Instituto de Física 'Gleb Wataghin' Universidade Estadual de Campinas

Dinâmica de um sistema átomo-campo eletromagnético acoplado a uma segunda cavidade

Dissertação de Mestrado

Aluna: Giovana Trevisan Nogueira Orientador: Prof. Dr. José Antônio Roversi

 $18~{\rm de}$ Dezembro de 2001

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA

BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

N689d	Nogueira, Giovana Trevisan Dinâmica de um sistema átomo-campo eletromagnético acoplado a uma segunda cavidade / Giovana Trevisan
	Nogueira Campinas, SP : [s.n.], 2001.
	Orientador: José Antonio Roversi.
	Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
	Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".
	1. Otica quântica. 2. Eletrodinâmica quântica.
	3. Fótons. 4. Dissipação de energia. I. Roversi, José
	Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas.
	Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao Roversi pela orientação desta dissertação e pelas valiosas sugestões. Aos membros do grupo de óptica quântica que de maneira direta ou indireta, ajudaram inúmeras vezes no aumento do meu conhecimento.

Meus agradecimentos aos professores Kyoko Furuya e Antônio Barranco pelos comentários valiosos no meu Seminário Pré-Requisito de Defesa de Tese.

Agradeço também as sugestões na minha defesa de tese feitas pelos professores Kyoko Furuya e Miled Moussa.

Em especial, gostaria de agradecer ao Daniel Tygel por algumas dicas que foram extremamente importantes para a conclusão desta dissertação.

Gostaria também de agradecer ao Júlio, meu marido, e a meus pais, Elena e José Candido pelo apoio e estímulo, sem os quais este trabalho não teria se concretizado.

Por fim, gostaria de agradecer ao CNPq pelo apoio financeiro.

Sumário

Re	esum	0	vii
Ał	ostra	ct	viii
In	trodu	ıção	1
1	Can	npo Eletromagnético Quantizado	4
	1.1	Teoria Potencial para o Campo Eletromagnético Clássico	5
	1.2	Campo Clássico Livre	7
	1.3	Oscilador Harmônico Quântico	9
	1.4	Quantização do Campo	10
	1.5	Hamiltoniano de Interação da Radiação com a Matéria	11
		1.5.1 Aproximação de dipolo elétrico	14
		1.5.2 A segunda quantização	15
		1.5.3 Átomo de dois níveis	17
		1.5.4 Hamiltoniano na representação de interação	18
		1.5.5 Evolução temporal	19
	1.6	Interação entre uma cavidade e um reservatório térmico	21
		1.6.1 Hipóteses sobre o reservatório	23
		1.6.2 Cálculo da equação mestra	24
	1.7	Modelo Jaynes-Cummings com dissipação	30
2	Aco	plamento entre Cavidades Ópticas	34
	2.1	Diagonalização de \hat{H}_{So} total \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots	36
		2.1.1 Comentários sobre a matriz de transformação M	37
	2.2	Diagonalização de \hat{H}_S na aproximação de ondas girantes \dots	39
		2.2.1 Transformação de variáveis	39
		2.2.2 Transformação de Base	40

	2.3	Evolução Temporal do Sistema	42
		2.3.1 Número médio de fótons nas cavidades	42
3	Aco	plamento entre Duas Cavidades e um Reservatório Térmic	o 44
	3.1	Dinâmica do Sistema Acoplado	46
4	Inte	ração entre Cavidades Ópticas e Átomos de Dois Níveis	52
	4.1	Evolução Temporal do Sistema	53
	4.2	Análise das Aproximações	55
	4.3	Propriedades do Sistema	56
		4.3.1 Inversão Atômica	59
		4.3.2 Número Médio de Fótons	66
		4.3.3 Pureza	69
5	Con	clusão	77
\mathbf{A}	Den	nostração Alternativa da Mudanca de Base Discutida no	
	Cap	ítulo 2	80
в	$\bar{n}_1(t)$) e $\bar{n}_2(t)$ para Cavidades Inicialmente em Estados Coer-	
	ente	es Deslocados	83

Lista de Figuras

1 2	Esquema de duas cavidades acopladas por meio de um "beam spliter" (BS) interagindo com um átomo, estudado em [1] Acoplamento de duas cavidades por meio de uma fibra óptica	2
2	conforme apresentado em [2]	2
1.1	Inversão atômica para um estado coerente com $\alpha=5.$	21
$1.2 \\ 1.3$	Domínio de Integração sobre t' e t'' $\dots \dots \dots \dots \dots \dots$ Número médio de fótons em função do tempo para $\Gamma/\omega = 0.05$,	26
1 /	temperatura do reservatório = 0 e $\langle \hat{n} \rangle (0) = 1$	29
1.4	da expressão (1.97), para $N = 20, g = 0, 1 \in \Gamma = 0, 5$	32
1.5	Numero medio de fotons em função do tempo, dado pela ex- pressão (1.98), para $N = 20, g = 0, 1 \in \Gamma = 0, 5. \ldots$	33
2.1	Determinante da matriz M em função de ω_1 para $\omega_2 = 2$ e	27
2.2	Determinante da matriz M em função de ω_2 para $\omega_1 = 2$ e	57
	$\lambda = 1. \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots $	38
3.1	Número médio de fótons em função do tempo para $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\Gamma/\omega = 0,01 \text{ e } \lambda/\omega = 0, 2$. Gráfico feito a partir das equações	
	(3.9) e (3.10)	50
3.2	Número médio de fótons em função do tempo para $\omega_1 = \omega_2 = \omega, \Gamma/\omega = 0,05$ e $\lambda/\omega = 0,1$. Gráfico feito a partir das equações	
	$(3.9) e (3.10). \dots \dots$	50
3.3	Número médio de fótons em função do tempo para $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\Gamma/\omega = 0,05$ e $\lambda/\omega = 0$. Neste caso, os números médios de	
	fótons iniciais nas cavidades foram $\bar{n}_1(0) = 2 e \bar{n}_2(0) = 1$	51

3.4	Número médio de fótons em função do tempo para $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\Gamma/\omega = 0,05$ e $\lambda/\omega = 0$. Neste caso, os números médios de fótons iniciais nas cavidades foram $\bar{n}_1(0) = \bar{n}_2(0) = 1. \ldots$	51
4.1	Distribuição Binomial, com $p^2 = q^2 = \frac{1}{2}$, e distribuição Poisson ambas para $\bar{n} = 10$	57
4.2	Inversão atômica em função do tempo para as duas cavidades	<u> </u>
4.3	Inicialmente preparadas no estado de vacuo	60
4.4	cavidade 2 no estado de vácuo	61
4.5	dade 2 no estado de vácuo	62
4.6	coerente com $\alpha = 3$	63
4.7	$n_{th} = 0, 5$ e a cavidade 2 no estado de número com 20 fótons Inversão atômica para o modelo J-C convencional, com a cavidade inicialmente preparada em uma mistura estatística térmica	64
4.8	com $n_{th} = 0, 5.$	65
4.9	e a cavidade 2 no estado de vácuo	67
4.10	erente com $\alpha = 3$ e a cavidade 2 no estado de vácuo Soma do número médio de fótons em função do tempo das duas cavidades com a cavidade 1 inicialmente preparada no	68
4 1 1	estado de número com 20 fótons e a cavidade 2 no estado de vácuo.	68
4.11	Parametro $\xi_1 \in \xi_2$ para as cavidades em função do tempo, con- siderando a cavidade 1 e a cavidade 2 inicialmente preparadas no estado de vácuo	71

4.12	Parâmetro ξ_a para o átomo em função do tempo considerando	
	a cavidade 1 e a cavidade 2 inicialmente preparadas no estado	
	de vácuo.	72
4.13	Parâmetro ξ_1 para a cavidade 1 e ξ_a para o átomo em função	
	do tempo, com a cavidade 1 inicialmente preparada em um	
	estado de número com $n_1 = 20$ e a cavidade 2 no estado de	
	vácuo	72
4.14	Parâmetro ξ_2 para a cavidade 2 em função do tempo. A cavi-	
	dade 1 foi inicialmente preparada em um estado de número	
	com $n_1 = 20$ e a cavidade 2 no estado de vácuo	73
4.15	Parâmetro ξ_1 para a cavidade 1 e ξ_a para o átomo em função do	
	tempo considerando as cavidades $1 e 2$ inicialmente preparadas	
	em uma mistura estatística térmica, com $n_{th} = 0, 5$, e no es-	
	tado de vácuo, respectivamente	74
4.16	Parâmetro ξ_2 para a cavidade 2 considerando as cavidades 1 e	
	2 inicialmente preparadas em uma mistura estatística térmica,	
	com $n_{th} = 0, 5$, e no estado de vácuo, respectivamente	75
4.17	Parâmetro ξ_1 para a cavidade 1 e ξ_a para o átomo em função do	
	tempo considerando as cavidades $1 e 2$ inicialmente preparadas	
	em uma mistura estatística térmica, com $n_{th} = 0, 5$, e estado	
	de número com $n_2 = 20. \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	75
4.18	Parâmetro ξ_2 para a cavidade 2 em função do tempo con-	
	siderando as cavidades 1 e 2 inicialmente preparadas em uma	
	mistura estatística térmica, com $n_{th} = 0, 5$, e estado de número	
	$\operatorname{com} n_2 = 20. \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots $	76

Resumo

Neste trabalho, estudamos alguns aspectos dinâmicos de um sistema formado por duas cavidades acopladas interagindo com um átomo de dois níveis, baseando-nos no modelo Jaynes-Cummings para a interação átomo-campo e no trabalho de Hashem Zoubi *et al.* [3], sobre cavidades acopladas.

Inicialmento apresentamos uma discussão sobre o limite de validade das transformações utilizadas por Hashem Zoubi *et al.* na diagonalização do Hamiltoniano das cavidades. Baseando-se nas conclusões deste estudo, foi proposto um Hamiltoniano aproximado para o sistema em consideração. Conseguimos uma transformação para os operadores de criação e aniquilação mais simples, que diagonaliza o Hamiltoniano do sistema e permite o cálculo dos autoestados que são utilizados no cálculo das propriedades dinâmicas do sistema átomo-cavidade acoplado a outra cavidade.

Em conseqüência da simplicidade do tratamento dado, pudemos calcular o comportamento, em função do tempo, da inversão atômica, do número médio de fótons e da pureza do sistema. Pudemos também comparar os resultados com o que acontece no sistema átomo-campo de uma cavidade. Observamos o aparecimento do fenômeno de colapso e ressurgimento na inversão atômica, porém não no número médio de fótons, em situações para as quais este fenômeno não acontece no sistema átomo-campo de uma cavidade. Observamos também que o sistema átomo-campo de duas cavidades tende a um grau de mistura muito maior do que no caso de uma cavidade em situações semelhantes.

Abstract

In this work, we study some dynamical aspects of a system composed by two coupled cavities interacting with a two-level atom, based in the Jaynes-Cummings model of the atom-field interaction and in the Hashem Zoubi *et al.*'s work [3] about coupled cavities.

Initialy, we show a discussion about the validity of the transformation used by Hashem Zoubi *et al.* in the diagonalization of the Hamiltonian of the cavities. Using the conclusions of this study, we propose an approximated Hamiltonian for this system. We obtain a simpler transformation to the creation and annihilation operators that diagonalizes the Hamiltonian of the system and allows us to calculate the eigenstates used in the calculation of the dynamical properties of the atom-field system with two cavities.

Due to the simplicity of this method, we could calculate the behaviour as a function of the time of the atomic inversion, the mean number of photons and the purity of the system. We could also compare the obtained results with what happens in the atom-field system of one cavity. We notice the quantum collapse and revival in the atomic inversion, but not to the mean number of photons, in situations where this phenomenum doesn't happen in the one-cavity system. We also notice that in the atom-field system with two cavities tends to a larger degree of mixture than the case of one cavity in similar conditions.

Introdução

Na teoria clássica de transmissão de sinais ópticos, encontramos dois tipos de situações onde ocorre o acoplamento entre o campo de duas guias de ondas dielétricas distintas [4]. Uma delas acontece devido à imperfeições na geometria das guias ou por inomogeneidade do respectivo dielétrico. A onda de uma guia pode ser espalhada devido a uma dessas imperfeições para todo o espaço que a rodeia. Se uma segunda guia imperfeita for colocada dentro deste campo espalhado, pode ocorrer o acoplamento entre algum modo desta guia com este campo espalhado.

Uma outra situação onde ocorre o acoplamento é quando duas guias de onda são colocadas lado a lado e uma onda evanescente que sai de uma guia, alcança a outra e provoca uma oscilação em um determinado modo nesta última guia. Estes métodos são estudados desde 1954 [5] e despertam interesse até hoje [6].

Entretando, existem na literatura propostas de acoplamentos entre campos de sistemas quânticos, tais como microcavidades em estruturas dielétricas ou cavidades quânticas, onde o mecanismo de acoplamento pode ocorrer de modo análogo ao clássico. Em [7], Metod Skarja *et al.* propõem um sistema composto por uma cavidade retangular dividida por uma parede dielétrica em duas cavidades fracamente acopladas. Em [8] Yong Xu *et al.* propõem um sistema de várias microcavidades acopladas a uma guia de onda.

Com o objetivo de estudar a dinâmica do acoplamento dos campos eletromagnéticos de duas cavidades ópticas, apresentamos dois sistemas diferentes onde uma das cavidades interage com um terceiro elemento. O primeiro caso estudado foi baseado no trabalho de Hashem Zoubi *et al.* [3] onde uma das cavidades interage também com um reservatório térmico. Neste trabalho os autores primeiramente propõem uma transformação que diagonaliza o Hamiltoniano do sistema formado apenas pelas cavidades. Com o Hamiltoniano diagonalizado, o sistema é tratado como se fossem duas cavidades independentes acopladas ao mesmo reservatório.

Seguindo este mesmo caminho, propomos um modelo para estudar o caso onde o campo de uma das cavidades interage com um átomo de dois níveis, podendo ser um átomo em passagem ou mesmo fixo no centro da cavidade. Entretanto, devido à complexidade do sistema utilizamos o Hamiltoniano das cavidades na aproximação de ondas girantes, conforme apresentado na referência [1]. As figuras 1 e 2, extraidas de [1] e de [2], apresentam dois arranjos deste tipo de sistema. Na primeira, uma cavidade é dividida em duas partes iguais por um espelho semi-transparente e em um dos lados é colocado um átomo. No segundo caso, duas cavidades independentes, com átomos em seu interior, são ligadas por meio de uma fibra óptica.



Figura 1: Esquema de duas cavidades acopladas por meio de um "beam spliter" (BS) interagindo com um átomo, estudado em [1].



Figura 2: Acoplamento de duas cavidades por meio de uma fibra óptica, conforme apresentado em [2].

Com este objetivo, apresentamos no Capítulo 1 a teoria de quantização do campo eletromagnético e sua interação com um átomo de dois níveis [9] e com o ambiente externo [10] para termos suporte teórico na análise dos sistemas propostos.

O estudo do sistema de duas cavidades interagentes é feito no Capítulo 2. Apresentamos a diagonalização do Hamiltoniano referente às cavidades com e sem a aproximação de ondas girantes, discutindo as vantagens e desvantagens destas duas abordagens. Os resultados apresentados são utilizados no Capítulo 3 para estudar o sistema formado pelas cavidades e o reservatório, transformando um problema de dois osciladores harmônicos acoplados em dois osciladores independentes, ambos interagindo com o reservatório térmico. Desta forma, o problema em questão é desmembrado em dois problemas independentes de uma cavidade interagindo com um reservatório térmico.

No Capítulo 4 discutimos o caso de duas cavidades acopladas com uma delas tendo um átomo de dois níveis. Neste caso também utilizamos os resultados do Capítulo 2 para "separar" as cavidades. Para efeito de comparação, calculamos a evolução temporal do número médio de fótons nas cavidades, inversão atômica e pureza do sistema. Um resultado interessante encontrado foi que, se ambas as cavidades forem preparadas em estados de número, o sistema átomo-campo apresenta o fenômeno de colapso e ressurgimento na inversão atômica. Nota-se que isto não ocorre no caso do sistema átomocampo de uma única cavidade, mesmo se esta cavidade interagir com um reservatório térmico.

Finalmente no Capítulo 5 discutimos os resultados obtidos neste trabalho e perspectivas futuras, entre elas a generalização para mais de 2 cavidades acopladas por meio de beam splitters.

Capítulo 1

Campo Eletromagnético Quantizado

A teoria clássica e a teoria quântica da radiação eletromagnética possuem algumas similaridades. Apesar dos campos de radiação serem tratados como quantidades algébricas no primeiro caso e como operadores no segundo, ambas as teorias são baseadas nas equações de Maxwell, as quais, em um meio não magnético, possuem a forma:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_o \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}, \qquad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_o} \sigma, \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \tag{1.4}$$

onde μ_o e ϵ_o são a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do vácuo. E é o campo elétrico e H o campo magnético. J e σ são respectivamente a densidade de corrente e a densidade de carga, relacionadas pela equação de continuidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0. \tag{1.5}$$

A transição da teoria clássica para a quântica pode ser mais facilmente feita se as equações clássicas forem colocadas primeiro em uma forma sugestiva, utilizando-se os potenciais vetorial e escalar.

1.1 Teoria Potencial para o Campo Eletromagnético Clássico

A quarta das equações de Maxwell (1.4) é satisfeita se **H** puder ser escrito em função de um potencial vetor **A** tal que:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mu_o \mathbf{H}.\tag{1.6}$$

Da mesma forma, a primeira das equações de Maxwell (1.1) é satisfeita se um potencial escalar ϕ puder ser definido de modo que:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$
 (1.7)

Utilizando-se as equações de Maxwell e estas definições, encontram-se duas novas relações que determinam estes potenciais:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_o \mathbf{J}, \qquad (1.8)$$

$$-\epsilon_o \nabla^2 \phi - \epsilon_o \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \sigma.$$
(1.9)

Se $\mathbf{A} e \phi$ forem conhecidos, os campos $\mathbf{E} e \mathbf{H}$ são determinados. Entretanto, as definições apresentadas para estes potenciais não especificam completamente a forma deles. Pode-se encontrar mais que um potencial vetor ou escalar que produzem os mesmos campos $\mathbf{E} e \mathbf{H}$. Os outros potenciais $\mathbf{A} e \phi$ que podem ser utilizados para obter os mesmos campos são encontrados através de certas regras, denominadas de transformações de calibre, dadas por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathbf{o}} - \nabla \Xi, \qquad (1.10)$$
$$\phi = \phi_o + \frac{\partial \Xi}{\partial t},$$

onde Ξ é uma função arbitrária que depende de **r** e de *t*. Algumas condições especiais podem ainda serem atribuídas a **A** e ϕ de modo que estes obedeçam as transformações apresentadas. Estas condições são chamadas de calibre e os campos **E** e **H** são invariantes em relação à sua escolha.

Para a quantização do campo eletromagético é conveniente adotar o calibre de Coulomb, dado por:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0,$$

podendo ser verificado que esta relação obedece as equações (1.10).

Junto com esta escolha, o teorema de Helmoltz [11] pode ser utilizado para simplificar as equações (1.8) e (1.9). Este teorema diz que qualquer vetor pode ser decomposto em duas partes, uma com divergente nulo (componente transversal) e outra com o rotacional nulo (componente longitudinal). Para o vetor densidade de corrente:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\mathbf{L}} + \mathbf{J}_{\mathbf{T}}, \quad \text{onde:} \quad \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{T}} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{J}_{\mathbf{L}} = 0. \end{array}$$
(1.11)

Pelas equações (1.5) e (1.9) temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \longrightarrow \mathbf{J}_{\mathbf{L}} = \epsilon_o \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Desta forma, as equações (1.8) e (1.9) ficam:

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_o \mathbf{J}_{\mathbf{T}}, \qquad (1.12)$$

$$-\epsilon_o \nabla^2 \phi = \sigma. \tag{1.13}$$

O vetor campo elétrico \mathbf{E} pode também ser dividido nas duas componentes, de maneira análoga feita a \mathbf{J} . De acordo com a equação (1.7), estas duas componentes obedecem a:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathbf{L}} + \mathbf{E}_{\mathbf{T}},\tag{1.14}$$

onde

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{T}} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_{\mathbf{L}} &= 0 \end{aligned} \implies \begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{T}} &= -\partial \mathbf{A} / \partial t, \\ \mathbf{E}_{\mathbf{L}} &= -\nabla \phi. \end{aligned}$$
 (1.15)

O campo magnético é inteiramente transversal.

A grande vantagem do calibre de Coulomb é que ele permite a separação das componentes das equações de Maxwell em duas partes distintas: uma com as componentes longitudinais e outra com as componentes transversais:

$$\nabla \times \mathbf{E}_{\mathbf{T}} = -\mu_o \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \epsilon_o \frac{\partial E_T}{\partial t} + \mathbf{J}_{\mathbf{T}}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{T}} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{L}} &= \frac{1}{\epsilon_o} \sigma. \end{aligned}$$

A equação de continuidade assume a forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \implies \nabla \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{L}} + \epsilon_o \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{L}}}{\partial t} = 0 \qquad (1.17)$$

$$\implies \mathbf{J}_{\mathbf{L}} = -\epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}_{\mathbf{L}}}{\partial t}.$$
 (1.18)

1.2 Campo Clássico Livre

A quantização do campo eletromagnético livre se processa pela troca do vetor potencial clássico \mathbf{A} pelo operador $\hat{\mathbf{A}}$. Esta transição ocorre mais facilmente se o potencial vetor estiver em uma forma mais conveniente.

Consideramos, então, uma região cúbica no espaço de lado L com algum contorno real. Esta região está nas condições de espaço livre, onde:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{T}} = \mathbf{0}.\tag{1.19}$$

O potencial vetor na cavidade pode ser expandido em série de Fourier:

$$\mathbf{A} = \sum_{k} \{ \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^{*}(t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \},$$
(1.20)

onde as componentes do vetor de onda \mathbf{k} assumem, devido as condições de contorno nos limites da cavidade, os seguintes valores:

$$k_x = \frac{2\pi\nu_x}{L}, \ \nu_x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$k_y = \frac{2\pi\nu_y}{L}, \ \nu_y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$k_z = \frac{2\pi\nu_z}{L}, \ \nu_z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

O calibre de Coulomb é satisfeito se

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*(t) = 0.$$

Todas as componentes de \mathbf{A} obedecem a equação (1.12), a qual se torna, impondo-se (1.19):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + \omega_k^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0, \qquad (1.21)$$

que também é válida para $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*$, onde $\omega_k^2 = ck$.

Esta equação assemelha-se a de um oscilador harmônico. A quantização do campo é feita de modo a converter esta equação em uma de um oscilador harmônico quântico. Para isso, devemos expressar o oscilador clássico em termos de uma posição efetiva e momento associados com o modo da cavidade.

