

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”

Departamento de Eletrônica Quântica

Grupo de Óptica Quântica

TESE DE DOUTORADO

INTERAÇÕES DE SISTEMAS FÍSICOS COM APLICAÇÕES EM ÓPTICA E INFORMAÇÃO QUÂNTICA

Fernando Luís Semião da Silva

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco (orientador) – IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. José Antonio Roversi – IFGW/UNICAMP

Prof. Dra. Kyoko Furuya – IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Alvaro Fernandez Gomes – ISE/FEB

Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi – DF/UFSCar

Prof. Dr. Amir Ordacgi Caldeira (suplente)– IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Daniel Jonathan (suplente) – IF/UFF

Tese apresentada ao Instituto de Física “Gleb Wataghin” para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

23 de Março de 2006

Este exemplar corresponde à redação final da Tese de Doutorado defendida pelo aluno Fernando Luís Semião da Silva e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 23 de Março de 2006

Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

Si38i

Silva, Fernando Luís Semião da
Interações de sistemas físicos com aplicações em óptica
e informação quântica / Fernando Luís Semião da Silva. –
Campinas, SP : [s.n.], 2006.

Orientador: Antonio Vidiella Barranco.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Física “Gleb Wataghin”.

1. Informação quântica. 2. Íons aprisionados.
3. Emaranhamento quântico. 4. Trajetórias quânticas.
5. Ótica quântica. I. Vidiella Barranco, Antonio
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física
“Gleb Wataghin”. III. Título.

(vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Interactions of physical systems with applications in quantum optics and quantum information
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 1. Quantum information
 2. Trapped ions
 3. Quantum entanglement
 4. Quantum trajectories
 5. Quantum optics
- **Área de concentração:** Física
- **Titulação:** Doutor em ciências
- **Banca examinadora:**

Prof. Antonio Vidiella Barranco
Prof^a Kyoko Furuya
Prof. José Antonio Roversi
Prof. Álvaro Fernandes Gomes
Prof. Salomon Sylvain Mizrahi
- **Data da defesa:** 23.03.2006



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **FERNANDO LUÍS SEMIÃO DA SILVA – RA 962376** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 23 / 03 / 2006.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco (Orientador do Candidato) –
DEQ/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Alvaro Fernandez Gomes – FEB

Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi – DF/UFSCar

Profa. Dra. Kyoko Furuya – DFMC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. José Antonio Roversi – DEQ/IFGW/UNICAMP

Agradecimentos

Tive o apoio de muitas pessoas ao longo destes três anos e meio de doutorado. Algumas passaram rapidamente e outras estiveram juntas comigo durante todo o tempo. Agradeço não apenas as pessoas que me ajudaram com a parte técnica, mas principalmente, aquelas que me deram seu tempo, ouvidos e palavras de incentivos. A ordem dos nomes citados a seguir não reflete nenhuma ordem de importância!

Agradecimentos a Antonio (orientador) pela confiança, apoio e liberdade de trabalho. Esses são fatores essenciais para o desenvolvimento de um trabalho de doutorado. Agradecimentos a toda a banca por importantes contribuições na redação final da tese e por discussões físicas relevantes no dia da defesa.

Agradecimentos a Martin Plenio por me mostrar como se realiza pesquisa eficiente sem orgulho, e por todo o suporte que ele me ofereceu em minha estadia em seu grupo no Imperial College (Londres). Agradeço a FAPESP por financiar esse estágio no exterior via recursos da reserva técnica. Durante essa estadia na Inglaterra, contei com a amizade de Erika e Roberto Serra, agradeço a eles pelo apoio em momentos difíceis, sem eles eu não sei como seria, valeu!

Agradeço também Rainer Blatt por me convidar e financiar uma visita a seu grupo em Innsbruck (Austria), ocasião em que pude conhecer um dos melhores laboratórios da área no mundo.

Agradecimentos a Michael Nielsen pela confiança depositada em mim ao me selecionar (e financiar) para um programa de visitas internacionais a seu grupo na Universidade de Queensland (Australia). Agradeço a oportunidade que tive de ensinar física de íons aprisionados e de discutir meus trabalhos com as pessoas desse importante grupo. Em especial, agradeço também Jenny, Juliet e G. Milburn pela hospitalidade. Agradecimentos também a Paulo e família pela amizade e momentos de alegria que passamos juntos durante o tempo que estive na Australia.

Agradecimentos a três pessoas muito queridas: Camila, Doroti e Wagner Sanches pela torcida em momentos importantes desse doutorado e pelo carinho que sempre tiveram por mim (além do melhor café do mundo!).

Agradecimentos ao amigo Alvaro que sempre apoiou meu doutorado através de seu incentivo e amizade.

Agradecimentos ao amigo Pablo que contribuiu muito em vários aspectos dessa tese. Desde sua ajuda em gráficos, templates, e principalmente, pela amizade.

Agradecimento especial ao amigo Ricardo, amigo de todos os momentos, amigo presente, amigo para sempre.

Por fim, agradecimentos a toda a minha família.

*You never know when an old calendar might come in handy!
Sure, it's not 1985 right now, but who knows what tomorrow
will bring?*

Homer Simpson

Resumo

A presente tese é dedicada à utilização de conhecidos sistemas quânticos em aplicações de interesse em óptica e informação quântica. Motivados pelos recentes avanços experimentais em sistemas formados por íons aprisionados interagindo com lasers e na eletrodinâmica quântica de cavidades, nós focamos grande parte de nossas propostas nestes sistemas. Mais especificamente, nós estudamos a interação de íons e campos quantizados na chamada eletrodinâmica quântica de cavidades com íons aprisionados. Neste contexto, iniciamos nossos trabalhos com uma proposta de geração de superposições mesoscópicas no movimento do íon. Uma vez que tais superposições são muito sensíveis à decoerência, incluímos perdas na cavidade para tratar uma situação mais realista. Através da observação de *quantum jumps*, ou fóton-contagens fora da cavidade, mostramos um esquema de geração de estados com características quânticas muito similares aos encontrados no caso da cavidade ideal, sem perdas. Neste aspecto, encontramos um modo de usar a dissipação a nosso favor, fato de grande interesse experimental devido às imperfeições dos espelhos reais. Apresentamos também uma proposta de implementação de uma interação do tipo Kerr em íons como uma alternativa ao uso de cristais não-lineares que apresentam baixíssima eficiência para esse tipo de efeito. Essa proposta abre novas possibilidades para o uso de íons em medidas não demolidoras e computação quântica. Nossos estudos na área de eletrodinâmica quântica com íons aprisionados terminam com a análise dos efeitos do movimento do íon na dinâmica das transições multifotônicas. Esse é um estudo mais fundamental e está relacionado com o entendimento da interação da radiação com a matéria. Na última parte desta tese são apresentados resultados sobre o uso de sistemas de muitos corpos para a distribuição de informação quântica. O objetivo de se estudar estes sistemas mais complexos é a busca de implementação de protocolos quânticos em larga escala. Neste sentido, poderíamos pensar numa cadeia de osciladores harmônicos acoplados como ocorre em sistemas típicos da física da matéria condensada. Em particular, nós estudamos como aumentar a eficiência na transmissão de emaranhamento nestas cadeias. Propusemos um esquema que funciona como um tipo de *quantum data bus*, ou ônibus quântico para transportar e distribuir emaranhamento com alta eficiência.

Abstract

This thesis is concerned with the use of firmly established quantum systems for applications in quantum optics and quantum information. Having been driven by recent experimental advances in laser-manipulated trapped ions and cavity quantum electrodynamics, we concentrated more on proposals to be implemented in those systems. Being more specific, we have studied the interaction between trapped ions and quantized fields in the so-called cavity quantum electrodynamics with trapped ions. In this context, we began with a proposal to generate mesoscopic superpositions in the motion of the ion. Since these superpositions are extremely sensitive to decoherence, we have included cavity losses in order to make the situation slightly more realistic. We showed that the observation of quantum jumps, or photon detection outside the cavity, would generate quantum states with properties close to that generated in the ideal lossless case. In spite of the normally destructive effect of dissipation, we found a way to use it in our favor which turns out to be of great experimental importance due to always present mirror imperfections. We also showed how to mimic cross-Kerr nonlinearities in the cavity-ion system as a feasible alternative to the use of nonlinear crystals whose intensity of that non-linearity is too weak. This proposal opens up new possibilities for the use of trapped ions in non-demolition measurements and quantum computing. We finish our work in cavity electrodynamics with trapped ions with the study of the effect of the ionic motion on the dynamics of multiphotonic transitions. This is a more fundamental issue that is related to the understanding of matter-field interaction. In the last part of this thesis, we present results on the use of many-body systems for quantum information distribution. It was our goal to study more complex systems for the implementation of quantum protocols in large scale. In this sense, one could think of a chain of coupled harmonic oscillators as commonly found in condensed matter physics. Particularly, we dealt with the efficiency of entanglement transmission through the chain, trying to improve it. We ended up with a scheme which acts as a quantum data bus able to transport and distribute entanglement around quite efficiently.

Índice

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Lista de Figuras	ix
Introdução	1
1 Conceitos Básicos	4
1.1 Armadilhas de Paul	4
1.2 Campos Eletromagnéticos	7
1.3 Quantização Canônica	9
1.4 Eletrodinâmica Quântica com Íons Aprisionados	10
2 Superposições de Estados Coerentes	12
2.1 Estados Coerentes	12
2.2 Gatos de Schrödinger	13
2.3 Proposta com Íons em Cavidades Ideais	14
2.4 Extensão para Cavidades Dissipativas	15
2.4.1 Estado Gerado após Decaimento	16
2.5 Conclusão	18
3 Acoplamento tipo Kerr para Sistemas Bosônicos	19
3.1 Relevância do Problema	19
3.2 Dedução do Hamiltoniano Kerr	20
3.2.1 Primeira Aproximação	20
3.2.2 Segunda Aproximação	20
3.3 Porta Lógica de Fase	22
3.3.1 Caso Geral	22
3.3.2 Regime de Lamb-Dicke	23
3.4 Conclusão	23
4 Transições de Dois Fótons	24
4.1 Motivação	24
4.2 Dedução do Hamiltoniano Efetivo	25
4.3 Dinâmica	26
4.4 Conclusão	30
5 Propagação de Emaranhamento	31
5.1 Relevância do Problema	31
5.2 Osciladores Harmônicos Acoplados	31
5.2.1 Hamiltoniano	32
5.2.2 Estados Gaussianos e Emaranhamento	33
5.3 Eficiência e Aplicações do <i>Data bus</i>	36
5.4 Conclusões	38
Conclusões e Perspectivas Futuras	39

A	Equação Mestra	41
B	Trajétórias Quânticas	46
C	Hamiltoniano de Interação Íon-Campo	49
D	Validade do Hamiltoniano Kerr	50
	Bibliografia	51

Lista de Figuras

1.1	Análogo mecânico do aprisionamento de um íon numa armadilha de Paul. Representação esquemática de uma esfera aprisionada por uma cela girante. Claramente o sucesso deste aprisionamento depende de fatores como as dimensões da cela e a velocidade angular ω	5
2.1	O sistema é formado por um íon aprisionado num potencial parabólico e inserido numa cavidade com perdas. A taxa de emissão de fótons pela cavidade é κ e um detector D monitora continuamente este canal de decaimento.	16
2.2	Da esquerda para a direita temos a distribuição P_m e o fator de Fano σ para o estado do movimento do íon gerado após deteção de um fóton fora da cavidade. A curva P_m mostra a distribuição no instante $\tau \approx 3.29$ no qual o fator de Fano σ é máximo e maior que 1, ou seja, estatística super-Poissoniana. Os parâmetros usados foram $\Gamma = 1$, $\eta = 0.05$, and $\alpha = 2$	17
2.3	Probabilidade de deteção de um fóton fora da cavidade. Os parâmetros usados foram $\Gamma = 1$, $\eta = 0.05$, and $\alpha = 2$	18
4.1	Diagrama de níveis para a interação de um íon de três níveis com um modo do campo quantizado de frequência ω_c	25
4.2	Evolução temporal da população do estado fundamental eletrônico para diferentes valores do parâmetro de Lamb-Dicke. O sistema foi inicialmente preparado no estado $ \psi(0)\rangle = e, \alpha = 2, p = 0\rangle$	28
4.3	Evolução temporal da população do estado fundamental eletrônico para diferentes valores do parâmetro de Lamb-Dicke. O sistema foi inicialmente preparado no estado $ \psi(0)\rangle = e, \alpha = 2, \beta = 2\rangle$	29
4.4	Evolução temporal a longos tempos da população do estado fundamental eletrônico. O sistema foi inicialmente preparado no estado $ \psi(0)\rangle = e, \alpha = 2, \beta = 2\rangle$	29
5.1	Um anel de sistemas quânticos interagentes forma o <i>data bus</i> . Dois outros sistemas a e b acoplam fracamente em posições arbitrárias no anel. A evolução temporal do sistema permite a transferência de informação quântica (emaranhamento) existente entre o sistemas a e c para os sistemas b e c . O sistema c é desacoplado da cadeia mas pode ser emaranhado com a para o estudo da transferência de emaranhamento.	32
5.2	Comparação entre as evoluções exata e via Hamiltoniano efetivo para um anel com 20 osciladores e constantes de acoplamento $f = 10$ e $\epsilon = 0.015$. A linha tracejada corresponde ao cálculo exato e a sólida ao aproximado.	37

Introdução

Surgida na primeira metade do século passado, a mecânica quântica vem tendo seus fundamentos testados e seu campo de aplicação extraordinariamente ampliado devido em grande parte a recentes progressos experimentais que nos colocam em condições de operar com sistemas quânticos simples, algo inconcebível na época de seu surgimento. É comum ilustrar esse sentimento de impossibilidade com a citação da famosa declaração de um de seus principais fundadores:

“...*We never experiment with just one electron or atom or (small) molecule.*” - E. Schrödinger, 1952.

Muitas das idéias ou consequências da mecânica quântica foram inicialmente estudadas e debatidas com base em experimentos imaginários, algo conhecido como *gedankenexperiment*¹. Entre os mais importantes destacamos o famoso argumento EPR devido a Einstein, Podolsky e Rosen em 1935 [1] que clamava que a mecânica quântica não é uma teoria completa. Através de um *gedankenexperiment*, eles propuseram uma ausência de elementos de realidade na teoria que falhava em prever com total certeza o valor de grandezas físicas que seriam obtidas após a realização de uma medida. Essa idéia de que uma teoria física completa deve conter qualquer elemento de realidade foi a tentativa dos três autores de resgatar um tipo de senso comum que se assemelhasse à visão clássica do mundo. Em termos gerais, eles tentaram manter a posição de que seria possível atribuir ou imputar propriedades que existam independentemente da realização de medidas.

Uma consequência desse trabalho foi o florescimento de interessantes propostas para trazer esse realismo à mecânica quântica. Surgiram então as chamadas teorias de variáveis escondidas (*hidden variables theories*) que tentaram acabar com as dificuldades decorrentes da interpretação probabilística e não-local da mecânica quântica. Seria possível conseguir uma maneira de se decidir entre o realismo e localidade da visão clássica EPR e a visão probabilística e não-local da mecânica quântica? Em 1964, quase trinta anos depois do paper EPR, Bell encontrou um modo de realizar tal decisão [2]. Ele deduziu uma relação de desigualdade que qualquer teoria de variáveis escondidas deveria obedecer. E o melhor de tudo, essa relação poderia, em princípio, ser testada experimentalmente.

Com os espetaculares avanços experimentais recentes, foi possível testar essa desigualdade experimentalmente. Os primeiros experimentos liderados por Aspect, Grangier e Roger [3] utilizaram fótons correlacionados quanticamente (emaranhados) em polarização que são produzidos em transições de dois fótons em átomos de cálcio. Os resultados apontaram a violação da desigualdade, refutando assim os argumentos clássicos de realidade e forçando-nos a pensar na natureza como sendo essencialmente não-local. Não-localidade que implica na existência de uma redução instantânea da função de onda de um sistema formado por partículas distantes entre si e não interagentes.

Outro famoso *gedankenexperiment* foi proposto por Schrödinger também no ano de 1935². Schrödinger indagou a possibilidade de se transpor para o mundo macroscópico o princípio da superposição que está no cerne da mecânica quântica e é aplicável diretamente aos fenômenos quânticos (mundo microscópico de átomos e moléculas). Ele inventou um “mecanismo” para correlacionar quanticamente (emaranhar) um estado de superposição microscópico de um átomo com uma superposição dos estados macroscópicos “vivo” e “morto” de um pobre gato. Novamente temos presenciado belíssimos experimentos nos últimos anos que, embora não lidassem com um gato propriamente dito, traduziram a idéia básica de Schrödinger para sistemas quânticos simples [4, 5]. Estes experimentos demonstraram o emaranhamento entre estados microscópicos e estados quase-clássicos (mesoscópicos) numa visão moderna do gato de Schrödinger. Os experimentos e estudos teóricos utilizando superposição de estados quase-clássicos³ são interessantes do ponto de vista do problema da medida e colapso da função de onda, uma vez que parece existir uma incompatibilidade entre o mundo micro e o macro que não apresenta tais gatos-zumbi! Essa questão foi parcialmente solucionada com a introdução da idéia de decoerência, ou redução das superposições quânticas para misturas estatísticas, conforme proposto por vários autores [6].

Muitos dos avanços experimentais que estão permitindo tal nível de controle quântico ocorreram no campo da óptica quântica linear e não linear [7], incluindo os sistemas formados por cavidades e átomos, ramo conhecido

¹*Gedanke* significa idéia ou pensamento em alemão.

²Que ano incrível para o debate de idéias na mecânica quântica!

³Veja seção (2.1) sobre estados coerentes para maiores detalhes.

como eletrodinâmica quântica de cavidades CQED⁴, e os conversores e amplificadores paramétricos. Especificamente no contexto da CQED, o acoplamento coerente entre campo e átomo numa cavidade de microondas foi confirmado com a observação de oscilações quânticas de Rabi e seus colapsos e ressurgimentos [8]. Tal controle é essencial para a manipulação de emaranhamento entre campo e átomo. Com o domínio desta interação, foram realizados gatos de Schrödinger [5], geração de estados bipartite maximamente emaranhados EPR [9], portas lógicas quânticas [10], medidas não demolidoras de um único fóton [11] e estados tripartite emaranhados GHZ [12], apenas para citar alguns experimentos. Além desses incríveis resultados obtidos experimentalmente no regime de microondas, CQED com campos ópticos tem se desenvolvido paralelamente com muitos resultados também impressionantes tanto do ponto de vista da física fundamental quanto aplicações em computação quântica [13]. Uma característica interessante desses sistemas ópticos que usam laser é sua potencialidade para experimentos que envolvam controle e realimentação, como *quantum feedback* [14].

Outro campo no qual experimentos interessantes têm sido realizados é aquele formado por íons aprisionados [15]. Técnicas de esfriamento a laser [16] levam os íons ao estado fundamental de vibração em armadilhas eletromagnéticas que confinam seus movimentos num potencial praticamente parabólico⁵ [17]. A fluorescência induzida por laser leva a um processo de detecção que possui eficiência praticamente perfeita [18]. Estados eletrônicos podem ser emaranhados com o movimento vibracional, o que potencialmente pode ser utilizado para geração de portas lógicas quânticas [19]. Essas habilidades reunidas neste sistema levaram a geração e detecção experimental de estados quânticos do movimento do íon [20] incluindo a reconstrução das funções de Wigner⁶ [21]. Além disso, foram também realizadas experimentalmente portas lógicas quânticas [22], algoritmos quânticos [23], estados EPR [24], e finalmente o teletransporte [27]⁷. Novamente, muitos outros experimentos foram realizados e citamos apenas uma amostra bastante significativa do alto grau de controle que se possui atualmente sobre este sistema formado por íons e lasers.

Esta tese tem como objetivo apresentar propostas teóricas em sistemas quânticos com grande potencial experimental. Estudamos sistemas formados por íons aprisionados, lasers, cavidades e osciladores harmônicos em geral. Em particular, dedicamos grande parte nossa pesquisa à uma área relativamente nova dentro da óptica quântica; a chamada eletrodinâmica quântica de cavidades com íons aprisionados [28]. Nestes sistemas, campos quantizados interagem com íons aprisionados.

De acordo com trabalho experimental nesta área [29], o acoplamento coerente entre íons e campo eletromagnéticos é de grande interesse para a implementação de esquemas para o processamento de informação quântica. Íons aprisionados são muito apropriados para o armazenamento de informação quântica em seus níveis eletrônicos⁸ (*stationary qubits*). Por outro lado, o envio de informação a longas distâncias de maneira rápida e confiável é mais facilmente realizado com fótons (*flying qubits*)⁹. A inter-conversão entre qubits estacionários e móveis é portanto o bloco fundamental na construção de redes quânticas distribuídas [30].

Pareceu-nos bastante interessante a idéia de investigar os efeitos da quantização do campo na interação com o íon, ou olhando por outro ângulo, do movimento do átomo nas interações da CQED. Em ambos os casos, teríamos um sistema tripartite formado por dois osciladores e um sistema de dois níveis, como um spin. Ao analisar o efeito da quantização de um novo grau de liberdade na dinâmica desses dois sistemas, poderíamos propor novas situações que levariam a um melhor entendimento da interação da radiação com a matéria ou ainda sugerir aplicações em problemas específicos. Durante o trabalho de doutorado nós realizamos algumas contribuições nessa área de CQED com íons.

A primeira foi a proposta de um esquema de geração de superposições de estados coerentes, ou gatos de Schrödinger, no movimento do íon [33]. Esta proposta baseia-se numa interação dependente da energia vibracional [34]. Uma vez que estes estados são extremamente sensíveis à decoerência e dissipação de energia, nós incluímos perdas na cavidade e demonstramos como a detecção de fótons fora da cavidade pode, até certo ponto,

⁴Acrônimo para a sentença em lingua inglesa "Cavity Quantum Electrodynamics".

⁵Veja seção (1.1) para maiores detalhes.

⁶Uma função definida no espaço de fase de momento e posição que descreve de maneira completa o estado de osciladores [25]. Existem também análogos dessa função para outros sistemas como, por exemplo, spins [26].

⁷Protocolo de transferência de estados, e portanto informação, entre partículas distantes com fidelidade unitária e que dispensa a interação direta entre as duas partículas [31]. Se a transferência fosse realizada de modo clássico sem o uso de emaranhamento e sem o envio da própria partícula portadora do estado, a fidelidade máxima obtida seria de apenas 2/3 [32].

⁸É comum o uso de estados meta-estáveis ou ainda transições hiperfinas estimuladas por lasers numa configuração Raman. O tempo de vida destes níveis pode chegar a segundos.

⁹Dentro de pequenas unidades onde os sistemas estão separados por distâncias comparáveis ao comprimento de onda do fóton, como em estado sólido, o uso de outra abordagem é necessária. Esse é o assunto do capítulo 5 desta tese.

ser usada a nosso favor na geração de estados quânticos com características ainda semelhantes ao estado de gato de Schrödinger.

A segunda contribuição é mais focada em óptica não-linear e computação quântica. Nosso objetivo fora demonstrar como o sistema formado por um íon aprisionado interagindo com o campo eletromagnético quantizado pode ser usado para a realização do efeito Kerr [35]. Mais precisamente, dados dois campos bosônicos com operadores de criação \hat{a}_1^\dagger e \hat{a}_2^\dagger , a interação da forma [36,37]

$$\hat{H} = \lambda \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \quad (1)$$

é chamada de interação Kerr cruzada ou simplesmente Kerr. Nela, as intensidades dos campos, ou seja, os operadores de número de fótons se cruzam. Esse tipo de interação pode ocorrer em materiais não-lineares como semicondutores ou vidros dopados, mas o acoplamento λ é normalmente muito pequeno [38]. Esse fato dificulta a aplicação dessa interação em problemas de interesse como computação quântica fotônica [36] e medidas não demolidoras [37].

A última contribuição nessa área é especificamente no campo de transições multi-fotônicas na interação de átomos e campos eletromagnéticos. Nesse aspecto, surgem algumas questões interessantes. Uma vez que é usual em CQED considerar o átomo ora em repouso ou cruzando a cavidade em velocidade constante, poder-se-ia indagar sobre os efeitos do movimento periódico típico de, por exemplo, um íon aprisionado. Essa é uma pergunta relevante pois sua resposta está relacionada ao entendimento da interação da radiação com a matéria, tópico de interesse prático e fundamental. Nós revisitamos o conhecido problema das transições multifotônicas em CQED sob este novo ponto de vista [39], ou seja, analisando o papel do movimento do íon em sua interação com um campo quântico.

Outro tópico analisado nesta tese foi a implementação de tarefas de informação quântica em sistemas de muitos corpos. O intuito é propor idéias a serem implementadas em sistemas mais propícios à manipulação em grande escala como aqueles encontrados em estado sólido¹⁰. Uma vez que o emaranhamento é comprovadamente um novo recurso para o processamento de informação [38], nós estudamos a propagação de emaranhamento em sistemas quânticos acoplados. Quanto menor a necessidade de controle externo sobre as constantes de acoplamento, tanto espacialmente quanto temporalmente, melhor para a implentação prática e tecnológica. Encontramos um modo bastante simples e eficiente de realizar essa transmissão com um mínimo controle externo [40]. Propusemos então um espécie de *quantum data bus* capaz de distribuir emaranhamento entre sistemas quânticos.

A tese está organizada como segue. No Capítulo 1, reunimos os conceitos básicos sobre a física dos sistemas considerados na tese. Iniciamos com a apresentação de importantes pontos da física de íons aprisionados e na sequência apresentamos alguns conceitos e detalhes da eletrodinâmica quântica de cavidades. Optamos por apresentar assuntos mais específicos ou avançados como, por exemplo, medidas de emaranhamento [41], tratamento padrão para dissipação via equação mestra ou função de onda de Monte Carlo [42], conforme eles forem sendo usados. Quando necessário, estes assuntos foram discutidos detalhadamente em apêndices. Nos Capítulos 2, 3 e 4, apresentamos nossos resultados em CQED com íons. No Capítulo 5, passamos ao problema de propagação de emaranhamento em sistemas quânticos acoplados, e finalmente no Capítulo 6, apresentamos nossas conclusões desta tese sobre a manipulação de alguns sistemas quânticos simples com aplicações em óptica e informação quântica.

¹⁰Na verdade, é possível também pensar em aplicações dessas interações em CQED. Um conjunto de cavidades acopladas ou um arranjo de íons aprisionados interagindo via interação Coulombiana poderiam ser usados.

1 Conceitos Básicos

“Well, I can assure you that even the greatest physicists don’t just sit down and await inspiration. Ideas only come after many wrong tries and whether a try is right or wrong can only be found out by checking it, i.e. by doing some sort of calculations or a proof. The ability to do calculations is not something that one has or hasn’t, but (except for some exceptional cases) has to be acquired by practise.”

- **Martin Plenio**, notas de aula, 2002. [http://www.lsr.ph.ic.ac.uk/ plenio/](http://www.lsr.ph.ic.ac.uk/plenio/)

1.1 Armadilhas de Paul

Nesta seção apresentarei conceitos básicos sobre o aprisionamento de íons. Seguirei o fantástico livro do P. K. Gosh [43] e o artigo de revisão do próprio Wolfgang Paul [17], prêmio Nobel de física em 1989. Esse prêmio foi compartilhando com Norman Ramsey e Hans Dehmelt, que em conjunto com W. Paul, foram responsáveis pelo desenvolvimento de técnicas experimentais para a manipulação coerente de sistemas quânticos isolados¹. Uma dessas técnicas será tratada agora, o aprisionamento de partículas carregadas em campos quadrupolares dependentes do tempo.

Conforme conhecemos da mecânica Newtoniana, para se aprisionar uma partícula fazendo-a oscilar em torno de uma posição de equilíbrio, é necessário a aplicação de uma força restauradora da forma

$$\mathbf{F} = -c\mathbf{r}, \quad (1.1)$$

no qual c é uma constante positiva e \mathbf{r} o vetor distância com relação a posição de equilíbrio. Em outras palavras, a partícula deve se mover no potencial parabólico

$$\Phi \sim (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2). \quad (1.2)$$

As ferramentas para gerar tal força restauradora atuando em partículas carregadas são os campos elétricos ou magnéticos, ou mais precisamente, os campos multipolares². Nessas configurações, a intensidade do campo, e também do potencial, aumentam de acordo com uma lei de potência. Num caso geral, se m é o número de pólos, o potencial em coordenadas esféricas é dado por [17]

$$\Phi \sim r^{m/2} \cos(m\phi/2). \quad (1.3)$$

Para um campo de quadrupólo $m = 4$, têm-se $\Phi \sim r^2 \cos(2\phi)$ e para um campo de hexatopólo $m = 6$, têm-se $\Phi \sim r^3 \cos(3\phi)$, o que corresponde a forças que aumentam com r e r^2 , respectivamente.

