Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN"

Departamento de Eletrônica Quântica Grupo de Óptica Quântica

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ASPECTOS QUALITATIVOS DE EMARANHAMENTO NO MODELO DE JAYNES-CUMMINGS COM UM CAMPO EXTERNO QUÂNTICO

Ricardo José Missori

Comissão Julgadora: Prof. Dr. José Antonio Roversi (orientador) – IFGW/UNICAMP Prof. Dr. Marcelo A. Marchiolli – IFSC/USP Prof. Dr. Reginaldo J. Napolitano (suplente) – IFSC/USP Profa. Dra. Kyoko Furuya – IFGW/UNICAMP Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco (suplente) – IFGW/UNICAMP

> Dissertação apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" para a obtenção do título de Mestre em Física.

> > 26 de Setembro de 2003

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA

BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

M691a	Missori, Ricardo José Aspectos qualitativos de emaranhamento no modelo de Jaynes-Cummings com um campo externo quântico / Ricardo José Missori Campinas, SP : [s.n.], 2003.
	Orientador: José Antonio Roversi. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".
	 Ótica quântica. Mecânica quântica. Fótons. Roversi, José Antonio. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE RICARDO JOSÉ MISSORI - RA004413 APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 26/09/2003.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Jose Antonio Roversi (Orientador do Candidato) - IFGW/UNICAMP

Marcelo Aparegido Marchiolli - IF/USP

Kyoka

here por-Profa, Dra. Kyoko Furuya - IFGW/UNICAMP

...

Vivia a te buscar Porque pensando em ti Corria contra o tempo Eu descartava os dias Em que não te vi Como de um filme A ação que não valeu Rodava as horas pra trás Roubava um pouquinho E ajeitava o meu caminho Pra encostar no teu

... (Chico Buarque e Edu Lobo)

> "Deus nos fez perfeitos e não escolhe os capacitados, capacita os escolhidos. Fazer ou não fazer algo só depende de nossa vontade e perseverança." (Albert Einstein)

> Dedico esta dissertação aos meus pais, Anésio e Suely, e à minha irmã Carolina. Vocês são tudo para mim.

Agradecimentos

- Ao professor José Antonio Roversi pela orientação e ajuda nos "momentos críticos". Obrigado pela confiança.
- Ao professor Marcelo A. Marchiolli por todas as dicas, conselhos e correções. Tenha certeza de que aprendi muito com você.
- Aos professores Antônio Vidiella-Barranco e Kyoko Furuya, pelas participações no meu exame de qualificação e seminário de pré-requisito, sempre com ótimas indagações e sugestões.
- Dentre as várias pessoas que tive o prazer de conhecer no IFGW, gostaria de agradecer a esses que dividiram comigo alegrias, tristezas, cafés e cervejas: Pablo (irmão mais novo que sempre esteve ao meu lado), Sérgio (amigo de longa data, amigo pra sempre), Rildo (com sua alegria contagiante e revigorante), Fernando (amigo, irmão. o "super-sayajin nível 4"!) e Leandro (meu cigarro é seu e seu cigarro é seu).
- Aos meus companheiros de grupo Álvaro, Giovana, Fabiano, Paulo e Camila, por sempre estarem dispostos a discutir e interagir.
- Ao Renato, Lázaro, Rogério, Carlão, Pepe, Pablito, Lisandra, Térsio, Marcos, Lu, Cabelo, Marcelo, Júlio Akashi, Júlio, Augusto, Eduardo, Silvio, Goiano, Sebastian, Max, Roma, Pila, Tati, Martinha, Ana Márcia, Ana, Celso, Edilson, Zola, Cibele, Juan, Fernando Sato, Ricardo Sato, Ricardo, Daniel, Ana Banana e Thalita, entre outros colegas do prédio D que me fogem da memória agora (desculpem-me), pelos momentos divididos durante essa etapa de minha formação acadêmica.
- Aos meus amigos "normais": Vicente, Adilson Cruz, Adilson, Cris, Mary e Val, por aturarem minhas conversas "de louco".
- Aos meus amigos "quasi-normais": Jão, Jesus, Floripa, Mogli, Vini, Beto, Tadeu e Tania que, apesar da distância, sempre estão próximos.

- A Thalita, pelo constante apoio, obrigado. Você é muito especial. Te adoro.
- Ao pessoal da CPG (Maria Ignez, Armando, Alessandra), da biblioteca do IFGW e da limpeza do prédio D, pelo auxílio prestado nesses anos.
- Aos amigos da Unicamp (Odete, Mundinho, Corinthiano, Paula e Marcão) e do fretado (Marilia, Vitória, Norberto, Rosa entre outros), pelos momentos de descontração.
- Ao colégio Criação-Anglo (diretores, professores e alunos), que me ensinaram a ter prazer em ensinar.
- Aos funcionários e professores da Madrassy, thanks.
- Ao Lord.
- Por último, porém não menos importante, gostaria de agradecer ao meu irmão mais velho Marcelo, por ser meu irmão de verdade, amigo para todas as horas e momentos. Tenho orgulho de poder te chamar de irmão. Valeu!

Campinas, São Paulo 26 de setembro de 2003. Ricardo José Missori

Resumo

Nesta dissertação apresentamos um procedimento matemático que permite obter expressões analíticas para a inversão atômica e função de Wigner no contexto do modelo de Jaynes-Cummings com campo externo quântico, considerando quaisquer campos na cavidade e externo. Essas soluções são expressas na forma integral, com os integrandos apresentando um termo comum que descreve o produto das distribuições de quasi-probabilidade de Glauber-Sudarshan para cada campo, além de um kernel responsável pelo emaranhamento. Considerando dois estados iniciais específicos para o sistema composto, o formalismo é então aplicado para o cálculo da inversão atômica e da função de Wigner, onde, em particular, mostramos como a dessintonia e a amplitude do campo externo modificam o emaranhamento. Além disso, também obtemos as distribuições de probabilidades maginais corretas, as quais decorrem do processo de integração sobre a função de Wigner em uma das variáveis do espaço de fase.

Abstract

In this thesis we present a mathematical procedure which leads us to obtain analytical solutions for the atomic inversion and Wigner function in the framework of the driven Jaynes-Cummings model, for any kinds of cavity and driving fields. Such solutions are expressed in the integral form, with their integrands having a commom term that describes the product of the Glauber-Sudarshan quasiprobability distribution functions for each field, and a kernel responsible for the entanglement. Considering two specific initial states of the tripartite system, the formalism is then applied to calculate the atomic inversion and Wigner function where, in particular, we show how the detuning and amplitude of the driving field modify the entanglement. In addition, we also obtain the correct quantum-mechanical marginal distributions in phase space.

Conteúdo

Agradecimentos			v		
Re	lesumo				
Al	bstract v				
Lista de Figuras				xiii	
1	Intr	odução		1	
2	Con	ceitos l	Fundamentais	3	
	2.1	Precei	tos básicos de Mecânica Quântica	3	
	2.2	O Can	npo Eletromagnético Quantizado	8	
		2.2.1	Eletrodinâmica Clássica	8	
		2.2.2	Quantização do Campo Eletromagnético	10	
	2.3	Intera	ção da radiação com a matéria	13	
		2.3.1	Hamiltoniano de interação átomo-campo	13	
		2.3.2	Interação de um átomo de dois níveis com um único modo do campo	15	
		2.3.3	Método do operador evolução temporal	16	
		2.3.4	Operador densidade	16	
	2.4	Estado	os do Campo Eletromagnético	17	
		2.4.1	Distribuição de Número de Fótons	17	
		2.4.2	Estados de Quadratura	17	
		2.4.3	Estados de Fock	18	
		2.4.4	Estados Coerentes	18	
		2.4.5	Estados de Gato de Schrödinger	19	
		2.4.6	Estado Térmico	20	

	2.5 Distribuições de Quasi-Probabilidade				
		2.5.1 A função-P de Glauber-Sudarshan	21		
		2.5.2 A função de Wigner	22		
	2.6	Conceito de Emaranhamento	22		
3	ОM	Iodelo de Javnes-Cummings com um campo externo clássico	24		
	3.1	O Esquema de Detecção Homódina Atômica de Wilkens e Meystre	25		
	3.2	Limitações do esquema de detecção	28		
	3.3	Acoplamento diferenciado do átomo com os campos	32		
	3.4	Controlando as propriedades não-clássicas do MJC	34		
4	Asp	ectos qualitativos de emaranhamento no modelo de Jaynes-Cummings com um campo externo)		
	quântico 44				
	4.1	Aspectos algébricos do MJC com um campo externo	45		
	4.2	Inversão Atômica	48		
	4.3	Função de Wigner	51		
	4.4	Conclusões	56		
5	Con	siderações finais	57		
A	Alg	uns valores médios para o MJC com um campo externo clássico	59		
B	B A Inversão Atômica na forma integral				
C	2 Detalhes do cálculo da Função de Wigner				
Re	Referências 6				

Lista de Figuras

2.1	Distribuição do número de fótons para um estado coerente com $\langle \mathbf{n} \rangle_c = 25$	19
2.2	Distribuição do número de fótons para um estado de gato par com $ \alpha = 5$	20
3.1	Probabilidade de excitação $p(\tau)$ versus τ para $ \alpha = 2$ e $ \beta = 20$ fixos, considerando que	
	o átomo encontra-se inicialmente no estado excitado. Os gráficos referem-se a diferentes	
	situações limites: (a) cálculo exato (3.26) da probabilidade de excitação $p(t)$; (b) a Eq. (3.29) re-	
	flete o caso limite $ \beta \gg 1$ em que o campo coerente externo é intenso e (c) Eq. (3.31) refere-se	
	a situação em que o campo externo é aproximado por um campo clássico.	30
3.2	Esta figura mostra os gráficos da função de Wigner $W(x, y)$ versus $(x, y) \in [-4, 4]$ e conside-	
	rando $ \alpha = 2$. Nós consideramos os campos na cavidade nos estados coerente par (a,c) e	
	numa mistura estatística (b,d). O que diferencia os gráficos a(b) e c(d) é o tempo de interação,	
	onde em (c) e (d) utilizamos $\kappa \tau_{max} = 1$.	31
3.3	Gráfico da inversão atômica $\mathcal{I}_{c}(t)$ versus $\tau = \kappa t$, considerando o campo na cavidade no estado	
	coerente, com as amplitudes dos campos na cavidade e externo iguais a $ \alpha = 2$ e $ \beta = 2$,	
	respectivamente	37
3.4	Inversão atômica $\mathcal{I}_{\mathrm{th}}(t)$ versus $ au=\kappa_{\mathrm{a}}t$ para um campo térmico na cavidade. Foram analisa-	
	das duas situações: na primeira fixamos o campo externo em $ eta =3$ e variamos o número	
	médio de fótons térmicos em (a) $\bar{n} = 0.2$ e (c) $\bar{n} = 2$. Na segunda situação, a amplitude	
	do campo externo foi fixada em $ \beta = 5$ e novamente variamos o número médio de fótons	
	térmicos em (b) e (d), utilizando os mesmos valores dos gráficos (a) e (c)	38
3.5	Evolução temporal do número médio de fótons com amplitude $ lpha $ = 2 para o campo na	
	cavidade e $ \beta = 2$ para o campo externo. Aqui vemos o fenômeno de ressurgimento a longos	
	tempos	39

4.1 Aparato experimental usado na descrição do MJC com um campo externo quântico 46

- 4.3 Gráficos de $\mathcal{I}_{o}(t)$ versus $\kappa_{\text{eff}} t \in [0, 200]$ para (a,c) $\delta = 0$ (ressonante) e (b,d) $\delta = 6\kappa_{\text{eff}}$ (nãoressonante) para $\epsilon_{a} = 3/\sqrt{10}$, $\epsilon_{b} = 1/\sqrt{10}$ e $|\alpha| = 1$ fixo. Em ambas situações nós consideramos diferentes valores da amplitude do campo externo, isto é, (a,b) $|\beta| = 2$ e (c,d) $|\beta| = 20$. 51
- 4.4 Gráficos de W_a^(e)(γ;t) versus p ∈ [-7,7] e q ∈ [-10,4] para o sistema átomo-cavidade com dois valores diferentes de dessintonia: (a,b) δ = 0 (ressonante) e (c,d) δ = 10κ_{eff} (não-ressonante), com os parâmetros |α| = 1 (⟨n_a⟩_e ≈ 0.762) e κ_{eff}t = 100 fixos na presente simulação. Em ambas as situações, a condição κ_{a(b)} = κ foi estabelecida e os valores da amplitude do campo externo (a,c) |β| = 2 (⟨n_b⟩_c = 4) e (b,d) |β| = 5 (⟨n_b⟩_c = 25) considerados. 52
- 4.5 Gráfico da função de Wigner $W_{\rm a}^{(\rm o)}(\gamma;t)$ para o mesmo conjunto de parâmetros estabelecidos na figura anterior, com $|\alpha| = 1$ ($\langle \mathbf{n}_{\rm a} \rangle_{\rm o} \approx 1.313$) e $\kappa_{\rm eff} t = 100$ fixos. Note que o emaranhamento é máximo quando $\delta = 0$ (regime ressonante), e mínimo para $\delta = 10\kappa_{\rm eff}$ (regime não-ressonante). 54

67

Capítulo 1

Introdução

O conceito de emaranhamento aparece naturalmente em Mecânica Quântica quando o princípio da superposição é aplicado a sistemas compostos. Assim, um sistema composto está emaranhado quando suas propriedades físicas não podem ser descritas através do produto tensorial de operadores densidade associados às diferentes partes que constituem todo o sistema. Uma consequência imediata desse importante efeito tem sua origem na teoria quântica de medidas [1]: o estado emaranhado de um sistema composto pode revelar informações sobre suas diferentes partes. No entanto, essa informação é extremamente sensível ao acoplamento dissipativo entre a medida macroscópica e o meio ambiente. De fato, estados emaranhados envolvendo medidas macroscópicas são rapidamente transformados em misturas estatísticas de estados produto, e esse rápido processo de relaxação caracteriza a decoerência [2-4]. De acordo com Raimond e colaboradores [5]: "A decoerência por si mesma envolve emaranhamento uma vez que o objeto que realiza a medida está emaranhado com o meio. Se a informação vaza para o meio, o estado do medidor é obtido traçando-se sob as variáveis deste meio ambiente, levando a uma mistura estatística final. Esta análise é to-talmente consistente com a descrição de Copenhagen sobre medidas". Além desses aspectos fundamentais, estados emaranhados tem aplicações potenciais para processamento de informação e computação quântica [6-9], teleportação quântica [10] e esquemas de criptografia quântica [11].

Um sistema físico factível para gerar estados emaranhados é aquele utilizado no Modelo de Jaynes-Cummings (MJC), o qual descreve a interação da radiação com a matéria [12, 13]. Esse experimento é realizado em uma cavidade QED envolvendo átomos cruzando cavidades supercondutoras (um por um) com regimes de frequência e configurações diferentes, além de taxas de relaxação pequenas e bem conhecidas [5]. Recentemente, muitos autores tem investigado o MJC com dois modos e/ou com um campo externo em diferentes contextos, predizendo assim resultados novos e interessantes [14-28]. Entre eles, Solano e colaboradores [28] propuseram um método de geração de emaranhamento múltiplo através da interação de um sistema de N átomos de dois níveis em uma cavidade com alto fator de qualidade, com um campo externo clássico e intenso. Segundo os autores, a principal vantagem do campo externo nesse sistema é a grande flexibilidade na geração de estados emaranhados, desde que ele produza liberdade na escolha da dessintonia e intensidade do campo. Por outro lado, Wildfeuer e Schiller [29] usaram o modelo do oscilador de Schwinger para obter uma solução matemática para a geração de estados emaranhados de N fótons para o MJC de dois modos. Aqui, nós desenvolvemos um procedimento matemático que nos permite obter soluções compactas para a inversão atômica e função de Wigner para o MJC com um campo externo quântico, considerando quaisquer campos na cavidade e externo. Em ambos os casos as soluções são expressas na forma integral, com seus integrandos apresentando um termo comum que descreve o produto das distribuições de quasi-probabilidades de Glauber-Sudarshan [35] para cada campo e um kernel responsável pela correlação. Para ilustrar os resultados nós fixamos o campo na cavidade nos estados coerente par e ímpar [36], e o campo externo no estado coerente. Em seguida, mostramos como a dessintonia e a amplitude do campo externo modifica o emaranhamento no sistema em questão via função de Wigner.

Os tópicos abordados aqui estão dispostos da seguinte maneira: no **capítulo 2** apresentamos uma breve introdução de alguns conceitos de óptica quântica, como noções de estados e operadores, demonstramos o procedimento adotado para a quantização do campo eletromagnético e algumas de suas principais propriedades, fazemos uma revisão sobre a interação da radiação com a matéria (MJC) e damos uma breve abordagem às distribuições de quasi-probabilidade e emaranhamento. Já no **capítulo 3**, apresentamos alguns resultados existentes na literatura para o modelo Jaynes-Cummings com um campo externo coerente intenso, como, por exemplo, o esquema de detecção atômica homódina de Wilkens e Meystre e suas limitações. Por fim, no **capítulo 4** apresentamos o procedimento matemático que possibilitou a obtenção de expressões analíticas para o modelo de Jaynes-Cummings com um campo externo quântico, além de uma análise qualitativa do emaranhamento nesse sistema composto via função de Wigner. Nos **apêndices A, B e C** mostramos, respectivamente, detalhes dos cálculos das seções **3.4, 4.3 e 4.4**. O **capítulo 5** contém conclusões acerca dos resultados e perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Conceitos Fundamentais

Neste capítulo iremos introduzir alguns conceitos básicos de óptica quântica os quais são necessários para o entendimento de tópicos específicos abordados nos próximos capítulos. A discussão desses conceitos será suscinta, explorando apenas o necessário para um melhor entendimento dos resultados expostos posteriormente. Desta maneira, mostraremos em primeiro lugar alguns conceitos básicos de mecânica quântica, como noções de estados e operadores. Em seguida, introduziremos brevemente o tópico quantização do campo eletromagnético. Também abordaremos o modelo proposto por Jaynes e Cummings, que descreve processos simples de interação da radiação com a matéria, além de apresentar diferentes estados do campo eletromagnético utilizados no estudo de efeitos genuinamente quânticos decorrentes do modelo em questão. Por final, apresentaremos uma breve introdução sobre a teoria das distribuições de quasi-probabilidade e emaranhamento. As referências [31-39] são indicadas como leitura complementar a esse capítulo, tendo em vista que foram a base para a disposição dos tópicos e de algumas passagens matemáticas.

2.1 Preceitos básicos de Mecânica Quântica

O estado de um sistema quântico é descrito completamente por um vetor de estado no espaço de Hilbert denominado *ket* e denotado por $|\psi\rangle$. Se $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ são possíveis estados, então a superposição

$$|\psi\rangle = a_1|\psi_1\rangle + a_2|\psi_2\rangle \tag{2.1}$$

é também um estado do sistema com amplitudes complexas a_1 e a_2 . O *bra* $\langle \psi |$ tem representação de estado equivalente a

$$\langle \psi | = a_1^* \langle \psi_1 | + a_2^* \langle \psi_2 |, \tag{2.2}$$

em que a_1^* e a_2^* são os complexos conjugados de a_1 e a_2 , respectivamente. O produto interno (ou produto escalar) de dois estados $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$ é caracterizado pelo número complexo $\langle \psi | \varphi \rangle$ ou seu complexo conjugado $\langle \varphi | \psi \rangle$. Se o produto entre esses dois vetores é zero, dizemos que eles são ortogonais. Consequentemente, o produto interno de um estado $|\psi\rangle$ com ele mesmo é real e maior que zero, ou seja,

$$\langle \psi | \psi \rangle > 0. \tag{2.3}$$

Se este produto interno é 1, ou seja, $\langle \psi | \psi \rangle = 1$, então diz-se que o estado está normalizado. Se os estados $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ são ortonormais, então as amplitudes a_1 e a_2 são dadas por

$$\langle \psi_1 | \psi \rangle = a_1 = \langle \psi | \psi_1 \rangle^*,$$

$$\langle \psi_2 | \psi \rangle = a_2 = \langle \psi | \psi_2 \rangle^*.$$
(2.4)

Se $|\psi\rangle$ é normalizado, então $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$. Assim podemos interpretar $|a_1|^2$ e $|a_2|^2$ como a probabilidade de encontrar o sistema nos estados $|\psi_1\rangle$ ou $|\psi_2\rangle$, respectivamente. A generalização da Eq. (2.1) para a superposição de *n* possíveis estados dar-se-a por

$$|\psi\rangle = \sum_{n} a_{n} |\psi_{n}\rangle, \tag{2.5}$$

onde, para o caso de $|\psi\rangle$ normalizado e estados $|\psi_n\rangle$ tais que $\langle\psi_n|\psi_m\rangle = \delta_{nm}$, temos

$$\sum_{n} |a_n|^2 = 1.$$
 (2.6)

A descrição de um sistema na mecânica quântica torna-se completa com a introdução do conceito abstrato de operadores. Um operador **A** atuando sobre qualquer estado do sistema produz um outro estado que, em geral, não é normalizado. O operador conjugado \mathbf{B}^{\dagger} de um operador **B**, segue as seguintes condições:

$$(\mathbf{B}^{\dagger})^{\dagger} = \mathbf{B}, \qquad (\mathbf{B} + \mathbf{C})^{\dagger} = \mathbf{B}^{\dagger} + \mathbf{C}^{\dagger}, (\mathbf{B}\mathbf{C})^{\dagger} = \mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{B}^{\dagger}, \qquad (\lambda\mathbf{B})^{\dagger} = (\lambda^{*}\mathbf{B}^{\dagger}),$$
(2.7)

no qual **C** denota um outro operador e λ um número complexo. Um operador qualquer que satisfaz a condição **A** = **A**[†] é dito ser Hermitiano, com um observável *A* associado a este operador. Os autovalores λ_n de **A** satisfazem a equação de autovalores

$$\mathbf{A}|\lambda_n\rangle = \lambda_n|\lambda_n\rangle,\tag{2.8}$$

em que $|\lambda_n\rangle$ são os autoestados. A equação conjugada, trocando λ_n por λ_m é

$$\langle \lambda_m | \mathbf{A}^{\dagger} = \langle \lambda_m | \mathbf{A} = \lambda_m^* \langle \lambda_m |, \qquad (2.9)$$

sendo **A** um operador Hermitiano. Assim, fazendo o produto interno da equação acima com $|\lambda_n\rangle$, ficamos com

$$\langle \lambda_m | \mathbf{A} | \lambda_n \rangle = \lambda_m^* \langle \lambda_m | \lambda_n \rangle \tag{2.10}$$

e, similarmente, se fizermos o produto de $\langle \lambda_m |$ com a primeira equação de autovalores, obteremos

$$\langle \lambda_m | \mathbf{A} | \lambda_n \rangle = \lambda_n \langle \lambda_m | \lambda_n \rangle. \tag{2.11}$$

Desta maneira, temos que

$$(\lambda_m^* - \lambda_n) \langle \lambda_m | \lambda_n \rangle = 0 \tag{2.12}$$

onde, se m = n, podemos concluir que o autovalor λ_n é real pois $\langle \lambda_n | \lambda_n \rangle = 1$. Para $\lambda_m \neq \lambda_n$, os estados $|\lambda_m \rangle$ e $|\lambda_n \rangle$ são ortogonais e ortonormais se $\langle \lambda_m | \lambda_n \rangle = \delta_{mn}$. Portanto, operadores Hermitianos tem autovalores reais associados com autoestados ortonormais. Medidas de *A* produzem um dos autovalores reais de **A**, pois ao considerarmos o estado normalizado,

$$|\psi\rangle = \sum_{n} a_n |\lambda_n\rangle, \tag{2.13}$$

obteremos como probabilidade de que a medida resulte em λ_n o valor $|a_n|^2$. Se todos os possíveis estados podem ser expressos na forma acima, então o conjunto $|\lambda_n\rangle$ é dito ser completo. Se dois autoestados ortonormais $|\lambda_m\rangle \in |\lambda_n\rangle$ possuem o mesmo autovalor λ , então os estados são degenerados e a probabilidade de obter o resultado λ será $|a_m|^2 + |a_n|^2$. O valor médio $\langle \mathbf{A} \rangle$ encontrado com medidas de um *ensemble* de sistemas preparados identicamente tem como definição

$$\langle \mathbf{A} \rangle \equiv \langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle = \sum_{n} \lambda_{n} |a_{n}|^{2}.$$
 (2.14)

A extensão estatística desse resultado é geralmente expressa em termos da variância

$$\sigma_A = \langle \psi | (\mathbf{A} - \langle \mathbf{A} \rangle)^2 | \psi \rangle, \tag{2.15}$$

a qual é zero se e somente se $|\psi\rangle$ for um autoestado de **A**.

O comutador de dois operadores A e B é definido como sendo

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}.$$
 (2.16)

Se **A** e **B** são Hermitianos e $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$, então os observáveis *A* e *B* são compatíveis e os operadores **A** e **B** tem em comum um conjunto de autoestados completos. Alguns ou todos os autoestados de observáveis incompativeis serão diferentes. Para dois operadores Hermitianos vale a relação $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]^{\dagger} = -[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$, enquanto que o comutador de um operador **A** com o produto **BC** é facilmente reescrito como

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{C}] = \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C}.$$
(2.17)

Já o anticomutador de dois operadores é definido como

$$\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A},\tag{2.18}$$

sendo este preservado para $\mathbf{A} \in \mathbf{B}$ Hermitianos. As incertezas associadas com as medidas de observáveis incompatíveis $\mathbf{A} \in \mathbf{B}$ para quaisquer estados obedecem o príncipio da incerteza

$$\sigma_A \sigma_B \ge \frac{1}{2} |\langle [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \rangle|. \tag{2.19}$$

Quando a inequação acima se torna uma igualdade, obtemos a relação de mínima incerteza para os estados de *A* e *B*.

O produto externo de dois estados $|\varphi_1\rangle$ e $|\varphi_2\rangle$ é o operador projetor $|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2|$ ou o seu conjugado $|\varphi_2\rangle\langle\varphi_1|$, sendo este um operador Hermitiano se e somente se $|\varphi_1\rangle = |\varphi_2\rangle$. Note que o projetor $|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2|$ atuando no estado $|\psi\rangle$ produz o estado $\langle\varphi_2|\psi\rangle|\varphi_1\rangle$, que é o estado $|\varphi_1\rangle$ multiplicado pelo número complexo $\langle\varphi_2|\psi\rangle$. Por outro lado, um conjunto ortonormal completo de autovetores permite descrever o operador Hermitiano **A** como segue:

$$\mathbf{A} = \sum_{n} \lambda_n |\lambda_n\rangle \langle \lambda_n |.$$
(2.20)

Consequentemente, o operador f(A) também admite a expansão

$$\mathbf{f}(\mathbf{A}) = \sum_{n} f(\lambda_n) |\lambda_n\rangle \langle \lambda_n |, \qquad (2.21)$$

em que $|\lambda_n\rangle$ é um autoestado de $\mathbf{f}(\mathbf{A})$ com autovalores $f(\lambda_n)$.

A evolução de um sistema físico, representado pelo operador Hamiltoniano **H**, é descrito por intermédio do vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ e governada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \mathbf{H}|\psi(t)\rangle.$$
 (2.22)

A solução dessa equação é dada por

$$|\psi(t)\rangle = \mathbf{U}(t)|\psi(0)\rangle, \qquad (2.23)$$

no qual $\mathbf{U}(t)$ é o operador unitário em que $\mathbf{U}^{\dagger}(t) = \mathbf{U}^{-1}(t)$ e que nos leva a $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | \psi(0) \rangle$. Além disso, o operador evolução temporal também satisfaz a equação diferencial

$$i\hbar \frac{\partial \mathbf{U}(t)}{\partial t} = \mathbf{H}\mathbf{U}(t),$$
 (2.24)

cuja solução é $\mathbf{U}(t) = \exp(-i\mathbf{H}t)/\hbar$ desde que **H** não dependa do tempo e $t_0 = 0$.

