

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN"

Departamento de Eletrônica Quântica

Grupo de Óptica Quântica

TESE DE MESTRADO

**INFLUÊNCIA DA COMPRESSÃO DO CAMPO
ELETROMAGNÉTICO NO
EMARANHAMENTO ATÔMICO PARA
PROCESSOS DE 1 E 2 FÓTONS**

Hugo L. O. Meneguele

Prof. Dr. José Antonio Roversi (orientador)

Este exemplar corresponde à redação final da Tese de Mestrado defendida pelo aluno Hugo Leonardo de Oliveira Meneguele e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 28 de novembro de 2007

Prof. Dr. José Antonio Roversi

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

M524i	<p>Meneguele, Hugo Leonardo de Oliveira Influência da compressão do campo eletromagnético no emaranhamento atômico para processos de 1 e 2 fótons / Hugo Leonardo de Oliveira Meneguele. -- Campinas, SP : [s.n.], 2007.</p> <p>Orientador: José Antonio Roversi. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".</p> <p>1. Ótica quântica. 2. Emaranhamento quântico. 3. Eletrodinâmica quântica de cavidades. I. Roversi, José Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.</p> <p>(vsv/ifgw)</p>
-------	---

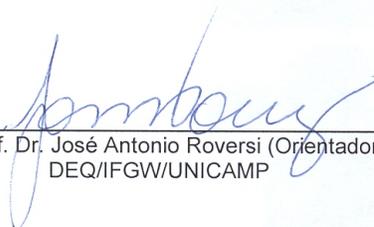
- **Título em inglês:** Influence of the electromagnetic field squeezing in atomic entanglement for 1 and 2 photons processes
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 1. Quantum optics
 2. Quantum entanglement
 3. Cavity quantum electrodynamics
- **Área de concentração:** Física
- **Titulação:** Mestre em Física
- **Banca examinadora:**

Prof. José Antonio Roversi
Prof. Flávio Caldas da Cruz
Prof. Celso Jorge Villas-Bôas
- **Data da defesa:** 30.08.2007
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE HUGO LEONARDO DE OLIVEIRA MENEGUELE – RA 008885 APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 30 / 08 / 2007.

COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. José Antonio Roversi (Orientador do Candidato) –
DEQ/IFGW/UNICAMP



Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Boas – DF/UFSCar



Prof. Dr. Flávio Caldas da Cruz – DEQ/IFGW/UNICAMP

Keep walking

Agradecimentos

Agradeço a Deus e meus pais, sem os quais não estaria aqui. Aos meus irmãos, primeiros amigos. Aos outros amigos, de perto e de longe, de anos e de ontem. Ao meu orientador, pelo exemplo, dedicação e paciência. Aos colegas de grupo, companheiros de curiosidade. Às bancas que acompanharam este trabalho, pela atenção e sugestões. Ao pessoal da secretaria, por desembaraçarem a burocracia, ao pessoal da biblioteca, pelo apoio em horas críticas e à CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o emaranhamento quântico entre dois átomos, que surge quando ambos interagem com o mesmo campo em uma cavidade. A interação é descrita pelo Modelo de Jaynes-Cummings para processos de 1 e 2 fótons, sendo analisadas as diferenças na dinâmica de emaranhamento devidas aos processos distintos. A cavidade é preparada em estados comprimidos de 1 e 2 modos, sendo analisada a influência da compressão inicial no emaranhamento atômico obtido, em termos do máximo emaranhamento possível para cada situação, bem como a robustez e persistência do emaranhamento gerado em relação à compressão.

Encontramos que a compressão de um modo é, de modo geral, danosa ao emaranhamento, embora também provoque um efeito de deslocamento nos instantes de interação que gera ganhos para instantes de baixo emaranhamento. Processos de 2 fótons em campos comprimidos de 1 modo fazem com que o emaranhamento se torne mais robusto, sendo mais persistente contra os efeitos redutores da compressão. Para campos comprimidos de 2 modos, a compressão aumenta o emaranhamento entre os modos da cavidade e reduz entre os átomos; estes dois efeitos concorrentes podem ser combinados de forma a gerarem um ganho de emaranhamento atômico para tempos de interação específicos.

Abstract

In this work, we studied the quantum entanglement between two atoms, arising from their interactions with the same cavity field. This interaction follows the Jaynes-Cummings Model for 1 and 2 photons processes, being analyzed the differences in entanglement dynamics due to distinct processes. The cavity is prepared in 1- and 2-modes squeezed states, being analyzed the initial squeezing's influence in the obtained atomic entanglement, in terms of the highest possible entanglement for each situation, as well as the robustness and persistence of the generated entanglement in relation to squeezing.

We found that 1-mode squeezing is, generally speaking, harmful to entanglement, although it also causes a displacement effect in the interaction times, which in turn generates gain for low-entanglement moments. 2-photons processes in 1-mode squeezed fields makes more robust entanglement, which is more persistent against reductive effects by squeezing. For 2-modes squeezed fields, squeezing enhances entanglement between the cavity modes and reduces entanglement between atoms; these two competing effects can be combined as to generate a gain in atomic entanglement for specific interaction times.

Índice

Agradecimentos	iv
Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de Figuras	xi
1 Introdução	1
2 Conceitos Fundamentais de Óptica Quântica	4
2.1 Quantização do Campo Eletromagnético	4
2.2 Estados de Fock	7
2.3 Estados Coerentes	10
2.4 Estados de Gato de Schrödinger	12
2.5 Estados Comprimidos	14
2.6 Modelo de Jaynes-Cummings	19
2.7 Modelo de Jaynes-Cummings para processos de 2 fótons	25
3 Emaranhamento e Teletransporte	29
3.1 Desigualdade de Bell	29
3.2 Medidas de Emaranhamento	33
3.3 Teletransporte	36
4 Geração de Estados Comprimidos	41
4.1 Esquema Dispersivo	41
4.2 Esquema Ressonante	45
5 Emaranhamento atômico via cavidade	48
5.1 Cavidade inicialmente em estado de Vácuo	48
5.2 Vácuo Comprimido de 1 modo	53
5.3 Processo de 2 fótons	58

5.4	Vácuo Comprimido de 2 modos	63
	Conclusões	70
	Perspectivas Futuras	72
	Referências	73

Lista de Figuras

2.1	Distribuição de probabilidade para um estado de Fock com $N=25$	9
2.2	Distribuição de probabilidade para um estado coerente com $ \alpha ^2 = 25$	12
2.3	Distribuição de probabilidades para um gato par com $ \alpha ^2 = 25$	13
2.4	Distribuição de probabilidades para um gato ímpar com $ \alpha ^2 = 25$	14
2.5	Distribuição de probabilidades para o vácuo comprimido com $r=1/2$	16
2.6	Distribuição de probabilidades para o vácuo comprimido com $r=1$	17
2.7	Distribuição de probabilidades para o vácuo comprimido com $r=5$	17
2.8	Distribuição de probabilidades para um estado coerente comprimido com $\alpha = 5$ e $r = 1$	18
2.9	Átomo de 3 níveis utilizado para a produção de processos de 2 fótons.	26
3.1	Protocolo padrão de teletransporte.	37
4.1	Esquema para a geração de estados comprimidos com campo dissonante.	41
4.2	Esquema para a geração de estados comprimidos com campo ressonante.	45
5.1	Concorrência em função do tempo para o estado inicial $ e\rangle 0\rangle$	49
5.2	Esquema de emaranhamento atômico via cavidade: (I) os átomos passam sucessivamente pela cavidade e (II) ficam emaranhados.	49
5.3	Concorrência em função dos tempos de interação para cavidade inicialmente no vácuo.	51
5.4	Entropia linear em função dos tempos de interação para cavidade inicialmente no vácuo.	51
5.5	Concorrência em função dos tempos de interação para cavidade inicialmente no vácuo.	52
5.6	Concorrência em função dos tempos de interação, para $r = 0.5$	54
5.7	Concorrência em função dos tempos de interação, para $r = 1$	55
5.8	Concorrência em função do parâmetro de compressão, para (a) $gt_2 = 2gt_1 = \pi/2$ e (b) $gt_2 = 2gt_1 = \pi$	55
5.9	M em função dos tempos de interação, para $r = 0.5$	56
5.10	M em função dos tempos de interação, para $r = 1$	57
5.11	M em função do parâmetro de compressão, para (a) $gt_2 = 2gt_1 = \pi/2$ e (b) $gt_2 = 2gt_1 = \pi$	57
5.12	Concorrência em função dos tempos de interação para $r = 0.5$	60
5.13	Concorrência em função dos tempos de interação para $r = 1$	60

5.14	Concorrência em função de r para (a)linha pontilhada: $2gt_1 = gt_2 = \pi/2$, linha sólida: $2gt_1 = gt_2 = \pi/2\sqrt{2}$ e (b)linha pontilhada: $2gt_1 = gt_2 = \pi$, linha sólida: $2gt_1 = gt_2 = \pi/2\sqrt{2}$	61
5.15	M em função dos tempos de interação para $r = 0.5$	62
5.16	M em função dos tempos de interação para $r = 1$	62
5.17	M em função de r para (a)linha pontilhada: $2gt_1 = gt_2 = \pi/2$, linha sólida: $2gt_1 = gt_2 = \pi/2\sqrt{2}$ e (b)linha pontilhada: $2gt_1 = gt_2 = \pi$, linha sólida: $2gt_1 = gt_2 = \pi/2\sqrt{2}$	63
5.18	Entropia em função de r para o campo comprimido de dois modos.	64
5.19	Concorrência em função dos tempos de interação para $r = 0.5$	66
5.20	Concorrência em função dos tempos de interação para $r = 1$	66
5.21	Concorrência em função de r para os átomos com diferentes tempos de interação, mas todos com $gt_1 = 4.5$	67
5.22	Concorrência em função de dos tempos de interação para $r = 0.5$	68
5.23	Concorrência em função de dos tempos de interação para $r = 1$	68
5.24	Concorrência em função de r para os átomos com diferentes tempos de interação.	69

1 Introdução

O emaranhamento quântico se apresenta como uma das características mais anti-intuitivas na descrição quântica da realidade. As implicações decorrentes da não-localidade e não-realismo dos observáveis físicos constituem um campo fascinante de pesquisa, por suas promessas de avanços tecnológicos sem precedentes, como as possibilidades da computação e processamento da informação quânticos [1].