Resolvendo-se a equação (1.21), o potencial vetor completo pode ser expresso como:

$$\mathbf{A} = \sum_{k} \{ \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \exp(-i\omega_{k}t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^{*} \exp(i\omega_{k}t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \}, \qquad (1.22)$$

Pelas equações (1.16) e (1.21), encontra-se as expressões para os campos elétrico e magnético associados com o modo k:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = i\omega_k \left\{ \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \exp(-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* \exp(i\omega_k t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right\}, \quad (1.23)$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}} = \frac{i}{\mu_o} \mathbf{k} \times \{ \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \exp(-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* \exp(i\omega_k t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \}.$$
(1.24)

A energia média contida em um único modo k é dada por:

$$\bar{U}_{k} = \frac{1}{2} \int_{cavidade} \left(\epsilon_{o} \overline{\mathbf{E}_{k}^{2}} + \mu_{o} \overline{\mathbf{H}_{k}^{2}} \right) dV.$$
(1.25)

Para uma onda eletromagnética, as amplitudes $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ são relacionadas por:

$$E_k = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} H_k.$$

Substituindo as equações (1.23) e (1.24) em (1.25) e evoluindo a média temporal, temos:

$$\bar{U}_k = 2\epsilon_o L^3 \omega_k^2 \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{A}_k^*.$$
(1.26)

Os modos de vibração $\mathbf{A}_{\mathbf{k}} \in \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*$ podem ser escritos em termos de uma coordenada generalizada Q_k e de seu momento conjugado P_k , através das trasformações:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \sqrt{4\epsilon_o L^3 \omega_k^2} \left(\omega_k Q_k + i P_k \right) \epsilon_{\mathbf{k}}, \qquad (1.27)$$
$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* = \sqrt{4\epsilon_o L^3 \omega_k^2} \left(\omega_k Q_k - i P_k \right) \epsilon_{\mathbf{k}}.$$

As quantidades $Q_k \in P_k$ são escalares e as propriedades vetoriais de $\mathbf{A}_k \in \mathbf{A}_k^*$ foram separadas pela introdução do vetor polarização unitário ϵ_k .

Com estas transformações, a energia média assume a forma:

$$\bar{U}_k = \frac{1}{2} \left(P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2 \right) = H.$$
 (1.28)

Esta é a expressão da energia média de um oscilador harmônico de massa unitária ou, equivalentemente, o Hamiltoniano para este oscilador.

1.3 Oscilador Harmônico Quântico

É conveniente desenvolver agora a teoria do oscilador harmônico quântico na forma mais adequada para a quantização do campo.

O Hamiltoniano quântico para um oscilador harmônico unidimensional de massa unitária e freqüência ω é:

$$H = \frac{1}{2}(\hat{P}^2 + \omega^2 \hat{X}^2), \qquad (1.29)$$

onde \hat{P} e \hat{X} são respectivamente os operadores momento e posição, e obedecem à relação de comutação:

$$\left[\hat{X},\hat{P}\right]=i\hbar,$$

Como H não depende do tempo, o problema se reduz a resolver a equação de autovalores:

$$H|\Psi_n\rangle = E_n|\Psi_n\rangle.$$

Na representação de coordenadas, as soluções desta equação são dadas em termos dos polinômios de Hermite H_n , com autovalores discretos [11]:

$$\Psi_n(x) = H_n\left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x\right) \exp\left(-\frac{\omega}{2\hbar}x^2\right)$$
$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

É, no entanto, mais conveniente trabalharmos no âmbito da segunda quantização, onde uma transformação leva os operadores $\hat{P} \in \hat{X}$ nos operadores de criação \hat{a}^{\dagger} e de destruição \hat{a} , definidos por:

$$\hat{a}^{\dagger} = (2\hbar\omega)^{-1/2} (\omega \hat{X} - i\hat{P}), \qquad (1.30)$$
$$\hat{a} = (2\hbar\omega)^{-1/2} (\omega \hat{X} + i\hat{P}).$$

A definição destes operadores é extremamente útil apesar deles não serem hermitianos e, portanto, não representarem observáveis do oscilador.

O Hamiltoniano (1.29) pode ser escrito em termos dos operadores de criação e aniquilação, resultando em:

$$H = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right), \qquad (1.31)$$

onde $\hat{n} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ é chamado de operador de número. Existe na literatura algumas propostas de geração dos autoestados de H (estados de Fock) como por exemplo a proposta no artigo [12].

Algumas propriedades de \hat{n} , $\hat{a}^{\dagger} \in \hat{a}$ estão listadas abaixo e suas demonstrações podem ser encontradas em [11]:

- 1) Os autovalores de \hat{n} são sempre positivos;
- 2) Se $|n\rangle$ é um autovetor de \hat{n} , então:

$$\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle,$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle;$$

3) Obedecem às seguintes regras de comutação:

$$\begin{bmatrix} \hat{a}, \hat{a}^{\dagger} \end{bmatrix} = 1, \\ \begin{bmatrix} \hat{n}, \hat{a}^{\dagger} \end{bmatrix} = \hat{a}^{\dagger}, \\ \begin{bmatrix} \hat{n}, \hat{a} \end{bmatrix} = -\hat{a};$$

1.4 Quantização do Campo

O campo é agora quantizado pela associação de um oscilador harmônico quântico com cada modo k do campo de radiação. Assim, $\hat{a}_k \in \hat{a}_k^{\dagger}$ são operadores que criam e aniquilam um fóton do vetor de onda **k** na cavidade. O número de fótons na cavidade associados ao modo k é determinado pelo autovalor do operador de número $\hat{n}_k = \hat{a}_k^{\dagger} \hat{a}_k$.

 $\mathbf{A_k} \in \mathbf{A_k^*}$ são quantizados expressando $Q_k \in P_k$ em termos de $\hat{a}_k \in \hat{a}_k^{\dagger}$, conforme as equações (1.30) para o oscilador harmônico, trocando-se Q_k por

 $\hat{X} \in P_k$ por \hat{P} . Desta forma, o potencial vetor **A** e os campos **E** e **H** assumem as seguintes formas:

$$\mathbf{A} = \sum_{k} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_o L^3 \omega_k}} \Big\{ \hat{a}_k \exp(-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \hat{a}_k^{\dagger} \exp(i\omega_k t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \Big\} \epsilon_{\mathbf{k}} \quad (1.32)$$

$$\mathbf{E} = i \sum_{k} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_o L^3}} \left\{ \hat{a}_k \exp(-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \hat{a}_k^{\dagger} \exp(i\omega_k t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right\} \epsilon_{\mathbf{k}} \quad (1.33)$$

$$\mathbf{H} = i \sum_{k} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\mu_o L^3 \omega_k}} \Big\{ \hat{a}_k \exp(-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \hat{a}_k^{\dagger} \exp(i\omega_k t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \Big\} \mathbf{k} \times \epsilon_{\mathbf{k}}$$
(1.34)

O Hamiltoniano para o campo eletromagnético total é a soma sobre todos os modos da equação (1.31), dado por:

$$\hat{H}_R = \sum_k \hbar \omega_k (\hat{n}_k + 1/2),$$
 (1.35)

ou de forma equivalente:

$$\bar{H}_{R} = \frac{1}{2} \int (\epsilon_{o} \hat{E}_{k}^{2} + \mu_{o} \hat{H}_{k}^{2}) dV.$$
(1.36)

1.5 Hamiltoniano de Interação da Radiação com a Matéria

É conveniente começar a discussão com o caso clássico e em seguida passar para o caso quântico através da conversão do Hamiltoniano clássico para o quântico. Deve-se resolver as equações (1.12) e (1.13) na presença de uma densidade de carga σ e de uma corrente **J** não nulas.

A densidade de carga e de corrente são caracterizadas pelas cargas dos elétrons e do núcleo de algum átomo. Aqui é assumido que o átomo é suficientemente massivo de forma a permanecer estacionário na origem. Se \mathbf{r}_{j} é a posição do *j*-ésimo elétron e Z o número total de elétrons, as densidades de carga e de corrente são dadas por:

$$\sigma = -\sum_{j} e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}) + Ze\delta(0) \qquad (1.37)$$
$$\mathbf{J} = -\sum_{j} e\dot{\mathbf{r}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j}),$$

onde e é o módulo da carga do elétron e o ponto sobre o vetor **r** denota derivada temporal.

Nessas condições, o Hamiltoniano do sistema átomo-campo, no calibre de Coulomb, é dado por [9]:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \sum_{j} \left(p_j^2 + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_j) \right)^2 + \frac{1}{2} \int (\epsilon_o \mathbf{E}_T^2 + \mu \mathbf{H}^2) dV - \frac{1}{2} \epsilon_o \int \mathbf{E}_L^2 dV + \int \sigma \phi dV,$$
(1.38)

que é chamado de Hamiltoniano de acoplamento mínimo, pois não leva em consideração efeitos relativísticos, acoplamento spin-órbita, etc.

O primeiro termo representa a energia cinética dos elétrons e sua interação com o campo \mathbf{A} , o segundo a energia do campo e os dois últimos a energia potencial estática dos elétrons e do núcleo.

Este Hamiltoniano deve ser representado em termos de \mathbf{H} e \mathbf{E} em vez de \mathbf{A} . Considere primeiramente a energia potencial V de um átomo colocado em um campo externo \mathbf{E}_T . Igualando-se a contribuição coulombiana entre as cargas, esta energia é escrita como:

$$V = \sum_{j} e \int_{0}^{\mathbf{r}_{j}} \mathbf{E}_{T} \cdot \mathbf{dr}.$$

Expandindo o campo em série de Taylor, a expressão para V fica:

$$V = \sum_{j} \left\{ 1 + \frac{1}{2!} (\mathbf{r} \cdot \nabla) + \frac{1}{3!} (\mathbf{r} \cdot \nabla)^{2} \dots \right\} \mathbf{E}_{T}(0)$$
(1.39)
$$\equiv e \sum_{j} \frac{\exp(\mathbf{r} \cdot \nabla) - 1}{\mathbf{r} \cdot \nabla} \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{T}(0),$$

onde o operador ∇ atua somente em $\mathbf{E}_T(\mathbf{r})$, e \mathbf{r} é igual a zero depois da diferenciação ter sido feita.

O potencial pode também ser escrito sob a forma:

$$V = \int \mathbf{E}_T(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) dV, \qquad (1.40)$$

onde $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ é a polarização do átomo, expressa como uma expanção de multipolo dada por:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = e \sum_{j} \mathbf{r}_{j} \left\{ 1 - \frac{1}{2!} (\mathbf{r} \cdot \nabla) + \frac{1}{3!} (\mathbf{r} \cdot \nabla)^{2} - \ldots \right\} \delta(\mathbf{r})$$

A expansão (1.40) tem um termo proporcional ao momento de dipolo atômico:

$$e\mathbf{D} = \sum_{j} e\mathbf{r}_{j},$$

enquanto que o segundo termo é proporcional ao momento octupolo, e assim por diante.

Retornando agora ao Hamiltoniano da equação (1.38), a parte de interação pode ser escrita na forma de (1.39), utilizando uma transformação de calibre mostrada nas equações (1.10), onde a função de calibre é:

$$\Xi = \frac{1}{e} \int \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) dV, \qquad (1.41)$$

que é uma função das coordenadas de todos os elétrons \mathbf{r}_j . De acordo com (1.10), o novo potencial é:

$$\phi(\mathbf{r}_j) + \dot{\Xi}_j = \phi(\mathbf{r}_j) - \frac{\exp\left(\mathbf{r}_j \cdot \nabla\right) - 1}{\mathbf{r}_j \cdot \nabla} \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{E}_T(0), \qquad (1.42)$$

onde Ξ_j é a parte de Ξ que depende de \mathbf{r}_j .

O vetor potencial transformado em \mathbf{r}_j devido às equações (1.10) e (1.41) é:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_j) - \nabla_j \Xi = \mathbf{A}(\mathbf{r}_j) - \frac{1}{e} \nabla_j \int \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) dV.$$
(1.43)

Utilizando a equação (1.39) e expandindo o vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}_j)$ em série de Taylor, a equação (1.43) pode ser reproduzida resultando em:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_j) - \nabla_j \Xi = \mu_o \left\{ \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} (\mathbf{r}_j \cdot \nabla)^2 + \dots \right\} \mathbf{r}_j \times \mathbf{H}(0)$$
(1.44)

$$= \mu_o \frac{\exp\left(\mathbf{r}_j \cdot \nabla\right) \left(\mathbf{r}_j \cdot \nabla - 1\right) + 1}{\left(\mathbf{r}_j \cdot \nabla\right)^2} \mathbf{H}(0) \times \mathbf{r}_j, \quad (1.45)$$

Notando-se que:

$$\frac{1}{2}\epsilon_o \int \mathbf{E}_L^2 dV = \frac{1}{2}\epsilon_o \int (\nabla\phi)^2 dV = -\frac{1}{2}\epsilon_o \int \phi \nabla^2 \phi dV = \frac{1}{2}\int \sigma \phi dV$$

e utilizando a transformação de calibre apresentada, o Hamiltoniano da equação (1.38) é reescrito na forma:

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{j} \left\{ \mathbf{p}_{j} + e\mu_{o} \frac{\exp\left(\mathbf{r}_{j} \cdot \nabla\right) \left(\mathbf{r}_{j} \cdot \nabla - 1\right) + 1}{\left(\mathbf{r}_{j} \cdot \nabla\right)^{2}} \mathbf{H}(0) \times \mathbf{r}_{j} \right\}^{2} + \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_{o} \mathbf{E}_{T}^{2} + \mu_{o} \mathbf{H}^{2}\right) dV + \frac{1}{2} \int \sigma \phi dV + \frac{1}{2} \int$$

1.5.1 Aproximação de dipolo elétrico

É conveniente expandir as exponenciais lembrando que \mathbf{r}_j tem magnitude da ordem do raio de Bohr a_o e que o operador ∇ atuando em \mathbf{H} ou \mathbf{E}_T é da ordem do vetor de onda \mathbf{k} . Pela aproximação de dipolo elétrico, onde $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j \ll 1$, os sucessivos termos dessa expansão se anulam rapidamente.

Nesta aproximação e convertendo os vetores \mathbf{p}_j , $\mathbf{H} \in \mathbf{E}_T$ nos correspondentes operadores da mecânica quântica, o Hamiltoniano pode ser escrito como:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_R + \hat{H}_I,$$

onde \hat{H}_A é o Hamiltoniano do átomo isolado , dado por

$$\hat{H}_A = \sum_j \frac{\hat{\mathbf{p}}_j}{2m} + \frac{1}{2} \int \sigma \phi dV,$$

 \hat{H}_R é o Hamiltoniano do campo de radiação livre, dado por

$$\hat{H}_R = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_o \mathbf{E}_L^2 + \mu_o \mathbf{H}^2 \right) dV,$$

e \hat{H}_I é o Hamiltoniano de interação que contém quatro partes:

$$\hat{H}_I = \hat{H}_{ED} + \hat{H}_{EQ} + \hat{H}_{MD} + \hat{H}_{NL},$$

as quais são respectivamente a interação de dipolo elétrico, quadrupolo elétrico, dipolo magnético e um termo não linear proporcional ao quadrado do campo magnético $\hat{\mathbf{H}}(0)$, e são dados por:

$$\hat{H}_{ED} = e \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{T}(0), \hat{H}_{EQ} = -(\nabla \cdot \mathbf{Q}) \cdot \hat{\mathbf{E}}_{T}(0),$$

$$\hat{H}_{EQ} = \frac{e\mu_o}{2m}\hat{\mathbf{H}}(0) \cdot \mathbf{M},$$

$$\hat{H}_{NL} = \frac{e^2\mu_o^2}{8m}\sum_j \left(\mathbf{H}(0) \times \mathbf{r}_j\right)^2,$$

onde $\mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j$ é o momento angular total do átomo.

 \hat{H}_{NL} é chamado de termo diamagnético e será desprezado por corresponder a processos não lineares.

A ordem de magnitude dos outros três termos de Hamiltoniano de interação podem ser comparados, considerando-se que $|\mathbf{r}_j| \approx a_o$, **M** tem a magnitude de $\hbar \in \nabla \cdot \hat{\mathbf{E}}(0)$ tem a magnitude de $kE_T(0)$:

$$\hat{H}_{DE} \approx E_T(0)4\pi\epsilon_o\hbar^2/me,
\hat{H}_{EQ} \approx E_T(0)3e\hbar/16mc,
\hat{H}_{MD} \approx H(0)\mu_oe\hbar/2m,$$

ou seja

$$\frac{\hat{H}_{EQ}}{\hat{H}_{DE}} \approx \frac{\hat{H}_{MD}}{\hat{H}_{DE}} \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o\hbar c} \approx \frac{1}{137} = \text{cte. de estrutura fina},$$

significando que em ordem mais baixa, quando estiver presente a interação de dipolo, as outras interações são negligenciáveis. Por tanto, simplificamos o Hamiltoniano (1.46), fazendo $\hat{H}_I \approx \hat{H}_{ED}$, resutando em :

$$H = \sum_{j} \frac{\mathbf{p}_{j}}{2m} + \frac{1}{2} \int \sigma \phi dV + \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_{o} \mathbf{E}_{T}^{2} + \mu_{o} \mathbf{H}^{2}\right) dV + e \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_{T} \qquad (1.47)$$

Este Hamiltoniano também é chamado de aproximação de dipolo elétrico. Esta aproximação é válida para funções ϕ 's de elétrons localizados próximos ao núcleo, onde $|\mathbf{r}_j| \approx a_o$, caso contrário, a expansão dipolar deverá incluir mais termos.

1.5.2 A segunda quantização

A parte da radiação do Hamiltoniano da equação (1.47) pode ser escrita em termos dos operadores de criação e aniquilação se os resultados apresentados em 1.4, para **E** e **H** forem usados:

$$\mathbf{H}_{k} = \sum_{k} \sqrt{\frac{-\hbar c^{2}}{2\mu_{o}V\omega_{k}}} \left\{ \hat{a}_{k} \exp\left(-i\omega_{k}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right) - \hat{a}_{k}^{\dagger} \exp\left(i\omega_{k}t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right) \right\} \mathbf{k} \times \epsilon_{k},$$
$$\mathbf{E}_{k} = \sum_{k} \sqrt{\frac{-\hbar\omega_{k}}{2\epsilon_{o}V}} \left\{ \hat{a}_{k} \exp\left(-i\omega_{k}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right) - \hat{a}_{k}^{\dagger} \exp\left(i\omega_{k}t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right) \right\} \epsilon_{k}.$$
(1.48)

Desta forma, a parte do Hamiltoniano referente à radiação fica:

$$\hat{H}_R = \sum_k \hbar \omega_k \left(\hat{a}_k^{\dagger} \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right).$$
(1.49)

Considere o Hamiltoniano atômico \hat{H}_A e sej
a $|i\rangle$ seu autoestado com o autovalor $\hbar\omega_i$:

$$\hat{H}_A \left| i \right\rangle = \hbar \omega_i \left| i \right\rangle, \tag{1.50}$$

onde

$$\sum_{i} |i\rangle \langle i| = 1, \qquad (1.51)$$

sendo que a soma abrange todos os autoestados de \hat{H}_A .

Utilizando-se esta relação, podemos escrever:

$$\langle i | H_A | j \rangle = \hbar \omega_i \delta_{i,j},$$

е

$$\hat{H}_A = \sum_i |i\rangle \langle i|\hat{H}_A \sum_j |j\rangle \langle j|.$$

Estas duas expressões juntas resultam em:

$$\hat{H}_A = \sum_i \hbar \omega_i |i\rangle \langle i|.$$
(1.52)

Considere agora o efeito de aplicar a combinação $|i\rangle \langle j|$ em algum estado atômico $|l\rangle$:

$$|i\rangle \langle j|l\rangle = |i\rangle \delta_{l,j}.$$

Assim, $|i\rangle \langle j|$ aplicado em $|l\rangle$ muda este estado para $|i\rangle$ se o estado inicial for $|j\rangle$, mas é zero caso contrário. Pode-se dizer que $|i\rangle \langle j|$ destrói o estado $|j\rangle$ e o coloca no estado $|i\rangle$.

A parte de interação pode também ser expressada em termos dos operadores de criação e aniquilação. O procedimento é análogo ao utilizado para a parte atômica. O uso da relaçãos (1.51) para **D** produz:

$$\mathbf{D} = \sum_{i} \ket{i} \langle i \ket{\mathbf{D}} \sum_{j} \ket{j} \langle j |. = \sum_{i,j} \mathbf{D}_{i,j} \ket{i} \langle j |,$$

onde $\mathbf{D}_{i,j} = \langle i | \mathbf{D} | j \rangle$ e $D_{i,i} = 0$.

Utilizando-se esta última relação e as equações (1.47) e (1.48), a parte de interação é escrita como:

$$\hat{H}_{DE} = i\hbar \sum_{k} g_{k} \left\{ \hat{a}_{k} \exp\left(-i\omega_{k}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right) - \hat{a}_{k}^{\dagger} \exp\left(i\omega_{k}t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right) \right\} |j\rangle \langle j|,$$
$$g_{k} = \sqrt{\frac{\omega_{k}}{2\epsilon_{o}\hbar V}} \sum_{i,j} \epsilon_{k} \cdot \mathbf{D}_{i,j}.$$

1.5.3 Átomo de dois níveis

Consideremos o caso do campo de radiação interagindo com um átomo de dois níveis, onde $|a\rangle$ representa seu estado excitado e $|b\rangle$ seu estado fundamental. Para o caso de um campo de radiação monomodo de freqüência ω , o Hamiltoniano correspondente a este sistema na aproximação de dipolo elétrico é dado por [9]:

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}) + \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + g\hbar(\sigma_+ + \sigma_-)(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^{\dagger}e^{i\omega t}), \qquad (1.53)$$

onde:

$$\sigma_{z} = |a\rangle \langle a| - |b\rangle \langle b|,$$

$$\sigma_{+} = |a\rangle \langle b|,$$

$$\sigma_{-} = |b\rangle \langle a|.$$
(1.54)

O operador σ_{-} leva o estado atômico do estado excitado para o estado fundamental e o σ_{+} leva o átomo do estado fundamental para o excitado.

