Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Física "Gleb Wataghin"

Departamento de Eletrônica Quântica

Grupo de Óptica Quântica

Tese de Mestrado

Emaranhamento Quântico entre átomos localizados em cavidades distintas

Bruno Ferreira de Camargo Yabu-uti

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. (orientador) José Antonio Roversi - IFGW/UNICAMP

Prof. Dra. Kyoko Furuya - IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi - DF/UFSCar

Prof. Dr. (suplente) Antonio Vidiella Barranco - IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. (suplente) Fernando Luís Simeão da Silva - DF/UEPG

Tese apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Este exemplar corresponde à redação final da Tese de Mestrado defendida pelo aluno Bruno Ferreira de Camargo Yabu-uti e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 31 de Agosto de 2007 Prof. Dr. José Antonio Roversi

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

Yabu-uti, Bruno Ferreira de Camargo Y1e Emaranhamento quântico entre átomos localizados em cavidades distintas / Bruno Ferreira de Camargo Yabu-uti. – Campinas, SP : [s.n.], 2007.		
Orientador: José Antonio Roversi. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".		
 Emaranhamento quântico. 2. Óptica quântica. 3. Cavidades acopladas. I. Roversi, José Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título. 		
(vsv/ifgw)		
 Título em inglês: Quantum entanglement between atoms located in distinct cavities Palavras-chave em inglês (Keywords): Quantum entanglement Quantum optics Coupled cavities Área de concentração: Física Titulação: Mestre em Física Banca examinadora: Prof. José Antonio Roversi Prof. Salomon Sylvain Mizrahi Prof^a Kyoko Furuya 		

- Data da defesa: 31.08.2007

- Programa de Pós-Graduação em: Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **BRUNO FERREIRA DE CAMARGO YABU-UTI – RA 008201** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 31 / 08 / 2007.

COMISSÃO JULGADORA: Prof. Dr. José Antonio Roversi (Orientador do Candidato) -DEQ/IFGW/UNICAMP Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi - DF/UFSCar Kpoko Farapon.

Profa. Dra. Kyoko Furuya – DFMC/IFGW/UNICAMP

Agradecimentos

Para não me alongar e nem cometer qualquer injustiça serei breve. Agradeço ao meu orientador, ao Grupo de Óptica Quântica, aos meus amigos, minha família e a DEUS.

Agradeço também ao apoio finaceiro da FAPESP.

Resumo

Nessa dissertação de mestrado estudamos a dinâmica do emaranhamento entre dois átomos remotos localizados em cavidades distintas. O foco principal é a produção de estados maximamente emaranhados entre átomos de dois níveis em cavidades distintas e, em particular, acopladas.

v

Inicialmente apresentamos os principais conceitos da Teoria de Informação Quântica, aspectos qualitativos e quantitativos do emaranhamento quântico, em seguida partimos para o sistema físico proposto: átomos em cavidades. Apresentamos o modelo de Jaynes-Cummings (MJC) e uma breve análise do emaranhamento que surge da interação átomo-campo descrita por esse modelo. No sistema de duas cavidades desacopladas apresentamos como gerar emaranhamento entre átomos remotos de forma condicional.

É apresentado então o sistema formado por duas cavidades acopladas interagindo com átomos de dois níveis idênticos, fato que corresponde a constantes de acoplamento átomo-campo iguais $(g_1 = g_2)$. A interação átomo-campo ainda é descrita pelo MJC já o sistema das cavidades acopladas pode ser modelado conforme a proposta de Zoubi et. al [1](para cavidades separadas por um meio físico a uma curta distância) ou pela proposta de Pellizzari [2](para cavidades conectadas por uma fibra óptica).

Para escolhas adequadas dos parâmetros relevantes em cada caso, a dinâmica dos dois sistemas é equivalente a interação dos átomos com um campo mono-modo. Em conseqüência da aparente simplicidade, investigamos a dinâmica do emaranhamento entre átomos distantes, incluindo a geração de estados maximamente emaranhados (essencial para o processamento de informação quântica, comunicação quântica [3] e computação quântica distribuída [4,5]) de forma determinística e sem a necessidade de uma interação indireta entre os modos das cavidades para gerar um estado inicial emaranhado compartilhado.

Abstract

In this work, we study the dynamics of the entanglement between two remote atoms in distinct cavities. The main focus is the production of maximal entangled states between identical atoms of two levels in distinct cavities and, in particular, coupled cavities.

Initially we present the main concepts of the Theory of Quantum Information, qualitative and quantitative aspects of the quantum entanglement, after that we consider the physical system: atoms in cavities. We present the Jaynes-Cummings model (JCM) and make one brief analysis of the entanglement that appears due to such atom-field interaction. In the system of two uncoupled cavities we present how to generate entanglement between remote atoms in conditional form.

We introduce the system formed by two coupled cavities interacting with identical atoms, fact that corresponds to identical coupling constant $(g_1 = g_2)$. The atom-field interaction is still described by the JCM and the system of coupled cavities can be modeled by the Zoubi et. al.'s proposal [1] (for separate cavities for an environment for a short distance) or for the Pellizzari's proposal [2] (for cavities connected by a optical fiber).

For appropriate choices of parameters in each case, the dynamics of the two systems is equivalent to the interaction of atoms with a mono-mode field. Due to the apparent simplicity, we investigate the dynamics of the entanglement between distant atoms, including the generation of maximal entangled states (essential for the processing of quantum information, quantum communication [3] and distributed quantum computation [4,5]) in determinist form and without necessity of an indirect interaction between the modes of the cavities to generate a shared entangled initial state.

Índice

$\mathbf{A}_{\mathbf{i}}$	grad	ecimentos	iv		
R	Resumo v				
\mathbf{A}	bstra	\mathbf{ct}	vi		
Li	sta d	e Figuras	x		
In	trod	ução	1		
1	Cor	ceitos básicos da Informação Quântica	4		
	1.1	Desigualdade de Bell	5		
		1 1 1 Formulação da desigualdade de Bell	6		
		1.1.2 Violação da desigualdade de Bell	6		
	19	Critário de Separabilidade	8		
	1.2	1.2.1 Critério TPP Ve Designaldade de Bell	8		
	1 3	Telatransporte Quântico	10		
	1.5	131 Esquema Padrão de Teletransporto	10		
	1 /	Modidas de omaranhamento	10		
	1.4	141 Condições do modida	12		
		1.4.1 Condições de medida	10		
		1.4.2 Com summer os	14		
		1.4.5 Concurrence	10		
		1.4.4 Negatividade e Negatividade Logantinica	11		
2	Inte	ração da radiação com a matéria	20		
	2.1	Quantização do Campo Eletromagnético	20		
	2.2	2 Aproximação para o átomo de dois níveis			
	2.3	O Modelo de Jaynes-Cummings	25		
		2.3.1 Solução do Modelo de Jaynes-Cummings	27		
	2.4	Emaranhamento no MJC	29		
3	Em	aranhamento em cavidades descopladas	32		
	3.1	Troca de emaranhamento	33		
	3.2	Detecção de um fóton	36		

INDICE

4	4 Sistema de cavidades acopladas interagindo com átomos de dois níveis 39			
4.1 Acoplamento via meio físico			39	
4.1.1 Interação com átomos de dois níveis				
	4.2 Acoplamento via fibra óptica			
		4.2.1 Interação com átomos de dois níveis	43	
	4.3	Parâmetros experimentais e comentários relevantes	45	
5	Din	âmica do emaranhamento entre átomos remotos no sistema de cavidades acopla-	-	
das				
6	Cor	nsiderações finais e Perspectivas futuras	54	
\mathbf{A}	Inte	erpretação de Copenhagem	57	
в	Ope	erador densidade	58	
	B.1	Estado Puro	58	
	B.2	Estado Misto	58	
С	Dec	composição de Schmidt	60	
Bi	bliog	grafia	61	

Lista de Figuras

1.1	a-)Alice faz uma medida de Bell em suas partículas; b-)Alice envia para Bob os dois bits de informação; c-)Recebendo a mensagem, Bob pode realizar a transformação certa e finalizar a protocolo	10	
		12	
2.1	Estrutura eletrônica de um átomo (considerado de dois níveis $ e\rangle e g\rangle$) e um campo eletromagnético quantizado (fóton)		
2.2	Dois átomos atravessando sucessivamente uma mesma cavidade, com o campo inicial- mente no vácuo, o átomo 1 no estado excitado e o 2 no fundamental. Nesta figura e nas		
	outras consideramos cavidades do tipo Fabry-Perot.	30	
3.1	Duas cavidades, com um átomo em seu interior, espacialmente separadas e desacopladas		
	constituindo sistemas independentes	32	
3.2	Esquema básico proposto por Gerry [22] no qual através de um entanglement swapping		
	gerou um estado emaranhado entre dois átomos remotos.	33	
3.3	A <i>concurrence</i> (esquerda) e a negatividade (direita) de $\rho_{at}(t)$ e $\rho_{camp}(t)$ respectivamente		
	representados pelas cores azul e vermelho	34	
3.4	Comparação entre o emaranhamento de formação E_f , em vermelho, e a negatividade		
	logarítmica E_N , azul , do operador matriz densidade $\rho_{at}(t)$ (figura da esquerda) e $\rho_{camp}(t)$		
	(direita)	35	
3.5	Esquema para gerar emaranhamento entre átomos distantes em cavidades desacopladas		
	baseado na detecção de um fóton	36	
3.6	Esquema de um <i>beam splitter</i>	37	
3.7	Probabilidade de sucesso na geração do estado atômico maximamente emaranhado em		
	função do tempo	38	
4.1	Ilustração de duas cavidades, com átomos de dois níveis em seu interior, separadas pelo		
	vácuo que se acoplam devido a interferência das ondas evanescentes	42	
4.2	Esboço de duas cavidades ópticas acopladas por uma fibra óptica. Uma delas é atraves-		
	sada por um átomo de dois níveis.	44	
5.1	A concurrence (esquerda) e negatividade (direita) do sistema formado pelos dois átomos		
	interagindo sucessivamente com as cavidades acopladas em função de gt_1 e gt_2	49	
5.2	Esquema da generalização para produzir estados multi-partites emaranhados de n átomos		
	em cavidades acopladas (na figura, via fibra).	50	

5.3	Concurrence (esquerda) e negatividade (direita), em função de gt , para dois átomos inte-		
	ragindo simultaneamente com o sistema de cavidades acopladas	52	
6.1	Duas cavidades acopladas via fibra óptica com N átomos aprisionados em seu interior. $% \left({{{\bf{n}}_{{\rm{s}}}}} \right)$	55	

Introdução

Na mecânica quântica um sistema pode estar em um estado de superposição de dois autoestados de um observável. Quando o princípio da superposição (paralelismo quântico) é aplicado para sistemas compostos tem-se origem o emaranhamento ou correlações quânticas.

Se dois subsistemas estão emaranhados, o estado total do sistema não pode ser separado em um produto de estados dos dois subsistemas. Nesse caso, os subsistemas não podem ser considerados independentes, mesmo que estejam separados espacialmente. Dessa forma, estudar sistemas quânticos em um estado emaranhado significa investigar um dos fundamentos da mecânica quântica, em especial, um dos aspectos mais intrigantes, a não-localidade.

Cavidades quânticas (tanto no regime microondas [6–13] como no óptico [14–20]) com átomos de dois níveis em seu interior representam um sistema muito promissor para o processamento de informação quântica e tem sido largamente estudado. Átomo e campo podem ser preparados em um estado inicial puro (estado inicial de input) e um forte acoplamento é viável experimentalmente possibilitando uma evolução coerente do sistema. Regulando a velocidade com que o átomo atravessa a cavidade ou com um campo externo pode-se controlar o tempo de interação do átomo com o campo, chave para a realização das portas lógicas. O estado dos átomos pode ser detectado de um modo seletivo e sensitivo por um campo ionizante (medidas). Na prática, o processo de decoerência está presente tanto na perda de fóton pela cavidade como na emissão espontânea do átomo ¹. Em geral tal processo é danoso para o sistema embora seja importante ressaltar que existem casos em que o processo de decoerência ajuda no processamento de informação quântica, como veremos.

Desta forma, há várias propostas para gerar e manipular estados emaranhados no sistema de uma cavidade (ópticas ou de microondas) com átomos de dois-níveis (ressonantes com o campo ou em um regime dispersivo) aprisionados ou atravessando uma cavidade sucessivamente (a tempos distintos) ou simultaneamente (ao mesmo tempo) [6–8, 10–12, 14].

Por outro lado, emaranhamento compartilhado entre sistemas espacialmente separados representa um recurso central para comunicação quântica [3] e computação quântica distribuída $[4]^2$.

Por esta razão, recentemente tem havido um considerável interesse em sistemas de cavidades espacialmente separadas interagindo com átomos distantes.

Para duas cavidades desacopladas, os dois sistemas átomo-campo são independentes (não interagem diretamente) e a dinâmica de ambos segue normalmente como se o outro não existisse. Nesse contexto, gerar emaranhamento entre dois átomos remotos requer algumas condições extras e dois esquemas se

¹Com o avanço da tecnologia na produção de cavidade quânticas e obtenção de estados atômicos mais estáveis esse efeito pode ser diminuído

 $^{^{2}}$ Quando se fala em computação quântica distribuída entende-se um computador quântico formado por uma rede de processadores locais conectados por uma linha de transmissão [5].

destacam.

O primeiro deles é baseado no fenômeno conhecido como *entanglement swapping* [21]. É necessário um emaranhamento inicial compartilhado entre os campos das duas cavidades espacialmente separadas. Então, cada átomo interage com uma cavidade de forma que o emaranhamento entre os campos seja transferido para os átomos [22–26].

O segundo esquema a se destacar para gerar emaranhamento entre átomos distantes em cavidades desacopladas é baseado na detecção de um fóton que tenha escapado da cavidade [27,28]. A indistinguibilidade na detecção (sem saber de qual cavidade ele originou) projeta o sistema atômico em um estado emaranhado. Tal procedimento é probabilístico dependendo do resultado da medição.

Agora, se considerarmos um sistema de cavidades acopladas (diretamente conectadas por um canal quântico, que pode ser o vácuo para curtas distâncias ou uma fibra óptica para distâncias maiores), o sistema pode ser útil para a transferência de estado quântico [2,29–33] ou geração de emaranhamento entre átomos distantes de forma incondicional [30–37].

Esta dissertação de mestrado está organizada da seguinte forma. No capítulo 1 discutimos os conceitos fundamentais da teoria de informação quântica, aspectos qualitativos e quantitativos, como a desigualdade de Bell [38] e sua violação, o critério de separabilidade de Peres-Horodecki [39, 40] e o teletransporte quântico [41], além das principais formas de se quantificar o grau de emaranhamento em sistemas bipartites [42–48] (as quais serão utilizadas mais a frente)

No capítulo seguinte é apresentado o sistema físico de átomos em cavidades. Inicialmente, veremos a quantização do campo eletromagnético presente em uma cavidade quântica e a aproximação para o átomo de dois níveis. Então, abordaremos a interação entre o átomo e o campo dentro de uma cavidade seguindo o modelo de Jaynes-Cummings [49]. Por fim, ainda nesse capítulo, estudaremos o emaranhamento quântico que se origina dessa interação.

No capítulo 3 apresentamos o estudo da dinâmica de emaranhamento entre átomos remotos localizados em cavidades distintas. Veremos que, para cavidades desacopladas, os dois subsistemas átomocampo são independentes e o surgimento das correlações quâticas só é possível sob certas condições.

No capítulo 4 apresentamos o sistema quântico de cavidades acopladas, no qual duas situações de acoplamento serão abordados. A primeira consiste em duas cavidades colocadas lado a lado, separadas por uma curta distância, de forma que uma onda evanescente que sai de uma das cavidades alcance a outra acoplando-as [1]. Esse mecanismo de acoplamento ocorre de forma análoga ao caso clássico [50,51]. Na segunda, duas cavidades são conectadas por meio de uma fibra óptica que desempenha o papel de um "guia de onda" transmitindo o campo evanescente de uma cavidade para a outra por longas distâncias [2]. Nas duas situações iremos diagonalizar a Hamiltoniana do sistema das cavidades acopladas através de uma transformação bosônica apropriada (os modos normais do sistema) [1,31,52]. Então consideraremos a interação dos campos das cavidades com átomos de dois níveis que, sob certos regimes e fixando alguns parâmetros, é equivalente à interação dos átomos com um campo mono-modo.

No capítulo 5, como conseqüência dessa simplificação, veremos a dinâmica de emaranhamento entre

dois átomos idênticos situados em duas cavidade acopladas distintas, em particular, propomos um esquema extremamente simples (baseados nos modelos já citados para o sistema de cavidades acopladas) para geração de estados maximanente emaranhados entre dois átomos idênticos de forma determinística e sem a necessidade de uma interação indireta entre os subsistemas átomo-campo [53].

Por fim, no capítulo 6, faremos algumas considerações finais e uma análise geral do trabalho levando em conta as perspectivas futuras.

1 Conceitos básicos da Informação Quântica

A propriedade emaranhamento quântico é a capacidade que um sistema quântico possui de exibir correlações que não podem ser explicadas classicamente. Ele, citado primeiramente nos famosos trabalhos de Einstein, Podolsky e Rosen [54] e Schrödinger [55], desempenha um papel fundamental em vários tipos de processamento de informação quântica, incluindo teletransporte quântico [41], distribuição de chave criptográfica quântica [56] e computação quântica [4].

Schrödinger descreve assim o emaranhamento quântico: "Quando dois sistemas, cujos estados conhecemos através de seus representantes (funções de onda), entram em interação física temporária devido a forças conhecidas entre eles, e depois de um tempo de influência mútua os sistemas voltam a se separar, então eles não podem mais ser descritos da mesma forma que anteriormente, a saber, associando a cada um deles um representante próprio. Através da interação os dois representantes se tornam emaranhados."

Formalmente, o emaranhamento quântico é definido da seguinte forma:

Definição Seja um sistema quântico composto de N subsistemas descrito por uma matriz densidade $\rho \in \bigotimes_{j=1}^{N} \mathcal{H}_{j}$ onde \mathcal{H}_{j} é o espaço de Hilbert do subsistema j. Dizemos que ρ representa um estado emaranhamdo se, e somente se, ele não pode ser escrito, para algum k, como uma soma de produtos diretos:

$$\rho = \sum_{i=0}^{k} p_i \otimes_{j=1}^{N} \rho_i^j \tag{1.1}$$

onde $p_i > 0$, $\sum_{i=0}^k p_i = 1 \in \rho_i^j \in \mathcal{H}_j$.

O estado acima é o estado mais geral que pode ser construído via *LOCC* (Operações Locais e Comunicação Clássica) sem interação física entre os N subsistemas. Estados que não estão emaranhados e podem ser escritos como um produto tensorial de estados são chamados de estados separáveis.

Uma das manifestações mais citadas do emaranhamento é o processo de aniquilação de pares no qual são produzidos dois fótons gêmeos. Por conservação de momento linear, eles são emitidos em direções opostas e, por conservação de momento angular, devem possuir polarizações ortogonais. Agora, quando um dos fótons tem a sua polarização medida o outro apresenta simultaneamente uma polarização ortogonal independente de sua posição no espaço. Os exemplos mais conhecidos de estados emaranhados são os chamados estados de Bell [38]:

$$|\psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle) |\phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle)$$
 (1.2)

Esses são estados bipartites $(2 \ge 2)$ maximamente emaranhados que exibem perfeitamente as correlações não locais. É impossível descrever esses estados como um produto tensorial dos estados de cada subsistema.

Com o intuito de entender os fundamentos da inseparabilidade dos estados quânticos emaranhados começamos com uma abordagem qualitativa do fenômeno apresentando a desigualdade de Bell [38], o critério de separabilidade de Peres-Horodecki [39, 40] e o teletransporte quântico [41] e em seguida discutiremos as algumas das principais medidas de emaranhamento para sistemas bipartites.

1.1 Desigualdade de Bell

Na interpretação usual da mecânica quântica (Copenhagem) surge um "estranho e misterioso" ponto de vista que difere completamente do convencional senso comum (ver Apêndice A). Em outras palavras, uma partícula não observada não possui as propriedades físicas que existem independente da observação, ou seja, o objeto real não existe sem ser observado. Tais propriedades surgem apenas como conseqüência da medida realizada no sistema.

Por exemplo, um elétron (spin-1/2) no estado de spin $|\Psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ antes de ter sua componente z do spin medida não possui nenhuma propriedade de spin determinada. Porém, após ser medido (obtendo por exemplo spin \uparrow), o elétron passa a possuir tal propriedade, isto é, passa para o estado $|\uparrow\rangle$.

Muitos físicos importantes tentaram combater a interpretação de Copenhagem e o ponto de vista bizarro que ela demonstrava. Entre eles podemos citar Einstein que em 1935, junto com Podolsky e Rosen, publicou um artigo [54] que deu origem ao conhecido paradoxo EPR.

Na tentativa de solucionar os aparentes problemas conceituais da mecânica quântica destacou-se a contribuição de John S. Bell. Com um número mínimo de hipóteses, levando em conta a validade de uma teoria local com variáveis escondidas (todas as aleatoriedades da mecânica quântica são atribuídas ao conhecimento incompleto dessas variáveis), ele tornou possível o desenvolvimento de relações que passaram a ser chamadas de desigualdades de Bell [38].

Nessa seção daremos um foco maior para sistemas bipartites, as demonstrações e exemplos serão focalizadas nesse caso específico. Existem generalizações da desigualdade de Bell para sistemas com dimensão superior ao sistema bipartite, como, por exemplo, a desigualdade de Bell-Klyshko [57].