O interesse deste trabalho consiste em gerar pares de átomos emaranhados através da interação com o campo de uma cavidade; tais pares têm aplicação em transmissão de informação quântica [2] e computação quântica distribuída [3]. Diferentes sistemas quânticos vêm sendo estudados por apresentarem possibilidade de emaranhamento, sendo que resultados experimentais foram obtidos com átomos em cavidades [4] e íons aprisionados [5].

Neste trabalho o sistema escolhido para estudo foi o de átomos em cavidades, ou seja, no âmbito da Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (CQED); se fez necessário o estudo da interação entre radiação e matéria, descrita pelo Modelo de Jaynes-Cummings, extensivamente utilizado devido ao fato de ser analiticamente solúvel sob a aproximação de onda girante [6]. Com este modelo, é possível verificar a ocorrência de emaranhamento entre átomos que interagem com um campo arbitrário em uma cavidade, em função dos tempos de interação, sendo que cada campo inicial afeta de modo distinto a dinâmica de emaranhamento. Embora seja direto o emaranhamento gerado por uma cavidade no vácuo, outras preparações apresentam resultados não-triviais, como a cavidade num estado coerente [7].

Nosso interesse foi estudar a geração de emaranhamento atômico utilizando as seguintes preparações de cavidade:

- Vácuo
 - Interação de 1 fóton
 - Interação de 2 fótons
- Vácuo comprimido de 1 modo
 - Interação de 1 fóton
 - Interação de 2 fótons

- Vácuo comprimido de 2 modos

Recebeu especial atenção o processo de preparação da cavidade em um estado comprimido: utilizamos as sugestões recentes de geração de estados comprimidos em cavidades através de conversão paramétrica descendente (PDC) [8,9], nas quais um átomo de 3 níveis tipo escada serve de compressor do campo na cavidade, que pode ser depois usado como meio de emaranhamento para átomos de 2 níveis, e acrescentamos alguns detalhes experimentais pertinentes, obtidos na literatura corrente [10–12]. O uso destes esquemas pode gerar estados comprimidos de 1 ou 2 modos, conforme o átomo de 3 níveis apresente respectivamente emissão de fótons de mesma frequência ou de frequências distintas.

Uma vez preparada a cavidade no vácuo comprimido de 1 modo, os átomos foram postos no estado inicial $|g\rangle_2|e\rangle_1$ e submetidos ao processo de 1 fóton, sendo que nosso interesse foi verificar a influência da utilização de campos comprimidos em vez de vácuo no emaranhamento, devido às características peculiares destes campos, tal como incerteza redutível abaixo do ruído quântico. Para o caso de um estado comprimido de 2 modos, outra característica peculiar do campo inicial se apresenta com muito interesse: os modos podem estar inicialmente emaranhados, e tanto mais emaranhados quanto maior for a compressão; como fazemos cada átomo interagir com um modo distinto, para compressão inicial nula não existe emaranhamento atômico. Assim, todo emaranhamento que venha a surgir é consequência direta da compressão inicial.

Com o intuito de observar os diferentes efeitos provocados por processos de 1 e 2 fótons, foi necessário primeiro descrever o Modelo de Jaynes-Cummings de 2 fótons, obtido através de interações de 1 fóton com um átomo de 3 níveis, que, num regime dispersivo, produz uma hamiltoniana efetiva que despreza o nível intermediário e induz transições de 2 fótons entre os níveis restantes; para que haja ênfase nos efeitos obtidos apenas pela transição de 2 fótons, encontramos um regime no qual o Stark *shift* dinâmico é negligenciável. Esse processo de duas excitações, que já é consideravelmente estudado sob o ponto de vista de propriedades de campo [13], é aqui aplicado para verificar as modificações introduzidas na persistência e quantidade de emaranhamento.

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira: no Capítulo 2 são introduzidos os conceitos fundamentais de eletrodinâmica quântica a serem utilizados nos capítulos subseqüentes, como a quantização do campo eletromagnético e o modelo de Jaynes-Cummings, com a descrição das dinâmicas dispersiva e ressonante, bem como sua extensão para interações de 2 fótons; no Capítulo 3 os conceitos fundamentais sobre o emaranhamento são apresentados a partir da desigualdade de Bell, com as consequências de sua violação, descrição das medidas de emaranhamento utilizadas no trabalho (a saber,

concorrência e entropia de emaranhamento) e aplicação ao teletransporte de estados. No Capítulo 4 são descritas as propostas recentes de geração de estados comprimidos em cavidades, com detalhes experimentais. No Capítulo 5 são apresentados os resultados dos estudos sobre a influência exercida sobre a dinâmica do emaranhamento atômico pelo parâmetro de compressão e as diferenças induzidas pelo processo de 2 fótons. No capítulo de conclusão, apresentamos nossas considerações finais, com uma descrição geral dos resultados obtidos e, nas perspectivas futuras indicamos algumas das investigações adicionais possíveis com base em nosso trabalho.

2 Conceitos Fundamentais de Óptica Quântica

Neste capítulo, apresentamos a quantização do campo eletromagnético e os estados quânticos da luz, com suas propriedades. Depois analisamos a interação entre radiação e matéria, descrevendo-a por uma Hamiltoniana de acoplamento mínimo que serve como ponto de partida para a dedução do Modelo de Jaynes-Cummings; por fim, utilizando uma Hamiltoniana tipo Jaynes-Cummings para um átomo de 3 níveis, mostramos que, caso as transições que envolvem o nível intermediário estejam fora de ressonância com a cavidade (regime dispersivo), tem-se uma Hamiltoniana efetiva que produz transições de 2 fótons entre os níveis restantes.

2.1 Quantização do Campo Eletromagnético

Na descrição clássica da realidade, os fenômenos eletromagnéticos são descritos por quantidades vetoriais \vec{E} (o campo elétrico) e \vec{B} (o campo magnético), que obedecem às equações de Maxwell [14]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}; \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \quad (2.2)$$

onde σ é a densidade de cargas, \vec{J} a densidade de corrente, ϵ_0 a permissividade elétrica do vácuo e μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo. Podemos definir um potencial vetor \vec{A} e um potencial escalar ϕ tais que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}; \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi = \vec{E}. \quad (2.3)$$

No calibre de Coulomb, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Separando as grandezas vetoriais e escalares, reescrevemos as equações de Maxwell:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{\nabla} \phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{J}; \quad (2.4)$$

$$-\nabla^2 \phi = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (2.5)$$

onde $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ é a velocidade da luz.

A densidade de corrente \vec{J} é uma grandeza vetorial e, pelo teorema de Helmholtz [15], pode ser escrita como a soma de uma componente transversal e outra longitudinal, com as seguintes propriedades:

$$\vec{J} = \vec{J}_T + \vec{J}_L; \quad (2.6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{J}_L = 0; \quad (2.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_T = 0. \quad (2.8)$$

A equação de continuidade nos dá:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_L = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}; \quad (2.9)$$

$$-\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \nabla^2 \phi}{\partial t}; \quad (2.10)$$

$$\vec{J}_L = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\nabla} \phi}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Assim, a equação 2.4 se torna

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu_0 \vec{J}_T = 0. \quad (2.12)$$

Numa região sem cargas, $\vec{J}_T = 0$ e $\sigma = 0$. Expandindo o potencial vetor numa série de Fourier, numa região cúbica de aresta L [16]:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} [\vec{A}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \vec{A}_{\vec{k}}^*(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}] \quad (2.13)$$

com \vec{k} sendo o vetor de onda cujas componentes são:

$$k_{i=x,y,z} = \frac{2\pi n_i}{L}; \quad n_i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Cada componente (modo) da expansão satisfaz a equação 2.12 independentemente:

$$\frac{\partial^2 \vec{A}_{\vec{k}}(t)}{\partial t^2} + \omega_k^2 \vec{A}_{\vec{k}}(t) = 0 \quad (2.15)$$

onde $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$ é a frequência do modo. A solução é:

$$\vec{A}_{\vec{k}}(t) = \vec{A}_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t}. \quad (2.16)$$

Agora, é possível descrever os vetores \vec{A}, \vec{E} e \vec{B} da seguinte forma:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} [\vec{A}_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} + c.c.], \quad (2.17)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} i\omega_{\vec{k}} [\vec{A}_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} - c.c.], \quad (2.18)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} i\vec{k} \times [\vec{A}_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} - c.c.]. \quad (2.19)$$

A energia média de um modo da cavidade é dada por

$$\bar{\epsilon}_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 E_{\vec{k}}^2 + \frac{B_{\vec{k}}^2}{\mu_0}) dV. \quad (2.20)$$

Substituindo as equações 2.18 e 2.19 em 2.20:

$$\bar{\epsilon}_{\vec{k}} = 2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}^2 \vec{A}_{\vec{k}} \cdot \vec{A}_{\vec{k}}^*. \quad (2.21)$$

A receita de Dirac para quantizar o oscilador harmônico é substituir as grandezas escalares q e p pelos respectivos operadores, com a relação de comutação

$$[q, p] = i\hbar. \quad (2.22)$$

Então, igualamos a energia $\bar{\epsilon}_{\vec{k}}$ de um modo do campo à energia de um oscilador harmônico clássico:

$$2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}^2 \vec{A}_{\vec{k}} \cdot \vec{A}_{\vec{k}}^* = \frac{1}{2} (p_{\vec{k}}^2 + \omega_{\vec{k}}^2 q_{\vec{k}}^2), \quad (2.23)$$

$$\vec{A}_{\vec{k}} = (4\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}^2)^{-1/2} (ip_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}} q_{\vec{k}}) \hat{\epsilon}_{\vec{k}} \quad (2.24)$$

onde $\hat{\epsilon}_{\vec{k}}$ é um vetor unitário na direção de $\vec{A}_{\vec{k}}$.