Em algumas situações é usual introduzir a matriz densidade ho através do operador Hermitiano

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_{n} P_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n | \qquad (P_n \equiv |a_n|^2). \tag{2.25}$$

Desta maneira, o valor médio de A é dado por

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}\mathbf{A}), \tag{2.26}$$

no qual "Tr" denota a operação traço, que é a soma dos elementos diagonais do produto $\rho \mathbf{A}$ em qualquer base que consista de um conjunto ortonormal completo de estados. Vamos considerar, como exemplo, a base $|\lambda_m\rangle$ para calcular o valor médio do operador **A**. Então, temos

$$\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\rho}\mathbf{A}) = \sum_{m} \langle \lambda_{m} | \left(\sum_{n} P_{n} | \psi_{n} \rangle \langle \psi_{n} | \mathbf{A}\right) | \lambda_{m} \rangle$$
$$= \sum_{n} P_{n} \langle \psi_{n} | \mathbf{A} \left(\sum_{m} | \lambda_{m} \rangle \langle \lambda_{m} | \right) \psi_{n} \rangle$$
$$= \sum_{n} P_{n} \langle \psi_{n} | \mathbf{A} | \psi_{n} \rangle, \qquad (2.27)$$

que coincide com o valor obtido na Eq. (2.26). Agora, ao considerarmos o operador **A** como sendo o operador identidade, obtem-se

$$\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{n} P_{n} = 1, \qquad (2.28)$$

isto é, a soma de todas as probabilidades é igual a 1. Além disso, se fixarmos $\mathbf{A} = \rho$ ficamos com

$$\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\rho}^{2}) = \sum_{n} P_{n} \langle \psi_{n} | \left(\sum_{m} P_{m} | \psi_{m} \rangle \langle \psi_{m} | \right) \psi_{n} \rangle$$
$$= \sum_{n} \sum_{m} P_{n} P_{m} \delta_{nm} = \sum_{n} P_{n}^{2} \leq 1.$$
(2.29)

Consequentemente, diz-se que um sistema está num estado puro quando a condição $\text{Tr}(\rho^2) = 1$ for satisfeita; caso contrário, se $\text{Tr}(\rho) < 1$, o sistema se encontra num estado de mistura. Convém mencionar que na segunda igualdade da Eq. (2.27) foi utilizada uma importante propriedade da operação traço e que se refere a permutação cíclica do produto de operadores, ou seja,

$$Tr(ABC) = Tr(CAB) = Tr(BCA).$$
(2.30)

Além disso, para dois sistemas independentes, nós podemos escrever o estado composto $|\psi\rangle$ como um produto direto $|\psi\rangle = |\lambda\rangle |\varphi\rangle$, onde $|\lambda\rangle \in |\varphi\rangle$ são os estados dos dois sistemas.

2.2 O Campo Eletromagnético Quantizado

Em 1927, Dirac [40] elaborou com sucesso a teoria quântica da radiação. Desde então, outras formulações da teoria surgiram, algumas sendo indispensáveis para cálculos de alta precisão e para a formulação de teorias relativísticas covariantes. Aqui, a abordagem de Dirac será suficiente para nossos propósitos. Inicialmente, vamos discutir a eletrodinâmica clássica mostrando que a Hamiltoniana do campo de radiação pode ser escrita como a soma de Hamiltonianas de osciladores harmônicos independentes. Em seguida, abordamos o processo de quantização do campo eletromagnético.

2.2.1 Eletrodinâmica Clássica

Consideremos inicialmente a teoria clássica de radiação em uma cavidade onde, por simplificação, interações do campo com possíveis fontes (distribuições de carga, por exemplo) estão descartadas. As equações de Maxwell para o campo eletromagnético no vácuo, em unidades gaussianas, são [41]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0,$$
(2.31)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$
 (2.32)

Logo, a energia e o momentum linear associados ao campo são dados por

$$H = \frac{1}{8\pi} \int_{V} (|\vec{E}|^{2} + |\vec{B}|^{2}) d^{3}r \qquad \mathbf{e} \qquad \vec{P} = \frac{1}{4\pi c} \int_{V} (\vec{E} \times \vec{B}) d^{3}r, \tag{2.33}$$

no qual *V* representa o volume da cavidade em que estão inseridos os campos eletromagnéticos. Podemos expressar os campos eletromagnéticos $\vec{E} \in \vec{B}$ em termos dos potenciais vetorial e escalar (\vec{A}, ϕ) como segue:

$$\vec{E} = \vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$
 (2.34)

Agora, se os potenciais forem transformados de acordo com as transformações de gauge

$$\vec{A} \to \vec{A'} = \vec{A} + \nabla \Lambda$$
 e $\Phi \to \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$. (2.35)

as equações (2.35) são invariantes (Λ é uma função escalar arbitrária). Dessa forma, sempre podemos escolher o potencial vetor \vec{A} de modo que $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$ (*gauge de Coulomb*). Em particular, na ausência de cargas ($\Phi = 0$), a solução da equação de ondas para o potencial vetor \vec{A} ,

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0, \qquad (2.36)$$

permite-nos descrever completamente o campo eletromagnético para um dado ponto (x,y,z) num tempo t qualquer. As soluções reais da equação de onda para o potencial vetor que satisfazem condições periódicas em uma caixa cúbica de volume $V = L^3$, podem ser expandidas em série de Fourier como seguem:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\{k_i\}} \left[\vec{A}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \vec{A}_{\vec{k}}^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \qquad (\{k_i\} = k_x, k_y, k_z),$$
(2.37)

onde a soma é sobre todos os valores possíveis de $k_i = (2\pi/L)n_i$, com i = x, y, z e $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ A condição do gauge de Coulomb implica que $\vec{k}.\vec{A_k} = 0$, ou seja, as componentes de Fourier são perpendiculares ao vetor de propagação \vec{k} . Consequentemente, $\vec{A_k}$ ($\vec{A_k}$) tem apenas duas componentes para cada k:

$$\vec{A}_{\vec{k}}(t) = \sum_{\alpha} c_{\vec{k}\alpha}(t) \vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2),$$
(2.38)

em que $\vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha} = 1,2$ denota os vetores de polarização unitários tais que $\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha} = 0$ e $\vec{\epsilon}_{\vec{k}1} \perp \vec{\epsilon}_{\vec{k}2}$.

Substituindo a série de Fourier (2.37) na equação de ondas (2.36), obtemos uma equação diferencial para os coeficientes $c_{\vec{k}\alpha}(t)$, ou seja,

$$\frac{d^2 c_{\vec{k}\alpha}(t)}{dt^2} + \omega_k^2 c_{\vec{k}\alpha}(t) = 0.$$
(2.39)

Portanto, os coeficientes de Fourier oscilam harmônicamente com frequência $\omega_k = c |\vec{k}|$, permitindo assim obtermos uma expressão final para o potencial vetor

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\{k_i\}} \sum_{\alpha} \epsilon_{\vec{k}\alpha} \left[c_{\vec{k}\alpha}(0) e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega_k t)} - c^*_{\vec{k}\alpha}(0) e^{-i(\vec{k}.\vec{r}-\omega_k t)} \right].$$
(2.40)

Assim, os campos elétrico e magnético podem ser expressos em termos desses coeficientes de Fourier como segue:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{i}{e\sqrt{V}} \sum_{\{k_i\}} \sum_{\alpha} |\vec{k}| \vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha} \left[c_{\vec{k}\alpha}(0) e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega_k t)} - c^*_{\vec{k}\alpha}(0) e^{-i(\vec{k}.\vec{r}-\omega_k t)} \right],$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\{k_i\}} \sum_{\alpha} \left(\vec{k} \times \vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha} \right) \left[c_{\vec{k}\alpha}(0) e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega_k t)} - c^*_{\vec{k}\alpha}(0) e^{-i(\vec{k}.\vec{r}-\omega_k t)} \right],$$
(2.41)

no qual utilizamos o fato de que

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha} e^{\pm i\vec{k}.\vec{r}-\omega_k t}\right) = \pm i \left(\vec{k} \times \vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha}\right) e^{\pm i\vec{k}.\vec{r}-\omega_k t}$$

Finalmente, a energia eletromagnética pode então ser escrita da seguinte forma [42]:

$$H = \frac{1}{2\pi c^2} \sum_{\{k_i\}} \sum_{\alpha} \omega_k^2 c_{\vec{k}\alpha}^*(t) c_{\vec{k}\alpha}(t) = \frac{1}{2\pi c^2} \sum_{\{k_i\}} \sum_{\alpha} \omega_k^2 c_{\vec{k}\alpha}^*(0) c_{\vec{k}\alpha}(0).$$
(2.42)

Vamos agora definir as variáveis canônicas reais

$$Q_{\vec{k}\alpha}(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2}} \left[c_{\vec{k}\alpha}(t) + c^*_{\vec{k}\alpha}(t) \right],$$

$$P_{\vec{k}\alpha}(t) = \frac{i\omega_k}{\sqrt{4\pi c^2}} \left[c_{\vec{k}\alpha}(t) - c^*_{\vec{k}\alpha}(t) \right],$$
(2.43)

de modo que

$$c_{\vec{k}\alpha}(t) = \sqrt{\pi c^2} \left[Q_{\vec{k}\alpha}(t) + i \frac{P_{\vec{k}\alpha}(t)}{\omega_k} \right].$$
(2.44)

Em termos dessas novas variáveis, temos que

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\{k_i\}} \sum_{\alpha} \left(P_{\vec{k}\alpha}^2 + \omega_k^2 Q_{\vec{k}\alpha}^2 \right).$$
(2.45)

Como *H* é constante, não é necessário especificar o argumento temporal das variáveis na expressão acima. Podemos também constatar nessa equação que a energia do campo eletromagnético livre pode ser colocada na forma da Hamiltoniana de um conjunto de osciladores desacoplados, onde cada um desses osciladores tem massa unitária e frequência ω_k . Assim, através das equações de Hamilton

$$\dot{Q}_{\vec{k}\alpha} = \partial H / \partial P_{\vec{k}\alpha} \qquad e \qquad \dot{P}_{\vec{k}\alpha} = -\partial H / \partial Q_{\vec{k}\alpha},$$
(2.46)

podemos obter diretamente as equações de movimento

$$\ddot{Q}_{\vec{k}\alpha} + \omega^2 Q_{\vec{k}\alpha} = 0 \qquad \mathbf{e} \qquad \ddot{P}_{\vec{k}\alpha} + \omega^2 P_{\vec{k}\alpha} = 0.$$
(2.47)

Na eletrodinâmica clássica, as variáveis $Q_{\vec{k}\alpha}$ e $P_{\vec{k}\alpha}$ são *c-numbers* e satisfazem o colchete de *Poisson*

$$\left\{Q_{\vec{k}\alpha}, P_{\vec{k'}\alpha'}\right\} = \delta_{\vec{k}, \vec{k'}} \delta_{\alpha, \alpha'}.$$

2.2.2 Quantização do Campo Eletromagnético

A proposta de Dirac consiste em considerar $Q_{\vec{k}\alpha}$ e $P_{\vec{k}\alpha}$ como operadores satisfazendo as regras de comutação

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\vec{k}\alpha}, \mathbf{P}_{\vec{k'}\alpha'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\vec{k}\alpha}, \mathbf{Q}_{\vec{k'}\alpha'} \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\vec{k}\alpha}, \mathbf{P}_{\vec{k'}\alpha'} \end{bmatrix} = i\hbar \, \delta_{\vec{k},\vec{k'}}, \delta_{\alpha,\alpha'}.$$
 (2.48)

Além disso, embasados no princípio da correspondência, vamos considerar (2.45) como o operador Hamiltoniano do sistema quântico.

Seguiremos agora o formalismo adotado habitualmente para o oscilador harmônico, introduzindo, para cada oscilador do campo, os operadores de aniquilação e criação

$$\mathbf{a}_{\vec{k}\alpha} = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}} \mathbf{Q}_{\vec{k}\alpha} + i \, \frac{\mathbf{P}_{\vec{k}\alpha}}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} \qquad \mathbf{e} \qquad \mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}^{\dagger} = (\mathbf{a}_{\vec{k}\alpha})^{\dagger}, \tag{2.49}$$

respectivamente, de modo que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}, \mathbf{a}_{\vec{k'}\alpha'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}^{\dagger}, \mathbf{a}_{\vec{k'}\alpha'}^{\dagger} \end{bmatrix} = 0,$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}, \mathbf{a}_{\vec{k'}\alpha'}^{\dagger} \end{bmatrix} = \delta_{\vec{k}, \vec{k'}} \delta_{\alpha, \alpha'} \mathbf{1},$$
(2.50)

e

$$\mathbf{H} = \sum_{\{k_i\}} \sum_{\alpha} \hbar \omega_k \left(\mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}^{\dagger} \mathbf{a}_{\vec{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right).$$
(2.51)

Subtraindo o termo constante e infinito da expressão acima (que é equivalente a definir a energia de pontozero como sendo aquela em que o termo infinito não está presente), obtemos o Hamiltoniano

$$\mathbf{H} = \sum_{\{k_i\}} \sum_{\alpha} \hbar \omega_k \, \mathbf{a}^{\dagger}_{\vec{k}\alpha} \mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}.$$
(2.52)

Isto é equivalente a assegurar que os operadores $\mathbf{a}_{\vec{k}\alpha} \in \mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}^{\dagger}$ desempenham um papel similar aos dos coeficientes de Fourier $c_{\vec{k}\alpha} \in c_{\vec{k}\alpha'}^*$ desde que se introduza um fator de escala que os torne adimensionais:

$$c_{\vec{k}\alpha} \to \sqrt{\frac{hc^2}{\omega_k}} \mathbf{a}_{\vec{k}\alpha},$$

$$c_{\vec{k}\alpha}^* \to \sqrt{\frac{hc^2}{\omega_k}} \mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}^{\dagger} \qquad (h = 2\pi\hbar).$$
(2.53)

Uma vez que $\mathbf{H} = \sum_{\{k_i\}} \sum_{\alpha} \mathbf{H}_{\vec{k}\alpha'}$ onde \mathbf{H} corresponde a uma soma de Hamiltonianos associados aos diversos modos (\vec{k}, α) e estes comutam entre si, os autovetores de \mathbf{H} podem ser construídos a partir do produto tensorial dos autovetores de $\mathbf{H}_{\vec{k}\alpha}$.

Cada modo pode ser tratado como um oscilador harmônico unidimensional. Assim, introduzimos o operador número

$$\mathbf{N}_{\vec{k}\alpha} = \mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}^{\dagger} \mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}, \tag{2.54}$$

cujos autovalores são $n_{\vec{k}\alpha} = 0, 1, 2, ...$ Um conjunto completo de autovetores de (2.52) é dado por

$$(\mathbf{N}_{\vec{k}\alpha} - \mathbf{n}_{\vec{k}\alpha}) | \{\mathbf{n}_{\vec{k}\alpha}\}\rangle = 0, \tag{2.55}$$

com

$$|\{\mathbf{n}_{\vec{k}\alpha}\}\rangle = |\mathbf{n}_{\vec{k}_{1}\alpha_{1}}\rangle \otimes |\mathbf{n}_{\vec{k}_{2}\alpha_{2}}\rangle \otimes ... \equiv |\mathbf{n}_{\vec{k}_{1}\alpha_{1}}, \mathbf{n}_{\vec{k}_{2}\alpha_{2}}, ...\rangle$$
(2.56)

e

$$\langle \left\{ \mathbf{n}_{\vec{k}\alpha} \right\} | \left\{ \mathbf{n}_{\vec{k}\alpha}' \right\} \rangle = \prod_{\vec{k}_{i},\alpha_{i}} \delta_{n'_{\vec{k}_{i}\alpha},n_{\vec{k}_{i}\alpha}} \qquad (i = 1, 2, ...) .$$

$$(2.57)$$

Os *kets* $|\{\mathbf{n}_i\}\rangle$ desempenham um papel central na teoria pois representam um conjunto completo de estados estacionários do campo eletromagnético na cavidade, com autovalores de energia iguais a

$$E(\{n_{\vec{k}\alpha}\}) = \sum_{\{k_i\}} \sum_{\alpha} \hbar \omega_k n_{\vec{k}\alpha}.$$
(2.58)

Consequentemente, o estado estacionário de menor energia é especificado pelos autovalores $n_{\vec{k}\alpha} = 0$ para todo (\vec{k},α) . Este estado é chamado de vácuo e designado por $|0\rangle$. Todos os outros estados estacionários podem ser construídos a partir deste através da fórmula

$$|\{n_{\vec{k}\alpha}\}\rangle = \prod_{\vec{k}_i,\alpha_i} \frac{(\mathbf{a}_{\vec{k}_i\alpha_i}^{\dagger})^{n_{\vec{k}_i\alpha_i}}}{\sqrt{n_{\vec{k}_i,\alpha_i}!}}|0\rangle, \tag{2.59}$$

já conhecida para o oscilador harmônico.

Podemos ver nas expressões (2.53) e (2.40) que $\vec{A}_{\vec{k}\alpha} \rightarrow c\sqrt{h/\omega} \mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}$, de modo que o operador correspondente ao potencial vetor é dado por

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r},t) = \sum_{\{k_i\}} \sum_{\alpha} \sqrt{\frac{hc^2}{\omega_k V}} \vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha} \left[\mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}(t) e^{i\vec{k}.\vec{r}} + \mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}^{\dagger}(t) e^{-i\vec{k}.\vec{r}} \right],$$
(2.60)

enquanto que os operadores para os campos elétrico e magnético têm como expressões

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t) = \sum_{\{k_i\}} \sum_{\alpha} \sqrt{\frac{h\omega_k}{V}} \vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha} \left[\mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}^{\dagger}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right],$$

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r},t) = i \sum_{\{k_i\}} \sum_{\alpha} \sqrt{\frac{hc^2}{V\omega_k}} (\vec{k} \times \vec{\epsilon}_{\vec{k}\alpha}) \left[\mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}^{\dagger}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right].$$
 (2.61)

Desta maneira, é fácil mostrar que o momentum linear do campo eletromagnético é dado por [33,42]

$$\vec{\mathbf{P}} = \sum_{\{k_i\}} \sum_{\alpha} \hbar \vec{k} \left(\mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}^{\dagger} \mathbf{a}_{\vec{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right)$$
(2.62)

e, devido a distribuição simétrica de vetores de onda em que $\sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k}/2 = 0$, obtem-se

$$\vec{\mathbf{P}} = \sum_{\{k_i\}} \sum_{\alpha} \hbar \vec{k} \mathbf{N}_{\vec{k}\alpha}.$$
(2.63)

Note que o estado estacionário $|n_{\vec{k}\alpha}\rangle$ é um autoestado de $\vec{\mathbf{P}}$ com autovalor

$$\vec{P} = \sum_{\{k_i\}} \sum_{\alpha} \hbar \vec{k} n_{\vec{k}\alpha}.$$
(2.64)

A dinâmica do sistema pode ser formulada tanto na representação de Schrödinger quanto no de Heisenberg. Nesta última representação, os operadores $\mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}$ satisfazem a equação de movimento

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}(t) = \left[\mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}(t), \mathbf{H}\right] = \hbar \omega_k \mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}(t), \qquad (2.65)$$

de modo que

$$\mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}(t) = \mathbf{a}_{\vec{k}\alpha}(0)e^{-i\omega_k t}.$$
(2.66)

2.3 Interação da radiação com a matéria

Nesta seção abordaremos a interação de um único modo do campo eletromagnético quântico em uma cavidade com um átomo de dois níveis. É claro que a substituição de um átomo por um sistema de dois níveis não passa de uma aproximação, que é razoável se os dois estados estão aproximadamente ressonantes com o campo contido na cavidade, ao mesmo tempo que as outras frequências de transição atômicas estão afastadas o suficiente das frequências de oscilação do campo. A analogia com relação ao único modo do campo é válida, ou seja, podemos supor que esse é o único modo aproximadamente ressonante com a transição atômica. Esse modelo é conhecido como **Modelo de Jaynes-Cummings** [12,13]. Assim, iremos nessa seção utilizar a formulação Hamiltoniana que descreve o sistema e realizar as aproximações devidas para encontrar os operadores evolução temporal e densidade do sistema. Essa metodologia será utilizada nos capítulos seguintes, em que consideraremos a adição de um terceiro subsistema ao problema, possibilitando assim o cálculo de algumas variáveis dinâmicas imprescindíveis para uma completa descrição da interação em questão.

2.3.1 Hamiltoniano de interação átomo-campo

O modelo de Jaynes-Cummings descreve a interação de um átomo de dois níveis com um único modo do campo inserido em uma cavidade. A interação de um campo de radiação com um único átomo pode ser descrita pelo Hamiltoniano na aproximação de dipolo [35]

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F + e\vec{r}.\vec{E},\tag{2.67}$$

em que \mathbf{H}_A e \mathbf{H}_F são as energias do átomo e do campo, respectivamente, e \vec{r} é o vetor posição do elétron. A energia de campo livre é dada em termos dos operadores criação e destruição de fótons,

$$\mathbf{H}_F = \sum_k \hbar \omega_k (\mathbf{a}_k^{\dagger} \mathbf{a}_k + 1/2).$$
(2.68)

É possível expressar \mathbf{H}_A e $e\vec{r}$ em termos dos operadores de transição atômica $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$, no qual $|i\rangle$ representa um conjunto completo de auto-estados de energia atômica, isto é, $\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$. Então, da equação de autovalores $\mathbf{H}_A |i\rangle = E_i |i\rangle$, temos que

$$\mathbf{H}_{A} = \sum_{i} E_{i} |i\rangle \langle i| \tag{2.69}$$

e

$$e\vec{r} = \sum_{ij} e|i\rangle\langle i|\vec{r}|j\rangle\langle j| = \sum_{ij}\vec{\Gamma}_{ij}\boldsymbol{\sigma}_{ij}, \qquad (2.70)$$

onde $\vec{\Gamma}_{ij} = e\langle i | \vec{r} | j \rangle$ é o elemento de matriz da transição de dipolo elétrico e $|i\rangle\langle j| = \sigma_{ij}$. O operador do campo elétrico é calculado na aproximação de dipolo na posição do átomo pontual. O campo elétrico é dado por

$$\vec{E} = \sum_{k} \varepsilon_{k} (\mathbf{a}_{k} + \mathbf{a}_{k}^{\dagger}) \vec{\epsilon}_{k}, \qquad (2.71)$$

onde $\varepsilon_k = (\hbar \nu_k / 2\epsilon_0 V)^{1/2}$.

Então, reescrevendo o Hamiltoniano total, obtem-se

$$\mathbf{H} = \sum_{k} \hbar \omega_{k} \mathbf{a}_{k}^{\dagger} \mathbf{a}_{k} + \sum_{i} E_{i} \boldsymbol{\sigma}_{ii} + \hbar \sum_{ij} \sum_{k} g_{k}^{(ij)} \boldsymbol{\sigma}_{ij} (\mathbf{a}_{k} + \mathbf{a}_{k}^{\dagger})$$
(2.72)

com

$$g_k^{(ij)} = -\frac{\vec{\Gamma}_{ij}.\vec{\epsilon}_k\varepsilon_k}{\hbar}.$$
(2.73)

Para o caso de um átomo de dois níveis ($\vec{\Gamma}_{eg} = \vec{\Gamma}_{ge}$) ficamos com

$$\mathbf{H} = \sum_{k} \hbar \omega_{k} \mathbf{a}_{k}^{\dagger} \mathbf{a}_{k} + (E_{e} \boldsymbol{\sigma}_{ee} + E_{g} \boldsymbol{\sigma}_{gg}) + \hbar \sum_{k} g_{k} (\boldsymbol{\sigma}_{eg} + \boldsymbol{\sigma}_{ge}) (\mathbf{a}_{k} + \mathbf{a}_{k}^{\dagger}),$$
(2.74)

no qual o segundo termo pode ser reescrito como

$$E_e \boldsymbol{\sigma}_{ee} + E_g \boldsymbol{\sigma}_{gg} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 (\boldsymbol{\sigma}_{ee} - \boldsymbol{\sigma}_{gg}) + \frac{1}{2} (E_e + E_g)$$
(2.75)

Agora, lembrando que $E_e - E_g = \hbar \omega_0$ e $\sigma_{ee} + \sigma_{gg} = 1$, além de usarmos as notações

$$\sigma_{z} = \sigma_{ee} - \sigma_{gg} = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|,$$

$$\sigma_{+} = \sigma_{eg} = |e\rangle \langle g|,$$

$$\sigma_{-} = \sigma_{ge} = |g\rangle \langle e|,$$
(2.76)

o Hamiltoniano (2.74) adquire a forma

$$\mathbf{H} = \sum_{k} \hbar \omega_{k} \mathbf{a}_{k}^{\dagger} \mathbf{a}_{k} + \frac{1}{2} \hbar \omega_{0} \boldsymbol{\sigma}_{z} + \hbar \sum_{k} g_{k} (\boldsymbol{\sigma}_{+} + \boldsymbol{\sigma}_{-}) (\mathbf{a}_{k} + \mathbf{a}_{k}^{\dagger}).$$
(2.77)

A energia de interação na equação acima possui quatro termos, sendo que dois deles são termos rapidamente oscilantes, além de corresponderem a transições que não conservam energia. Assim, o termo $\mathbf{a}_k \sigma_-$, por exemplo, corresponde a um processo em que o átomo decai do estado *a* para o estado *b*, ao mesmo tempo em que um fóton é absorvido, resultando em uma perda de energia de $2\hbar\omega$. Em contrapartida, o termo $\mathbf{a}_k \sigma_+$, por exemplo, representa um processo em que o átomo é excitado do estado *b* para o estado *a* ao mesmo tempo em que um fóton é absorvido, conservando-se assim a energia do sistema. A contribuição para a dinâmica dos termos que não conservam energia é bem menos importante que a dos outros termos: eles produzem uma correção rapidamente oscilante (com frequência de 2ω) e de pequena amplitude. Por isso mesmo, adotaremos a "aproximação de onda girante", que consiste em desprezar esses termos. Desta maneira, o Hamiltoniano do sistema pode ser reescrito como

$$\mathbf{H} = \sum_{k} \hbar \omega_{k} \mathbf{a}_{k}^{\dagger} \mathbf{a}_{k} + \frac{1}{2} \hbar \omega_{0} \boldsymbol{\sigma}_{z} + \sum_{k} \hbar g_{k} (\mathbf{a}_{k} \boldsymbol{\sigma}_{+} + \mathbf{a}_{k}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma}_{-}).$$
(2.78)

Como estamos interessados na interação de um átomo de dois níveis com um único modo do campo, o termo de interação pode ser obtido fazendo k = 1 na equação acima, ou seja,

$$\mathbf{H} = \hbar \omega \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{a} + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \boldsymbol{\sigma}_z + \hbar g (\mathbf{a} \boldsymbol{\sigma}_+ + \mathbf{a}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma}_-).$$
(2.79)

2.3.2 Interação de um átomo de dois níveis com um único modo do campo

Podemos reescrever o Hamiltoniano (2.79) como a soma de outros dois, ou seja, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{V}$, em que

$$\mathbf{H}_{0} = \hbar \omega \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{a} + \frac{1}{2} \hbar \omega_{0} \boldsymbol{\sigma}_{z}$$
(2.80)

e

$$\mathbf{V} = \hbar g (\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}_{+} + \mathbf{a}^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}_{-}). \tag{2.81}$$

Esse Hamiltoniano descreve a interação de um átomo de dois níveis com um único modo do campo, nas aproximações de dipolo e onda girante, sendo este muito importante em Óptica Quântica, pois permite o estudo da interação da radiação com a matéria através de um exemplo solúvel analiticamente.

Na representação de interação, temos que

$$\mathbf{H}_{I} = \exp(i\mathbf{H}_{0}t/\hbar)\mathbf{V}\exp(-i\mathbf{H}_{0}t/\hbar).$$
(2.82)

Agora, utilizando a relação auxiliar [43]

$$e^{\alpha \mathbf{A}} \mathbf{B} e^{-\alpha \mathbf{A}} = \mathbf{B} + \alpha [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \frac{\alpha^2}{2!} [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + \dots,$$
(2.83)

podemos verificar as igualdades

$$e^{i\omega\mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{a}t} \mathbf{a} e^{-i\omega\mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{a}t} = \mathbf{a}e^{-i\omega t},$$

$$e^{i\omega_0\boldsymbol{\sigma}_z t/2} \boldsymbol{\sigma}_{\pm} e^{-i\omega_0\boldsymbol{\sigma}_z t/2} = \boldsymbol{\sigma}_{\pm}e^{\pm i\omega_0 t}.$$
(2.84)

Considerando essas informações, o Hamiltoniano na representação de interação fica

$$\mathbf{H}_{I} = \hbar g \left(\mathbf{a} \boldsymbol{\sigma}_{+} e^{i\Delta t} + \mathbf{a}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma}_{-} e^{-i\Delta t} \right), \qquad (2.85)$$

com $\Delta = \omega_0 - \omega$. Na próxima seção vamos utilizar o método do operador evolução temporal para estabelecer a evolução do sistema átomo-campo descrito pelo Hamiltoniano acima.