1.1.1 Formulação da desigualdade de Bell

Como já foi dito, as desigualdades de Bell são baseadas no senso comum e assim existem diversas maneiras de demonstrá-las. Aqui não apresentaremos a demonstração original feita por Bell [38] mas sim uma outra freqüentemente chamada de desigualdade Bell-CHSH [58], devido as iniciais dos seus criadores (J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony e R. A. Holt).

Consideremos quatro propriedades físicas representadas pelos observáveis A_1 , A_2 , B_1 e B_2 com apenas dois resultados possíveis (autovalores ± 1). Assumindo também que os A_i se referem a um subespaço A e os B_j , a um subespaço B.

Seja o operador de Bell β_{CHSH} definido da seguinte forma:

$$\beta_{CHSH} = A_1 B_1 + A_2 B_1 + A_2 B_2 - A_1 B_2 = (A_2 + A_1) B_1 + (A_2 - A_1) B_2$$
(1.3)

Supondo uma teoria local determinística, os $A_i \in B_j$ são independentes. Assumindo que p(q, r, s, t)seja a probabilidade do sistema estar no estado com $A_1 = q$, $A_2 = r$, $B_1 = s \in B_2 = t$ onde $q, r, s, t = \pm 1$. O valor médio de β_{CHSH} é:

$$\langle \beta_{CHSH} \rangle = \sum_{q,r,s,t} p(q,r,s,t)(qs+rs+rt-qt)$$
(1.4)

Agora, como os resultados possíveis são apenas ± 1 , então tem-se que q = r ou q = -r, o que equivale a dizer que (q + r)s = 0 ou (r - q)t = 0. Em ambos os casos chegamos que $qs + rs + rt - qt = \pm 2$ e assim obtemos a desigualdade de Bell-CHSH:

$$|\langle \beta_{CHSH} \rangle| = |\langle A_1 B_1 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle + \langle A_2 B_2 \rangle - \langle A_1 B_2 \rangle| \le 2$$
(1.5)

1.1.2 Violação da desigualdade de Bell

Consideremos como exemplo para um teste da desigualdade de Bell-CHSH o seguinte par de elétrons preparados no seguinte estado na base de spin-z:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \tag{1.6}$$

Um elétron é mandado para Alice (subsistema A) enquanto o outro, para Bob (subsistema B). Eles são capazes de realizar as medidas associadas aos seguintes operadores:

$$Alice: \quad A_1 = \sigma_z \qquad A_2 = \sigma_x \tag{1.7}$$

$$Bob: \quad B_1 = \frac{-\sigma_z - \sigma_x}{\sqrt{2}} \qquad B_2 = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{\sqrt{2}} \tag{1.8}$$

Cada um pode escolher aleatoriamente uma das medidas possíveis, ao mesmo tempo, de forma que um não pode perturbar o outro. A partir de um ensemble desse mesmo estado, repetindo-se o procedimento de medida, obtem-se o valor médio dos operadores:

$$\langle A_1 \otimes B_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}; \langle A_2 \otimes B_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}; \langle A_2 \otimes B_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}; \langle A_1 \otimes B_2 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

Então:

$$\langle A_1 \otimes B_1 \rangle + \langle A_2 \otimes B_1 \rangle + \langle A_2 \otimes B_2 \rangle - \langle A_1 \otimes B_2 \rangle = 2\sqrt{2}$$
(1.9)

A desigualdade de Bell-CHSH prevê que $|\langle \beta_{CHSH} \rangle| \leq 2$, porém no exemplo descrito acima vemos que é possível obter $\langle \beta_{CHSH} \rangle = 2\sqrt{2}$, violando a desigualdade de Bell e mostrando que a mecânica quântica e as teorias locais com variáveis escondidas são incompatíveis.

Na realidade, foi demonstrado que a desigualdade de Bell-CHSH, levando em conta a validade da mecânica quântica, pode apenas ser violado por um fator máximo de $\sqrt{2}$ [59].

As primeiras experiências desenvolvidas para verificar estas desigualdades foram realizadas em 1972 por John F. Clauser e colaboradores [58, 60]. Desde então, a desigualdade de Bell vem sendo testada em um grande número de experimentos (muito devido a A. Aspect [61, 62]) e geralmente ela é violada sem nunca ultrapassar o limite quântico.

Assim a desigualdade de Bell acabou comprovando o oposto do que Bell imaginava, a validade da interpretação de Copenhagem da mecânica quântica e ainda a não-localidade da mesma. Os estados quânticos que violam algum tipo usual da desigualdade de Bell¹(CHSH, por exemplo) exibem correlações que não admitem uma teoria local, assim são considerados não locais ou emaranhados.

Para todo estado puro, violar algum tipo usual da desigualdade de Bell é uma condição necessária e suficiente de inseparabilidade [63]. Os únicos estados puros que não exibem correlações não locais, isto é, não violam a desigualdade de Bell usual, são os estados produtos.

Já para estados mistos não ocorre da mesma forma. Embora todo o estado misto que viole qualquer tipo usual da desigualdade de Bell seja inseparável, nem todos o estados mistos emaranhados violam a desigualdade de Bell usual, ou seja, suas correlações ainda podem ser explicadas por uma teoria local de variáveis escondidas [64].

Um fato relevante é que alguns estados aparentemente locais (não violam a desigualdade de Bell-CHSH) quando sujeitos a uma seqüência de medidas ideais (locais) passam a exibir correlações não locais [65,66] antes "escondidas". A saber, primeiramente o estado inicial é submetido a uma medida simples (costuma-se dizer que o estado passa por um filtro), em seguida é realizado um teste da desigualdade de Bell. O estado inicial (aparentemente local), após passar pelo filtro, passa a violar a desigualdade.

Historicamente a violação da desigualdade de Bell foi o primeiro teste para detectar o emaranhamento. Porém a violação da desigualdade de Bell não quantifica o grau de emaranhamento e, em alguns casos, não é garantido que tenha tal propriedade [66]. Nesses casos, a desigualdade de Bell (não usual)

¹Desigualdade de Bell usual é aquela na qual apenas uma medida ideal é realizada.

acaba detectando correlações produzidas pelos detectores ou filtros e não por algum estado quântico não local.

1.2 Critério de Separabilidade

Saber se um estado é inseparável ou não, em geral, não é trivial. Para estados puros a desigualdade de Bell representa um teste suficiente já para estados mistos a situação é mais complexa.

Como já foi dito anteriormente, um estado é dito separável se a matriz densidade do sistema composto puder ser representada como a soma de produtos diretos:

$$\rho = \sum_{i} p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i \tag{1.10}$$

onde p_i corresponde as pesos de cada produto de forma que $\sum_i p_i = 1$.

Quando um estado pode ser expressado pela eq.1.10 o transposto parcial de ρ referente ao subsistema A é, por definição,

$$\rho^{T_A} = \sum_i p_i \left(\rho_A^i\right)^T \otimes \left(\rho_B^i\right). \tag{1.11}$$

Tomando-se a matriz transposta de qualquer operador densidade (ρ), em qualquer base ortonormal, obtem-se outro operador densidade ($\rho^T \equiv \rho^*$); ou seja, outro operador com autovalores não negativos e traço igual a um. Desta forma, se a matriz ρ é separável, ρ^{T_A} também representa um operador densidade com traço unitário e autovalores positivos.

Por outro lado, se tomando o transposto parcial de um operador ρ obtem-se um operador com alguns autovalores negativos o estado inicial não é semelhante a expressão dada na eq.1.10 sendo, portanto, inseparável. Essa é uma condição necessária de separabilidade conhecida como critério de Peres [39].

Embora todo estado separável seja Transposto Parcial Positivo (TPP), o inverso não é necessariamente verdade (condição apenas necessária). Existem alguns estados que são inseparáveis mas são TPP, P. Horodecki [67] apresentou alguns exemplos de estados com tal propriedade em sistemas 2 x 4 e 3 x 3.

Horodecki et. al. [40] demonstraram que apenas para sistemas 2 x 2 e 2 x 3 o critério de Peres é uma condição necessária e suficiente para separabilidade. Desde então esse critério ficou também conhecido como o critério de Peres-Horodecki mas aqui será referido como critério TPP.

1.2.1 Critério TPP Vs Desigualdade de Bell

Um ponto importante do critério TPP é que ele é mais sensível do que a desigualdade de Bell para detectar o emaranhamento. Isso é devido ao fato de que o critério de separabilidade de Peres-Horodecki é estrutural, ou seja, usa a estrutura matemática da matriz densidade ρ , por outro lado, no teste para

a verificação da desigualdade de Bell a matriz ρ é utilizada apenas para calcular probabilidades. Para obter as probabilidades em questão, ou seja, para uma verificação experimental real da desigualdade de Bell deve-se usar *muitos* sistemas preparados no mesmo estado e não apenas *um*. Desta forma, se *muitos* sistemas estão sendo utilizados, deve-se testá-los coletivamente [68], ou seja, ao invés de usar ρ é preciso utilizar $\rho \otimes \rho \otimes ... \otimes \rho$ no teste da desigualdade. Em alguns casos embora ρ satisfaça a desigualdade de Bell $\rho \otimes \rho \otimes ... \otimes \rho$ não satisfaz.

Considere como exemplo um estado definido da seguinte forma [40]:

$$\rho_x = x \left| \psi^- \right\rangle \left\langle \psi^- \right| + (1 - x) \left| \downarrow \downarrow \right\rangle \left\langle \downarrow \downarrow \right| \tag{1.12}$$

onde $|\psi^{-}\rangle=1/\sqrt{2}\left(|{\downarrow\uparrow}\rangle-|{\uparrow\downarrow}\rangle\right)$

Sabendo que matricialmente o estado fica,

É possível obter a matriz transposta parcial,

$$\rho_x^{T_B} = \left(\begin{array}{rrrrr} 1-x & 0 & 0 & -x/2 \\ 0 & x/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x/2 & 0 \\ -x/2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calculando seu determinante obtem-se $-x^4/16$, assim para $x \in (0, 1]$ o determinante é negativo (fato que resulta em pelo menos um autovalor negativo) e o estado é emaranhado (pelo critério TPP) e para x=0 o estado é separável. No entanto, é possível mostrar (usando o engenhoso teorema demonstrado por Horodecki et. al. [69]) que o estado não viola a desigualdade de Bell para x < 0, 8, sendo assim considerado separável pelo críterio de Bell. Temos, então valores para x no qual o estado é inseparável pelo critério TPP porém não viola a desigualdade de Bell. Entende-se então que o critério TPP (Peres-Horodecki) e a violação da desigualdade de Bell são aspectos distintos da não-localidade.

1.3 Teletransporte Quântico

Em informação quântica, o emaranhamento representa um recurso indispensável sendo usada para implementar diversos protocolos quânticos. Estes protocolos possuem a propriedade de resolver tarefas que não podem ser realizadas classicamente com a teoria de informação clássica.

Quando se fala em teletransporte geralmente lembra-se da famosa série de televisão Jornada nas Estrelas onde os tripulantes da nave Enterprise eram completamente desintegrados e instantaneamente reconstruídos em planetas perigosos e inexplorados.

Porém, na verdade, não é assim que ocorre, o teletransporte quântico não transporta objetos massivos mas sim informação. De maneira geral, entende-se por teletransporte quântico qualquer estratégia que use apenas operações locais e comunicação clássica (canal clássico) para transmitir um estado quântico desconhecido (informação contida em um sistema) via um par emaranhado compartilhado (canal quântico).

Em 1993, Bennett et. al. [41] mostraram que, com o auxilio de um estado de Bell (canal quântico), dois bits de informação (canal clássico) e um conjunto específico de operações locais ou medidas podese transmitir toda a informação contida em um estado quântico de dois níveis desconhecido $|\psi\rangle$ de uma região do espaço (digamos de Alice, subsistema A) para outra (Bob, subsistema B). Ou seja, o estado quântico $|\psi\rangle$, que antes descrevia a partícula de Alice, passa a descrever a partícula de Bob. O procedimento desenvolvido por esse grupo é geralmente chamado de esquema padrão de teletransporte.

1.3.1 Esquema Padrão de Teletransporte

Formalmente o protocolo para se realizar o teletransporte quântico de um estado de 1 qubit² arbitrário $|\psi_1\rangle = a |0\rangle + b |1\rangle$ foi desenvolvido por Bennett e colaboradores [41].

Nesse protocolo, considere que Alice queira transmitir o estado de sua partícula 1 $|\psi_1\rangle$ para Bob. Primeiramente, eles devem compartilhar um estado bipartite maximamente emaranhado (estado de Bell) que realizará o papel do canal quântico, por exemplo, o estado de singleto $|\psi_{23}^-\rangle = 1/\sqrt{2}(|01\rangle - |10\rangle)$. Supondo que o par compartilhado não tenha sofrido nenhum tipo de perda ou dissipação.

O estado total do sistema fica então descrito da seguinte forma:

$$|\psi_{123}\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_{23}^-\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(|001\rangle - |010\rangle\right) + \frac{b}{\sqrt{2}} \left(|101\rangle - |110\rangle\right)$$
(1.13)

onde a partícula 1 e 2 estão com Alice e a partícula 3 com Bob, cada um em seu laboratório.

 $^{^{2}}$ O qubit ou bit quântico representa uma unidade de informação quântica. O bit clássico deve ser 0 ou 1, já um qubit pode ser 0, 1 ou uma superposição dos dois.

É possível reescrever o estado global do sistema em termos dos estados de Bell $|\psi^{\pm}\rangle$ e $|\phi^{\pm}\rangle$ (equação 1.2) obtendo:

$$|\psi_{123}\rangle = \frac{1}{2} \left[\left| \psi^{-} \right\rangle \left(-a \left| 0 \right\rangle - b \left| 1 \right\rangle \right) + \left| \psi^{+} \right\rangle \left(-a \left| 0 \right\rangle + b \left| 1 \right\rangle \right) + \left| \phi^{-} \right\rangle \left(a \left| 1 \right\rangle + b \left| 0 \right\rangle \right) + \left| \phi^{+} \right\rangle \left(a \left| 1 \right\rangle - b \left| 0 \right\rangle \right) \right]$$
(1.14)

Alice, em seguida, realiza uma medida na base de Bell em suas duas partículas. Pela equação 1.14 fica evidente que Alice poderá obter com a mesma probabilidade (1/4) um dos estados de Bell e que após a medição o estado irá colapsar de acordo com a tabela 1.1.

Medida de Alice	Estado colapsado
$ \psi^{-} angle$	$\left \psi^{-} ight angle \otimes -(a\left 0 ight angle +b\left 1 ight angle)$
$ \psi^+ angle$	$\left \psi^{+}\right\rangle\otimes-\left(a\left 0 ight angle-b\left 1 ight angle ight)$
$ \phi^{-} angle$	$\left \phi^{-} ight angle\otimes\left(a\left 1 ight angle+b\left 0 ight angle ight)$
$ \phi^+\rangle$	$ \phi^+\rangle \otimes (a 1\rangle - b 0\rangle)$

Tabela 1.1: Resultados possíveis da medição de Alice com seus respectivos estados colapsados.

Classicamente, quatro resultados possíveis de saída equivalem a dois bits de informação. Assim, Alice transmite para Bob esses dois bits (através do canal clássico). De posse desse resultado, Bob passa a conhecer o estado resultante de sua partícula e então, para finalizar, aplica a transformação unitária adequada (ver tabela 1.2) em seu estado e obtém o estado original de Alice (desprezando fases globais).

Medida de Alice	Bits	Transformação
$ \psi^{-} angle$	00	Ι
$ \psi^+ angle$	01	σ_z
$ \phi^{-} angle$	10	σ_x
$ \phi^+ angle$	11	$i\sigma_y$

Tabela 1.2: Transformações que Bob deve implementar em seu qubit dependendo dos bits recebidos.

Entretanto três pontos são fundamentais e devem ser salientados. Primeiro, a partícula 1 de Alice, no final do procedimento, está em um estado de máxima mistura e não mais no estado $|\psi_1\rangle$. Após a medida, as duas partículas de Alice colapsam em um dos estados de Bell, assim, a partícula 1 fica:

$$\rho_1 = Tr_2(\rho_{12}) = Tr_2(\rho_{Bell}) = \frac{1}{2} \left(|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1| \right)$$
(1.15)

Isso era esperado pois, caso a partícula de Alice permaneça no estado $|\psi_1\rangle$, o teletransporte funcionaria como uma máquina de clonagem de estados quânticos arbitrários, fato que é impossível pelas leis da mecânica quântica (Teorema da não-clonagem [71]).



Figura 1.1: a-)Alice faz uma medida de Bell em suas partículas; b-)Alice envia para Bob os dois bits de informação; c-)Recebendo a mensagem, Bob pode realizar a transformação certa e finalizar o protocolo.

O segundo ponto é que a transmissão *não* é instantânea, a velocidade com que a informação é transmitida é limitada superiormente pela velocidade da luz. O limite surge pela necessidade do canal clássico (telefone, fax, e-mail, carta, sinal de fumaça e tudo mais) para a realização do teletransporte. Embora o estado total colapse instantaneamente após a medição de Alice, sem que Bob conheça os dois bits resultantes, sua partícula fica em um estado de máxima mistura. Apenas depois de receber os bits clássicos Bob pode reproduzir o estado de Alice em seu laboratório.

O último ponto é que, o procedimento não funciona apenas para estados puros mas também é útil para teletransportar estados mistos e estados emaranhados.

Por exemplo, suponha que a partícula 1 de Alice esteja em um estado de singleto com uma outra partícula 4. Então, após o processo de teletransporte, as partículas 3 e 4 ficaram em um estado de singleto. Esse procedimento é também conhecido como *Entanglement Swapping* ou troca de emaranhamento [21,41].

1.4 Medidas de emaranhamento

Como já foi dito anteriormente, emaranhamento quântico desempenha um papel fundamental em vários tipos de processamento de informação quântica, daí a vital importância em determinar o grau de emaranhamento e quando o estado está maximamente emaranhado.

Para sistemas 2 x 2 (de 2 qubits), determinar se um estado é ou não inseparável e quantificar o grau de emaranhamento passou a ser um problema trivial [39, 40, 42, 44]. Já para sistemas d x d (bipartite com dimensão d > 2), apenas para estados puros o problema está bem estabelecido.

A situação é ainda mais complicada para sistemas multipartite. A principal diferença entre sistemas bi- e multipartite vem do fato que em sistemas bipartite não há diferença qualitativa entre as correlações quânticas, isto é, a partir de um estado maximamente emaranhado pode-se criar qualquer outro estado por *LOCC*. Desta forma, o emaranhamento em sistemas de duas partículas pode ser caracterizado em unidades de singleto (estado bipartite maximamente emaranhado).

Já para sistemas multipartite isso não é mais verdade [72], o que dificulta muito. Por exemplo, estados W e GHZ são tipos não equivalentes de estados emaranhados em sistemas tripartite [73], um não pode ser obtido a partir do outro apenas por *LOCC*. Mais do que quantificar o grau de emaranhamento também é necessário diferenciar o tipo de correlação que está sendo tratada.

Existem diversas formas de se quantificar o grau de emaranhamento de um estado quântico, dependendo da abordagem que se quer adotar. Nesse capítulo focaremos apenas sistemas bipartites, apresentando as condições básicas para qualquer boa medida de emaranhamento ³. Em seguida discutiremos as duas principais medidas de emaranhamento (o emaranhamento de formação e o de destilação) que possuem uma interpretação física relevante. Para finalizar, falaremos sobre algumas medidas de emaranhamento que possuem uma expressão fechada em função do estado quântico (que serão utilizadas mais a frente nessa dissertação de mestrado) e estão relacionadas com o emaranhamento de formação (no caso da *concurrence*) e com o emaranhamento de destilação (no caso da negatividade logarítmica).

1.4.1 Condições de medida

Para estados bipartites descritos por uma matriz densidade ρ qualquer boa medida de emaranhamento deve satisfazer as seguintes condições [45, 46, 74, 75]:

- (A) Não negativo: E(ρ) > 0; (B) Nulo para estados separáveis: E(ρ) = 0 se ρ for separável;
 (C) Normalização: E(ρ^{max}) = log₂d onde d é a dimensão do espaço de Hilbert do subsistema de menor dimensão e ρ^{max} é um estado maximamente emaranhado. Para sistemas 2 x 2, E(Estados de Bell)=1.
- 2. Operações unitárias locais não alteram o grau de emaranhamento: $E(\rho) = E(U_A \otimes U_B \rho U_A^+ \otimes U_B^+)$
- 3. Operações locais e comunicação clássica (*LOCC*) não pode aumentar a medida de emaranhamento, ou seja, monotonicidade por *LOCC*: (*A*) Se alguma operação é feita em qualquer um dos subsistemas resultando em um estado σ_i com probabilidade p_i , então:

$$E(\rho) \ge \sum_{i} p_i E(\sigma_i) \tag{1.16}$$

³Lembrando que existem muitas, por exemplo o emaranhamento de formação E_f e o emaranhamento de destilação E_D que discutiremos mais a frente e a entropia relativa de emaranhamento E_R [45,46]

(B) Convexidade ou monotocidade sob descarte de informação:

$$E(\sum_{i} p_{i}\rho_{i}) \leq \sum_{i} p_{i}E(\rho_{i})$$
(1.17)

4. Regime assintótico: (A) Aditividade parcial:

$$E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho) \tag{1.18}$$

(B) Continuidade: Se $\langle \psi^{\otimes n} | \rho_n | \psi^{\otimes n} \rangle \to 1$ quando $n \to \infty$, então:

$$\frac{1}{n} \left| E(\psi^{\otimes n}) - E(\rho_n) \right| \to 0 \tag{1.19}$$

onde ρ_n é um estado coletivo com n pares.