Substituindo os operadores quânticos:

$$\hat{A}_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\vec{k}}}} \hat{a}_{\vec{k}} \quad (2.25)$$

onde $\hat{a}_{\vec{k}}$ é o operador de aniquilação do campo, e seu hermitiano conjugado $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$ é o operador de criação [17]. A relação de comutação entre eles é derivada da relação 2.22

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \quad (2.26)$$

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}] = [\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = 0. \quad (2.27)$$

Assim, a hamiltoniana do campo quantizado é

$$\hat{H} = \hbar \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \left(\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.28)$$

2.2 Estados de Fock

A Hamiltoniana da equação 2.28, quando se considera apenas um modo, se reduz a

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.29)$$

com autoestados definidos por

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (2.30)$$

com E_n sendo a energia do autoestado. Aplicando o operador \hat{a} pela esquerda, temos:

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle = (E_n - \hbar\omega)\hat{a}|n\rangle, \quad (2.31)$$

ou seja, o estado $\hat{a}|n\rangle$ também é um autoestado de \hat{H} , com energia $E_n - \hbar\omega$. Definimos este estado como $\frac{\hat{a}}{\alpha_n}|n\rangle = |n-1\rangle$, onde α_n é uma constante de normalização dada por $\langle n-1|n-1\rangle = 1$, e $E_{n-1} = E_n - \hbar\omega$. Aplicando sucessivamente o operador \hat{a} , chegamos a

$$\hat{H}|0\rangle = E_0|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (2.32)$$

O estado $|0\rangle$ é denominado **vácuo** e sua energia é $\frac{\hbar\omega}{2}$.

Substituindo a equação 2.32 na equação 2.29, vemos que

$$\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle \quad (2.33)$$

com o operador $\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = \hat{n}$ sendo chamado de **operador número**. Agora é possível calcular o valor da constante de normalização α_n :

$$\langle n-1 | n-1 \rangle = \frac{1}{|\alpha_n|^2} \langle n | a^\dagger a | n \rangle = \frac{n}{|\alpha_n|^2} \langle n | n \rangle = 1 \quad (2.34)$$

$$|\alpha_n|^2 = n \rightarrow \alpha_n = \sqrt{n}. \quad (2.35)$$

Para o hermiteano conjugado de \hat{a} , o operador de criação \hat{a}^\dagger , temos:

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle \quad (2.36)$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \rightarrow \hat{a}^\dagger |n-1\rangle = \sqrt{n} |n\rangle \quad (2.37)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (2.38)$$

Os estados $|n\rangle$ são autoestados do operador número $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ e são chamados **estados de Fock** ou de **número**, onde n é interpretado como o número de *quanta* de energia $\hbar\omega$ presentes no campo. Esses *quanta* do campo eletromagnético também são chamados de **fótons**. É importante notar que num estado de Fock a amplitude é completamente conhecida, enquanto a fase é totalmente incerta. De posse do conceito de fóton, é possível desenvolver novos parâmetros para caracterizar os campos, como a **distribuição de probabilidade de fótons** e o **parâmetro Q de Mandel**.

A distribuição de probabilidade de fótons é dada por:

$$P(n) = |\langle n | \psi \rangle|^2 \quad (2.39)$$

onde ψ é o estado de um campo qualquer, ou, no formalismo de operadores densidade:

$$P(n) = \langle n | \rho | n \rangle \quad (2.40)$$

onde $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ é o operador densidade do campo. A distribuição de probabilidades de um estado de Fock com $N = 25$ é simplesmente uma delta de Kronecker centrada em $n = 25$:

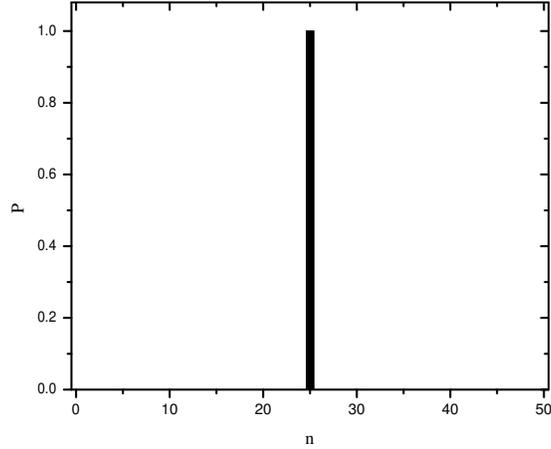


Figura 2.1: Distribuição de probabilidade para um estado de Fock com $N=25$.

O parâmetro Q de Mandel está associado à distribuição de probabilidades. Sua definição é a seguinte:

$$Q = \frac{\langle \Delta n^2 \rangle - \langle n \rangle}{\langle n \rangle} \quad (2.41)$$

onde

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2, \quad (2.42)$$

$$\langle n \rangle = \langle \psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi \rangle, \quad (2.43)$$

$$\langle n^2 \rangle = \langle \psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi \rangle. \quad (2.44)$$

Ele caracteriza a distribuição como Poissoniana ($Q = 0$), Super-Poissoniana ($Q > 0$) ou Sub-Poissoniana ($Q < 0$). Para qualquer estado de Fock, $Q = -1$. Distribuições Sub-Poissonianas denotam características estritamente quânticas, sem análogo clássico.

2.3 Estados Coerentes

Estados coerentes são estados que apresentam incerteza mínima igualmente distribuída entre as quadraturas, ou seja,

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}, \quad (2.45)$$

$$\Delta x = \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}. \quad (2.46)$$

Tais estados descrevem um campo eletromagnético quase-clássico, pois mantêm a incerteza mínima ao longo do tempo [18]. São autoestados do operador de aniquilação

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2.47)$$

Expandindo um estado coerente na base de estados de Fock, temos:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad (2.48)$$

$$a|\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad (2.49)$$

$$c_{n+1} = \frac{\alpha c_n}{\sqrt{n+1}} \quad (2.50)$$

$$c_n = \frac{\alpha^n c_0}{\sqrt{n!}} \quad (2.51)$$

Assim, o estado coerente fica:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_0 \alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.52)$$

Como o estado deve ser normalizado,

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = 1. \quad (2.53)$$

Mas $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^2}{n!} = e^{|\alpha|^2}$, o que deixa

$$c_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \quad (2.54)$$

e

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.55)$$

Um estado coerente pode ser gerado a partir do operador de deslocamento $D(\alpha) = e^{(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})}$ aplicado no vácuo [19]:

$$\begin{aligned} D(\alpha)|0\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{\alpha^*\hat{a}}|0\rangle = \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \hat{a}^{\dagger n}}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = |\alpha\rangle \end{aligned} \quad (2.56)$$

onde usamos a fórmula de Baker-Hausdorff [20]. Como podem surgir desta maneira, os estados coerentes às vezes são chamados de **estados de vácuo deslocados**.

O número médio de fótons de um estado coerente é

$$\langle n \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (2.57)$$

com uma distribuição de probabilidades dada por

$$P(n) = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!} \quad (2.58)$$

que pode ser identificada como uma distribuição poissoniana; de fato, para qualquer estado coerente, $Q = 0$.

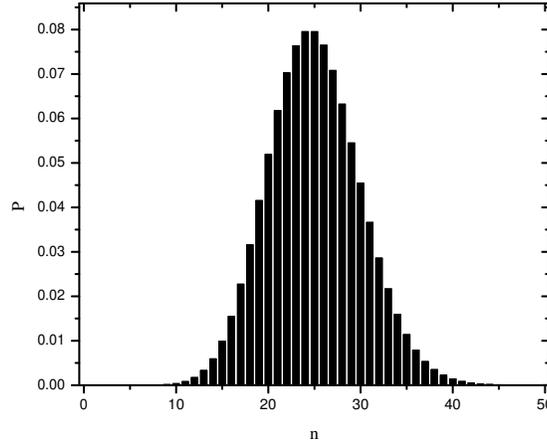


Figura 2.2: Distribuição de probabilidade para um estado coerente com $|\alpha|^2 = 25$.

2.4 Estados de Gato de Schrödinger

Uma das características menos intuitivas da Mecânica Quântica é a superposição de estados, como na anedota do gato de Schrödinger, que está numa superposição dos estados **vivo** e **morto**. Um estado de gato é uma superposição de estados coerentes defasados 180° , com a forma geral

$$|\alpha, \theta\rangle = \sqrt{\frac{1}{2 + 2e^{-2|\alpha|^2} \cos \theta}} (|\alpha\rangle + e^{i\theta} |-\alpha\rangle) \quad (2.59)$$

com

$$\langle n \rangle = |\alpha|^2 \frac{1 - e^{-2|\alpha|^2} \cos \theta}{1 + e^{-2|\alpha|^2} \cos \theta}. \quad (2.60)$$

Para $\theta = 0$, temos o **gato par**:

$$|\alpha, 0\rangle = \frac{\sqrt{2} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{1 + e^{-2|\alpha|^2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{(2n)!}} |2n\rangle \quad (2.61)$$

que só apresenta estados de número par:

$$P(n) = \begin{cases} \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!(1 + e^{-2|\alpha|^2})} & \text{se } n \text{ é par;} \\ 0 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (2.62)$$

O parâmetro de Mandel é

$$Q = \frac{4|\alpha|^2 e^{-2|\alpha|^2}}{1 - e^{-4|\alpha|^2}} > 0, \quad (2.63)$$

ou seja, a distribuição é super-poissoniana, mas se aproxima da poissoniana conforme α se torna grande.