2.3.3 Método do operador evolução temporal

Uma das maneiras de se estudar o problema da interação átomo-campo é através do operador evolução temporal. Para o presente problema, ele é dado por

$$\mathbf{U}(t) = \exp\left(-i\mathbf{H}_{I}t/\hbar\right),\tag{2.86}$$

no qual \mathbf{H}_{I} é o Hamiltoniano na representação de interação, que na ressonância ($\Delta = 0$) é reduzido a

$$\mathbf{H}_{I} = \hbar g(\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}_{+} + \mathbf{a}^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}_{-}). \tag{2.87}$$

Com o auxílio das relações

$$(\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}_{+} + \mathbf{a}^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}_{-})^{2l} = (\mathbf{a}\mathbf{a}^{\dagger})^{l}|e\rangle\langle e| + (\mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{a})^{l}|g\rangle\langle g|,$$

$$(\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}_{+} + \mathbf{a}^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}_{-})^{2l+1} = (\mathbf{a}\mathbf{a}^{\dagger})^{l}\mathbf{a}|e\rangle\langle g| + (\mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{a})^{l}\mathbf{a}^{\dagger}|g\rangle\langle e|,$$
 (2.88)

o operador evolução temporal é finalmente obtido:

$$\mathbf{U}(t) = \cos\left(gt\sqrt{\mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{a}+1}\right)|e\rangle\langle e| + \cos\left(gt\sqrt{\mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{a}}\right)|g\rangle\langle g| + i\frac{\sin\left(gt\sqrt{\mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{a}+1}\right)}{\sqrt{\mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{a}+1}}\mathbf{a}|e\rangle\langle g| - i\mathbf{a}^{\dagger}\frac{\sin\left(gt\sqrt{\mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{a}+1}\right)}{\sqrt{\mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{a}+1}}|g\rangle\langle e|.$$
(2.89)

Com isso, o vetor de onda num tempo t é expresso em termos do vetor de onda $|\Psi(0)\rangle$ como segue:

$$|\Psi(t)\rangle = \mathbf{U}(t)|\Psi(0)\rangle. \tag{2.90}$$

Desta maneira, após obtermos o operador evolução temporal, podemos estudar a dinâmica do sistema através do cálculo das amplitudes de probabilidade ou do operador densidade.

2.3.4 Operador densidade

O operador densidade $\rho(t)$ introduzido na seção 2.1 pode ser obtido através do operador evolução temporal $\mathbf{U}(t)$ e do operador densidade do sistema no tempo t = 0, ou seja,

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{U}(t)\boldsymbol{\rho}(0)\mathbf{U}^{\dagger}(t). \tag{2.91}$$

Aqui, o operador densidade inicial $\rho(0)$ do sistema é descrito pelo produto tensorial do operador densidade do átomo e do campo, isto é, $\rho(0) = \rho_{at}(0) \otimes \rho_c(0)$. Desta maneira, após definirmos o operador densidade inicial do sistema, podemos calcular as variáveis dinâmicas que descrevem as propriedades físicas do problema em questão, pois

$$\langle \mathbf{O} \rangle_t = \operatorname{Tr}[\boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{O}].$$
 (2.92)

2.4 Estados do Campo Eletromagnético

Nesta seção mostraremos alguns estados do campo eletromagnético que tem inúmeras aplicações físicas [32]. Vamos iniciar com os *estados de quadratura*, para então mostrar os *estados de número* ou *estados de Fock*, os *estados coerentes*, e, por fim, os estados de gato de Schrödinger.

2.4.1 Distribuição de Número de Fótons

Uma das maneiras de se caracterizar um estado arbitrário do campo eletromagnético, utilizando o operador densidade, é através da projeção do estado do campo na base do estado de número, ou seja,

$$P_n = \langle n | \boldsymbol{\rho} | n \rangle. \tag{2.93}$$

Podemos notar que a distribuição de número de fótons denota a probabilidade de se encontrar n fótons em um dado estado do campo. Contudo, é interessante salientar que a distribuição P_n contém apenas informações a respeito do operador densidade do campo, possuíndo assim apenas elementos diagonais na base do estado de número.

2.4.2 Estados de Quadratura

Os autoestados $|p\rangle$ e $|q\rangle$ dos operadores de quadratura **p** e **q** satisfazem as equações de autovalores

$$\mathbf{q}|q\rangle = q|q\rangle$$
 e $\mathbf{p}|p\rangle = p|p\rangle.$ (2.94)

Devido ao fato de que os operadores de quadratura obedecem uma relação de comutação canônica, seu espectro é ilimitado e contínuo [32]. Já seus autoestados satisfazem as propriedades de ortogonalidade

$$\langle q|q_1\rangle = \delta(q-q_1), \qquad \langle p|p_1\rangle = \delta(p-p_1),$$
(2.95)

e completeza,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q\rangle \langle q| \ dq = 1 \qquad e \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |p\rangle \langle p| \ dp = 1,$$
(2.96)

além de se relacionarem através da transformada de Fourier

$$|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-iqp\right) |p\rangle \, dp \qquad \mathbf{e} \qquad |p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(+iqp\right) |q\rangle \, dq. \tag{2.97}$$

No entanto, os operadores de quadratura não são normalizáveis, além de não poderem ser gerados experimentalmente. Devido a essas características, é necessário apelar para artifícios matemáticos. Assim, podemos investigar as *funções de onda de quadratura*

$$\psi(q) = \langle q | \psi \rangle$$
 e $\hat{\psi}(p) = \langle p | \psi \rangle.$ (2.98)

Ao contrário dos estados, as funções de onda de quadratura são mensuráveis. O módulo ao quadrado dessas funções para um estado puro, pode ser medida usando detecção homódina [32].

2.4.3 Estados de Fock

Vamos definir os estados de Fock como sendo os autoestados do operador número de fótons n, ou seja,

$$\mathbf{n}|n\rangle = n|n\rangle. \tag{2.99}$$

Além disso, o estado de número é um autoestado do Hamiltoniano do campo de radiação obtido do estado de vácuo $|0\rangle$,

$$|n\rangle = \frac{\mathbf{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \tag{2.100}$$

Os estados de Fock constituem uma base ortonormal no espaço de *Hilbert* e, consequentemente, obedecem as relações de ortonormalidade e completeza:

$$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$$
 e $\sum_{n} |n\rangle\langle n| = 1.$ (2.101)

Para este estado, temos o operador densidade dado por

$$\boldsymbol{\rho}_n = |n\rangle\langle n| \tag{2.102}$$

e a distribuição de número de fótons, definida como

$$P_n(m) = |\langle n|m \rangle|^2 = \delta_{m,n}.$$
 (2.103)

2.4.4 Estados Coerentes

Os estados coerentes são definidos como autoestados do operador aniquilação a com autovalor α , ou seja,

$$\mathbf{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{2.104}$$

A expressão de $|\alpha\rangle$ em termos dos estados de número $|n\rangle$ são dados por [36]

$$|\alpha\rangle \equiv \mathbf{D}(\alpha)|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \qquad (2.105)$$

no qual $\mathbf{D}(\alpha) = \exp(\alpha \mathbf{a}^{\dagger} - \alpha^* \mathbf{a})$ caracteriza o operador deslocamento. O operador densidade para o estado coerente é escrito como

$$\boldsymbol{\rho}_c = |\alpha\rangle\langle\alpha|,\tag{2.106}$$

e sua distribuição de número de fótons expressa por

$$P_n(\alpha) = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!},$$
(2.107)

que nada mais é do que uma distribuição de *Poisson*, pois o número médio de fótons neste caso é $\langle \mathbf{n} \rangle_c = |\alpha|^2$.



Figura 2.1: Distribuição do número de fótons para um estado coerente com $\langle \mathbf{n} \rangle_c = 25$.

Na figura 2.1 temos um gráfico da distribuição do número de fótons $P_n(\alpha)$ para um estado coerente versus n, para $|\alpha| = 5$. Podemos notar que a distribuição de *Poisson* atinge seu máximo em $\langle \mathbf{n} \rangle_c$.

2.4.5 Estados de Gato de Schrödinger

A superposição de dois estados coerentes descrita na forma

$$|\alpha;\vartheta\rangle = N^{1/2}(|\alpha\rangle + e^{i\vartheta}| - \alpha\rangle)$$
(2.108)

com a constante de normalização dada por

$$N = \frac{1}{2} \left[1 + \exp(-(2|\alpha|^2)) \cos(\vartheta) \right]^{-1},$$
(2.109)

caracteriza os estados de "estados de Gato de Schrödinger" para valores específicos de ϑ . De fato, ao expandirmos esse estado na base dos estados de Fock, teremos

$$|\alpha;\vartheta\rangle = N^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + (-1)^n e^{i\vartheta}\right] \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$
(2.110)

Nesta equação, quando $\vartheta = 0$, obtem-se um estado denominado "estado de gato par", enquanto que para $\vartheta = \pi$, caracteriza o "estado de gato ímpar". A distribuição de número de fótons neste caso é

$$P_n(\alpha;\vartheta) = |\langle n|\alpha;\vartheta\rangle|^2 = \frac{1+(-1)^n\cos\vartheta}{1+e^{-2|\alpha|^2}\cos\vartheta}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}.$$
(2.111)



Figura 2.2: Distribuição do número de fótons para um estado de gato par com $|\alpha| = 5$.

Na figura 2.2 temos o gráfico de $P_n(\alpha; \vartheta = 0)$ versus *n* para $|\alpha| = 5$. O caráter oscilatório da distribuição do número de fótons neste caso está associada ao efeito de interferência entre os estados no espaço de fase.

2.4.6 Estado Térmico

O estado térmico, por ser um estado de mistura, não pode ser descrito por um vetor de estado normalizado. Desta maneira, vamos representar esse estado através do operador densidade

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} P_n |n\rangle \langle n|, \qquad (2.112)$$

sendo P_n a distribuição do número médio de fótons térmicos, representada pela expressão

$$P_n = \frac{\langle \mathbf{n} \rangle_{\rm th}^n}{(1 + \langle \mathbf{n} \rangle_{\rm th})^{n+1}} \tag{2.113}$$

 $\cos \langle \mathbf{n} \rangle_{\text{th}} = 1/(e^{\beta \hbar \omega} - 1), \beta = (K_B T)^{-1}, K_B$ a constante de Boltzman e T a temperatura.

2.5 Distribuições de Quasi-Probabilidade

Iremos aqui apresentar uma noção geral de apenas duas funções de quasi-probabilidade: a **função-P de Glauber-Sudarshan**, usada para calcular funções de correlação com ordenação normal de operadores do campo; e a **Função de Wigner**, para o caso de ordenação simétrica.

2.5.1 A função-P de Glauber-Sudarshan

Vamos considerar um operador $O_n(\mathbf{a}, \mathbf{a}^{\dagger})$ que é função dos operadores criação e aniquilação de fótons

$$\mathbf{O}_{N}(\mathbf{a}, \mathbf{a}^{\dagger}) = \sum_{n} \sum_{m} c_{nm} \left(\mathbf{a}^{\dagger}\right)^{n} \mathbf{a}^{m}, \qquad (2.114)$$

que por sua vez está ordenado normalmente, ou seja, todos os operadores criação \mathbf{a}^{\dagger} estão à esquerda dos operadores aniquilação \mathbf{a} . O valor esperado desse operador pode ser escrito como:

$$\langle \mathbf{O}_{N}(\mathbf{a}, \mathbf{a}^{\dagger}) \rangle = \operatorname{Tr} \left[\boldsymbol{\rho} \mathbf{O}_{N}(\mathbf{a}, \mathbf{a}^{\dagger}) \right]$$
$$= \sum_{n} \sum_{m} c_{nm} \operatorname{Tr} \left[\boldsymbol{\rho} \left(\mathbf{a}^{\dagger} \right)^{n} \mathbf{a}^{m} \right].$$
(2.115)

Introduzindo a função delta bidimensional [41]

$$\delta(\alpha^* - \mathbf{a}^{\dagger})\delta(\alpha - \mathbf{a}) = \frac{1}{\pi^2} \int \exp\left[-\beta(\alpha^* - \mathbf{a}^{\dagger})\right] \exp\left[\beta^*(\alpha - \mathbf{a})\right] d^2\beta,$$
(2.116)

na Equação (2.115), o valor esperado do operador O pode ser reescrito como

$$\langle \mathbf{O}_N(\mathbf{a}, \mathbf{a}^{\dagger}) \rangle = \int P(\alpha, \alpha^*) \mathbf{O}_N(\alpha, \alpha^*) \mathrm{d}^2 \alpha,$$
 (2.117)

no qual

$$P(\alpha, \alpha^*) = \text{Tr}[\boldsymbol{\rho}\delta(\alpha^* - \mathbf{a}^{\dagger})\delta(\alpha - \mathbf{a})].$$
(2.118)

Pela Eq. (2.117), é possível verificar que a função $P(\alpha, \alpha^*)$ pode ser utilizada para calcular o valor esperado de qualquer função de **a** e **a**[†] ordenada normalmente. Devido a hermiticidade do operador densidade ρ , a função distribuição $P(\alpha, \alpha^*)$ é real. Além disso,

$$\int P(\alpha, \alpha^*) \mathrm{d}^2 \alpha = 1.$$
(2.119)

Esta função é denominada **função-P de Glauber -Sudarshan**. Em alguns problemas é muito útil mapear o estado do campo em termos dos estados coerentes ou dos estados de Fock. Assim, podemos recorrer a expansão do operador densidade do campo em termos dos estados coerentes,

$$\boldsymbol{\rho} = \int P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha | d^2 \alpha \tag{2.120}$$

com $d^2 \alpha = d \operatorname{Re}(\alpha) d \operatorname{Im}(\alpha)$, de modo a viabilizar tal mapeamento.

Uma outra maneira de se introduzir a função-P é através da função característica

$$\chi_N(\xi) = \operatorname{Tr}(\rho e^{\xi \mathbf{a}^{\dagger}} e^{-\xi^* \mathbf{a}}).$$
(2.121)

Desta forma, substituindo (2.120) na expressão acima, a função característica pode ser reescrita como

$$\chi_N(\xi) = \int P(\alpha, \alpha^*) e^{\xi \alpha^* - \xi^* \alpha} d^2 \alpha.$$
(2.122)

Note que a função característica $\chi_N(\xi)$ é a transformada de Fourier de $P(\alpha, \alpha^*)$. A **função-P** é geralmente utilizada para estudar a dinâmica de sistemas quânticos, como será demonstrado no capítulo 4.

2.5.2 A função de Wigner

A chamada **Função de Wigner** pode ser empregada para calcular valores esperados de operadores compostos pelo produto de $\mathbf{a} \in \mathbf{a}^{\dagger}$ ordenados simetricamente, como por exemplo,

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{a} \mathbf{a}^{\dagger} + \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{a} \rangle = \int \alpha^{*m} \alpha^{n} W(\alpha, \alpha^{*}) \mathrm{d}^{2} \alpha, \qquad (2.123)$$

no qual $W(\alpha, \alpha^*)$ é a **função de Wigner** e que pode ser escrita como

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi^2} \int \operatorname{Tr}[\boldsymbol{\rho} \exp(\xi \mathbf{a}^{\dagger} - \xi^* \mathbf{a})] \exp(\beta \xi^* - \beta^* \xi) \mathrm{d}^2 \xi.$$
(2.124)

Adotando o mesmo procedimento utilizado na **função-P**, podemos definir a função distribuição de Wigner $W(\alpha, \alpha^*)$ através da função característica na ordenação simétrica, ou seja,

$$\chi_{S}(\xi) = \frac{1}{\pi} \int \langle \alpha | \boldsymbol{\rho} e^{\xi \mathbf{a}^{\dagger} - \xi^{*} \mathbf{a}} | \alpha \rangle d^{2} \alpha$$

=
$$\int W(\alpha, \alpha^{*}) e^{\xi \alpha^{*} - \xi^{*} \alpha} d^{2} \alpha.$$
 (2.125)

As funções distribuição de quasi-probabilidades são definidas geralmente como as transformadas de Fourier de suas funções características, (ordenação normal no caso da função $P(\alpha, \alpha^*)$ e ordenação simétrica no caso da função $W(\alpha, \alpha^*)$), como vemos abaixo:

$$P(\alpha, \alpha^{*}) = \frac{1}{\pi^{2}} \int e^{\xi \alpha^{*} - \xi^{*} \alpha} \chi_{N}(\xi) d^{2} \xi,$$

$$W(\alpha, \alpha^{*}) = \frac{1}{\pi^{2}} \int e^{\xi \alpha^{*} - \xi^{*} \alpha} \chi_{S}(\xi) d^{2} \xi.$$
(2.126)

Dentre as várias propriedades da **função de Wigner**, ressaltamos aquela que menciona o fato de que a função existe para qualquer operador densidade ρ , sendo esta sempre real e normalizada [35,37]. Além disso, ela não pode ser interpretada como uma genuína distribuição de probabilidade, tendo em vista que, dependendo do operador densidade, esta pode assumir valores negativos no espaço de fase.

2.6 Conceito de Emaranhamento

Nesta seção faremos uma breve discussão sobre o conceito de emaranhamento. Desta maneira, um vetor $|\psi\rangle$ pertencente a um espaço vetorial **E**, com estrutura de produto tensorial ($E = E_A \otimes E_B$), é considerado fatorável se

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B. \tag{2.127}$$

Quando não conseguimos realizar essa fatoração, o estado é dito *emaranhado*. Os casos mais simples de emaranhamento em sistemas quânticos acontecem em sistemas compostos por dois subsistemas, que, quando estão emaranhados, torna impossível atribuir um estado quântico puro para cada subsistema sozinho. Uma das maneiras de se quantificar o emaranhamento em sistemas compostos é através do cálculo da entropia, pois existe uma relação direta entre emaranhamento e essa grandeza (quanto mais emaranhado está um sistema, maior será sua entropia). Desta maneira, é intuitivo que quanto maior o número de subsistemas, maior a dificuldade de se quantificar o emaranhamento. A mesma relação existente entre emaranhamento e entropia pode ser traçada entre emaranhamento e correlação. O emaranhamento é responsável por interessantes aplicações relacionadas a teleportação, computação quântica e criptografia quântica. Para um estudo mais profundo do assunto, as referências [5,11] são sugeridas. No capítulo 4 faremos uma análise qualitativa do emaranhamento num sistema composto de três partes via função de Wigner.
Capítulo 3

O Modelo de Jaynes-Cummings com um campo externo clássico

Neste capítulo realizaremos um estudo sobre o esquema de detecção homódina atômica introduzido por Wilkens e Meystre [14]. O interesse por esse esquema advém do fato do sistema composto envolvido (átomo-campo na cavidade-campo externo) ser similar ao objeto de pesquisa dessa dissertação. No entanto, como veremos na seção 3.1, o campo externo utilizado por Wilkens e Meystre em seu modelo deve ser necessariamente coerente e intenso, sendo essa uma das importantes diferenças para com o nosso trabalho, no qual o campo externo é quântico. Os resultados obtidos em [14] serão discutidos na primeira seção desse capítulo, enquanto na seção 3.2 serão abordadas algumas de suas limitações [16], tendo em vista que a utilização de um campo externo clássico não permite a reconstrução exata do campo contido na cavidade. Dutra e colaboradores [17] mostraram que um acoplamento fraco do átomo com o campo externo soluciona esse problema, conforme será descrito na seção 3.3. Finalizando esse capítulo, exploraremos a influência do campo externo clássico sobre os efeitos não-clássicos presentes em algumas variáveis dinâmicas inerentes do modelo de Jaynes-Cummings (MJC), como os fenômenos de super-ressurgimentos na inversão atômica e compressão nas quadraturas [19, 20]. Desta maneira, pretendemos introduzir alguns dos resultados pre-sentes na literatura sobre o sistema em questão para conectá-los posteriormente com os nossos resultados, os quais serão apresentados no próximo capítulo.

3.1 O Esquema de Detecção Homódina Atômica de Wilkens e Meystre

Em abril de 1991, Martin Wilkens e Pierre Meystre [14] propuseram uma técnica de detecção homódina atômica, com o objetivo de detectar coerências multifotônicas provenientes de superposições quânticas macroscópicas geradas em cavidades de micromaser supercondutoras (este esquema é uma versão não-linear de um detector homódino de um único átomo). O modelo consiste de um campo eletromagnético quântico (**modo a**) confinado em uma cavidade de alto fator Q de qualidade e um campo eletromagnético externo intenso (**modo b**), ambos interagindo com um único átomo de dois níveis. O operador Hamiltoniano deste sistema, que considera o átomo ressonante com ambos os campos e constantes de acoplamentos iguais, é descrito por

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{a} + \hbar\omega \frac{\boldsymbol{\sigma}_{z}}{2} + \hbar\omega \mathbf{b}_{\dagger}\mathbf{b} + \hbar\kappa(\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}_{+} + \mathbf{a}^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}_{-}) + \hbar\kappa(\mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}_{+} + \mathbf{b}^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}_{-})$$
(3.1)

em que \hbar é a constante de Planck, ω é a freqüência do átomo e dos campos externo e cavidade, e κ é a constante de acoplamento do átomo com ambos os campos. Por motivo de simplificação do modelo, os autores assumem que as frequências de oscilação dos campos são iguais, assim como as constantes de acoplamento do átomo para com ambos os campos. Aqui, os operadores atômicos σ_{\pm} e σ_z referem-se as matrizes de Pauli para um átomo de dois níveis e por último, $\mathbf{a}^{\dagger}(\mathbf{a})$ e $\mathbf{b}^{\dagger}(\mathbf{b})$ são os operadores de criação (destruição) de fótons dos campos na cavidade e externo, respectivamente.

Por intermédio dos operadores de aniquilação \mathbf{A} e criação \mathbf{A}^{\dagger} de fótons do modo composto e, conseqüentemente, o operador número associado, dados por

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) , \qquad \mathbf{A}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}^{\dagger} + \mathbf{b}^{\dagger}) , \qquad (3.2)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^{\dagger} \mathbf{A},\tag{3.3}$$

e que satisfazem as relações de comutação

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}, \mathbf{A}^{\dagger} \end{bmatrix} = \mathbf{1}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{A}, \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\dagger}, \mathbf{A}^{\dagger} \end{bmatrix} = 0, \qquad (3.4)$$

$$[\mathbf{K}, \mathbf{A}] = -\mathbf{A} , \qquad [\mathbf{K}, \mathbf{A}^{\dagger}] = \mathbf{A}^{\dagger} , \qquad (3.5)$$

é possível escrever o Hamiltoniano do sistema na representação de interação como segue:

$$\mathbf{H}_{I} = \sqrt{2}\hbar\kappa (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}^{\dagger} + \mathbf{A}^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}). \tag{3.6}$$

Dessa forma, o operador evolução temporal U(t), em analogia com o modelo de Jaynes-Cummings padrão, pode ser expresso na base atômica por meio de uma matriz 2×2 ,

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11}(t) \ \mathbf{U}_{12}(t) \\ \mathbf{U}_{21}(t) \ \mathbf{U}_{22}(t) \end{bmatrix},$$
(3.7)

em que os elementos dessa matriz estão descritos abaixo:

$$\mathbf{U}_{11}(t) = \cos\left(\sqrt{2\kappa t}\sqrt{\mathbf{K}+1}\right),\tag{3.8}$$

$$\mathbf{U}_{12}(t) = \cos\left(\sqrt{2\kappa t}\sqrt{\mathbf{K}}\right),\tag{3.9}$$

$$\mathbf{U}_{21}(t) = -i \, \frac{\sin\left(\sqrt{2\kappa t}\sqrt{\mathbf{K}}\right)}{\sqrt{\mathbf{K}}} \mathbf{A}^{\dagger},\tag{3.10}$$

$$\mathbf{U}_{22}(t) = -i \, \frac{\sin\left(\sqrt{2\kappa t}\sqrt{\mathbf{K}+1}\right)}{\sqrt{\mathbf{K}+1}} \mathbf{A}.$$
(3.11)

Este resultado permite-nos obter a evolução temporal do sistema físico através do operador densidade $\rho(\mathbf{t}) = \mathbf{U}(t)\rho(0)\mathbf{U}^{\dagger}(t)$, sendo $\rho(0)$ o operador densidade do sistema acoplado átomo-campo no tempo t = 0. Além disso, vamos assumir que o átomo está inicialmente numa superposição específica de estados excitado e fundamental com campos na cavidade e externo arbitrários, isto é, $\rho_{at} = p_e |e\rangle \langle e| + p_g |g\rangle \langle g|$ e $\rho_c(0) = \rho_a(0) \otimes \rho_b(0)$. Desta maneira, os elementos de matriz $\rho_{ij}(t)$ são determinados através das expressões

$$\boldsymbol{\rho}_{11}(t) = p_e \mathbf{U}_{11}(t) \boldsymbol{\rho}_a \boldsymbol{\rho}_b \mathbf{U}_{11}^{\dagger}(t) + p_g \mathbf{U}_{12}(t) \boldsymbol{\rho}_a \boldsymbol{\rho}_b \mathbf{U}_{21}^{\dagger}(t), \qquad (3.12)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{12}(t) = p_e \mathbf{U}_{11}(t) \boldsymbol{\rho}_a \boldsymbol{\rho}_b \mathbf{U}_{12}^{\dagger}(t) + p_g \mathbf{U}_{12}(t) \boldsymbol{\rho}_a \boldsymbol{\rho}_b \mathbf{U}_{22}^{\dagger}(t), \qquad (3.13)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{21}(t) = p_e \mathbf{U}_{21}(t) \boldsymbol{\rho}_a \boldsymbol{\rho}_b \mathbf{U}_{11}^{\dagger}(t) + p_g \mathbf{U}_{22}(t) \boldsymbol{\rho}_a \boldsymbol{\rho}_b \mathbf{U}_{21}^{\dagger}(t), \qquad (3.14)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{22}(t) = p_e \mathbf{U}_{21}(t) \boldsymbol{\rho}_a \boldsymbol{\rho}_b \mathbf{U}_{12}^{\dagger}(t) + p_g \mathbf{U}_{22}(t) \boldsymbol{\rho}_a \boldsymbol{\rho}_b \mathbf{U}_{22}^{\dagger}(t).$$
(3.15)

O cálculo da probabilidade de excitação $p(t) = \text{Tr}[\rho(t)\sigma_+\sigma_-]$ pode ser agora efetuado de imediato, levando-nos a obter como resultado

$$p(t) = p_{e} \operatorname{Tr} \left[\cos \left(\sqrt{2\kappa t} \sqrt{\mathbf{K} + 1} \right) \rho_{a} \rho_{b} \cos \left(\sqrt{2\kappa t} \sqrt{\mathbf{K} + 1} \right) \right] + p_{g} \operatorname{Tr} \left[\mathbf{A} \frac{\sin \left(\sqrt{2\kappa t} \sqrt{\mathbf{K}} \right)}{\sqrt{\mathbf{K}}} \rho_{a} \rho_{b} \frac{\sin \left(\sqrt{2\kappa t} \sqrt{\mathbf{K}} \right)}{\sqrt{\mathbf{K}}} \mathbf{A}^{\dagger} \right], \qquad (3.16)$$

no qual utilizamos as relaçõe auxiliares $(\mathbf{K} + \mathbf{1})^l \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{K}^l \mathbf{e} \mathbf{A}^{\dagger} (\mathbf{K} + \mathbf{1})^l = \mathbf{K}^l \mathbf{A}^{\dagger}$. Agora, com o auxílio da propriedade cíclica da operação traço, esta expressão é reescrita na forma simplificada

$$p(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p_e \langle \cos\left(2\sqrt{2\kappa t}\sqrt{\mathbf{K}+\mathbf{1}}\right) \rangle - \frac{1}{2} p_g \langle \cos\left(2\sqrt{2\kappa t}\sqrt{\mathbf{K}}\right) \rangle.$$
(3.17)

A hipótese de Wilkens e Meystre consiste em considerar o campo externo (oscilador local) como um campo coerente intenso ($\rho_{\mathbf{b}} = |\varepsilon\rangle\langle\varepsilon|, \varepsilon = |\varepsilon|e^{i\Phi_b}$ e $\varepsilon \gg 1$) e de fase Φ_b controlável. Esta hipótese permite que o **modo b** possa ser descrito classicamente e que os operadores **b** e **b**[†] sejam trocados pelas amplitudes clássicas ε e ε^* . Outra consideração é sobre o **modo a** estar fracamente excitado, ou seja, $\langle \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{a} \rangle \ll \langle \mathbf{b}^{\dagger} \mathbf{b} \rangle$, o que nos leva a aproximarmos

$$\mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{a} + \mathbf{b}^{\dagger}\mathbf{b} \cong |\varepsilon|^2 \equiv I, \tag{3.18}$$

no qual *I* representa a intensidade clássica do **modo b**. Sobre essas considerações, temos que

$$\sqrt{\mathbf{K}+\mathbf{1}} \approx \sqrt{\frac{I}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{I}} \mathbf{a}^{\dagger} + \frac{\varepsilon^*}{2\sqrt{I}} \mathbf{a} \right),$$
 (3.19)

e consequentemente, a probabilidade de excitação pode ser escrita em termos da função característica de Wigner $\chi(\mu)$ como segue:

$$p(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (p_e - p_g) \left[e^{i2\kappa t\sqrt{I}} \chi(\mu) + e^{-i2\kappa t\sqrt{I}} \chi^*(\mu) \right],$$
(3.20)

com $\chi(\mu) = \text{Tr}[\rho_a \mathbf{D}(\mu)]$, sendo $\mathbf{D}(\mu) = \exp(\mu \mathbf{a}^{\dagger} - \mu^* \mathbf{a})$ o operador deslocamento e $\mu = e^{i(\phi_b + \frac{\pi}{2})\kappa t}$. Este é o principal resultado obtido pelos autores da referência [14] e mostra como a probabilidade de excitação atômica está conectada com a função característica de Wigner do campo na cavidade em experimentos de detecção homódina envolvendo átomos.