A condição 1 é praticamente óbvia, pois qualquer estado quântico separável é conhecido por não conter emaranhamento, já um estado inseparável (que pode ser destilado) deve conter um grau (*positivo*) de emaranhamento. É importante perceber que na condição 1.B fica claro que a separabilidade é uma condição necessária para emaranhamento nulo porém não suficiente, isso devido aos estados emaranhados com TPP que não podem ser destilados e possuem E_D nulo [43, 67, 76]). A normalização serve apenas para restringir o número de medidas possíveis, deixando-as em uma mesma escala (essa condição, embora esteja na lista, não é estritamente necessária).

A razão da condição 2 é que operações unitárias locais representam apenas uma mudança de base (fisicamente corresponde a evolução temporal dos subsistemas, sem perdas, ocorrendo separadamente) não alterando o grau de emaranhamento.

Já a condição 3 representa a lei fundamental em informação quântica, qualquer correlação que surgir do conjunto *LOCC* deve ser, por natureza, clássica e desta forma o grau de emaranhamento não deve aumentar. O único modo de aumentar o grau de emaranhamento é por interações globais (direta ou indiretamente).

As três primeiras condições são comumente aceitas. Medidas de emaranhamento que satisfazer essas condições tem sido chamadas de *emaranhamentos monôtonicos*. Já as condições do regime assintótico são necessárias no limite de um grande número de pares emaranhados preparados identicamente podendo ser descartadas se for considerado um número pequeno de pares.

1.4.2 Emaranhamento de Formação e de Destilação

As medidas que vamos descrever agora, talvez as mais importante, são o emaranhamento de formação e, relacionado a ele, o emaranhamento de destilação.

O emaranhamento de formação E_f [42] quantifica o recurso necessário para criar um certo estado quântico, ou seja, representa o número mínimo de estados maximamente emaranhados necessário para preparar o estado em questão usando apenas *LOCC*. Já o emaranhamento de destilação E_D [42,43] caracteriza a quantidade de emaranhamento como a fração de estados maximamente emaranhados que podem ser destilados usando um protocolo ótimo de purificação:

$$E_D(\rho) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n} \log_2 d \tag{1.20}$$

onde n é o número de cópias de ρ , m é o número de estados maximamente emaranhados que podem ser obtidos e d é a dimensão do espaço de Hilbert dos subsistemas. Por definição, E_D depende do protocolo ótimo de purificação utilizado para destilar o estado. Para sistemas diferentes existem protocolos ótimos distintos. Assim não existe uma expressão exata que forneça o valor de E_D de forma geral.

Assim o emaranhamento de formação E_f e o emaranhamento de destilação E_D constituem faces opostas da mesma moeda. Se com m cópias do estado maximamente emaranhado é possível (a partir de procedimentos locais) obter n cópias do estado ρ , então o custo para a formação do estado emaranhado ρ pode ser definido como a razão assintótica $(m/n)log_2d$. Da mesma forma, partindo de n cópias de ρ podemos obter m cópias do estado maximamente emaranhado a partir de um protocolo de purificação e definir o emaranhamento de destilação como a razão assintótica $(m/n)log_2d$.

Para um sistema bipartite d-dimensional, um estado puro qualquer pode ser representado na decomposição de Schmidt (ver apêndice C) por:

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i}^{d} c_{i} |\alpha_{i}\rangle \otimes |\beta_{i}\rangle$$
(1.21)

onde $|\alpha_i\rangle \in |\beta_i\rangle$ são os estados ortonormais dos subsistemas A e B, e os c_i 's são coeficientes reais e positivos.

Então o emaranhamento de formação desse estado, reprensentado pela matriz densidade ρ , pode ser definido como a entropia de Von Neumann de um dos subsistemas [77]:

$$E_f(\rho) = S(\rho_A) = -Tr(\rho_A \log_2 \rho_A) = -\sum_i c_i^2 \log_2 c_i^2$$
(1.22)

onde $\rho_A = Tr_B(\rho)$ e $\rho = |\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}|$ sendo a matriz densidade do sistema completo.

Já para estados mistos o problema fica mais complicado. Uma mistura de 50% de $|\psi^+\rangle$ e 50% de $|\psi^-\rangle$ representa um estado separável embora os estados sozinhos sejam maximamente emaranhados. Isso porque, na verdade, ele também pode ser entendido como uma mistura de 50% de $|00\rangle$ e 50% de $|11\rangle$, estados separáveis.

Assim, o emaranhamento de formação para um estado misto é o mínimo valor possível para a média do emaranhamento sobre todas as decomposições de ρ em estados puros:

$$E_f(\rho) = \min_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i E_f(|\psi_i\rangle)$$
(1.23)

onde $\rho = \sum_{i} p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|$. Nesta expressão o mínimo é tomado para desprezar as correlações clássicas presentes na mistura estatística. Sem a minimização, a quantidade E_f não distingue correlações clássicas de quânticas.

O problema variacional que define $E_f(\rho)$ é extremamente difícil de se calcular, entretanto já existe soluções fechadas para sistemas de 2 qubits [44](será visto mais a frente) e para alguns estados mistos simétricos [78] como estados isotrópicos [79] e estados de Werner [64].

Para estados puros, Popescu e Rohrlich [80], partindo de analogias com a termodinâmica, mostraram que a formação de emaranhamento e a destilação de emaranhamento coincidem. O processo de formação do estado emaranhamento é reversível, desta forma todo o recurso ou emaranhamento utilizado para formar um estado ρ pode ser, em um processo reverso, destilado totalmente.

No entanto, para misturas estatísticas o emaranhamento necessário para construir um estado misto particular não pode mais ser destilado por completo, assim o emaranhamento de destilação é geralmente menor que a formação de emaranhamento [75]. Isso decorre do fato que a formação do estado emaranhado não é mais um processo revesível.

Estados cuja matriz densidade possui transposta parcial positiva não têm destilação de emaranhamento [76,81]. Para sistemas de dimensões 2 x 2 e 2 x 3, todos os estados emaranhados têm uma transposta parcial não positiva [40] tendo uma destilação de emaranhamento não nula. Para um sistema de dimensão maior, existem estados emaranhados que possuem transposta parcial positiva e, embora estes estados possuam uma formação de emaranhamento não nulo eles não têm destilação de emaranhamento ($E_D = 0 < E_f$). Este tipo de emaranhamento, a partir do qual nenhum emaranhamento pode ser destilado, é chamado de emaranhamento ligado ⁴ [67, 76].

A destilação de estados emaranhados pode desempenhar um papel análogo a correção de erros em teoria de informação. Por esse motivo existe uma grande procura por protocolos ótimos de purificação (que mudam dependendo do sistema) para assim aumentar a eficiência no processamento de informação quântica.

1.4.3 Concurrence

Quando ρ descreve um sistema em um estado misto, encontrar sua decomposição em estados puros que minimiza a expressão 1.23 não é um trabalho fácil. Entretanto, para um sistema de 2 qubits é possível expressar o emaranhamento de formação na forma [42]:

$$E_{f}(\rho) = H\left(\frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 - C(\rho)^{2}}\right]\right)$$
(1.24)

onde H(x) é a função de entropia binária:

$$H(x) = -x\log_2(x) - (1-x)\log_2(1-x)$$
(1.25)

Wootters [44] definiu a quantidade C (chamada de *concurrence*⁵) usando a matriz de Pauli σ_y como um operador de spin flip. Para sistemas 2 x 2, $\sigma_y \otimes \sigma_y$ transforma estados maximamente emaranhados

⁴Do inglês bound entanglement

⁵Palavra em inglês

(estados de Bell) neles mesmos a menos de uma fase global. Assim, a *concurrence* para um estado puro $|\psi\rangle$ fica:

$$C(|\psi\rangle) = |\langle\psi|\,\sigma_y \otimes \sigma_y\,|\psi^*\rangle| \tag{1.26}$$

onde $|\psi^*\rangle$ é o complexo conjugado de $|\psi\rangle$.

Um estado puro geral de dois qubits na forma de Schmidt (ver apêndice C) fica:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{2} k_i |ii\rangle \tag{1.27}$$

onde k_1 e k_2 são os coeficientes de Schmidt (reais) com a condição $k_1^2 + k_2^2 = 1$.

Aplicando o operador de spin flip no estado $|\psi\rangle$, lembrando que k_1 e k_2 são reais:

$$\left| \widetilde{\psi} \right\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y \left| \psi^* \right\rangle = -k_2 \left| 11 \right\rangle - k_1 \left| 22 \right\rangle$$
 (1.28)

Então a concurrence para um estado puro de dois qubits é:

$$C\left(|\psi\rangle\right) = 2k_1k_2\tag{1.29}$$

Analogamente ao emaranhamento de formação, a *concurrence* para estados mistos também pode ser definida pelo seguinte método variacional:

$$C(\rho) = \min_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i C(|\psi_i\rangle)$$
(1.30)

Entretanto, para um estado de dois qubits (puro ou misto), Wootters provou que a *concurrence* pode ser definida como [44]:

$$C(\rho) = max \left\{ 0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4} \right\}$$
(1.31)

onde os λ 's são os autovalores da matriz $\rho(\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ na ordem decrescente.

O emaranhamento de formação e a *concurrence* são medidas equivalentes de emaranhamento. A quantidade $C(\rho)$ varia entre 0 e 1, é monotonicamente relaciona com E_f e não aumenta sob operações locais (emaranhamento monotônico), representando uma boa e facilmente computável⁶ medida de emaranhamento que soluciona completamente o problema para estados de sistemas 2 x 2.

1.4.4 Negatividade e Negatividade Logarítmica

As últimas medidas que iremos considerar são a negatividade e a negatividade logarítmica. O conceito de negatividade de um estado bipartite está relacionado ao critério de separabilidade de Peres-Horodecki ou TPP [39, 40]. A medida essencialmente quantifica o grau que ρ^{T_A} viola o critério de separabilidade TPP.

⁶Por causa da grande facilidade em calcular a *concurrence* surgiram diversas tentativas de generalização da mesma para sistemas compostos com dimensão superior [82].

Ela é baseada na norma do traço da matriz transposta parcial do estado. A norma do traço de qualquer operador hermitiano é definida como $||A||_1 = tr\sqrt{A^{\dagger}A}$. Para matrizes densidades de estados (puros ou mistos), todos os autovalores são positivos e então $||\rho||_1 = tr\rho = 1$.

Porém a matriz transposta parcial ρ^{T_A} pode apresentar autovalores negativos e a norma do traço fica:

$$\left|\rho^{T_A}\right\|_1 = 1 + \left|\sum_i \mu_i\right| \tag{1.32}$$

onde $|\sum_{i} \mu_{i}|$ é a valor absoluto da soma dos autovalores negativos de $\rho^{T_{A}}$.

Vidal e Werner [47] definiram a negatividade de um estado bipartite ρ como a soma absoluta dos autovalores negativos de ρ^{T_A} , ou seja, $(\|\rho^{T_A}\|_1 - 1)/2$. Eles provaram que a negatividade, assim definida, é uma medida monotônica sendo portanto uma boa medida de emaranhamento.

Caso ρ seja um estado separável (ou seja não emaranhado) então ρ^{T_A} ainda representa uma matriz densidade de estados sendo um operador com apenas autovalores positivos. Desta forma $\|\rho^{T_A}\|_1 = 1$ e a negatividade se anula.

Entretanto, para estados puros maximamente emaranhados essa quantidade tem valor menor que um, isto é, não está normalizada.

Para que a negatividade tenha valor um para estados maximamente emaranhados em um sistema d x d' $(d \le d')$ ela deve ser definida como [48]:

$$N(\rho) = \frac{\|\rho^{T_A}\|_1 - 1}{d - 1} = \frac{2}{d - 1} \left| \sum_i \mu_i \right|$$
(1.33)

Embora todo estado separável seja TPP e portanto tenha negatividade nula, existem estados TPP que são inseparáveis [67] (exceto em sistemas $2 \ge 2 \ge 3$). Desta forma a medida não pode distinguir estados com emaranhamento ligado [67] dos estados separáveis.

Outra medida baseada na norma do traço da matriz ρ^{T_A} é a negatividade logarítmica:

$$E_N(\rho) = \log_2 \left\| \rho^{T_A} \right\| \tag{1.34}$$

que novamete exibe alguma forma de monotocidade sob *LOCC* (não aumenta durante procedimentos locais determinísticos) e é, por construção, aditiva.

Embora E_N seja continua, ela não é assintoticamente continua e desta forma não corresponde a entropia de emaranhamento para todos os estados puros.

A maior vantagem prática da negatividade logarítmica é que ela pode ser calculada facilmente. Além disso, ela representa um limite superior para o emaranhamento de destilação de estados mistos inseparáveis [47].

A negatividade e a negatividade logarítmica, embora originalmente construida para sistemas bipartites, também podem ser úteis para sistemas multipartites. Uma possível forma de classificar as propriedades de emaranhamento de estados quânticos em sistemas multipartites é analisar diferentes divisões em sistemas bipartites. Considere, por exemplo, um sistema quântico tripartite (A, B e C), se dividirmos o sistema em AB e C e computarmos os autovalores negativos de $\rho_{ABC}^{T_C}$ obteremos $N_{(AB)-C}(\rho_{ABC})$. Essa medida é automaticamente monotônica e quantifica as correlações quânticas existentes entre os subsistemas AB e C. Similarmente, $N_{A-(BC)}(\rho_{ABC})$ e $N_{(AC)-B}(\rho_{ABC})$ são duas outras medidas monotônicas sob *LOCC* com significado análogo. Da mesma forma ocorre com a negatividade logarítmica.

Podemos também analisar o emaranhamento de apenas dois dos subsistemas traçando o terceiro. Por exemplo, desconsiderando o subsistema C temos $\sigma_{AB} \equiv Tr_C(\rho_{ABC})$ e então, calculando os autovalores negativos de σ_{AB} , $N_{A-B;C}(\rho_{ABC})$ determina o emaranhamento que restou.

É importante salientar que desse modo é possível apenas quantificar alguns aspectos do emaranhameto multipartite. Existem estados tripartites que são separáveis com respeito a qualquer divisão de subsistemas [73] mas que são originalmente inseparáveis.

2 Interação da radiação com a matéria

Na primeira parte dessa dissertação nos dedicamos totalmente ao emaranhamento quântico, entretanto, vimos apenas o formalismo matemático do emaranhamento tratando do fenômeno sem nos concentrar em um sistema físico específico. Nessa segunda parte, apresentaremos o sistema átomocampo em uma cavidade quântica.

Cavidades quânticas $(cQED)^1$ possibilitam um forte acoplamento de um átomo com apenas alguns modos do campo. Experimentalmente, isto é possível colocando um átomo em uma cavidade com um alto fator de qualidade Q^2 , assim os fótons no interior da cavidade podem interagir muitas vezes com o átomo antes de escapar.

Para o caso de um átomo de dois níveis com um campo quantizado a interação átomo-campo é explicada pelo modelo de Jaynes-Cummings (MJC) [49,83,84]³. A Hamiltoniana obtida no MJC é, sem dúvida, a mais interessante em óptica quântica por três motivos fundamentais [83]: ela pode ser resolvida exatamente para constantes de acoplamento átomo campo arbitrárias, exibe alguns efeitos puramente quânticos como colapsos seguidos de "revivals" na inversão atômica e fornece uma simples ilustração da emissão espontânea⁴ explicando os efeitos de vários tipos de estatísticas quânticas do campo em muitos sistemas complexos tais como um micromaser e um laser.

Nesse capítulo apresentaremos inicialmente a quantização do campo eletromagnético [83,84] fazendo uma analogia ao oscilador harmônico quântico, falaremos da aproximação para o átomo de dois níveis e, então, descreveremos o modelo de Jaynes-Cummings que trata da interação de um campo quantizado com um átomo de dois níveis. Por fim, discutiremos uma das formas de resolver a dinâmica do sistema e realçaremos o emaranhamento quântico que surge de tal interação átomo-campo em uma cavidade.

2.1 Quantização do Campo Eletromagnético

Apesar dos campos $\vec{E} \in \vec{B}$ serem tratados como quantidades algébricas na teoria clássica e como operadores na teoria quântica, ambas as teorias são baseadas nas equações de Maxwell, as quais, no vácuo (isto é, na ausência de carga e corrente), são (em unidades mks):

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.2}$$

¹Cavity Quantum eletrodynamics

² Q é definido como $Q = \omega/\kappa$ onde ω é a freqüência do modo da cavidade e κ é o inverso do tempo de vida do campo. ³Aqui, iremos abordar o caso de um campo mono-modo ressonante

 $^{^{4}}$ A emissão espontânea ocorre devido a interação do átomo com os modos do universo no estado de vácuo.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
(2.3)

$$\nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{2.4}$$

onde $\epsilon_0 \in \mu_0$ são respectivamente a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo.

É possível, ainda, escrever os campos \vec{E} e \vec{B} em função dos potenciais vetorial \vec{A} e escalar ϕ da seguinte forma,

$$\vec{E} = -\nabla\phi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A};$$
(2.5)

assim, conhecendo $\vec{A} e \phi$ podemos determinar os campos $\vec{E} e \vec{B}$. No entanto, existe mais de um potencial vetor $\vec{A} e$ escalar ϕ que geram os mesmos campos elétrico e magnético. Tal grau de liberdade é chamado de calibre ou *gauge* e pode ser expressado da seguinte forma,

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial \Xi}{\partial t}; \qquad \qquad \vec{A} \to \vec{A'} = \vec{A} + \nabla \Xi$$
(2.6)

onde Ξ é uma função arbitrária dependente de \vec{r} e t. Uma escolha de calibre corresponde a especificar a função Ξ . Dizemos, assim, que os campos $\vec{E} \in \vec{B}$ são invariantes por uma escolha de calibre (gauge).

É conveniente para a quantização do campo escolher o chamado gauge de Coulomb (para simplificar) dado por:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \tag{2.7}$$

Assim, na ausência de cargas, temos para o potencial vetor,

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \tag{2.8}$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo $(c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0})$.

Esta equação de onda pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis de forma que, para um campo confinado em uma região do espaço de volume $V = L^3$, a solução geral da equação 2.8 pode ser escrita como uma expansão de Fourier [84]⁵,

$$\vec{A}\left(\vec{r},t\right) = \sum_{\vec{k}} i \left[\vec{A}_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \vec{A}_{\vec{k}}^* e^{i\omega_k t - i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right]$$
(2.9)

onde $\omega_k = c \left| \vec{k} \right|$ e a soma é sobre todos os valores discretos possíveis devido as condições de contorno impostas pelos limites da cavidade.

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{2\pi n_x}{L}, \quad n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ k_y &= \frac{2\pi n_y}{L}, \quad n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ k_z &= \frac{2\pi n_z}{L}, \quad n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

⁵A escolha dessa solução geral com essa fase particular é para simplificar o campo elétrico mais à frente

e o gauge de Coulomb é satisfeito com $\vec{k} \cdot \vec{A}_{\vec{k}} = 0$, ou seja, a direção de propagação é perpendicular as componentes de Fourier.

Pelas equações 2.5 obtemos também as seguintes expressões para os campos $\vec{E} \in \vec{B}$ com modo k;

$$\vec{E}_{\vec{k}}\left(\vec{r},t\right) = \omega_{k} \left(\vec{A}_{\vec{k}}e^{-i\omega_{k}t+i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \vec{A}_{\vec{k}}^{*}e^{i\omega_{k}t-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)$$
$$\vec{B}_{\vec{k}}\left(\vec{r},t\right) = i \left[\nabla \times \vec{A}_{\vec{k}}e^{-i\omega_{k}t+i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \nabla \times \vec{A}_{\vec{k}}^{*}e^{i\omega_{k}t-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right]$$
(2.10)

Do eletromagnetismo temos que a energia média associada ao campo eletromagnético de modo k, no interior de uma cavidade de volume V, é:

$$U_{k} = \frac{1}{2} \int_{V} d^{3}r \left(\epsilon_{0} \vec{E}_{\vec{k}}^{2}(\vec{r},t) + \frac{1}{\mu_{0}} \vec{B}_{\vec{k}}^{2}(\vec{r},t) \right)$$
(2.11)

Substituindo as equações 2.10 na expressão anterior temos,

$$U_k = 2\epsilon_0 V \omega_k \vec{A}_{\vec{k}} \cdot \vec{A}_{\vec{k}}^* \tag{2.12}$$

O potencial vetor $\vec{A}_{\vec{k}}$ (e seu conjugado) pode ser escrito em termos de uma coordenada generalizada Q_k e de seu momento conjugado P_k , através das trasformações⁶:

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{1}{4\epsilon_0 V \omega_k^2}} \left(\omega_k Q_k + iP_k\right) \vec{e}_{\vec{k}}$$
$$\vec{A}_{\vec{k}}^* = \sqrt{\frac{1}{4\epsilon_0 V \omega_k^2}} \left(\omega_k Q_k - iP_k\right) \vec{e}_{\vec{k}}$$
(2.13)

notando que a propriedade vetorial de $\vec{A}_{\vec{k}}$ foi para o vetor de polarização unitário $\vec{e}_{\vec{k}}$ (e real).

Com essas transformações temos, para a energia média associada ao campo eletromagnético de modo k em um volume V,

$$U_k = \frac{1}{2} \left(P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2 \right)$$
 (2.14)

Note que a expressão anterior é semelhante a Hamiltoniana de um oscilador harmônico clássico com massa unitária. Cada modo k do campo pode ser, então, quantizado pela associação com um oscilador harmônico quântico. Trocando-se as variáveis clássicas Q_k e P_k pelas operadores quânticos $\hat{X} \in \hat{P}^7$, cada modo do campo é quantizado identificando os $A_{\vec{k}} \in A^*_{\vec{k}}$ com os operadores de campo $\hat{a}_k \in \hat{a}^{\dagger}_k$,

$$\vec{A}_{\vec{k}} \to \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \hat{a}_k \vec{e}_{\vec{k}}$$
$$\vec{A}_{\vec{k}}^* \to \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \hat{a}_k^{\dagger} \vec{e}_{\vec{k}}$$
(2.15)

 $^{^6\}mathrm{Essa}$ é a sacada!!!!