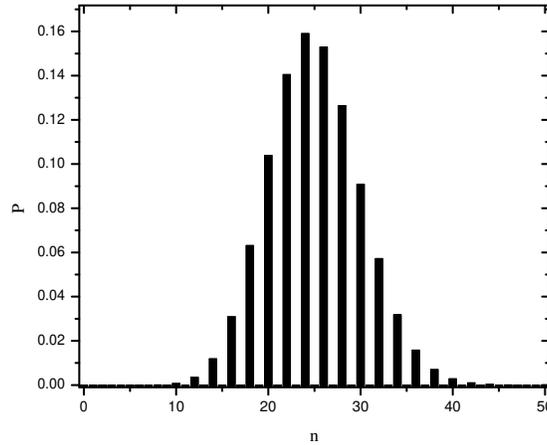


Figura 2.3: Distribuição de probabilidades para um gato par com $|\alpha|^2 = 25$.

Para $\theta = \pi$, temos o **gato ímpar**:

$$|\alpha, \pi\rangle = \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{1 - e^{-2|\alpha|^2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle \quad (2.64)$$

que só apresenta estados de número ímpar.

$$\begin{aligned} P(n) &= \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!(1 - e^{-2|\alpha|^2})} \text{ se } n \text{ é ímpar;} \\ &= 0 \text{ se } n \text{ é par.} \end{aligned} \quad (2.65)$$

A distribuição de probabilidades é sub-poissoniana:

$$Q = -\frac{4|\alpha|^2 e^{-2|\alpha|^2}}{1 - e^{-4|\alpha|^2}} < 0. \quad (2.66)$$

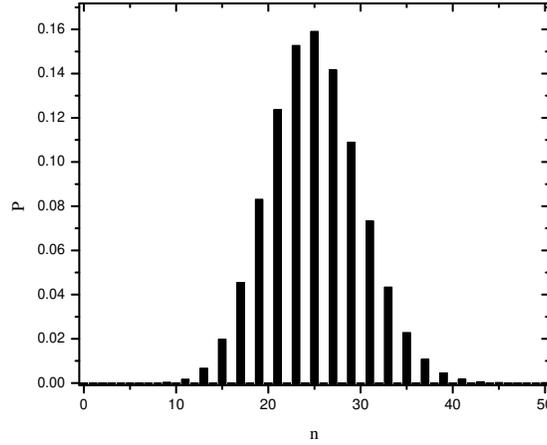


Figura 2.4: Distribuição de probabilidades para um gato ímpar com $|\alpha|^2 = 25$.

Para $\theta = \pi/2$, temos o **estado de Yurke-Stoler** [21]:

$$|\alpha, \pi/2\rangle = \frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(1+i) \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{(2n)!}} |2n\rangle + (1-i) \frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle \right] \quad (2.67)$$

que apresenta a mesma distribuição de probabilidades e parâmetro Q de um estado coerente.

Através da distribuição de probabilidades, é possível distinguir entre um estado de gato e uma mistura estatística de estados coerentes. Para a mistura, é necessário calcular a distribuição através do operador densidade, como na equação 2.40; tomamos um *ensemble* maximamente misturado com $\rho = \frac{1}{2}(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|)$, para compará-lo com o gato par:

$$P_{mix}(n) = \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}}{n!} \quad (2.68)$$

exatamente a mesma distribuição que a de um estado coerente. Ou seja, um experimento de contagem de fótons basta para determinar se um dado sistema se encontra num estado superposto ou numa mistura estatística.

2.5 Estados Comprimidos

Assim como os estados coerentes, os estados comprimidos também apresentam incerteza mínima o tempo todo, o que os leva a serem chamados de estados coerentes comprimidos. A incerteza, no

entanto, não está igualmente distribuída entre as quadraturas: se uma delas apresenta incerteza acima do limite quântico, a conjugada deve estar abaixo. Daí vem o nome **comprimido**: o ruído quântico em uma das quadraturas é menor do que o esperado para um estado coerente.

Inicialmente, introduzimos os **operadores de quadratura** \hat{x}_λ :

$$\hat{x}_\lambda = \hat{a}e^{i\lambda} + \hat{a}^\dagger e^{-i\lambda}. \quad (2.69)$$

Ou seja, $\hat{x}_0 = \hat{x}$, $\hat{x}_{\pi/2} = \hat{p}$ e, de modo geral, \hat{x}_λ e $\hat{x}_{\lambda+\pi/2}$ são quadraturas conjugadas, obedecendo ao princípio de Heisenberg.

A incerteza em cada quadratura é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{x}_\lambda^2 &= \langle \hat{x}_\lambda^2 \rangle - \langle \hat{x}_\lambda \rangle^2 = \\ &= \langle \zeta | \hat{x}_\lambda^2 | \zeta \rangle - (\langle \zeta | \hat{x}_\lambda | \zeta \rangle)^2 \end{aligned} \quad (2.70)$$

onde $|\zeta\rangle$ representa o estado comprimido e $\zeta = re^{i\phi}$ é o parâmetro complexo de compressão. Definindo o **operador de compressão** $S(\zeta)$

$$S(\zeta) = e^{\frac{1}{2}(\zeta\hat{a}^{\dagger 2} - \zeta^*\hat{a}^2)} \quad (2.71)$$

temos que ele pode ser aplicado ao vácuo, gerando o **estado de vácuo comprimido**, cuja expansão na base de Fock é dada por [20]:

$$S(\zeta)|0\rangle = |\zeta\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} \left(-\frac{e^{i\phi}}{2} \operatorname{tgh} r\right)^n |2n\rangle. \quad (2.72)$$

Assim como os estados de gato, o vácuo comprimido é uma superposição de estados de número par; sua incerteza é dada por:

$$\Delta x_\lambda^2 = \langle x_\lambda^2 \rangle - \langle x_\lambda \rangle^2 = \frac{1}{2} [e^{2r} \sin^2(\lambda - \phi/2) + e^{-2r} \cos^2(\lambda - \phi/2)]. \quad (2.73)$$

Ou seja, se a fase de compressão for $\phi = 0$, a quadratura comprimida será $\hat{x}_{\lambda=0} = \hat{x}$. A taxa de compressão I_c é obtida comparando-se incertezas na mesma quadratura de um estado comprimido e

um coerente. Matematicamente:

$$I_c = 1 - \frac{\Delta \hat{x}_\lambda^{comp}}{\Delta \hat{x}_\lambda^{coer}}. \quad (2.74)$$

Diferentemente do estado coerente, que apresenta $\Delta \hat{x}_\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}}$ para qualquer λ , um estado comprimido com a quadratura $\lambda = \phi/2$ tem $\Delta \hat{x}_\lambda = \frac{e^{-2r}}{\sqrt{2}}$. Substituindo na equação 2.74,

$$I_c = 1 - e^{-2r}. \quad (2.75)$$

A distribuição de probabilidades do vácuo comprimido é:

$$P(n) = \frac{1}{\cosh r} \frac{n!}{(n^2/4)!} \left(\frac{\operatorname{tgh} r}{2} \right)^{2n} \quad \text{se } n \text{ é par;} \quad (2.76)$$

$$= 0 \quad \text{se } n \text{ é ímpar.} \quad (2.77)$$

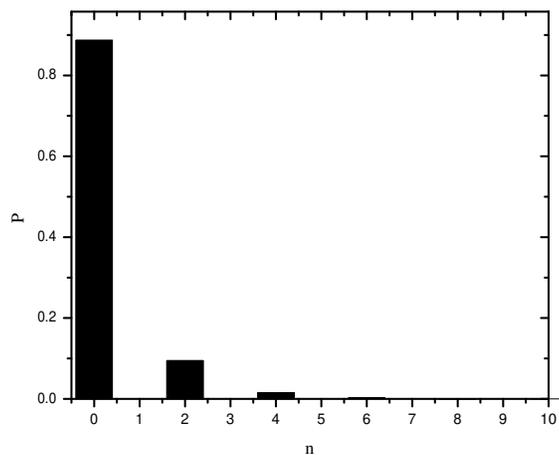


Figura 2.5: Distribuição de probabilidades para o vácuo comprimido com $r=1/2$.

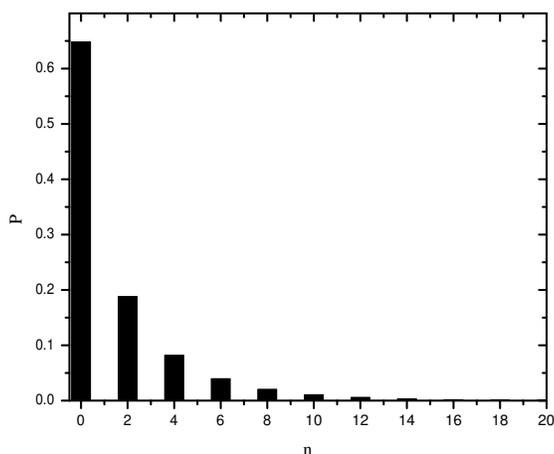


Figura 2.6: Distribuição de probabilidades para o vácuo comprimido com $r=1$.

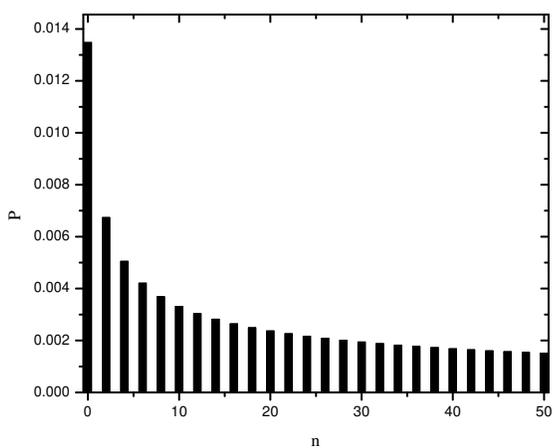


Figura 2.7: Distribuição de probabilidades para o vácuo comprimido com $r=5$.

