

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”

**Dinâmica de sistemas quânticos: átomos em cavidades e íons
aprisionados**

Dagoberto da Silva Freitas

ORIENTADOR: *Prof. Dr. José Antônio Roversi*

*Tese apresentada ao Instituto de Física da
Universidade Estadual de Campinas, para ob-
tenção do Título de Doutor em Física*

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. José Antônio Roversi(orientador) - IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi - IF/UFSCAR

Prof. Dr. Cláudio Lenz César - IF/UFRJ

Prof. Dr. Flávio Caldas da Cruz - IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Antônio Vidiella Barranco - IFGW/UNICAMP

CAMPINAS, SP

2002

Agradecimentos

- À minha esposa Sheila e aos meus filhos Eduardo e Helena.
- Ao Prof. José A. Roversi pela orientação, dedicação e amizade.
- Ao Prof. Antônio Vidiella-Barranco pelas discussões científica e a amizade
- Ao estimado amigo Prof. Antônio Gomes Trigueiros, pelas agradáveis horas que suas companhias me proporcionaram.
- A todos os colegas de trabalho, especialmente a Alvaro, Ana Bispo, Caetano, Tércio, Zolaci, Jeferson, Roberto (Zezinho), Nelson e outros que me acompanharam em Campinas.
- Aos amigos de Feira de Santana, que sempre estiveram ao meu lado nessa caminhada.

Este trabalho foi financiado pela CAPES no programa PCIDT.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Interação átomo-campo	8
2.1	Hamiltoniana de interação átomo-campo	8
2.2	A Hamiltoniana Jaynes-Cummings	11
2.2.1	Solução do modelo Jaynes-Cummings	14
2.2.2	Dinâmica atômica, inversão atômica	15
2.2.3	Dinâmica do campo	22
3	Modelo Jaynes-Cummings dependente da intensidade	40
3.1	Modelo	41
3.2	Dinâmica do sistema	42
3.2.1	Dinâmica atômica	44
3.2.2	Dinâmica do campo	52
4	Dinâmica de íons aprisionados	68
4.1	Íons aprisionados	71
4.1.1	Resfriamento laser para o estado fundamental do estado de movimento, Laser cooling	74
4.1.2	Estados quânticos interno e de movimento do íon	75
4.2	Dinâmica de íons em um potencial harmônico	80
4.2.1	Dinâmica no Limite de Lamb-Dicke	82
4.2.2	Geração de estados não clássicos do movimento de íons	87
4.3	Perda de coerência	96
4.3.1	Modelos para perda de coerência	101

5	Um enfoque além do Limite de Lamb-Dicke	130
5.1	Transformação unitária	131
5.2	Dinâmica do sistema	139
5.2.1	Dinâmica atômica	142
5.2.2	Dinâmica do oscilador	145
5.3	Dinâmica Ressonante	147
6	Conclusão	154
6.1	Sumário	154
6.2	Aplicações futuras	158
6.3	Publicações	158
	Apêndice	159
A	Equação mestra para perda de coerência	159

Lista de Figuras

2.1	Inversão atômica de um átomo de dois níveis inicialmente preparado em um estado excitado e o campo em um estado coerente com $\alpha = 5$	20
2.2	Inversão atômica de um átomo de dois níveis inicialmente preparado em uma superposição de estado excitado e fundamental e o campo em uma superposição par de estados coerentes $ \alpha\rangle$ e $ - \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$	20
2.3	Inversão atômica de um átomo de dois níveis inicialmente preparado em um estado excitado e o campo em uma superposição par de estados coerentes $ \alpha\rangle$ e $ - \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$	21
2.4	Inversão atômica de um átomo de dois níveis inicialmente preparado em uma superposição de estado excitado e fundamental e o campo em uma mistura estatística de estados coerentes $ \alpha\rangle$ e $ - \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$	21
2.5	Contornos da função Q do campo na cavidade inicialmente preparado em um estado coerente e o átomo em um estado excitado para tempos diferentes: 1) $t_0 = 0$, 2) $t_1 = t_r^c/2$ e 3) $t_2 = t_r^c$, com $\alpha = 5$	31
2.6	Contornos da função Q do campo na cavidade inicialmente preparado em uma mistura estatística de dois estados coerentes e o átomo em um estado excitado para tempos diferentes: 1) $t_0 = 0$ e 2) $t_1 = t_r^{me}/4$, com $\alpha = 5$. . .	31
2.7	Contornos da função Q do campo na cavidade inicialmente preparado em uma mistura estatística de dois estados coerentes e o átomo em um estado excitado para tempos diferentes: 1) $t_2 = t_r^{me}/2$ e 2) $t_3 = t_r^{me}$, com $\alpha = 5$. .	32
2.8	Contornos da função Q do campo na cavidade inicialmente preparado em uma superposição par de dois estados coerentes e o átomo em um estado excitado para tempos diferentes: 1) $t_0 = 0$ e 2) $t_1 = t_r^{sc}/2$, 3) $t_2 = t_r^{sc}$, com $\alpha = 5$	32
2.9	Pureza do campo para o campo inicialmente preparado em um estado coerente $ \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em um estado excitado	37

2.10	Pureza do campo para o campo inicialmente preparado em uma mistura estatística de estados coerentes $ \alpha\rangle$ e $ - \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em um estado excitado	37
2.11	Pureza do campo para o campo inicialmente preparado em uma superposição par de estados coerentes $ \alpha\rangle$ e $ - \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em um estado excitado	38
2.12	Pureza do campo para o campo inicialmente preparado em uma superposição par de estados coerentes $ \alpha\rangle$ e $ - \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em uma superposição de estado excitado e fundamental	38
2.13	Pureza do campo para o campo inicialmente preparado em um estado coerente $ \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em uma superposição de estado excitado e fundamental	39
3.1	Inversão atômica para o campo inicialmente preparado em uma mistura estatística de estados coerentes $ \alpha\rangle$ e $ - \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em um estado excitado	49
3.2	Inversão atômica para o campo inicialmente preparado em uma superposição par de estados coerentes $ \alpha\rangle$ e $ - \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em um estado excitado	49
3.3	Inversão atômica para o campo inicialmente preparado em uma superposição ímpar de estados coerentes $ \alpha\rangle$ e $ - \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em um estado excitado	50
3.4	Pureza atômica com o campo inicialmente preparado em uma mistura estatística de estados coerentes $ \alpha\rangle$ e $ - \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo preparado inicialmente em um estado puro excitado	52
3.5	Pureza do campo para o campo inicialmente preparado em uma mistura estatística de estados coerentes $ \alpha\rangle$ e $ - \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em um estado excitado	59
3.6	Pureza do campo para o campo inicialmente preparado em um estado coerente $ \alpha\rangle$ e o átomo em um estado excitado	59
3.7	Pureza do campo para o campo inicialmente preparado em uma superposição par de estados coerentes $ \alpha\rangle$ e $ - \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em um estado excitado	60

3.8	Pureza do campo para o campo inicialmente preparado em uma superposição ímpar de estados coerentes $ \alpha\rangle$ e $ \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em um estado excitado	60
3.9	Contornos da função Q do campo na cavidade inicialmente preparado em uma superposição par de estados coerentes e o átomo em um estado excitado para tempos diferentes: 1) $t_0 = 0$, 2) $t_1 = t_r^{sc}/2$, com $\alpha = 5$	65
3.10	Contornos da função Q do campo na cavidade inicialmente preparado em uma superposição par de estados coerentes e o átomo em um estado excitado para tempos diferentes: 1) $t_1 = t_r^{sc}/2$, 2) $t_2 = t_r^{sc}$, com $\alpha = 5$	65
3.11	Contornos da função Q do campo na cavidade inicialmente preparado em uma mistura estatística de dois estados coerentes e o átomo em um estado excitado para tempos diferentes: 1) $t_0 = 0$ e 2) $t_1 = t_r^{me}/4$, com $\alpha = 5$	66
3.12	Contornos da função Q do campo na cavidade inicialmente preparado em uma mistura estatística de dois estados coerentes e o átomo em um estado excitado para tempos diferentes: 1) $t_2 = t_r^{me}/2$ e 2) $t_3 = t_r^{me}$, com $\alpha = 5$	66
3.13	Contornos da função Q do campo na cavidade inicialmente preparado em um estado coerente e o átomo em um estado excitado para tempos diferentes: 1) $t_0 = 0$, 2) $t_1 = t_r^c/2$ e 3) $t_2 = t_r^c$, com $\alpha = 5$	67
4.1	A parte superior da figura mostra um diagrama esquemático para uma armadilha linear tipo paul. A parte inferior mostra a imagem de uma linha de íons aprisionados. Figura retirada do artigo de revisão de D. J. Wineland et al.[74].	74
4.2	A figura mostra a configuração de um átomo de três níveis. O estado $ \uparrow\rangle$ representa o estado excitado e $ \downarrow\rangle$ o estado fundamental. As transições entre os estados excitado e fundamental são conduzidas através do estado $ 3\rangle$ por transições Raman	82
4.3	Níveis de energia para um íon de dois níveis movendo-se em um potencial harmônico. A flecha do centro mostra a transição ‘carrie’, a flecha da direita mostra a transição em um regime de banda resolvida no azul e a da esquerda a transição em um regime de banda resolvida no vermelho. A parte superior da figura mostra o acoplamento dos estados internos do íon com os modos vibracionais deste.	87

4.4	Níveis internos de energia e de movimento de um íon de ${}^9\text{Be}^+$. Os estados $ \uparrow\rangle$ e $ \downarrow\rangle$ são as componentes do estado fundamental ${}^2S_{1/2}$, separadas por uma energia $\bar{\omega}_0$	93
4.5	Distribuição de probabilidade $P_\downarrow$ para um estado de número inicial $ \downarrow, 0\rangle$ conduzido em um regime de banda resolvida no azul. Figura retirada da referência[32]	93
4.6	Distribuição de probabilidade $P_\downarrow$ para um estado comprimido. A linha cheia representa um ajuste dos resultados experimentais (pontos) para uma distribuição de estados comprimidos. O valor ajustado é para um $\beta = 40 \pm 10$, o qual corresponde a um $\bar{n} \approx 7.1$. Figura retirada da referência[32]	94
4.7	Distribuição de probabilidade $P_\downarrow$ para um estado térmico. A linha cheia representa um ajuste dos resultados experimentais (pontos) para uma distribuição de estado térmico. O valor ajustado é para um $\bar{n} = 1.3 \pm 0.1$. Figura retirada da referência[32]	94
4.8	Distribuição de probabilidade $P_\downarrow$ para um estado coerente. A linha cheia representa um ajuste dos resultados experimentais (pontos) para uma distribuição de estados coerentes. O valor ajustado é para um $\bar{n} = 3.1 \pm 0.1$. Figura retirada da referência[32]	95
4.9	Criação de um gato de Schrödinger. Ver texto para detalhes. Figura retirada da referência[33].	95
4.10	$P_\uparrow$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado de número $ n = 0\rangle$ para um tempo t . A linha cheia corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado de número com $ n = 1.0\rangle$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9\text{KHz}$, $\Omega_o = 94\text{KHz}$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].	114

- 4.11 $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado de número $|n = 0\rangle$ para um tempo t . A linha cheia corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado coerente com $|\alpha|^2 = 1.0$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9KHz$, $\Omega_o = 94KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32]. 114
- 4.12 $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado de número $|n = 0\rangle$ para um tempo t . A linha cheia corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 1.0$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9KHz$, $\Omega_o = 94KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32]. 115
- 4.13 $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado coerente $|\alpha|^2 = 3.1$ para um tempo t . A linha cheia corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado coerente com $|\alpha|^2 = 1.0$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9KHz$, $\Omega_o = 94KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32]. 115
- 4.14 $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado coerente $|\alpha|^2 = 3.1$ para um tempo t . A linha cheia corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado de número com $|n = 1\rangle$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9KHz$, $\Omega_o = 94KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32]. 116

- 4.15 $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado coerente $|\alpha|^2 = 3.1$ para um tempo t . A linha cheia corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 1.0$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9KHz$, $\Omega_o = 94KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32]. 116
- 4.16 $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado térmico $\bar{n}_{th} = 1.3$ para um tempo t . A linha cheia corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado coerente com $|\alpha|^2 = 1.0$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9KHz$, $\Omega_o = 94KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0,202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32]. 117
- 4.17 $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado térmico $\bar{n}_{th} = 1.3$ para um tempo t . A linha cheia corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado de número com $|n = 1.0\rangle$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9KHz$, $\Omega_o = 94KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32]. 117
- 4.18 $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado térmico $\bar{n}_{th} = 1.3$ para um tempo t . A linha cheia corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 1.0$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9KHz$, $\Omega_o = 94KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0,202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32]. 118
- 4.19 Variação de $P_{\uparrow}$ para a perda de coerência devido a modos cruzados com o íon inicialmente preparado em um estado de número $|n = 0\rangle$. O modo cruzado foi preparado no estado térmico com $\bar{n}_{th} = 0.5$. O parâmetro γ assumiu os valores 5.95, 11.9, 17.85, 23.8, e 35.7KHz, na ordem de decaimento das curvas. 120

4.20	Varição de $P_{\uparrow}$ para a perda de coerência devido a modos cruzados com o íon inicialmente preparado em um estado de número $ n = 0\rangle$. O parâmetro γ foi fixado no valor $\gamma = 11.9KHz$ e o modo cruzado foi preparado no estado térmico com $\bar{n}_{th} = 0.1, 0.5, 1.0$ na ordem de decaimento das curvas.	120
4.21	Comportamento de $P_{\uparrow}$ para a perda de coerência devido a modos cruzados, com valores alto de γ , $\gamma = 71.4KHz$. O íon foi preparado inicialmente no estado coerente $ \alpha ^2 = 3.1$. O modo cruzado foi preparado no estado térmico com $\bar{n}_{th} = 1.0$	121
4.22	Comportamento de $P_{\uparrow}$ para a perda de coerência devido a modos cruzados, com valores alto de γ , $\gamma = 71.4KHz$. O íon foi preparado inicialmente no estado de número $ n = 0\rangle$. O modo cruzado foi preparado no estado térmico com $\bar{n}_{th} = 1.0$	121
4.23	Comportamento de $P_{\uparrow}$ para a perda de coerência devido a modos cruzados, com valores alto de γ , $\gamma = 71.4KHz$. O íon foi preparado inicialmente no estado térmico $\bar{n}_{th} = 1.3$. O modo cruzado foi preparado no estado térmico com $\bar{n}_{th} = 1.0$	122
4.24	$P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado de número $ 0\rangle$ para um tempo t . A linha sólida corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 0.5$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9KHz$, $\Omega_o = 94KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32]	124
4.25	$P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado de número $ 0\rangle$ para um tempo t . A linha sólida corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 0.5$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 35.7KHz$, $\Omega_o = 94KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32]	125

- 4.26 $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado de número $|0\rangle$ para um tempo t . A linha tracejada corresponde ao resultado experimental. A linha sólida corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 1.0$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9KHz$, $\Omega_o = 94KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32]. 125
- 4.27 $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado coerente $|\alpha|^2 = 3.1$ para um tempo t . A linha sólida corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 0.5$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9KHz$, $\Omega_o = 94KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32]. 126
- 4.28 $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado coerente $|\alpha|^2 = 3.1$ para um tempo t . A linha sólida corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 0.5$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 35.7KHz$, $\Omega_o = 94KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32]. 126
- 4.29 $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado coerente $|\alpha|^2 = 3.1$ para um tempo t . A linha tracejada corresponde ao resultado experimental. A linha sólida corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 1.0$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9KHz$, $\Omega_o = 94KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32]. 127

4.30	$P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado térmico $\bar{n} = 1.3$ para um tempo t . A linha sólida corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 0.5$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9KHz$, $\Omega_o = 94KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].	127
4.31	$P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado térmico $\bar{n} = 1.3$ para um tempo t . A linha sólida corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 0.5$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 35.7KHz$, $\Omega_o = 94KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].	128
4.32	$P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado térmico $\bar{n} = 1.3$ para um tempo t . A linha tracejada corresponde ao resultado experimental. A linha sólida corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 1.0$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9KHz$, $\Omega_o = 94KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].	128
5.1	A figura mostra um esquema de um átomo de três níveis.	132
5.2	Representação da inversão atômica, com $\alpha = (5.0, 0.5)$ e o parâmetro de Lamb-Dicke é $\eta = 0.2$. Para esses parâmetros efeitos de ‘super-revivals’ não ocorrem. Porém, um comportamento ‘caótico’ é observado. O parâmetro τ é o tempo normalizado pelo tempo de ‘revival’.	151
5.3	Representação da inversão atômica, com $\alpha = (5.0, 0.5)$ e o parâmetro de Lamb-Dicke é $\eta = 0.2$. Para esses parâmetros efeitos de ‘super-revivals’ não ocorrem. Aqui a escala do tempo foi ampliada para visualizarmos o comportamento ‘caótico’. O parâmetro τ é o tempo normalizado pelo tempo de ‘revival’.	151

5.4	Representação da inversão atômica, com $\alpha = (0.5, 5.0)$ e o parâmetro de Lamb-Dicke é $\eta = 0.2$. Para esses parâmetros efeitos de ‘super-revivals’ são observados. O parâmetro τ é o tempo normalizado pelo tempo de ‘revival’.	152
5.5	Representação da inversão atômica, com $\alpha = (0.5, 5.0)$ e o parâmetro de Lamb-Dicke é $\eta = 0.2$. Aqui a escala do tempo foi ampliada para visualizarmos melhor a dinâmica. O parâmetro τ é o tempo normalizado pelo tempo de ‘revival’.	152

Resumo

Nessa tese, estudamos a dinâmica de sistemas quânticos: átomos em cavidades e íons aprisionados. Para átomos em cavidades (QED), focalizamos a nossa atenção na dinâmica do campo preparado em uma superposição de estados coerentes e em uma mistura estatística. Nesse sistema, usando o modelo Jaynes-Cummings dependente da intensidade (DNJCM) discutimos alguns aspectos da dinâmica átomo-campo com uma interação tipo Jaynes-Cummings (JCM) e mostramos que para o campo preparado em um estado de ‘gato par’, esse será encontrado ‘próximo’ de um estado de gato ímpar, para o primeiro tempo de ‘revival’ e nesse mesmo tempo o átomo inicialmente no estado excitado estará ‘próximo’ do estado fundamental; esse comportamento é uma consequência da conservação da paridade do sistema total. Um outro aspecto da dinâmica do campo discutido aqui, foi a purificação estado do campo inicialmente preparado em uma mistura estatística para a metade do primeiro tempo de ‘revival’. Como pode ser observado na dinâmica da função Q , não obtemos uma purificação do campo porque ambos os estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|- \alpha\rangle$ não produzem estados puros idênticos para esse tempo e consequentemente não teremos uma purificação. No sistema de íons aprisionados, discutimos a geração de estados não clássicos e os efeitos de perda de coerência nessa geração. Para explicar o efeito de perda de coerência, propuzemos um modelo que leva em consideração o acoplamento entre modos cruzados do movimento do íon. Esse acoplamento pode ser induzido por flutuações no laser e no potencial da armadilha, ocasionando flutuações na frequência de Rabi, levando a uma perda de coerência no modo principal do íon sem relaxação de energia e de acordo com os resultados experimentais. Ainda com íons, apresentamos um novo método para tratar a dinâmica deste sem recorrermos ao limite de Lamb-Dicke. O método é baseado em uma transformação unitária que leva a Hamiltoniana do sistema

em uma Hamiltoniana tipo Jaynes-Cummings (JCM). Focalizamos a nossa atenção na dinâmica atômica e na dinâmica do número médio de excitações do íon. A dinâmica obtida é diferente da dinâmica de quando o sistema é tratado na forma tradicional, ou seja usando o limite de Lamb-Dicke (LDL). Nessa nova dinâmica o sistema se comporta similarmente ao modelo Jaynes-Cummings forçado (DJCM) e com uma escolha apropriada dos parâmetro do íon efeitos de ‘super-revival’ são observados. Além do comportamento dinâmico dada acima, a transformação tem sido utilizada como proposta de implementação de portas quânticas rápidas com velocidade que pode chegar a duas ordem de grandeza maior do que as obtidas por outros métodos. Uma outra aplicação importante tem sido a utilização da transformação para a geração de ‘gatos de Schrödinger’.

Abstract

In this thesis we studied the dynamics of two quantum systems: atoms in a cavity and trapped ions. For atoms in a cavity (QED), we studied the dynamics of field prepared in a superposition of coherent states and a statistical mixture. In this system, using a Intensity-Dependence Jaynes-Cummings model (DNJCM) we discuss some aspects of the dynamics of atom-field in the Jaynes-Cummings model (JCM) interaction, and showed that for a field prepared in a even-coherent state (even Schrödinger cat) it becomes an odd-coherent state (odd Schrödinger cat) at the first revival time, and at the same time the atom initially prepared in the excited state becomes the ground state. This behavior is due not only for energy conservation reason, but also for parity conservation in the atom-field system. We have found that, in DNJCM, a field initially prepared in a statistical mixture evolves toward a pure state. This is a consequence of the intrinsic periodicity of the model. We may ask why this behavior has not been noticed by considering the field evolution in the ordinary JCM. In the trapped ion system, we studied the generation of nonclassical state of motion of a single ion. To explain the decoherence we introduced a phenomenological model that consider mode cross-coupling. This coupling can be due to technical problems: intensity fluctuation of the laser beams and instabilities of the trap leading to decoherence of the principal mode. Still studying ions, we show a new approach to discuss the dynamics of the ion without the Lamb-Dicke Limit (LDL). In this approach we depart from the full ion laser Hamiltonian, and perform a unitary transformation that allows us to obtain a JCM like Hamiltonian. The dynamics obtained is different from the dynamics when the system is treated in the traditional form, in the LDL. In the new dynamics the system is similar to the Driven-Jaynes-Cummings model (DJCM), and we expect the phenomenon of super-revival to be present in the ion system. Besides the dynamics present here, the transformation has been used in a scheme for generation of a

quantum gate and Schrödinger cats.

Capítulo 1

Introdução

Em óptica quântica existe um interesse na preparação de estados não clássicos de sistemas quânticos¹. Em óptica quântica, estados não clássicos são escritos usualmente no contexto de estados não clássicos da luz. Por outro lado, o movimento de íons em um potencial harmônico (armadilha) descreve um sistema quântico constituído de átomos de dois ou mais níveis fortemente acoplados a osciladores harmônicos (o movimento quantizado do íon) em um limite onde as interações coerentes predominam em relação aos processos dissipativos. Existe, uma analogia formal entre o movimento de íons em uma armadilha e a eletrodinâmica quântica de cavidades (QED), assim muitas das questões fundamentais da mecânica quântica podem ser investigadas usando, também, esse aparato físico. Conjuntamente com a possibilidade de estudar e testar a mecânica quântica em nível fundamental, estados não clássicos do movimento de íons também mostram-se de bastante interesse prático em diversas áreas, assim como espectroscopia de precisão[1] e computação quântica.

O estudo de estados não clássicos tem sido concentrado no estudo do oscilador harmônico quantizado e muito provavelmente os estados não clássicos do oscilador harmônico mais discutidos são os estados de Fock (número), estados comprimidos e o

¹Estados não clássicos são estados que não podem ser descritos a partir da física clássica e exibem aspectos interessantes da mecânica quântica

estado coerente². No contexto de óptica quântica, o campo eletromagnético tem sido o meio mais popular para o estudo experimental e teórico de estados não clássicos, os quais são de grande interesse devido as suas potenciais aplicações. Estados comprimidos, por exemplo, são caracterizados pela redução de ruídos quânticos com possibilidade de ser aplicado em comunicação de baixo ruído e medidas de alta sensibilidade.

O caso mais simples e idealizado de preparação de estados não clássicos, pode ser alcançado a partir de várias operações ou transformações até obtermos um modo isolado de um campo eletromagnético. Em uma situação real, essas idealizações são aproximações do campo na cavidade, onde o modo em questão é um dos modos ressonantes da cavidade[3]. As manipulações do modo do campo na cavidade são realizadas através da interação deste com um átomo, ou feixe atômico. Para o caso de um átomo de dois níveis, a interação átomo-campo é descrita teoricamente pelo modelo Jaynes-Cummings (JCM) [4].

A pesar da relativa simplicidade, o JCM possui uma grande riqueza de detalhes, a qual tem sido estudada extensivamente durante as duas últimas décadas, para uma revisão sobre esse modelo e sua vasta aplicabilidade olhar Shore e Knight[5]. O JCM oferece uma variedade de possibilidades para gerar estados não clássicos de modos do campo na cavidade. Estados comprimidos da luz e ‘antibunched’ foram realizados experimentalmente em cavidades[6], e existem várias outras propostas para a realização de outros estados, por exemplo, estados de Fock[7, 8], gatos de Schrödinger[9] e uma superposição geral de estados[10, 11]. Outras propostas para o JCM incluem observações de colapsos e ‘revivals’ da inversão da população atômica[12, 13]; evidências experimentais de colapsos e ‘revivals’ foram observadas por Rempe[14], tomografia quântica [15], testes de desigualdades de Bell[16, 17], teletransportação quântica[18] e computação quântica[19] entre outras.

A grande maioria destes fenômenos dependem de operações em um regime de

²O estado coerente é o estado do campo que mais se aproxima das características de um campo eletromagnético clássico. O estado coerente foi introduzido inicialmente por Schrödinger em 1926. Para uma discussão mais apropriada ver Glauber[2]

acoplamento forte na cavidade, no qual o acoplamento de dipolo entre as transições atômicas e o modo da cavidade excede a taxa associada com o processo de dissipação dentro do sistema, isto é, a emissão espontânea do átomo e a dissipação na cavidade. Embora, um grande esforço experimental tem apontado na direção de maximizar o acoplamento, concentrando-se em um regime de acoplamento forte, os processos dissipativos permanecem como o fator limitador em experimentos em cavidades, tornando a realização experimental de muitas das propostas acima extremamente difíceis. Esse é um problema geralmente enfrentado nos experimentos que pretendem observar fenômenos quânticos coerentes em um nível que pode ser considerado como macroscópico[20, 21].

No mesmo tempo em que a dinâmica quântica em cavidades estava sendo desenvolvida, um campo completamente diferente, o de íons aprisionados e resfriados avançava com a mesma velocidade[22]. Embora o objetivo principal da pesquisa de íons aprisionados tenha sido diferente do de cavidades quânticas, estes dois campos de pesquisa possuem alguns aspectos em comum. Para o sistema compreendido de um íon aprisionado em um potencial harmônico e interagindo com um laser, esse pode ser descrito como um oscilador harmônico quantizado interagindo com os níveis internos de um átomo de dois níveis, onde o oscilador harmônico, agora, corresponde ao movimento do íon. Desta forma o movimento do íon é inteiramente análogo ao modo do campo em uma cavidade, onde o oscilador harmônico associado com o modo do campo é trocado pelo movimento do átomo[23].

Por outro lado, apesar da analogia direta entre íons aprisionados e átomos em cavidades, existem diferenças significativas na dinâmica destes, quando recorremos a condições especiais da dinâmica do íon. Em particular, outros regimes de operações, os quais são inteiramente diferentes e inacessíveis na dinâmica de cavidades (QED) existem e podem levar a dinâmicas interessantes e preparação de estados. Além do mais, a taxa de dissipação em íons aprisionados pode ser satisfatoriamente desprezível em comparação ao

acoplamento átomo-campo [1]. Tipicamente, tempos de aprisionamento podem ser da ordem de centenas de segundos. A emissão espontânea pode ser evitada ou controlada usando transições proibidas ou transições Raman entre estados fundamentais meta-estáveis do íon, levando para tempos de decaimentos da ordem de dezenas de segundos. Esses tempos são extremamente longos comparados com a magnitude do tempo de interação do íon com o laser (da ordem de milissegundos).

Um outro grande atrativo para o estudo da dinâmica de íons resfriado e aprisionado é que esses são candidatos promissores para a implementação de computadores quânticos. I. Cirac e P. Zoller[24] propuseram a aplicação de aprisionamento de íons, o movimento coletivo destes, para a realização de uma porta quântica. Portas quânticas são etapas básicas na implementação de um computador quântico. Investigações experimentais das limitações de construção de estados quânticos de íons é um passo importante na implementação de computadores quânticos.

Um outro ponto importante é que o movimento do íon aprisionado pode ser rotineiramente resfriado para o estado fundamental do potencial harmônico da armadilha[25, 26]. Este aspecto é importante porque para estudarmos fenômenos quânticos é preferível iniciarmos em um estado puro bem definido do sistema. Enquanto, processos dissipativos são necessários para resfriar até atingir o estado fundamental, a separação da evolução dissipativa para uma evolução coerente pode ser obtida usando, auxiliarmente, os níveis internos do íon [27, 28, 29].

Em uma análise teórica de íons aprisionados, a interação do íon com lasers é, em geral, um problema bastante complicado. No entanto, pode ser bastante simplificado sob certas condições que podem ser realizadas em experimentos. Uma dessas condições é conhecida como o limite de Lamb-Dicke (LDL)[30], onde o movimento do íon é restrito a uma região do espaço muito menor que o comprimento de onda do laser que excita as transições. Nesse limite, podemos definir um parâmetro η (parâmetro de Lamb-Dicke) e

expandir as equações de movimento em relação a esse parâmetro. Mantendo unicamente os termos de baixa ordem em η , obtemos uma considerável simplificação da análise da dinâmica do sistema. Um segundo limite consiste no controle da intensidade do laser. Neste limite, pode-se considerar dois regimes; regime de baixa excitação e regime alta excitação. No primeiro regime, a Hamiltoniana descrevendo a evolução do íon é tipicamente reduzida ao modelo Jaynes-Cummings ou similar, por outro lado, no segundo regime a situação é similar ao que se é obtido em interferometria atômica[31].

Nos últimos anos, estados não clássicos do movimento de íons foram gerados. Meekhof et al.[32], usando íons de ${}^9\text{Be}^+$ geraram experimentalmente estados térmicos, de Fock, coerente e estados comprimidos a partir do movimento do íon; Monroe et al.[33], usando íons de ${}^9\text{Be}^+$ também geraram um estado tipo gato de Schrödinger; e Ch. Roos et al.[34], usando íons de Ca^+ , resfriou este para o estado fundamental do movimento do íon com uma probabilidade de aproximadamente 99.9% de ocupação, obtendo uma perda de coerência desprezível em uma escala de tempo requerida para operações em portas quânticas. Esses experimentos demonstram a utilidade de aprisionamento de íons para a criação de estados não clássicos e, a investigação de uma dinâmica do tipo Jaynes-Cummings.

Nessa tese, iremos estudar a dinâmica de sistemas quânticos: átomos em cavidades e íons aprisionados. Na dinâmica de átomos em cavidades estudaremos a dinâmica do sistema, usando o modelo Jaynes-Cummings dependente da intensidade (DNJCM); no caso de íons, apresentaremos um modelo fenomenológico para perda de coerência e uma transformação unitária, transformando a Hamiltoniana deste em uma Hamiltoniana do tipo Jaynes-Cummings, em um limite além do limite de Lamb-Dicke. O trabalho aqui apresentado é basicamente dividido em duas partes: a apresentação de um material de revisão, o qual não consiste de uma contribuição original, como no capítulo 2, mas de grande valor para compreensão dos resultados apresentados nos demais capítulos. Inici-

almente, Capítulo 2, apresentaremos uma discussão rápida do modelo Jaynes-Cummings e a dinâmica dos estados do átomo e do campo. Apresentaremos, também, nesta seção a função de distribuição de quase probabilidade, em particular a função Q , e o conceito de pureza do campo. Com auxílio da função Q e da pureza discutiremos a dinâmica do campo. Este capítulo será, extremamente útil na discussão dos capítulos seguintes. No Capítulo 3, discutiremos a dinâmica do JCM, usando o modelo Jaynes-Cummings dependente da intensidade (DNJCM), introduzido por Buck e Sukumar[35]. Este modelo, apresenta ‘revivals’ periódicos, contrário ao que acontece no JCM usual. Neste modelo certos efeitos que dificilmente podem ser notados no JCM, são facilmente percebidos, por exemplo, uma geração bem definida de um estado tipo gato de Schödinger durante a evolução do campo e a purificação perfeita de um estado do campo inicialmente preparado em uma mistura estatística. Apesar de ser um modelo idealizado, este desvenda vários aspectos na dinâmica do átomo e do campo na cavidade, que seriam difíceis ou quase impossível a partir do modelo Jaynes-Cummings usual[36]. No Capítulo 4, discutiremos a dinâmica de íons aprisionados e a geração de estados não clássicos a partir do movimento destes. Inicialmente faremos uma discussão rápida em relação a aprisionamento, tipos de armadilhas e processos de resfriamentos. Discutiremos os estados internos e de movimento do íon e em seguida discutiremos a dinâmica deste em um potencial harmônico. Apresentaremos um modelo fenomenológico para perda de coerência do íon e compararemos nossos resultados com os resultados obtidos experimentalmente.

Na segunda parte do capítulo apresentaremos uma forma nova de tratar a dinâmica de íons aprisionados, aplicando na Hamiltoniana do sistema uma transformação unitária, transformando-a em uma Hamiltoniana tipo Jaynes-Cummings sem recorrermos ao limite de Lamb-Dicke[37]. Da Hamiltoniana transformada, a dinâmica do sistema torna-se extremamente simples e a dinâmica do sistema original pode ser obtida aplicando uma transformação inversa. Com uma escolha apropriada da frequência de oscilação do íon

‘super-revivals’ podem ser obtidos[37].

Capítulo 2

Interação átomo-campo

Nesse capítulo, discutiremos a interação de campos eletromagnéticos com átomos de dois níveis descrita por uma Hamiltoniana em, uma aproximação de dipolo e de onda girante. Para um campo mono-modo a Hamiltoniana deste reduz-se para uma forma particularmente simples, usualmente conhecida como Hamiltoniana Jaynes-Cummings (JCM)[4]. Por vários motivos, a Hamiltoniana Jaynes-Cummings é a Hamiltoniana mais interessante em óptica quântica. Primeiro, pode ser resolvida exatamente para constantes de acoplamentos arbitrárias e exibe alguns efeitos puramente quânticos, assim como colapsos seguidos de ‘revivals’ na inversão atômica. Segundo, fornece ilustrações simplificadas da emissão espontânea e explica o efeito de vários tipos de estatísticas quânticas do campo em muitos sistemas complicados, tais como um micromaser e um laser. Terceiro, pode ser realizada experimentalmente usando cavidades quânticas de alto Q.

2.1 Hamiltoniana de interação átomo-campo

A interação de um campo de radiação E com um átomo pode ser descrita pela seguinte Hamiltoniana, em uma aproximação de dipolo,

$$H = H_A + H_F - e\vec{r} \cdot \vec{E}, \quad (2.1)$$

onde H_A e H_F são as energias livres do átomo e do campo de radiação, respectivamente e $\vec{r}$ é o vetor posição do átomo. Em uma aproximação de dipolo, o campo é assumido para ser uniforme sobre todo o átomo.

A energia do campo livre pode ser escrita em termos dos operadores de criação $a_\kappa^\dagger$ e aniquilação a_κ do campo na forma

$$H_F = \sum_{\kappa} \hbar\omega_{\kappa} \left(a_{\kappa}^{\dagger} a_{\kappa} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.2)$$

Podemos expressar H_A e $e\vec{r}$ em termos dos operadores de transição atômica

$$\sigma_{i,j} = |i\rangle\langle j|, \quad (2.3)$$

onde $\{|i\rangle\}$ representando um conjunto completo dos auto-estados da energia atômica, com $H_A|i\rangle = E_i|i\rangle$ de forma que

$$H_A = \sum_i E_i |i\rangle\langle i| = \sum_i E_i \sigma_{ii}. \quad (2.4)$$

Semelhantemente

$$e\vec{r} = \sum_{i,j} e |i\rangle\langle i| \vec{r} |j\rangle\langle j| = \sum_{i,j} e \wp_{ij} \sigma_{ij}, \quad (2.5)$$

onde $\wp_{ij} = \langle i|\vec{r}|j\rangle$ é o elemento de matriz de transição de dipolo elétrico. O operador campo elétrico é descrito em uma aproximação de dipolo elétrico em relação a posição atômica. Da quantização do campo elétrico, temos que

$$\vec{E} = \sum_{\kappa} \hat{\epsilon}_{\kappa} E_{\kappa} (a_{\kappa} + a_{\kappa}^{\dagger}), \quad (2.6)$$

onde $E_{\kappa} = (\hbar\omega_{\kappa}/2\epsilon_0 V)^{1/2}$. Aqui, consideramos o campo linearmente polarizado e o vetor unitário de polarização para ser real.

Substituindo as Eqs.(2.2), (2.4) e (2.6) na Eq.(2.1) obtemos para a Hamiltoniana total do sistema

$$H = \sum_{\kappa} \hbar \omega_{\kappa} a_{\kappa}^{\dagger} a_{\kappa} + \sum_i E_i \sigma_{ii} + \hbar \sum_{i,j} \sum_{\kappa} \lambda_{\kappa}^{ij} \sigma_{ij} (a_{\kappa} + a_{\kappa}^{\dagger}), \quad (2.7)$$

onde

$$\lambda_{\kappa}^{ij} = -\frac{\wp_{ij} \cdot \hat{\epsilon}_{\kappa} E_{\kappa}}{\hbar}. \quad (2.8)$$

Na Eq.(2.7) omitimos a energia de ponto zero no primeiro termo. Por simplicidade, assumiremos $\wp_{ij}$ para ser real.

Para o caso de um átomo de dois níveis, com $\wp_{\uparrow\downarrow} = \wp_{\downarrow\uparrow}$, escrevemos

$$\lambda_{\kappa} = \lambda_{\kappa}^{\uparrow\downarrow} = \lambda_{\kappa}^{\downarrow\uparrow}. \quad (2.9)$$

Da Hamiltoniana do sistema, Eq.(2.7), obtemos a Hamiltoniana na forma seguinte

$$H = \sum_{\kappa} \hbar \omega_{\kappa} a_{\kappa}^{\dagger} a_{\kappa} + (E_{\uparrow} \sigma_{\uparrow\uparrow} + E_{\downarrow} \sigma_{\downarrow\downarrow}) + \hbar \sum_{\kappa} \lambda_{\kappa} (\sigma_{\uparrow\downarrow} + \sigma_{\downarrow\uparrow}) (a_{\kappa} + a_{\kappa}^{\dagger}). \quad (2.10)$$

O segundo termo da equação acima pode ser reescrito como

$$E_{\uparrow} \sigma_{\uparrow\uparrow} + E_{\downarrow} \sigma_{\downarrow\downarrow} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 (\sigma_{\uparrow\downarrow} - \sigma_{\downarrow\uparrow}) + \frac{1}{2} (E_{\uparrow} + E_{\downarrow}), \quad (2.11)$$

onde escrevemos $E_{\uparrow} - E_{\downarrow} = \hbar \omega_0$, com ω_0 a frequência de transição atômica, e fizemos uso da relação de completeza $\sigma_{\uparrow\uparrow} + \sigma_{\downarrow\downarrow} = 1$. O termo constante de energia $\frac{1}{2}(E_{\uparrow} + E_{\downarrow})$ pode ser ignorado, pois este pode ser incorporado em uma escolha adequada de uma escala de referência. Usando a notação de matrizes de Pauli

$$\sigma_z = \sigma_{\uparrow\uparrow} - \sigma_{\downarrow\downarrow} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|, \quad (2.12)$$

$$\sigma_+ = \sigma_{\uparrow\downarrow} = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|, \quad (2.13)$$

$$\sigma_- = \sigma_{\downarrow\uparrow} = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|, \quad (2.14)$$

a Hamiltoniana, Eq.(2.10), pode ser escrita na forma

$$H = \sum_{\kappa} \hbar \omega_{\kappa} a_{\kappa}^{\dagger} a_{\kappa} + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_z + \hbar \sum_{\kappa} \lambda_{\kappa} (\sigma_+ + \sigma_-) (a_{\kappa} + a_{\kappa}^{\dagger}). \quad (2.15)$$

O operador σ_- aplicado a um átomo inicialmente no estado excitado $|\uparrow\rangle$ leva este para o estado fundamental $|\downarrow\rangle$ e σ_+ aplicado ao estado fundamental leva este para o estado excitado. Estes operadores são comumente chamados de operadores de abaixamento e levantamento dos estados eletrônicos, respectivamente.

O termo correspondente à energia de interação do sistema átomo-campo na Eq.(2.15) consiste de quatro termos. O termo $a_{\kappa}^{\dagger} \sigma_-$ descreve o processo no qual o átomo inicialmente no estado excitado é levado para o estado fundamental e um fóton de modo κ é criado. O termo $a_{\kappa} \sigma_+$ descreve o processo oposto. A energia é conservada em ambos os processos. O termo $a_{\kappa} \sigma_-$ descreve o processo no qual o átomo inicialmente no estado excitado é levado para o estado fundamental e um fóton é aniquilado, resultando em uma perda de energia de $2\hbar\omega_0$. Similarmente $a_{\kappa}^{\dagger} \sigma_+$ resulta em um ganho de energia de $2\hbar\omega_0$. Desprezando os dois últimos termos na Eq.(2.15), a Hamiltoniana resultante é dada por

$$H = \sum_{\kappa} \hbar \omega_{\kappa} a_{\kappa}^{\dagger} a_{\kappa} + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_z + \hbar \sum_{\kappa} \lambda_{\kappa} (\sigma_+ a_{\kappa} + a_{\kappa}^{\dagger} \sigma_-). \quad (2.16)$$

A aproximação acima corresponde a uma aproximação de onda girante. A Hamiltoniana, Eq.(2.16), descreve a interação de um único átomo de dois níveis com um campo multimodo.

2.2 A Hamiltoniana Jaynes-Cummings

O modelo JCM é um dos poucos modelos na física que pode ser resolvido exatamente. Este é também uma das maneiras mais elementares de estudar a interação da radiação com a matéria. A forma mais simples do JCM descreve a interação de um átomo de

dois níveis, em uma cavidade sem dissipação, interagindo com um modo quantizado do campo eletromagnético. Da Eq.(2.16), obtemos que a interação de um modo quantizado do campo, de frequência ω , em uma aproximação de onda girante, com um átomo de dois níveis é descrita pela Hamiltoniana

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar}{2}\omega_0\sigma_z + \hbar\lambda(\hat{a}^\dagger\sigma_- + \sigma_+\hat{a}), \quad (2.17)$$

onde λ é a constante de acoplamento e ω_0 é a frequência de transição atômica. Os operadores de criação e aniquilação de fótons $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$, obedecendo a relação de comutação

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (2.18)$$

atuam sobre o estado de números de fótons $|n\rangle$, autovetor do operador de número $\hat{a}^\dagger\hat{a}$, na forma

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (2.19)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (2.20)$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (2.21)$$

A frequência do campo ω e a constante de acoplamento λ aparecem como parâmetros arbitrários dentro da teoria, no entanto em aplicações eles são fixados a partir de considerações físicas tais como, o volume V da cavidade e o momentum de dipolo d da transição atômica, como na expressão $|\lambda|^2 = 4d^2\omega/\hbar V\epsilon_0$. Na Eq.(2.17) para o JCM, não está sendo levado em consideração os efeitos tais como perda na cavidade, multimodos na cavidade, degenerescência dos subníveis atômicos e polarizabilidade atômica (levando para o efeito Stark dinâmico).

Para entendermos a dinâmica de um átomo em uma cavidade é necessário discutirmos algumas características da cavidade. Usualmente, as cavidades são caracterizadas em termos de um fator de qualidade Q definido como $Q = \omega/\Gamma$, onde ω e Γ são respectivamente a frequência e o recíproco do tempo de vida do campo na cavidade. Se a

freqüência da transição atômica estiver em ressonância com a freqüência do campo na cavidade, a taxa de decaimento atômico será proporcional ao fator de qualidade Q desta. Experimentalmente é observado que a taxa de decaimento atômico dentro da cavidade é maior do que no vácuo[38].

De uma forma geral a dinâmica átomo-campo em uma cavidade é descrita pelo modelo Jaynes-Cummings, Eq.(2.17). O modelo Jaynes-Cummings é aplicado para dinâmica ressonante átomo-campo em uma cavidade idealizada ($Q \rightarrow \infty$), explicando satisfatoriamente vários fenômenos de óptica quântica em cavidades com valores de Q elevado. Um exemplo de cavidades com alto valor de Q são as cavidades supercondutoras que podem alcançar valores de Q da ordem de 10^{11} [39]. Desde que o campo permaneça na cavidade por um tempo suficientemente grande para ser reabsorvido antes que esse se dissipe, com o aumento do fator Q , a emissão espontânea torna-se desprezível. O modelo Jaynes-Cummings representa uma importante ferramenta no estudo de aspectos quânticos fundamentais da interação da radiação com a matéria, tais como: oscilações de Rabi no vácuo, fenômenos de colapsos e revivals, estatística sub-poassoniana de fótons e estados comprimidos entre outros.

Em um contexto experimental podemos considerar os experimentos realizados com átomos de Rydberg em cavidades com alto Q [40, 41, 42, 43, 44, 45]. Átomos de Rydberg são átomos com número quântico principal elevado (~ 50). O momento de dipolo para átomos desse tipo é tão grande que a freqüência de Rabi para o vácuo é da ordem de $10^4 Hz$, excedendo a taxa de decaimento atômico permitindo assim observações da interação átomo-campo em cavidades.

Alguns números podem ser instrutivos. Por exemplo, na configuração de micro-maser de Rempe et al.[14], o valor Q da cavidade esteve entre os valores 6×10^7 e 2.7×10^8 para um campo de freqüência de $21 GHz$, com uma taxa de decaimento em torno de $10^2 s^{-1}$. Nos dias de hoje, cavidades de microondas podem ser obtidas com valores de Q bastante

elevado, da ordem de $> 10^{10}$ [46]. As transições de Rydberg usadas nesses experimentos possuem número quântico principal em torno de 50. Progressos recentes na construção de cavidades ópticas de alto Q permitiram observações semelhantes na frequência da luz visível[47].

2.2.1 Solução do modelo Jaynes-Cummings

A maior característica do JCM é que esse pode ser resolvido exatamente. Esse aspecto é especialmente conveniente, não unicamente porque estamos estudando a interação de dois sistemas, mas também porque, além de ser um modelo simples, este pode ser verificado em laboratório. O JCM além de permitir a inspeção de aspectos interessantes da dinâmica atômica e como veremos, também é sensível à estatística do campo. A maneira de resolvermos esse modelo dependerá de que aspecto do problema desejamos enfatizar. Nessa seção usaremos o método do vetor de estado, no entanto, na seção seguinte usaremos o método do operador densidade.

Inicialmente resolveremos a equação de Schrödinger para o vetor de estado total do sistema $|\Psi(t)\rangle$, ou seja,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle. \quad (2.22)$$

O termo correspondente a interação na Eq.(2.17), $\hat{H}_I = \hbar\lambda(\hat{a}^\dagger\sigma_- + \sigma_+\hat{a})$, causará transições entre os estados $|\uparrow\rangle|n\rangle$ e $|\downarrow\rangle|n+1\rangle$, ou seja

$$(\hat{a}^\dagger\sigma_- + \hat{a}\sigma_+)|\uparrow\rangle|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle|\downarrow\rangle. \quad (2.23)$$

$$(\hat{a}^\dagger\sigma_- + \hat{a}\sigma_+)|\downarrow\rangle|n+1\rangle = \sqrt{n+1}|n\rangle|\uparrow\rangle. \quad (2.24)$$

Desta forma, o vetor de estado total do sistema pode ser expandido, para o tempo t , em função destes dois estados

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega(n+1)t} [C_{n,\uparrow}(t)|n\rangle|\uparrow\rangle + C_{n+1,\downarrow}(t)|n+1\rangle|\downarrow\rangle]. \quad (2.25)$$

As equações de movimento para os coeficientes $C_{n,\uparrow}$ e $C_{n+1,\downarrow}$ podem ser obtidos substituindo $|\Psi(t)\rangle$ na equação de Schrödinger. Após alguma álgebra e considerando o caso ressonante, $\omega = \omega_0$, obtemos

$$C_{n,\uparrow}(t) = c_{\uparrow,n}(0) \cos(\lambda t \sqrt{n+1}) - i c_{\downarrow,n+1}(0) \sin(\lambda t \sqrt{n+1}), \quad (2.26)$$

$$C_{n+1,\downarrow}(t) = c_{\downarrow,n+1}(0) \cos(\lambda t \sqrt{n+1}) - i c_{\uparrow,n}(0) \sin(\lambda t \sqrt{n+1}). \quad (2.27)$$

Para o caso de um átomo inicialmente preparado no estado excitado teremos que $c_{\uparrow,n}(0) = c_n(0)$ e $c_{\downarrow,n+1}(0) = 0$. Com esta condição inicial

$$C_{n,\uparrow}(t) = c_n(0) \cos(\lambda t \sqrt{n+1}), \quad (2.28)$$

$$C_{n+1,\downarrow}(t) = -i c_n(0) \sin(\lambda t \sqrt{n+1}), \quad (2.29)$$

onde $c_n(0)$ é a amplitude de probabilidade do campo para o tempo $t = 0$. Usando o resultado acima na expressão para o vetor de estado total do sistema obtém-se

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\uparrow,n}(0) e^{-i\omega(n+1)t} \left[\cos(\lambda t \sqrt{n+1}) |n\rangle |\uparrow\rangle - i \sin(\lambda t \sqrt{n+1}) |n+1\rangle |\downarrow\rangle \right]. \quad (2.30)$$

O vetor de estado acima descreve a dinâmica completa do sistema. Todas as grandezas físicas relevantes à dinâmica do sistema átomo-campo podem ser obtidas a partir deste. Por exemplo, podemos estar interessados em saber como o átomo é excitado e ‘desexcitado’ pelo campo.