 $^{{}^{7}\{}Q_k, P_k\} \to \left[\hat{X}, \hat{P}\right]/i\hbar$

Assim, $\hat{a}_k \in \hat{a}_k^{\dagger}$, respectivamente, aniquilam e criam um fóton⁸ de modo k na cavidade e o número de fotons na cavidade associados a este modo é determinado pelo autovalor do operador de número $\hat{n}_k = \hat{a}_k^{\dagger} \hat{a}_k$. Desta forma, o Hamiltoniano do campo eletromagnético quantizado (modo k) é, substituindo a equação 2.15 na expressão 2.12 e desprezando o termo constante,

$$H_C^{(k)} = \hbar \omega_k \hat{n}_k \tag{2.16}$$

e o Hamiltoniano do campo eletromagnético total é a soma de todos os modos possíveis na cavidade.

Já o campo \vec{E} (que iremos utilizar mais a frente) assume a seguinte forma, na representação de Schrödinger⁹,

$$\vec{E} = \sum_{k} E_k \vec{e}_k \left[\hat{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right]$$
(2.17)

onde,

$$E_k = \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}}.$$
(2.18)

2.2 Aproximação para o átomo de dois níveis

Na seção anterior vimos como quantizar o campo eletromagnético em uma analogia com o oscilador harmônico quântico, associando os operadores $\hat{a}_k \in \hat{a}_k^{\dagger}$ com a aniquilação e criação de um fóton de modo k. Agora vamos nos voltar para o átomo e seus níveis de energia¹⁰ para depois investigar como átomos e fótons interagem em uma cavidade.

A Hamiltoniana que descreve um átomo é, de maneira geral,

$$H_A = \sum_{i} E_i \left| i \right\rangle \left\langle i \right| \tag{2.19}$$

onde E_i é a energia associada ao autoestado $|i\rangle$

O átomo possui muitos níveis de energia, ou seja um elétron pode ocupar diversos estados quânticos (lembrando que elétrons são férmions e dois deles não podem ocupar o mesmo estado quântico), porém o modo da cavidade e as regras de seleção possibilitam uma transição específica e considera-se que o átomo tenha apenas dois níveis $(|g\rangle, |e\rangle)$.

Um átomo de dois níveis é formalmente análogo a um sistema de spin-1/2, com apenas dois estados acessíveis. Vamos, então, apresentar a notação das matrizes de Pauli aplicada para um sistema de spin-1/2 (operadores de spin):

 $^{^{8}\}mathrm{O}~quantum$ de energia do campo

⁹Isto é, a dependência temporal fica com os estados.

¹⁰A estrutura eletrônica de um átomo é extremamente complicada, um elétron ligado a um átomo se comporta como uma partícula em uma caixa tri-dimensional sob a influência de um potencial Coulombiano atrativo (devido as cargas positovas no núcleo) e outros termos como o acoplamento elétron-elétron e correções relativísticas. Aqui, faremos uma abordagem mais direta assumindo que os níveis de energia são conhecidos.



Figura 2.1: Estrutura eletrônica de um átomo (considerado de dois níveis $|e\rangle \in |g\rangle$) e um campo eletromagnético quantizado (fóton).

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$
$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos, então, que os dois níveis atômicos formem uma base no espaço de Hilbert,

$$|e\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix}; |g\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix}$$
 (2.20)

que satisfazem a relação de ortogonalidade,

$$\langle i|j \rangle = \delta_{i,j} \quad (i,j=g,e)$$

$$(2.21)$$

e a relação de completeza,

$$\sum_{i=g}^{e} |i\rangle \langle i| = |g\rangle \langle g| + |e\rangle \langle e| = \sigma_{gg} + \sigma_{ee} = I$$
(2.22)

onde I é a matriz identidade 2 x 2.

Assim verifica-se que,

$$\sigma_{x} = |e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e|; \quad \sigma_{y} = -i |e\rangle \langle g| + i |g\rangle \langle e|; \quad \sigma_{z} = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|;$$

$$\sigma_{+} = \sigma_{eg} = |e\rangle \langle g|; \quad \sigma_{-} = \sigma_{ge} = |g\rangle \langle e|.$$

O operador σ_{-} aplicado a um átomo no estado excitado leva o mesmo para o estado fundamental e σ_{+} aplicado no estado fundamental leva o átomo para o estado excitado.

$$\sigma_{-} |e\rangle = |g\rangle$$

$$\sigma_{+} |g\rangle = |e\rangle$$
(2.23)

estes operadores são chamados de operadores de abaixamento e levantamento, respectivamente.

Assim, a Hamiltoniana do átomo pode ser reescrito como, em termos dos operadores de spin:

$$H_A = E_e \sigma_{ee} + E_g \sigma_{gg} = \frac{1}{2} \hbar \omega_a \left(\sigma_{ee} - \sigma_{gg} \right) + \frac{1}{2} \left(E_e + E_g \right)$$
(2.24)

onde $\hbar\omega_a = E_e - E_g \operatorname{com} \omega_a$ sendo a frequência de transição atômica, e utilizamos da identidade 2.22. Para efeito dinâmico, o termo constante pode ser desconsiderando ficando no final com,

, **1** ,

$$H_A = \frac{1}{2}\hbar\omega_a \sigma_z. \tag{2.25}$$

2.3 O Modelo de Jaynes-Cummings

Agora apresentaremos a interação de um campo eletromagnético mono-modo quantizado com um átomo de dois níveis (MJC).

A principal interação envolvida em uma cavidade quântico, devido ao fato de que o comprimento de onda do campo (de microondas ou óptico) é muito maior que a dimensão linear do átomo $(\vec{k} \cdot \vec{r} \ll 1)$, é a interação de dipolo (aproximação de dipolo). Assim as outras interações (quadrupolo elétrico ou dipolo magnético entre outras) podem ser desprezadas e a Hamiltoniana que descreve um sistema de um átomo de dois níveis interagindo com um campo quantizado mono-modo em uma cavidade fica,

$$H = H_A + H_C - e\vec{r} \cdot \vec{E} \tag{2.26}$$

Aqui, $H_A \in H_C$ são respectivamente a Hamiltoniana do átomo de dois níveis e do campo quantizado (que vimos anteriormente), \vec{r} é o vetor posição do elétron e \vec{E} é o campo elétrico quantizado da cavidade.

Podemos expressar $e\vec{r}$ em termos dos operadores de transição atômica $\sigma_{eg} \in \sigma_{ge}$, usando a completeza 2.22:

$$e\vec{r} = e\sum_{i=g}^{e} |i\rangle \langle i| \vec{r} \sum_{j=g}^{e} |j\rangle \langle j| = \sum_{i,j=g}^{e} \vec{\wp}_{i,j} \sigma_{ij}$$
(2.27)

onde $\vec{\varphi}_{i,j} = e \langle i | \vec{r} | j \rangle$ é o elemento de matriz de transição de dipolo elétrico considerado real (para simplificar) e $\vec{\varphi}_{i,i} = 0$.

Da quantização do campo elétrico (eq.2.17) temos, assumindo o átomo em $\vec{r} = 0$ na representação de Schrödinger,

$$\vec{E} = E_0 \vec{e} \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger \right) \tag{2.28}$$

onde $E_0 = (\hbar \omega / 2\epsilon_0 V)$ é a amplitude do campo de freqüência ω e com V sendo o volume da cavidade.

Substituindo as equações 2.16, 2.25, 2.27 e 2.28 na equação 2.26 temos,

$$H = \hbar \omega \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \frac{\hbar \omega_a}{2} \sigma_z + \hbar \sum_{i,j=g}^e g_{ij} \sigma_{ij} \left(\hat{a} + \hat{a}^{\dagger} \right)$$
(2.29)

onde

$$g_{ij} = -\frac{\vec{\wp}_{ij} \cdot E_0 \vec{e}}{\hbar} \tag{2.30}$$

Fazendo $\vec{\wp_{eg}} = \vec{\wp_{ge}}$ temos $g = g_{eg} = g_{ge}$ e então a Hamiltoniana (eq.2.29) fica da seguinte forma:

$$H = \hbar \omega \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \frac{\hbar \omega_a}{2} \sigma_z + \hbar g \left(\sigma_- + \sigma_+ \right) \left(\hat{a} + \hat{a}^{\dagger} \right)$$
(2.31)

O terceiro termo da equação 2.31, correspondente a energia de interação, é dividido em quatro partes. O termo $\hat{a}\sigma_+$ descreve o processo no qual o átomo, inicialmente no estado fundamental $|g\rangle$, sofre uma transição para o estado excitado $|e\rangle$ e um fotón é aniquilado (absorvido), o termo $\hat{a}^{\dagger}\sigma_{-}$ descreve o processo oposto. Eles são chamados de termos girantes. Já os outros dois, $\hat{a}^{\dagger}\sigma_{+}$ e $\hat{a}^{-}\sigma_{-}$ são chamados de termos contra-girantes. Para entender essa denominação considere a evolução livre (g = 0) desses operadores na representação de Heisenberg [85]:

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0) e^{-i\omega t}$$

$$\hat{a}^{\dagger}(t) = \hat{a}^{\dagger}(0) e^{i\omega t}$$

$$\sigma_{\pm}(t) = \sigma_{\pm}(0) e^{\pm i\omega_{a}t}$$
(2.32)

Assim os termos girantes e contra-girantes ficam:

$$\hat{a}^{\dagger}(t) \sigma_{-}(t) = \hat{a}^{\dagger}(0) \sigma_{-}(0) e^{i(\omega - \omega_{a})t}
\hat{a}(t) \sigma_{+}(t) = \hat{a}(0) \sigma_{+}(0) e^{-i(\omega - \omega_{a})t}
\hat{a}(t) \sigma_{-}(t) = \hat{a}(0) \sigma_{-}(0) e^{-i(\omega + \omega_{a})t}
\hat{a}^{\dagger}(t) \sigma_{+}(t) = \hat{a}^{\dagger}(0) \sigma_{+}(0) e^{i(\omega + \omega_{a})t}$$
(2.33)

Os termos girantes oscilam suavemente perto da ressonância (com freqüência $\omega - \omega_a \approx 0$) já os termos contra-girantes oscilam rapidamente ($\omega + \omega_a \neq 0$). Assim, podemos esperar que os efeitos dos termos contra-girantes, em média, interfiram destrutivamente, não contribuindo significativamente na evolução do sistema.

Desta forma, desprezando os termos contra-girantes(aproximação de onda girante) a Hamiltoniana fica:

$$H = \hbar \omega \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + \hbar g \left(\hat{a} \sigma_+ + \hat{a}^{\dagger} \sigma_- \right)$$
(2.34)

A Hamiltoniana dada na equação 2.34 descreve a interação de um único átomo de dois níveis com um campo mono-modo quantizado na aproximação de dipolo e de ondas girantes e é conhecida como a Hamiltoniana de Jaynes-Cummings.
2.3.1 Solução do Modelo de Jaynes-Cummings

O modelo de Jaynes-Cummings representa um dos poucos modelos na física que podem ser resolvidos exatamente. O que é mais interessante é que o MJC é extremamente simples, embora nos forneça uma variedade de resultados sobre o sistema, e pode ser verificado experimentalmente com cavidades de alto fator de qualidade Q.

Existem pelo menos três formas distintas de resolver o MJC mas que obviamente chega no mesmo resultado [83]: *amplitude de probabilidade, operadores de Heisenberg* e *operador evolução temporal*. Aqui, resolveremos o modelo pelo método do *operador evolução temporal*.

Uma forma mais prática de determinar a evolução temporal do sistema consiste em passar toda a dependência temporal do estado na energia de interação (representação de interação). Para isso vamos dividir a Hamiltoniana (eq.2.34) em duas partes:

$$H = H_0 + H_1 \tag{2.35}$$

onde H_0 corresponde aos termos do átomo e campo livre:

$$H_0 = \hbar \omega \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z \tag{2.36}$$

e H_1 é o termo de interação:

$$H_1 = \hbar g \left(\hat{a} \sigma_+ + \hat{a}^{\dagger} \sigma_- \right) \tag{2.37}$$

Na representação de interação definimos um novo estado $\left|\tilde{\psi}\left(t\right)\right\rangle$ tal que,

$$\left|\tilde{\psi}\left(t\right)\right\rangle = e^{\frac{iH_{0}t}{\hbar}}\left|\psi\left(t\right)\right\rangle \tag{2.38}$$

onde $|\psi(t)\rangle$ é o estado do sistema em um tempo t na representação de Schrödinger e dizemos que $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ é o estado do sistema na representação de interação.

Então, a equação de Schrödinger fica:

$$i\hbar \frac{d\left|\tilde{\psi}(t)\right\rangle}{dt} = \tilde{H}\left|\tilde{\psi}(t)\right\rangle \tag{2.39}$$

onde temos:

$$\tilde{H} = e^{\frac{iH_0t}{\hbar}} H_1 e^{\frac{-iH_0t}{\hbar}} = \hbar g \left(\hat{a}\sigma_+ e^{-i\delta t} + \hat{a}^{\dagger}\sigma_- e^{+i\delta t} \right)$$
(2.40)

sendo $\delta = \omega - \omega_a$.

Para retornar à representação de Schrödinger basta aplicar a transformação inversa:

$$\left|\psi\left(t\right)\right\rangle = e^{\frac{-iH_{0}t}{\hbar}}\left|\tilde{\psi}\left(t\right)\right\rangle \tag{2.41}$$

A evolução temporal do sistema pode então ser resolvida definindo o operador evolução temporal de forma que,

$$\left|\tilde{\psi}\left(t\right)\right\rangle = U\left(t\right)\left|\tilde{\psi}\left(0\right)\right\rangle$$
(2.42)

Substituindo a expressão anterior na equação 2.39, temos para o operador,

$$i\hbar \frac{d}{dt}U(t) = \tilde{H}U(t)$$
(2.43)

No caso ressonante ($\delta = 0$), a Hamiltoniana na representação de interação independe do tempo e a equação anterior é facilmente resolvida,

$$U(t) = e^{\frac{-i\tilde{H}t}{\hbar}} \tag{2.44}$$

Expandindo a exponencial em série de Taylor podemos obter, por indução,

$$U(t) = \cos(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^{\dagger}}) |e\rangle \langle e| + \cos(gt\sqrt{\hat{a}^{\dagger}\hat{a}}) |g\rangle \langle g|$$

$$-i\frac{\sin(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^{\dagger}})}{\sqrt{\hat{a}\hat{a}^{\dagger}}} \hat{a} |e\rangle \langle g| - i\hat{a}^{\dagger} \frac{\sin(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^{\dagger}})}{\sqrt{\hat{a}\hat{a}^{\dagger}}} |g\rangle \langle e|$$
(2.45)

e, dado um estado inicial, a evolução do sistema é determinada.

Por exemplo, se o átomo está inicialmente no estado excitado $|e\rangle$ e o campo em uma superposição de estados de número, isto é,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n} c_n |e, n\rangle$$
(2.46)

onde c_n é a distribuição de probabilidade. O estado do sistema em um tempo t na representação de Schrödinger é, usando o operador evolução temporal:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n} c_n(0) e^{-i\omega(n+1/2)t} \left[\cos\left(g\sqrt{n+1} t\right) |e,n\rangle - isen\left(g\sqrt{n+1} t\right) |g,n+1\rangle \right]$$
(2.47)

Esta equação nos dá uma descrição completa do problema. Todas as quantidades físicas relevantes relacionadas ao campo e ao átomo em qualquer t podem ser obtidas da mesma.

Por exemplo, a probabilidade, em um tempo t, do campo ter n fótons é:

$$\mathbf{P}_{n}(t) = |\langle e, n | \psi(t) \rangle|^{2} + |\langle g, n | \psi(t) \rangle|^{2} = |c_{n}(0)|^{2} \cos^{2} \left(g\sqrt{n+1}t\right) + |c_{n-1}(0)|^{2} \sin^{2} \left(g\sqrt{n}t\right)$$
(2.48)

Outra importante quantidade que pode ser obtida é a inversão atômica W(t) definida pela probabilidade de encontrarmos o átomo no estado excitado menos a probabilidade dele estar no estado fundamental, isto é:

$$\mathbf{W}(t) = \langle \psi(t) | \sigma_z | \psi(t) \rangle = \sum_n |c_n(0)|^2 \cos\left(2g\sqrt{n+1}t\right)$$
(2.49)

Observe que são os coeficientes $|c_n(0)|^2$ (distribuição de fótons inicial do campo) que determinam as características da inversão atômica.

Para o campo inicialmente em um estado $|m\rangle$, $c_n(0) = \delta_{nm}$ e a inversão atômica é periódica com frequência $2g\sqrt{m+1}$. Para esse caso, o resultado é o mesmo obtido em uma teoria semi-clássica com o campo não quantizado.

Entretanto, se m = 0 o resultado não é mais o mesmo. Classicamente, na ausência do campo não ocorre a transição do átomo do estado excitado para o estado fundamental, apenas com campo esta é possível e recebe o nome de *emissão estimulada*. Agora, quânticamente, mesmo sem o campo (vácuo) o átomo pode realizar essa transição de estado o que é chamado de *emissão espontânea*.

Agora, se considerarmos que o campo, em t = 0, se encontra em um estado de superposição de estados de número $|n\rangle$, passamos a observar o fenômeno de colapso e *revival* na inversão atômica. Na teoria semi-clássica o fenômeno de colapso também ocorre porém o ressurgimento ou *revival* é um fenômeno puramente quântico devido à quantização do campo.

O fenômeno de colapso e *revival* pode ser entendido pela equação 2.49 observando que cada termo da somatória oscila com uma frequência diferente (que depende de n). Assim, com o passar do tempo, esses termos se interferem de forma completamente destrutiva ocorrendo o colapso. Como o tempo continua a correr, em um dado momento esses termos voltam o se interferir construtivamente tendo o *revival*.

2.4 Emaranhamento no MJC

Emaranhamento é a propriedade de sistemas quânticos compostos exibir correlações não clássicas. A lei fundamental da teoria de emaranhamento diz que o emaranhamento surge da interação entre os subsistemas que então passam a ser inseparáveis, ou seja, não podem mais ser descritos separadamente.

Em uma cavidade de boa qualidade, átomo e campo interagem fortemente e, então, a dinâmica faz o sistema evoluir para um estado inseparável. Existem diversas maneiras de gerar e manipular estados emaranhados em uma cavidade que incluem desde dois átomos passando sucessivamente [6–8] por uma cavidade ressonante a um conjunto de átomos em uma cavidade no limite dispersivo¹¹ [10, 11, 86].

Considere, por exemplo, um átomo de dois níveis e uma cavidade com um campo ressonante com a transição g - e. Quando o átomo está no interior da cavidade, a interação do sistema átomo-campo será descrito pelo modelo de Jaynes-Cummings, como vimos anteriormente.

Para o átomo inicialmente no estado excitado e o campo da cavidade no estado no vácuo, o estado do sistema composto em t = 0 é dado por:

$$|\psi\left(0\right)\rangle = |e_1\rangle \otimes |0\rangle \tag{2.50}$$

Assim, passando o átomo através da cavidade, o operador evolução temporal do MJC (eq.2.45) leva

¹¹Isto é, fora de ressonância. Nesse caso não há troca real de energia entre os subsistemas átomo e campo e uma abordagem de Hamiltonianas efetivas é usualmente considerada [87, 88].

o sistema para o seguinte estado, após um tempo de interação t_1 ,

$$\left|\tilde{\psi}(t_{1})\right\rangle = U(t_{1})\left|e_{1},0\right\rangle = \cos\left(gt_{1}\right)\left|e_{1},0\right\rangle - isen\left(gt_{1}\right)\left|g_{1},1\right\rangle$$
(2.51)

Considerando que o tempo que o átomo gaste para atravessar a cavidade (tempo de interação¹²) seja de $gt_1 = \pi/4$, tem-se:

$$\left|\tilde{\psi}\left(\pi/4g\right)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|e_{1},0\right\rangle - i\left|g_{1},1\right\rangle\right)$$
(2.52)

Esse estado, que sobrevive após o átomo sair da cavidade (desconsiderando os efeitos da decoerência), não pode ser escrito como um produto tensorial dos estados de cada subsistema, ou seja, representa um estado emaranhado.

Se, após esse procedimento, passarmos um segundo átomo (no estado fundamental) pela cavidade interagindo por um período t_2 com o campo, temos:

$$\left|\tilde{\psi}(t_{2})\right\rangle = U(t_{2})\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_{1},0\rangle - i|g_{1},1\rangle\right)|g_{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_{1}\rangle U(t_{2})|g_{2},0\rangle - i|g_{1}\rangle U(t_{2})|g_{2},1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|e_{1},g_{2},0\rangle - i\left[\cos\left(gt_{2}\right)|g_{1},g_{2},1\rangle - isen\left(gt_{2}\right)|g_{1},e_{2},0\rangle\right]\right\}$$
(2.53)

Fixando um tempo de interação $gt_2 = \pi/2$ os dois átomos ficam em um estado emaranhado do tipo:

$$|\psi_{at}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_1, g_2\rangle - |g_1, e_2\rangle \right)$$
 (2.54)

Este, de fato, é um estado maximamente emaranhado (estado de Bell), fazendo o traço sobre qualquer subsistema e calculando a entropia de Von Neumann obteremos o valor 1. O par pode assim ser usado para um teste da desigualdade de Bell [38, 58] (obtendo inclusive a máxima violação [59]) ou para a realização de teletransporte quântico com fidelidade máxima [90].