Ao aplicarmos o operador deslocamento $D(\alpha)$ ao vácuo comprimido, obtemos um **estado coerente comprimido**, que, na base de Fock, tem a seguinte forma:

$$D(\alpha)S(\zeta)|0\rangle = |\alpha, \zeta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}e^{i\phi} \operatorname{tgh} r)^n}{n! \cosh r}} \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + \alpha^2 e^{-i\phi} \operatorname{tgh} r)\right] \times \quad (2.78)$$

$$\times H_n\left(\frac{\alpha + \alpha^* e^{i\phi} \operatorname{tgh} r}{\sqrt{2e^{i\phi} \operatorname{tgh} r}}\right) |n\rangle$$

onde $H_n(x)$ é o polinômio de Hermite de ordem n . Naturalmente, quando fazemos $\alpha = 0$ na equação 2.78 ela se reduz à equação 2.72. O número médio de fótons e o desvio são:

$$\langle n \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 r \quad (2.79)$$

$$(\Delta n)^2 = |\alpha|^2 [e^{2r} \sin^2(\varphi - \phi/2) + e^{-2r} \cos^2(\omega_0 t - \phi/2) - 1] + \sinh^2 r (\cosh^2 r + \sinh^2 r) \quad (2.80)$$

onde φ é a fase de α . A distribuição de probabilidades é

$$P(n) = \frac{(\operatorname{tgh} r)^n}{2^n n! \cosh r} \exp \left(-|\alpha|^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha^{*2}) \operatorname{tgh} r \right) \left| H_n \left(\frac{\alpha + \alpha^* \operatorname{tgh} r}{\sqrt{2 \operatorname{tgh} r}} \right) \right|^2. \quad (2.81)$$

O parâmetro Q de Mandel tem uma forma complexa, dependendo das fases de compressão ϕ e coerência φ :

$$Q = \frac{|\alpha|^2 [e^{2r} \sin^2(\varphi - \phi/2) + e^{-2r} \cos^2(\varphi - \phi/2) - 1] + \sinh^2 r (\cosh^2 r + \sinh^2 r)}{|\alpha|^2 + \sinh^2 r} - 1. \quad (2.82)$$

Assim, dependendo dos parâmetros ζ e α , um estado coerente comprimido pode apresentar qualquer tipo de distribuição.

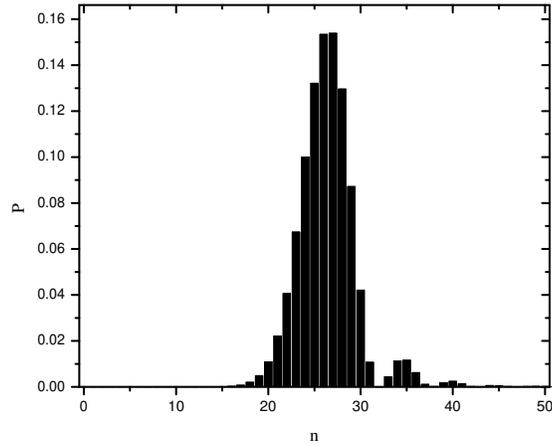


Figura 2.8: Distribuição de probabilidades para um estado coerente comprimido com $\alpha = 5$ e $r = 1$.

2.6 Modelo de Jaynes-Cummings

A interação entre radiação e matéria apresenta alguns aspectos que só podem ser explicados pela teoria quântica, tais como emissão espontânea e fenômenos de colapso e ressurgimento. Para que seja possível escrever uma hamiltoniana quântica, precisamos primeiro determinar a natureza da interação. Inicialmente, consideramos um campo eletromagnético quantizado confinado a uma cavidade, interagindo com um átomo cujas frequências de transição interessantes são próximas da frequência do campo, para que haja processos de apenas 1 fóton. Supondo que o comprimento de onda do campo é muito maior que o tamanho do átomo ($\vec{k} \cdot \vec{r} \ll 1$) (a chamada **aproximação de dipólo**), a interação entre átomo e campo se dá pelo acoplamento de dipólo elétrico

$$\hat{H}_{int} = -e\vec{r} \cdot \vec{E} \quad (2.83)$$

onde e é a carga do elétron e \vec{r} é a posição do átomo. Além disso, a equação 2.18 se torna

$$\vec{E} = \sum_k \hat{\epsilon}_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar\nu_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V}} (\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger) \quad (2.84)$$

onde ν_k é a frequência do modo k e V é o volume da cavidade. Escrevendo $e\vec{r}$ na base de estados atômicos, temos

$$e\vec{r} = \sum_{i,j} e|i\rangle\langle i|\vec{r}|j\rangle\langle j| = \sum_{i,j} \wp_{ij} \sigma_{ij} \quad (2.85)$$

com $\wp_{ij} = \langle i|\vec{r}|j\rangle$ sendo o elemento da matriz de dipólo elétrico e $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$ sendo o operador que leva o estado atômico de j para i .

Substituindo as equações 2.84 e 2.85 na equação 2.83, temos:

$$\hat{H}_{int} = \sum_{i,j,\vec{k}} \hbar g_{\vec{k}}^{ij} \sigma_{ij} (\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger). \quad (2.86)$$

A Hamiltoniana total do sistema é obtida somando-se a de interação com as da energia do campo e átomo:

$$\hat{H} = \sum_i E_i \sigma_{ii} + \sum_k \hbar\nu_k \left(\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) + \sum_{i,j,\vec{k}} \hbar g_{\vec{k}}^{ij} \sigma_{ij} (\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger) \quad (2.87)$$

com E_i sendo a energia de cada nível atômico e

$$g_{\vec{k}}^{ij} = -\frac{\wp_{ij} \cdot \hat{\epsilon}_{\vec{k}}}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar \nu_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V}} \quad (2.88)$$

sendo a constante de acoplamento, real por simplicidade.

Vamos agora nos restringir a um campo com um único modo interagindo com um átomo de dois níveis. É interessante notar que tal átomo é análogo a uma partícula de spin 1/2, pois apresenta dois estados acessíveis, que chamaremos de $|e\rangle$ e $|g\rangle$. Podemos reescrever a Hamiltoniana como

$$\hat{H} = E_g \sigma_{gg} + E_e \sigma_{ee} + \hbar \nu \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g (\sigma_{eg} + \sigma_{ge}) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (2.89)$$

onde usamos o fato de que

$$\langle g | \vec{r} | g \rangle = \langle e | \vec{r} | e \rangle = 0 \quad (2.90)$$

$$\langle g | \vec{r} | e \rangle = \langle e | \vec{r} | g \rangle \quad (2.91)$$

bem como omitimos a energia de vácuo, que, por ser uma constante, não influenciará a dinâmica do sistema. Ainda podemos notar que

$$E_g \sigma_{gg} + E_e \sigma_{ee} = \frac{E_e - E_g}{2} (\sigma_{ee} - \sigma_{gg}) + \frac{E_e + E_g}{2} (\sigma_{ee} + \sigma_{gg}) = \frac{\hbar \omega \sigma_z}{2} + \frac{E_e + E_g}{2} \quad (2.92)$$

onde ω é a frequência de transição atômica, $\sigma_z = \sigma_{ee} - \sigma_{gg}$ e $\sigma_{gg} + \sigma_{ee} = 1$, por completeza; novamente desprezamos uma constante e substituímos em \hat{H} :

$$\hat{H} = \frac{\hbar \omega \sigma_z}{2} + \hbar \nu \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g (\sigma_{eg} + \sigma_{ge}) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (2.93)$$

Com o objetivo de analisar aspectos dinâmicos do nosso sistema, separamos a Hamiltoniana em duas partes

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar \omega \sigma_z}{2} + \hbar \nu \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (2.94)$$

$$\hat{H}_1 = \hbar g (\sigma_{eg} + \sigma_{ge}) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (2.95)$$

e escrevemos a Hamiltoniana geral na representação de interação através da transformação

$$\hat{H}_I = e^{\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} \hat{H}_1 e^{-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}}. \quad (2.96)$$

De acordo com a relação de Baker-Hausdorff [20], sendo \hat{A} e \hat{B} dois operadores quaisquer e α um número,

$$e^{\alpha\hat{A}} \hat{B} e^{-\alpha\hat{A}} = \hat{B} + \alpha[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\alpha^2}{2}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (2.97)$$

Assim, basta calcularmos os comutadores dos operadores envolvidos:

$$[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = -\hat{a}; \quad (2.98)$$

$$[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger; \quad (2.99)$$

$$[\sigma_z, \sigma_{eg}] = \sigma_{eg}; \quad (2.100)$$

$$[\sigma_z, \sigma_{ge}] = -\sigma_{ge}; \quad (2.101)$$

e de posse desses comutadores, é possível ver que

$$e^{\frac{i\omega\sigma_z t}{2}} \sigma_{eg} e^{-\frac{i\omega\sigma_z t}{2}} = \sigma_{eg} e^{i\omega t}; \quad (2.102)$$

$$e^{\frac{i\omega\sigma_z t}{2}} \sigma_{ge} e^{-\frac{i\omega\sigma_z t}{2}} = \sigma_{ge} e^{-i\omega t}; \quad (2.103)$$

$$e^{i\nu\hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{a} e^{-i\nu\hat{a}^\dagger \hat{a} t} = \hat{a} e^{-i\nu t}; \quad (2.104)$$

$$e^{i\nu\hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{a}^\dagger e^{-i\nu\hat{a}^\dagger \hat{a} t} = \hat{a}^\dagger e^{i\nu t}. \quad (2.105)$$

Substituindo as equações 2.97 até 2.104 na equação 2.96, tem-se:

$$\hat{H}_I = \hbar g (\hat{a} \sigma_{eg} e^{it(\omega-\nu)} + \hat{a}^\dagger \sigma_{ge} e^{-it(\omega-\nu)} + \hat{a} \sigma_{ge} e^{-it(\omega+\nu)} + \hat{a}^\dagger \sigma_{eg} e^{it(\omega+\nu)}). \quad (2.106)$$

É importante notar que os dois últimos termos do lado direito envolvem a excitação atômica simultaneamente com a emissão de um fóton e a desexcitação simultânea com a absorção. Como estamos tratando o caso em que $\omega \approx \nu$, $|\omega - \nu| \ll \omega + \nu$; os dois últimos termos (ditos **contragirantes**) têm frequência muito maior que os dois primeiros (ditos **girantes**) e podem ser negligenciados como mera flutuação: essa é a **aproximação de onda girante**. Assim, partindo de uma Hamiltoniana de acoplamento por dipólo elétrico e utilizando as aproximações de dipólo e de onda girante, chega-se ao

Modelo de Jaynes-Cummings(JCM), cuja Hamiltoniana final é [6]

$$\hat{H}_{JC} = \hbar g(\hat{a}\sigma_{eg}e^{i\Delta t} + \hat{a}^\dagger\sigma_{ge}e^{-i\Delta t}) \quad (2.107)$$

com $\Delta = \omega - \nu$. Trata-se de um modelo de grande interesse na Óptica Quântica, devido ao fato de poder ser resolvido analiticamente. Para a dinâmica, analisemos três casos: ressonante ($\omega = \nu$), levemente dispersivo ($\omega \approx \nu$) e fortemente dispersivo ($\omega \neq \nu$ mas ainda nos limites da aproximação de onda girante).