Expandindo os parênteses da equação (1.53), encontramos quatro termos. O primeiro deles, $\sigma_{-}\hat{a}^{\dagger}$, descreve o processo pelo qual o átomo é levado do estado excitado para o fundamental enquanto o campo ganha um fóton. $\sigma_{+}\hat{a}$ descreve o processo oposto. O termo $\sigma_{-}\hat{a}$ descreve o processo pelo qual o átomo faz uma transição do nível mais baixo para o mais alto e um fóton é aniquilado. $\sigma_+ \hat{a}^{\dagger}$ descreve o processo em que o átomo é excitado e o campo ganha um fóton. Estes dois termos podem ser negligenciados, o que corresponde a utilizar a aproximação de ondas girantes [13]. Para entender o significado desta aproximação, considere a evolução livre (g = 0) desses operadores na representação de Heisenberg [14]:

$$\sigma_{\pm}(t) = \sigma_{\pm}(0)e^{\pm i\omega_a t},$$

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t},$$

$$\hat{a}^{\dagger}(t) = \hat{a}^{\dagger}(0)e^{+i\omega t}.$$

Combinando estas dependências, nós temos:

$$\hat{a}(t)\sigma_{-}(t) = \hat{a}(0)\sigma_{-}(0)e^{-i(\omega+\omega_{a})t}, \qquad (1.55)$$

$$\hat{a}^{\dagger}(t)\sigma_{+}(t) = \hat{a}^{\dagger}(0)\sigma_{+}(0)e^{+i(\omega+\omega_{a})t}.$$
(1.56)

Aqui, estes pares evoluem à freqüências ópticas. Em contraste, temos

$$\hat{a}(t)\sigma_{+}(t) = \hat{a}(0)\sigma_{+}(0)e^{-i(\omega-\omega_{a})t}, \qquad (1.57)$$

$$\hat{a}^{\dagger}(t)\sigma_{-}(t) = \hat{a}^{\dagger}(0)\sigma_{-}(0)e^{+i(\omega-\omega_{a})t},$$
 (1.58)

que variam suavemente perto da ressonância. No curso de poucos períodos ópticos, as combinações (1.55) e (1.56) tendem à zero comparadas com as combinações (1.57) e (1.58).

Com esta aproximação, o Hamiltoniano deste sistema fica:

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}) + \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + g\hbar(\sigma_+\hat{a}e^{-i\omega t} + \sigma_-\hat{a}^{\dagger}e^{i\omega t}).$$
(1.59)

1.5.4 Hamiltoniano na representação de interação

A evolução temporal deste sistema é melhor analisada na representação de interação. Para isso, vamos separar o Hamiltoniano (1.59) em duas partes:

$$\hat{H} = \hat{H}_o + \hat{H}_I,$$

onde \hat{H}_o é o Hamiltoniano não perturbado dado por:

$$\hat{H}_o = \hbar\omega(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}) + \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z,$$

e \hat{H}_I é o Hamiltoniano de interação:

$$\hat{H}_I = g\hbar(\sigma_+ \hat{a}e^{-i\omega t} + \sigma_- \hat{a}^{\dagger}e^{i\omega t}).$$

Consideramos resolvido o problema

$$\hat{H}_{o}\left|\phi\right\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\phi\right\rangle,$$

de modo que nos ocupamos apenas com a parte de interação.

A parte não perturbada e dependente do tempo da função $|\phi\rangle$ é retirada através da seguinte transformação:

$$|\phi\rangle = U |\phi_I\rangle$$

com:

$$U = \exp\left(-i\hat{H}_o t/\hbar\right). \tag{1.60}$$

 $|\phi_I\rangle$ obedece á equação de Shröedinger

$$\tilde{H}_{I} \left| \phi_{I} \right\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left| \phi_{I} \right\rangle, \qquad (1.61)$$

onde $\tilde{H}_I = U^\dagger \hat{H}_I U$ é o Hamiltoniano do sistema na representação de interação, dado por:

$$\tilde{H}_{I} = g\hbar \left(\sigma_{+} \hat{a} e^{-i\delta_{oa}t} + \sigma_{-} \hat{a}^{\dagger} e^{i\delta_{oa}t} \right), \qquad (1.62)$$

onde $\delta_{oa} = \omega - \omega_a$.

1.5.5 Evolução temporal

Nós podemos definir o operador evolução temporal $U_o(t)$ de modo que:

$$\left|\phi_{I}(t)\right\rangle = U_{o}(t)\left|\phi_{I}(0)\right\rangle$$

De acordo com (1.61), este operador deve obedecer à seguinte equação:

$$\tilde{H}_I U_o(t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_o(t), \qquad (1.63)$$

No caso de ressonância, ou seja, $\delta_{oa} = \omega - \omega_a = 0$, esta equação é fácil de ser resolvida:

$$U_o(t) = \exp\left(-i\tilde{H}_I t/\hbar\right).$$

Esta exponencial pode ser expandida em série de Taylor. Os primeiros termos desta série podem ser calculados e, por indução, determinam-se os termos genéricos. O resultado obtido é expresso por:

$$U_{o}(t) = \cos\left(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^{\dagger}}\right)|a\rangle\langle a| + \cos\left(gt\sqrt{\hat{a}^{\dagger}\hat{a}}\right)|b\rangle\langle b| \qquad (1.64)$$
$$-i\frac{\sin\left(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^{\dagger}}\right)}{\sqrt{\hat{a}\hat{a}^{\dagger}}}\hat{a}|a\rangle\langle b| - i\frac{\sin\left(gt\sqrt{\hat{a}^{\dagger}\hat{a}}\right)}{\sqrt{\hat{a}^{\dagger}\hat{a}}}\hat{a}^{\dagger}|b\rangle\langle a|.$$

Para o sistema preparado no seguinte estado inicial:

$$\left|\phi(0)\right\rangle = \sum_{n} P_{n} \left|n\right\rangle \left|a\right\rangle$$

onde P_n é uma distribuição de probabilidade, o estado do sistema evolui da seguinte forma:

$$|\phi(t)\rangle = \sum_{n} P_n \left\{ \cos(gt\sqrt{n+1}) |n\rangle |a\rangle + \sin(gt\sqrt{n+1}) |n+1\rangle |b\rangle \right\} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t}.$$

Calculando a inversão atômica para este estado, temos:

$$w(t) = \langle \phi(t) | \sigma_z | \phi(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^2 \cos(2gt\sqrt{n+1})$$
(1.65)

Observamos que é a função P_n que define as características da inversão atômica. Para um estado de número, $P_n = \delta_{m,n}$ e a inversão atômica oscila cossenoidalmente no tempo com freqüência de Rabi $2g\sqrt{m+1}$. Entretanto, para P_n abrangendo muitos valores de n, a situação muda completamente, podendo exibir o fenômeno de colapso e ressurgimento [15]. Um exemplo onde isso ocorre, mostrado na figura 1.1, é o caso do estado coerente do campo, para o qual [16]

$$P_n = \frac{\alpha^n e^{|\alpha|^2/2}}{\sqrt{n!}},$$

O fenômeno de colapso e ressurgimento pode ser entendido a partir da equação (1.65). Cada termo na somatória possui um cosseno com freqüência que depende de n (freqüência de Rabi). A função de distribuição P_n determina o peso relativo para cada valor de n. Em um determinado momento estas freqüências interferem entre si, com o resultado de que a inversão atômica cai rapidamente a zero. Contudo, este colapso não é permanente. Existem instantes em que os termos mais importantes desta distribuição entram em



Figura 1.1: Inversão atômica para um estado coerente com $\alpha = 5$.

fase, ocorrendo o "ressurgimento" na inversão atômica. O tempo t_R em que este evento ocorre pode ser estimado considerando-se que a diferença de fase nos termos com n ao redor de \bar{n} ($\bar{n} = |\alpha|^2$, para o estado coerente) é múltipla de 2π :

$$2\pi k \approx g t_R \sqrt{\bar{n} + 1} - g t_R \sqrt{\bar{n}} \approx \frac{g t_R}{\sqrt{\bar{n}}} \quad \Rightarrow \quad g t_R \approx 2\pi k \sqrt{\bar{n}} \tag{1.66}$$

Discussões sobre cavidades ópticas e suas interações com átomos, podem ser encontradas em [17] e [18]. Resultados esperimentais envolvendo a interação de um átomo com um campo de cavidade em um estado coerente podem ser encontrados em [19].

1.6 Interação entre uma cavidade e um reservatório térmico

Nesta seção vamos estudar um sistema composto por uma cavidade interagindo com um reservatório térmico formado por um ensemble de osciladores harmônicos [10]. O campo na cavidade será tratado como um oscilador harmônico unidimensional de freqüência ω_o .

Seja o Hamiltoniano do sistema dado por

$$\hat{H} = \hat{H}_K + \hat{H}_R + \hat{H}_{KR},$$

onde \hat{H}_K , \hat{H}_R e \hat{H}_{KR} são, respectivamente, os Hamiltonianos do campo na cavidade K, do reservatório térmico e de interação entre K e R, dados por

$$\hat{H}_K = \hbar\omega_o \left(\hat{a}^{\dagger} \hat{a} + 1/2 \right), \qquad (1.67)$$

onde \hat{a}^{\dagger} e \hat{a} são os operadores de criação e aniquilação deste oscilador, e

$$\hat{H}_R = \sum_i \hbar \omega_i \left(\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i + 1/2 \right), \tag{1.68}$$

onde o reservatório térmico é formado por um conjunto infinito de osciladores harmônicos unidimencionais, e a freqüência e os operadores de criação e aniquilação do *i-ésimo* oscilador são, respectivamente, ω_i , $\hat{b}_i^{\dagger} \in \hat{b}_i$.

O Hamiltoniano de interação entre K e R é, na aproximação de ondas girantes:

$$\hat{H}_{KR} = \hat{a}^{\dagger} R^{-} + \hat{a} R^{+}, \qquad (1.69)$$

onde

$$R^{-} = -\sum_{i} g_{i}\hat{b}_{i},$$

$$R^{+} = -\sum_{i} g_{i}^{*}\hat{b}_{i}^{\dagger}.$$

Por conveniência, trabalhamos na representação de interação, na qual a evolução temporal do operador densidade deste sistema obedece a equação:

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[\tilde{H}_{KR}, \tilde{\rho}(t) \right], \qquad (1.70)$$

onde

$$\tilde{\rho}(t) = \exp\left[i\left(H_K + H_R\right)t/\hbar\right]\rho(t)\exp\left[-i\left(H_K + H_R\right)t/\hbar\right],$$

$$\tilde{H}_{KR}(t) = \exp \left[i \left(H_K + H_R \right) t / \hbar \right] \hat{H}_{KR} \exp \left[-i \left(H_K + H_R \right) t / \hbar \right]$$

= $-\sum_j g_j \hat{b}_j \hat{a}^{\dagger} \exp \{ i (\omega_o - \omega_j) t \} - \sum_j g_j^* \hat{b}_j^{\dagger} \hat{a} \exp \{ -i (\omega_o - \omega_j) t \}.$

Podemos integrar a equação (1.70) entre t e $t + \Delta t$, produzindo:

$$\tilde{\rho}(t+\Delta t) = \tilde{\rho}(t) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t}^{t+\Delta t} dt' \left[\tilde{H}_{KR}(t'), \tilde{\rho}(t') \right].$$

Esta equação pode ser iterada, resultando em:

$$\tilde{\rho}(t+\Delta t) - \tilde{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{t}^{t+\Delta t} dt' \left[\tilde{H}_{KR}(t'), \tilde{\rho}(t) \right] \\ + \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^{2} \int_{t}^{t+\Delta t} dt' \int_{t}^{t'} dt'' \left[H_{KR}(t'), \left[\tilde{H}_{KR}(t''), \tilde{\rho}(t'') \right] \right].$$

Tomando o traço parcial desta equação sobre os estados do reservatório, encontramos uma equação para o operador densidade reduzido $\tilde{\sigma}(t) = Tr_R \{\tilde{\rho}(t)\},$ na representação de interação, para o sistema K:

$$\Delta \tilde{\sigma}(t) = \tilde{\sigma}(t + \Delta t) - \tilde{\sigma}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{t}^{t+\Delta t} dt' Tr_{R} \left[\tilde{H}_{KR}(t'), \tilde{\rho}(t') \right]$$
(1.71)
+ $\left(\frac{1}{i\hbar}\right)^{2} \int_{t}^{t+\Delta t} dt' \int_{t}^{t'} dt'' Tr_{R} \left[\tilde{H}_{KR}(t'), \left[\tilde{H}_{KR}(t''), \tilde{\rho}(t'') \right] \right].$

1.6.1 Hipóteses sobre o reservatório

Seja $\tilde{\sigma}_R(t) = Tr_A \{\tilde{\rho}(t)\}$ o operador densidade reduzido do reservatório. A variação de $\tilde{\sigma}_R(t)$ com o tempo, devido ao acoplamento com K, é pequena. Assim, em primeira aproximação, $\tilde{\sigma}_R(t)$ pode ser considerado constante na representação de interação. Além disso, supomos que o reservatório está em um estado estacionário, ou seja,

$$\left[\sigma_R(t), \hat{H}_R\right] = 0. \tag{1.72}$$

Isto significa que seu operador densidade é diagonal na base de autovetores do Hamiltoniano, podendo ser considerado como uma mistura estatística desses autoestados. Se $|\mu\rangle$ é um autoestado de \hat{H}_R com autovalor E_{μ} , então σ_R é dado por:

$$\sigma_R = \sum p_\mu |\mu\rangle \langle \mu|, \qquad (1.73)$$

onde p_{μ} é a probabilidade de encontrar o reservatório no estado $|\mu\rangle$.

Utilizando-se as equações (1.69) e (1.73) obsevamos que o valor médio de \hat{H}_{KR} sobre os estados σ_R é nulo:

$$Tr_R\left\{\sigma_R\hat{H}_{KR}(t)\right\} = Tr_R\left\{\tilde{\sigma}_R\tilde{H}_{KR}(t)\right\} = 0.$$
(1.74)

Consideremos agora a seguinte média que aparece na equação (1.71):

$$g(t',t'') = Tr_R\{\sigma_R \tilde{H}_{KR}(t')\tilde{H}_{KR}(t'')\}.$$

Utilizando (1.69), (1.72) e a invariância do traço de um produto sobra uma permutação cíclica. É fácil mostrar que g(t', t'') depende apenas de $\tau = t' - t''$:

$$Tr_{R}\{\sigma_{R}\tilde{H}_{KR}(t')\tilde{H}_{KR}(t'')\} = Tr_{R}\{\sigma_{R}e^{i\hat{H}_{R}t'/\hbar}\hat{H}_{KR}e^{-i\hat{H}_{R}(t'-t'')/\hbar}\hat{H}_{KR}e^{-i\hat{H}_{R}t''/\hbar}\}$$

$$= Tr_{R}\{\sigma_{R}\tilde{H}_{KR}(\tau)\tilde{H}_{KR}(0)\} = g(\tau).$$
(1.75)

Para calcular $g(\tau)$ mais precisamente, substituímos a equação (1.73) em (1.75). Isto resulta em:

$$g(\tau) = Tr_R \sum_{\mu} \left\{ p_{\mu} |\mu\rangle \langle \mu | \tilde{H}_{KR}(\tau) \tilde{H}_{KR}(0) \right\}$$

$$= \sum_{\mu} \left\{ p_{\mu} \langle \mu | \tilde{H}_{KR}(\tau) \tilde{H}_{KR}(0) |\mu\rangle \right\}$$

$$= \sum_{\mu} \sum_{\nu} p_{\mu} |R_{\mu\nu}|^2 e^{i\omega_{\mu\nu}\tau}$$
(1.76)

onde

$$R_{\mu\nu} = Tr_R\{\langle \mu | H_{KR} | \mu \rangle\}$$
(1.77)

$$\omega_{\mu\nu} = (E_{\mu} - E_{\nu})/\hbar.$$
 (1.78)

A expressão (1.76) mostra que $g(\tau)$ é uma superposição de exponenciais oscilantes em diferentes freqüências $\omega_{\mu\nu}$ de R. Uma vez que o sistema R é um reservatório, ele tem um conjunto de níveis de energia muito denso e, consequentemente, um expectro de freqüência quase contínuo, tal que as exponenciais se tornam destrutivas quando τ torna-se muito grande. Assim, podemos supor que a função $g(\tau)$ tende rapidamente a zero quando τ cresce. Chamamos de τ_c a largura de $g(\tau)$ em τ .

1.6.2 Cálculo da equação mestra

Voltando à equação (1.71), iremos agora deduzir a equação mestra para $\tilde{\sigma}$, utilizando algumas aproximações. Primeiramente, substituimos o resultado (1.74) em (1.71), obtendo:

$$\Delta \tilde{\sigma}(t) = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' Tr_R \left[\tilde{H}_{KR}(t'), \left[\tilde{H}_{KR}(t''), \tilde{\rho}(t'')\right]\right].$$
(1.79)

Para t = 0, $\tilde{\rho}(t)$ pode ser escrito simplesmente como o produto tensorial entre os operadores densidades reduzidos da cavidade ($\tilde{\sigma}$) e do reservatório $(\tilde{\sigma}_R)$. Em instantes posteriores surge uma correlação entre $\tilde{\sigma} \in \tilde{\sigma}_R$ devido ao acoplamento entre a cavidade e o reservatório. Desta forma, $\tilde{\rho}(t)$ passa a ser escrito como:

$$\tilde{\rho}(t) = Tr_R \left\{ \tilde{\rho}(t) \right\} \otimes Tr_K \left\{ \tilde{\rho}(t) \right\} + \tilde{\rho}_{correl}(t)$$

sendo que $\tilde{\rho}_{correl}(t)$ descreve a correlação que existe entre K e R no instante t. Este termo é da ordem do Hamiltoniano de interação \hat{H}_{KR} , o qual foi suposto pequeno. Se utilizarmos esta equação em (1.79), a parte de correlação produzirá termos de terceira ordem em \hat{H}_{KR} , os quais podem ser desprezados. Com esta aproximação, chamada de *aproximação de Born* [20], a equação (1.79) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\frac{\Delta\tilde{\sigma}}{\Delta t} = -\frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' Tr_R \left[\tilde{H}_{KR}(t'), \left[\tilde{H}_{KR}(t''), \tilde{\sigma}(t'') \otimes \sigma_R \right] \right].$$
(1.80)

Esta equação não é Markoviana, uma vez que a evolução temporal de $\tilde{\sigma}(t)$ depende da história de seu passado através da integração em $\sigma(t'')$. Entretanto, se \hat{H}_{KR} é suficientemente pequeno e se Δt é suficientemente curto comparado com o tempo de evolução de $\tilde{\sigma}$, podemos desprezar a evolução de $\tilde{\sigma}$ entre t e t'' em (1.80), que já é um termo de segunda ordem em \hat{H}_{KR} , e trocar $\tilde{\sigma}(t'')$ por $\tilde{\sigma}(t)$. Esta aproximação é chamada de aproximação de Markov [20].

A razão $\Delta \tilde{\sigma} / \Delta t$ pode ser considerada uma média temporal da razão instantânea $d\tilde{\sigma} / dt$ sobre um intervalo Δt . De fato, $\Delta \tilde{\sigma} / \Delta t$ pode ser escrita

$$\frac{\Delta \tilde{\sigma}}{\Delta t} = \frac{\tilde{\sigma}(t + \Delta t) - \tilde{\sigma}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t + \Delta t} dt' \frac{d\tilde{\sigma}}{dt'}$$

Podemos agora fazer uma mudança de variável , passando de t' e t" para τ e t', onde $\tau = t' - t"$. O domínio de integração de t' e t" da equação (1.80) é mostrado na figura (1.2), que compõe o triângulo OAB. As linhas correspondentes ao mesmo valor de τ são paralelas à linha OB, varrendo a área de dentro do triângulo OAB. A linha OB corresponde a $\tau = 0$. Para τ fixo, podemos integrar em t' de $t + \tau$ até $t + \Delta t$. Em seguida, integramos sobre τ de 0 à Δt , que produz a troca:

$$\int_{t}^{t+\Delta t} dt' \int_{t}^{t'} dt'' \iff \int_{0}^{\Delta t} d\tau \int_{t+\tau}^{t+\Delta t} dt'$$
(1.81)



Figura 1.2: Domínio de Integração sobre t' e t''

Pela discussão apresentada na seção (1.6.1), $g(\tau)$ é desprezível para $\tau \gg \tau_c$. Desta forma, a única região não nula no domínio de integração de (1.81) é uma pequena faixa da ordem de τ_c , perto da linha OB da figura (1.2) (parte hachurada). Se $\Delta t \gg \tau_c$, um erro desprezível é feito se trocarmos o limite superior da integral sobre τ por $+\infty$ e estender o limite inferior da integral sobre t' para t.