Ao fixarmos a fase ϕ_b do oscilador local e medirmos a probabilidade de excitação, obtemos deste processo a determinação da função característica de Wigner $\chi(\mu)$ para um ponto particular do espaço de fase complexo caracterizado pelas variáveis $\mu_r = Re(\mu)$ e $\mu_i = Im(\mu)$. De fato, para construírmos a função de Wigner precisamente, é necessário variarmos ϕ_b no intervalo $[0, 2\pi]$ e para cada valor selecionado, inferirmos a probabilidade p(t). Este procedimento permite obter um conjunto de pontos no plano complexo que leva-nos a determinar $\chi(\mu)$ completamente e, com o auxílio da transformada de Fourier

$$W(\alpha) = \int \exp\left(\mu\alpha^* - \mu^*\alpha\right)\chi(\mu)\frac{d^2\mu}{\pi},$$
(3.21)

a reconstrução de $W(\alpha)$ é efetuada com sucesso. Entretanto, isto nos leva a repetir o experimento várias vezes e com as mesmas condições iniciais, ou seja, o átomo deve ser sempre preparado na mesma superposição inicial de estados para cada etapa de inferição. Tal exigência representa, do ponto de vista experimental, uma forte restrição ao esquema proposto por Wilkens e Meystre.

Outra importante restrição refere-se a validade da aproximação clássica utilizada no cálculo da expressão (3.20). Para esta aproximação ser válida é necessário assegurar que o tempo de interação τ entre o átomo e os campos seja curto o suficiente de modo a permitir desprezar os efeitos de flutuação do vácuo. Isto implica que estamos lidando com um tempo τ muito menor que $1/\kappa$ e consequentemente, assegurando que as transições espontâneas de Rabi (flutuações do vácuo) não venham a ocorrer. Portanto, o esquema de detecção homódina atômica proposto por Wilkens e Meystre fornece apenas informação parcial sobre o campo contido na cavidade, tendo em vista que os valores da função característica de Wigner $\chi(\mu)$ estão restritos a $\kappa \tau \ll 1$.

3.2 Limitações do esquema de detecção

Conforme vimos na seção anterior, o método de detecção homódina atômica tem como intuito reconstruir o campo na cavidade. Porém, foi constatado em [16] que a aproximação semiclássica utilizada pelos autores da refência [14] impõem restrições severas para o processo de reconstrução do campo na cavidade, pois restringe os valores da função característica $\chi(\mu)$ para $\kappa \tau \ll 1$. Isso limita nossa habilidade de distinguir aspectos quânticos do campo, tais como discriminar, por exemplo, superposições macroscópicas de misturas estatísticas dos estados do campo. Para verificar essa limitação vamos considerar o caso em que os campos externo e na cavidade são campos coerentes $|\beta\rangle e |\alpha\rangle$, respectivamente.

Definindo os operadores do modo composto

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \qquad \mathbf{e} \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{b} - \mathbf{a}), \tag{3.22}$$

os quais obedecem as relações de comutação

$$[\mathbf{A}, \mathbf{A}^{\dagger}] = 1$$
, $[\mathbf{B}, \mathbf{B}^{\dagger}] = 1$, $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$, $[\mathbf{A}, \mathbf{B}^{\dagger}] = 0$, (3.23)

podemos, da mesma maneira que na seção anterior, escrever o Hamiltoniano na representação de interação em termos dos operadores do modo composto, coincidindo assim com a Eq. (3.6). Quando escrevemos os estados coerentes dos modos **a** e **b** em termos dos modos compostos, nós notamos que o produto $|0\rangle_a |0\rangle_b$ difere de $|0\rangle_A |0\rangle_B$ por uma fase, pois

$$\mathbf{A}|0\rangle_{a}|0\rangle_{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})|0\rangle_{A}|0\rangle_{B}, \qquad (3.24)$$

além de $\mathbf{A}|0\rangle_a|0\rangle_b = 0$. A analogia para o modo de aniquilação \mathbf{B} é valida, ou seja, $\mathbf{B}|0\rangle_a|0\rangle_b = 0$. Para contornarmos esse problema técnico aparente, vamos fixar a fase de maneira a obtermos $|0\rangle_a|0\rangle_b = |0\rangle_A|0\rangle_B$.

Agora, ao aplicarmos os operadores deslocamentos

$$\mathbf{D}_A\left(\frac{\beta+\alpha}{\sqrt{2}}\right) \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{D}_B\left(\frac{\beta-\alpha}{\sqrt{2}}\right)$$

em $|0\rangle_A |0\rangle_B$, obtem-se

$$\mathbf{D}_A\left(\frac{\beta+\alpha}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{D}_B\left(\frac{\beta-\alpha}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle_A|0\rangle_B = \left|\frac{\beta+\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_A\left|\frac{\beta-\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_B.$$

Porém, se aplicarmos os operadores deslocamentos a $|0\rangle_a |0\rangle_b$, teremos

$$\mathbf{D}_A\left(\frac{\beta+\alpha}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{D}_B\left(\frac{\beta-\alpha}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle_a|0\rangle_b=|\alpha\rangle_a|\beta\rangle_b.$$

Portanto, tais resultados levam-nos a concluir que

$$|\alpha\rangle_{a}|\beta\rangle_{b} = \left|\frac{\beta+\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{A} \left|\frac{\beta-\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{B}.$$
(3.25)

Assim, ao escrevermos $|(\beta + \alpha)/\sqrt{2}\rangle_A$ na base de número $|n\rangle$ associada ao operador **K**, nós obtemos a seguinte expressão para a probabilidade de ionização [17]:

$$p(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{|\alpha + \beta|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{|\alpha + \beta|^2}{2}\right)^n \cos\left(2\sqrt{2\kappa\tau}\sqrt{n+1}\right),$$
(3.26)

sendo n o número de excitações do modo simétrico e não o número de fótons do modo não vestido.

Para compararmos esse resultado com aquele obtido por Wilkens e Meystre, devemos realizar o limite de alta intensidade $|\beta| \gg 1$. Nesse limite, a distribuição Poissoniana na soma acima fica com o centro em torno de

$$\bar{n} = \frac{|\alpha + \beta|^2}{2},\tag{3.27}$$

e consequentemente, $\sqrt{n+1}$ pode ser aproximada por

$$\sqrt{n+1} \cong \frac{\sqrt{\bar{n}}}{2} + \frac{n}{2\sqrt{\bar{n}}}.$$
(3.28)

Substituindo essas aproximações na expressão para a probabilidade de ionização, temos que

$$p(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp\left[-|\alpha + \beta|^2 \sin^2\left(\frac{\kappa t}{|\alpha + \beta|}\right)\right] \cos\left[\kappa t |\alpha + \beta| + \frac{|\alpha + \beta|}{2} \sin\left(\frac{2\kappa t}{|\alpha + \beta|}\right)\right].$$
 (3.29)

A figura 3.1(a) mostra o gráfico da expressão exata (3.26) versus $\tau = \kappa t$, no qual constata-se a presença de colapsos e ressurgimentos bem definidos para $|\alpha| = 2 \text{ e } |\beta| = 20$. Já ao considerarmos a expressão assintótica (3.29) para o mesmo conjunto de parâmetros, percebemos nitidamente que os colapsos e ressurgimentos começam a perder sua definição se compararmos com a figura anterior. Para tempos de interação $t \ll |\beta|/\kappa$, verifica-se o desaparecimento dos efeitos de ressurgimento pois a expressão (3.29) se reduz a forma simplificada

$$p(t \ll |\beta|/\kappa) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-(\kappa t)^2}\cos(2\kappa t|\alpha + \beta|).$$
(3.30)

Esta situação também é constatada na expressão (3.20) tendo em conta que

$$p(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-(\kappa t)^2/2}\cos\left(2\kappa t|\alpha + \beta|\right).$$
(3.31)

Já na figura 3.1(c) vemos o gráfico da expressão (3.31) versus τ para $|\alpha| = 2$ e $|\beta| = 20$ fixos, onde podemos confirmar o desaparecimento dos efeitos supracitados. Além disso, ao compararmos as Eqs. (3.30) e (3.31), verificamos que ambas diferem por um fator de 1/2 presente na exponencial do segundo termo da expressão obtida por Wilkens e Meystre. Segundo os autores de [17], a aproximação semiclássica empregada ao campo externo na seção anterior não leva em conta as flutuações quânticas do vácuo e portanto,



Figura 3.1: Probabilidade de excitação $p(\tau)$ versus τ para $|\alpha| = 2$ e $|\beta| = 20$ fixos, considerando que o átomo encontra-se inicialmente no estado excitado. Os gráficos referem-se a diferentes situações limites: (a) cálculo exato (3.26) da probabilidade de excitação p(t); (b) a Eq. (3.29) reflete o caso limite $|\beta| \gg 1$ em que o campo coerente externo é intenso e (c) Eq. (3.31) refere-se a situação em que o campo externo é aproximado por um campo clássico.

mascara os aspectos quânticos do mesmo, tais como os efeitos de colapso e ressurgimento. De fato, a validade de ambas as aproximações coincide somente para tempos de interação muito curtos e da ordem de $t \ll \kappa^{-1}$. Os resultados obtidos até o presente momento nos levam a concluir que a detecção homódina atômica produz uma função característica $\chi(\mu)$, cuja validade está restrita a pontos no espaço de fase em que $|\mu| \ll \kappa \tau_{\text{max}} \ll 1$ [17]. Porém, isso é suficiente para distinguir entre misturas estatísticas e superposições quânticas macroscópicas? Para responder a esta questão consideramos o campo na cavidade em dois estados iniciais diferentes: o estado de gato de *Schrödinger* par (ou estado coerente par)

$$|\alpha\rangle_e = \frac{1}{\sqrt{2(1+e^{-2|\alpha|^2})}} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle), \qquad (3.32)$$

e uma mistura estatística de $|\alpha\rangle$ e $|-\alpha\rangle$. Desta maneira, o operador densidade para ambos os campos será



Figura 3.2: Esta figura mostra os gráficos da função de Wigner W(x, y) versus $(x, y) \in [-4, 4]$ e considerando $|\alpha| = 2$. Nós consideramos os campos na cavidade nos estados coerente par (a,c) e numa mistura estatística (b,d). O que diferencia os gráficos a(b) e c(d) é o tempo de interação, onde em (c) e (d) utilizamos $\kappa \tau_{max} = 1$.

dado por

$$\boldsymbol{\rho}^{(e)} = \mathrm{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)(\langle \alpha| + \langle -\alpha|) \qquad \mathbf{e} \qquad \boldsymbol{\rho}^{(\mathrm{mix})} = \frac{(|\alpha\rangle\langle \alpha| + |-\alpha\rangle\langle -\alpha|)}{2}, \tag{3.33}$$

com

$$N = \frac{1}{2(1 + e^{-2|\alpha|^2})};$$
(3.34)

enquanto que as respectivas funções de Wigner são representadas pelas expressões

$$W^{(e)}(x,y) = \frac{2e^{-2(x^2+y^2)}}{\pi(1+e^{\bar{x}^2+\bar{y}^2})} \left[e^{\bar{x}^2+\bar{y}^2} \cosh\left[4(y\bar{y}+x\bar{x})\right] + \cos\left[4(\bar{x}y-x\bar{y})\right] \right]$$
(3.35)

e

$$W^{(\text{mix})}(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{-2(x^2 + y^2)} \cosh\left[4(y\bar{y} + x\bar{x})\right],\tag{3.36}$$

no qual $\bar{x} = (\alpha + \alpha^*)/2$ e $\bar{y} = (\alpha - \alpha^*)/2i$. Agora, se considerarmos as restrições no tempo de interação impostas pela utilização do campo externo, teremos [16]

$$W^{(\text{mix})}(x,y) = \frac{1}{\pi^2} e^{-2y^2} f(i\sqrt{2}y) \left\{ e^{-2(\alpha+x)^2} f[i\sqrt{2}(\alpha+x)] + e^{-2(\alpha-x)^2} f[i\sqrt{2}(\alpha-x)] \right\}$$
(3.37)

e

$$W^{(e)}(x,y) = \frac{1}{1+e^{-2\alpha^2}} \left[\frac{1}{2} W^{(\min)}(x,y) + \frac{e^{-2(x^2+y^2)}}{4\pi} f[\sqrt{2}(\alpha+iy)]f[i\sqrt{2}x] \right] + c.c.$$
(3.38)

com

$$f(z) = \operatorname{erf}\left(\frac{\kappa\tau_{\max}}{\sqrt{2}} + z\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\kappa\tau_{\max}}{\sqrt{2}}\right).$$
(3.39)

onde a função erro é definida como [18]

$$\operatorname{erf}(z) = \int_0^z e^{-t^2} dt.$$
 (3.40)

Na figura 3.2 podemos notar, através da função de Wigner W(x, y) para o campo na cavidade, que o campo externo clássico não nos possibilita reconstruir corretamente o campo no interior da cavidade. Nos gráficos (a) e (c) (campo na cavidade no estado coerente par), percebemos que a função de Wigner do campo reconstruído (c) difere do gráfico para W(x, y) sem limitações no tempo de interação (a). Um análise similar pode ser feita para os gráficos (b) e (d) (campo na cavidade num estado de mistura estatística). Além disso, é visível a impossibilidade de distinguir os gráficos (c) e (d), apesar de representarem a função de Wigner para campos diferentes.

3.3 Acoplamento diferenciado do átomo com os campos

Através das seções anteriores verificamos que o esquema de detecção homódina atômica é limitado por flutuações quânticas do campo externo, flutuações essas que limitam a resolução do esquema de medida. Nesta seção veremos que as flutuações quânticas do campo externo sobre escalas de tempo relevantes podem ser negligenciadas, desde que o átomo esteja fracamente acoplado ao campo externo e fortemente acoplado com o campo da cavidade. Com essa condição, obtêm-se uma medida mais precisa do estado do campo através da detecção dos átomos que saem da cavidade no estado excitado [19].

Considerando o esquema anterior, mas agora com duas constantes de acoplamentos distintas (κ_a para o campo na cavidade e κ_b para o campo externo), temos que o Hamiltoniano de interação do sistema é dado

por

$$\mathbf{H}_{I} = \hbar \kappa_{a} \left(\boldsymbol{\sigma}^{\dagger} \mathbf{a} + \mathbf{a}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} \right) + \hbar \kappa_{b} \left(\boldsymbol{\sigma}^{\dagger} \mathbf{b} + \mathbf{b}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} \right) .$$
(3.41)

Definindo os novos operadores do modo composto

$$\mathbf{A} = \frac{\kappa_a \mathbf{a} + \kappa_b \mathbf{b}}{\sqrt{\kappa_a^2 + \kappa_b^2}} \qquad \mathbf{e} \qquad \mathbf{B} = \frac{\kappa_b \mathbf{a} - \kappa_a \mathbf{b}}{\sqrt{\kappa_a^2 + \kappa_b^2}}, \tag{3.42}$$

os quais obedecem as relações de comutação

$$[\mathbf{A}, \mathbf{A}^{\dagger}] = \mathbf{1}$$
, $[\mathbf{B}, \mathbf{B}^{\dagger}] = \mathbf{1}$, $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$, $[\mathbf{A}, \mathbf{B}^{\dagger}] = 0$, (3.43)

o Hamiltoniano na representação de interação pode ser reescrito como

$$\mathbf{H}_{I} = \hbar \sqrt{\kappa_{a}^{2} + \kappa_{b}^{2}} \left(\boldsymbol{\sigma}^{\dagger} \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} \right).$$
(3.44)

A probabilidade de excitação atômica para este caso é calculada por intermédio de

$$p(t) = \operatorname{Tr} \left[\mathbf{U}(t) \boldsymbol{\rho}_{c}(0) \otimes |e\rangle \langle e| \mathbf{U}^{\dagger}(t) |e\rangle \langle e| \right],$$
(3.45)

em que $\mathbf{U}(t)$ é o operador evolução temporal do sistema e $\rho_c(0) = \rho_a(0) \otimes |\varepsilon\rangle_{b\ b} \langle \varepsilon|$. Para o **modo a**, a matriz densidade será escrita em termos da distribuição de quasi-probabilidade $P(\alpha)$ de Glauber-Sudarshan, ou seja,

$$\boldsymbol{\rho}_a(0) = \int P(\alpha) |\alpha\rangle_{aa} \langle \alpha | d^2 \alpha.$$
(3.46)

De modo análogo a Eq. (3.25), temos que

$$|\alpha\rangle_{a}|\varepsilon\rangle_{b} = \left|\frac{\kappa_{a}\alpha + \kappa_{b}\varepsilon}{\sqrt{\kappa_{a}^{2} + \kappa_{b}^{2}}}\right\rangle_{A} \left|\frac{\kappa_{b}\alpha - \kappa_{a}\varepsilon}{\sqrt{\kappa_{a}^{2} + \kappa_{b}^{2}}}\right\rangle_{B} = |A\rangle_{A}|B\rangle_{B}$$
(3.47)

e portanto,

$$\boldsymbol{\rho}_{c}(0) = \int P(\alpha) |A\rangle_{A} |B\rangle_{BB} \langle B|_{A} \langle A|d^{2}\alpha.$$
(3.48)

Logo, a probabilidade de excitação atômica pode ser expressa na forma compacta

$$p(t) = \int P(\alpha) p_{\alpha}(t) d^{2}\alpha, \qquad (3.49)$$

sendo

$$p_{\alpha}(t) = \operatorname{Tr}\left[\mathbf{U}(t)|e\rangle|A\rangle_{AA}\langle A|\langle e|\mathbf{U}^{\dagger}(t)|e\rangle\langle e|\right]$$
(3.50)

a probabilidade de detectar o átomo no estado excitado uma vez que o campo inicial da cavidade se encontra no estado coerente. Em particular, temos que $p_{\alpha}(t)$ pode ser calculada de imediato e tem como resultado final

$$p_{\alpha}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\bar{n}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{n}^{n}}{n!}\cos\left(2\sqrt{\kappa_{a}^{2} + \kappa_{b}^{2}}t\sqrt{n+1}\right),$$
(3.51)

no qual n refere-se ao número de excitações do modo A e com número médio de fótons dado por

$$\bar{n} = \frac{|\kappa_a \alpha + \kappa_b \varepsilon|^2}{\kappa_a^2 + \kappa_b^2}.$$
(3.52)

Por outro lado, se considerarmos o campo externo muito intenso e com amplitude $|\varepsilon| \gg (\kappa_a/\kappa_b)\kappa_a t$, temos que

$$\sqrt{n+1} \cong \frac{\sqrt{\bar{n}}}{2} + \frac{n}{2\sqrt{\bar{n}}}.$$
(3.53)

Consequentemente, para $\kappa_a \gg \kappa_b$ e $\kappa_b t \ll 1$, a expressão (3.51) simplificar-se-a como segue:

$$p_{\alpha}(t) = \frac{1}{4} \left[1 + e^{i2\kappa_b t|\varepsilon|} \chi_{\alpha} \left(i\kappa_a t \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} \right) \right] + c.c. , \qquad (3.54)$$

com

$$\chi_{\alpha}\left(i\kappa_{a}t\frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}\right) = e^{-(\kappa_{a}t)^{2}/2}e^{i\kappa_{a}t(\alpha^{*}\varepsilon + \alpha\varepsilon^{*})/|\varepsilon|}$$
(3.55)

designando a função característica de Wigner para o estado coerente $|\alpha\rangle$. Substituindo a expressão acima na probabilidade de excitação âtomica, obtem-se

$$p(\tau) = \frac{1}{4} \left[1 + e^{i2\kappa_b |\varepsilon|\tau} \int P(\alpha) \chi_\alpha \left(i\kappa_a \tau \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} \right) d^2 \alpha \right] + c.c.$$
(3.56)

Agora, observando que

$$\chi(\mu) = \int P(\alpha)\chi_{\alpha}(\mu)d^{2}\alpha$$
(3.57)

é a função característica de Wigner associada a uma matriz densidade inicial qualquer para um campo no interior da cavidade, obtemos finalmente

$$p(\tau) = \frac{1}{4} \left[1 + e^{i2\kappa_b \tau |\varepsilon|} \chi \left(i\kappa_a \tau \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} \right) \right] + c.c. , \qquad (3.58)$$

o qual relaciona a probabilidade de excitação do átomo com a função característica de Wigner de um campo desconhecido contido no interior da cavidade. Em resumo, como o termo de decaimento não é tão grande, a função característica pode ser reconstruída para $|\mu|$ grande. Desta maneira, para acoplamentos fracos entre átomo e campo externo, podemos negligenciar as flutuações do vácuo no campo externo, e assim tratá-lo como um campo clássico [19].

3.4 Controlando as propriedades não-clássicas do MJC

Agora vamos verificar a correspondência entre o esquema de detecção homódina atômica proposto por Wilkens e Meystre e o modelo de Jaynes-Cummings com um campo externo coerente [19, 20]. O modelo de Jaynes-Cummings com um campo externo coerente consiste basicamente de um átomo de dois níveis interagindo com o campo contido em uma cavidade, sendo esse sistema bombeado por um campo externo coerente (a analogia com o esquema de detecção homódina atômica é completa, pois temos os mesmos subsistemas e o mesmo tipo de interação entre eles). Dessa forma, nosso objeto de estudo será o Hamiltoniano

$$\mathbf{H} = \hbar \omega \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{a} + \hbar \omega_0 \frac{\boldsymbol{\sigma}_z}{2} + \hbar \omega \mathbf{b}^{\dagger} \mathbf{b} + \hbar \kappa_a (\mathbf{a} \boldsymbol{\sigma}_+ + \mathbf{a}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma}_-) + \hbar \kappa_b (\mathbf{b} \boldsymbol{\sigma}_+ + \mathbf{b}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma}_-)$$
(3.59)

com a condição $\kappa_a \gg \kappa_b$ estabelecida na seção anterior preservada. A evolução temporal do sistema físico descrito por (3.59) é dada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \mathbf{H}|\Psi(t)\rangle.$$
 (3.60)

Em seguida, vamos realizar uma série de transformações unitárias na equação de Schrödinger com o objetivo de obter um novo Hamiltoniano tal que tratamentos perturbativos sejam possíveis. Para tanto, considere inicialmente a transformação

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i(\omega_f t)\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{b}}|\phi(t)\rangle \tag{3.61}$$

na Eq. (3.60), a qual consiste de uma rotação do estado $|\phi(t)\rangle$ de ângulo $\omega_f t$. Tal procedimento leva-nos a obter uma equação de movimento para o novo estado,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t)\rangle = \mathbf{H}'(t)|\phi(t)\rangle,$$
(3.62)

com um novo Hamiltoniano transformado $\mathbf{H}'(t)$ cuja expressão é dada por

$$\mathbf{H}'(t) = \hbar \omega \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{a} + \hbar \omega_0 \frac{\boldsymbol{\sigma}_z}{2} + \hbar \kappa_a (\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}_+ + \mathbf{a}^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}_-) + \hbar \kappa_b (\mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}_+ e^{-i\omega_f t} + \mathbf{b}^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}_- e^{i\omega_f t}).$$
(3.63)

Apesar da restrição $\kappa_a \gg \kappa_b$, o termo proporcional a κ_b não pode ser tratado como uma perturbação devido a dependência com o campo externo através dos operadores **b** e **b**[†]. Como o campo externo coerente é muito intenso, aproximações perturbativas falham neste caso. Para contornarmos esse problema devemos em princípio reescrever o Hamiltoniano como uma soma de dois termos tal que um depende do modo da cavidade e da amplitude do campo externo, e o outro é proporcional a κ_b e independente da intensidade do campo externo. Desta maneira, podemos tratar o segundo termo como uma perturbação.