2.2.2 Dinâmica atômica, inversão atômica

Discutiremos agora um aspecto particular da dinâmica atômica, como o campo excita e ‘dexecita’ o átomo. Uma maneira de fazermos isto é através da inversão atômica, definida

como a probabilidade de encontrarmos o átomo no estado excitado menos a probabilidade de encontrarmos este no estado fundamental, isto é

$$\begin{aligned} W(t) &= |\langle \Psi(t) | \uparrow \rangle|^2 - |\langle \Psi(t) | \downarrow \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos(2\lambda t \sqrt{n+1}), \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde fizemos uso da Eq.(2.30) e definimos $P_n = |c_n(0)|^2$, a distribuição de número de fótons para o estado inicial do campo. Em seguida discutiremos a resposta atômica para diferentes estados iniciais do campo.

Para o campo preparado em um estado de número $|m\rangle$ no tempo $t = 0$, a distribuição de número de fótons será $P_n^m = \delta_{nm}$, o que significa que a inversão atômica dada pela Eq.(5.67) pode ser escrita como

$$W_m(t) = \cos(2\lambda t \sqrt{m+1}). \quad (2.32)$$

Podemos observar que a inversão atômica para o caso do campo preparado em um estado de número é periódica, com frequência de Rabi ($\Omega_R = 2\lambda\sqrt{m+1}$). Vale mencionar que a inversão atômica, aqui, ocorre da mesma maneira como no caso em que o átomo é excitado por um campo monocromático clássico[48]. O estado de número é o estado mais não clássico da luz, e no entanto a inversão atômica se comporta como se o campo fosse verdadeiramente clássico. Isso pode ser entendido dentro do ponto de vista de que em ambos os casos a intensidade inicial do campo é bem definida e esse elemento é importante para a resposta atômica. Por outro lado, para o campo preparado inicialmente no estado de vácuo, $P_n^0 = \delta_{n,0}$, o resultado é drasticamente diferente quando comparado com o caso de um campo clássico. No caso clássico, o átomo em um estado excitado não realiza transições para o estado fundamental na ausência de campo. No tratamento puramente quântico, a transição do estado excitado para o estado fundamental, com o campo no estado de vácuo, faz-se possível, devido a emissão espontânea.

Para o caso em que o campo é preparado inicialmente em um estado coerente $|\alpha\rangle$, a dinâmica atômica é bastante diferente. A distribuição de fótons será $P_n^c = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$, uma distribuição Poissoniana, com o número médio de fótons dado por $\bar{n} = |\alpha|^2$ e variância $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle_c = |\alpha|^2$. Essa extensão da distribuição do número de fótons será responsável por vários efeitos importantes. A inversão atômica será

$$W_c(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \cos(2\lambda t \sqrt{n+1}), \quad (2.33)$$

a qual não possui soluções algébricas fechadas simples e requer soluções numéricas ou assintóticas. A primeira coisa a ser observada é que cada termo do somatório oscila com uma frequência de Rabi diferente para cada valor definido de n . A distribuição de fótons P_n^c determinará o peso para cada valor de n . Para o tempo inicial, o átomo é preparado em um estado definido e todos os termos no somatório estarão correlacionados. Para o tempo posterior, as oscilações de Rabi associadas com os diferentes termos possuem frequências diferentes e desta forma não estarão correlacionadas, levando para um colapso da inversão atômica. Como o tempo é sempre crescente a correlação é retomada e fenômenos de ‘revivals’ ocorrem. Esse comportamento continua e uma sequência infinita de ‘revivals’ é obtida. Um fator fundamental para a ocorrência dos ‘revivals’ é a estrutura granular da distribuição de fótons. Desta forma, ‘revivals’ são fenômenos puramente quânticos.

O tempo de colapso pode ser estimado, determinando a defasagem entre os termos da expressão da inversão[49, 50, 51], e este ocorre para

$$t_c = \left[2\lambda\sqrt{\bar{n} + \Delta n} - 2\lambda\sqrt{\bar{n} - \Delta n}\right]^{-1} \approx \lambda^{-1}. \quad (2.34)$$

As oscilações de Rabi defasam durante algum tempo até os termos entrarem em fase novamente. Esse comportamento ocorre para o tempo chamado de tempo de ‘revival’[52, 53]

$$t_r^c = 2\pi \left[2\lambda\sqrt{\bar{n} + 1} - 2\lambda\sqrt{\bar{n}}\right]^{-1} \approx \frac{2\pi\sqrt{\bar{n}}}{\lambda}. \quad (2.35)$$

Na fig.(2.1), mostramos a inversão atômica para um estado coerente em função do parâmetro normalizado λt , com a intensidade inicial do campo dada por $|\alpha|^2 = 25$. Pode ser observado claramente o colapso das oscilações de Rabi com seus subsequentes ‘revivals’. Os ‘revivals’ ocorrem periodicamente, mas adquirem um alargamento com o crescimento do tempo, mostrando uma evolução irregular.

Consideremos agora o caso em que o campo é preparado em uma superposição de estados coerentes (sc)[55] par ou ímpar (gato de Schrödinger) ¹. A inversão atômica pode ser escrita de maneira semelhante à forma dada para o caso do campo preparado em um estado coerente,

$$W_{sc}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{sc} \cos[2\lambda t \sqrt{n+1}], \quad (2.36)$$

mas com

$$P_n^{sc} = \frac{\exp(-\alpha^2) \alpha^{2n} [1 + r(-1)^n]^2}{n! (1 + r^2 + 2r \exp(-\alpha^2))}, \quad (2.37)$$

a qual é a distribuição de fótons para o campo inicialmente preparado no estado de superposição de estados coerentes. O parâmetro r pode assumir valores iguais a $r = -1$, para uma superposição ímpar de estados coerentes ($|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle$) (gato ímpar) e $r = 1$, para uma superposição par ($|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle$) (gato par). Notemos, que para $r = 0$ a distribuição descreve o caso de um estado coerente $|\alpha\rangle$.

O tempo de ‘revival’ dado pela Eq.(2.35) não pode ser aplicado para o caso da superposição de estados coerentes, porque P_n^{sc} é zero para n par (ímpar) no caso de termos um estado coerente ímpar (par). A diferença na fase dos dois termos vizinhos não nulos será dado por

$$t_r^{sc} [2\lambda\sqrt{n+2} - 2\lambda\sqrt{n}] \approx 2\pi, \quad (2.38)$$

o qual é justamente

$$t_r^{sc} \approx \frac{t_r^c}{2} = \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{n}. \quad (2.39)$$

¹O termo estado gato de Schrödinger denota um estado emaranhado que consiste de dois estados coerentes correlacionados com diferentes estados atômicos

Essa expressão é válida tanto para o estado coerente par, bem como para o estado coerente ímpar.

Na fig.(2.3) mostramos a inversão atômica como função do parâmetro normalizado λt , para o campo inicialmente preparado em uma superposição par de estados coerentes, $r = 1$. A diferença mais evidente em relação ao campo preparado em um estado coerente é que o ‘revival’ será aproximadamente na metade do tempo de ‘revival’ deste, ver Eq.(2.39). Esse efeito é devido a interferência entre os dois estados coerentes na superposição e pode ser entendido analisando a distribuição inicial de número de fótons.

Para o caso em que o átomo é preparado em uma superposição coerente de $|\downarrow\rangle$ e $|\uparrow\rangle$. Se o campo for inicialmente preparado em uma superposição par ($r = 1$) de estados coerentes, o termo de interferência quântica entre os dois estados coerentes será responsável pelos ‘revivals’ mostrados na fig.(2.2). Para outras estatísticas do campo, assim como estados térmicos e estados comprimidos, a dinâmica atômica apresenta aspectos, também, interessantes. Se o campo é preparado inicialmente em um estado térmico, a inversão atômica apresenta colapsos seguido de uma evolução irregular. A resposta atômica será bastante similar se prepararmos o campo em um estado comprimido, e esse comportamento é devido à similaridade entre ambas as estatísticas da distribuição de números de fótons.

O modelo Jaynes-Cummings é bastante rico em aspectos interessantes, e outros aspectos podem ser observados na evolução do campo na cavidade, como veremos em seguida.

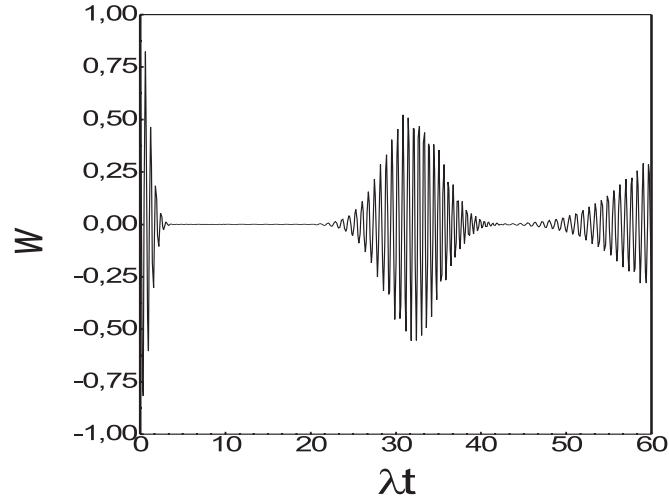


Figura 2.1: Inversão atômica de um átomo de dois níveis inicialmente preparado em um estado excitado e o campo em um estado coerente com $\alpha = 5$

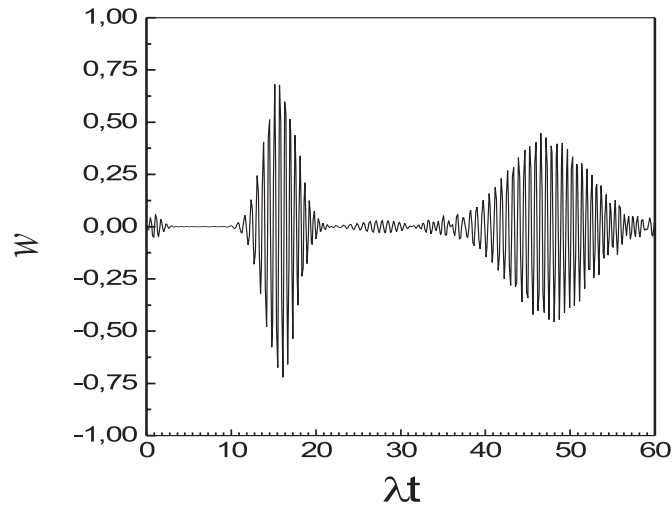


Figura 2.2: Inversão atômica de um átomo de dois níveis inicialmente preparado em uma superposição de estado excitado e fundamental e o campo em uma superposição par de estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$ com $\alpha = 5$

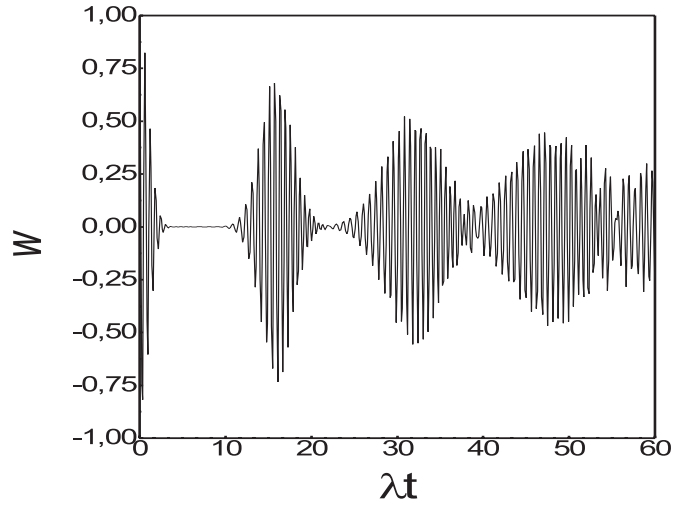


Figura 2.3: Inversão atômica de um átomo de dois níveis inicialmente preparado em um estado excitado e o campo em uma superposição par de estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|- \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$

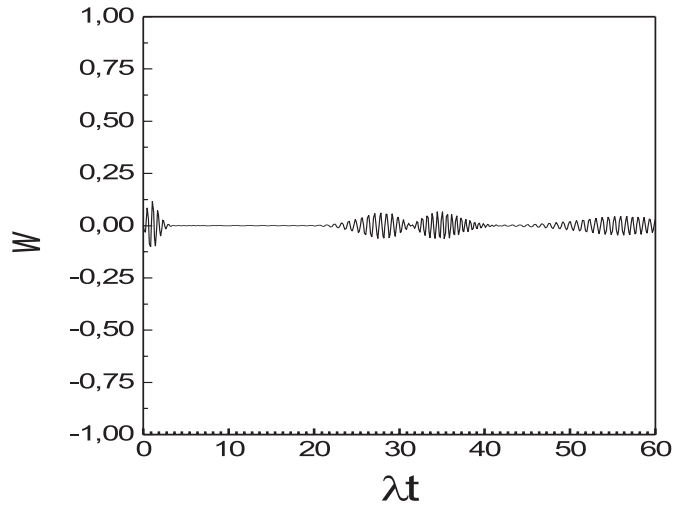


Figura 2.4: Inversão atômica de um átomo de dois níveis inicialmente preparado em uma superposição de estado excitado e fundamental e o campo em uma mistura estatística de estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|- \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$

2.2.3 Dinâmica do campo

Embora a evolução do sistema total, átomo + campo, no modelo Jaynes-Cummings seja unitária, mesmo se iniciarmos com o átomo e o campo em um estado puro, estes, como sub-sistemas, evoluirão de uma forma não unitária como uma mistura estatística[54, 55]. A interação entre o átomo e o campo na cavidade gera um estado correlacionado $\hat{\rho}(t)$, o qual não pode ser escrito como um produto, isto é $\hat{\rho}(t) \neq \hat{\rho}_a(t) \otimes \hat{\rho}_f(t)$ [56], com $\hat{\rho}_a$ descrevendo o sub-sistema atômico e $\hat{\rho}_f$ o sub-sistema do campo. O comportamento destes estados emaranhados podem ser muito bem analisados a partir do operador densidade $\hat{\rho}(t)$.

A evolução temporal do operador densidade é dada por

$$\hat{\rho}(t) = U(t)\hat{\rho}(0)U^\dagger(t), \quad (2.40)$$

onde $U(t)$ é o operador de evolução temporal, o qual na representação de interação pode ser escrito como

$$\hat{U}^\dagger(t) = \exp[i\lambda(\hat{a}^\dagger\sigma_- + \sigma_+\hat{a})t]. \quad (2.41)$$

Por conveniência escreveremos o operador de evolução temporal na forma matricial, na base atômica, e expandindo em série de Taylor

$$\hat{U}^\dagger(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda t)^n}{n!} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix}^n. \quad (2.42)$$

Usando agora as identidades

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger & 0 \end{pmatrix}^{2m} &= \begin{pmatrix} [\hat{a}\hat{a}^\dagger]^m & 0 \\ 0 & [\hat{a}^\dagger\hat{a}]^m \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger & 0 \end{pmatrix}^{2m+1} &= \begin{pmatrix} 0 & [\hat{a}\hat{a}^\dagger]^m\hat{a} \\ (\hat{a}^\dagger\hat{a})^m\hat{a}^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

com m inteiro, obtemos

$$\hat{U}^\dagger(t) = \begin{pmatrix} \hat{C}_{n+1}(t) & i\hat{S}_{n+1}(t)\hat{a} \\ i\hat{S}_n(t)\hat{a}^\dagger & \hat{C}_n(t) \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

usando a notação dada em[55], definimos

$$\begin{aligned}\hat{C}_{n+1} &= \cos\left(\lambda t\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}\right), \quad \hat{C}_n = \cos\left(\lambda t\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}\right), \\ \hat{S}_{n+1} &= \frac{\sin\left(\lambda t\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}\right)}{\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}}, \quad \hat{S}_n = \frac{\sin\left(\lambda t\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}\right)}{\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}}.\end{aligned}\tag{2.45}$$

Especificaremos agora o estado inicial do sistema. Consideraremos o átomo inicialmente preparado em um estado de superposição,

$$|\psi(0)\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}(|\uparrow\rangle + s|\downarrow\rangle),\tag{2.46}$$

de forma que o operador densidade inicial do sistema, átomo + campo, possa ser escrito como

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(0) &= \hat{\rho}_a(0) \otimes \hat{\rho}_f(0) \\ &= \frac{1}{(1+s^2)} \begin{pmatrix} \hat{\rho}_f(0) & s\hat{\rho}_f(0) \\ s\hat{\rho}_f(0) & s^2\hat{\rho}_f(0) \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.47}$$

O parâmetro s pode assumir qualquer valor real, mas aqui consideraremos os seguintes valores, $s = \pm 1$, para o átomo em uma superposição de estado excitado e fundamental, e $s = 0$, para o átomo inicialmente preparado em um estado excitado. Na Eq.(2.47), consideramos que o átomo, descrito por $\hat{\rho}_a$, e o campo, descrito por $\hat{\rho}_f$, estão não correlacionados para o tempo $t = 0$, ou seja o operador densidade do sistema pode ser fatorado na forma $\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_a(0) \otimes \hat{\rho}_f(0)$. Calcularemos agora a evolução temporal do operador densidade do sistema, inserindo as equações (2.44) e (2.47) na Eq.(2.40) obtemos o seguinte resultado

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{(1+s^2)} \begin{pmatrix} \hat{A}\hat{\rho}_f(0)\hat{A}^\dagger & \hat{A}\hat{\rho}_f(0)\hat{B}^\dagger \\ \hat{B}\hat{\rho}_f(0)\hat{A}^\dagger & \hat{B}\hat{\rho}_f(0)\hat{B}^\dagger \end{pmatrix},\tag{2.48}$$

onde definimos

$$\hat{A} = \hat{C}_{n+1} - is\hat{S}_{n+1}\hat{a},$$

(2.49)

$$\hat{B} = s\hat{C}_n - i\hat{a}^\dagger \hat{S}_{n+1}.$$

Os operadores $\hat{C}$ e $\hat{S}$ foram definidos anteriormente.

Como estamos interessados em estudar a dinâmica do campo, calcularemos o operador densidade reduzido deste. Para isto calcularemos o traço, nas variáveis atômica, do operador densidade total do sistema, (2.48), ou seja $\hat{\rho}_f(t) = Tr_a[\hat{\rho}(t)]$, obtendo

$$\hat{\rho}_f(t) = \hat{A}\hat{\rho}_f(0)\hat{A}^\dagger + \hat{B}\hat{\rho}_f(0)\hat{B}^\dagger. \quad (2.50)$$

Consideraremos, que o campo na cavidade para o tempo $t = 0$ é preparado em um estado coerente, em um estado tipo gato par, em um estado tipo gato ímpar, de forma que o operador densidade possa ser escrito na forma

$$\hat{\rho}(0) = A[|\alpha\rangle\langle\alpha| + r^2|-\alpha\rangle\langle-\alpha| + r(|-\alpha\rangle\langle\alpha| + |\alpha\rangle\langle-\alpha|)], \quad (2.51)$$

com $A = [1 + r^2 + 2r \exp(-2\alpha^2)]^{(-1)}$, nesse caso α real. Como anteriormente, o parâmetro r pode assumir valores $-1, 0, 1$, os quais correspondem a um gato ímpar, $(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle)$, a um estado coerente $|\alpha\rangle$ e a um gato par $(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$, respectivamente, e para o caso em que o campo é preparado em uma mistura estatística de estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|-\alpha\rangle$ com operador densidade

$$\hat{\rho}(0) = \frac{1}{2}(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|). \quad (2.52)$$

Nesta seção usaremos o método do espaço de fase, mais propriamente a função Q , para discutirmos a dinâmica do campo e em seguida discutiremos a pureza do campo na cavidade em função do tempo.

Evolução da função Q

As distribuições de quase probabilidade são convenientes para representar sistemas quânticos em termos de c-números, simplificando os cálculos, dando informações importantes em

relação às características não clássicas do estado do sistema.

Apesar de ser possível definir um número infinito de distribuições de quase probabilidade para cada estado quântico particular, devido a possibilidade de ordenamento dos operadores[57, 58] é sempre possível escolhermos uma função de distribuição de quase probabilidade adequada, dependendo do problema e do aspecto do estado quântico que desejamos investigar.

No caso em que consideraremos aqui, onde o campo é preparado em um estado coerente, em uma superposição de estados coerentes e em uma mistura estatística, usaremos a função Q , devido a sua forma simples de ser calculada, para discutirmos a dinâmica do campo. A função Q , definida como a transformada de Fourier da função característica quântica $C(\zeta, t)$, associada com operadores com ordenamento anti-normal é dada por

$$Q(\beta, t) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\zeta \exp(\beta\zeta^* - \zeta\beta^*) C(\zeta, t), \quad (2.53)$$

com a função característica

$$C(\zeta, t) = Tr[\hat{\rho}(t) \exp(-\zeta^* a) \exp(\zeta a^\dagger)]. \quad (2.54)$$

A função Q não é unicamente uma ferramenta conveniente para calcular valores esperados de produtos de operadores com ordenamento na forma anti-normal, esta também nos dá uma compreensão do mecanismo de interação do modelo Jaynes-Cummings[55]. A função Q pode ser definida em uma forma bastante conveniente e compacta[59]

$$Q(\beta, t) = \frac{1}{\pi} \langle \beta | \hat{\rho}_f(t) | \beta \rangle, \quad (2.55)$$

onde $|\beta\rangle$ é um estado coerente com amplitude $\beta = x + iy$.

Usando agora o operador densidade reduzido do campo dada por (2.50) na expressão (2.55) para a função Q obtemos

$$Q(\beta, t) = \frac{1}{\pi} \left[\langle \beta | \hat{A} \hat{\rho}_f(0) \hat{A}^\dagger | \beta \rangle + \langle \beta | \hat{B} \hat{\rho}_f(0) \hat{B}^\dagger | \beta \rangle \right]. \quad (2.56)$$

Inicialmente, suporemos que o campo na cavidade, para $t = 0$, é preparado em um estado coerente, correspondendo ao operador densidade, Eq.(2.69), com $r = 0$, ou seja $\hat{\rho}_f(0) = |\alpha\rangle\langle\alpha|$. Substituindo na Eq.(2.50) e em seguida usando a Eq.(2.55), obtemos a função Q para o campo na cavidade preparado inicialmente em um estado coerente

$$Q^c(\beta, t) = \frac{1}{\pi} (|S_1|^2 + |S_2|^2), \quad (2.57)$$

com

$$\begin{aligned} S_1 &= \langle \beta | \hat{A} | \alpha \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-(|\beta|^2 + \alpha^2)/2]}{n!} (\beta^* \alpha)^n \left(C_{n+1} - i s \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} S_{n+1} \right), \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \langle \beta | \hat{B} | \alpha \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-(|\beta|^2 + \alpha^2)/2]}{n!} (\beta^* \alpha)^n \left(s C_n - i \frac{\beta^*}{\sqrt{n+1}} S_{n+1} \right). \end{aligned} \quad (2.59)$$

A expressão acima para a função Q só pode ser evoluída numericamente. A função Q é positiva definida e desta forma será suficiente analisarmos o contorno desta no espaço de fase, seguindo Eiselt e Risken[60]. Na fig.(2.5) mostramos a evolução da função Q para tempos diferentes com o átomo inicialmente preparado no estado excitado, $s = 0$. Para o tempo $t = 0$ observamos que o contorno de um estado coerente com $|\alpha|^2 = 25$ é Gaussiano, como já era esperado. No entanto, para o tempo quando há um colapso na inversão atômica, isto é, para $t_{col} \approx \lambda^{-1}$, a função Q se divide em dois ramos contragirante sobre um círculo de raio igual a α . Desta forma, existe uma conexão entre a divisão da função Q e o colapso da inversão atômica. Para a metade do tempo de ‘revival’, $t_r^c/2 = \pi\sqrt{n}/\lambda$, os dois ramos estarão o mais afastado possível, como pode ser visto na fig.(2.5), e para este tempo o campo se comporta como uma superposição de dois estados coerentes, como mostrado por Gea-Banacloche[61, 62] e Bužek et. al.[63]. Esse é o único tempo na evolução do campo na cavidade para o qual o campo é aproximadamente um

estado puro, como exposto por Phoenix e Knight[54]. Para o tempo de ‘revival’ t_r^c , há uma recombinação completa dos ramos da função Q , o qual significa que a divisão da função Q está relacionada com o colapso e a recombinação desta está relacionada com o ‘revival’ das oscilações de Rabi. Esse comportamento está também ilustrado na fig.(2.5). Notemos que o contorno para $t = t_r^c$ é deformado, relativamente ao contorno de um estado coerente, e o campo está em uma mistura estatística[54].

Consideremos agora o campo inicialmente preparado em uma mistura estatística de estados coerentes(me)

$$\hat{\rho}_f(0) = \frac{1}{2}(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|). \quad (2.60)$$

No caso de uma mistura estatística a dinâmica atômica é a mesma que no caso em que o campo é preparado em um estado coerente[ver subseção 2.2.2]. Assim, podemos nos referir a fig.(2.1) toda vez que quisermos fazer alusão à dinâmica atômica e à Eq.(2.35) para o tempo de ‘revival’, dado por

$$t_r^{me} = t_r^c \approx \frac{2\pi\sqrt{\bar{n}}}{\lambda} \quad (2.61)$$

.

Inserindo agora a Eq.(2.60) na expressão para a função Q obtemos

$$Q^{me}(\beta, t) = \frac{1}{2\pi} \left[|S_{1,+}|^2 + |S_{1,-}|^2 + |S_{2,+}|^2 + |S_{2,-}|^2 \right]. \quad (2.62)$$

com

$$\begin{aligned} S_{1,\pm} &= \langle \beta | \hat{A} | \pm \alpha \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-(|\beta|^2 + \alpha^2)/2] (\beta^* \alpha)^n}{n!} (\pm 1)^n (C_{n+1} \mp i s \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} S_{n+1}), \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} S_{2,\pm} &= \langle \beta | \hat{B} | \pm \alpha \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-(|\beta|^2 + \alpha^2)/2] (\beta^* \alpha)^n}{n!} (\pm 1)^n (s C_n - i \frac{\beta^*}{\sqrt{n+1}} S_{n+1}) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Como no caso do estado coerente, a função Q para a mistura estatística tem que ser calculada numericamente e o resultado para diferentes valores do tempo pode ser observado na fig.(2.6) e fig.(2.7). A intensidade inicial do campo foi escolhido para ser $|\alpha|^2 = 25$ e o átomo no estado excitado, $s = 0$. Na fig.(2.6) são mostrados os contornos da função Q para $t = 0$, onde podem ser observados claramente dois picos correspondendo a cada estado coerente. Para $t_1 = t_r^c/4 = t_r^{me}/4$ notamos que cada pico se divide em dois ramos contra propagante sobre um círculo de raio igual a α . Estes correspondem aos colapsos das oscilações de Rabi, ver fig.(2.1). No entanto, como pode ser visto na fig.(2.7), as recombinações dos ramos da função Q ocorrem para $t_2 = t_r^{me}/2$, isto é, para a metade do tempo de ‘revival’ para a mistura estatística. Uma recombinação total ocorrerá para $t_3 = t_r^{me}$, exatamente para o tempo de ‘revival’. Em uma primeira avaliação mostra-se estranho a colisão dos dois ramos da função Q ocorrida para $t_2 = t_r^{me}/2$. A explicação para esse comportamento é que em uma mistura estatística as componentes dos estados evoluem independentemente dentro do senso de que não existe coerência entre os ramos originários de picos diferentes. Existe coerência unicamente entre os ramos originários do mesmo pico e a recombinação destes ocorrem para o tempo de ‘revival’ $t_3 = t_r^{me}$. Desta forma, devemos ser cuidadosos quando avaliarmos colisões de ramos da função Q e associarmos a correspondência destes a ‘revival’. Para o campo inicialmente preparado em uma superposição de estado, no entanto, essa situação é diferente. Como veremos a seguir:

Para o caso em que o campo é preparado, para $t = 0$, em uma superposição par de dois estados coerentes(sc), descrito pelo operador densidade na Eq.(2.69) com $r = 1$, ou seja

$$\hat{\rho}(0) = A[|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha| + |-\alpha\rangle\langle\alpha| + |\alpha\rangle\langle-\alpha|]. \quad (2.65)$$

Como no caso anterior o átomo será assumido para ser preparado no estado excitado,

$s = 0$. Substituindo essas condições iniciais na equação Eq.(2.50) e em seguida usando a definição Eq.(2.55), obtemos a função Q para o campo na cavidade

$$Q^{sc}(\beta, t) = \frac{1}{2\pi} \left[|S_{1,+}|^2 + |S_{1,-}|^2 + |S_{2,+}|^2 + |S_{2,-}|^2 + S_{1,+}S_{1,-}^* + S_{1,-}S_{1,+}^* + S_{2,+}S_{2,-}^* + S_{2,-}S_{2,+}^* \right]. \quad (2.66)$$

Todos os termos acima foram definidos nas equações Eq.(2.63) e Eq.(2.64).

A dinâmica da função Q será basicamente a mesma mostrada nas figuras para o caso do campo preparado em uma mistura estatística de estados coerentes, mas com interpretações diferentes. A razão é que para $t_2 = t_r^{me}/2$, como discutido, ver Eq.(2.39), é exatamente o tempo de ‘revival’ de quando o campo é preparado em uma superposição de estados coerentes, ou seja $t_2 = t_r^{sc}$. Nesse caso a recombinação dos ramos da função Q ocorre no tempo t_2 , porque os ramos na colisão são coerentes. A recombinação também ocorre para $t_3 = 2t_r^{sc}$, quando o segundo ‘revival’ ocorre.

Apesar do aspecto semelhante entre as dinâmicas da função Q para campos inicialmente preparado em uma mistura estatística e em um estado de superposição, o comportamento físico do sistema átomo-campo é completamente diferente. Para discutirmos essa diferença física, teremos que recorrer a uma análise detalhada dos termos de interferência existente na função Q em ambos os casos. Uma discussão bastante engenhosa é apresentada por Vidiella-Barranco et al.[55], onde os autores estudam a dinâmica da função Q para campos de baixa intensidade. Nesse regime é evidente a diferença da dinâmica da função Q , sendo mais complexa quando o campo é preparado em uma superposição do que quando este é preparado em uma mistura estatística. No entanto, mesmo em um regime de baixa intensidade não é possível analisarmos detalhadamente a dinâmica do sistema, por exemplo: o que acontece verdadeiramente com a dinâmica quando este interage com o átomo? A resposta a essa pergunta não é tão simples. No capítulo seguinte, discutiremos um modelo que representa uma variação do JCM. Nesse modelo certos efeitos que difi-

ilmente podem ser notados no JCM, são facilmente percebidos. A partir deste modelo, faremos uma discussão qualitativa da dinâmica do átomo e do campo apresentado nessa seção.

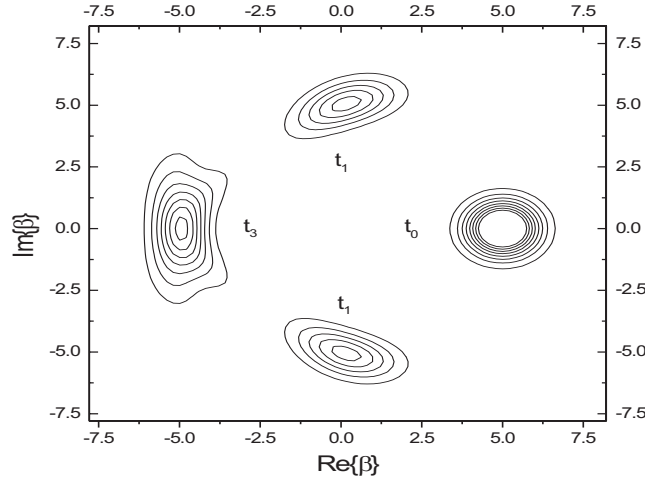


Figura 2.5: Contornos da função Q do campo na cavidade inicialmente preparado em um estado coerente e o átomo em um estado excitado para tempos diferentes: 1) $t_0 = 0$, 2) $t_1 = t_r^c/2$ e 3) $t_2 = t_r^c$, com $\alpha = 5$

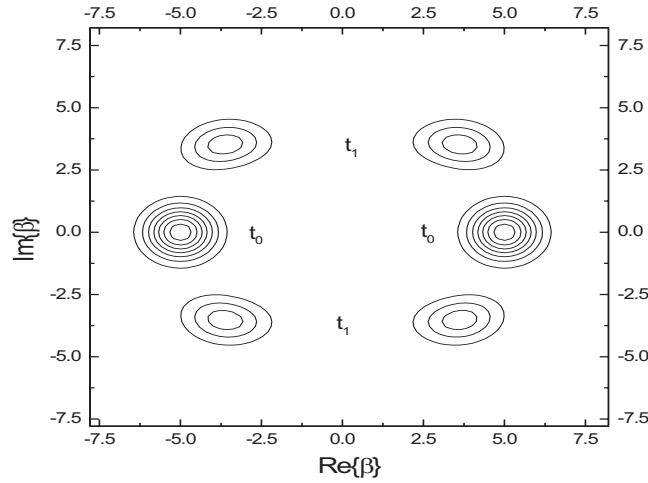


Figura 2.6: Contornos da função Q do campo na cavidade inicialmente preparado em uma mistura estatística de dois estados coerentes e o átomo em um estado excitado para tempos diferentes: 1) $t_0 = 0$ e 2) $t_1 = t_r^{me}/4$, com $\alpha = 5$

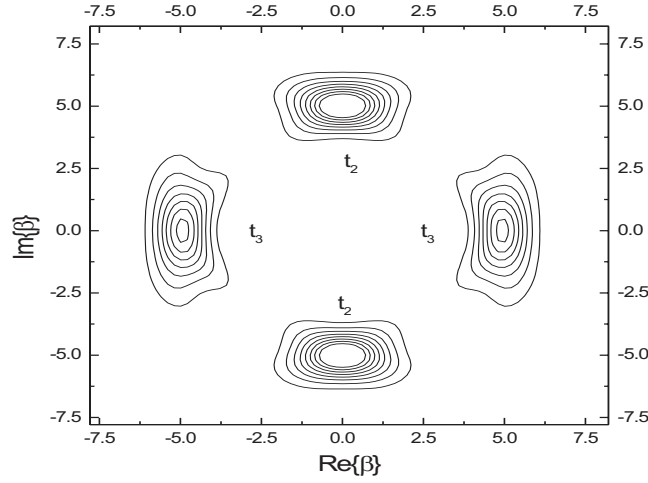


Figura 2.7: Contornos da função Q do campo na cavidade inicialmente preparado em uma mistura estatística de dois estados coerentes e o átomo em um estado excitado para tempos diferentes: 1) $t_2 = t_r^{me}/2$ e 2) $t_3 = t_r^{me}$, com $\alpha = 5$

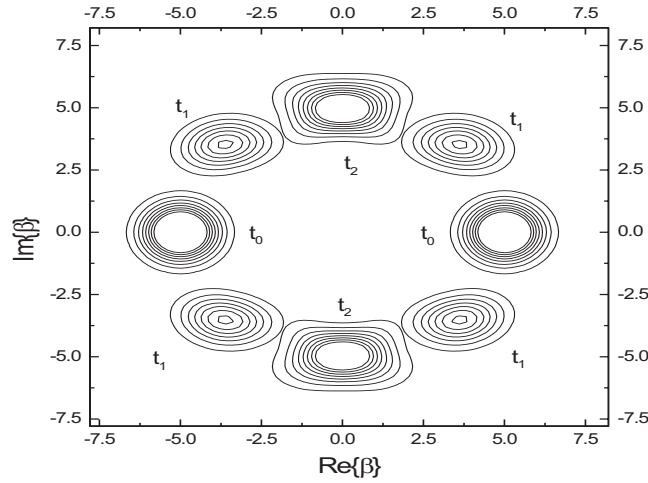


Figura 2.8: Contornos da função Q do campo na cavidade inicialmente preparado em uma superposição par de dois estados coerentes e o átomo em um estado excitado para tempos diferentes: 1) $t_0 = 0$ e 2) $t_1 = t_r^{sc}/2$, 3) $t_2 = t_r^{sc}$, com $\alpha = 5$

Pureza do campo na cavidade

A pureza do campo, na cavidade, no modelo Jaynes-Cummings foi investigado primeiramente por Phoenix e Knight[54]. Essa discussão é baseada no conceito de entropia quântica, dando uma informação completa em relação a pureza do campo, e é definida como

$$S(t) = -Tr[\hat{\rho}_f(t) \ln \hat{\rho}_f(t)]. \quad (2.67)$$

Se o operador $\hat{\rho}_f(t)$ representa um estado puro, a entropia total será exatamente zero, por outro lado, para uma mistura estatística esta será maior que zero. A entropia, desta forma, é um parâmetro importante para caracterizar a dinâmica do sistema e é bastante útil para classificar estados quânticos com evoluções complicadas (não unitária). No nosso problema específico, será conveniente analisarmos a pureza do campo na cavidade calculando o parâmetro ξ definido como

$$\xi(t) = 1 - Tr[\hat{\rho}_f^2(t)], \quad (2.68)$$

que serve como medida da pureza do campo[55]. O parâmetro ξ possui um comportamento muito similar à entropia. Lembremos que para um estado puro $Tr\hat{\rho}^2 = 1$, que corresponde a $\xi = 0$, e para um estado de mistura $Tr\hat{\rho}^2 < 1$, que corresponde a $\xi > 0$.

O parâmetro ξ como definido acima é obtido através do traço do quadrado do operador densidade reduzido do campo. Se o campo é inicialmente preparado em uma superposição de estados coerentes

$$\hat{\rho}(0) = A[|\alpha\rangle\langle\alpha| + r^2|-\alpha\rangle\langle-\alpha| + r(|-\alpha\rangle\langle\alpha| + |\alpha\rangle\langle-\alpha|)], \quad (2.69)$$

onde $A = [1 + r^2 + 2r \exp(-2\alpha^2)]^{(-1)}$ com α real. Como já mencionado, o parâmetro r pode assumir valores $-1, 0, 1$, os quais correspondem para um estado coerente ímpar ($|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle$), um estado coerente $|\alpha\rangle$ e um estado coerente par ($|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle$), respectivamente.

Substituindo a Eq.(2.69) na expressão (2.68) obtemos

$$\xi_{sc} = 1 - \frac{A^2}{(1+s^2)^2}(T_1^2 + T_2^2 + 2|T_3|^2), \quad (2.70)$$

onde

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^c [C_{n+1}^2 B_n^2 + s^2 \alpha^2 S_{n+1}^2 D_n^2], \\ T_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^c [s^2 C_n^2 B_n^2 + \frac{n^2}{\alpha^2} S_n^2 D_n^2], \\ T_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^c [C_{n+1}^2 B_n - i s \alpha S_{n+1}^2 D_n] [s C_n B_n^2 + \frac{i n}{\alpha} S_n D_n] \end{aligned} \quad (2.71)$$

com $B_n = [1 + r(-1)^n]$ e $D_n = [1 - r(-1)^n]$. Os C's e S's são c-números correspondentes aos operadores definidos em (2.45). P_n^c é a distribuição, Poissoniana, de número de fótons para cada estado coerente.

Considerando agora o campo inicialmente preparado em uma mistura estatística de estados coerentes

$$\hat{\rho}_f(0) = \frac{1}{2}(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|) \quad (2.72)$$

e substituindo na expressão (2.68) obtemos

$$\xi_{me}(t) = 1 - \frac{1}{2} [T_1^2 + T_{2,+}^2 + T_{2,-}^2 + |T_3|^2 + |T_{4,+}|^2 + |T_{4,-}|^2 + |T_{5,+}|^2 + |T_{5,-}|^2], \quad (2.73)$$

onde escrevemos

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^M (C_{n+1}^2 + \frac{s^2 \alpha^2}{n+1} S_{n+1}^2), \\ T_{2,\pm} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^M (\pm 1)^n (s^2 C_n^2 + S_{n+1}^2), \\ T_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^M (-1)^n (C_{n+1} - i \frac{s \alpha}{\sqrt{n+1}} S_{n+1})^2, \\ T_{4,\pm} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^M (\pm 1)^n (C_{n+1} \mp i \frac{s \alpha}{\sqrt{n+1}} S_{n+1}) (s C_n + i S_{n+1}), \\ T_{5,\pm} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^M (\pm 1)^n (C_{n+1} \pm i \frac{s \alpha}{\sqrt{n+1}} S_{n+1}) (s C_n + i S_{n+1}). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Aqui $P_n^M = \exp(-\alpha^2) \frac{\alpha^{2n}}{n!}$ é a distribuição, Poissoniana, de números de fótons para o campo inicialmente preparado em uma mistura estatística.

As expressões para ξ_{me} e ξ_{sc} podem ser calculadas numericamente. A partir da definição de ξ temos que $\xi = 0$ para um estado puro e $\xi > 0$ para uma mistura estatística. Quanto maior for ξ , menos puro o estado será. Nas fig(2.9) e fig(2.10) mostramos ξ_c em função de λt para $s = r = 0$, ou seja, o átomo inicialmente preparado em um estado excitado e o campo em um estado coerente $|\alpha\rangle$ e ξ_{me} para o campo preparado em uma mistura estatística. Se iniciarmos com o campo em uma mistura estatística, após a interação com o átomo, este permanecerá basicamente em um estado de mistura, como pode ser observado na fig.(2.10). Se iniciarmos em um estado coerente, no entanto, se aproximará de um estado puro na metade do tempo de 'revival'[54], como pode ser observado na fig.(2.9).

Agora discutiremos o que acontece quando o campo é preparado em uma superposição de estados. Nas fig.(2.10) fig.(2.11) mostramos a dinâmica de ξ_{me} bem como a de ξ_{sc} para $r = 1$, ou seja, o campo preparado inicialmente em um estado coerente par. Para o caso ξ_{sc} observamos um comportamento bem distinto, quando comparado com ξ_c , ver fig.(2.11). A primeira diferença é que o campo permanece em um estado de mistura na maior parte do tempo, nunca se aproximando de um estado puro como no caso de um estado coerente. Como pode ser observado existe uma linha bem definida em torno de $\xi = 0.5$, justamente o valor de ξ para o caso em que o campo é inicialmente preparado em um estado de mistura. Esse comportamento mostra que o campo em um estado de superposição decai para uma mistura estatística durante a interação, unicamente adquirindo estados de baixa mistura para alguns pontos específicos do tempo. Além do mais, contrário ao caso do estado coerente, o campo adquire menor grau de mistura para $t = t_r^{sc}$, ou seja, para o tempo de 'revival' e não na região de colapso.

Se o átomo é preparado em uma superposição de estados, $s = 1$, para $t = 0$ a

dinâmica de ξ será bastante diferente. Nas fig.(2.12) e fig.(2.13) mostramos ξ em função do parâmetro λt para o campo preparado inicialmente em uma superposição par de estados coerentes, $r = 1$, e em um estado coerente, $r = 0$, respectivamente. Notemos, que para um estado coerente, o campo na cavidade manter-se-á quase puro, aumentando o grau da mistura ao longo do tempo. Esse resultado está de acordo com o comportamento da inversão atômica discutida por Zaheer e Zubairy[64] e D. Jonathan e K. Furuya et al.[65], onde a interferência destrutiva entre o dipolo atômico com os modos da cavidade inibe a transição entre os dois níveis. Desta forma, a inversão atômica não exhibe oscilações, ver fig.(2.4), e o campo permanece em um estado quase puro. Como mostrado por Gea-Banacloche[61, 62], pelo menos para campos de alta intensidade, sob essas circunstâncias o átomo e o campo evoluirão independentemente. Esse comportamento não é verdadeiro, no entanto, se o campo é inicialmente preparado em uma superposição de estados coerentes, $r = 1$. Devido à troca na fase do campo, não esperamos uma interferência destrutiva como no caso anterior. Na fig.(2.13) mostramos ξ para esta situação e pode ser observado que o campo permanece em um estado de mistura a maior parte do tempo, obtendo aproximadamente um estado puro na região de colapso entre os dois ‘revivals’. Nesse caso a interferência quântica entre os dois estados coerentes na soma da inversão atômica estará em fase, ver Eq.(2.36), e desta forma os ‘revivals’ são observados, como mostra a fig.(2.2), e a pureza do campo segue um padrão similar ao caso do estado coerente.

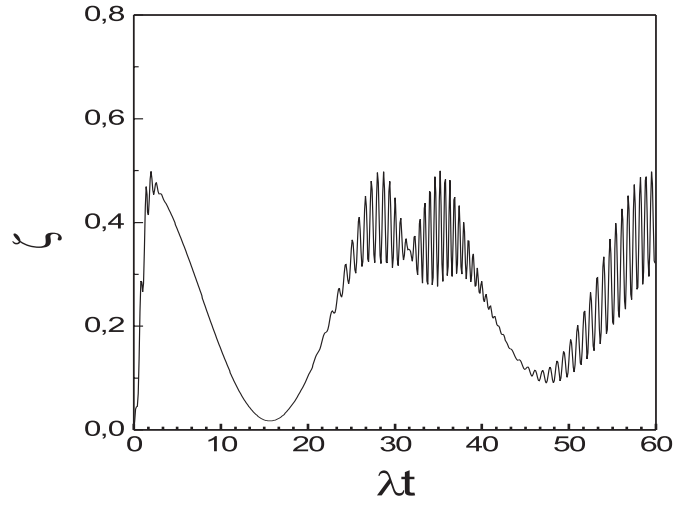


Figura 2.9: Pureza do campo para o campo inicialmente preparado em um estado coerente $|\alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em um estado excitado

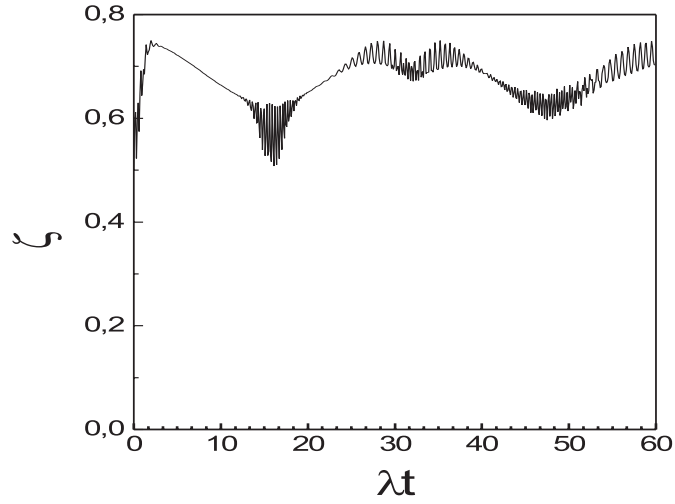


Figura 2.10: Pureza do campo para o campo inicialmente preparado em uma mistura estatística de estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|- \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em um estado excitado

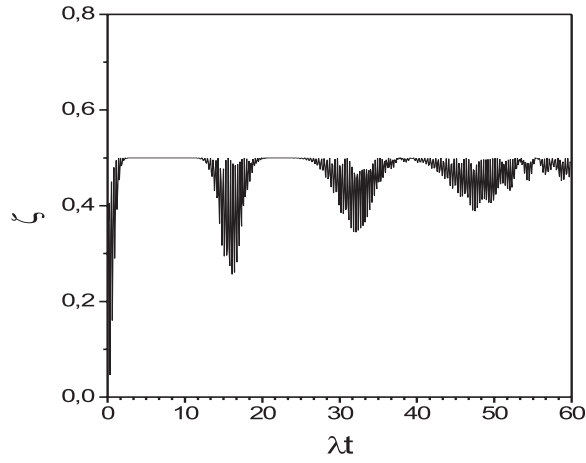


Figura 2.11: Pureza do campo para o campo inicialmente preparado em uma superposição par de estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|- \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em um estado excitado

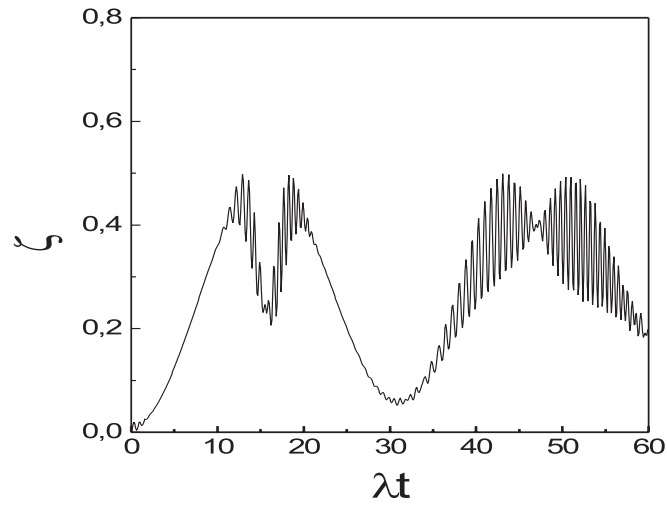


Figura 2.12: Pureza do campo para o campo inicialmente preparado em uma superposição par de estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|- \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em uma superposição de estado excitado e fundamental

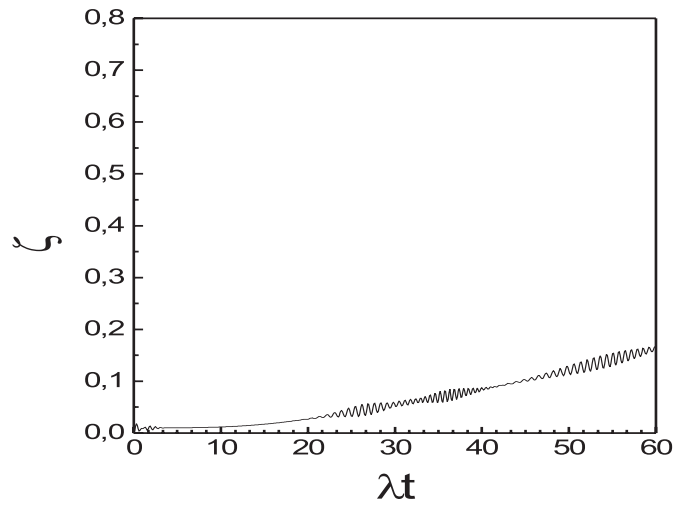


Figura 2.13: Pureza do campo para o campo inicialmente preparado em um estado coerente $|\alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em uma superposição de estado excitado e fundamental

Capítulo 3

Modelo Jaynes-Cummings dependente da intensidade

Além da simplicidade do modelo JCM, este tem permitido generalizações que podem ser aplicadas para diferentes circunstâncias e regimes[66]. Uma dessas generalizações é o modelo Jaynes-Cummings dependente da intensidade (DNJCM), introduzido por Buck e Sukumar[35]. Uma das características deste modelo é a presença de ‘revivals’ periódicos, ao contrário do que acontece no modelo Jaynes-Cummings usual. Além do mais, o vetor de estado representando a evolução do sistema, também, apresenta comportamento periódico. Esse comportamento significa que existirá um comportamento periódico para algum valor esperado. Um aspecto a ser enfatizado é que no DNJCM certos efeitos que dificilmente podem ser notados dentro do domínio do modelo Jaynes-Cummings usual (JCM) são facilmente percebidos, pois há uma intensificação de algumas características da dinâmica do sistema. Por causa dessa intensificação é possível discutir qualitativamente a dinâmica do sistema átomo-campo dado por uma interação tipo JCM, visto no capítulo anterior. Podemos enfatizar que o modelo exibe uma purificação de um estado puro para a metade do tempo de ‘revival’, como ocorre no JCM. No entanto, para uma mistura estatística este apresenta uma purificação perfeita, contrário ao JCM, porém para esse mesmo tempo o átomo inicialmente preparado em um estado puro estará em um estado de mistura, caracterizando uma diminuição da pureza de um subsistema e o aumento da pureza do

outro subsistema, mantendo o estado de mistura do sistema total. Também, é possível uma geração bem definida de estados tipo gato de Schrödinger [67]. Nesse capítulo, usando o DNJCM, discutiremos qualitativamente a dinâmica do modelo JCM.