Figura 2.2: Dois átomos atravessando sucessivamente uma mesma cavidade, com o campo inicialmente no vácuo, o átomo 1 no estado excitado e o 2 no fundamental. Nesta figura e nas outras consideramos cavidades do tipo Fabry-Perot.

Depois que o estado atômico é gerado, o campo volta ao estado de vácuo, como conseqüência, o efeito da dissipação na cavidade não afeta o estado emaranhado produzido e, ainda mais, a cavidade está preparada para se repetir o procedimento.

¹²Controlando a velocidade do átomo v = L/t (onde L é o comprimento da cavidade) é possível estimar o tempo de interação e conseqüêntemente, pelo MJC, o estado final gerado.

Tal esquema foi proposto primeiramente por Cirac et. al. [6] e implementado experimentalmente por Hagley et. al. [7] com átomos no estado circular de Rydberg [8] e cavidades tipo Fabry-Perot no regime de microondas.

Emaranhamento multi-partite (tipo GHZ [91] e tipo W [92]) entre n átomos podem ser gerados a partir de uma generalização do esquema apresentado [6,9]. Supondo a preparação da cavidade em um estado de máxima superposição de 0 e n fótons,

$$|\psi_{camp}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + |n\rangle\right) \tag{2.55}$$

o estado maximamente emaranhado do tipo GHZ,

$$|\psi_{at}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|g_1 g_2 g_3 ... g_n\rangle + |e_1 e_2 e_3 ... e_n\rangle \right)$$
 (2.56)

pode ser gerado enviando n átomos no estado fundamental sucessivamente pela mesma cavidade, seguindo o modelo de Jaynes-Cummings (uma vez que cada átomo interage sozinho com o campo), e controlando o tempo de interação [6].

Já a generalização para produzir um estado tipo W entre n átomos é mais trivial [9]. Preparando a cavidade no estado de vácuo, enviando o primeiro átomo no estado excitado e os outros n - 1 no fundamental, com tempos de interação específicos, tem-se,

$$|\psi_{at}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(|e_1 g_2 g_3 \dots g_n\rangle + |g_1 e_2 g_3 \dots g_n\rangle + \dots + |g_1 g_2 g_3 \dots e_n\rangle \right)$$
(2.57)

3 Emaranhamento em cavidades descopladas

No capítulo anterior vimos como gerar emaranhamento entre dois (e, brevemente, a generalizão para n) átomos interagindo sucessivamente com o campo de **uma** cavidade ressonante. Agora, iremos abordar o sistema de duas cavidades quânticas interagindo com átomos de dois níveis.

Quando se trabalha simultaneamente com duas cavidades desacopladas é equivalente a dizer que temos dois sistemas independentes que não interagem, a dinâmica de ambos segue normalmente como se o outro não existisse. A Hamiltoniana de um sistema que compreende dois átomos de dois níveis idênticos em ressonância com os campos de duas cavidades, no qual cada átomo atravessa apenas uma das cavidades, é:

$$H = \hbar \omega \hat{a}_{1}^{\dagger} \hat{a}_{1} + \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_{1z} + \hbar g \left(\hat{a}_{1} \sigma_{1+} + \hat{a}_{1}^{\dagger} \sigma_{1-} \right) + \\ \hbar \omega \hat{a}_{2}^{\dagger} \hat{a}_{2} + \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_{2z} + \hbar g \left(\hat{a}_{2} \sigma_{2+} + \hat{a}_{2}^{\dagger} \sigma_{2-} \right) = H_{1} + H_{2}$$
(3.1)

onde $[H_1, H_2] = 0$, obviamente.



Figura 3.1: Duas cavidades, com um átomo em seu interior, espacialmente separadas e desacopladas constituindo sistemas independentes.

Supondo, então, um estado inicial separável entre os subsistemas 1 e 2, operações unitárias locais não produzem emaranhamento (como já discutimos);

$$\begin{aligned} |\psi\left(t\right)\rangle &= e^{\frac{-iHt}{\hbar}} \left|\psi\left(0\right)\rangle_{1} \otimes \left|\psi\left(0\right)\rangle_{2} = \\ e^{\frac{-iH_{1}t}{\hbar}} e^{\frac{-iH_{2}t}{\hbar}} \left|\psi\left(0\right)\rangle_{1} \otimes \left|\psi\left(0\right)\rangle_{2} = \left|\psi\left(t\right)\rangle_{1} \otimes \left|\psi\left(t\right)\rangle_{2} \end{aligned}$$
(3.2)

onde usamos o fato de que,

$$e^{A+B} = e^A e^B \tag{3.3}$$

se [A, B] = 0.

Nesse capítulo discutiremos como gerar emaranhamento entre átomos remotos situados em cavidades desacopladas. Sem um acoplamento dinâmico ou interação entre os dois sub-sistemas átomo-campo, para gerar tal emaranhamento algumas condições extras devem ser impostas e um custo deve ser pago. Dois esquemas se destacam no contexto de gerar emaranhamento entre átomos distantes no sistema em questão: troca de emaranhamento (*entanglement swapping*) e detecção de 1 fóton.

3.1 Troca de emaranhamento

Considere um sistema composto de dois átomos idênticos e duas cavidades desacopladas com modos ressonantes com os mesmos (Hamiltoniana 3.1). Inicialmente os campos das cavidades precisam ser preparadas em um estado quanticamente correlacionado de um fóton,

$$|\psi_{camp}\rangle = 1/\sqrt{2} \left(|0_1, 1_2\rangle + |1_1, 0_2\rangle\right)$$
 (3.4)

Com um átomo preparatório no estado excitado passando sucessivamente pelas duas cavidades $(gt_1 = \pi/4 \text{ na primeira cavidade e } gt_2 = \pi/2, \text{ na segunda}^1)$, ambas inicialmente no vácuo, é possível gerar esse estado emaranhado de um fóton entre os campos [22].

De um ponto de vista prático, para gerar esse estado de campo, as cavidades não podem estar muito longe uma vez que o átomo precisa ir de uma cavidade até a outra em um tempo curto o suficiente para evitar os efeitos da dissipação como a emissão espontânea do átomo.



Figura 3.2: Esquema básico proposto por Gerry [22] no qual através de um *entanglement swapping* gerou um estado emaranhado entre dois átomos remotos.

Fazendo, então, dois átomos no estado fundamental $|g_1\rangle \in |g_2\rangle$ atravessar as cavidades 1 e 2 respectivamente e simultaneamente, os sistemas átomo-campo (separadamente) tem sua evolução descrita pelo MJC de forma que o estado do total sistema em t é:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= U_{1}(t) U_{2}(t) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0_{1}, g_{1}\rangle \otimes |1_{2}, g_{2}\rangle + |1_{1}, g_{1}\rangle \otimes |0_{2}, g_{2}\rangle \right) = \\ &\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |0_{1}, g_{1}\rangle \left[\cos\left(gt\right) |1_{2}, g_{2}\rangle - isen\left(gt\right) |0_{2}, e_{2}\rangle \right] \\ &+ \left[\cos\left(gt\right) |1_{1}, g_{1}\rangle - isen\left(gt\right) |0_{1}, e_{1}\rangle \right] |0_{2}, g_{2}\rangle \right\} \end{aligned}$$
(3.5)

onde $U_i(t)$ é o operador de evolução temporal do modelo de Jaynes-Cummings referente a cavidade *i*.

¹Uma vez que a velocidade do átomo preparatório é fixa e o comprimento das cavidades L é igual, é necessário um campo elétrico para induzir um *stark shift* no átomo e "desligar" a interação átomo-campo na cavidade 1 no tempo apropriado.

Agora analisemos a dinâmica de cada subsistema em um tempo t (átomo-átomo e campo-campo). Traçando sob as variáveis do campo temos, na base $\{|gg\rangle, |ge\rangle, |eg\rangle, |ee\rangle\}$:

$$\rho_{at}(t) = Tr_{camp}(|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|) = \begin{pmatrix} \cos^2(gt) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sin^2(gt)/2 & \sin^2(gt)/2 & 0\\ 0 & \sin^2(gt)/2 & \sin^2(gt)/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(3.6)

Analogamente sob as variáveis do átomo, na base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$:

$$\rho_{camp}(t) = \begin{pmatrix} sen^2(gt) & 0 & 0 & 0\\ 0 & cos^2(gt)/2 & -cos^2(gt)/2 & 0\\ 0 & -cos^2(gt)/2 & cos^2(gt)/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(3.7)

Calculando a *concurrence* (eq.1.31) do operador matriz densidade $\rho_{at} \in \rho_{camp}$ é possível notar que o emaranhamento fica "oscilando" entre os dois subsistemas (dos campos para os átomos). O mesmo pode ser notado para a negatividade (eq.1.33), o emaranhamento de formação (ligado diretamente a *concurrence* pela eq.1.24) e a negatividade logaritmaca (eq.1.34).



Figura 3.3: A *concurrence*(esquerda) e a negatividade (direita) de $\rho_{at}(t)$ e $\rho_{camp}(t)$ respectivamente representados pelas cores azul e vermelho.

Nota-se aqui que a *concurrence* e a negatividade não são equivalentes. Elas são iguais apenas para estados puros que neste caso se resume ao estado produto (C = N = 0) e ao estado maximamente emaranhado (C = N = 1).

Comparando o emaranhamento de formação com a negatividade logarítmica para cada subsistema podemos notar que $E_f \ge E_N$ onde a igualdade vale quando só quando o estado é puro (separável ou maximamente emaranhado) (Fig. 3.4). E_N representa um limite superior para o emaranhamento de destilação E_D (difícil de se calcular) assim para estados mistos emaranhados $E_f \ge E_D$, como o esperado.



Figura 3.4: Comparação entre o emaranhamento de formação E_f , em vermelho, e a negatividade logarítmica E_N , azul, do operador matriz densidade $\rho_{at}(t)$ (figura da esquerda) e $\rho_{camp}(t)$ (direita).

Se fixarmos o tempo de interação em $gt = (2n+1)\pi/2$ n = 0, 1, 2 temos uma transferência de emaranhamento (*entanglement swapping*), ou seja, os átomos ficam em um estado maximamente emaranhado, que era o objetivo,

$$|\psi_{at}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|g_1, e_2\rangle + |e_1, g_2\rangle \right)$$
 (3.8)

Gerry [22], para comprovar a não-localidade da mecânica quântica, propôs um teste para a desigualdade de Bell no sistema em questão, ainda no regime de microondas. Variando as velocidades dos três átomos envolvidos, com o auxilio de campos clássicos de microondas e detectores ionizantes, Gerry observou a violação da desigualdade de Bell para o estado atômico emaranhado.

Se inicialmente, ao invés de um estado de campo maximamente emaranhado, tivés
semos $|\psi_{camp}\rangle = a |01\rangle + b |10\rangle$ o mesmo comportamento seria observado, porém o estado atômico não seria maximamente emaranhado.

Assim, dispondo de um estado emaranhado inicial compartilhado entre os campos, podemos gerar um estado emaranhado entre dois átomos remotos.

Aqui demos um exemplo da transferência de emaranhamento entre dois subsistemas de base discreta (qubits), átomo de dois níveis e campo com 0 ou 1 fótons. Lee et. al. [25] propuseram uma forma mais sofisticada de *entanglement swapping* chamada na literatura de *entanglement reciprocation*. Eles investigaram como o emaranhamento pode ser transferido de dois qubits (átomo) para um sistema de variáveis continuas (campo coerente) e vice-versa.

3.2 Detecção de um fóton

Considere, novamente, um sistema composto de dois átomos idênticos e duas cavidades ressonantes com os mesmos (Hamiltoniana 3.1). Inicialmente, o sistema está no seguinte estado,

$$|\psi\left(0\right)\rangle = |\psi_{1}\left(0\right)\rangle \otimes |\psi_{2}\left(0\right)\rangle \tag{3.9}$$

onde,

$$\left|\psi_{j}\left(0\right)\right\rangle = \left|0_{j}\right\rangle\left|e_{j}\right\rangle \tag{3.10}$$

Cada átomo entra em sua respectiva cavidade simultaneamente. A dinâmica de cada sistema átomocampo evolui normalmente seguindo o modelo de Jaynes-Cummings, de forma que em um tempo t temos, usando o operador evolução temporal em cada sistema,

$$|\psi(t)\rangle = [\cos(gt)|0_1, e_1\rangle - isen(gt)|1_1, g_1\rangle]$$
(3.11)

$$\otimes \left[\cos\left(gt\right)\left|0_{2}, e_{2}\right\rangle - isen\left(gt\right)\left|1_{2}, g_{2}\right\rangle\right] \tag{3.12}$$

Então, com uma corrente elétrica induz-se uma transparência em um dos lados da cavidade tipo Fabry-Perot permitindo assim que fótons escapem. Em um caso ideal², os fótons se "misturam" ou sobrepõem no BS 50 : 50 e, em seguida, são detectados em D1 ou D2(a figura 3.5 ilustra bem o esquema).



Figura 3.5: Esquema para gerar emaranhamento entre átomos distantes em cavidades desacopladas baseado na detecção de um fóton.

Em um *beam splitter*(BS) 50:50 o campo incidente é separado em duas componentes, a refletida e a transmitida, de forma que,

$$\begin{pmatrix} \hat{a}'_1 \\ \hat{a}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & R \\ -R^* & T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}$$
(3.13)

onde T e R são, respectivamente, os coeficiêntes de transmissão e reflexão dados por $T = R = 1/\sqrt{2}$.

Se não incide nenhum fóton, incide apenas um fóton de uma das cavidades ou então um fóton de cada cavidade, o estado dos campos fica da seguinte forma,

 $^{^{2}}$ Na realidade a detecção não é perfeita, o fóton pode sair da cavidade mas não passar pelo BS e ser detectado, o que prejudica a eficiência do esquema.



Figura 3.6: Esquema de um beam splitter.

 $\begin{aligned} &|0_1\rangle |0_2\rangle \rightarrow |0_{1'}\rangle |0_{2'}\rangle \\ &|0_1\rangle |1_2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1_{1'}\rangle |0_{2'}\rangle + |0_{1'}\rangle |1_{2'}\rangle\right) \\ &|1_1\rangle |0_2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1_{1'}\rangle |0_{2'}\rangle - |0_{1'}\rangle |1_{2'}\rangle\right) \\ &|1_1\rangle |1_2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|2_{1'}\rangle |0_{2'}\rangle - |0_{1'}\rangle |2_{2'}\rangle\right) \end{aligned}$

Assim, o estado total do sistema (considerando que cada átomo interagiu com o campo por um tempo t antes dos fótons escaparem), após os fótons atravessarem o BS é,

$$\begin{split} |\psi(t)\rangle &= \cos^{2}(gt) |e_{1}, e_{2}\rangle |0_{1'}, 0_{2'}\rangle \\ -isen(gt)\cos(gt) \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|e_{1}, g_{2}\rangle + |g_{1}, e_{2}\rangle)\right] |1_{1'}, 0_{2'}\rangle \\ -isen(gt)\cos(gt) \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|e_{1}, g_{2}\rangle - |g_{1}, e_{2}\rangle)\right] |0_{1'}, 1_{2'}\rangle \\ &- sen^{2}(gt) |g_{1}, g_{2}\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|2_{1'}, 0_{2'}\rangle - |0_{1'}, 2_{2'}\rangle) \end{split}$$
(3.14)

Daí, a detecção de um fóton (qualquer que seja o detector) colapsa o sistema atômico em um estado maximamente emaranhado do tipo,

$$|\psi_{at\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_1, g_2\rangle \pm |g_1, e_2\rangle \right)$$
 (3.15)

onde $|\psi_{at+}\rangle$ é obtido se o fóton for detectado em D1 e o $|\psi_{at-}\rangle$ se for em D2

Se forem detectados 2 fótons, o estado atômico colapsa em um estado produto $|gg\rangle$, e se nenhum foton for detectado, $|ee\rangle$. Assim existe uma probabilidade de sucesso, ou seja, o procedimento é probabilístico, dependendo da medição.

Agora analisemos a probabilidade de sucesso do procedimento em função do tempo de interação átomo-campo,

$$P_{suc}(t) = |\langle 0_{1'}, 1_{2'} | \psi(t) \rangle|^2 + |\langle 1_{1'}, 0_{2'} | \psi(t) \rangle|^2 = 2sen^2(gt) \cos^2(gt)$$
(3.16)



Figura 3.7: Probabilidade de sucesso na geração do estado atômico maximamente emaranhado em função do tempo.

Apenas para tempos de interação $gt = (2n + 1) \pi/4$ a probabilidade de sucesso (geração do estado atômico maximamente emaranhado) é de 1/2. Assim, fixando tal tempo de interação, a geração do estado atômico maximamente emaranhado é obtido com uma probabilidade de sucesso igual a 1/2, a máxima que se obtém nesse esquema mesmo em um caso ideal.

Seguindo essa linha, Bose et. al. [93] propuseram um esquema para realização do Teletransporte Quântico de um estado atômico baseado na detecção de um fóton. No entanto, novamente, o procedimento é probabilístico dependendo do resultado de uma medição.

Nessa seção apresentamos apenas um esquema mostrando como gerar um estado maximamente emaranhado entre átomos remotos via interferência e detecção de um fóton (probabilisticamente). Porém, este é, claramente, um modelo simplificado e idealizado. Por exemplo, nós não consideramos o fato de que um detector, em geral, não diferencia $|2\rangle$ de $|1\rangle$. Browne et. al. [28] propuseram uma solução para esse problema usando átomos de três níveis fracamente dirigidos por um campo externo clássico obtendo uma probabilidade se sucesso quase unitária em um caso ideal.

4 Sistema de cavidades acopladas interagindo com átomos de dois níveis

Neste capítulo descreveremos o sistema que consiste em duas cavidade quânticas espacialmente separadas e conectadas por um canal quântico (isto é, acopladas), a curtas distâncias o canal pode ser simplesmente o vácuo (na seção 4.1, seguindo o modelo inicialmente proposto por Zoubi et. al [1]) e para distâncias maiores um "guia de onda" (uma fibra óptica) conecta as duas cavidades (na seção 4.2, baseado no trabalho de Pellizzari [2]).

Em cada caso, iremos considerar a interação do campo das cavidades com átomos de dois níveis e mostraremos que, em um caso particular, a dinâmica nos dois sistemas é equivalente a interação do átomo com um campo mono-modo.

Ainda nessa capítulo, apresentaremos alguns parâmetros experimentais relevantes que, de acordo com a tecnologia atual, possibilitam a utilização dos modelos propostos para a interação de átomos de dois níveis em cavidade acopladas.

4.1 Acoplamento via meio físico

Consideremos um sistema de duas cavidades (j = 1, 2) espacialmente separadas por uma curta distância, pelo vácuo ou um material dielétrico [34](meio físico), ondas evanescentes de uma cavidade interferem no campo da outra acoplando-as. A dinâmica desse sistema quântico pode ser descrita pela proposta de Zoubi et. al. [1].

Primeiro, lembremos que o potencial vetor \vec{A} do campo mono-modo quantizado na cavidade j pode ser dado pela fórmula:

$$\vec{A}^{(j)}(\vec{r}) = \vec{u}_j(\vec{r} - \vec{r}_j)\hat{a}_j + \vec{u}_j^*(\vec{r} - \vec{r}_j)\hat{a}_j^\dagger,$$
(4.1)

onde $\hat{a}_{j}^{\dagger} \in \hat{a}_{j}$ são respectivamente o operador de criação e aniquilação do campo correspondente a cavidade j, $\vec{u}_{j}(\vec{r} - \vec{r}_{j})$ é uma função vetorial que dá a distribuição do campo da cavidade j no espaço, \vec{r} é o vetor posição e \vec{r}_{j} é a posição de referência (centro geométrico) da cavidade j.

Assumindo que o acoplamento seja dado pela sobreposição entre os campos das duas cavidades, a Hamiltoniana de acoplamento é, em termos dos operadores de criação e aniquilação dos campos, na aproximação de ondas girantes (RWA):

$$H_{C1C2} = \hbar \lambda \left(\hat{a}_1 \hat{a}_2^{\dagger} + \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_2 \right), \qquad (4.2)$$

onde a constante de acoplamento λ , com dimensão de freqüência, é dada por:

$$\lambda \propto \int \vec{u}_1(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{u}_2(\vec{r} - \vec{r}_2) d^3 \vec{r}$$
(4.3)

Então, a Hamiltoniana total do sistema em questão pode ser escrita como:

$$H_C = \hbar\omega_1 \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1 + \hbar\omega_2 \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_2 + \hbar\lambda \left(\hat{a}_1 \hat{a}_2^{\dagger} + \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_2 \right)$$
(4.4)

onde ω_j é a freqüência do modo da cavidade j.

A Hamiltoniana acima (eq.4.4) pode ser diagonalizada para o caso ressonante¹ ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) se utilizarmos novos operadores bosônicos A_1 e A_2 (modos normais do sistema), dados pela seguinte transformação canônica [1,52]:

$$\hat{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_1 + \hat{a}_2 \right) \quad ; \quad \hat{A}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_1 - \hat{a}_2 \right)$$
(4.5)

Em função dos modos normais, a Hamiltoniana para o sistema das cavidades acopladas fica:

$$H_C = \hbar \Omega_1 \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \hbar \Omega_2 \hat{A}_2^{\dagger} \hat{A}_2 \tag{4.6}$$

onde as freqüências dos modos normais são:

$$\Omega_1 \equiv \omega + \lambda \quad ; \quad \Omega_2 \equiv \omega - \lambda \tag{4.7}$$

Uma vez que conhecemos as expressões que relacionam os operadores de criação dos campos $(\hat{a}_1 \ e \ \hat{a}_2)$ com os modos normais do sistema $(\hat{A}_1 \ e \ \hat{A}_2)$, é possível relacionar também os estados de número dos campos das cavidades com os autoestados do Hamiltoniano diagonalizado (eq.4.6) [52]. Entretanto, aqui, usaremos apenas o fato de que o estado de vácuo é o mesmo nas duas representações,

$$|0\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} = |0\rangle_{A1} |0\rangle_{A2} \tag{4.8}$$

onde o índice *a* representa os estados de número, isto é, os autoestados de $\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_1$ e $\hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_2$ e o índice *A* indica os autoestados de H_C (eq.4.6).