Como estamos lidando com campos eletromagnéticos, o potencial (1.2) deve obedecer a equação de Laplace $\nabla^2 \Phi = 0$, ou equivalentemente $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Ou seja, pelo menos uma destas constantes deve ser negativa. Para ver as consequências dessa restrição, escrevemos o potencial de quadrupólo elétrico na forma geral

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2r_0^2} (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2), \quad (1.4)$$

no qual r_0 tem dimensão de comprimento. Dependendo da escolha da geometria da armadilha, ou seja, a escolha de (α, β, γ) , r_0 pode tomar uma interpretação mais clara conforme veremos logo a seguir. Apresentaremos duas maneiras simples de satisfazer a equação de Laplace:

(a) $\alpha = -\gamma = 1$ e $\beta = 0$ que resulta em um campo bidimensional

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2r_0^2} (x^2 - z^2), \quad (1.5)$$

(b) $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma = -2$ que resulta em um campo tridimensional

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2r_0^2} (x^2 + y^2 - 2z^2). \quad (1.6)$$

¹Por isolado eu quero dizer sistemas únicos como átomos e íons em contrapartida aos sistemas complexos como gases, líquidos ou sólidos que são formados por um número imenso de constituintes.

²Campos formados por arranjos simétricos de cargas ou magnetos.

Estaremos interessados no caso (b) que dará origem a uma armadilha tridimensional de íons. O caso (a) dá origem a um importante aparato experimental chamado filtro de massa. Os interessados nesse filtro podem consultar as referências em [17]. Antes de prosseguirmos com o estudo detalhado do caso (b), seria interessante ter uma idéia de como um campo quadrupolar pode ser gerado. O modo mais direto consiste em utilizar eletrodos (algum condutor) cujas superfícies coincidam com as equipotenciais (que no caso são dois hiperboloides de revolução) a aplicar uma diferença de potencial externo proporcional a Φ_0 entre eles com o uso de alguma fonte externa.

Um partícula (ou íon) com carga Q sujeita ao potencial (1.6) sofrerá a ação da força

$$\mathbf{F} = \frac{Q\Phi_0}{r_0^2}(-x, -y, 2z), \quad (1.7)$$

e portanto terá um movimento confinado nas coordenadas x e y (oscilação harmônica) mas sua amplitude de movimento em z crescerá exponencialmente causando a perda do íon. Esse é o efeito da condição de Laplace que todos os campo elétricos obedecem. É impossível confinar uma partícula carregada apenas com campo de quadrupólo estático. O leitor poderá se lembrar de um famoso teorema do eletromagnetismo que diz que uma partícula carregada não pode estar em equilíbrio estável pela aplicação de forças elétricas apenas. Esse é o chamado teorema de Earnshaw que pode ser encontrado nos bons livros de eletromagnetismo como, por exemplo, no livro do Griffiths [46].

Esse problema pode ser resolvido se forem usados campos oscilantes (periódicos no tempo) ao invés de campos estáticos³. Isso levará ao que podemos chamar de aprisionamento dinâmico. Esse tipo de armadilha de quadrupólo que faz uso de campos dependentes do tempo (voltagens-ac) é chamada armadilha de Paul. Veremos agora como essa armadilha funciona, ou seja, como se dá esse aprisionamento dinâmico. Se a voltagem aplicada Φ_0 for composta de uma parte dc U e uma parte ac V com frequência ω

$$\Phi_0 = U + V \cos \omega t, \quad (1.8)$$

as equações de movimento para um íon de massa m e carga Q serão

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{Q\Phi_0}{r_0^2}(U + V \cos \omega t)x \\ m\ddot{y} &= -\frac{Q\Phi_0}{r_0^2}(U + V \cos \omega t)y \\ m\ddot{z} &= \frac{2Q\Phi_0}{r_0^2}(U + V \cos \omega t)z. \end{aligned} \quad (1.9)$$

À primeira vista poder-se-ia pensar que o termo oscilante iria ter valor médio zero e que assim a força se cancelaria. Isso seria verdade se o campo fosse homogêneo mas esse não é o caso do campo quadrupolar. Restará uma força média que aponta para o centro da armadilha, a região de menor campo. Em outras palavras, a direção na qual uma partícula escaparia se colocada no ponto de sela do potencial (1.6) passa a depender do tempo, o que dá origem a um pseudo-potencial parabólico tridimensional que aprisiona dinamicamente a partícula. Um análogo mecânico é mostrado na Figura (1.1). A eficiência desse potencial, ou sua capacidade de aprisionar o íon dependerá das escolhas de m , Q , U , V e r_0 .

As condições sobre estes parâmetros para se ter o confinamento é obtida do estudo das equações diferenciais (1.9). Essas equações são conhecidas da

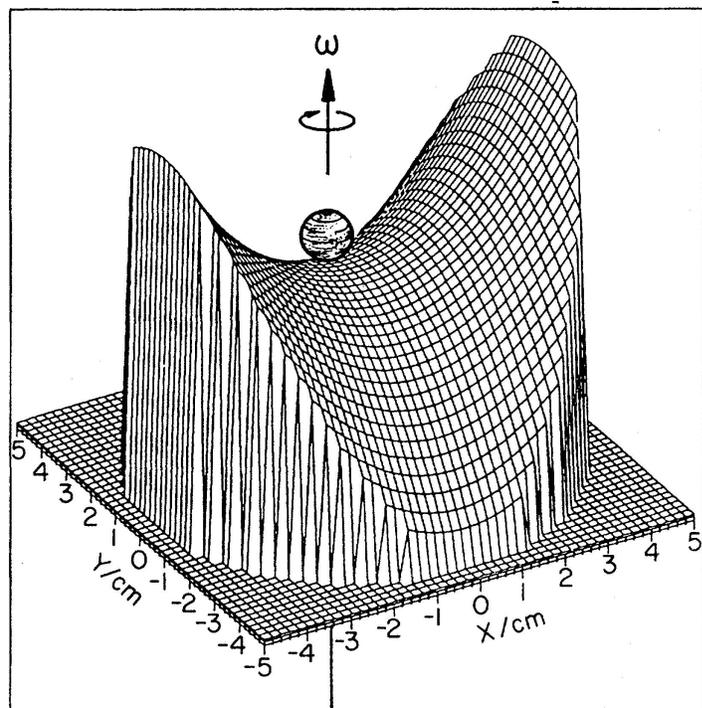


Figura 1.1: Análogo mecânico do aprisionamento de um íon numa armadilha de Paul. Representação esquemática de uma esfera aprisionada por uma cela girante. Claramente o sucesso deste aprisionamento depende de fatores como as dimensões da cela e a velocidade angular ω .

³O leitor pode se interessar em saber que existem outras possibilidades que dão origem a outras armadilhas [17].

física matemática e são chamadas equações de Mathieu [44]. Reescrevemos as equações de movimento em termos de parâmetros adimensionais como

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{d\tau^2} + (a + 2q \cos 2\tau)x &= 0 \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + (a + 2q \cos 2\tau)y &= 0 \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} - (2a + 4q \cos 2\tau)z &= 0,\end{aligned}\tag{1.10}$$

nas quais

$$a = \frac{4QU}{mr_0^2\omega^2}, \quad q = \frac{2QV}{mr_0^2\omega^2}, \quad \tau = \frac{\omega t}{2}.\tag{1.11}$$

Uma equação de Mathieu possui soluções estáveis nas quais as amplitudes de movimento são limitadas e instáveis nas quais as amplitudes aumentam exponencialmente. A instabilidade das soluções depende dos coeficientes que em nosso problema são os parâmetros a e q . Encontrar as condições sobre estes parâmetros foge do escopo dessa introdução mas os físicos experimentais que implementam essas armadilhas sabem fazer isso muito bem. O fato importante agora é saber que as armadilhas utilizadas atualmente operam com $a \ll q$ e isso permite a interpretação do movimento como sendo resultante de um potencial efetivo parabólico (também chamado pseudo-potencial).

O modelo apresentado agora recebe o nome de modelo do poço de potencial para armadilhas de Paul. Este modelo é muito utilizado e uma de suas aplicações se dá no estudo dos efeitos da distribuição de carga no *shift* das fronteiras das regiões de estabilidade. O modelo fornece respostas quantitativas bastante satisfatórias. Sem perda de generalidade usaremos o movimento em x para descrever o modelo. A descrição nas outras coordenadas é essencialmente idêntica. Conforme vimos na última seção, a equação de movimento desta coordenada é dada por

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (a + 2q \cos 2\tau)x = 0\tag{1.12}$$

Iremos agora decompor a amplitude do movimento em x na soma de duas amplitudes X e δ

$$x = X + \delta,\tag{1.13}$$

e faremos as seguintes hipóteses

$$\delta \ll X; \quad \frac{d\delta}{d\tau} \gg \frac{dX}{d\tau}.\tag{1.14}$$

Nessa decomposição, X recebe o nome de movimento secular e δ de micro-movimento. Essa nomenclatura segue do fato de que de acordo com (1.14), X possui maior amplitude e varia mais lentamente que δ . Usando (1.12) e (1.13) temos

$$\frac{d^2X}{d\tau^2} + \frac{d^2\delta}{d\tau^2} = -(a + 2q \cos 2\tau)(X + \delta),\tag{1.15}$$

que pelas hipóteses (1.14) pode ser aproximado por

$$\frac{d^2\delta}{d\tau^2} = -(a + 2q \cos 2\tau)X.\tag{1.16}$$

Uma vez que X varia pouco num período de alta frequência em que δ varia consideravelmente, podemos integrar (1.16) tomando X constante. Além disso, conforme comentado na seção anterior, consideraremos $a \ll q$ ($U \ll V$). Com essas hipóteses temos

$$\delta = \frac{q}{2}(\cos 2\tau)X,\tag{1.17}$$

ou

$$x = X + \frac{q}{2}(\cos 2\tau)X.\tag{1.18}$$

De volta à equação original teremos

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \left(a + a\frac{q}{2}\cos 2\tau + 2q\cos 2\tau + q^2\cos^2 2\tau\right)X = 0. \quad (1.19)$$

Realizaremos agora a média da segunda derivada de (1.13) num período⁴, levando em consideração que X varia lentamente comparado com δ , ou seja

$$\left\langle \frac{d^2X}{d\tau^2} \right\rangle \approx \frac{d^2X}{d\tau^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d^2x}{d\tau^2} - \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d^2\delta}{d\tau^2}}_{\approx 0} \quad (1.20)$$

Neste caso, usando (1.19) e (1.20) teremos

$$\frac{d^2X}{d\tau^2} = - \left(a + \frac{q^2}{2}\right) X, \quad (1.21)$$

que imediatamente reconhecemos como a equação diferencial de um oscilador harmônico. Concluimos então que o movimento do íon na armadilha de Paul consiste da superposição de um movimento harmônico simples com o micro-movimento de pequena amplitude e alta frequência. Para grande parte das aplicações pode-se negligenciar o micro-movimento no tratamento do problema. Isso pode ser feito somente quando a energia cinética do íon for baixa. Gostaríamos de ressaltar que esse modelo é válido apenas nos casos em que $a \ll q$. Felizmente as armadilhas reais funcionam muito bem neste regime. Descartando o micro-movimento, o Hamiltoniano relativo ao movimento do centro de massa de um íon é portanto aquele de um oscilador harmônico simples

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + m\omega_y^2 y^2 + m\omega_z^2 z^2). \quad (1.22)$$

As frequências de oscilação ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$) são funções dos parâmetros do sistema. Mostraremos como deduzir ω_x e as demais podem ser deduzidas do mesmo modo. Escrevendo (1.21) em função do tempo e tomando $X = x$, ou seja, negligenciando o micro-movimento, encontramos

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \left(a + \frac{q^2}{2}\right) \frac{\omega^2}{4} x = -\omega_x^2 x, \quad (1.23)$$

o que leva a

$$\omega_x = \sqrt{\frac{\omega^2 a}{4} + \frac{\omega^2 q^2}{8}} = \sqrt{\frac{QU}{mr_0^2} + \frac{Q^2 V^2}{2m^2 r_0^4 \omega^2}}, \quad (1.24)$$

e nos casos de aprisionamento puramente dinâmico $U = 0$,

$$\omega_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{QV}{mr_0^2 \omega}. \quad (1.25)$$

Uma vez que já entendemos como se aprisiona íons em armadilhas de Paul e vimos que as frequências de oscilação estão relacionadas à parâmetros experimentais, podemos começar nossos trabalhos a partir do Hamiltoniano (1.22) diretamente⁵.

1.2 Campos Eletromagnéticos

Iremos agora apresentar alguns conceitos básicos sobre campos eletromagnéticos. Encontraremos o Hamiltoniano do campo numa cavidade, escrevendo-o em uma forma apropriada para a realização da quantização canônica que será o objeto da próxima seção. Os assuntos destas duas seções podem ser encontrados em muitos livros, desde os mais específicos em óptica quântica como também em livros mais gerais de mecânica quântica ou

⁴A média de uma função num período T é dada por $\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$. Lembramos também que num período completo têm-se $\langle \cos(2t) \rangle = 0$ e $\langle \cos^2(2t) \rangle = 1/2$

⁵Let the games begin!

teoria de campos. Um tratamento bem sucinto e interessante é encontrado em [45]. Normalmente as apresentações diferem um pouco devido ao estilo dos autores mas o resultado final é o mesmo. No que segue eu apresentarei o assunto de maneira bem direta mantendo contudo os aspectos gerais necessários ao entendimento do assunto.

O campo eletromagnético é completamente descrito pelas equações de Maxwell [46]. Trataremos o caso sem cargas ou correntes, ou seja, o espaço livre (vácuo). O campo eletromagnético contém uma componente campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e uma componente campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Devido às propriedades das equações de Maxwell é possível descrever o campo eletromagnético por um campo vetorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ denominado potencial vetor e um campo escalar $\phi(\mathbf{r}, t)$ denominado potencial escalar. Existe uma certa liberdade na escolha destes potenciais que levam ao mesmo campo eletromagnético. Tal liberdade é chamada invariância de calibre (*gauge invariance*). Nos problemas que abordaremos na tese, estaremos em regimes em que os efeitos relativísticos não são importantes e neste caso o chamado calibre de Coulomb é apropriado. Neste calibre [46],

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (1.26)$$

No vácuo e sem fontes externas podemos tomar $\phi(\mathbf{r}, t) = 0$ sem perda de generalidade. É possível mostrar então que o campo eletromagnético relaciona-se com o potencial vetor da seguinte maneira

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.27)$$

Usando esta relação nas equações de Maxwell obtém-se uma equação de onda para o potencial vetor

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.28)$$

Equações de onda podem ser solucionadas com o método de separação de variáveis. Tomamos $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})\mathbf{A}(t)$ e com isso obtemos duas equações diferenciais, uma equação de Helmholtz para a parte espacial do campo

$$\nabla^2 u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2}{c^2} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.29)$$

e uma equação do tipo oscilador harmônico para a evolução temporal

$$\frac{d^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)}{dt^2} = -\omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t). \quad (1.30)$$

Esta equação nos fornece um indício da similaridade entre campos eletromagnéticos e osciladores harmônicos massivos, veja (1.23) e (1.30). Essa similaridade irá ser a base da realização da quantização do campo na próxima seção. Essa analogia ficará mais evidente quando escrevermos adiante o Hamiltoniano para o campo eletromagnético.

A solução de (1.30) é simplesmente

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(0)e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}. \quad (1.31)$$

Até o momento, o índice $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, que resulta da separação de variáveis, pode assumir valores contínuos ou discretos. Discutiremos aqui o caso discreto pois este se aplica a campos contidos em cavidades cuja forma vai ditar as condições de contorno para a equação de Helmholtz (1.29). É usual assumir na quantização uma forma simples para os modos do campo tais como seno, cosseno ou combinação destes numa exponencial. Contudo, isso não é necessário e deixaremos completamente livre a forma das funções de modo $u(\mathbf{r})$. É importante notar que a equação de Helmholtz é uma equação de autovalor cujas autofunções formam um conjunto completo e assim

$$\int_V d^3r w(\mathbf{r}) u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) u_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (1.32)$$

sendo V o volume da região de interesse, consistente com as condições de contorno, e $w(\mathbf{r})$ é uma função peso. Isso é estudado na teoria de Sturm-Liouville e o leitor pode encontrar este assunto na referência [47]. Segue então que a solução geral para o potencial vetor é dada por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}, \lambda} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \beta_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} - \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}, \lambda}^* u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \beta_{\mathbf{k}, \lambda}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}), \quad (1.33)$$

da qual podemos obter o campo eletromagnético utilizando (1.27). Na expressão (1.33) nós já incluímos os dois graus de liberdade de polarização através dos versores $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda}$, com $\lambda = 1, 2$ e definimos $\mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}(t) = \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda}\beta_{\mathbf{k},\lambda}e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}$, onde $\beta_{\mathbf{k},\lambda}$ é a amplitude do modo. Isso advém da transversalidade dos campos eletromagnéticos. Utilizando portanto (1.27) e (1.33) obtém-se

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \omega_{\mathbf{k}} (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \beta_{\mathbf{k},\lambda} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda}^* u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \beta_{\mathbf{k},\lambda}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}) \quad (1.34)$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k},\lambda} [\nabla \times (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})) \beta_{\mathbf{k},\lambda} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} - \nabla \times (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda}^* u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r})) \beta_{\mathbf{k},\lambda}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}]. \quad (1.35)$$

Com estas expressões nós podemos obter a Hamiltoniana para o campo. Da teoria eletromagnética este é dado por

$$H = \frac{1}{2} \int_V d^3r \left[\epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} B^2(\mathbf{r}, t) \right], \quad (1.36)$$

no qual a integral é calculada no volume considerado, como por exemplo, de uma cavidade. Utilizando (1.34) e (1.35), a Hamiltoniana (1.36) assume a forma

$$H = 2\epsilon_0 \sum_{\mathbf{k},\lambda} \omega_{\mathbf{k}}^2 |\beta_{\mathbf{k},\lambda}|^2. \quad (1.37)$$

Para chegarmos mais próximo da Hamiltoniana de um conjunto de osciladores, definimos as seguintes variáveis reais $x_{\mathbf{k},\lambda}$ e $p_{\mathbf{k},\lambda}$ pela transformação

$$\beta_{\mathbf{k},\lambda} = \sqrt{\frac{1}{4\epsilon_0}} \left(x_{\mathbf{k},\lambda} + i \frac{p_{\mathbf{k},\lambda}}{\omega_{\mathbf{k}}} \right). \quad (1.38)$$

A menos de algumas constantes multiplicativas as variáveis $x_{\mathbf{k},\lambda}$ e $p_{\mathbf{k},\lambda}$ são a parte real e imaginária de $\beta_{\mathbf{k},\lambda}$, respectivamente. Nestas variáveis a Hamiltoniana (1.38) assume a forma final

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\lambda} (p_{\mathbf{k},\lambda}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 x_{\mathbf{k},\lambda}^2), \quad (1.39)$$

que é idêntica àquela de um sistema formado por osciladores harmônicos desacoplados. Podemos concluir então que neste aspecto cada grau de liberdade do campo eletromagnético, ou seja, cada (\mathbf{k}, λ) corresponde a um oscilador harmônico de frequência $\omega_{\mathbf{k}}$.

1.3 Quantização Canônica

Quantização canônica é um esquema genérico de quantização em que identificamos coordenadas conjugadas, via o formalismo Lagrangeano, e impomos a relação canônica de comutação. Vamos ver isso num exemplo ilustrativo. A Lagrangeana de um oscilador harmônico clássico unidimensional é dada por

$$L = \frac{1}{2} (m\dot{x}^2 - kx^2). \quad (1.40)$$

A coordenada conjugada a x é obtida da Lagrangeana do sistema pela relação

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}. \quad (1.41)$$

Coordenadas conjugadas (x, p) possuem a propriedade de que seu parêntese de Poisson $\{x, p\}$ ⁶ é igual a um. Com essas coordenadas conjugadas é possível definir uma função Hamiltoniana definida como $H = px - L$ que para o oscilador harmônico desse exemplo toma a forma

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}. \quad (1.42)$$

⁶O parêntese de Poisson entre u e v , que são duas funções do conjunto de variáveis $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, é definido como $\{u, v\} = \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_r} \frac{\partial v}{\partial p_r} - \frac{\partial u}{\partial p_r} \frac{\partial v}{\partial q_r} \right)$

Na quantização canônica trocamos as coordenadas conjugadas (x, p) por operadores (\hat{x}, \hat{p}) e impomos

$$\{x, p\} \rightarrow \frac{[\hat{x}, \hat{p}]}{i\hbar} \quad (1.43)$$

sendo $[\hat{x}, \hat{p}]$ o comutador entre \hat{x} e \hat{p} ⁷.

Assim, o oscilador quântico passa a ser descrito pelo operador Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{k\hat{x}^2}{2}, \quad (1.44)$$

com $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

O campo eletromagnético pode ser quantizado da mesma maneira. O Hamiltoniano (1.39) passa a ser escrito como

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} (\hat{p}_{\mathbf{k}, \lambda}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 \hat{x}_{\mathbf{k}, \lambda}^2), \quad (1.45)$$

com

$$[\hat{x}_{\mathbf{k}, \lambda}, \hat{p}_{\mathbf{k}', \lambda'}] = i\hbar \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}. \quad (1.46)$$

Contudo, a forma mais interessante para aplicações decorre da definição (1.38) reescrita agora em termos de operadores como

$$\hat{b}_{\mathbf{k}, \lambda} = \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{x}_{\mathbf{k}, \lambda} + i \frac{\hat{p}_{\mathbf{k}, \lambda}}{\omega_{\mathbf{k}}} \right), \quad (1.47)$$

que, de acordo com (1.46), obedece a seguinte relação de comutação

$$[\hat{b}_{\mathbf{k}, \lambda}, \hat{b}_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger] = \hbar \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}. \quad (1.48)$$

Em termos destes operadores o Hamiltoniano do campo eletromagnético assume sua forma final

$$\hat{H} = \hbar \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \omega_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}, \lambda}, \quad (1.49)$$

no qual descartamos uma constante aditiva que não interfere nas aplicações consideradas nesta tese. Os operadores $\hat{b}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger$ e $\hat{b}_{\mathbf{k}, \lambda}$ são chamados operadores de criação e aniquilação pois quando aplicados nos auto-estados do operador energia (1.49) o efeito é o aumento ou diminuição de um quantum de energia $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$. No caso do campo eletromagnético, isso representa a criação ou aniquilação de um fóton de energia $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$, polarização λ e momento $\hbar\mathbf{k}$. O campo elétrico quantizado (1.34) passa então a ser reescrito com os operadores $\hat{b}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger$ e $\hat{b}_{\mathbf{k}, \lambda}$ no lugar das amplitudes complexas (*c-numbers*) $\beta_{\mathbf{k}, \lambda}^*$ e $\beta_{\mathbf{k}, \lambda}$. Um caso simples e extensamente utilizado nesta tese é aquele em que o campo é monomodo, polarizado e seu perfil espacial é uma função periódica. Nesta situação a Eq.(1.34) assume a forma simples

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_{k_x} E_0 (\hat{b} e^{-i\omega_c t} + \hat{b}^\dagger e^{i\omega_c t}) \cos(kx). \quad (1.50)$$

1.4 Eletrodinâmica Quântica com Íons Aprisionados

Nesta seção nós definiremos melhor um sistema muito importante e que recebe grande atenção nesta tese, a chamada eletrodinâmica quântica com íons aprisionados. Essencialmente, trata-se da interação de campos quantizados e íons aprisionados. Normalmente considera-se um íon aprisionado numa armadilha de Paul [17], e inserido no interior de uma cavidade óptica. Dentro desse esquema básico poder-se-ia pensar em casos particulares como transições de dois fótons ou campos térmicos, comprimidos, etc... Parte do objetivo desta tese é justamente analisar esses sistemas em detalhe propondo sua utilização em aplicações e estudos fundamentais.

Conforme vimos na seção (1.1) a armadilha confina o íon nas três dimensões num potencial que é aproximadamente harmônico. Na interação do íon com campos eletromagnéticos é possível escolher uma configuração tal

⁷O comutador entre dois operadores \hat{A} e \hat{B} é definido por $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$.

que o tratamento unidimensional é suficiente⁸. Assim, o Hamiltoniano livre para o movimento vibracional do íon é dado por⁹

$$\hat{H}_v = \nu \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (1.51)$$

no qual ν é a frequência de oscilação na armadilha (1.24) e $\hat{a}^\dagger(\hat{a})$ é o operador de criação (aniquilação).

Sob condições especiais o campo eletromagnético deve ser tratado quanticamente. Novamente, para o caso de um único modo, o Hamiltoniano livre equivale àquele de um oscilador harmônico simples (1.49)

$$\hat{H}_c = \omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b}, \quad (1.52)$$

no qual ω_c é a frequência do campo da cavidade e $\hat{b}^\dagger(\hat{b})$ cria(aniquila) fótons neste modo do campo. Lembramos que $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \mathbb{1}$ e os demais comutadores envolvendo estes operadores bosônicos, incluindo os que cruzam operadores do íon e fótons, são iguais a zero.

Para a estrutura eletrônica de um íon de n-níveis escrevemos

$$\hat{H}_a = \sum_{i=1}^n E_i |i\rangle \langle i|, \quad (1.53)$$

no qual E_i é a energia do nível $|i\rangle$.

Primeiramente, o problema do acoplamento entre cargas e campos eletromagnéticos é em geral bastante complicado [48]. Ao interagir com o campo eletromagnético as cargas se acoplarão a este além do acoplamento entre si que também é mediado por campos. São necessárias algumas aproximações e talvez a mais relevante seja aquela que resulta do fato do átomo(íon) ser espacialmente muito menor que o comprimento de onda do campo da cavidade. Neste caso, é conveniente realizar uma aproximação multipolar para a interação e guardar apenas os primeiros termos. Estes termos dão origem a interações de dipolo elétrico, magnético ou quadrupolo elétrico [48]. Qualquer uma dessas três possibilidades pode ser colocada numa forma geral para o Hamiltoniano de interação conforme ressaltado em [15]. No caso de um íon de dois níveis, esse Hamiltoniano geral de interação é dado por

$$\hat{H}_I = g(\hat{\sigma}_+ \hat{b} + \hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger) \cos[\eta(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \phi], \quad (1.54)$$

com $\hat{\sigma}_+ = |2\rangle \langle 1|$, $\hat{\sigma}_- = |1\rangle \langle 2|$, $\eta = 2\pi(m\nu)^{-1/2}/\lambda$, sendo λ o comprimento de onda do campo, g é a constante de acoplamento íon-campo e ϕ é uma fase¹⁰. A constante η é chamada de parâmetro de Lamb-Dicke e pode ser interpretada como a razão entre a extensão do pacote de onda do íon (proporcional a $(m\nu)^{-1/2}$) e o comprimento de onda do campo λ . A forma e valor específico da constante de acoplamento g vai depender, entre outras coisas, da estrutura eletrônica via regras de seleção que definirão se a transição é de dipolo elétrico, magnético ou quadrupolo elétrico. Maiores detalhes podem ser encontrados no apêndice C.

Portanto, o Hamiltoniano básico para os trabalhos em CQED com íons, que descreve um íon de dois níveis, preso numa armadilha de Paul de frequência natural ν , interagindo com um campo quantizado de frequência ω_c é dado por

$$\hat{H} = \nu \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + \sum_{i=1}^2 E_i |i\rangle \langle i| + g(\hat{\sigma}_+ \hat{b} + \hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger) \cos[\eta(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \phi]. \quad (1.55)$$

Este Hamiltoniano será utilizado nesta tese nos capítulos referentes à eletrodinâmica quântica de cavidades com íons aprisionados.

⁸Esse é o caso se o vetor de onda do campo coincidir com uma das direções x , y ou z definida pelo potencial da armadilha. Neste caso, somente um grau de liberdade será excitado e acoplado com a estrutura interna do íon.

⁹Daqui para frente adotaremos a convenção de tomar $\hbar = 1$.

¹⁰No caso da transição de dipolo elétrico esta fase descreve simplesmente a posição relativa entre o centro da armadilha e os nodos do campo. Contudo, nos casos mais complicados como numa transição quadrupolar esta fase pode conter alguns *shifts* adicionais.

2 Superposições de Estados Coerentes

“Motivation and desire alone are not enough. You also need to have the rest of your life in order to be an effective researcher. Make sure you’re fit. Look after your health. Spend high quality time with your family. Have fun. These things require a lot of thought and effort to get right. If you don’t get them right, not only will your life as a whole be less good, your research will suffer. So get these things right, and make sure they’re integrated with your research life.” - Michael Nielsen, <http://www.qinfo.org/people/nielsen/blog/archive/000120.html>, 2002.

Apresentaremos neste capítulo um esquema para geração de estados do tipo gato de Schrödinger no contexto da eletrodinâmica quântica com íons aprisionados. Essa proposta está publicada [33]. Trataremos inicialmente o caso ideal em que a cavidade é formada por espelhos perfeitos. Contudo, uma abordagem mais realista deve levar em consideração o fato de que os sistemas ópticos reais possuem imperfeições. No caso de cavidades reais, o coeficiente de reflexão não é exatamente igual a um e assim existe uma probabilidade finita de que fótons possam escapar ou ser absorvidos pela parede da cavidade. A inclusão de perdas é ainda mais importante quando falamos em estados tipo gato de Schrödinger que são extremamente sensíveis ao ambiente, perdendo coerência muito rapidamente. Por esses motivos apresentaremos também um esquema de geração no caso de cavidades dissipativas.