Considere a transformação

$$\mathbf{H}^{\prime\prime}(t) = \mathbf{D}^{\dagger}(\varepsilon)\mathbf{H}^{\prime}(t)\mathbf{D}(\varepsilon), \qquad (3.64)$$

na qual $\mathbf{D}^{\dagger}(\varepsilon)$ é o operador deslocamento de Glauber, escrito em termos dos operadores **b** e **b**[†]. Com isso, a Eq. (3.62) pode ser reescrita como

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\varphi(t)\rangle = \mathbf{H}^{''}(t)|\varphi(t)\rangle, \qquad (3.65)$$

sendo $|\varphi(t)\rangle$ dado por

$$|\varphi(t)\rangle = \mathbf{D}^{\dagger}(\varepsilon)|\phi(t)\rangle,$$
(3.66)

caracterizando assim a chamada representação do vácuo [18]. Nessa representação, o estado inicial do sistema é descrito por

$$|\varphi(0)\rangle = |0\rangle_b|\chi(0)\rangle,\tag{3.67}$$

com $|0\rangle_b$ representando o estado de vácuo do campo externo e $|\chi(0)\rangle$ a molécula Jaynes-Cummings bombeada pelo campo externo. Nesta situação, o Hamiltoniano $\mathbf{H}^{''}(t)$ tem como expressão

$$\mathbf{H}^{\prime\prime}(t) = \mathcal{H}(t) + \mathbf{V}(t), \tag{3.68}$$

com

$$\mathcal{H}(t) = \hbar\omega \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{a} + \hbar\omega_0 \frac{\boldsymbol{\sigma}_z}{2} + \hbar\kappa_a (\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}_+ + \mathbf{a}^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}_-) + \hbar\kappa_b (\varepsilon\boldsymbol{\sigma}_+ e^{-i\omega_f t} + \varepsilon^*\boldsymbol{\sigma}_- e^{i\omega_f t})$$
(3.69)

e

$$\mathbf{V}(t) = \hbar \kappa_b (\mathbf{b} \boldsymbol{\sigma}_+ e^{-i\omega_f t} + \mathbf{b}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma}_- e^{i\omega_f t}).$$
(3.70)

Note que o termo (3.70) descreve o efeito sobre o sistema das flutuações do vácuo no campo externo. Como estamos trabalhando num regime de tempo em que essas flutuações não são importantes, podemos considerar $\mathbf{V}(t)$ como uma perturbação. De fato, somente o termo de ordem zero da perturbação é considerado, tendo em vista que o decaimento atômico também é descartado. Porém, este procedimento é valido somente quando a probabilidade das perturbações que induzem as transições entre os autoestados do sistema não perturbado for pequena [20]. Isto implica que estamos lidando com um tempo de interação $\tau \ll \kappa_b^{-1}$. Levando em conta as aproximações delineadas até o presente momento, temos que o Hamiltoniano \mathcal{H} na representação de interação torna-se independente do tempo, ou seja,

$$\mathcal{H}_{I} = \hbar \delta \frac{\boldsymbol{\sigma}_{z}}{2} + \hbar \kappa_{a} (a^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma}^{\dagger}) + \hbar \kappa_{b} (\varepsilon^{*} \boldsymbol{\sigma} + \varepsilon \boldsymbol{\sigma}^{\dagger})$$
(3.71)

com $\delta = \omega - \omega_0$. Agora, realizando a transformação unitária

$$\mathbf{H}_{\rm JC} = \mathbf{D}\left(\beta\right) \mathcal{H}_I \mathbf{D}^{\dagger}\left(\beta\right),\tag{3.72}$$

com a amplitude complexa $\beta = \varepsilon(\kappa_b/\kappa_a)$, recuperamos o Hamiltoniano padrão do modelo de Jaynes-Cummings não-ressonante na representação de interação. Na representação de Schrödinger, o estado do sistema num dado tempo *t* está relacionado ao seu estado no tempo *t* = 0 por

$$|\chi(t)\rangle = e^{-i\omega t(\mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{a} + \boldsymbol{\sigma}_{z}/2)} \mathbf{D}^{\dagger}(\beta) \mathbf{U}_{\rm JC}(t) \mathbf{D}(\beta) |\chi(0)\rangle, \qquad (3.73)$$

no qual $\mathbf{U}_{\mathrm{JC}}(t) = \exp\left(-it\mathbf{H}_{\mathrm{JC}}/\hbar\right)$ e cujo operador densidade descrito através da expressão

$$\boldsymbol{\rho}(t) = e^{-i\omega t (\mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{a} + \boldsymbol{\sigma}_z/2)} \mathbf{D}^{\dagger}(\beta) \boldsymbol{\rho}_{\mathrm{ex}}(t) \mathbf{D}(\beta) e^{i\omega t (\mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{a} + \boldsymbol{\sigma}_z/2)},$$
(3.74)

sendo

$$\boldsymbol{\rho}_{\rm ex}(t) = \mathbf{U}_{\rm JC}(t)\mathbf{D}(\beta)\boldsymbol{\rho}(0)\mathbf{D}^{\dagger}(\beta)\mathbf{U}_{\rm JC}^{\dagger}(t), \qquad (3.75)$$



Figura 3.3: Gráfico da inversão atômica $\mathcal{I}_{c}(t)$ versus $\tau = \kappa t$, considerando o campo na cavidade no estado coerente, com as amplitudes dos campos na cavidade e externo iguais a $|\alpha| = 2 \text{ e } |\beta| = 2$, respectivamente.

onde o índice **ex** faz referência ao modelo de Jaynes-Cummings com um campo externo. Neste capítulo vamos sempre considerar o átomo inicialmente no estado excitado e o campo na cavidade descrito pelos estados coerente e térmico, ou seja,

$$\rho_c(0) = \sum_{n,m=0}^{\infty} c_n(0) c_m^*(0) |n\rangle \langle m| \qquad \text{com} \qquad c_n(0) = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}},$$
(3.76)

e

$$\rho_{th}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\bar{n}) |n\rangle \langle n| \qquad \text{com} \qquad P_n(\bar{n}) = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{n+1}}.$$
(3.77)

Em seguida, vamos calcular algumas variáveis dinâmicas tais como inversão atômica, número médio de fótons e compressão nas quadraturas, com o intuito de investigar as propriedades não-clássicas do modelo em questão.

A - Inversão Atômica

A primeira grandeza a ser obtida é a inversão de população atômica, definida como

$$\mathcal{I}(t) = \mathrm{Tr}[\boldsymbol{\rho}(t)\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{z}}]. \tag{3.78}$$

Substituindo $\rho(t)$ na expressão acima notamos que, ao utilizar a propriedade cíclica do traço, esta pode ser simplificada para

$$\mathcal{I}(t) = \text{Tr}[\boldsymbol{\rho}_{\text{ex}}(t)\boldsymbol{\sigma}_{z}]. \tag{3.79}$$

Considerando o átomo inicialmente no estado excitado e o campo na cavidade coerente, a expressão para I(t) adquire o seguinte aspecto:

$$\mathcal{I}_{c}(t) = e^{-|\alpha+\beta|^{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha+\beta|^{2n}}{n!} \left[|F_{n}(t)|^{2} - |G_{n}(t)|^{2} \right],$$
(3.80)



Figura 3.4: Inversão atômica $\mathcal{I}_{th}(t)$ versus $\tau = \kappa_a t$ para um campo térmico na cavidade. Foram analisadas duas situações: na primeira fixamos o campo externo em $|\beta| = 3$ e variamos o número médio de fótons térmicos em (a) $\bar{n} = 0.2$ e (c) $\bar{n} = 2$. Na segunda situação, a amplitude do campo externo foi fixada em $|\beta| = 5$ e novamente variamos o número médio de fótons térmicos em (b) e (d), utilizando os mesmos valores dos gráficos (a) e (c).

nos quais

$$F_n(t) = \cos\left(\frac{tk_n}{2}\right) - i\frac{\delta}{k_n}\sin\left(\frac{tk_n}{2}\right), \qquad G_n(t) = -i\frac{\Omega_n}{k_n}\sin\left(\frac{tk_n}{2}\right),$$

 $\operatorname{com} k_n^2 = \delta^2 + \Omega_n^2 \operatorname{e} \Omega_n = 2\kappa_a \sqrt{n+1}$ a frequência de Rabi. Como $|F_n(t)|^2 + |G_n(t)|^2 = 1$, temos que a Eq. (3.80) pode ser reescrita na forma simplificada

$$\mathcal{I}_{c}(t) = 1 - 2e^{-|\alpha+\beta|^{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha+\beta|^{2n}}{n!} |G_{n}(t)|^{2}.$$
(3.81)

Como podemos ver na Fig. (3.3), a inversão atômica é sensível ao campo externo. No caso do campo coerente na cavidade, a amplitude do campo externo é "somada" a amplitude do **modo a**.

De modo análogo ao cálculo desenvolvido anteriormente, temos que a inversão atômica para o estado



Figura 3.5: Evolução temporal do número médio de fótons com amplitude $|\alpha| = 2$ para o campo na cavidade e $|\beta| = 2$ para o campo externo. Aqui vemos o fenômeno de ressurgimento a longos tempos.

térmico pode ser escrita como

$$\mathcal{I}_{\rm th}(t) = 1 - 2\sum_{n,m=0}^{\infty} |\langle m | \mathbf{D}(\beta) | n \rangle|^2 P_n(\bar{n}) |G_m(t)|^2,$$
(3.82)

no qual

$$|\langle m | \mathbf{D}(\beta) | n \rangle|^{2} = \begin{cases} \frac{n!}{m!} e^{-|\beta|^{2}} |\beta|^{2(m-n)} \left[L_{n}^{(m-n)}(|\beta|^{2}) \right]^{2} & (m \ge n) ,\\ \\ \frac{m!}{n!} e^{-|\beta|^{2}} |\beta|^{2(n-m)} \left[L_{m}^{(n-m)}(|\beta|^{2}) \right]^{2} & (n \ge m) , \end{cases}$$
(3.83)

sendo $L_n^{(m)}(z)$ o polinômio de Laguerre generalizado []. Agora, substituindo a Eq. (3.83) em (3.82) e realizando a soma no índice "n", obtemos

$$\mathcal{I}_{\rm th}(t) = 1 - \frac{2}{1+\bar{n}} \exp\left(-\frac{|\beta|^2}{1+\bar{n}}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^m L_m\left[-\frac{|\beta|^2}{\bar{n}(1+\bar{n})}\right] \ |G_m(t)|^2. \tag{3.84}$$

Na Figura 3.4 também observamos a influência do campo externo sobre a evolução da inversão atômica. Considerando o campo térmico na cavidade, constatamos o surgimento de colapsos e ressurgimentos, comportamento que não ocorre sem a presença do campo externo. Além disso, é possível notar que os colapsos e ressurgimentos são mais "definidos" para campos externos com alta amplitude e baixo número médio de fótons térmicos.

B - Número Médio de Fótons

De maneira análoga aos cálculos desenvolvidos até o presente momento, temos que a expressão para o número médio de fótons é dada por

$$n(t) = \operatorname{Tr}[\mathbf{n}\boldsymbol{\rho}(t)] = \langle \mathbf{n} \rangle_{\mathrm{ex}} + |\beta|^2 - \left(\beta \langle \mathbf{a}^{\dagger} \rangle_{\mathrm{ex}} + \beta^* \langle \mathbf{a} \rangle_{\mathrm{ex}} \rangle\right).$$
(3.85)



Figura 3.6: Gráficos do número médio de fótons para um campo térmico na cavidade $n_{th}(\tau)$ versus τ . As figuras (a) e (c) correspondem a um campo externo com amplitude $|\beta| = 3$ e número médio de fótons térmicos iguais a $\bar{n} = 0.2$ e $\bar{n} = 2$, respectivamente. Já nas figuras (c) e (d) a amplitude do campo externo é $|\beta| = 5$ com as mesmas variações para \bar{n} .

Consequentemente, ao considerarmos o campo na cavidade descrito pelos estados coerente e térmico obtemos, através dos resultados contidos no Apêndices A, as respectivas expressões para o número médio de fótons

$$n_{\rm c}(t) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |G_n(t)|^2 - 2e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!\sqrt{n+1}} {\rm Re}[\beta \alpha^* \mathfrak{T}_{n,n+1}(t)], \quad (3.86)$$

$$n_{\rm th}(t) = |\beta|^2 + \frac{e^{-\frac{|\beta|^2}{1+\bar{n}}}}{1+\bar{n}} \sum_{m=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^{n+1} L_{m+1}^{(2)} \left(-\frac{|\beta|^2}{\bar{n}(1+\bar{n})}\right) H_m^{(1,1)}(t) + \frac{e^{-\frac{|\beta|^2}{1+\bar{n}}}}{(1+\bar{n})^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^m L_m^{(1)} \left(-\frac{|\beta|^2}{\bar{n}(1+\bar{n})}\right) \left[\beta^2 H_m^{(1,0)}(t) - \beta^{*2} H_m^{(0,1)}(t)\right]$$
(3.87)

 $\operatorname{com} \mathfrak{T}_{n,m}(t)$ definido por

$$\mathfrak{T}_{n,m}(t) = \sqrt{n+1} F_m(t) F_n^*(t) + \sqrt{n+2} G_m(t) G_n^*(t), \qquad (3.88)$$

e $H_m^{(r,s)}(t)$ dada pela Eq.(A.11). Como podemos ver nas Figs. 3.5 e 3.6, tanto para o campo térmico como para o campo coerente na cavidade, o número médio de fótons apresenta ressurgimentos a longos tempos. Com isso, é visível a influência do campo externo sobre a dinâmica do sistema.

C - Compressão nas Quadraturas

A próxima variável dinâmica a ser calculada é a variância das quadraturas

$$\mathbf{X}_{1} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{a} e^{i\omega t} + \mathbf{a}^{\dagger} e^{-i\omega t} \right) \qquad \mathbf{e} \qquad \mathbf{X}_{2} = \frac{1}{2\mathbf{i}} \left(\mathbf{a} e^{i\omega t} - \mathbf{a}^{\dagger} e^{-i\omega t} \right), \tag{3.89}$$

ou seja,

$$V(\mathbf{X}_i) = \langle \mathbf{X}_i \rangle^2 - \langle \mathbf{X}_i^2 \rangle \qquad (i = 1, 2),$$
(3.90)

com o objetivo de investigar o efeito não-clássico de compressão nas quadraturas. Para tanto, devemos calcular os valores médios

$$\langle \mathbf{X}_1 \rangle_t = \frac{1}{2} \left[\langle \mathbf{a} \rangle_{ex} + \langle \mathbf{a}^{\dagger} \rangle_{ex} \right] - \operatorname{Re}(\beta),$$
(3.91)

$$\langle \mathbf{X}_2 \rangle_t = \frac{1}{2i} \left[\langle \mathbf{a} \rangle_{\mathrm{ex}} - \langle \mathbf{a}^{\dagger} \rangle_{\mathrm{ex}} \right] - \mathrm{Im}(\beta), \qquad (3.92)$$

$$\langle \mathbf{X}_{1}^{2} \rangle_{t} = \frac{1}{4} \langle \mathbf{a}^{\dagger 2} \rangle_{ex} + \frac{1}{4} \langle \mathbf{a}^{2} \rangle_{ex} + \frac{1}{2} \langle \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{a} \rangle_{ex} - \operatorname{Re}(\beta) \left[\langle \mathbf{a} \rangle_{ex} + \langle \mathbf{a}^{\dagger} \rangle_{ex} \right] + \left[\operatorname{Re}(\beta) \right]^{2} + \frac{1}{4},$$
(3.93)

$$\langle \mathbf{X}_{2}^{2} \rangle_{t} = -\frac{1}{4} \langle \mathbf{a}^{\dagger 2} \rangle_{\mathrm{ex}} - \frac{1}{4} \langle \mathbf{a}^{2} \rangle_{\mathrm{ex}} + \frac{1}{2} \langle \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{a} \rangle_{\mathrm{ex}} + i \mathrm{Im}(\beta) \left[\langle \mathbf{a} \rangle_{\mathrm{ex}} - \langle \mathbf{a}^{\dagger} \rangle_{\mathrm{ex}} \right] + \left[\mathrm{Im}(\beta) \right]^{2} + \frac{1}{4}$$
(3.94)

Utilizando os valores médios calculados no apêndice A, para o estado coerente, obtêm-se:

$$\langle \mathbf{X}_{1,c} \rangle_t = -\operatorname{Re}\beta + \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} \left[c_n(\gamma) c_{n+1}^*(\gamma) \mathfrak{T}_{n+1,n}(t) \right]$$
(3.95)

$$\langle \mathbf{X}_{2,c} \rangle_t = -\mathrm{Im}\beta + \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im} \left[c_n(\gamma) c_{n+1}^*(\gamma) \mathfrak{T}_{n+1,n}(t) \right]$$
(3.96)

$$\langle \mathbf{X}_{1,c}^2 \rangle_t = \frac{1}{4} \left[2 \langle \mathbf{n} \rangle_t + 1 \right] + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} \left[c_n(\gamma) c_{n+2}^*(\gamma) \mathfrak{S}_{n+2,n}(t) \right] + \left[\operatorname{Re}(\beta) \right]^2 -2i \operatorname{Re}(\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} \left[c_n(\gamma) c_{n+1}^*(\gamma) \mathfrak{T}_{n+2,n}(t) \right]$$
(3.97)

$$\langle \mathbf{X}_{2,c}^{2} \rangle_{t} = \frac{1}{4} \left[2 \langle \mathbf{n} \rangle_{t} + 1 \right] - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} \left[c_{n}(\gamma) c_{n+2}^{*}(\gamma) \mathfrak{S}_{n+2,n}(t) \right] + \left[\operatorname{Im}(\beta) \right]^{2} - 2i \operatorname{Im}(\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} \left[c_{n}(\gamma) c_{n+1}^{*}(\gamma) \mathfrak{T}_{n+2,n}(t) \right]$$
(3.98)

 $\operatorname{com} \mathfrak{T}_{n,m}(t)$ definido em (3.88) e

$$\mathfrak{S}_{n,m}(t) = \sqrt{(n+1)(n+2)} F_m(t) F_n^*(t) + \sqrt{(n+2)(n+3)} G_m(t) G_n^*(t).$$
(3.99)



Figura 3.7: Variância da quadratura $V(\mathbf{X}_1)$ versus $\tau = \kappa_a t$, considerando ambos os campos, na cavidade e externo, nos estados coerentes e com amplitudes iguais a $|\alpha| = 2$ e $|\beta| = 2$, respectivamente. Não observamos aqui o fenômeno de compressão da quadratura

A Figura (3.7) mostra a variância da quadratura \mathbf{X}_1 , para o campo intracavidade no estado coerente. Utilizamos as amplitudes dos campos externo e na cavidade iguais a $|\alpha| = |\beta| = 2$. Nesse caso, não observamos nenhuma influência significativa do campo externo sobre a quadratura.

Agora, ao considerarmos o campo na cavidade descrito pelo estado térmico, os valores médios $\langle \mathbf{X}_i^k \rangle$ com i, k = 1, 2 adquirem o seguinte aspecto (consultar apêndice A):

$$\langle \mathbf{X}_{1,\text{th}} \rangle_t = \frac{e^{-\frac{|\beta|^2}{1+\bar{n}}}}{1+\bar{n}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^{m+1} L_m^{(1)} \left(-\frac{|\beta|^2}{\bar{n}(1+\bar{n})}\right) \operatorname{Re}\left[\frac{\beta}{\bar{n}} H_m^{(0,1)}(t)\right] - \operatorname{Re}(\beta),$$
(3.100)

$$\langle \mathbf{X}_{2,\text{th}} \rangle_{t} = \frac{e^{-\frac{|\beta|^{2}}{1+\bar{n}}}}{1+\bar{n}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}} \right)^{m+1} L_{m}^{(1)} \left(-\frac{|\beta|^{2}}{\bar{n}(1+\bar{n})} \right) \text{Im} \left[\frac{\beta}{\bar{n}} H_{m}^{(0,1)}(t) \right] - \text{Im}(\beta),$$
(3.101)

$$\langle \mathbf{X}_{1,\text{th}}^{2} \rangle_{t} = \frac{1}{4} + \frac{e^{-\frac{1+\bar{n}}{1+\bar{n}}}}{2(1+\bar{n})} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^{m+2} L_{m}^{(2)} \left(-\frac{|\beta|^{2}}{\bar{n}(1+\bar{n})}\right) \operatorname{Re}\left[\left(\frac{\beta}{\bar{n}}\right)^{2} H_{m}^{(0,2)}(t)\right] - 2\operatorname{Re}(\beta) \langle \mathbf{X}_{1} \rangle_{t} - \left[\operatorname{Re}(\beta)\right]^{2} + \frac{e^{-\frac{|\beta|^{2}}{1+\bar{n}}}}{2(1+\bar{n})} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^{m+1} L_{m+1} \left(-\frac{|\beta|^{2}}{\bar{n}(1+\bar{n})}\right) H_{m}^{(1,1)}(t),$$
(3.102)

$$\langle \mathbf{X}_{2,\text{th}}^{2} \rangle_{t} = \frac{1}{4} - \frac{e^{-\frac{|\beta|^{2}}{1+\bar{n}}}}{2(1+\bar{n})} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^{m+2} L_{m}^{(2)} \left(-\frac{|\beta|^{2}}{\bar{n}(1+\bar{n})}\right) \operatorname{Re}\left[\left(\frac{\beta}{\bar{n}}\right)^{2} H_{m}^{(0,2)}(t)\right] - 2\operatorname{Im}(\beta) \langle \mathbf{X}_{2} \rangle_{t} - \left[\operatorname{Im}(\beta)\right]^{2} + \frac{e^{-\frac{|\beta|^{2}}{1+\bar{n}}}}{2(1+\bar{n})} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^{m+1} L_{m+1} \left(-\frac{|\beta|^{2}}{\bar{n}(1+\bar{n})}\right) H_{m}^{(1,1)}(t),$$
(3.103)

Na Figura 3.8 podemos ver que, para um campo térmico na cavidade, a variância da quadratura \mathbf{X}_1 é sensível ao campo externo. Para isso, analisamos duas situações: na primeira fixamos o número médio de fótons térmicos ($\bar{n} = 0.2$) e variamos a amplitude do campo externo ($|\beta| = 3, 5, 7$). No gráfico (a) as variações



Figura 3.8: Variância da quadratura \mathbf{X}_1 para um campo térmico na cavidade. Na figura (a) fixamos o número médio de fótons térmicos em $\bar{n} = 0.2$ e variamos a amplitude do campo externo em $|\beta| = 3, 5, 7$ e $\bar{n} = 0.2$. Já na figura (b), fixamos a amplitude do campo externo em $|\beta| = 5.0$ e variamos o \bar{n} ($\bar{n} = 0.1, 0.3, 0.5$). Em ambas as situações, cada variação das linhas (contínuas, tracejadas e alternadas) representa os diferentes valores:(a) da amplitude do campo externo ($|\beta| = 3, 5, 7$); (b) do número médio de fótons térmicos ($\bar{n} = 0.1, 0.3, 0.5$). É visível a influência do campo externo sobre a variância da quadratura. Em (a) temos que, quanto maior o valor assumido por $|\beta|$, maior será a compressão. Já em (b), temos que quanto menor for o número médio de fótons térmicos, maior será a compressão.

de $|\beta|$ estão representadas pelas linhas contínuas, tracejadas e alternadas ($|\beta| = 3, 5$ e 7 respectivamente). Isso nos leva a concluir que, quanto maior a amplitude do campo externo, maior será a compressão da quadratura. Na segunda situação fixamos a amplitude do campo externo ($|\beta| = 5$) e variamos o número médio de fótons térmicos ($\bar{n} = 0.1, 0.3, 0.5$). Essas variações são representadas pelas mesmas linhas do caso anterior, para $\bar{n} = 0.1, 0.3$ e 0.5 respectivamente. Notamos que a compressão será maior para um número de fótons térmicos menor.

É importante salientar que tivemos a necessidade de obter as expressões analíticas da inversão atômica, do número médio de fótons e da variância das quadraturas para o campo na cavidade no estado térmico, tendo em vista que as análises existentes na literatura [20] foram feitas a partir de simulações numéricas.

Assim, após introduzir alguns resultados sobre a influência de um campo externo clássico sobre o sistema átomo-campo (MJC), abordaremos, no capítulo seguinte, como será essa influência ao considerarmos o campo externo quântico.

Capítulo 4

Aspectos qualitativos de emaranhamento no modelo de Jaynes-Cummings com um campo externo quântico

Neste capítulo apresentamos um procedimento matemático que nos permite obter soluções analíticas para a inversão atômica e função de Wigner para o MJC com um campo externo quântico, assumindo quaisquer campos na cavidade e externo. Essas soluções podem ser escritas na forma integral, de modo que seus integrandos apresentam um termo comum, relacionado ao produto das distribuições de quasiprobabilidades de Glauber-Sudarshan para cada campo, e um kernel responsável pela correlação. Para ilustrar os resultados, fixamos o campo externo no estado coerente e o campo na cavidade nos estados coerentes par e ímpar. Desta maneira, mostraremos como a amplitude do campo externo e o parâmetro de dessintonia modificam o emaranhamento desse sistema composto através da análise da função de Wigner.

Esses resultados foram dispostos da seguinte maneira: na seção 4.1 obtemos o operador evolução temporal e os elementos de matriz do operador densidade para o MJC com um campo externo quântico, com os campos na cavidade e externo descritos na representação diagonal dos estados coerentes. Na sequência, nós fixamos o campo na cavidade nos estados coerente par e ímpar e o campo externo no estado coerente para investigar, na seção 4.2, os efeitos da amplitude do campo externo e dos parâmetros de dessintonia sobre a inversão atômica. Na seção 4.3 mostramos a expressão para a função de Wigner associada com o campo na cavidade a qual permite-nos analisar, por meio de cálculos númericos de um conjunto de parâmetros e condições iniciais similar ao utilizado na seção anterior, como o emaranhamento é modificado no sistema em estudo. Na seção 4.4 apresentamos nossas conclusões e perspectivas de futuros trabalhos. Por último, os apêndices B e C contêm os principais passos para o cálculo da inversão atômica e da função de Wigner, respectivamente.

4.1 Aspectos algébricos do MJC com um campo externo

Em geral, o MJC com um campo externo consiste de um átomo de dois níveis interagindo não-ressonantemente com um único modo do campo na cavidade, e um campo externo quântico incidindo por um dos lados abertos da cavidade (o esquema experimental no contexto de cavidades QED está ilustrado na figura 4.1). Nas aproximações de dipolo e onda girante (RWA), a dinâmica desse sistema é governada pelo Hamiltoniano $\mathbf{H} = \mathbf{H_0} + \mathbf{V}$, onde

$$\mathbf{H}_{0} = \hbar\omega \left(\mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{a} + \mathbf{b}^{\dagger}\mathbf{b}\right) + \frac{1}{2}\hbar\omega \boldsymbol{\sigma}_{z},$$
$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}\hbar\delta \boldsymbol{\sigma}_{z} + \hbar\kappa_{a}\left(\mathbf{a}^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}_{-} + \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}_{+}\right) + \hbar\kappa_{b}\left(\mathbf{b}^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}_{-} + \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}_{+}\right).$$
(4.1)

Aqui, ω é a frequência dos campos na cavidade e externo (que assumimos na condição de ressonantes), ω_0 é a frequência de transição atômica, $\delta = \omega_0 - \omega$ é a dessintonia das frequências, $\kappa_{a(b)}$ é a constante de acoplamento entre o átomo e o campo na cavidade (externo). Além disso, os operadores atômicos σ_{\pm} e σ_z são definidos como $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$, $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ e $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ ($|g\rangle$ e $|e\rangle$ correspondem aos estados fundamental e excitado do átomo), com $\mathbf{a}(\mathbf{a}^{\dagger}) \in \mathbf{b}(\mathbf{b}^{\dagger})$ os operadores criação (aniquilação) de fótons dos campos na cavidade e externo, respectivamente. É importante mencionar que a natureza quântica dos campos usados em vários esquemas de processamento de informação quântica apresentam sérias consequências em computação quântica de larga escala: o princípio de incerteza e a possibilidade de tornarem-se emaranhados com qubits físicos representam possíveis limitações em computação quântica [29,33]. Desta maneira, van Enk e Kimble [31] tem considerado a interação de campos laser com qubits atômicos e quantificado o emaranhamento átomo-campo em várias situações de interesse onde, em particular, eles encontram que o emaranhamento diminui com o número médio $\langle \mathbf{n} \rangle$ de fótons em um feixe de laser de acordo com $E \propto \langle \mathbf{n} \rangle^{-1} \log_2 \langle \mathbf{n} \rangle$ para $\langle \mathbf{n} \rangle \gg 1$. Seguindo a mesma linha, Gea-Banacloche [32] tem investigado a natureza quântica dos campos laser usados na manipulação de informação quântica, focalizando especialmente os erros de fases e seus efeitos sobre esquemas de correção de erros (para mais detalhes veja [32,33]).