3.1 Modelo

A Hamiltoniana para o modelo Jaynes-Cummings dependente da intensidade[35], em uma aproximação de onda girante, é dada por

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z + \hbar\lambda(\hat{R}\sigma_+ + \sigma_-\hat{R}^\dagger), \quad (3.1)$$

onde λ é a constante usual de acoplamento átomo-campo, σ_+ e σ_- são os operadores de levantamento e abaixamento dos estados atômicos, respectivamente, definidos anteriormente, $\hat{R} = \hat{a}(\hat{a}^\dagger\hat{a})^{1/2}$ e $\hat{R}^\dagger = (\hat{a}^\dagger\hat{a})^{1/2}\hat{a}^\dagger$ são os operadores do campo. Os operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ são os operadores usuais de criação e aniquilação. Devido ao fator $(\hat{a}^\dagger\hat{a})$, o termo de interação da Hamiltoniana é não linear nas variáveis do campo e representa um acoplamento dependente da intensidade. O termo correspondente a interação na Eq.(3.1),

$$\hat{H}_I = \hbar\lambda(\hat{R}\sigma_+ + \sigma_-\hat{R}^\dagger), \quad (3.2)$$

como no JCM causará transições entre os estados $|\uparrow\rangle|n\rangle$ e $|\downarrow\rangle|n+1\rangle$, na forma

$$(\hat{R}^\dagger\sigma_- + \hat{R}\sigma_+) |\uparrow\rangle|n\rangle = (n+1)|n+1\rangle|\downarrow\rangle, \quad (3.3)$$

$$(\hat{R}^\dagger\sigma_- + \hat{R}\sigma_+) |\downarrow\rangle|n+1\rangle = (n+1)|n\rangle|\uparrow\rangle,$$

porém neste caso a interação levará a uma frequência de Rabi $\Omega_R \propto (n+1)$ e desta forma comensurável. Essa comensurabilidade será responsável pelo comportamento periódico da dinâmica do sistema e também por outros aspectos que serão discutidos em seguida.

3.2 Dinâmica do sistema

A dinâmica do sistema pode ser estudada de diferentes maneiras. O método mais conveniente para o nosso propósito, nessa seção, é o método do operador densidade. Esse método é bastante geral, visto que a partir dele podemos, também, estudar a dinâmica de misturas estatísticas. A solução para a evolução temporal do operador densidade para o sistema átomo-campo é análoga à evolução do operador densidade do modelo Jaynes-Cummings usual[68]. A evolução temporal do operador densidade seguirá uma evolução unitária e pode ser escrito como

$$\hat{\rho}(t) = U(t)\hat{\rho}(0)U^\dagger(t), \quad (3.4)$$

onde $U(t)$ é o operador de evolução temporal, o qual na representação de interação é dado por

$$\hat{U}^\dagger(t) = \exp[i\lambda(\hat{R}^\dagger\sigma_- + \sigma_+\hat{R})t]. \quad (3.5)$$

Escrevendo o operador de evolução temporal na forma matricial, na base atômica, e expandindo $\hat{U}^\dagger$ em série de Taylor e usando as identidades

$$\begin{pmatrix} 0 & \hat{R} \\ \hat{R}^\dagger & 0 \end{pmatrix}^{2m} = \begin{pmatrix} [\hat{R}\hat{R}^\dagger]^m & 0 \\ 0 & [\hat{R}^\dagger\hat{R}]^m \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \hat{R} \\ \hat{R}^\dagger & 0 \end{pmatrix}^{2m+1} = \begin{pmatrix} 0 & [\hat{R}\hat{R}^\dagger]^m\hat{R} \\ (\hat{R}^\dagger\hat{R})^m\hat{R}^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

com m inteiro, obtemos

$$\hat{U}^\dagger(t) = \begin{pmatrix} \hat{C}_{n+1}(t) & i\hat{S}_{n+1}(t)\hat{R} \\ i\hat{S}_n(t)\hat{R}^\dagger & \hat{C}_n(t) \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

onde definimos

$$\hat{C}_{n+1} = \cos(\lambda t\sqrt{\hat{R}\hat{R}^\dagger}), \quad \hat{C}_n = \cos(\lambda t\sqrt{\hat{R}^\dagger\hat{R}}), \quad (3.8)$$

$$\hat{S}_{n+1} = \frac{\sin(\lambda t\sqrt{\hat{R}\hat{R}^\dagger})}{\sqrt{\hat{R}\hat{R}^\dagger}}, \quad \hat{S}_n = \frac{\sin(\lambda t\sqrt{\hat{R}^\dagger\hat{R}})}{\sqrt{\hat{R}^\dagger\hat{R}}}.$$

Especificaremos agora o estado inicial do sistema. Como no JCM consideraremos que o átomo pode ser inicialmente preparado em um estado de superposição,

$$|\Psi(0)\rangle_a = \frac{1}{(1+s^2)^{1/2}} (|\uparrow\rangle + s|\downarrow\rangle) \quad (3.9)$$

de forma que o operador densidade inicial do sistema (átomo + campo) possa ser escrito como

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(0) &= \hat{\rho}_a(0) \otimes \hat{\rho}_f(0) \\ &= \frac{1}{(1+s^2)} \begin{pmatrix} \hat{\rho}_f(0) & s\hat{\rho}_f(0) \\ s\hat{\rho}_f(0) & s^2\hat{\rho}_f(0) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

com $s = \pm 1$, para o átomo em uma superposição de estado excitado e fundamental, e $s = 0$, para o átomo inicialmente preparado em um estado excitado. Como no capítulo anterior, consideramos que o átomo e o campo estão não correlacionados para o tempo $t = 0$.

Agora podemos calcular a evolução temporal do operador densidade para o sistema. Inserindo as equações (3.7) e (3.10) na Eq.(3.4) obtemos o seguinte resultado

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{(1+s^2)} \begin{pmatrix} \hat{A}\hat{\rho}_f(0)\hat{A}^\dagger & \hat{A}\hat{\rho}_f(0)\hat{B}^\dagger \\ \hat{B}\hat{\rho}_f(0)\hat{A}^\dagger & \hat{B}\hat{\rho}_f(0)\hat{B}^\dagger \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

onde definimos

$$\hat{A} = \hat{C}_{n+1} - is\hat{S}_{n+1}\hat{R}, \quad (3.12)$$

$$\hat{B} = s\hat{C}_n - i\hat{R}^\dagger\hat{S}_{n+1}.$$

Como pode ser observado, a formulação para a interação dependente da intensidade é completamente análoga ao caso usual, trocando a ($a^\dagger$) por R ($R^\dagger$). Porém, a forma dos operadores R ($R^\dagger$) levará a aspectos interessantes na dinâmica do sistema, tornando possível uma discussão qualitativa do modelo Jaynes-Cummings usual.

Usando o operador densidade $\hat{\rho}(t)$ poderemos calcular todos os valores esperados e demais quantidades que necessitemos para discutir a dinâmica do sistema átomo-campo. A dinâmica de cada sub sistema separadamente pode ser obtida a partir do traço parcial de $\hat{\rho}(t)$, como já visto anteriormente. No JCM notamos que vários aspectos da dinâmica dos sub sistemas, átomo e campo, estão relacionadas entre si, por exemplo: para o tempo de ‘revival’ há uma recombinação completa dos ramos da função Q , significando que a divisão desta está relacionada com o colapso e a sua recombinação com os ‘revivals’ das oscilações de Rabi. No entanto, devemos ser cuidadosos quando estivermos nos referindo a campos preparados em uma mistura estatística.

Na seção seguinte, discutiremos a dinâmica atômica e do campo. No caso do átomo, calcularemos a inversão atômica e a pureza deste; para o campo calcularemos a evolução da função Q e a pureza. A partir dessa dinâmica faremos uma discussão qualitativa da dinâmica átomo-campo em uma interação tipo Jaynes-Cummings, apresentado no capítulo anterior.

3.2.1 Dinâmica atômica

Discutiremos aqui a dinâmica atômica. Inicialmente calcularemos a inversão atômica e em seguida calcularemos a pureza do estado do átomo.

Inversão atômica

Como definido anteriormente, seção 2.2.2, a inversão atômica é dada por

$$W(t) = |\langle \Psi(t) | \uparrow \rangle|^2 - |\langle \Psi(t) | \downarrow \rangle|^2. \quad (3.13)$$

Arrumando convenientemente a expressão acima, obtemos

$$W(t) = \langle \Psi(t) | (| \uparrow \rangle \langle \uparrow | - | \downarrow \rangle \langle \downarrow |) | \Psi(t) \rangle, \quad (3.14)$$

onde o termo dentro do parentese é a matriz de Pauli σ_z . Desta forma, a inversão atômica pode ser escrita como o valor médio do operador atômico σ_z , ou seja

$$W(t) = \langle \sigma_z \rangle. \quad (3.15)$$

O valor médio de um operador $\hat{O}_B$ que atua sobre o subespaço B é dado por

$$\langle \hat{O}_B \rangle = Tr_B \{ \hat{\rho} \hat{O}_B \}. \quad (3.16)$$

Na representação de operador densidade, a inversão atômica é dada por

$$W(t) = Tr[\hat{\rho}(t)(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)]. \quad (3.17)$$

Inserindo o operador densidade, Eq.(3.11), em (3.17) e efetuando o traço obtemos

$$W(t) = \frac{1}{(1+s^2)} \sum_{n=0}^{\infty} [\langle n | \hat{A} \hat{\rho}_f(0) \hat{A}^\dagger | n \rangle - \langle n | \hat{B} \hat{\rho}_f(0) \hat{B}^\dagger | n \rangle]. \quad (3.18)$$

Semelhante ao modelo Jaynes-Cummings usual, a dinâmica atômica é muito sensível à estatística inicial do campo. Se o campo for preparado inicialmente em um estado de número $|n\rangle$, a inversão apresentará oscilações de Rabi. No entanto, se o campo for preparado inicialmente em um estado coerente $|\alpha\rangle$, as oscilações serão moduladas periodicamente e exibirão colapsos e ‘revivals’.

Analisaremos aqui, o caso em que o campo é inicialmente preparado em uma superposição de estados coerentes

$$\hat{\rho}(0) = A [|\alpha\rangle\langle\alpha| + r^2 |-\alpha\rangle\langle-\alpha| + r(|-\alpha\rangle\langle\alpha| + |\alpha\rangle\langle-\alpha|)], \quad (3.19)$$

onde $A = [1 + r^2 + 2r \exp(-2\alpha^2)]^{(-1)}$, com α real, e $r = -1, 0, 1$, como já definido anteriormente e em uma mistura estatística de estados coerentes

$$\hat{\rho}(0) = \frac{1}{2} (|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|). \quad (3.20)$$

A sensibilidade do modelo à estatística do campo será um dos nossos pontos de discussão. Por simplicidade consideraremos que o campo na cavidade para o tempo $t = 0$ é preparado em um estado coerente par ($r = 1$) ou em um estado coerente ímpar ($r = -1$). Estamos interessados em analisar o comportamento do sistema, átomo-campo, para um campo preparado inicialmente no estado de superposição, como descrito acima, ou em uma mistura estatística de estados coerentes.

Consideraremos inicialmente que o campo é preparado em uma mistura estatística de estados coerentes, com operador densidade dado por (3.20). Usando (3.20) na Eq.(3.18), a inversão atômica será

$$W_{me}(t) = \frac{1}{(1 + s^2)} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{me} \left\{ \cos[2\lambda t(n + 1)] - s^2 \cos(2\lambda tn) \right\}, \quad (3.21)$$

onde $P_n^{me} = \frac{e^{-\alpha^2} \alpha^{2n}}{n!}$ é a distribuição de Poisson, neste caso para uma mistura estatística, por simplicidade consideramos α real. Devido a comensurabilidade da frequência de Rabi, o somatório acima pode ser escrito em uma forma fechada, dando

$$W_{me}(t) = \frac{1}{(1 + s^2)} \exp[-2\alpha^2 \sin^2(\lambda t)] \left\{ \cos[\alpha^2 \sin(2\lambda t) + 2\lambda t] - s^2 \cos[\alpha^2 \sin(2\lambda t)] \right\}. \quad (3.22)$$

Para o caso em que o campo é preparado em uma superposição de estados coerentes dado por (3.19), a inversão atômica pode ser escrita de maneira semelhante a Eq.(3.22), substituindo (3.19) na Eq.(3.18), obtendo

$$W_{sc}(t) = \frac{1}{(1 + s^2)} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{sc} \left\{ \cos[2\lambda t(n + 1)] - s^2 \cos(2\lambda tn) \right\}, \quad (3.23)$$

mas com

$$P_n^{sc} = \frac{\exp(-\alpha^2) \alpha^{2n} [1 + r(-1)^n]^2}{n!(1 + r^2 + 2r \exp(-\alpha^2))}, \quad (3.24)$$

a distribuição de fótons para o campo inicialmente preparado no estado de superposição de estados coerentes. Da mesma maneira que na expressão para W_{me} , a expressão acima

pode ser somada de forma fechada, dando

$$\begin{aligned}
 W_{sc}(t) = & \frac{[1 + r^2 + 2r \exp(-2\alpha^2)]^{(-1)}}{(1 + s^2)} \\
 & \left\{ (1 + r^2) \exp[-2\alpha^2 \sin^2(\lambda t)] \left\{ \cos[\alpha^2 \sin(2\lambda t) + 2\lambda t] - s^2 \cos[\alpha^2 \sin(2\lambda t)] \right\} + \right. \\
 & \left. 2r \exp[-2\alpha^2 \cos^2(\lambda t)] \left\{ \cos[\alpha^2 \sin(2\lambda t) - 2\lambda t] - s^2 \cos[\alpha^2 \sin(2\lambda t)] \right\} \right\}. \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

Comparando as expressões para W_{me} e W_{sc} pode ser observado que para o parâmetro $r = 0$ essas duas equações são idênticas, como era esperado, pois consideramos uma mistura estatística de estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$ e desta forma a inversão atômica é a mesma que para o caso em que o campo foi preparado em um estado coerente. Os fenômenos de colapsos e ‘revivals’ são determinados pela distribuição de número de fótons do campo e como a distribuição de fótons para o campo preparado em um estado coerente e em uma mistura estatística são iguais, esta apresenta o mesmo comportamento para ambos os casos.

Analisaremos a dinâmica do sistema atômico considerando que o átomo é preparado inicialmente no estado excitado $|\uparrow\rangle$, ou seja $s = 0$. Nas figuras (3.1)-(3.2) são mostradas a inversão atômica como função do parâmetro λt , onde pode ser observado uma troca periódica entre o estado excitado $|\uparrow\rangle$ e o estado fundamental $|\downarrow\rangle$. Na fig.(3.1) o campo foi inicialmente preparado em uma mistura estatística, Eq.(3.20), e nas figuras (3.2) e (3.3) o campo foi preparado em uma superposição de estados coerentes par e ímpar, Eq.(3.19), respectivamente. Como pode ser observado, a diferença mais óbvia entre o campo preparado em uma mistura estatística e em uma superposição de estados coerentes é que no segundo caso o tempo de ‘revival’ ocorrerá aproximadamente na metade do tempo de ‘revival’ de quando o campo é preparado em uma mistura estatística. Esse efeito é devido a interferência entre os dois estados coerentes na superposição. Essa diferença, também, pode ser observada no modelo Jaynes-Cummings usual. Os colapsos são causados pela defasagem dos vários termos nas expressões (3.22) e (3.25). O tempo

em que o ‘revival’ ocorre pode ser estimado calculando o tempo em que os termos vizinhos estarão novamente em fase para $n \approx \bar{n}$ [69]. Esse tempo é dado por

$$t_r^{me}[2\lambda(\bar{n} + 1) - 2\lambda\bar{n}] = 2\pi. \quad (3.26)$$

Esse argumento não é válido para o caso da superposição de estados coerentes, pois P_n^{sc} é zero para n par (ímpar) no caso de termos um estado coerente ímpar (par). A diferença na fase dos dois termos vizinhos não nulos será dado por

$$t_r^{sc}[2\lambda(\bar{n} + 2) - 2\lambda\bar{n}] = 2\pi, \quad (3.27)$$

o qual é justamente

$$t_r^{sc} = \frac{t_r^{me}}{2} = \frac{\pi}{2\lambda}. \quad (3.28)$$

A expressão acima mostra o comportamento periódico para a dinâmica atômica. Essa expressão é válida tanto para o estado coerente par, bem como para o estado coerente ímpar. Por outro lado, quando comparamos a dinâmica do átomo para o campo preparado inicialmente em uma superposição par ou ímpar de estados coerentes, notamos que para o campo preparado em uma superposição par, o átomo inicialmente preparado em um estado excitado sofre uma inversão completa, para o primeiro tempo de ‘revival’, ver figuras (3.2) e (3.3). Como veremos mais adiante na discussão da dinâmica do campo, a troca do estado atômico é acompanhada de uma troca do estado do campo (transição de um estado par para um estado ímpar). Essa transição simultânea do estado atômico e do campo é uma consequência direta da conservação da energia total do sistema.

A dinâmica da inversão atômica aqui apresentada pode ser interpretada como uma intensificação da dinâmica atômica do JCM. Se compararmos, ambas, as dinâmicas notaremos que no caso do campo em uma superposição par, para o JCM observaremos que para o primeiro ‘revival’ o estado atômico se aproxima do estado fundamental, caracterizando uma tendência a uma inversão completa do estado atômico, nesse mesmo

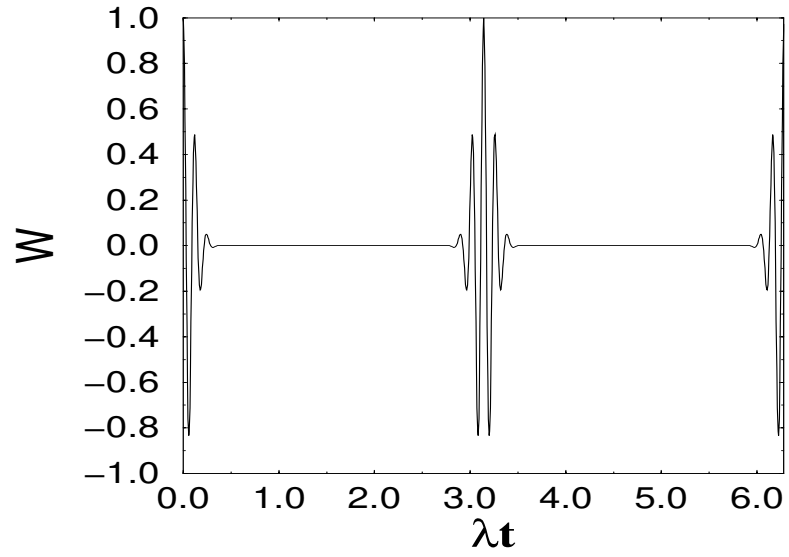


Figura 3.1: Inversão atômica para o campo inicialmente preparado em uma mistura estatística de estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em um estado excitado

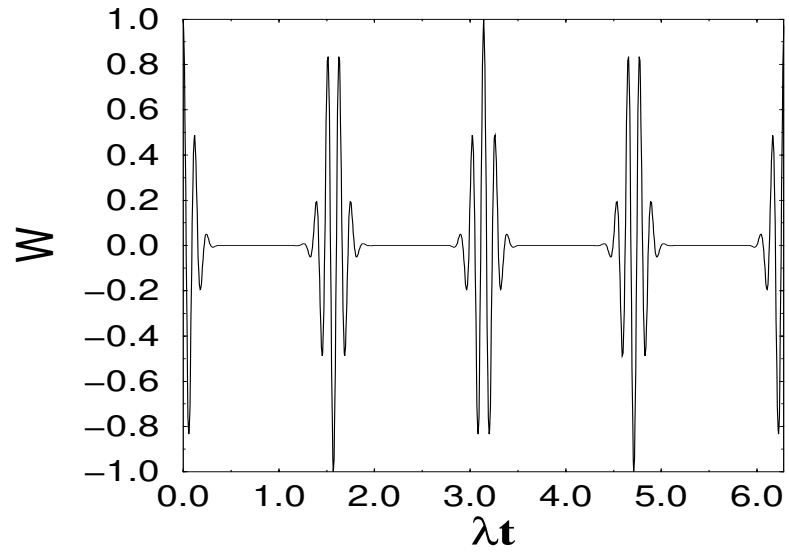


Figura 3.2: Inversão atômica para o campo inicialmente preparado em uma superposição par de estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em um estado excitado

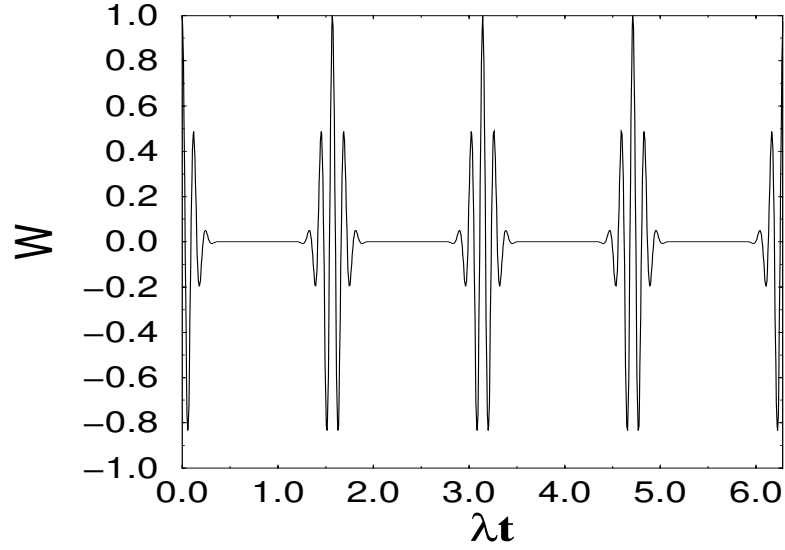


Figura 3.3: Inversão atômica para o campo inicialmente preparado em uma superposição ímpar de estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|- \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em um estado excitado

tempo o campo na cavidade, inicialmente em um estado par aproximará-se de um estado ímpar, trocando o seu estado. A troca do estado do campo será melhor discutida na dinâmica do campo (subseção 3.2.2).

Pureza atômica

Como no Cap. 2, nossa discussão será baseada no conceito de entropia quântica. Analisaremos a pureza atômica usando o parâmetro ξ definido como

$$\xi(t) = 1 - Tr[\hat{\rho}_a^2]. \quad (3.29)$$

Para discutirmos a pureza atômica é necessário calcularmos o operador densidade reduzido do átomo. Este pode ser obtido calculando o traço, nas variáveis do campo, do operador densidade total do sistema dado pela Eq.(3.11) obtendo

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_a(t) &= Tr_f[\hat{\rho}(t)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{\rho}(t) | n \rangle \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(1+s^2)} \begin{pmatrix} \lambda_{11}(t) & \lambda_{12}(t) \\ \lambda_{21}(t) & \lambda_{22}(t) \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Da Eq.(3.11) para o operador densidade total do sistema obtemos que

$$\lambda_{11}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{A} \hat{\rho}_f(0) \hat{A}^\dagger | n \rangle, \quad \lambda_{12}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{A} \hat{\rho}_f(0) \hat{B}^\dagger | n \rangle \quad (3.31)$$

$$\lambda_{21}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{B} \hat{\rho}_f(0) \hat{A}^\dagger | n \rangle, \quad \lambda_{22}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{B} \hat{\rho}_f(0) \hat{B}^\dagger | n \rangle,$$

onde os operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ já foram definidos anteriormente.

Calculemos agora os elementos de matriz λ_{ij} para o campo preparado em uma mistura estatística de estados coerentes. Para este estado do campo,

$$\lambda_{11}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle n | \alpha \rangle|^2 \left\{ C_{n+1}^2 + s^2 \frac{\alpha^2}{n+1} S_{n+1}^2 \right\} \quad (3.32)$$

$$\lambda_{22}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle n | \alpha \rangle|^2 \left\{ s^2 C_n^2 + \frac{n}{\alpha^2} S_n^2 \right\} \quad (3.33)$$

$$\lambda_{21}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle n | \alpha \rangle|^2 s \left\{ C_{n+1} C_n + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} S_{n+1} S_n \right\}$$

$$\lambda_{12}(t) = \lambda_{21}^*(t).$$

Usando (3.30) na expressão para a pureza e calculando o traço obtemos para a pureza atômica

$$\xi(t) = 1 - \frac{1}{(1+s^2)^2} [\lambda_{11}^2 + \lambda_{22}^2 + 2\lambda_{12}^2 \lambda_{21}^2]. \quad (3.34)$$

Na fig.(3.4) mostramos a evolução temporal da pureza atômica, para o campo inicialmente preparado em uma mistura e o átomo em um estado puro. A medida que o tempo evolui o átomo se aproxima de um estado de mistura, com valor máximo para a metade do tempo de ‘revival’, seguindo para um estado puro. Esse comportamento se repete periodicamente ao longo do tempo. Na seção seguinte, para a dinâmica do campo mostraremos que para a metade do tempo de ‘revival’ o campo, preparado em uma mistura, encontra-se em um estado puro.

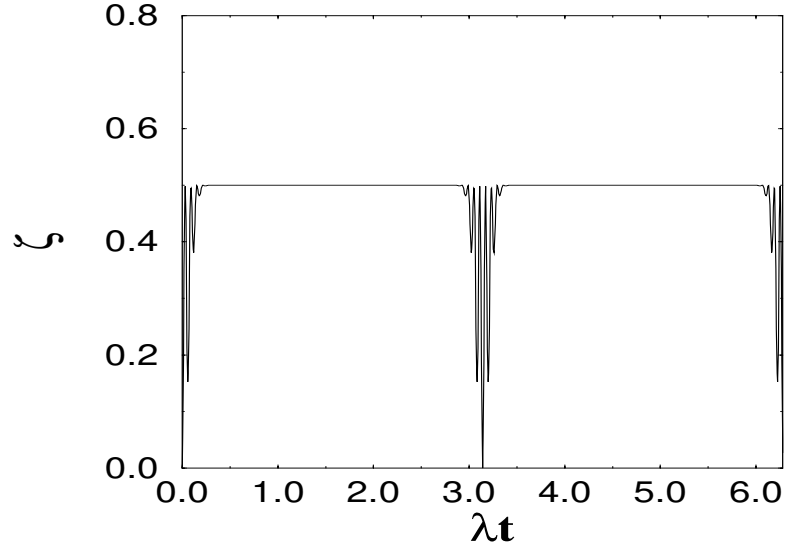


Figura 3.4: Pureza atômica com o campo inicialmente preparado em uma mistura estatística de estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|- \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo preparado inicialmente em um estado puro excitado

3.2.2 Dinâmica do campo

Na seção anterior discutimos a dinâmica atômica no modelo Jaynes-Cummings dependente da intensidade. Mostramos que a inversão é sensível à estatística do campo, apresentando colapsos e ‘revivals’. Mostramos também, que no caso do campo preparado em uma superposição par, o átomo, para o primeiro ‘revival’, inverte completamente o seu estado inicial e no caso do campo preparado em uma mistura, o átomo encontra-se em um estado de mistura, para a metade do tempo de ‘revival’. Nesta seção discutiremos a dinâmica do sistema focalizando nossa atenção na dinâmica do campo. Para discutirmos a dinâmica do campo é necessário calcularmos o operador densidade reduzido deste. Este pode ser obtido facilmente, calculando o traço, nas variáveis atômicas, do operador densidade total do sistema dado pela Eq.(3.11) obtendo

$$\hat{\rho}_f(t) = \text{Tr}_a[\rho(t)]$$

$$= \hat{A}\hat{\rho}_f(0)\hat{A}^\dagger + \hat{B}\hat{\rho}_f(0)\hat{B}^\dagger. \quad (3.35)$$

Inicialmente discutiremos a troca do estado do campo, preparado em um estado de superposição, e a purificação deste, quando preparado em uma mistura. Em seguida discutiremos o comportamento do campo a partir da análise da entropia e do ponto de vista da distribuição de quase probabilidade, como apresentada por Eiselt e Risken[60].

Transição de um estado coerente par para um estado coerente ímpar

Como vimos anteriormente, quando o campo é preparado em uma superposição par de estados coerentes, este provoca uma inversão completa no estado atômico. Nessa seção veremos que essa inversão é acompanhada de uma mudança do estado do campo, de um estado coerente par para um estado coerente ímpar. Analisaremos esse comportamento estudando a dinâmica do vetor de estado do campo.

Considerando o campo inicialmente preparado em uma superposição par ou ímpar de estados coerentes, temos

$$\hat{\rho}_f(0) = |\Phi\rangle\langle\Phi|, \quad (3.36)$$

com

$$|\Phi\rangle = N^{1/2}(|\alpha\rangle + r|-\alpha\rangle), \quad (3.37)$$

onde $r = 1, -1$ para os estados coerentes par e ímpar, respectivamente e N é uma constante de normalização.

A dinâmica do vetor de estado do campo pode ser obtida a partir da Eq.(3.35), que descreve a dinâmica do operador densidade reduzido do campo. Aplicando os operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ no estado inicial do campo, considerando o átomo inicialmente no estado excitado, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{A}|\Phi\rangle &= N^{1/2}\hat{C}_{n+1} [|\alpha\rangle + r|-\alpha\rangle] \\ &= N^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} [\langle n|\alpha\rangle + r\langle n|-\alpha\rangle] \cos[\lambda t(n+1)] |n\rangle \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}
&= |\phi(t)\rangle_n \\
\hat{B}|\Phi\rangle &= -iN^{1/2}\hat{R}\hat{S}_{n+1}[|\alpha\rangle + r|-\alpha\rangle] \\
&= iN^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{\alpha}[\langle n|\alpha\rangle - r\langle n|-\alpha\rangle]\sin(\lambda tn)|n\rangle \\
&= |\phi(t)\rangle_{n+1}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Comparando esse resultado com o vetor de estado total do sistema, ver JCM, podemos escrever

$$|\Psi(t)\rangle = |\phi(t)\rangle_n|\uparrow\rangle + |\phi(t)\rangle_{n+1}|\downarrow\rangle. \tag{3.40}$$

Para analisarmos o comportamento do campo, quando o átomo sofre uma inversão completa, discutiremos o vetor de estado para o tempo $t = \pi/2\lambda$, primeiro tempo de ‘revival’,

$$|\phi(t = \frac{\pi}{2\lambda})\rangle_n = N^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}[\langle n|\alpha\rangle + r\langle n|-\alpha\rangle]\cos\left[(n+1)\frac{\pi}{2}\right]|n\rangle \tag{3.41}$$

$$|\phi(t = \frac{\pi}{2\lambda})\rangle_{n+1} = iN^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{\alpha}[\langle n|\alpha\rangle - r\langle n|-\alpha\rangle]\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)|n\rangle. \tag{3.42}$$

Escrevendo a superposição de estado coerente

$$|\pm\beta\rangle = \frac{1}{2i}\left(|\pm\alpha e^{i\gamma}\rangle - |\pm\alpha e^{-i\gamma}\rangle\right), \tag{3.43}$$

notemos que

$$\langle n|\beta\rangle = \langle n|\alpha\rangle\left(\frac{e^{in\gamma} - e^{-in\gamma}}{2i}\right) \tag{3.44}$$

$$\langle n|-\beta\rangle = \langle n|-\alpha\rangle\left(\frac{e^{in\gamma} - e^{-in\gamma}}{2i}\right).$$

Usando as expressões acima, com $\gamma = \frac{\pi}{2}$, no vetor de estado do campo, obtemos

$$|\phi(t = \frac{\pi}{2\lambda})\rangle_n = i\frac{N^{1/2}}{2}(1-r)(|i\alpha\rangle - | -i\alpha\rangle), \tag{3.45}$$

$$|\phi(t = \frac{\pi}{2\lambda})\rangle_{n+1} = -\frac{N^{1/2}}{2}(1+r)(|i\alpha\rangle - | -i\alpha\rangle),$$

no limite $\bar{n} \gg 1$.

Do resultado acima podemos observar que para o campo preparado inicialmente em um estado coerente par ($r = 1$), este será encontrado no estado

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|i\alpha\rangle - |-i\alpha\rangle), \quad (3.46)$$

ou seja um estado tipo estado coerente ímpar. Porém, para o segundo tempo de ‘revival’, $t_r = \pi/\lambda$, este retornará para o seu estado inicial, um estado coerente par. Acontecerá desta forma uma troca no estado do campo. Por outro lado, se o campo for preparado inicialmente em um estado coerente ímpar ($r = -1$), nunca acontecerá uma transição entre os estados ímpar e par; o campo retornará para o seu estado inicial, como pode ser observado na Eq.(3.45). Como mencionamos anteriormente na dinâmica atômica essa transição do campo preparado em uma superposição par para uma superposição ímpar é uma consequência direta da conservação da energia total do sistema.

Purificação do campo

Considerando agora o caso do campo em uma mistura estatística. A dinâmica do campo é dada pela Eq.(3.35). Como no caso da superposição de estados coerentes, consideraremos o átomo inicialmente no estado excitado.

Aplicando os operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ nos estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|- \alpha\rangle$ e usando em (3.35), obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_f \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right) &= -\frac{1}{2} (|i\alpha\rangle - |-i\alpha\rangle) (\langle i\alpha| - \langle -i\alpha|) \\ &= |\phi\rangle\langle\phi|, \end{aligned}$$

com

$$|\phi\rangle = \frac{1}{i\sqrt{2}} (|i\alpha\rangle - |-i\alpha\rangle), \quad (3.47)$$

ou seja um estado puro, tipo gato ímpar. Curiosamente, aqui, obtivemos uma purificação completa do campo inicialmente preparado em uma mistura estatística[36]. Recordemos,

que para a dinâmica atômica o átomo estará em um estado de mistura para esse tempo, ver fig.(3.4), caracterizando uma transferência de pureza entre os sub sistemas. O estado de mistura do sistema total é mantida. Os resultados apresentados nessa seção confirmam os resultados discutidos na dinâmica atômica[36].

Como veremos na discussão da dinâmica da função Q , o comportamento acima se dá porque ambos os estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|- \alpha\rangle$ produzem estados coerentes ímpares idênticos, para a metade do tempo de ‘revival’, originando uma superposição perfeita e dando origem a um estado puro. Por outro lado, apesar do campo estar em um estado puro, o átomo estará em um estado de mistura, mantendo assim o estado de mistura inicial do sistema, ver dinâmica atômica. Esse comportamento caracteriza uma troca de pureza entre os sub-sistemas. O campo transferirá para o átomo o seu estado de mistura.

Pureza do campo na cavidade

Como nas seções anteriores a nossa discussão será baseada no calculo do parâmetro ξ definido como

$$\xi(t) = 1 - Tr[\hat{\rho}_f^2(t)]. \quad (3.48)$$

Lembremos que para um estado puro $Tr\hat{\rho}^2 = 1$, corresponde a $\xi = 0$, e para um estado de mistura $Tr\hat{\rho}^2 < 1$, corresponde a $\xi > 0$.

Como já vimos na seção anterior, para o campo preparado em um estado puro ou em uma mistura de estados coerentes, este estará em um estado puro para o tempo $t = \frac{\pi}{2\lambda}$. Nessa seção, discutiremos a pureza do campo.

Consideraremos o campo inicialmente preparado em uma mistura estatística de estados coerentes (me)

$$\hat{\rho}_f(0) = \frac{1}{2} (|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|), \quad (3.49)$$

substituindo na Eq.(3.35) para o operador densidade do campo e fazendo uso da expressão

(3.48) obtemos

$$\xi_{me}(t) = 1 - \frac{1}{2(1+s^2)} \left[T_1^2 + T_{2,+}^2 + T_{2,-}^2 + |T_3|^2 + |T_{4,+}|^2 + |T_{4,-}|^2 + |T_{5,+}|^2 + |T_{5,-}|^2 \right], \quad (3.50)$$

onde escrevemos

$$T_1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^M (C_{n+1}^2 + \frac{s^2 \alpha^2}{n+1} S_{n+1}^2), \quad (3.51)$$

$$T_{2,\pm} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^M (\pm)^n (s^2 C_n^2 + S_{n+1}^2), \quad (3.52)$$

$$T_3 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^M (-1)^n (C_{n+1} - i \frac{s\alpha}{\sqrt{n+1}} S_{n+1})^2, \quad (3.53)$$

$$T_{4,\pm} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^M (\pm 1)^n (C_{n+1} \mp i \frac{s\alpha}{\sqrt{n+1}} S_{n+1})(sC_n + iS_{n+1}), \quad (3.54)$$

$$T_{5,\pm} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^M (\pm 1)^n (C_{n+1} \pm i \frac{s\alpha}{\sqrt{n+1}} S_{n+1})(sC_n + iS_{n+1}), \quad (3.55)$$

onde P_n^M é a distribuição de Poisson, já definida anteriormente. Nas figuras (3.5)-(3.8) mostramos a variação da pureza do campo em função do parâmetro λt , com o átomo inicialmente preparado no estado excitado ($s = 0$). Como pode ser observado na fig.(3.5), devido ao campo ser preparado inicialmente em uma mistura estatística, $\xi(0) = 0.5$, a medida que o tempo cresce, notamos um crescimento em ξ_{me} , seguido de um rápido decrescimento e se aproximando do zero (estado puro) para a metade do tempo de ‘revival’. Como já mencionado o estado total do sistema, átomo-campo, não estará em um estado puro, o que significa que o campo se encontra em um estado puro e o átomo em uma mistura estatística, ver fig.(3.4) que mostra a dinâmica da pureza atômica. Apesar desse comportamento não ser óbvio, esse será melhor discutido a partir do ponto de vista do espaço de fase, como mostraremos em seguida na discussão da função Q .

Consideremos agora o campo preparado em uma superposição de estados coerentes (sc), onde o operador densidade é dado por

$$\hat{\rho}_f(0) = A \left[|\alpha\rangle\langle\alpha| + r^2 |-\alpha\rangle\langle-\alpha| + r (|-\alpha\rangle\langle\alpha| + |\alpha\rangle\langle-\alpha|) \right], \quad (3.56)$$

com A já definido anteriormente. Como já enfatizado, o campo se encontra em um estado puro para os tempos $t = n\pi/\lambda$ ($n = 0, 1/2, 1, \dots$). Substituindo $\hat{\rho}_f(0)$ na Eq.(3.35) para o operador densidade do campo e fazendo uso da expressão (3.48) obtemos

$$\xi_{sc}(t) = 1 - \frac{A^2}{(1 + s^2)} (T_1^2 + T_2^2 + 2|T_3|^2), \quad (3.57)$$

onde definimos

$$T_1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (C_{n+1}^2 B_n^2 + \frac{s^2 \alpha^2}{n+1} S_{n+1}^2 D_n^2), \quad T_2 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (s^2 C_n^2 B_n^2 + \frac{n}{\alpha^2} S_n^2 D_n^2), \quad (3.58)$$

$$T_3 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (C_{n+1} B_n - i \frac{s\alpha}{\sqrt{n+1}} S_{n+1} D_n) (s C_n B_n + i \frac{\sqrt{n}}{\alpha} S_n D_n), \quad (3.59)$$

com $B_n = [1 + r(-1)^n]$ e $D_n = [1 - r(-1)^n]$.

Nas figuras (3.7) e (3.8), mostramos a variação da pureza do campo em função do tempo, com o átomo inicialmente preparado no estado excitado ($s = 0$). Como pode ser observado, o estado do campo oscila entre o estado puro e de mistura. Os estados puros ocorrem para os tempo de ‘revivals’ (ver estados do campo). Contrário à mistura, ambos, o átomo e o campo estão em um estado puro.

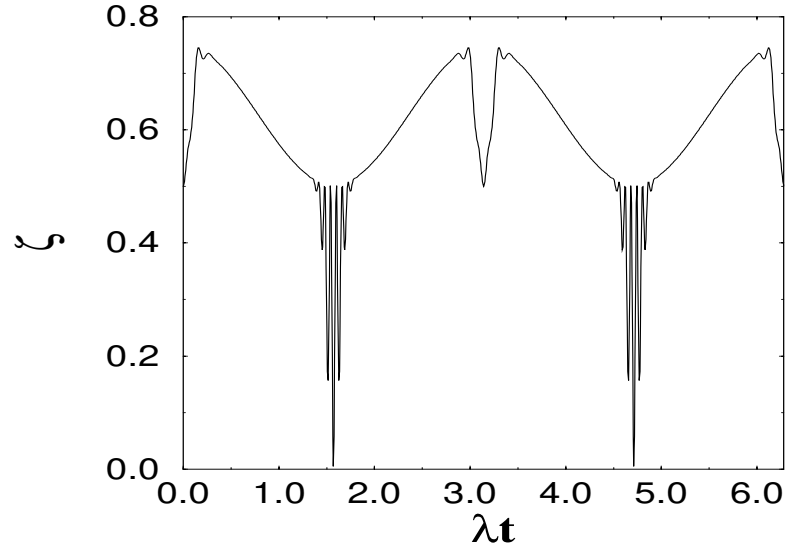


Figura 3.5: Pureza do campo para o campo inicialmente preparado em uma mistura estatística de estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|- \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em um estado excitado

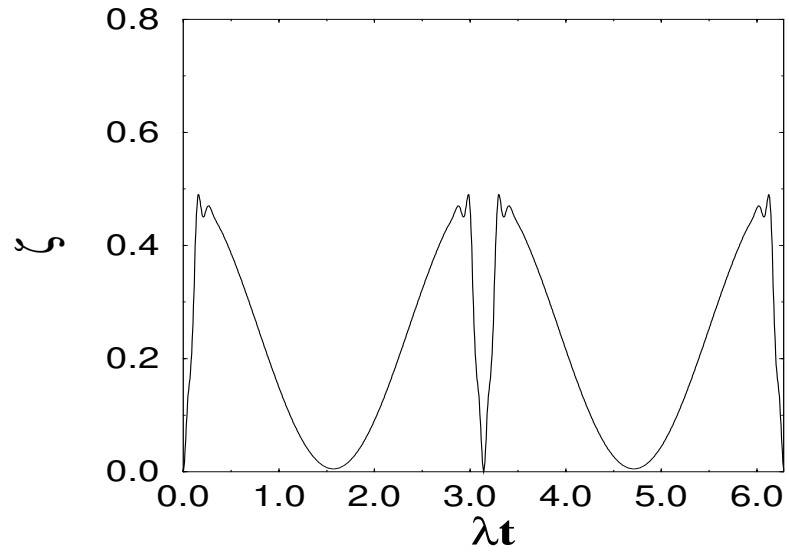


Figura 3.6: Pureza do campo para o campo inicialmente preparado em um estado coerente $|\alpha\rangle$ e o átomo em um estado excitado

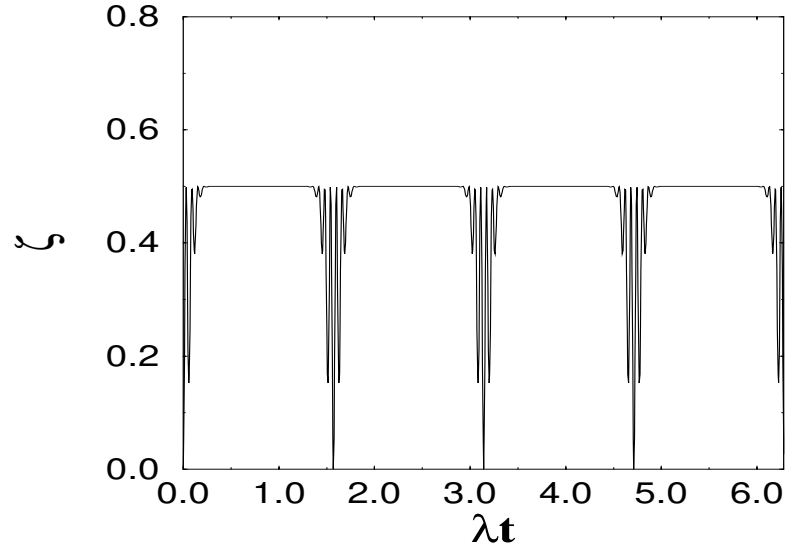


Figura 3.7: Pureza do campo para o campo inicialmente preparado em uma superposição par de estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|- \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em um estado excitado

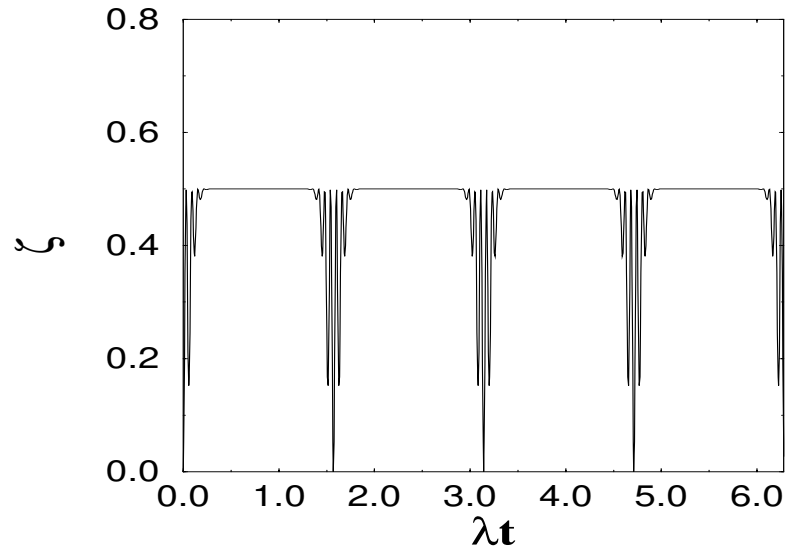


Figura 3.8: Pureza do campo para o campo inicialmente preparado em uma superposição ímpar de estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|- \alpha\rangle$ com $\alpha = 5$ e o átomo em um estado excitado

Evolução da função Q

Nessa seção discutiremos a dinâmica do campo a partir do comportamento da função Q no espaço de fase. Como já definida anteriormente, na dinâmica do JCM, esta pode ser escrita na forma

$$Q(\beta, t) = \frac{1}{\pi} \langle \beta | \hat{\rho}_f(t) | \beta \rangle, \quad (3.60)$$

onde $|\beta\rangle$ é um estado coerente com amplitude dada por $\beta = x + iy$.

Usando agora a equação para o operador densidade reduzido do campo dada por (3.35) na expressão para a função Q obtemos

$$Q(\beta, t) = \frac{1}{\pi} \left[\langle \beta | \hat{A} \hat{\rho}_f(0) \hat{A}^\dagger | \beta \rangle + \langle \beta | \hat{B} \hat{\rho}_f(0) \hat{B}^\dagger | \beta \rangle \right]. \quad (3.61)$$

Como na discussão da pureza do campo discutiremos aqui os casos do campo preparado em uma mistura e em um estado puro.