2.1 Estados Coerentes

Em seu experimento imaginário, Schrödinger ressaltava as estranhas consequências da extensão do conceito de superposição a objetos macroscopicamente distintos ou clássicos como a vida ou morte do pobre gato. Do ponto de vista prático, ou da adaptação da idéia para sistemas físicos controlados, a idéia evoluiu para a superposição de estados distinguíveis (ortogonais ou quase-ortogonais). Um tipo de estado apropriado para esse uso é o chamado estado coerente. Para um oscilador harmônico, um estado coerente é o estado quântico que mais se aproxima da descrição clássica. Isso porque a fase é muito bem definida e o produto das incertezas em amplitude e fase é o mínimo permitido pelo princípio da incerteza.

O estado coerente $|\alpha\rangle$ pode ser definido de várias maneiras equivalentes. Em particular, este estado pode ser criado a partir do vácuo $|0\rangle$, o estado fundamental do oscilador, pela aplicação de um operador unitário $\hat{D}(\alpha)$

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (2.1)$$

no qual $\hat{D}(\alpha)$ é definido como

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a} - \alpha^*\hat{a}^\dagger}, \quad (2.2)$$

sendo α um número complexo. Este operador é algumas vezes chamado operador de deslocamento de Glauber¹ [7]. Em princípio, como um operador unitário pode ser implementado por alguma evolução temporal, essa definição é interessante pois nos dá uma receita de como criar um estado coerente. Algumas vezes, ao invés de estados de mínima incerteza como este, nós precisamos de estados correspondendo a valores precisos para algum observável de interesse. Em especial, no caso de osciladores harmônicos, os estados de número $|n\rangle$ assumem importância fundamental (n é inteiro). O estado de vácuo corresponde ao caso $n = 0$. Estes são auto-estados do operador de número $\hat{a}^\dagger\hat{a}$, ou equivalentemente do operador Hamiltoniano (1.51) que é uma função do operador de número. Particularmente no caso do campo eletromagnético, os processos de medida envolvem em grande parte o evento da fóton-contagem ou seja aniquilação de um fóton no campo via absorção deste fóton no detector. Nestes caso, a questão fundamental seria descobrir qual a distribuição de fótons num estado geral $|\psi\rangle$. Em outras palavras, obter a estatística do campo. Essas são perguntas fundamentais que ajudam a caracterizar o estado particular do campo ou oscilador em geral. Essa distribuição de fótons ou energia é matematicamente definida como

$$P_n = |\langle n|\psi\rangle|^2. \quad (2.3)$$

¹Prêmio Nobel de física do ano de 2005.

No caso do estado coerente $|\alpha\rangle$, se usarmos a definição (2.1) obteremos

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.4)$$

e assim

$$P_n = \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}}{n!}, \quad (2.5)$$

que é simplesmente uma distribuição Poissoniana. Podemos agora obter a partir de (2.5), o valor do primeiro momento do operador de número, ou seja, o número médio de fótons \bar{n} em um estado coerente $|\alpha\rangle$. Esse valor é simplesmente $\bar{n} = |\alpha|^2$. Podemos também calcular o segundo momento, ou variância $V = \sqrt{n^2 - \bar{n}^2}$, encontrando $V = |\alpha|$, ou seja, $V = \sqrt{\bar{n}}$. O fato da variância ser igual a média é uma característica importante do estado coerente, ou das distribuições Poissonianas.

2.2 Gatos de Schrödinger

Iremos agora nos concentrar no caso de apenas um modo. Este pode ser um modo do campo eletromagnético ou do movimento de um íon aprisionado (oscilador harmônico). O estado gato de Schrödinger é definido como a superposição de dois estados coerentes, $|\alpha e^{\pm i\phi}\rangle$, com α e ϕ reais, ou seja²

$$|\Phi_{\pm}\rangle = |\alpha e^{+i\phi}\rangle \pm |\alpha e^{-i\phi}\rangle. \quad (2.6)$$

No caso em que $\phi = \pi$, os estados $|\Phi_{+}\rangle$ e $|\Phi_{-}\rangle$ são chamados estados gato par e gato ímpar, respectivamente [49]. A razão para esta nomenclatura é que medidas do número de fótons em campos nestes estados resultam em número par ou ímpar de fótons. O padrão oscilatório na P_n (2.3) é uma função de ϕ e no caso em que $\phi = \pi$ os mínimos ocorrem para n par ou ímpar. E no caso extremo em que ϕ é um múltiplo de 2π , não há oscilação alguma pois trata-se de um estado coerente e sua distribuição é uma Poissoniana.

Não apenas o padrão oscilatório é função de ϕ mas também a largura ou variância da dispersão. Em particular, costuma-se em óptica quântica fazer uma classificação das distribuições P_n comparando sua variância com a de um estado coerente. Vimos em (2.5) que a P_n do estado coerente é uma Poissoniana e como tal sua variância é igual ao número médio. Assim, definimos a variância normalizada ou fator de Fano σ como

$$\sigma = \frac{V}{\sqrt{\bar{n}}} = \sqrt{\frac{n^2 - \bar{n}^2}{\bar{n}}}, \quad (2.7)$$

e uma distribuição P_n é dita Poissoniana para $\sigma = 1$, sub-Poissoniana para $\sigma < 1$ e super-Poissoniana para $\sigma > 1$. No caso do estado (2.6), a variação de ϕ pode resultar nos três tipos de estatísticas. Algo interessante ocorre quando $\sigma > 1$, ou seja, na estatística super-Poissoniana. Nestes caso, ocorre o padrão oscilatório anteriormente citado e isso é uma consequência de interferência no espaço de fase conforme discutido em [50]. Esse tipo de interferência no espaço de fase é normalmente associado a aspectos não-clássicos como compressão nos ruídos das quadraturas do campo³.

Dessas rápidas considerações vemos a importância dos estados gato de Schrödinger para o estudo de propriedades não-clássicas do campo eletromagnético. Os estados par e ímpar apresentam forte interferência no espaço de fase e conforme $|\alpha|$ aumenta, estes estados tornam-se cada vez mais “quânticos” e contra-intuitivos, no sentido de representar a superposição de dois estados cada vez mais distinguíveis (ortogonais). Por outro lado, nós não observamos essa superposição no mundo macroscópico. Ao contrário, observamos superposições clássicas, ou melhor, misturas estatísticas como

$$\hat{\rho} = |\alpha e^{+i\phi}\rangle \langle \alpha e^{+i\phi}| + |\alpha e^{-i\phi}\rangle \langle \alpha e^{-i\phi}|, \quad (2.8)$$

que não apresentam interferência no espaço de fase. Isso corresponde à nossa visão clássica de gato vivo ou morto e não ambas possibilidades simultaneamente. O leitor pode fazer um análogo com o surgimento ou não

²Note que na definição (2.6) nós omitimos a normalização.

³A grosso modo estas quadraturas são dois operadores que não comutam e seriam um análogo da posição e momento de um oscilador massivo. Detalhes são facilmente encontrados em livros de óptica quântica [7, 50].

de padrões de interferência numa experiência de fenda dupla conforme Feynman discute no seu texto clássico *Lectures on Physics III* [51]. Decorre então outra aplicação deste tipo de estado que é o estudo da fronteira entre a física clássica e a física quântica. Essa questão é parcialmente respondida com a introdução de decoerência ou perda de unitariedade na evolução temporal do sistema [6]. A coerência da superposição (2.6) é rapidamente perdida e este estado se torna uma mistura (2.8).

Além dessas aplicações em física fundamental, estes estados podem ser usados em muitos protocolos de computação e informação quântica. Superposições de estados coerentes vêm sendo empregadas em esquemas de teletransporte [?] e portas lógicas [?], somente para citar algumas poucas aplicações.

2.3 Proposta com Íons em Cavidades Ideais

Nesta seção, mostraremos como as superposições de estados coerentes surgem naturalmente na dinâmica de um íon em ressonância com o campo eletromagnético quântico de uma cavidade ideal. Na próxima seção, aplicaremos o formalismo de *quantum jumps* [42] para propor um esquema de geração no caso não-ideal que inclui perdas na cavidade.

O Hamiltoniano de interação para um íon de dois níveis interagindo com o campo quantizado é dado por (1.54). Usaremos uma notação apropriada para problemas de dois níveis definindo $|1\rangle \equiv |g\rangle$, $|2\rangle \equiv |e\rangle$ e $E_2 - E_1 = \omega_a$ (tomamos $\hbar = 1$)⁴. Para valores pequenos do parâmetro η , ou seja, no regime de Lamb-Dicke e para $\phi = 0$ (mínimo do potencial harmônico coincidindo com o máximo da distribuição de campo na cavidade), podemos expandir $\cos \eta(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ e guardar apenas os termos até η^2 . Obteremos nesta aproximação

$$\hat{H}_I = g \left[1 - \frac{\eta^2(1 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a})}{2} - \frac{\eta^2(\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2)}{2} \right] (\hat{\sigma}_-\hat{b}^\dagger + \hat{\sigma}_+\hat{b}) \quad (2.9)$$

Se $\Delta = \omega_a - \omega_c = 0$, ou seja, houver ressonância entre o campo e a transição eletrônica do íon, nós podemos desprezar os termos que envolvem transições no grau de liberdade do centro de massa (aproximação de onda girante). Nesta aproximação, o Hamiltoniano (2.9) torna-se

$$\hat{H}_I = g \left[1 - \frac{\eta^2(1 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a})}{2} \right] (\hat{\sigma}_-\hat{b}^\dagger + \hat{\sigma}_+\hat{b}). \quad (2.10)$$

Este é um Hamiltoniano do tipo Jaynes-Cummings tendo porém uma constante de acoplamento dependente da intensidade do movimento do íon (dependência em $\hat{a}^\dagger\hat{a}$). Esse Hamiltoniano dá origem a muitos fenômenos interessante e foi estudado em detalhe em [34].

A evolução temporal de um estado $|\psi(0)\rangle$ sujeito a um Hamiltoniano \hat{H} , independente do tempo, é simplesmente $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle$, com $\hat{U} = e^{-i\hat{H}t}$. Para Hamiltonianos envolvendo transições em sistemas de dois níveis, é fácil obter uma fórmula para \hat{U} que é bastante útil e fácil de se aplicar. Vamos supor que

$$\hat{H} = \Omega(\hat{A}\hat{\sigma}_+ + \hat{A}^\dagger\hat{\sigma}_-), \quad (2.11)$$

com \hat{A} um operador qualquer relativo a outro subsistema que não aquele descrito por $\hat{\sigma}_\pm$. A função exponencial que aparece na definição de \hat{U} pode ser expandida em série de potências. Neste caso, teremos que analisar as potências par e ímpar do operador Hamiltoniano (2.11). É fácil perceber que

$$\begin{aligned} (\hat{A}\hat{\sigma}_+ + \hat{A}^\dagger\hat{\sigma}_-)^{2l} &= (\hat{A}\hat{A}^\dagger)^l \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + (\hat{A}^\dagger\hat{A})^l \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+, \\ (\hat{A}\hat{\sigma}_+ + \hat{A}^\dagger\hat{\sigma}_-)^{2l+1} &= (\hat{A}\hat{A}^\dagger)^l \hat{A}\hat{\sigma}_+ + \hat{A}^\dagger(\hat{A}\hat{A}^\dagger)^l \hat{\sigma}_-, \end{aligned} \quad (2.12)$$

tal que

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= \cos\left(\Omega t \sqrt{\hat{A}^\dagger\hat{A} + 1}\right) \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + \cos\left(\Omega t \sqrt{\hat{A}^\dagger\hat{A}}\right) \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+ \\ &\quad - i \frac{\sin\left(\Omega t \sqrt{\hat{A}^\dagger\hat{A} + 1}\right)}{\sqrt{\hat{A}^\dagger\hat{A} + 1}} \hat{A}\hat{\sigma}_+ - i \hat{A}^\dagger \frac{\sin\left(\Omega t \sqrt{\hat{A}^\dagger\hat{A} + 1}\right)}{\sqrt{\hat{A}^\dagger\hat{A} + 1}} \hat{\sigma}_-. \end{aligned} \quad (2.13)$$

⁴Estamos usando g para designar estado fundamental, *ground* em inglês, e e para estado excitado, *excited* em inglês.

Consideraremos agora que o sistema é preparado de forma tal que o íon está inicialmente em seu estado excitado $|e\rangle$ e seu movimento de centro de massa é preparado inicialmente no estado coerente $|\alpha\rangle_v$. Também, a cavidade é preparada no estado de vácuo $|0\rangle_c$. Matematicamente, o estado inicial do sistema é dado por $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle_v|0\rangle_c|e\rangle$. De acordo com o Hamiltoniano (2.10) e usando a fórmula (2.13), este estado evolui naturalmente para

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \cos\left(gt\left[1 - \eta^2(1 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a})/2\right]\right) |\alpha\rangle_v|0\rangle_c|e\rangle \\ &\quad - i \sin\left(gt\left[1 - \eta^2(1 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a})/2\right]\right) |\alpha\rangle_v|1\rangle_c|g\rangle. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ainda temos que aplicar as funções trigonométricas dos operadores $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ no estado coerente $|\alpha\rangle_v$. Isso pode ser realizado facilmente se usarmos a expansão de um estado coerente na base de número (2.4). Assim,

$$e^{i\phi\hat{a}^\dagger\hat{a}}|\alpha\rangle_v = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n e^{ni\phi}}{\sqrt{n!}} |n\rangle_v = |\alpha e^{i\phi}\rangle_v, \quad (2.15)$$

de onde podemos extrair a parte real e imaginária

$$\cos(\phi\hat{a}^\dagger\hat{a})|\alpha\rangle_v = \frac{|\alpha e^{i\phi}\rangle_v + |\alpha e^{-i\phi}\rangle_v}{2} \quad (2.16)$$

$$\sin(\phi\hat{a}^\dagger\hat{a})|\alpha\rangle_v = \frac{|\alpha e^{i\phi}\rangle_v - |\alpha e^{-i\phi}\rangle_v}{2i}, \quad (2.17)$$

e com este resultado podemos reescrever o estado evoluído (2.14) como

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= [\cos(\omega_\eta t) |\Phi_+\rangle_v - i \sin(\omega_\eta t) |\Phi_-\rangle_v] |0\rangle_c|e\rangle \\ &\quad + [\cos(\omega_\eta t) |\Phi_-\rangle_v - i \sin(\omega_\eta t) |\Phi_+\rangle_v] |1\rangle_c|g\rangle, \end{aligned} \quad (2.18)$$

no qual definimos $\omega_\eta = g(1 - \eta^2/2)$ e também os estados $|\Phi_\pm\rangle_v$ que são superposições gerais de estados coerentes dadas por

$$|\Phi_\pm\rangle_v \equiv \frac{|\alpha e^{i\phi}\rangle_v \pm |\alpha e^{-i\phi}\rangle_v}{2}, \quad (2.19)$$

sendo $\phi = \eta^2 gt$ uma fase real. O estado (2.19) é precisamente o estado gato de Schrödinger (2.6).

O estado evoluído (2.18) é um estado emaranhado tripartite extremamente interessante pois envolve o emaranhamento de fótons em estados de número com estados do tipo gato de Schrödinger do íon. Acreditamos que este tipo de estado pode encontrar aplicações em teletransporte e em redes distribuídas pois os fótons podem ser usados para propagar informação entre longas distâncias (*flying qubits*).

Para tempos de interação $\omega_\eta t_k = k\pi$, com k inteiro, o estado (2.18) é dado por

$$|\psi(t)\rangle = |\Phi_+\rangle_v|0\rangle_c|e\rangle + |\Phi_-\rangle_v|1\rangle_c|g\rangle, \quad (2.20)$$

de onde vemos que para se obter um estado de gato de Schrödinger basta realizar uma medição do estado interno do íon. Esta medição colapsa o estado do sistema em um estado produto contendo gatos de Schrödinger. Se a medição resultar em $|e\rangle$, o estado gerado é o gato par $|\Phi_+\rangle_v$, e se a medição resultar em $|g\rangle$, o estado gerado é o gato ímpar $|\Phi_-\rangle_v$. Esse esquema funciona perfeitamente para o caso de uma cavidade ideal. Contudo, se perdas estiverem presentes, a coerência da evolução será destruída e a evolução temporal será descrita por uma equação mestra, conforme discutido no Apêndice A, e não pela aplicação de um operador unitário de evolução como $e^{-i\hat{H}t}$.

2.4 Extensão para Cavidades Dissipativas

A situação descrita por uma equação mestra é aquela em que o sistema dissipativo segue sua evolução sem qualquer medição por parte do experimentalista. Este não está observando nem o sistema e nem o reservatório. É, precisamente, por essa razão que o sistema evolui para uma mistura estatística. O experimentalista não obtém durante a evolução qualquer informação sobre o decaimento ou não do sistema. No caso de uma cavidade não-ideal, isto significa que a cavidade pode ou não ter emitido fótons e este fato introduz incertezas estatísticas

no problema. Em geral, essa situação apresenta apenas aspectos destrutivos na coerência do sistema. Veremos na próxima seção uma outra situação que usa a dissipação como ferramenta para manipulação de estados quânticos. O material para o entendimento desta seção é discutido no Apêndice B onde apresentamos a descrição de sistemas dissipativos, ou abertos em geral, quando o experimentalista efetua medições contínuas sobre o sistema. Mais precisamente, nós reinterpretaremos a equação mestra em termos da ocorrência sucessiva de eventos de decaimento e não-decaimento. Em especial, veremos como uma cavidade não-ideal evolui na presença de um foto-detector capaz de monitorar o decaimento da cavidade durante toda a evolução temporal. Esse novo sistema, com o acréscimo de um detector de fótons, será usado para geração de estados quânticos com características análogas aos gatos de Schrödinger. Esse esquema torna-se uma alternativa experimental interessante para geração de estados quânticos pois não exige o uso de cavidades ideais.

2.4.1 Estado Gerado após Decaimento

Agora usaremos o formalismo desenvolvido no Apêndice B para analisar o estado gerado no movimento do íon após a detecção de um fóton fora da cavidade. O sistema que temos em mente é apresentado na Fig.(2.1). Vimos que a evolução correspondendo à não-emissão de fótons é dada pelo Hamiltoniano não-Hermitiano (B.8) que em nosso caso, e na representação de interação, torna-se

$$\hat{H}_{\text{eff}} = -i\frac{\kappa \hat{b}^\dagger \hat{b}}{2} + g \left[1 - \frac{\eta^2(1 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a})}{2} \right] (\hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger + \hat{\sigma}_+ \hat{b}). \quad (2.21)$$

Se um fóton deixa a cavidade ele será detectado por um detector que supomos ter eficiência perfeita. Havendo detecção num instante de tempo t , o estado, de acordo com o formalismo dos *quantum jumps*, será dado por

$$|\psi\rangle = \frac{\hat{b}^\dagger e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}t} |\psi(0)\rangle}{\|\cdot\|}, \quad (2.22)$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma do estado. A evolução $e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}t} |\psi(0)\rangle$ é equivalente à solução da equação diferencial

$$i\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}_{\text{eff}} |\psi(t)\rangle \quad (2.23)$$

sujeita à mesma condição inicial $|\psi(0)\rangle$. Uma vez que o Hamiltoniano (2.21) apresenta transições de um fóton e conserva o número $\hat{a}^\dagger a$, podemos escrever o estado evoluído do sistema como

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(t) |m\rangle_v |0\rangle_c |e\rangle + d_m(t) |m\rangle_v |1\rangle_c |g\rangle. \quad (2.24)$$

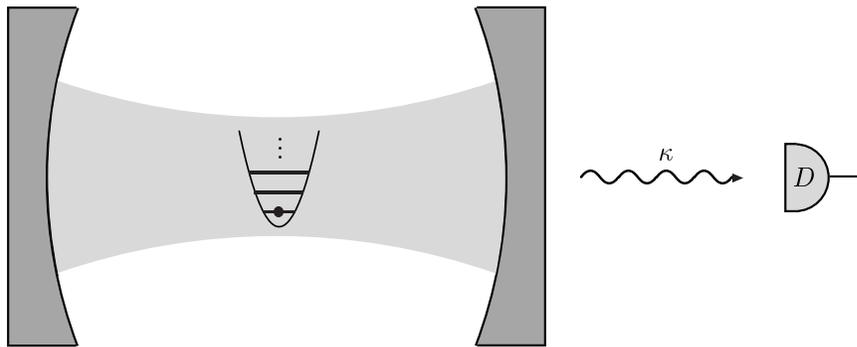


Figura 2.1: O sistema é formado por um íon aprisionado num potencial parabólico e inserido numa cavidade com perdas. A taxa de emissão de fótons pela cavidade é κ e um detector D monitora continuamente este canal de decaimento.

Substituindo (2.24) em (2.23) e usando (2.21), obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais para os coeficientes

$$i\dot{c}_m(t) = g\lambda_{LD}^m d_m(t) \quad (2.25)$$

$$i\dot{d}_m(t) = -i\frac{\kappa}{2}d_m(t) + g\lambda_{LD}^m c_m(t), \quad (2.26)$$

onde $\lambda_{LD}^m = 1 - \eta^2(1 + 2m)/2$. A solução⁵ é simplesmente

$$c_m(\tau) = c_m(0) e^{-\Gamma\tau/4} \left(C_m(\tau) + \frac{\Gamma S_m(\tau)}{\sqrt{\Gamma^2 - 16(\lambda_{LD}^m)^2}} \right)$$

$$d_m(\tau) = -4ic_m(0) e^{-\Gamma\tau/4} \frac{\lambda_{LD}^m S_m(\tau)}{\sqrt{\Gamma^2 - 16(\lambda_{LD}^m)^2}}, \quad (2.27)$$

onde $c_m(0)$ são os coeficiente da expansão do estado coerente na base de número (2.4), $\Gamma = \kappa/g$, $\tau = gt$ e

$$C_m(\tau) = \cosh(\sqrt{\Gamma^2 - 16(\lambda_{LD}^m)^2} \tau/4) \quad (2.28)$$

$$S_m(\tau) = \sinh(\sqrt{\Gamma^2 - 16(\lambda_{LD}^m)^2} \tau/4). \quad (2.29)$$

Com os coeficientes (2.27) nós temos todas as informações sobre a dinâmica do sistema sob a condição de que nenhum fóton atingiu o detector D . Agora, suponha que em um instante $\tau = \tau_d$ um fóton é detetado fora da cavidade. De acordo com (2.22), o estado após decaimento da cavidade será o estado não-emaranhado $|\psi(\tau_d)\rangle = |\Phi(\tau_d)\rangle_v |0\rangle_c |g\rangle$ onde a parte relativa ao estado de movimento é dada por

$$|\Phi(\tau_d)\rangle_v = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m(\tau_d)}{\sqrt{\sum_{p=0}^{\infty} |d_p(\tau_d)|^2}} |m\rangle_v. \quad (2.30)$$

Agora precisamos revelar ao leitor a motivação para realizarmos este estudo via *quantum jumps*. No caso ideal dado por (2.20), o estado desejado é gerado via medida de fluorescência eletrônica que projeta o sistema num estado não-emaranhado com a componente do movimento do centro de massa sendo $|\Phi_+\rangle_v$ ou $|\Phi_-\rangle_v$. Pensamos então que dentro de algum limite de tempo, que não poderia ser muito longo para não destruir a coerência das superposições envolvidas em estados do tipo $|\Phi_{\pm}\rangle_v$, poderíamos usar a dissipação a nosso favor. Como? Trocando a medida de fluorescência eletrônica por uma medida do fóton do campo que deixou a cavidade dissipativa⁶. Assim, o formalismo das trajetórias quânticas nos serviu como ferramenta para encontrar o estado após a detecção (2.30).

Realizamos um estudo das propriedades estatísticas de $|\Phi(\tau_d)\rangle_v$, em especial do fator de Fano (2.7) e da distribuição $P(m) = |\langle m|\Phi_{\pm}\rangle_v|^2$. Encontramos aspectos não-clássicos típicos de superposição de estados coerentes ou gatos, como é o caso das oscilações em $P(m)$ quando a estatística é super-Poissoniana (fator de Fano $\sigma > 1$), veja Fig.(2.2).

É importante calcularmos a probabilidade de detecção de um fóton fora da cavidade pois esta quantidade esta relacionada com a probabilidade de sucesso de nosso esquema. De acordo com a seção anterior, a probabilidade

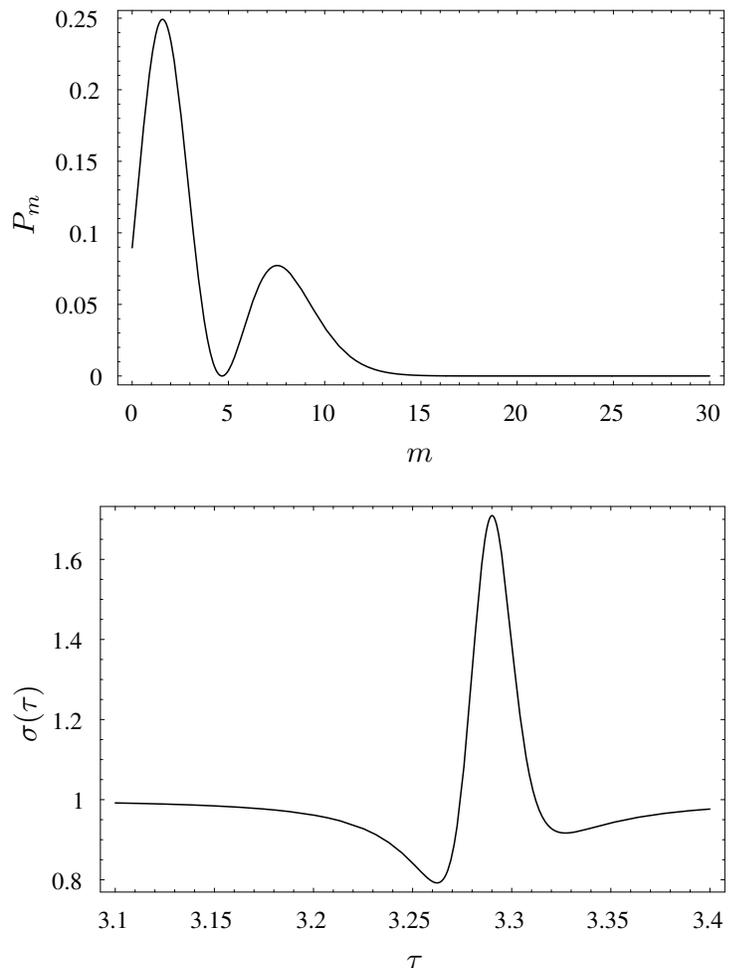


Figura 2.2: Da esquerda para a direita temos a distribuição P_m e o fator de Fano σ para o estado do movimento do íon gerado após detecção de um fóton fora da cavidade. A curva P_m mostra a distribuição no instante $\tau \approx 3.29$ no qual o fator de Fano σ é máximo e maior que 1, ou seja, estatística super-Poissoniana. Os parâmetros usados foram $\Gamma = 1$, $\eta = 0.05$, and $\alpha = 2$.

⁵O leitor pode empregar qualquer método de solução que desejar, como por exemplo, utilizar matrizes e autovalores. Hoje em dia estes problemas podem ser solucionados em poucos segundos com a ajuda de softwares que realizam cálculos algébricos como o Mathematica[®].

⁶Estamos supondo que a probabilidade de absorção de um fóton pelas paredes da cavidade é desprezível.

de *jump* é dada por $P(\tau) = 1 - \langle \psi(\tau) | \psi(\tau) \rangle$, em que $|\psi(\tau)\rangle$ é dado pelas equações (2.24) e (2.27). Na Fig.(2.3) podemos ver essa probabilidade em função do tempo adimensional τ .

O ponto forte de nosso esquema é sua aplicabilidade para casos em que as perdas da cavidade são comparáveis ao acoplamento íon campo, ou seja, $\kappa \sim g$ ($\Gamma \sim 1$). Esse é o chamado regime de acoplamento fraco e é o atual estado da pesquisa experimental nesta área [29].

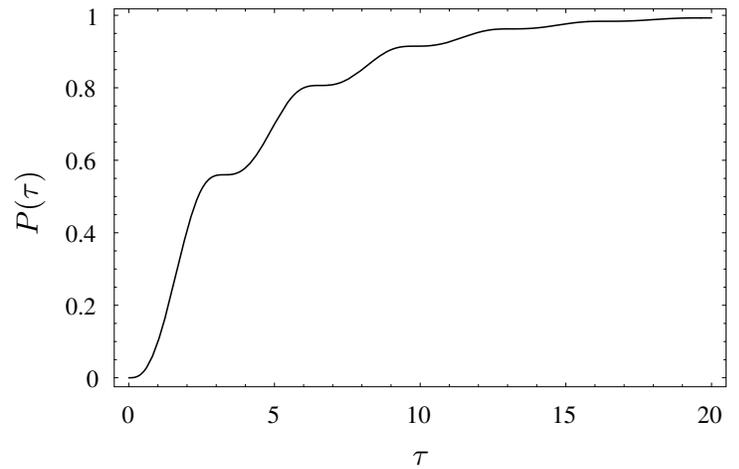


Figura 2.3: Probabilidade de detecção de um fóton fora da cavidade. Os parâmetros usados foram $\Gamma = 1$, $\eta = 0.05$, and $\alpha = 2$.