Com esta troca, a equação (1.80) fica:

$$\frac{\Delta\tilde{\sigma}}{\Delta t} = -\frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{\Delta t} \int_0^\infty d\tau \int_t^{t+\Delta t} dt' Tr_R \left[\tilde{H}_{KR}(t'), \left[\tilde{H}_{KR}(t'-\tau), \tilde{\sigma}(t) \otimes \sigma_R \right] \right].$$
(1.82)

Vamos agora calcular os comutadores que aparecem na equação (1.82), lembrando que o operador densidade do reservatório é considerado diagonal na base de estados do Hamiltoniano de R (equação (1.73)). Observamos então que, ao expandirmos este duplo comutador, encontramos termos proporcionais a $\hat{b}_i \hat{b}_j$, $\hat{b}_i^{\dagger} \hat{b}_j^{\dagger}$, $\hat{b}_i \hat{b}_j^{\dagger}$ e $\hat{b}_i^{\dagger} \hat{b}_j$. Entretanto, ao calcularmos o traço sobre os estados de R, somente os termos proporcionais a $\hat{b}_j \hat{b}_j^{\dagger}$ e $\hat{b}_j^{\dagger} \hat{b}_j$ serão não nulos. Assim temos:

$$Tr_{R}\left[\tilde{H}_{KR}(t'),\left[\tilde{H}_{KR}(t'-\tau),\tilde{\sigma}(t)\otimes\sigma_{R}\right]\right] =$$
$$Tr_{R}\left\{\tilde{H}_{KR}(t')\tilde{H}_{KR}(t'-\tau)\tilde{\sigma}(t)\otimes\sigma_{R}-\tilde{H}_{KR}(t'-\tau)\tilde{\sigma}(t)\otimes\sigma_{R}\tilde{H}_{KR}(t')-\tilde{H}_{KR}(t')\tilde{\sigma}(t)\otimes\sigma_{R}\tilde{H}_{KR}(t'-\tau)+\tilde{\sigma}(t)\otimes\sigma_{R}\tilde{H}_{KR}(t'-\tau)\tilde{H}_{KR}(t')\right\} =$$
$$\begin{aligned} \left\{ \left(\hat{a}^{\dagger} \hat{a} \tilde{\sigma} - \hat{a} \sigma \hat{a}^{\dagger} \right) \sum_{j} |g_{i}|^{2} (\bar{n}_{j} + 1) \exp\{i(\omega_{o} - \omega_{j})\tau\} + \\ \left(\tilde{\sigma} \hat{a} \hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger} \sigma \hat{a} \right) \sum_{j} |g_{i}|^{2} \bar{n}_{j} \exp\{-i(\omega_{o} - \omega_{j})\tau\} \} + cc, \end{aligned}$$

onde $\bar{n}_j = \sum_{\mu} \langle \mu | \hat{b}_j^{\dagger} \hat{b}_j | \mu \rangle.$ Utilizando a relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp\{i(\omega_o - \omega_j)\tau\} = 2\pi\delta(\omega_o - \omega_j),$$

podemos reescrever a equação (1.82), rearranjando os termos na seguinte forma:

$$\frac{\Delta\tilde{\sigma}}{\Delta t} = \frac{\Gamma(\omega_o) + \Gamma'(\omega_o)}{2} \left(2\hat{a}\sigma\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}\hat{a}^{\dagger}\hat{a} \right)$$
(1.83)
$$+ \frac{\Gamma'(\omega_o)}{2} \left(2\hat{a}^{\dagger}\sigma\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^{\dagger}\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}\hat{a}\hat{a}^{\dagger} \right),$$

onde

$$\Gamma(\omega) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{j} |g_{j}|^{2} \delta(\omega - \omega_{j}), \qquad (1.84)$$

$$\Gamma'(\omega) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{j} |g_{j}|^{2} \bar{n}_{j} \delta(\omega - \omega_{j}).$$

Se o reservatório está em equilibrio térmico a uma temperatura T, o número médio de fótons referente ao *j-ésimo* modo do campo é dado pela distribuição de Bose-Einstein:

$$\bar{n}_j = \bar{N}(\omega_j) = \frac{1}{e^{\hbar\omega_j/k_B T} - 1}.$$
 (1.85)

Isto nos leva à relação

$$\Gamma'(\omega) = \Gamma(\omega)\bar{N}(\omega).$$

Conseqüentemente, na representação de Schrödinger, obtemos a equação mestra para o sistema com a forma:

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{H}_k, \sigma(t) \right]$$

$$+ \frac{\Gamma(\omega_o)(1 + \bar{N}(\omega_o))}{2} \left(2\hat{a}\sigma\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}\hat{a}^{\dagger}\hat{a} \right)$$

$$+ \frac{\Gamma(\omega_o)\bar{N}(\omega_o)}{2} \left(2\hat{a}^{\dagger}\sigma\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^{\dagger}\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}\hat{a}\hat{a}^{\dagger} \right).$$
(1.86)

Existe na literatura alguns métodos para resolver esta equação [21]. Entretanto, podemos utilizá-la para encontrar o número médio de fótons em função do tempo, sem resolvê-la. Para isso, basta multiplicar a equação (1.86) à esquerda e à direita por $\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ e tomar o traço sobre as variáveis do sistema:

$$Tr\left\{\frac{d\sigma(t)}{dt}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right\} = \frac{dTr\left\{\sigma(t)\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right\}}{dt} = \frac{d\langle\hat{n}\rangle(t)}{dt}$$
(1.87)
$$= \frac{\Gamma(\omega_{o})(1+\bar{N}(\omega_{o}))}{2}Tr\left\{\left(2\hat{a}\sigma\hat{a}^{\dagger}-\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\tilde{\sigma}-\tilde{\sigma}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right)\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right\}$$
$$+ \frac{\Gamma(\omega_{o})\bar{N}(\omega_{o})}{2}Tr\left\{\left(2\hat{a}^{\dagger}\sigma\hat{a}-\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\tilde{\sigma}-\tilde{\sigma}\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\right)\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right\}.$$

Utilizando a propriedade de invariância do traço sobre uma permutação cíclica e a relação de comutação entre \hat{a}^{\dagger} e \hat{a} , esta expressão fica:

$$\frac{d\langle \hat{n}\rangle(t)}{dt} = -\Gamma(\omega_o)\left\{\langle \hat{n}\rangle(t) - \bar{N}(\omega_o)\right\},\,$$

cuja solução é

$$\langle \hat{n} \rangle (t) = \bar{N}(\omega_o) + \exp\{-\Gamma(\omega_o)t\} (\langle \hat{n} \rangle (0) - \bar{N}(\omega_o))$$

Esta equação mostra que o número médio de fótons decai exponencialmente com o tempo, até atingir o equilíbrio com o reservatório, onde $\langle \hat{n} \rangle = \bar{N}(\omega_o)$. Este comportamento é mostrado para um caso particular, onde $\langle \hat{n} \rangle(0) = 1$ e $\bar{N}(\omega_o) = 0$ na figura 1.3.



Figura 1.3: Número médio de fótons em função do tempo para $\Gamma/\omega = 0.05$, temperatura do reservatório = 0 e $\langle \hat{n} \rangle(0) = 1$.

1.7 Modelo Jaynes-Cummings com dissipação

O modelo Jaynes Cummings tem como principal vantagem a possibilidade de fornecer soluções analíticas. Entretanto, sua comprovação experimental esbarra na inexistência de sistemas totalmente fechados, havendo sempre um grau de interação com o meio ambiente. Por isto, é importante analisar o que acontece quando consideramos a cavidade interagindo também com um reservatório térmico, como o estudado na seção 1.6. Este problema tem sido tratado na literatura sob vários aspectos [22], [23]. Utilizamos aqui os resultados apresentados por A. B. Klimov *et al* [22], que consiste em uma solução aproximada para a equação mestra do sistema.

De acordo com o que foi estudado na seção 1.6, podemos descrever a interação de um átomo de dois níveis com uma cavidade quântica dissipativa, à temperatura zero, através da equação mestra abaixo:

$$\frac{d\rho}{dt} = -ig[\hat{a}\sigma_+ + \hat{a}^{\dagger}\sigma_-, \rho] + \frac{1}{2}\Gamma(2\hat{a}\rho\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}\hat{a}^{\dagger}\rho - \rho\hat{a}^{\dagger}\hat{a}), \qquad (1.88)$$

onde g é a constante de acoplamento entre o átomo e o campo da cavidade e Γ é a constante de dissipação.

Existem na literaura vários métodos para a resolução desta equação. Uma forma simples, porém aproximada, é apresentada em [22] utilizando a transformação [24]:

$$Q = \begin{pmatrix} e^{i\hat{\phi}} & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (1.89)$$

onde $e^{\pm i\hat{\phi}}$ são os operadores de fase denotados por [24]:

$$\hat{a} = \sqrt{\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + 1} e^{i\hat{\phi}},$$

$$\hat{a}^{\dagger} = e^{-i\hat{\phi}}\sqrt{\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + 1}.$$

Aplicando esta transformação na equação mestra (1.88), nós obtemos uma equação para o operador densidade transformado $\tilde{\rho} = Q^{\dagger}\rho Q$,

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = (L_o + L_1 + L_2)\tilde{\rho},$$

onde

$$L_o = -ig[\sqrt{\hat{a}^{\dagger}\hat{a}}\sigma_x, \tilde{\rho}], \qquad (1.90)$$

$$L_1 = \frac{1}{2} \Gamma(2\hat{a}\tilde{\rho}\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\tilde{\rho} - \tilde{\rho}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}), \qquad (1.91)$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \Gamma \left[2\bar{a}\tilde{\rho}\bar{a}^{\dagger} - 2\hat{a}\tilde{\rho}\hat{a}^{\dagger} + \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_z + 1), \tilde{\rho} \right\} \right], \qquad (1.92)$$

 $\{\ ,\ \}$ denota o anticomutador e

$$\bar{a} \equiv Q^{\dagger} \hat{a} Q = \sqrt{1 - \frac{(\sigma_z + 1)}{\bar{2}(\hat{n} + 1)}} \hat{a}.$$
 (1.93)

Vamos analisar o que ocorre quando aplicamos o operador $L_2 \text{ em } \tilde{\rho}$, utilizando a equação (1.93) expandida em série de Taylor, considerando $\bar{n} \gg 1$:

$$\bar{a} \equiv Q^{\dagger} \hat{a} Q \approx \hat{a} - \frac{(\sigma_z + 1)}{\bar{4}(\hat{n} + 1)} \hat{a}.$$
(1.94)

Desta forma $L_2 \tilde{\rho}$ fica:

$$L_2\tilde{\rho} = \frac{\Gamma}{2} \left(-\left\{ \frac{(\sigma_z + 1)}{2(\bar{n} + 1)}, \hat{a}\tilde{\rho}\hat{a}^{\dagger} \right\} + \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_z + 1), \tilde{\rho} \right\} \right) + O\left(\frac{\Gamma}{\hat{n} + 1}\right). \quad (1.95)$$

Portanto, este termo em geral produz contribuições da ordem de Γ , enquanto que $L_o \tilde{\rho} \in L_1 \tilde{\rho}$ contribuem com termos da ordem de $g\sqrt{\bar{n}} \in \Gamma \bar{n}$. Assim, a parte que envolve $L_2 \tilde{\rho}$ pode ser desprezada se $\bar{n} \gg 1$ e se $\Gamma \ll g\sqrt{\bar{n}}$, resultando na seguinte equação, projetada na base dos estados de número:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_{n,m}}{dt} = -ig \left(\sigma_x \sqrt{n} \ \tilde{\rho}_{n,m} - \tilde{\rho}_{n,m} \sigma_x \sqrt{m} \right) + \frac{\Gamma}{2} (n+m) \tilde{\rho}_{n,m} + \Gamma \sqrt{(n+1)(m+1)} \tilde{\rho}_{n+1,m+1}.$$
(1.96)

Os elementos de matriz $\tilde{\rho}_{n,m}$ ainda são operadores no espaço atômico. Esta equação, se projetada na base dos autoestados de σ_x , produz uma equação numérica para $\tilde{\rho}_{n,m}$, a qual pode ser facilmente resolvida por transformada de Laplace [22]. Utilizando o resultado desta equação para calcular a inversão atômica (w(t)) e o número médio de fótons $(\bar{n}(t))$, dados por

$$w(t) = Tr\{Q^{\dagger}\sigma_{z}Q\tilde{\rho}\} = Tr\{\sigma_{z}\tilde{\rho}\}$$
$$\bar{n}(t) = Tr\{Q^{\dagger}\hat{n}Q\tilde{\rho}\} = Tr\{[\hat{n} - 1/2(\sigma_{z} + 1)]\tilde{\rho}\}$$

e considerando o átomo inicialmente no estado excitado e o campo preparado em um estado de número $|N\rangle$, obtemos:

$$w(t) = \Re \left\{ \sum_{n} \Gamma^{N-n} \frac{N!}{n!} I_{N-n,nn}(t) \right\},$$
(1.97)

onde

$$I_{N-n,nn}(t) = \sum_{j=0}^{N-n} \frac{\exp\{-ig2\sqrt{n+jt} - \Gamma(n+j)t\}}{\prod_{k=0}^{N-n} \{ig2(\sqrt{n+k} - \sqrt{n+j}) + \Gamma(k-j)\}|_{k\neq j}},$$

$$\bar{n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n\Gamma^{N-n} \frac{N!}{n!} \sum_{j=0}^{N-n} \frac{\exp\{-\Gamma(n+j)t\}}{\prod_{k=0}^{N-n} \Gamma(k-j)|_{k\neq j}} - \frac{w(t)}{2} - \frac{1}{2}$$
(1.98)

Estas equações nos mostram que o comportamento da inversão atômica e do número médio de fótons em função do tempo possui um comportamento oscilatório e, ao mesmo tempo, uma queda exponencial. As figuras 1.4 e 1.5 mostram os gráficos de w(t) e $\bar{n}(t)$ respectivamente. Observamos nos dois casos as oscilações de Rabi, discutidas na seção 1.5.3. Além disso, existe um amortecimento devido à perda de energia para o reservatório térmico, sendo mais crítico para a inversão atômica.



Figura 1.4: Gráfico da Inversão Atômica em função do tempo, feito através da expressão (1.97), para $N = 20, g = 0, 1 \in \Gamma = 0, 5$.



Figura 1.5: Número médio de fótons em função do tempo, dado pela expressão (1.98), para $N=20,\,g=0,1$ e $\Gamma=0,5.$

Capítulo 2

Acoplamento entre Cavidades Ópticas

Considere um sistema S composto de duas cavidades ópticas acopladas, 1 e 2. O Hamiltoniano deste sistema é composto pelo Hamiltoniano dos campos das cavidades separadas ($H_1 \ e \ H_2$, respectivamente) dados, em termos dos respectivos operadores de criação e aniquilação $\hat{a}_i^{\dagger} \ e \ \hat{a}_i$, por:

$$\hat{H}_1 = \hbar \omega_1 \left(\hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1 + \frac{1}{2} \right),$$
 (2.1)

$$\hat{H}_2 = \hbar \omega_2 \left(\hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_2 + \frac{1}{2} \right),$$
(2.2)

somados ao Hamiltoniano de interação entre elas \hat{H}_{12} .

Supomos que o acoplamento entre as duas cavidades é dado pela sobreposição entre os campos das duas cavidades, uma vez que o acoplamento ocorre devido à distribuição espacial dos campos (ver equação (2.4) abaixo). Esta é uma boa aproximação quando as duas cavidades não estão fortemente acopladas, ou seja, para duas cavidades dielétricas bem separadas no espaço.

Sejam o potencial vetor dos campos dados por:

$$\hat{\mathbf{A}}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\hat{a}_1 + \mathbf{u}_1^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\hat{a}_1^{\dagger},$$
$$\hat{\mathbf{A}}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)\hat{a}_2 + \mathbf{u}_2^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)\hat{a}_2^{\dagger},$$

onde $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ é uma função vetorial que dá a distribuição do campo no espaço, \mathbf{r} é o vetor posição na cavidade e \mathbf{r}_i é uma posição de referência nas cavidades 1 e 2 (i = 1 ou 2). O Hamiltoniano de interação em termos dos operadores de criação e aniquilação das cavidades é escrito sob a forma:

$$\hat{H}_{12} = \hbar \lambda \left(\hat{a}_1^{\dagger} + \hat{a}_1 \right) \left(\hat{a}_2^{\dagger} + \hat{a}_2 \right), \qquad (2.3)$$

onde o parâmetro de acoplamento $\lambda = \lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, que tem dimensão de freqüência e é tomado constante, é dado por:

$$\lambda \propto \int \mathbf{u_1}(\mathbf{r} - \mathbf{r_1}) \cdot \mathbf{u_2}(\mathbf{r} - \mathbf{r_2}) d\mathbf{r}.$$
 (2.4)

O Hamiltoniano total deste sistema é então:

$$\hat{H}_S = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{12}.$$

Nota-se que o Hamiltoniano deste sistema de cavidades acopladas é idêntico ao Hamiltoniano de um um sistema mecânico unidimensional de duas partículas de massa m. Uma partícula A é conectada a uma mola, com constante de mola k_a ; uma segunda partícula B é conectada a outra mola de constante de mola diferende k_b . As duas partículas são conectadas entre si por uma terceira mola de constante k_{ab} .O Hamiltoniano deste oscilador harmônico acoplado é:

$$\hat{H} = \frac{p_a^2}{2m} + \frac{k_a x_a^2}{2} + \frac{p_b^2}{2m} + \frac{k_b x_b^2}{2} + \frac{k_{ab} (x_a - x_b)^2}{2}$$

onde x_a , p_a e x_b , p_b são a posição e o momento das partículas A e B, respectivamente. Escrito na segunda quantização, este Hamiltoniano tornase idêntico a \hat{H}_S , com os parâmetros $m\omega_1 = k_b + k_{ab}$, $m\omega_2 = k_a + k_{ab}$ e $\lambda = -k_{ab}/2m\sqrt{\omega_1\omega_2}$.

Hashem Zoubi *et al.* [3] apresentaram uma transformação que diagonaliza o Hamiltoniano \hat{H}_S deste sistema e a utilizaram para resolver o problema de duas cavidades acopladas interagindo com um reservatório térmico. Neste trabalho seguimos os mesmos passos para estudar o caso de duas cavidades interagindo com um átomo de dois níveis, utilizando o Hamiltoniano H_S escrito na aproximação de ondas girantes:

$$\hat{H}_S = \hbar\omega_1(\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_1 + 1/2) + \hbar\omega_2(\hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_2 + 1/2) + \hbar\lambda(\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_2 + \hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_1).$$
(2.5)

Assim, na seção 2.1 apresentamos a transformação proposta por Hashem Zoubi *et al.* [3] e alguns comentários sobre seu limite de validade. Na seção 2.2, apresentamos uma transformação que diagonaliza o Hamiltoniano (2.5) e seus autovetores. Na seção 2.3 é apresentada a evolução temporal do sistema a partir do Hamiltoniano (2.5).

2.1 Diagonalização de \hat{H}_{So} total

O Hamiltoniano não aproximado do sistema composto pelas duas cavidades pode ser diagonalizado através de uma mudança de variáveis, sendo agora expresso em termos de novos operadores bosônicos de criação e aniquilação \hat{A}_i^{\dagger} e \hat{A}_i , i = 1, 2:

$$\hat{H}_{So} = \hbar \Omega_1 \left(\hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar \Omega_2 \left(\hat{A}_2^{\dagger} \hat{A}_2 + \frac{1}{2} \right).$$

onde Ω_1 e Ω_2 são constantes a serem determinadas através da transformação.

A relação entre os operadores de criação e aniquilação originais e os novos é obtida supondo-se uma transformação do tipo:

$$\hat{a}_{1}^{\dagger} = M_{11}\hat{A}_{1} + M_{12}\hat{A}_{1}^{\dagger} + M_{13}\hat{A}_{2} + M_{14}\hat{A}_{2}^{\dagger},$$
$$\hat{a}_{2}^{\dagger} = M_{31}\hat{A}_{1} + M_{32}\hat{A}_{1}^{\dagger} + M_{33}\hat{A}_{2} + M_{34}\hat{A}_{2}^{\dagger},$$

onde os parâmetros M_{ij} são constantes determinadas impondo-se que o Hamiltoniano transfomado seja diagonal e que os novos operadores obedeçam às relações de comutação dos operadores bosônicos. Assim, a transformação é escrita, em forma matricial, como:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{1} \\ \hat{a}_{1}^{\dagger} \\ \hat{a}_{2} \\ \hat{a}_{2}^{\dagger} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(\theta)S_{11}^{+} & -\sin(\theta)S_{11}^{-} & \cos(\theta)S_{21}^{+} & -\cos(\theta)S_{21}^{-} \\ -\sin(\theta)S_{11}^{-} & \sin(\theta)S_{11}^{+} & -\cos(\theta)S_{21}^{-} & \cos(\theta)S_{21}^{+} \\ \cos(\theta)S_{12}^{+} & -\cos(\theta)S_{12}^{-} & -\sin(\theta)S_{22}^{+} & \sin(\theta)S_{22}^{-} \\ -\cos(\theta)S_{12}^{-} & \cos(\theta)S_{12}^{+} & \sin(\theta)S_{22}^{-} & -\sin(\theta)S_{22}^{+} \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} \hat{A}_{1} \\ \hat{A}_{1}^{\dagger} \\ \hat{A}_{2} \\ \hat{A}_{2}^{\dagger} \end{pmatrix}$$

$$(2.6)$$

onde

$$\Omega_1^2 = \left[\omega_1^2 + \omega_2^2 + \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 16\lambda^2\omega_1\omega_2}\right]/2, \qquad (2.7)$$
$$\Omega_2^2 = \left[\omega_1^2 + \omega_2^2 - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 16\lambda^2\omega_1\omega_2}\right]/2,$$

$$= \left[\omega_1^2 + \omega_2^2 - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 16\lambda^2\omega_1\omega_2}\right] / 2,$$

$$S_{i,j}^{\pm} = \frac{\Omega_i \pm \omega_j}{2\sqrt{\omega_j \Omega_i}} \qquad (i, j = 1, 2),$$
(2.8)

$$\sin(\theta) = \frac{s}{\sqrt{s^2 + c^2}}, \qquad \cos(\theta) = \frac{c}{\sqrt{s^2 + c^2}}, \tag{2.9}$$

$$s = \frac{1}{4} \left[\omega_1^2 - \omega_2^2 + \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 16\lambda^2 \omega_1 \omega_2} \right], \quad c = \lambda \sqrt{\omega_1 \omega_2}.$$
(2.10)

2.1.1 Comentários sobre a matriz de transformação M

Uma das exigências sobre a matriz de transformação M é que ela precisa ter uma inversa correspondente. Isto ocorre apenas quando seu determinante não é nulo. Entretanto, ao calcularmos este determinante, observamos pelo menos dois casos onde isto não acontece:

- Se $\lambda = 0$, a matrix M tem determinante nulo quando $\omega_1 = \omega_2, \, \omega_1 = 0$ ou $\omega_2 = 0;$
- Se $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, a matriz *M* não tem inversa quando $\lambda = 0$, ou se $\lambda = \frac{\omega}{2}$.

O fato da matriz não ter inversa para $\lambda = 0$ não é preocupante, já que se refere às cavidades isoladas, cada qual comportando-se separadamente, sem troca de fótons ou energia. No entanto, esta matriz também não tem inversa para diferentes combinações de valores de ω_1 , ω_2 e $\lambda \neq 0$.

As figuras (2.1) e (2.2) mostram o determinante de M em função de ω_1 e ω_2 respectivamente, calculado numericamente. Observa-se que no primeiro caso existem dois pontos onde este determinante é nulo ($\omega_1 = 0$ e $\omega_1 \approx 2.25$) e, no segundo, um ponto onde o determinante é nulo ($\omega_2 \approx 1.5$) e outro onde diverge ($\omega_2 = 0$).



Figura 2.1: Determinante da matriz M em função de ω_1 para $\omega_2 = 2 \text{ e } \lambda = 1$.



Figura 2.2: Determinante da matriz M em função de ω_2 para $\omega_1 = 2 e \lambda = 1$.

2.2 Diagonalização de \hat{H}_S na aproximação de ondas girantes

Apresentamos nesta seção a transformação que diagonaliza o Hamiltoniano \hat{H}_S na aproximação de ondas girantes (eq. 2.5) e em seguida, apresentamos os autoestados deste Hamiltoniano.

2.2.1 Transformação de variáveis

Seguindo o mesmo caminho que a seção 2.1, o Hamiltoniano H_S aproximado é diagonalizado através de uma transformação que leva os operadores \hat{a}_1^{\dagger} , \hat{a}_1 , \hat{a}_2^{\dagger} e \hat{a}_2 em novos operadores de criação e aniquilação \hat{A}_1^{\dagger} , \hat{A}_1 , \hat{A}_2^{\dagger} e \hat{A}_2 :

$$\hat{a}_{1} = p\hat{A}_{1} + q\hat{A}_{2},$$

$$\hat{a}_{2} = q\hat{A}_{1} - p\hat{A}_{2}.$$
(2.11)

Com esta transformação, o novo Hamiltoniano é escrito na seguinte forma:

$$\hat{H}_S = \hbar \Omega_1 (\hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + 1/2) + \hbar \Omega_2 (\hat{A}_2^{\dagger} \hat{A}_2 + 1/2), \qquad (2.12)$$

onde Ω_1 e Ω_2 são constantes a serem determinadas.