Vamos agora definir os operadores de quasi-modo $\mathbf{A} = \epsilon_{a}\mathbf{a} + \epsilon_{b}\mathbf{b}$ e $\mathbf{B} = \epsilon_{b}\mathbf{a} - \epsilon_{a}\mathbf{b}$ (onde $\epsilon_{a(b)} = \kappa_{a(b)}/\kappa_{eff}$ e $\kappa_{eff}^{2} = \kappa_{a}^{2} + \kappa_{b}^{2}$ é a constante de acoplamento efetiva), que satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}, \mathbf{A}^{\dagger} \end{bmatrix} = 1, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{A}, \mathbf{A} \end{bmatrix} = -\mathbf{A}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{A}, \mathbf{A}^{\dagger} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{\dagger},$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}, \mathbf{B}^{\dagger} \end{bmatrix} = 1, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{B}, \mathbf{B} \end{bmatrix} = -\mathbf{B}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{B}, \mathbf{B}^{\dagger} \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{\dagger},$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}, \mathbf{B} \end{bmatrix} = 0, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{A}, \mathbf{B}^{\dagger} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{\dagger}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{A}, \mathbf{N}_{B} \end{bmatrix} = 0, \qquad (4.2)$$



Figura 4.1: Aparato experimental usado na descrição do MJC com um campo externo quântico

sendo $N_A = A^{\dagger}A$ ($N_B = B^{\dagger}B$) o operador número associado ao operador de quasi-modo A(B). Introduzindo os operadores soma $S = N_A + N_B$ e diferença $D = N_A - N_B$, podemos verificar que:

(i) $\mathbf{S} = \mathbf{n}_{a} + \mathbf{n}_{b}$ é uma quantidade conservada ($\mathbf{n}_{a} = \mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{a} \ \mathbf{e} \ \mathbf{n}_{b} = \mathbf{b}^{\dagger}\mathbf{b}$ são os operadores número de fótons dos campos na cavidade e externo);

(ii) o operador **D** pode ser reescrito em termos dos geradores $\mathbf{K}_+, \mathbf{K}_-, \mathbf{K}_0$ da álgebra de Lie su(2),

$$\mathbf{D} = 2(\epsilon_{\mathrm{a}}^2 - \epsilon_{\mathrm{b}}^2)\mathbf{K}_0 + 2\epsilon_{\mathrm{a}}\epsilon_{\mathrm{b}}(\mathbf{K}_- + \mathbf{K}_+)$$

no qual $\mathbf{K}_{-} = \mathbf{a}\mathbf{b}^{\dagger}$, $\mathbf{K}_{+} = \mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{b} e \mathbf{K}_{0} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{a} - \mathbf{b}^{\dagger}\mathbf{b})$, com $[\mathbf{K}_{-}, \mathbf{K}_{+}] = -2\mathbf{K}_{0} e [\mathbf{K}_{0}, \mathbf{K}_{\pm}] = \mathbf{K}_{\pm}$;

(iii) a relação de comutação entre os operadores $S \in D$ é nula, ou seja, [S, D] = 0, e conseqüentemente; (iv) o hamiltoniano H se simplifica para

1

$$\mathbf{H}_{0} = \hbar\omega \mathbf{S} + \frac{1}{2}\hbar\omega \boldsymbol{\sigma}_{z},
\mathbf{V} = \frac{1}{2}\hbar\delta \boldsymbol{\sigma}_{z} + \hbar\kappa_{\text{eff}} \left(\mathbf{A}^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}_{-} + \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_{+}\right),$$
(4.3)

com $[\mathbf{H}_0, \mathbf{V}] = 0$. Este fato nos leva a obter o hamiltoniano $\mathbf{H}_{int} = \mathbf{V}$ na representação de interação, o qual descreve o modelo de Jaynes-Cummings não-ressonante para um átomo interagindo com o quasi-modo \mathbf{A} , e com constante de acoplamento dada por κ_{eff} . Desta maneira, o operador evolução temporal é análogo ao do MJC não-ressonante usual.

Assim, se considerarmos o operador evolução temporal $\mathbf{U}(t) = \exp(-i\mathbf{V}t/\hbar)$ do sistema átomo-cavidade

na base atômica, os elementos $U_{ij}(t)$ da matriz 2 × 2 podem ser expressos por:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{11}(t) &= \cos\left(t\sqrt{\beta \mathbf{A}}\right) - \mathrm{i}\frac{\delta}{2} \, \frac{\sin\left(t\sqrt{\beta_{\mathrm{A}}}\right)}{\sqrt{\beta_{\mathrm{A}}}} \\ \mathbf{U}_{12}(t) &= -\mathrm{i}\kappa_{\mathrm{eff}} \, \frac{\sin\left(t\sqrt{\beta_{\mathrm{A}}}\right)}{\sqrt{\beta_{\mathrm{A}}}} \mathbf{A} \\ \mathbf{U}_{21}(t) &= -\mathrm{i}\kappa_{\mathrm{eff}} \, \mathbf{A}^{\dagger} \frac{\sin\left(t\sqrt{\beta_{\mathrm{A}}}\right)}{\sqrt{\beta_{\mathrm{A}}}} \\ \mathbf{U}_{22}(t) &= \cos\left(t\sqrt{\varphi_{\mathrm{A}}}\right) + \mathrm{i}\frac{\delta}{2} \, \frac{\sin\left(t\sqrt{\varphi_{\mathrm{A}}}\right)}{\sqrt{\varphi_{\mathrm{A}}}} \end{aligned}$$

onde $\varphi_{\rm A} = \kappa_{\rm eff}^2 \mathbf{A}^{\dagger} \mathbf{A} + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \mathbf{1} \ e \ \beta_{\rm A} = \varphi_{\rm A} + \kappa_{\rm eff}^2 \mathbf{1}$. Este resultado permite determinar o operador densidade $\rho(t) = \mathbf{U}(t)\rho(0)\mathbf{U}^{\dagger}(t)$, sendo $\rho(0)$ o operador densidade do sistema no tempo t = 0. Por conveniência, assumimos que o átomo está inicialmente no estado excitado e os campos externo e na cavidade encontram-se descritos pela representação diagonal dos estados coerentes, isto é, $\rho(0) = \rho_{\rm at}(0) \otimes \rho_{\rm ab}(0)$, com $\rho_{\rm at}(0) = |e\rangle\langle e| e$

$$\boldsymbol{\rho}_{\rm ab}(0) = \boldsymbol{\rho}_{\rm a}(0) \otimes \boldsymbol{\rho}_{\rm b}(0) = \iint \frac{d^2 \alpha_{\rm a} d^2 \alpha_{\rm b}}{\pi^2} P_{\rm a}(\alpha_{\rm a}) P_{\rm b}(\alpha_{\rm b}) |\alpha_{\rm a}, \alpha_{\rm b}\rangle \langle \alpha_{\rm a}, \alpha_{\rm b} |$$

onde $P(\alpha)$ representa a distribuição de quasi-probabilidade de Glauber-Sudarshan para cada campo, com $|\alpha_{a}, \alpha_{b}\rangle \equiv |\alpha_{a}\rangle \otimes |\alpha_{b}\rangle$. Desta maneira, os elementos de matriz de $\rho_{ij}(t)$ podem ser obtidos através das expressões:

$$\boldsymbol{\rho}_{11}(t) = \mathbf{U}_{11}(t) \ \boldsymbol{\rho}_{ab}(0) \ \mathbf{U}_{11}^{\dagger}(t) ,
\boldsymbol{\rho}_{12}(t) = \mathbf{U}_{11}(t) \ \boldsymbol{\rho}_{ab}(0) \ \mathbf{U}_{21}^{\dagger}(t) ,
\boldsymbol{\rho}_{21}(t) = \mathbf{U}_{21}(t) \ \boldsymbol{\rho}_{ab}(0) \ \mathbf{U}_{11}^{\dagger}(t) ,
\boldsymbol{\rho}_{22}(t) = \mathbf{U}_{21}(t) \ \boldsymbol{\rho}_{ab}(0) \ \mathbf{U}_{21}^{\dagger}(t) .$$
(4.4)

Note que $\rho(t)$ descreve a solução exata da equação de Schrödinger na representação de interação para o MJC com um campo externo não-ressonante. Usando esta solução nós podemos estabelecer expressões analíticas para a evolução temporal de várias funções que caracterizam o estado quântico do campo na cavidade, como a inversão atômica e a função de Wigner. Por simplicidade, o estado inicial do campo externo será fixado como o estado coerente por todo o capítulo ($\rho_{\rm b}(0) = |\beta\rangle\langle\beta|$), e o estado inicial do campo na cavidade irá assumir duas diferentes possibilidades: os estados coerentes par e ímpar. Com relação a distribuição de quasi-probabilidade de Glauber-Sudarshan, as considerações são equivalentes a $P_{\rm b}^{\rm (c)} = \pi \delta^{(2)}(\alpha_{\rm b} - \beta)$ e

$$\begin{split} P_{\rm a}^{\rm (e)}(\alpha_{\rm a}) &= \frac{\pi}{4} \frac{\exp\left(|\alpha_{\rm a}|^2\right)}{\cosh\left(|\alpha|^2\right)} \left[\delta^{(2)}(\alpha_{\rm a}-\alpha) + \delta^{(2)}(\alpha_{\rm a}+\alpha) + 2\cosh\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha_{\rm a}} - \alpha^*\frac{\partial}{\partial\alpha_{\rm a}^*}\right) \delta^{(2)}(\alpha_{\rm a}) \right] \;, \\ P_{\rm a}^{\rm (o)}(\alpha_{\rm a}) &= \frac{\pi}{4} \frac{\exp\left(|\alpha_{\rm a}|^2\right)}{\sinh\left(|\alpha|^2\right)} \left[\delta^{(2)}(\alpha_{\rm a}-\alpha) + \delta^{(2)}(\alpha_{\rm a}+\alpha) - 2\cosh\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha_{\rm a}} - \alpha^*\frac{\partial}{\partial\alpha_{\rm a}^*}\right) \delta^{(2)}(\alpha_{\rm a}) \right] \;, \end{split}$$

sendo $\delta^{(2)}(z)$ a função delta bidimensional. De acordo com Glauber [35]: "Se as singularidades de $P(\alpha)$ são do tipo mais forte do que as funções delta (por exemplo, derivadas da função delta), então o campo representado não terá análogo clássico". Nesse contexto, investigaremos a influência da amplitude do campo externo e dos parâmetros de dessintonia sobre os efeitos não-clássicos do campo na cavidade onde, em particular, a inversão atômica e a função de Wigner serão abordadas.

4.2 Inversão Atômica

A inversão atômica $\mathcal{I}(t) = \text{Tr}[\rho(t)\sigma_z]$ é uma quantidade de interesse central nessa seção devido a sua fácil acessibilidade em experimentos. Para o sistema átomo-cavidade descrito na seção anterior, a inversão atômica pode ser escrita na forma integral como (consultar apêndice B)

$$\mathcal{I}(t) = \iint \frac{d^2 \alpha_{\rm a} d^2 \alpha_{\rm b}}{\pi^2} P_{\rm a}(\alpha_{\rm a}) P_{\rm b}(\alpha_{\rm b}) \Xi(\alpha_{\rm a}, \alpha_{\rm b}; t) , \qquad (4.5)$$

com

$$\Xi(\alpha_{\rm a},\alpha_{\rm b};t) = 1 - 2\exp\left(-\left|\epsilon_{\rm a}\alpha_{\rm a} + \epsilon_{\rm b}\alpha_{\rm b}\right|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|\epsilon_{\rm a}\alpha_{\rm a} + \epsilon_{\rm b}\alpha_{\rm b}\right|^{2n}}{n!}|G_n(t)|^2 \ .$$

Aqui, a função $G_n(t) = -i(\Omega_n/\Delta_n) \sin(\Delta_n t/2)$ é responsável pela evolução temporal da inversão atômica, sendo $\Delta_n^2 = \delta^2 + \Omega_n^2$ e $\Omega_n = 2\kappa_{\text{eff}}\sqrt{n+1}$ a frequência de Rabi efetiva. Note que a Eq. (4.5) pode ser obtida para quaisquer estados dos campos na cavidade e externo. Se considerarmos ambos os campos no estado coerente, a inversão atômica coincide com $\Xi(\alpha, \beta; t)$. Essa situação foi investigada por Dutra e colaboradores [19] e estudada no capítulo anterior, no cálculo da probabilidade de excitação $P_e(t) = 1/2[\mathcal{I}(t) + 1]$ na ressonância ($\delta = 0$), onde os autores mostraram que a probabilidade de excitação está conectada com a função característica de Wigner do campo na cavidade, se as condições $\kappa_a \gg \kappa_b$, $\kappa_b t \ll 1$ e $|\beta| \gg (\kappa_a/\kappa_b)\kappa_a t$ (campo externo intenso) são satisfeitas. Por outro lado, se considerarmos os campos na cavidade e externo nos estados térmico e coerente, respectivamente, a inversão atômica é dada por

$$\mathcal{I}_{\rm th}(t) = 1 - \frac{2}{1 + \epsilon_{\rm a}^2 \bar{n}} \exp\left(-\frac{\epsilon_{\rm b}^2 |\beta|^2}{1 + \epsilon_{\rm a}^2 \bar{n}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon_{\rm a}^2 \bar{n}}{1 + \epsilon_{\rm a}^2 \bar{n}}\right)^n L_n \left[-\frac{\epsilon_{\rm b}^2 |\beta|^2}{\epsilon_{\rm a}^2 \bar{n}(1 + \epsilon_{\rm a}^2 \bar{n})}\right] |G_n(t)|^2.$$
(4.6)

Nesta expressão, \bar{n} é o número médio de fótons térmicos no tempo t = 0 e $L_n(z)$ corresponde aos polinômios de Laguerre. Além disso, o parâmetro $\epsilon_{a(b)}$ representa um fator de escala para $\bar{n}(|\beta|)$. É importante mencionar que esses resultados corroboram as investigações numéricas realizadas por Li e Gao [20] para o estado térmico e já estudadas no capítulo 3. Isto nos incentiva a analisar a inversão atômica para os estados coerente par e ímpar.

Vamos considerar as distribuições de Glauber-Sudarshan $P_a^{(e)}(\alpha_a)$ e $P_a^{(o)}(\alpha_a)$ para os estados coerente par e ímpar na expressão da inversão atômica, cujas integrais nos planos complexos α_a e α_b podem ser cal-

culadas sem dificuldades. Em ambas as situações, a inversão atômica pode ser escrita nas formas compactas

$$\mathcal{I}_{e}(t) = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_{n}^{(e)}(\alpha, \beta) |G_{n}(t)|^{2} ,$$

$$\mathcal{I}_{o}(t) = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_{n}^{(o)}(\alpha, \beta) |G_{n}(t)|^{2} ,$$
 (4.7)

 $\operatorname{com} \mathfrak{F}_n^{(\mathrm{e})}(\alpha,\beta) \in \mathfrak{F}_n^{(\mathrm{o})}(\alpha,\beta)$ dadas por

$$\begin{split} \mathfrak{F}_{n}^{(\mathrm{e})}(\alpha,\beta) &= \frac{\exp\left(|\alpha|^{2}\right)}{4\cosh\left(|\alpha|^{2}\right)} \left\{ \exp\left(-\left|\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha+\epsilon_{\mathrm{b}}\beta\right|^{2}\right) \frac{\left|\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha+\epsilon_{\mathrm{b}}\beta\right|^{2n}}{n!} + \exp\left(-\left|\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha-\epsilon_{\mathrm{b}}\beta\right|^{2}\right) \frac{\left|\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha-\epsilon_{\mathrm{b}}\beta\right|^{2n}}{n!} \right. \\ &+ 2\exp\left(-2|\alpha|^{2}\right) \operatorname{Re}\left[\exp\left[\left(\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha+\epsilon_{\mathrm{b}}\beta\right)\left(\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha-\epsilon_{\mathrm{b}}\beta\right)^{*}\right] \frac{\left[-\left(\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha+\epsilon_{\mathrm{b}}\beta\right)\left(\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha-\epsilon_{\mathrm{b}}\beta\right)^{*}\right]^{n}}{n!}\right]\right\}, \\ \mathfrak{F}_{n}^{(\mathrm{o})}(\alpha,\beta) &= \frac{\exp\left(|\alpha|^{2}\right)}{4\sinh\left(|\alpha|^{2}\right)} \left\{ \exp\left(-\left|\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha+\epsilon_{\mathrm{b}}\beta\right|^{2}\right) \frac{\left|\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha+\epsilon_{\mathrm{b}}\beta\right|^{2n}}{n!} + \exp\left(-\left|\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha-\epsilon_{\mathrm{b}}\beta\right|^{2}\right) \frac{\left|\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha-\epsilon_{\mathrm{b}}\beta\right|^{2n}}{n!} \right. \\ &\left. - 2\exp\left(-2|\alpha|^{2}\right) \operatorname{Re}\left[\exp\left[\left(\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha+\epsilon_{\mathrm{b}}\beta\right)\left(\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha-\epsilon_{\mathrm{b}}\beta\right)^{*}\right] \frac{\left[-\left(\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha+\epsilon_{\mathrm{b}}\beta\right)\left(\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha-\epsilon_{\mathrm{b}}\beta\right)^{*}\right]^{n}}{n!}\right]\right\}. \end{split}$$

A Fig. 4.2 mostra os gráficos de $\mathcal{I}_{e}(t)$ versus $\kappa_{eff}t$ quando o sistema átomo-cavidade está ressonante (a,c) $\delta = 0$ e não-ressonante (b,d) $\delta = 6\kappa_{\text{eff}}$, para $\epsilon_{\text{a}} = 3/\sqrt{10}$, $\epsilon_{\text{b}} = 1/\sqrt{10}$ e $|\alpha| = 1$ fixos, com dois diferentes valores de amplitude do campo externo: (a,b) $|\beta| = 2$ e (c,d) $|\beta| = 20$. Uma vez que o átomo está preparado inicialmente no estado excitado, o valor da inversão atômica no tempo t = 0 é igual para ambas as situações. Na Fig. 4.2(a) podemos perceber que $I_e(t)$ tem um comportamento irregular, em que os resurgimentos não estão bem definidos (em particular, os ressurgimentos são considerados como manifestações quânticas do campo eletromagnético dentro da cavidade); enquanto que na Fig. 4.2(c), os colapsos e ressurgimentos aparecem quando o campo externo é intenso. Agora, se analisarmos as Figs. 4.2(b) e (d), nós concluímos que os colapsos e ressurgimentos podem ser controlados pela dessintonia entre os campos na cavidade (externo) e transição atômica (em particular, os ressurgimentos tem uma estrutura regular e pequena amplitude). Similarmente, a Fig. 4.3 mostra os gráficos de $\mathcal{I}_{o}(t)$ versus $\kappa_{\text{eff}}t$ para os mesmos parâmetros da figura anterior, no qual verificamos: (i) o aparecimento de diferentes estruturas de colapsos e ressurgimentos, e (ii) os efeitos dos parâmetros $|\beta|$ e δ sobre a inversão atômica $\mathcal{I}_{o}(t)$ são completamente análogos aos do estado coerente par. Góra e Jedrzejek [52] mostraram que no MJC usual, com o campo da cavidade preparado inicialmente em um estado coerente e com um pequeno número médio de fótons (isto é, $\langle {f n}
angle_{
m c} pprox 2$ num tempo t = 0), a inversão atômica apresenta colapsos e ressurgimentos distintos desde que o átomo e o campo estejam próximos da ressonância; e a longos tempos, o comportamento do modelo apresenta superestruturas como os super-ressurgimentos. Desta maneira, as Figs. 4.2(b) e 4.3(b) apresentam num curto período comportamentos análogos a essas super-estruturas e esse fato esta associado ao pequeno número



Figura 4.2: Evolução temporal da inversão atômica $\mathcal{I}_{e}(t)$ do átomo inicialmente preparado no estado excitado com os campos na cavidade e externo preparados nos estados coerente par e coerente, respectivamente. Tais figuras correspondem a (a,c) $\delta = 0$ (ressonâcia) e (b,d) $\delta = 6\kappa_{eff}$ (não-ressonante) para $\epsilon_{a} = 3/\sqrt{10}$, $\epsilon_{b} = 1/\sqrt{10}$ e $|\alpha| = 1$ fixo, em que dois valores de amplitude do campo externo foram considerados: (a,b) $|\beta| = 2$ e $|\beta| = 20$

médio de fótons usado para ambos os campos $(\langle \mathbf{n}_{a}(0) \rangle_{e} \approx 0.762 \text{ e } \langle \mathbf{n}_{a}(0) \rangle_{o} \approx 1.313 \text{ com } \langle \mathbf{n}_{a}(0) \rangle_{c} \approx 4 \text{ fixos})$, desde que consideramos uma grande dessintonia se comparada com a constante de acoplamento efetiva (por exemplo, $\delta/2\kappa_{eff} = 3$). Além disso, essas super-estruturas desaparecem se considerarmos $\langle \mathbf{n}_{b}(0) \rangle_{c} \approx$ 400 nas Figs. 4.2(d) e 4.3(d). Resumindo, a amplitude do campo externo e o parâmetro de dessintonia tem grande influência sobre as estruturas de colapsos e ressurgimentos no MJC com um campo externo quântico, e isso nos leva a investigar as propriedades não-clássicas do campo na cavidade através da função de Wigner.



Figura 4.3: Gráficos de $\mathcal{I}_{o}(t)$ versus $\kappa_{\text{eff}}t \in [0, 200]$ para (a,c) $\delta = 0$ (ressonante) e (b,d) $\delta = 6\kappa_{\text{eff}}$ (nãoressonante) para $\epsilon_{a} = 3/\sqrt{10}$, $\epsilon_{b} = 1/\sqrt{10}$ e $|\alpha| = 1$ fixo. Em ambas situações nós consideramos diferentes valores da amplitude do campo externo, isto é, (a,b) $|\beta| = 2$ e (c,d) $|\beta| = 20$.

4.3 Função de Wigner

Em livros recentes da literatura de óptica quântica [35,39], a função de Wigner é geralmente definida em termos de uma função auxiliar (denominada de *função característica de Wigner*) que descreve o ordenamento simétrico dos operadores criação e aniquilação do campo eletromagnético, isto é, $\chi(\xi) \equiv \text{Tr}[\rho \mathbf{D}(\xi)]$ com $\mathbf{D}(\xi) = \exp(\{\xi \mathbf{a}^{\dagger} - \xi^* \mathbf{a}\})$ sendo o operador deslocamento. A conexão entre ambos os operadores é estabelecida através da transformada de Fourier bidimensional como segue (ver sub-seção 2.5.2):

$$W(\gamma) = \int \frac{d^2\xi}{\pi} \exp\left(\gamma\xi^* - \gamma^*\xi\right) \chi(\xi) .$$
(4.8)

Assim, se considerarmos o campo na cavidade no referêncial do MJC com um campo externo quântico, a função característica de Wigner pode ser definida de forma similar a da inversão atômica,

$$\chi(\xi;t) = \iint \frac{d^2 \alpha_{\rm a} d^2 \alpha_{\rm b}}{\pi^2} P_{\rm a}(\alpha_{\rm a}) P_{\rm b}(\alpha_{\rm b}) \widetilde{K}_{\xi}(\alpha_{\rm a},\alpha_{\rm b};t) , \qquad (4.9)$$



Figura 4.4: Gráficos de $W_{\rm a}^{(\rm e)}(\gamma;t)$ versus $p \in [-7,7]$ e $q \in [-10,4]$ para o sistema átomo-cavidade com dois valores diferentes de dessintonia: (a,b) $\delta = 0$ (ressonante) e (c,d) $\delta = 10\kappa_{\rm eff}$ (não-ressonante), com os parâmetros $|\alpha| = 1$ ($\langle \mathbf{n}_{\rm a} \rangle_{\rm e} \approx 0.762$) e $\kappa_{\rm eff}t = 100$ fixos na presente simulação. Em ambas as situações, a condição $\kappa_{\rm a(b)} = \kappa$ foi estabelecida e os valores da amplitude do campo externo (a,c) $|\beta| = 2$ ($\langle \mathbf{n}_{\rm b} \rangle_{\rm c} = 4$) e (b,d) $|\beta| = 5$ ($\langle \mathbf{n}_{\rm b} \rangle_{\rm c} = 25$) considerados.

 $\operatorname{com} \widetilde{\mathrm{K}}_{\xi}(\alpha_{\mathrm{a}}, \alpha_{\mathrm{b}}; t)$ dado por

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{a}},\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{b}};t) = \langle \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{a}},\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{b}} | \mathbf{U}_{11}^{\dagger}(t) \mathbf{D}_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{U}_{11}(t) | \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{a}},\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{b}} \rangle + \langle \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{a}},\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{b}} | \mathbf{U}_{21}^{\dagger}(t) \mathbf{D}_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{U}_{21}(t) | \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{a}},\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{b}} \rangle .$$

Aqui, o operador deslocamento $\mathbf{D}_{a}(\xi)$ está associado ao campo na cavidade. Agora, substituindo $\chi(\xi; t)$ na Eq. (4.8), a expressão para a função de Wigner é prontamente obtida,

$$W_{\rm a}(\gamma;t) = \iint \frac{d^2 \alpha_{\rm a} d^2 \alpha_{\rm b}}{\pi^2} P_{\rm a}(\alpha_{\rm a}) P_{\rm b}(\alpha_{\rm b}) \, \mathcal{K}_{\gamma}(\alpha_{\rm a},\alpha_{\rm b};t) , \qquad (4.10)$$

no qual o índice γ corresponde a representação no espaço de fase complexo e

$$K_{\gamma}(\alpha_{a}, \alpha_{b}; t) = \int \frac{d^{2}\xi}{\pi} \exp\left(\gamma\xi^{*} - \gamma^{*}\xi\right) \widetilde{K}_{\xi}(\alpha_{a}, \alpha_{b}; t) .$$
(4.11)

As funções $\tilde{K}_{\xi}(\alpha_{a}, \alpha_{b}; t)$ e $K_{\gamma}(\alpha_{a}, \alpha_{b}; t)$ foram obtidas com detalhes no apêndice C. Em particular, quando t = 0, a função $K_{\gamma}(\alpha_{a}, \alpha_{b}; 0) = 2 \exp(-2|\gamma - \alpha_{a}|^{2})$ não depende das variáveis associadas ao campo externo e isso nos leva a escrever a função de Wigner inicial como

$$W_{\mathrm{a}}(\gamma;0) = 2 \int rac{d^2 lpha_{\mathrm{a}}}{\pi} \exp(-2|\gamma-lpha_{\mathrm{a}}|^2) P_{\mathrm{a}}(lpha_{\mathrm{a}}) \; .$$

Essa expressão representa um processo de suavização gaussiana do integrando $P_a(\alpha_a)$, tal que $W_a(\gamma; 0)$ é uma função bem definida no espaço de fase caracterizado pelas variáveis $p = \sqrt{2} \operatorname{Im}(\gamma)$ e $q = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\gamma)$. Para t > 0, a função $K_{\gamma}(\alpha_a, \alpha_b; t)$ é responsável pelo emaranhamento entre os campos externo e na cavidade (aqui representados pelas distribuições de quase-probabilidade de Glauber-Sudarshan $P_a(\alpha_a)$ e $P_b(\alpha_b)$, respectivamente), visto que as variáveis complexas α_a e α_b estão completamente correlacionadas. Além disso, é importante mencionar que $\chi(\xi; t)$ e $W_a(\gamma; t)$ podem ser obtidas para quaisquer estados dos campos na cavidade e externo (condições similares foram estabelecidas para a inversão atômica) sem restrições sobre os tempos de interação, e as expressões obtidas analiticamente com esse procedimento generalizam os resultados previamente discutidos na literatura [14,16-18].

Vamos agora considerar as distribuições de quasi-probabilidade de Glauber-Sudarshan para os estados coerente par e ímpar na Eq. (4.10). Depois de integrações nos planos complexos α_a e α_b , obtem-se

$$W_{\rm a}^{\rm (e)}(\gamma;t) = \frac{\exp(|\alpha|^2)}{4\cosh(|\alpha|^2)} \left[K_{\gamma}(\alpha,\beta;t) + K_{\gamma}(-\alpha,\beta;t) + \exp(-2|\alpha|^2) \mathbb{K}_{\gamma}(\alpha,\beta;t) \right]$$
(4.12)

e

$$W_{\rm a}^{\rm (o)}(\gamma;t) = \frac{\exp(|\alpha|^2)}{4\sinh(|\alpha|^2)} \left[\mathrm{K}_{\gamma}(\alpha,\beta;t) + \mathrm{K}_{\gamma}(-\alpha,\beta;t) - \exp(-2|\alpha|^2) \mathbb{K}_{\gamma}(\alpha,\beta;t) \right] , \qquad (4.13)$$

no qual

$$\mathbb{K}_{\gamma}(\alpha,\beta;t) = 2\exp(|\alpha|^2)\cosh\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha_{\rm a}} - \alpha^*\frac{\partial}{\partial\alpha_{\rm a}^*}\right)\left[\exp(|\alpha_{\rm a}|^2)\mathbb{K}_{\gamma}(\alpha_{\rm a},\beta;t)\right]\Big|_{\alpha_{\rm a}=0} .$$
(4.14)

Note que no tempo t = 0, a função $\exp(-2|\alpha|^2)\mathbb{K}_{\gamma}(\alpha, \beta; 0) = 4\exp(-2|\gamma|^2)\cos[4\operatorname{Im}(\gamma\alpha^*)]$ permite recuperar expressões conhecidas da literatura [36]:

$$W_{a}^{(e)}(\gamma;0) = \frac{\exp(|\alpha|^{2})}{\cosh(|\alpha|^{2})} \exp(-2|\gamma|^{2}) \left\{ \exp(-2|\alpha|^{2}) \cosh[4\operatorname{Re}(\gamma\alpha^{*})] + \cos[4\operatorname{Im}(\gamma\alpha^{*})] \right\}$$

e

$$W_{\rm a}^{\rm (o)}(\gamma;0) = \frac{\exp(|\alpha|^2)}{\sinh(|\alpha|^2)} \exp(-2|\gamma|^2) \left\{ \exp(-2|\alpha|^2) \cosh[4{\rm Re}(\gamma\alpha^*)] - \cos[4{\rm Im}(\gamma\alpha^*)] \right\}$$

As figuras 4.3 e 4.4 mostram os gráficos tridimensionais de $W_{a}^{(e)}(\gamma;t)$ e $W_{a}^{(o)}(\gamma;t)$ versus $p = \sqrt{2} \operatorname{Im}(\gamma)$ e $q = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\gamma)$, respectivamente, para o sistema átomo-cavidade ressonante (a,b) $\delta = 0$ e não-ressonante (c,d)



Figura 4.5: Gráfico da função de Wigner $W_{\rm a}^{(\rm o)}(\gamma;t)$ para o mesmo conjunto de parâmetros estabelecidos na figura anterior, com $|\alpha| = 1$ ($\langle n_{\rm a} \rangle_{\rm o} \approx 1.313$) e $\kappa_{\rm eff}t = 100$ fixos. Note que o emaranhamento é máximo quando $\delta = 0$ (regime ressonante), e mínimo para $\delta = 10\kappa_{\rm eff}$ (regime não-ressonante).