2.5 Conclusão

Em resumo, nós propusemos um esquema de geração de superposições de estados coerentes num sistema de grande interesse que é aquele formado por íons aprisionados e cavidades [33]. Dois aspectos de nossa proposta merecem destaque. O primeiro é que estamos emaranhando qubits estacionários (graus de liberdade do íon) com qubits móveis que é o fóton. Esse tipo de abordagem que utilizada tais tipos de memória vem atraindo crescente atenção em computação quântica e forma o que é habitualmente chamamos de redes quânticas distribuídas [30]. O segundo aspecto é a aplicabilidade experimental. Uma vez que ampliamos a análise para casos não ideais que incluem cavidades dissipativas, a proposta torna-se ainda mais factível experimentalmente. Especialmente porque mostramos ser possível encontrar efeitos quânticos no estado gerado, mesmo que estejamos no regime de acoplamento fraco em que a perda se equipara ao acoplamento íon-campo. Essa é precisamente a situação experimental atual [29, 54].

3 Acoplamento tipo Kerr para Sistemas Bosônicos

“... In the context of research, this means constantly reminding yourself that you are the person ultimately responsible for your research effectiveness. Not the institution you find yourself in. Not your colleagues, or supervisor. Not the society you are living in. All these things influence your research career, and may be either a help or a hindrance (more on that later), but in the final analysis if things are not working well it is up to you to take charge and change them.” - **Michael Nielsen**, <http://www.qinfo.org/people/nielsen/blog/archive/000120.html>, 2002.

Neste capítulo iremos deduzir um Hamiltoniano efetivo que descreve uma interação do tipo *cross-Kerr* envolvendo operadores do campo e do movimento de um íon aprisionado. Para a obtenção deste tipo de acoplamento iremos supor algumas condições sobre as frequências dos sistemas envolvidos. A mais crucial para nosso esquema é a escolha de uma grande dessintonia entre o íon e o campo, o chamado regime dispersivo em CQED. Esse regime induz o aparecimento de *Stark shifts* que serão usados na obtenção do acoplamento *cross-Kerr*. Demonstraremos também a possibilidade de implementação de uma porta quântica de fase baseada em nosso Hamiltoniano. A grande vantagem desta porta é sua robustez com relação à emissão espontânea. A porta opera todo o tempo com o íon em seu estado fundamental eletrônico o que a torna insensível a este tipo de decaimento. Esses resultados estão publicados [35].

3.1 Relevância do Problema

Nosso objetivo é demonstrar como o sistema formado por um íon aprisionado interagindo com o campo eletromagnético quantizado pode ser usado para a realização do efeito Kerr. Mais precisamente, dados dois campos bosônicos com operadores de criação \hat{a}^\dagger e \hat{b}^\dagger , a interação da forma [36,37]

$$\hat{H} = \lambda \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{b} \quad (3.1)$$

é chamada de interação Kerr cruzada (*cross-Kerr*) ou simplesmente Kerr. Neste tipo de interação não-linear os operadores de número de fótons (as intensidades dos campos) se cruzam. Isso pode ser usado para gerar um deslocamento de fase em um modo que depende da intensidade do outro. De fato, na representação de interação teremos

$$\hat{a} \rightarrow \hat{a} e^{-i\lambda \hat{b}^\dagger \hat{b} t}, \quad \hat{b} \rightarrow \hat{b} e^{-i\lambda \hat{a}^\dagger \hat{a} t}. \quad (3.2)$$

Efeitos não-lineares são especialmente relevantes para óptica e computação quântica. Esse tipo de acoplamento (3.1), em particular, está presente na base de vários esquemas. Citaremos apenas alguns exemplos. Em [55, 56] este acoplamento é utilizado na realização de medidas quânticas não demolidoras, ou seja, medidas quânticas que não perturbam a evolução natural do observável de interesse. Em [57], um aparato óptico, cujo elemento chave é a interação *cross-Kerr*, sintetiza estados de Fock a partir de estados coerentes. Podemos ainda citar a aplicação desta interação em teletransporte de estados de polarização de fótons [58], codificação de qubits em sistemas com infinitos graus de liberdade (modo do campo eletromagnético) [59], realização de portas controladas de dois qubits em computação com óptica linear [60] e detecção de estados de Bell [61]. Estes são apenas alguns exemplos da importância deste tipo de interação.

Grandes não linearidades λ são em geral extremamente difíceis de se obter com campos eletromagnéticos. Algum progresso neste sentido têm se dado no âmbito de gases atômicos ultra-frios bombeados por campos eletromagnéticos [62, 63]. Trata-se portanto de um problema extremamente interessante e importante a procura de maneiras de se obter interações desse tipo. É neste escopo que o trabalho apresentado neste capítulo se situa. Apresentaremos agora uma maneira de se obter a interação *cross-Kerr* no sistema formado por um íon em interação com o campo quantizado de uma cavidade.

3.2 Dedução do Hamiltoniano Kerr

O ponto de partida é novamente o Hamiltoniano geral (1.55) na notação do capítulo anterior. Por conveniência iremos empregar aqui a representação de interação na qual teremos

$$\hat{H}_I = g(\hat{\sigma}_+ \hat{b} e^{i\Delta t} + \hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger e^{-i\Delta t}) \cos \eta (\hat{a}^\dagger e^{i\nu t} + \hat{a} e^{-i\nu t}), \quad (3.3)$$

onde definimos $\Delta = \omega_a - \omega_c$. Usando agora a relação¹ e expandindo as exponenciais temos $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}}$ teremos

$$\hat{H}_I = g\hat{\sigma}_+ \hat{b} \sum_{\alpha,\beta} F(\hat{a}^\dagger, \hat{a}; \alpha, \beta) e^{i[\Delta+\nu(\alpha-\beta)]t} + g\hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger \sum_{\alpha,\beta} F(\hat{a}^\dagger, \hat{a}; \alpha, \beta) e^{-i[\Delta+\nu(\alpha-\beta)]t}, \quad (3.4)$$

onde definimos a função

$$F(\hat{a}^\dagger, \hat{a}; \alpha, \beta) = \frac{e^{-\eta^2/2}}{2\alpha!\beta!} [(i\eta)^{\alpha+\beta} + (-i\eta)^{\alpha+\beta}] a^{\dagger\alpha} a^\beta. \quad (3.5)$$

3.2.1 Primeira Aproximação

Analisando a dependência temporal no Hamiltoniano (3.4) nós podemos escolher cuidadosamente as frequências do sistema de modo a realizar uma aproximação de onda girante apropriada. Nesta aproximação, termos rapidamente oscilantes serão desprezados e guardaremos apenas aqueles que oscilam lentamente. Os termos em (3.4) oscilam no tempo de duas maneiras, ou eles oscilam como $e^{\pm i\Delta t}$ ou $e^{i\pm(\Delta+k\nu)t}$, com k um número inteiro. No regime $\Delta \ll \nu$ e $\Delta \neq k\nu$, os termos oscilando lentamente serão aqueles com frequência proporcional a $e^{\pm i\Delta t}$. Isso ocorre apenas quando $\alpha = \beta$, ou

$$F(\hat{a}^\dagger, \hat{a}; \alpha) = e^{-\eta^2/2} \frac{(-1)^\alpha \eta^{2\alpha} a^{\dagger\alpha} a^\alpha}{\alpha!^2}, \quad (3.6)$$

e então, na aproximação de onda girante

$$\hat{H} = \nu \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + g(\hat{\sigma}_+ \hat{b} + \hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger) f(\hat{a}^\dagger \hat{a}), \quad (3.7)$$

com

$$f(\hat{a}^\dagger \hat{a}) = e^{-\eta^2/2} : J_0(\mathbf{n}) :, \quad (3.8)$$

na qual $: J_0(\mathbf{n}) :$ é a função de Bessel de ordem zero que está no ordenamento normal e $\mathbf{n} \equiv 2\eta\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a}}$. É bastante útil possuímos uma representação na base de Fock para $: J_0(\mathbf{n}) :$. Na referência [64], os autores deduzem essa representação que em nosso caso é dada por

$$: J_0(\mathbf{n}) := \sum_m L_m(\eta^2) |m\rangle \langle m|, \quad (3.9)$$

na qual L_m é o m -ésimo polinômio de Laguerre. O Hamiltoniano (3.7) é equivalente àquele usado no capítulo anterior, Hamiltoniano (2.10), porém aqui não estamos sujeitos ao regime de Lamb-Dicke como anteriormente.

3.2.2 Segunda Aproximação

O intuito da aproximação anterior foi promover o surgimento de um acoplamento dependente do operador de número $\hat{a}^\dagger \hat{a}$. Isso se dá na forma da função de Bessel J_0 . Contudo, o Hamiltoniano (3.7) apresenta transições em que fótons são criados ou aniquilados, isso se dá pela presença dos operadores \hat{b}^\dagger e \hat{b} . Devemos agora fazer com que esta dependência dos operadores de criação e aniquilação se converta numa dependência do operador de número $\hat{b}^\dagger \hat{b}$ e assim obtermos o tipo de interação dada por (3.1). Isso será realizado no chamado regime dispersivo, ou de grande dessintonia, caracterizado por $\Delta \gg g$. Para essa finalidade é conveniente usarmos a

¹Relação válida nos casos em que $[\hat{A}, \hat{B}] = \gamma$, sendo γ um número complexo arbitrário.

representação de Heisenberg. As equações de movimento ² para os operadores de transição obtidas do Hamiltoniano geral (3.7) são dadas por

$$i\frac{d\hat{\sigma}_+}{dt} = -\omega_a\hat{\sigma}_+ + g\hat{b}^\dagger\hat{\sigma}_z f(\hat{a}^\dagger\hat{a}) \quad (3.10)$$

$$i\frac{d\hat{b}}{dt} = \omega_c\hat{b} + g\hat{\sigma}_- f(\hat{a}^\dagger\hat{a}) \quad (3.11)$$

$$i\frac{d\hat{a}}{dt} = \nu\hat{a} + g(\hat{\sigma}_+\hat{b} + \hat{\sigma}_-\hat{b}^\dagger)\frac{\partial}{\partial\hat{a}^\dagger} f(\hat{a}^\dagger\hat{a}). \quad (3.12)$$

Para realizar a aproximação de grande dessintonia é ainda útil realizarmos a seguinte transformação unitária

$$\hat{\sigma}_+ \rightarrow \hat{\sigma}_+ e^{i\omega_a t}, \quad \hat{b}(t) \rightarrow \hat{b} e^{-i\omega_c t}, \quad \hat{a}(t) \rightarrow \hat{a} e^{-i\nu t}, \quad (3.13)$$

tal que as equações de movimento tomam a forma

$$i\frac{d\hat{\sigma}_+}{dt} = g\hat{b}^\dagger\hat{\sigma}_z f(\hat{a}^\dagger\hat{a}) e^{-i\Delta t} \quad (3.14)$$

$$i\frac{d\hat{b}}{dt} = g\hat{\sigma}_- f(\hat{a}^\dagger\hat{a}) e^{-i\Delta t} \quad (3.15)$$

$$i\frac{d\hat{a}}{dt} = g(\hat{\sigma}_+\hat{b}e^{i\Delta t} + \hat{\sigma}_-\hat{b}^\dagger e^{-i\Delta t}) e^{-i\nu t} \frac{\partial}{\partial\hat{a}^\dagger} f(\hat{a}^\dagger\hat{a}). \quad (3.16)$$

No regime de grande dessintonia, ou seja, quando $\Delta = \omega_a - \omega_c \gg g$, podemos realizar a segunda aproximação no problema que consiste em admitir que as frequências em que os operadores variam (ω_a, ω_c, ν) são muito lentas quando comparados à Δ . Essa hipótese nos permite integrar (3.14) obtendo

$$\hat{\sigma}_+ = \frac{g e^{-i\Delta t}}{\Delta} \hat{b}^\dagger \hat{\sigma}_z f(\hat{a}^\dagger\hat{a}). \quad (3.17)$$

Substituindo (3.17) em (3.15) obtemos

$$i\frac{d\hat{b}}{dt} = \frac{g^2}{\Delta} f^2(\hat{a}^\dagger\hat{a}) \hat{b} \hat{\sigma}_z. \quad (3.18)$$

Esta equação de movimento pode ser obtida do Hamiltoniano efetivo

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \nu\hat{a}^\dagger\hat{a} + \omega_c\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{\omega_a}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{g^2}{\Delta} f^2(\hat{a}^\dagger\hat{a}) (\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{b}\hat{b}^\dagger - \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\hat{b}^\dagger\hat{b}), \quad (3.19)$$

obtido sob as condições $\Delta \neq k\nu$ e $g \ll \Delta \ll \nu$. No apêndice D, encontraremos analiticamente essas condições de validade via teoria de perturbação dependente do tempo. Considerando que o íon é inicialmente preparado no estado fundamental $|g\rangle$ teremos (representação de interação)

$$H_{\text{eff}} = -\frac{g^2}{\Delta} f^2(\hat{a}^\dagger\hat{a}) \hat{b}^\dagger \hat{b}. \quad (3.20)$$

O Hamiltoniano (3.20) envolve o produto dos operadores de número do campo $\hat{b}^\dagger\hat{b}$ e do movimento vibracional $\hat{a}^\dagger\hat{a}$, sendo que este último aparece dentro da função de Bessel ordenada normalmente: J_0 ; caracterizando uma interação do tipo *cross-Kerr* entre dois bosons. Os *Stark shifts* que resultam da condição de grande dessintonia são essenciais para a obtenção do Hamiltoniano Kerr. Aliado a isso, o ponto chave aqui é que o operador de número do movimento vibracional $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ acaba multiplicado pelos *light shifts*.

Para valores suficientemente pequenos do parâmetro de Lamb-Dicke η , o conhecido regime de Lamb-Dicke, podemos truncar a função de Bessel conservando apenas termos da ordem de η^2 e obter assim a forma usual da interação Kerr cruzada que é dada por (3.1). Da eq.(3.8) notamos que

$$f^2(\hat{a}^\dagger\hat{a}) \approx 1 - \eta^2 - 2\eta^2\hat{a}^\dagger\hat{a}, \quad (3.21)$$

e então, se o íon é inicialmente preparado no estado fundamental $|g\rangle$, como no Hamiltoniano (3.20), teremos

$$\hat{H}_{\text{eff}}^{\text{LD}} = \nu\hat{a}^\dagger\hat{a} + \tilde{\omega}_c\hat{b}^\dagger\hat{b} + \lambda\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b}, \quad (3.22)$$

no qual definimos $\tilde{\omega}_c = \omega_c + (\eta^2 - 1)g^2/\Delta$, que é um deslocamento de frequência no campo, e também $\lambda = 2\eta^2g^2/\Delta$, que é a constante de acoplamento efetiva dos dois campos bosônicos \hat{a} e \hat{b} . O termo de interação em (3.22) é(precisamente) a procurada interação Kerr cruzada em sua forma usual.

²Na representação de Heisenberg, um operador \hat{A} evolui de acordo com a equação de movimento $i\frac{d}{dt}\hat{A} = [\hat{A}, \hat{H}]$

3.3 Porta Lógica de Fase

Nesta seção, apresentaremos um método de implementação de uma porta quântica de fase denotada como $\hat{U}_{\text{ph}}(\phi)$. A transformação unitária realizada pela ação de tal porta é descrita como

$$\hat{U}_{\text{ph}}(\phi)|a, b\rangle = \exp(i\phi\delta_{a,1}\delta_{b,1})|a, b\rangle, \quad (3.23)$$

com a e b podendo assumir os valores 1 ou 0. A porta de fase em que $\phi = \pi$ é especialmente importante. Juntamente com rotações em cada qubit, esta porta forma um conjunto universal de portas para computação quântica [10]. Isso significa que toda transformação unitária em um registrador de N -qubits pode ser arbitrariamente aproximada por uma aplicação sucessiva de portas de 2-qubits $\hat{U}_{\text{ph}}(\pi)$ e rotações de 1-qubit. É possível, por exemplo, demonstrar que uma porta NOT controlada \hat{U}_{CNOT} definida pela operação

$$\hat{U}_{\text{CNOT}}|a, b\rangle = |a, a \oplus b\rangle, \quad (3.24)$$

onde \oplus é a soma módulo 2, pode ser contruída pela aplicação de $\hat{U}_{\text{ph}}(\pi)$ intercalada por rotações simples no segundo qubit. A implementação experimental de portas $\hat{U}_{\text{ph}}(\pi)$ ou \hat{U}_{CNOT} têm sido o objetivo em muitos laboratórios no mundo. Interações átomo-átomo [9], interações átomo-fóton [10], íons aprisionados [22] e amostras líquidas em NMR [65] são alguns exemplos de sistemas utilizados em belíssimos experimentos nos quais foram implementadas portas controladas de 2-qubits.

3.3.1 Caso Geral

Iremos agora mostrar a operação de uma porta de fase controlada utilizando o Hamiltoniano efetivo que deduzimos na seção anterior. Do ponto de vista teórico gostaríamos de ressaltar que existem outras propostas como, por exemplo, aquelas envolvendo íons aprisionados [66,67], eletrodinâmica quântica de cavidades [68] e redes ópticas [69].

Nesta proposta, os subsistemas (qubits) envolvidos são o movimento do centro de massa e o campo quantizado. Mais precisamente, auto-estados de energia destes dois sistemas. A base computacional é então dada por $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, onde usamos uma notação compacta $|m n\rangle \equiv |m\rangle_v \otimes |n\rangle_c$. Consideraremos o íon no estado fundamental $|g\rangle$, que corresponde ao Hamiltoniano (3.20). O operador de evolução temporal $\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}_{\text{eff}}t)$ pode ser facilmente calculado pois $[\hat{a}^\dagger\hat{a}, H_{\text{eff}}] = [\hat{b}^\dagger\hat{b}, H_{\text{eff}}] = 0$. Este operador é diagonal na base de auto-estados de $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ e $\hat{b}^\dagger\hat{b}$ e é dado por

$$\hat{U}(t) = e^{i\phi_{00}}|00\rangle\langle 00| + e^{i\phi_{10}}|10\rangle\langle 10| + e^{i\phi_{01}}|01\rangle\langle 01| + e^{i\phi_{11}}|11\rangle\langle 11|, \quad (3.25)$$

no qual usando a relação (3.9) obtêm-se

$$\begin{aligned} \phi_{00} &= 0 \\ \phi_{10} &= 0 \\ \phi_{01} &= \Omega t \\ \phi_{11} &= \Omega t [L_1(\eta^2)]^2, \end{aligned} \quad (3.26)$$

sendo $L_1(\eta^2)$ o polinômio de Laguerre de primeira ordem e

$$\Omega = g^2 e^{-\eta^2} / \Delta. \quad (3.27)$$

Uma porta de fase pode então ser obtida controlando o pulso Ωt e o valor do parâmetro de Lamb-Dicke η no polinômio de Laguerre. Uma possibilidade é tomar $\Omega t = 2\pi$ and $\phi_{01} - \phi_{11} = -\pi$. Da última condição teríamos que escolher η de acordo com o vínculo $[L_1(\eta^2)]^2 = 1/2$. Isso leva a escolha $\eta \approx 0.54$ que é consideravelmente próximo dos valores utilizados em laboratório ($\eta \approx 0.2$) [15].

Faremos agora uma breve discussão sobre a implementação experimental desta porta. De acordo com referência experimental recente [54], a transição do estado $P_{3/2}$ para $D_{5/2}$ nos íons $^{40}\text{Ca}^+$ é acoplada ao vácuo com constante de acoplamento $g = 2\pi \times 1.51$ MHz. As perdas são principalmente dissipação na cavidade com taxa $\kappa = 2\pi \times 41.7$ KHz e emissão espontânea no íon com taxa $\gamma = 2\pi \times 1.58$ MHz. Escolhendo $\Delta = 10g$, o tempo de

operação da porta é $t_{op} \approx 9 \mu s$. Devemos comparar este tempo de operação com os tempos de decaimento. Em primeiro lugar, ressaltamos a característica mais importante de nossa proposta que é a robustez contra emissão espontânea. Isso porque a porta opera todo o tempo com o íon no estado fundamental. Isso é uma vantagem muito grande sobre outros esquemas que possam utilizar estados eletrônico excitados. Com relação ao decaimento da cavidade a situação é mais delicada. Com os valores experimentais atuais temos $t_{op} \approx \kappa^{-1}$ e portanto não é possível a obtenção de portas com fidelidade alta. Porém, na essência de nossa proposta podemos encontrar uma alternativa para diminuir t_{op} . A robustez contra emissão espontânea de nosso esquema pode ser usada de maneira indireta na obtenção de portas mais rápidas. Isso porque a constante de acoplamento g depende explicitamente do elemento de matriz $\langle g|\hat{x}|e\rangle^3$, ou implicitamente do valor da constante de decaimento por emissão espontânea γ ($g \sim \sqrt{\gamma}$) [70]. Logo, a escolha de níveis com taxas de decaimento mais altas levam a constantes de acoplamentos mais fortes e conseqüentemente a portas mais rápidas. Como nosso esquema é robusto contra emissão espontânea, podemos escolher níveis com valores maiores de $\langle g|\hat{x}|e\rangle$ (que é o mesmo que valores maiores de γ) e assim obter portas ainda mais rápidas com as quais os efeitos da dissipação na cavidade tornar-se-ão menos danosos.

3.3.2 Regime de Lamb-Dicke

Agora veremos que nosso Hamiltoniano Kerr na aproximação de Lamb-Dicke leva a portas de fase ainda mais rápidas que as consideradas na seção anterior. O modo como se obtêm a porta no regime de Lamb-Dicke difere da porta anterior pois ao invés de fixarmos o pulso Ωt e procurarmos por um η que implemente a operação, o que levou a η razoavelmente grande e assim baixo Ω^4 , iremos agora fixar um η pequeno e procurar um tempo (pulso) que implemente a operação de fase. Usando o Hamiltoniano (3.22), impondo $\lambda t = \pi$, utilizando o regime de Lamb-Dicke com $\eta = 0.05$, o valor experimental $g = 2\pi \times 1.51$ MHz [54] e também $\Delta = 10g$ obtemos um pulso $t_{op} \approx 0.62$ ms. Ao comparar com o decaimento da cavidade κ^{-1} veremos que nossa porta pode operar aproximadamente 160 vezes antes do fóton escapar da cavidade!

3.4 Conclusão

Propusemos um regime de acoplamentos e frequências relativas no sistema íon-cavidade que permite a obtenção de uma interação efetiva não-linear do tipo Kerr-cruzada [35]. Tal interação é de vital importância em muitas aplicações em óptica e computação quântica. No regime em que as frequências são ajustadas de modo que $\Delta \neq k\nu$ e $g \ll \Delta \ll \nu$, a interação Kerr entre o campo quantizado e o movimento do íon ocorre.

Mostramos a viabilidade de uma porta de fase em nosso sistema e destacamos duas possibilidades. Na primeira, fixamos o tamanho do pulso e obtemos o valor do parâmetro de Lamb-Dicke que leva a implementação da porta de fase. Neste caso, a menos que se trabalhe com cavidades de excelente finesse, o que é muito difícil de se obter em experimentos com íons, a porta pode sofrer redução de fidelidade devido a perdas na cavidade. Contudo, devido ao fato de que a porta opera o tempo todo com o íon em seu estado fundamental eletrônico, a emissão espontânea não exerce qualquer papel destrutivo o que pode levar a portas mais rápidas através do uso de estados excitados com tempos de vida mais curtos, e assim acoplamentos mais fortes com o campo. Por fim, consideramos a mesma interação no limite $\eta \ll 1$, que é o chamado regime de Lamb-Dicke. Agora, a porta opera muito mais rapidamente pois a constante de acoplamento Kerr efetiva λ é mais forte neste regime. Com os parâmetros experimentais atuais a porta funcionaria com boa fidelidade uma vez que tanto é robusta à emissão espontânea quanto realiza certa de 160 ciclos por tempo de decaimento da cavidade.

³Aqui \hat{x} é o operador posição do elétron atômico e tomamos por exemplo o acoplamento tipo dipolo elétrico. No apêndice B discutimos um pouco esse tipo de transição.

⁴ Ω possui uma exponencial do tipo $e^{-\eta^2}$, veja Eq.(3.27).

4 Transições de Dois Fótons

“Effective people have a vision of what they’d like to achieve. Ideally, such a vision incorporates both long-term values and goals, as well as shorter-term goals. A good vision answers questions like: What sort of researcher would I like to become? What areas of research am I interested in? How am I going to achieve competence in those areas? Why are those areas interesting? How am I going to continue growing and expanding my horizons? What short-term steps will I take to achieve those goals? How will I balance the long-term goals with the short-term realities of the situation I find myself in? It’s extremely easy to kid ourselves about what we do and who we are.” - Michael Nielsen, <http://www.qinfo.org/people/nielsen/blog/archive/000120.html>, 2002.

Deduziremos neste capítulo um Hamiltoniano efetivo que envolve transições de dois fótons na interação íon-campo quantizado [39]. Utilizaremos na dedução um íon de três níveis e, mediante a eliminação adiabática do nível intermediário, o acoplamento Kerr será obtido. Inicialmente iremos falar um pouco da importância das transições multi-fotônicas em óptica quântica e a motivação para nosso trabalho. Na sequência apresentaremos a dedução do Hamiltoniano de dois fótons efetivo. Por fim, estudaremos a dinâmica do sistema através das probabilidades de ocupação dos estados eletrônicos, sendo esta quantidade a mais acessível experimentalmente no sistema de íons aprisionados [15,20].

4.1 Motivação

O modelo de Jaynes-Cummings (JCM) [71] é o modelo mais elementar para a interação da matéria com o campo eletromagnético quantizado. Neste modelo, um átomo de dois níveis é acoplado a um único modo do campo quantizado numa cavidade e é um dos poucos problemas em eletrodinâmica quântica que pode ser resolvido exatamente¹. Esse modelo apresenta algumas características não-clássicas como *revivals* das oscilações de Rabi na inversão atômica. A origem quântica desse *revival* é uma consequência direta da não comutação entre os operadores de criação e aniquilação de fótons no modo do campo [72].

O JCM tem sido expandido para incluir muitos Hamiltonianos generalizados como átomos multi-níveis [73], campos multi-modos ou externos [74], muitos átomos [75] e transições multi-fotônicas [76]. Todas essas generalizações são parte do que é chamada eletrodinâmica quântica de cavidades (CQED) e o campo eletromagnético quantizado desempenha papel fundamental. Por outro lado, íons aprisionados interagindo com campos clássicos têm recebido grande atenção devido a sua similaridade com o JCM. Neste sistema, o movimento quantizado do íon faz o papel do campo quantizado no JCM [77]. Avanços experimentais significativos na geração de estados quânticos neste sistema [20,21] têm indicado sua potencialidade para a implementação da dinâmica quântica sob condições bem controladas [15].

A união da CQED com íons aprisionados traz várias e importantes consequências e também aplicações potenciais. Exemplos disso foram apresentados nos capítulos anteriores. Vários autores investigaram o sistema íon-cavidade focando em transições simples de um fóton [28], mas generalizações do modelo básico são ainda muito raras. Podemos verificar na literatura relativa à CQED várias questões interessantes que estão associadas a transições de dois fótons. Por exemplo, tais transições em sistemas atômicos podem ser usadas na geração de estados não-clássicos do campo eletromagnético, tais como estados comprimidos [78], e os fótons emitidos neste tipo de transição podem possuir correlações que violam desigualdades clássicas [79]. Apresentaremos agora a dedução de um Hamiltoniano que descreve transições de dois fótons para CQED com íons aprisionados e então analisaremos a dinâmica do sistema por meio da população dos níveis eletrônicos, quantidade acessível em experimentos com íons aprisionados [15,20]. Uma vez que em CQED o átomo é considerado ou em repouso ou se movendo com velocidade constante através da cavidade, nós exploraremos a influência do movimento harmônico quantizado do íon enfatizando os efeitos decorrentes da inclusão deste grau de liberdade. Este é o objetivo principal deste trabalho.

¹Na aproximação de onda girante.

4.2 Dedução do Hamiltoniano Efetivo

Consideraremos um íon de três níveis interagindo com um modo do campo eletromagnético quantizado numa cavidade. O esquema de níveis é mostrado na figura (4.1).