Esse modelo representa uma boa aproximação se as cavidades estiverem suficientemente separadas (fraco acoplamento, isto é $\omega \gg \lambda$) mas, ao mesmo tempo, a distância entre elas não pode ser muito longa para que haja um acoplamento dos modos. Tal acoplamento é o análogo óptico do limite de *tight-binding* da física do estado sólido [95] no qual os átomos estão próximos o suficiente para que as funções de onda se sobreponham e um tratamento de átomos isolados necessite de algumas correções mas, por outro lado, longe o suficiente para que a descrição para átomos isolados não seja completamente irrelevante.

¹É importante dizer que a dagonalização da Hamiltoniana para $\omega_1 \neq \omega_2$ [1,52] ainda é possível mas não iremos considerar esse caso.

4.1.1 Interação com átomos de dois níveis

Consideremos, agora, um átomo de dois níveis com freqüência de transição ω_a que atravesse apenas uma das cavidades com constante de acoplamento átomo-campo g. A interação entre o átomo e o campo na cavidade j (j = 1, 2) é, na aproximação de dipolo e RWA, descrita pelo modelo Jaynes-Cummings [49]:

$$H_{aCj} = \hbar g \left(\hat{a}_j \sigma_{j+} + \hat{a}_j^{\dagger} \sigma_{j-} \right), \qquad (4.9)$$

onde $\sigma_{j+} \in \sigma_{j-}$ são o operador de excitação e desexcitação do átomo na cavidade j.

Desta forma, a Hamiltoniana total do sistema átomo-cavidade, em função dos modos normais e assumindo que o átomo esteja na cavidade j, é:

$$H_{j} = \frac{\hbar\omega_{a}}{2}\sigma_{jz} + \hbar\Omega_{1}\hat{A}_{1}^{\dagger}\hat{A}_{1} + \hbar\Omega_{2}\hat{A}_{2}^{\dagger}\hat{A}_{2} + \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \left[\left(\hat{A}_{1} + (-1)^{j+1}\hat{A}_{2} \right) \sigma_{j+} + \left(\hat{A}_{1}^{\dagger} + (-1)^{j+1}\hat{A}_{2}^{\dagger} \right) \sigma_{j-} \right]$$

$$(4.10)$$

Na representação de interação, a Hamiltoniana do sistema (eq.4.10) fica:

$$\tilde{H}_{j} = \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \left[\left(e^{-i(\Omega_{1} - \omega_{a})t} \hat{A}_{1} + (-1)^{j+1} e^{-i(\Omega_{2} - \omega_{a})t} \hat{A}_{2} \right) \sigma_{j+} + \left(e^{i(\Omega_{1} - \omega_{a})t} \hat{A}_{1}^{\dagger} + (-1)^{j+1} e^{i(\Omega_{2} - \omega_{a})t} \hat{A}_{2}^{\dagger} \right) \sigma_{j-} \right]$$
(4.11)

A expressão acima é dependente do tempo, o que dificulta o problema. Agora, impondo duas condições sobre o sistema é possível obter uma Hamiltoniana de interação independente do tempo,

$$\Omega_2 = \omega_a \quad ; \quad \lambda >> g \tag{4.12}$$

Aplicando a primeira condição, a dependência temporal da Hamiltoniana de interação (eq.4.11) será devido apenas as exponenciais de $\Omega_1 - \Omega_2 = 2\lambda$.

Depois, impondo a segunda condição, podemos usar a aproximação de ondas girantes para eliminar os termos que oscilam rapidamente (as exponenciais contendo 2λ) e a Hamiltoniana de interação fica:

$$\tilde{H}_{j} = (-1)^{j+1} \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \left[\hat{A}_{2} \sigma_{j+} + \hat{A}_{2}^{\dagger} \sigma_{j-} \right]$$
(4.13)

Nota-se que esta Hamiltoniana de interação é equivalente a do modelo Jaynes-Cummings (com sinal diferente para j = 2, isto é, com o átomo na cavidade 2), trocando os operadores usuais por $\hat{A}_2^{\dagger} \in \hat{A}_2$.

Assim, fixando $\Omega_2 = \omega_a$ e no regime de $\lambda >> g$, a dinâmica do sistema pode ser facilmente determinada por analogia com o modelo de Jaynes-Cummings.

Agora, consideremos dois átomos (ambos com freqüência ω_a e constante de acoplamento g) passando um por cada cavidade ao mesmo tempo, a Hamiltoniana de interação fica, no mesmo limite:

$$\tilde{H} = \tilde{H}_1 + \tilde{H}_2 = \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \left[\hat{A}_2 \sigma_{1+} + \hat{A}_2^{\dagger} \sigma_{1-} \right] - \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \left[\hat{A}_2 \sigma_{2+} + \hat{A}_2^{\dagger} \sigma_{2-} \right].$$
(4.14)

que é equivalente ao sistema de dois átomos interagindo com um campo mono-modo (em uma cavidade) e a dinâmica pode ser determinada resolvendo a equação de Schrödinger na representação de interação (como faremos mais a frente) análogo ao modelo de Dicke [96].



Figura 4.1: Ilustração de duas cavidades, com átomos de dois níveis em seu interior, separadas pelo vácuo que se acoplam devido a interferência das ondas evanescentes.

4.2 Acoplamento via fibra óptica

Neste caso, as duas cavidades ópticas ² estão espacialmente separadas e conectadas por uma fibra óptica (que permite um aumento na distância entre as cavidades acopladas). Cada elemento do sistema (as duas cavidades e a fibra) possui modos definidos separadamente³, representados por operadores de criação e aniquilação de fótons que satisfazem a relação de comutação padrão.

Há um acoplamento linear pelo fato da cavidade não ser perfeita e uma pequena fração do campo (evanescente) é transmitida da cavidade para a fibra e *vice versa*. A Hamiltoniana de interação, que descreve o acoplamento entre os modos da cavidade e da fibra, toma então a seguinte forma [2]:

$$H_{C1FC2} = \hbar \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \left[\hat{b}_j \left(\hat{a}_1^{\dagger} + (-1)^{j+1} e^{i\varphi} \hat{a}_2^{\dagger} \right) + \hat{b}_j^{\dagger} \left(\hat{a}_1 + (-1)^{j+1} e^{i\varphi} \hat{a}_2 \right) \right]$$
(4.15)

onde \hat{b}_j são os modos da fibra, $\hat{a}_1 \in \hat{a}_2$ são respectivamente os modos da cavidade 1 e 2, ν_j é o constante de acoplamento do modo j da fibra com os modos da cavidade e a fase φ é devido a propagação do campo através de uma fibra de comprimento $l: \varphi = 2\pi\omega l/c$. O fator $(-1)^{j+1}$ modela uma diferença de fase de π a cada segundo modo da fibra [2].

O número de modos da fibra que interage com os modos das cavidades é $n = l\bar{\nu}/(2\pi c)$, onde $\bar{\nu}$ é a taxa de decaimento dos campos das cavidades na fibra e c é a velocidade da luz no vácuo. Assim, no limite $n \approx 1$ (pequena fibra) apenas um modo ressonante da fibra interage com os modos das cavidades e a Hamiltoniana (4.15) pode ser escrita como [31]⁴:

$$H_{C1FC2} = \hbar\nu \left[\hat{b} \left(\hat{a}_{1}^{\dagger} + \hat{a}_{2}^{\dagger} \right) + \hat{b}^{\dagger} \left(\hat{a}_{1} + \hat{a}_{2} \right) \right]$$
(4.16)

 $^{^{2}}$ Aqui, as cavidades devem estar no regime óptico uma vez que são acopladas por uma fibra óptica.

³Tal descrição é valida, em princípio, apenas para cavidades de alta qualidade, operações próximas da ressonância e escalas de tempo grande comparado com o tempo de *roundtrip* na fibra.

 $^{^{4}}$ Vale rassaltar que, usando filtros de freqüência (*cut-off*), é possível assegurar que apenas um modo da fibra seja relevante.

onde \hat{b} é o modo ressonante da fibra e a fase φ foi "absorvida" pelos operadores de criação e aniquilação do modo da segunda cavidade⁵ [32].

Deste modo, a Hamiltoniana total do sistema de duas cavidades acopladas via fibra óptica é, no limite de pequena fibra:

$$H_{C} = \hbar\omega_{1}\hat{a}_{1}^{\dagger}\hat{a}_{1} + \hbar\omega_{2}\hat{a}_{2}^{\dagger}\hat{a}_{2} + \hbar\omega_{f}\hat{b}^{\dagger}\hat{b} + \hbar\nu\left[\hat{b}\left(\hat{a}_{1}^{\dagger} + \hat{a}_{2}^{\dagger}\right) + \hat{b}^{\dagger}\left(\hat{a}_{1} + \hat{a}_{2}\right)\right]$$
(4.17)

onde ω_j é a freqüência do modo da cavidade $j \in \omega_f$ do modo da fibra.

Novamente, a Hamiltoniana do sistema pode ser diagonalizada para o caso ressonante ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_f = \omega$) se utilizarmos os novos operadores bosônicos \hat{c}_+ , $\hat{c} \in \hat{c}_-$ (com freqüências $\omega + \sqrt{2}\nu$, $\omega \in \omega - \sqrt{2}\nu$, respectivamente), dados pela seguinte transformação canônica [31]:

$$\hat{c}_{+} = \frac{1}{2} \left(\hat{a}_{1} + \hat{a}_{2} + \sqrt{2} \hat{b} \right)
\hat{c}_{-} = \frac{1}{2} \left(\hat{a}_{1} + \hat{a}_{2} - \sqrt{2} \hat{b} \right)
\hat{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_{1} - \hat{a}_{2} \right)$$
(4.18)

Assim, a Hamiltoniana do sistema cavidade-fibra (eq.4.17), em função dos modos normais, fica:

$$H_C = \hbar \left(\omega - \sqrt{2}\nu\right) \hat{c}_-^{\dagger} \hat{c}_- + \hbar \omega \hat{c}^{\dagger} \hat{c} + \hbar \left(\omega + \sqrt{2}\nu\right) \hat{c}_+^{\dagger} \hat{c}_+$$
(4.19)

Novamente, é possível relacionar os estados de número dos campos das cavidades com os autoestados do Hamiltoniano diagonalizado. Entretanto, para o nosso propósito, usaremos apenas o fato de que o estado de vácuo é o mesmo nas duas representações.

4.2.1 Interação com átomos de dois níveis

Seja um átomo de dois níveis com freqüência ω_a atravessando apenas uma das cavidades ópticas (j = 1 ou 2) com uma constante de acoplamento g, a interação entre o átomo e o campo da cavidade é descrita pelo modelo Jaynes-Cummings (eq.4.9), e a Hamiltoniana total do sistema (com $\omega_1 = \omega_2 = \omega_f = \omega$) fica:

$$H_{j} = \hbar \omega \hat{a}_{1}^{\dagger} \hat{a}_{1} + \hbar \omega \hat{a}_{2}^{\dagger} \hat{a}_{2} + \hbar \omega \hat{b}^{\dagger} \hat{b} + \hbar \nu \left[\hat{b} \left(\hat{a}_{1}^{\dagger} + \hat{a}_{2}^{\dagger} \right) + \hat{b}^{\dagger} \left(\hat{a}_{1} + \hat{a}_{2} \right) \right] + \frac{\hbar \omega_{a}}{2} \sigma_{jz} + \hbar g \left(\hat{a}_{j} \sigma_{j+} + \hat{a}_{j}^{\dagger} \sigma_{j-} \right)$$

$$(4.20)$$

Em função dos novos operadores bosônicos (os modos normais) temos:

$$H_{j} = \hbar \left(\omega - \sqrt{2}\nu \right) \hat{c}_{-}^{\dagger} \hat{c}_{-} + \hbar \omega \hat{c}^{\dagger} \hat{c} + \hbar \left(\omega + \sqrt{2}\nu \right) \hat{c}_{+}^{\dagger} \hat{c}_{+} + \frac{\hbar \omega_{a}}{2} \sigma_{jz} + \hbar \frac{g}{2} \left[\left(\hat{c}_{+} + \hat{c}_{-} + (-1)^{j+1} \sqrt{2} \hat{c} \right) \sigma_{j+} + \left(\hat{c}_{+}^{\dagger} + \hat{c}_{-}^{\dagger} + (-1)^{j+1} \sqrt{2} \hat{c}^{\dagger} \right) \sigma_{j-} \right]$$
(4.21)

 $\overline{{}^5e^{i\varphi}\hat{a}_2} \to \hat{a}_2$

Na representação de interação no limite de $\nu \gg g$ e com $\omega = \omega_a$ (átomo ressonante com o modo normal \hat{c}) nós podemos, novamente, eliminar adiabaticamente os termos que oscilam rapidamente (termos da interação do átomo com os modos normais não ressonantes \hat{c}_+ e \hat{c}_-), assim a Hamiltoniana total do sistema de duas cavidades ópticas acopladas via fibra com um átomo de dois níveis na cavidade j é, na representação de interação:

$$\tilde{H}_j = (-1)^{j+1} \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \left[\hat{c}\sigma_{j+} + \hat{c}^{\dagger}\sigma_{j-} \right]$$

$$(4.22)$$

que, como no caso do acoplamento via meio a curta distância, é análogo ao MJC com um diferente fator multiplicador e sinal, para j = 2.



Figura 4.2: Esboço de duas cavidades ópticas acopladas por uma fibra óptica. Uma delas é atravessada por um átomo de dois níveis.

No caso de dois átomos (ambos com freqüência ω_a e constante de acoplamento g) passando cada um em uma cavidade ao mesmo tempo, a Hamiltoniana na representação de interação, no regime $\nu >> g$ e com o átomo ressonante com o campo ($\omega_a = \omega$), será:

$$\tilde{H} = \tilde{H}_1 + \tilde{H}_2 = \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \left[\hat{c}\sigma_{1+} + \hat{c}^{\dagger}\sigma_{1-} \right] - \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \left[\hat{c}\sigma_{2+} + \hat{c}^{\dagger}\sigma_{2-} \right].$$
(4.23)

que é equivalente ao problema de dois átomos em uma cavidade e pode ser resolvido facilmente para o caso em que os modos normais \hat{c}_+ e \hat{c}_- estejam no estado de vácuo.

Então, o sistema de duas cavidades idênticas conectadas via fibra óptica com átomos de dois níveis ressonantes ($\omega = \omega_a$) e no limite de forte acoplamento cavidade-fibra $\nu >> g$ é equivalente ao sistema de duas cavidades (com freqüência ω) espacialmente separadas por uma curta distância com átomos em seu interior no caso particular de $\lambda = \delta = \omega - \omega_a$ (não ressonante) e no regime $g \ll \lambda \ll \omega$. Isto é, as Hamiltonianas que descrevem os dois sistemas de cavidades acopladas interagindo com átomos de dois níveis são similares (a menos dos modos normais $\hat{A}_2 \in \hat{c}$). Assim, iremos tratar os duas situações juntas quando formos discutir a dinâmica de emaranhamento entre átomos remotos.

4.3 Parâmetros experimentais e comentários relevantes

Nos dois sistemas de cavidades acopladas que abordamos neste trabalho, foram considerados regimes específicos para podermos eliminar a interação do átomo com os modos normais não ressonantes. Vamos, nesse momento, analisar tais particularidades em vista da tecnologia existente de cavidades quânticas (de microondas [6–8,10–13] ou ópticas [14–20]) com átomos de dois níveis em seu interior.

Acoplamento via meio físico: Para ser possível eliminar a interação do átomo com o modo normal não ressonante na equação 4.11 (além de, $\Omega_2 = \omega_a$), o acoplamento λ entre as duas cavidades idênticas deve ser forte (comparado com g). Por outro lado, para aplicarmos o modelo de Zoubi et. al. [1], o acoplamento λ precisa ser fraco comparado com a energia do campo de cada cavidade, ou seja, devemos ter $g \ll \lambda \ll \omega$.

No sistema de duas cavidades acopladas separadas simplesmente por um meio físico (o vácuo ou um material dielétrico), tanto cavidades de microondas como cavidades ópticas podem ser utilizadas.

No regime de microondas, a freqüência de campo largamente encontrada na literatura é da ordem $\omega \approx 2\pi \times 51.1 GHz$. Tal freqüência está em ressonância com a transição entre dois estados de Rydberg circular de números quânticos principais n = 51 ($|e\rangle$) e n = 50 ($|g\rangle$) [7, 8, 12, 13]. Assumindo uma constante de acoplamento átomo-campo $g = 2\pi \times 25kHz$ [13], a aproximação de ondas girantes é valida no seguinte intervalo,

$$1 \ll \frac{\lambda}{g} \ll \frac{\omega}{g} \approx 10^6 \tag{4.24}$$

lembrando que λ , proporcional a integral do overlap dos campos, é obtido empiricamente.

É importante comentar os efeitos da dissipação como a taxa de decaimento do nível atômico (γ) e da cavidade (κ) no regime de microondas. O tempo de vida de átomos no estado de Rydberg circular é da ordem de $T_{\gamma} = 1/\gamma = 30ms$, já uma cavidade de microondas com alto fator de qualidade ($Q = 3 \times 10^8$) consegue manter um fóton em seu interior por aproximadamente $T_{\kappa} = Q/\omega = 1ms$ [8] .O tempo de interação entre átomo e campo para uma oscilação completa de Rabi (período de Rabi) é da ordem de $10^{-5}s$ (assumindo $g = 2\pi \times 25kHz$), assim há tempo suficiente para a evolução coerente do sistema sem qualquer significante perda de coerência.

Já para cavidades ópticas, os modos ressonantes tem freqüência da ordem de $\omega \propto PHz \equiv 10^{15}Hz$. Existem diversas propostas experimentais que envolvem cavidade óptica com átomos (em sua maioria de Cs ou Rb) aprisionados [16, 20] ou transportados [19] para o interior da cavidade, aqui irei apenas comentar alguns que se mostraram promissores.

Em um experimento recente [16], para um sistema constituído de átomos de Cs em uma cavidade óptica tipo Fabry-Perot, foram obtidos os seguintes parâmetros $(g, \gamma, \kappa) = 2\pi (34, 2.6, 4.1) MHz$. Ainda com átomos de Cs, Spillane et. al. [17]⁶ mostraram que microcavidades toroidais podem alcançar um

 $^{^{6}}$ Nessa referência os autores fizeram uma tabela de comparação entre os principais tipos de cavidades ópticas incluindo

alto fator de qualidade $(Q > 10^8)$ e simultaneamente um alto valor para a constante de acoplamento $(g = 2\pi \times 430 MHz)$ que corresponde a um regime de forte acoplamento $g/max(\gamma, \kappa) \approx 165$, ou seja, um fóton emitido pelo átomo no interior da cavidade pode ser repetidamente absorvido e reemitido antes de ser irreversivelmente perdido no ambiente.

Em vista desses valores para a constante de acoplamento átomo-campo g no interior de uma cavidade óptica, a aproximação de ondas girantes é valida no seguinte intervalo,

$$1 \ll \frac{\lambda}{g} \ll \frac{\omega}{g} \approx 10^6 \tag{4.25}$$

Uma importante diferença entre os dois regimes, para o sistema em questão, é a distância que separa as duas cavidades acopladas: para microondas, uma separação da ordem de alguns centímetros é compatível com o intervalo de validade das aproximações e o acoplamento entre os modos de duas cavidades é viavel [34]; já no regime óptico, a distância é da ordem de micrometros (útil para a construção de micro-chips)

Acoplamento via fibra óptica: Para o sistema de duas cavidades quânticas (apenas no regime óptico) conectadas por uma fibra óptica, as referências [16,17] citadas anteriormente para os parâmetros experimentais ainda valem.

Usando cavidades tipo Fabry-Perot é possível um acoplamento cavidade-fibra com uma eficiência moderada ($\approx 70\%$). Agora, *fiber taper* podem acoplar microcavidades ópticas com alto fator de qualidade (como microesferas [97] e microtoroidais [17]) com uma eficiência de 99,97%.

Trupke et. al. [18] propuseram um esquema promissor para microcavidades ópticas com uma fibra óptica integrada possibilitando um forte acoplamento cavidade-fibra.

Vimos na seção 4.2 que o número de modos de uma fibra óptica é $n = l\bar{\nu}/(2\pi c)$ e, se desejamos trabalhar com apenas um modo $n \approx 1$ (o que simplifica muito), devemos ter $n = l\bar{\nu}/(2\pi c) \approx 1$ que corresponde a um comprimento $l \approx 2\pi c/\bar{\nu}$.

Tal regime representa uma situação experimental mais realista: por exemplo, $\bar{\nu} \approx 1 GHz$ e $l \approx 1m$ [2,31].

A constante de acoplamente cavidade-fibra ν pode ser estimada como,

$$\nu \approx \sqrt{\frac{4\pi\bar{\nu}c}{l}}\tag{4.26}$$

Considerando $\bar{\nu} \approx 1 GHz$ e $l \approx 1m$ temos que $\nu \propto GHz$, assim com $g \propto 100 MHz$ a condição necessária para a eliminação adiabática é satisfeita ($\nu \approx 10g >> g$).