Os novos operadores $\hat{A}_i \in \hat{A}_i^{\dagger}$ devem obedecer às regras de comutação de operadores bosônicos. Isto impõe certas restrições sobre os coeficientes $p \in q$:

- $[\hat{a}_1^{\dagger}, \hat{a}_1] = -1 = p^2 [\hat{A}_1^{\dagger}, \hat{A}_1] + q^2 [\hat{A}_2^{\dagger}, \hat{A}_2] \Rightarrow p^2 + q^2 = 1;$
- $[\hat{a}_2^{\dagger}, \hat{a}_2] = -1 = p^2 [\hat{A}_1^{\dagger}, \hat{A}_1] + q^2 [\hat{A}_2^{\dagger}, \hat{A}_2] \Rightarrow p^2 + q^2 = 1;$
- $[\hat{a}_1^{\dagger}, \hat{a}_2] = 0 = pq[\hat{A}_1^{\dagger}, \hat{A}_1] pq[\hat{A}_2^{\dagger}, \hat{A}_2] \Rightarrow pq pq = 0.$

Para que \hat{H}_s possa ser escrito na forma diagonal (2.12), $p, q, \Omega_1 \in \Omega_2$ devem obedecer às seguintes equações:

$$\Omega_1 = \omega_1 p^2 + \omega_2 q^2 + 2\lambda p q, \qquad (2.13)$$

$$\Omega_2 = \omega_1 q^2 + \omega_2 p^2 - 2\lambda p q, \qquad (2.14)$$

$$(\omega_1 - \omega_2)pq + \lambda(q^2 - p^2) = 0.$$
 (2.15)

Observa-se por estas equações que, se $\lambda = 0$, então p = 0 ou q = 0. Se $\lambda \neq 0$ estas equações podem ser resolvidas, encontrando-se as seguintes soluções:

$$p^{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\omega_{1} - \omega_{2}}{\sqrt{(\omega_{1} - \omega_{2})^{2} + 4\lambda^{2}}},$$
(2.16)

$$q^{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\omega_{1} - \omega_{2}}{\sqrt{(\omega_{1} - \omega_{2})^{2} + 4\lambda^{2}}}.$$
 (2.17)

Para $\Omega_1 \in \Omega_2$, temos:

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \frac{\sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\lambda^2}}{2}, \qquad (2.18)$$

$$\Omega_2 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - \frac{\sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\lambda^2}}{2}.$$
 (2.19)

2.2.2 Transformação de Base

Uma vez que conhecemos a relação entre os operadores de criação e aniquilação do campo e aqueles que diagonalizam o Hamiltoniano do sistema, podemos também relacionar os estados de número, do campo das cavidades sem interação, com os autovetores do Hamiltoniano completo.

Para isso, vamos supor que o estado de vácuo é o mesmo nas duas representações:

$$|0,0\rangle_a = |0,0\rangle_A = |0,0\rangle,$$
 (2.20)

onde o índice "a" indica os estados de número usuais, ou seja, os autovetores de $\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_1$ e $\hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_2$, e o índice "A" indica os autovetores de H_S .

Escrevendo os estados de número originais em termos dos respectivos operadores de criação, temos:

$$|m_1, m_2\rangle_a = \frac{(\hat{a}_1^{\dagger})^{m_1}}{\sqrt{m_1!}} \frac{(\hat{a}_2^{\dagger})^{m_2}}{\sqrt{m_2!}} |0, 0\rangle.$$
(2.21)

Substituindo nesta equação $a_1^{\dagger} \in a_2^{\dagger}$ pelos novos operadores de criação e aniquilação através das transformações (2.11), temos:

$$|m_1, m_2\rangle_a = \frac{(p\hat{A}_1^{\dagger} + q\hat{A}_2^{\dagger})^{m_1}}{\sqrt{m_1!}} \frac{(q\hat{A}_1^{\dagger} - p\hat{A}_2^{\dagger})^{m_2}}{\sqrt{m_2!}} |0, 0\rangle_A.$$
(2.22)

Uma vez que \hat{A}_1^{\dagger} e \hat{A}_2^{\dagger} comutam, podemos utilizar o binômio de Newton para expandir as potencias em m_1 e m_2 :

$$(a+b)^{N} = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{N!(N-n)!} a^{N} b^{(N-n)},$$

$$|m_{1}, m_{2}\rangle_{a} = \sum_{M_{1}=0}^{m_{1}} \sum_{M_{2}=0}^{m_{2}} \frac{\sqrt{m_{1}!}}{M_{1}!(m_{1}-M_{1})!} \frac{\sqrt{m_{2}!}}{M_{2}!(m_{2}-M_{2})!} \times (2.23)$$

$$(-1)^{(m_{2}-M_{2})}(p)^{(M_{1}+m_{2}-M_{2})}(q)^{(M_{2}+m_{1}-M_{1})} \times (\hat{A}_{1}^{\dagger})^{N_{1}+N_{2}} (A_{2}^{\dagger})^{(m_{1}+m_{2}-N_{1}-N_{2})} |0,0\rangle.$$

Aplicando os operadores A_1^{\dagger} e A_2^{\dagger} no estado de vácuo, obtemos a relação entre as duas bases:

$$|m_1, m_2\rangle_a = \sum_{M_1=0}^{m_1} \sum_{M_2=0}^{m_2} Q(m_1, m_2, M_1, M_2) |M_1 + M_2, m_1 + m_2 - M_1 - M_2\rangle_A,$$
(2.24)

onde

$$Q(m_1, m_2, M_1, M_2) = (-1)^{(m_2 - M_2)} p^{(m_2 - M_2 + M_1)} q^{(m_1 - M_1 + M_2)} \times (2.25)$$
$$\frac{\sqrt{m_1! m_2! (M_1 + M_2)! (m_1 + m_2 - M_1 - M_2)!}}{M_1! M_2! (m_1 - M_1)! (m_2 - M_2)!}.$$

No Apêndice A está demostrada uma forma alternativa para encontrar uma relação entre estas duas base de estados, mostrando que esta relação pode ser escrita em termos de uma única somatória:

$$|m_1, m_2\rangle_a = \sum_{M=0}^{m_1+m_2} P(M, m_1, m_2) |M, m_1 + m_2 - M\rangle_A,$$
 (2.26)

onde

$$P(M, m_1, m_2) = \sum_{M_1=0}^{m_1} \sum_{M_2=0}^{m_2} Q(m_1, m_2, M_1, M_2) \delta_{M_1+M_2, M}.$$
 (2.27)

A vantagem de utilizar a relação (2.26) em vez de (2.24) é que o fato de haver apenas uma somatória em vez de duas, facilitando os cálculos computacionais. A desvantagem é que na demonstração mostrada no Apêndice A chega-se apenas a uma relação de recorrência e não a uma forma fechada para $P(M, m_1, m_2)$.

2.3 Evolução Temporal do Sistema

A evolução temporal do operador densidade do sistema é dada pela equação de Von Neuman:

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [H_S, \rho]$$

Com
o ${\cal H}_S$ não depende explicitamente do tempo, a solução desta equação
é:

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^{\dagger}(t),$$
(2.28)

onde

$$U(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}H_S t\right].$$

Para um estado inicial genérico, do tipo

$$\rho(0) = \sum_{N_1, N_2=0}^{\infty} \sum_{M_1, M_2=0}^{\infty} A(N_1, N_2, M_1, M_2) |N_1, N_2\rangle \langle M_1, M_2|_A, \quad (2.29)$$

o operador densidade depende do tempo da seguinte maneira:

$$\rho(t) = \sum_{N_1, N_2=0}^{\infty} \sum_{M_1, M_2=0}^{\infty} A(N_1, N_2, M_1, M_2) \times (2.30)$$
$$\exp\left[-i\Omega_1(N_1 - M_1)t - i\Omega_2(N_2 - M_2)t\right] |N_1, N_2\rangle \langle M_1, M_2|_A.$$

2.3.1 Número médio de fótons nas cavidades

Para analizar o comportamento deste sistema, vamos primeiramente verificar o que acontece com o número médio de fótons nas cavidades. Este cálculo é feito de maneira padrão:

$$\langle \hat{n} \rangle = Tr\{\rho(t)\hat{n}\},\$$

sendo $\rho(t)$ dado por (2.30). Efetuando-se este cálculo, o número médio de fótons nas cavidades em função do tempo resulta em:

$$\langle \hat{n}_i \rangle = \sum_{N_1, N_2} (K_i^2 L_1 + J_i^2 L_2) A(L_1, L_2, L_1, L_2)$$

$$+ (-1)^{i+1} pq \sum_{L_1, L_2} \sqrt{L_1 + 1} \sqrt{L_2 + 1} \times$$

$$\{ A(L_1 + 1, L_2, L_1, L_2 + 1) \exp\left[-i(\Omega_1 - \Omega_2)t\right] +$$

$$A(L_1, L_2 + 1, L_1 + 1, L_2) \exp\left[i(\Omega_1 - \Omega_2)t\right] \},$$

$$(2.31)$$

onde o índice "i" indica o número médio de fótons para as cavidades 1 ou 2, $K_1 = J_2 = p$ e $K_2 = J_1 = q$.

Se as cavidades forem preparadas inicialmente nos estados de número $|n_1\rangle$ e $|n_2\rangle$, temos, de acordo com (A.8):

$$\rho(0) = |n_1, n_2\rangle \langle n_1, n_2|_a$$

$$= \sum_{N=0}^{n_1+n_2} \sum_{M=0}^{n_1+n_2} P(N, n_1, n_2) P(M, n_1, n_2) \times |N, n_1 + n_2 - N\rangle \langle M, n_1 + n_2 - M|_A.$$
(2.32)

Comparando-se esta equação com (2.29), encontramos a seguinte relação:

$$A(N_1, N_2, M_1, M_2) = P(N_1, n_1, n_2) P(M_1, n_1, n_2) \times$$

$$\delta_{N_1 + N_2, n_1 + n_2} \delta_{M_1 + M_2, n_1 + n_2}.$$
 (2.33)

Portanto, no caso de estado de Fock, o número médio de fótons em função do tempo é:

$$\langle \hat{n}_i \rangle = \sum_{L=0}^{n_1+n_2} \left[K_i^2 L + J_i^2 (n_1 + n_2 - L) \right] \left[P(L, n_1, n_2) \right]^2 + (2.34)$$

$$(-1)^{i+1} 2pq \sum_{L=0}^{n_1+n_2-1} \sqrt{L+1} \sqrt{n_1 + n_2 - L} \times$$

$$P(L+1, n_1, n_2) P(L, n_1, n_2) \cos \left[(\Omega_1 - \Omega_2) t \right].$$

$$(2.35)$$

Nós podemos observar que, neste caso, o número médio de fótons das duas cavidades oscila no tempo com freqüência $\Omega_1 - \Omega_2$.

Capítulo 3

Acoplamento entre Duas Cavidades e um Reservatório Térmico

Neste capítulo é discutido o trabalho de Hashem Zoubi *et al.* [3] sobre duas cavidades acopladas interagindo com o reservatório térmico. Na seção 1.6, apresentamos a equação mestra do sistema onde apenas uma cavidade interage com o reservatório. Neste capítulo, uma segunda cavidade é incluída no sistema utilizando como base as transformações apresentadas no Capítulo 2.

Vamos considerar que a cavidade 1 está acoplada à cavidade 2 e ao reservatório R e que a cavidade 2 não possui perdas – está em contato apenas com a cavidade 1. Vamos supor que este reservatório é composto por um ensemble de muitos osciladores harmônicos, cujo Hamiltoniano é dado pela equação (1.68). O Hamiltoniano de acoplamento entre um único modo da cavidade 1 e o reservatório térmico é escrito como:

$$\hat{H}_{1R} = -\left(\hat{a}_{1}^{\dagger} + \hat{a}_{1}\right)\sum_{i}\left(g_{i}\hat{b}_{i}^{\dagger} + g_{i}^{*}\hat{b}_{i}\right).$$

Assim, o Hamiltoniano do sistema total é

$$\hat{H}_{total} = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_{1R}.$$

Podemos escrever \hat{H}_S na forma diagonal, utilizando a transformação (2.6) que leva $a_1 e a_1^{\dagger}$ para $A_1, A_1^{\dagger}, A_2 e A_2^{\dagger}$ e reescrever \hat{H}_{1R} . Por esta transformação,

$$a_1 = \sin(\theta) \left(S_{11}^+ A_1 - S_{11}^- A_1^\dagger \right) + \cos(\theta) \left(S_{21}^+ A_2 - S_{21}^- A_2^\dagger \right).$$

Assim, o Hamiltoniano total deste sistema fica:

$$\hat{H}_{total} = \hbar\Omega_1(\hat{A}_1^{\dagger}\hat{A}_1 + \frac{1}{2}) + \hbar\Omega_2(\hat{A}_2^{\dagger}\hat{A}_2 + \frac{1}{2}) + \sum_i \hbar\omega_i(\hat{b}_i^{\dagger}\hat{b}_i + \frac{1}{2}) \\
- \left\{\beta_1(\hat{A}_1^{\dagger} + \hat{A}_1) + \beta_2(\hat{A}_2^{\dagger} + \hat{A}_2)\right\} \sum_i (g_i^*\hat{b}_i^{\dagger} + g_i\hat{b}_i),$$
(3.1)

onde

$$\beta_1 = \sin(\theta)(S_{11}^+ - S_{11}^-) \tag{3.2}$$

$$\beta_2 = \cos(\theta)(S_{21}^+ - S_{21}^-). \tag{3.3}$$

Nota-se que, se a cavidade 2 também interagisse com o reservatório R por um Hamiltoniano do tipo

$$\hat{H}_{2R} = -\left(\hat{a}_{2}^{\dagger} + \hat{a}_{2}\right)\sum_{i}\left(g_{i}\hat{b}_{i}^{\dagger} + g_{i}^{*}\hat{b}_{i}\right),$$

 \hat{H}_{total} possuiria a mesma forma, alterando-se apenas as constantes $\beta_1 \in \beta_2$, as quais passariam a ser $\beta_1 = \sin(\theta)(S_{11}^+ - S_{11}^-) + \cos(\theta)(S_{12}^+ - S_{12}^-) \in \beta_2 = \sin(\theta)(S_{22}^- - S_{22}^+) + \cos(\theta)(S_{21}^+ - S_{21}^-).$

O Hamiltoniano total (3.1) possui agora a forma de um Hamiltoniano de dois osciladores harmônicos independentes ambos acoplados fracamente ao reservatório térmico R. Assim, podemos fazer uma analogia com o caso visto na seção 1.6 e escrever a equação mestra que rege este sistema como:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{1}{\hbar} \left[\hat{H}_S, \rho(t) \right] + \left(\frac{d\rho(t)}{dt} \right)_{rel}, \qquad (3.4)$$

onde

$$\begin{split} \left(\frac{d\rho(t)}{dt}\right)_{rel} &= \beta_1^2 \left\{ \frac{\Gamma(\Omega_1) \left(1 + \bar{N}(\Omega_1)\right)}{2} \left(2\hat{A}_1 \rho \hat{A}_1^{\dagger} - \rho \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 - \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 \rho\right) \\ &+ \frac{\Gamma(\Omega_1) \bar{N}(\Omega_1)}{2} \left(2\hat{A}_1^{\dagger} \rho \hat{A}_1 - \rho \hat{A}_1 \hat{A}_1^{\dagger} - \hat{A}_1 \hat{A}_1^{\dagger} \rho\right) \right\} \\ &+ \beta_2^2 \left\{ \frac{\Gamma(\Omega_2) \left(1 + \bar{N}(\Omega_2)\right)}{2} \left(2\hat{A}_2 \rho \hat{A}_2^{\dagger} - \rho \hat{A}_2^{\dagger} \hat{A}_2 - \hat{A}_2^{\dagger} \hat{A}_2 \rho\right) \\ &+ \frac{\Gamma(\Omega_2) \bar{N}(\Omega_2)}{2} \left(2\hat{A}_2^{\dagger} \rho \hat{A}_2 - \rho \hat{A}_2 \hat{A}_2^{\dagger} - \hat{A}_2 \hat{A}_2^{\dagger} \rho\right) \right\}, \end{split}$$

 $\rho(t) = Tr_R\{\sigma_{12} \otimes \sigma_R\}, \text{ \'e o operador densidade reduzido referente ao sis$ $tema formado pelas cavidades acopladas. <math>\Gamma(\Omega_1) \in \overline{N}(\Omega_1)$ são as constantes de amortecimentos efetivas dadas respecticvamente pelas equações (1.84) e (1.85).

3.1 Dinâmica do Sistema Acoplado

Vamos agora calcular o número médio de fótons em função do tempo na cavidade 2 (cavidade sem acoplamento com o reservatório). Para a outra cavidade o procedimento é análogo. De acordo com a transformação M, temos:

$$\bar{n}_{2} = \langle a_{2}^{\dagger}a_{2} \rangle$$

$$= \sin^{2}(\theta) \left[T_{22}^{2+} \left(\langle A_{2}^{\dagger}A_{2} \rangle + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}T_{22}^{2-} \left(\langle (A_{2}^{\dagger})^{2} \rangle + \langle (A_{2})^{2} \rangle \right) \right]$$

$$+ \cos^{2}(\theta) \left[T_{11}^{2+} \left(\langle A_{1}^{\dagger}A_{1} \rangle + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}T_{11}^{2-} \left(\langle (A_{1}^{\dagger})^{2} \rangle + \langle (A_{1})^{2} \rangle \right) \right]$$

$$- \sin(\theta) \cos(\theta) \left[T_{12}^{2+} \left(\langle A_{1}A_{2}^{\dagger} \rangle + \langle A_{1}^{\dagger}A_{2} \rangle \right)$$

$$- T_{12}^{2-} \left(\langle A_{1}A_{2} \rangle + \langle A_{1}^{\dagger}A_{2}^{\dagger} \rangle \right) \right] + \frac{1}{2},$$
(3.5)

onde $T_{i,j}^{k\pm} = \frac{\Omega_i \Omega_j \pm \omega_k^2}{2\omega_k \sqrt{\Omega_i \Omega_j}}$. (i,j,k=1,2).

Vamos calcular o valor médio de $A_1^{\dagger}A_1$. As outras médias necessárias são feitas de modo análogo.

Multiplicando-se a equação mestra (3.4) por $A_1^{\dagger}A_1$ e tomando-se o traço, obtemos:

$$Tr\left[\frac{d\rho}{dt}A_{1}^{\dagger}A_{1}\right] = \frac{d}{dt}Tr\left[\rho A_{1}^{\dagger}A_{1}\right]$$

$$= \frac{d\langle A_{1}^{\dagger}A_{1}\rangle}{dt} = -\beta_{1}^{2}\Gamma_{1}[\langle A_{1}^{\dagger}A_{1}\rangle - \bar{N}(\Omega_{1})].$$
(3.6)

Obtemos, para as outras médias necessárias, equações semelhantes. Para $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$, temos:

$$\frac{d\langle A_2^{\dagger}A_2\rangle}{dt} = -\beta_2^2 \Gamma \left[\langle A_2^{\dagger}A_2 \rangle - \bar{N}(\Omega_2) \right], \qquad (3.7)$$

$$\frac{d\langle A_j^2 \rangle}{dt} = -\left[2i\Omega_j + \Gamma\beta_j^2\right] \langle A_j^2 \rangle,$$

$$\frac{d\langle A_2A_1 \rangle}{dt} = -\left[i(\Omega_1 + \Omega_2) + \frac{1}{2}\Gamma(\beta_1^2 + \beta_2^2)\right] \langle A_2A_1 \rangle,$$

$$\frac{d\langle A_2^{\dagger}A_1 \rangle}{dt} = -\left[i(\Omega_1 - \Omega_2) + \frac{1}{2}\Gamma(\beta_1^2 + \beta_2^2)\right] \langle A_2^{\dagger}A_1 \rangle.$$

As soluções destas equações diferenciais são, respectivamente:

$$\langle A_j^{\dagger} A_j \rangle = \bar{N}(\Omega_j) + (C_{1j} - \bar{N}(\Omega_j)) e^{-\Gamma \beta_j^2 t},$$

$$\langle A_j^2 \rangle = C_{2j} \exp\left[-2i\Omega_j t - \Gamma \beta_j^2 t/2\right],$$

$$\langle A_2 A_1 \rangle = C_3 \exp\left[-i(\Omega_1 + \Omega_2)t - \Gamma (\beta_1^2 + \beta_2^2)t/2\right],$$

$$\langle A_2^{\dagger} A_1 \rangle = C_4 \exp\left[-i(\Omega_1 - \Omega_2)t - \Gamma (\beta_1^2 + \beta_2^2)t/2\right].$$

$$(3.8)$$

 $C_{1j}, C_{2j}, C_3 \in C_4$, para j = 1, 2, são constantes que dependem das condições iniciais das cavidades. São obtidas escrevendo-se $A_i^{\dagger}A_j \in A_iA_j$ em termos de $a_i \in a_i^{\dagger}$, calculando-se em seguida a média com os estados iniciais do oscilador acoplado. Para $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, considerando-se que inicialmente a cavidade 1 está no estado de vácuo e a cavidade 2 no estado de número com um fóton $(|n_1, n_2\rangle = |0, 1\rangle)$, temos:

$$C_{1j} = \frac{\omega - (-1)^j \lambda}{2\sqrt{\omega^2 - (-1)^j 2\lambda\omega}}, \qquad C_{2j} = \frac{-(-1)^j \lambda}{2\sqrt{\omega^2 - (-1)^j 2\lambda\omega}},$$
$$C_3 = \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - 2\lambda\omega}}{2\sqrt[4]{\omega^4 - 4\lambda^2\omega^2}}, \qquad C_4 = \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - 2\lambda\omega}}{2\sqrt[4]{\omega^4 - 4\lambda^2\omega^2}}.$$

Desta forma, a equação (3.5) fica:

$$\bar{n}_{2}(t) = \zeta^{+}\bar{N}(\Omega_{1}) \left[1 - \exp(-\Gamma\beta_{1}^{2}t)\right]$$

$$+ \zeta^{-}\bar{N}(\Omega_{2}) \left[1 - \exp(-\Gamma\beta_{2}^{2}t)\right] + \frac{1}{2}(\zeta^{+} + \zeta^{-} - 1)$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{1 - \zeta^{+} + \eta^{+}[1 - \cos(2\Omega_{1}t)]\right\} \exp(-\Gamma\beta_{1}^{2}t)$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{1 - \zeta^{-} + \eta^{-}[1 - \cos(2\Omega_{2}t)]\right\} \exp(-\Gamma\beta_{2}^{2}t)$$

$$+ \frac{1}{4} \left\{(1 - \xi) \cos[(\Omega_{1} + \Omega_{2})t] \right\}$$

$$+ (1 + \xi) \cos[(\Omega_{1} - \Omega_{2})t] \exp\left[-\Gamma(\beta_{1}^{2} + \beta_{2}^{2})t/2\right],$$
(3.9)

onde

$$\zeta^{\pm} = \frac{\omega \pm \lambda}{2\sqrt{\omega^2 \pm 2\lambda\omega}}, \qquad \eta^{\pm} = \frac{\lambda^2}{\omega^2 \pm 2\lambda\omega}, \qquad \xi = \frac{\omega^2 - 2\lambda^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4\lambda^2}}.$$

O calculo para a cavidade 1 é análogo, resultando em:

$$\bar{n}_{1}(t) = \zeta^{+}\bar{N}(\Omega_{1}) \left[1 - \exp(-\Gamma\beta_{1}^{2}t)\right]$$

$$+ \zeta^{-}\bar{N}(\Omega_{2}) \left[1 - \exp(-\Gamma\beta_{2}^{2}t)\right] + \frac{1}{2}(\zeta^{+} + \zeta^{-} - 1)$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{1 - \zeta^{+} + \eta^{+}[1 - \cos(2\Omega_{1}t)]\right\} \exp(-\Gamma\beta_{1}^{2}t)$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{1 - \zeta^{-} + \eta^{-}[1 - \cos(2\Omega_{2}t)]\right\} \exp(-\Gamma\beta_{2}^{2}t)$$

$$- \frac{1}{4} \left\{(1 - \xi) \cos[(\Omega_{1} + \Omega_{2})t]\right]$$

$$+ (1 + \xi) \cos[(\Omega_{1} - \Omega_{2})t] \exp\left[-\Gamma(\beta_{1}^{2} + \beta_{2}^{2})t/2\right].$$
(3.10)

No Apêndice B são apresentadas as equações de $\bar{n}_1(t) \in \bar{n}_2(t)$ para outras condições iniciais das cavidades.

