 < \rho_{min} \leq \rho(s) \leq \rho_{max} < \infty$

Robnik e Berry propõem uma classificação da Dinâmica comparando o raio R da órbita circular no interior do Bilhar (veja eq. 2.3.2) com estes extremos de ρ . O

comportamento caótico aparece no regime onde $\rho_{min} < R < \rho_{max}$, sendo a dinâmica mais regular para $R < \rho_{min}$ e $R > \rho_{max}$.

Dentre as conclusões do trabalho, podemos destacar a de que para campos muito altos o sistema "perde caoticidade", no sentido de que no limite $B \to \infty$ (ou $R \to 0$) a integrabilidade é recuperada. Quando R é muito pequeno, para qualquer condição inicial temos o chamado regime de *adiabatic skipping*, o qual é definido pelo o aparecimento de uma nova constante de movimento, denominada pelos autores "invariante adiabético" C(s, p) (vide eq. 2.3.2).

No trabalho de Berglund e Kunz [13] é feita uma abordagem parecida, com o intuito de solidificar algumas conclusões de Robnik e Berry. Entre outros resultados, vemos uma derivação de uma expressão geral para a Matriz de Monodromia do Mapa para fronteiras "bem comportadas". A questão do Invariante adiabático também é discutida para casos onde a fronteira *não é* bem comportada, como no caso de bilhares poligonais. A conclusão é a de que nestes casos a integrabilidade não é recuperada pois existe uma descontinuidade em C(s, p) ocasionada pela presença das "pontas" na fronteira. É feita também uma análise de algumas famílias de órbitas periódicas no Bilhar Quadrado com Campo, em particular a família das órbitas simétricas com 4k batidas ou "bounces" na parede do bilhar. Ao que parece, tais órbitas forma obtidas de forma "artesanal" e analítica, sem uma busca numérica mais aprofundada como a que fazemos neste trabalho.

1.4 Objetivos

Diante de tais motivações, nos propusemos neste trabalho a fazer um estudo mais rigoroso no que se refere às órbitas periódicas clássicas em dois bilhares magnéticos: o Bilhar Quadrado e o Bilhar de Sinai, utilizados aqui como representantes, no caso de campo nulo, de Bilhares integráveis e caóticos respectivamente.

Propomos aqui um método numérico eficiente na busca de órbitas periódicas. Entendemos que esse método é de aplicação abrangente, ou seja, pode ser generalizado para outros sistemas além dos aqui estudados, em particular Bilhares com outras geometrias de fronteira.

Dentro deste estudo, incluímos a catalogação de órbitas e a determinação de certas propriedades inerentes a elas tais como estabilidade, período e ação, para diferentes valores de campo, utilizado aqui como parâmetro do sistema. Desta forma, um dos resultados que apresentamos é um compêndio de órbitas periódicas dos dois sistemas, para diferentes valores de campo. Esperamos que essa análise da dinâmica clássica dos Bilhares possa ser futuramente aplicada em cálculos de natureza semiclássica, onde as órbitas periódicas representam um papel importante [15]. Esta tese está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2 fazemos uma descrição dos Bilhares estudados e mostramos algumas de suas características. No Capítulo 3 descrevemos o método de procura de órbitas quase-periódicas. O Método de Convergência de órbitas periódicas é descrito no Capítulo 4. Os Capítulos 5 e 6 trazem os resultados obtidos em termos de aplicações do método para o estudo de bifurcações de órbitas e em termos de estatísticas com as órbitas convergidas. No Apêndice 1 é deduzida um expressão para a Ação em Bilhares Magnéticos e no Apêndice 2 é mostrado um compêndio de 72 órbitas periódicas, selecionadas de um total de aproximadamente 2000, para ambos os bilhares.

Capítulo 2

Breve descrição dos Sistemas Físicos estudados: Bilhar Quadrado e Bilhar de Sinai

2.1 Descrição

O termo "bilhar" é usado no contexto de Sistemas Dinâmicos para descrever sistemas de dois graus de liberdade onde uma fronteira de potencial infinito confina uma ou mais partículas em seu interior. O espaço de fase fica então dividido em uma região acessível às particulas e uma região inacessível, onde $V \rightarrow \infty$. Nos chamados Bilhares livres não existem outros potenciais atuando sobre a partícula além do poço infinito V. Assim, classicamente, a interação da partícula com o potencial se dá através de colisões especulares, tal qual uma mesa de bilhar ideal, onde as trajetórias são retas na região permitida.

Como a ação do potencial nestes casos só é sentida quando a partícula colide com a fronteira, o formato geométrico desta última terá uma influência fundamental no tipo de movimento que ocorre no interior do Bilhar. De fato, é o formato geométrico da Fronteira que determina a existência ou não de constantes de movimento adicionais. Ou seja: o formato geométrico da fronteira classificará o Bilhar como *integrável* ou *não-integrável* e conseqüentemente determinará quais os aspectos qualitativos da dinâmica da partícula aprisionada. Dentre os não-integráveis, temos sistemas onde *todas* as orbitas são instáveis, denominados *caóticos* e sistemas onde o Espaço de fase apresenta regiões regulares e regiões instáveis, denominados *mistos*. Fronteiras como o círculo, o quadrado e a elípse deixam o sistema integrável como um todo enquanto bilhares como o Estádio de Bunimovich (dois semi-círculos unidos por segmentos de reta) ou o Bilhar de Sinai (uma fronteira quadrada com um disco espalhador no centre) são sistemas totalmente caóticos.

Os Bilhares são sistemas físicos extremamente simples. Podemos resumir a ação da fronteira sobre a partícula através de uma "lei de colisão especular". Durante a colisão, a componente normal do momento muda de sentido instantaneamente, ou seja, $\vec{p} \cdot \vec{n}$ muda de sinal no momento exato da colisão. Tal alteração brusca no momento \vec{p} implica em uma alteração brusca na trajetória e temos então deflexão instantânea da partícula. Como a componente tangencial do momento permanece inalterada durante a colisão e a componente normal apenas muda de sentido, o ângulo da trajetória com o vetor normal à fronteira no ponto de colisão permanece inalterado. Temos assim as Condições de Contorno durante a colisão: o ângulo θ_i de incidência é igual ao ângulo θ_r de reflexão. Estes ângulos dependem do vetor normal $\vec{n}(\vec{r})$ à fronteira, que pode evidentemente depender do ponto de colisão. Temos então um sistema bastante simples no geral, com condições de contorno triviais.

Podemos incluir outros potenciais no interior do bilhar de forma que a Hamiltoniana na região permitida às partículas não mais seja a Hamiltoniana livre. Em particular, a introdução de um campo magnético ortogonal ao plano do Bilhar faz com que as trajetórias passem a ser *arcos de circunferências*, conforme mostraremos mais adiante.

2.2 Coordenadas de Birkhoff

O modo usual de associar mapas conservativos ao movimento em sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade é através de Seções de Poincaré, que constituem uma ferramenta extremamente poderosa para a visualização de aspectos do Espaço de Fase. No caso de Bilhares, a presença do poço de Potencial infinito introduz complicações no uso de seções de Poincaré. Nestes sistemas, a Hamiltoniana não é bem comportada em todo o domínio do espaço de fase: ocorrem descontinuidades graves no momento \vec{p} durante as colisões. A componente $\vec{p} \cdot \vec{n}(\vec{r})$ simplesmente muda abruptamente de sinal, de modo que $\frac{\partial H}{\partial p}$ não fica bem definida nestes pontos. Deste modo, uma alternativa eficiente é utilizar seções com outras coordenadas

Deste modo, uma alternativa eficiente é utilizar seções com outras coordenadas canônicas, que definam um Mapa $(q_n, p_n) \rightarrow (q_{n+1}, p_{n+1})$ que conserve área tal qual uma seção de Poincaré. As *Coordenadas de Birkhoff* e o Mapa de Seção definido por elas aparecem então como substitutos naturais às seções de Poicaré no caso específico de Bilhares.

Definimos um par de coordenadas a cada colisão. A coordenada l dá a informação sobre a posição do ponto de colisão no perímetro da fronteira e a outra coordenada é o cosseno do ângulo de reflexão da trajetória, sendo proporcional então à componente tangencial do momento no ponto de colisão. Essas novas variáveis correspondem simplesmente a coordenadas e momentos tangentes à fronteira do Bilhar. Podemos visualizá-las como parte de uma transformação do tipo $(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (q_{||}, q_{\perp}, p_{||}, p_{\perp})$ onde a seção é construída marcando $q_{||} \in p_{||}$ quando $q_{\perp} = 0 \in p_{\perp} > 0$.



Figura 2.1: Coordenadas de Birkhoff ilustradas no Bilhar Quadrado

É possível mostrar que tal sistema de coordenadas define um Mapa conservativo do tipo:

$$\begin{cases} l_{n+1} = f(l_n, \cos(\theta_n)) \\ \cos(\theta_{n+1}) = g(l_n, \cos(\theta_n)) \end{cases}$$

onde as funções $f(l_n, \cos{(\theta_n)}) e g(l_n, \cos{(\theta_n)})$ dependem essencialmente da geometria da fronteira.

A aplicação das Coordenadas de Birkhoff pode ser estendida para Bilhares genéricos, onde o potencial em seu interior não é necessariamente nulo [4, 13]. Em particular, aplicaremo-nas ao caso dos Bilhares Magnéticos. Nesta situação, $f(l_n, \cos(\theta_n))$ e $g(l_n, \cos(\theta_n))$ dependerão também do Potencial interior e de seus parâmetros.

Ocorre porém que o Mapa de Seção mostrará apenas os aspectos relativos às colisões com a fronteira. Portanto, informações sobre o movimento entre duas colisões consecutivas não são obtidas diretamente no Mapa. Isto pode esconder aspectos importantes da dinâmica no interior do Bilhar se esta não for simples como no caso livre. Voltaremos a este ponto em discussão posterior sobre os aprisionamentos no Bilhar de Sinai.

2.3 O Bilhar Quadrado

2.3.1 O caso livre

Conforme mencionamos, o Bilhar de fronteira quadrada é um dos casos onde o movimento é integrável. Dada uma condição inicial $(E, l_0, \cos \theta_0)$, temos duas constantes de movimento: a Energia e a componente normal do momento $(\vec{p} \cdot \vec{n} = \sqrt{2mE} \sin \theta_0)$.

A componente normal do momento se conserva pois temos apenas dois ângulos de reflexão possíveis durante o movimento da partícula: $\theta_0 e \frac{\pi}{2} - \theta_0$, o que pode ser facilmente mostrado como um exercício geométrico elementar:



Figura 2.2: Prova: apenas dois ângulos permitidos $\rightarrow \theta_1 = \theta_0$

O Mapa de Seção será então formado por *linhas* onde cos θ =cte. em cada linha. Para órbitas genéricas (não periódicas), todos os pontos ao longo da fronteira são eventualmente visitados se o número de iterações tender a infinito. Assim, dado um ângulo inicial θ_0 que gere uma órbita não fechada, a partícula colide com todos os pontos da fronteira (i.e. varre todos os *l*s possíveis) com ângulo de incidência θ_0 ou $\frac{\pi}{2} - \theta_0$, gerando então as linhas. Em nossos cálculos tomamos o lado do quadrado como sendo unitário. Devido à simetria do Bilhar, o Mapa de Seção é separado em quatro regiões idênticas: (0 < l < 1), (1 < l < 2), (2 < l < 3) e (3 < l < 4),cada uma correspondendo a uma das quatro "paredes". Para melhor visualização do Mapa, podemos restrigir o Mapa à "primeira parede", onde 0 < l < 1. Assim, como vemos na figura acima, dado (l_0, θ_0) , θ_1 corresponderá à próxima colisão com a mesma parede. Esta simetria não é quebrada com a introdução do campo magnético.