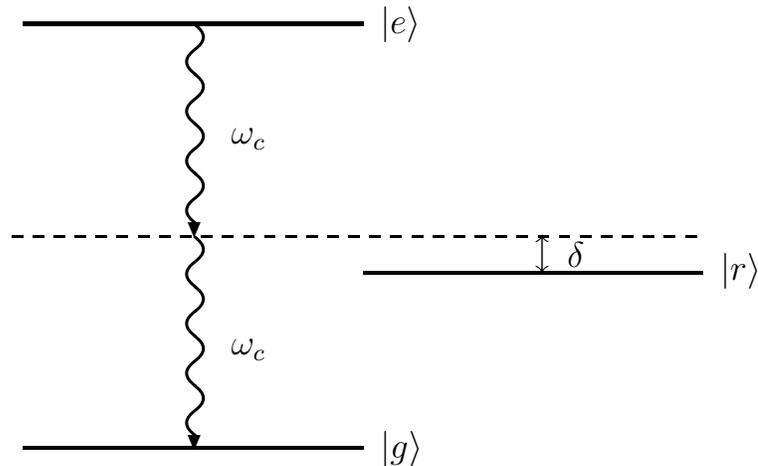


Figura 4.1: Diagrama de níveis para a interação de um íon de três níveis com um modo do campo quantizado de frequência ω_c .

Consideraremos também uma ressonância de dois fótons entre o nível excitado $|e\rangle$ e fundamental $|g\rangle$ e o nível intermediário $|r\rangle$ será mantido fora de ressonância. O Hamiltoniano para este sistema é uma generalização direta do Hamiltoniano (1.55) para a configuração de níveis acima e é dado por

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \nu \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + E_e \hat{\sigma}_{ee} + E_r \hat{\sigma}_{rr} + E_g \hat{\sigma}_{gg} \\ & + [(g_1 \hat{\sigma}_{gr} + g_2 \hat{\sigma}_{re}) \hat{b}^\dagger + (g_1 \hat{\sigma}_{rg} + g_2 \hat{\sigma}_{er}) \hat{b}] \cos \eta (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde g_1 e g_2 são as constantes de acoplamento íon-campo para as transições $|g\rangle \rightarrow |r\rangle$ and $|r\rangle \rightarrow |e\rangle$, respectivamente. O parâmetro de Lamb-Dicke é o mesmo para ambas as transições pois este não depende da estrutura interna do íon. A estrutura de níveis em cascata e a frequência do campo conforme mostrado na figura (4.1) foram escolhidos tais que, ao fazer $\delta \equiv E_e - E_r - \omega_c = E_g - E_r + \omega_c \gg g_1, g_2$, poderemos deduzir um Hamiltoniano efetivo de dois fótons através da eliminação do nível $|r\rangle$.

Exatamente como fizemos no capítulo anterior, vamos encontrar as equações de movimento para alguns operadores relevantes ao problema. O ponto de partida é olhar para a equação de movimento de $\hat{\sigma}_{eg}$ pois esperamos que esse operador esteja presente no Hamiltoniano efetivo². Com relação ao movimento do íon iremos simplificar o máximo possível. Consideraremos que o centro de massa não realiza qualquer transição, exatamente como no capítulo anterior. Na dedução do acoplamento Kerr isso era fundamental para a obtenção do Hamiltoniano desejado mas aqui trata-se apenas de uma simplificação no problema. Possíveis generalizações incluindo a excitação de *sidebands*³ configuram possibilidades interessantes para trabalhos futuros. O caso aqui considerado é obtido nas mesmas condições anteriormente apresentadas e caracteriza-se pela escolha de $\delta \neq k\nu$ e também $\delta \ll \nu$, com k inteiro. Assim,

$$\hat{H} = \nu \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega \hat{b}^\dagger \hat{b} + E_e \hat{\sigma}_{ee} + E_r \hat{\sigma}_{rr} + E_g \hat{\sigma}_{gg} + f(\hat{a}^\dagger \hat{a}) [(g_1 \hat{\sigma}_{gr} + g_2 \hat{\sigma}_{re}) \hat{b}^\dagger + (g_1 \hat{\sigma}_{rg} + g_2 \hat{\sigma}_{er}) \hat{b}], \quad (4.2)$$

onde a função $f(\hat{a}^\dagger \hat{a})$ é dada por (3.8). A equação de Heisenberg para $\hat{\sigma}_{eg}$, obtida usando (4.2), é então dada por

$$i \frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{eg} = (E_g - E_e) \hat{\sigma}_{eg} + g_1 f(\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\sigma}_{er} \hat{b}^\dagger - g_2 f(\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\sigma}_{rg} \hat{b}^\dagger. \quad (4.3)$$

²Uma transição entre os estados $|g\rangle$ e $|e\rangle$, separados por $2\omega_c$ representa uma transição via dois fótons de frequência ω_c .

³Transições que envolvem a criação ou aniquilação de quantas de energia no movimento harmônico do íon.

O lado direito da Eq.(4.3) envolve operadores na forma $f(\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\sigma}_{ij} \hat{b}^\dagger$. Precisamos também obter as equações de Heisenberg para esses operadores. Usando (4.2) obtêm-se

$$i \frac{d}{dt} [f(\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\sigma}_{er} \hat{b}^\dagger] = (E_r - E_e - \omega_c) f(\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\sigma}_{er} \hat{b}^\dagger + [f(\hat{a}^\dagger \hat{a})]^2 [g_1 \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{\sigma}_{eg} + g_2 \hat{b}^{\dagger 2} (\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{rr})] \quad (4.4)$$

$$i \frac{d}{dt} [f(\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\sigma}_{rg} \hat{b}^\dagger] = (E_g - E_r - \omega_c) f(\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\sigma}_{rg} \hat{b}^\dagger + [f(\hat{a}^\dagger \hat{a})]^2 [g_1 \hat{b}^{\dagger 2} (\hat{\sigma}_{rr} - \hat{\sigma}_{gg}) - g_2 (1 + \hat{b}^\dagger \hat{b}) \hat{\sigma}_{eg}]. \quad (4.5)$$

A eliminação adiabática do nível $|r\rangle$ segue de (4.4) and (4.5) pela consideração do regime $\delta \gg g_1, g_2$. Para ver isso mais claramente, nós movemos para um novo referencial definido por $\hat{\sigma}_{ij} \rightarrow \hat{\sigma}_{ij} e^{-i(E_j - E_i)t}$, $\hat{b}(t) \rightarrow \hat{b} e^{-i\omega_c t}$ e $\hat{a}(t) \rightarrow \hat{a} e^{-i\nu t}$. Neste novo referencial, podemos reescrever (4.3), (4.4) e (4.5) como

$$i \frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{eg} = g_1 f(\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\sigma}_{er} \hat{b}^\dagger e^{i\delta t} - g_2 f(\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\sigma}_{rg} \hat{b}^\dagger e^{-i\delta t}, \quad (4.6)$$

$$i \frac{d}{dt} [f(\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\sigma}_{er} \hat{b}^\dagger] = [f(\hat{a}^\dagger \hat{a})]^2 [g_1 \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{\sigma}_{eg} + g_2 \hat{b}^{\dagger 2} (\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{rr})] e^{-i\delta t}, \quad (4.7)$$

$$i \frac{d}{dt} [f(\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\sigma}_{rg} \hat{b}^\dagger] = [f(\hat{a}^\dagger \hat{a})]^2 [g_1 \hat{b}^{\dagger 2} (\hat{\sigma}_{rr} - \hat{\sigma}_{gg}) - g_2 (1 + \hat{b}^\dagger \hat{b}) \hat{\sigma}_{eg}] e^{i\delta t}, \quad (4.8)$$

e então integrar (4.7) e (4.8) sob a hipótese de que para grandes dessintonias os operadores oscilam lentamente quando comparados a $e^{\pm i\delta t}$. Substituindo o resultado destas integrações na equação de movimento de $\hat{\sigma}_{eg}$, dada por (4.6), e considerando que o nível $|r\rangle$ não está inicialmente populado obtemos

$$i \frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{eg} = f^2(\hat{a}^\dagger \hat{a}) \left[\frac{g_1^2}{\delta} \hat{b}^\dagger \hat{b} - \frac{g_2^2}{\delta} (1 + \hat{b}^\dagger \hat{b}) \right] \hat{\sigma}_{eg} + \frac{g_1 g_2}{\delta} f^2(\hat{a}^\dagger \hat{a}) (\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{gg}) \hat{b}^{\dagger 2}. \quad (4.9)$$

Esta equação pode ser obtida do Hamiltoniano efetivo

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{Stark}} + \hat{H}_I, \quad (4.10)$$

sendo a parte livre dada por

$$\hat{H}_0 = \nu \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + \omega_c (\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{gg}), \quad (4.11)$$

os Stark shifts dados por

$$\hat{H}_{\text{Stark}} = \frac{g_2^2}{\delta} f^2(\hat{a}^\dagger \hat{a}) (1 + \hat{b}^\dagger \hat{b}) \hat{\sigma}_{ee} + \frac{g_1^2}{\delta} f^2(\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{\sigma}_{gg}, \quad (4.12)$$

e o termo de interação íon-campo dado por

$$\hat{H}_I = \frac{g_1 g_2}{\delta} f^2(\hat{a}^\dagger \hat{a}) (\hat{\sigma}_{eg} \hat{b}^2 + \hat{\sigma}_{ge} \hat{b}^{\dagger 2}), \quad (4.13)$$

o que descreve uma transição de dois fótons entre os níveis $|e\rangle$ e $|g\rangle$ com uma dependência da energia do movimento do centro de massa através $f^2(\hat{a}^\dagger \hat{a})$. É interessante notar que os Stark shifts também dependem da energia do movimento do íon. Acreditamos que isso pode ter consequências interessantes ainda não exploradas. Com este Hamiltoniano efetivo iremos na próxima seção estudar a dinâmica da ocupação dos níveis eletrônicos.

4.3 Dinâmica

Nesta seção vamos calcular e analisar a probabilidade $P_g(t)$ de se medir o íon no estado fundamental $|g\rangle$. Essa quantidade é definida como

$$P_g(t) = |\langle g | \psi(t) \rangle|^2, \quad (4.14)$$

onde $|\psi(t)\rangle$ é o estado evoluído de acordo com o Hamiltoniano do sistema, que no caso é dado por (4.10). Essa curva $P_g(t)$ é facilmente obtida em experimentos com íons aprisionados via fluorescência induzida por laser [15,20]. Esta técnica leva a um processo de detecção que possui eficiência praticamente perfeita [18].

Analisando a forma do Hamiltoniano (4.10), podemos perceber que a solução geral pode ser escrita como

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}(t) |m, n, e\rangle + b_{mn}(t) |m, n - 2, g\rangle, \quad (4.15)$$

no qual a soma em m refere-se ao movimento harmônico do íon e a soma em n ao campo quantizado, cujos estados estão escritos na base de Fock. Na representação de interação temos as seguintes equações de movimento para os coeficientes

$$i \frac{d}{dt} a_{mn}(t) = \frac{g_2^2}{\delta} f^2(m)(n+1) a_{mn}(t) + \frac{g_1 g_2}{\delta} f^2(m) \sqrt{(n+1)(n+2)} b_{mn}(t), \quad (4.16)$$

$$i \frac{d}{dt} b_{mn}(t) = \frac{g_1^2}{\delta} f^2(m)(n+2) b_{mn}(t) + \frac{g_1 g_2}{\delta} f^2(m) \sqrt{(n+1)(n+2)} a_{mn}(t), \quad (4.17)$$

com $f^2(m) = e^{-\eta^2} [L_m(\eta^2)]^2$. É conveniente definir algumas constantes e variáveis com o propósito de “limpar” um pouco as equações

$$\begin{aligned} g &\equiv \frac{g_1 g_2}{\delta}; \quad \tau \equiv gt; \quad r = \frac{g_1}{g_2}; \quad \chi_1 \equiv \frac{f^2(m)}{r}(n+1); \\ \chi_2 &\equiv \sqrt{(n+1)(n+2)} f^2(m); \quad \chi_3 \equiv r f^2(m)(n+2), \end{aligned} \quad (4.18)$$

e assim reescrever as equações de movimento como

$$i \frac{d}{dt} a_{mn}(\tau) = \chi_1 a_{mn}(\tau) + \chi_2 b_{mn}(\tau), \quad (4.19)$$

$$i \frac{d}{dt} b_{mn}(\tau) = \chi_3 b_{mn}(\tau) + \chi_2 a_{mn}(\tau). \quad (4.20)$$

Ao resolver este sistema de equações diferenciais teremos toda a dinâmica do sistema. No presente momento, no intuito de mapear a influência do movimento massivo na dinâmica dos níveis eletrônicos, iremos tratar o caso mais simples possível. Consideraremos aqui $r = 1$, ou seja, $g_1 = g_2$, o que simplifica consideravelmente a forma da solução. Além disso, consideraremos o íon inicialmente no estado excitado $|e\rangle$, e o campo e movimento vibracional em estados gerais puros. A solução para essas condições iniciais é dada por

$$\begin{aligned} a_{mn}(\tau) &= a_{mn}(0) \left[\cos(\Lambda_{mn}\tau/2) + i \frac{f^2(m)}{\Lambda_{mn}} \sin(\Lambda_{mn}\tau/2) \right] \\ b_{mn}(\tau) &= -2i a_{mn}(0) \frac{\chi_2}{\Lambda_{mn}} \sin(\Lambda_{mn}\tau/2), \end{aligned} \quad (4.21)$$

na qual omitimos uma fase global que não é importante no cálculo de $P_g(\tau)$, e definimos $\Lambda_{mn} \equiv \sqrt{f^4(m) + 4\chi_2^2}$. A condição inicial $a(0)_{mn}$ é simplesmente

$$a_{mn}(0) = \langle m, n | \psi(0)_v, \psi(0)_c \rangle, \quad (4.22)$$

na qual $|\psi(0)_v\rangle$ e $|\psi(0)_c\rangle$ são os estados iniciais do movimento vibracional do centro de massa do íon e campo, respectivamente. O valor médio do observável que desejamos calcular, segundo (4.14) e (4.21) é então simplesmente

$$P_g(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}(0)|^2 \frac{4\chi_2^2}{f^4(m) + 4\chi_2^2} \sin^2(\sqrt{f^4(m) + 4\chi_2^2} \tau/2). \quad (4.23)$$

Estamos particularmente interessados em dois casos distintos. No primeiro, consideraremos o movimento do centro de massa num estado coerente com número médio de excitação $|\alpha|^2$ e o campo num estado de Fock $|p\rangle$ que possui número de fótons bem definido (neste caso, p -fótons). Assim

$$a_{mn}(0) = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \delta_{np}. \quad (4.24)$$

No segundo caso, consideraremos que o movimento do centro de massa e o campo estão cada um em um estado coerente com número médio de excitação $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$, respectivamente. Ou seja,

$$a_{mn}(0) = e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2} \frac{\alpha^m \beta^n}{\sqrt{m!n!}}. \quad (4.25)$$

No que segue, faremos um estudo do efeito do movimento harmônico do íon na dinâmica de $P_g(\tau)$. Matematicamente, o sistema padrão em CQED (JCM de dois fótons), no qual o átomo(íon) está em repouso, é obtido fazendo $\eta \rightarrow 0$. Assim, iremos variar esse parâmetro para os estados iniciais mencionados. Quanto maior o valor de η maior a participação do movimento. Analisaremos então se essa participação causa efeitos relevantes.

Na Fig.(4.2) nós podemos ver claramente que a influência do movimento do íon é bastante forte, diferenciando a dinâmica daquela do JCM de dois fótons ($\eta \rightarrow 0$). Pequenas mudanças em η levam a comportamentos dinâmicos muito distintos. Os esperados ciclos de Rabi são modificados devido a influência do movimento do íon que inicialmente é preparado num estado coerente com $\alpha = 2$. Para pequenos valores de η o efeito do movimento é a indução de colapsos e ressurgimentos (*revivals*) periódicos. Aumentando o valor de η , a dinâmica perde periodicidade e um padrão completamente irregular aparece.

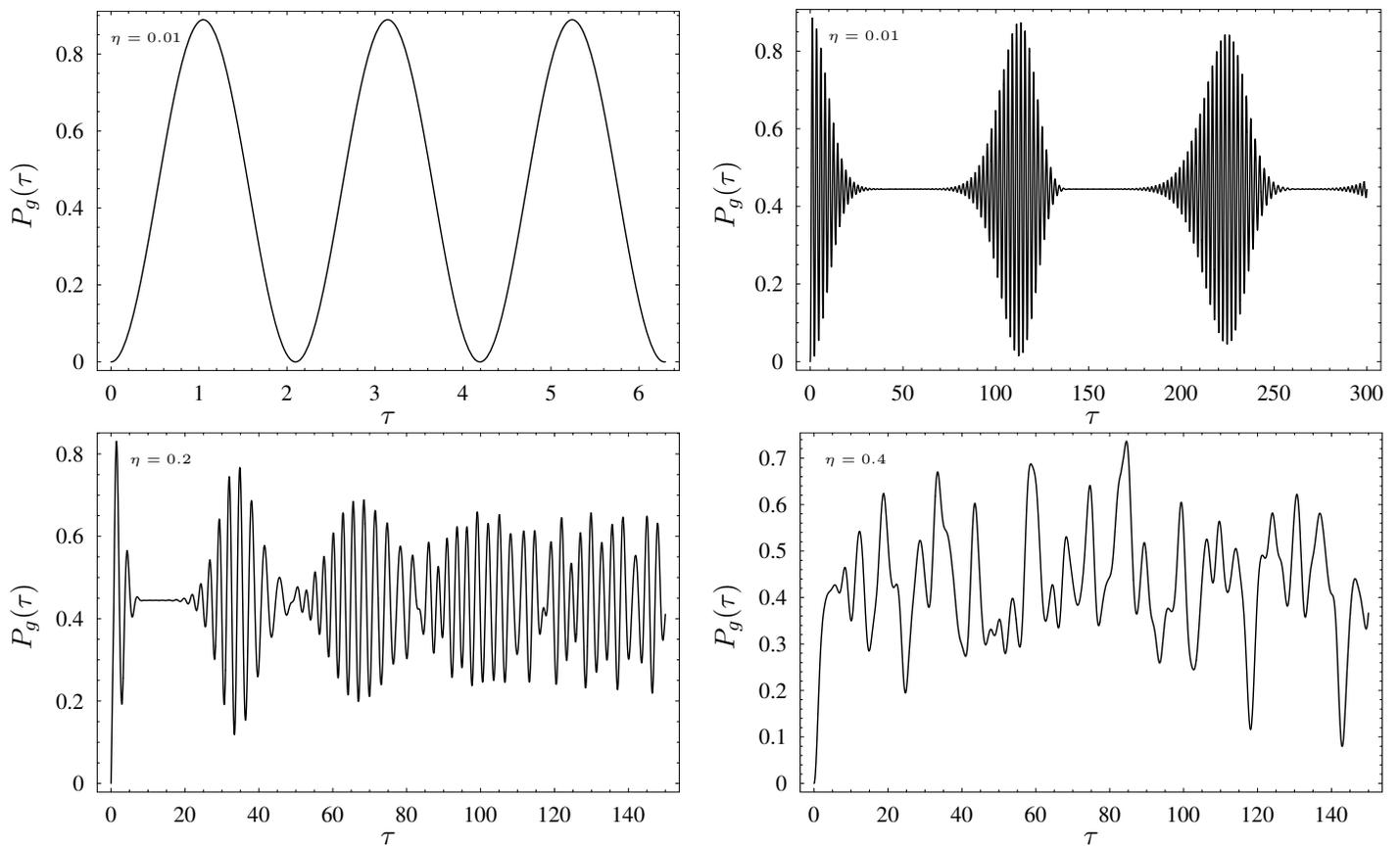


Figura 4.2: Evolução temporal da população do estado fundamental eletrônico para diferentes valores do parâmetro de Lamb-Dicke. O sistema foi inicialmente preparado no estado $|\psi(0)\rangle = |e, \alpha = 2, p = 0\rangle$.

Uma outra preparação inicial é mostrada Fig.(4.3). Agora o campo na cavidade também é preparado inicialmente num estado coerente com $\beta = 2$. Neste caso, a evolução praticamente periódica encontrada no modelo JCM de dois fótons é novamente transformada numa evolução irregular com o aumento de η . Num caso intermediário nós encontramos um interessante comportamento conhecido como super-revival [34, 80], conforme mostrado na Fig.(4.4).

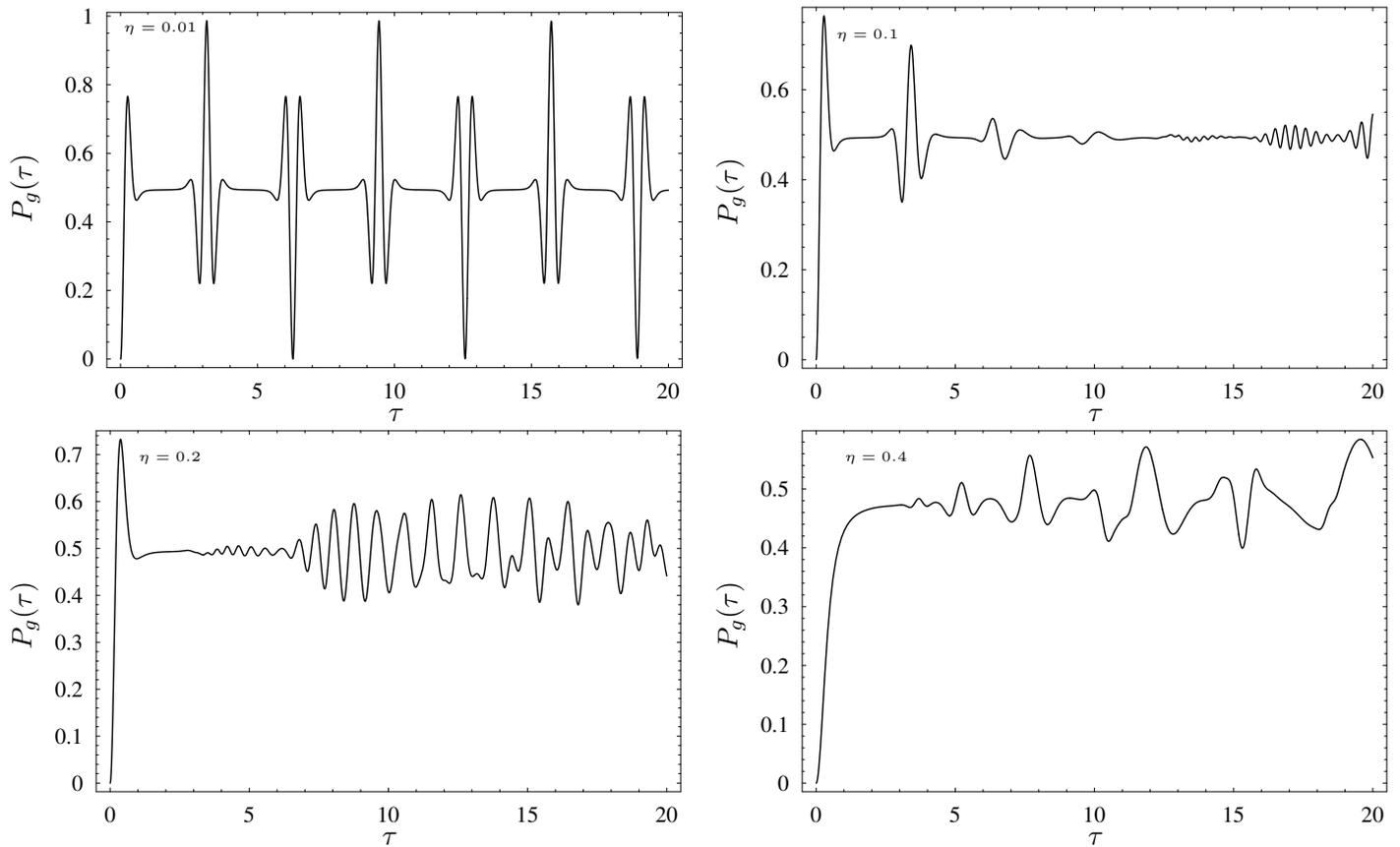


Figura 4.3: Evolução temporal da população do estado fundamental eletrônico para diferentes valores do parâmetro de Lamb-Dicke. O sistema foi inicialmente preparado no estado $|\psi(0)\rangle = |e, \alpha = 2, \beta = 2\rangle$.

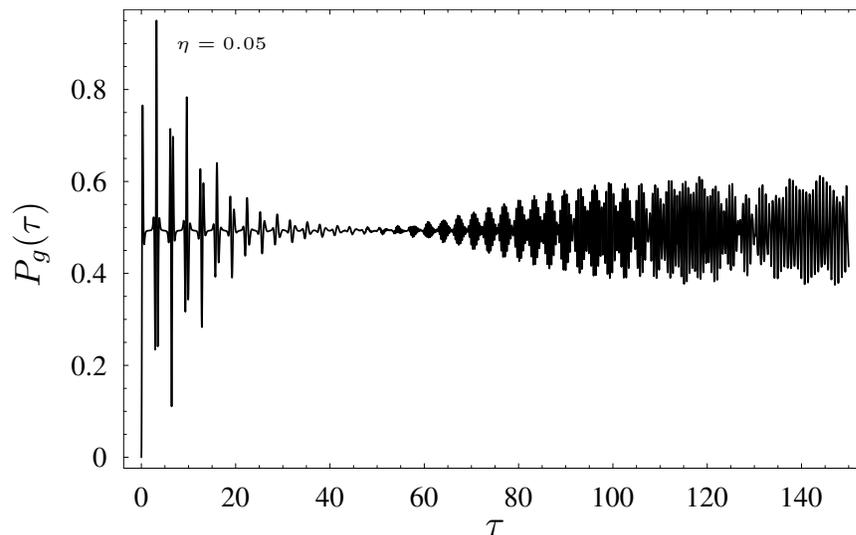


Figura 4.4: Evolução temporal a longos tempos da população do estado fundamental eletrônico. O sistema foi inicialmente preparado no estado $|\psi(0)\rangle = |e, \alpha = 2, \beta = 2\rangle$.

4.4 Conclusão

Neste capítulo nós generalizamos a interação íon-campo para incluir transições de dois fótons. Estudamos a influência do movimento harmônico do íon na dinâmica do observável população do estado fundamental eletrônico. Em geral, esse movimento quantizado, preparado num estado coerente, levou ao comportamento irregular das oscilações de Rabi. Em alguns casos, dependendo do valor de η e para campo e movimento preparados inicialmente em estados coerentes, ocorreu o aparecimento de um padrão a longos tempos, conhecido como *super-revival*, o que demonstra claramente a riqueza de possibilidades no sistema. Nós focamos no problema fundamental da interação da radiação com a matéria, ou óptica quântica. Além desses estudos levarem ao melhor entendimento da interação fóton-íon, eles podem levar a aplicações no processamento de informação quântica usando qubits estacionários e móveis (*flying*) [29].

5 Propagação de Emaranhamento

“... A colleague once told me of a friend of his who for some time used a stopwatch to keep track of how much research work he did each week. He was shocked to discover that after factoring in all the other activities he engaged in each day - interruptions, email, surfing the net, the phone, fruitless meetings, chatting with friends, and so on - he was averaging only half an hour of research per day. I wouldn't be surprised if this was typical of many researchers. The good news, of course, is that building this kind of awareness lays the foundation for personal change, for achieving congruence between our behavioural goals and how we actually behave, in short, for achieving self-discipline.” - **Michael Nielsen**, <http://www.qinfo.org/people/nielsen/blog/archive/000120.html>, 2002.

Este capítulo será dedicado ao problema do envio de informação quântica através de sistemas de muitos corpos, especialmente a propagação de emaranhamento. Consideraremos um sistema formado por um conjunto de osciladores harmônicos acoplados. Num sentido geral, o trabalho apresentado agora é um desenvolvimento dos trabalhos anteriores numa direção que visa a implementação em maiores escalas. Uma vez que tanto o íon aprisionado quanto o campo quantizado, considerados anteriormente, são descritos por osciladores, é natural pensar numa extensão para muitos sistemas como este acoplados. Contudo, as idéias apresentadas a seguir são colocadas numa forma geral (*device independent*) de modo que possam ser aplicadas numa série de sistemas físicos, e não apenas em óptica. Demonstraremos que uma cadeia invariante de sistemas quânticos acoplados pode ser usada para a transmissão de informação quântica entre elementos arbitrários numa cadeia.

5.1 Relevância do Problema

O uso efetivo de informação quântica requereria em vários estágios a conversão entre qubits estacionários e móveis para transmissão de informação entre diferentes partes ou unidades de processamento. Esse é um dos requerimentos básicos para computação quântica, conhecidos entre os especialistas como requisitos de DiVincenzo para a implementação física de computação e informação quântica [81]. Tradicionalmente, os qubits estacionários são sistemas massivos como íons aprisionados e *quantum dots*, e os qubits móveis são fótons. Esse tipo de abordagem é ideal para comunicação entre longas distâncias mas quando os sistemas estão separados por distâncias comparáveis ao comprimento de onda do fóton, claramente haverá problemas. Essa é a situação em componentes de estado sólido. Poderíamos pensar em unidades de processamento ou armazenamento (memória). Para estes casos, é interessante buscar novos modos de implementar a transferência de informação, e uma alternativa seria usar blocos compostos por elementos da própria cadeia. Esse “apanhado” ou “grupo” de sistemas funcionaria como um *data bus* levando informação para outros elementos da própria cadeia. Note que trata-se exatamente de uma mímica da idéia de qubits estacionários e móveis sendo que estes últimos são agora substituídos por *data buses*, são eles que carregam informação de um lado a outro.