As figuras (3.1) e (3.2) foram feitas a partir das equações (3.9) e (3.10), para diferentes valores de $\lambda \in \Gamma$. Estes gráficos mostram que $\bar{n}_1 \in \bar{n}_2$ comportamse como osciladores harmônicos amortecidos. Em média, o único fóton que inicialmente está na cavidade 2 oscila entre as duas cavidades e, por fim, escapa para o reservatório térmico. Nota-se que o aumento de Γ aumenta a perda de fótons das cavidades para o reservatório. Por outro lado, o aumento da constante de acoplamento entre as cavidades λ aumenta tanto a freqüência de oscilação como a queda exponencial das curvas.

Para demonstrar a importância das considerações feitas sobre a matriz de transformação M, equação (2.6), estamos apresentando nas figuras (3.3) e (3.4) resultados onde o determinante de M é nulo: caso em que $\lambda = 0$ e $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Uma vez que, para estas figuras, o acoplamento entre as cavidades é considerado nulo, a cavidade 2 está isolada. Entretanto, as figuras sugerem que a cavidade 2 possui o mesmo grau de dissipação que a cavidade 1, contrariando o esperado.

Podemos entender o porquê do aparecimento dessa dissipação observando as equações (2.9) e (2.10), para os termos que definem a transformação dos operadores de criação e aniquilação $\hat{a}_i \in \hat{a}_i^{\dagger} \in \hat{A}_i^{\dagger}$ discutida na seção 2.1. Verificamos que, para $\lambda = 0$, os termos s e c, equação (2.10), ficam da seguinte forma:

$$s = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}, \qquad c = 0,$$

Portanto, para $\omega_1 = \omega_2$, s = c = 0 e os valores de $\sin(\theta) e \cos(\theta)$, equações (2.9), ficam indefinidos. Isto implica que a matriz de transformação M, equação (2.6) e as constantes β_1 e β_2 , equações (3.2) e (3.3), também não possuem valores bem determinados.

Por outro lado, se $\lambda = 0$ mas $\omega_1 \neq \omega_2$, não ocorre nenhum tipo de divergência nas equações que definem a transformação M, equação (2.6). Neste caso, c = 0 mas $s \neq 0$. Portanto, $\sin(\theta) = 1$ e $\cos(\theta) = 0$, $\beta_1 = 1$ e $\beta_2 = 0$. Além disso, temos que $S_{ii}^+ = 1$ e $S_{ii}^- = 0$. Nesta circunstância, a matriz M fica diagonal com elementos $M_{11} = M_{22} = -M_{33} = -M_{44} = 1$. Podemos então mostrar, utilizando as equações (3.8),que:

Portanto, quando $\lambda = 0$ mas $\omega_1 \neq \omega_2$, o número médio de fótons da cavidade 2 (cavidade sem interação com o reservatório) permanece constante no tempo. Por outro lado, o número médio de fótons para a cavidade 1 decai exponencialmente com o tempo com uma taxa de decaimento igual a Γ , que é o mesmo resultado encontrado na seção 1.6.

Desta forma, constatamos que o aparecimento do decaimento não esperado nas figuras (3.3) e (3.4), onde a constante de acoplamento entre as cavidades (λ) é nula, ocorre apenas quando $\omega_1 = \omega_2$, devido ao fato de que nesta situação a transformação M é singular.



Figura 3.1: Número médio de fótons em função do tempo para $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\Gamma/\omega = 0,01$ e $\lambda/\omega = 0,2$. Gráfico feito a partir das equações (3.9) e (3.10).



Figura 3.2: Número médio de fótons em função do tempo para $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\Gamma/\omega = 0,05$ e $\lambda/\omega = 0,1$. Gráfico feito a partir das equações (3.9) e (3.10).



Figura 3.3: Número médio de fótons em função do tempo para $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\Gamma/\omega = 0,05 \text{ e } \lambda/\omega = 0$. Neste caso, os números médios de fótons iniciais nas cavidades foram $\bar{n}_1(0) = 2 \text{ e } \bar{n}_2(0) = 1$.



Figura 3.4: Número médio de fótons em função do tempo para $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\Gamma/\omega = 0,05 \text{ e } \lambda/\omega = 0$. Neste caso, os números médios de fótons iniciais nas cavidades foram $\bar{n}_1(0) = \bar{n}_2(0) = 1$.

Capítulo 4

Interação entre Cavidades Ópticas e Átomos de Dois Níveis

No Capítulo 3, observamos que a presença de uma segunda cavidade no sistema cavidade-reservatório térmico provoca uma diminuição na taxa de perda de energia para o ambiente externo. Vamos agora estudar que efeitos a presença desta segunda cavidade provoca em um sistema onde a primeira cavidade interage com um átomo de dois níves. Consideremos então o caso onde um átomo de dois níveis é colocado na cavidade 1, a qual ainda interage com a cavidade 2. Na aproximação de ondas girantes, o Hamiltoniano deste sistema fica:

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + g\hbar(\hat{a}_1^{\dagger}\sigma_- + \hat{a}_1\sigma_+), \qquad (4.1)$$

onde H_S é o Hamiltoniano do sistema formado pelas duas cavidades, dado por (2.5). Se $|a\rangle$ e $|b\rangle$ são os estados excitado e fundamental do átomo cuja energia de transição é $\hbar\omega_a$, então

$$\begin{aligned}
\sigma_{+} &= |a\rangle \langle b|, \\
\sigma_{-} &= |b\rangle \langle a|, \\
\sigma_{z} &= |a\rangle \langle a| - |b\rangle \langle b|.
\end{aligned}$$
(4.2)

Para resolver este sistema, utilizaremos as transformações (2.11) para escrever H_S na forma diagonalizada (2.12). Desta forma, o Hamiltoniano

deste sistema pode ser escrito na forma:

$$\hat{H} = \hat{H}_{S} + \frac{\hbar\omega_{a}}{2}\sigma_{z} + g\hbar(p\hat{A}_{1}^{\dagger} + q\hat{A}_{2}^{\dagger})\sigma_{-} + g\hbar(p\hat{A}_{1} + q\hat{A}_{2})\sigma_{+}.$$
(4.3)

4.1 Evolução Temporal do Sistema

Para estudar a evolução temporal deste sistema, trabalhamos na representação de interação, de modo análogo ao utilizado na seção 1.5.3. Seja a transformação U que leva o estado do sistema da representação de Schroedinger para a de interação

$$\left|\psi_{S}(t)\right\rangle = \hat{U}\left|\psi_{I}(t)\right\rangle,$$

onde

$$U = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}H_o t\right],\tag{4.4}$$

 $e H_o = H_S + H_A.$

A evolução temporal do vetor de estado na representação de interação é dada por:

$$\left|\psi_{I}(t)\right\rangle = \hat{U}_{o}\left|\psi_{I}(0)\right\rangle = \hat{U}_{o}\left|\psi_{S}(0)\right\rangle,$$

onde

$$\begin{split} \tilde{H}_I \hat{U}_o(t) &= i\hbar \frac{\partial \hat{U}_o(t)}{\partial t}, \\ \tilde{H}_I &= \hat{U}^\dagger \hat{H}_{AS} \hat{U}, \\ \hat{H}_{AS} &= g\hbar (p \hat{A}_1^\dagger + q \hat{A}_2^\dagger) \sigma_- + g\hbar (p \hat{A}_1 + q \hat{A}_2) \sigma_+. \end{split}$$

Uma vez que

$$\exp\left[i\Omega_{j}\hat{A}_{j}^{\dagger}\hat{A}_{j}t\right]\hat{A}_{j}\exp\left[-i\Omega_{j}\hat{A}_{j}^{\dagger}\hat{A}_{j}t\right] = \hat{A}_{j}\exp\left[-i\Omega_{j}t\right],\\ \exp\left[i\omega_{a}t\sigma_{z}/2\right]\sigma_{+}\exp\left[-i\omega_{a}t\sigma_{z}/2\right] = \sigma_{+}\exp\left[i\omega_{a}t\right],\\ \exp\left[i\omega_{a}t\sigma_{z}/2\right]\sigma_{-}\exp\left[-i\omega_{a}t\sigma_{z}/2\right] = \sigma_{-}\exp\left[-i\omega_{a}t\right],$$

o Hamiltoniano de interação fica:

$$\tilde{H}_I = \hbar g \left\{ p \hat{A}_1 \exp\left[-i\Omega_1 t\right] + q \hat{A}_2 \exp\left[-i\Omega_2 t\right] \right\} \sigma_+ \exp\left[i\omega_a t\right] + \text{c.h.}$$
(4.5)

Este Hamiltoniano é dependente do tempo, o que dificulta a resolução do problema. Por isso, estudamos um caso particular onde $\Omega_2 = \omega_a$ e utilizamos uma aproximação considerando $\Omega_1 \gg \omega_a$.

Caso em que $\Omega_2 = \omega_a$ e $\Omega_1 \gg \Omega_2$

De acordo com as definições da seção 2.2.1 e as equações (2.18) e (2.19), podemos escrever Ω_1 e Ω_2 como

$$\Omega 1 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \frac{\sqrt{\delta^2 + 4\lambda^2}}{2}, \qquad (4.6)$$

$$\Omega 2 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - \frac{\sqrt{\delta^2 + 4\lambda^2}}{2} = \omega_a, \qquad (4.7)$$

onde $\delta = \omega_1 - \omega_2$.

A equação (4.7) impõe uma relação entre as freqüências do átomo e das cavidades e a constante de acoplamento λ . Podemos desta forma determinar um deles em função dos outros. Por conveniência, vamos escolher λ como variável dependente, sendo escrita como:

$$\lambda^2 = \delta_a^2 - \delta \delta_a,$$

onde $\delta_a = \omega_1 - \omega_a$ e $\delta = \omega_1 - \omega_2$.

De acordo com (4.6) e (4.7), a situação $\Omega_1 \gg \Omega_2$ ocorre quando

$$\omega_1 + \omega_2 \gg 2\omega_a \iff 2\delta_a - \delta \gg 0$$

Neste caso, o Hamiltoniano de interação (4.5) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\tilde{H}_I = \hbar g \left\{ p \hat{A}_1 \exp\left[-i(\Omega_1 - \Omega_2)t\right] + q \hat{A}_2 \right\} \sigma_+ + \text{c.h.}$$
(4.8)

Como estamos supondo que $\Omega_1 \gg \Omega_2$, a exponencial contendo $(\Omega_1 - \Omega_2)$ oscila muito rapidamente. Utilizando-se a aproximação de ondas girantes, podemos desprezar os termos que multiplicam esta exponencial, obtendo-se o seguinte Hamiltoniano de interação:

$$\tilde{H}_I = \hbar g q \left\{ \hat{A}_2 \sigma_+ + \hat{A}_2^{\dagger} \sigma_- \right\}.$$
(4.9)

Este Hamiltoniano possui a forma do Hamiltoniano de interação do modelo Jaynes-Cummings (1.62), trocando-se os operadores de criação e aniquilação convencionais por A_2^{\dagger} e A_2 .

Portanto, a evolução temporal do operador densidade do sistema é dada, em analogia ao caso do modelo J-C convencional, discutido na seção 1.5.3, por:

$$\rho(t) = \hat{U}\hat{U}_o\rho(0)\hat{U}_o^{\dagger}\hat{U}^{\dagger}, \qquad (4.10)$$

onde \hat{U} é dado pela equação (4.4) e \hat{U}_o por

$$\hat{U}_{o} = \cos\left(qgt\sqrt{\hat{A}_{2}\hat{A}_{2}^{\dagger}}\right)|a\rangle\langle a| + \cos\left(qgt\sqrt{\hat{A}_{2}^{\dagger}\hat{A}_{2}}\right)|b\rangle\langle b| \qquad (4.11)$$

$$- i\frac{\sin\left(qgt\sqrt{\hat{A}_{2}\hat{A}_{2}^{\dagger}}\right)}{\sqrt{\hat{A}_{2}\hat{A}_{2}^{\dagger}}}\hat{A}_{2}|a\rangle\langle b| - i\frac{\sin\left(qgt\sqrt{\hat{A}_{2}^{\dagger}\hat{A}_{2}}\right)}{\sqrt{\hat{A}_{2}^{\dagger}\hat{A}_{2}}}\hat{A}_{2}^{\dagger}|b\rangle\langle a|.$$

Como este operador de evolução temporal possui termos com $\hat{A}_2 \hat{A}_2^{\dagger}$, é mais fácil escrever as condições iniciais na nova base, que é formada pelos autovetores de $\hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1$ e $\hat{A}_2^{\dagger} \hat{A}_2$, analisada na seção 2.2.2, em vez de transformar os operadores \hat{A}_2 e \hat{A}_2^{\dagger} nos operadores de criação e aniquilação antigos (\hat{a}_1 , \hat{a}_1^{\dagger} , \hat{a}_2 e \hat{a}_2^{\dagger}). Neste sentido, é evidente a importância do estudo feito na seção 2.2.2 sobre a mudança de base.

4.2 Análise das Aproximações

Até este momento, utilizamos várias aproximações: aplicamos a aproximação de ondas girantes no Hamiltoniano total do sistema e a aproximação na seção anterior onde $\Omega_1 \gg \Omega_2$. Vamos analisar agora a validade destas aproximações e comparar com alguns valores experimentais.

Na literatura, encontram-se os seguintes valores para as constantes envolvidas no acoplamento entre duas cavidades [19]:

- 1. freqüência da cavidade ou átomo: $\omega \sim 50 GHz$;
- 2. constante de acoplamento entre cavidade e átomo: $g \sim 25 kHz$

A aproximação de ondas girantes feita no Capítulo 2, é válida quando [25]:

$$\frac{g}{\omega} \ll 1$$
 e $\frac{\lambda}{\omega} \ll 1.$ (4.12)

Por outro lado, a aproximação feita na seção 4.1 é válida na situação em que:

$$\Delta \Omega \equiv \Omega_1 - \Omega_2 = \sqrt{\delta^2 + 4\lambda^2} \gg 0.$$
(4.13)

Quando $\delta = 0$, $\Delta \Omega = 2\lambda$. Portanto, λ deve estar no seguinte intervalo:

$$0 \ll \frac{\lambda}{g} \ll \frac{\omega}{g} \approx 10^6,$$

ou seja, quando o acoplamento entre as cavidades é muito mais forte que a interação entre a cavidade 1 e o átomo, porém fraco se comparado com a freqüência do campo.

Na próxima seção mostraremos alguns resultados numéricos utilizando os seguintes valores:

- g = 0.1;
- $\lambda = 25;$
- $\delta = 0;$
- $\delta_a = 25.$

4.3 Propriedades do Sistema

Para analisar o efeito da segunda cavidade sobre o sistema átomo-campo, calculamos o número médio de fótons para as duas cavidades $(\langle \hat{n}_1 \rangle (t) \in \langle \hat{n}_2 \rangle (t))$, a inversão atômica (w(t)) e a pureza do sistema $(\xi(t))$, definidos por:

$$\langle \hat{n}_i \rangle(t) = Tr\{\rho(t)\hat{a}_i^{\dagger}\hat{a}_i\},\tag{4.14}$$

sendo i = 1, 2 referente à cavidade 1 ou 2,

$$w(t) = \langle a | \rho(t) | a \rangle - \langle b | \rho(t) | b \rangle, \qquad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \xi_a &= Tr_a \{ [\rho_{1,2}]^2 \}, \\ \xi_1 &= Tr_1 \{ [\rho_{2,a}]^2 \}, \\ \xi_2 &= Tr_2 \{ [\rho_{1,a}]^2 \}, \end{aligned}$$
(4.16)

onde ξ_1 , ξ_2 e ξ_a são a medida da pureza para a cavidade 1, cavidade 2 e para o átomo respectivamente. Tr_i é o traço parcial em relação ao subsistema *i* e $\rho_{i,j} = Tr_i \{Tr_j \{\rho(t)\}\}$ é o operador densidade reduzido em relação ao terceiro subsistema.

Na análise deste sistema, consideramos o átomo inicialmente no estado excidado $(|a\rangle)$ e a cavidade 2 em um estado de número com n_2 fótons. Para a cavidade 1, consideramos três preparações iniciais: estado de número, mistura estatística térmica e estado coerente [16].

Estado de número

Vamos analizar estes parâmetros considerando a cavidade 2 preparada inicialmente no estado de vácuo $(n_2 = 0)$. A cavidade 1 consideramos inicialmente em um estado de número $|m_1\rangle$, com $m_1 = 0$ ou $m_1 = 20$.

Isto significa que o estado inicial do sistema pode ser escrito da seguinte forma:

$$|\psi(0)\rangle = |m_1, 0\rangle_a |a\rangle = \sum_{N=0}^{m_1} P(N, m_1, 0) |N, m_1 - N\rangle_A |a\rangle,$$
 (4.17)

onde $P(N, m_1, 0)$ é dado, de cordo com a seção 2.2.2, por:

$$P(N, m_1, 0) = \begin{cases} \frac{\sqrt{m_1!}}{\sqrt{N!(m_1 - N)!}} p^N q^{m_1 - N}, & \text{se } N \le m_1, \\ 0, & \text{se } N \ge m_1. \end{cases}$$
(4.18)

Observa-se que $[P(N, m_1, 0)]^2$ representa uma distribuição binomial [26] para o "número de fótons" relativos aos operadores $\hat{A}_1^{\dagger}\hat{A}_1 \in \hat{A}_2^{\dagger}\hat{A}_2$. Para esta distribuição, temos que $\langle \hat{A}_1^{\dagger}\hat{A}_1 \rangle = p^2 m_1 \in \langle \hat{A}_2^{\dagger}\hat{A}_2 \rangle = q^2 m_1$. No limite de $\bar{n} \to \infty \in p \to 0$, com $\bar{n}p$ sendo um valor finito, a distribuição binomial tende a uma Poisson [27]. A figura 4.1 mostra a distribuição Binomial e a Poisson para o mesmo valor médio.



Figura 4.1: Distribuição Binomial, com $p^2 = q^2 = \frac{1}{2}$, e distribuição Poisson, ambas para $\bar{n} = 10$.

Estado coerente

Outra condição inicial que consideramos é a cavidade 2 no estado de vácuo e a cavidade 1 em um estado coerente [28]:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{m_1=0}^{\infty} R_{m_1} |m_1, 0\rangle_a |a\rangle$$
 (4.19)

$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{N=0}^{m_1} P_{m_1} P(N, m_1, 0) |N, m_1 - N\rangle_A |a\rangle, \qquad (4.20)$$

onde $\left|P_{m_1}\right|^2$ é a distribuição de Poisson, dada por:

$$P_{m_1} = \exp\left(-\frac{|\alpha|}{2}\right) \frac{\alpha^{m_1}}{\sqrt{m_1!}},\tag{4.21}$$

sendo α um número complexo.

Nota-se que neste caso a distribuição do "número de fótons" relativos aos operadores $\hat{A}_1^{\dagger}\hat{A}_1$ e $\hat{A}_2^{\dagger}\hat{A}_2$ envolve tanto a Binomial quanto a Poisson, não sendo tão simples quanto no caso anterior.

Mistura estatística térmica

Por fim, consideramos a cavidade 2 em um estado de número com n_2 fótons e a cavidade 1 em uma mistura estatística térmica [28], sendo, portanto, o operador densidade deste sistema no instante inicial escrito, na base de estados de número original, como:

$$\rho(0) = \sum_{m_1=0}^{\infty} R_{m_1} |m_1, n_2\rangle_a \langle m_1, n_2|_a \otimes |a\rangle \langle a|, \qquad (4.22)$$

onde

$$R_{m_1} = \frac{(n_{th})^{m_1}}{(1+n_{th})^{m_1+1}},$$
(4.23)

e n_{th} é o número médio de fótons à temperatura T, dado por [28]:

$$n_{th} = \sum_{m_1=0}^{\infty} m_1 R_{m_1} = \frac{1}{\exp\{\hbar\omega_1/K_bT\} - 1}.$$

Escrito na nova base de números, $\rho(0)$ fica:

$$\rho(0) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{M,N=0}^{m_1+n_2} R_{m_1} P(N,m_1,n_2) P(M,m_1,n_2) \times (4.24)$$
$$|N,m_1+n_2-N\rangle_A \langle M,m_1+n_2-M|_A \otimes |a\rangle \langle a|,$$

4.3.1 Inversão Atômica

Para as três condições iniciais apresentadas, equações (4.17), (4.19) e (4.22), a equação para a inversão atômica possui o mesmo formato, mudando apenas a distribuição do número de fótons:

$$w(t) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{N=0}^{m_1+n_2} R_{m_1} (P(N, m_1, n_2))^2 \cos(2qgt\sqrt{m_1 + n_2 - N + 1}), \quad (4.25)$$

onde R_{m_1} depende da preparação inicial da cavidade 1 e é dado pela equação (4.23) no caso da mistura estatística. Para o estado coerente, $R_{m_1} = |P_{m_1}|^2$, onde P_{m_1} é dado por (4.21). No caso do estado de número $|n_1\rangle$, $R_{m_1} = \delta_{m_1,n_1}$.