Figura 2.3: Mapa de Seção para o Bilhar Quadrado livre

2.3.2 A quebra de Integrabilidade com a introdução do campo

Quando introduzimos um campo magnético ortogonal ao plano do bilhar, a Hamiltoniana no interior do bilhar deixa de ser do tipo "partícula livre" e passa a ter a forma:

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x - \frac{qyB}{c} \right)^2 + p_y^2 \right]$$

Neste caso, escolhemos $\vec{A} = -By\vec{e}_x$ de modo a termos $\vec{B} = B\vec{e}_z$. As equações de movimento resultantes serão então:

$$\dot{p_x} = 0$$

$$egin{array}{rcl} \dot{p_y} &=& \displaystylerac{qB}{mc}\left(p_x-\displaystylerac{qyB}{c}
ight)\ \dot{x} &=& \displaystylerac{p_x}{m}-\displaystylerac{qyB}{mc}\ \dot{y} &=& \displaystylerac{p_y}{m} \end{array}$$

Manipulando adequadamente as equações de movimento, é possível mostrar que a trajetória no interior do Bilhar descreve uma circunferência cujo raio é inversamente proporcional ao campo, na forma:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = \left(\frac{\sqrt{2E}}{B}\right)^2$$

Em nossas simulações computacionais, fixamos a Energia em $E = \frac{1}{2}$ e a carga e velocidade da luz em c = |q| = 1, de modo que o raio da trajetória passa a ser simplesmente o inverso de campo magnético.

Como conseqüência direta da introdução do campo, as órbitas passam a ser circulares, o que implica que o ângulo de incidência θ_i da partícula na parede do bilhar será dado pela inclinação da reta tangente à trajetória no ponto de colisão. Ou seja, θ_i vai depender do comprimento do arco descrito pela trajetória e das coordenadas $(l, \cos \theta)$ da colisão anterior. A componente normal do momento nas colisões com a parede do Bilhar passa a não mais se conservar uma vez que $\vec{p} \cdot \vec{n}$ passa a depender do ângulo de incidência em cada batida e este não mais estará restrito a apenas dois valores como no caso livre. A introdução do campo causa então a quebra de integrabilidade no Bilhar Quadrado.

De acordo com o teorema KAM ([10, 11], por exemplo) quando uma Hamiltoniana integrável sofre uma perturbação não integrável, temos a destruição dos *toros ressonantes* no Espaço de Fase. Apesar de o Bilhar Quadrado com campo não reunir todas as condições necessárias para satisfazer o teorema (devido ao potencial infinito, a Hamiltoniana não é suficientemente bem comportada, por exemplo), esta destruição de toros de fato ocorre. No caso livre, o movimento está limitado a linhas $\theta = \text{const.}$ no Mapa de Seção e estas linhas correspondem aos toros onde o movimente ocorre. Quando introduzimos o campo, a estrutura de linhas desaparece e dá lugar a *ilhas* cercadas de regiões de instabilidade, que aumentam conforme variamos o parâmetro, tal qual uma situação de validade do teorema KAM.

Nas figuras a seguir, vemos os Mapas de Seção para alguns valores de Campo.





0.5

0.0

-0.6

0.0

-0.5

19



Figura 2.6: Mapas de Seção para o Bilhar Quadrado com campo



Figura 2.7: Mapa de Seção para o Bilhar Quadrado com campo

Vemos que, para campos al₁os, o Mapa tende a ter uma "aparência" mais regular, com a estrutura de linhas sendo recuperada. Como mostram Robnik e Berry [4] e Berglund e Kunz [13], no regime de campos altos, denominado "adiabatic skipping", a integrabilidade é recuperada sob certas condições, pois temos o aparecimento de um *invariante adiabático*, dado por:

$$C(l,\cos\theta) = \frac{R\kappa(l) + \cos\theta(3 - 2\cos^2\theta)}{(1 - \cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

onde R é o raio da órbita e $\kappa(l)$ é a curvatura da fronteira. Este resultado, porém, somente é válido para fronteiras " sem pontas", onde tanto o raio de curvatura como o bordo da fronteira são "bem comportados", o que evidentemente não é o nosso caso. No entanto, se restringirmos o Mapa à primeira parede, tais condições se aplicam e temos a "aparência" de termos recuperado a integrabilidade. O sistema como um todo não recupera a integrabilidade pois $C(l, \cos \theta)$ sofre descontinuidades quando a partícula passa de uma parede para outra.

2.4 O Bilhar de Sinai

2.4.1 O caso livre

Em contraste com o Bilhar Quadrado, o Bilhar de Sinai é um sistema totalmente caótico se o campo magnético é nulo. A única constante de movimento é a Energia pois a presença do círculo interno destrói a conservação da componente normal do momento, que passa a poder assumir qualquer valor entre $|\vec{p}| = -|\vec{p}|$. Assim, dada uma condição inicial, o movimento não está mais restrito a toros no Espaço de Fase, tendo então acesso a qualquer ponto da superfície de Energia. Isto pode ser visualizado através do Mapa de Seção:



Figura 2.8: Mapa de Seção para o Bilhar de Sinai livre

Este Mapa é apresentado na forma "completa", ou seja, com l variando entre $0 \le l \le 4$. Podemos notar o aparecimento de linhas em algumas regiões, por exemplo para $\cos \theta \approx 0$ e 0.8 < l < 1. Estas linhas correspondem a trajetórias com ângulo inicial próximo a 90 graus que colidem diretamente com a parede oposta e voltam durante várias iterações, até serem eventualmente espalhadas pelo círculo central. Como o raio do disco é fixo em $R_i = 0.3$, tais órbitas somente existem quando a parte inteira de l satisfaz 0 < int(l) < 0.3 ou 0.8 < int(l) < 1.

Uma das características peculiares do Bilhar de Sinai é a de que a fronteira é disjunta: o movimento é limitado por uma fronteira circular interna e uma fronteira quadrada externa. O mapa de Seção aqui utilizado não apresenta diretamente as colisões com o círculo interno.

O Bilhar de Sinai possui ainda a propriedade de "mixing", ou seja, elementos de área do mapa se deformam quando iterados de maneira que após um número infinito de interações, o elemento estará densamente distribuído por todo o domínio do Mapa, o que implica em ergodicidade. Na verdade, o Bilhar de Sinai possui propriedades idênticas ao "Fluido de Esferas Rígidas", cujo mixing foi rigorosamente demonstrado por Sinai, de acordo com M. Berry [12].

Um parâmetro inerente ao Bilhar do Sinai é o raio do disco interno, R_i . Quando o raio vai a zero, o Bilhar se reduz ao Bilhar Quadrado, tornando-se então integrável. No entanto, tal passagem não é "suave" no sentido em que não temos um regime misto intermediário separando a situação regular da caótica. A simples presença de um disco com raio $R_i = \epsilon \ll 1$ torna o sistema completamente ergódico. O que ocorre é que o tempo gasto para uma órbita visitar todo o domínio do Mapa vai a infinito se $\epsilon \to 0$. Em nosso caso, fixamos $R_i = 0.3$ para todas as simulações, com ou sem campo, mantendo o quadrado externo com lado unitário.

2.4.2 A introdução do campo

A introdução do campo não altera significativamente as propriedades ergódicas do Bilhar de Sinai. Vemos o aparecimento de algumas ilhas para campos intermediários. No limite de campos muito grandes, o Mapa de Seção tende a coincidir com o do Bilhar Quadrado, uma vez que a partícula, a partir de um certo raio crítico, não mais colide com o círculo interno. Para $R_i = 0.3$ esse campo crítico é B = 10.



Figura 2.9: Mapas de Seção para o Bilhar de Sinai com campo.



Figura 2.11: Mapas de Seção para o Bilhar de Sinai com campo

24

Capítulo 3

A procura por Órbitas Periódicas no Mapa de Seção

O método numérico de busca de órbitas periódicas por nós desenvolvido baseia-se em um processo de procura diretamente no domínio do Mapa de Seção dos Bilhares. Pode ser mostrado que as órbitas periódicas estão densamente distribuídas dentro do domínio do Mapa de Seção [14, 15], o que nos diz que é possível utilizar o Mapa como "fonte" de órbitas periódicas. O que queremos então é uma método que encontre tais órbitas com boa precisão e que seja eficiente computacionalmente, otimizando o tempo de processamento e o espaço de armazenamento em disco.

Tomamos então um método de convergência para órbitas periódicas, que atua de forma iterativa. Dada uma aproximação inicial (denominada *órbita-teste*) que esteja a uma distância d_0 da órbita periódica procurada, queremos que, após n aplicações do algorítmo de convergência sua distância d_n seja menor que um certo valor de controle δ . Teoricamente, devemos ter

$$\lim_{n \to \infty} d_n = 0$$

A distância d e o parâmetro de controle do método serão definidos adiante.

3.1 Procura das Órbitas-teste

A determinação de órbitas-teste próximas o suficiente de uma órbita periódica é um fator determinante para que o método de convergência de órbitas tenha um bom desempenho. Desta forma, é fundamental que tenhamos um processo que procure tais órbitas "boas candidatas" no Mapa de Seção e que funcione de forma a separar as "boas candidatas" das "más candidatas".

3.1.1 Órbitas-teste no Bilhar Quadrado

Para o Bilhar Quadrado, um primeiro método para se obter órbitas candidatas seria utilizar órbitas conhecidas do sistema livre (sem campo). Utilizando algumas propriedades analíticas do Bilhar Quadrado livre, este método obtém cada órbitateste separadamente e as utiliza para obter novas órbitas para o sistema com campo. Este processo é dito "artesanal" pois cada órbita é obtida separadamente, sem uma produção de órbitas "em escala".

No regime de campo B perturbativo ($B \approx 0$), uma boa órbita-teste é uma órbita periódica para o bilhar sem campo. Se conseguirmos convergir uma órbita de $B_1 = \epsilon \ll 1$ a partir da órbita-teste em $B_0 = 0$, podemos usar a órbita com $B = B_1$ como teste para $B_2 = B_1 + \epsilon$ e assim sucessivamente, até atingirmos o campo desejado através de um processo "adiabático".

A determinação de órbitas periódicas para o Bilhar Quadrado pode ser feita de forma analítica. Teremos uma órbita periódica sempre que a tangente do ângulo de saída for um número racional. Isto pode ser bem visualizado nas figuras a seguir, onde ilustramos algumas órbitas $(tan(\theta) = \nu)$:



Podemos demonstrar isto através de propriedades geométricas e de simetria do Bilhar Quadrado. Por simplificação, tomamos o lado como sendo unitário. A dinâmica da partícula no bilhar pode ser bem descrita dada a sua inclinação inicial e o ponto de saída na parede do Bilhar, parâmetros que definem uma reta (sendo esta a trajetória inicial da partícula). Esta reta intercepta a fronteira do bilhar no ponto da primeira colisão. Temos então uma *reflexão* da reta inicial, conforme mostra a figura :



O próximo ponto de colisão da partícula com a parede do bilhar é a reflexão do ponto onde a reta inicial corta a parede de um hipotético *bilhar adjacente* (vide figura acima). Este bilhar adjacente está relacionado com o primeiro por uma operação de reflexão. E todos os outros bilhares que são adjacentes a este estão relacionados ao primeiro por alguma operação de simetria e/ou operações de translação. Desta forma, todos os outros pontos de colisão no bilhar podem ser obtidos a partir dos pontos de intersecção da reta inicial com a *malha* de bilhares adjacentes através de simples operações de simetria e translação.

Desta forma, teremos uma órbita periódica quando um dos pontos de intersecção da reta inicial com a malha de bilhares puder ser levado ao ponto de saída por uma translação e/ou uma ou mais operações de simetria (se existirem tais operações, elas definirão as simetrias da órbita). Esta periodicidade ocorre quando a inclinação da reta é *racional*, conforme podemos ver no exemplo da figura :



Nas órbitas periódicas do Bilhar Quadrado, a razão do número de colisões com as paredes em Y com o número de colisões em X nos dá justamente a tangente do ângulo de saída. Esta também é a razão das periodicidades dos movimentos nas direções Y e X, sendo a órbita, desta maneira, similar a uma figura de Lissajous. Na verdade, para cada ν , temos não apenas uma órbita mas uma *família* (um toro) de órbitas periódicas, já que podemos mudar a coordenada do ponto inicial e ainda obter uma nova órbita onde a relação do número de colisões em X e em Y permanece a mesma.

Este método traz desvantagens claras. Em primeiro lugar, para campos razoavelmente altos, o processo toma um enorme tempo computacional, pois precisaríamos calcular uma infinidade de órbitas até obter a desejada. Além do mais, como veremos na capítulo que discute as bifurcações, existem famílias de órbitas que sobrevivem somente até um certo campo $B_{\rm max}$ e temos também famílias que passam a existir somente a partir de um campo mínimo. Assim, este método não nos dá acesso a todas as órbitas do sistema, o que é um sério fator limitante.

3.1.2 Procura diretamente no Mapa de Seção

Em vista disso, a melhor escolha seria utilizar um método que procura as órbitasteste diretamente no Mapa de Seção, procedimento já utilizado anteriormente [19, 21].