Esse problema pode ser convenientemente estudado em termos do que chamamos de cadeia (*chain*). Uma cadeia é formada por N -elementos acoplados entre si. A forma e a topologia desse acoplamento podem variar. Um exemplo comum é o chamado acoplamento “primeiros vizinhos”, no qual um elemento n , com $1 < n < N^1$, acopla-se aos elementos $n-1$ e $n+1$. Os elementos também podem ser modelados de acordo com o tipo de sistema que estamos interessados. Dois tipos comuns e bastante estudados são as cadeias de spins e de osciladores harmônicos. Este capítulo é dedicado especialmente ao estudo das cadeias de osciladores harmônicos acoplados e a transmissão de informação nestas cadeias.

5.2 Osciladores Harmônicos Acoplados

Apresentaremos nessa seção o modelo que consiste numa cadeia de osciladores harmônicos acoplados. Apresentaremos o Hamiltoniano do sistema e também discutiremos as ferramentas matemáticas para a quantificação de emaranhamento.

¹Cadeia “aberta” na qual o primeiro e o N -ésimo elemento acoplam-se apenas a um único elemento.

5.2.1 Hamiltoniano

A situação considerada neste capítulo é mostrada na Fig.(5.1). Consideraremos uma cadeia que consiste de M -osciladores de massa m acoplados entre si formando o *data-bus*. Admitiremos que o acoplamento é quadrático em posição e momento e ocorre entre primeiros vizinhos. Iremos numerar os osciladores de 1 a M e impor condições periódicas de contorno tal que o $(M + 1)$ -ésimo oscilador é identificado como o primeiro. A escolha por condições periódicas de contorno facilita a obtenção de resultados analíticos. Denotaremos por f a constante de acoplamento na cadeia². Além dos osciladores formando o *data bus*, iremos também incluir outros três, também de massa m , para estudarmos a capacidade do *data bus* em transferir emaranhamento. Denotaremos estes osciladores pelo índice a , b e c . Os osciladores a e b estão acoplados à cadeia. Mais precisamente, a está acoplado ao oscilador 1 e b ao oscilador s , sendo s uma posição arbitrária na cadeia ($s \neq 1$). O oscilador c está desacoplado de todos os osciladores, tanto do *data bus* quanto dos osciladores a e b . O oscilador c é simplesmente uma ferramenta para demonstrarmos que o *data bus* pode ser usado para transferir informação entre a e b . Os elementos fundamentais são: data bus e dois osciladores acoplados a ele (a e b) que seriam o *sender* e *receiver*. O Hamiltoniano para este sistema, tomando $m = 1$ e $\hbar = 1$, é então dado por

$$H(\epsilon) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^M \hat{p}_k^2 + \sum_{k,l=1}^M \hat{x}_k V_{kl} \hat{x}_l + \sum_{i=a,b,c} (\hat{x}_i^2 + \hat{p}_i^2) \right] + \frac{\epsilon}{2} [(\hat{x}_a - \hat{x}_1)^2 + (\hat{x}_b - \hat{x}_s)^2] \quad (5.1)$$

com a matriz potencial V dada por $V_{kk} = 1 + 2f$, $V_{k,k+1} = V_{k+1,k} = -f$ e $V_{1M} = V_{M1} = -f$ para todo k e zero de outro modo.

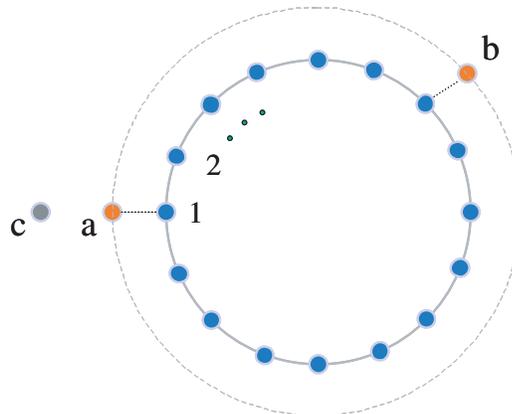


Figura 5.1: Um anel de sistemas quânticos interagentes forma o *data bus*. Dois outros sistemas a e b acoplam fracamente em posições arbitrárias no anel. A evolução temporal do sistema permite a transferência de informação quântica (emaranhamento) existente entre os sistemas a e c para os sistemas b e c . O sistema c é desacoplado da cadeia mas pode ser emaranhado com a para o estudo da transferência de emaranhamento.

No que segue iremos demonstrar que é possível transferir emaranhamento através desse sistema com o mínimo de controle espacial e temporal, ou seja, através da cadeia invariante que forma o *data bus*. Mostraremos nas próximas seções que o ingrediente para aumentar a eficiência desta transferência é enfraquecer o acoplamento do *sender* e *receiver* com o anel (acoplamento ϵ no Hamiltoniano (5.1)). Em sistemas invariantes a eficiência decresce com a distância devido a dispersão do emaranhamento que se distribui por todos os elementos da cadeia. Algumas alternativas para o envio de informação com alta eficiência haviam sido propostas anteriormente mas envolviam necessariamente a quebra na invariância da cadeia [82, 83], levando assim a maiores dificuldades experimentais. Contudo a fabricação de estruturas com acoplamento variável espacialmente, são difíceis na prática e exigiriam um alto grau de controle externo. Além disso, o valor preciso das constantes de acoplamento depende do tamanho da cadeia o que dificulta ainda mais quando buscamos generalidade. Consequentemente, seria desejável atingir altas eficiências para a transmissão de informação quântica entre elementos arbitrários com o mínimo de controle espacial e temporal. É neste contexto que nossa proposta se situa.

²Chamaremos a cadeia de anel algumas vezes devido a condição de contorno escolhida.

Mostraremos que é possível transferir informação quântica com alta eficiência usando cadeias invariantes com acoplamentos independentes do tempo.

5.2.2 Estados Gaussianos e Emaranhamento

Antes de aprofundarmos a discussão quantitativa do funcionamento do *data bus* será necessário apresentar algumas ferramentas matemáticas úteis para o estudo de emaranhamento em sistemas de dimensão infinita. Em geral, a análise do emaranhamento em sistemas assim é muito complicada a menos que consideramos estados específicos com simetria apropriada. No caso de osciladores harmônicos, temos à nossa disposição uma teoria bem desenvolvida sobre os chamados estados Gaussianos [84,85]. Estes estados possuem funções de Wigner que são Gaussianas. Iremos agora discutir alguns aspectos fundamentais sobre estes estados de variáveis contínuas.

As variáveis centrais na análise de osciladores harmônicos são os operadores de posição e momentum. Assumiremos um sistema que consiste de n -osciladores que podem representar n -íons ou n -modos do campo eletromagnético, por exemplo. As relações canônicas de comutação entre os $2n$ -operadores podem ser escritos de modo conveniente empregando o vetor³

$$\hat{O} = (\hat{x}_1, \hat{p}_1, \dots, \hat{x}_n, \hat{p}_n)^T. \quad (5.2)$$

Mantendo a convenção $\hbar = 1$, podemos então escrever as relações canônicas de comutação ($[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hat{\mathbb{1}}$) de todos os osciladores como

$$[\hat{O}_j, \hat{O}_k] = i\sigma_{j,k}, \quad (5.3)$$

onde usamos σ que é uma matriz $2n \times 2n$, anti-simétrica e real, dada por

$$\sigma = \bigoplus_{j=1}^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

que é normalmente conhecida por matriz simplética. Por exemplo, para $n = 2$ a matriz simplética é dada por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Analogamente, além da relação de comutação (5.3), pode-se também encontrar uma forma conveniente para expressar as relações de incerteza ($\Delta_{\hat{x}_i} \Delta_{\hat{p}_j} \geq \delta_{ij}/2$), com $\Delta_{\hat{A}}$ denotando a variância do operador \hat{A} . Para isso, define-se a chamada matriz de covariância γ , que guarda os segundo momentos⁴ dos operadores formando \hat{O} para algum estado $\hat{\rho}$. Essa matriz é definida como

$$\gamma_{ij} = 2 \operatorname{Re} \operatorname{tr}[\hat{\rho}(\hat{O}_i - \langle O_i \rangle)(\hat{O}_j - \langle O_j \rangle)]. \quad (5.6)$$

que é real e simétrica. O leitor pode verificar facilmente que, com essa definição, a matriz de covariância para o estado de vácuo dos n -osciladores é simplesmente a matriz identidade $\hat{\mathbb{1}}_{2n}$. Contudo, não é nada trivial⁵ deduzir que a relação de Heisenberg pode ser convenientemente escrita como

$$\gamma + i\sigma \geq 0. \quad (5.7)$$

Essa tarefa foi realizada em [86]. Essa forma revela uma imposição interessante sobre a realidade física dos estados quânticos descrevendo o sistema de n -osciladores. Claramente nem todas as matrizes reais simétricas podem representar uma legítima matriz de covariância de um estado físico: estados quânticos devem obedecer as relações de incerteza de Heisenberg dadas na Eq.(5.7). Para estados Gaussianos, a relação (5.7) também é uma condição necessária e suficiente para que γ represente um estado físico [86].

³O leitor deve ficar atento que é possível definir esse vetor com outra ordenação e com isso as expressões poderiam variar um pouco na forma.

⁴Relembramos que os primeiros momentos são valores médios e os segundos momentos são as variâncias.

⁵Até onde o autor dessa tese saiba.

Vamos agora definir mais precisamente o que são estados Gaussianos. Comentamos anteriormente que tais estados possuem uma função de Wigner com a forma de Gaussiana. Matematicamente, uma função de Wigner Gaussiana num espaço de n -osciladores é dada por⁶

$$W(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int d^{2n}\zeta e^{i\xi^T \sigma \zeta} \chi(\zeta), \quad (5.8)$$

que é a transformada de Fourier da chamada função característica $\chi(\zeta)$ definida por

$$\chi(\zeta) = \chi(0) e^{-\frac{1}{4}\zeta^T \Gamma \zeta + D^T \zeta}, \quad (5.9)$$

com ξ e ζ variáveis do espaço de fase, Γ uma matriz $2n \times 2n$ e $D \in \mathbb{R}^{2n}$ é um vetor. Mas qual a ligação de Γ e D com os primeiros e segundo momentos dos operadores canônicos de posição e momento? É possível mostrar que eles se relacionam através de $D = \sigma d$ e $\Gamma = \sigma^T \gamma \sigma$ com

$$d_j = \langle \hat{O}_j \rangle = \text{tr}[\hat{O}_j \hat{\rho}], \quad (5.10)$$

sendo d um vetor cujos elementos s' são os primeiros momentos (valores médios) de \hat{O} . Como uma Gaussiana é completamente determinada por seus primeiros e segundo momentos (5.9), os estados Gaussianos não demandam tanta capacidade computacional para sua descrição.

Sabemos que operações locais não devem aumentar ou diminuir a quantidade de emaranhamento [41, 87]. Uma vez que os valores médios podem ser feitos iguais a zero por meio de deslocamentos individuais dos osciladores no espaço de fase (operações unitárias), eles não carregam qualquer informação sobre emaranhamento. Concluimos assim que a matriz de covariância contém toda a informação sobre o emaranhamento contido num estado gaussiano de n -osciladores. Daí a grande importância desses estados que apesar de representarem sistemas de dimensão infinita têm suas propriedades de emaranhamento descritas por uma matriz cuja dimensão aumenta apenas polinomialmente com o número de osciladores. O emaranhamento em um sistema bipartite Gaussiano é descrito por uma simples matriz de covariância 4×4 .

Devemos agora relacionar γ com alguma medida de emaranhamento válida para estados gerais puros ou de mistura. Esse é um assunto extremamente extenso e nós apresentaremos apenas alguns resultados. O leitor interessado pode procurar detalhes no artigo de revisão [41]. Para estados puros a resposta é simples. A medida de emaranhamento é a entropia de von-Neumann [41]. Porém, para estados mistos (extremamente importantes pois sempre existe ruído nos canais de transmissão) não existe uma resposta definitiva. As medidas propostas⁷ fornecem valores diferentes entre si mas são úteis, por exemplo, na obtenção de limites (*bounds*) em importantes protocolos de purificação [88] ou capacidades de canais para transmitir informação quântica [89]. Em nosso trabalho nós escolhemos trabalhar com a chamada negatividade logarítmica [90]. Veremos que essa quantidade é obtida muito facilmente a partir da matriz de covariância [90]. A negatividade logarítmica fornece um *upper bound* para o emaranhamento destilável. Lembramos que essa quantidade, também uma medida de emaranhamento, é definida como o número de estados maximamente emaranhados que podem ser obtidos através de operações locais e comunicação clássica (LOCC), a partir de um conjunto de sistemas igualmente preparados [91].

Vamos agora dar a definição matemática para a negatividade logarítmica. Dados dois sistemas (ou grupos de sistemas) A e B , a negatividade logarítmica é definida como

$$N(\hat{\rho}) = \log_2 \|\hat{\rho}^{T_B}\|_1, \quad (5.11)$$

onde $\hat{\rho}^{T_B}$ é o resultado da transposição parcial com respeito ao sistema B e $\|\cdot\|_1$ é uma norma definida como $\|\hat{A}\|_1 = \text{tr} \sqrt{\hat{A}^\dagger \hat{A}}$ ⁸. Esta medida surge do fato de que uma transposição parcial não preserva necessariamente a positividade da matriz densidade, ou seja, após essa operação o espectro de $\hat{\rho}$ pode conter auto-valores negativos. Asher Peres demonstrou que sempre que isso ocorre, o estado misto é necessariamente emaranhado [92]. Uma vez que a transposição parcial conserva a hermiticidade e a norma, se $\hat{\rho}^{T_B}$ apresentar auto-valores negativos, a

⁶Novamente o leitor pode encontrar na literatura definições com outra normalização: Cuidado!

⁷Normalmente estaremos falando de *entanglement monotonies* (EM) e não medidas de emaranhamento no sentido estrito da palavra. Um EM obedece todas as propriedades que uma medida de emaranhamento obedece mas não equivale à entropia de von-Neumann no caso puro.

⁸O leitor pode se convencer de que essa norma corresponde à soma do módulo dos autovalores de \hat{A} quando \hat{A} é hermitiano.

norma definida anteriormente detecta o emaranhamento. Isso porque neste caso a norma resultará em valores maiores que um. Como o logarítmo é uma função monótona crescente, a negatividade logarítmica funciona então como uma versão quantitativa do critério de Peres⁹.

Nossa última tarefa nesta seção é então apresentar a relação matemática entre a negatividade logarítma N e a matriz de covariância γ para estados Gaussianos. Denotaremos por γ^{TB} a matriz de covariância que guarda os segundos momentos de $\hat{\rho}^{TB}$, que é a transposta parcial de $\hat{\rho}$ com relação a B . A negatividade logarítmica é então dada por [83,90]

$$N = - \sum_{j=1}^2 \ln[\min(1, |\gamma_j^{TB}|)], \quad (5.12)$$

onde γ_j^{TB} são os autovalores simpléticos de γ^{TB} . Eles são obtidos a partir da diagonalização por transformações simpléticas de γ^{TB} . Uma transformação simplética S é aquela que satisfaz $S\sigma S^T = \sigma$. O leitor interessado na dedução de (5.12) pode estudar as referências [85] e [90]. Felizmente não precisamos recorrer a essas diagonalizações especiais pois nossos antepassados encontraram uma alternativa mais fácil [90]. Os autovalores simpléticos γ_j^{TB} podem ser encontrados diretamente como o módulo dos auto-valores usuais da matriz $\sigma^{-1}\gamma^{TB}$. Esse modo de calcular o espectro simplético foi usado nesta tese. Mas ainda resta-nos saber como obter γ^{TB} usando γ , sem precisar calculá-la a partir da tranposta de ρ . Para isso, nossos antepassados novamente nos ajudam. Eles perceberam que a operação de transposição parcial num estado ou operador densidade é equivalente à reversão temporal no espaço de fase [90], e uma reversão temporal deixa os operadores posição inalterados mas muda o sinal dos momentos [93]. Assim, mantendo o ordem escolhida em \hat{O} temos

$$\gamma^{TB} = P\gamma P \quad (5.13)$$

onde P realiza a mudança de sinal no momentum no sistema B

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Como um simples exercício calcularemos a negatividade logarítmica de um importante estado Gaussiano (utilizado na próxima seção), o conhecido estado de vácuo comprimido de dois modos que é dado por

$$|\psi\rangle = \sqrt{1-q^2} \sum_{n=0}^{\infty} q^n |n\rangle_A |n\rangle_B \quad (5.15)$$

com $q = \tanh \frac{r}{2}$. Vamos então calcular os auto-valores de $\sigma^{-1}\gamma^{TB}$ para este estado. O leitor pode facilmente mostrar que $\sigma^{-1} = -\sigma$ e que

$$\gamma = \begin{pmatrix} \cosh r & 0 & \sinh r & 0 \\ 0 & \cosh r & 0 & -\sinh r \\ \sinh r & 0 & \cosh r & 0 \\ 0 & -\sinh r & 0 & \cosh r \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

é a matriz de covariância para esse estado. A matriz de covariância do operador densidade transposto parcialmente com relação a B é então dada por

$$\gamma^{TB} = P\gamma P = \begin{pmatrix} \cosh r & 0 & \sinh r & 0 \\ 0 & \cosh r & 0 & \sinh r \\ \sinh r & 0 & \cosh r & 0 \\ 0 & \sinh r & 0 & \cosh r \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

Diagonalizando $\sigma^{-1}\gamma^{TB}$ e tomando seus auto-valores comuns como sendo os auto-valores simpléticos de γ^{TB} , obtêm-se usando (5.12) que a negatividade logarítmica no estado (5.15) é $N(r) = r$. Assim, o emaranhamento aumenta com o valor do parâmetro r e este está relacionado com o grau de compressão nas quadraturas generalizadas do sistema composto¹⁰.

⁹Note que para estados separáveis, a operação de traço parcial conserva a positividade e a norma dá valor igual a um o que resulta em $N = 0$.

¹⁰Soma das quadraturas individuais de A e B .

5.3 Eficiência e Aplicações do *Data bus*

Apresentamos na seção anterior as ferramentas necessárias para o entendimento de nossa proposta para a propagação de emaranhamento com alta eficiência e mínimo controle numa cadeia de osciladores acoplados. O mínimo controle quer dizer utilização de uma cadeia invariante, ou seja, mesmo acoplamento entre seus elementos e também constantes de acoplamentos independentes do tempo. Iremos agora discutir nossa proposta.

Temos portanto três elementos chave. Os osciladores a (*sender*), b (*receiver*) e o *data bus* (canal quântico ligando a e b). Usaremos também um oscilador extra c que está desacoplado de todos os outros osciladores, veja Fig.(5.1). Esse oscilador é usado apenas para demonstrar a capacidade do anel em transmitir informação de a para b . Como isso é feito? Os osciladores a e c são preparados no estado emaranhado (5.15), com $A = a$ e $B = c$. Pode-se pensar que antes de $t = 0$ alguém acoplou estes dois osciladores mantendo $f = 0$. Os demais osciladores foram também preparados cada um em seu estado de vácuo. Assim, os osciladores da cadeia com índice i tal que $2 \leq i \leq M$ e também o oscilador b estão todos inicialmente desemaranhados. Todo o emaranhamento no sistema está concentrado nos osciladores c e a . No instante $t = 0$, o sistema é colocado para evoluir sujeito ao Hamiltoniano (5.1). Analisaremos o emaranhamento entre os osciladores c e b comparando com o emaranhamento inicial. O *data bus* ideal é aquele que consegue transferir todo o emaranhamento inicial entre c e a para c e b indicando que toda a informação foi transferida de a para b .

É fato conhecido que se $\epsilon = f$ em (5.1), a eficiência dessa transmissão decai com o aumento do número M de osciladores no anel [83]. Isso ocorre por que o emaranhamento se distribui entre muitos osciladores ao mesmo tempo. Tentamos encontrar um modo de prevenir esse espalhamento de emaranhamento e a idéia que tivemos foi reduzir o problema para três osciladores. Para isso teríamos que fazer com que os osciladores a e b se acoplassem com apenas um único modo normal de vibração do anel. Isso pode ser feito no regime $\epsilon \ll f$. Nesse regime de acoplamento fraco, a ressonância com apenas um único modo é possível desde que o espectro seja suficientemente separado, e isso depende do número M de osciladores. Vamos agora ver como isso tudo funciona quantitativamente. Primeiro, observamos que a matriz unitária Ω com elementos

$$\Omega_{kl} = \frac{1}{\sqrt{M}} e^{\frac{2\pi i k l}{M}} \quad (5.18)$$

permite diagonalização de V , através da relação $V = \Omega^\dagger \Lambda^2 \Omega$, com a matriz diagonal Λ cujos elementos são

$$\Lambda_{kk}^2 = 1 + 2f - 2f \cos\left(\frac{2\pi k}{M}\right). \quad (5.19)$$

Podemos então definir as variáveis de modos normais

$$X_k = \sum_{l=1}^M \Omega_{kl} x_l, \quad P_k = \sum_{l=1}^M \Omega_{kl}^* p_l \quad (5.20)$$

tais que $[\hat{X}_k, \hat{P}_l] = [\hat{x}_k, \hat{p}_l] = i\delta_{kl}$, ou seja, as relações canônicas de comutação são preservadas. Usaremos a convenção $\hat{X}_k \equiv \hat{X}_{M+k}$ e $\hat{P}_k \equiv \hat{P}_{M+k}$ que reflete explicitamente a condição periódica de contorno no *data bus*. Além disso, iremos denotar $\hat{X}_{a,b,c} = \hat{x}_{a,b,c}$ e $\hat{P}_{a,b,c} = \hat{p}_{a,b,c}$ para deixar a notação mais uniforme. Nessas variáveis normais podemos escrever o Hamiltoniano (5.1) como

$$\begin{aligned} \hat{H}(\epsilon) = & \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^M \hat{P}_k^\dagger \hat{P}_k + \Lambda_{kk}^2 X_k^\dagger \hat{X}_k + \sum_{i=a,b} \hat{P}_i^2 + (1 + \epsilon) \hat{X}_i^2 \right] + \frac{1}{2} (\hat{X}_c^2 + \hat{P}_c^2) \\ & - \epsilon \hat{X}_a \sum_{l=1}^M \Omega_{1l}^* \hat{X}_l - \epsilon \hat{X}_b \sum_{l=1}^M \Omega_{sl}^* \hat{X}_l + \frac{\epsilon}{2} \sum_{lm} (\Omega_{l1}^* \Omega_{m1}^* + \Omega_{ls}^* \Omega_{ms}^*) \hat{X}_l \hat{X}_m. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Como é usual em problemas com osciladores iremos utilizar a linguagem dos operadores bosônicos de criação e destruição definidos como

$$\hat{A}_k = \frac{\Lambda_{kk} \hat{X}_k + i \hat{P}_k^\dagger}{\sqrt{2\Lambda_{kk}}}, \quad \hat{A}_{a,b,c} = \frac{\hat{X}_{a,b,c} + i \hat{P}_{a,b,c}}{\sqrt{2}}, \quad (5.22)$$

e além disso reescreveremos o Hamiltoniano (5.21) na representação de interação como $\hat{H}_I = e^{-i\hat{H}t} \hat{H}(\epsilon) e^{i\hat{H}t}$, com

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \hat{P}_k^\dagger \hat{P}_k + \Lambda_{kk}^2 \hat{X}_k^\dagger \hat{X}_k + \frac{1}{2} \sum_{i=a,b,c} \hat{P}_i^2 + \hat{X}_i^2, \quad (5.23)$$

tal que

$$\begin{aligned} \hat{H}_I = & \frac{\epsilon}{2} \hat{A}_a^\dagger \hat{A}_a + \frac{\epsilon}{2} \hat{A}_b^\dagger \hat{A}_b \\ & - \epsilon \sum_{l=1}^M \frac{\Omega_{ll}^* (\hat{A}_a e^{-it} + \hat{A}_a^\dagger e^{it}) + \Omega_{kl}^* (\hat{A}_b e^{-it} + \hat{A}_b^\dagger e^{it})}{2\sqrt{\Lambda_{ll}}} (\hat{A}_l e^{-i\Lambda_{ll}t} + \hat{A}_{M-l}^\dagger e^{i\Lambda_{ll}t}) \\ & + \sum_{lm=1}^M \frac{\epsilon (\Omega_{ll}^* \Omega_{m1}^* + \Omega_{lk}^* \Omega_{mk}^*) (\hat{A}_l e^{-i\Lambda_{ll}t} + \hat{A}_{M-l}^\dagger e^{i\Lambda_{ll}t}) (\hat{A}_m e^{-i\Lambda_{mm}t} + \hat{A}_{M-m}^\dagger e^{i\Lambda_{mm}t})}{2\sqrt{\Lambda_{ll}\Lambda_{mm}}}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Analisando o Hamiltoniano (5.24) podemos perceber que ele consiste na soma de uma série de termos com dependência temporal variada. No regime $\epsilon \ll f$ podemos realizar a aproximação de onda girante nos mesmos moldes que fizemos em outros capítulos guardando apenas os termos com $l = m = 1$ que geram termos independentes do tempo. Isso resulta no Hamiltoniano efetivo

$$H_{\text{aprox}} = \frac{\epsilon}{2} \hat{A}_a^\dagger \hat{A}_a + \frac{\epsilon}{2} \hat{A}_b^\dagger \hat{A}_b + \frac{2\epsilon}{M} \hat{A}_M^\dagger \hat{A}_M - \frac{\epsilon}{2\sqrt{M}} [(\hat{A}_a + \hat{A}_b) \hat{A}_M^\dagger + (\hat{A}_a^\dagger + \hat{A}_b^\dagger) \hat{A}_M]. \quad (5.25)$$

Encontramos portanto que para ϵ pequeno, os osciladores a e b se acoplam ao modo do centro de massa que tem índice M . Esse é o modo normal de menor frequência do anel ($\Lambda_{MM} = 1$). Essa é a essência de nossa proposta, conseguimos reduzir a dinâmica para três osciladores; os osciladores a , b e M . Veremos que isso permite o envio de informação com alta eficiência e compararemos nossos resultados com um cálculo numérico utilizando o Hamiltoniano inicial sem aproximações que é dado por (5.1).

Analisaremos então o funcionamento do *data bus* na transmissão de emaranhamento do sistema a para o sistema b . Escolhemos trabalhar com variáveis contínuas e mais precisamente com estados Gaussianos para demonstrar a eficiência do esquema. Este estados são muito importantes devido à relativa facilidade de sua geração e manipulação. Já discutimos que a teoria de emaranhamento para estados Gaussianos é bem formulada e que a descrição via matrizes de covariância reduz o problema ao cálculo de alguns poucos elementos de matriz. O conhecimento dessa matriz para qualquer instante de tempo, leva por sua vez, à determinação das propriedades do emaranhamento no sistema ao longo da evolução. Consideramos que inicialmente os osciladores a e c foram preparados no estado de vácuo comprimido de dois modos (5.15) que possui matriz de covariância dada por (5.16) e negatividade logarítmica r . Utilizando o Hamiltoniano efetivo (5.25) calculamos os elementos de matriz e a negatividade logarítmica através do procedimento apresentado na seção anterior. Na Fig.(5.2) é mostrada a eficiência (N/r) para a situação em que o *data bus* possui 20 osciladores, $f = 10$ e $\epsilon = 0.015$. Comparamos com o cálculo numérico sem aproximações e podemos perceber uma ótima concordância. A pequena defasagem se dá devido a ausência de termos de segunda ordem em ϵ no Hamiltoniano efetivo.

O modelo aproximado permite entender diretamente o que está ocorrendo. Os osciladores se acoplam ao modo normal do centro de massa, reduzindo assim o problema para a interação de três osciladores. Isso leva a algumas vantagens naturais de nossa proposta.

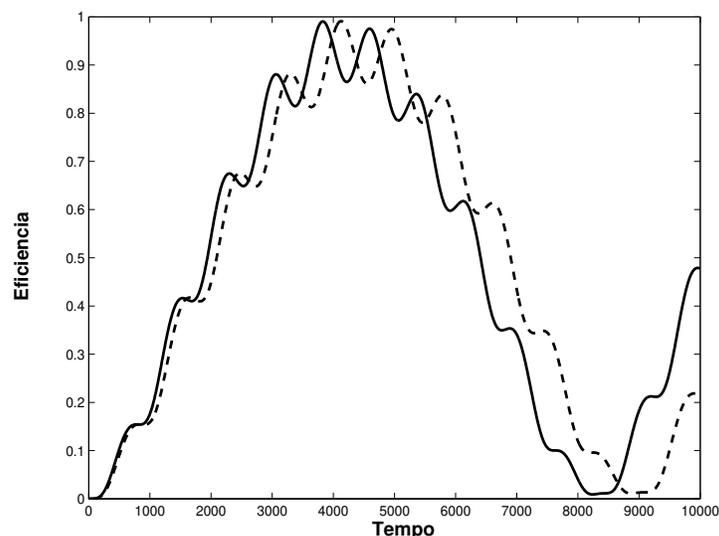


Figura 5.2: Comparação entre as evoluções exata e via Hamiltoniano efetivo para um anel com 20 osciladores e constantes de acoplamento $f = 10$ e $\epsilon = 0.015$. A linha tracejada corresponde ao cálculo exato e a sólida ao aproximado.