 $\delta = 10\kappa_{\text{eff}}$. Em ambas as simulações nós consideramos $|\alpha| = 1$ e duas diferentes amplitudes do campo externo: (a,c) $|\beta| = 2$ e (b,d) $|\beta| = 5$. Além disso, também fixamos o parâmetro $\kappa_{\text{eff}} t = 100$ permitindo assim obter uma visão parcial do emaranhamento no sistema composto em estudo. Uma primeira análise dessas figuras mostra, através da função de Wigner, que o emaranhamento é sensível as variações dos parâmetros experimentais $|\beta|$ e δ (esse fato corrobora os resultados anteriormente obtidos para a inversão atômica); sendo a dessintonia responsável pelo grau de emaranhamento entre as componentes envolvidas no sistema, pois ambos os campos estão em ressonância. Desta maneira, embora as Figs. 4.3(c)-(d) and 4.4(c)-(d) tenham estruturas similares, existem diferenças sutis entre elas: $W_a^{(o)}(\gamma; t)$ assume valores negativos devido a

estatística sub-poissoniana inicial do campo na cavidade; enquanto $W_{a}^{(e)}(\gamma;t)$ é extritamente positiva, pois o estado coerente par tem estatística super-poissoniana para qualquer valor inicial de $\langle \mathbf{n}_{a} \rangle_{e}$ (ver Ref. [36] para mais detalhes). Já o aumento de $|\beta|$ nas Figs. 4.3(b,d) e 4.4(b,d) mostra um efeito interessante nas funções de Wigner: o padrão de interferência entre os estados dos campos externo e cavidade se torna mais pronunciado, e esse efeito modifica as formas de $W_{a}^{(e)}(\gamma;t)$ e $W_{a}^{(o)}(\gamma;t)$. Uma analise similar pode ser aplicada se considerarmos ambos os campos no estado coerente (ver apêndice C).

Para finalizar essa seção, determinaremos as funções distribuição de probabilidades marginais $|\psi_{a}(q;t)|^{2}$ e $|\varphi_{a}(p;t)|^{2}$ através da integração direta da Eq. (4.10) sobre as variáveis p ou q, isto é,

$$|\psi_{\mathbf{a}}(q;t)|^{2} = \iint \frac{d^{2}\alpha_{\mathbf{a}}d^{2}\alpha_{\mathbf{b}}}{\pi^{2}} P_{\mathbf{a}}(\alpha_{\mathbf{a}})P_{\mathbf{b}}(\alpha_{\mathbf{b}}) \mathbf{U}_{q}(\alpha_{\mathbf{a}},\alpha_{\mathbf{b}};t) , \qquad (4.15)$$

$$|\varphi_{\mathbf{a}}(p;t)|^{2} = \iint \frac{d^{2}\alpha_{\mathbf{a}}d^{2}\alpha_{\mathbf{b}}}{\pi^{2}} P_{\mathbf{a}}(\alpha_{\mathbf{a}})P_{\mathbf{b}}(\alpha_{\mathbf{b}}) \operatorname{V}_{p}(\alpha_{\mathbf{a}},\alpha_{\mathbf{b}};t) , \qquad (4.16)$$

com

$$\mathbf{U}_{q}(\alpha_{\mathbf{a}},\alpha_{\mathbf{b}};t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{K}_{\gamma}(\alpha_{\mathbf{a}},\alpha_{\mathbf{b}};t) \qquad \mathbf{e} \qquad \mathbf{V}_{p}(\alpha_{\mathbf{a}},\alpha_{\mathbf{b}};t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{K}_{\gamma}(\alpha_{\mathbf{a}},\alpha_{\mathbf{b}};t)$$

Para tanto, vamos introduzir inicialmente a função complexa

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mu}^{(m,m')}(\alpha_{\rm a},\alpha_{\rm b}) \, &= \, \sum_{k=0}^{\{m,m'\}} (2k)!! \, L_{k}^{(m-k)}(0) \, L_{k}^{(m'-k)}(0) \left[\frac{\epsilon_{\rm a}^{3} \alpha_{\rm a} + \epsilon_{\rm b}^{3} \alpha_{\rm b}}{\epsilon_{\rm a} \epsilon_{\rm b} (\epsilon_{\rm b} \alpha_{\rm a} + \epsilon_{\rm a} \alpha_{\rm b})} \right]^{k} \\ &\times H_{m-k} \left(\mu - \frac{\nu_{\rm a} + \nu_{\rm b}^{*}}{\sqrt{2}} \right) H_{m'-k} \left(\mu - \frac{\nu_{\rm a} + \nu_{\rm b}^{*}}{\sqrt{2}} \right) \,, \end{aligned}$$

no qual $H_n(z)$ é o polinômio de Hermite, $\nu_{a(b)} = \epsilon_{a(b)} (\epsilon_{a(b)} \alpha_a - \epsilon_{b(a)} \alpha_b)$, e $\{m, m'\}$ denota o menor número inteiro entre m e m'. Além disso, nós definimos as funções auxiliares

$$Y_{\mu}^{(m,m')}(\alpha_{a},\alpha_{b};t) = \mathcal{H}_{\mu}^{(m,m')}(\alpha_{a},\alpha_{b}) F_{m}(t)F_{m'}^{*}(t) + \frac{\epsilon_{a}\epsilon_{b}}{2} \frac{\epsilon_{b}\alpha_{a} + \epsilon_{a}\alpha_{b}}{\epsilon_{a}\alpha_{a} + \epsilon_{b}\alpha_{b}} \mathcal{H}_{\mu}^{(m+1,m'+1)}(\alpha_{a},\alpha_{b}) \frac{G_{m}(t)G_{m'}^{*}(t)}{\sqrt{(m+1)(m'+1)}}$$
(4.17)

e

$$\mathcal{A}_{\mu}^{(m,m')}(\alpha_{\mathrm{a}},\alpha_{\mathrm{b}}) = \sqrt{2} \exp\left[-\left(\mu - \frac{\nu_{\mathrm{a}} + \nu_{\mathrm{b}}^{*}}{\sqrt{2}}\right)^{2} - \left|\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha_{\mathrm{a}} + \epsilon_{\mathrm{b}}\alpha_{\mathrm{b}}\right|^{2}\right] \times \frac{\left[\sqrt{2}\epsilon_{\mathrm{b}}\left(\epsilon_{\mathrm{b}}\alpha_{\mathrm{a}} + \epsilon_{\mathrm{a}}\alpha_{\mathrm{b}}\right)\right]^{m}\left[\sqrt{2}\epsilon_{\mathrm{a}}\left(\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha_{\mathrm{a}} + \epsilon_{\mathrm{b}}\alpha_{\mathrm{b}}\right)^{*}\right]^{m'}}{(2m)!!(2m')!!}, \qquad (4.18)$$

as quais permitem expressar os integrandos $U_q(\alpha_a, \alpha_b; t) \in V_p(\alpha_a, \alpha_b; t)$ nas formas compactas

$$U_q(\alpha_a, \alpha_b; t) = \sum_{m,m'=0}^{\infty} \mathcal{A}_q^{(m,m')}(\alpha_a, \alpha_b) Y_q^{(m,m')}(\alpha_a, \alpha_b; t) , \qquad (4.19)$$

$$V_{p}(\alpha_{a}, \alpha_{b}; t) = \sum_{m,m'=0}^{\infty} \mathcal{A}_{p}^{(m,m')}(-i\alpha_{a}, -i\alpha_{b}) Y_{p}^{(m,m')}(-i\alpha_{a}, -i\alpha_{b}; t) .$$
(4.20)

Conseqüentemente, a conexão entre as Eqs. (4.19) e (4.20) pode ser prontamente estabelecida através das relações matemáticas $U_q(\alpha_a, \alpha_b; t) = V_q(i\alpha_a, i\alpha_b; t) e V_p(\alpha_a, \alpha_b; t) = U_p(-i\alpha_a, -i\alpha_b; t)$.

Em analogia com a função de Wigner, as funções distribuição de probabilidades marginais não dependem do campo externo no tempo t = 0. Nesse caso, as expressões se reduzem a

$$ert \psi_{a}(q;0) ert^{2} = \sqrt{2} \int \frac{d^{2} lpha_{a}}{\pi} \exp\{-[q - \sqrt{2} \operatorname{Re}(lpha_{a})]^{2}\} P_{a}(lpha_{a}) ,$$

 $ert \varphi_{a}(p;0) ert^{2} = \sqrt{2} \int \frac{d^{2} lpha_{a}}{\pi} \exp\{-[p - \sqrt{2} \operatorname{Im}(lpha_{a})]^{2}\} P_{a}(lpha_{a}) .$

Agora, ao considerarmos ambos os campos externos e cavidade no estado coerente, obteremos $|\psi_{a}(q;t)|^{2} = U_{q}(\alpha,\beta;t)$ e $|\varphi_{a}(p;t)|^{2} = V_{p}(\alpha,\beta;t)$. Esse exemplo, em particular, mostra que as distribuições marginais representam uma importante ferramenta para o estudo qualitativo de emaranhamento, uma vez que as variáveis α e β estão completamente correlacionadas.

4.4 Conclusões

Neste capítulo aplicamos a fórmula de decomposição para álgebra de Lie su(2) no modelo de Jaynes-Cummings com um campo externo quântico para calcular as expressões exatas da inversão atômica e da função de Wigner na situação em que o átomo está inicialmente no estado excitado. Adotando a representação diagonal dos estados coerentes, nós mostramos que essas expressões podem ser escritas na forma integral, com seus integrandos apresentando um termo comum que descreve o produto das funções de quasiprobabilidade de Glauber-Sudarshan para cada campo e um kernel responsável pelo emaranhamento. É importante mencionar que o procedimento matemático desenvolvido aqui não apresenta nenhuma restrição sobre os estados dos campos eletromagnéticos externo e na cavidade. Para ilustrar esses resultados, fixamos o campo externo no estado coerente e assumimos duas diferentes possibilidades para o campo na cavidade: os estados coerentes par e ímpar. Dessa maneira, nós verificamos que a amplitude do campo externo e o parâmetro de dessintonia (i) influenciam fortemente as estruturas de colapsos e ressurgimentos da inversão atômica, (ii) modifica a forma de $W_{\rm a}(\gamma;t)$ pois o padrão de interferência entre os estados do campo na cavidade se tornam mais evidentes através da função de Wigner. Além disso, o formalismo empregado para o cáculo da inversão atômica e da função de Wigner possibilita a investigação de sistemas físicos similares (por exemplo, consultar referências [28, 29]); ou no estudo de sistemas dissipativos compostos, onde o efeito de decoerência tem um papel central no processamento de informação quântica. Por fim, esse capítulo representa uma contribuição original para o estudo de engenharia de estados emaranhados com ênfase em computação quântica e tópicos relacionados.

Capítulo 5

Considerações finais

Nesta dissertação realizamos uma breve revisão de conceitos fundamentais de óptica quântica e dos resultados existentes sobre o MJC com um campo externo clássico. Para isso, obtivemos as expressões analíticas (inversão atômica, número médio de fótons e variância das quadraturas) para esse sistema no caso do campo intracavidade no estado térmico, que nos levaram a recuperar resultados numéricos conhecidos [19].

Como resultado principal desse trabalho, no capítulo 4, observamos a validade do procedimento matemático adotado, que possibilitou a obtenção de soluções analíticas na forma integral (para a inversão atômica e função de Wigner), com seus integrandos apresentando um kernel responsável pela correlação e um termo comum descrevendo o produto das distribuições de quasi-probabilidade de Glauber-Sudarshan para cada campo. Este procedimento torna possível a utilização de quaisquer campos externo e na cavidade. Para ilustrar nossos resultados, utilizamos a situação em que o átomo está inicialmente no estado excitado, o campo externo no estado coerente e o campo intracavidade nos estados coerentes par e ímpar. Tais resultados nos levaram a verificar a influência da amplitude do campo externo e do parâmetro de dessintonia sobre os efeitos não-clássicos (ressurgimentos e emaranhamento), visíveis nos gráficos da inversão atômica e função de Wigner.

Pretendemos, em complemento a esse trabalho, realizar o cálculo: dos momentos associados ao operador número de fótons dos campos externo e intracavidade; do parâmetro Q de Mandel, para verificar como a estatística do campo na cavidade é modificada pela amplitude do campo externo e parâmetro de dessintonia, além do estudo da distribuição do número de fótons do campo na cavidade via definição de entropia de Wehrl.

A título de pesquisa futura, pretendemos incluir perdas na cavidade, para assim entender como o processo de decoerência afeta o emaranhamento no sistema em estudo, além de buscar possíveis soluções analíticas que permitam uma investigação completa dos efeitos decoerência versus emaranhamento.

Apêndice A

Alguns valores médios para o MJC com um campo externo clássico

O valor médio de um operador é definido como

$$\langle \mathbf{O} \rangle_t = \operatorname{Tr}[\boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{O}],$$
 (A.1)

onde, no nosso problema, o operador densidade $\rho(t)$ a ser utilizado é dado pela Eq. (3.74). Desta maneira, considerando o campo na cavidade no estado coerente, obtemos após alguns cálculos os seguintes resultados:

$$\langle \mathbf{a} \rangle_{t} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(\gamma) c_{n}^{*}(\gamma) \mathfrak{T}_{n,n+1}(t) ,$$

$$\langle \mathbf{n} \rangle_{t} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_{n}(\gamma) + \sum_{n=0}^{\infty} P_{n}(\gamma) |G_{n}(t)|^{2} ,$$

$$\langle \mathbf{a}^{2} \rangle_{t} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(\gamma) c_{n}^{*}(\gamma) \mathfrak{S}_{n,m}(t) ,$$

$$(A.2)$$

em que as funções $\mathfrak{T}_{n,m}(t)$
e $\mathfrak{S}_{n,m}(t)$ são definidas por

$$\mathfrak{T}_{n,m}(t) = \sqrt{n+1} F_m(t) F_n^*(t) + \sqrt{n+2} G_m(t) G_n^*(t), \tag{A.3}$$

$$\mathfrak{S}_{n,m}(t) = \sqrt{(n+1)(n+2)} F_{n+2}(t) F_n^*(t) + \sqrt{(n+2)(n+3)} G_{n+2}(t) G_n^*(t) .$$
(A.4)
Utilizando os resultados acima, podemos calcular os valores médios dos operadores de quadratura

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}_{1} \rangle_{t} &= \frac{1}{2} \left[\langle \mathbf{a} \rangle_{t} + \langle \mathbf{a}^{\dagger} \rangle_{t} \right] - \operatorname{Re}(\beta) , \\ \langle \mathbf{X}_{2} \rangle_{t} &= \frac{1}{2i} \left[\langle \mathbf{a} \rangle_{t} - \langle \mathbf{a}^{\dagger} \rangle_{t} \right] - \operatorname{Im}(\beta) , \\ \langle \mathbf{X}_{1}^{2} \rangle_{t} &= \frac{1}{4} \langle \mathbf{a}^{\dagger 2} \rangle_{t} + \frac{1}{4} \langle \mathbf{a}^{2} \rangle_{t} + \frac{1}{2} \langle \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{a} \rangle_{t} - \operatorname{Re}(\beta) \left[\langle \mathbf{a} \rangle_{t} + \langle \mathbf{a}^{\dagger} \rangle_{t} \right] + \left[\operatorname{Re}(\beta) \right]^{2} + \frac{1}{4} , \\ \langle \mathbf{X}_{2}^{2} \rangle_{t} &= -\frac{1}{4} \langle \mathbf{a}^{\dagger 2} \rangle_{t} - \frac{1}{4} \langle \mathbf{a}^{2} \rangle_{t} + \frac{1}{2} \langle \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{a} \rangle_{t} + \operatorname{iRe}(\beta) \left[\langle \mathbf{a} \rangle_{t} - \langle \mathbf{a}^{\dagger} \rangle_{t} \right] + \left[\operatorname{Im}(\beta) \right]^{2} + \frac{1}{4} , \end{aligned}$$
(A.5)

e, consequentemente, suas respectivas variâncias. Agora, vamos considerar um campo térmico na cavidade para o cálculo das variáveis dinâmicas. Desta maneira o valor médio dos operadores será dado por

$$\langle \mathbf{a} \rangle_{t} = e^{-|\beta|^{2}} \beta \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{n!}{m!} |\beta|^{2(m-n)} L_{n}^{(m-n+1)}(|\beta|^{2}) L_{n}^{(m-n)}(|\beta|^{2}) P_{n}(\bar{n}) H_{m}^{(0,1)}(t),$$

$$\langle \mathbf{n} \rangle_{t} = e^{-|\beta|^{2}} |\beta|^{2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{n!}{m!} |\beta|^{2(m-n)} \left[L_{n}^{(m-n+1)}(|\beta|^{2}) \right]^{2} P_{n}(\bar{n}) H_{m}^{(1,1)}(t),$$

$$\langle \mathbf{a}^{2} \rangle_{t} = e^{-|\beta|^{2}} \beta^{2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{n!}{m!} |\beta|^{2(m-n)} L_{n}^{(m-n+2)}(|\beta|^{2}) L_{n}^{(m-n)}(|\beta|^{2}) P_{n}(\bar{n}) H_{m}^{(0,2)}(t),$$

$$(A.6)$$

com os valores médios dos operadores de quadratura adquirindo a seguinte forma:

$$\langle \mathbf{X}_1 \rangle_t = e^{-|\beta|^2} \beta^{*2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{n!}{m!} |\beta|^{2(m-n)} L_n^{(m-n+1)} (|\beta|^2) L_n^{(m-n)} (|\beta|^2) P_n(\bar{n}) \operatorname{Re}\left[e^{i\omega_f t} \beta H_m^{(0,1)}(t) \right], \quad (A.7)$$

$$\langle \mathbf{X}_2 \rangle_t = e^{-|\beta|^2} \beta^{*2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{n!}{m!} |\beta|^{2(m-n)} L_n^{(m-n+1)} (|\beta|^2) L_n^{(m-n)} (|\beta|^2) P_n(\bar{n}) \operatorname{Im} \left[e^{i\omega_f t} \beta H_m^{(0,1)}(t) \right], \quad (A.8)$$

$$\langle \mathbf{X}_{1}^{2} \rangle_{t} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} e^{-|\beta|^{2}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{n!}{m!} |\beta|^{2(m-n)} L_{n}^{(m-n+2)}(|\beta|^{2}) L_{n}^{(m-n)}(|\beta|^{2}) P_{n}(\bar{n}) \operatorname{Re} \left[e^{2i\omega_{f}t} \beta^{2} H_{m}^{(0,2)}(t) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-|\beta|^{2}} |\beta|^{2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{n!}{m!} |\beta|^{2(m-n)} \left[L_{n}^{(m-n+1)}(|\beta|^{2}) \right]^{2} P_{n}(\bar{n}) H_{m}^{(1,1)}(t),$$
 (A.9)

$$\langle \mathbf{X}_{2}^{2} \rangle_{t} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} e^{-|\beta|^{2}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{n!}{m!} |\beta|^{2(m-n)} L_{n}^{(m-n+2)}(|\beta|^{2}) L_{n}^{(m-n)}(|\beta|^{2}) P_{n}(\bar{n}) \operatorname{Re} \left[e^{2i\omega_{f}t} \beta^{2} H_{m}^{(0,2)}(t) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-|\beta|^{2}} |\beta|^{2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{n!}{m!} |\beta|^{2(m-n)} \left[L_{n}^{(m-n+1)}(|\beta|^{2}) \right]^{2} P_{n}(\bar{n}) H_{m}^{(1,1)}(t).$$
 (A.10)

A função $H_m^{(r,s)}(t)$ é definida como

$$H_m^{(r,s)}(t) = F_{m+r}^*(t)F_{m+s}(t) + \sqrt{\frac{(m+r+1)(m+s+1)}{(m+1)^2}}G_{m+r}^*(t)G_{m+s}(t)$$
(A.11)

sendo $L_n^m(z)$ o polinômio de Laguerre generalizado [18] De posse dos valores médios dos operadores de quadratura, podemos calcular suas respectivas variâncias levando em conta ambas as condições iniciais do campo na cavidade.

61

Apêndice B

A Inversão Atômica na forma integral

Com a ajuda da definição estabelecida na seção 4.2 para a inversão atômica e a propriedade de invariância cíclica da operação traço, ficamos com

$$\mathcal{I}(t) = \operatorname{Tr}_{ab} \left\{ \boldsymbol{\rho}_{ab}(0) \left[\mathbf{U}_{11}^{\dagger}(t) \mathbf{U}_{11}(t) - \mathbf{U}_{21}^{\dagger}(t) \mathbf{U}_{21}(t) \right] \right\} = \operatorname{Tr}_{ab} \left\{ \boldsymbol{\rho}_{ab}(0) \left[\cos \left(2t \sqrt{\beta_{\mathrm{A}}} \right) + \frac{\delta^2}{2} \frac{\sin^2 \left(t \sqrt{\beta_{\mathrm{A}}} \right)}{\beta_{\mathrm{A}}} \right] \right\} .$$
(B.1)

Empregando a representação diagonal de $\rho_{ab}(0)$ na base dos estados coerentes na segunda igualdade da Eq. (B.1), a forma integral da inversão atômica pode ser prontamente obtida, isto é,

$$\mathcal{I}(t) = \iint \frac{d^2 \alpha_{\rm a} d^2 \alpha_{\rm b}}{\pi^2} P_{\rm a}(\alpha_{\rm a}) P_{\rm b}(\alpha_{\rm b}) \Xi(\alpha_{\rm a}, \alpha_{\rm b}; t)$$
(B.2)

onde

$$\Xi(\alpha_{\rm a}, \alpha_{\rm b}; t) = \langle \alpha_{\rm a}, \alpha_{\rm b} | \cos(2t\sqrt{\beta_{\rm A}}) | \alpha_{\rm a}, \alpha_{\rm b} \rangle + \frac{\delta^2}{2} \langle \alpha_{\rm a}, \alpha_{\rm b} | \frac{\sin^2(t\sqrt{\beta_{\rm A}})}{\beta_{\rm A}} | \alpha_{\rm a}, \alpha_{\rm b} \rangle .$$
(B.3)

No entanto, a efetividade da forma integral (B.2) está conectada com a determinação da expressão analítica para Eq. (B.3).

Para calcular a função Ξ , primeiramente expandimos os operadores $\cos(2t\sqrt{\beta_A})$ e $\sin^2(t\sqrt{\beta_A})/\beta_A$ em série de potências como segue:

$$\begin{split} \cos(2t\sqrt{\beta_{\rm A}}\,) &= \left. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\sqrt{2}\kappa_{\rm eff}\,t)^{2k} \frac{d^k}{dx^k} \, e^{2x(1+\delta^2/4\kappa_{\rm eff}^2)} \, e^{x\mathbf{D}} \, e^{x\mathbf{S}} \right|_{x=0} \,, \\ \frac{\sin^2(t\sqrt{\beta_{\rm A}}\,)}{\beta_{\rm A}} &= \frac{1}{\kappa_{\rm eff}^2} \, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[2(k+1)]!} (\sqrt{2}\kappa_{\rm eff}\,t)^{2(k+1)} \frac{d^k}{dx^k} \, e^{2x(1+\delta^2/4\kappa_{\rm eff}^2)} \, e^{x\mathbf{D}} \, e^{x\mathbf{S}} \right|_{x=0} \,, \end{split}$$

e

Em seguida nós aplicamos a fórmula de decomposição para o ordenamento antinormal da álgebra de Lie sobre o operador $e^{x\mathbf{D}}$, a qual leva-nos a obter [52-54]

$$e^{x\mathbf{D}} = e^{B_{+}\mathbf{K}_{-}} e^{B_{+}B_{0}\mathbf{K}_{+}} e^{(\ln B_{0})\mathbf{K}_{0}}$$

com

$$B_{+} = \frac{2\epsilon_{a}\epsilon_{b}\sinh x}{\cosh x + (\epsilon_{a}^{2} - \epsilon_{b}^{2})\sinh x} \qquad e \qquad B_{0} = \left[\cosh x + (\epsilon_{a}^{2} - \epsilon_{b}^{2})\sinh x\right]^{2}$$

Após alguns cálculos, a expressão analítica para os valores médios

$$\langle \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} | \cos(2t\sqrt{\beta_{\mathbf{A}}}) | \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} \rangle = \exp\left(-\left|\epsilon_{\mathbf{a}}\alpha_{\mathbf{a}} + \epsilon_{\mathbf{b}}\alpha_{\mathbf{b}}\right|^{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left|\epsilon_{\mathbf{a}}\alpha_{\mathbf{a}} + \epsilon_{\mathbf{b}}\alpha_{\mathbf{b}}\right|^{2n}}{n!} \cos(\Delta_{n}t) \tag{B.4}$$

e

$$\langle \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} | \frac{\sin^2(t\sqrt{\beta_{\mathbf{A}}})}{\beta_{\mathbf{A}}} | \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} \rangle = \exp\left(-\left|\epsilon_{\mathbf{a}}\alpha_{\mathbf{a}} + \epsilon_{\mathbf{b}}\alpha_{\mathbf{b}}\right|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left|\epsilon_{\mathbf{a}}\alpha_{\mathbf{a}} + \epsilon_{\mathbf{b}}\alpha_{\mathbf{b}}\right|^{2n}}{n!} \frac{\sin^2(\Delta_n t/2)}{(\Delta_n/2)^2} \tag{B.5}$$

são determinadas, sendo $\Delta_n^2 = \delta^2 + \Omega_n^2 e \Omega_n = 2\kappa_{\text{eff}}\sqrt{n+1}$ a frequência de Rabi efetiva. Agora, substituindo estes resultados na Eq. (B.3), nós obtemos

$$\Xi(\alpha_{\rm a},\alpha_{\rm b};t) = 1 - 2\exp\left(-\left|\epsilon_{\rm a}\alpha_{\rm a} + \epsilon_{\rm b}\alpha_{\rm b}\right|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|\epsilon_{\rm a}\alpha_{\rm a} + \epsilon_{\rm b}\alpha_{\rm b}\right|^{2n}}{n!}|G_n(t)|^2 , \qquad (B.6)$$

sendo $G_n(t) = -i(\Omega_n/\Delta_n)\sin(\Delta_n t/2)$. Conseqüentemente, com a determinação da expressão analítica para $\Xi(\alpha_a, \alpha_b; t)$, a eficiência da forma integral (B.2) está garantida.