As órbitas periódicas formam um conjunto denso no Mapa de Seção, o que nos garante que, dado um ponto (X, Y) no domínio do Mapa, teremos uma órbita periódica em um ponto infinitesimalmente próximo a (X, Y). Podemos então utilizar este resultado a nosso favor e vemos que um modo natural de encontrar órbitas-teste é "varrer" o domínio do Mapa em busca de órbitas periódicas. Um método eficiente de realizar tal varredura é seccionar o domínio do mapa, dividindo-o em porções menores.

Escolhemos dividir o mapa em *linhas*, construídas fixando Y (cos θ =constante) e varrendo X (*l*). Numericamente, cada linha é formada por pontos separados por uma distância ΔX . Separando as linhas em distâncias ΔY , temos uma divisão do domínio do mapa onde cada "ponto" de varredura engloba uma região de área $A = \Delta Y \Delta X$. Quanto menor for A, mais precisa será nossa varredura.

Inicialmente nossa varredura era baseada em uma iteração por *pontos*, ou seja, discretizávamos cada linha em pontos, cada um deles do tipo (X_1, Y_1) . Se após Naplicações do mapa o ponto $(X_{N+1}, Y_{N+1}) = M^N(X_1, Y_1)$ retornar a uma vizinhança $(\delta X, \delta Y)$ de (X_1, Y_1) , temos uma órbita candidata. Temos então uma órbita-teste de período N (N pontos no Mapa) se as condições

$$\begin{cases} X_{N+1} - X_1 &\leq \delta X \\ Y_{N+1} - Y_1 &\leq \delta Y \end{cases}$$

forem satisfeitas simultaneamente.

Existe um parâmetro importante a ser considerado: o tamanho da "janela" $(\delta X, \delta Y)$ em torno de (X_1, Y_1) . Se a janela for muito pequena, podemos estar perdendo órbitas que poderiam ser convergidas mas que "não foram pegas" pela janela. Por outro lado, se a janela for grande, estaremos obtendo além de órbitas-teste ditas "boas" uma enorme quantidade de "lixo", órbitas-teste que não convergem para órbitas periódicas. Também existe o problema de "órbitas repetidas", ou seja, várias órbitas-teste diferentes acabam sendo convergidas para a mesma órbita periódica.

O desejável seria que o parâmetro $(\delta X, \delta Y)$ fosse otimizado de forma a se obter o maior número de órbitas-teste com o menor "lixo" possível. A conclusão foi que em alguns casos tal otimização não existe ou não é alcançável. Para alguns valores de campo, quanto maior o tamanho da janela, mais órbitas-teste "boas" eram obtidas mas a quantidade de dados "inúteis" também aumentava. Em alguns casos, este "lixo" chega a comprometer a eficiência computacional do método: os arquivos de dados simplesmente são grandes demais para serem manipulados, o que inviabiliza uma utilização mais sistemática do método.

A solução encontrada foi a de utilizar iteração de linhas inteiras no Mapa de Seção, ao invés do mapeamento de pontos individuais. Passamos a procurar por cruzamentos da linha iterada com a linha inicial. As órbitas-teste são então obtidas quando a linha do Mapa cruza com si própria após N aplicações do mapa. Isso reduziu consideravelmente o "lixo", uma vez que não mais consideramos apenas pontos isolados mas sim levamos em consideração a linha inteira na obtenção das órbitas-teste, o que elimina a necessidade de uma "janela" em torno dos pontos.

Mostramos nas figuras 3.4 e 3.5 a seguir alguns exemplos do mapeamento de linhas. Em ambos os casos, N = 4. Vemos que o mapeamento no Bilhar de Sinai é bem mais complexo que no caso do Bilhar Quadrado. No mapa do Bilhar de Sinai, estão assinalados os cruzamentos de linhas, cuja visualização é mais difícil.



Figura 3.4: Mapeamento de linhas no Mapa de Seção - Bilhar Quadrado



Figura 3.5: Mapeamento de linhas no 'Mapa de Seção - Bilhar de Sinai

Na figura 3.4 são iteradas quatro linhas, correspondentes a $\cos \theta = 0.4, 0.5, 0.6$ e 0.7 no Bilhar Quadrado com B = 0.8. Para uma melhor visualização, os pontos correspondentes a linhas diferentes estão representados com símbolos diferentes. Para cada linha, a separação entre os pontos é $\Delta l = 0.01$. Existe apenas um cruzamento por linha.

Ne figura 3.5 é feito o mapeamento de três linhas ($\cos \theta = 0.3, 0.5 e 0.7$) para o Bilhar de Sinai com B = 0.6. O número de cruzamentos é maior que no Bilhar Quadrado, mesmo tendo uma linha a menos. Estão assinalados seis cruzamentos, sendo três na linha $\cos \theta = 0.3$, dois para $\cos \theta = 0.5$ e um para $\cos \theta = 0.7$. A separação entre os pontos é menor ($\Delta l = 0.001$) pois o mapa é mais complexo e é preciso um número maior de pontos para definir a linha iterada.

O cruzamento ocorre quando dois pontos adjacentes, $(P_1 e P_2)$, depois de iterados pelo Mapa M(P), caem em "lados opostos" da linha original (um acima e outro abaixo), como mostra a figura 3.6. Fazemos então uma linearização do Mapa entre os pontos $M(P_1) e M(P_2)$ para descobrir o ponto exato de cruzamento (representado na figura 3.6 pelo símbolo \diamondsuit). Isto nos permite calcular uma aproximação para a condição inicial pertencente à linha que, após N iterações, seja levada a este ponto de cruzamento. Esta condição inicial é obtida a partir da distância $D_{M(P)}$ entre \diamondsuit $e M(P_1)$. A condição inicial é tomada como o ponto a uma distância d_P de P_1 , relacionada a $D_{M(P)}$ pela proporção entre as distâncias entre $(P_1 e P_2) e (M(P_1) e$ $M(P_2)$). Finalmente, iteramos esta condição inicial e obtemos a órbita-teste, que será convergida pelo Método da Matriz de Monodromia, que apresentaremos no próximo capítulo.

Cada cruzamento fornece um órbita-teste. Pelo nosso método, os ângulos iniciais e finais da órbita teste serão muito parecidos, pois os pontos estarão próximos da mesma linha. Porém a distância em l dos dois pontos pode ser "grande", de modo que a órbita pode não ser "quase fechada". Poderíamos então colocar um "filtro" tomando a distância δl dos pontos inicial e final como parâmetro e eliminar as órbitas-teste onde esta distância fosse grande. No entanto, notamos que a convergência do método é muito mais sensível aos ângulos iniciais do que aos ls. A convergência de órbitas-teste com δl "grande" ocorre na prática, de modo que preferimos não desprezar tais órbitas.

Na figura 3.6, mostramos a obtenção de uma órbita-teste de período N = 4através do método por cruzamentos no Bilhar Quadrado com campo. Para uma melhor visualização do processo, é mostrada também a órbita periódica correspondente representada por * (figura 3.7). Esta órbita foi obtida após a convergência e representa a órbita de 4 bounces estável, mostrada na primeira página do Apêndice 2.



Figura 3.6: Cruzamento da linha $cos(\theta) = 0.6$ com si própria após 4 iterações



Com este método, obtemos não mais do que uma órbita-teste por cruzamento, o que significa uma maior "limpeza" dos resultados. Uma análise comparativa entre este e o método anterior mostrou que não há perda de órbitas, de modo que os cruzamentos de linhas podem ser utilizados como indicadores da existência de órbitas periódicas com boa eficiência. Concluímos que, no método anterior, era possível que um mesmo cruzamento originasse várias órbitas-teste e todas acabavam sendo convergidas para a mesma órbita periódica. O fato de não termos mais "janelas" com este método também faz uma melhor filtragem das órbitas "ruins", órbitas que não convergem para órbitas periódicas, o que reduz consideravelmente o "lixo" computacional.

Capítulo 4

O Método Numérico de Convergência de órbitas

Uma vez identificadas as órbitas-teste, o passo seguinte é obter as órbitas periódicas associadas. Um método poderoso para a convergência de órbitas periódicas utiliza a matriz de monodromia do Mapa de Seção [16, 17, 18, 19]. O processo consiste em convergir uma órbita-teste para uma órbita periódica através de iterações sucessivas. Cada uma destas iterações "corrige" a órbita-teste, deixando-a cada vez mais próxima da órbita periódica desejada. Ou seja, definida uma "distância" conveniente entre a órbita-teste e a órbita periódica, queremos que tal distância vá a zero quando o número de correções vai a infinito.

Dado o sistema dinâmico com dois graus de liberdade, seu Mapa de Seção pode ser escrito na forma compacta :

$$\begin{cases} X_{n+1} = f(X_n, Y_n) \\ Y_{n+1} = g(X_n, Y_n) \end{cases}$$

onde $f(X_n, Y_n)$ e $g(X_n, Y_n)$ são funções que dependem do potencial e das condições de contorno do sistema. Neste contexto, uma órbita periódica é caracterizada por um conjunto de pontos $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_N, Y_N)$, pertencentes ao Mapa, tais que $(X_{N+1}, Y_{N+1}) = (X_1, Y_1)$.

Temos inicialmente uma órbita-teste $(X_1^{(0)}, Y_1^{(0)}), (X_2^{(0)}, Y_2^{(0)}), ..., (X_N^{(0)}, Y_N^{(0)})$ com $(X_{N+1}^{(0)}, Y_{N+1}^{(0)}) \equiv (X_1^{(0)}, Y_1^{(0)})$, separada da órbita periódica por correções $(X_1^{\delta}, Y_1^{\delta}), (X_2^{\delta}, Y_2^{\delta}), ..., (X_N^{\delta}, Y_N^{\delta})$. Note que a órbita-teste não é necessariamente uma solução das equações do Mapa. Pode ser apenas um conjunto de pontos adequadamente escolhido.

Queremos determinar a órbita $(X_n^{(1)}, Y_n^{(1)})$ dada por

$$(X_n^{(1)}, Y_n^{(1)}) = (X_n^{(0)} + X_n^{\delta}, Y_n^{(0)} + Y_n^{\delta})$$

Assumindo a princípio que a órbita $(X_n^{(1)}, Y_n^{(1)})$ seja uma órbita periódica do Mapa, ou seja, $(X_{N+1}^{(1)}, Y_{N+1}^{(1)}) = (X_1^{(1)}, Y_1^{(1)})$, temos

$$\begin{cases} X_{n+1}^{(1)} = f(X_n^{(1)}, Y_n^{(1)}) \Rightarrow X_{n+1}^{(0)} + X_{n+1}^{\delta} = f(X_n^{(0)} + X_n^{\delta}, Y_n^{(0)} + Y_n^{\delta}) \\ Y_{n+1}^{(1)} = g(X_n^{(1)}, Y_n^{(1)}) \Rightarrow Y_{n+1}^{(0)} + Y_{n+1}^{\delta} = g(X_n^{(0)} + X_n^{\delta}, Y_n^{(0)} + Y_n^{\delta}) \end{cases}$$