Primeiro é a independência da posição do *sender* e *receiver*. Isso é uma consequência direta do acoplamento com o centro de massa. Fisicamente, o modo do centro de massa se caracteriza por um movimento em fase de todos os elementos do anel e o que leva a independência com a posição em que os osciladores a e b se acoplam no *data bus*. Isso é revelado pelo fato de que o Hamiltoniano (5.25) não depende dos índices l e s que identificam os osciladores com os quais a e b se acoplam. Esse fato concorda com nossas simulações numéricas.

A segunda vantagem tem grande importância prática. A frequência de oscilação do modo do centro de massa é $\Lambda = 1$, que independe da constante de acoplamento f entre os elementos que formam o anel. Assim, pequenas flutuações em f não afetam a qualidade do *data bus*. O seu funcionamento é naturalmente robusto contra flutuações nas constantes de acoplamento. Isso possui uma imensa vantagem experimental e também prática na fabricação destas estruturas.

Gostaríamos de encerrar essa seção discutindo um pouco as limitações de nosso esquema. Na dedução do Hamiltoniano (5.25) nós negligenciamos muitos termos que levariam a contribuições dependentes do tempo no Hamiltoniano. Estes termos descartados levariam a correções cuja magnitude depende do tamanho M do *data bus* e afetam tanto a eficiência quanto a velocidade de propagação. Podemos sempre ajustar o tempo de espera o que faz das correções em velocidade menos importantes. Contudo, uma redução na eficiência deverá ser corrigida com métodos mais elaborados como correção quântica de erros. Fisicamente, a redução de eficiência se dá devido à perda de população para outros modos além do centro de massa. Para nosso sistema descrito por (5.1) podemos estimar o tamanho destas correções. No Hamiltoniano (5.24) nós descartamos todos os termos não-ressonantes que acoplam a e b a diferentes modos de oscilação. A aproximação de onda girante que fizemos se apóia no fato de que para pequenos valores da constante ϵ , os termos oscilando rapidamente farão com que as populações nos outros modos sejam insignificantes. Isso leva a um Hamiltoniano efetivo que não considera tais modos.

O modo com frequência imediatamente acima daquela do centro de massa é o modo com índice $(M - 1)$. Para M grande, a diferença de frequência como o centro de massa (dessintonia) pode ser estimada, $\Delta = |\Lambda_{M,M} - \Lambda_{M-1,M-1}| \simeq 2\pi^2 f/M^2$. O acoplamento com esse modo é basicamente o mesmo que com o centro de massa, ou seja, $\epsilon/2\sqrt{M}$. Da teoria de perturbação dependente do tempo, a perda de população (probabilidade de transição) é da ordem do quadrado da razão entre a constante de acoplamento e a dessintonia, que em nosso caso resulta em $\left(\frac{\epsilon}{2\sqrt{M}}\right)^2 \left(\frac{2\pi^2 f}{M^2}\right)^{-2}$. Essa probabilidade deve ser reduzida, o que resulta no limite

$$\frac{\epsilon}{f} \ll \frac{4\pi^2}{M^{3/2}}. \quad (5.26)$$

Assim, existe uma relação entre ϵ , f e M que garante a alta eficiência de transmissão. Essa é uma relação muito importante na engenharia desses *data buses* quânticos.

5.4 Conclusões

Nós apresentamos nessa seção um esquema interessante para transmitir informação quântica entre sistemas acoplados. A idéia baseia-se no conceito de *data bus* ou um agrupamento de sistemas quânticos capaz de transportar emaranhamento. O *data bus* em nossa proposta é formado por elementos acoplados igualmente (invariante) o que simplifica muito a implementação experimental. Demonstramos seu funcionamento e concluímos que o esquema é naturalmente robusto a flutuações nas constantes de acoplamento. Novamente, essa é uma característica desejável do ponto de vista prático em que desvios devido a técnicas de fabricação podem ocorrer. Encontramos uma importante relação que limita o número de elementos na cadeia em função dos parâmetros do sistema. Em resumo, concluímos que o uso de sistemas invariantes configura-se uma alternativa interessante para a transmissão de informação em sistemas de muitos corpos como os que ocorrem em física da matéria condensada.

Conclusões e Perspectivas Futuras

Encerramos esta tese com uma pequena revisão do que foi feito e com considerações sobre possíveis desdobramentos futuros dos trabalhos aqui apresentados. Primeiramente, a tese tratou do amplo problema do uso de sistemas físicos para a implementação de importantes idéias e conceitos da óptica e computação quântica. Essa foi a idéia básica desenvolvida, estudar em detalhes alguns importantes sistemas físicos e suas interações, no intuito de propor experimentos ou aplicações.

Escolhemos trabalhar com dois tipos de sistemas: osciladores harmônicos e sistemas de dois ou três níveis. Esses sistemas formam os blocos que deram origem aos trabalhos. Muitos sistemas reais podem ser modelados por esses blocos fundamentais e em especial nesta tese nós trabalhamos extensivamente com a física de íons aprisionados. O capítulo 5, que trata de sistemas de muitos corpos, pode ser considerado como um desenvolvimento natural dos capítulos anteriores. É muito importante para as aplicações práticas encontrar efeitos quânticos, e em especial, maneiras de se realizar tarefas em informação quântica em sistemas de muitos corpos.

Iniciamos a apresentação de nossos resultados mostrando como superposições mesoscópicas podem ser geradas no sistema de íons e cavidades. Estes estados são relevantes no estudo de perda de coerência e da fronteira entre física clássica e quântica. Demos um importante passo em direção ao interesse prático de nossa proposta incluindo dissipação na cavidade. Surgiu então um fato muito interessante: a detecção contínua de fótons pode levar à geração de estados quânticos do movimento, ainda que em condições de acoplamento fraco. Essa condição é exatamente o estado de arte atualmente em experimentos neste sistema. Por esse motivo, nossa proposta é fundamentada em condições reais, e pode ser implementada experimentalmente com a tecnologia atual.

Prosseguimos nossa apresentação com um proposta de implementação de uma interação Kerr não-linear entre dois bósons. A possibilidade de implementação de interações deste tipo em sistemas quânticos bem controlados, como é o caso dos íons aprisionados, é extremamente importante. Vários esquemas de computação quântica se fundamentam no uso desse tipo de interação. Demonstramos o funcionamento de uma porta quântica de fase utilizando esse sistema. Em nossa proposta o íon permanece no estado eletrônico fundamental e portanto a porta não sofre com o problema da emissão espontânea. Novamente esse é um enorme avanço do ponto de vista experimental. Essa importante característica abre a possibilidade de construção de portas rápidas com o uso de estados com alta taxa de decaimento. Concluímos portanto que nossa proposta representa uma alternativa viável para a implementação prática da computação quântica.

Continuamos nossa discussão sobre o uso desse importante sistema de íons e cavidades apresentando um regime novo de operação. A eletrodinâmica quântica de cavidades fornece uma ampla diversidade de regimes e Hamiltonianos. Muitos deles encontram aplicações em diversos problemas. Um desses Hamiltonianos é aquele em que um átomo realiza transições de dois fótons. O que ocorreria se empregássemos íons aprisionados no lugar de átomos em repouso? A resposta foi apresentada no Capítulo 4. Deduzimos um Hamiltoniano interessante que descreve transições de dois fótons no sistema íon-cavidade. Analisamos a dinâmica do sistema para algumas preparações iniciais padrão e vimos que o movimento exerce bastante influência. Um dos resultados mais interessantes é o surgimento de *revival* a longos tempos.

Encerramos a apresentação de nossos resultados com a proposta do *quantum data bus*. Mostramos ser possível utilizar sistemas invariantes para o envio de informação quântica entre elementos acoplados em partes arbitrárias no *data bus*. Nossa proposta apresenta duas características ímpares que a tornam especialmente viável para a implementação prática. Primeiro, o pouco controle externo exigido. Ao contrário de outros esquemas, não é necessário se modular as constantes de acoplamento, nem espacialmente e nem temporalmente, e isso simplifica bastante o processo de fabricação dessas estruturas. A outra característica é a relativa independência com o valor exato das constantes de acoplamento e das flutuações ao longo do *data bus*. Com essas importantes características acreditamos que nossa proposta pode ser considerada viável na implementação experimental ou prática de tarefas em computação e informação quântica em sistemas de muitos corpos.

Acreditamos que ainda existe muito a se pesquisar a partir das propostas dessa tese. Com relação aos íons aprisionados, o regime de dois fótons ainda pode ser muito explorado. Ainda seria interessante estudar os *Stark shifts* dependentes do movimento do íon que encontramos em nosso Hamiltoniano efetivo. Além disso, um estudo sobre compressão das quadraturas do íon e campo parece que revelaria resultados interessantes. Em geral, ainda existe muito para se estudar no que se refere como eletrodinâmica quântica de cavidades. Abordamos

transições de dois fótons mas ainda permanecem outras generalizações por serem estudadas.

Com relação ao *data bus* acreditamos que ainda sobram muitas perguntas interessantes a ser respondidas. Demonstramos sua capacidade de transmissão mas não falamos nada sobre aplicações computacionais. Seria possível realizar portas lógicas utilizando este sistema? Seria possível utilizar outras escolhas de acoplamentos (topologias) capazes de aumentar ainda mais a velocidade de transmissão de emaranhamento? Essas são apenas algumas possibilidades. Vale ressaltar que este trabalho tem recebido muitos citações e nelas podemos ver outras possibilidades e aplicações para as idéias aqui apresentadas.

Concluimos essa tese agradecendo a todas as pessoas que participaram direta ou indiretamente. Que este trabalho possa ser útil a todos que tiverem interesse por esse fascinante campo de pesquisa.

A Equação Mestra

O objetivo deste apêndice é apresentar um formalismo para o tratamento do campo eletromagnético em uma cavidade não ideal, isto é com perdas. Neste caso fótons podem escapar da cavidade numa taxa média κ . Isso significa que em média os fótons ficam na cavidade por um tempo κ^{-1} e após esse tempo é grande a probabilidade de que ele tenha escapado (decaimento exponencial). Nós recomendamos a referência [94] para estudos mais detalhados sobre dissipação em óptica quântica. Iniciaremos o tratamento de sistemas abertos em mecânica quântica da mesma maneira como fazemos usualmente no tratamento de sistemas fechados, ou seja, escrevendo o operador Hamiltoniano. Um sistema aberto não evolui unitariamente como ocorre com os sistemas fechados, porém ao tratarmos o sistema global (composto), ou seja, sistema mais o ambiente externo, ou reservatório, este sim terá uma evolução unitária ditada pela equação de Schrödinger. Se o observador não monitorar continuamente o decaimento do sistema, nenhuma informação será obtida ao longo da evolução e a descrição segue naturalmente para o uso do operador densidade. Esse operador densidade do sistema deve obedecer alguma equação dinâmica, tipicamente uma equação diferencial, e a essa equação chamamos equação mestra.

O operador Hamiltoniano total para o sistema S mais o reservatório R

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{SR}, \quad (\text{A.1})$$

com $\hat{H}_0 \equiv \hat{H}_S^0 + \hat{H}_R$, no qual \hat{H}_S^0 e \hat{H}_R são respectivamente os Hamiltonianos livres do sistema S e do reservatório R e \hat{H}_{SR} representa a interação entre o sistema e o reservatório.

É agora apropriado discutirmos o significado reservatório neste tratamento. Estamos supondo que o nosso sistema aberto possa ser modelado pelo acoplamento com um outro sistema com infinitos graus de liberdade que praticamente não tem sua dinâmica alterada durante a interação, ou seja, um reservatório definido da maneira usual como fazemos em física estatística. Dependendo do tipo de situação experimental podemos atribuir diferentes formas a este reservatório. Ao decorrer desta seção analisaremos uma destas formas, o reservatório térmico.

Seja $\hat{\chi}(t)$ o operador densidade para $S \oplus R$ e definimos o operador densidade reduzido $\hat{\rho}(t)$ como

$$\hat{\rho}(t) = \text{tr}_R[\hat{\chi}(t)], \quad (\text{A.2})$$

no qual o traço é realizado sobre as variáveis do reservatório. Todas as propriedades do sistema de interesse (valores médios, flutuações, etc...) podem ser obtidas de $\hat{\rho}(t)$. O objetivo é obter a equação de movimento para o operador densidade reduzido, ou seja, a equação mestra.

Na representação de Schrödinger o operador densidade total evolui unitariamente pela equação

$$\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\chi}]. \quad (\text{A.3})$$

Em problemas deste tipo é conveniente trabalhar na representação de interação definida pela transformação unitária

$$\hat{\chi}_I(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right) \hat{\chi}(t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right). \quad (\text{A.4})$$

A vantagem dessa representação fica clara quando encontramos a equação de movimento para $\hat{\chi}_I(t)$ que depende agora apenas de \hat{H}_{SR} . Para ver isso, derivamos (A.4) com respeito ao tempo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\chi}_I}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 \hat{\chi}_I + \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right) \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial t} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right) - \frac{i}{\hbar} \hat{\chi}_I \hat{H}_0 \\ &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_0, \hat{\chi}_I] + \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right) \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\chi}] \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Usando (A.3) obtemos a seguinte equação de movimento

$$\frac{\partial \hat{\chi}_I}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{V}_{SR}(t), \hat{\chi}_I], \quad (\text{A.6})$$

no qual $\hat{\mathcal{V}}_{SR}(t)$ é o Hamiltoniano \hat{H}_{SR} na representação de interação, ou seja,

$$\hat{\mathcal{V}}_{SR}(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t\right)\hat{H}_{SR}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t\right). \quad (\text{A.7})$$

Da equação (A.6) vemos que a dinâmica é determinada apenas pelos termos de interação do Hamiltoniano do sistema. Faremos agora algumas manipulações a fim de trazer a equação de movimento a uma forma favorável à realização de algumas aproximações. Integramos (A.6) no tempo obtendo

$$\hat{\chi}_I(t) = \hat{\chi}_I(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' [\hat{\mathcal{V}}_{SR}(t'), \hat{\chi}_I(t')]. \quad (\text{A.8})$$

Em seguida, substituímos esta expressão no comutador da equação de movimento (A.6) obtendo

$$\frac{\partial \hat{\chi}_I}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\mathcal{V}}_{SR}(t), \hat{\chi}_I(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\hat{\mathcal{V}}_{SR}(t), [\hat{\mathcal{V}}_{SR}(t'), \hat{\chi}_I(t')]]. \quad (\text{A.9})$$

É importante ressaltar que esta é uma equação exata e que não realizamos quaisquer aproximações até aqui. Vamos assumir que no instante inicial o sistema e o reservatório não estão correlacionados e que portanto o estado do sistema $S \oplus R$ pode ser escrito como

$$\hat{\chi}_I(0) = \hat{\rho}_I(0) \otimes \hat{R}_0, \quad (\text{A.10})$$

sendo R_0 o operador densidade inicial do reservatório. Traçando (A.9) em R obtemos

$$\frac{\partial \hat{\rho}_I}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{tr}_R [\hat{\mathcal{V}}_{SR}(t) [\hat{\mathcal{V}}_{SR}(t'), \hat{\chi}_I(t')]], \quad (\text{A.11})$$

no qual descartamos o termo $\text{tr}_R(\frac{1}{i\hbar} [\hat{\mathcal{V}}_{SR}(t), \hat{\chi}_I(0)])$ sob a hipótese de que o valor médio de \mathcal{V}_{SR} em \hat{R}_0 é nulo. Isso ocorre no reservatório que consideraremos mais adiante.

Faremos agora a nossa primeira aproximação. Essa aproximação é bastante usual em teoria de espalhamento e é conhecida como *aproximação de Born*. Ela consiste em assumir que o acoplamento é tão fraco que o estado do sistema desvia ligeiramente da evolução livre. Mais quantitativamente, tomamos a evolução livre (acoplamento nulo entre sistema e reservatório) $\hat{\chi}_I(t) = \hat{\rho}_I(t) \otimes \hat{R}(t)$ e substituímos na equação de movimento (A.11) obtendo

$$\frac{\partial \hat{\rho}_I}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{tr}_R [\hat{\mathcal{V}}_{SR}(t) [\hat{\mathcal{V}}_{SR}(t'), \hat{\rho}_I(t) \hat{R}(t)]]. \quad (\text{A.12})$$

Devemos ressaltar que para sermos consistentes com o fato do reservatório não ter seu estado alterado pela interação com S , devemos substituir $\hat{R}(t)$ por \hat{R}_0 nas próximas expressões.

Outro ponto extremamente importante a se notar é o fato de que a equação (A.12) não é Markoffiana, ou seja, o presente de $\hat{\rho}_I$ no instante t depende do passado através da integral em t' . Aqui devemos novamente ser consistentes com a hipótese de um reservatório que não tem sua dinâmica alterada pelo sistema em estudo. Uma vez que o reservatório não sofre a influência de S , ele não pode transferir qualquer informação passada ao presente de S . Dizemos que o processo não tem *memória*. Fisicamente, entendemos isto reconhecendo a existência de duas escalas de tempo distintas, uma escala de tempo lenta que é a evolução do sistema S e outra muito rápida caracterizando o decaimento de quaisquer correlações temporais entre os operadores do reservatório¹.

No intuito de realizar a aproximação de Markoff vamos escrever uma forma geral para o Hamiltoniano de interação

$$\hat{\mathcal{V}}_{SR}(t) = \hbar \sum_i s_i(t) \Gamma_i(t), \quad (\text{A.13})$$

no qual s_i é um operador que atua no espaço de Hilbert de S e Γ_i é um operador que atua no espaço de Hilbert de R . Na representação de interação esses operadores dependerão explicitamente do tempo. Realizando as devidas

¹As correlações são aqui definidas como a média no estado \hat{R}_0 do produto de dois operadores do reservatório tomados em tempos diferentes. Escreveremos explicitamente tais correlações mais adiante.

operações distributivas e usando as propriedades cíclicas do traço obtemos finalmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}_I}{\partial t} = & - \sum_{i,j} \int_0^t dt' [s_i(t)s_j(t')\hat{\rho}_I(t') - s_j(t')\hat{\rho}_I(t')s_i(t)] \langle \Gamma_i(t)\Gamma_j(t') \rangle_R \\ & - \sum_{i,j} \int_0^t dt' [\hat{\rho}_I(t')s_j(t')s_i(t) - s_i(t)\hat{\rho}_I(t')s_j(t')] \langle \Gamma_j(t')\Gamma_i(t) \rangle_R, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

no qual definimos as funções de correlação temporal entre os operadores do reservatório como sendo as médias

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_i(t)\Gamma_j(t') \rangle_R &= \text{tr}_R[\Gamma_i(t)\Gamma_j(t')R_0] \\ \langle \Gamma_j(t')\Gamma_i(t) \rangle_R &= \text{tr}_R[\Gamma_j(t')\Gamma_i(t)R_0]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Nestas funções de correlação estarão presentes as propriedades do reservatório e através delas estabelecemos mais quantitativamente a aproximação de Markoff que desejamos realizar. Idealmente, tal aproximação é consistente com as escolhas

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_i(t)\Gamma_j(t') \rangle_R &\propto \delta(t-t') \\ \langle \Gamma_j(t')\Gamma_i(t) \rangle_R &\propto \delta(t-t'), \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

ou seja, as correlações decaem extremamente rápido se anulando em tempos diferentes. As constantes de proporcionalidade dependem da escolha do acoplamento $\hat{V}_{SR}(t)$ e do tipo de reservatório.

Vamos considerar o caso em que sistema consiste de um oscilador harmônico simples de frequência ω_c . Tal escolha é bastante ilustrativa e a equação mestra que será obtida neste exemplo descreve uma série de sistemas físicos de interesse, como por exemplo, a dinâmica de um modo do campo eletromagnético quantizado numa cavidade de microondas com perdas. Identificamos na soma em (A.13) que

$$\hat{s}_1 = \hat{b}, \quad \hat{s}_2 = \hat{b}^\dagger \quad (\text{A.17})$$

Para realizar avanços quantitativos tomaremos como modelo de reservatório R um banho de osciladores harmônicos de frequência ω_r e operador de criação (aniquilação) \hat{r}_j^\dagger (\hat{r}_j). Assim,

$$\hat{H}_R = \sum_j \hbar \omega_r \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j \quad (\text{A.18})$$

$$\hat{H}_{SR} = \sum_j \hbar (\lambda_j^* \hat{b} \hat{r}_j^\dagger + \lambda_j \hat{b}^\dagger \hat{r}_j), \quad (\text{A.19})$$

no qual λ_j é uma constante de acoplamento por enquanto indeterminada. Assim, identificamos novamente na soma em (A.13) que

$$\hat{\Gamma}_1 \equiv \hat{\Gamma}^\dagger = \sum_j \lambda_j^* \hat{r}_j^\dagger, \quad \hat{\Gamma}_2 \equiv \hat{\Gamma} = \sum_j \lambda_j \hat{r}_j. \quad (\text{A.20})$$

Na representação de interação

$$\hat{s}_1 = \hat{b} e^{-i\omega_c t}, \quad \hat{s}_2(t) = \hat{b}^\dagger e^{i\omega_c t} \quad (\text{A.21})$$

e também

$$\hat{\Gamma}^\dagger(t) = \sum_j \lambda_j^* \hat{r}_j^\dagger e^{i\omega_j t}, \quad \hat{\Gamma}(t) = \sum_j \lambda_j \hat{r}_j e^{-i\omega_j t}, \quad (\text{A.22})$$

Com esses resultados, a equação (A.14) toma a forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}_I}{\partial t} = & - \int dt' \{ [\hat{b}\hat{b}\hat{\rho}_I(t') - \hat{b}\hat{\rho}_I(t')\hat{b}] e^{-i\omega_c(t+t')} \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R + h.c. \} \\ & - \int dt' \{ [\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{\rho}_I(t') - \hat{b}^\dagger\hat{\rho}_I(t')\hat{b}^\dagger] e^{i\omega_c(t+t')} \langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}(t') \rangle_R + h.c. \} \\ & - \int dt' \{ [\hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{\rho}_I(t') - \hat{b}^\dagger\hat{\rho}_I(t')\hat{b}] e^{-i\omega_c(t-t')} \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}(t') \rangle_R + h.c. \} \\ & - \int dt' \{ [\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{\rho}_I(t') - \hat{b}\hat{\rho}_I(t')\hat{b}^\dagger] e^{i\omega_c(t-t')} \langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R + h.c. \}, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Escolhemos agora um reservatório térmico, em equilíbrio com o sistema em uma temperatura T . O estado térmico do reservatório é dado pela distribuição usual

$$\hat{R}_0 = \prod_j e^{-\hbar\omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j / k_B T} (1 - e^{-\hbar\omega_j / k_B T}), \quad (\text{A.24})$$

sendo k_B a constante de Boltzmann. Para este tipo de reservatório obtemos as funções de correlação

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = 0 \quad (\text{A.25})$$

$$\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R = \sum_j |\lambda_j|^2 e^{i\omega_j(t-t')} \bar{n}(\omega_j, T) \quad (\text{A.27})$$

$$\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = \sum_j |\lambda_j|^2 e^{-i\omega_j(t-t')} [\bar{n}(\omega_j, T) + 1], \quad (\text{A.28})$$

com $\bar{n}(\omega_j, T)$ sendo o número médio de ocupação para o estado térmico (A.24) dado por

$$\bar{n}(\omega_j, T) = Tr_R(\hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j R_0) = \frac{e^{-\hbar\omega_j / k_B T}}{1 - e^{-\hbar\omega_j / k_B T}} \quad (\text{A.29})$$

Podemos ver que as funções de correlação não nulas envolvem uma soma sobre os modos do reservatório. Faremos então uma passagem habitual para uma integral introduzindo uma densidade de estados $g(\omega)$ que depende das condições de contorno do problema. Desse modo, temos que $g(\omega)d\omega$ fornece o número de modos num intervalo entre ω e $\omega + d\omega$. Realizando a mudança de variável $\tau = t - t'$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}_I}{\partial t} &= - \int d\tau \{ [\hat{b} \hat{b}^\dagger \hat{\rho}_I(t - \tau) - \hat{b}^\dagger \hat{\rho}_I(t - \tau) \hat{b}] e^{-i\omega_c \tau} \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t - \tau) \rangle_R + h.c. \} \\ &\quad - \int d\tau \{ [\hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{\rho}_I(t - \tau) - \hat{b} \hat{\rho}_I(t - \tau) \hat{b}^\dagger] e^{i\omega_c \tau} \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t - \tau) \rangle_R + h.c. \}, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

com as funções de correlação dadas por

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t - \tau) \rangle_R = \int_0^\infty d\omega e^{i\omega_c \tau} g(\omega) |\lambda(\omega)|^2 \bar{n}(\omega_j, T) \quad (\text{A.31})$$

$$\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t - \tau) \rangle_R = \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega_c \tau} g(\omega) |\lambda(\omega)|^2 [\bar{n}(\omega_j, T) + 1] \quad (\text{A.32})$$

Na aproximação de Markoff trocamos $\hat{\rho}_I(t - \tau)$ por $\hat{\rho}_I(t)$ e obtemos então

$$\frac{\partial \hat{\rho}_I}{\partial t} = \alpha [\hat{b} \hat{\rho}_I(t) \hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{\rho}_I(t)] + \beta [\hat{b} \hat{b}^\dagger \hat{\rho}_I(t) + \hat{b}^\dagger \hat{\rho}_I(t) \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{\rho}_I(t) - \hat{\rho}_I(t) \hat{b} \hat{b}^\dagger] + h.c. \quad (\text{A.33})$$

no qual

$$\alpha = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{-i(\omega - \omega_c)\tau} g(\omega) |\lambda(\omega)|^2 \quad (\text{A.34})$$

$$\beta = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{-i(\omega - \omega_c)\tau} g(\omega) |\lambda(\omega)|^2 \bar{n}(\omega_j, T). \quad (\text{A.35})$$

Notamos que t é o tempo típico da evolução de $\hat{\rho}_I$ e que a integral em τ envolve tempos muito mais curtos, característicos das correlações do reservatório (decaimento rápido), podemos assim estender o limite da integral para τ variando de zero a infinito e usar o resultado

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t d\tau e^{-i(\omega - \omega_c)\tau} = \pi \delta(\omega - \omega_c) - i \frac{P}{\omega - \omega_c}, \quad (\text{A.36})$$

no qual P indica o valor principal de Cauchy definido como

$$P \int_{-a}^b \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-a}^{-\epsilon} \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega + \int_{\epsilon}^b \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega \right) \quad (\text{A.37})$$

Com isso temos

$$\alpha = g(\omega_c) |\lambda(\omega_c)|^2 + i\Delta \quad (\text{A.38})$$

$$\beta = g(\omega_c) |\lambda(\omega_c)|^2 \bar{n}(\omega_j, T) + i\Delta', \quad (\text{A.39})$$

nas quais

$$\Delta = P \int_0^\infty d\omega \frac{e^{-i(\omega-\omega_c)\tau} g(\omega) |\lambda(\omega)|^2}{\omega_c - \omega} \quad (\text{A.40})$$

$$\Delta' = P \int_0^\infty d\omega \frac{e^{-i(\omega-\omega_c)\tau} g(\omega) |\lambda(\omega)|^2}{\omega_c - \omega} \bar{n}(\omega_j, T) \quad (\text{A.41})$$

Definido as constantes

$$\kappa \equiv 2g(\omega_c) |\lambda(\omega_c)|^2, \quad \bar{n} \equiv g(\omega_c) |\lambda(\omega_c)|^2 \bar{n}(\omega_j, T) \quad (\text{A.42})$$

temos finalmente

$$\frac{\partial \hat{\rho}_I}{\partial t} = -i\Delta [\hat{b}^\dagger \hat{b}, \hat{\rho}_I] + \frac{\kappa}{2} (2\hat{b} \hat{\rho}_I \hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{\rho}_I - \hat{\rho}_I \hat{b}^\dagger \hat{b}) + \kappa \bar{n} (\hat{b} \hat{\rho}_I \hat{b}^\dagger + \hat{b}^\dagger \hat{\rho}_I \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{\rho}_I - \hat{\rho}_I \hat{b} \hat{b}^\dagger). \quad (\text{A.43})$$

As frequência Δ representa uma mudança (*shift*) na frequência do modo do oscilador devido à presença do reservatório. Esse *shift* pode ser incorporado na frequência natural do sistema e nesse caso a equação mestra para um oscilador harmônico em contato com um reservatório térmico toma a forma

$$\frac{\partial \hat{\rho}_I}{\partial t} = \frac{\kappa}{2} (2\hat{b} \hat{\rho}_I \hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{\rho}_I - \hat{\rho}_I \hat{b}^\dagger \hat{b}) + \kappa \bar{n} (\hat{b} \hat{\rho}_I \hat{b}^\dagger + \hat{b}^\dagger \hat{\rho}_I \hat{b} - \hat{b} \hat{b}^\dagger \hat{\rho}_I - \hat{\rho}_I \hat{b} \hat{b}^\dagger). \quad (\text{A.44})$$

Nas aplicações seguintes consideraremos o caso temperatura $T = 0$. Neste caso, a equação mestra para um modo do campo numa cavidade não-ideal que tem uma taxa de dissipação κ é dada por

$$\frac{\partial \hat{\rho}_I}{\partial t} = \frac{\kappa}{2} (2\hat{b} \hat{\rho}_I \hat{b}^\dagger - \hat{b} \hat{b}^\dagger \hat{\rho}_I - \hat{\rho}_I \hat{b}^\dagger \hat{b}). \quad (\text{A.45})$$

B Trajetórias Quânticas

Conforme vimos no Apêndice A, a perda de coerência em um sistema (micro-sistema) é o resultado de seu acoplamento com um reservatório (macro-sistema), tal que é impossível controlar ou conhecer a dinâmica completa de todos seus graus de liberdade. O micro-sistema é então descrito mediante traço das variáveis do reservatório. Usualmente o tratamento do problema é feito via descrição de um ensemble de micro-sistemas. A descrição na representação de Schrödinger ou interação é feita via equações mestras para o operador densidade e a descrição na representação de Heisenberg é feita via equações de Langevin.