Consideraremos inicialmente o campo preparado em uma mistura estatística de estados coerentes, da Eq.(3.61) obtemos

$$Q^{me}(\beta, t) = \frac{1}{2\pi} \left[|S_{1,+}|^2 + |S_{1,-}|^2 + |S_{2,+}|^2 + |S_{2,-}|^2 \right]. \quad (3.62)$$

Para o campo preparado em uma superposição de estados coerentes, obtemos

$$Q^{sc}(\beta, t) = \frac{1}{2\pi} \left[|S_{1,+}|^2 + |S_{2,+}|^2 + r^2 (|S_{1,-}|^2 + |S_{2,-}|^2) + \right. \\ \left. (S_{1,+} S_{1,-}^* + S_{1,-} S_{1,+}^* + S_{2,+} S_{2,-}^* + S_{2,-} S_{2,+}^*) \right]. \quad (3.63)$$

Os termos S_i são definidos como

$$S_{1,\pm} = \langle \beta | \hat{A} | \pm \alpha \rangle \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-(|\beta|^2 + \alpha^2)/2] (\beta^* \alpha)^n}{n!} (\pm 1)^n (C_{n+1} \mp i s \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} S_{n+1}), \quad (3.64)$$

$$S_{2,\pm} = \langle \beta | \hat{B} | \pm \alpha \rangle \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-(|\beta|^2 + \alpha^2)/2] (\beta^* \alpha)^n}{n!} (\pm 1)^n (s C_n - i \frac{\beta^*}{\sqrt{n+1}} S_{n+1}), \quad (3.65)$$

onde usamos os operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ definidos anteriormente.

A função Q mostra muito claramente a dinâmica do campo. Já é bem conhecido que para um estado inicial coerente o colapso está associado com a divisão da função Q em dois ramos e que para a metade do tempo de ‘revival’, quando o campo se aproxima de um estado puro, os dois ramos estão completamente afastados[55, 60]. As fig(3.9) e fig(3.10) mostram os contornos da função Q para o campo em uma superposição de estados coerentes. Para o tempo $\lambda t = 0$ observamos claramente que os dois picos correspondem cada um a um estado coerente $|\alpha\rangle$ e $|- \alpha\rangle$. À medida que o tempo aumenta, os picos se separam em dois ramos contra girantes os quais colidem para o tempo de ‘revival’. No caso do campo preparado em uma mistura estatística, a dinâmica da função Q é a mesma que para o caso da superposição, porém os ramos contra girantes colidem na metade do tempo de ‘revival’ para a mistura, como mostra a fig.(3.12). Por termos iniciado o campo em uma mistura estatística, teremos ambas as possibilidades $|\alpha\rangle$ e $|- \alpha\rangle$ para o estado do campo e é esse aspecto que está sendo representado no espaço de fase. Porém, o campo estará em um único estado e esse estado será o estado $|\alpha\rangle$ ou $|- \alpha\rangle$. Isto significa que, para exatamente a metade do tempo de ‘revival’, haverá uma superposição dos ramos da função Q oriundos de picos diferentes e também nesse mesmo tempo o campo estará em um estado puro (ver purificação do campo). Por causa desta superposição, existirá unicamente um estado possível, um gato de Schrödinger.

Para melhor entendermos as superposições dos ramos da função Q e da purificação do campo preparado em uma mistura, discutiremos a dinâmica de cada estado coerente separadamente. Para o estado coerente $|\alpha\rangle$, à medida que o tempo aumenta, o pico representando a função Q no espaço de fase divide-se em dois ramos contra propagantes, representando os estados coerentes rotacionados $|e^{i\gamma}\alpha\rangle$ e $|e^{-i\gamma}\alpha\rangle$, fig.(3.11), com uma fase de rotação γ . O sinais (+) e (−) indicam uma rotação nos sentidos anti-horário e horário respectivamente. Para $\lambda t = \pi/2$, fig.(3.12) os ramos estão o mais afastado possível,

representando um estado puro [ver fig.(3.5)] dado por

$$|\beta\rangle = \frac{1}{2i} (|i\alpha\rangle - |-i\alpha\rangle) \quad (3.66)$$

[ver purificação do campo]. No tempo $\lambda t = \pi$, teremos as superposições dos ramos contrapropagantes, fig.(3.12), e para este mesmo tempo teremos o ‘revival’ da inversão atômica. Para o estado $|- \alpha\rangle$, o comportamento será análogo ao estado $|\alpha\rangle$, porém à medida que o tempo aumenta, o pico representando a função Q se divide em dois ramos contrapropagantes, representando os estados $|- e^{i\gamma}\alpha\rangle$ e $|- e^{-i\gamma}\alpha\rangle$, fig.(3.11). No tempo $\lambda t = \pi/2$, fig.(3.12) os ramos representam um estado puro dado por

$$|\beta\rangle = \frac{1}{2i} (|i\alpha\rangle - |-i\alpha\rangle), \quad (3.67)$$

e no tempo $\lambda t = \pi$ teremos a superposição dos ramos contrapropagantes, fig.(3.12), no tempo de ‘revival’.

Notemos que, para o tempo $\lambda t = \pi/2$ ambos os picos produzem estados puros idênticos e desta forma a superposição destes estados levará a um estado puro dado por

$$|\phi(\pi/2)\rangle = \frac{1}{i\sqrt{2}} (|i\alpha\rangle - |-i\alpha\rangle), \quad (3.68)$$

um gato ímpar.

A dinâmica da função Q discutida aqui pode ser usada para entendermos a dinâmica do JCM. Fica claro o significado das colisões dos ramos da função Q e a relação destes com o estado do campo durante a interação. A pureza do estado do campo para a metade do tempo de ‘revival’ pode ser interpretada de forma análoga ao caso DNJCM, porém devemos observar que ao contrário do DNJCM os ramos representando os estados $|\alpha\rangle$ e $|- \alpha\rangle$ não produzem estados puros idênticos para a metade do tempo de ‘revival’ [ver fig.(2.6)] e desta forma não teremos uma superposição perfeita no espaço de fase e conseqüentemente não teremos um estado puro para o campo.

A partir do modelo Jaynes-Cummings dependente da intensidade (DNJCM), discutimos a dinâmica do sistema átomo-campo em uma interação tipo JCM. Concluimos que: para a inversão atômica, no caso do campo preparado em uma superposição par (gato par), observamos que para o JCM o átomo inicialmente no estado excitado, para o primeiro ‘revival’ se aproxima do estado fundamental, caracterizando uma tendência para uma inversão completa e nesse mesmo tempo o campo se aproxima de um estado ímpar (gato ímpar), tentando assim uma troca no estado do campo. Porém, se o campo for preparado em um estado ímpar, não teremos uma transição entre os estados ímpar e par. Esse comportamento está relacionado com a conservação da energia total do sistema. Porém, para o caso do campo preparado em uma mistura, a não purificação deste no JCM, para a metade do tempo de ‘revival’, pode ser interpretada devido a não produção de estados puros idênticos para esse tempo.

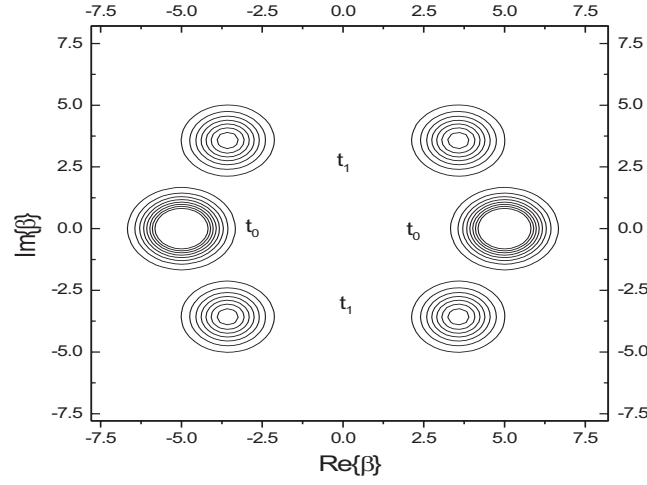


Figura 3.9: Contornos da função Q do campo na cavidade inicialmente preparado em uma superposição par de estados coerentes e o átomo em um estado excitado para tempos diferentes: 1) $t_0 = 0$, 2) $t_1 = t_r^{sc}/2$, com $\alpha = 5$

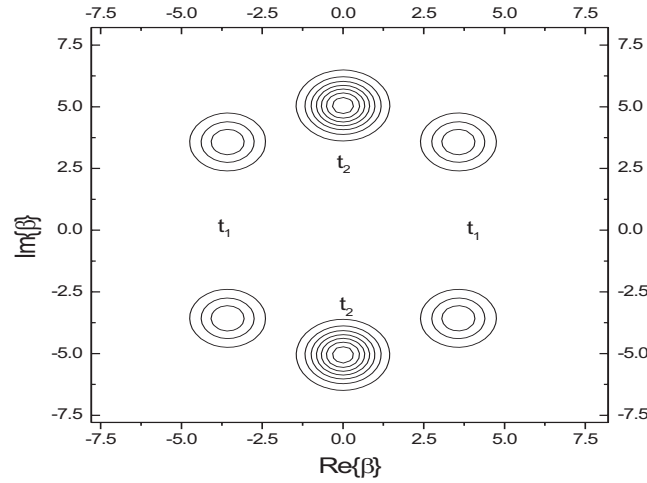


Figura 3.10: Contornos da função Q do campo na cavidade inicialmente preparado em uma superposição par de estados coerentes e o átomo em um estado excitado para tempos diferentes: 1) $t_1 = t_r^{sc}/2$, 2) $t_2 = t_r^{sc}$, com $\alpha = 5$

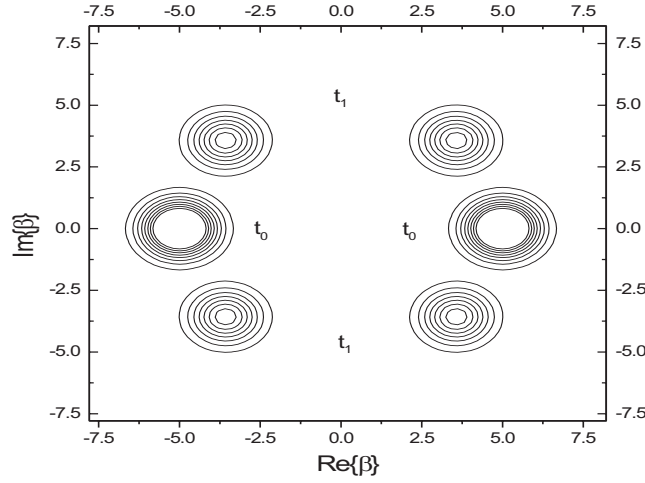


Figura 3.11: Contornos da função Q do campo na cavidade inicialmente preparado em uma mistura estatística de dois estados coerentes e o átomo em um estado excitado para tempos diferentes: 1) $t_0 = 0$ e 2) $t_1 = t_r^{me}/4$, com $\alpha = 5$

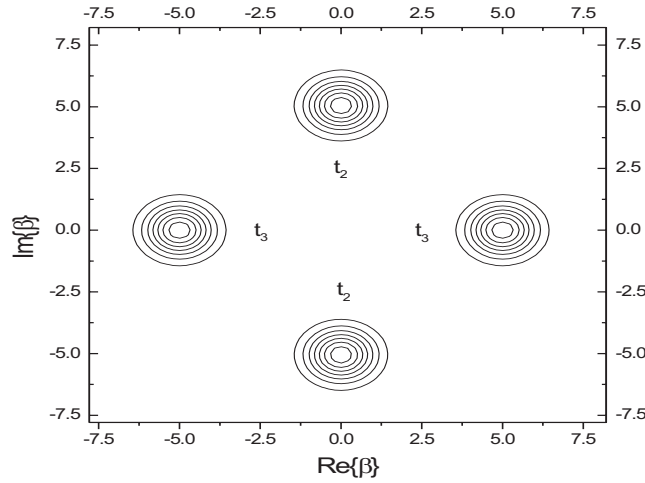


Figura 3.12: Contornos da função Q do campo na cavidade inicialmente preparado em uma mistura estatística de dois estados coerentes e o átomo em um estado excitado para tempos diferentes: 1) $t_2 = t_r^{me}/2$ e 2) $t_3 = t_r^{me}$, com $\alpha = 5$

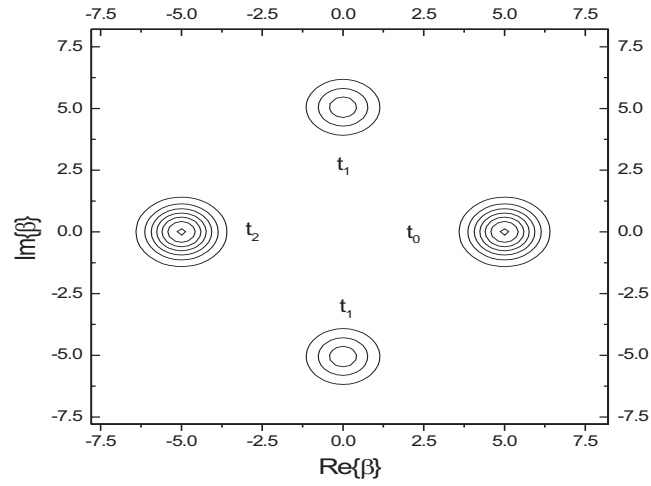


Figura 3.13: Contornos da função Q do campo na cavidade inicialmente preparado em um estado coerente e o átomo em um estado excitado para tempos diferentes: 1) $t_0 = 0$, 2) $t_1 = t_r^c/2$ e 3) $t_2 = t_r^c$, com $\alpha = 5$

Capítulo 4

Dinâmica de íons aprisionados

A possibilidade de manipular, aprisionar e retirar energia mecânica de átomos, usando lasers, têm revolucionado um grande número de áreas da física atômica e aberto completamente um novo campo de pesquisa. Embora, o efeito de pressão de radiação já fosse conhecido há muito tempo, o seu efeito mecânico era considerado insignificante devido a baixa intensidade das fontes de luz existentes. No entanto, esse pensamento foi modificado bruscamente após o desenvolvimento de lasers ‘narrow linewidth tunable’. Em 1975, Hänsch e Schawlow[70] e simultaneamente Wineland e Dehmelt[71] mostraram que uma fonte de luz poderia exercer uma força substancial sobre um átomo e ser usado para resfriá-lo. Alguns anos depois, o uso de lasers para aprisionar átomos neutros foi proposto por Ashkin[72]. Os primeiros trabalhos de resfriamento e aprisionamento foram realizados usando átomos de Na . Ainda em 1978 Wineland, Drullinger et al. realizaram o experimento pioneiro de resfriamento de íons utilizando íons de Mg^+ [73].

Um sistema de íons aprisionados em um potencial harmônico quantizado, interagindo com lasers pode ser descrito como um conjunto de osciladores quantizados interagindo com níveis internos de átomos de dois níveis. A taxa de decaimento do sistema pode ser satisfatoriamente desprezível quando comparamos com outros sistemas físicos, tais como o acoplamento átomo-campo em cavidades. Tipicamente, tempos de decaimento de íon podem ser da ordem de centenas de segundos. Nos sistemas quânticos, os

processos dissipativos aparecem como um dos grandes limitadores da manipulação experimental desses sistemas. Um outro aspecto importante é que o movimento do íon pode ser resfriado para o estado fundamental do potencial harmônico da armadilha. Este aspecto é importante porque para estudar fenômenos quânticos é preferível iniciar de um estado puro bem definido do sistema. A partir desse estado puro, estados não clássicos, análogos aos estados obtidos em óptica quântica, podem ser gerados. Como discutiremos em seguida, a partir do estado de movimento do íon de ${}^9\text{Be}^+$ estados de Fock, coerente e comprimidos foram gerados[32]. Por outro lado, existe uma analogia formal entre o movimento de íons em uma armadilha e a eletrodinâmica quântica de cavidades (QED), assim muitas das questões fundamentais da mecânica quântica podem ser investigadas usando esse aparato físico.

Um dos grandes atrativos para o estudo da dinâmica de íons resfriados é que, sob certas condições, esses podem ser facilmente realizados experimentalmente. Uma destas condições é conhecida como o limite de Lamb-Dicke (LDL). Nesse limite a dinâmica dos íons é reduzida ao modelo Jaynes-Cummings (JCM) ou similar. Além da possibilidade de estudar sistemas quânticos, íons aprisionados são promissores para a implementação experimental de portas quânticas, como já mostrado experimentalmente para um único íon[26]. No futuro, a partir da implementação de portas quânticas com vários íons poderá ser possível a realização de computadores quânticos, como proposto por Cirac e Zoller[24]. Porém, um fator limitador da implementação de portas lógicas são os efeitos de perdas de coerência. Por perda de coerência, nos referimos a limitações práticas que interferem na obtenção do estado quântico final. Essas limitações podem ser subdivididas em[74]: perda de coerência devido ao movimento do íon; perda de coerência dos níveis internos do íon; e perda de coerência por campos aplicados não ideais, os quais são responsáveis por operações lógicas. Esse efeito, em especial, é de particular importância na implementação de computadores quânticos, onde muitos íons e muitas manipulações coerentes são

necessárias.

Desta forma, é de grande interesse o estudo de limites práticos para a aplicação de métodos de controle coerente no aprisionamento de íons para: a geração e análise de estados não clássicos; a implementação de portas lógicas e computadores quânticos; e a geração de estados emaranhados.

Nesse capítulo, discutiremos a dinâmica de íons aprisionados e a geração de estados não clássicos a partir do movimento destes. Inicialmente faremos uma discussão rápida em relação a aprisionamento, tipos de armadilhas e processos de resfriamentos. Discutiremos os estados internos e de movimento do íon e em seguida discutiremos a dinâmica deste em um potencial harmônico. Aprofundaremos aqui a nossa análise sobre esse sistema e discutiremos a importância de estudar fontes de perda de coerência e mecanismos de interação entre íons. Além, dos resultados experimentais obtidos por Meekhof et al.[32] apresentaremos alguns modelos teóricos que buscam explicar a origem da perda de coerência do íon, baseados em um processo estocástico por Schneide e Milburn[76], e a interação com um reservatório térmico quantizado por Mural e Knight[77]. Proporemos aqui um modelo fenomenológico para perda de coerência baseado na interação entre modos cruzados e compararemos os nossos resultados com os resultados experimentais de Meekhof et al. Na segunda parte do capítulo apresentaremos uma forma nova de tratar a dinâmica de íons aprisionados, aplicando na Hamiltoniana do sistema uma transformação unitária, transformando-a em uma Hamiltoniana tipo Jaynes-Cummings sem recorrermos ao limite de Lamb-Dicke[37]. Da Hamiltoniana transformada, a dinâmica do sistema torna-se extremamente simples e a dinâmica do sistema original pode ser obtida aplicando uma transformação inversa. Essa nova formulação tem sido utilizada em esquemas para a preparação de portas quânticas[81] e na geração de gatos de Schrödinger[82].

4.1 Íons aprisionados

Íons podem ser confinados em um arranjo partícular de campos eletromagnéticos. Para estudar íons com baixa energia, dois tipos de armadilhas podem ser usadas: armadilhas tipo ‘Penning’, usando uma combinação de campos magnéticos e elétricos estáticos e armadilhas tipo ‘Paul’, confinando íons primariamente através de uma força ponderomotiva gerada por campos oscilantes não homogêneos. Por brevidade e por ser o tipo de armadilha mais usada em experimentos de íons, discutiremos os parâmetros necessários para entendermos o aprisionamento de um íon em uma armadilha linear tipo ‘Paul’. Uma visão geral de aprisionamento de íons em armadilhas tipo ‘Paul’ e ‘Penning’ pode ser encontrada em [88, 89]

Íons confinados em uma armadilha tipo Paul

A discussão apresentada nessa subseção seguirá a discussão apresentada em [74]. Na fig.(4.1) é mostrado um diagrama esquemático de uma armadilha linear tipo Paul. Esta é composta basicamente de um filtro de massa quadripolar conectado nas extremidades com um potencial elétrico estático U_0 . Um potencial $V_o \cos(\Omega_T t) + U_r$ é aplicado entre as hastes diagonalmente opostas, fixadas em uma configuração quadripolar, como indicado na fig.(4.1). Assumiremos que as hastes ao longo da direção z são conectadas a capacitores (não mostrados na figura) de forma que o potencial rf é constante nesta direção, criando um potencial

$$\Phi \approx \frac{(V_o \cos(\Omega_T t) + U_r)}{2} \left(1 + \frac{x^2 - y^2}{R^2} \right), \quad (4.1)$$

onde R é a distância entre o eixo da armadilha e a superfície do eletrodo, dando origem a um potencial ponderomotivo (harmônico) nas direções x e y . Para obtermos um confinamento ao longo da direção z , potenciais estáticos U_0 são aplicados nas extremidades das hastes como indicado. Próximo do centro da armadilha, o potencial cria um poço

harmônico estático na direção z

$$\begin{aligned}\Phi_s &= \kappa U_0 \left[z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] \\ &= \frac{m}{2q} \omega_z^2 \left[z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right],\end{aligned}\tag{4.2}$$

onde κ é um fator geométrico, m e q são a massa e a carga do íon, e $\omega_z = (2\kappa q U_0/m)^{1/2}$ é a frequência de oscilação para um único íon ou a frequência de oscilação do centro de massa (CM) de uma coleção de íons idênticos ao longo da direção z . As equações (4.1) e (4.2) representam os termos de mais baixa ordem na expansão do potencial para a configuração de eletrodos dadas na fig.(4.1). Quando o tamanho da amostra de íons ou a amplitude do movimento do íon é comparável com o espaçamento entre os elétrodos ou o espaçamento entre as hastes, termos de alta ordem em Φ e Φ_s tornam-se importantes. No entanto, para pequenas oscilações do modo do CM uma aproximação harmônica será válida. Nas direções x e y a ação dos potenciais Φ e Φ_s dão a equação (clássica) de movimento descrita pela equação de Mathieu

$$\frac{d^2x}{d\zeta^2} + [a_x + 2q_x \cos(2\zeta)]x = 0,\tag{4.3}$$

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} + [a_y + 2q_y \cos(2\zeta)]y = 0,\tag{4.4}$$

onde $\zeta \equiv \Omega_T t/2$, $a_x = (4q/m\Omega_T^2)(U_r/R^2 - \kappa U_0/z_0^2)$, $a_y = -(4q/m\Omega_T^2)(U_r/R^2 + \kappa U_0/z_0^2)$ e $q_x = -q_y = 2qV_0/(\Omega_T^2 m R^2)$. Tipicamente, tem-se $a_i < q_i^2 \ll 1$, $i \in x, y$. Nesta seção, os símbolos a_i e q_i serão definidos como acima. Em todas as outras seções, a_i (ou a) representará o operador de abaixamento do oscilador harmônico e q_i representará a coordenada do i -ésimo modo normal. A solução das Eqs.(4.3) e (4.4) para primeira ordem em a_i e segunda ordem em q_i é dada por

$$u_i(t) = A_i \left[\cos(\omega_i t + \phi_i) \left(1 + \frac{q_i}{2} \cos(\Omega_T t) + \frac{q_i^2}{32} \cos(2\Omega_T t) \right) + \beta_i \frac{q_i}{2} \sin(\omega_i t + \phi_i) \sin(\Omega_T t) \right],\tag{4.5}$$

onde $u_i = x, y$ e A_i dependem das condições iniciais, e

$$\omega_i = \beta_i \frac{\Omega_T}{2}, \quad (4.6)$$

$$\beta_i \simeq \left[\frac{a_i + q_i^2/2}{1 - 3q_i^2/8} \right]^{1/2}. \quad (4.7)$$

As grandes amplitudes de oscilação para frequência ω_i são comumente chamado movimento ‘secular’. Quando $a_i < q_i^2 \ll 1$ e $U_r \simeq 0$, se for negligenciado o micro movimento (os termos que oscilam com frequência Ω_T e $2\Omega_T$), o íon se comporta como se estivesse confinado em um pseudopotencial harmônico Φ_p na direção radial dado por

$$q\Phi_p = \frac{1}{2}m\omega_r^2(x^2 + y^2), \quad (4.8)$$

onde $\omega_r \simeq qV_0/(2^{1/2}\Omega_T m R^2)$ é a frequência secular radial ω_r .

Quando esse tipo de armadilha é colocada em um aparato de alto vácuo, íons podem ser confinados durante dias com o mínimo de perturbação na sua estrutura interna. Mesmo que os íons interajam fortemente através de suas interações Coulombiana mútuas, o fato que os íons estão localizados no centro da armadilha necessariamente significa que o valor médio temporal do campo elétrico sentido por eles é nulo, desta forma perturbações oriundas do campo elétrico são pequenas. Perturbações na estrutura interna devido a campos magnéticos são importantes; no entanto, o tempo de coerência para o estado de superposição de dois níveis internos pode ser muito longo para operações por campos onde a separação de energia entre níveis é extrema em comparação ao campo. Por exemplo, em um ${}^9\text{Be}^+$ (armadilha tipo Penning) operações experimentais com um campo de $0.82T$, o tempo de coerência observado entre níveis hiperfinos excedeu 10 minutos[90].

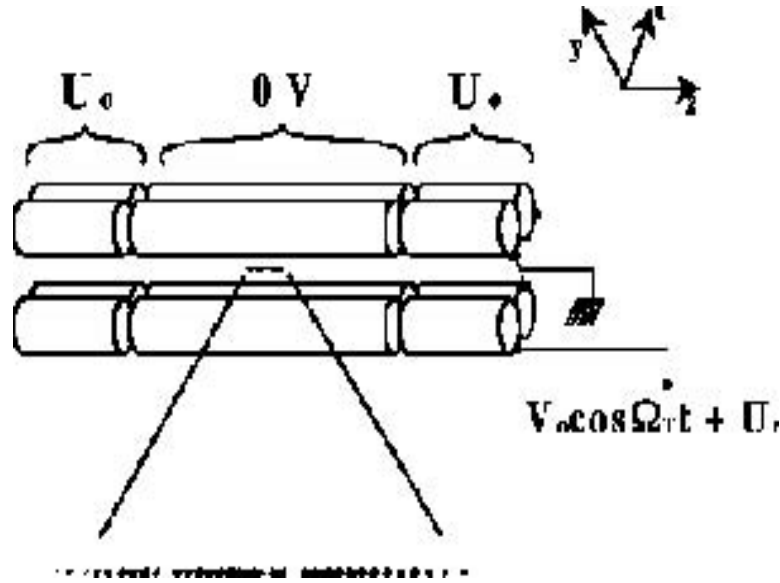


Figura 4.1: A parte superior da figura mostra um diagrama esquemático para uma armadilha linear tipo paul. A parte inferior mostra a imagem de uma linha de íons aprisionados. Figura retirada do artigo de revisão de D. J. Wineland et al.[74].

4.1.1 Resfriamento laser para o estado fundamental do estado de movimento, Laser cooling

Laser cooling de partículas atômicas isoladas tem sido aplicado rotineiramente por mais de duas décadas. Proposto por T. Hänsch e A. Schawlow[70] e por D. Wineland e H. Dehmelt[71] em 1975, laser cooling foi observado primeiramente por Neuhauser et al.[75] usando íons de Ba^+ e por Wineland et al.[73] usando íons de Mg^+ . Para um sistema ligado de dois níveis, assim como um íon aprisionado em uma armadilha de Paul, dois casos limites têm sido de grande importância. Se a frequência ω_z da armadilha é muito menor que a largura de linha γ da transição óptica usada para o laser cooling ($\omega_z \ll \gamma$)

a temperatura final é limitada por $T = \hbar\gamma/2K_B$, onde K_B é a constante de Boltzmann. Esse regime é chamado de ‘weak-binding’ regime, o limite é chamado Doppler cooling. Por outro lado, para a frequência da armadilha muito maior que a largura de linha $\omega_z \ll \gamma$ (strong binding regime), a partícula aprisionada tem uma absorção bem definida em um regime de banda resolvida na frequência da armadilha e pode ser bombeada opticamente para o estado vibracional mais baixo, excitando seletivamente os baixos regimes de banda resolvida (sideband cooling). Nesse caso, o potencial da armadilha tem que ser tratado quanticamente. Em geral, o potencial é assumido como harmônico. Regimes de sideband cooling são efetivos se a partícula é confinada em uma região do espaço muito menor que o comprimento de onda do laser usado para o resfriamento (cooling). Essa condição é expressa como $\eta = \kappa z_0 \ll 1$ e é chamada de regime de Lamb-Dicke. Nesta expressão $\kappa = 2\pi/\lambda$ é o número de onda, z_0 é a largura do ponto zero da função de onda ao longo da direção z na armadilha e η é chamado de parâmetro de Lamb-Dicke. No grupo de D. Wineland, o estado fundamental em uma armadilha para um único íon de Hg^+ foi obtido em mais de 95% em duas dimensões e para um único íon de Be^+ o estado fundamental foi obtido em mais de 92% em três dimensões. No grupo de R. Blatt, o estado fundamental para um único íon de Ca^+ foi obtido em mais de 99.9%.

4.1.2 Estados quânticos interno e de movimento do íon

O movimento de um único íon, ou o modo do CM de uma coleção, possui uma descrição simples quando os íons estão aprisionados em um potencial puramente estático, como é o caso para o movimento axial em uma armadilha tipo ‘Penning’ ou o movimento axial na armadilha mostrada na fig.(4.1). Será assumido que os potenciais da armadilha, Eqs.(4.1) e (4.2) são quadráticos. Essa aproximação é válida quando as amplitudes do movimento são pequenas, e desta forma o potencial local, pode ser expandido em relação ao ponto de equilíbrio da armadilha, que em uma boa aproximação é quadrático, nesse

caso o movimento é harmônico. Um íon aprisionado em um potencial ponderomotivo, Eq(4.8), pode ser descrito efetivamente como um oscilador harmônico simples, mesmo que a Hamiltoniana seja dependente do tempo, onde estados estacionários não existem. Para propostas práticas, o sistema pode ser tratado como se a Hamiltoniana descrevesse um oscilador harmônico independente do tempo[91] (embora as modificações possam ser feitas por um laser cooling[17]). O micromovimento clássico (os termos que variam como $\cos(\Omega_T t)$ e $\cos(2\Omega_T t)$ na Eq.(4.5)) pode ser visto, em uma representação quântica, como responsáveis por uma pulsação da função de onda do íon em uma frequência Ω_T . Esse movimento de pulsação é separado espectralmente a partir do movimento secular (para frequências ω_x e ω_y na Eq.(4.5)). Desde que as operações a serem consideradas dependem de interações ressonantes com a frequência secular, pode-se considerar uma média sobre as componentes do movimento de frequência Ω_T . Desta forma, em uma boa aproximação o pseudopotencial do movimento secular comporta-se como um oscilador em um potencial estático. A principal consequência do tratamento quântico é que a taxa de transição entre os níveis quânticos será alterada[91]; no entanto, essa troca pode ser contabilizada através de uma calibração experimental. Para os casos em que o movimento do íon for considerado ao longo do eixo de uma armadilha linear de Paul, essas modificações estarão ausentes.

Assim, a Hamiltoniana descrevendo o movimento de um único íon (ou um modo normal, assim como o modo do CM, de um conjunto de íons) na i -ésima direção é dada por

$$H_{osc} = \hbar\omega_i \hat{n}_i, \quad i \in \{x, y, z\}, \quad (4.9)$$

onde $\hat{n}_i \equiv a_i^\dagger a_i$ e $a_i^\dagger$ (a_i) é o operador usual de criação (aniquilação) do oscilador harmônico. O operador para o movimento do CM na direção z é dado por

$$z = z_0(a + a^\dagger) \quad (4.10)$$

onde $z_0 = (\hbar/2m\omega_z)^{1/2}$ é a largura da função de onda do estado fundamental e m é a massa do íon. Para o íon de ${}^9\text{Be}^+$ em uma armadilha onde $\omega_z/2\pi = 10\text{MHz}$, tem-se $z_0 = 7.5\text{nm}$. Desta forma, um estado puro do movimento para um modo pode ser escrito, na representação de Schrödinger, como

$$\Psi_{mov} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-in\omega_z t} |n\rangle \quad (4.11)$$

onde C_n são complexos e $|n\rangle$ são estados de Fock.

Discutiremos situações onde, para um dado tempo, sejam privilegiadas unicamente interações com dois níveis do íon. Será conveniente representar o sistema de dois níveis pela analogia deste com o spin-1/2 em um campo magnético estático. Nesta representação equivalente, é assumido que um momento magnético (fictício) $\vec{\mu} = \mu_M \vec{S}$, onde $\vec{S}$ é o operador spin ($S = 1/2$), é colocado em um campo magnético (fictício) $\vec{B} = B_0 \hat{z}$. A Hamiltoniana pode ser escrita como

$$H_{int} = \hbar\omega_0 S_z, \quad (4.12)$$

onde S_z é o operador para a componente z do spin e $\omega_0 \equiv \mu_M B_0 / \hbar$. Tipicamente, a frequência de ressonância interna será muito maior que a frequência do modo do movimento, $\omega_0 \gg \omega_z$. Os estados internos serão dados por $|M_z\rangle = |\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ representando ‘spin-up’ e ‘spin-down’ respectivamente. Um estado puro de um sistema de dois níveis pode ser escrito como

$$\Psi_{int} = C_{\downarrow} e^{i\frac{\omega_0 t}{2}} |\downarrow\rangle + C_{\uparrow} e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}} |\uparrow\rangle, \quad (4.13)$$

onde $|C_{\downarrow}|^2 + |C_{\uparrow}|^2 = 1$.

Interação com campos eletromagnéticos adicionais aplicados

- Um único íon, um único campo aplicado, um único modo do movimento

Consideraremos o caso em que um campo eletromagnético clássico propagando-se ao longo da direção z é aplicado a um íon aprisionado, constrangido para mover-se

unicamente na direção z em um poço harmônico com frequência ω_z . Consideraremos unicamente transições ressonantes entre os estados interno ou de movimento e transições entre esses estados simultaneamente, emaranhamento (entanglement). Se assumirmos que os níveis internos são acoplados por campos elétricos, a Hamiltoniana de interação é dada por

$$H_I = -\vec{\mu}_d \cdot \vec{E}(\vec{z}, t) \quad (4.14)$$

onde $\vec{\mu}_d$ é o operador de dipolo elétrico para a transição interna e $\vec{E}$ é oriundo de uma onda uniforme propagando ao longo da direção z e polarizada na direção x , $\vec{E} = E_1 \hat{x} \cos(kz - \omega t + \phi)$, onde ω é a frequência, $k = 2\pi/\lambda$ é o vetor de onda e λ é o comprimento de onda. No análogo equivalente ao spin-1/2, pode ser assumido um campo magnético propagando na direção z e polarizado na direção x , $\vec{B} = B_1 \hat{x} \cos(kz - \omega t + \phi)$, interagindo com um spin fictício ($\vec{\mu} = \mu_M \vec{S}$). Para a analogia com o spin a Hamiltoniana de interação é escrita como

$$H_I = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(\vec{z}, t) = \hbar\Omega(S_+ + S_-)(e^{i(kz - \omega t + \phi)} + e^{-i(kz - \omega t + \phi)}) \quad (4.15)$$

onde $\hbar\Omega \equiv -\mu_M B_1/4$ ou $(-\mu_M E_1/4$ para um dipolo elétrico). Assumiremos que o tempo de vida dos níveis é longo; neste caso, o espectro da transição excitada pela onda propagante será bem resolvida se Ω for suficientemente pequeno.

Será conveniente escrevermos a Hamiltoniana em uma representação de interação, onde assumiremos $H_0 = H_{int} + H_{osc}$ e $V_{int} = H_I$. Nesta representação, se considerarmos a aproximação de onda girante (desprezando os termos $\exp(\pm i(\omega + \omega_0))$), a função de onda pode ser escrita como

$$\Psi = \sum_{M_z=\downarrow, \uparrow} \sum_{n=0}^{\infty} C_{M_z, n} |M_z\rangle |n\rangle, \quad (4.16)$$

onde $|M_z\rangle$ e $|n\rangle$ são os autoestados interno e de movimento. De forma geral, essa função de onda será emaranhada entre os dois graus de liberdade. Na representação

de interação a Hamiltoniana é dada por

$$H_I = \hbar\Omega\{S_+ \exp\{i[\eta(ae^{-i\omega_z t} + a^\dagger e^{i\omega_z t}) - \delta t]\} + h.c.\}, \quad (\delta \equiv \omega - \omega_0) \quad (4.17)$$

onde $\eta \equiv kz_0$ é o parâmetro de Lamb-Dicke.

- Dinâmica de estados incluindo multimodos do movimento

Generalizaremos agora a interação com campos eletromagnéticos, considerando o movimento em todos $3L$ modos do movimento de L íons aprisionados. Consideraremos, que o(s) laser(s) interage(m) unicamente com o j -ésimo íon[74]; porém este íon, em geral, terá componentes de movimento oriundas de todos os outros modos. Nesse caso a Hamiltoniana de interação para o j -ésimo íon será dada por

$$H_{Ij} = \hbar\Omega(S_{+j} + S_{-j})[e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}_j - \omega t + \phi_j)} + h.c.], \quad (4.18)$$

onde $\vec{k}$ possui uma direção arbitrária. O operador posição (representando a variação em torno da posição de equilíbrio) pode ser escrito como

$$\vec{x}_j = u_j\hat{x} + u_{L+j}\hat{y} + u_{2L+j}\hat{z}, \quad j \in \{1, 2, \dots, L\}. \quad (4.19)$$

u_j pode ser obtido em termos das coordenadas dos modos normais q_k ($k \in \{1, 2, \dots, 3L\}$) usando as seguintes relações[92]

$$u_p = \sum_{k=1}^{3L} D_k^p q_k, \quad q_k = \sum_{p=1}^{3L} D_k^p u_p, \quad q_k \equiv q_{k0}(a_k + a_k^\dagger), \quad (4.20)$$

onde q_k é o operador para o k -ésimo modo normal e a_k e $a_k^\dagger$ são os operadores de aniquilação e criação para o k -ésimo modo. Assumiremos, que todos os modos normais são harmônicos, o que é razoavelmente uma boa aproximação quando as amplitudes de movimento dos modos normais são pequenas comparadas com o espaçamento entre os íons. A Hamiltoniana livre dos estados interno do j -ésimo íon e todos os outros modos normais é dada por

$$H_{0j} = \hbar\omega_0 S_{zj} + \sum_{k=1}^{3L} \hbar\omega_k \hat{n}_k, \quad (4.21)$$

onde $n_k \equiv a_k^\dagger a_k$. Na representação de interação e fazendo uma aproximação de onda girante a Hamiltoniana pode ser escrita na forma

$$H_{Ij} = \hbar\Omega \left\{ S_{+j} \exp \left[i \sum_{k=1}^{3L} \eta_k^j (a_k e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger e^{i\omega_k t}) - \delta t \right] + h.c \right\} \quad (4.22)$$

onde $\eta_k^j \equiv (\vec{k} \cdot \hat{x} D_k^j + \vec{k} \cdot \hat{y} D_k^{L+j} + \vec{k} \cdot \hat{z} D_k^{2L+j}) q_{k0}$. Para o caso de uma armadilha linear o movimento será separado nas direções x , y e z e η_k^j será constituído de um único termo. Na representação de interação a função de onda será dada por

$$\Psi_j = \sum_{M_z=\downarrow, \uparrow} \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} C_{M_z, \{n_k\}}^j(t) |M_z\rangle_j |\{n_k\}\rangle, \quad (4.23)$$

onde os coeficientes variam suavemente e $|\{n_k\}\rangle$ são autoestados ortonormais com $\{n_k\} = n_1, n_2, \dots, n_{3L}$.

4.2 Dinâmica de íons em um potencial harmônico

O modelo, que discutiremos aqui, consiste de um átomo de três níveis interagindo com feixes de lasers sob a condição de que o laser de frequência ω_{L1} e vetor de onda $\vec{k}_1$ conduz a transição atômica do estado fundamental $|\downarrow\rangle$ e o terceiro nível $|3\rangle$ e o laser de frequência ω_{L2} e vetor de onda $\vec{k}_2$ conduz a transição atômica do estado excitado $|\uparrow\rangle$ e o terceiro nível $|3\rangle$. O nível $|3\rangle$ será assumido fora de ressonância e desta forma poderá ser eliminado adiabaticamente [94], ver fig.(4.2)[Figura retirada da referência[32]], atuando unicamente como um estado virtual entre as transições dos estados $|\downarrow\rangle$ e $|\uparrow\rangle$. O sistema resultante consiste de um átomo de dois níveis.

A Hamiltoniana que descreve o sistema é dada por

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{I-c}, \quad (4.24)$$

onde

$$\hat{H}_0 = E_{\uparrow} \sigma_{\uparrow\uparrow} + E_{\downarrow} \sigma_{\downarrow\downarrow} + E_3 \sigma_{33} + \hbar\omega_p a^\dagger a, \quad (4.25)$$

é a Hamiltoniana do íon no potencial harmônico e

$$\hat{H}_{I-c} = -\hbar(\Omega_1 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{R} - \omega_{L1} t)} |3\rangle \langle \downarrow| + \Omega_2 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{R} - \omega_{L2} t)} |3\rangle \langle \uparrow|) + H.c, \quad (4.26)$$

é a Hamiltoniana de interação do átomo com o laser no potencial harmônico. Os operadores $\sigma_{ij}(i, j = \uparrow, \downarrow, 3)$ são operadores no subespaço atômico, com σ_{ii} sendo o número de ocupação dos níveis e $\sigma_{ij}(i \neq j)$ sendo os operadores de transição do nível j para o nível i . Consideraremos que as transições são conduzidas entre os estados $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ através do estado $|3\rangle$ por transições Raman. Por simplicidade assumimos que o laser 1 acopla unicamente o estado intermediário $|3\rangle$ e o estado $|\downarrow\rangle$. Similarmente o laser 2 acopla unicamente o estado $|3\rangle$ e o estado $|\uparrow\rangle$. A dissintonia dos lasers são mostradas na fig.(4.2), onde $\omega_{L1} - (\omega_{L2} + \delta) = \omega_0$ (ω_0 é a frequência de transição entre os estados $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$) e assumimos que $\Delta_R \gg \delta, \omega_p$. Eliminando adiabaticamente o nível intermediário $|3\rangle$, a Hamiltoniana de interação resulta em uma Hamiltoniana efetiva

$$\hat{H}_{I-c,ef} = \hbar\Omega(\sigma_+ + \sigma_-)(e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega_L t)} + h.c), \quad (4.27)$$

onde $\vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$ é o vetor de onda efetivo e $\omega_L = \omega_{L1} - \omega_{L2}$ é a frequência efetiva dos lasers vista pelo átomo. Na Eq.(4.27) escrevemos $\sigma_+ = |\uparrow\rangle \langle \downarrow|$ e $\sigma_- = |\downarrow\rangle \langle \uparrow|$ os operadores de abaixamento e levantamento, e $\Omega = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta_R}$ é a constante efetiva de acoplamento. Desde que assumimos que o nível intermediário $|3\rangle$ está muito longe da condição de ressonância podemos considerar que a população deste estado é nula, $\sigma_{33} = 0$, e conseqüentemente $\sigma_{\uparrow\uparrow} + \sigma_{\downarrow\downarrow} = 1$. Usando essas condições a Hamiltoniana do íon livre pode ser escrita na forma

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar}{2}\omega_0\sigma_z + \hbar\omega_p a^\dagger a, \quad (4.28)$$

onde ω_0 é a frequência de transição atômica e $\sigma_z = \sigma_{\uparrow\uparrow} - \sigma_{\downarrow\downarrow}$. Na equação acima desprezamos o termo de energia constante.

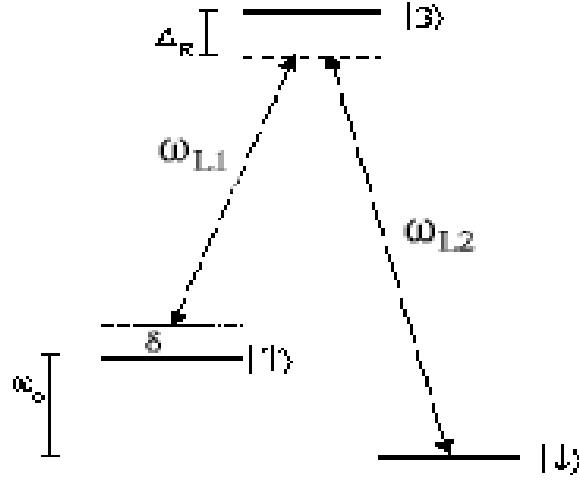


Figura 4.2: A figura mostra a configuração de um átomo de três níveis. O estado $|\uparrow\rangle$ representa o estado excitado e $|\downarrow\rangle$ o estado fundamental. As transições entre os estados excitado e fundamental são conduzidas através do estado $|3\rangle$ por transições Raman

O termo de interação da Hamiltoniana do sistema íon-laser, Eq.(4.27), depende explicitamente do tempo e para removermos essa dependência temporal é conveniente escrevermos a dinâmica do sistema na representação de interação. A Hamiltoniana numa representação de interação obedece a transformação unitária

$$\hat{H}_I = \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{H}_{I-c,ef} \hat{U}_0(t) \quad (4.29)$$

com $\hat{U}_0(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t)$. Na representação de interação a Hamiltoniana do sistema é escrita na forma

$$\hat{H}_I = \hbar \Omega \{ \sigma_+ \exp\{i[\eta(ae^{-i\omega_z t} + a^\dagger e^{i\omega_z t}) - \delta t]\} + h.c\}, \quad (4.30)$$

onde $\eta \equiv \vec{k}_L \cdot \vec{R}$ é o parâmetro de Lamb-Dicke.

4.2.1 Dinâmica no Limite de Lamb-Dicke

A Hamiltonia de interação do íon aprisionado, interagindo com o sistema de lasers é, em geral, complicada. No entanto, sob certas condições, ideais para realizações experimentais,

essa pode ser simplificada razoavelmente. Uma dessas condições é conhecida como limite de Lamb-Dicke (LDL)[30], onde o movimento do íon é restrito a uma região do espaço muito menor do que o comprimento de onda (ou comprimento de onda efetivo) do laser de excitação. Dentro desse limite o parâmetro η é muito pequeno e podemos expandir as equações de movimento em função desse parâmetro. Mantendo unicamente os termos em baixa ordem em η a análise da dinâmica do sistema torna-se relativamente simples. Uma segunda condição é o controle da intensidade do laser. Aqui podemos considerar dois regimes; o regime de baixa excitação e o regime de alta excitação. No primeiro regime, no limite de Lamb-Dicke, a Hamiltoniana descrevendo a dinâmica do íon se reduz para a do modelo Jaynes-Cummings¹[4], exceto que a quantização do campo é trocada aqui pela quantização do movimento do centro de massa do íon. Se a frequência do laser que conduz as transições do átomo dentro do potencial é ajustada em um regime de banda resolvida da transição atômica, oscilações de Rabi entre os estados excitado e fundamental estarão presentes[23].

Inicialmente estamos interessados em estudar transições ressonantes onde $\delta = (n' - n)\omega_z$, com n' e n inteiros. A energia de interação, Eq.(4.30), descreve transições unicamente entre os níveis $|\downarrow, n\rangle$ e $|\uparrow, n'\rangle$. Escreveremos o vetor de estado total do sistema $|\Psi_I(t)\rangle$, para o tempo t , em termo destes dois estados na forma

$$|\Psi_I(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [c_{\uparrow, n'}(t) |\uparrow, n'\rangle + c_{\downarrow, n}(t) |\downarrow, n\rangle], \quad (4.31)$$

onde $c_{\uparrow, n'}(t)$ e $c_{\downarrow, n}(t)$ são as amplitudes de probabilidades para encontrarmos o átomo no estado excitado e fundamental respectivamente. A equação de movimento para as amplitudes de probabilidade podem ser obtidas, substituindo o vetor de estado $|\Psi_I(t)\rangle$ e a Hamiltoniana de interação, Eq.(4.30), na equação de Schödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi_I(t)\rangle}{\partial t} = H_I |\Psi_I(t)\rangle. \quad (4.32)$$

¹Ver seção 1,1, Cap.2

Após alguma álgebra e projetando as equações resultantes sobre os estados $\langle \downarrow, n |$ e $\langle \uparrow, n' |$ obtemos as equações resultantes para a dinâmica dos coeficientes $C_{\uparrow, n'}$ e $C_{\downarrow, n}$

$$\frac{\partial C_{\uparrow, n'}}{\partial t} = -i^{(1+|n'-n|)} e^{-i[\delta-(n'-n)\omega_z]t} \Omega_{n', n} C_{\downarrow, n}, \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial C_{\downarrow, n}}{\partial t} = -i^{(1-|n'-n|)} e^{i[\delta-(n'-n)\omega_z]t} \Omega_{n', n} C_{\uparrow, n'}, \quad (4.34)$$

onde $\Omega_{n', n}$, frequência de Rabi, dada por [93]

$$\begin{aligned} \Omega_{n', n} &\equiv \Omega |\langle n' | e^{i\eta(a+a^\dagger)} | n \rangle| \\ &= \Omega \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \left(\frac{n_{<}!}{n_{>}!}\right)^{\frac{1}{2}} \eta^{|n'-n|} L_{n_{<}}^{|n'-n|}(\eta^2), \end{aligned} \quad (4.35)$$

com $n_{<}$ ($n_{>}$) é o menor (maior) de n' e n , e L_n^α é o polinômio generalizado de Laguerre. As soluções do conjunto de equações acopladas são soluções oscilatórias, com a frequência de Rabi, entre os estados $|\downarrow, n\rangle$ e $|\uparrow, n'\rangle$. Escrevendo o vetor de estado, Eq.(4.31), na base desses dois estados obtemos

$$|\Psi_I(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\Omega_{n', n} t) & -ie^{(i\frac{\pi}{2}|n'-n|)} \sin(\Omega_{n', n} t) \\ -ie^{(-i\frac{\pi}{2}|n'-n|)} \sin(\Omega_{n', n} t) & \cos(\Omega_{n', n} t) \end{pmatrix} |\Psi_I(0)\rangle. \quad (4.36)$$

Veremos mais adiante que aplicando uma dada transformação unitária sobre a Hamiltoniana de interação, esta pode ser linearizada sem precisarmos usar o limite de Lamb-Dicke (LDL) e nesse caso o fator exponencial $\langle n' | e^{i\eta(a+a^\dagger)} | n \rangle$ aparece na amplitude do vetor de estado e não na frequência de Rabi. Para cada valor de $n' - n$ o fator de fase $\phi + \pi \frac{|n'-n|}{2}$ pode ser escolhida arbitrariamente, no entanto este será escolhido igual a zero[74]. Discutiremos o caso em que o limite de Lamb-Dicke é satisfeito e sob essas condições temos que $\eta \ll 1$. Usando o LDL a frequência de Rabi, Eq.(4.35), pode ser escrita para baixa ordem em η como

$$\Omega_{n', n} = \Omega_{n, n'} = \Omega \left(\frac{n_{<}!}{n_{>}!}\right)^{\frac{1}{2}} (|n' - n|)^{-1}. \quad (4.37)$$

Discutiremos inicialmente três tipos de transições: carrier ($n' = n$), regime da banda resolvida no vermelho ($n' = n - 1$) e regime de banda resolvida no azul ($n' = n + 1$) com as frequências de Rabi dadas por Ω , $\eta n^{1/2} \Omega$ e $\eta(n+1)^{1/2} \Omega$ respectivamente.