Dinâmica ressonante

O sistema consiste de um átomo interagindo com um campo monomodo em ressonância com a frequência de transição atômica, cujo estado global inicial é dado por

$$|\psi\rangle = \sum_n [c_{e,n}(0)|e, n\rangle + c_{g,n}(0)|g, n\rangle]. \quad (2.108)$$

O operador de evolução temporal é

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-igt(\hat{a}\sigma_{eg} + \hat{a}^\dagger\sigma_{ge})\right). \quad (2.109)$$

Expandindo numa série de Taylor de operadores é possível facilitar as contas:

$$\hat{U}(t) = \sum_k \frac{(-igt)^k}{k!} (\hat{a}\sigma_{eg} + \hat{a}^\dagger\sigma_{ge})^k. \quad (2.110)$$

Observando que

$$(\hat{a}\sigma_{eg} + \hat{a}^\dagger\sigma_{ge})^{2k} = (\hat{a}\hat{a}^\dagger)^k \sigma_{ee} + (\hat{a}^\dagger\hat{a})^k \sigma_{gg} \quad (2.111)$$

$$(\hat{a}\sigma_{eg} + \hat{a}^\dagger\sigma_{ge})^{2k+1} = (\hat{a}\hat{a}^\dagger)^k \hat{a}\sigma_{eg} + \hat{a}^\dagger(\hat{a}\hat{a}^\dagger)^k \sigma_{ge} \quad (2.112)$$

reescrevemos a equação 2.110

$$\hat{U}(t) = \cos(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger})\sigma_{ee} + \cos(gt\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}})\sigma_{gg} - i\frac{\text{sen}(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger})}{\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}}\hat{a}\sigma_{eg} - i\hat{a}^\dagger\frac{\text{sen}(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger})}{\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}}\sigma_{ge}. \quad (2.113)$$

Assim, o estado inicial $|\psi(0)\rangle$ evolui para o estado $|\psi(t)\rangle$ da seguinte maneira:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle = \sum_n [c_{e,n}(0)\cos(gt\sqrt{n+1})|e, n\rangle + c_{g,n}(0)\cos(gt\sqrt{n})|g, n\rangle - ic_{g,n}(0)\text{sen}(gt\sqrt{n})|e, n-1\rangle - ic_{e,n}(0)\text{sen}(gt\sqrt{n+1})|g, n+1\rangle]. \quad (2.114)$$

Conhecido o estado do sistema num tempo t suas características dinâmicas podem ser calculadas.

Dinâmica levemente dispersiva

Para a dinâmica levemente dispersiva, não é trivial gerar um operador de evolução temporal, como o obtido para a dinâmica ressonante. Dessa forma, o estado num tempo geral t é encontrado resolvendo a equação de Schrödinger:

$$\hat{H}|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle. \quad (2.115)$$

Para o estado inicial

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n [c_{e,n}(t)|e, n\rangle + c_{g,n}(t)|g, n\rangle] \quad (2.116)$$

temos

$$g(\hat{a}\sigma_{eg}e^{i\Delta t} + \hat{a}^\dagger\sigma_{ge}e^{-i\Delta t}) \sum_n [c_{e,n}(t)|e, n\rangle + c_{g,n}(t)|g, n\rangle] = i \sum_n [\dot{c}_{e,n}(t)|e, n\rangle + \dot{c}_{g,n}(t)|g, n\rangle]. \quad (2.117)$$

O lado esquerdo da equação se torna:

$$\hat{H}|\psi(t)\rangle = g \sum_n (c_{g,n}(t)\sqrt{n}e^{i\Delta t}|e, n-1\rangle + c_{e,n}(t)\sqrt{n+1}e^{-i\Delta t}|g, n+1\rangle). \quad (2.118)$$

Combinando as equações 2.117 e 2.118 encontramos o sistema de equações diferenciais acopladas que determinam cada coeficiente:

$$\dot{c}_{e,n}(t) = -igc_{g,n+1}(t)\sqrt{n+1}e^{i\Delta t}; \quad (2.119)$$

$$\dot{c}_{g,n+1}(t) = -igc_{e,n}(t)\sqrt{n+1}e^{-i\Delta t}. \quad (2.120)$$

A solução é dada por:

$$c_{e,n}(t) = \left[c_{e,n}(0) \left(\cos \frac{\Omega_n t}{2} - \frac{i\Delta}{\Omega_n} \sin \frac{\Omega_n t}{2} \right) - \frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n} c_{g,n+1}(0) \sin \frac{\Omega_n t}{2} \right] e^{i\Delta t/2}, \quad (2.121)$$

$$c_{g,n+1}(t) = \left[c_{g,n+1}(0) \left(\cos \frac{\Omega_n t}{2} + \frac{i\Delta}{\Omega_n} \sin \frac{\Omega_n t}{2} \right) - \frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n} c_{g,n+1}(0) \sin \frac{\Omega_n t}{2} \right] e^{-i\Delta t/2}, \quad (2.122)$$

com $\Omega_n = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2(n+1)}$ sendo a chamada **freqüência de Rabi**.

Fazendo $\Delta = 0$, voltamos ao caso ressonante: substituindo as equações 2.121 e 2.122 na equação 2.116 temos a equação 2.114, com a freqüência de Rabi dada por $\Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$.

Dinâmica fortemente dispersiva

Para o caso de uma grande diferença nas freqüências do átomo e do campo, mas ainda com a possibilidade de desprezarmos os termos contragirantes, é possível elaborar uma Hamiltoniana efetiva de interação que leve em conta a defasagem; começamos integrando os dois lados da equação de Schrödinger:

$$-\frac{i}{\hbar} \int \hat{H}(t') |\psi(t')\rangle dt' = |\psi(t)\rangle - |\psi(0)\rangle \quad (2.123)$$

$$\hat{H}(t) |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(0)\rangle - \frac{i}{\hbar} \hat{H}(t) \int \hat{H}(t') |\psi(t')\rangle dt'. \quad (2.124)$$

Como \hat{H} apresenta termos rapidamente oscilantes, se fizermos uma média temporal o primeiro termo da direita será desprezível e no segundo fazemos uma aproximação Markoviana [22], o que nos permite escrever a Hamiltoniana efetiva

$$\hat{H}_{eff} = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t) \int \hat{H}(t') dt'. \quad (2.125)$$

Aplicando este método à Hamiltoniana de Jaynes-Cummings, temos

$$\hat{H}_{eff} = \frac{\hbar g^2}{\Delta} (\hat{a}^\dagger \hat{a} \sigma_{gg} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \sigma_{ee}). \quad (2.126)$$

Lembrando que $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, temos

$$\hat{H}_{eff} = -\frac{\hbar g^2}{\Delta} (\hat{a}^\dagger \hat{a} \sigma_z + \sigma_{ee}). \quad (2.127)$$

É preciso perceber que nesse caso não há termos de troca de energia entre campo e átomo. O operador de evolução temporal é dado por:

$$U(t) = \exp \left[\frac{ig^2t}{\Delta} (\hat{a}^\dagger \hat{a} \sigma_z + \sigma_{ee}) \right]. \quad (2.128)$$

Resolvendo a dinâmica:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \left[e^{-\frac{i(1+n)g^2t}{\Delta}} c_{e,n}(0) |e, n\rangle + e^{-\frac{in g^2t}{\Delta}} c_{g,n}(0) |g, n\rangle \right] \quad (2.129)$$

onde se torna óbvio que a Hamiltoniana fortemente dispersiva apenas introduz fases no estado do sistema. Como será mostrado na próxima seção, para um átomo de 3 níveis o mesmo não ocorre.