O desenvolvimento de técnicas experimentais para o estudo e observação de sistema únicos, como um único íon aprisionado numa armadilha de Paul, estimulou a construção de métodos teóricos para descrever realização individuais (ao contrário de ensembles) condicionadas a observação de um canal de decaimento. Em particular, a proposta de Dehmelt [95] para a observação de *quantum jumps* no sinal de fluorescência em íons aprisionados e subsequente observação experimental destes *jumps* [96] lançaram o desafio para a criação de um formalismo adequado.

Tal formalismo é conhecido pelos nomes de função de onda de Monte Carlo, *quantum jump approach*, ou método de trajetórias quânticas, e foi desenvolvido por uma série de pesquisadores a partir de 1986. Para uma lista completa de referências e um texto de revisão muito bem escrito recomendamos [42]. Esses nomes diferentes refletem em essência o mesmo formalismo mas foram utilizados em diferentes contextos e aplicações e daí a variedade de nomes.

Existe uma sutileza aqui que merece ser destacada. Essa abordagem de trajetórias quânticas não é algo incompatível com a abordagem das equações mestras. Em essência ambos, em seus limites de aplicação, devem fornecer o mesmo resultado. Contudo, ela abre novas possibilidades tanto de interpretação do fenômeno da perda de coerência quanto da descrição de realizações únicas e medidas contínuas que não poderiam ser contempladas na descrição via ensemble das equações mestras. Veremos mais adiante a prova de que este tratamento via *jumps* coincide com o tratamento via equações mestras no limite de muitas realizações ou trajetórias. Em um certo aspecto, alguém poderia entender essa abordagem de *quantum jumps* ou trajetórias como uma técnica de simulação de equações mestras. E de fato também é! A beleza computacional é que vamos lidar o tempo todo com vetores de estado e não matrizes densidade e assim a memória de computador utilizada é muito menor. Mostraremos ainda nesta seção como proceder para simular uma equação mestra. Assim, o amigo leitor que neste momento tem uma equação mestra complicada nas mãos pode sentir uma certa alegria ao saber que seu problema pode ser resolvido computacionalmente com muito mais facilidade via a abordagem das funções de onda de Monte Carlo.

Faremos agora uma descrição básica de como este método pode ser derivado. Podemos partir da equação mestra (A.45) reescrita na representação de Schrödinger ($\hbar = 1$)

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = i[\hat{H}_0, \hat{\rho}] + \frac{\kappa}{2}(2\hat{b} \hat{\rho} \hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{b}^\dagger \hat{b}), \quad (\text{B.1})$$

na qual $\hat{H}_0 = \omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b}$ (ω_c já inclui o *shift* Δ). Esta é a equação mestra cuja solução descreve a dinâmica de um modo do campo quantizado em um cavidade dissipativa. A equação contém um termo que descreve a evolução unitária (comutador) e uma parte que é responsável pela não unitariedade, termos proporcionais a κ , parâmetro que é basicamente o tempo de vida médio dos fótons na cavidade.

O método dos *quantum jumps* para descrever sistemas abertos basea-se na interpretação de (B.1) em termos de uma evolução intercalada com decaimentos ou *jumps*. Para enxergarmos melhor essa interpretação, nós reescrevemos (B.1) como

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + i(\hat{H}_{\text{eff}} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{H}_{\text{eff}}^\dagger) = \kappa \hat{b} \hat{\rho} \hat{b}^\dagger, \quad (\text{B.2})$$

onde definimos o operador não-Hermitiano

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}_0 - i\frac{\kappa}{2}\hat{b}^\dagger \hat{b}, \quad (\text{B.3})$$

e então escrevemos a solução de (B.2) por meio da função de Green (super-operador)

$$\hat{\mathcal{G}}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) = \theta(t - t_0) e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}(t-t_0)} \hat{\rho}(t_0) e^{i\hat{H}_{\text{eff}}^\dagger(t-t_0)}, \quad (\text{B.4})$$

ou seja,

$$\hat{\rho}(t) = e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}(t-t_0)}\hat{\rho}(t_0)e^{i\hat{H}_{\text{eff}}^\dagger(t-t_0)} + \int_{t_0}^t dt_1 \hat{G}(t, t_1) \hat{B} \hat{\rho}(t_1), \quad (\text{B.5})$$

onde $\hat{B}\hat{\rho} = \kappa\hat{b}\hat{\rho}\hat{b}^\dagger$. Podemos iterar essa solução um número infinito de vezes e assim reescreve-la na forma

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{G}(t, t_n) \hat{B} \hat{G}(t_n, t_{n-1}) \dots \hat{G}(t_2, t_1) \hat{B} \hat{G}(t_1, t_0) \hat{\rho}(t_0). \quad (\text{B.6})$$

Ao analisar o integrando podemos então perceber que a evolução corresponde a uma sequência de evoluções temporais não-unitárias interrompidas por *jumps*. Na realidade a evolução completa é a soma destas várias trajetórias. Isso dá origem à uma técnica para simulação de equações mestras descrita a seguir.

Se nosso sistema é descrito por um Hamiltoniano geral \hat{H} , agora não mais restritos a apenas osciladores harmônicos, e as perdas podem ser coletadas numa equação mestra do tipo

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = i[\hat{H}, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2}(2\hat{A}\hat{\rho}\hat{A}^\dagger - \hat{A}^\dagger\hat{A}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{A}^\dagger\hat{A}), \quad (\text{B.7})$$

com \hat{A} podendo ser um operador bosônico ou ainda um operador de transição de dois níveis como $\hat{\sigma}_-$, então podemos reescrever a equação mestra de modo semelhante ao que fizemos anteriormente (B.2) tendo agora

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H} - i\gamma\hat{A}^\dagger\hat{A}. \quad (\text{B.8})$$

A simulação é então realizada do seguinte modo. Dado o estado inicial do sistema $|\psi(0)\rangle$ ¹, existem duas possibilidades. Ou o sistema evolui não unitariamente através de

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}t}|\psi(0)\rangle \quad (\text{B.9})$$

ou sofrerá um *jump* descrito como

$$|\psi(t)\rangle = \hat{A}|\psi(0)\rangle. \quad (\text{B.10})$$

Chamamos a atenção do leitor para o fato de que nenhuma das duas opções representa uma operação unitária e portanto a norma do estado é alterada a cada passo. Para qualquer cálculo a ser realizado com o estado evoluído neste tipo de abordagem, este necessita ser renormalizado. Como decidir por uma das duas possibilidades? Isso é feito com a obtenção da probabilidade de ocorrência do *jump* e posterior comparação com um número aleatório entre 0 e 1 gerado com base numa distribuição equiprovável. A probabilidade de que ocorra pelo menos um *jump* num intervalo é simplesmente o quanto a norma do estado (B.9) diminui, ou seja

$$P = 1 - \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle \quad (\text{B.11})$$

onde $|\psi(t)\rangle$ é dado por (B.9). Uma expansão para t pequeno mostra que tal probabilidade pode ser escrita como

$$P = \gamma t \langle \psi(0) | \hat{A}^\dagger \hat{A} | \psi(0) \rangle. \quad (\text{B.12})$$

A simulação via função de onda de Monte Carlo resume-se na seguinte receita:

- Determine a probabilidade de uma emissão (*jump*) dada por (B.11) ou (B.12).
- Obtenha um número aleatório r entre zero e um e compare com P . Depois decida de acordo com os seguintes opções:
 - Se $r < P$, decida pelo *jump* e o sistema colapsa no estado normalizado

$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{\hat{A}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi(0) | \hat{A}^\dagger \hat{A} | \psi(0) \rangle}}. \quad (\text{B.13})$$

¹Por simplicidade estamos adotando um estado inicial puro mas se tomarmos um estado misto geral basta considerar uma base diagonal que tudo seguirá basicamente da mesma maneira.

- Se $r \geq P$, decida pela evolução sobre a influência do Hamiltoniano não-Hermitiano. O estado normalizado é então dado por

$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}t}|\psi(0)\rangle}{\sqrt{1-P}}, \quad (\text{B.14})$$

ou para t pequeno

$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{[1 - i\hat{H}t - (\gamma/2)t\hat{A}^\dagger\hat{A}]|\psi\rangle}{\sqrt{1-P}} \quad (\text{B.15})$$

- Repita M -vezes até obter uma trajetória completa, ou seja, $t = M\Delta t$.
- Faça a média dos observáveis de interesse após muitas trajetórias.

Essa média para os observáveis quando realizada sobre muitas trajetórias deve coincidir com aquela que seria obtida com a solução da equação mestra. Para ver isso, faremos agora a demonstração de que a abordagem via *quantum jumps* leva a equação mestra (4.5). Notamos que a evolução para um passo Δt se torna a soma de duas possibilidades

$$|\psi\rangle\langle\psi| \rightarrow P|\psi_{\text{jump}}\rangle\langle\psi_{\text{jump}}| + (1-P)|\psi_{\text{no jump}}\rangle\langle\psi_{\text{no jump}}|. \quad (\text{B.16})$$

Usando (B.12) e (B.15) teremos

$$|\psi\rangle\langle\psi| \rightarrow \gamma\Delta t\hat{A}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{A}^\dagger + [1 - i\hat{H}t - (\gamma/2)t\hat{A}^\dagger\hat{A}]|\psi\rangle\langle\psi|[1 + i\hat{H}t - (\gamma/2)t\hat{A}^\dagger\hat{A}], \quad (\text{B.17})$$

que na aproximação considerada, ou seja, Δt pequeno, encontramos

$$|\psi\rangle\langle\psi| \rightarrow |\psi\rangle\langle\psi| - i\Delta t[\hat{H}, |\psi\rangle\langle\psi|] + \frac{\gamma}{2}\Delta t(2\hat{A}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{A}^\dagger - \hat{A}^\dagger\hat{A}|\psi\rangle\langle\psi| - |\psi\rangle\langle\psi|\hat{A}^\dagger\hat{A}), \quad (\text{B.18})$$

ou

$$\frac{\Delta\hat{\rho}}{\Delta t} = i[\hat{H}, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2}(2\hat{A}\hat{\rho}\hat{A}^\dagger - \hat{A}^\dagger\hat{A}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{A}^\dagger\hat{A}), \quad (\text{B.19})$$

que no limite $\Delta t \rightarrow 0$ torna-se a equação mestra (B.7).

Recentemente, um trabalho muito interessante apresenta um modelo microscópico para a dedução da forma do superoperador de *jump* [98], denotado nessa tesa por \hat{B} . Os autores deduzem uma expressão geral cujos detalhes dependem de hipóteses feitas sobre a interação sistema-detector, e alguns exemplos importantes são cuidadosamente analisados.

C Hamiltoniano de Interação Íon-Campo

O acoplamento entre campos eletromagnéticos e cargas é um problema complexo e a discussão em detalhes seria muito extensa para ser tratada num apêndice. Um estudo detalhado pode ser encontrado no livro [48]. Por esse motivo, discutiremos apenas aspectos gerais mas relevantes ao entendimento do Hamiltoniano de interação (1.54). Trataremos o caso em que o sistema todo é tratado quanticamente. O campo eletromagnético quantizado foi descrito na Seção 1.3 e pode ser escrito como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_{k_x} E_0 (\hat{b} e^{-i\omega_c t} + \hat{b}^\dagger e^{i\omega_c t}) \cos(kx) \quad (\text{C.1})$$

Iremos supor que o problema pode ser reduzido a dois níveis eletrônicos do íon, denotados por $|1\rangle$ e $|2\rangle$. Isso ocorre quando $\hbar\omega_c \approx E_2 - E_1$. Incluiremos os *Stark shifts* representados pelos elementos diagonais $\langle i|\hat{H}_I|j\rangle$, $j = 1, 2$, nas definições das energias dos níveis eletrônicos¹ E_2 e E_1 . Uma vez que os dois estados completam uma base ($\hat{\mathbb{1}} = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|$) para um sistema de dois níveis, podemos expandir o Hamiltoniano de interação \hat{H}_I nesta base usando $\hat{H}_I = \hat{\mathbb{1}}\hat{H}_I\hat{\mathbb{1}}$

$$\hat{H}_I = (|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)\langle 1|\hat{H}_I|2\rangle, \quad (\text{C.2})$$

no qual escolhemos o elemento de matriz $\langle 1|\hat{H}_I|2\rangle$ real. Iremos agora estudar esse elemento de matriz para a importante transição dipolar. Pode-se dizer que existem três tipos de interação mais utilizados nos experimentos envolvendo íons; acoplamento dipolar, quadrupolar e Raman. Todas essas três possibilidades estão incluídas na forma geral utilizada na tese e dada por (1.54), como pode ser visto em (C.2). A única mudança seria o valor do elemento de matriz $\langle 1|\hat{H}_I|2\rangle$. Maiores detalhes sobre os outros tipos de acoplamentos podem ser encontrados no livro [48] e para o caso específico de íons nos artigos de revisão [15, 97].

Trataremos o caso de íons com apenas um único elétron na camada mais externa. Sua estrutura se aproxima muito do átomo de hidrogênio, o que facilita bastante nos cálculos. Esse elétron possui um momento de dipolo $\vec{\mu} = e\mathbf{x}$, sendo \mathbf{x} seu vetor posição com relação ao núcleo. Esse dipolo elétrico acopla-se ao campo da cavidade através da conhecida fórmula do eletromagnetismo

$$\hat{H}_I = e\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{C.3})$$

Utilizando (C.1) obtemos o elemento de matriz

$$\langle 1|\hat{H}_I|2\rangle = eE_0 \langle 1|\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{k_x}|2\rangle \cos(kx) \quad (\text{C.4})$$

A comparação com (1.54) leva a

$$g = eE_0 \langle 1|\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{k_x}|2\rangle \quad (\text{C.5})$$

para transições de dipolo elétrico. Pelo elemento de matriz (C.5) vemos que a interação de dipolo é um função ímpar da posição do elétron. Isso resulta numa regra de transição: somente estados com paridade opostas serão excitados por esse acoplamento. Outros tipos de acoplamentos levariam a outras regras de transição. O valor numérico para o elemento de matriz (C.5) depende de detalhes específicos da estrutura eletrônica do íon e da polarização do campo.

¹Até o momento não definimos uma forma para \hat{H}_I , o problema é geral até aqui.

D Validade do Hamiltoniano Kerr

Utilizaremos agora um tipo de teoria de perturbação dependente do tempo para averiguar o regime de validade do Hamiltoniano (3.19). O Hamiltoniano original do sistema íon e cavidade (1.54) escrito na representação é dado, como no capítulo 3, por

$$\hat{H}_I = g(\hat{\sigma}_+ \hat{b} e^{i\Delta t} + \hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger e^{-i\Delta t}) \cos[\eta(\hat{a}^\dagger e^{i\nu t} + \hat{a} e^{-i\nu t})], \quad (\text{D.1})$$

onde definimos $\Delta = \omega_a - \omega_c$. Usando $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}}$ obtemos

$$\hat{H}_I = g\hat{\sigma}_+ \hat{b} \sum_{\alpha,\beta} F(\hat{a}^\dagger, \hat{a}; \alpha, \beta) e^{i[\Delta+\nu(\alpha-\beta)]t} + g\hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger \sum_{\alpha,\beta} F(\hat{a}^\dagger, \hat{a}; \alpha, \beta) e^{-i[\Delta+\nu(\alpha-\beta)]t}, \quad (\text{D.2})$$

no qual definimos a função

$$F(\hat{a}^\dagger, \hat{a}; \alpha, \beta) = \frac{e^{-\eta^2/2}}{2\alpha!\beta!} [(i\eta)^{\alpha+\beta} + (-i\eta)^{\alpha+\beta}] \hat{a}^\dagger{}^\alpha \hat{a}^\beta. \quad (\text{D.3})$$

Em primeira ordem, o operador de evolução temporal é dado por

$$\hat{U}(t) = \hat{\mathbb{1}} - i \int_0^t \hat{H}_I(t') dt'. \quad (\text{D.4})$$

Calculando as integrais, obtemos

$$\hat{U}(t) = \hat{\mathbb{1}} - ig\hat{\sigma}_+ \hat{b} \sum_{\alpha,\beta} F(\hat{a}^\dagger, \hat{a}; \alpha, \beta) I_1^{\alpha\beta}(t) + ig\hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger \sum_{\alpha,\beta} F(\hat{a}^\dagger, \hat{a}; \alpha, \beta) I_1^{\alpha\beta}(t) \quad (\text{D.5})$$

com

$$\begin{aligned} I_1^{\alpha\beta}(t) &= i \frac{1 - e^{i[\Delta+\nu(\alpha-\beta)]t}}{\Delta + \nu(\alpha - \beta)}, \\ I_2^{\alpha\beta}(t) &= -i \frac{1 - e^{i[\Delta+\nu(\alpha-\beta)]t}}{\Delta + \nu(\alpha - \beta)}. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Encontramos então a forma do operador de evolução temporal em primeira ordem em g . Isso nos permite calcular a probabilidade de transição entre os estados $|g, n, m\rangle \rightarrow |e, n-1, m'\rangle$ que gostaríamos que fosse pequena. Aqui n refere-se ao campo e m ao movimento do íon. O Hamiltoniano Kerr não envolve transições entre estes estados e sua validade apoia-se em fazer a probabilidade de tais transições muito menor que 1. A probabilidade procurada é dada por

$$P(t) = |\langle e, n-1, m' | \hat{U}(t) | g, n, m \rangle|^2. \quad (\text{D.7})$$

A expressão final completa deste cálculo envolve uma expressão do tipo

$$P(t) = \left(\frac{g e^{-\eta^2/2}}{\Delta + \nu(m - m')} \right)^2 A(t) + \left(\frac{g e^{-\eta^2/2}}{\Delta - \nu(m - m')} \right)^2 B(t), \quad (\text{D.8})$$

onde $A(t)$ e $B(t)$ são funções periódicas e limitadas por 1 e -1 . É então claro que o Hamiltoniano efetivo Kerr (3.19) pode ser usado nas condições $\Delta \neq k\nu$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) e $g \ll \Delta$, e no caso em que $m \neq m'$ devemos ter $\Delta \ll \nu$. Essas são as três condições que devem ser observadas, ou seja, $\Delta \neq k\nu$ e $g \ll \Delta \ll \nu$.

Bibliografia

- [1] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [2] J. S. Bell, *Physica* **1**, 195 (1964).
- [3] A. Aspect *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91 (1982).
- [4] C. Monroe *et al*, *Science* **272**, 1131 (1996).
- [5] M. Brune *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4887 (1996).
- [6] W. H. Zurek, *Phys. Rev. D* **24**, 1516 (1981); A. Caldeira e A. J. Legget, *Physica A* **121**, 587 (1983); D. F. Walls e G. J. Milburn *Phys. Rev. A* **31**, 2403 (1985); E. Joos e H. D. Zeh, *Z. Physik B* **59**, 223 (1985); W. H. Zurek, *Phys. Today* **44**, 36 (1991).
- [7] M. O. Scully e M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press (1999); D. F. Walls e G. J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer-Verlag (1994).
- [8] M. Brune *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1800 (1996).
- [9] E. Hagley *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1 (1997); S. Osnaghi *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 037902 (2001).
- [10] A. Rauschenbeutel *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5166 (1999).
- [11] G. Nogues *et al*, *Nature (London)* **400**, 239 (1999).
- [12] A. Rauschenbeutel *et al*, *Science* **288**, 2024 (2000).
- [13] M. Mabuchi e A. Doherty, *Science* **298**, 1372 (2002).
- [14] H. M. Wiseman e G. J. Milburn, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 558 (1999).
- [15] D. Leibfried *et al*, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 281 (2003).
- [16] D. J. Wineland e H. G. Dehmelt, *Bull. Am. Phys. Soc.* **20**, 637 (1975).
- [17] W. Paul, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 531 (1990); P. K. Gosh, *Ion Traps*, Clarendon Oxford.
- [18] J. C. Bergquist *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1699 (1986).
- [19] J. I. Cirac e P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091 (1995).
- [20] D. M. Meekhof *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1796 (1996); Ch. Roos *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4713 (1999).
- [21] D. Leibfried *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4281 (1996).
- [22] C. Monroe *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4714 (1995); B. DeMarco *Phys. Rev. Lett.* **89**, 267901 (2002); F. Schmidt-Kaller *et al*, *Nature (London)* **422**, 408 (2003).
- [23] S. Gulde *et al*, *Nature (London)* **421**, 48 (2003); T. Shaetz *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 040405 (2004).
- [24] H. Häffner *et al*, *Appl. Phys. B* **81**, 151 (2005).
- [25] E. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932); K. E. Cahill e R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **177**, 1882 (1969).
- [26] G. S. Agarwal, *Phys. Rev. A* **24**, 2889 (1981).
- [27] M. Riebe *et al*, *Nature (London)* **429**, 734 (2004); M. D. Barrett *et al*, *Nature (London)* **429**, 737 (2004).

- [28] H. Zeng e F. Lin, *Phys. Rev. A* **50**, R3589 (1994); V. Bužek *et al*, *Phys. Rev. A* **56**, 2352 (1998); F. L. Semião *et al*, *Phys. Rev. A* **64**, 024305 (2001).
- [29] A. B. Mundt *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 103001 (2002).
- [30] J. I. Cirac *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3221 (1997).
- [31] C. H. Bennett *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).
- [32] S. Popescu, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 797 (1994).
- [33] F. L. Semião e A. Vidiella-Barranco, *Phys. Rev. A* **71**, 065802 (2005).
- [34] F. L. Semião, A. Vidiella-Barranco e J. A. Roversi, *Phys. Rev. A* **66**, 063403 (2002).
- [35] F. L. Semião e A. Vidiella-Barranco, *Phys. Rev. A* **72**, 064305 (2005).
- [36] I. L. Chuang e Y. Yamamoto, *Phys. Rev. A* **58**, 3489 (1995).
- [37] N. Imoto, H. A. Haus e Y. Yamamoto, *Phys. Rev. A* **32**, 2287 (1985).
- [38] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press.
- [39] F. L. Semião e A. Vidiella-Barranco. Submetido para publicação.
- [40] M. Plenio e F. L. Semião, *New J. Phys.* **7**, 73 (2005).
- [41] M. Plenio e V. Vedral, *Cont. Phys.* **39**, 431 (1998).
- [42] M. Plenio e P. L. Knight, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 101 (1998).
- [43] P. K. Gosh, *Ion Traps*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [44] E. T. Whittaker e G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press.
- [45] Dan E. Browne, *quant-ph 0507037*, Ph.D. Thesis, University of London 2004.
- [46] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall.
- [47] G. B. Arfken e H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press.
- [48] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc e G. Grynberg, *Photons and Atoms*, Wiley New York.
- [49] V. Bužek, A. Vidiella-Barranco, and P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **45**, 6570 (1992).
- [50] Wolfgang P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, Wiley-VCH.
- [51] R. P. Feynman, *Lectures on Physics Vol III*, Addison Wesley Longman.
- [52] S. J. Van Enk *et al*, *Phys. Rev. A* **64**, 022313 (2001); X. Wang, *Phys. Rev. A* **64**, 022302 (2001).
- [53] H. Jeong, *Phys. Rev. A* **64**, 052398 (2001); H. Jeong, *Phys. Rev. A* **65**, 042305 (2002).
- [54] C. Maurer *et al*, *New J. Phys.* **6**, 94 (2004).
- [55] N. Imoto *et al*, *Phys. Rev. A* **32**, 2287 (1985).
- [56] P. Grangier *et al*, *Nature (London)* **396**, 537 (1998).
- [57] G.M. D'Ariano *et al*, *Phys. Rev. A* **61**, 053817 (2000).
- [58] D. Vitali *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 445 (2000).
- [59] S. Pirandola *et al*, *Europhys. Lett.* **68**, 323 (2004).

- [60] K. Nemoto e W.J. Munro, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 250502 (2004).
- [61] S. D. Barrett *et al*, *Phys. Rev. A* **71**, 060302 (2005).
- [62] A. Imamoglu *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1467 (1999).
- [63] C. Ottaviani *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 197902 (2003).
- [64] K. Banaszek and K. Wódkiewicz, *Phys. Rev. A* **55**, 3117 (1997).
- [65] N. A. Gershenfeld and I. L. Chuang, *Science* **275**, 350 (1997).
- [66] E. Solano *et al*, *Phys. Rev. A* **64**, 024304 (2001).
- [67] F. L. Semião *et al*, *Phys. Lett. A* **299**, 423 (2002).
- [68] M.S. Zubairy *et al*, *Phys. Rev. A* **68**, 033820 (2003).
- [69] J. K. Pachos and P.L. Knight, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 107902 (2003).
- [70] C. F. Ross, *PhD thesis* Universidade de Innsbruck.
- [71] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963)
- [72] J. H. Eberly *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1323 (1980).
- [73] D. A. Cardimona, *Phys. Rev. A* **41**, 5016 (1990); H. L. Yoo e J. H. Eberly, *Phys. Rep.* **118** 239 (1985); J. Ph. Poizat *et al*, *Phys. Rev. A* **45**, 5171 (1992).
- [74] N. N. Bogolubov *et al*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **19**, 191 (1986); D. A. Cardimona *et al*, *Phys. Rev. A* **43**, 3710 (1991); M. A. Marchioli *et al*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 12275 (2003).
- [75] M. Tavis and F. W. Cummings, *Phys. Rev* **170**, 379 (1968); J. Dukelsky *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 050403 (2004); C. F. Lee e N. F. Johnson, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 083001 (2004).
- [76] C. V. Sukumar e B. Buck, *Phys. Lett. A* **83**, 211 (1981); R. R. Puri e R. K. Bullough, *J. Opt. Soc. Am. A* **5**, 2021 (1988); V Bartzis e N. Nayak, *J. Opt. Soc. Am. B* **8**, 1779 (1991); A. H. Toor e M. S. Zubairy, *Phys. Rev. A* **45**, 4951 (1992); Joshi e R. R. Puri, *Phys. Rev. A* **45**, 5056 (1992); C. J. Villas-Bôas *et al*, *Phys. Rev. A* **68**, 061801(R) (2003).
- [77] C. A. Blockley *et al*, *Europhys. Lett.* **17**, 509 (1992).
- [78] M. S. Zubairy *et al*, *Phys. Lett. A* **98**, 168 (1983), R. Loudon, *Opt. Commun.* **49**, 67 (1984).
- [79] M. S. Zubairy, *Phys. Lett. A* **87**, 162 (1982).
- [80] S. M. Dutra *et al*, *Phys. Rev. A* **49**, 1993 (1994); H. Moya-Cessa *et al*, *Phys. Rev. A* **59**, 2518 (1999).
- [81] D. P. DiVicenzo, *Fortschr. Phys.* **48**, 771 (2000).
- [82] M. Christand *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 187902 (2004).
- [83] M.B. Plenio *et al*, *New J. Phys.* **6**, 36 (2004).
- [84] J. Eisert e M. B. Plenio, *Int. J. Quant. Inf.* **1**, 479 (2003).
- [85] A. Ferraro *et al*, arXiv quant-ph 0503237.
- [86] R. Simon *et al*, *Phys. Rev. A* **49**, 1567 (1994).
- [87] V. Vedral *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2275 (1997).
- [88] C. H. Bennett *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 722 (1996).

- [89] V. Vedral e M. B. Plenio, *Phys. Rev. A* **57**, 1619 (1998).
- [90] G. Vidal e R. F. Werner, *Phys. Rev. A* **65**, 032314 (2002).
- [91] C. H. Bennett *et al*, *Phys. Rev. A* **54**, 3824 (1996).
- [92] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413 (1996).
- [93] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison Wesley Longman.
- [94] H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 1, Master Equations and Fokker-Planck Equations*, Springer.
- [95] H. G. Dehmelt, *Bull. Am. Phys. Soc.* **20**, 60 (1975).
- [96] J. S. Sandberg e H. G. Dehmelt, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2797 (1986).
- [97] X. Marek e V. Buzek, *J. Mod. Opt.* **49**, 1593 (2002).
- [98] A. V. Dodonov *et al*, *Phys. Rev. A* **76**, 023816 (2005)