Em geral o limite de Lamb-Dicke não é satisfeito rigorosamente e termos de alta ordem podem contribuir para a interação [32, 93, 95]. Para discutirmos a dinâmica do sistema íon-laser, dentro do limite de Lamb-Dicke, consideraremos o caso em que o íon foi preparado inicialmente no estado $|\Psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle|n\rangle$ e aplicando a este um campo na frequência carrier ($\delta = 0$). A partir da Eq.(4.36) a dinâmica do sistema é dada por

$$|\Psi_I(t)\rangle = \cos(\Omega_{n,n}t)|\downarrow, n\rangle - i \sin(\Omega_{n,n}t)|\uparrow, n\rangle. \quad (4.38)$$

As transições que trocam os estados n dos modos vibracionais do potencial harmônico estão fora de ressonância e desta forma podem ser desprezadas, ver a flecha 2 na fig.(4.3), e neste caso a Hamiltoniana de interação, Eq.(4.30), pode ser escrita aproximadamente na forma

$$\hat{H}^0 = \hbar\Omega\eta(\sigma_+ + \sigma_-). \quad (4.39)$$

Os estados eletrônicos são trocados sem uma consequente troca nos modos vibracionais. Para o caso em que o íon foi preparado inicialmente no estado $|\Psi(0)\rangle = |\downarrow\rangle|n\rangle$ e $\delta = \omega_z$ (banda azul) a dinâmica do sistema é dada por

$$|\Psi_I(t)\rangle = \cos(\Omega_{n+1,n}t)|\downarrow, n\rangle + i \sin(\Omega_{n+1,n}t)|\uparrow, n+1\rangle, \quad (4.40)$$

unicamente transições que aumentam os estados n dos modos vibracionais contribuem, ver a flecha 3 na fig.(4.3), e nesse caso a Hamiltoniana de interação pode ser escrita aproximadamente na forma

$$\hat{H}^{AJC} = \hbar\Omega\eta(\sigma_+a^\dagger + \sigma_-a). \quad (4.41)$$

Essa dinâmica não está presente na dinâmica quântica de cavidades (QED). Quando as condições de Lamb-Dicke são encontradas e a radiação é ajustada para ao regome de banda resolvida no vermelho ($\delta = -\omega_z$) obtemos a hamiltoniana de interação dada por

$$H_I = \hbar\eta\Omega(\sigma_+a + \sigma_-a^\dagger). \quad (4.42)$$

A Hamiltoniana, Eq.(4.42), é semelhante a Hamiltoniano do modelo Jaynes-Cummings[4], descrevendo o acoplamento de um átomo de dois níveis e um modo de um campo de radiação quantizado dentro de uma cavidade. Como dito anteriormente esses dois sistemas são completamente análogos; a diferença é que o oscilador harmônico associado com o modo do campo de radiação na cavidade é trocado pelo movimento do centro de massa do íon[17, 23, 102]. Transições entre os estados $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ criarão um estado emaranhado entre os estados internos e os estados vibracionais do íon desde que, em geral, a frequência de Rabi depende dos estados vibracionais, Eq.(4.35). Essa “dinâmica condicional”, onde a dinâmica de um sistema é condicionada ao estado de um outro sistema é a base da computação quântica.

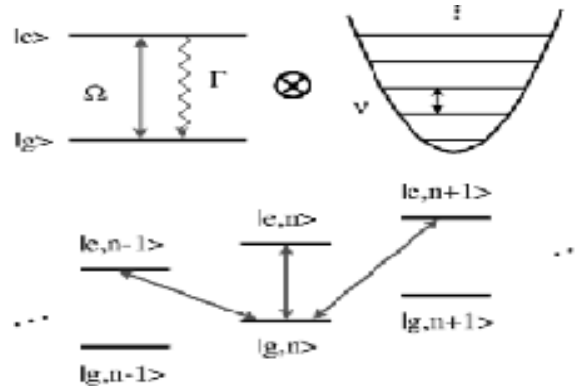


Figura 4.3: Níveis de energia para um íon de dois níveis movendo-se em um potencial harmônico. A flecha do centro mostra a transição ‘carrie’, a flecha da direita mostra a transição em um regime de banda resolvida no azul e a da esquerda a transição em um regime de banda resolvida no vermelho. A parte superior da figura mostra o acoplamento dos estados internos do íon com os modos vibracionais deste.

4.2.2 Geração de estados não clássicos do movimento de íons

Estados não clássicos do movimento de íons considerado nesta seção são análogos aos estados não clássicos obtidos em óptica quântica (QED). Discutiremos a geração de estados não clássicos a partir do estado de movimento de um único íon aprisionado. A geração desses estados se mostra importante devido ao interesse intrínseco em aspectos fundamentais da mecânica quântica e da potencial aplicação de íons na implementação de portas lógicas e computação quântica. Como apresentaremos em seguida, é possível a partir do estado $|\downarrow\rangle|0\rangle$ criar estados da forma $|\downarrow\rangle\Psi_{mov}$, onde Ψ_{mov} é o estado do movimento do íon. Discutiremos os estados de movimento como proposto experimentalmente por Meekhof, et al.[32]. No experimento de Meekhof et al., um íon de ${}^9\text{Be}^+$ é confinado em uma armadilha de Paul com um pseudopotencial de frequência $\omega/2\pi \simeq 11.2\text{Mhz}$ na direção x . Íons são resfriados usando ‘sideband cooling’ com transições Raman estimuladas[26] entre os estados ${}^2S_{1/2}$ ($F = 2, m_f = 2$) e ${}^2S_{1/2}$ ($F = 1, m_f = 1$), denotados por $|\downarrow\rangle$ e $|\uparrow\rangle$ respectivamente e separados por $\simeq 1.25\text{Ghz}$, ver fig.(4.4) [Figura retirada da referência[32]].

Esse processo prepara o íon no estado $|S=\downarrow, n=0\rangle$ em 95% do tempo. O vetor de onda efetivo $\Delta\vec{K}$ tem direção ao longo do eixo x da armadilha (o parâmetro de Lambi-Dicke é $\eta = 0.202$), de forma que as transições Raman não movimentam o íon nas direções y e z . A dissintonia entre os feixes é de aproximadamente $12GHz$ para o vermelho do estado excitado $^2P_{1/2}$ com potência $\simeq 0.5mW$ em cada feixe, de forma que o acoplamento da transição Raman é $\Omega/2\pi \simeq 500KHz$. Nesse experimento o estado do movimento do íon é preparado coerentemente nos estados de Fock, térmico, coerente e comprimido. Exceto o estado térmico, todos os outros estados são preparados a partir de um íon resfriado para o ponto zero do movimento $|n=0\rangle$, esse resfriamento é crucial para preservar a consistência do estado gerado. O íon é preparado em um regime onde o acoplamento entre os estados de movimento e interno podem ser descrito por uma interação do tipo Jaynes-Cummings.

O estado de movimento Ψ_{mov} é detectado, aplicando um feixe Raman ajustado na primeira banda azul durante um tempo t . A população do estado $|\downarrow\rangle$ é medida aplicando uma radiação com polarização σ_+ aproximadamente ressonante entre os estados $|\downarrow\rangle$ e $^2P_{3/2}$ ($F=3, m_f=3$) promovendo uma transição cíclica entre os estados e detectando a fluorescência[26]. Como o único canal de decaimento do estado $^3P_{3/2}$ é retornar para o estado $|\downarrow\rangle$, a eficiência de detecção é aproximadamente igual a 1. O experimento é repetido várias vzes, para pequenos intervalos de tempo, acumulando a probabilidade de encontrarmos o íon no estado $|\downarrow\rangle$. A probabilidade é obtida a partir do ajuste numérico dos dados experimental dada por

$$P_{\downarrow}(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} P_n e^{-\gamma_n t} \cos(2\Omega_{n+1,n} t) \right], \quad (4.43)$$

onde $P_n \equiv |C_{\downarrow,n}|^2$ é a probabilidade de encontrarmos o íon no estado $|\downarrow\rangle|n\rangle$. A constante de decaimento γ_n (a taxa de perda de coerência entre os níveis n e $n+1$) foi introduzida fenomenologicamente para modelar o efeito de perda de coerência que ocorre durante a aplicação do regime de banda resolvida. O crescimento observado de γ_n com n é da forma

$\gamma_n = \gamma_0(n+1)^{0.7}$, sendo qualitativamente consistente com os resultados experimentais. A medida do sinal de $P_{\downarrow}(t)$ pode ser invertido através de uma transformada de Fourier para obter-se a distribuição de probabilidade P_n do estado vibracional.

Apresentaremos a seguir os estados do movimento de um íon de ${}^9\text{Be}^+$ gerados nos experimentos de Meekhof et al.:

Estado de Fock

No experimento de Meekhof et al., o estado de Fock é gerado a partir de uma sequência de operações sobre o estado inicial $|\downarrow, 0\rangle$. Para um estado com valor alto de n aplica-se uma sequência de pulsos π de Rabi ajustados para a primeira banda azul, primeira banda vermelha ou carrier. Por exemplo, o estado $|\uparrow, 2\rangle$ é preparado aplicando um pulso π ajustado na primeira banda azul, banda vermelha e carrier sucessivamente conduzindo o íon nos estados $|\downarrow, 0\rangle, |\uparrow, 1\rangle, |\downarrow, 2\rangle$ até obter o estado desejado $|\uparrow, 2\rangle$.

Uma série de estados de Fock, $|\downarrow, n\rangle$, foi gerado e a amplitude de encontrar o íon no estado $P_{\downarrow}(t)$ foi obtida usando o método de detecção descrito anteriormente. A medida de $P_{\downarrow}(t)$ para o estado inicial $|\downarrow, n=0\rangle$ é mostrada na fig.(4.5) onde os dados foram ajustados pela equação

$$P_{\downarrow}(t) = \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\gamma_0} \cos^2(\Omega_{1,0}t) \right] \quad (4.44)$$

com $\Omega_{0,1} = 94\text{KHz}$ e $\gamma_0 = 11,9\text{KHz}$. Notemos que $\Omega_{0,1}$ é muito maior que γ_0 , satisfazendo a condição de acoplamento forte. Da Eq.(4.36) esperaríamos que $P_{\downarrow}(t) = \cos^2(\Omega_{1,0}t)$; no entanto, observamos claramente o efeito do processo de perda de coerência dado pelo primeiro termo na Eq.(4.43). No experimento, os autores ressaltam que, a perda de coerência não é causada simplesmente por perda de coerência radiativa, mas sim por contribuições originárias de flutuações na potência do laser, causando flutuações na frequência de Rabi $\Omega_{1,0}$, flutuações no potencial da armadilha, causando flutuações na frequência ω_z , e flutuações no ambiente magnético, causando flutuações na frequência ω_0 .

Desprezando, no momento, os efeitos de perda de coerência podemos observar que para o tempo $t = m\pi/2\Omega_{1,0}$ (m inteiro), o íon estará em um estado não emaranhado $|\downarrow, 0\rangle$ ou $|\uparrow, 1\rangle$. Desta forma, se o íon é inicialmente preparado em um estado $|\downarrow, 0\rangle$, o estado $|\uparrow, 1\rangle$ pode ser obtido aplicando a primeira banda azul para um tempo $t = \pi/2\Omega_{1,0}$ (pulso π de Rabi). Para outros tempos, o íon estará em um estado emaranhado dado pela Eq.(4.36). Essa operação e a operação análoga para primeira banda vermelha formam os elementos chaves para lógica quântica usando íons aprisionados. Estados de Fock de alta ordem podem ser gerados aplicando uma sequência de operações similares[74].

Estado comprimido

Um estado de vácuo comprimido foi criado irradiando o estado $|n = 0\rangle$ do íon com dois feixes Raman os quais diferem em frequência por $2\omega_L$, conduzindo transições Raman entre os níveis n -par dentro de um mesmo estado hiper-fino. O parâmetro de compressão β (definido como o fator pelo qual a variância da quadratura de compressão decresce) cresce exponencialmente com o tempo. A fig.(4.6) mostra a probabilidade $P_{\downarrow}(t)$ para um estado comprimido. Os resultados experimentais foram ajustados pela Eq.(4.43), usando uma distribuição de estado de vácuo comprimido permitindo unicamente a variação de β . Os ajustes dos dados na fig.(4.6) demonstram consistência com um estado comprimido com $\beta = 40 \pm 10$, o qual corresponde para $\bar{n} \approx 7.1$.

Estado térmico

O estado térmico é gerado a partir do resfriamento Doppler (Doppler cooling) sobre o estado $|\downarrow\rangle \rightarrow P_{3/2}$ [26]. O valor de $\bar{n}$ é controlado usando dissintonia Doppler. Na fig.(4.7) é mostrada a amplitude $P_{\downarrow}(t)$ após a geração de um estado térmico. Os resultados experimentais foram ajustados pela Eq.(4.43), usando uma distribuição térmica com $\bar{n} = 1,3 \pm 0.1$. Os parâmetros usados aqui são iguais aos valores dados na geração do estado de Fock.

Estado coerente

O estado coerente é gerado a partir do estado $|n = 0\rangle$ aplicando uma força clássica sobre este. A força clássica foi produzida usando um potencial variando senoidalmente com a frequência de oscilação da armadilha. Na fig.(4.8) é mostrada a probabilidade $P_{\downarrow}(t)$ após a criação de um estado coerente do movimento do íon exibindo colapsos ‘revivals’. Os resultados experimentais foram ajustados pela Eq.(4.43), usando uma distribuição Poissoniana $P_n = e^{-\bar{n}}\bar{n}^n/n!$. Os parâmetros usados aqui são iguais aos valores dados na geração do estado de Fock.

Geração de um estado tipo gato de Schrödinger

Além do experimento de Meekhof et al., gerando estados de Fock, coerente, térmico e comprimido, um estado tipo gato de Schrödinger foi gerado experimentalmente a partir do estado de movimento de um íon de ${}^9\text{Be}^+$ por C. Monroe et al.,[33]. O termo estado gato de Schrödinger denota um estado emaranhado que consiste de dois estados coerentes do movimento do íon correlacionados, com diferentes estados atômicos interno. Um exemplo simples é dado por

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow, \alpha\rangle + |\uparrow, -\alpha\rangle). \quad (4.45)$$

A fig.(4.9) ilustra como um estado de gato foi gerado no experimento de C. Monroe et al.: (a) O íon é inicialmente preparado no estado $|\downarrow, 0\rangle$, aplicando um resfriamento Raman. (b) em seguida aplica-se um pulso $\pi/2$ em um regime carrier gerando uma superposição de estados $|\downarrow, 0\rangle$ e $|\uparrow, 0\rangle$. (c) o feixe de deslocamento gera uma força F_1 , a qual excita a componente no estado interno $|\uparrow\rangle$ para um estado coerente $|\alpha\rangle$. Devido a polarização dos feixes de deslocamento, este não afeta o átomo no estado $|\downarrow\rangle$. (d) um pulso π em um regime carrier troca as componentes dos estados $|\downarrow\rangle$ e $|\uparrow\rangle$, (e) em seguida o feixe de deslocamento gera uma força F_2 , a qual excita a componente do estado interno $|\uparrow\rangle$ para um estado coerente $|\alpha e^{i\phi}\rangle$, onde a fase ϕ é controlada por um oscilador de rádio

freqüência. O estado gerado nessa etapa é análogo a um gato de Schrödinger. (f) as componentes $|\downarrow\rangle$ e $|\uparrow\rangle$ são combinadas por um pulso $\pi/2$ em um regime carrier. Nessa etapa, a radiação é aplicada em uma transição cíclica, e o sinal é gravado.

A partir de um íon aprisionado estados não clássicos do movimento do íon foram gerados e analisados através da probabilidade induzida $P_{\downarrow}(t)$ por uma interação do tipo Jaynes-Cummings. Os experimentos de Meekhof et al.[32] e Monroe et al.[33] demonstram a utilidade de íons aprisionados para a geração de estados não clássicos e a investigação da dinâmica da interação do tipo Jaynes-Cummings. Como pode ser observado, sob determinadas condições de acoplamento é possível transferir essas propriedades não clássicas para outros osciladores harmônicos incluindo oscilações macroscópicas.

No experimento de Meekhof et al., os autores sugerem que a perda de coerência apresentada na medida experimental da ocupação do estado do íon é devido a problemas técnicos no experimento: flutuações na intensidade dos lasers e instabilidade no potencial da armadilha, entre outros. Como veremos na próxima seção, vários são os fatores que contribuem para a perda de coerência do íon. Um desses fatores é a interação entre modos cruzados do movimento do íon. Esses modos podem ser excitados por um alinhamento não perfeito do vetor de onda efetivo $\Delta\vec{K}$ com a direção x (direção do modo principal) e atuam como um reservatório térmico de energia. A contribuição desses modos cruzados está diretamente relacionado ao não resfriamento perfeito de todos os modos do íon. Como mencionamos acima esse resfriamento é crucial para preservar a consistência do estado gerado.

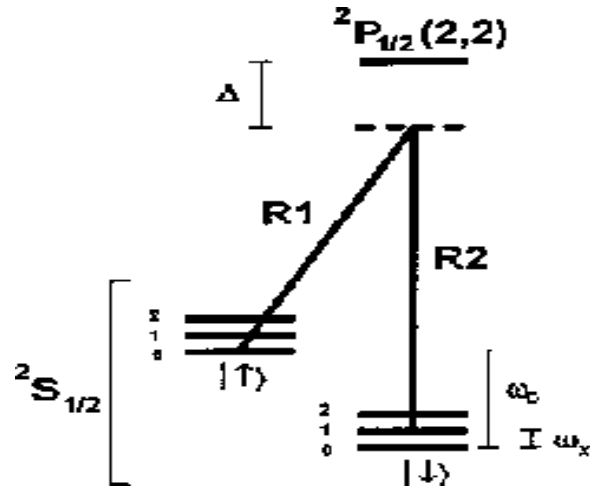


Figura 4.4: Níveis internos de energia e de movimento de um íon de ${}^9\text{Be}^+$. Os estados $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ são as componentes do estado fundamental ${}^2S_{1/2}$, separadas por uma energia $\bar{\omega}_0$

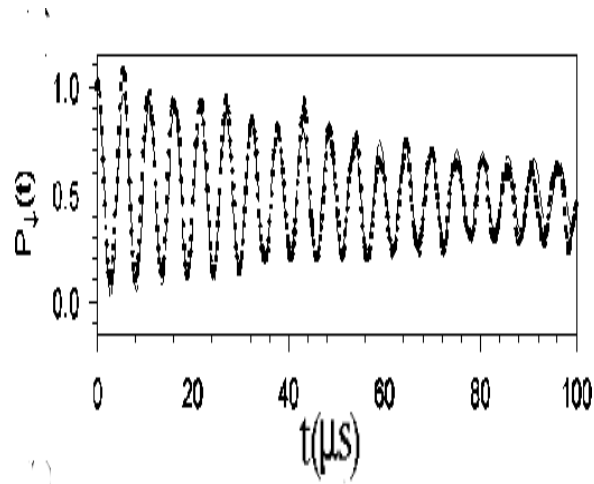


Figura 4.5: Distribuição de probabilidade $P_{\downarrow}$ para um estado de número inicial $|\downarrow, 0\rangle$ conduzido em um regime de banda resolvida no azul. Figura retirada da referência[32]

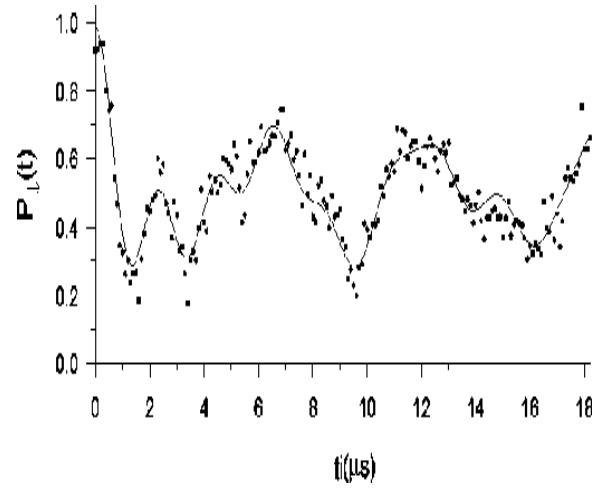


Figura 4.6: Distribuição de probabilidade $P_{\downarrow}$ para um estado comprimido. A linha cheia representa um ajuste dos resultados experimentais (pontos) para uma distribuição de estados comprimidos. O valor ajustado é para um $\beta = 40 \pm 10$, o qual corresponde a um $\bar{n} \approx 7.1$. Figura retirada da referência[32]

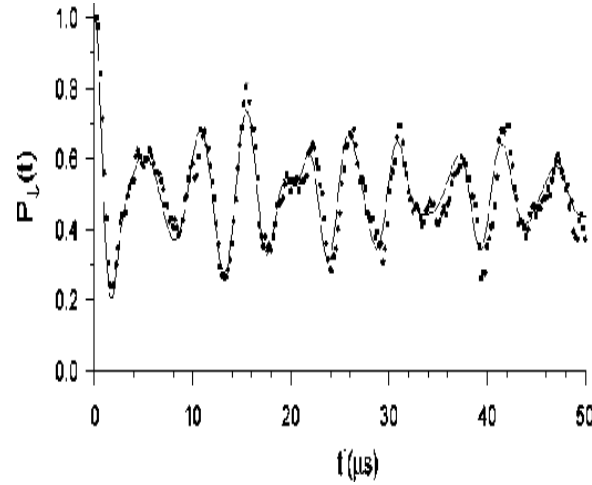


Figura 4.7: Distribuição de probabilidade $P_{\downarrow}$ para um estado térmico. A linha cheia representa um ajuste dos resultados experimentais (pontos) para uma distribuição de estado térmico. O valor ajustado é para um $\bar{n} = 1.3 \pm 0.1$. Figura retirada da referência[32]

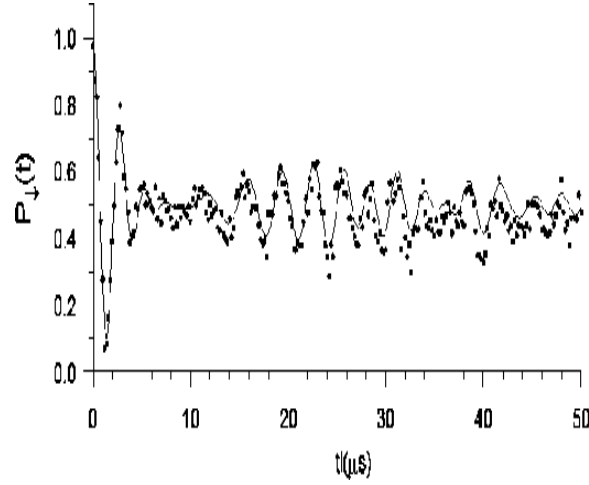


Figura 4.8: Distribuição de probabilidade $P_{\downarrow}$ para um estado coerente. A linha cheia representa um ajuste dos resultados experimentais (pontos) para uma distribuição de estados coerentes. O valor ajustado é para um $\bar{n} = 3.1 \pm 0.1$. Figura retirada da referência[32]

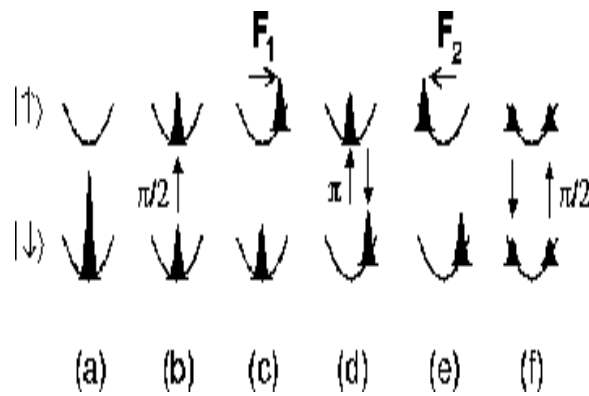


Figura 4.9: Criação de um gato de Schrödinger. Ver texto para detalhes. Figura retirada da referência[33].

4.3 Perda de coerência

Íons aprisionados são promissores para a implementação experimental de portas lógicas, como já mostrado experimentalmente para um único íon[26]. Porém, um fator limitador para a implementação de portas lógicas e consequentemente computadores quânticos são os efeitos de perda de coerência. Como vimos nos experimentos de Meekhof et al., uma perda de coerência é obtida na geração dos estados e pode ser observada claramente na Eq.(4.43) que ajusta os dados obtido experimentalmente para a ocupação do estado do íon.

A taxa de amortecimento γ_n introduzida na Eq.(4.43) é independente para cada componente do somatório e desta forma implica em uma perda de coerência sem transições entre estados com diferentes números quânticos, ou seja, sem relaxação de energia. As fontes convencionais de perda de coerência, tais como emissão espontânea entre estados atômicos internos e decaimento de população dos estados de movimento causam transições entre estados com diferentes números quânticos e não descrevem uma taxa de decaimento na forma descrita por γ_n .

Meekhof et al., sugerem que a perda de coerência apresentada nos resultados experimentais podem ser devidos a problemas técnicos no experimento. Tem-se procurado explicar a origem da fonte de perda de coerência e essa pode ser classificada nas seguintes categorias[74]: perda de coerência devido ao movimento do íon, perda de coerência devido aos níveis internos do íon e, perda de coerência devido a imperfeições do campo aplicado.

Nessa seção, apresentaremos as fontes de perda de coerência como descrita por D. J. Wineland et al.[74], e em seguida discutiremos alguns modelos teóricos que buscam explicar a origem da perda de coerência no experimento de Meekhof et al., baseado em um processo estocástico[76] e a interação com um reservatório térmico quantizado[77]. Proporemos aqui um modelo fenomenológico para perda de coerência baseado na interação

entre modos cruzados e compararemos os nossos resultados com o resultados experimentais de Meekhof et al.

Perda de coerência devido ao movimento

Para um sistema de íons aprisionados, perda de coerência são oriundas quase que exclusivamente a partir do estado de movimento destes. A magnitude da perda de coerência dependerá do sistema físico que está sendo tratado e do mecanismo de perda de coerência[96]. Por exemplo, para computação quântica com íons, a perda de coerência do movimento é relativamente fácil de ser caracterizada, quando relacionada com a perda de coerência do estado geral do movimento, desde que estejamos interessados na relaxação dos estados de movimento $|n = 0\rangle$ e $|n = 1\rangle$ para um modo partícular. Em seguida apresentaremos alguns fatores que contribuem para esse tipo de perda de coerência:

- Perda de coerência devido a instabilidades nos parâmetros da armadilha

Uma forma simples de perda de coerência no movimento é causada por flutuações nos parâmetros da armadilha. Muito provavelmente, esses parâmetros flutuam suavemente na escala de tempo das operações ($1/\Omega_{n',n}$), desta forma, o movimento está sujeito a defasagens devido a uma troca adiabática na frequência do movimento.

- Perda de coerência devido a emissão de radiação

A emissão radiativa é uma fonte fundamental de perda de coerência para o CM do modo do movimento do íon. Essa fonte está presente quando o dipolo associado à carga oscilante do íon é acoplado radiativamente a um campo térmico da vizinhança, para uma temperatura T .

- Perda de coerência devido a acoplamento de modos cruzados (imperfeições no campo elétrico estático)

Uma fonte potencial de perda de coerência é causada pelo acoplamento do k -ésimo modo com um ou mais dos $3L - 1$ outros modos espectadores na armadilha. Se os $3L - 1$ outros modos de oscilações não estão todos resfriados para as suas respectivas energias de ponto zero, então a energia pode ser transferida para o k -ésimo modo de interesse. Mesmo quando os modos espectadores são resfriados para o estado de ponto zero, eles podem atuar como um reservatório de energia oriunda do CM. Esse comportamento não leva a aquecimento mas pode causar perda de coerência.

Em condições idealizadas, os íons estão sujeitos a potenciais quadráticos. Na prática, termos de alta ordem do potencial estático estão presentes; esses termos podem induzir um acoplamento entre os modos. Assumindo que os termos de alta ordem do gradiente do campo atuam como uma perturbação para a solução harmônica do modo normal. Seguindo a forma da Eq.(4.19), esses campos serão especificados por E_i para $i \in \{1, 2, 3, \dots, 3L\}$ onde o índice i especifica o íon e a direção de $\vec{E}$. Escrevendo o campo elétrico para o j -ésimo íon como

$$\vec{E}_j = E_j \hat{x} + E_{L+j} \hat{y} + E_{2L+j} \hat{z}, \quad j \in \{1, 2, \dots, L\}. \quad (4.46)$$

Usando a Eq.(4.20), pode se escrever a equação do k -ésimo modo normal[92]

$$\frac{\partial^2 q_k}{\partial t^2} + \omega_k^2 q_k = \frac{q}{m} \sum_{i=1}^{3L} D_k^i E_i. \quad (4.47)$$

Em geral,

$$\begin{aligned} E_i &= E_i(\{u_p\}) = E_i(\{q_j\}) = \\ &E_i(\{q_j\} = 0) + \sum_{m=1}^{3L} q_m \left[\frac{\partial E_i}{\partial q_m} \right]_{\{q_j\}=0} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{3L} \sum_{m=1}^{3L} q_l q_m \left[\frac{\partial^2 E_i}{\partial q_l \partial q_m} \right]_{\{q_j\}=0} + \dots \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde as derivadas são calculadas nas posições de equilíbrio. O primeiro termo do lado direito da última equação dá origem ao deslocamento em relação a posição de equilíbrio, e o segundo termo pode ser incorporado em uma nova definição da frequência ω_i do modo normal. O termo de segunda ordem (último termo da equação) pode acoplar ressonantemente dois modos de oscilação (l e m) ao modo normal k de interesse. Um termo ressonante possível é dado por

$$\frac{\partial^2 q_k}{\partial t^2} + \omega_k^2 q_k = \frac{q}{m} \sum_{i=1}^{3L} D_k^i q_l q_m \left[\frac{\partial^2 E_i}{\partial q_l \partial q_m} \right]_{\{q_j\}=0}, \quad (4.49)$$

onde as frequências dos modos l e m satisfazem a condição $|\omega_l \pm \omega_m| = \omega_k$. Esse tipo de acoplamento pode adicionar ou remover energia do modo k , dependendo da relação de fase entre os três modos. Substituindo a solução do oscilador livre para os modos l e m ($q_j(t) = Q_k \exp[\pm i(\omega_j t + \phi_j)]$) no termo de segunda ordem, obtemos que se $q_k(t=0) = (dq_k/dt)_{t=0} = 0$, a solução para a amplitude do modo k cresce linearmente com o tempo

$$|q_k(t)| = \left| \frac{qt}{2m\omega_k} \sum_{i=1}^{3L} D_k^i Q_l Q_m \left[\frac{\partial^2 E_i}{\partial q_l \partial q_m} \right]_{\{q_j\}=0} \right|. \quad (4.50)$$

No caso de um único íon de berílio ${}^9\text{Be}^+$ (experimento do NIST), o aquecimento que foi observado no movimento na direção x foi tal que o íon fez uma transição do nível $n = 0$ para o nível $n = 1$ em aproximadamente 1ms . Para um único íon, os três modos normais são os modos de oscilações nas direções x , y e z ($q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$; $D_k^i = \delta_{ik}$). Para o experimento do NIST as frequências dos modos foram $(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \approx (11.2, 18.2, 29.8)\text{MHz}$, satisfazendo aproximadamente a condição de ressonância $\omega_x + \omega_y = \omega_z$. Foi considerado que os modos y e z estavam excitados. Da Eq.(4.50), obtem-se que

$$|x(t)| = \left| \frac{qt}{2m\omega_x} A_y A_z \left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial y \partial z} \right]_{(y=z=0)} \right|, \quad (4.51)$$

onde A_y e A_z são as amplitudes do movimento nas direções y e z , consideradas constante. A troca de energia entre os três modos foi desprezada. Nessa aproximação, se $A_y = A_z = \zeta \approx 10nm$ (correspondendo para $\langle n_y \rangle \approx \langle n_z \rangle \approx 1$), o gradiente do campo necessário para deslocar o movimento x para uma amplitude de $10nm$ ($\langle n_x \rangle \approx 1$) em um tempo observado de $1ms$ é aproximadamente de $\frac{\partial^2 E_x}{\partial y \partial x} \approx 1000V/mm^3$. É altamente improvável que o gradiente do campo tenha sido tão grande no experimento do NIST, e, além disso, a condição de ressonância não foi completamente satisfeita. Além do mais, essa fonte de aquecimento foi facilmente testada variando os valores iniciais de A_y e A_z e estudando a taxa de aquecimento do movimento x , o qual foi previamente resfriado ao ponto de energia zero. Nenhuma dependência com os valores iniciais de A_y e A_z foram encontradas. Se todos os modos do movimento são inicialmente resfriados para o ponto de energia zero essa fonte de aquecimento pode ser desprezada.

Perda de coerência devido aos estados internos do íon

Por muitos anos, uma das principais aplicações das técnicas para a manipulação de íons tem sido aplicada no estudo da estrutura dos estados internos dos íons atômicos. Alta resolução e acuracidade são obtidas porque íons podem ser tipicamente ‘armazenados’ por um longo tempo (horas ou dias) com uma perturbação mínima da sua estrutura interna oriundas dos campos elétrico e magnético.

Desvios dos níveis de energia causados pelo campo elétrico (Stark shifts) são usualmente pequenos e, em muitos casos, desvios de energia devido a campos magnéticos podem ser bem controlados; esse comportamento faz com que a perda de coerência entre as superposições dos estados internos seja bastante reduzida.

- Decaimento radiativo

Um limite fundamental para a coerência dos estados internos é dado pelo decaimento

radioativo. Em geral, podemos considerar decaimentos oriundos de ambos os níveis de um sistema de dois níveis; por simplicidade podemos assumir que o nível mais baixo é estável. Um caso bem estudado é o íon de Ba^+ , para o qual o primeiro estado excitado $^2D_{5/2}$ decai por radiação de quadripolo elétrico. Este possui tempo de vida medido da ordem de 35s[97]. Tempo de vida de vários íons tem sido compilado e revisado por Church[98].

- Flutuações do campo magnético

Flutuações não controladas no campo magnético externo são esperadas para dar uma contribuição primária para a perda de coerência nos estados internos do íon. Perda de coerência, neste caso, resulta do fato que a energia de separação entre os dois níveis de interesse depende do campo magnético externo.

4.3.1 Modelos para perda de coerência

Como vimos anteriormente várias são as fontes de perda de coerência. Apresentaremos aqui três modelos teóricos que buscam explicar a origem da perda de coerência do íon, baseando-se o primeiro em um processo estocástico[76], o segundo em uma interação com um reservatório térmico quantizado[77] e um terceiro, proposto por nós, em um acoplamento entre modos cruzados. Como falamos anteriormente, esses modos podem ser excitados por um alinhamento não perfeito do vetor de onda efetivo com a direção do modo principal e podem atuar como um reservatório térmico de energia. A contribuição desses modos cruzados, na perda de coerência do íon, está diretamente associada ao não resfriamento perfeito de todos os modos. Os modelos serão apresentados a seguir:

Processo estocástico

No modelo proposto por Schneider e Milburn[76] a fonte de perda de coerência para o íon é devido a flutuações na intensidade e na fase do laser. O processo estocástico envolvido é

descrito por um ruído branco, levando a uma equação mestra que descreve o processo de perda de coerência. Para esse modelo, a Hamiltoniana de interação, Eq.(4.30), é escrita na forma

$$\hat{H}_I = \hbar\Omega(t)\{\sigma_+ \exp\{i[\eta(ae^{-i\omega_z t} + a^\dagger e^{i\omega_z t}) - \delta t + i\phi(t)]\} + h.c\}, \quad (4.52)$$

onde, aqui, a frequência de Rabi é escrita como função do tempo para levar em consideração as flutuações oriundas das flutuações da intensidade do laser e, $\phi(t)$ representa flutuações oriundas da fase do laser. Na discussão que segue será considerado que a amplitude de movimento do íon é muito menor que o comprimento de onda do laser e desta forma temos que $\eta \ll 1$, ou seja, dentro do limite de Lamb-Dicke. Dentro desse limite, a Hamiltoniana de interação pode ser expandida para baixa ordem em η . Para o regime de primeira banda azul (first blue sideband) a Hamiltoniana de interação é dada por

$$\hat{H}_I(t) = \hbar\Omega(t)\eta[\sigma_+ a^\dagger e^{i\phi(t)} + h.c]. \quad (4.53)$$

O ruído será especificado definindo um processo estocástico para $\Omega(t)$ e $\phi(t)$. No caso da flutuação da amplitude do laser tem-se

$$\Omega(t)dt = \Omega_0[dt + \sqrt{\Gamma}dW(t)], \quad (4.54)$$

onde $dW(t)$ é o incremento de um processo real de Wiener, Ω_0 é a componente não flutuante da frequência de Rabi e Γ é o parâmetro que escala o ruído. As Eq.(4.53) e Eq.(4.54) são discutidas com detalhes na referência [76]. A Hamiltoniana dada pela Eq.(4.53) descreve um processo estocástico. Consideraremos aqui unicamente o efeito de flutuação da intensidade do laser, fazendo $\phi(t) = 0$. A dinâmica do sistema é descrita usando a equação estocástica de Liouville-von Neumann,

$$d\rho(t) = -i[G, \rho]dt - i\sqrt{\Gamma}[G, \rho]dw(t) - \frac{\Gamma}{2}[G, [G, \rho]]dt, \quad (4.55)$$

onde G é dado por

$$G = \eta\Omega_0(a^\dagger\sigma_+ + a\sigma_-). \quad (4.56)$$

Essa equação dá a evolução do operador densidade do sistema condicionado a uma história partícular do ruído. Em experimentos envolvendo um número de pulsos com dados oriundos de cada pulso combinado, o ruído é efetivamente mediado e obtém-se a seguinte equação mestra que descreve o sistema

$$d\rho(t) = -i[G, \rho]dt - \frac{\Gamma}{2}[G, [G, \rho]]dt. \quad (4.57)$$

Essa equação possui uma forma similar à equação de Milburn a qual descreve um modelo para perda de coerência intrínseca[80]. O último termo na equação (4.57) é responsável pela perda de coerência e este leva a um crescimento difusivo nas observáveis que não comutam com G , o qual é proporcional para a Hamiltoniana de interação do sistema.

Os resultados obtidos por Schneider estão de acordo com os resultados experimentais obtidos por Meekhof et al. Porém, os resultados são ajustados por uma taxa de perda de coerência que escala com uma potência 0.5 em vez de 0.7 como no experimento de Meekhof et al. Essa discrepância indica que há outras fontes de perda de coerência além das consideradas nesse modelo.

Reservatório térmico quantizado

No modelo proposto por M. Mura e P. L. Knight[77] a perda de coerência é introduzida fenomenologicamente a partir do acoplamento de um reservatório térmico ao sistema íon laser. O reservatório consiste de um sistema de osciladores harmônicos descritos por uma distribuição canônica a uma temperatura T , introduzindo ruído ao sistema. A perda de coerência é tratada microscopicamente usando uma equação mestra. Essa equação coincide com a equação mestra com um ruído branco estocástico e o reservatório térmico em um limite de alta temperatura, em uma aproximação Markoviana. O reservatório térmico descreve tanto o ruído quântico, bem como nos dá uma informação microscópica da perda de coerência.

No modelo é considerado que o sistema descrito pela Hamiltoniana

$$\hat{H}_{AJC} = \hbar\Omega\eta(\sigma_+a^\dagger + \sigma_-a) \quad (4.58)$$

é acoplada a um reservatório térmico, o qual consiste de um conjunto infinito de osciladores

$$H_r = \hbar \sum_l \omega_l B_l^\dagger B_l, \quad (4.59)$$

onde ω_l é o l -ésima frequência do reservatório, $B_l^\dagger$ e B_l são os operadores de criação e aniquilação de quanta do reservatório. Desde que o reservatório possui um número infinito de graus de liberdade, este não é afetado pela dinâmica do sistema. Os ruídos oriundos do reservatório térmico causam perda de coerência no íon. O acoplamento entre o sistema e o reservatório é escolhido para ser da forma

$$H_{sr} = \hbar \sum_s C_s \sum_l g_{sl} (B_l^\dagger + B_l), \quad (4.60)$$

onde g_{sl} é a constante de acoplamento entre o operador do sistema C_s e o l -ésimo modo do reservatório. A taxa de decaimento do sistema depende do acoplamento entre os operadores do sistema e os operadores do reservatório. Desta forma a escolha do acoplamento entre o sistema e o reservatório determinará o efeito deste sobre o sistema. Escolhendo o operador do sistema C_s com a propriedade

$$C_s |\varphi(n, \alpha)\rangle = \sum_\beta c_\beta |\varphi(n, \beta)\rangle, \quad (4.61)$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$, número quântico dos modos vibracionais e $\alpha = 1, 2$, número quântico dos estados eletrônico do íon, descrevendo a base de estados vestidos do Hamiltoniano (4.58).

A equação mestra resultante descreve relaxação dentro dos estados vestidos dos modos vibracionais, mas sem relaxação de energia entre estados com diferentes n . Isso é porque a evolução temporal dos elementos de matriz em termos de $|\varphi(n, \alpha)\rangle$ desacopla para diferentes n . Os operadores σ_z e $a^\dagger a$ são desse tipo, pois esses operadores não trocam

o estado de movimento $|n\rangle$, bem como os estados vestidos rotulados por n . O operador $a^\dagger\sigma_+ + a\sigma_-$ troca o estado de movimento do íon, mas não troca o estado vestido rotulado por n , assim esse operador é do mesmo tipo do operador acima.

Considerando o caso onde o acoplamento com o reservatório é dado pelo operador $a^\dagger\sigma_+ + a\sigma_-$, esse tipo de acoplamento pode ser devido a uma transição imperfeita de dipolo entre o nível $|3\rangle$ e os níveis $|\downarrow\rangle$ e $|\uparrow\rangle$, ver fig.(4.2), devido a flutuações na intensidade do laser. As transições imperfeitas de dipolo podem ser representadas por

$$\sigma_+ = \sigma_2^- \sigma_1^+ \rightarrow \sigma_2^- \sigma_1^+ + \sigma_2^- \sigma_1^+ \sum_l g_l (B_l^\dagger + B_l). \quad (4.62)$$

Usando a consideração acima na Hamiltoniana de acoplamento sistema-reservatório, Eq.(4.60), podemos reescrever esta como

$$H_{sr} = \hbar(a^\dagger\sigma_+ + a\sigma_-) \sum_l g'_l (B_l^\dagger + B_l), \quad (4.63)$$

onde $g'_l = gg_l$. A Hamiltoniana dada pela Eq.(4.63) pode ser interpretada como se a frequência de Rabi g flutuasse devido ao acoplamento do sistema com o reservatório na forma

$$g \rightarrow g + \sigma_l g'_l (B_l + B_l^\dagger). \quad (4.64)$$

A equação mestra que descreve a perda de coerência do sistema pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = \frac{1}{i\hbar} [H_{AJC}, \rho(t)] + \Gamma \rho(t). \quad (4.65)$$

A Eq.(4.65) é discutida com mais detalhes na referência[77]. O resultados obtidos no modelo de Murao et al., descrevem satisfatoriamente os resultados experimentais obtidos por Meekhof et al.

Os modelos de Mural e Schneider são descritos por métodos diferentes mas dão os mesmos resultados para o experimento de Meekhof[32]. Assim como no modelo de Schneider et al., o modelo proposto por Murao et al., mostra que a perda de coerência

do íon é originária de várias fontes, abrindo caminho para que possamos buscar outros tipos de contribuições para descrever esse comportamento. Na linha de tentar explicar as fontes de perda de coerência apresentaremos a seguir um modelo para descrever a perda de coerência no íon baseado em um acoplamento entre modos cruzado. Recentemente, outros modelos descrevendo perda de coerência em íons aprisionados foram sugeridos[78, 79].

Perda de coerência devido a modos cruzados

Como vimos, vários são os tipos de fontes que induzem perdas de coerência [74, 76, 77]. Estabilidades nos parâmetros da armadilha e flutuações no campo elétrico são fontes potenciais de perdas de coerência. O não resfriamento perfeito de todos os modos do íon, também, pode induzir perda de coerência[32]. Os modos espectadores podem atuar como um reservatório térmico de energia. No início dessa seção discutimos a perda de coerência devido ao acoplamento entre modos cruzados, lá mostramos que no regime de Lamb-Dicke essa fonte de perda de coerência não é considerável. Aqui, apresentaremos um novo modelo para descrever a perda de coerência do íon no experimento de Meekhof et al.,[32]. A multi-dimensionalidade do íon na armadilha e os tipos de fontes de perda de coerência [74, 76, 77] mais os resultados experimentais obtidos por Meekhof et al. nos leva a criar um modelo fenomenológico para descrever a perda de coerência em íons aprisionados. Nesse modelo introduziremos a perda de coerência fenomenologicamente, levando em consideração o acoplamento entre modos cruzados. Os $N - 1$ modos do movimento dos íons (modos cruzados) podem ser excitados por um alinhamento não perfeito do vetor de onda efetivo $\Delta\vec{K}$ com a direção x do movimento (modo principal) e atuarem como um reservatório térmico de energia. A contribuição dos modos cruzados está diretamente associada ao não resfriamento perfeito de todos os modos do íon. Como vimos, no experimento de Meekhof et al.[32] o resfriamento do estado inicial do íon para o ponto de energia zero do movimento $|n = 0\rangle$ é crucial para preservar a consistência do

estado gerado. Nesse mesmo experimento, segundo os autores, a perda de coerência pode ser devida a problemas técnicos no experimento: flutuações na intensidade dos lasers e instabilidade no potencial da armadilha. Esses fatores podem comprometer o alinhamento do vetor de onda efetivo levando a excitação de outros modos do íon. A partir dessas considerações escreveremos o nosso modelo e em seguida calcularemos a probabilidade de encontrar o íon em um dado estado eletrônico. Os resultados obtidos são comparados com os resultados experimentais de Meekhof et al., descrevendo qualitativamente estes resultados.

O modelo consiste de um íon multi-modo confinado em um potencial harmônico, interagindo com lasers e a sua vizinhança, a qual é um sistema aberto. Ruídos e flutuações oriundos dessa vizinhança causam perda de coerência no íon. Trataremos esse sistema aberto como um reservatório térmico quantizado, o qual consiste de um número infinito de osciladores harmônicos independentes,

$$H_r = \hbar \sum_k \nu_k b_k^\dagger b_k, \quad (4.66)$$

onde ν_k é a k -ésima frequência do reservatório e b_k ($b_k^\dagger$) é o operador de aniquilação (criação) do reservatório. Desde que, o reservatório possui um número infinito de graus de liberdade, a energia deste não é alterada durante a interação com o sistema. A interação com o reservatório induz uma perda de coerência no sistema; o termo de amortecimento dependerá da forma de acoplamento entre o sistema e o reservatório. Como sabemos, sistemas de íons aprisionados apresentam perda de coerência sem relaxação de energia[32, 74]. Desta forma, temos que ter um modelo que seja consistente com esse comportamento. O acoplamento do sistema com a vizinhança tem que ser do tipo que haja unicamente relaxação de energia entre estados vestidos de mesmo número n , mas não haja relaxação entre estados com diferentes n . Assim, estaremos satisfazendo a forma com que o íon perde coerência. Como encontrar um acoplamento que satisfaça a condição acima? Um

tipo de acoplamento que satisfaz a condição acima é dado por

$$H_{sr} = \hbar \sum_k \Omega_1 g_k (b_k^\dagger + b_k) (a_2^\dagger + a_2) (\sigma_+ + \sigma_-) [e^{i(k_1 x_1 - \omega_L t)} + h.c.], \quad (4.67)$$

onde a_2 ($a_2^\dagger$) é operador de aniquilação (criação) do modo **2** e g_k é a constante de acoplamento do sistema-reservatório. Ω_1 é a frequência de Rabi do laser e K_1 é o vetor de onda efetivo do laser, ambos na direção x_1 , possibilitando transições para o movimento do íon unicamente nessa direção. Se olharmos para o experimento, notaremos que o resfriamento perfeito de todos os modos do íon é crucial para preservar a consistência do estado gerado[32]. Por outro lado, problemas técnicos no experimento tais como: flutuações na intensidade do laser, instabilidade no potencial da armadilha e um não alinhamento perfeito do vetor de onda efetivo Raman na direção preferencial do movimento podem excitar um modo cruzado do íon que acopla com a vizinhança, um reservatório térmico, levando a flutuações na frequência de Rabi interferindo nas transições entre os níveis internos do íon ocasionando uma perda de coerência [32, 74, 76, 77]. O modelo é descrito pela Hamiltoniana

$$\begin{aligned} H = & \hbar \sum_{i=1}^2 \nu_i a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_z + \hbar \sum_k \nu_k b_k^\dagger b_k + \\ & \hbar \Omega_1 (\sigma_+ + \sigma_-) [e^{i(k_1 x_1 - \omega_L t)} + h.c.] + \\ & \hbar \sum_k \Omega_1 g_k (b_k^\dagger + b_k) (a_2^\dagger + a_2) (\sigma_+ + \sigma_-) [e^{i(k_1 x_1 - \omega_L t)} + h.c.]. \end{aligned} \quad (4.68)$$

O último termo da Hamiltoniana pode ser considerado como a contribuição devido as flutuações na armadilha, na intensidade do laser e no mal resfriamento dos modos cruzados do íon, no caso modo **2**.