Apêndice C

Detalhes do cálculo da Função de Wigner

Inicialmente, obteremos os valores médios

$$\langle \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} | \mathbf{U}_{11}^{\dagger}(t) \mathbf{D}_{\mathbf{a}}(\xi) \mathbf{U}_{11}(t) | \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} \rangle = \iint \frac{d^2 \beta_{\mathbf{a}} d^2 \beta_{\mathbf{b}}}{\pi^2} \langle \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} | \mathbf{U}_{11}^{\dagger}(t) \mathbf{D}_{\mathbf{a}}(\xi) | \beta_{\mathbf{a}}, \beta_{\mathbf{b}} \rangle \langle \beta_{\mathbf{a}}, \beta_{\mathbf{b}} | \mathbf{U}_{11}(t) | \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} \rangle$$
(C.1)

e

$$\langle \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} | \mathbf{U}_{21}^{\dagger}(t) \mathbf{D}_{\mathbf{a}}(\xi) \mathbf{U}_{21}(t) | \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} \rangle = \iint \frac{d^2 \beta_{\mathbf{a}} d^2 \beta_{\mathbf{b}}}{\pi^2} \langle \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} | \mathbf{U}_{21}^{\dagger}(t) \mathbf{D}_{\mathbf{a}}(\xi) | \beta_{\mathbf{a}}, \beta_{\mathbf{b}} \rangle \langle \beta_{\mathbf{a}}, \beta_{\mathbf{b}} | \mathbf{U}_{21}(t) | \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} \rangle ,$$
(C.2)

por meio de integrações nas variáveis complexas β_a e β_b . Assim, vamos substituir dentro das Eqs. (C.1) e (C.2) os valores médios auxiliares

$$\begin{split} \langle \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} | \mathbf{U}_{11}^{\dagger}(t) \mathbf{D}_{\mathbf{a}}(\xi) | \beta_{\mathbf{a}}, \beta_{\mathbf{b}} \rangle &= \exp\left[\frac{1}{2}\left(\xi \beta_{\mathbf{a}}^{*} - \xi^{*} \beta_{\mathbf{a}}\right)\right] \left(\langle \beta_{\mathbf{a}} + \xi, \beta_{\mathbf{b}} | \mathbf{U}_{11}(t) | \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} \rangle\right)^{*} ,\\ \langle \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} | \mathbf{U}_{21}^{\dagger}(t) \mathbf{D}_{\mathbf{a}}(\xi) | \beta_{\mathbf{a}}, \beta_{\mathbf{b}} \rangle &= \exp\left[\frac{1}{2}\left(\xi \beta_{\mathbf{a}}^{*} - \xi^{*} \beta_{\mathbf{a}}\right)\right] \left(\langle \beta_{\mathbf{a}} + \xi, \beta_{\mathbf{b}} | \mathbf{U}_{21}(t) | \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} \rangle\right)^{*} ,\\ \langle \beta_{\mathbf{a}}, \beta_{\mathbf{b}} | \mathbf{U}_{11}(t) | \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} \rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} F_{m}(t) \Lambda_{m}(\alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}}, \beta_{\mathbf{a}}, \beta_{\mathbf{b}}) ,\\ \langle \beta_{\mathbf{a}}, \beta_{\mathbf{b}} | \mathbf{U}_{21}(t) | \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} \rangle &= \left(\epsilon_{\mathbf{a}}\beta_{\mathbf{a}} + \epsilon_{\mathbf{b}}\beta_{\mathbf{b}}\right)^{*} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{G_{m}(t)}{\sqrt{m+1}} \Lambda_{m}(\alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}}, \beta_{\mathbf{a}}, \beta_{\mathbf{b}}) , \end{split}$$

com

$$\begin{split} \Lambda_m(\alpha_{\rm a}, \alpha_{\rm b}, \beta_{\rm a}, \beta_{\rm b}) &= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(|\alpha_{\rm a}|^2 + |\alpha_{\rm b}|^2 + |\beta_{\rm a}|^2 + |\beta_{\rm b}|^2\right) + \left(\epsilon_{\rm b}\alpha_{\rm a} - \epsilon_{\rm a}\alpha_{\rm b}\right)\left(\epsilon_{\rm b}\beta_{\rm a} - \epsilon_{\rm a}\beta_{\rm b}\right)^*\right] \\ &\times \frac{\left[\left(\epsilon_{\rm a}\alpha_{\rm a} + \epsilon_{\rm b}\alpha_{\rm b}\right)\left(\epsilon_{\rm a}\beta_{\rm a} + \epsilon_{\rm b}\beta_{\rm b}\right)^*\right]^m}{m!} \end{split}$$

e $F_m(t) = \cos(\Delta_m t/2) - i(\delta/\Delta_m)\sin(\Delta_m t/2)$ (a função $G_m(t)$ foi definida previamente no apêndice A). Então, realizando as integrações nas variáveis $\beta_a \in \beta_b$, nós temos

$$\langle \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} | \mathbf{U}_{11}^{\dagger}(t) \mathbf{D}_{\mathbf{a}}(\xi) \mathbf{U}_{11}(t) | \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} \rangle = \sum_{m,m'=0}^{\infty} \Upsilon_{\xi}^{(m,m')}(\alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}}) \mathbf{I}_{\xi}^{(m,m')}(\alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}}; t)$$
(C.3)

e

$$\langle \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} | \mathbf{U}_{21}^{\dagger}(t) \mathbf{D}_{\mathbf{a}}(\xi) \mathbf{U}_{21}(t) | \alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}} \rangle = \sum_{m,m'=0}^{\infty} \Upsilon_{\xi}^{(m,m')}(\alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}}) \mathbf{J}_{\xi}^{(m,m')}(\alpha_{\mathbf{a}}, \alpha_{\mathbf{b}}; t) , \qquad (C.4)$$

com

$$\begin{split} \Upsilon_{\xi}^{(m,m')}(\alpha_{\rm a},\alpha_{\rm b}) &= \exp\left[-\frac{|\xi|^2}{2} - |\epsilon_{\rm a}\alpha_{\rm a} + \epsilon_{\rm b}\alpha_{\rm b}|^2 + \epsilon_{\rm b}\left(\epsilon_{\rm b}\alpha_{\rm a} - \epsilon_{\rm a}\alpha_{\rm b}\right)^* \xi - \epsilon_{\rm a}\left(\epsilon_{\rm a}\alpha_{\rm a} - \epsilon_{\rm b}\alpha_{\rm b}\right)\xi^*\right] \\ &\times \left[\epsilon_{\rm a}\left(\epsilon_{\rm a}\alpha_{\rm a} + \epsilon_{\rm b}\alpha_{\rm b}\right)^*\xi\right]^{m'-m} \frac{|\epsilon_{\rm a}\alpha_{\rm a} + \epsilon_{\rm b}\alpha_{\rm b}|^{2m}}{m'!} ,\\ \mathrm{I}_{\xi}^{(m,m')}(\alpha_{\rm a},\alpha_{\rm b};t) &= L_m^{(m'-m)} \left[\epsilon_{\rm a}\epsilon_{\rm b}\frac{\epsilon_{\rm b}\alpha_{\rm a} + \epsilon_{\rm a}\alpha_{\rm b}}{\epsilon_{\rm a}\alpha_{\rm a} + \epsilon_{\rm b}\alpha_{\rm b}}|\xi|^2\right]F_m(t)F_{m'}^*(t) ,\\ \mathrm{J}_{\xi}^{(m,m')}(\alpha_{\rm a},\alpha_{\rm b};t) &= \sqrt{\frac{m+1}{m'+1}}L_{m+1}^{(m'-m)} \left[\epsilon_{\rm a}\epsilon_{\rm b}\frac{\epsilon_{\rm b}\alpha_{\rm a} + \epsilon_{\rm a}\alpha_{\rm b}}{\epsilon_{\rm a}\alpha_{\rm a} + \epsilon_{\rm b}\alpha_{\rm b}}|\xi|^2\right]G_m(t)G_{m'}^*(t) .\end{split}$$

Consequentemente, a função $\widetilde{K}_{\xi}(\alpha_{a}, \alpha_{b}; t)$ que aparece no integrando de $\chi(\xi; t)$ pode ser determinada como segue:

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{\xi}(\alpha_{\mathbf{a}},\alpha_{\mathbf{b}};t) = \sum_{m,m'=0}^{\infty} \Upsilon_{\xi}^{(m,m')}(\alpha_{\mathbf{a}},\alpha_{\mathbf{b}}) \Gamma_{\xi}^{(m,m')}(\alpha_{\mathbf{a}},\alpha_{\mathbf{b}};t) , \qquad (C.5)$$

sendo $\Gamma_{\xi}^{(m,m')}(\alpha_{\mathbf{a}},\alpha_{\mathbf{b}};t) = \mathbf{I}_{\xi}^{(m,m')}(\alpha_{\mathbf{a}},\alpha_{\mathbf{b}};t) + \mathbf{J}_{\xi}^{(m,m')}(\alpha_{\mathbf{a}},\alpha_{\mathbf{b}};t).$

Um aplicação imediata para esse resultado é o cálculo de K_{γ}($\alpha_{a}, \alpha_{b}; t$), uma vez que ambas as funções estão conectadas por uma transformada de Fourier bidimensional. Agora substituindo (C.5) na Eq. (4.11) e integrando na variável complexa ξ , obtem-se como resultado a expressão analítica

$$\mathbf{K}_{\gamma}(\alpha_{\mathbf{a}},\alpha_{\mathbf{b}};t) = \sum_{m,m'=0}^{\infty} \mathbf{C}_{\gamma}^{(m,m')}(\alpha_{\mathbf{a}},\alpha_{\mathbf{b}}) \mathbf{M}_{\gamma}^{(m,m')}(\alpha_{\mathbf{a}},\alpha_{\mathbf{b}};t) , \qquad (C.6)$$

em que

$$\begin{split} \mathrm{C}_{\gamma}^{(m,m')}(\alpha_{\mathrm{a}},\alpha_{\mathrm{b}}) &= 2\exp\left(-|\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha_{\mathrm{a}}+\epsilon_{\mathrm{b}}\alpha_{\mathrm{b}}|^{2}-2\gamma_{\mathrm{a}}\gamma_{\mathrm{b}}^{*}\right)\left[2\epsilon_{\mathrm{a}}\left(\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha_{\mathrm{a}}+\epsilon_{\mathrm{b}}\alpha_{\mathrm{b}}\right)^{*}\gamma_{\mathrm{a}}\right]^{m'-m} \\ &\times \frac{\left[\left(\epsilon_{\mathrm{a}}^{2}-\epsilon_{\mathrm{b}}^{2}\right)\left(\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha_{\mathrm{a}}-\epsilon_{\mathrm{b}}\alpha_{\mathrm{b}}\right)\left(\epsilon_{\mathrm{a}}\alpha_{\mathrm{a}}+\epsilon_{\mathrm{b}}\alpha_{\mathrm{b}}\right)^{*}\right]^{m}}{m'!} \end{split}$$

e

$$\begin{split} \mathbf{M}_{\gamma}^{(m,m')}(\alpha_{\mathbf{a}},\alpha_{\mathbf{b}};t) \, &= \, L_{m}^{(m'-m)} \left[-\frac{4\epsilon_{\mathbf{a}}\epsilon_{\mathbf{b}}}{\epsilon_{\mathbf{a}}^{2}-\epsilon_{\mathbf{b}}^{2}} \frac{\epsilon_{\mathbf{b}}\alpha_{\mathbf{a}}+\epsilon_{\mathbf{a}}\alpha_{\mathbf{b}}}{\epsilon_{\mathbf{a}}\alpha_{\mathbf{a}}-\epsilon_{\mathbf{b}}\alpha_{\mathbf{b}}} \gamma_{\mathbf{a}}\gamma_{\mathbf{b}}^{*} \right] F_{m}(t) F_{m'}^{*}(t) + \sqrt{\frac{m+1}{m'+1}} \left(\epsilon_{\mathbf{a}}^{2}-\epsilon_{\mathbf{b}}^{2} \right) \frac{\epsilon_{\mathbf{a}}\alpha_{\mathbf{a}}-\epsilon_{\mathbf{b}}\alpha_{\mathbf{b}}}{\epsilon_{\mathbf{a}}\alpha_{\mathbf{a}}-\epsilon_{\mathbf{b}}\alpha_{\mathbf{b}}} \\ &\times L_{m+1}^{(m'-m)} \left[-\frac{4\epsilon_{\mathbf{a}}\epsilon_{\mathbf{b}}}{\epsilon_{\mathbf{a}}^{2}-\epsilon_{\mathbf{b}}^{2}} \frac{\epsilon_{\mathbf{b}}\alpha_{\mathbf{a}}+\epsilon_{\mathbf{a}}\alpha_{\mathbf{b}}}{\epsilon_{\mathbf{a}}\alpha_{\mathbf{a}}-\epsilon_{\mathbf{b}}\alpha_{\mathbf{b}}} \gamma_{\mathbf{a}}\gamma_{\mathbf{b}}^{*} \right] G_{m}(t) G_{m'}^{*}(t) \;, \end{split}$$

com $\gamma_{a(b)} = \gamma - \epsilon_{a(b)} (\epsilon_{a(b)} \alpha_a - \epsilon_{b(a)} \alpha_b)$. Em particular, quando $\kappa_{a(b)} = \kappa$, a expressão para $K_{\gamma}(\alpha_a, \alpha_b; t)$ pode ser escrita na forma simplificada

$$K_{\gamma}(\alpha_{a},\alpha_{b};t) = \sum_{m,m'=0}^{\infty} O_{\gamma}^{(m)}(\alpha_{a},\alpha_{b}) \left[O_{\gamma}^{(m')}(\alpha_{a},\alpha_{b}) \right]^{*} \mathcal{R}_{\gamma}^{(m,m')}(\alpha_{a},\alpha_{b};t) , \qquad (C.7)$$

sendo

$$\begin{split} \mathcal{O}_{\gamma}^{(m)}(\alpha_{\rm a},\alpha_{\rm b}) \, &= \, \sqrt{2} \, \exp\left[-\frac{1}{4} \left(|\alpha_{\rm a}+\alpha_{\rm b}|^2 + |2\gamma - (\alpha_{\rm a}-\alpha_{\rm b})|^2\right)\right] \frac{\left\{(\alpha_{\rm a}+\alpha_{\rm b}) \left[2\gamma - (\alpha_{\rm a}-\alpha_{\rm b})\right]^*\right\}^m}{2^m m!} \,, \\ \mathcal{R}_{\gamma}^{(m,m')}(\alpha_{\rm a},\alpha_{\rm b};t) \, &= \, F_m(t) F_{m'}^*(t) + \frac{1}{2} \left|2\gamma - (\alpha_{\rm a}-\alpha_{\rm b})\right|^2 \frac{G_m(t) G_{m'}^*(t)}{\sqrt{(m+1)(m'+1)}} \,. \end{split}$$

Esta solução é equivalente a considerar que a interação entre os campos externo e na cavidade tem o mesmo peso. Note que a expressão (C.6) representa um passo importante no processo de investigação dos efeitos da amplitude do campo externo e dessintonia sobre as propriedades não-clássicas do campo na cavidade através da função de Wigner.

Por exemplo, quando os campos externo e cavidade são descritos por estados coerentes, a função de Wigner coincide com $K_{\gamma}(\alpha, \beta; t)$ e para t = 0, nós obtemos a função de Wigner $W_{a}^{(c)}(\gamma; 0) = 2 \exp(-2|\gamma - \alpha|^2)$. A figura C.1 mostra o gráfico tridimensional de $W_{a}^{(c)}(\gamma; t)$ versus $p = \sqrt{2} \operatorname{Im}(\gamma)$ e $q = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\gamma)$ considerando o sistema átomo-cavidade ressonante (a,b) $\delta = 0$ e não-ressonante (c,d) $\delta = 10\kappa_{\text{eff}}$ para $|\alpha| = 1$ ($\langle \mathbf{n}_{a} \rangle_{c} = 1$) e $\kappa_{\text{eff}}t = 100$ fixos, com dois diferentes valores da amplitude do campo externo: (a,c) $|\beta| = 2$ ($\langle \mathbf{n}_{b} \rangle_{c} = 4$) e (b,d) $|\beta| = 5$ ($\langle \mathbf{n}_{b} \rangle_{c} = 25$). A condição $\kappa_{a(b)} = \kappa$ foi estabelecida para ambas as situações, e a soma infinita presente em (C.7) foi substituída pela soma finita

$$\mathbf{K}_{\gamma}(\alpha,\beta;t) = \sum_{m=0}^{\ell} \left| \mathbf{O}_{\gamma}^{(m)}(\alpha,\beta) \right|^{2} \mathcal{R}_{\gamma}^{(m,m)}(\alpha,\beta;t) + 2 \operatorname{Re}\left[\sum_{m=0}^{\ell-1} \sum_{m'=m+1}^{\ell} \mathbf{O}_{\gamma}^{(m)}(\alpha,\beta) \left[\mathbf{O}_{\gamma}^{(m')}(\alpha,\beta) \right]^{*} \mathcal{R}_{\gamma}^{(m,m')}(\alpha,\beta;t) \right]$$

onde ℓ é o valor que garante a convergência da expressão (nós fixamos $\ell = 50$ nos cálculos numéricos). Já que a evolução temporal dos sistemas compostos nos leva a conceitos essenciais de emaranhamento [5], as Figs. C1 refletem os efeitos do campo externo sobre as diferentes formas de emaranhamento no sistema em consideração, para valores específicos de $\kappa_{\text{eff}} t$ (emaranhamento máximo ocorre quando $\delta = 0$, e mínimo para $\delta = 10\kappa_{\text{eff}}$). Para uma visão mais global do emaranhamento sobre esse sistema, diferentes valores de $\kappa_{\text{eff}} t$ e ($|\beta|, \delta$) são necessários. Aqui, nós fizemos apenas um estudo parcial desse importante efeito.



Figura C.1: Gráficos de $W_{a}^{(c)}(\gamma;t) = K_{\gamma}(\alpha,\beta;t)$ versus $p \in [-7,7]$ e $q \in [-10,4]$ para o sistema átomocavidade ressonante (a,b) $\delta = 0$ (máximo emaranhamento) e ressonante (c,d) $\delta = 10\kappa_{eff}$ (mínimo emaranhamento), com $|\alpha| = 1$ e $\kappa_{eff}t = 100$ fixos. Nós consideramos dois valores diferentes de amplitude do campo externo: (a,c) $|\beta| = 2$ e (b,d) $|\beta| = 5$, com a condição $\kappa_{a(b)} = \kappa$ estabelecida em ambas as situações.

Bibliografia

- J. A. WHEELER e W. H. ZUREK, *Quantum Theory and Measurement*, Princeton University Press: New Jersey, 1983.
- [2] W. H. ZUREK, Decoherence and the Transition from Quantum to Classical, Phys. Today 44 36, 1991.
 W. H. ZUREK, Decoherence and the Transition from Quantum to Classical-Revisited, Preprint quant-ph/0306072, 2003.
 W. H. ZUREK, Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical Rev. Mod. Phys. 75 715, 2003.
- [3] A. O. CALDEIRA e A. J. LEGGETT, Path Integral Approach to Quantum Brownian Motion, Physica A 121 587, 1983.

A. O. CALDEIRA e A. J. LEGGETT, *Quantum Tunneling in a Dissipative System*, Ann. Phys. (NY) **149** 374, 1983.

A. O. CALDEIRA e A. J. LEGGETT, Influence of Damping on Quantum Interference: An Exactly Soluble *Model* Phys. Rev. A **31** 1059, 1985.

- [4] R. OMNÈS, The Interpretation of Quantum Mechanics, Princeton University Press: New Jersey, 1994.
- [5] J. M. RAIMOND, M. BRUNE e S. HAROCHE, Colloquium: Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity, Rev. Mod. Phys. **73** 565, 2001.
- [6] H. E. BRANDT, Qubits devices and the issue of quantum decoherence, Prog. Quant. Electron. 22 257, 1998.
- [7] S. L. BRAUNSTEIN, Quantum Computing: Where do we want to go tomorrow?, Wiley-VCH: New York, 1999.
 S. L. BRAUNSTEIN e H-K LO, Scalable Quantum Computers: Paving the Way to Realization, Wiley-VCH: New York, 2001.
- [8] M. A. NIELSEN e I. L. CHUANG, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press: New York, 2000.

- [9] D. BOUWMEESTER, A. EKERT e A. ZEILINGER, *The Physics of Quantum Information*, Springer-Verlag: Berlin, 2000.
- [10] C. H. BENNETT, G. BRASSARD, C. CRÉPEAU, R. JOZSA, A. PERES e W. K; WOOTTERS, Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels, Phys. Rev. Lett. 70 1895, 1993.
- [11] C. A. FUCHS, N. GISIN, R. B. GRIFFITHS, C-S NIU e A. PERES, *Optimal eavesdropping in quantum cryptography: I. Information bound and optimal strategy*, Phys. Rev. A **56** 1163, 1997.
- [12] E. T. JAYNES e F. W. CUMMINGS, *Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation Theory with Application to the Beam Maser*, IEEE **51**, 89, 1963.
- [13] B. W. SHORE e P. L. KNIGHT, Topical review: the Jaynes-Cummings model, J. Mod. Opt. 40 1195, 1993.
- [14] M. WILKENS e P. MEYSTRE, Nonlinear atomic homodyne detection: A technique to detect macroscopic superpositions in a micromaser, Phys. Rev. A 43, 3832, 1991.
- [15] P. M. ALSING e D. A. CARDIMONA, Suppression of fluorescence in a lossless cavity, Phys. Rev. A 45 1793, 1992.
 P. ALSING, D-S GUO e H. J. CARMICHAEL, Dynamic Stark effect for the Jaynes-Cummings system, Phys. Rev. A 45 5135, 1992.
- [16] S. M. DUTRA, P. L. KNIGHT e MOYA-CESSA, Discriminating field mixtures from macroscopic superpositions, Phys. Rev. A 48, 3168, 1993.
- [17] S. M. DUTRA e P. L. KNIGHT, Atomic probe for quantum states of the electromagnetic field, Phys. Rev. A 49, 1506, 1994.
- [18] N. N. LEBEDEV, Special functions and their applications, (Dover Publications, New York), 1972.
- [19] S. M. DUTRA, P. L. KNIGHT e MOYA-CESSA, Large-scale fluctuations in the driven Jaynes-Cummings model, Phys. Rev. A 49, 1993, 1994.
- [20] FU-LI LI e SHAO-YAN GAO, Controlling nonclassical properties of the Jaynes-Cummings model by an external coherent field, Phys. Rev. A 62, 043809, 2000.
- [21] B. DEB, G. GANGOPADHYAY e D. S. RAY, Generation of a class of arbitrary two-mode field states in a cavity, Phys. Rev. A 51 2651, 1995.
- [22] Y. T. CHOGH e H. J. CARMICHAEL, Nonlinear oscillator behaviour in the Jaynes-Cummings model, Phys. Rev. A 54 1709, 1996.

Math. Gen. 13 2353, 1980.

- [23] I. V. JYOTSNA e G. S. AGARWAL, The Jaynes-Cummings model with continuous external pumping, Opt. Comm. 99 344, 1993.
- [24] A. JOSHI, Nonlinear dynamical evolution of the driven two-photon Jaynes-Cummings model, Phys. Rev. A 62 043812, 2000.
- [25] H. NHA, Y. T. CHOUGH e K. AN, Single-photon state in a driven Jaynes-Cummings system, Phys. Rev. A 63 010301, 2000.
- [26] M. S. ABDALLA, M. ABDEL-ATY e F. A-S. OBADA, Degree of entanglement for anisotropic coupled oscillators interacting with a single atom, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 4 396, 2002.
- [27] C. C. GERRY, Conditional state generation in a dispersive atom-cavity field interaction with a continuous external pump field, Phys. Rev. A **65** 063801, 2002.
- [28] E. SOLANO, G. S. AGARWAL e H. WALTER, Strong-Driving-Assisted Multipartite Entanglement in Cavity QED, Phys. Rev. Lett. 90 027903, 2003.
- [29] C. WILDFEUER e D. H. SCHILLER, Generation of entangled N-photon states in a two-mode Jaynes-Cummings model, Phys. Rev. A 67 053801, 2003.
- [30] J. P. BARNES e W. S. WARREN, Decoherence and programmable quantum computation, Phys. Rev. A 60 4363, 1999.
- [31] S. J. VAN ENK e H. J. KIMBLE, On the classical character of control fields in quantum information processing, Preprint quant-ph/0107088, 2001.
- [32] J. GEA-BANACLOCHE, Some implications of the quantum nature of laser fields for quantum computation, Phys. Rev. A **65** 022308, 2002.
- [33] W. M. ITANO, Coment on Some implications of the quantum nature of laser fields for quantum computation, Preprint quant-ph/0211165, 2003.
- [34] S. J. VAN ENK e H. J. KIMBLE, Reply to coment on *On the classical character of control fields in quantum information processing, Preprint* quant-ph/0212028, 2003.

[35] R. J. GLAUBER, The Quantum Theory of Optical Coherence, Phys. Rev. 130 2529, 1963.
R. J. GLAUBER, Coherent and Incoherent States of the Radiation Field, Phys. Rev. 131 2766, 1963.
E. C. G. SUDARSHAN, Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams, Phys. Rev. Lett. 10 277, 1963.
P. D. DRUMMOND e C. W. GARDINER, Generalised P-representations in quantum optics, J. Phys. A:

- [36] V. V. DODONOV, I. A. MALKIN e V. I. MAN'KO, Even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator, Physica 72 597, 1974.
 V. BUŽEK, A. VIDIELLA-BARRANCO e P. L. KNIGHT, Superpositions of coherent states: Squeezing and dissipation, Phys. Rev. A 45 6570, 1992.
 C. C. GERRY, Non-classical properties of even and odd coherent states, J. Mod. Opt. 40 1053, 1993.
 C. C. GERRY e P. L. KNIGHT, Quantum superpositions and Schrödinger cat states in quantum optics, Am. J. Phys. 65 964, 1997.
- [37] R. LOUDON, The Quantum Theory of Light, Claredon Press: Oxford, primeira edição, 1973.
- [38] U. LEONHARDT, Measuring the Quantum State of Light, Cambridge University Press, 1997.
- [39] K. GOTTFRIED, Quantum Mechanics Volume 1: Fundamentals, W. A. Benjamin: New York, 1966.
- [40] J. J. SAKURAI, Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley: New York, 1984.
- [41] M. O. SCULLY e M. S. ZUBAIRY, Quantum Optics, Cambridge University Press, 1997.
- [42] H. M. NUSSENZVEIG, Introduction to Quantum Optics, Gordon and Breach Science Publishers Inc., 1973.
- [43] P. MEYSTRE e M. SARGENT III, Elements of Quantum Optics, Springer-Verlag, 1991.
- [44] S. M. BARNETT e P. M. RADMORE, Methods in Theoretical Quantum Optics, Oxford University Press: New York, 1997.
- [45] M. ORSZAG, Quantum Optics, Springer: Berlin, 2000.
- [46] P. A. DIRAC. Proceedings of the Royal Society of Londom, Series A 109, 642 (1925); Series A 114, 243, 1927.
- [47] J. D. JACKSON, Classical Eletrodinamics, Jonh Wiley and Sons: New York, 1962.
- [48] M. A. MARCHIOLLI, Interação da Radiação com a Matéria, Monografia de Doutorado, Universidade Federal de São Carlos, 1995.
- [49] W. H. LOUISELL, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, John Wiley and Sons, 1973.
- [50] I. S. GRADSHTEYN e I. M. RYZHIK, Table of Integrals, Series and Products, (Academic Press, New York), 1972.
- [51] A. RAUSCHENBEUTEL, P. BERTET, S. OSNAGHI, G. NOGUES, M. BRUNE, J. M. RAIMOND e S. HA-ROCHE, Controlled entanglement of two field modes in a cavity quantum electrodynamics experiment, Phys. Rev. A 64 050301(R), 2001.

- [52] P. F. GÓRA e C. JEDRZEJEK, *Revivals and superstructures in the Jaynes-Cummings model with a small number of photons*, Phys. Rev. A **49** 3046, 1994.
- [53] F. T. ARECCHI, E. COURTENS, R. GILMORE e H. THOMAS, *Atomic Coherent States in Quantum Optics*, Phys. Rev. A **6** 2211, 1972.
- [54] WÓDKIEWICZ e J. H. EBERLY, *Coherent states, squeezed fluctuations, and the* SU(2) *and* SU(1, 1) *groups in quantum-optics applications,* J. Opt. Soc. Am. B **2** 458, 1985.
- [55] M. BAN, Decomposition formulas for su(1, 1) and su(2) Lie algebras and their applications in quantum optics, J. Opt. Soc. Am. B 10 1347, 1993.