Ainda é importante observar que no regime $\nu >> g$ (usando a transformação 4.18) apenas o modo normal \hat{c} está interagindo com o átomo. Agora, o modo da fibra \hat{b} não está envolvido nesse modo normal, assim, considerando a fibra inicialmente no vácuo, ela nunca será populada e os efeitos da dissipação na fibra podem ser desprezados.

Fabry-Perot, microesferas e cristais fotônicos.

5 Dinâmica do emaranhamento entre átomos remotos no sistema de cavidades acopladas

É de conhecimento geral que dois átomos separados no espaço por uma distância tal que não estejam interagindo (direta ou indiretamente¹), nunca se emaranharam.

Assim, como já foi dito anteriormente, no sistema de duas cavidades desacopladas podemos gerar um estado emaranhado entre átomos distantes (um em cada cavidade) apenas sob certas condições extras: uma interação indireta entre os campos das cavidades para criar um estado emaranhado inicial compartilhado (*entanglement swapping*), ou condicionado a uma medição de um fóton que tenha escapado da cavidade (probabilístico).

Agora apresentaremos os principais resultados de nossos estudos sobre o sistema de cavidades acopladas interagindo com átomos de dois níveis. Utilizaremos a ferramentagem descrita anteriormente para estudar a dinâmica do emaranhamento entre dois átomos idênticos remotos localizados em cavidades acopladas distintas, veremos como gerar estados maximamente emaranhados no sistema de cavidades acopladas [53].

Iremos abordar duas situações distintas de interação átomo campo;(i)*sucessivamente*, cada átomo passa em sua respectiva cavidade em tempos distintos e (ii) *simultaneamente*, os dois átomos interagem com o campo de sua respectiva cavidade ao mesmo tempo.

Como já salientamos, o modelo proposto por Zoubi et. al. [1] para o sistema de duas cavidades separadas por uma curta distância por um meio físico (usualmente o vácuo) e o proposto por Pellizzari [2] para duas cavidades acopladas via fibra óptica ("guia de onda") são equivalentes, quando interagindo com átomos de dois níveis, se adotarmos alguns parâmetros particulares em cada caso. Para o modelo de Zoubi et. al. devemos ter $\lambda = \delta = \omega - \omega_a$ (átomo e campo no regime não ressonante) e para o modelo de Pellizzari, $\omega = \omega_a$ (ressonante). Nessas circunstâncias, a Hamiltoniana que descreve os dois sistemas de cavidades acopladas interagindo com átomos de dois níveis são similares. Assim, de agora em diante, iremos tratar os dois modelos de forma unificada.

Apenas um modo normal é "acionado" durante a interação (\hat{A}_2 para o modelo de Zoubi, \hat{c} para Pellizzari). Por essa razão, nós assumiremos a seguinte notação:

$$|0\rangle_{A1} |n\rangle_{A2} = |0n\rangle_A \equiv |n\rangle$$

$$|0\rangle_{c+} |n\rangle_c |0\rangle_{c-} = |0n0\rangle_C \equiv |n\rangle$$

$$(5.1)$$

¹Por exemplo, dois átomos interagindo sucessivamente com uma mesma cavidade interagem indiretamente através do campo e se emaranham.

onde a primeira linha é para o modelo de Zoubi et. al. (duas cavidades) e a segunda, o modelo de Pellizzari (duas cavidades mais a fibra).

(i)Em tempos distintos:

Considere que apenas um átomo esteja interagindo com o sistema das cavidades acopladas (dentro da cavidade 1). Inicialmente, assumindo o átomo no estado excitado e os campos no vácuo, isto é,

$$\begin{aligned} |\Psi(0)\rangle &= |e_1\rangle |00\rangle_A \equiv |e_1\rangle |0\rangle \\ |\Psi(0)\rangle &= |e_1\rangle |000\rangle_C \equiv |e_1\rangle |0\rangle \end{aligned}$$
(5.2)

onde a primeira linha se refere ao sistema de duas cavidades separadas por um meio físico e a segunda, se refere ao acoplamento via fibra óptica.

Lembrando que os dois sistemas se reduziram a um átomo de dois níveis interagindo com um campo mono-modo quantizado (equivalente ao MJC), a dinâmica dos sistemas pode ser obtida aplicando o seguinte operador evolução temporal com j = 1 (substituindo \hat{A}_2 por \hat{c} para o acoplamento via fibra) no estado inicial,

$$U_{j}(t) = e^{-i\tilde{H}_{j}t/\hbar} = \cos\left(\frac{gt\sqrt{\hat{A}_{2}\hat{A}_{2}^{\dagger}}}{\sqrt{2}}\right) |e\rangle \langle e| + \cos\left(\frac{gt\sqrt{\hat{A}_{2}^{\dagger}\hat{A}_{2}}}{\sqrt{2}}\right) |g\rangle \langle g| \\ + \frac{(-1)^{j}i}{\sqrt{\hat{A}_{2}\hat{A}_{2}^{\dagger}}} sen\left(\frac{gt\sqrt{\hat{A}_{2}\hat{A}_{2}^{\dagger}}}{\sqrt{2}}\right) \hat{A}_{2} |e\rangle \langle g| + \frac{(-1)^{j}\hat{A}_{2}^{\dagger}i}{\sqrt{\hat{A}_{2}\hat{A}_{2}^{\dagger}}} sen\left(\frac{gt\sqrt{\hat{A}_{2}\hat{A}_{2}}}{\sqrt{2}}\right) |g\rangle \langle e|$$
(5.3)

Assim, o estado do sistema (nos dois casos) é, para um tempo de interação t_1 na representação de interação:

$$\left|\tilde{\Psi}(t_1)\right\rangle = U_1\left(t_1\right)\left|\psi\left(0\right)\right\rangle = \cos\left(\frac{gt_1}{\sqrt{2}}\right)\left|e_1\right\rangle\left|0\right\rangle - isen\left(\frac{gt_1}{\sqrt{2}}\right)\left|g_1\right\rangle\left|1\right\rangle \tag{5.4}$$

Após o átomo 1 ter atravessado a cavidade 1, nós mandamos o átomo 2 (depois de um tempo de espera arbitrário)², inicialmente no estado fundamental, através da cavidade 2. Usando j = 2 na eq.5.3 (com \hat{c} se for via fibra), a evolução temporal do sistema, com um tempo de interação t_2 entre o campo da segunda cavidade e o átomo tem a seguinte forma:

$$\begin{split} \left| \tilde{\Psi}(t_1, t_2) \right\rangle &= \cos(\frac{gt_1}{\sqrt{2}}) \left| e_1 \right\rangle \left| g_2 \right\rangle \left| 0 \right\rangle - isen(\frac{gt_1}{\sqrt{2}}) \left[\cos(\frac{gt_2}{\sqrt{2}}) \left| g_1 \right\rangle \left| g_2 \right\rangle \left| 1 \right\rangle \right. \\ &\left. + isen(\frac{gt_2}{\sqrt{2}}) \left| g_1 \right\rangle \left| e_2 \right\rangle \left| 0 \right\rangle \right] \end{split}$$

Fazendo o traço parcial sob as variáveis dos campos (o que unifica por completo o tratamento das duas situações) temos a seguinte matriz densidade para o sistema atômico, na base $\{|gg\rangle, |ge\rangle, |eg\rangle, |ee\rangle\}$:

$$\rho_{at}(t_1, t_2) = \begin{pmatrix}
\rho_{at}^{(gg, gg)} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \rho_{at}^{(ge, ge)} & \rho_{at}^{(ge, eg)} & 0 \\
0 & \rho_{at}^{(eg, ge)} & \rho_{at}^{(eg, eg)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$
(5.5)

²Quando o átomo 1 sai da cavidade, a interação átomo campo é interrompida e o sistema permanece no estado $|\Psi(t_1)\rangle$ com t_1 fixo até que o átomo 2 entre na segunda cavidade, pois o estado resultante é um auto-estado da Hamiltoniana livre.

$$\begin{split} \rho_{at}^{(gg,gg)} &= sen^{2}(\frac{gt_{1}}{\sqrt{2}})cos^{2}(\frac{gt_{2}}{\sqrt{2}})\\ \rho_{at}^{(ge,ge)} &= sen^{2}(\frac{gt_{1}}{\sqrt{2}})sen^{2}(\frac{gt_{2}}{\sqrt{2}})\\ \rho_{at}^{(ge,eg)} &= cos(\frac{gt_{1}}{\sqrt{2}})sen(\frac{gt_{1}}{\sqrt{2}})sen(\frac{gt_{2}}{\sqrt{2}})\\ \rho_{at}^{(eg,ge)} &= cos(\frac{gt_{1}}{\sqrt{2}})sen(\frac{gt_{1}}{\sqrt{2}})sen(\frac{gt_{2}}{\sqrt{2}})\\ \rho_{at}^{(eg,eg)} &= cos^{2}(\frac{gt_{1}}{\sqrt{2}}) \end{split}$$

Para obter o grau de emaranhamento compartilhado entre os dois átomos, podemos usar as medidas definidas na seção 1.4, a *concurrence* e a negatividade,



Figura 5.1: A *concurrence* (esquerda) e negatividade (direita) do sistema formado pelos dois átomos interagindo sucessivamente com as cavidades acopladas em função de gt_1 e gt_2 .

Pela figura 5.1 podemos notar que o emaranhamento tem um caráter oscilatório e, para $gt_1 = (2n+1)\pi/2\sqrt{2}$, n = 0, 1, 2, ... e $gt_2 = (2m+1)\pi/\sqrt{2}$, m = 0, 1, 2, ... o sistema atômico está em um estado maximamente emaranhado C = N = 1 (e pela eq.5.5, vemos que o sistema das cavidades acopladas volta ao estado de vácuo³).

Em particular, assumindo que $gt_1 = \pi/2\sqrt{2}$ e $gt_2 = \pi/\sqrt{2}$, obtemos o seguinte estado da base de Bell,

$$|\Psi_{at}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|g_1\rangle |e_2\rangle + |e_1\rangle |g_2\rangle \right) \tag{5.6}$$

É importante notar que outro estado de Bell pode ser gerado, para $gt_1 = 3\pi/2\sqrt{2}$ e $gt_2 = \pi/\sqrt{2}$ temos:

$$|\Psi_{at}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|g_1\rangle |e_2\rangle - |e_1\rangle |g_2\rangle \right) \tag{5.7}$$

49

³Esta é uma observação muito relevante, uma vez que, podemos repetir o procedimento para geração de um par EPR de átomos sem precisar preparar o estado da cavidade.

Este procedimento para gerar um par EPR de átomos é análogo ao esquema no qual dois átomos atravessam a **mesma** cavidade sucessivamente [6,7] e, controlando o tempo de interação de cada átomo com o campo, um par EPR é criado. Porém, aqui, temos duas cavidades acopladas espacialmente separadas que permite emaranhar átomos remotos.

Tal par EPR pode, então, ser usado para um teste da Desigualdade de Bell [38,58](com máxima violação) ou para a realização do Teletransporte quântico [41](com máxima eficiência) com a vantagem de já estarem espacialmente separados.

Uma importante generalização para gerar estados multi-partites emaranhados em uma cavidade [6,7, 9] também pode ser viável no sistema de cavidades acopladas. Considere *n* átomos, passando um átomo em cada cavidade sucessivamente interpolados é possível criar um estado multi-partite emaranhado espacialmente separado tipo W, controlando o tempo de interação.



Figura 5.2: Esquema da generalização para produzir estados multi-partites emaranhados de n átomos em cavidades acopladas (na figura, via fibra).

(*ii*)Ao mesmo tempo:

Agora, vamos discutir o procedimento para gerar um estado maximamente emaranhado entre dois átomos interagindo simultaneamente (um em cada cavidade) com o sistema de cavidades acopladas. Em um primeiro passo, fazemos passar um átomo de dois níveis no estado excitado através da cavidade 1 (inicialmente no vácuo). Retornando a eq.5.4, fixando um tempo de interação átomo campo de $gt_1 = \pi/\sqrt{2}$ o estado do sistema evolui para;

$$\left|\tilde{\Psi}(\pi/\sqrt{2})\right\rangle = \left|g\right\rangle\left|1\right\rangle \tag{5.8}$$

Aqui é importante retornar a base original (associada aos operadores do campo) usando a transformação canônica dada pela eq.4.5 (ou eq.4.18 para acoplamento via fibra):

$$|\Psi_{C1C2}\rangle = |1\rangle \equiv |01\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} - |0\rangle_{a1} |1\rangle_{a2}) |\Psi_{C1FC2}\rangle = |1\rangle \equiv |010\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} - |0\rangle_{a1} |1\rangle_{a2}) \otimes |0\rangle_b$$
(5.9)

Então, após um tempo de interação de $gt_1 = \pi/\sqrt{2}$ as duas cavidades acopladas estão em um estado

maximamente emaranhado de um fóton (estado de Bell entre as duas cavidades, e a fibra, se houver, no vácuo) e o átomo, no estado fundamental (separado do campo⁴).

Consideremos a passagem de um par de átomos, cada um em uma cavidade, depois que o primeiro deixou de interagir, podemos, assim, determinar a evolução temporal do sistema resolvendo a equação de Schrödinger na representação de interação:

$$\frac{d}{dt}\left|\tilde{\Psi}(t)\right\rangle = -\frac{i}{\hbar}\tilde{H}\left|\tilde{\Psi}(t)\right\rangle \tag{5.10}$$

onde $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$ é o estado do sistema no tempo t (na representação de interação) e \tilde{H} é o Hamiltoniano de interação (eq.4.14 para o meio físico ou eq.4.23 via fibra, que são equivalentes).

Assumindo, então, que a solução geral da equação 5.10 seja o estado puro dado pela seguinte fórmula, na base $\{|l\rangle\}$ de estados associados ao operador \hat{A}_2 (\hat{c}) e levando em conta que os outros modos normais estão no estado de vácuo:

$$\left|\tilde{\Psi}(t)\right\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \left[C_{l+1}^{gg}(t) \left|l+1\right\rangle \left|g_{1}\right\rangle \left|g_{2}\right\rangle + C_{l}^{ge}(t) \left|l\right\rangle \left|g_{1}\right\rangle \left|e_{2}\right\rangle + C_{l}^{eg}(t) \left|l\right\rangle \left|e_{1}\right\rangle \left|g_{2}\right\rangle + C_{l-1}^{ee}(t) \left|l-1\right\rangle \left|e_{1}\right\rangle \left|e_{2}\right\rangle \right]$$
(5.11)

Substituindo a equação 5.11 na equação de Schrödinger, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais envolvendo os coeficientes $C_l^{i,j}$:

$$\frac{d}{dt}C_{l+1}^{gg}(t) = -ig\sqrt{\frac{l+1}{2}} \left[C_{l-1}^{eg}(t) - C_{l-1}^{ge}(t)\right];$$

$$\frac{d}{dt}C_{l}^{ge}(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}g\left[\sqrt{l}C_{l-2}^{ee}(t) - \sqrt{l+1}C_{l+1}^{gg}(t)\right];$$

$$\frac{d}{dt}C_{l}^{eg}(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}g\left[\sqrt{l+1}C_{l+1}^{gg}(t) - \sqrt{l}C_{l-1}^{ee}(t)\right];$$

$$\frac{d}{dt}C_{l-1}^{ee}(t) = -ig\sqrt{\frac{l}{2}} \left[C_{l}^{ge}(t) - C_{l}^{eg}(t)\right].$$
(5.12)

Para l = 0 (caso que iremos estudar) é necessário apenas considerar as três primeiras equações e, desta forma, para o nosso propósito, a dinâmica do sistema é facilmente obtida.

Ambos os átomos estão inicialmente no estado fundamental e as cavidade no estado de Bell dado pela expressão 5.9 (e a fibra no vácuo).

Então, resolvendo o sistema de equação diferencias (eq.5.12), o estado do sistema após um tempo t de interação é:

$$\left|\tilde{\Psi}(t)\right\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\left(gt\right)\left[\left|g_{1}\right\rangle\left|e_{2}\right\rangle - \left|e_{1}\right\rangle\left|g_{2}\right\rangle\right]\left|0\right\rangle + \cos\left(gt\right)\left|g_{1}\right\rangle\left|g_{2}\right\rangle\left|1\right\rangle$$
(5.13)

Traçando as variáveis do campo, obtemos a seguinte matriz densidade de estados, na base $\{|gg\rangle, |ge\rangle, |eg\rangle, |eg\rangle, |ee\rangle\};$

$$\rho_{at}(t) = \begin{pmatrix}
\cos^2 gt & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{sen^2 gt}{2} & \frac{-sen^2 gt}{2} & 0 \\
0 & \frac{-sen^2 gt}{2} & \frac{sen^2 gt}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$
(5.14)

 $^{^{4}}$ Uma vez que o átomo tenha saído da cavidade em um estado separável com o campo qualquer influência do ambiente sobre ele não afetará o sistema das cavidades acopladas.

Podemos usar, novamente, as grandezas chamadas de *concurrence* e negatividade para quantificar o grau de emaranhamento entre o dois átomos interagindo com o sistema de cavidades acopladas.



Figura 5.3: Concurrence (esquerda) e negatividade (direita), em função de gt, para dois átomos interagindo simultaneamente com o sistema de cavidades acopladas.

Nota-se que para tempos de interação de $gt = (2n + 1)\pi/2$ com n = 0, 1, 2, ... obtem-se um estado maximamente emaranhado (C = N = 1) da forma;

$$|\Psi_{at}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|g_1\rangle |e_2\rangle - |e_1\rangle |g_2\rangle \right].$$
(5.15)

Embora precisemos de um emaranhamento inicial compartilhado entre os campos, o átomo precisa atravessar apenas uma das cavidades para gerar o estado maximamente emaranhado de um fóton (graças ao acoplamento entre as cavidades), isto torna o procedimento mais vantajoso do que o apresentado por Gerry [22] com duas cavidades desacopladas.

Nesse capítulo vimos então como gerar um estado maximamente emaranhado (estado de Bell) entre dois átomos idênticos remotos localizados em cavidades distintas acopladas (a curtas distâncias separadas por um meio físico com $\lambda = \omega - \omega_a$ e longas distâncias com $\omega = \omega_a$) e interagindo ao mesmo tempo ou em tempos distintos com os campos.

Já existem propostas para geração de um estado maximamente emaranhado entre dois átomos remotos no sistema de duas cavidades acopladas via fibra [32, 33]. No entanto exigem constantes de acoplamento átomo campo diferentes, em particular, deve-se ter um relação específica entre g_1 e g_2 .

Lembrando que a constante de acoplamento entre o sistema atômico e o campo pode ser expressada como,

$$g = -\frac{\vec{\wp} \cdot E_0 \vec{e}}{\hbar} \tag{5.16}$$

onde $\vec{\wp}$ depende do raio de Bohr do átomo e E_0 dependo do modo da cavidade.

Desta forma, como os modos das duas cavidades devem estar em ressonância com a freqüência de transição atômica [32, 33], a única forma de se obter as constantes g_1 e g_2 desejados é usando átomos com raio de Bohr específicos que dão as constantes de acoplamento necessárias. Fato que

é extremamente difícil de se tratar experimentalmente lembrando que eles devem possuir a mesma freqüência de transição. Em nosso esquema $g_1 = g_2 = g$, que é mais simples de ser obtido já que podemos usar átomos iguais.

Ainda é importante salientar que consideramos apenas o caso ideal, ou seja, desconsideramos os efeitos da dissipação na geração do estado emaranhado atômico (fizemos apenas alguns comentários qualitativo na seção 4.3).

6 Considerações finais e Perspectivas futuras

Neste trabalho estudamos os conceitos fundamentais do emaranhamento quântico (um dos pilares da teoria de informação quântica), aspectos qualitativos e quantitativos, estudamos a interação do campo quantizado com átomos de dois níveis em uma cavidade quântica (o modelo Jaynes-Cummings). Vimos o emaranhamento surgir entre átomos de dois níveis em uma cavidade e em duas cavidades desacopladas.

Com duas cavidades desacopladas separadas espacialmente, um custo inicial deve ser pago para gerar um estado emaranhado entre os átomos remotos (em nodos distintos de uma rede quântico). É necessário uma interação indireta entre as duas cavidades (através de um átomo) para produzir um estado emaranhado inicial compartilhado entre os campos e, então, transferi-lo para os átomos (*entanglement swapping*) ou, ainda, por meio da detecção de um fóton que venha a escapar das cavidades e se interferir em um *beam splitter*, neste o procedimento é probabilístico dependendo da medição de um fóton.

Estudamos, também, um sistema de duas cavidades dinamicamente acopladas através das ondas evanescentes que escapam de uma cavidade e interferem com o campo da outra. Para distâncias da ordem do tamanho da cavidade o acoplamento é direto, basta colocá-las lado a lado separadas por um meio físico como o vácuo ou um material dielétrico. Já para distâncias da ordem de 1 m (viável experimentalmente), uma fibra óptica é necessária para propagar o campo até a segunda cavidade.

Consideramos a interação de cada cavidade com átomos de dois níveis e vimos que em regimes particulares ambos os sistemas se reduzem a interação dos átomos com um campo mono-modo ressonante.

Observamos, então, a dinâmica do emaranhamento entre dois átomos, em particular, vimos como gerar estados maximamente emaranhados entre dois átomos idênticos remotos interagindo sucessivamente ou simultaneamente com o sistema das cavidades acopladas de forma determinística e sem a necessidade de uma interação indireta entre os subsistemas [53].

Em um sistema composto por uma cavidade retangular dividida por uma parede dielétrica (duas cavidades fracamente acopladas via meio físico), Skarja et al. [34] também produziram um par EPR de átomos interagindo sucessivamente com os campos das cavidades acopladas. Nesse trabalho, eles usaram como parâmetro $\Omega_1 - \omega_a = -(\Omega_2 - \omega_a)$, então os átomos interagem com os dois modos normais do sistema ($\hat{A}_1 \in \hat{A}_2$) que, em geral, complica a solução analítica.