Para reproduzir as condições experimentais[32] escreveremos a Hamiltoniana acima no regime de Lamb-Dicke

$$H = \hbar \sum_{i=1}^2 \nu_i a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_z + \hbar \sum_k \nu_k b_k^\dagger b_k +$$

$$\begin{aligned} & \hbar g (a_1^\dagger + a_1) (\sigma_+ e^{-i\omega_L t} + \sigma_- e^{i\omega_L t}) + \\ & \hbar \sum_k g'_k (b_k^\dagger + b_k) (a_2^\dagger + a_2) (a_1^\dagger + a_1) (\sigma_+ e^{-i\omega_L t} + \sigma_- e^{i\omega_L t}), \end{aligned} \quad (4.69)$$

onde escrevemos $g = \eta\Omega_1$ e $g'_k = g_k g$, com η sendo o parâmetro de Lamb-Dicke. Consideraremos que o laser acopla unicamente os níveis internos do íon com o modo principal, aqui considerado o modo **1**. O modo **2** interage com o reservatório térmico introduzindo ruídos ao sistema.

Escrevendo agora a Hamiltoniana (4.69) na representação de interação

$$H_I = \hbar g (a_1 \sigma_+ + \sigma_- a_1^\dagger) + \hbar \sum_k g'_k [b_k a_2^\dagger e^{-i(\nu_k - \nu_2)t} + a_2 b_k^\dagger e^{i(\nu_k - \nu_2)t}] (a_1 \sigma_+ + \sigma_- a_1^\dagger), \quad (4.70)$$

onde escolhemos a condição de ressonância $\nu_1 = \omega_0 - \omega_L$ e desprezamos os termos que oscilam com frequência $\pm 2\nu_1$. A Hamiltoniana (4.70) pode ser interpretada como se a frequência de Rabi, g , da Hamiltoniana tipo Jaynes-Cummings flutuasse devido ao acoplamento do sistema com a vizinhança na forma

$$g \rightarrow g + \sum_k g'_k [b_k a_2^\dagger e^{-i(\nu_k - \nu_2)t} + a_2 b_k^\dagger e^{i(\nu_k - \nu_2)t}]. \quad (4.71)$$

Como o reservatório acopla diretamente com o modo **2**, não trocando energia com o modo principal **1**, a Eq.(4.70) descreve, para o modo **1**, um sistema sem relaxação de energia com perda de coerência. Esse comportamento se dá porque o operador $a_1 \sigma_+ + \sigma_- a_1^\dagger$ descreve uma equação mestra com relaxação dentro dos estados vestidos com mesmo n , mas sem relaxação de energia entre estados com diferentes n . Como veremos, a evolução temporal dos elementos da matriz densidade, obtido a partir da Hamiltoniana, em termos dos estados vestidos do modo **1** desacopla para diferentes n . Esse desacoplamento é devido ao tipo de interação entre o modo **1** e a vizinhança. Desta forma, o modelo apresentado aqui descreve a dinâmica de um íon aprisionado, como discutido no experimento de Meekhof et al.,[32].

A equação mestra que descreve a perda de coerência do sistema pode ser escrita como (**Ver Apêndice A**)

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^I(t) = \frac{1}{i\hbar} [H_{JC}^{(I)}, \rho^I(t)] + \Gamma\rho^I(t), \quad (4.72)$$

onde

$$H_{JC}^I = \hbar g(a_1\sigma_+ + \sigma_-a_1^\dagger). \quad (4.73)$$

Considerando o caso em que $\bar{n}_{th} = 0$

$$\Gamma\rho^I = -\frac{\gamma}{2} [Q^\dagger Q\rho^I(t) - Q\rho^I(t)Q^\dagger + \rho^I(t)Q^\dagger Q], \quad (4.74)$$

onde γ é constante de decaimento entre o modo **2** e reservatório. Lembremos, que é o modo **2** que acopla com o reservatório, e definimos

$$Q = a_2(a_1\sigma_+ + \sigma_-a_1^\dagger). \quad (4.75)$$

Para discutir a dinâmica do modo **1** é necessário obtermos a equação mestra do operador densidade reduzido deste. Esta pode ser obtida facilmente, calculando o traço nas variáveis do modo **2** do operador densidade total do sistema dado pela Eq.(4.72). Calculando agora o traço sobre as variáveis do modo cruzado **2**, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_1^I(t) = \frac{1}{i\hbar} [H_{JC}^{(I)}, \rho_1^I(t)] + \sum_{n_2=0}^{\infty} \langle n_2 | \Gamma\rho^I(t) | n_2 \rangle, \quad (4.76)$$

onde ρ_1^I é o operador densidade reduzido do sub sistema íon-laser, para o modo **1**. Usando a Eq.(4.74) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho_1^I(t) &= \frac{1}{i\hbar} [H_{JC}^{(I)}, \rho_1^I(t)] - \frac{\gamma}{2\hbar^2 g^2} \sum_{n_2=0}^{\infty} \{n_2 [H_{JC}^2 \langle n_2 | \rho^I(t) | n_2 \rangle + \\ &\quad \langle n_2 | \rho^I(t) | n_2 \rangle H_{JC}^2 - 2H_{JC} \langle n_2 | \rho^I(t) | n_2 \rangle H_{JC}] \}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Para discutirmos a dinâmica do sistema reduzido calcularemos a dinâmica dos elementos de matriz na base de estados vestidos da interação H_{JC}^I :

$$|n, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|n, \downarrow\rangle + |n+1, \uparrow\rangle)$$

$$\begin{aligned}
|n, -\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|n, \downarrow\rangle - |n+1, \uparrow\rangle) \\
|0, \downarrow\rangle &,
\end{aligned} \tag{4.78}$$

com autovalores dados por $\pm \hbar \Omega_n$ e $E_o = 0$ respectivamente, $\Omega_n = g\sqrt{n+1}$. A evolução temporal dos elementos de matriz do operador densidade nessa base é

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{0,0}(t) = 0 \tag{4.79}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{+,-}^{n,n}(t) = -2i\Omega_n \rho_{+,-}^{n,n}(t) - 2\gamma \left(\frac{\Omega_n}{g} \right)^2 \sum_{n_2} n_2 \langle n_2 | \rho | n_2 \rangle_{+,-}^{n,n},$$

onde escrevemos $\rho_{+,-}^{n,n} = \langle n, + | \rho_1^I(t) | -, n \rangle$ e $\rho_{0,0} = \langle 0, g | \rho_1^I(t) | g, 0 \rangle$. Para simplificar a notação, daqui por diante escreveremos $\rho^{(I)}(t) = \rho$, representando o operador densidade do sistema total. A primeira das equações acima mostra que a população do estado $|n\rangle$ é constante e a segunda mostra que a coerência oscila com a frequência de Rabi e decai ao longo do tempo com uma taxa $\gamma(\frac{\Omega_n}{g})^2$.

Para obtermos os elementos de matriz $\rho_{+,-}^{n,n}$ e $\rho_{-,+}^{n,n}$, usaremos a Eq.(4.72) para calcular a dinâmica do elemento de matriz $\langle n_2 | \rho | n_2 \rangle_{+,-}^{n,n}$ que aparece na Eq.(4.79). Calculando a dinâmica do elemento de matriz

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \langle n_2 | \rho | n_2 \rangle_{+,-}^{n,n} &= -2i\Omega_n \langle n_2 | \rho | n_2 \rangle_{+,-}^{n,n} - \gamma \left(\frac{\Omega_n}{g} \right)^2 \left[n_2 \langle n_2 | \rho | n_2 \rangle_{+,-}^{n,n} + \right. \\
&\quad \left. (n_2 + 1) \langle n_2 + 1 | \rho | n_2 + 1 \rangle_{+,-}^{n,n} \right],
\end{aligned} \tag{4.80}$$

multiplicando a expressão acima por n_2 e somando sobre todos os n_2 obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n_2} n_2 \langle n_2 | \rho | n_2 \rangle_{+,-}^{n,n} &= -2i\Omega_n \sum_{n_2} n_2 \langle n_2 | \rho | n_2 \rangle_{+,-}^{n,n} - \\
&\quad 2\gamma \left(\frac{\Omega_n}{g} \right)^2 \sum_{n_2} n_2 (n_2 - 1) \langle n_2 | \rho | n_2 \rangle_{+,-}^{n,n},
\end{aligned} \tag{4.81}$$

com solução dada por

$$n_2 \langle n_2 | \rho(t) | n_2 \rangle_{+,-}^{n,n} = n_2 \langle n_2 | \rho_2(0) | n_2 \rangle \langle n, + | \rho_1(0) | -, n \rangle$$

$$\exp \left\{ -2 \left[i\Omega_n + \gamma \left(\frac{\Omega_n}{g} \right)^2 (n_2 - 1/2) \right] t \right\}, \quad (4.82)$$

onde $\rho_2(0)$ é o operador densidade reduzido do modo **2**. Usando o resultado acima na Eq.(4.79) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{+,-}^{n,n}(t) &= -2i\Omega_n \rho_{+,-}^{n,n}(t) - 2\gamma \left(\frac{\Omega_n}{g} \right)^2 \rho_{+,-}^{n,n}(0) \sum_{n_2} n_2 \langle n_2 | \rho_2(0) | n_2 \rangle \\ &\quad \exp \left\{ -2 \left[i\Omega_n + \gamma \left(\frac{\Omega_n}{g} \right)^2 (n_2 - 1/2) \right] t \right\}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

A solução da equação acima é dada por

$$\rho_{+,-}^{n,n}(t) = e^{-2i\Omega_n t} \rho_{+,-}^{n,n}(0) \left\{ 1 + \sum_{n_2=0} \frac{n_2}{(n_2 - 1/2)} P_{n_2} \left[e^{-2\gamma \left(\frac{\Omega_n}{g} \right)^2 (n_2 - 1/2)t} - 1 \right] \right\} \quad (4.84)$$

e a transporta do complexo conjugado

$$\rho_{-,+}^{n,n}(t) = e^{2i\Omega_n t} \rho_{-,+}^{n,n}(0) \left\{ 1 + \sum_{n_2=0} \frac{n_2}{(n_2 - 1/2)} P_{n_2} \left[e^{-2\gamma \left(\frac{\Omega_n}{g} \right)^2 (n_2 - 1/2)t} - 1 \right] \right\}. \quad (4.85)$$

Somando termo a termo e considerando o íon inicialmente no estado excitado obtemos

$$\begin{aligned} \rho_{+,-}^{n,n}(t) + \rho_{-,+}^{n,n}(t) &= P_n \cos(2\Omega_n t) \left\{ 1 + \right. \\ &\quad \left. \sum_{n_2=0} \frac{n_2}{(n_2 - 1/2)} P_{n_2} \left[e^{-2\gamma \left(\frac{\Omega_n}{g} \right)^2 (n_2 - 1/2)t} - 1 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.86)$$

onde $P_n = \langle n | \rho_1(0) | n \rangle$ e $P_{n_2} = \langle n_2 | \rho_2(0) | n_2 \rangle$ são as distribuições de probabilidades para o modo **1** e **2** respectivamente.

A probabilidade de encontrarmos o íon no estado excitado, dado que o átomo está inicialmente no estado excitado, é

$$P_{\uparrow}(t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \rho_{0,0}(t) + \sum_{n=0} [\rho_{+,-}^{n,n}(t) + \rho_{-,+}^{n,n}(t)] \right\}. \quad (4.87)$$

Usando os resultados anteriores obtemos que

$$\begin{aligned} P_{\uparrow}(t) &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=0} P_n \cos(2\Omega_n t) \left\{ 1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \sum_{n_2=0} \frac{n_2}{(n_2 - 1/2)} P_{n_2} \left[e^{-2\gamma \left(\frac{\Omega_n}{g} \right)^2 (n_2 - 1/2)t} - 1 \right] \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Assim como nos modelos proposto por Schneider[76] e Murao[77], a equação acima descreve um processo de perda de coerência no íon sem relaxação de energia. Notemos que a perda de coerência do modo **1** está diretamente relacionada com o estado do modo **2** e o acoplamento desse com o reservatório térmico. A Eq.(4.88) mostra que um resfriamento perfeito, próximo a energia do ponto zero, de todos os modos do íon inibiria essa fonte de perda de coerência. Para discutirmos a Eq.(4.88), que descreve a perda de coerência do íon, apresentaremos o comportamento desta para o modo **2** preparado nos estados de número, coerente e térmico. Mostraremos, que para esse último estado a Eq.(4.88) reproduz satisfatoriamente o ajuste dos pontos obtidos experimentalmente. As figs.(4.11) a (4.18) mostram a probabilidade $P_{\uparrow}$ para o íon inicialmente preparado nos estados de número, coerente e térmico. As figs.(4.11) a (4.12) comparam o ajuste do resultado experimental para o íon inicialmente preparado no estado $|\uparrow, n=0\rangle$ com o nosso modelo, para o modo **2** preparado no estado de número, coerente e térmico. As fig.(4.13) a (4.18) fazem a mesma comparação acima, porém aqui o íon é preparado inicialmente nos estados coerente e térmico respectivamente. Nas figuras acima pode ser notado que o resultado que melhor se aproxima do resultado experimental, quer seja para o íon preparado no estado de número, coerente ou térmico é a situação em que o modo **2** é preparado em um estado térmico, como mostram as fig.(4.12), fig.(4.15) e fig.(4.18). Para esse estado do modo **2**, o nosso modelo reproduz satisfatoriamente o ajuste dos resultados experimentais de Meekhof et al.[32]. Esse comportamento não nos parece estranho, pois no experimento o estado mais plausível para o modo **2** é um estado térmico.

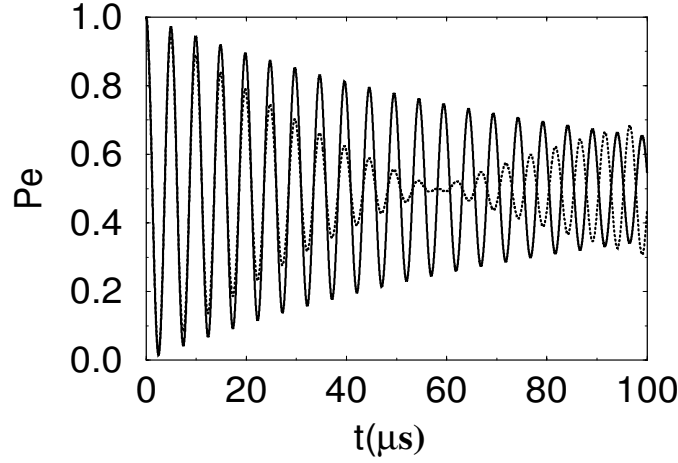


Figura 4.10: $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado de número $|n = 0\rangle$ para um tempo t . A linha cheia corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado de número com $|n = 1.0\rangle$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9\text{KHz}$, $\Omega_o = 94\text{KHz}$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].

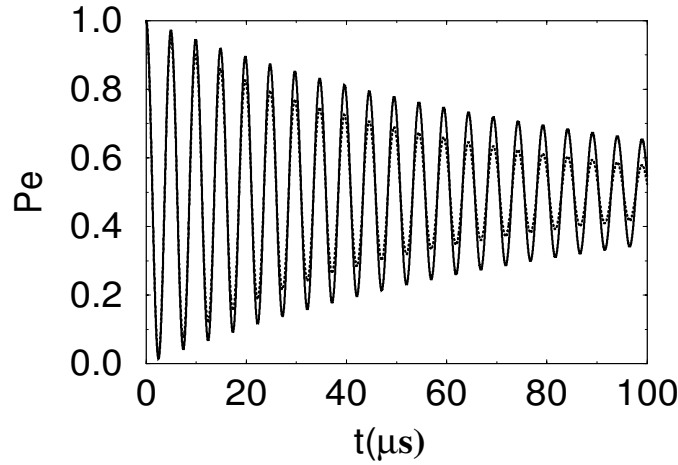


Figura 4.11: $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado de número $|n = 0\rangle$ para um tempo t . A linha cheia corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado coerente com $|\alpha|^2 = 1.0$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9\text{KHz}$, $\Omega_o = 94\text{KHz}$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].

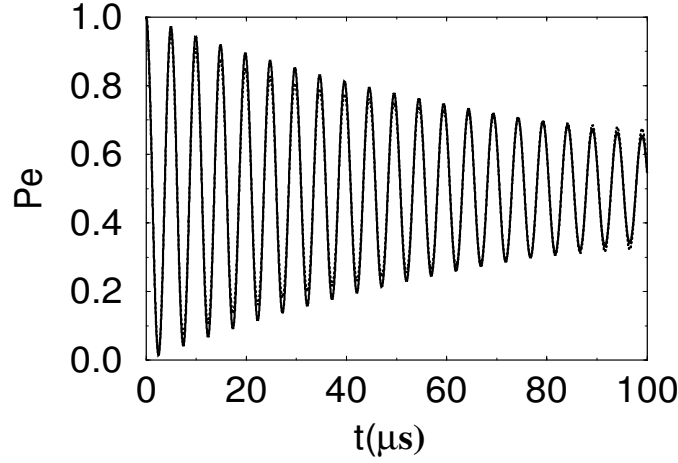


Figura 4.12: $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado de número $|n = 0\rangle$ para um tempo t . A linha cheia corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 1.0$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9 KHz$, $\Omega_o = 94 KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].

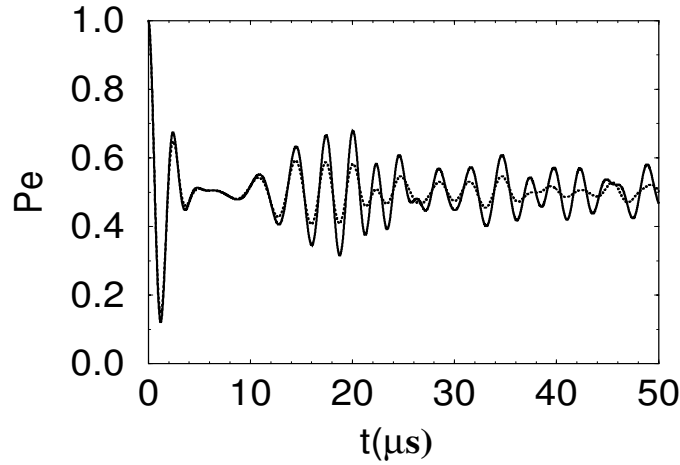


Figura 4.13: $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado coerente $|\alpha|^2 = 3.1$ para um tempo t . A linha cheia corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado coerente com $|\alpha|^2 = 1.0$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9 KHz$, $\Omega_o = 94 KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].

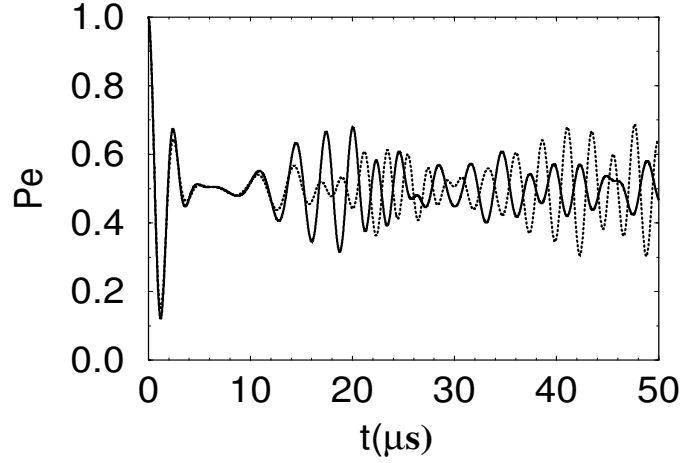


Figura 4.14: $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado coerente $|\alpha|^2 = 3.1$ para um tempo t . A linha cheia corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado de número com $|n = 1\rangle$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9 \text{ KHz}$, $\Omega_o = 94 \text{ KHz}$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].

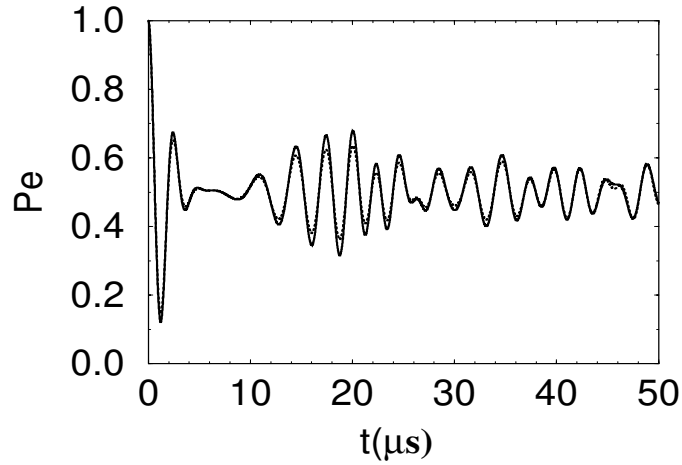


Figura 4.15: $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado coerente $|\alpha|^2 = 3.1$ para um tempo t . A linha cheia corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 1.0$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9 \text{ KHz}$, $\Omega_o = 94 \text{ KHz}$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].

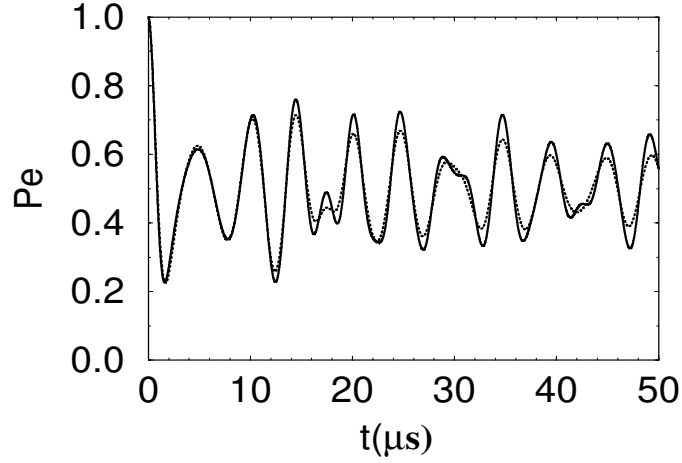


Figura 4.16: $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado térmico $\bar{n}_{th} = 1.3$ para um tempo t . A linha cheia corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado coerente com $|\alpha|^2 = 1.0$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9 KHz$, $\Omega_o = 94 KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0,202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].

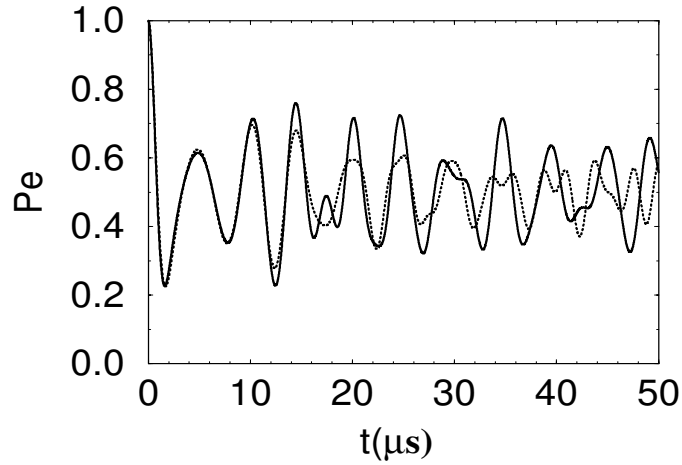


Figura 4.17: $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado térmico $\bar{n}_{th} = 1.3$ para um tempo t . A linha cheia corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado de número com $|n = 1.0\rangle$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9 KHz$, $\Omega_o = 94 KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].

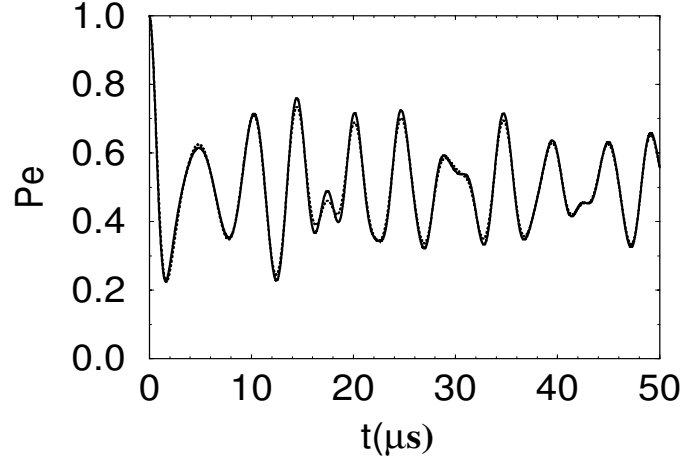


Figura 4.18: $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado térmico $\bar{n}_{th} = 1.3$ para um tempo t . A linha cheia corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 1.0$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9 KHz$, $\Omega_o = 94 KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0,202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].

Vamos agora analisar a importância da taxa de decaimento γ , com o reservatório térmico, e do número de quanta térmico do modo **2** na perda de coerência do íon. Notemos, que na discussão para a perda de coerência feita até aqui, utilizamos como valor para γ o mesmo valor da taxa de decaimento γ_0 (11.9KHz) utilizado no experimento de Meekhof[32]. No entanto, como pode ser observado nas fig.(4.25), fig.(4.28) e fig.(4.31) para um valor diferente de γ o nosso modelo reproduz satisfatoriamente os resultados experimental se variarmos o número de quanta térmico do modo **2**. Para discutirmos a dependência da perda de coerência com a taxa de decaimento γ e com o número de quanta térmico do modo **2**, variaremos esses dois parâmetros na Eq.(4.88). As fig.(4.19) e (4.20) mostram a dinâmica de $P_{\uparrow}$ para o íon inicialmente preparado no estado $|\uparrow, n=0\rangle$. Na fig.(4.19) foi fixado o número médio, $\bar{n}_{th}$, de quanta do modo **2** e variamos o valor de γ . Na fig.(4.20) invertemos a situação, fixamos γ e variamos o valor de $\bar{n}_{th}$. Pode ser observado a partir da fig.(4.20), que a perda de coerência do íon é mais sensível ao resfriamento do modo **2** que à taxa de decaimento γ . Esse comportamento evidencia que um resfriamento perfeito do modo **2** inibiria a perda de coerência do íon devida a esse tipo de fonte de perda de coerência. Um outro comportamento que pode ser observado na Eq.(4.88) é uma saturação na perda de coerência. Para valores muito alto de γ ou para tempos longos o modo **2** decai para o estado de vácuo e a partir desse ponto o modo **2** não contribui mais para a perda de coerência do íon, como mostram as fig.(4.21) a (4.23).

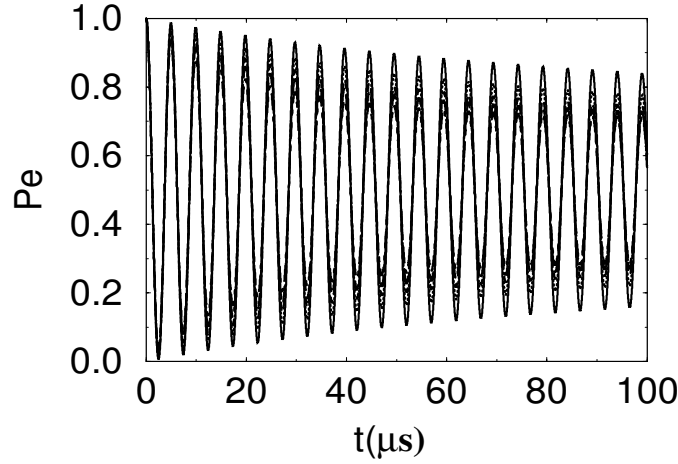


Figura 4.19: Variação de $P_{\uparrow}$ para a perda de coerência devido a modos cruzados com o íon inicialmente preparado em um estado de número $|n = 0\rangle$. O modo cruzado foi preparado no estado térmico com $\bar{n}_{th} = 0.5$. O parâmetro γ assumiu os valores 5.95, 11.9, 17.85, 23.8, e 35.7 KHz, na ordem de decaimento das curvas.

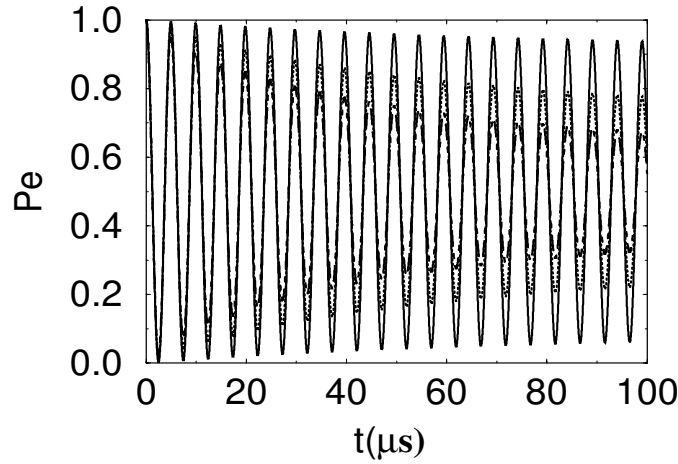


Figura 4.20: Variação de $P_{\uparrow}$ para a perda de coerência devido a modos cruzados com o íon inicialmente preparado em um estado de número $|n = 0\rangle$. O parâmetro γ foi fixado no valor $\gamma = 11.9 KHz$ e o modo cruzado foi preparado no estado térmico com $\bar{n}_{th} = 0.1, 0.5, 1.0$ na ordem de decaimento das curvas.

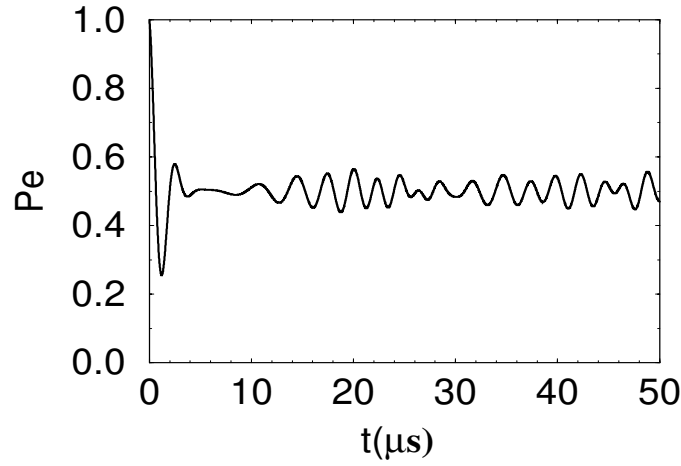


Figura 4.21: Comportamento de $P_{\uparrow}$ para a perda de coerência devido a modos cruzados, com valores alto de γ , $\gamma = 71.4 KHz$. O íon foi preparado inicialmente no estado coerente $|\alpha|^2 = 3.1$. O modo cruzado foi preparado no estado térmico com $\bar{n}_{th} = 1.0$

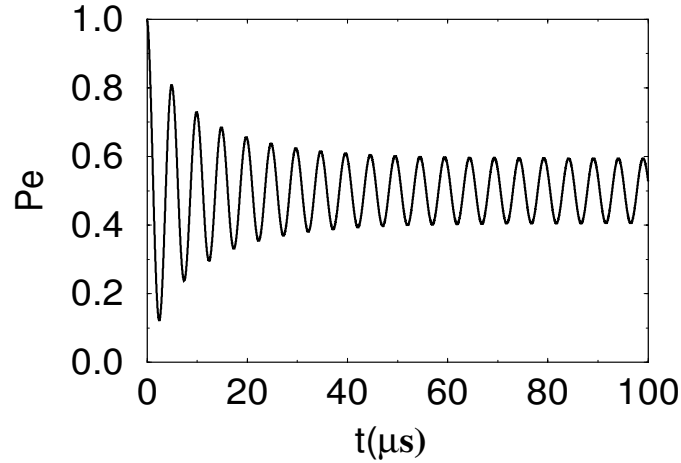


Figura 4.22: Comportamento de $P_{\uparrow}$ para a perda de coerência devido a modos cruzados, com valores alto de γ , $\gamma = 71.4 KHz$. O íon foi preparado inicialmente no estado de número $|n = 0\rangle$. O modo cruzado foi preparado no estado térmico com $\bar{n}_{th} = 1.0$

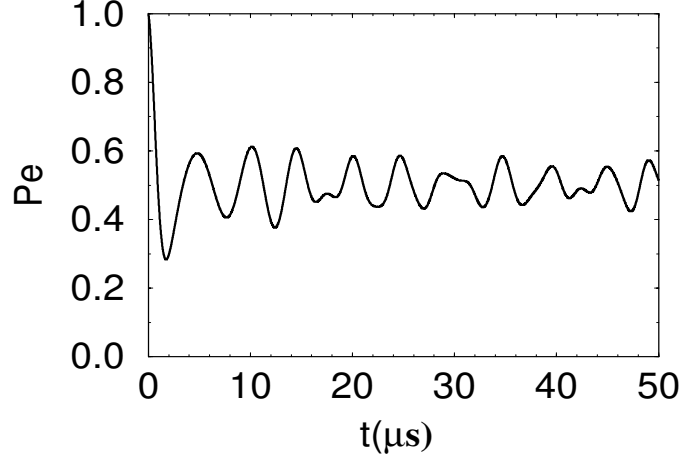


Figura 4.23: Comportamento de $P_{\uparrow}$ para a perda de coerência devido a modos cruzados, com valores alto de γ , $\gamma = 71.4 KHz$. O íon foi preparado inicialmente no estado térmico $\bar{n}_{th} = 1.3$. O modo cruzado foi preparado no estado térmico com $\bar{n}_{th} = 1.0$

Se compararmos o nosso modelo com os modelos propostos por Schneider e Murao, podemos dizer que assim como o modelo de Murao o nosso é baseado em uma interação microscópica do sistema com um reservatório térmico, porém no nosso caso a interação se dá devido a interação entre modos cruzados.

Compararemos agora os nossos resultados com os resultados experimentais de Meekhof et al.,[32]. As fig.(4.24) a fig.(4.32) mostram a evolução temporal de $P_{\uparrow}(t)$ para o íon preparado nos estados de Fock, coerente e térmico. Em todos os casos o modo **2**, modo cruzado, é preparado em um estado térmico $P_{n_2} = N [\bar{n}_{th}/(1 + \bar{n}_{th})]^n$, onde N é uma constante de normalização e $\bar{n}_{th}$ é o número médio de quantas térmico. Os parâmetros utilizados foram estimados em função dos resultados experimentais de Meekhof et al., com $\gamma = 11.9 KHz$, $\Omega_o = 94 KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$.

As fig.(4.24) a (4.26) mostram a probabilidade $P_{\uparrow}$ para o íon inicialmente preparado no estado $|\uparrow, n = 0\rangle$. Na fig.(4.24) o modo **2** é preparado em um estado térmico

com $\bar{n}_{th} = 0.5$ e na fig.(4.26) com $\bar{n}_{th} = 1$. Nas fig.(4.27) a (4.29) mostram a probabilidade $P_{\uparrow}$ para o íon inicialmente preparado em um estado coerente com $|\alpha|^2 = 3, 1$. Nas fig.(4.30) a (4.32) mostram a probabilidade $P_{\uparrow}$ para o íon inicialmente preparado em um estado térmico com $\bar{n} = 1.3$. Para todos os estados descrito acima a Eq.(4.88) descreve satisfatoriamente os resultados experimentais.

O modelo proposto acima descreve perda de coerência, destruindo a característica da dinâmica quântica do sistema sem relaxação de energia do íon. A fonte de perda de coerência foi introduzida fenomenologicamente, e essa pode ser considerada como oriundas das flutuações na armadilha, na intensidade do laser e no mal resfriamento dos modos cruzados. Essa fonte de perda de coerência pode ser inibida se resfriarmos todos os modos do íon para o estado de energia zero. Comparando aqui os experimentos de Meekhof[32] e Ch. Roos et al.[34] para ${}^9Be^+$ e Ca^+ respectivamente, o resfriamento de todos os modos do íon para a temperatura de energia zero pode ser o fator preponderante na redução da perda de coerência no experimento de Ch. Roos.

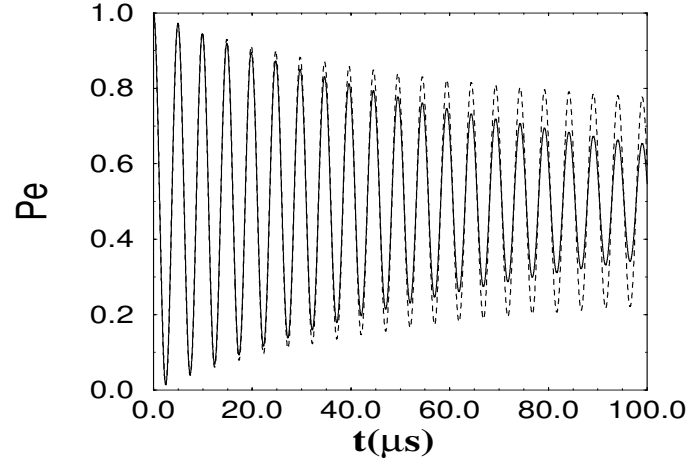


Figura 4.24: $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado de número $|0\rangle$ para um tempo t . A linha sólida corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 0.5$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9 KHz$, $\Omega_o = 94 KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32]

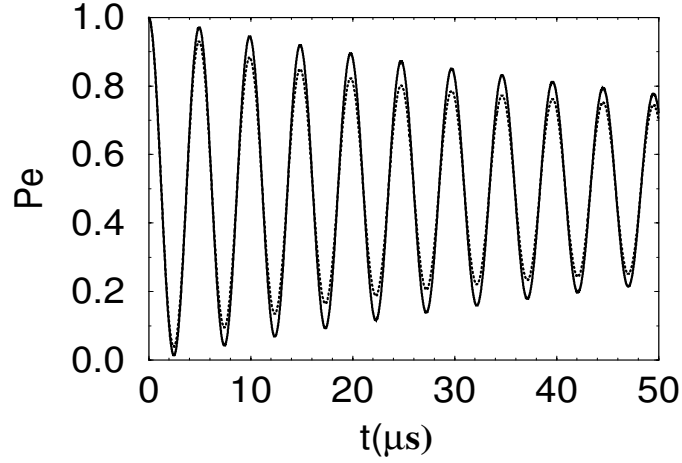


Figura 4.25: $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado de número $|0\rangle$ para um tempo t . A linha sólida corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 0.5$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 35.7 KHz$, $\Omega_o = 94 KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32]

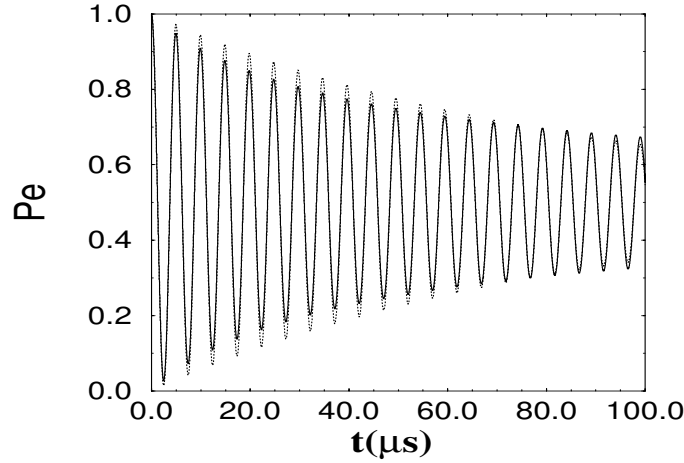


Figura 4.26: $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado de número $|0\rangle$ para um tempo t . A linha tracejada corresponde ao resultado experimental. A linha sólida corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 1.0$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9 KHz$, $\Omega_o = 94 KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].

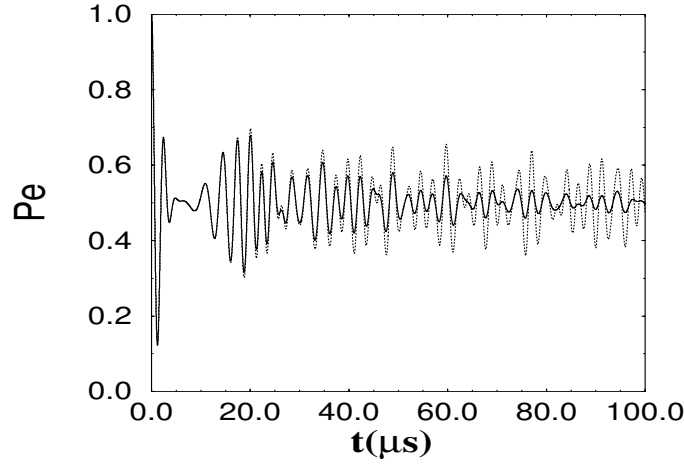


Figura 4.27: $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado coerente $|\alpha|^2 = 3.1$ para um tempo t . A linha sólida corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 0.5$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9 KHz$, $\Omega_o = 94 KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].

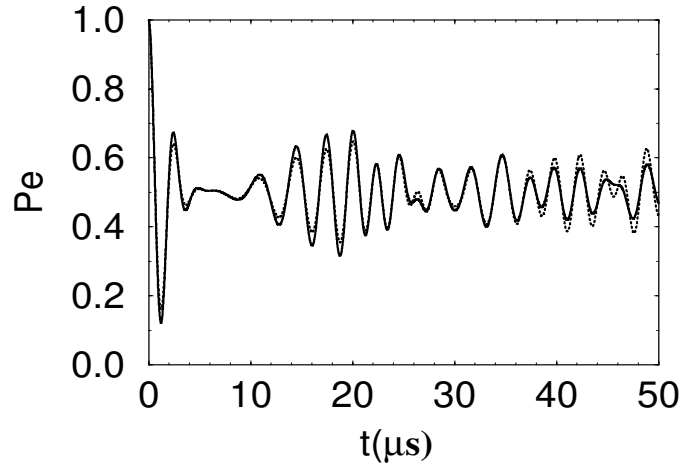


Figura 4.28: $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado coerente $|\alpha|^2 = 3.1$ para um tempo t . A linha sólida corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 0.5$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 35.7 KHz$, $\Omega_o = 94 KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].

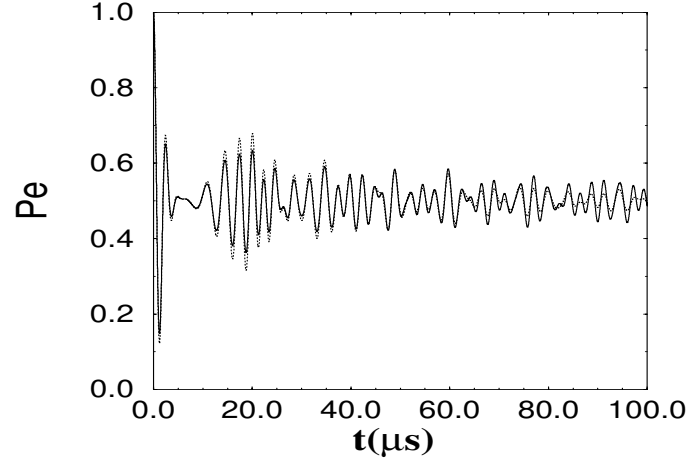


Figura 4.29: $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado coerente $|\alpha|^2 = 3.1$ para um tempo t . A linha tracejada corresponde ao resultado experimental. A linha sólida corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 1.0$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9 KHz$, $\Omega_o = 94 KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].

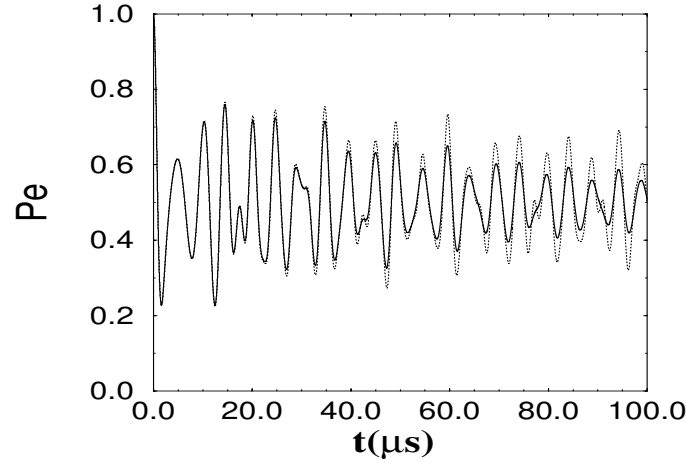


Figura 4.30: $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado térmico $\bar{n} = 1.3$ para um tempo t . A linha sólida corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 0.5$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9 KHz$, $\Omega_o = 94 KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].

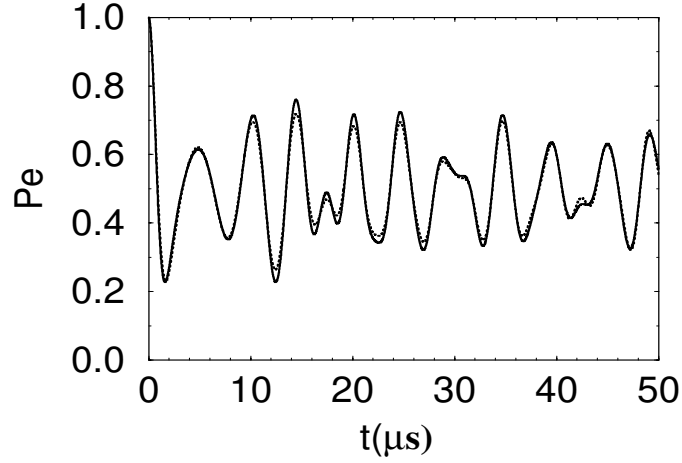


Figura 4.31: $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado térmico $\bar{n} = 1.3$ para um tempo t . A linha sólida corresponde ao resultado experimental. A linha tracejada corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 0.5$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 35.7 KHz$, $\Omega_o = 94 KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].

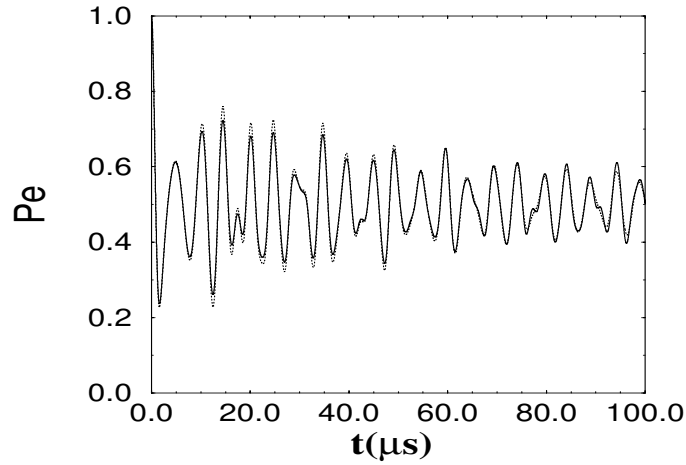


Figura 4.32: $P_{\uparrow}$ para o átomo em um estado excitado e o íon em um estado térmico $\bar{n} = 1.3$ para um tempo t . A linha tracejada corresponde ao resultado experimental. A linha sólida corresponde ao acoplamento com o modo cruzado preparado em um estado térmico com $\bar{n}_{th} = 1.0$, com parâmetros do íon dados por $\gamma = 11.9 KHz$, $\Omega_o = 94 KHz$ e o parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0.202$. Todos os valores foram estimados em função dos resultados do experimento dado em [32].

Nessa seção, introduzimos um modelo fenomenológico para a perda de coerência de íons, levando em consideração o acoplamento entre modos cruzados. Esse acoplamento pode ser induzido por um não alinhamento perfeito do vetor de onda dos lasers, com a direção preferencial do movimento do íon (movimento unidimensional). O não alinhamento pode ser ocasionado por flutuações na intensidade do laser e instabilidade no potencial da armadilha, entre outros. A perda de coerência é ocasionada devido ao acoplamento do modo cruzado com um reservatório térmico quantizado, induzindo flutuações na frequência de Rabi. Essas flutuações leva a uma perda de coerência do modo principal do íon sem relaxação de energia, como a obtida no experimento de Meekhof et al. Para o modo cruzado preparado em um estado térmico o nosso modelo descreve satisfatoriamente os resultados experimentais. Essa fonte de perda de coerência pode ser controlada se os modos cruzados forem resfriados satisfatoriamente até o ponto de energia zero do movimento. Esse comportamento está de acordo com a necessidade de resfriarmos todos os modos do íon para o estado de energia zero afim de preservar a consistência do estado gerado.