2.7 Modelo de Jaynes-Cummings para processos de 2 fótons

Caso a frequência do campo na cavidade seja metade da frequência de transição atômica, é possível induzir processos nos quais a troca de estado atômico envolve a emissão ou absorção de 2 fótons. Como cada fóton apresenta spin 1, o átomo deve efetuar uma transição entre níveis de mesma paridade; para isso, é necessário que haja um átomo de 3 níveis: o excitado $|e\rangle$ e o fundamental $|g\rangle$ de mesma paridade, e um intermediário $|i\rangle$ de paridade oposta. O processo mais provável nesta configuração atômica é a cascata de 1 fóton $e \leftrightarrow i \leftrightarrow g$; para evitar tal processo é preciso que haja uma dessintonia Δ entre os modos da cavidade e as transições de cascata. Além disso, precisamos de um regime onde o Stark *shift* seja desprezível, o quê é obtido através de uma segunda dessintonia δ , conforme mostrado na figura 2.7:

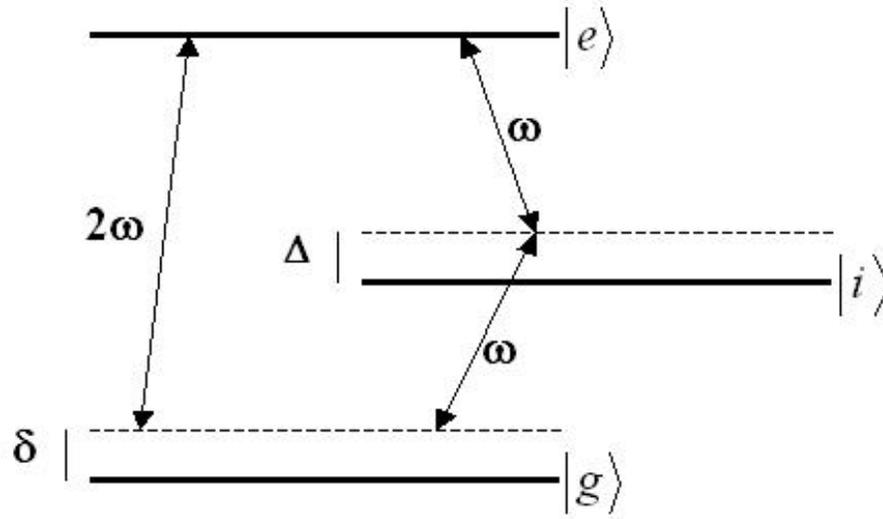


Figura 2.9: Átomo de 3 níveis utilizado para a produção de processos de 2 fótons.

A Hamiltoniana do sistema agora é dada por

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I, \quad (2.130)$$

$$\hat{H}_0 = E_e \sigma_{ee} + E_g \sigma_{gg} + E_i \sigma_{ii} + \hbar \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (2.131)$$

$$\hat{H}_I = \hbar g_{ie} (\hat{a} \sigma_{ei} + \hat{a}^\dagger \sigma_{ie}) + \hbar g_{ig} (\hat{a} \sigma_{ig} + \hat{a}^\dagger \sigma_{gi}), \quad (2.132)$$

com \hat{a} (\hat{a}^\dagger) sendo o operador de aniquilação (criação) do campo, $\sigma_{jk} = |j\rangle\langle k|$ e $g_{jk} = g_{kj}$ a constante de acoplamento do campo com a transição $j \leftrightarrow k$.

Passando para a representação de interação:

$$\hat{H}_I = \exp\left(\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}\right) \hat{H}_I \exp\left(\frac{-i\hat{H}_0 t}{\hbar}\right). \quad (2.133)$$

Utilizando as relações de comutação entre os operadores e a equação 2.97

$$\hat{H}_I = \hbar g_{ie} \hat{a}^\dagger \sigma_{ie} e^{-i\Delta t} + \hbar g_{ig} \hat{a}^\dagger \sigma_{gi} e^{it(\Delta-\delta)} + H.c. \quad (2.134)$$

Fazendo Δ suficientemente grande, temos a dinâmica fortemente dispersiva. Usando a equação 2.125, a Hamiltoniana efetiva obtida é dada por

$$\hat{H}_{eff} = \hbar \frac{g_{ie}^2}{\Delta} (\hat{a} \hat{a}^\dagger \sigma_{ee} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \sigma_{ii}) + \hbar \frac{g_{ig}^2}{\Delta - \delta} (\hat{a} \hat{a}^\dagger \sigma_{ii} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \sigma_{gg}) + \hbar g_{ie} g_{ig} \left(\frac{\hat{a}^2 \sigma_{eg} e^{i\delta t}}{\Delta - \delta} + \frac{\hat{a}^{\dagger 2} \sigma_{ge} e^{-i\delta t}}{\Delta} \right). \quad (2.135)$$

O estado intermediário $|i\rangle$ é autoestado do sistema; assim, para que ocorra o processo de 2 fótons o átomo não deve ser preparado nele (embora a preparação no nível intermediário possa ser útil para gerar estados comprimidos do campo, conforme será mostrado no capítulo 4). Dessa forma, podemos fazer $\sigma_{ii} = 0$, o que nos dá a Hamiltoniana

$$\hat{H} = \hbar\left(\frac{g_{ie}^2 \hat{a} \hat{a}^\dagger \sigma_{ee}}{\Delta} + \frac{g_{ig}^2 \hat{a}^\dagger \hat{a} \sigma_{gg}}{\Delta - \delta}\right) + \hbar g_{ie} g_{ig} \left(\frac{\hat{a}^2 \sigma_{eg} e^{i\delta t}}{\Delta - \delta} + \frac{\hat{a}^{\dagger 2} \sigma_{ge} e^{-i\delta t}}{\Delta}\right). \quad (2.136)$$

O primeiro termo do lado direito é responsável pelo Stark *shift* dinâmico [23], mas não induz transições entre os estados atômicos; nosso interesse consiste em verificar a influência do processo de 2 fótons na dinâmica de emaranhamento, então procuramos por um regime onde os efeitos do Stark *shift* sejam negligenciáveis.

Separando a Hamiltoniana como

$$\hat{H}_0 = \hbar \chi_1 \hat{a} \hat{a}^\dagger \sigma_{ee} + \hbar \chi_2 \hat{a}^\dagger \hat{a} \sigma_{gg}, \quad (2.137)$$

$$\hat{H}_1 = \hbar g^2 \left(\frac{\hat{a}^2 \sigma_{eg} e^{i\delta t}}{\Delta - \delta} + \frac{\hat{a}^{\dagger 2} \sigma_{ge} e^{-i\delta t}}{\Delta} \right), \quad (2.138)$$

onde

$$\chi_1 = \frac{g_{ie}^2}{\Delta}, \quad \chi_2 = \frac{g_{ig}^2}{\Delta - \delta}, \quad g^2 = g_{ie} g_{ig}, \quad (2.139)$$

e lembrando que

$$\sigma_{gg} = 1 - \sigma_{ee}, \quad (2.140)$$

$$\hat{a} \hat{a}^\dagger = 1 + \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (2.141)$$

podemos reescrever \hat{H}_0 como

$$\hat{H}_0 = \hbar \hat{a}^\dagger \hat{a} \sigma_{ee} (\chi_1 - \chi_2) + \hbar \chi_1 \sigma_{ee} + \hbar \chi_2 \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (2.142)$$

Passa-se então para a representação de interação,

$$\hat{H}_I = \exp\left(\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}\right) \hat{H}_1 \exp\left(\frac{-i\hat{H}_0 t}{\hbar}\right). \quad (2.143)$$

Agora, fazendo $\chi_1 = \chi_2 = \chi$, usando a equação 2.97 e as relações de comutação abaixo,

$$[\sigma_{ee}, \sigma_{eg}] = \sigma_{eg}, \quad (2.144)$$

$$[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^2] = -2\hat{a}^2, \quad (2.145)$$

temos a Hamiltoniana efetiva de interação:

$$\hat{H} = \hbar g^2 \left(\frac{\hat{a}^2 \sigma_{eg} e^{it(\delta-\chi)}}{\Delta - \delta} + \frac{\hat{a}^{\dagger 2} \sigma_{ge} e^{-it(\delta-\chi)}}{\Delta} \right). \quad (2.146)$$

Fazendo $\delta^2 = g_{ie}^2 - g_{ig}^2$ e $\Delta = g_{ie}^2/\delta$ é possível ter $\chi = \delta \ll \Delta$, sendo que a Hamiltoniana se reduz a

$$\hat{H} = \hbar \frac{g^2}{\Delta} (\hat{a}^2 \sigma_{eg} + \hat{a}^{\dagger 2} \sigma_{ge}), \quad (2.147)$$

com um operador de evolução temporal dado por

$$\hat{U}(t) = \cos \left[gt \sqrt{\hat{a}^2 \hat{a}^{\dagger 2}} \right] \sigma_{ee} + \cos \left[gt \sqrt{\hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2} \right] \sigma_{gg} - i \frac{\text{sen} gt \sqrt{\hat{a}^2 \hat{a}^{\dagger 2}}}{\sqrt{\hat{a}^2 \hat{a}^{\dagger 2}}} \hat{a}^2 \sigma_{eg} - i \hat{a}^{\dagger 2} \frac{\text{sen} gt \sqrt{\hat{a}^2 \hat{a}^{\dagger 2}}}{\sqrt{\hat{a}^2 \hat{a}^{\dagger 2}}} \sigma_{ge}. \quad (2.148)$$

Este regime tem a vantagem de permitir a análise do efeito exclusivo do processo de 2 fótons, não perturbado por Stark *shifts*. Este operador de evolução temporal será usado no capítulo 5 para verificarmos a influência de processos de 2 fótons no emaranhamento atômico.

Aplicando $\hat{U}(t)$ a um estado inicial do tipo $|\psi(0)\rangle = \sum_n c_{e,n} |e, n\rangle + c_{g,n} |g, n\rangle$, temos o estado do sistema no instante t :

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle = \sum_n [c_{e,n}(0) \cos(gt \sqrt{(n+1)(n+2)}) |e, n\rangle + c_{g,n}(0) \cos(gt \sqrt{n(n-1)}) |g, n\rangle \\ - ic_{g,n}(0) \text{sen}(gt \sqrt{n(n-1)}) |e, n-2\rangle - ic_{e,n}(0) \text{sen}(gt \sqrt{(n+1)(n+2)}) |g, n+2\rangle]. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Comparando com a expressão 2.114, vemos que a frequência de Rabi de 2 fótons é proporcional a $\sqrt{n(n-1)}$, ou, no limite de n muito grande, proporcional a n . Essa diferença influenciará a dinâmica de emaranhamento, conforme será visto no capítulo 5.

3 Emaranhamento e Teletransporte

O emaranhamento é uma propriedade exibida por alguns sistemas quânticos e se caracteriza pela presença de correlações que não podem ser explicadas classicamente, o que foi inicialmente visto como um paradoxo [24]. Neste capítulo, descrevemos alguns aspectos do emaranhamento, maneiras de medi-lo e uma aplicação, o teletransporte de estados.