Se as correções forem suficientemente pequenas e as funções $f(X_n, Y_n) \in g(X_n, Y_n)$ forem suaves, podemos expandi-las em Série de Taylor. Em primeira ordem, temos

$$\begin{cases} f(X_n^{(1)}, Y_n^{(1)}) \approx f(X_n^{(0)}, Y_n^{(0)}) + \frac{\partial f}{\partial X_n^{(0)}} X_n^{\delta} + \frac{\partial f}{\partial Y_n^{(0)}} Y_n^{\delta} \\ g(X_n^{(1)}, Y_n^{(1)}) \approx g(X_n^{(0)}, Y_n^{(0)}) + \frac{\partial g}{\partial X_n^{(0)}} X_n^{\delta} + \frac{\partial f}{\partial Y_n^{(0)}} Y_n^{\delta} \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} X_{n+1}^{\delta} = -X_{n+1}^{(0)} + \frac{\partial f}{\partial X_n^{(0)}} X_n^{\delta} + \frac{\partial f}{\partial Y_n^{(0)}} Y_n^{\delta} + f(X_n^{(0)}, Y_n^{(0)}) \\ Y_{n+1}^{\delta} = -Y_{n+1}^{(0)} + \frac{\partial g}{\partial X_n^{(0)}} X_n^{\delta} + \frac{\partial g}{\partial Y_n^{(0)}} Y_n^{\delta} + g(X_n^{(0)}, Y_n^{(0)}) \\ \begin{cases} X_{n+1}^{\delta} = -\frac{\partial f}{\partial X_n^{(0)}} X_n^{\delta} + \frac{\partial f}{\partial Y_n^{(0)}} Y_n^{\delta} + a_n \\ Y_{n+1}^{\delta} = -\frac{\partial g}{\partial X_n^{(0)}} X_n^{\delta} + \frac{\partial g}{\partial Y_n^{(0)}} Y_n^{\delta} + b_n \end{cases}$$
(4.1)

onde $a_n \in b_n$ são definidos por

$$a_n = -X_{n+1}^{(0)} + f(X_n^{(0)}, Y_n^{(0)})$$

$$b_n = -Y_{n+1}^{(0)} + g(X_n^{(0)}, Y_n^{(0)})$$

Para obter uma forma mais compacta para as equações, é conveniente definir as seguintes matrizes :

$$Z_{n}^{\delta} \equiv \left(\begin{array}{c} X_{n}^{\delta} \\ Y_{n}^{\delta} \end{array}\right) \; ; \; U_{n} \equiv \left(\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial X_{n}^{(0)}} & \frac{\partial f}{\partial Y_{n}^{(0)}} \\ \frac{\partial g}{\partial X_{n}^{(0)}} & \frac{\partial g}{\partial Y_{n}^{(0)}} \end{array}\right) \; ; \; C_{n} \equiv \left(\begin{array}{c} a_{n} \\ b_{n} \end{array}\right)$$

de modo que a equação (4.1) pode ser escrita na forma de uma relação de recorrência

$$Z_{n+1}^{\delta} = U_n Z_n^{\delta} + C_n$$

Assim, como podemos calcular todos os U_n e C_n , dado Z_1^{δ} , todos os outros Z_n^{δ} estão definidos. Desejamos então calcular Z_1^{δ} explicitamente, o que nos leva a todas as outras correções. Temos :
$$Z_{2}^{\delta} = U_{1}Z_{1}^{\delta} + C_{1}$$

$$Z_{3}^{\delta} = U_{2}Z_{2}^{\delta} + C_{2} = (U_{2}U_{1})Z_{1}^{\delta} + \{(U_{2}C_{1}) + C_{2}\}$$

$$\vdots$$

$$Z_{N+1}^{\delta} = (U_{N}U_{N-1}..U_{1})Z_{1}^{\delta} + \{(U_{N}U_{N-1}..U_{2})C_{1} + (U_{N}..U_{3})C_{2} + ... + (U_{N-1}..U_{i+1})C_{i} + ... + C_{N}\}$$

e definimos as matrizes $M \in R$:

$$M = (U_N U_{N-1} ... U_1)$$

$$R = (U_N U_{N-1} ... U_2)C_1 + (U_N ... U_3)C_2 + ... + (U_{N-1} ... U_{i+1})C_i + ... + C_N$$

de forma que

$$Z_{N+1}^{\delta} \equiv M Z_1^{\delta} + R \tag{4.2}$$

Impomos agora a hipótese de a órbita ser periódica :

$$(X_{N+1}^{(1)}, Y_{N+1}^{(1)}) \equiv (X_1^{(1)}, Y_1^{(1)}) \Rightarrow (X_{N+1}^{(0)} + X_{N+1}^{\delta}, Y_{N+1}^{(0)} + Y_{N+1}^{\delta}) = (X_1^{(0)} + X_1^{\delta}, Y_1^{(0)} + Y_1^{\delta})$$

e temos

$$Z_{N+1}^{\delta} = Z_1^{\delta}$$

Desta relação entre Z_1^{δ} e Z_{N+1}^{δ} , juntamente com (4.2), obtemos

$$Z_1^{\delta} = (1 - M)^{-1} R \tag{4.3}$$

e podemos então calcular todas as correções para todos os pontos da órbita teste.

A órbita corrigida não é, necessariamente, a órbita periódica desejada, mas sim uma aproximação melhor do que a anterior. Desta forma, podemos repetir o cálculo utilizando esta nova órbita como órbita teste, de modo que, ao final do processo, ocorre a convergência para órbita procurada.

O critério de convergência do processo deve levar em consideração o fato de que a órbita-resultado deve pertencer ao Mapa. Assim, um critério adequado é utilizar uma função $F = \sum_n (a_n^2 + b_n^2)$ como parâmetro de controle i.e., como medida da distância entre a órbita-teste e a órbita procurada. A função F será sempre positiva e, a cada iteração, ela contém informação de o quanto a órbita-resultado está longe de uma órbita do Mapa, de modo que a convergência somente ocorre se F for suficientemente pequena.

Na situação de convergência, o vetor R vai a zero e a matriz M converge para a matriz de monodromia da órbita, cujas propriedades estão discutidas em [16]. A matriz de monodromia é uma característica das órbitas periódicas e pode ser definida como :

$$\left(\begin{array}{c}\delta x_{N+1}\\\delta y_{N+1}\end{array}\right) = M\left(\begin{array}{c}\delta x_1\\\delta y_1\end{array}\right)$$

ou seja, relaciona as variações nas condições iniciais com as variações correspondentes após percorrer um período da órbita.

Foi então implementado um programa computacional que, a partir de uma órbita-teste, procura uma órbita periódica nos Bilhares, utilizando o método descrito. Os simuladores para o Bilhar Quadrado e Bilhar de Sinai com campo nos fornecem o Mapa : dado (X_n, Y_n) o programa calcula (X_{n+1}, Y_{n+1}) . Porém, é importante salientar que não temos uma forma analítica para as funções $f(X_n, Y_n)$ e $g(X_n, Y_n)$, já que estas dependem das reflexões com as fronteiras nos Bilhares. Deste modo, o cálculo das derivadas de $f(X_n, Y_n)$ e $g(X_n, Y_n)$ deve ser numérico. Para este cálculo, escolhemos uma fórmula de diferenciação numérica do tipo

$$F'(x_i) = \frac{F(x_{i+1}) - F(x_{i-1})}{2h}$$

onde o erro é da ordem de h^2 .

4.1 Solucionando problemas de convergência

A aplicação direta do método acima descrito está sujeita a sérios problemas de convergência. O fato de termos que calcular derivadas de $f \in g$ nos N pontos da órbita nos traz algumas complicações.

A cada iteração, em cada ponto da órbita, calculávamos as derivadas das funções que definem o Mapa, que, como vimos, são os elementos das matrizes U_n , usadas no cálculo da Matriz de Monodromia. Porém, como não temos uma forma analítica para as funções $f(X_n, Y_n) \in g(X_n, Y_n)$, temos um custo numérico no cálculo destas derivadas. Neste método, calculamos correções para *todos* os pontos da órbita e a correção em cada ponto (X, Y) acaba dependendo de todas as matrizes U_n calculadas nos outros pontos. Verificamos que este processo gera uma forte propagação dos erros numéricos que acabava por comprometer a convergência dos resultados.

A saída é utilizar no processo iterativo não todos os pontos da órbita mas somente o ponto inicial e o ponto final. Aplicamos o mesmo método de Matriz de Monodromia, porém em uma forma reduzida, como se estivéssemos tratando de uma órbita de período 1.

Para uma órbita candidata de período N, podemos escrever o ponto (X_{N+1}, Y_{N+1}) em termos do ponto (X_1, Y_1) na forma :

$$\begin{cases} X_{N+1} = f^N(X_1, Y_1) \equiv F(X_1, Y_1) \\ Y_{N+1} = g^N(X_1, Y_1) \equiv G(X_1, Y_1) \end{cases}$$

onde definimos as funções $F(X, Y) \in G(X, Y)$, que representam a ação do Mapa N vezes sobre o ponto (X, Y). Teremos então uma órbita periódica de período N se $F(X, Y) = X \in G(X, Y) = Y$.

Tomemos então a órbita teste $(X_1^{(0)}, Y_1^{(0)}), ..., (X_N^{(0)}, Y_N^{(0)})$, cujo primeiro ponto está separado da OP desejada por uma correção $(X_1^{\delta}, Y_1^{\delta})$. Queremos determinar tal correção de modo que o ponto $(X_1^{(0)} + X_1^{\delta}, Y_1^{(0)} + Y_1^{\delta}) \equiv (X_1^{(1)}, Y_1^{(1)})$ gere uma órbita periódica de período N.

Em analogia ao que já foi feito anteriormente, expandimos as funções F(X, Y) e G(X, Y) em torno da órbita-teste :

$$\begin{cases} F(X_1^{(1)}, Y_1^{(1)}) \approx F(X_1^{(0)}, Y_1^{(0)}) + \frac{\partial F}{\partial X_1^{(0)}} X_1^{\delta} + \frac{\partial F}{\partial Y_1^{(0)}} Y_1^{\delta} \\ G(X_1^{(1)}, Y_1^{(1)}) \approx G(X_1^{(0)}, Y_1^{(0)}) + \frac{\partial G}{\partial X_1^{(0)}} X_1^{\delta} + \frac{\partial G}{\partial Y_1^{(0)}} Y_1^{\delta} \end{cases}$$

e, usando o fato de que $F(X_1^{(1)}, Y_1^{(1)}) = X_{N+1}^{(1)}$ e $G(X_1^{(1)}, Y_1^{(1)}) = Y_{N+1}^{(1)}$:

$$\begin{cases} X_{N+1}^{\delta} = \frac{\partial F}{\partial X_{1}^{(0)}} X_{1}^{\delta} + \frac{\partial F}{\partial Y_{1}^{(0)}} Y_{1}^{\delta} + a_{1} \\ Y_{N+1}^{\delta} = \frac{\partial G}{\partial X_{1}^{(0)}} X_{1}^{\delta} + \frac{\partial G}{\partial Y_{1}^{(0)}} Y_{1}^{\delta} + b_{1} \end{cases}$$
(4.4)

onde $a_1 \in b_1$ são definidos por

$$a_{1} = -X_{N+1}^{(0)} + F(X_{\underline{s}}^{(0)}, Y_{\underline{s}}^{(0)})$$

$$b_{1} = -Y_{N+1}^{(0)} + G(X_{\underline{s}}^{(0)}, Y_{\underline{s}}^{(0)})$$

e também definimos as matrizes

$$Z_1^{\delta} \equiv \left(egin{array}{c} X_1^{\delta} \ Y_1^{\delta} \end{array}
ight) \; ; \; M \equiv \left(egin{array}{c} rac{\partial F}{\partial X_1^{(0)}} & rac{\partial F}{\partial Y_1^{(0)}} \ rac{\partial G}{\partial X_1^{(0)}} & rac{\partial G}{\partial Y_1^{(0)}} \end{array}
ight) \; ; \; R \equiv \left(egin{array}{c} a_1 \ b_1 \end{array}
ight)$$

de modo que a equação (4.4) pode ser escrita na forma de uma relação de recorrência, do mesmo modo que tínhamos anteriormente :

$$Z_{N+1}^{\delta} = M Z_1^{\delta} + R$$

e, usando a hipótese de a órbita ser periódica ($Z_{N+1}^{\delta} = Z_1^{\delta}$), obtemos a relação para determinarmos a correção Z_1^{δ} :

$$Z_1^{\delta} = (1 - M)^{-1}R \tag{4.5}$$

em total analogia com o que havia sido feito anteriormente, com a diferença essencial de que agora calculamos apenas uma matriz de derivadas parciais (ao invés de N matrizes!), diminuindo consideravelmente a propagação de erros numéricos provenientes do cálculo das derivadas.

4.2 A Matriz de Monodromia e suas propriedades

Pode ser mostrado [16] que a Matriz de Mondromia M possui a *propriedade simplética*, ou seja:

$$M^{-1} = J \cdot M^T \cdot J^{-1}$$
 onde $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

o que nos diz que M^T e M^{-1} possuem os mesmos autovalores. Porém, como M e M^T também têm os mesmos autovalores, temos que os autovalores de M e M^{-1} são *iguais.* Logo, estes autovalores aparecem sempre na forma de *inversos*, ou seja, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$.

Assim, sempre podemos associar a cada órbita um parâmetro β tal que $\lambda_1 = e^{\beta}$ e $\lambda_2 = e^{-\beta}$ ou um ângulo θ tal que $\lambda_1 = e^{i\theta}$ e $\lambda_2 = e^{-i\theta}$, sempre com $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$.