Capítulo 5

Um enfoque além do Limite de Lamb-Dicke

Em uma análise teórica, como vimos anteriormente, a interação do íon com lasers é em geral um problema complicado. Da Eq.(4.30) para a dinâmica do íon pode ser observado que essa possui não-linearidades em relação aos operadores de criação e aniquilação dos modos vibracionais. Essas não-linearidades podem ser removidas sob certas condições, que podem ser facilmente realizadas em experimentos. Uma dessas condições é o limite de Lamb-Dicke (LDL)[30]. Como vimos anteriormente, essa condição é dada quando o movimento do íon é restrito a uma região do espaço muito menor do que o comprimento de onda do laser, que excita as transições. Nesse limite, podemos definir um parâmetro $\eta \ll 1$ (parâmetro de Lamb-Dicke). Mantendo unicamente os termos de baixa ordem em η a Eq.(4.30) é bastante simplificada e a análise do sistema é facilitada. No entanto, não há como obtermos informações dos efeitos de alta ordem em η após essa linearização. A não linearidade da Hamiltoniana, Eq.(4.30), leva o sistema a uma grande variedade de efeitos. No grupo de W. Vogel, vários desses efeitos têm sido explorados: acoplamentos não-linear em um modelo Jaynes-Cummings multiquântico[95]; efeitos equivalentes de óptica não-linear em mecânica quântica[99]; estados comprimidos não lineares[100]; e efeitos não-lineares de alta ordem[101].

Nessa seção, apresentaremos um novo método para estudar a dinâmica de íons

aprisionados. Esse méto é baseado em uma transformação unitária, que leva a Hamiltoniana do sistema a uma Hamiltoniana tipo Jaynes-Cummings (JCM), sem recorrermos ao limite de Lamb-Dicke[37]. A transformação leva o sistema ‘real’ a um sistema ‘não real’, onde toda a dinâmica pode ser estudada e retransformada para o sistema ‘real’ a partir de uma transformação inversa. A não-linearidade do sistema é guardada no operador de transformação, como uma memória do sistema, sendo memorizada pela dinâmica através da transformação inversa. Mostraremos que uma escolha apropriada dos parâmetros do sistema efeitos de ‘super-revivals’ podem ocorrer, para outros parâmetros a inversão atômica se comporta de forma caótica, sem a indicação de ‘revivals’ ou outra estrutura regular. Além, do comportamento dinâmico dado acima, a transformação unitária apresentada aqui tem sido utilizada como proposta de implementação de portas quânticas rápidas[81] e na geração de gatos de Schrödinger[82].

5.1 Transformação unitária

O nosso ponto de partida será a dinâmica do íon em um potencial harmônico, como apresentado nas seções anteriores. Consideraremos um íon aprisionado, interagindo com dois lasers de frequências ω_1 e ω_2 , respectivamente em uma configuração tipo Raman ($\omega_L = \omega_1 - \omega_2$). Os lasers conduzem as transições de dipolo elétrico não permitidas entre os níveis $|\downarrow\rangle \longleftrightarrow |\uparrow\rangle$ (frequência ω_o) com $\delta = \omega_L - \omega_o$, dissintonia entre o laser e a transição atômica, ver fig.(5.1). Após uma eliminação adiabática do terceiro nível, na configuração Raman, obtemos um sistema efetivo de dois níveis (ver seção 4.2, Dinâmica de íons em um potencial harmônico). Essa situação é descrita pela Hamiltoniana[74]

$$\hat{H}_I = \hbar\Omega \left\{ \sigma_+ \exp\{i[\eta(ae^{-i\omega_z t} + a^\dagger e^{i\omega_z t}) - \delta t]\} + h.c \right\}. \quad (5.1)$$

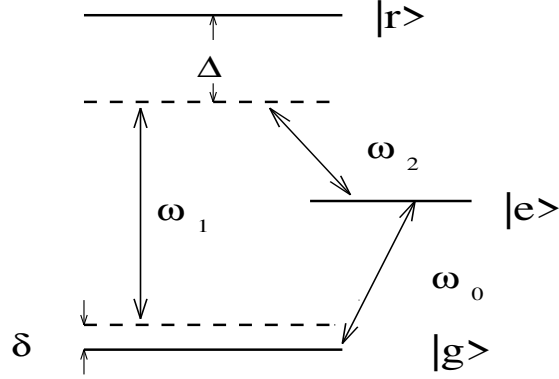


Figura 5.1: A figura mostra um esquema de um átomo de três níveis.

Usando[37] e escrevendo o operador unitário

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2} [D^\dagger(\beta(t)) + D(\beta(t))] I + \frac{1}{2} [D^\dagger(\beta(t)) - D(\beta(t))] \sigma_z + D(\beta(t)) \sigma_+ - D^\dagger(\beta(t)) \sigma_- \right\}, \quad (5.2)$$

onde $D(\beta(t)) = e^{-i\delta t} \exp[\beta(t)a^\dagger - \beta^*(t)a]$ com $\beta(t) = i\eta e^{i\omega_z t}$. O operador $D(\beta(t))$ é o operador de deslocamento de Glauber, dependente do tempo, modulado pela amplitude $e^{-i\delta t}$. Aplicando a transformação unitária na Hamiltoniana de interação H_I obtemos o operador transformado

$$H_T \equiv T H_I T^\dagger = \hbar \Omega \sigma_z. \quad (5.3)$$

Essa transformação nos levará a um vetor de estado transformado dado por

$$|\Psi_T(t)\rangle = T |\Psi_I(t)\rangle. \quad (5.4)$$

Para discutirmos a dinâmica do vetor de estado transformado, usaremos a equação de Schrödinger, Eq.(4.32),

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial |\Psi_I(t)\rangle}{\partial t} &= i\hbar \left(\frac{\partial T^\dagger}{\partial t} \right) |\Psi_T\rangle + i\hbar T^\dagger \frac{\partial |\Psi_T(t)\rangle}{\partial t} \\ &= H_I T^\dagger |\Psi_T(t)\rangle. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Aplicando sobre o lado esquerdo da equação acima o operador unitário T e arrumando convenientemente obtemos

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi_T(t)\rangle}{\partial t} = H'_T |\Psi_T\rangle, \quad (5.6)$$

onde escrevemos

$$H'_T = T H_I T^\dagger - i\hbar T \left(\frac{\partial T^\dagger}{\partial t} \right). \quad (5.7)$$

A Eq.(5.6) é a equação de Schrödinger no espaço transformado e H'_T é a Hamiltoniana efetiva do sistema no espaço transformado. Equivalentemente ao vetor de estado no espaço real $|\Psi_I(t)\rangle$, o vetor de estado no espaço transformado $|\Psi_T(t)\rangle$ evolui temporalmente obedecendo a equação de Schrödinger, Eq.(5.6), e pode ser interpretado como uma rotação do vetor de estado $|\Psi_I(t)\rangle$. A norma do vetor de estado transformado é

$$\langle \Psi_T(t) | \Psi_T(t) \rangle = \langle \Psi_I(t) | T T^\dagger | \Psi_I(t) \rangle, \quad (5.8)$$

desde que $T^\dagger = T^{-1}$,

$$\langle \Psi_T(t) | \Psi_T(t) \rangle = \langle \Psi_I(t) | \Psi_I(t) \rangle \quad (5.9)$$

e essa não muda, o que já era esperado, pois uma transformação unitária não altera a norma do vetor de estado, altera unicamente a sua direção. No caso descrito aqui a transformação unitária transforma o vetor de estado do sistema ‘real’ em um vetor de estado de um sistema ‘não-real’. A conservação da norma do vetor de estado, mesmo após a transformação, nos garante a conservação da probabilidade na dinâmica do sistema, em outras palavras a transformação não modifica a probabilidade global de acharmos o íon em um determinado estado. A transformação leva o sistema ‘real’ para um sistema ‘não-real’, onde toda a dinâmica pode ser estudada e retransformada para o sistema ‘real’ a partir de uma transformação inversa.

Retornemos agora à Hamiltoniana transformada H'_T . Escrevendo o operador de

transformação T na forma matricial, na base atômica,

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} D_{1/2}^\dagger & D_{1/2} \\ -D_{1/2}^\dagger & D_{1/2} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

e o seu adjunto

$$T^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} D_{1/2} & -D_{1/2} \\ D_{1/2}^\dagger & D_{1/2}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Derivando $T^\dagger(t)$ em relação ao tempo

$$\frac{\partial}{\partial t} T^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{2}} [\eta\omega_z (ae^{-i\omega_z t} - a^\dagger e^{i\omega_z t}) - i\delta] \begin{pmatrix} D_{1/2} & -D_{1/2} \\ D_{1/2}^\dagger & D_{1/2}^\dagger \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

e multiplicando pelo lado esquerdo por T obtemos

$$\begin{aligned} T \left(\frac{\partial T^\dagger}{\partial t} \right) &= -\frac{\eta\omega_z}{4} \left[\begin{pmatrix} -D_{1/2}^\dagger a D_{1/2} + D_{1/2} a D_{1/2}^\dagger & D_{1/2}^\dagger a D_{1/2} + D_{1/2} a D_{1/2}^\dagger \\ D_{1/2}^\dagger a D_{1/2} + D_{1/2} a D_{1/2}^\dagger & -D_{1/2}^\dagger a D_{1/2} + D_{1/2} a D_{1/2}^\dagger \end{pmatrix} e^{-i\omega_z t} \right. \\ &\quad \left. - \begin{pmatrix} -D_{1/2}^\dagger a^\dagger D_{1/2} + D_{1/2} a^\dagger D_{1/2}^\dagger & D_{1/2}^\dagger a^\dagger D_{1/2} + D_{1/2} a^\dagger D_{1/2}^\dagger \\ D_{1/2}^\dagger a^\dagger D_{1/2} + D_{1/2} a^\dagger D_{1/2}^\dagger & -D_{1/2}^\dagger a^\dagger D_{1/2} + D_{1/2} a^\dagger D_{1/2}^\dagger \end{pmatrix} e^{i\omega_z t} \right] \\ &\quad + \frac{i\delta}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Para simplificar a expressão acima, usaremos as propriedades do operador de deslocamento de Glauber. Aplicando o operador Glauber sobre os operadores de aniquilação a e criação $a^\dagger$, esses são deslocados por um fator constante. Usando a relação

$$e^{-\beta A} B e^{\beta A} = B - \beta[A, B] + \frac{\beta^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots \quad (5.14)$$

e fazendo $A = ae^{-i\omega_z t} + a^\dagger e^{i\omega_z t}$, $B = a$ e $\beta = \frac{i}{2}\eta$, encontramos

$$D_{1/2}^\dagger a D_{1/2} = a + \frac{i}{2}\eta e^{i\omega_z t}. \quad (5.15)$$

Escrevendo agora $\beta = -\frac{i}{2}\eta$, encontramos

$$D_{1/2} a D_{1/2}^\dagger = a - \frac{i}{2}\eta e^{i\omega_z t}. \quad (5.16)$$

As demais operações podem ser calculadas de forma análoga ao resultado acima ou simplesmente calculando o conjugado destas, ou seja

$$D_{1/2}^\dagger a^\dagger D_{1/2} = a^\dagger - \frac{i}{2}\eta e^{-i\omega_z t}, \quad (5.17)$$

$$D_{1/2} a^\dagger D_{1/2}^\dagger = a^\dagger + \frac{i}{2} \eta e^{-i\omega_z t}. \quad (5.18)$$

Usando o resultado acima na Eq.(5.13) obtemos

$$T\left(\frac{\partial T^\dagger}{\partial t}\right) = -\frac{1}{2}[\eta\omega_z(ae^{-i\omega_z t} - a^\dagger e^{i\omega_z t}) - i\delta](\sigma_+ + \sigma_-) + \frac{i\eta^2}{2}\omega_z, \quad (5.19)$$

onde fizemos uso das matrizes de Pauli

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

$$\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

operadores do subespaço atômico.

A partir das equações (5.3) e (5.19) a Hamiltoniana H'_T pode ser reescrita na forma

$$H'_T = \hbar\Omega\sigma_z + i\frac{\hbar}{2}[\eta\omega_z(ae^{-i\omega_z t} - a^\dagger e^{i\omega_z t}) - i\delta](\sigma_+ + \sigma_-), \quad (5.22)$$

onde o termo constante $\frac{\hbar\eta^2}{2}\omega_z$ foi desprezado. No entanto, para diagonalizarmos o Hamiltoniano acima será necessário fazermos uma aproximação de onda girante, a qual nos levará a uma restrição no limite de Lamb-Dicke, como veremos a seguir. Notemos que a Hamiltoniana do sistema ‘real’, (5.1), possui não linearidades em relação aos operadores de criação e aniquilação dos modos vibracionais. A transformação leva a Hamiltoniana H_I do sistema ‘real’, não-linear, em uma Hamiltoniana H' de um sistema ‘não real’ completamente linear. A não-linearidade do sistema é guardada no operador de transformação T , na forma do operador de deslocamento de Glauber, como uma memória do sistema ‘real’ podendo ser rememorizada pela dinâmica do sistema através de uma transformação inversa posterior a análise da dinâmica do sistema ‘não real’.

Na eq.(5.22) H'_T é uma Hamiltoniano do tipo Jaynes-Cummings[4] e desta forma a diagonalização exata desta é possível se efetuarmos uma aproximação de onda girante (RWA). No entanto, essa aproximação impõe limitações sobre o parâmetro de Lamb-Dicke

η , pois a constante de acoplamento efetiva da Hamiltoniana transformada é dada por $\frac{1}{2}\eta\omega_z$ e nessa aproximação é necessário satisfazermos a condição $\frac{1}{2}\eta\omega_z \ll \omega_z$.

H'_T depende explicitamente do tempo e é conveniente retirarmos esta dependência temporal. Para retirarmos esta dependência temporal escreveremos esta em uma representação tipo de interação. Chamaremos esta representação de uma representação de interação no sistema ‘não real’, definida por uma transformação unitária

$$|\Psi_T(t)\rangle = U_{0,T}(t)|\Psi_T^{(I)}(t)\rangle, \quad (5.23)$$

onde o índice I refere-se a representação de interação no espaço transformado. Usando a Eq.(5.23) na equação de Schrödinger para o espaço transformado, dada pela Eq.(5.6), obtemos

$$i\hbar\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}U_{0,T}\right)|\Psi_T^{(I)}(t)\rangle + U_{0,T}\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_T^{(I)}(t)\rangle\right] = (H_T + V_T)|\Psi_T^{(I)}(t)\rangle, \quad (5.24)$$

onde definimos

$$V_T = i\frac{\hbar}{2}\left[\eta\omega_z(ae^{-i\omega_z t} - a^\dagger e^{i\omega_z t}) - i\delta\right](\sigma_+ + \sigma_-), \quad (5.25)$$

o termo correspondente a interação na Hamiltoniana H' . Multiplicando o lado esquerdo da Eq.(5.24) por $U_{0,T}^\dagger$ obtemos

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_T^{(I)}(t)\rangle = H'_I|\Psi_T^{(I)}(t)\rangle, \quad (5.26)$$

desde que

$$i\hbar\frac{\partial U_{0,T}(t)}{\partial t} = H_T U_{0,T}(t). \quad (5.27)$$

Na equação (5.26) definimos

$$H'_I = U_{0,T}^\dagger V_T U_{0,T}. \quad (5.28)$$

H'_I é a Hamiltoniana do sistema transformado em uma representação de interação. Para que a equação (5.27) seja satisfeita para qualquer que seja o estado $|\Psi_T^{(I)}(t)\rangle$ é necessário que

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_{0,T}(t) - H_T U_{0,T} = 0. \quad (5.29)$$

Como H_T não depende explicitamente do tempo a equação acima pode ser integrada diretamente dando como resultado

$$U_{0,T}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_T t}, \quad (5.30)$$

com a condição inicial $U_{0,T} = 1$, para $t = 0$.

Calcularemos agora a Hamiltoniana do sistema transformado em uma representação de interação. Usando as expressões para V_T e $U_{0,T}$ e evoluindo a Eq.(5.28) obtemos

$$H_I' = i\frac{\hbar}{2} \left[\eta\omega_z (ae^{-i\omega_z t} - a^\dagger e^{i\omega_z t}) - i\delta \right] e^{i\Omega\sigma_z t} (\sigma_+ + \sigma_-) e^{-i\Omega\sigma_z t}. \quad (5.31)$$

Fazendo uso da identidade

$$e^{\beta A} B e^{-\beta A} = B + \beta[A, B] + \frac{\beta^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots \quad (5.32)$$

Definindo $\beta = i\Omega t$, $A = \sigma_z$ e $B = \sigma_+ + \sigma_-$ chegamos a

$$e^{i\Omega\sigma_z t} (\sigma_+ + \sigma_-) e^{-i\Omega\sigma_z t} = e^{2i\Omega t} \sigma_+ + e^{-2i\Omega t} \sigma_-. \quad (5.33)$$

Substituindo o resultado acima na Eq.(5.31) obtemos

$$\begin{aligned} H_I' = & i\hbar \frac{\eta\omega_z}{2} \left\{ [a\sigma_+ e^{-i(\omega_z - 2\Omega)t} - a^\dagger \sigma_- e^{i(\omega_z - 2\Omega)t}] + \right. \\ & [a\sigma_- e^{-i(\omega_z + 2\Omega)t} - a^\dagger \sigma_+ e^{i(\omega_z + 2\Omega)t}] - \\ & \left. i\frac{\delta}{\eta\omega_z} (\sigma_+ e^{2i\Omega t} + \sigma_- e^{-2i\Omega t}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

A Eq.(5.34) descreve o sistema em um regime diferente do usual, $\eta \ll 1$. A Hamiltoniana H_I' , que representa a energia do sistema no espaço transformado, de forma análoga à Hamiltoniana do sistema ‘real’ apresenta três tipos de interação: ‘The first blue sideband’ ($\omega_z = 2\Omega$), a excitação atômica é acompanhada de desexcitação dos modos vibracionais do íon. A Hamiltoniana resultante é semelhante à Hamiltoniana do modelo Jaynes-Cummings[4]; ‘The first red sideband’ ($\omega_z = -2\Omega$), a excitação atômica é acompanhada

de uma excitação dos modos vibracionais do íon. Temos aqui uma Hamiltoniana que se comporta de maneira contrária à Hamiltoniana do modelo Jaynes-Cummings, ou melhor uma Hamiltoniana do tipo anti Jaynes-Cummings [17, 23, 102]; ‘Carrier’ ($\Omega = 0$), neste caso há transição atômica sem excitação dos modos vibracionais. Para o regime $\omega_z = 2\Omega$, isto é, quando a frequência de Rabi (Ω) do acoplamento entre o laser e o íon é da ordem da frequência vibracional (ω_z) do íon na armadilha, podemos desprezar os termos que oscilam rapidamente, correspondendo a uma aproximação de onda girante [103]. Próximo da ressonância ($\omega_z \approx 2\Omega$) o primeiro termo da interação varia suavemente, ao contrário dos dois últimos termos que oscilam respectivamente com frequências $2\omega_z$ e ω_z . Para o tempo de interesse experimental os termos de alta frequência têm média igual a zero e a Hamiltoniana transformada pode ser escrita aproximadamente como

$$H'_{I,RWA} = i\hbar \frac{\eta\omega_z}{2} (a\sigma_+ - a^\dagger\sigma_-). \quad (5.35)$$

Notemos que a Hamiltoniana acima descreve a dinâmica do sistema transformado e como tal toda a informação oriunda desta é referente a este sistema e não ao sistema ‘real’ dado pela Eq.(4.30). Para obtermos a dinâmica do sistema ‘real’ é necessário aplicarmos a transformação inversa sobre o vetor de estado transformado $|\Psi_T^{(I)}(t)\rangle$.

A transformação apresentada acima é uma nova maneira de tratar a dinâmica de íon aprisionados interagindo com lasers, baseada inteiramente em uma transformação unitária. A Hamiltoniana do sistema é transformada em uma Hamiltoniana tipo Jaynes-Cummings, sem recorrermos ao limite de Lamb-Dicke. Acreditamos, que esse método fecha o intervalo entre os diferentes regimes de intensidade. Por outro lado, a transformação mostra-se aplicável para a preparação de portas lógicas para computadores quânticos[81] e geração de estados tipo gato de Schrödinger[82].

Em seguida, discutiremos a dinâmica do sistema e mostraremos que com uma escolha apropriada dos parâmetros do sistema, efeitos de ‘super-revivals’ podem ocorrer,

porém para outros parâmetros um comportamento ‘caótico’ é obtido, sem indicação de ‘revivals’ ou alguma outra estrutura regular.

5.2 Dinâmica do sistema

A evolução do sistema transformado descrito pela Hamiltoniana (5.35) pode ser calculada por vários métodos [48], aqui utilizaremos o método de operador de evolução unitária.

Para discutirmos a dinâmica do sistema, retornaremos à equação de Schrödinger transformada, dada pela Eq.(5.26),

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi_T^{(I)}(t)\rangle}{\partial t} = H'_I |\Psi_T^{(I)}(t)\rangle. \quad (5.36)$$

O vetor de estado para um tempo t pode ser obtido a partir do operador de evolução temporal na forma

$$|\Psi_T^{(I)}(t)\rangle = U_T(t) |\Psi_T^{(I)}(0)\rangle, \quad (5.37)$$

onde $|\Psi_T^{(I)}(0)\rangle$ é o vetor de estado, no espaço transformado, para o tempo $t = 0$. Substituindo (5.37) em (5.36) obtemos

$$i\hbar \frac{\partial U_T}{\partial t} |\Psi_T^{(I)}(0)\rangle = H'_I U_T |\Psi_T^{(I)}(0)\rangle, \quad (5.38)$$

como $|\Psi_T^{(I)}(0)\rangle$ é completamente arbitrário e independente do tempo podemos escrever

$$i\hbar \frac{\partial U_T}{\partial t} = H'_I U_T, \quad (5.39)$$

com a condição inicial $U_T(0) = 1$. A solução da equação acima pode ser obtida integrando formalmente ambos os lados dando

$$U_T(t) = 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t H'_I(t') U_T(t') dt'. \quad (5.40)$$

Para o caso ressonante ($\omega_z = 2\Omega$) a Hamiltoniana H'_I é dada pela Eq.(5.35), a qual é independente do tempo e desta forma

$$U_T(t) = \exp(-iH'_{T,RWA}t/\hbar). \quad (5.41)$$

Notemos que $U_T U_T^\dagger = 1$.

Para escrever o operador $U_T(t)$ em uma forma mais conveniente, em função dos estados atômicos, usaremos $H'_{T,RWA}$ dado anteriormente e expandiremos a Eq.(5.41) em série de potência obtendo

$$U_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-it)^k (g^* a \sigma_+ + g a^\dagger \sigma_-)^k, \quad (5.42)$$

onde definimos $g \equiv -i \frac{\eta \omega_z}{2}$. Lembrando que $\sigma_+ = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|$ e $\sigma_- = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$ e usando as identidades

$$(g^* a \sigma_+ + g a^\dagger \sigma_-)^{2k} = |g|^{2k} \left[(a a^\dagger)^k |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + (a^\dagger a)^k |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \right] \quad (5.43)$$

$$(g^* a \sigma_+ + g a^\dagger \sigma_-)^{2k+1} = |g|^{2k} \left[g^* (a a^\dagger)^k a |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + g a^\dagger (a^\dagger a)^k |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \right] \quad (5.44)$$

o operador de evolução temporal $U_T(t)$ pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} U_T(t) = & \frac{1}{2}(\hat{C}_{n+1} + \hat{C}_n)I + \frac{1}{2}(\hat{C}_{n+1} - \hat{C}_n)\sigma_z + \\ & \hat{S}_{n+1}a\sigma_+ - a^\dagger \hat{S}_{n+1}\sigma_-, \end{aligned} \quad (5.45)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \hat{C}_{n+1} &= \cos(|g|\sqrt{a^\dagger a + 1}t), \quad \hat{S}_{n+1} = \frac{\sin(|g|\sqrt{a^\dagger a + 1}t)}{\sqrt{a^\dagger a + 1}}, \\ \hat{C}_n &= \cos(|g|\sqrt{a^\dagger a}t) \end{aligned} \quad (5.46)$$

e fizemos uso da matriz de Pauli σ_z mais o operador unitário na base atômica, $I = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$.

O operador de evolução temporal $U_T(t)$ aplicado ao estado inicial do sistema ‘não-real’ descreve completamente a dinâmica deste sistema. Como pode ser notado o operador U_T é o mesmo operador de evolução temporal do modelo Jaynes-Cummings na representação de interação.

Para estudarmos a dinâmica do sistema ‘real’ é necessário aplicarmos a transformação inversa no vetor de estado do sistema ‘não-real’, Eq.(5.4), para obtermos o vetor de estado do sistema real

$$\begin{aligned}
 |\Psi_I(t)\rangle &= T^\dagger |\Psi_T(t)\rangle \\
 &= T^\dagger U_{0,T} U_T |\Psi_T(0)\rangle \\
 &= T^\dagger U_{0,T} U_T T |\Psi_I(0)\rangle,
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

onde fizemos uso das transformações $|\Psi_T^I(t)\rangle = U_{0,T} |\Psi_T(t)\rangle$ e $|\Psi_T^{(I)}(t)\rangle = U_T(t) |\Psi_T^{(I)}(0)\rangle$ e da condição que $|\Psi_T^{(I)}(0)\rangle = |\Psi_T(0)\rangle$. A dinâmica do sistema ‘real’ pode agora ser calculada a partir da Eq.(5.47).

Para o caso em que o estado atômico do íon foi inicialmente preparado no estado excitado $|\uparrow\rangle$ e os modos vibracionais deste no estado coerente $|\alpha\rangle$, de forma que $|\Psi_I(0)\rangle = |\uparrow\rangle|\alpha\rangle$, o vetor de estado $|\Psi_I(t)\rangle$ é dado por

$$|\Psi_I(t)\rangle = \frac{1}{2} \left[D(e^{-i\Omega t} \hat{A} + e^{i\Omega t} \hat{B}) D^\dagger |\uparrow\rangle|\alpha\rangle + D^\dagger (e^{-i\Omega t} \hat{A} - e^{i\Omega t} \hat{B}) D^\dagger |\downarrow\rangle|\alpha\rangle \right], \tag{5.48}$$

onde definimos os operadores

$$\hat{A} = \hat{C}_{n+1} - \hat{S}_{n+1}a \tag{5.49}$$

$$\hat{B} = \hat{C}_n + a^\dagger \hat{S}_{n+1}.$$

Como havíamos mencionado anteriormente a não-linearidade do sistema em relação aos operadores de criação e aniquilação foi recuperada aplicando a transformação inversa.

O vetor de estado acima nos será útil para calcularmos os valores esperados das quantidades físicas do sistema. Por exemplo, estamos interessados em saber como o átomo é excitado e desexcitado quando interage com os modos vibracionais do íon, ou a dinâmica dos modos vibracionais do íon. Em seguida, discutiremos a inversão atômica

e a dinâmica dos modos vibracionais. No final dessa seção, seguindo a forma usual de discutir a dinâmica de íons, consideraremos o caso ressonantes e utilizaremos o limite de Lamb-Dicke e compararemos a dinâmica com os resultados anteriores, mesmo nesse limite ‘super-revivals’ são possíveis.

5.2.1 Dinâmica atômica

Agora analisaremos um aspecto particular da dinâmica do sistema, a dinâmica atômica, como os modos vibracionais excitam e desexcitam os estados atômicos. Discutiremos aqui a inversão atômica,

$$W(t) = |\langle \uparrow | \Psi_I(t) \rangle|^2 - |\langle \downarrow | \Psi_I(t) \rangle|^2. \quad (5.50)$$

A partir do vetor de estado $|\Psi_I(t)\rangle$ calculemos as amplitudes de probabilidade de obtermos o átomo no estado excitado e fundamental $|\langle \uparrow | \Psi_I(t) \rangle|^2$ e $|\langle \downarrow | \Psi_I(t) \rangle|^2$, respectivamente. Projetando os vetores de estados $\langle \uparrow |$ e $\langle \downarrow |$ no estado $|\Psi_I(t)\rangle$ obtemos

$$\langle \uparrow | \Psi(t)_I \rangle = \frac{1}{2} D(e^{-i\Omega t} \hat{A} + e^{i\Omega t} \hat{B}) D^\dagger |\alpha\rangle, \quad (5.51)$$

$$\langle \downarrow | \Psi(t)_I \rangle = \frac{1}{2} D^\dagger(e^{-i\Omega t} \hat{A} - e^{i\Omega t} \hat{B}) D^\dagger |\alpha\rangle. \quad (5.52)$$

Calculando agora as amplitudes de probabilidades de encontrarmos o átomo no estado excitado e fundamental

$$\begin{aligned} |\langle \uparrow | \Psi_I(t) \rangle|^2 &= \frac{1}{4} \langle \alpha | D(e^{i\Omega t} \hat{A}^\dagger + e^{-i\Omega t} \hat{B}^\dagger) (e^{-i\Omega t} \hat{A} + e^{i\Omega t} \hat{B}) D^\dagger | \alpha \rangle \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n,m=0}^{\infty} \langle \alpha | \beta, m \rangle \langle \beta, m | \alpha \rangle \left(\langle m | \hat{A}^\dagger \hat{A} | n \rangle + \langle m | \hat{B}^\dagger \hat{B} | n \rangle \right. \\ &\quad \left. + e^{2i\Omega t} \langle m | \hat{A}^\dagger \hat{B} | n \rangle + e^{-2i\Omega t} \langle m | \hat{B}^\dagger \hat{A} | n \rangle \right), \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$|\langle \downarrow | \Psi_I(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4} \langle \alpha | D(e^{i\Omega t} \hat{A}^\dagger - e^{-i\Omega t} \hat{B}^\dagger) (e^{-i\Omega t} \hat{A} - e^{i\Omega t} \hat{B}) D^\dagger | \alpha \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \sum_{n,m=0}^{\infty} \langle \alpha | \beta, m \rangle \langle \beta, m | \alpha \rangle \left(\langle m | \hat{A}^\dagger \hat{A} | n \rangle + \langle m | \hat{B}^\dagger \hat{B} | n \rangle \right. \\
&\quad \left. - e^{2i\Omega t} \langle m | \hat{A}^\dagger \hat{B} | n \rangle - e^{-2i\Omega t} \langle m | \hat{B}^\dagger \hat{A} | n \rangle \right), \tag{5.54}
\end{aligned}$$

onde usamos a relação de completeza na base de Fock $\sum_{n=0} |n\rangle \langle n| = 1$ e definimos o estado de Fock deslocado $|\beta, m\rangle$ e o seu conjugado $\langle \beta, m|$ aplicando o operador de deslocamento $D(\beta, \beta^*)$ sobre o estado $|m\rangle$ na forma $|\beta, m\rangle = D(\beta, \beta^*)|m\rangle$ e $\langle \beta, m| = \langle m|D^\dagger(\beta, \beta^*)$ [104].

Usando a definição dos operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e aplicando esses no estado de Fock

$$\hat{A}|n\rangle = \cos(gt\sqrt{n+1})|n\rangle - \sin(gt\sqrt{n})|n-1\rangle \tag{5.55}$$

$$\hat{B}|n\rangle = \cos(gt\sqrt{n})|n\rangle + \sin(gt\sqrt{n+1})|n+1\rangle, \tag{5.56}$$

podemos calcular os elementos de matriz

$$\begin{aligned}
\langle \alpha | \beta, m \rangle \langle \beta, n | \alpha \rangle \langle m | \hat{A}^\dagger \hat{A} | n \rangle &= \langle \alpha | \beta, m \rangle \langle \beta, n | \alpha \rangle \left(\langle m | c_{m+1}^* - \langle m-1 | s_m^* \right) \\
&\quad \left(c_{n+1} | n \rangle - s_n | n-1 \rangle \right) = \left[\langle \alpha | \beta, n \rangle c_{n+1}^* - \langle \alpha | \beta, n+1 \rangle s_{n+1}^* \right] \\
&\quad \left[\langle \beta, n | \alpha \rangle c_{n+1} - \langle \beta, n+1 | \alpha \rangle s_{n+1} \right] \\
&= |C_{\uparrow, n}^{(-)}(t)|^2, \tag{5.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha | \beta, m \rangle \langle \beta, n | \alpha \rangle \langle m | \hat{B}^\dagger \hat{B} | n \rangle &= \langle \alpha | \beta, m \rangle \langle \beta, n | \alpha \rangle \left(\langle m | c_m^* + \langle m+1 | s_{m+1}^* \right) \\
&\quad \left(c_n | n \rangle + s_{n+1} | n+1 \rangle \right) = \left[\langle \alpha | \beta, n \rangle c_n^* + \langle \alpha | \beta, n-1 \rangle s_n^* \right] \\
&\quad \left[\langle \beta, n | \alpha \rangle c_n + \langle \beta, n-1 | \alpha \rangle s_n \right] \\
&= |C_{\downarrow, n}^{(+)}(t)|^2, \tag{5.58}
\end{aligned}$$

$$\langle \alpha | \beta, m \rangle \langle \beta, n | \alpha \rangle \langle m | \hat{A}^\dagger \hat{B} | n \rangle = \langle \alpha | \beta, m \rangle \langle \beta, n | \alpha \rangle \left(\langle m | c_{m+1}^* - \langle m-1 | s_m^* \right)$$

$$\begin{aligned}
\left(c_n |n\rangle + s_{n+1} |n+1\rangle \right) &= \left[\langle \alpha | \beta, n \rangle c_{n+1}^* - \langle \alpha | \beta, n+1 \rangle s_{n+1}^* \right] \\
&\left[\langle \beta, n | \alpha \rangle c_n + \langle \beta, n-1 | \alpha \rangle s_n \right] \\
&= C_{\uparrow, n}^{*(-)}(t) C_{\downarrow, n}^{(+)}(t),
\end{aligned} \tag{5.59}$$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha | \beta, m \rangle \langle \beta, n | \alpha \rangle \langle m | \hat{B}^\dagger \hat{A} | n \rangle &= \langle \alpha | \beta, m \rangle \langle \beta, n | \alpha \rangle \left(\langle m | c_m^* + \langle m+1 | s_{m+1}^* \right) \\
&\left(c_{n+1} |n\rangle - s_n |n-1\rangle \right) = \left[\langle \alpha | \beta, n \rangle c_n^* + \langle \alpha | \beta, n-1 \rangle s_n^* \right] \\
&\left[\langle \beta, n | \alpha \rangle c_{n+1} - \langle \beta, n+1 | \alpha \rangle s_{n+1} \right] \\
&= C_{\downarrow, n}^{*(+)}(t) C_{\uparrow, n}^{(-)}(t),
\end{aligned} \tag{5.60}$$

onde definimos

$$C_{\uparrow, n}^{(-)}(t) = \langle \beta, n | \alpha \rangle c_{n+1} - \langle \beta, n+1 | \alpha \rangle s_{n+1} \tag{5.61}$$

$$C_{\downarrow, n}^{(+)}(t) = \langle \beta, n | \alpha \rangle c_n + \langle \beta, n-1 | \alpha \rangle s_n. \tag{5.62}$$

Notemos que,

$$\langle \beta, n | \alpha \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle \frac{(\alpha - \beta)^n}{\sqrt{n!}} \tag{5.63}$$

$$\langle \alpha | \beta, n \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle \frac{(\alpha^* - \beta^*)^n}{\sqrt{n!}}. \tag{5.64}$$

Usando nas expressões para $C_{\uparrow, n}^{(-)}(t)$ e $C_{\downarrow, n}^{(+)}(t)$ obtemos

$$C_{\uparrow, n}^{(-)}(t) = \langle \alpha | \beta \rangle \left[\frac{(\alpha - \beta)^n}{\sqrt{n!}} c_{n+1} - \frac{(\alpha - \beta)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} s_{n+1} \right], \tag{5.65}$$

$$C_{\downarrow, n}^{(+)}(t) = \langle \alpha | \beta \rangle \left[\frac{(\alpha - \beta)^n}{\sqrt{n!}} c_n + \frac{(\alpha - \beta)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} s_n \right]. \tag{5.66}$$

Fazendo uso do resultado acima na expressão para a inversão atômica, Eq.(5.76),

$$\begin{aligned}
W(t) = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-|\alpha - \beta|^2) \left\{ e^{2i\Omega t} \left[\frac{(\alpha^* - \beta^*)^n}{\sqrt{n!}} c_{n+1} - \frac{(\alpha^* - \beta^*)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} s_{n+1} \right] \right. \\
& \left[\frac{(\alpha - \beta)^n}{\sqrt{n!}} c_n + \frac{(\alpha - \beta)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} s_n \right] + e^{-2i\Omega t} \left[\frac{(\alpha^* - \beta^*)^n}{\sqrt{n!}} c_n + \frac{(\alpha^* - \beta^*)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} s_n \right] \\
& \left. \left[\frac{(\alpha - \beta)^n}{\sqrt{n!}} c_{n+1} - \frac{(\alpha - \beta)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} s_{n+1} \right] \right\}, \tag{5.67}
\end{aligned}$$

onde escrevemos o produto escalar dos estados coerentes $\langle \beta | \alpha \rangle = \exp[\alpha\beta^* - \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)]$.

A dinâmica atômica dada pela Eq.(5.67), não há análogo na dinâmica de íons, quando considerado o limite de Lamb-Dicke (forma usual). Essa expressão é semelhante à expressão obtida para o modelo Jaynes-Cummings usual, porém no caso descrito acima o estado coerente é deslocado de α para $\alpha - \beta$. A estrutura da equação acima é similar às equações obtidas para o modelo Jaynes-Cummings forçado(DJCM)[105]. Desta forma, analogamente ao DJCM, esperamos que fenômenos de ‘super-revivals’ estejam presentes na dinâmica do íon. ‘Super-revivals’ são ‘revivals’ que surgem em uma escala de tempo longo na dinâmica da interação átomo-campo (QED).

5.2.2 Dinâmica do oscilador

Vamos agora estudar um outro aspecto da dinâmica do íon. Calcularemos o número médio de excitações dos modos vibracionais deste,

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle \Psi_I(t) | \hat{n} | \Psi_I(t) \rangle. \tag{5.68}$$

Usando a Eq.(5.48) para o vetor de estado $|\Psi_I(t)\rangle$ obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \hat{n} \rangle = & \frac{1}{4} \left\{ \langle \alpha | D \left[\langle e | (e^{i\Omega t} \hat{A}^\dagger + e^{-i\Omega t} \hat{B}^\dagger) D^\dagger + \langle \downarrow | (e^{i\Omega t} \hat{A}^\dagger - e^{-i\Omega t} \hat{B}^\dagger) D \right] \hat{n} \right. \\
& \left. \left[D(e^{-i\Omega t} \hat{A} + e^{i\Omega t} \hat{B}) | \uparrow \rangle + D^\dagger(e^{-i\Omega t} \hat{A} - e^{i\Omega t} \hat{B}) | \downarrow \rangle \right] D^\dagger | \alpha \rangle \right\}. \tag{5.69}
\end{aligned}$$

A partir das identidades (5.15) e (5.16) e das Eq.(5.65) e Eq.(5.66) a expressão para $\langle \hat{n} \rangle$ pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \langle \hat{n} \rangle = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n + |\beta|^2) \left[|C_{e,n}^{(-)}|^2 + |C_{g,n}^{(+)}|^2 \right] \right. \\ & + \sqrt{n+1} \left[\beta (e^{2i\Omega t} C_{e,n+1}^{*(-)} C_{g,n}^{(+)} + e^{-2i\Omega t} C_{g,n+1}^{*(+)} C_{e,n}^{(-)}) \right. \\ & \left. \left. + \beta^* (e^{2i\Omega t} C_{e,n}^{*(-)} C_{g,n+1}^{(+)} + e^{-2i\Omega t} C_{g,n}^{*(+)} C_{e,n+1}^{(-)}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Assim como no caso da inversão atômica, o resultado dado pela Eq.(5.70) não há análogo na dinâmica de íons, quando considerado o limite de Lamb-Dicke (forma usual). Analogamente à inversão atômica a dinâmica para o valor de $\langle \hat{n} \rangle$ é semelhante ao modelo Jaynes-Cummings usual, porém com um termo adicional devido ao parâmetro β . Aqui também, a equação acima é similar às equações obtidas para o DJCM, e esperamos fenômenos de ‘super-revivals’.

Como vimos acima, na inversão atômica e no número médio de quanta do íon, o sistema evolui com uma dinâmica diferente da dinâmica do íon, quando consideramos o limite de Lamb-Dicke. Nessa nova dinâmica o sistema se comporta similarmente ao DJCM e efeitos de ‘super-revivals’ são esperados. Notemos, que nas Eq.(5.67) e Eq.(5.70) tomar o limite de Lamb-Dicke equivale fazer $|\beta|^2 \ll 1$. Mesmo nesse limite, as equações acima não se assemelham as equações de quando tomamos o limite de Lamb-Dicke e reduzimos a Hamiltoniana, Eq.(4.30), na Hamiltoniana tipo Jaynes-Cummings. Para mostrarmos esse comportamento, tentaremos reproduzir a dinâmica do íon nos regimes de ‘sideband’, ou seja em uma dinâmica ressonante, como discutida usualmente nos tratamentos teóricos de íons aprisionados[74], após a condição ressonância tomaremos o limite de Lamb-Dicke.

5.3 Dinâmica Ressonante

Em analogia a forma usual de estudar a dinâmica de íons[74] (ver seção 1) estudaremos as condições ressonantes em que $\frac{1}{2}(\delta + \omega_z) = (n' - n)\omega_z$.

Expandindo agora o vetor de estado $|\Psi_I(t)\rangle$ na base de Fock

$$|\Psi_I(t)\rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \langle n'|\alpha\rangle \langle n|D^\dagger|n'\rangle \left[D(e^{-i\Omega t} \hat{A} + e^{i\Omega t} \hat{B})|\uparrow\rangle|n\rangle + D^\dagger(e^{-i\Omega t} \hat{A} - e^{i\Omega t} \hat{B})|\downarrow\rangle|n\rangle \right]. \quad (5.71)$$

Calculando o elemento de matriz

$$\langle n|D^\dagger|n'\rangle = e^{i\frac{\delta}{2}} \left(\frac{i\eta}{2}\right)^{n'-n} \sqrt{\frac{n!}{n'!}} e^{-\eta^2/8} e^{i[\frac{1}{2}\delta - (n'-n)\omega_z]t} L_n^{n'-n}(\eta^2/4), \quad (5.72)$$

onde $L_n^{n'-n}(\eta^2/4)$ é o polinômio generalizado de Laguerre, obtemos que

$$|\Psi_I(t)\rangle = \frac{e^{-\eta^2/8}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \langle n'|\alpha\rangle \left(\frac{i\eta}{2}\right)^{n'-n} \sqrt{\frac{n!}{n'!}} L_n^{n'-n} \left\{ e^{i[\frac{1}{2}(\delta - \omega_z) - (n'-n)\omega_z]t} [D\hat{A}|\uparrow\rangle|n\rangle + D^\dagger\hat{A}|\downarrow\rangle|n\rangle] + e^{i[\frac{1}{2}(\delta + \omega_z) - (n'-n)\omega_z]t} [D\hat{B}|\uparrow\rangle|n\rangle - D^\dagger\hat{B}|\downarrow\rangle|n\rangle] \right\}, \quad (5.73)$$

onde escrevemos $\omega_z = 2\Omega$.

Usando agora a condição de ressonância $\frac{1}{2}(\delta + \omega_z) = (n' - n)\omega_z$ na equação acima obtemos

$$|\Psi_I(t)\rangle = \frac{e^{-\eta^2/8}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \langle n'|\alpha\rangle \left(\frac{i\eta}{2}\right)^{n'-n} \sqrt{\frac{n!}{n'!}} L_n^{n'-n} \left\{ e^{-i\omega_z t} [D\hat{A}|\uparrow\rangle|n\rangle + D^\dagger\hat{A}|\downarrow\rangle|n\rangle] + [D\hat{B}|\uparrow\rangle|n\rangle - D^\dagger\hat{B}|\downarrow\rangle|n\rangle] \right\}. \quad (5.74)$$

Notemos que contrário à Eq.(4.36) para o vetor de estado, no resultado obtido aqui o fator $\langle n|D^\dagger|n'\rangle$ está presente na amplitude e não na frequência de Rabi; esse aspecto é oriundo da transformação. Analisaremos agora o caso particular em que $n' - n = 0$ ($\delta = -\omega_z$).

Para este caso

$$|\Psi_I(t)\rangle = \frac{e^{-\eta^2/8}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\alpha\rangle L_n^0 \left\{ e^{-i\omega_z t} [D\hat{A}|\uparrow\rangle|n\rangle + D^\dagger\hat{A}|\downarrow\rangle|n\rangle] + [D\hat{B}|\uparrow\rangle|n\rangle - D^\dagger\hat{B}|\downarrow\rangle|n\rangle] \right\}. \quad (5.75)$$

Como na seção anterior estudaremos a dinâmica do sistema. Para a dinâmica atômica calcularemos a inversão atômica

$$W(t) = |\langle e | \Psi_I \rangle|^2 - |\langle \downarrow | \Psi_I \rangle|^2. \quad (5.76)$$

Projetando os estados $\langle \uparrow |$ e $\langle \downarrow |$ no vetor de estado $\Psi_I(t)$ obtemos

$$\langle \uparrow | \Psi_I \rangle = \frac{e^{-\eta^2/8}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \alpha \rangle L_n^0 D(e^{-i\omega_z t} \hat{A} + \hat{B}) | n \rangle \quad (5.77)$$

$$\langle \downarrow | \Psi_I \rangle = \frac{e^{-\eta^2/8}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \alpha \rangle L_n^0 D^\dagger(e^{-i\omega_z t} \hat{A} - \hat{B}) | n \rangle. \quad (5.78)$$

Procedendo como anteriormente e usando o resultado na expressão para a inversão atômica obtemos

$$W(t) = \frac{e^{-\eta^2/4}}{2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \langle \alpha | m \rangle \langle n | \alpha \rangle L_m^0 L_n^0 [e^{i\omega_z t} \langle m | \hat{A}^\dagger \hat{B} | n \rangle + e^{-i\omega_z t} \langle m | \hat{B}^\dagger \hat{A} | n \rangle]. \quad (5.79)$$

Calculando os elementos de matriz

$$\langle \alpha | m \rangle \langle n | \alpha \rangle L_m^0 L_n^0 \langle m | \hat{A}^\dagger \hat{B} | n \rangle = C_{\uparrow,n}^* C_{\downarrow,n} \quad (5.80)$$

$$\langle \alpha | m \rangle \langle n | \alpha \rangle L_m^0 L_n^0 \langle m | \hat{B}^\dagger \hat{A} | n \rangle = C_{\downarrow,n}^* C_{\uparrow,n}, \quad (5.81)$$

onde definimos aqui

$$C_{\uparrow,n} = \langle n | \alpha \rangle L_n^0 c_{n+1} - \langle n+1 | \alpha \rangle L_{n+1}^0 s_{n+1} \quad (5.82)$$

$$C_{\downarrow,n} = \langle n | \alpha \rangle L_n^0 c_n + \langle n-1 | \alpha \rangle L_{n-1}^0 s_n \quad (5.83)$$

com $c_n = \cos(|g|\sqrt{n}t)$ e $s_n = \sin(|g|\sqrt{n}t)$. Do resultado acima

$$\begin{aligned} W(t) &= \frac{e^{-\eta^2/4}}{2} \sum_{n,0}^{\infty} [e^{i\omega_z t} C_{\uparrow,n}^* C_{\downarrow,n} + e^{-i\omega_z t} C_{\downarrow,n}^* C_{\uparrow,n}] \\ &= \frac{e^{-(|\alpha|^2 + \eta^2/4)}}{2} \sum_{n,0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} L_n^0 \left\{ 2L_n^0 \cos(\omega_z t) c_{n+1} c_n \right. \\ &\quad + \frac{n!}{\sqrt{n!(n+1)!}} L_{n+1}^0 (\alpha^* e^{i\omega_z t} + \alpha e^{-i\omega_z t}) (c_{n+2} - c_n) s_{n+1} \\ &\quad \left. - \frac{n!}{\sqrt{n!(n+2)!}} L_{n+2}^0 (\alpha^{*2} e^{i\omega_z t} + \alpha^2 e^{-i\omega_z t}) s_{n+1} s_{n+1} \right\} \end{aligned} \quad (5.84)$$

Para o caso da dinâmica dos modos vibracionais $\langle \hat{n} \rangle$, esse pode ser calculado a partir da equação para o vetor de estado dando

$$\begin{aligned} \langle \hat{n} \rangle = & \frac{e^{-\frac{\eta^2}{4}}}{4} \sum_{n,n'} \sum_{m=0}^{\infty} \langle \alpha | n' \rangle \langle n | \alpha \rangle L_n^0 L_{n'}^0 \left\{ \langle \uparrow | \langle m | D^\dagger \left[e^{i\omega_z t} \langle n' | \hat{A}^\dagger | m \rangle + \langle n' | \hat{B}^\dagger | m \rangle \right] \right. \\ & + \langle \downarrow | \langle m | D \left[e^{i\omega_z t} \langle n' | \hat{A}^\dagger | m \rangle - \langle n' | \hat{B}^\dagger | m \rangle \right] \rangle \hat{n} \left\{ \left[e^{-i\omega_z t} \langle m | \hat{A} | n \rangle + \langle m | \hat{B} | m \rangle \right] D | m \rangle | \uparrow \rangle \right. \\ & \left. \left. + \left[e^{-i\omega_z t} \langle m | \hat{A} | n \rangle - \langle m | \hat{B} | n \rangle \right] D^\dagger | m \rangle | \downarrow \rangle \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Procedendo como anteriormente a equação acima pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \langle \hat{n} \rangle = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n + |\beta|^2) \left[|C_{\uparrow,n}^{(-)}|^2 + |C_{\downarrow,n}^{(+)}|^2 \right] \right. \\ & + \sqrt{n+1} \left[\beta (e^{2i\Omega t} C_{\uparrow,n+1}^{\star(-)} C_{\downarrow,n}^{(+)} + e^{-2i\Omega t} C_{\downarrow,n+1}^{\star(+)} C_{\uparrow,n}^{(-)}) \right. \\ & \left. \left. + \beta^* (e^{2i\Omega t} C_{\uparrow,n}^{\star(-)} C_{\downarrow,n+1}^{(+)} + e^{-2i\Omega t} C_{\uparrow,n}^{\star(+)} C_{\downarrow,n+1}^{(-)}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.86)$$

onde definimos aqui

$$C_{\uparrow,n}^{(-)}(t) = \langle n | \alpha \rangle L_n^0 c_{n+1}(t) - \langle n+1 | \alpha \rangle L_{n+1}^0 s_{n+1}(t), \quad (5.87)$$

$$C_{\downarrow,n}^{(+)}(t) = \langle n | \alpha \rangle L_n^0 c_n(t) + \langle n-1 | \alpha \rangle L_{n-1}^0 s_n(t). \quad (5.88)$$

Notemos, que as expressão para inversão atômica e para o número médio de excitações obtidas aqui, têm a mesma forma que as expressões (5.67) e (5.70).