Estado de número

As figuras 4.2 e 4.3 representam a inversão atômica em função do tempo feitas a partir da equação (4.25), com a cavidade 2 no estado de vácuo e a cavidade 1 em estado de número. Na primeira figura, onde $n_1 = 0$, observa-se um comportamento muito semelhante ao caso do J-C convencional, onde a inverção atômica oscila cossenoidalmente no tempo. A diferença está apenas na freqüência. Isto é possível de ser entendido observando a equação (4.18), a qual mostra que $P(N, m_1, 0) = \delta_{N,0}$, para $m_1 = 0$.

No caso da figura 4.3, onde $n_1 = 20$, a diferença encontrada em relação ao que acontece no J-C convencional é maior. Observa-se aqui o fenômeno de colapso e ressurgimento, mesmo ambas as cavidades estando em estados de número. Nota-se que, no modelo convencional, este fenômeno não ocorre quando a cavidade é inicialmente preparada em um estado de número, independentemente da quantidade de fótons.

Um outro aspecto interessante é que a figura 4.3 é semelhante à figura 1.1, a qual mostra o gráfico para a inversão atômica de um Jaynes-Cummings de uma cavidade, com o campo preparado inicialmente em um estado coerente



Figura 4.2: Inversão atômica em função do tempo para as duas cavidades inicialmente preparadas no estado de vácuo.

com $\alpha = 5$. Este comportamento pode ser entendido observando a equação da inversão atômica de ambos os casos:

$$w_{JC}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |P_n|^2 \cos(2gt\sqrt{n+1}), \qquad (4.26)$$

para o caso do J-C convencional, onde

$$P_n = \frac{\alpha^n e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{n!}},$$

e, para o caso de duas cavidades,

$$w(t) = \sum_{N=0}^{m_1} \left[P(N, m_1, 0) \right]^2 \cos(2qgt\sqrt{m_1 - N + 1}).$$
(4.27)

Há dois aspectos relevantes na comparação: a distribuição do número de fótons e a freqüência de Rabi. Embora a cavidade 1 esteja preparada inicialmente em um estado de número, o fato dela estar acoplada com a segunda cavidade faz com que a inversão atômica tenha uma somatória em N e um fator peso dado por $[P(N, m_1, 0)]^2$, o qual possui o papel similar ao de $|P_n|^2$ no caso do J-C convencional.



Figura 4.3: Inversão atômica em função do tempo para a cavidade 1 inicialmente preparada no estado de número com 20 fótons e a cavidade 2 no estado de vácuo.

Quanto à freqüência de Rabi, para o caso de duas cavidades, ela assume a forma

$$\Omega_R = qg\sqrt{m_1 - N + 1},\tag{4.28}$$

a qual é diferente do caso de uma cavidade:

$$\Omega_R = g\sqrt{n+1}.\tag{4.29}$$

Portanto, se estimarmos o tempo de ressurgimento para o caso de duas cavidades, baseados no que foi apresentado na seção 1.5.5, equação (1.66), encontramos que

$$2\pi k \approx qgt_R \sqrt{n_1 - \bar{N} + 1} - qgt_R \sqrt{n_1 - \bar{N}} \approx \frac{qgt_R}{\sqrt{n_1 - \bar{N}}}$$

$$\Rightarrow gt_R \approx \frac{2\pi k}{q} \sqrt{n_1 - \bar{N}},$$

$$(4.30)$$

sendo $\bar{N} = \langle \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 \rangle = p^2 m_1.$

Para os valores utilizados para o cálculo da figura 4.3, $\delta = 0$, que implica em $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n_1 = 20$ e $\bar{N} = p^2 n_1 = 10$, temos que

$$gt_R \approx 2\pi\sqrt{2}\sqrt{10} \approx 30,$$

valor que é observado na figura 4.3.

Estado coerente

A figura 4.4 mostra o comportamento da inversão atômica em função do tempo com a cavidade 1 preparada em um estado coerente com $\alpha = 3$ e a cavidade 2 em um estado de vácuo. Ao compararmos com o caso de uma cavidade, figura 4.5, observamos uma diminuição na freqüência de oscilação e um pequeno aumento no tempo de ressurgimento. Assim como no caso do estado de número, essas diferenças ocorrem porque na nova base de estado o campo na cavidade 1 não estaria em um estado coerente, mas sua distribuição do número de fótons, em relação à $\langle \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 \rangle$ e $\langle \hat{A}_2^{\dagger} \hat{A}_2 \rangle$, é combinação da Poisson com a Binomial. Além disso, a constante de acoplamento g na equação da inversão atômica está multiplicada por q, tornando a freqüência de Rabi menor ($q \leq 1$, equação (2.17)).



Figura 4.4: Inversão atômica em função do tempo para a cavidade 1 inicialmente preparada no estado coerente com $\alpha = 3$ e a cavidade 2 no estado de vácuo.


Figura 4.5: Inversão atômica em função do tempo para o Jaynes-Cummings de uma cavidade isolada, para o campo inicialmente no estado coerente com $\alpha = 3$.

Mistura estatística térmica

Considerando a cavidade 1 em uma mistura estatística térmica, para um baixo número de fótons térmicos $(n_{th} = 0, 5)$, e a cavidade 2 preparada inicialmente em um estado de número com $n_2 = 20$, também observamos o fenômeno de colapso e ressurgimento da inversão atômica, figura 4.6.

Nota-se que no modelo Jaynes-Cummings convencional, quando a cavidade é preparada inicialmente em um estado de mistura estatística térmica, o fenômeno de colapso e ressurgimento não ocorre na inversão atômica para baixos valores de n_{th} . Para efeito de comparação, na figura 4.7 apresentamos a invesão atômica para o sistema átomo-campo de uma única cavidade, com o campo preparado inicialmente em uma mistura estatística térmica, com $n_{th} = 0, 5$. Observa-se na figura 4.6, caso de duas cavidades, um comportamento completamente diferente do que aparece no caso de uma cavidade, em situações semelhantes.



Figura 4.6: Inversão atômica em função do tempo para a cavidade 1 inicialmente preparada em uma mistura estatística térmica com $n_{th} = 0, 5$ e a cavidade 2 no estado de número com 20 fótons.



Figura 4.7: Inversão atômica para o modelo J-C convencional, com a cavidade inicialmente preparada em uma mistura estatística térmica com $n_{th} = 0, 5$.

4.3.2 Número Médio de Fótons

A expressão para o número médio de fótons em cada uma das cavidades é dada por

$$\langle \hat{n}_i \rangle (t) = \sum_{m_{1=0}}^{\infty} R_{m_1} \left\{ \sum_{N=0}^{m_1+n_2} \left[K_i^2 N + J_i^2 (m_1 + n_2 - N) \right] (4.31) \right. \\ \left. + J_i^2 \sin^2 (qgt \sqrt{m_1 + n_2 - N + 1}) \right] (P(N, m_1, n_2))^2 \\ \left. + (-1)^{i+1} pq \sum_{N=0}^{m_1+n_2-1} \left[\sqrt{N + 1} \sqrt{m_1 + n_2 - N} \right] \\ \left. \times \cos(qgt \sqrt{m_1 + n_2 - N + 1}) \cos(qgt \sqrt{m_1 + n_2 - N}) \right. \\ \left. + \sqrt{N + 1} \sqrt{m_1 + n_2 - N + 1} \right] \\ \left. \times \sin(qgt \sqrt{m_1 + n_2 - N + 1}) \sin(qgt \sqrt{m_1 + n_2 - N}) \right] \\ \left. \times P(N, m_1, n_2) P(N + 1, m_1, n_2) 2 \cos[(\Omega_1 - \Omega_2)t] \right\},$$

onde $K_1 = J_2 = p \in K_2 = J_1 = q$.

Aqui, R_{m_1} também é dada pela equação (4.23) no caso da cavidade 1 ser preparada inicialmente em uma mistura estatística térmica. Para o caso de um estado coerente temos que $R_{m_1} = |P_{m_1}|^2$, onde P_{m_1} é dado por (4.21). No caso do estado de número $|n_1\rangle$, $R_{m_1} = \delta_{m_1,n_1}$.

Podemos comparar esta expressão com a equação de $\langle \hat{a}^{\dagger} \hat{a} \rangle$ para o modelo Jaynes-Cummings de uma cavidade, dada por:

$$\langle \hat{a}^{\dagger} \hat{a} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} R_n \left\{ n + \sin^2 \left(g t \sqrt{n+1} \right) \right\}$$
(4.32)

Observamos que, ao contrário da inversão atômica, a expressão para o número médio de fótons do sistema de duas cavidades, equação (4.31), é bastante diferente da expressão para Jaynes-Cummings convencional, equação (4.32). A maior diferença está nos cinco últimos termos de (4.31), os quais aparecem devido ao fato de $\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_1 \in \hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_2$ possuirem termos do tipo $\hat{A}_1^{\dagger}\hat{A}_2$, quando escritos em termos desses novos operadores. Nota-se que $\langle \hat{A}_1^{\dagger}\hat{A}_1 \rangle (t) =$ $\langle \hat{A}_1^{\dagger}\hat{A}_1 \rangle (t = 0)$, pois na expressão do operador de evolução temporal (4.11) $\hat{A}_1^{\dagger} \in \hat{A}_1$ não aparecem. Além disso, se calculássemos $\langle \hat{A}_2^{\dagger}\hat{A}_2 \rangle$, teríamos como resultado uma expressão semelhante à equação (4.32), cuja única diferença seria o aparecimento do fator peso $[P(N, m_1, n_2)]^2$ multiplicando R_n .

Por esses motivos, os gráficos de $\langle \hat{n}_i \rangle(t)$ não se assemelham com o caso do modelo Jaynes-Cummings em nenhuma preparação inicial do campos das cavidades 1 e 2. As figuras 4.8 e 4.9 mostram o comportamento de $\langle \hat{n}_1 \rangle(t) \in \langle \hat{n}_2 \rangle(t)$ considerando como condição inicial a cavidade 2 no estado de vácuo nos dois casos, cavidade 1 no estado número com 20 fótons na primeira figura e no estado coerente com $\alpha = 3$ na segunda. Observamos que ambas as curvas não seguem o comportamento de senos ou cossenos puramente, mas existe um fenômeno de batimento. Entretanto, ao contrário da inversão atômica, o fenômeno de colapso e ressurgimento não é observado na mesma forma que ocorre no Jaynes-Cummings de uma cavidade. Ele aparece quando observamos a evolução temporal da soma do número médio de fótons das cavidades em função do tempo, mostrado na figura 4.10, pois $\langle \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1 \rangle + \langle \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_2 \rangle = \langle \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 \rangle + \langle \hat{A}_2^{\dagger} \hat{A}_2 \rangle$. Além disso, observamos que em média, os fótons de redistribuem com metade dos fótons nas duas cavidades.



Figura 4.8: Número médio de fótons em função do tempo para a cavidade 1 inicialmente preparada no estado de número com 20 fótons e a cavidade 2 no estado de vácuo.



Figura 4.9: Número médio de fótons em função do tempo das duas cavidades com a cavidade 1 inicialmente preparada no estado coerente com $\alpha = 3$ e a cavidade 2 no estado de vácuo.



Figura 4.10: Soma do número médio de fótons em função do tempo das duas cavidades com a cavidade 1 inicialmente preparada no estado de número com 20 fótons e a cavidade 2 no estado de vácuo.

4.3.3 Pureza

Nesta seção, vamos analizar o comportamento do parâmetro ξ para o campo das cavidades e para o átomo, definido pelas equações (4.16). Embora a entropia quântica, definida por $Tr\{\rho_{i,j}\ln(\rho_{i,j})\}$ seja mais adequada para a medida da pureza do campo, o parâmetro ξ definido por (4.16) possui um comportamento semelhante ao da entropia [29]. Ao calcularmos este parâmetro, obtemos as seguintes expressões

$$\xi_a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{N}^{m_1+n_2} R_{m_1} \left[P(N, m_1, n_2) \right]^2 \cos\left(2qgt\sqrt{m_1 + n_2 - N + 1}\right) \right\}^2, \tag{4.33}$$

onde R_{m_1} é dada pela equação (4.23) no caso da cavidade 1 ser preparada inicialmente em uma mistura estatística térmica e $R_{m_1} = \delta_{m_1,n_1}$ no caso do estado de número $|n_1\rangle$. A cavidade 2 foi sempre considerada em um estado de número com n_2 fótons.

$$\xi_{2} = 1 - \sum_{m_{2}=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n_{1}=0}^{\infty} R_{n_{1}+m_{2}-m_{2}} \left| \sum_{N=0}^{n_{1}+m_{2}} P(N,n_{1},m_{2})P(N,n_{1}+m_{2}-n_{2},n_{2}) \right. \\ \left. \exp\{-iN(\Omega_{1}-\Omega_{2})\}\cos(qgt\sqrt{n_{1}+m_{2}-N+1}) \right|^{2} \\ \left. + \sum_{n_{1}=0}^{\infty} R_{n_{1}+m_{2}-n_{2}-1} \left| \sum_{N=0}^{n_{1}+m_{2}-1} P(N,n_{1},m_{2})P(N,n_{1}+m_{2}-n_{2}-1,n_{2}) \right. \\ \left. \exp\{-iN(\Omega_{1}-\Omega_{2})\}\sin(qgt\sqrt{n_{1}+m_{2}-N}) \right|^{2} \right\}^{2}.$$

$$(4.35)$$

Aqui também temos uma diferença grande com o que acontece com o sistema átomo-campo de uma e de duas cavidades. Para o J-C convencional, o parâmetro ξ do átomo e do campo, para as condições iniciais concideradas, possuem a mesma expressão, dada por:

$$\xi_{JC} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} R_m \cos(2gt\sqrt{m+1}) \right\}^2, \qquad (4.36)$$

para o átomo inicialmente no estado excitado. R_m é dada pela equação (4.23) no caso da cavidade 1 ser preparada inicialmente em uma mistura estatística térmica. Para o caso de um estado coerente, $R_m = |P_m|^2$, onde P_m é dado por (4.21) e $R_m = \delta_{m,n}$ no caso do estado de número $|n\rangle$.

Novamente, o parâmetro referente ao átomo, ξ_a possui comportamento semelhante ao que acontece com ξ_{JC} do sistema de uma cavidade, mudandose a distribuição do número médio e fótons e a constante de acoplamento g. Por outro lado, assim como aconteceu com o número médio de fótons, ξ_1 e ξ_2 comportam-se de maneira completamente diferente do que acontece com o campo do modelo J-C convencional.

Estado de número

Analisando para a expressão (4.36), notamos que, para J-C convencional, se o campo da cavidade é colocado inicialmente em um estado de número, ξ_{JC} oscila cossenoidalmete no tempo. Entretanto, para o caso de duas cavidades, ξ_a , ξ_1 e ξ_2 só possuem este comportamento se ambas as cavidades forem preparadas inicialmente no estado de vácuo.

As figuras 4.11 e 4.12, mostram o comportamento de ξ_1 , ξ_2 e ξ_a em função do tempo considerando-se as duas cavidades inicialmente no estado de vácuo. Observamos que em todos os casos o comportamento de ξ_i oscila cossenoidalmente. Entretanto, para o átomo a freqüência é maior.

Considerando agora o valor de $n_1 = 20$, observamos que a diferença entre $\xi_1, \xi_2 \in \xi_a$ é maior. A figura 4.13 mostra o gráfico de $\xi_1 \in \xi_a$ em função do tempo e a 4.14 o comportamento de ξ_2 . Embora ξ_a não assuma mais valores nulos, este parâmetro não toma valores maiores que 0,5. Por outro lado, $\xi_1 \in \xi_2$ assumem valores próximos de 1. Isto significa que as cavidades possuem um grau de mistura muito maior que o átomo.

Comparando-se os casos com $n_1 = 0$ (figuras 4.11 e 4.12) e com $n_1 = 20$ (figuras 4.13 e 4.14), observamos que, quanto maior o número de fótons

iniciais, maior o grau de mistura do sistema. Isto pode ser explicado pelo fato de que, quanto maior o valor de n_1 e/ou n_2 , maior o número de estados da nova base que compõe $|n_1, n_2\rangle$ (equação (4.17)).



Figura 4.11: Parâmetro $\xi_1 \in \xi_2$ para as cavidades em função do tempo, considerando a cavidade 1 e a cavidade 2 inicialmente preparadas no estado de vácuo.



Figura 4.12: Parâmetro ξ_a para o átomo em função do tempo considerando a cavidade 1 e a cavidade 2 inicialmente preparadas no estado de vácuo.



Figura 4.13: Parâmetro ξ_1 para a cavidade 1 e ξ_a para o átomo em função do tempo, com a cavidade 1 inicialmente preparada em um estado de número com $n_1 = 20$ e a cavidade 2 no estado de vácuo.



Figura 4.14: Parâmetro ξ_2 para a cavidade 2 em função do tempo. A cavidade 1 foi inicialmente preparada em um estado de número com $n_1 = 20$ e a cavidade 2 no estado de vácuo.

Mistura estatística

Consideramos agora a cavidade 1 em uma Mistura estatística térmica com $n_{th} = 0, 5$ e a cavidade 2 em estado de número com n_2 fótons. Observamos neste caso, que ξ_a também não possui valor maior que 0, 5, independentemente do valor de n_2 . Entretanto, neste caso, quanto maior n_2 , maior o valor de ξ_1 e ξ_2 , chegando a um valor muito próximo de 1 quando $n_2 = 20$.

O comportamento de ξ_a e ξ_1 em função do tempo é mostrado na figura 4.15, quando $n_2 = 0$, e na figura 4.17 quando $n_2 = 20$. O gráfico de ξ_2 em função do tempo é mostrado nas figuras 4.16 e 4.18 para $n_2 = 0$ e $n_2 = 20$, respectivamente.

Nota-se que, quando colocamos a cavidade 1 em uma mistura estatística o comportamento de ξ_i , i = a, 1, 2, muda sensivelmente em relação ao que acontece quando esta cavidade é preparada em um estado de número. Mesmo com um valor pequeno de n_{th} , ξ_i não é mais uma função cossenoidal do tempo.



Figura 4.15: Parâmetro ξ_1 para a cavidade 1 e ξ_a para o átomo em função do tempo considerando as cavidades 1 e 2 inicialmente preparadas em uma mistura estatística térmica, com $n_{th} = 0, 5$, e no estado de vácuo, respectivamente.



Figura 4.16: Parâmetro ξ_2 para a cavidade 2 considerando as cavidades 1 e 2 inicialmente preparadas em uma mistura estatística térmica, com $n_{th} = 0, 5$, e no estado de vácuo, respectivamente



Figura 4.17: Parâmetro ξ_1 para a cavidade 1 e ξ_a para o átomo em função do tempo considerando as cavidades 1 e 2 inicialmente preparadas em uma mistura estatística térmica, com $n_{th} = 0, 5$, e estado de número com $n_2 = 20$.



Figura 4.18: Parâmetro ξ_2 para a cavidade 2 em função do tempo considerando as cavidades 1 e 2 inicialmente preparadas em uma mistura estatística térmica, com $n_{th} = 0, 5$, e estado de número com $n_2 = 20$.

Capítulo 5 Conclusão

Neste trabalho estudamos duas situações envolvendo cavidades acopladas: Uma envolvendo um reservatório térmico e a outra um átomo de dois níveis. Para isto, estudamos primeiramente a diagonalização do Hamiltoniano do sistema envolvendo as cavidades com e sem a aproximação de ondas girantes.

Observamos que, no caso do Hamiltoniano sem a aproximação de ondas girantes (O.G.), cuidados devem ser tomados em relação à validade da matriz de diagonalização do Hamiltoniano do subsistema contendo as cavidades (equação (2.6)). Para isso, mostramos casos onde as equações encontradas para o número médio de fótons nas cavidades não reproduz o resultado esperado para o caso limite de $\lambda \to 0$, quando $\omega_1 = \omega_2$. Mostramos também que esta divergência ocorre apenas em valores específicos de λ , ω_1 e ω_2 , uma vez que considerando-se $\lambda \to 0$ porém $\omega_1 \neq \omega_2$, encontramos resultados para o número médio de fótons nas cavidades compatíveis com o esperado. Por outro lado, no Hamiltoniano com a aproximação O.G. este problema não ocorre, uma vez que, em forma de matriz, o determinante desta transformação de diagonalização é sempre igual a -1. Além disso, os autovetores deste caso são facilmente encontrados.

No Capítulo 3 discutimos o caso em que uma das cavidades é acoplada a um reservatório térmico. Entretanto, este tratamento pode ser facilmente expandido para o caso onde as duas cavidades interagem com o reservatório, sendo necessárias apenas algumas alterações nas constantes $\beta_1 \in \beta_2$ do Hamiltoniano (3.1).

Foram apresentados os cálculos do número médio de fótons para as duas cavidades, onde inicialmente a cavidade 2 possuia um fóton e a cavidade 1 estava no estado de vácuo. Observamos que a presença segunda cavidade provoca a diminuição da perda de fótons para o ambiente externo. Embora tenhamos utilizado a equação mestra para estes cáculos, ela não foi resolvida no sentido de encontrarmos a expressão para $\sigma(t)$. Este cálculo é um trabalho a ser feito que vai nos permitir encontrar outros parâmetros, tais como a pureza do campo e a função de quasiprobabilidade $Q(\alpha)$.

A segunda situação, onde uma das cavidades interage com um átomo de dois níveis, foi discutida no Capítulo 4. Neste caso, a presença da segunda cavidade foi responsável pelo aparecimento do fenômeno de colapso e ressurgimento na inversão atômica mesmo quando a primeira cavidade foi preparada inicialmente no estado de número e em uma mistura estatística térmica. Devemos lembrar também que, para estes estados iniciais, este fenômeno de colapso e ressurgimento não aparece no Jaynes-Cummings convencional. Isto ocorre por causa do aparecimento de uma nova distribuição de probabilidade na inversão atômica, equação (4.25), e por causa da mudança na freqüência de Rabi, equação (4.28).

Por outro lado, o número médio de fótons para cada uma das cavidades, $\langle \bar{n}_1 \rangle \in \langle \bar{n}_2 \rangle$, apresentou um comportamento completamente diferente da inversão atômica, não sendo observado o colapso e ressurgimento na forma que ocorre no modelo Jaynes-Cummings de uma cavidade. Este fato também é oposto ao que acontece com o modelo Jaynes-Cummings de uma cavidade no qual, inversão atômica e número médio de fótons apresentam (ou não) o colapso e ressurgimento para as mesmas condições iniciais, por exemplo para o estado coerente (estado de número). Entretanto, este fenômeno é observado na soma de $\langle \bar{n}_1 \rangle \in \langle \bar{n}_2 \rangle$.

Estes fatos podem ser entendidos se pensarmos que o átomo "enxerga" as duas cavidades como um único sistema. Assim, ele não está interagindo com um campo em um estado de número ou em uma mistura estatística térmica puramente da cavidade 1. Na verdade, ele está interagindo com o campo formado pelas duas cavidades acopladas.