A estabilidade da órbita é definida pelo valor do traço da Matriz de Monodromia. No caso de autovalores *complexos*, com $\lambda_1 = e^{i\theta}$ e $\lambda_2 = e^{-i\theta}$, temos

$$TrM = 2\cos\theta$$
 com $(-2 < TrM < 2)$ (4.6)

Para autovalores reais ($\lambda_1 = e^{\beta} \in \lambda_2 = e^{-\beta}$), temos

$$TrM = 2\cosh\theta$$
 com $(TrM < -2 \text{ ou } TrM > 2)$ (4.7)

Pode ser mostrado [20] que, de acordo com o teorema de estabilidade de Liapunov, a grande maioria das órbitas cujos autovalores obedecem à relação (4.6) são estáveis, a menos de um conjunto de medida nula correspondente aos casos onde θ é uma múltiplo racional de 2π . Da mesma forma, as órbitas contempladas por (4.7) são instáveis. Concluímos então que o valor do traço de M carrega a informação sobre a estabilidade da órbita. Mais do que isso, o traço pode ser usado como uma poderosa ferramenta para o estudo das bifurcações em órbitas periódicas, conforme veremos no próximo capítulo.

4.2.1 Aplicações anteriores

O método de convergência descrito no início dete capítulo já havia sido aplicado anteriormente no caso de hamiltonianas suaves e também no caso de mapas analíticos conservativos.

Nc trabalho de Baranger e Davies [17], são calculadas órbitas periódicas para uma Hamiltoniana tipo NELSON na forma

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + (y - \frac{1}{2}x^2)^2 + 0.05x^2$$

e é feita uma análise das famílias periódicas e suas ramificações no plano $E - \tau$ (energia versus período), bem como da estabilidade das órbitas através do traço de M. Um estudo similar é feito por Aguiar et al. [16] onde a Hamiltoniana considerada é do tipo

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - x^2y + \frac{1}{12}x^4$$

denominada MARTA, que possui uma forma analítica parecida com a da Hamiltoniana NELSON, porém com coeficientes diferentes.

Uma outra aplicação deste método é em Mapas conservativos cujas funções $f(X_n, Y_n) \in g(X_n, Y_n)$ são dadas analiticamente. Um exemplo considerado por Bajay e Aguiar [19] é o Mapa de Meyer, dado por:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n - Y_n \\ Y_{n+1} = Y_n + \epsilon + (X_n - Y_n^2) \end{cases}$$

Neste trabalho são calculadas órbitas periódicas e suas associações com o con-, junto homoclínico do mapa. São mostradas também as famílias correspondentes e é feita uma análise das bifurcações das órbitas em função da variação do parâmetro ϵ .

A associação entre o método de busca diretamente no Mapa de Seção através de iteração de linhas com este método de convergência foi feita posteriormente por Bajay e Aguiar [21] em um aplicação para um potencial quártico do tipo

$$V(x,y) = \frac{x^2 y^2}{2} + \beta \frac{x^4 + y^4}{4}$$

e também é feita uma busca sistemática por órbitas periódicas.

No entanto, ainda não temos notícia de uma aplicação anterior deste método no caso de Hamiltonianas não-suaves. Conforme mostramos na seção 4.1, a convergência do método em Bilhares apresenta sutilezas que ainda não aparecem no caso de mapas "bem comportados".

Capítulo 5 Bifurcações

Neste capítulo, descrevemos como se processam as Bifurcações de órbitas periódicas em função do valor do campo, tomando como exemplo específico uma órbita de oito bounces (N = 8) no Bilhar Quadrado. O objetivo deste capítulo não é mostrar resultados extensos sobre as bifurcações mas apenas mostrar, através de um exemplo, como estas podem ser investigadas com o método de busca de órbitas que desenvolvemos.

Em analogia ao que acontece com Mapas unidimensionais, podemos identificar a existência de famílias de órbitas periódicas nos Bilhares Magnéticos estudados e inclusive construir diagramas de bifurcação de órbitas periódicas em função de uma parâmetro, no caso, o campo magnético. Antes de tratarmos da bifurcação em bilhares, faremos um pequeno paralelo entre o problema tratado aqui e resultados para mapas unidimensionais.

5.1 Um exemplo conhecido

O exemplo mais conhecido de Diagramas de bifurcação é sem dúvida o diagrama do *Mapa Logístico*. O Mapa Logístico é um mapa unidimensional a um parâmetro que apresenta a forma:

$$X_{n+1} = M(X_n) = rX_n(1 - X_n)$$

sendo então quadrático em X_n . Podemos obeservar que, dependendo do valor de r, podemos ter *pontos periódicos*, ou seja, pontos tais que, para algum N, $M^N(X_i) = X_i$. Para r < 3, existem apenas dois pontos periódicos do Mapa. No caso, são os *pontos fixos*, pontos periódicos de período 1 (X_f tais que $M(X_f) = X_f$). Os pontos fixos estão localizados em $X_0 = 0$ e $X_r = 1 - \frac{1}{r}$. Conforme variamos r, novos pontos periódicos aparecem. E aparecem cada vez mais rápido (em termos da variação de r) e com períodos cada vez maiores de modo que, para um certo valor crítico de r as órbitas são tantas que pontos de órbitas totalmente diferentes acabam ficando infinitesimalmente próximos entre si. Isto pode ser visualizado no Diagrama de bifurcações do Mapa, mostrado abaixo, com r variando entre r = 2.5 e r = 4.



Diagramas mais completos e análises mais profundas do Mapa Logístico podem ser encontrados em vários lugares. Podemos citar em particular os livros de Ott [22] e de Devaney [23]. Aqui, vamos nos limitar a usar o Mapa Logístico como uma ilustração e analogia com o que ocorre no Mapa de Seção dos Bilhares Magnéticos.

A estabilidade dos pontos periódicos é dada pelo valor de |M'(X)| no ponto. Se |M'(X)| < 1 o ponto é estável e é instável se |M'(X)| > 1. Isto pode ser facilmente visto graficamente, traçando as curvas Y = M(X) e Y = X. Os pontos de interseção entre as duas são os pontos fixos, X_f . Aplicando o mapa graficamente, vê-se que se $|M'(X_f)| < 1$, a iteração de pontos próximos a X_f acaba convergindo ao ponto fixo.

Nas figuras 5.2a e 5.2b, mostramos uma bifurcação com duplicação de período do ponto X_r que ocorre em r = 3. Nesta situação, surgem pontos de período 2 para o Mapa, ou seja, pontos fixos para $M^2(X)$. Mostramos os gráficos de $M^2(X)$ em função de X e da reta Y = X. Para r = 2.9 (fig. 5.2a), X_r é o único ponto fixo (além de $X_0 = 0$). Em r = 3, $[M^2]'(X_r) = 1$, o que é condição para a aparecimento de bifurcações. Vemos que, após a bifurcação (r = 3.5-fig.5.2b), X_r , que antes era estável, torna-se *instável* e aparencem dois pontos estáveis de período 2 (indicados por \Box na fig. 5.2b).



Mostraremos agora um outro tipo de bifurcação, uma bifurcação tangente. Neste caso, não temos um ponto fixo antes da bifurcação e surgem dois novos pontos periódicos, um estável e outro instável. No caso aqui considerado, os pontos são de período 3 e a bifurcação ocorre em torno de $r \approx 3.83$. Nesta região, o gráfico de $M^3(X)$ tangencia a reta Y = X, produzindo dois pontos periódicos. A figura 5.3a mostra o gráfico de $M^3(X)$ na região onde ocorre a bifurcação ($0.3 \le x \le 0.7$) para diversos valores de r ($3.7 \le r \le 3.9$). A curva mais externa corresponde a r = 3.9 e a mais interna a r = 3.7.

Vemos que, no momento da bifurcação, $[M^3]'(X_*) = 1$, uma vez que o gráfico de $M^3(X)$ tangencia a reta Y = X. Na figura 5.3b temos o gráfico completo de $M^3(X)$ e vemos que 6 novos pontos periódicos aparecem devido a bifurcações tangentes.

O papel que $|M'(X_f)|$ representa no aspecto das bifurcações em mapas unidimensionais é inteiramente análogo ao papel da matriz de Monodromia para mais dimensões. Isto é natural, uma vez que ambos representam linearizações no Mapa em torno de pontos periódicos e determinam assim a estabilidade destes pontos.



5.2 Famílias e bifurcações em bilhares magnéticos

Partindo de uma determinada órbita periódica a um dado valor de campo, podemos variar o valor do campo e obter, para cada campo, novas órbitas cujas características são bastante semelhantes à primeira. Esse conjunto de órbitas que obtemos variando o campo lentamente forma um *família a um parâmetro*. As famílias podem sofrer bifurcações, que podem implicar em aumento ou diminuição de período, mudança de estabilidade, aparecimento de ramos novos, aniquilação de famílias. O aparecimento das bifurcações depende intimamente das características das órbitas tais como simetria e valor do traço da matriz de Monodromia.

Para uma melhor visualização, tomamos como exemplo a órbita estável e simétrica de 8 bounces, cuja existência e estabilidade foi estudada por Berglund e Kunz [13]. Começamos com B = 3 e aumentamos os campo. Para cada novo valor de campo, utilizamos a órbita obtida anteriormente como órbita-teste e obtemos uma nova órbita periódica, definindo assim a família, conforme mostrado na figura a seguir:



Figura 5.4: Família de Órbitas Periódicas Estáveis de Período 8

No exemplo mostrado na figura 5.4 só conseguimos obter convergência até um certo valor limite para o campo, $B \approx 4.4721$. A partir deste valor crítico, a família simplesmente deixa de existir. Na vizinhança deste ponto, temos duas famílias de período 8 muito próximas: a família estável e uma outra, instável. No ponto crítico, as duas famílias sofrem uma *bifurcação isócrona*, que equivale a uma "aniquilação mútua", uma vez que ambas deixam de existir par $B > B_{limite}$. Esta aniquilação mútua é análoga à bifurcação tangencial no Mapa Logístico, com a diferença que aqui o surgimento de órbitas ocorre com a *diminuição* do parâmetro.

A 'sifurcação isócrona é uma das situações possíveis que podem ocorrer quando variamos o campo. Uma outra situação comum é a bifurcação com duplicação de período. Para um dado valor de campo "nascem" da família original outras famílias com período dobrado em relação à primeira. A estabilidade destas novas famílias "bifurcadas" depende de aspectos de estabilidade e simetria da família original. No caso da família de período 8, encontramos uma duplicação de período em $B \approx 4.4379$, sendo que as duas novas famílias de período 16 formam um par "estável/instável".

Um parâmetro importante no estudo das bifurcações é o traço da Matriz de Monodromia. Para órbitas estáveis, os autovalores são da forma $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$, de modo que o traço da Matriz de Monodromia está limitado, dentro do intervalo -2 . Pode ser mostrado [16, 19] que, quando o traço é <math>-2, ocorre uma bifurcação com duplicação de período.

Seja M(B) a matriz de monodromia de um membro de uma família estável de

órbitas periódicas. Dado um deslocamento inicial $\delta z'$ em relação a um ponto da órbita (sendo $\delta z'$ um deslocamento *no Mapa*), da forma:

$$\delta z' = \left(\begin{array}{c} \delta l' \\ \delta (\cos \theta)' \end{array}\right)$$

que leva $(l, \cos \theta) \rightarrow (l + \delta l', \cos \theta + \delta \cos \theta')$), após um período, esse deslocamento é levado a $\delta z''$, dado, pela definição de M(B), por:

$$\delta z'' = M(B)\delta z' \tag{5.1}$$

Diagonalizando M(B), a equação 5.1 se reduz à forma:

$$\delta w'' = \begin{pmatrix} \exp i\theta & 0\\ 0 & \exp -i\theta \end{pmatrix} \delta w' \tag{5.2}$$

e vemos que para $\theta(B=B^*)=\frac{2\pi n}{m},\,n$ e m inteiros, obtemos

$$(\delta w'')_m = \begin{pmatrix} \exp i\theta & 0 \\ 0 & \exp -i\theta \end{pmatrix}^m \delta w'$$

= $\delta w'$ (5.3)

Assim, aplicando o mapa *m*-vezes, voltamos ao ponto inicial, ou seja, temos uma órbita periódica de período *m* vezes o período da órbita referência aparecendo quando $B = B^*$. O caso n = m = 1 corresponde à bifurcação isócrona e n = 1, m = 2corresponde à duplicação de período. nestes casos, trM = 2 e -2 respectivamente.

Podemos entender tal resultado de um modo mais intuitivo: a matriz de Monodromia, por definição, atua como uma matriz de rotação no Mapa de Seção ao longo de um período completo, na região em torno da órbita estável. O ângulo θ dos autovalores pode ser visto como um ângulo de rotação ao longo da variedade estável da órbita. Assim, quando $\theta = \pi$, damos apenas "meia-volta" na variedade após um período. Para darmos a "volta completa", é necessário mais um período. Temos então uma bifurcação com duplicação de período, e para $\theta = \pi$ temos tr M = -2. No caso de órbitas instáveis (autovalores na forma e^{β} , $e^{-\beta}$), temos tr M > 2 ou tr M < -2.