Recentemente, Zhang et. al. [32] propuseram um esquema para criar um par EPR entre multiátomos (isto é, dois conjuntos de N átomos tratados segundo o modelo de Dicke) em um sistema de duas cavidades conectadas por uma fibra óptica. O par é produzido através de uma interação simultânea dos dois conjuntos de átomos com o sistema de cavidades acopladas porém, embora não precise de um átomo inicial para gerar o estado emaranhado do campo, a constante de acoplamento entre os N átomos e sua respectiva cavidade são diferentes $(g_1 \neq g_2)$. Em nosso esquema $g_1 = g_2 = g$, que é mais simples de ser obtido experimentalmente já que podemos usar átomos iguais e não aqueles com raio de Bohr específicos que dão as constantes de acoplamento necessárias (veja tabela 6.1 abaixo para mais detalhes).

Simultânea	Zhang et. al.	Esquema deste trabalho
Constante de acoplamento	$g_2 = \left(\pm 1 + \sqrt{2}\right)g_1$	$g_1 = g_2$
Tempo requerido	$\sqrt{N}g_1t = \pi/\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$	$gt = \left(1 + \sqrt{2}\right)\pi/2$
Estado EPR	$1/\sqrt{2}\left(\left ge ight amegt\pm\left eg ight angle ight)$	$1/\sqrt{2}\left(\left ge\right\rangle - \left eg ight angle ight)$

Tabela 6.1: Comparação entre o esquema de Zhang et. al. [32] e a nossa modificação proposta nesse trabalho.

Trabalhando com o conjunto de N átomos, Zhang et. al. [32] obtiveram um speed-up proporcional a $1/\sqrt{N}$ na geração do par EPR, fato que é útil para diminuir a influência dos processos de dissipação como a emissão espontânea e a perda de fóton pela cavidade. Experimentalmente já foi implementado um conjunto de $N \approx 200$ átomos de Cs aprisionados, na forma de um disco, satisfazendo as condições do modelo de Dicke¹ [32]. Em nossa proposta, trabalhar com o conjunto de N átomos teria o mesmo efeito, porém vale lembrar que Zhang et. al. [32] trabalharam com os átomos aprisionados e nós com átomos atravessando a cavidade. Nesse caso, usando armadilhas magneto-ópticas (MOT), um conjunto de $N \approx 100$ átomos de ⁸⁷Rb foram aprisionados e transportados para uma cavidade óptica [19].





Para o futuro, seria interessante estender o acoplamento para mais de duas cavidades seja para curtas distâncias, separadas por um meio físico (o vácuo ou um material dielétrico), ou longas distâncias, via fibra óptica.

O acoplamento de mais de duas cavidades abre a possibilidade de gerar estados emaranhados com mais de dois átomos em diferentes cavidades o que permitiria investigar diferentes aspectos da nãolocalidade com mais de dois sistemas [72, 94]. Além disso, seria de fundamental relevância para a computação quântica distribuída uma vez que aumentaria o número de qubits envolvidos (aumentaria o número de nodos da rede quântica).

É importante, para trabalhos futuros, incluir os efeitos da dissipação (como a emissão espontânea e a perda de fóton da cavidade para o ambiente, de forma quantitativa via equação mestra) na dinâmica

¹Isto é, átomos suficientemente separados para não haver interação entre eles mas próximos o bastante para "sentir" o mesmo campo (constante de acoplamento igual para o conjunto de átomos).

do sistema das cavidades acopladas [99] analisando as conseqüências destes na geração dos estados emaranhados entre os átomos.

Ao invés de átomos atravessando a cavidade, ainda é muito interessante considerar o sistema de íons aprisionados [100] no sistema de cavidades acopladas obtendo assim estados emaranhados mais estáveis.

A Interpretação de Copenhagem

Na mecânica clássica um sistema físico é determinado se a posição e a velocidade em cada ponto é conhecida como uma função do tempo. Todas as outras grandezas físicas associadas ao sistema podem ser obtidas em termos da posição e velocidade, como o momento angular (dada uma origem do sistema de referência) e energia. As grandezas medidas independem do observador e do equipamento utilizado e as medidas de posição e velocidade podem ser efetuadas simultânea e independentemente.

Com a mecânica quântica a história é outra, os fenômenos que ocorrem em nível atômica são diferentes dos fenômenos macroscópicos e por essa razão os conceitos básicos da teoria clássica não servem mais. Já não é possível desprezar os efeitos do observador e do equipamento em sua medida.

A todo estado de um sistema físico (quântico) podemos associar a um vetor no espaço de *Hilbert*(um $ket |\psi\rangle$ na notação de Dirac). Tal espaço é definido matematicamente como um espaço vetorial complexo, fechado e provido de uma métrica (o produto escalar).

Toda quantidade física mensurável está associada a um operador hermitiano que age no espaço de *Hilbert*. Os únicos resultados possíveis de serem obtidos em uma medida são os autovalores desse operador. Existem operadores que possuem um espectro discreto dando origem a quantização. Duas medidas só poderam ser realizadas simultaneamente se os operadores correspondentes comutarem entre si.

O valor médio de qualquer quantidade mensurável A, quando o sistema está em um estado $|\psi\rangle$, é dado pela expressão:

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle \tag{A.1}$$

Uma importante consequência do espaço de *Hilbert* ser um espaço vetorial é que se $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ pertencem a esse espaço vetorial, então $|\psi\rangle = a |\psi_1\rangle + b |\psi_2\rangle$ também pertence a esse espaço para qualquer *a* e *b* complexos. Essa propriedade é conhecida como o princípio da superposição da mecânica quântica. Dessa forma, mesmo estados puros podem apresentar uma variância não nula para o valor médio de um certo operador A (a menos que o estado seja um autoestado de A).

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \neq 0 \tag{A.2}$$

Então, a mecânica quântica admite um caráter aleatório intrínseco ao sistema e não devido a um conhecimento incompleto do sistema ou erros experimentais. Além disso, pela evolução temporal do sistema, uma vez conhecido o estado inicial, não é possível prever os resultados de medições futuras.

Desta forma, enquanto a física clássica é uma teoria determinística, a mecânica quântica, com todas as suas incertezas, é uma teoria probabilística (Interpretação de Copenhagem).

B Operador densidade

O formalismo do operador densidade foi elaborado na Mecânica Estatística Quântica para trabalhar com um sistema quântico que se encontre em um estado de mistura estatística. Um exemplo é dado por um sistema acoplado a um reservatório em equilíbrio térmico à uma temperatura T, conhecido como ensemble canônico.

B.1 Estado Puro

Um sistema que se encontra em um estado $|\Psi\rangle$ perfeitamente conhecido (estado puro) pode ser descrito usando o seguinte operador densidade:

$$\rho = |\Psi\rangle \langle \Psi| \tag{B.1}$$

A partir desse operador é possível associar a matriz densidade de estados cujos elementos são, na base $\{|u_n\rangle\}$:

$$\rho_{np} = \langle u_n | \rho | u_p \rangle = c_n c_p^* \tag{B.2}$$

Pela conservação de probabilidade temos, então:

$$\sum_{n} |c_{n}|^{2} = \sum_{n} \rho_{nn} = Tr(\rho) = 1$$
(B.3)

Outra importante propriedade dos estados puros é que $\rho = \rho^2$, isto é, ρ representa um projetor.

B.2 Estado Misto

Na natureza, o estado de um sistema físico não é, em geral, pefeitamente determinado. Por exemplo, em uma fonte natural de luz não é possível saber com certeza a polarização dos fótons emitidos. O sistema passa a exibir também uma incerteza estatística, além da incerteza intrínseca do mundo quântico.

Nesse cenário, o operador densidade corresponde a um meio conveniente para se representar esse estado de mistura. Suponha que o sistema quântico esteja em um dos estados $|\Psi_i\rangle$ com probabilidade p_i , então o operador densidade é definido pela equação:

$$\rho = \sum_{i} p_{i} \left| \Psi_{i} \right\rangle \left\langle \Psi_{i} \right| \tag{B.4}$$

Pela conservação de probabilidade, a propriedade de traço unitário ainda é válida:

$$Tr(\rho) = \sum_{i} p_{i} Tr(|\Psi_{i}\rangle \langle \Psi_{i}|) = \sum_{i} p_{i} = 1$$
(B.5)

Porém, ρ não representa mais um projetor e desta forma $\rho\neq\rho^2$ e então:

$$Tr(\rho^2) \le 1 \tag{B.6}$$

C Decomposição de Schmidt

A decomposição de Schmidt, também conhecido como teorema de Schmidt, constitui uma ferramenta muito útil em Teoria de Informação Quântica no estudo das propriedades do emaranhamneto de sistemas bipartites.

Seja um estado puro geral composto de dois subsistemas A (dimensão d_1) e B (dimensão d_2):

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_2} c_{i,j} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle \tag{C.1}$$

onde $\{|a_i\rangle\} \in \{|b_j\rangle\}$ correspondem a uma base ortonormal dos subsistemas A e B respectivamente.

Para o subsistema A existe um outro conjunto de estados ortonormais $\{|u_i^A\rangle\}$ assim como para o subsistema B existe um outro conjunto de estados ortonormais $\{|v_i^B\rangle\}$.

A chamada decomposição de Schmidt de um estado puro bipartite é definida como:

$$\left|\psi\right\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i} \left|u_i^A\right\rangle \otimes \left|v_i^B\right\rangle \tag{C.2}$$

onde $d = \min \{ d_1, d_2 \}, \sqrt{\lambda_i}$ são números reais não negativos conhecidos como coeficientes de Schmidt e $\sum_i \lambda_i = 1.$

A nova base $\{|u_i^A\rangle\}$ e $\{|v_i^B\rangle\}$ são chamadas de *bases de Schmidt* para A e B, e o número de λ_i 's diferentes de zero é chamado de *número de Schmidt*. Um estado $|\psi\rangle$ é separável se e somente se seu número de Schmidt for igual a 1.

Referências

- [1] H. Zoubi, M. Orenstien, and A. Ron, *Phys. Rev. A.* **62**, 033801 (2000).
- [2] T. Pellizzari, Phys. Rev. Lett. **79**, 5242 (1997).
- [3] C. H. Bennett and D. P. DiVicenzo, Nature (London) **404**, 247 (2000).
- [4] A. Ekert and R. Jozsa, Rev. Mod. Phys. 68, 733(1996); V. Vedral and M.B. Plenio, Prog. Quantum Electronics. 22, 1 (1997).
- [5] J. I. Cirac, A. K. Ekert, S. F. Huelga, and C. Macchiavello, Phys. Rev. A. 59, 4249 (1999).
- [6] J. I. Cirac and P. Zoller, Phys. Rev. A. 50, R2799 (1994).
- [7] E. Hagley, X. Maître, G. Nogues, C. Wunderlich, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. 79, 1 (1997).
- [8] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, Rev. Mod. Phys. 73, 565 (2001);
- [9] G.- C. Guo and Y- S. Zhang, Phys. Rev. A. 65, 054302 (2002).
- [10] S.-B. Zheng and G.-C. Guo, Phys. Rev. Lett. 85, 2392 (2000)
- [11] G.-P. Guo, C.-F. Li and G. -C. Guo, Phys. Rev. A. 65, 042102 (2002).
- [12] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. 77, 4887 (1996).
- [13] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagler, J. M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. 76,1800 (1996).
- [14] S.-B. Li and J.-B. Xu, Phys. Rev. A. **72**, 022332 (2005).
- [15] G. Rempe, Contemporary Physics **34**, 119 (1993).
- [16] A. Boca, R. Miller, K. M. Birnbaum, A. D. Boozer, J. McKeever, and H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. 93, 233603 (2004).
- [17] S. M. Spillane, T. J. Kippenberg, K. J. Vahala, K. W. Goh, E. Wilcut, and H. J. Kimble, Phys. Rev. A 71, 013817 (2005).
- [18] M. Trupke et. al., Appl. Phys. Lett. 87, 211106 (2005).
- [19] J. A. Sauer et. al., Phys. Rev. A. 69, 511804(R) (2004).

- [20] P. Maunz et. al., quant-ph/0406136 (2004).
- M. Zukowks, A. Zeiling, M. A Horne and A. K. Ekert, Phys. Rev. Lett. **71**, 4287 (1993); J.-W.
 Pan, D. Bouwmeester, H. Weinfurter and A. Zeiling, Phys. Rev. Lett. **80**, 3891 (1998).
- [22] C.C. Gerry, Phys. Rev. A. 53, 4583 (1996);
- [23] B. Ghosh, A. S. Majumdar and N. Nayak, quant-ph/0505037 (2005).
- [24] Lo Franco, G. Compagno, A. Messina, and A. Napoli, Phys. Rev. A. 72, 053806 (2005).
- [25] J. Lee, M. Paternostro, M. S. Kim, and S. Bose, Phys. Rev. Lett. 96, 080501 (2005).
- [26] C. D. Ogden, M. Paternostro, and M. S. Kim, quant-ph/0701220 (2007).
- [27] L.-M. Duan and H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **90**, 253601 (2003);
- [28] D. E. Browne, M. B. Plenio, and S. F. Huelga, Phys. Rev. Lett. **91**, 067901 (2003).
- [29] F. K. Nohama and J. A. Roversi, J. Mod. Opt. 54, 1139 (2007).
- [30] J. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble and H. Mabuchi, Phys. Rev. Lett. 78, 3221 (1997).
- [31] A. Serafini, S. Mancini, and S. Bose, Phys. Rev. Lett. 96, 010503 (2006).
- [32] Zhang-qi Yin and Fu-li Li, Phys. Rev. A. **75**, 012324 (2007).
- [33] Peng Peng and Fu-li Li, Phys. Rev. A. 75, 062320 (2007).
- [34] M. Skarja, N. M. Borstnik, M. Löffler, and H. Walther, Phys. Rev. A. 60, 3229 (1999).
- [35] S. Clark, A. Peng, M. Gu, and S. Parkins, Phys. Rev. Lett. 91, 177901 (2003).
- [36] S. Stefano and S. Bose, Phys. Rev. A. 70, 022307 (2004).
- [37] D. N. Matsukevich, T. Chanelière, S. D. Jenkins, S.-Y. Lan, T. A. B. Kennedy, and A. Kuzmich, Phys. Rev. Lett. 96, 030405 (2006).
- [38] J. S. Bell, Physics 1, 195 (1964).
- [39] A. Peres, Phys. Rev. Lett. 77, 1413 (1996).
- [40] M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki, Phys. Lett. A. **223**, 1 (1996).
- [41] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres and W.K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* 70, 1895 (1993).
- [42] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin and W. K. Wootters, Phys. Rev. A. 54, 3824 (1996).
- [43] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Phys. Rev. Lett. 78, 574 (1997).
- [44] S. Hill and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 78, 5022 (1997);
- [45] V. Vedral, M.B.Plenio, M.A.Rippin, and P.L.Knight, Phys. Rev. Lett. 78, 2275 (1997).
- [46] V. Vedral and M.B.Plenio, Phys. Rev. A. 57, 1619 (1997).
- [47] G. Vidal and R. F. Werner, Phys. Rev. A. 65, 032314 (2001).
- [48] S. Lee, D. P. Chi, S. D. Oh and J. Kim, Phys. Rev. A. 68, 062304 (2003).
- [49] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. IEEE 51, 89 (1963);
- [50] A. Yariv, Y. Xu, R. K. Lee, and A. Scherer, Opt. Lett. 24, 711 (1999).
- [51] H. A. Haus, W. P. Huang, S. Kawakami, and N. A. Whitaker, J. Lightwave Technol. 5, 16 (1987).
- [52] G.T. Nogueira, Dinâmica de um sistema átomo-campo eletromagnético acoplado à uma segunda cavidade, Tese de Mestrado, UNICAMP (2001).
- [53] B. F. C. Yabu-uti, F. K. Nohama, and J. A. Roversi, artigo a ser submetido ao J. Mod. Opt.
- [54] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Phys. Rev. 47, 777 (1935).
- [55] E. Schrödinger, Naturwissenschaften, 23, 807 (1935); E. Schrödinger, Proc. Camb. Phil. Soc. 31, 555 (1935); E. Schrödinger, Proc. Camb. Phil. Soc. 32, 446 (1936).
- [56] A. Ekert, Phys. Rev. Lett. **67**, 661 (1991).
- [57] D. N. Klyshko, Phys. Lett. A. **172**, 399 (1993).
- [58] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony and R. A. Holt, Phys. Rev. Lett. 23, 880 (1969).
- [59] L. J. Landau, Phys. Lett. A. **120**, 54 (1987).
- [60] J. F. Clauser and A. Shimony, Rep. Prog. Phys., 41, 1881 (1978).
- [61] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, Phys. Rev. Lett. 47, 460 (1981).
- [62] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, Phys. Rev. Lett. 49, 91 (1982).
- [63] N. Gisin, Phys. Lett. A. 154, 201 (1991); S. Popescu and D. Rohrlich, Phys. Lett. A. 166, 293 (1992).
- [64] R. Werner, Phys. Rev. A 40, 4277 (1989).
- [65] Sandu Popescu, Phys. Rev. Lett. **74**, 2619 (1995);

- [66] N. Gisin, Phys. Lett. A. **210**, 151 (1996).
- [67] P. Horodecki, Phys. Lett. A. **232**, 333 (1997).
- [68] A. Peres, Phys. Rev. A. 54, 2685 (1996).
- [69] R. Horodecki, P. Horodecki and M. Horodecki, Phys. Lett. A. **200**, 340 (1995);
- [70] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter and A. Zeiling, Nature 390, 575 (1997).
- [71] W. K. Wootters and W. H. Zurek, Nature **299**, 802 (1992).
- [72] A. V. Thapliyal, Phys. Rev. A. 59, 3336 (1999).
- [73] W. Dür, G. Vidal and J. I. Cirac, quant-ph/0005115 (2000).
- [74] Tzu-Chieh Wei, Kae Nemoto, Paul M. Goldbart, Paul G.Kwiat, William J.Munro, and Frank Verstraete Phys. Rev. A. 67,022110 (2003).
- [75] M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki, Phys. Rev. Lett. 84, 2014 (2000);
- [76] M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki, Phys. Rev. Lett. 80, 5239 (1998);
- [77] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popesco and B. Schumacher, Phys. Rev. A. 53, 2046 (1996).
- [78] K. G. H. Vollbrecht and R. F. Werner, Phys. Rev. A. 64, 062307 (2001).
- [79] M. Horodecki and P. Horodecki, Phys. Rev. A. 59, 4206 (1999).
- [80] S. Popesco and D. Rohrlich, Phys. Rev. A. 56, 3219 (1997).
- [81] C. H. Bennet, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J. A. Smolin and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 76, 722 (1995).
- [82] A. Uhlmann, Phys. Rev. A. 62, 032307 (2000). P. Rungta, V. Buzek, C. M. Caves, M. Hillery and G. J. Milburn, Phys. Rev. A. 64, 042315 (2001). S. J. Akhtarshenas, quant-ph/0311166 (2003). F. Mintert, M. Kus and A. Buchleitner, Phys. Rev. Lett. 95, 260502 (2005).
- [83] M. O. Scully and M. S. Zubairy; Quantum Optics, Cambridge University Press, 1997.
- [84] R. Loudon, The Quantum Theory of Light, Claredon Press: Oxford, 1^o edição, 1973.
- [85] P. Meystre and M. Sargent III. Elements of Quantum Optics, Spring-Verlag, 2^o edição, 1991.
- [86] I. Sainz, A. B. Klimov and L. Roa, quant-ph/0509201 (2005).
- [87] A.B. Klimov, L.L. Sanchez-Soto, A. Navarro and E.C. Yustas J. Mod. Opt. 49, 2211 (2002).

- [88] I. Sainz, A. B. Klimov and S. M. Chumakov, J. Opt. B: Quantum and Semiclass. Opt. 5, 190 (2003).
- [89] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X.Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J.M.Raimond and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. 77, 4887 (1996).
- [90] P. Badziag, M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki, Phys. Rev. A. 62, 012311 (2000);
- [91] D. M. Greenberger, M. A. Horne, and A. Zeiling, Am. J. Phys. 58, 1131 (1990).
- [92] W. Dür, G. Vidal, and J. I. Cirac, Phys. Rev. A. 62, 062314 (2000).
- [93] S. Bose, P. L. Knight, M. B. Plenio and V. Vedral, Phys. Rev. Lett. 83, 5158 (1999).
- [94] D. Bouwmeester, A. Ekert, and A. Zeilinger, The Physics of Quantum Information: Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computation. Ed. Springer, 2000.
- [95] N.W. Ashcroft and N.D. Mermin, Solid State Physics, Saunders: Philadelphia, 1976.
- [96] R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
- [97] S.M. Spillane, T. J. Kippenberg, O. J. Painter, and K. J. Vahala, Phys. Rev. Lett. 91, 043902 (2003).
- [98] J.-W. Pan, D. Bouwmeester, M. Daniell, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, Nature 403, 515 (2000);
 V. Scarani and N. Gisin, Phys. Rev. Lett. 87, 117901 (2001); J.-W. Pan, M. Daniell, S. Gasparoni,
 G. Weihs, and A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. 86, 4435 (2001).
- [99] S. G. Mokarzel, A. N. Salgueiro and M. C. Nemes, Phys. Rev. A. 65, 044101 (2002); A. R. Bosco de Magalhães et. al., Physica A. 341, 234 (2004); M. A. Ponte et. al., Annals of Physics 322, 2077 (2007).
- [100] F. L. Semião et. al., J. Phys. B: Atomic Molecular and Optical Physics, 40, 5221 (2007).