Para efeito de comparação vamos agora considerar o caso particular em que $\eta \ll 1$, ou seja, no limite de Lamb-Dicke. Nesse limite, os polinômios de Laguerre podem ser aproximados como $L_n^0 = 1$ e a equação para a inversão atômica se reduz a forma

$$\begin{aligned} W(t) = & e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^2}{n!} \left[\cos(\omega_z t) \left(c_{n+1} c_n + |\alpha|^2 \frac{n!}{\sqrt{n!(n+2)!}} s_{n+2} s_{n+1} \right) \right. \\ & \left. + |\alpha| \frac{n!}{\sqrt{n!(n+1)!}} \sin(\omega_z t) (c_{n+2} - c_n) s_{n+1} \right]. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Notemos que mesmo no limite de Lamb-Dicke a dinâmica atômica apresenta um comportamento diferente do obtido na forma usual, ver seção 1. A existência ou não de

‘super-revivals’ está estreitamente relacionada com a preparação do estado inicial dos modos vibracionais do íon. Se tivermos preparado o íon no estado $\alpha = (5.0, 0.5)$ e $\eta = 0.2$, efeitos de ‘super-revivals’ não ocorrem, a inversão atômica se comporta de forma ‘caótica’, sem a indicação de ‘revivals’ ou alguma outra estrutura regular, como mostra as fig.(5.2) e fig.(5.3). No entanto, para valores apropriados do estado inicial dos modos vibracionais, $\alpha = (0.5, 5.0)$ e $\eta = 0.2$ efeitos de ‘super-revivals’ estarão presentes, como mostram as fig.(5.4) e fig.(5.5).

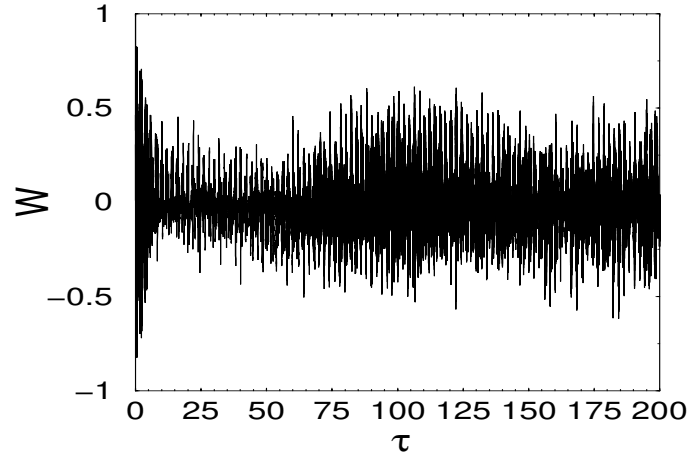


Figura 5.2: Representação da inversão atômica, com $\alpha = (5.0, 0.5)$ e o parâmetro de Lamb-Dicke é $\eta = 0.2$. Para esses parâmetros efeitos de ‘super-revivals’ não ocorrem. Porém, um comportamento ‘caótico’ é observado. O parâmetro τ é o tempo normalizado pelo tempo de ‘revival’.

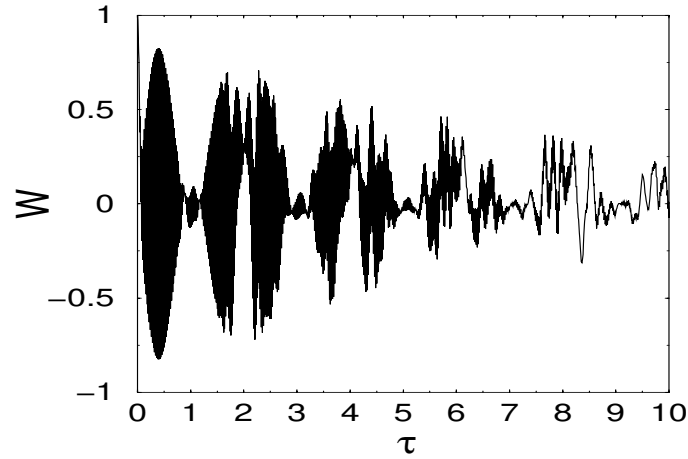


Figura 5.3: Representação da inversão atômica, com $\alpha = (5.0, 0.5)$ e o parâmetro de Lamb-Dicke é $\eta = 0.2$. Para esses parâmetros efeitos de ‘super-revivals’ não ocorrem. Aqui a escala do tempo foi ampliada para visualizarmos o comportamento ‘caótico’. O parâmetro τ é o tempo normalizado pelo tempo de ‘revival’.

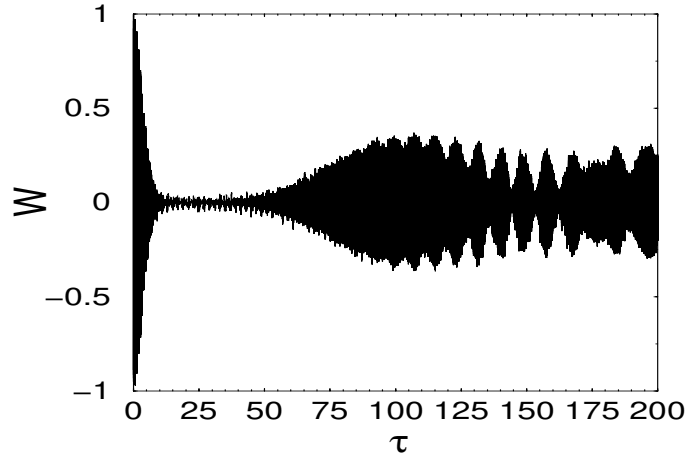


Figura 5.4: Representação da inversão atômica, com $\alpha = (0.5, 5.0)$ e o parâmetro de Lamb-Dicke é $\eta = 0.2$. Para esses parâmetros efeitos de ‘super-revivals’ são observados. O parâmetro τ é o tempo normalizado pelo tempo de ‘revival’.

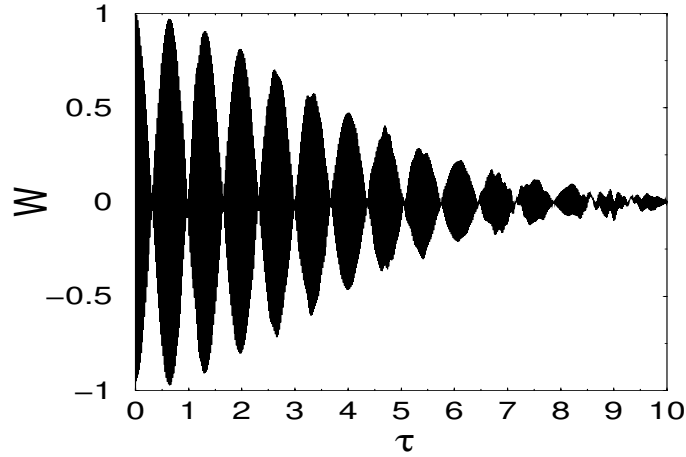


Figura 5.5: Representação da inversão atômica, com $\alpha = (0.5, 5.0)$ e o parâmetro de Lamb-Dicke é $\eta = 0.2$. Aqui a escala do tempo foi ampliada para visualizarmos melhor a dinâmica. O parâmetro τ é o tempo normalizado pelo tempo de ‘revival’.

Nessa seção apresentamos um novo método para estudar a dinâmica de íons aprisionados. Como vimos, o método é baseado em uma transformação unitária, que leva a Hamiltoniana do sistema a uma Hamiltoniana tipo Jaynes-Cummings, sem recorrermos ao LDL. A dinâmica do sistema apresenta uma dinâmica diferente de quando consideramos o LDL. O comportamento do sistema é similar ao do modelo Jaynes-Cummings forçado e efeitos de ‘super-revival’ e um comportamento ‘caótico’ são observados. Mesmo tomando o LDL, a dinâmica do sistema apresenta um comportamento diferente do obtido na forma usual: quando tomamos o LDL antes de aplicarmos a transformação.

Além do comportamento dinâmico dado acima, a transformação unitária apresentada aqui tem sido utilizada como proposta de implementação de portas quânticas rápidas[81] e esquemas de geração de gatos de Schrödinger[82]. Usando a transformação acima, D. Jonathan, M. B. Plenio e P. L. Knight[81] mostraram que sob certas condições a dinâmica do íon pode ser explorada para gerar uma porta quântica dupla (2-qubit gate) de forma análoga a proposta por Cirac e Zoller para a implementação de computadores quânticos[24]. Nesse esquema, a velocidade da porta obtida pode ser até duas ordens de grandeza maior do que as obtidas por outros esquemas. Portas quânticas são etapas básicas na implementação de computadores quânticos. Esquemas que levem a experimentos mais eficientes na preparação destas é de grande importância para implementação de computadores quânticos. Uma outra aplicação importante da transformação é o esquema proposto por M. Feng[82] para a preparação de gatos de Schrödinger (SC) em um regime além do limite de Lamb-Dicke. A partir deste esquema gatos de Schrödinger podem ser obtidos com maior eficiência e rapidez do que outros esquemas propostos.

Capítulo 6

Conclusão

6.1 Sumário

Nessa tese estudamos alguns aspectos fundamentais na dinâmica de sistemas quânticos: átomos em cavidades e íons aprisionados. Como vimos, estados não clássicos podem ser gerados a partir desses dois sistemas. Estados não clássicos exibem aspectos interessantes da mecânica quântica. Conjuntamente com a possibilidade de estudar e testar a mecânica quântica em nível fundamental, estes estados mostram-se de bastante interesse prático em diversas áreas. Por outro lado, esses dois sistemas possuem uma analogia formal entre si, a dinâmica destes se reduzem a uma dinâmica tipo Jaynes-Cummings (JCM). Inicialmente discutimos a dinâmica do sistema átomo-campo em uma cavidade (QED) e nessa discussão mostramos que a dinâmica do sistema é descrita pelo JCM. Focalizamos a nossa atenção na dinâmica do campo preparado em uma superposição de estados coerentes e em uma mistura estatística destes. Em seguida, usamos o modelo Jaynes-Cummings dependente da intensidade (DNJCM) para discutir o comportamento dinâmico do JCM. Nessa etapa, mostramos que a paridade do sistema influencia na sua dinâmica, e que sob certas condições podemos ter um estado puro a partir de um estado de mistura (purificação perfeita). Na segunda parte dessa tese discutimos a dinâmica de íons aprisionados. Aqui, focalizamos a nossa atenção na geração de estados não clássicos do movimento do íon. Para esses estados um efeito de perda de coerência foi observado. Para explicar essa perda

de coerência apresentamos um modelo fenomenológico e comparamos os nossos resultados com os resultados experimentais. No final, apresentamos um novo método para tratarmos a dinâmica de íons sem recorrermos ao limite de Lamb-Dicke (LDL). Nesse novo método a dinâmica do íon apresenta um comportamento diferente de quando o sistema é tratado usando o LDL. Em seguida discutiremos detalhadamente os resultados obtidos em cada capítulo:

Capítulo 3

A partir do modelo Jaynes-Cummings dependente da intensidade (DNJCM) discutimos a dinâmica de um sistema átomo-campo em uma cavidade (QED), com uma interação tipo JCM. Focalizamos a nossa atenção na dinâmica de superposições de estados não clássicos da luz, preparando o campo na cavidade em uma superposição de estados coerentes e em uma mistura estatística. Para o campo preparado em um estado de ‘gato par’, este será encontrado em um estado de ‘gato ímpar’ para o primeiro tempo de ‘revival’. Nesse mesmo tempo, o átomo inicialmente no estado excitado, estará no estado fundamental; esse comportamento está diretamente relacionado com a conservação da paridade do sistema total átomo-campo. Analisando detalhadamente a dinâmica do JCM, notaremos que para o primeiro tempo de ‘revival’, o estado atômico aproximar-se-á do estado fundamental. Como a paridade total do sistema deve ser conservada, o campo inicialmente no estado de ‘gato par’ aproximar-se-á do estado de ‘gato ímpar’. A inversão atômica não será completa devido a outros efeitos da dinâmica do JCM. Um outro aspecto da dinâmica do campo focalizado nesse capítulo foi a purificação do estado do campo inicialmente preparado em uma mistura estatística. Como foi observado na dinâmica da função Q (DNJCM), a purificação acontece porque ambos os estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|- \alpha\rangle$ produzem estados puros idênticos para a metade do tempo de ‘revival’, transformando o campo inicialmente em uma mistura estatística para um estado puro. Essa purificação do campo

não modifica o estado inicial do sistema total, esse continuará em um estado de mistura. O átomo inicialmente em um estado puro estará agora em um estado de mistura. Esse comportamento caracteriza uma troca de pureza entre os subsistemas. No caso do JCM o comportamento acima não acontece, significando que os estados $|\alpha\rangle$ e $-\alpha\rangle$, da mistura, não produzem estados idênticos para esse tempo e conseqüentemente não teremos um estado puro para o campo.

Capítulo 4

Nesse capítulo inicialmente fizemos uma discussão rápida em relação a aprisionamentos de íons, tipos de armadilhas e processos de resfriamento. Ainda nessa etapa, discutimos os resultados experimentais obtidos por Meekhof et al., para a geração de estados não clássicos a partir do movimento de um íon de ${}^9\text{Be}^+$. A partir desse experimento uma perda de coerência é obtida nos estados gerados. Focalizamos a nossa atenção nesse efeito de perda de coerência e discutimos várias fontes que podem induzir perda de coerência no sistema. Tomando como base essas fontes de perda de coerência e os resultados experimentais, propuzemos um modelo explicando esse efeito. Nesse modelo, introduzimos a perda de coerência fenomenologicamente, levando em consideração o acoplamento entre modos cruzados. Esse acoplamento pode ser induzido por um não alinhamento perfeito do vetor de onda dos lasers, com a direção preferencial do movimento do íon (movimento unidimensional). O não alinhamento pode ser ocasionado por flutuações na intensidade do laser e instabilidade no potencial da armadilha, entre outros. A perda de coerência é ocasionada devido ao acoplamento do modo cruzado com um reservatório térmico quantizado, induzindo flutuações na frequência de Rabi. Essas flutuações leva a uma perda de coerência do modo principal do íon sem relaxação de energia, como a obtida no experimento de Meekhof et al. Para o modo cruzado preparado em um estado térmico o nosso modelo descreve satisfatoriamente os resultados experimentais. Essa fonte de perda

de coerência pode ser controlada se os modos cruzados forem resfriados satisfatoriamente até o ponto de energia zero do movimento. Esse comportamento está de acordo com a necessidade de resfriarmos todos os modos do íon para o estado de energia zero afim de preservar a consistência do estado gerado.

Na segunda parte desse capítulo, apresentamos um novo método para estudar a dinâmica de íons aprisionados. Como vimos, a Hamiltoniana que descreve o sistema é bastante complicada e para ser resolvida analiticamente recorre-se ao limite de Lamb-Dicke (LDL). Nesse limite, a dinâmica do sistema é descrita pelo JCM. Porém, vários dos efeitos devido a termos de alta ordem na Hamiltoniana são perdidos. Para mantermos esses efeitos é necessário tratarmos a dinâmica do íon sem recorrermos ao LDL. Discutimos a dinâmica do íon a partir de uma transformação unitária, que leva a Hamiltoniana do sistema a uma Hamiltoniana do tipo JCM, sem recorrermos ao LDL. As informações do sistema oriundo da Hamiltoniana inicial é guardada no operador de transformação, como uma memória do sistema, podendo ser rememorizada pela dinâmica após uma transformação inversa. Focalizamos a nossa atenção na dinâmica atômica e no número médio de excitações do íon. Obtivemos que, o sistema evolui com uma dinâmica diferente da do íon, quando consideramos o LDL. Nessa nova dinâmica o sistema se comporta similarmente ao modelo Jaynes-Cummings forçado (DJCM) e efeitos de ‘super-revivals’ são esperados. Para comparar as duas dinâmicas, consideramos um regime de ‘sideband’ (ressonante). Após o regime de ‘sideband’, consideramos o LDL e mesmo nesse regime a dinâmica permanece diferente. Os efeitos de ‘super-revivals’ continuam presentes, caracterizando uma diferença entre as dinâmicas do sistema quando tratamos com a nossa transformação ou com a forma tradicional (LDL). Além do comportamento dinâmico dado acima, a transformação apresentada aqui tem sido utilizada como proposta de implementação de portas quânticas rápidas com velocidades que podem chegar a duas ordens de grandeza maior do que as obtidas por outros esquemas. Uma outra aplicação importante tem sido

a utilização da transformação em esquemas para a geração de gatos de Schrödinger em um regime além do regime de Lamb-Dicke. Essas aplicações mostram a potencialidade da transformação para a implementação de computadores quânticos.

6.2 Aplicações futuras

É interessante estender esse trabalho na direção de sistemas de aprisionamento de vários íons. Como vimos, para a impletação de portas lógicas e consequentemente a implementação de computadores quânticos é necessário a manipulação de vários íons. Porém, o efeito de perda de coerência estará presente. O estudo de modelos que inibam essa perda de coerência mostra-se de grande interesse nessa área. Ainda, em modelos para perda de coerência mostra-se interessante incluir no modelo de perda de coerência devido a modos cruzados, apresentado na seção 4.3.1, a interação com um reservatório térmico com uma temperatura $T \neq 0$. Para essa condição, acreditamos ser possível explicar o ganho de energia para o íon, para um tempo longo, no experimento de Meekhof et al.[32]. Um outro aspecto importante que pretendemos estudar apartir desse trabalho é a implementação de modelos para criar portas lógicas quânticas rápidas.

6.3 Publicações

Field purification in the intensity-dependent Jaynes-Cummings model

Dagoberto S. Freitas, A. Vidiella-Barranco, and J.A. Roversi, Phys. Lett. **A**, 249, 275 (1998).

Long-time-scale revivals in ion traps

H. Moya-Cessa, A. Vidiella-Barranco, J. A. Roversi, Dagoberto S. Freitas and S. M. Dutra, Phys. Rev. A **59**, 2518 (1999).

Apêndice A

Equação mestra para perda de coerência

Apresentaremos aqui a dedução da equação mestra dada pela Eq.(4.72) no modelo para perda de coerência devido a modos cruzados apresentado na seção 4.3.1.

A dinâmica de qualquer sistema quântico pode ser descrita pela equação mestra[103]

$$i\hbar \frac{\partial \rho^S}{\partial t} = [H^S, \rho^S], \quad (\text{A.1})$$

onde H^S é a Hamiltoniana do sistema total na representação de Schrödinger. A Hamiltoniana H^S pode ser separada em duas partes: uma parte denominada Hamiltoniana do sistema livre, H_0^S , e a outra parte a Hamiltoniana de interação, H_I^S . No caso em discussão, o sistema total é formado por um íon aprisionado interagindo com um reservatório térmico. Desta forma, a Hamiltoniana do sistema livre é dada pela Hamiltoniana do íon aprisionado mais a Hamiltoniana do reservatório térmico ou seja $H_0 = H_S + H_r$, com H_S a Hamiltoniana do íon aprisionado e H_r a Hamiltoniana do reservatório térmico e consequentemente H_I^S é a Hamiltoniana de interação do íon com o reservatório, todos na representação de Schrödinger. Por conveniência reescreveremos a equação mestra na forma

$$i\hbar \frac{\partial \rho^S}{\partial t} = [H_0^S + H_I^S, \rho^S]. \quad (\text{A.2})$$

Usando agora a representação de interação

$$\rho^S(t) = e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \rho^I(t) e^{iH_0(t-t_0)/\hbar}. \quad (\text{A.3})$$

O operador densidade do sistema reduzido do íon pode ser obtido a partir do traço do operador densidade total, sobre as variáveis do reservatório, dado por

$$\rho_S^S(t) = \text{Tr}_r \{ \rho^S(t) \} = e^{-iH_S(t-t_0)/\hbar} \text{Tr}_r \{ \rho^I(t) \} e^{iH_S(t-t_0)/\hbar}. \quad (\text{A.4})$$

Derivando (A.4)

$$\frac{\partial \rho_S^S(t)}{\partial t} = e^{-iH_S(t-t_0)/\hbar} \left\{ \frac{1}{i\hbar} [H_S, \rho_S^I(t)] + \frac{\partial \rho_S^I(t)}{\partial t} \right\} e^{iH_S(t-t_0)/\hbar}, \quad (\text{A.5})$$

que descreve a dinâmica do operador densidade reduzido do íon. Derivando agora (A.3) obtemos

$$i\hbar \frac{\partial \rho^S(t)}{\partial t} = [H_0, \rho^S] + e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} i\hbar \frac{\partial \rho^I}{\partial t} e^{iH_0(t-t_0)/\hbar}, \quad (\text{A.6})$$

que comparada com (A.1) podemos escrever

$$i\hbar e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \frac{\partial \rho^I}{\partial t} e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} = [H_I, \rho^S], \quad (\text{A.7})$$

ou de forma equivalente

$$i\hbar \frac{\partial \rho^I}{\partial t} = [V(t-t_0), \rho^I(t)], \quad (\text{A.8})$$

onde V é a Hamiltoniana de interação na representação de interação. A Eq.(A.8) é a equação de movimento para o operador densidade do sistema total na representação de interação. De uma forma geral essa equação não é resolvida exatamente. Assumindo que a interação é fraca podemos usar uma teoria de perturbação obtendo

$$\begin{aligned} \rho^I(t) &= \rho^I(t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t [V(t' - t_0), \rho^I(t_0)] dt' + \\ &\quad \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' [V(t' - t_0), [V(t'' - t_0), \rho^I(t_0)]] + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Calculando agora o traço nas variáveis do reservatório em (A.9) e usando (A.4) obtemos para o íon

$$\begin{aligned} \rho_S^I(t) &= \rho_S^I(t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t Tr_r \{ [V(t' - t_0), \rho^I(t_0)] \} dt' + \\ &\quad \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' Tr_r \{ [V(t' - t_0), [V(t'' - t_0), \rho^I(t_0)]] \} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Para discutirmos o caso de perda de coerência devido a modos cruzados, consideraremos em (A.10) que a interação do sistema com o reservatório seja dada por

$$\begin{aligned} V(t - t_0) &= \hbar g (a_1 \sigma_+ + \sigma_- a_1^\dagger) + \\ &\quad + \hbar \sum_k g'_k \left[b_k a_2^\dagger e^{-i(\nu_k - \nu_2)(t - t_0)} + a_2 b_k^\dagger e^{i(\nu_k - \nu_2)(t - t_0)} \right] (a_1 \sigma_+ + \sigma_- a_1^\dagger) \\ &\equiv V_{ion} + V_r, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

onde V_{ion} representa a interação do modo principal do íon com os estados eletrônicos e V_r a interação do íon com o reservatório térmico.

Para simplificar as expressões e obter os resultados de forma compacta usaremos a notação de Louisel, pagina 339,[103] escrevendo

$$V_r(t - t_0) = \hbar \sum_i Q_i^I(t - t_0) F_i^I(t - t_0) \quad (\text{A.12})$$

com

$$Q_i^I = e^{iH_S(t-t_0)/\hbar} Q_i^S e^{-iH_S(t-t_0)/\hbar} \quad (\text{A.13})$$

$$F_i^I = e^{iH_r(t-t_0)/\hbar} F_i^S e^{-iH_r(t-t_0)/\hbar},$$

satisfazendo a relação de comutação

$$[Q_i^I(t' - t_0), F_j^I(t'' - t_0)] = 0, \quad (\text{A.14})$$

onde Q_i e F_i dependem unicamente das variáveis do sistema e do reservatório respectivamente. Usando as definições acima em (A.10) e calculando o traço sobre as variáveis do

reservatório obtemos

$$\begin{aligned}
\rho_S^I(t) - \rho_S^I(t_0) &= \sum_i \int_{t_0}^t dt' [Q_i(t' - t_0), \rho^I(t_0)] \langle F_i(t' - t_0) \rangle_r + \\
&- \sum_{i,j} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \{ [Q_i' Q_j'' \rho^I(t_0) - Q_j'' \rho_S^I(t_0) Q_i'] \langle F_i' F_j'' \rangle_r + \\
&- [Q_i' \rho_S^I(t_0) Q_j'' - \rho_S^I(t_0) Q_j'' Q_i'] \langle F_j'' F_i' \rangle_r \}.
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Os termos entre cochetes são valores médios dos operadores do reservatório. Fazendo agora a transformação $\tau = t' - t''$ e $t' - t_0 = \tau + \xi$ de forma que $d\tau' dt'' = d\tau d\xi$ [103], a expressão (A.15) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}
\rho_S^I(t) - \rho_S^I(t_0) &= \sum_i \int_{t_0}^t dt' [Q_i(t' - t_0), \rho^I(t_0)] \langle F_i(t' - t_0) \rangle_r + \\
&- \sum_{i,j} \int_0^{t-t_0} d\xi \int_0^{t-t_0-\xi} d\tau \{ [Q_i(\tau + \xi) Q_j(\xi) \rho^I(t_0) - \\
&- Q_j(\xi) \rho_S^I(t_0) Q_i(\tau + \xi)] \langle F_i(\tau + \xi) F_j(\xi) \rangle_r + \\
&- [Q_i(\tau + \xi) \rho_S^I(t_0) Q_j(\xi) - \rho_S^I(t_0) Q_j(\xi) Q_i(\tau + \xi)] \langle F_j(\xi) F_i(\tau + \xi) \rangle_r \}.
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Para retirarmos os operadores do íon de dentro do sinal de integração escreveremos estes na representação de Schrödinger

$$\begin{aligned}
Q_i^I(t) &= e^{iH_S t/\hbar} Q_i^S e^{-iH_S t/\hbar} \\
&= e^{i\omega_i t} Q_i^S.
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Usando agora (A.17) em (A.16) obtemos

$$\begin{aligned}
\rho_S^I(t) - \rho_S^I(t_0) &= -i \sum_i \langle F_i \rangle_r [Q_i^S, \rho(t_0)] I(\omega_i) - \sum_{i,j} \{ [Q_i^S Q_j^S \rho(t_0) - Q_j^S \rho_S(t_0) Q_i^S] W_{ij}^+ + \\
&+ [Q_i^S \rho_S(t_0) Q_j^S - \rho_S(t_0) Q_j^S Q_i^S] W_{ji}^- \} I(\omega_i + \omega_j),
\end{aligned} \tag{A.18}$$

onde definimos as densidades espectrais do reservatório

$$W_{ij}^+ = \int_0^\infty d\tau e^{i\omega_i \tau} \langle F_i(\tau) F_j \rangle_r, \tag{A.19}$$

$$W_{ji}^- = \int_0^\infty d\tau e^{i\omega_i \tau} \langle F_j F_i(\tau) \rangle_r, \tag{A.20}$$

$$I(\omega_i) = \int_0^{t-t_0} d\xi e^{i\omega_i \xi}. \tag{A.21}$$

Integrando agora (A.21) sobre um tempo longo comparado com o período do movimento livre do sistema, $t - t_0 \gg \omega_i^{-1}$ e $t - t_0 \gg (\omega_i + \omega_j)^{-1}$ obtemos

$$\begin{aligned} I(\omega_i + \omega_j) &= (t - t_0)\delta(\omega_i, -\omega_j) \equiv \begin{cases} t - t_0, & \omega_i + \omega_j = 0 \\ 0, & \omega_i + \omega_j \neq 0 \end{cases} \\ I(\omega_i) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Considerando $\omega_i + \omega_j = 0$ a Eq.(A.18) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta t} \rho_S^I(t) &= - \sum_{i,j} \delta(\omega_i, -\omega_j) \left\{ [Q_i^S Q_j^S \rho(t_0) - Q_j^S \rho_S(t_0) Q_i^S] W_{ij}^+ + \right. \\ &\quad \left. + [Q_i^S \rho_S(t_0) Q_j^S - \rho_S(t_0) Q_j^S Q_i^S] W_{ji}^- \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

onde $\Delta \rho_S^I(t) - \rho_S^I(t_0)$. Fazendo $\Delta t \rightarrow 0$ e usando (A.5) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_S^S(t) \simeq e^{-iH_S(t-t_0)/\hbar} \left\{ \frac{1}{i\hbar} [H_S, \rho_S^I(t)] + \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Delta}{\Delta t} \rho_S^I(t) \right\} e^{iH_S(t-t_0)/\hbar}. \quad (\text{A.24})$$

Usando (A.23) e fazendo $H_S \rightarrow H_S + W$, com W não dependendo dos operadores do reservatório, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_S^I(t) &\simeq \frac{1}{i\hbar} [H_S + W, \rho_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i, -\omega_j) \left\{ [Q_i^S Q_j^S \rho(t_0) - Q_j^S \rho_S(t_0) Q_i^S] W_{ij}^+ + \right. \\ &\quad \left. + [Q_i^S \rho_S(t_0) Q_j^S - \rho_S(t_0) Q_j^S Q_i^S] W_{ji}^- \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Comparando agora (A.25) com (A.5) a equação mestra do íon é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_S^I(t) &= \frac{1}{i\hbar} [W^I, \rho_S^I(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i, -\omega_j) \left\{ [Q_i^I Q_j^I \rho_S^I(t) - Q_j^I \rho_S^I(t) Q_i^I] W_{ij}^+ + \right. \\ &\quad \left. + [Q_i^I \rho_S^I(t) Q_j^I - \rho_S^I(t) Q_j^I Q_i^I] W_{ji}^- \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

onde escrevemos os operadores W e Q_i na representação de interação

$$\begin{aligned} W^I &= e^{iH_S(t-t_0)/\hbar} W e^{-iH_S(t-t_0)/\hbar} \\ Q_i^I &= e^{iH_S(t-t_0)/\hbar} Q_i^S e^{-iH_S(t-t_0)/\hbar}. \end{aligned}$$

Relacionando agora os operadores W^I e Q_i^I com o modelo para perda de coerência devido a modos cruzados, (A.11). Para a dinâmica dada pela Hamiltoniana (A.11) temos que

$$\begin{aligned} Q_1^I &= a_2^\dagger(a_1\sigma_+ + \sigma_-a_1^\dagger)e^{i\nu_2(t-t_0)}, \\ Q_2^I &= a_2(a_1\sigma_+ + \sigma_-a_1^\dagger)e^{-i\nu_2(t-t_0)}, \\ W^I &= \hbar g(a_1\sigma_+ + \sigma_-a_1^\dagger). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Como nesse caso temos que $\omega_1 = \nu_2$ e $\omega_2 = -\nu_2$ teremos que $\delta(\omega_1, -\omega_1) = \delta(\omega_2, -\omega_2) = 0$ e desta forma, no somatório, na Eq.(A.26) restará unicamente os termos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho_S^I(t) &= \frac{1}{i\hbar} [V_{ion}, \rho_S^I(t)] - \left\{ [Q_1^I Q_2^I \rho_S^I(t) - Q_2^I \rho_S^I(t) Q_1^I] W_{12}^+ + \right. \\ &\quad - [Q_1^I \rho_S^I(t) Q_2^I - \rho_S^I(t) Q_2^I Q_1^I] W_{21}^- + [Q_2^I Q_1^I \rho_S^I(t) - Q_1^I \rho_S^I(t) Q_2^I] W_{21}^+ + \\ &\quad \left. - [Q_2^I \rho_S^I(t) Q_1^I - \rho_S^I(t) Q_1^I Q_2^I] W_{12}^- \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

ou na forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_S^I(t) = \frac{1}{i\hbar} [V_{ion}, \rho_S^I(t)] + \Gamma \rho_S^I(t), \quad (\text{A.29})$$

com

$$\begin{aligned} \Gamma \rho_S^I &= - \left\{ [Q_1^I Q_2^I \rho_S^I(t) - Q_2^I \rho_S^I(t) Q_1^I] W_{12}^+ + \right. \\ &\quad - [Q_1^I \rho_S^I(t) Q_2^I - \rho_S^I(t) Q_2^I Q_1^I] W_{21}^- + [Q_2^I Q_1^I \rho_S^I(t) - Q_1^I \rho_S^I(t) Q_2^I] W_{21}^+ + \\ &\quad \left. - [Q_2^I \rho_S^I(t) Q_1^I - \rho_S^I(t) Q_1^I Q_2^I] W_{12}^- \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Notemos que apesar dos operadores Q_1^I e Q_2^I dependerem do tempo, o produto destes independem do tempo ou seja, toda dependência temporal na Eq.(A.30) permanece unicamente nas densidades espectrais do reservatório.

Discutiremos agora as densidades espectrais. Escrevendo

$$\begin{aligned} F_1^I &= \sum_k g_k' b_k e^{-i\nu_k(t-t_0)} \\ F_2^I &= \sum_k g_k' b_k^\dagger e^{i\nu_k(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Calculando agora as correlações

$$\begin{aligned}
\langle F_2(\tau)F_1 \rangle_r &= \left\langle \sum_k g_k' b_k^\dagger e^{i\nu_k\tau} \sum_{k'} g_{k'}' b_{k'} \right\rangle \\
&= \sum_{k,k'} g_k' g_{k'}' e^{i\nu_k\tau} \langle b_k^\dagger b_{k'} \rangle = \sum_k g_k'^2 e^{i\nu_k\tau} \bar{n}_k \\
\langle F_1(\tau)F_2 \rangle_r &= \left\langle \sum_k g_k' b_k e^{-i\nu_k\tau} \sum_{k'} g_{k'}' b_{k'}^\dagger \right\rangle \\
&= \sum_{k,k'} g_k' g_{k'}' e^{-i\nu_k\tau} \langle b_k b_{k'}^\dagger \rangle = \sum_k g_k'^2 e^{-i\nu_k\tau} (\bar{n}_k + 1).
\end{aligned} \tag{A.31}$$

Usando nas expressões (A.19) e (A.20) para as densidades espectrais

$$W_{21}^+ = \int_0^\infty d\tau e^{-i\nu_2\tau} \langle F_2(\tau)F_1 \rangle_r = \sum_k g_k'^2 \bar{n}_k \int_0^\infty d\tau e^{i(\nu_k - \nu_2)\tau}. \tag{A.32}$$

Assumindo que os modos do reservatório são igualmente espaçados, onde $g(\nu_k)d\nu_k$ é o número de modos entre ν_k e $\nu_k + d\nu_k$, o somatório em (A.32) pode ser trocado por uma integral obtendo

$$\begin{aligned}
W_{21}^+ &= \int_0^\infty d\nu_k g(\nu_k) g_k'^2 \bar{n}_k \int_0^\infty d\tau e^{i(\nu_k - \nu_2)\tau} \\
&= \frac{\gamma}{2} \bar{n},
\end{aligned} \tag{A.33}$$

com $\gamma = 2\pi g(\nu_k)g_k'^2$. Analogamente

$$W_{12}^+ = \frac{\gamma}{2}(1 + \bar{n}) = W_{12}^{-*} \tag{A.34}$$

$$W_{21}^- = \frac{\gamma}{2}\bar{n} = W_{21}^{+*} \tag{A.35}$$

$$W_{11}^\pm = W_{22}^\pm = 0. \tag{A.36}$$

Considerando $\bar{n} = 0$ ($T = 0$)

$$W_{12}^+ = W_{12}^- = \frac{\gamma}{2}$$

$$W_{21}^+ = W_{21}^- = 0. \tag{A.37}$$

Consequentemente

$$\Gamma \rho_S^I = -\frac{\gamma}{2} [Q_1^S Q_2^S \rho_S^I(t) - 2Q_2^S \rho_S^I(t) Q_1^S + \rho_S^I(t) Q_1^S Q_2^S]. \tag{A.38}$$

Bibliografia

- [1] D. J. Wineland, J. J. Bollinger, W. M. Itano, and D. J. Heinzen, Phys. Rev. A **50**, 67 (1994).
- [2] R. J. Glauber, in Quantum Optics and Electronics, Les Houches, ed. C. DeWitt, A. Blandin, and C. Cohen-Tannoudji (Gordon and Breach, New York 1965).
- [3] P. Meystre, Cavity quantum optics and the quantum measurement process, in Progress in Optics vol. XXX, editado por E. Wolf (New York: Elsevier), pp. 263 (1992).
- [4] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
- [5] B. W. Shore and P. L. Knight, J. Mod. Opt. **40**, 1195 (1993).
- [6] G. Rempe, R. J. Thompson, R. J. Brecha, W. D. Lee, and H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **67**, 1727 (1991).
- [7] M. J. Holland, D. F. Walls, P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **67**, 1716 (1991).
- [8] M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich, and N. Zaguary, Phys. Rev. A **45**, 5193 (1992)
- [9] P. Meystre and M. Sargent III, Elements of Quantum Optics (Springer, Berlin, 1990).
- [10] K. Vogel, V. M. Akulin, and W. P. Schleich, Phys. Rev. Lett. **71**, 1816 (1993).

- [11] A. S. Parkins, P. Marte, P. Zoller, O. Carnal, and H. J. Kimbel, *Phys. Rev. A* **51**, 1578 (1995).
- [12] J. H. Eberly, N. B. Narozhny and J. J. Sánchez-Mondragón, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1323, (1980).
- [13] Yoo, H.-I., J. J. Sánchez-Mondragón and J. H. Eberly, Non-linear dynamics of the fermions-boson model: interference between revival and the transition to irregularity, *J. Phys. A* **14**, 1383 (1981).
- [14] G. Rempe, H. Walther and N. Klein, *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 353 (1987).
- [15] P. J. Bardroff, E. Mayr, W. P. Schleich, *Phys. Rev. A* **51**, 4963 (1995).
- [16] S. J. D. Phoenix, and S. M. Barnett, *J. Mod. Opt.* **40**, 979 (1993).
- [17] J. I. Cirac, L. J. Garay, R. Blatt, A. S. Parkins and P. Zoller, *Phys. Rev. A* **49**, 1202 (1994).
- [18] L. Davidovich, N. Zagury, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. A* **50**, R895 (1994).
- [19] T. Sleator, and H. Weinfurter, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4087 (1995).
- [20] A. O. Caldeira, and A. J. Legget, *Phys. Rev. A* **31**, 1059 (1985).
- [21] W. H. Zurek, *Physics Today* **10**, 36 (1991).
- [22] D. J. Wineland, W. M. Itano, and R. S. VanDyck Jr., *Adv. At. Mol. Phys.* **19**, 135 (1983).
- [23] C. A. Blockley, D. F. Walls and H. Risken, *Europhys. Lett.*, **17**, 509, (1992).
- [24] J. I. Cirac and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091, (1995).

- [25] F. Diedrich, J. C. Bergquist, W. M. Itano and D. J. Wineland, Phys. Rev. Lett. **62**, 403 (1989).
- [26] C. Monroe, D. M. Meekhof, S. R. Jefferts, W. M. Itano, D. J. Wineland and P. Gould, Phys. Rev. Lett. **75**, 4011 (1995).
- [27] W. Nagourney, J. Sandberg, and H. Dehmelt, Phys. Rev. Lett. **56**, 2797 (1986).
- [28] Th. Sauter, W. Neuhauser, R. Blatt, and P. E. Toschek, Phys. Rev. Lett. **57**, 1696 (1986).
- [29] J.C. Berquist, R. G. Hulet, W. M. Itano, and D. J. Wineland, Phys. Rev. Lett. **57**, 1699 (1986).
- [30] S. Stenholm, Rev. Mod. Phys. **58** 699 (1986).
- [31] C. S. Adame, M. Singel, and J. Mlynek, Physics Reports **240**, 143 (1994).
- [32] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland, Phys. Rev. Lett. **76**, 1796 (1996).
- [33] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, D. J. Wineland, Science **272**, 1131 (1996).
- [34] Ch. Roos, Th. Zeiger, H. Rohde, H. C. Nägerl, J. Eschner, D. Leibfried, F. Schmidt-Kaler, and R. Blatt, Phys. Rev. Lett. **83**, 4713 (1999).
- [35] B. Buck, C. V. Sukumar, Phys. Lett. A **81**, 132 (1981).
- [36] D. S. Freitas, A. Vidiella-Barranco, and J.A. Roversi, Phys. Lett. **A**, 249, 275 (1998).
- [37] H. Moya-Cessa, A. Vidiella-Barranco, J. A. Roversi, D. S. Freitas and S. M. Dutra, Phys. Rev. A **59**, 2518 (1999)
- [38] P. Goy, J. M. Raimond, M. Gross and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **50**, 1903 (1983).

- [39] S. Haroche and D. Kleppner, *Phys. Today* **42**, 24 (1989).
- [40] P. Filipowicz, P. Meystre, G. Rempe and H. Walther, *Optica Acta*, **32**, 1105 (1985).
- [41] P. Filipowicz, J. Javanainen and P. Meystre, *Phys. Rev. A* **34**, 3077 (1986).
- [42] A. M. Guzman, P. Meystre and E. M. Wright, *Phys. Rev. A* **40**, 2471 (1989).
- [43] M. Brune, P. Nussenzveig, F. Schmidt-Kaler, F. Bernardot, A. Maali, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3339 (1994).
- [44] L. Davidovich, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. A* **53**, 1295 (1996).
- [45] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Breyer, E. Hagley, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1800 (1996).
- [46] G. Rempe, W. Schleich, M. O. Scully and H. Walther, Quantum effects in single-atom and single-photon experiments, *Proceedings third International Symposium Foundations of Quantum Mechanics* 294 (1989).
- [47] S. E. Morin, Q. Wu and T. W. Mossberg, *Optics and Photonics News* **3**, 8 (1992).
- [48] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press) (1997).
- [49] F. W. Cummings, *Phys. Rev.* **140**, A1051 (1965).
- [50] S. Stenholm, *Phys. Rep. C* **6**, 1 (1973).
- [51] S. M. Barnett, P. Filipowicz, J. Javanainen, P. L. Knight and P. Meystre, in *Frontiers in Quantum Optics*, editado por E. R. Pike and S. Sarkar (Adam Hilger, Bristol), pp. 485 (1986).

- [52] J. H. Eberly, N. B. Narozhny and J. J. Sanches-Mondragon, Phys. Rev. Lett. **44**, 1323 (1980).
- [53] N. B. Narozhny and J. J. Sanches-Mondragon and J. H. Eberly, Phys. Rev. A **23**, 236 (1981).
- [54] S. J. D, Phoenix, P. L. Knight, Ann. Phys. (N.Y.) **186**, 381 (1988).
- [55] A. Vidiella-Barranco, H. Moya-Cessa, V. Buzek, J. Mod. Opt. **39**, 1441 (1992).
- [56] S. J. D, Phoenix, P. L. Knight, Phys. Rev. Lett. **66**, 2833 (1991).
- [57] K. E. Cahill and R. J. Glauber, Phys. Rev. **177**, 1857 (1969); **177**, 1882 (1969).
- [58] F. A. M. de Oliveira, Phys. Rev. A **45**, 5104 (1992).
- [59] M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, and E. P. Wigner, Phys. Rep. **106**, 121 (1984).
- [60] J. Eiselt, and H. Risken, Phys. Rev. A **43**, 346 (1991).
- [61] J. Gea-Banacloche, Phys. Rev. Lett. **65**, 3385 (1990).
- [62] J. Gea-Banacloche, Phys. Rev. A **44**, 5913 (1991).
- [63] V. Buzek, H. Moya-Cessa, P. L. Knight and S. J. D. Phoenix, Phys. Rev. A **45**, 8190 (1992).
- [64] K. Zaheer and M. S. Zubairy, Phys. Rev. A **39**, 2000 (1989).
- [65] D. Jonathan, K. Furuya, and A. Vidiella-Barranco, J. Mod. Optics, **46**, 1697 (1999).
- [66] B. W. Shore, P. L. Knight, J. Mod. Opt. **40**, 1195 (1993).
- [67] K. Zaheer, M. R. B. Wahiddin, J. Mod. Opt. **41**, 150 (1994).

- [68] S. Stenholm, Phys. Rep. C **6**, 1 (1973).
- [69] N. B. Narozhny, J. J. Sánchez-Mondragón, J. H. Eberly, Phys. Rev. A, **23**, 236 (1981).
- [70] T. W. Hänsch and A. L. Schawlow, Opt. Comm. **13**, 68 (1975).
- [71] D. J. Wineland and H. G. Dehmelt, Bull. Am. Phys. Soc. **20**, (1975).
- [72] A. Ashkin, Phys. Rev. Lett. **40**, 729 (1978).
- [73] D. J. Wineland, R. E. Drullinger and F. L. Walls, Phys. Rev. Lett. **40**, 1639 (1978).
- [74] D. J. Wineland, C. Monroe, W. M. Itano, D. Leibfried, B. King and D. M. Meekhof, J RES NATL INST STAN 103: (3) 259-328 MAY-JUN (1998).
- [75] W. Neuhauser, M. Hohenstatt, P. Toschek and H. Dehmelt, Phys. Rev. Lett. **41**, 233 (1978).
- [76] S. Schneider and G. J. Milburn, Phys. Rev. A, **57**, 3748, (1998).
- [77] M. Muraio and P. L. Knight, Phys.Rev. A **58**, 663 (1998).
- [78] Le-Man Kuang, Hao-Sheng Zeng, and Zhao-Yang Tong, Phys. Rev. A **60**, 3815 (1999).
- [79] R. M. Serra, N. G. de Almeida, W. B. da Costa, and M. H. Moussa, Phys.Rev. A **64**, 33419 (2001).
- [80] G. J. Milburn, Phys. Rev. A **44**, 5401 (1991).
- [81] D. Jonathan, M. B. Plenio and P. L. Knight, Phys. Rev. A **62**, 42307 (2000).
- [82] Feng M, Phys Lett A **282**, 230, (2001).

- [83] T. W. Hänsch and A. L. Schawlow, Opt. Comm. **13**, 68 (1975).
- [84] W. D. Philipps and H. Metcalf, Phys. Rev. Lett. **48**, 596 (1982).
- [85] S. Chu, L. Hollberg J. E. Bjorkholm, A. Cable and A. Ashkin, Phys. Rev. Lett. **55**, 48 (1985).
- [86] S. Chu, J. E. Bjorkholm, A. Ashkin and A. Cable, Phys. Rev. Lett. **57**, 314 (1986).
- [87] D. J. Wineland and W. M. Itano, Physics Today, **june**, 34 (1987).
- [88] R. C. Thompson, in Adv. At. Mol. Phys. **31**, 253 (1993).
- [89] P. K. Ghosh, Ion Trap (Clarendon, Oxford) (1995).
- [90] Bollinger, J. J., J. D. Prestag, W. M. Itano, and D. J. Wineland, PRL **54**, 1000 (1985).
- [91] P. J. Bardroff, C. Leichtle, G. Schrade and W. P. Schleich, Phys. Rev. Lett. **77**, 2198 (1996).
- [92] H. Goldstein, Classical Mechanics (Addison-Wesley, Reading, MA) (1950).
- [93] D. J. Wineland, W. M. Itano, Phys. Rev. A, **20**, 1521 (1979).
- [94] C. C. Gerry and J. H. Eberly, Phys. Rev. A, **42**, 6805 (1990).
- [95] W. Vogel and R. L. de Matos Filho, Phys. Rev. A **52**, 4214 (1995).
- [96] J. R. Anglin, J. P. Paz, and W. H. Zurek, Phys. Rev. A **55**, 4041 (1997).
- [97] F. Plumelle, M. Desaintfuscien, J. L. Duchene and C. Audoin, Opt. Commun. **34**, 71 (1980).
- [98] D. A. Church, Physics Reports **228**, 253 (1993).

- [99] S. Wallentowitz and W. Vogel, Phys. Rev. A **55**, 4438 (1997) .
- [100] S. Wallentowitz and W. Vogel, Phys. Rev. A **58**, 679 (1998).
- [101] S. Wallentowitz and W. Vogel, P. L. Knight, Phys. Rev. A **59**, 531 (1999) .
- [102] D. J. Wineland, J. J. Bollinger, W. M. Itano, F. L. Moore and D. J. Heinzen, Phys. Rev. A **46**, R6797 (1992).
- [103] W. H. Louisell, Quantum Statistical Properties of Radiation (Wiley, New York) (1973).
- [104] A. Wünsche, Quantum Opt. **3**, 359 (1991).
- [105] S. M. Dutra, P. L. Knight, and H. Moya-Cessa, Phys. Rev. A **49**, 1993 (1994).