Um estudo dos tipos de bifurcações possíveis pode ser encontrado no trabalho de Aguiar et al. [16], onde são consideradas as órbitas periódicas em um potencial quártico tipo "MARTA". A bifurcação isócrona, por exemplo preserva a simetria das órbitas bifurcadas, ou seja, não ocorre uma aumento de simetria nas famílias bifurcadas. No caso da duplicação de período da família de período 8 para as de período 16, ocorre uma redução de simetria. As famílias de período 16 são mais

assimétricas do que a família 8-estável, o que pode ser facilmente comprovado pela visualização das órbitas nas figuras (5.6) e (5.7).

Para visualizar melhor o processo de bifurcações, construímos um Diagrama, mostrudo a seguir:



Bifurcacoes : Periodos 8 e 16

O diagrama mostra como varia a coordenada de Birkhoff l (ou X, no Mapa de Seção) de um dos oito pontos da órbita em função do campo. Escolhemos arbitrariamente o ponto "esquerdo inferior" (em torno do ponto cartesiano (0, 0.3)). No diagrama, vemos claramente o ponto de aniquilação mútua (bifurcação isócrona) e a bifurcação com duplicação de período. Cada ponto representa uma órbita com oito iterações. Por esta razão, as órbitas de período 16 são representadas por *dois* pontos para um dado valor de campo ao passo em que só precisamos de um ponto para as órbitas de período 8. Nas figuras a seguir, mostramos representantes de cada uma das fa.nílias representadas no diagrama para B = 4.4:



Figura 5.6: Órbitas Estável e Instável de Período 16 com campo fixo



Figura 5.7: Órbitas Estável e Instável de Período 8 com campo fixo

5.3 O Traço de M

Mostramos a seguir o comportamento do traço da Matriz de Monodromia para as quatro famílias representadas no Diagrama.

Para a família 8-estável (figuras 5.8 e 5.9) o traço inicialmente oscila e atinge o valor $tr M_8 = -2$ para $B \approx 4.4379$, como pode ser melhor visto na figura 5.9. Para B = 4.4721, temos $tr M_8 = 2$ para ambas as famílias-8 e ocorre a bifurcação isócrona. No caso das famílias 16, vemos que estas também sofrem uma bifurcação isócrona em $B \approx 4.4379$, quando $tr M_{16} = 2$ conforme mostrado na figura 5.10.

O exemplo descrito aqui mostra que é perfeitamente posível acompanhar as famílias de órbitas como função do parâmetro B e seguir suas ramificações através de bifurcações.

A importância das bifurcações no limite semi-clássico é bem conhecida [14] e está ligada a divergências nas fórmulas que envolvem somas sobre órbitas periódicas. Uma aplicação no caso do cálculo de susceptibilidade magnética pode ser encontrada em [24].







Traco da Matriz de Monodromia em Funcao de B Familia de PERIODO 8

Figura 5.9: Ampliação: comportamento do tr M para a família 8-estável

Traco da Matriz de Monodromia em Funcao de B Familia de PERIODO 16



Figura 5.10: Traço da Matriz de Monodromia em função do campo

Capítulo 6

Resultados e discussão

O método numérico de busca e convergência de órbitas foi aplicado com sucesso nos dois sistemas considerados, Bilhar de Sinai e Bilhar Quadrado, ambos sujeitos a um campo magnético B perpendicular. Fizemos testes para vários valores de B no intuito de verificar quantas órbitas são obtidas, qual o passo adequado no proceso de busca para cada valor de campo e para os diferentes sistemas e como "filtrar" as órbitas que fossem iguais ou que fossem reflexões e inversões umas das outras.

Exploramos então dois regimes de campo, os quais consideramos representativos: campos baixos, tomando o caso B = 0.5 (órbitas de raio R = 2) e campos intermediários, tomando B = 3 ($R = \frac{1}{3}$). No regime de campos altos, ocorrem dois fatos que prejudicam a investigação. Em primeiro lugar, os comportamentos do Bilhar Quadrado e do Bilhar de Sinai ficam muito parecidos, conforme visto nos Mapas de Seção mostrados no Capítulo 2. Em particular, para B > 10, os mapas são absolutamente *iguais*, uma vez que não ocorrem colisões de partículas saindo da fronteira externa com o círculo central do Bilhar de Sinai. Além disso, as órbitas de período curto escasseiam para campos altos, ocorrendo uma predominância de órbitas de várias colisões com a parede externa (também chamadas aqui de *bounces*). Isto significa que, para obter uma curva de crescimento representativa, deveríamos calcular órbitas com $N \sim 50$, o que é, para nós, computacionalmente inviável, dado o longo tempo de processamento necessário. Mesmo B = 3 pode ser considerado um campo "alto" para o Bilha. Quadrado, na medida que temos poucas órbitas com N < 20 em comparação a B = 0.5, por exemplo.

Para cada um dos campos considerados, foi feita uma busca sistemática por órbitas periódicas com número N de bounces. Em termos do Mapa de Seção, N corresponde ao número de pontos no Mapa, razão pela qual foi denominado "período" da órbita durante o Capítulo 4, onde foi descrito o método numérico. Ocorre que nem sempre N é escalonável com o "período temporal" τ da órbita, como no caso do Bilhar de Sinai em campos intermediários. Porém, para o Bilhar Quadrado, N guarda uma certa proporcionalidade com τ e é particularmente útil pois, como veremos adiante, há uma predominância de órbitas com N par para campos baixos.

Para podermos fazer um comparação mais precisa entre os resultados para os diferentes Bilhares e diferentes valore de campo, nós padronizamos os parâmetros de busca no mapa de Seção para todos os N's e todos os campos. Depois de vários testes, optamos por utilizar uma separação $\delta Y = \delta \cos \theta = 0.01$ entre as linhas (um total de 200 linhas aproximadamente) com um separação $\delta X = \delta l = 0.0001$ entre os pontos de cada linha. Como $0 \leq X \leq 1$ (o Mapa têm simetria em l), temos aproximadamente 10000 pontos por linha.

Variamos N na região $1 \le N \le 20$ pra o Bilhar Quadrado e $1 \le N \le 10$ para o Bilhar de Sinai. O valor limite de N difere para os dois casos pois o simulador numérico do Bilhar de Sinai é bem mais complicado que o do Bilhar Quadrado. Para $N \sim 5$ e mesmos parâmetros de controle, observamos que a procura no Bilhar de Sinai toma aproximadamente o dobro do tempo computacional que no Bilhar Quadrado, uma vez que o número de operações é bem maior. Este tempo tende a aumentar com N de forma que a busca para N's maiores do que 10 no Bilhar de Sinai é computacionalmente inviável. No Bilhar Quadrado, N = 20 também é uma valor limite, acima do qual a busca torna-se muito lenta.

Para cada órbita convergida, calculamos seu comprimento e sua Ação, $S = \oint pdq$. O cáculo da Ação em Bilhares Magnéticos está feito no Apêndice 1. No Apêndice 2, temos um compêndio com 72 órbitas periódicas, em ambos os Bilhares, para B = 0.5 e B = 3, com os respectivos comprimentos e ações. Mostraremos a seguir dados sobre o comportamento do número de órbitas em termos de N, da Ação e do comprimento.

6.1 Crescimento exponencial do número de órbitas

6.1.1 Campos Baixos

Bilhar Quadrado

No caso do Bilhar Quadrado, temos um crescimento rápido do Número de órbitas com N para B = 0.5. As órbitas consideradas são estritamente as órbitas que de fato foram convergidas pelo método, sendo que as repetições (órbitas iguais) e órbitas simetricamente relacionadas foram retiradas. Na estatística de N = 2, N = 4 e N = 6 as órbitas são poucas (1, 2 e 3 respectivamente). Nestes casos em particular, nós retiramos a órbita N = 2 das estatísticas de N = 4 e N = 6, embora o método a tenha convergido para estes valores de N. No entanto, para N's mais altos, pode ocorrer que uma órbita de período N_0 apareça também na estatística de $N = kN_0$, k inteiro. No entanto, concluímos que o fato do crescimento de órbitas ser bem aproximado por uma exponencial faz com que tais órbitas de período $N_0 = \frac{N}{k}$ tenham um participação relativamente pequena no número total.

Podemos exemplificar com o caso de N = 20, para B = 0.5, onde temos 185 órbitas. Vamos considerar o pior caso possível, quando *todas* as órbitas com $N_0 = \frac{N}{k}$ aparecem na estatística de N, o que raramente é o caso. Os outros períodos que contribuem são N = 10 (14 órbitas), N = 5 (zero órbitas), N = 4 (2 órbitas) e N = 2(1 órbita). Ou seja, de um total de 185 órbitas, temos apenas 17 (aproximadamente 9%) que podem aparecer anteriormente.

Porém, nem sempre órbitas que são convergidas pelo método em $N_0 = \frac{N}{k}$ voltam a ser convergidas quando procuramos órbitas de período N. Isto ocorre pois os cruzamentos de linhas que dão origem às órbitas-teste podem ser extremamente diferentes nos dois casos. Não é certo que uma linha cruze com si própria após N_0 aplicações do Mapa e volte a cruzar em um lugar próximo após kN_0 aplicações. E mesmo que o cruzamento ocorra, a convegência para a mesma órbita não é garantida. Pode ocorrer, por exemplo, a convergência para uma bifurcação da órbita com $N = N_0$.

Existem duas curvas de crescimento de N_{orbs} bem distintas: uma curva para os N_{s} pares e outra para *impares*. Fizemos um "fitting" exponencial do tipo $N_{\text{orbs}} = A_1 e^{A_2 N}$ para cada um dos dois casos e a concordância foi muito boa. Os parâmetros A_1 e A_2 decorrentes do "fitting" são mostrados na Tabela 6.1.

Esta separação se deve ao fato de que, para campo nulo, não existem órbitas periódicas com número ímpar de bounces no Bilhar Quadrado, conforme mostraremos na seção 6.2. Para definir melhor a passagem do regime de B = 0 para $B \neq 0$, fizemos histogramas para o Bilhar Quadrado também com B = 0.2 e B = 0.8. Nas figuras 6.1, 6.2 e 6.3 mostramos os resultados da variação do número de órbitas em função do comprimento para os três valores de campo.

Ne tabela 6.1 a seguir, temos listados os parâmetros A_1 e A_2 das curvas de crescimento.

| | $A_{1 par}$ | $A_{1\mathrm{impar}}$ | $A_{2 par}$ | A_{2impar} |
|---------|-------------|-----------------------|-------------|--------------|
| B = 0.2 | 1.10 | 0.02 | 0.1975 | 0.3319 |
| B = 0.5 | 2.30 | 1.22 | 0.2217 | 0.2109 |
| B = 0.8 | 4.78 | 4.78 | 0.1588 | 0.0780 |

Tabela 6.1: Variação dos parâmetros das curvas de crescimento

Os resultados nos mostram que o número de órbitas pares tem, em geral, um crescimento mais acentuado que o número de órbitas ímpares. O parâmetro A_1

cresce com o campo nos dois casos e atinge um valor parecido para ambos os casos em B = 0.8, indicando que, para N pequeno, a separação entre as curvas já não é mais tão significativa. Para campos mais altos, veremos que esta separação não mais existe. É válida apenas para campos pertubativos onde o crescimento do número de órbitas ainda guarda influência do caso livre. Bilhar Quadrado









Bilhar de Sinai

No caso do Bilhar de Sinai, não temos a diferenciação entre curvas de crescimento para N's pares e ímpares uma vez que para B = 0 não temos uma regra de seleção de N como no caso do Bilhar Quadrado.