Também podemos notar uma grande diferença do sistema átomo-campo de duas cavidades em relação ao que ocorre com um sistema átomo-campo com dissipação, discutido na seção 1.7. Neste último caso, cuja cavidade interage com um sistema de muitos níveis, um fóton saindo do sistema átomocampo não retorna mais, provocando apenas um decaimento exponencial na inversão atômica e no número médio de fótons. O fenômeno de colapso e ressurgimento aparece apenas nos mesmos casos que o sistema átomo-campo de uma cavidade sem dissipação [22], [23]. Por outro lado, o sistema átomocampo com duas cavidades é conservativo. Um fóton que vai para a segunda cavidade pode voltar para a cavidade com o átomo.

Notamos que nesse sistema de duas cavidades, o comportamento da pureza para átomo e campos são diferentes, independentemente da preparação inicial. Enquanto o parâmetro ξ , definido pelas equações (4.16), não passa do valor 0,5 para o átomo, quando calculado para o campo de cada uma das cavidades este parâmetro aumenta com o número médio de fótons, podendo chegar a valores próximos de 1.

Devemos ressaltar que os comportamentos apresentados para este sistema átomo-campo com duas cavidades é específico para as condições apresentadas, ou seja, para o intervalo de validades das aproximações utilizadas e para os valores utilizados das constantes envolvidas (intervalo de freqüências, constantes de acoplamentos, etc.), discutidos na seção 4.2.

Desta forma, embora tenhamos encontrado alguns resultados interessantes, ainda há alguns aspectos a serem estudados. Como por exemplo, obter uma maneira alternativa às aproximações utilizadas. Principalmente em relação à aproximação feita na seção 4.1, a qual restringe muito o campo de validade dos resultados. Podemos explorar outras características deste sistema, tais como o número de níveis do átomo, o número de cavidades acopladas e a presença de dissipação.

Também podemos investigar o comportamento do estado do sistema em função do tempo e analisar a possiblidade de colocar informação em um sistema de n-cavidades (uma cavidade dividida com vários *beam splitters*) com um átomo de dois níveis em cada uma delas.

Apêndice A

Demostração Alternativa da Mudança de Base Discutida no Capítulo 2

Para demostrar a relação (2.26), vamos escrever a relação entre as duas bases da seguinte maneira:

$$|m_1, m_2\rangle_a = \sum_{N_1, N_2} P(N_1, N_2) |N_1, N_2\rangle_A,$$
 (A.1)

sendo que a dependência em m_1 e m_2 foi deixada implícita por comodidade.

De acordo com as transformações (2.11) podemos escrever:

$$a_{1}^{\dagger}a_{1} = p^{2}A_{1}^{\dagger}A_{1} + q^{2}A_{2}^{\dagger}A_{2} + qp(A_{2}^{\dagger}A_{1} + A_{1}^{\dagger}A_{2}), \qquad (A.2)$$

$$a_{2}^{\dagger}a_{2} = q^{2}A_{1}^{\dagger}A_{1} + p^{2}A_{2}^{\dagger}A_{2} - qp(A_{2}^{\dagger}A_{1} + A_{1}^{\dagger}A_{2}).$$

Para encontrar uma equação para $P(N_1, N_2)$, vamos aplicar $\hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1$ no estado (A.1) e utilizar as relações (A.2), obtendo:

$$a_{1}^{\dagger}a_{1} | m_{1}, m_{2} \rangle_{a} = m_{1} | m_{1}, m_{2} \rangle_{a} = m_{1} \sum_{N_{1}, N_{2}} P(N_{1}, N_{2}) | N_{1}, N_{2} \rangle_{A}$$
(A.3)
$$= \sum_{N_{1}, N_{2}} P(N_{1}, N_{2}) \left\{ \left(p^{2}N_{1} + q^{2}N_{2} \right) | N_{1}, N_{2} \rangle_{A} + q p \left(\sqrt{N_{1} + 1} \sqrt{N_{2} - 1} | N_{1} + 1, N_{2} - 1 \rangle_{A} + \sqrt{N_{1} - 1} \sqrt{N_{2} + 1} | N_{1} - 1, N_{2} + 1 \rangle_{A} \right) \right\}.$$

Multiplicando-se ambos os lados desta equação por $\langle M_1, M_2 |$, obtemos a seguinte equação para $P(N_1, N_2)$:

$$P(N_1, N_2)(m_1 - p^2 N_1 - q^2 N_2) = qp \left[\sqrt{M_1 + 1} \sqrt{N_2} P(N_1 + 1, N_2 - 1) + \sqrt{M_1} \sqrt{N_2 + 1} P(N_1 - 1, N_2 + 1) \right] (A.4)$$

Se fizermos o mesmo procedimento para $\hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_2$ aplicado no estado (A.1), obtemos a seguinte equação:

$$P(N_1, N_2)(m_2 - p^2 N_2 - q^2 N_1) = -qp \left[\sqrt{M_1 + 1} \sqrt{N_2} P(N_1 + 1, N_2 - 1) + \sqrt{M_1} \sqrt{N_2 + 1} P(N_1 - 1, N_2 + 1) \right]$$
(A.5)

Subtraindo-se as equações (A.4) e (A.5), obtemos:

$$P(N_1, N_2)(m_1 - m_2 + (q^2 - p^2)N_1 + (p^2 - q^2)N_2) =$$
(A.6)

$$2pq\left\{\sqrt{M_1}\sqrt{N_2+1}P(N_1-1,N_2+1)+\sqrt{M_1+1}\sqrt{N_2}P(N_1+1,N_2-1)\right\}.$$

Somando-se as equações (A.4) e (A.5), obtemos:

$$P(N_1, N_2)(m_1 + m_2 - N_1 - N_2) = 0,$$

portanto

$$m_1 + m_2 = N_1 + N_2 \Longrightarrow N_2 = m_1 + m_2 - N_1.$$
 (A.7)

Como $N_2 \ge 0$, N_1 deve se restringir ao intervalo $0 \ge N_1 \ge m_1 + m_2$.

Uma vez que $P(N_1, N_2)$ tem valores não nulos apenas quando N_2 obedece à relação (A.7), podemos suprimir o índice N_2 de P e escrever $N_1 = N$. Explicitando agora a dependência em m_1 e m_2 , a expressão (A.1) pode ser reescrita como:

$$|m_1, m_2\rangle_a = \sum_{N=0}^{m_1+m_2} P(N, m_1, m_2) |N, m_1 + m_2 - N\rangle_A.$$
 (A.8)

A equação (A.8) nos dá uma relação de recorrência que permite calcular os valores de P(N). Na nova notação temos:

• Para ${\cal N}=1$

$$P(1, m_1, m_2) = \frac{P(0, m_1, m_2)(p^2 m_1 - q^2 m_2)}{pq\sqrt{m_1 + m_2}};$$
 (A.9)

• Para $1 \le N \le m_1 + m_2 - 1$

$$P(N, m_1, m_2) = \frac{P(N-1, m_1, m_2)(p^2m_1 - q^2m_2 + (q^2 - p^2)(N-1))}{pq\sqrt{N}\sqrt{m_1 + m_2 - N + 1}} + \frac{P(N-2, m_1, m_2)\sqrt{N-1}\sqrt{m_1 + m_2 - N + 2}}{\sqrt{N}\sqrt{m_1 + m_2 - N + 1}}; (A.10)$$

• Para $N = m_1 + m_2$

$$P(m_1 + m_2, m_1, m_2) = \frac{P(m_1 + m_2 - 1, m_1, m_2)pq\sqrt{m_1 + m_2}}{(q^2m_1 - p^2m_2)}.$$
 (A.11)

O valor de $P(0, m_1, m_2)$ é calculado impondo-se a condição de normalização para $|m_1, m_2\rangle$:

$$\langle m_1, m_2 | m_1, m_2 \rangle_a = 1 \Longrightarrow \sum_{N=0}^{m_1+m_2} |P(N, m_1, m_2)|^2 = 1.$$
 (A.12)

Apêndice B

$\bar{n}_1(t)$ e $\bar{n}_2(t)$ para Cavidades Inicialmente em Estados Coerentes Deslocados

Apresentamos agora a expressão para o número médio de fótons $\bar{n}_1 \in \bar{n}_2$, do sistema de duas cavidades interagindo com o reservatório térmico, estudado no Capítulo 3, considerando $\omega_1 = \omega_2 = \omega \in \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$. Como condição inicial vamos escrever o campo nas cavidades em um estado coerente deslocado [30]:

$$|\Psi_{1,2}\rangle(0) = |n_1, \alpha_1; n_2, \alpha_2\rangle = \hat{D}_1(\alpha_1)\hat{D}_2(\alpha_2) |n_1, n_2\rangle,$$
 (B.1)

onde $\hat{D}_j(\alpha_j) = \exp(\alpha_j \hat{a}_j^{\dagger} - \alpha_j^* \hat{a}_j)$ é o operador deslocamento de Glauber, e os índices j = 1 e j = 2 correspondem às cavidades 1 e 2, respectivamente. $\alpha = |\alpha_j| e^{i\phi_j}$ é um número complexo que se relaciona com o valor médio de $\hat{a}_j^{\dagger} \hat{a}_j$ por:

$$\langle \hat{a}_j^{\dagger} \hat{a}_j \rangle = \langle n_1, \alpha_1; n_2, \alpha_2 | \hat{a}_j^{\dagger} \hat{a}_j | n_1, \alpha_1; n_2, \alpha_2 \rangle = n_j + |\alpha_j|^2.$$

Para $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, os parâmetros apresentados junto com a equação (2.6) tornam-se:

$$\sin(\theta) = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\Omega_1^2 = \omega^2 + 2\lambda\omega, \qquad \Omega_2^2 = \omega^2 - 2\lambda\omega,$$
$$S_1^{\pm} \equiv S_{11}^{\pm} = S_{12}^{\pm} = \frac{\Omega_1 \pm \omega}{2\sqrt{\omega\Omega_1}}, \qquad S_2^{\pm} \equiv S_{21}^{\pm} = S_{22}^{\pm} = \frac{\Omega_2 \pm \omega}{2\sqrt{\omega\Omega_2}}.$$

Desta forma, as expressões para $\bar{n}_1(t) \in \bar{n}_2(t)$ podem ser escritas sob a forma:

$$\bar{n}_{1}(t) = \langle \hat{a}_{1}^{\dagger} \hat{a}_{1} \rangle(t) = \frac{(S_{1}^{-})^{2} + (S_{2}^{-})^{2}}{2}$$

$$+ \langle A_{1}^{\dagger} A_{1} \rangle(t) \frac{(S_{1}^{+})^{2} + (S_{1}^{-})^{2}}{2} + \langle A_{2}^{\dagger} A_{2} \rangle(t) \frac{(S_{2}^{+})^{2} + (S_{2}^{-})^{2}}{2}$$

$$- \langle A_{1}^{\dagger} A_{1}^{\dagger} + A_{1} A_{1} \rangle(t) \frac{S_{1}^{+} S_{1}^{-}}{2} - \langle A_{2}^{\dagger} A_{2}^{\dagger} + A_{2} A_{2} \rangle(t) \frac{S_{2}^{+} S_{2}^{-}}{2}$$

$$+ \langle A_{1}^{\dagger} A_{2} + A_{2}^{\dagger} A_{1} \rangle(t) \frac{S_{2}^{+} S_{1}^{+} + S_{2}^{-} S_{1}^{-}}{2}$$

$$- \langle A_{1}^{\dagger} A_{2}^{\dagger} + A_{1} A_{2} \rangle(t) \frac{S_{1}^{+} S_{2}^{-} + S_{2}^{+} S_{1}^{-}}{2},$$
(B.2)

$$\bar{n}_{2}(t) = \langle \hat{a}_{2}^{\dagger} \hat{a}_{2} \rangle(t) = \frac{(S_{1}^{-})^{2} + (S_{2}^{-})^{2}}{2}$$

$$+ \langle A_{1}^{\dagger} A_{1} \rangle(t) \frac{(S_{1}^{+})^{2} + (S_{1}^{-})^{2}}{2} + \langle A_{2}^{\dagger} A_{2} \rangle(t) \frac{(S_{2}^{+})^{2} + (S_{2}^{-})^{2}}{2}$$

$$- \langle A_{1}^{\dagger} A_{1}^{\dagger} + A_{1} A_{1} \rangle(t) \frac{S_{1}^{+} S_{1}^{-}}{2} - \langle A_{2}^{\dagger} A_{2}^{\dagger} + A_{2} A_{2} \rangle(t) \frac{S_{2}^{+} S_{2}^{-}}{2}$$

$$- \langle A_{1}^{\dagger} A_{2} + A_{2}^{\dagger} A_{1} \rangle(t) \frac{S_{2}^{+} S_{1}^{+} + S_{2}^{-} S_{1}^{-}}{2}$$

$$+ \langle A_{1}^{\dagger} A_{2}^{\dagger} + A_{1} A_{2} \rangle(t) \frac{S_{1}^{+} S_{2}^{-} + S_{2}^{+} S_{1}^{-}}{2}.$$
(B.3)

As médias $\langle A_j^{\dagger}A_j \rangle$, $\langle A_jA_j \rangle$, $\langle A_2A_1 \rangle$ e $\langle A_2^{\dagger}A_1 \rangle$ são calculadas através das equações (3.6) e (3.7), resultando em:

$$\langle A_{j}^{\dagger}A_{j}\rangle(t) = \bar{N}(\Omega_{j}) + (C_{1j} - \bar{N}(\Omega_{j})) e^{-\beta_{j}^{2}\Gamma t},$$
(B.4)

$$\langle A_{j}^{\dagger}A_{j}^{\dagger} + A_{j}A_{j}\rangle(t) = \{2\Re\{C_{2j}\}\cos(2\Omega_{j}t) + 2\Im\{C_{2j}\}\sin(2\Omega_{j}t)\} e^{-\beta_{j}^{2}\Gamma t},$$

$$\langle A_{1}^{\dagger}A_{2} + A_{1}A_{2}^{\dagger}\rangle(t) = \{2\Re\{C_{3}\}\cos[(\Omega_{1} - \Omega_{2})t] + 2\Im\{C_{3}\}\sin[(\Omega_{1} - \Omega_{2})t]\} e^{-(\beta_{1}^{2} + \beta_{2}^{2})\Gamma t/2},$$

$$\langle A_{1}^{\dagger}A_{2}^{\dagger} + A_{1}A_{2}\rangle(t) = \{2\Re\{C_{4}\}\cos[(\Omega_{1} + \Omega_{2})t]\} e^{-(\beta_{1}^{2} + \beta_{2}^{2})\Gamma t/2},$$

$$\langle A_{1}^{\dagger}A_{2}^{\dagger} + A_{1}A_{2}\rangle(t) = \{2\Re\{C_{4}\}\sin[(\Omega_{1} + \Omega_{2})t]\} e^{-(\beta_{1}^{2} + \beta_{2}^{2})\Gamma t/2},$$

onde $\Re\{x\}$ e $\Im\{x\}$ são as partes real e imaginária de x, respectivamente. Para j = 1 ou j = 2, C_{1j} , C_{2j} , C_3 e C_4 são constantes determinadas pelas condições iniciais dadas por:

$$C_{1j} = (S_j^{-})^2 + \frac{S_j^{+}S_j^{-}}{2} \left\{ \sum_{k=1}^2 |\alpha_k|^2 \cos(2\phi_k) + (-1)^{j+1} 2|\alpha_1| |\alpha_2| \cos(\phi_1 + \phi_2) \right\} \\ + \frac{(S_j^{+})^2 + (S_j^{-})^2}{2} \left\{ \sum_{k=1}^2 (|\alpha_k|^2 + n_k) + (-1)^{j+1} 2|\alpha_1| |\alpha_2| (\cos(\phi_1 - \phi_2)) \right\},$$

$$C_{2j} = \frac{(S_j^+)^2 + (S_j^-)^2}{2} \left\{ \sum_{k=1}^2 |\alpha_k|^2 \cos(2\phi_k) + (-1)^{j+1} 2|\alpha_1| |\alpha_2| \cos(\phi_1 + \phi_2) \right\} + \frac{S_j^+ S_j^-}{2} \left\{ \sum_{k=1}^2 (|\alpha_k|^2 + n_k) + (-1)^{j+1} 2|\alpha_1| |\alpha_2| \cos(\phi_1 + \phi_2) \right\} + \frac{i(S_j^+)^2 - (S_j^-)^2}{2} \left\{ \sum_{k=1}^2 |\alpha_k|^2 \sin(2\phi_k) + (-1)^{j+1} 2|\alpha_1| |\alpha_2| \sin(\phi_1 + \phi_2) \right\},$$

$$C_{3} = \frac{S_{2}^{+}S_{1}^{+} + S_{2}^{-}S_{1}^{-}}{2} \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} (|\alpha_{k}|^{2} + n_{k}) + \frac{S_{2}^{+}S_{1}^{-} + S_{2}^{-}S_{1}^{+}}{2} \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} |\alpha_{k}|^{2} cos(2\phi_{k}) + i \frac{S_{2}^{-}S_{1}^{+} + S_{2}^{+}S_{1}^{-}}{2} \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} |\alpha_{k}|^{2} sin(2\phi_{k}) + i \{S_{2}^{-}S_{1}^{-} - S_{2}^{+}S_{1}^{+}\} |\alpha_{1}| |\alpha_{2}| sin(\phi_{1} - \phi_{2}),$$

$$C_{4} = \frac{S_{2}^{+}S_{1}^{-} + S_{2}^{-}S_{1}^{+}}{2} \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} (|\alpha_{k}|^{2} + n_{k}) + \frac{S_{2}^{+}S_{1}^{+} + S_{2}^{-}S_{1}^{-}}{2} \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} |\alpha_{k}|^{2} cos(2\phi_{k}) + i \frac{S_{2}^{-}S_{1}^{-} - S_{2}^{+}S_{1}^{+}}{2} \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} |\alpha_{k}|^{2} sin(2\phi_{k}) + i \{S_{2}^{-}S_{1}^{+} - S_{2}^{+}S_{1}^{-}\} |\alpha_{1}| |\alpha_{2}| sin(\phi_{1} - \phi_{2}).$$

Referências Bibliográficas

- A. Luis and L.L. Sánchez-Soto. Atom-field resonat interaction without exchange of photons. *Phys. Let. A*, 252:130–136, 1999.
- [2] D. Bouwmeester, A. Ekert, and A. Zeilinger. The Physics of Quantum Information: Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computation. Ed. Springer, 2000.
- [3] Hashem Zoubi, Meir Orenstien, and Amiram Ron. Coupled microcavities with dissipation. *Phys. Rev. A*, 62:033801, 2000.
- [4] D. Marcuse. *Light Transmition Optics*. Robert E. Krieger Publishing Company, Florida, 2nd edition, 1989.
- [5] J. R. Pierce. Coupling of modes of propagation. J. Appl. Phys., 25:179– 183, 1954.
- [6] H. A. Haus, W. P. Huang, S. Kawakami, and N. A. Whitaker. Coupledmode theory of optical waveguides. J. Lightwave Technol., LT-5(1):16– 23, 1987.
- [7] Metod Skarja, Norma Mankoč Borštnik, Markus Löffler, and Herbert Walther. Quantum interference and atom-atom entanglement in a twomode, two-cavity micromaser.
- [8] Yong Xu, Yi Li, Reginald K. Lee, and Ammon Yariv. Scattering-theory analysis of waveguide-resonator coupling. *Phys. Rev. E*, 62(5):7389– 7403, 2000.
- [9] Rodney Loudon. The Quantum Theory of Light. University of Press, Oxford, 1973.

- [10] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. Atom-Photon Interactions. Wiley, New York, 1992.
- [11] C. Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. Quantum Mechanics, volume 1. Hermann and Jonh Wiley & Sons, 1977.
- [12] M. F. Santos, E. Solano, and R. L. de Matos Filho. Conditional large fock state preparation and field state reconstruction in cavity QED. *Phys. Rev. Lett.*, 87:093601, Aug. 2001.
- [13] M. A. Andrade N. Estudo do fenomeno do colapso e reativação em átomos de três e quatro níveis interagindo com campo de radiação quantizado. Tese de Mestrado, Unicamp, 1993.
- [14] P. Meystre and M. Sargent III. Elements of Quantum Optics. Springer-Verlag, 2nd edition, 1991.
- [15] D. Jonathan. Estados pre-correlacionados e análise de colapsos e ressurgimentos no modelo de Jaynes-Cummings. Tese de Mestrado, Unicamp, 1997.
- [16] L. P. A. Maia and B. Baseia. Estados não-clássicos do campo luminoso. Rev. Bras. Ens. Física, 21(4):476-477, 1999.
- [17] S.Haroche and D. Kleppner. Cavity quantum electrodynamics. Pysics Today, 42(1):24–30, Jan. 1989.
- [18] S.Haroche. Cavity quantum optics. Pysics World, 4(3):33–39, Mar. 1991.
- [19] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagler, J. M. Raimond, and S. Haroche. Quantum rabi oscillation: A direct test of field quantization in a cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 76(11):1800–1803, 3 1996.
- [20] H. J. Carmichael. Statistical Methods in Quantum Optics: Master Equations and Fokker-Plank Equations. Ed. Springer, 1999.
- [21] H. Moya-Cessa, J. A. Roversi, S. M. Dutra, and A. Vidiella-Barranco. Recovering coherence from decoherence: A method of quantum-state reconstruction. *Phys. Rev. A*, 60(5):4029–4033, 1999.

- [22] A.B. Klimov, S. M. Chumakov, J. C. Retamal, and C. Saavedra. An algebraic approach to the Jaynes-Cummings model with dissipation. *Phys. Lett.* A, 211:143–147, 1996.
- [23] J. Gea-Banacloche. Jaynes-Cummings model with quasiclassical fields: The effect of dissipation. Phys. Rev. A, 47(3):2221–2234, 1993.
- [24] A. B. Klimbov and S. M. Chumakov. Semiclassical quantization of the evolution operator for a class of optical-models. *Phys. Lett. A*, 202:145– 154, 1995.
- [25] A. P. S. Moura. Efeito dos termos contra-girantes no modelo de Jaynes-Cummings. Tese de Mestrado, Unicamp, 1997.
- [26] A. Vidiella-Barranco and J. A. Roversi. Statistical and phase properties of the binomial states of the electromagnetic field. *Phys. Rev. A*, 50(6):5233-5241, 1994.
- [27] A. Josh and R. R. Puri. Effects of atomic coherence on collapses and revivals in the binomial state of the field. J. Mod. Optics, 36(5):557–570, 1988.
- [28] Gerhard Rempe and Herbert Walther. Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser. *Phys. Rev. Lett.*, 58(4):353-356, 1987.
- [29] A. Vidiella-Barranco, H. Moya-Cessa, and V. Bužek. Interaction of superpositions of coherent states of light with two-level atoms. J. Mod. Optics, 39(7):1441-1459, 1992.
- [30] A. Wünsche. Displaced fock states and their connection to quasiprobabilities. *Quantum Optics*, 3(6):359–383, 1991.