O número de órbitas no Bilhar Quadrado (Q) e no Bilhar de Sinai (S) para os valores de campo onde foi feita a busca de órbitas é mostrado na Tabela 6.2.

| | $N \leq 10$ | $N_{\rm total}$ |
|-----------------|-------------|-----------------|
| B = 0.2 (Q) | 18 | 190 |
| B = 0.5 (Q) | 37 | 699 |
| B = 0.5 (S) | 441 | 441 |
| B = 0.8 (Q) | 63 | 503 |
| B = 3 (Q) | 23 | 202 |
| $B = 3 \ (S)^1$ | 131 | 131 |
| Total: | 713 | 2166 |

Tabela 6.2: Número de órbitas convergidas

No Bilhar de Sinai, o número de órbitas é bem maior que no Bilhar Quadrado, o que pode ser visto comparando o número total de órbitas com $N \leq 10$. No caso do Bilhar Quadrado com B = 0.5, temos 37 órbitas com $N \leq 10$ e no Bilhar de Sinai temos 441. Recordamos que os parâmetros de busca na seção (separação entre linhas e entre pontos em uma mesma linha) são os mesmos tanto para o Bilhar de Sinai como para o Bilhar Quadrado, de modo que a comparação entre ambos é válida em princípio.

O número N de batidas com a fronteira quadrada externa não é um bom parâmetro para se visualizar o crescimento do número de órbitas no Bilhar de Sinai. Isto ocorre pois N não é sempre proporcional ao período temporal τ da órbita, uma vez que as colisões com o disco interno não são incluídas em N. Podem ocorrer *aprisionamentos* (tratados na seção 6.3) de modo que uma partícula em um movimento periódico com poucas batidas na fronteira quadrada (N pequeno) pode levar um tempo τ grande para retornar ao ponto inicial. No entanto, para N e B pequenos, uma certa proporcionalidade entre $\tau \in N$ é recuperada. Neste regime, o efeito de aprisionamento é pequeno de modo que podemos verificar um crescimento exponencial do número de órbitas em função de N. Na figura 6.4 fizemos um histograma de N_{orbs} em função de N. O "fitting" com uma exponencial foi feito para $N \leq 8$, região onde melhor se observa o crescimento exponencial.

¹O valor máximo de N neste caso é N = 7 (vide seção 6.1.2)



Os valores obtidos para A_1 e A_2 são maiores que os obtidos para o Bilhar Quadrado (Tabela 6.1), indicando então uma tendência de crescimento maior.

6.1.2 Campos intermediários

A paridade de N perde influência sobre a curva de crescimento de $N_{\rm orbs}$ conforme o valor do campo magnético B cresce. Isto se deve ao fato de que o comportamento caótico do Bilhar Quadrado se acentua conforme aumentamos o campo, conforme foi visto nos Mapas de Seção do Capítulo 2. Com isso, o comportamento esperado é algo parecido com o que ocorre com o Bilhar de Sinai, onde a influência da paridade de N é desprezível. Para B = 3, o Bilhar Quadrado já é caótico o suficiente para que não haja mais a diferença entre o comportamento de $N_{\rm orbs}$ para N par ou ímpar, conforme pode-se verificar na figura 6.5.

Vemos também que o número de órbitas com $N \leq 20$ é bem menor. Isto é de se esperar já que, para campos altos, teremos apenas órbitas periódicas que batem várias vezes na parede do bilhar antes de conseguirem voltar ao ponto inicial.



No caso do Bilhar de Sinai, ainda observamos um crescimento do número de órbitas, embora o número total seja bem menor que para campo baixo (Tabela 6.2).

Para este valor de campo o efeito do aprisionamento é bastante forte de modo que temos uma grande quantidades de órbitas que colidem várias vezes com o círculo central antes de voltar à fronteira externa. Isto ocasiona problemas computacionais no que se refere ao tempo de processamento. Para se obter o mesmo número de pontos no mapa é preciso agora bem mais operações numéricas pois as colisões com o disco central não pertencem ao Mapa de Seção. Por esta razão convergimos órbitas até N = 7 pois acima deste valor o tempo computacional necessário era excessivamente alto.



6.1.3Análise em função do Comprimento e da Ação

Uma outra maneira de expressar o crescimento do número de órbitas é em termos do período temporal τ ou da Ação S da órbita. Em geral, os resultados encontrados para N_{orbs} [15, 14] são sempre expressos em termos da Ação ou do período, de forma que tal análise é necessária para uma comparação entre os nossos resultados e o comportamento previsto na literatura.

No nosso caso, utilizamos o comprimento como parâmetro. A energia das órbitas é a mesma de modo que o período au será proporcional à distância percorrida pela partícula ao longo da órbita. Quanto mais longa for a órbita, maior o comprimento. Calculamos então o comprimento de todas as órbitas convergidas e montamos histogramas relacionando o número de órbitas com o comprimento. Os comprimentos das órbitas estão expressos em uma unidade u tal que o lado do quadrado que confina a partícula meça 1u.

Bilhar Quadrado

Para o Bilhar Quadrado os histogramas foram montados com passo $\Delta C = 0.5$ no comprimento. Isto significa que, dado um certo comprimento C_0 , foram contadas quantas órbitas existem com comprimento entre $C_0 \in C_0 + \Delta C$.

Observa-se um crescimento de N_{orbs} até um certo valor C e a partir de então ocorre um queda. Esta queda é um simples reflexo do fato de o número de órbitas utilizado nos histogramas ser limitado. Na verdade, esta diminuição já ocorre nos gráficos de N_{orbs} contra N, mas ela é muito mais abrupta: N_{orbs} é zero para $N > N_{\text{max}}$ $(N_{\rm max} = 20 \text{ para o Bilhar Quadrado e } N_{\rm max} = 10 \text{ ou } 8 \text{ para o Bilhar de Sinai},$ conforme visto nas seções 6.1.1 e 6.1.2). Assim, caso tivéssemos um número infinito de órbitas, veríamos apenas um crescimento de N_{orbs} em função de C.

Nas figuras 6.7 a 6.10 a seguir, mostramos os histogramas em função do comprimento para o Bilhar Quadrado. Bilhar Quadrado



Figura 6.7: Histograma de N_{orbs} contra comprimento: B = 0.2





Vimos que para campos muito baixos (figura 6.7) o crescimento não é tão acentuado. Isto ocorre pois o Bilhar é quase integrável para campos suficientemente baixos.

Uma análise parecida pode ser feita em termos da Ação das órbitas. Pode ser mostrado que a Ação em Bilhares magnéticos engloba contribuições de um termo de *comprimento* e de um termo de *área*. No Apêndice 1 é derivada uma expressão para a Ação mostrando explicitamente quais são estes termos.

Foram calculadas as ações de todas as órbitas convergidas e também fizemos histogramas análogos aos histogramas de comprimento. A expressão da Ação apresentada no Apêndice 1 foi simplificada para que o resultado final fosse dado em unidades de *comprimento*. Em termos do comprimento C e da área A envolvida pela curva, a expressão da Ação fica na forma:

$$S = C - B \cdot A$$

de modo que a Ação nos histogramas está expressa na mesma unidade u de comprimento onde o lado da fronteira quadrada mede 1u. O passo no histograma é $\Delta S = 0.5$

O comportamento geral para o Bilhar Quadrado é essencialmente o mesmo mostrado nos histogramas de comprimento. Temos algumas variações devidas a órbitas cuja área A seja grande.





Bilhar de Sinai

Para o Bilhar de Sinai, a análise em termos de comprimento e Ação de órbitas é bem mais adequada em função dos efeitos de aprisionamento. Nos histogramas, o passo é menor que nos histogramas do Bilhar Quadrado: temos aqui $\Delta C = \Delta S = 0.2$.

Nos histogramas de comprimento e ação vemos o crescimento inicial e a queda ocasionada pelo número limitado de órbitas como no caso do Bilhar Quadrado. Para B = 0.5, vemos que a distribuição em comprimentos é uniforme, o mesmo não acontecendo em B = 3. Nas figuras 6.16 e 6.18 vemos que existe um quantidade razoável de órbitas que estão visivelmente "fora" da distribuição. Em termos de comprimento, temos 14 órbitas com C > 9u quando a média dos comprimentos está em $\overline{C} \sim 3$. Estas são as órbitas onde ocorre o aprisionamento pelo campo e o disco central, a ser discutido na seção 6.3. Bilhar de Sinai



Figura 6.15: Histograma de N_{orbs} comprimento Bilhar de Sinai







6.2 Aparecimento de órbitas com N ímpar no Bilhar Quadrado

A distinção de N par e N ímpar no que se refere às curvas de crescimento no n° de órbitas para campos perturbativos no Bilhar Quadrado, encontra explicação no fato de que, para campo nulo, as órbitas periódicas possuem apenas N par. Isto pode ser facilmente mostrado recordando que, para campo nulo, as órbitas têm apenas dois ângulos possíveis. Se a partícula tem condições iniciais (l_0, θ_0) , os ângulos serão $\theta_a = \theta_0 \ e \ \theta_b = 90 - \theta_0$. A órbita será então uma seqüencia do tipo

$$(l_0, \cos \theta_0), (l_1, \cos \theta_1), (l_2, \cos \theta_2), (l_3, \cos \theta_3), \dots = \\(l_0, \cos \theta_a), (l_1, \cos \theta_b), (l_2, \cos \theta_a), (l_3, \cos \theta_b), \dots$$

e, para que seja periódica com período N, devemos ter $(l_{N+1}, \cos \theta_{N+1}) = (l_0, \cos \theta_0)$ e isso somente é possível se N for par.

Podemos inclusive estimar como o número de órbitas cresce com N. Mostramos na seção 3.1.1 que, para campo nulo, teremos órbitas periódicas se a tangente do ângulo inicial for racional: $tan(\theta_0) = p/q$. E ainda mostramos que, neste caso, teremos p batidas nas paredes x = 0 e x = 1 e q batidas nas paredes y = 0 e y = 1,

totalizando N = 2(p+q) bounces. Fica claro que a troca de q por p bem como um deslocamento de l_0 nos leva à mesma órbita, no sentido em que os autovalores da Matriz de Monodromia não se alteram. Desta forma, para N bounces, as órbitas diferentes entre si terão os seguintes valores de $p \in q$:

$$p = \frac{N}{2} - 1; q = 1$$

$$p = \frac{N}{2} - 2; q = 2$$

$$p = \frac{N}{2} - 3; q = 3$$

$$\vdots$$

$$p = \frac{N}{2} - k; q = k$$

onde κ é o maior inteiro tal que N/2 - k > k, ou seja, será a parte inteira de N/4. Como k é o número de órbitas, vemos que, para o Bilhar Quadrado livre, o número de órbitas cresce *linearmente* com o número de bounces N e temos ainda a regra de selação de que só valores *pares* de N são permitidos.

Gutzwiller, em seu livro "Chaos in Classical and Quantum Mechanics" [15] fornece alguns argumentos para que o número de órbitas em um sistema regular cresça como uma potência da Ação (ou, equivalentemente, do período) enquanto que, em sistemas caóticos, este crescimento seja exponencial.

No caso de sistemas integráveis, sabemos que o movimento ocorre em toros no Espaço de Fase e as órbitas periódicas ocorrem quando as freqüências dos movimentos no toro, $\omega_i = \partial H/\partial I_i$, são comensuráveis e todas múltiplas de uma freqüência comum ω_0 : $\omega_i = k_i \omega_0$, onde os k_i são inteiros. Ao calculármos a Ação S sobre um período, obtemos:

$$S = \int_0^{T_0} (I_1 d\theta_1 + \dots + I_n d\theta_n) = 2\pi (k_1 I_1 + \dots + k_n I_n)$$

Queremos agora contar quantas órbitas periódicas existem com Ação entre $S = S + \delta S$, ou seja, queremos contar quantos k's existem neste intervalo. Para o cálculo de δS deve-se tomar o cuidado de perceber que os I_i dependem implicitamente dos k_i . Porém, mesmo assim, Gutzwiller mostra [15] que, tomando valores altos para os k's, de modo que $k_i \gg \delta k_i$, teremos δS dado aproximadamente por:

$$\delta S = 2\pi (I_1 \delta k_1 + I_2 \delta k_2 + \dots + I_n \delta k_n)$$

No espaço *n*-dimensional de k's, podemos definir uma certa superfície Ω tal que, em todos os seus pontos, $S = \sigma$. Uma aproximação para o número de órbitas com Ação menor do que σ seria então o Volume-k envolvido por Ω . Como mostramos que δS tem uma relação aproximadamente linear com os δk_i , o Volume é proporcional então a σ^n . Desta forma, o número de órbitas periódicas cresce com uma potência de σ (que é o n° de graus de liberdade do sistema) se a Ação S pode ser escrita em termos das variáveis de ação da maneira simples mencionada acima. O fato de podermos escrevê-la desta forma decorre naturalmente do fato de que as órbitas periódicas ocorrem quando os k_i são inteiros, ou seja, do fato de o sistema ser integrável.

6.3 Aprisionamento no Bilhar de Sinai

Vimos que existem órbitas no Bilhar de Sinai onde o período temporal τ não é escalonável com o período N do Mapa. Isto ocorre para determinados valores de campo onde a partícula tem a possibilidade de colidir várias vezes com o círculo central antes de voltar a colidir com a fronteira quadrada. Como ilustração, podemos ver a órbita abaixo onde temos apenas duas batidas com a parede do Bilhar (N = 2) mas várias batidas com o círculo central. A órbita têm comprimento $C \sim 17u$ e é a órbita convergida com maior comprimento: Bilhar de Sinai



Figura 6.19: Órbita periódica "aprisionadora" no Bilhar de Sinai

Temos então o efeito do aprisionamento do elétron por um potencial localmente repulsivo (círculo interno do Bilhar) e um campo magnético, descrito também por Berglund em um recente trabalho [25]. O trabalho de Berglund, intitulado "Pode um potencial repulsivo aprisionar um elétron?", trata do problema de uma partícula carregada sob a ação de um campo magnético ortogonal e de um campo elétrico colidindo com um disco rígido de raio a. A trajetória é então circular com raio $R = v/\omega_c$ cujo centro se move com uma velocidade de "drift" v_d constante. É mostrado que, para campos suficientemente fracos, existe uma região de medida não nula no espaço de fase do problema correspondente a *estados aprisionados* da partícula. É citado um trabalho submetido do próprio autor onde se mostra uma generalização para campo magnético arbitrário onde este resultado ainda vale.

Nossos resultados mostram que estas conclusões parecem se aplicar no caso do Bilhar de Sinai em determinados regimes de campo onde tais estados aprisionados da partícula se manifestam através de órbitas periódicas de comprimento longo. Acontece porém que o Mapa de Seção utilizado não é o mais adequado para um estudo específico do aprisionamento, um vez que ele não leva em conta as colisões com o disco interno do Bilhar de Sinai. Talvez o mais adequado para tal estudo fosse um mapa tipo "espalhamento" onde tratamos o disco efetivamente como um centro espalhador confinado em uma fronteira quadrada.

Capítulo 7

Conclusões finais

Implementamos um método eficiente de busca e convergência de órbitas periódicas em Bilhares com campo magnético. No que se refere à procura de órbitas, fizemos uma adaptação de um processo de iteração de *linhas* do Mapa de Seção anteriormente utilizado para um potencial suave [21]. Para obter a convergência das órbitas-teste encontradas, utilizamos o método de Matriz de Monodromia, já bastante utilizado anteriormente em Hamiltonianas suaves [16, 17, 19, 21, 24].

Tomamos dois exemplos como objeto de estudo, os quais possuem características distintas no que se refere à dinâmica. O Bilhar Quadrado é integrável para campo nulo e torna-se não-integrável com a introdução do campo e a região de caos no Mapa de Seção tende a crescer conforme o valor do campo aumenta. Já o Bilhar de Sinai é caótico para campo nulo e a introdução do campo não altera significativamente este comportamento ergódico, apesar de aparecerem regiões regulares no Mapa para campos intermediários.

O método funcionou bem para ambos os sistemas. Para obtermos a convergência no caso dos nossos Mapas, foi necessário incluir algumas modificações em relação ao método de Matriz de Monodromia original. No entanto, acreditamos que a aplicação em Bilhares é *genérica* uma vez que o método se mostrou *independente* das características individuais de cada Mapa. A procura e convergência de órbitas para o Bilhar Quadrado ou para o Bilhar de Sinai se deu de forma semelhante, sem que fossem necessárias adaptações individuais.

Como resultado direto da aplicação do método, catalogamos mais de 2000 órbitas para ambos os sistemas. Para cada órbita, foram calculadas propriedades tais como período, Ação e estabilidade. De posse destes dados, foi possível fazer estatísticas do número de órbitas em termos do número de bounces, comprimento e Ação.

No caso do Bilhar de Sinai foi verificado que, para determinados valores de campo, o número de órbitas cresce *exponencialmente* com o período e com a Ação.
Nas referências [14, 15] foi derivada um expressão para o número de órbitas e é mostrado que, para períodos longos, o crescimento do número de órbitas com o período é exponencial para sistemas caóticos e polinomial para sistema integráveis. Nosso resultados tendem a confirmar a validade desta afirmação nos sistemas considerados.

<u>.</u>

No Bilhar Quadrado em regime de campo baixo, verificou-se uma dependência no número de órbitas com o fato do número de bounces N ser par ou *ímpar*. O crescimento do número de órbitas com N par é bem mais acentuado neste regime de campo. Acreditamos que tal comportamento seja uma conseqüência do fato de que não existem órbitas com número ímpar de bounces para B = 0. Tal diferenciação é perdida no regime de campos intermediários.

No Bilhar de Sinai, verificamos a existência de órbitas periódicas aprisionadoras para campos intermediários. Tais órbitas colidem várias vezes com o círculo central antes de retornarem ao ponto inicial na fronteira externa. O papel destas órbitas já havia sido anteriormente estudado para Bilhares Circulares convexos [25, 13].

Uma importante aplicação deste método é em bifurcações de órbitas periódicas. Ele nos permite construir famílias a um parâmetro (no caso, o campo B) e estudar a variação do traço da matriz de monodromia M dentro da família. O traço nos fornece a informação de quando ocorre e também de que tipo é a bifurcação.

Consideramos que os resultados aqui apresentados podem vir a ser de grande utilidade em uma eventual análise semi-clássica dos sistemas estudados. Nesse limite, pode-se ter uma melhor visualização de como assinaturas do comportamento clássico aparecem em propriedades essencialmente quânticas. E, neste contexto, as órbitas periódicas desempenham um papel fundamental pois representam um dos principais elos de ligação entre a dinâmica clássica e as características quânticas do sistema considerado.

Apêndice A

Ação em Bilhares Magnéticos

A ação S de uma órbita em um bilhar magnético tem basicamente duas contribuições: um termo de perímetro e um termo de área sob a trajetória. Isto pode ser rapidamente mostrado.

Para simplificar a notação, escrevemos a Hamiltoniana no interior do Bilhar na forma:

$$H = \frac{1}{2} \left(\vec{p} - \vec{A} \right)^2$$

 com

$$\vec{A} = -By\vec{e_x}$$

e, das equações de Hamilton, temos:

$$\dot{ec{q}} = rac{\partial H}{\partial ec{p}} = ec{p} - ec{A}$$

A ação da órbita percorrida entre dois pontos $q_0 \in q_1$ é dada por:

$$S(q_0, q_1) = \int_{q_0}^{q_1} \vec{p} \cdot d\vec{q} = \int_{q_0}^{q_1} \dot{\vec{q}} \cdot d\vec{q} + \int_{q_0}^{q_1} \vec{A} \cdot d\vec{q} = S^{\text{perimetro}} + S^{\text{área}}$$

onde definimos os termos de area e perímetro como contribuições distintas para a integral entre $q_0 \in q_1$. As denominações de "área" e "perímetro" se justificam se desenvolvermos um pouco mais as integrais:

 \rightarrow Termo de Área Como $\vec{A} = -By\vec{e_x}$, então $\vec{A} \cdot d\vec{q} = -By(x)dx$. Logo, o termo de área fica:

$$S^{\text{área}} = -B \int_{x_0}^{x_1} y(x) \, dx$$

onde y(x) é um arco de circuferência. Como trata-se de bilhares, $x_0 \in x_1$ estão limitados ao intervalo entre 0 e 1.

\rightarrow Termo de Perímetro

Para calcular S^{perímetro} usamos coordenadas polares:

$$p_r = \dot{r} = 0$$

$$p_\theta = r^2 \dot{\theta} = R^2 \dot{\theta} \text{ com } R = \frac{\sqrt{2E}}{B}$$

e a energia de rotação dada por

$$E = \frac{p_{\theta}^2}{2R^2} \Rightarrow p_{\theta} = \frac{2E}{B} = \text{const.}$$

e como, ao longo da órbita circular, só temos variação da coordenada θ :

$$\begin{split} S^{\text{perimetro}} &= \int_{q_0}^{q_1} \vec{q} \cdot d\vec{q} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \dot{\theta} \, d\theta = \frac{1}{R^2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} p_\theta \, d\theta \\ &\text{logo} \quad S^{\text{perimetro}} = \frac{2E}{B} \Delta \theta \end{split}$$

A ação da órbita circular de raio R de uma órbita entre dois pontos $q_0 e q_1$ fica então escrita na forma:

$$S(q_0, q_1) = \frac{2E}{B} \Delta \theta - B \int_{x_0}^{x_1} y(x) \, dx$$

onde $y(x) = y_c \pm \sqrt{R^2 - (x - x_c)^2}$, define a equação de um círculo.

Apêndice B

Compêndio de Órbitas Periódicas

B.1 Órbitas com B = 0.5 $\lambda_1 = 1.00 \lambda_2 = 1.00$ $S = 2.06 \tau = 2.02$

















 $\lambda_1 = -3953.5 \quad \lambda_2 = -0.000253$ S = 5.419 τ = 5.441





























Bibliografia

- [1] K. Nakamura and K. Thomas, Phys. Rev. Lett. 61 (1988) 247
- [2] L.P. Lévy, D.H. Reich, L. Pfeiffer and K. West, *Physica* B 189 (1993) 204
- [3] S.A. Trugman, *Phys. Rev. Lett.* 62 (1989) 579; V. Nikos Nicopoulos and
 S.A. Trugman *Phys. Rev.* B 45 (1992) 11004; U. Sivan, Y. Imry and C.
 Hartzstein, *Phys. Rev.* B 39 (1989) 1242
- [4] M. Robnik and M.V. Berry, J. Phys. A 18 (1985) 1361; M. Robnik, in Nonlinear Phenomena and Chaos, ed. S. Sakar, (Adam Hilger, 1986) 303
- [5] S.D. Prado, M.A.M. de Aguiar, J.P. Keating e R.Egydio de Carvalho, J. Phys. A 27 (1994) 6091
- [6] D. Ullmo, K. Richter and R. Jalabert, Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 383
- [7] F. von Oppen, *Phys. Rev.* B 50 (1994) 17151
- [8] O. Agam, J. Physique I 4 (1994) 697
- [9] R. Németh, Z. Phys. A 81 (1990) 89
- [10] V.I. Arnold, Mathematical Methods for Classical Mechanics (Springer, Berlim, 1978, 1989)
- [11] A.J. Lichtenberg. and M.J. Lieberman, Regular and Stochastic Motion (Springer-Verlag, New York, 1983)
- [12] M. V. Berry, in Topics in Nonlinear Dynamics (Ed. S. Jorna) Am. Inst. Conf. Proc. 46 (1978) 16
- [13] N. Berglund, H. Kunz J. Stat. Physics 83, 81-126 (1996).
- [14] A.M.O. de Almeida Sistemas Hamiltonianos: Caos e Quantização (Ed. Unicamp, Campinas, 1991)

- [15] M.C. Gutzwiller Chaos in Classical and Quantum mechanics (Springer-Verlag, New York, 1990)
- [16] M.A.M. de Aguiar, C.P. Malta, M. Baranger and K.T.R. Davies, Ann. Phys. (N.Y.) 180 (1987), 167
- [17] M. Baranger and K.T.R. Davies Ann. Phys. (N.Y.) 177 (1987), p. 330-358
- [18] M. Baranger, K.T.R. Davies and J.H. Mahoney Ann. Phys. (N.Y.) 186 (1988), 95
- [19] F.A. Bajay, Órbitas Periódicas em Conjuntos Homoclínicos a um Parâmetro, Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, IFGW, 1992
- [20] V.A. Yakubovich and V.M. Starzhinski "Linear Differential Equations with Periodic Coefficients", Keter Publishing House, Jerusalem, 1975 e também L. Pontriaguine, "Equations Differentielles Ordinaires" Editions Mir., 1975
- [21] F.A. Bajay, Órbitas Periódicas em Sistemas Caóticos, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, IFGW, 1995
- [22] E. Ott Chaos in Dynamical Systems (Cambridge Press, Cambridge, 1973) em particular cap. 2 pp. 31-44
- [23] R.L. Devaney An Introduction to Chaotic Dynamical Systems (Benjamin/Cummings, Menlo Park, 1986)
- [24] S.D. Prado and M.A.M. de Aguiar, Phys. Rev. E 54 (1996) 1369-1377
- [25] N. Berglund, A. Hansen, E.H. Hauge, J. Piasecki Phys. Rev. Lett. 77, 2149-2153 (1996).