3.1 Desigualdade de Bell

Tomemos inicialmente um par de fótons gêmeos, que apresentam momentos e polarizações opostas (no caso linear, H=horizontal e V=vertical), embora seja impossível apontar *a priori* qual a polarização de cada um. Então temos o estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle|H\rangle + |H\rangle|V\rangle). \quad (3.1)$$

Quando verificamos a polarização de um único fóton, há um colapso da função de onda e o resultado é horizontal ou vertical, sem superposição. Se medirmos agora o segundo fóton sua polarização será oposta à do primeiro. Temos então duas possibilidades:

- A polarização de ambos os fótons já está determinada na geração e não depende do processo de medida (esse conceito é chamado de *realismo*). Neste caso, a polarização dos fótons é uma **variável escondida**, à qual a Mecânica Quântica não tem acesso por ser uma teoria incompleta.
- A polarização do fóton só assume um valor definido ao ser feita a medida. Nesse caso, o não-determinismo quântico é uma característica fundamental da Natureza, o que significa que o segundo fóton "decide" sua polarização imediatamente após o primeiro revelar a sua, independentemente das posições relativas entre eles, e desprezando limites como a velocidade da luz (esse conceito é o de *não-localismo*).

A primeira interpretação, *real* e *local*, era a defendida por Einstein, Podolski e Rosen. A segunda, conhecida como *interpretação de Copenhagen*, foi defendida por Bohr [25]. A maneira de decidir entre elas foi primeiro revelada por Bell [26]. Algum tempo depois, Clauser *et al.* apresentaram uma fórmula análoga [27], que é a seguinte: sejam A_1, A_2, B_1, B_2 quatro propriedades físicas, medidas nos subsistemas A e B , cujos valores possíveis são $a_1, a_2, b_1, b_2 = \pm 1$. Seja β_{CHSH} o operador de Bell definido

por

$$\beta_{CHSH} = A_1B_1 + A_2B_1 + A_2B_2 - A_1B_2. \quad (3.2)$$

Se a descrição correta da Natureza for real e local, as quatro quantidades são independentes, isto é, o resultado de uma medida no subsistema A não tem nenhum efeito sobre uma medida no subsistema B. Seja $p(a_1, a_2, b_1, b_2)$ a probabilidade do sistema estar nesse estado; então o valor médio de β_{CHSH} é

$$\langle \beta_{CHSH} \rangle = \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} p(a_1, a_2, b_1, b_2)(a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2 - a_1b_2). \quad (3.3)$$

Como os valores de cada propriedade só podem ser ± 1 , ou $a_1 = a_2$ ou $a_1 = -a_2$, nos dando

$$-2 \leq \langle \beta_{CHSH} \rangle \leq 2. \quad (3.4)$$

A equação 3.4 é a **desigualdade de Bell-CHSH**, que deve ser cumprida para termos uma Física real e local. Vamos tomar, então, um par de elétrons no estado singleto,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle) \quad (3.5)$$

com as medidas nos subsistemas A e B dadas por

$$A_1 = \sigma_z \quad A_2 = \sigma_x \quad (3.6)$$

$$B_1 = \frac{-\sigma_z - \sigma_x}{\sqrt{2}} \quad B_2 = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{\sqrt{2}}; \quad (3.7)$$

Escrevemos a média do operador de Bell como

$$\langle \beta_{CHSH} \rangle = \langle A_1 \otimes B_1 \rangle + \langle A_2 \otimes B_1 \rangle + \langle A_2 \otimes B_2 \rangle - \langle A_1 \otimes B_2 \rangle; \quad (3.8)$$

Utilizando a Mecânica Quântica e lembrando que os subsistemas são elétrons independentes, não-interagentes, vemos que o resultado da soma de médias é

$$\langle \beta_{CHSH} \rangle = 2\sqrt{2} \quad (3.9)$$

uma clara violação da desigualdade de Bell! Então, basta realizar o experimento e verificar qual das previsões se confirma. Em todos os experimentos realizados até hoje (dos quais alguns são listados na referência [28]), a previsão quântica se mostrou correta, derrubando as descrições locais e reais.

Para um sistema bipartite de 2 níveis (2x2) é possível quantificar a violação da desigualdade da seguinte maneira: o operador densidade desse sistema é dado por [29]

$$\rho = \frac{1}{4}(I \otimes I + \vec{r} \cdot \sigma \otimes I + I \otimes \sigma \cdot \vec{s} + \sum_{i,j=1}^3 t_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j) \quad (3.10)$$

onde I é a matriz identidade, \mathbf{r} e \mathbf{s} são vetores no R^3 , σ_i são as matrizes de Pauli e os coeficientes t_{ij} formam a matriz T . Os vetores \vec{r} e \vec{s} podem ser determinados por medidas locais em cada subsistema, pois seus componentes são dados por

$$r_i = Tr(\rho \sigma_i \otimes I), \quad (3.11)$$

$$s_i = Tr(\rho I \otimes \sigma_i), \quad (3.12)$$

mas a matriz T é dada pelas correlações quânticas entre os subsistemas:

$$t_{ij} = Tr(\rho \sigma_i \otimes \sigma_j). \quad (3.13)$$

A matriz T está relacionada com a violação da desigualdade de Bell-CHSH através de um teorema devido a Horodecki *et al.* [29]: o operador de Bell-CHSH pode ser escrito da seguinte forma arbitrária:

$$\beta_{CHSH} = \sigma \cdot \vec{a} \otimes \sigma \cdot (\vec{b} + \vec{b}') + \sigma \cdot \vec{a}' \otimes \sigma \cdot (\vec{b} - \vec{b}') \quad (3.14)$$

onde $\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}'$ são vetores unitários arbitrários tridimensionais. O valor médio deste operador num estado do tipo 3.10 é

$$\langle \beta_{CHSH} \rangle = Tr(\rho \sigma \cdot \vec{a} \otimes \sigma \cdot (\vec{b} + \vec{b}') + \rho \sigma \cdot \vec{a}' \otimes \sigma \cdot (\vec{b} - \vec{b}')). \quad (3.15)$$

Definindo dois vetores ortogonais \vec{c} e \vec{c}' por

$$\vec{c} = \frac{\vec{b} + \vec{b}'}{2\cos\theta}, \quad (3.16)$$

$$\vec{c}' = \frac{\vec{b} - \vec{b}'}{2\sin\theta}, \quad (3.17)$$

$$(3.18)$$

com $\theta \in [0, \pi/2)$ e substituindo no valor médio

$$\langle \beta_{CHSH} \rangle = 2Tr(\rho\sigma \cdot \vec{a} \otimes \sigma \cdot \vec{c} \cos\theta + \rho\sigma \cdot \vec{a}' \otimes \sigma \cdot \vec{c}' \sin\theta) = \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos\theta}{2} Tr \left(\sigma \cdot \vec{a} \otimes \sigma \cdot \vec{a} + \vec{r} \cdot \sigma\sigma \cdot \vec{a} \otimes \sigma \cdot \vec{c} + \sigma \cdot \vec{a} \otimes \vec{s} \cdot \sigma\sigma \cdot \vec{c} + \sum_{i,j} t_{ij} \sigma_i \sigma \cdot \vec{a} \otimes \sigma_j \sigma \cdot \vec{c} \right) + \\ &+ \frac{\sin\theta}{2} Tr \left(\sigma \cdot \vec{a}' \otimes \sigma \cdot \vec{a}' + \vec{r} \cdot \sigma\sigma \cdot \vec{a}' \otimes \sigma \cdot \vec{c}' + \sigma \cdot \vec{a}' \otimes \vec{s} \cdot \sigma\sigma \cdot \vec{c}' + \sum_{i,j} t_{ij} \sigma_i \sigma \cdot \vec{a}' \otimes \sigma_j \sigma \cdot \vec{c}' \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Fazendo uso das seguintes propriedades

$$Tr(A \otimes B) = Tr(A)Tr(B), \quad (3.21)$$

$$Tr(\sigma \cdot \vec{v}) = 0, \forall \vec{v}, \quad (3.22)$$

a equação 3.20 se reduz a

$$\langle \beta_{CHSH} \rangle = \frac{\cos\theta}{2} Tr \left(\sum_{i,j} t_{ij} \sigma_i \sigma \cdot \vec{a} \otimes \sigma_j \sigma \cdot \vec{c} \right) + \frac{\sin\theta}{2} Tr \left(\sum_{i,j} t_{ij} \sigma_i \sigma \cdot \vec{a}' \otimes \sigma_j \sigma \cdot \vec{c}' \right). \quad (3.23)$$

Mas como

$$Tr(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij} \Rightarrow Tr \left(\sum_{i,j} t_{ij} \sigma_i \sigma \cdot \vec{a} \otimes \sigma_j \sigma \cdot \vec{c} \right) = \vec{a} \cdot T\vec{c}, \quad (3.24)$$

podemos reescrever a equação 3.20 de uma maneira que facilite a maximização:

$$\langle \beta_{CHSH} \rangle = 2(\vec{a} \cdot T\vec{c} \cos\theta + \vec{a}' \cdot T\vec{c}' \sin\theta). \quad (3.25)$$

Para maximizar o valor médio, é necessário que vetor \vec{a} esteja na mesma direção e sentido do vetor $T\vec{c}$, sendo o mesmo válido para os vetores \vec{a}' e $T\vec{c}'$, o que nos permite fazer

$$\begin{aligned} \max_{\vec{c}, \vec{c}', \theta} \langle \beta_{CHSH} \rangle &= 2(|T\vec{c}|\cos\theta + |T\vec{c}'|\sin\theta) = \\ &= 2\sqrt{|T\vec{c}|^2\cos^2\theta + |T\vec{c}'|^2\sin^2\theta + 2|T\vec{c}||T\vec{c}'|\cos\theta\sin\theta}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

O ângulo máximo θ é tal que $|T\vec{c}|^2\cos\theta = |T\vec{c}'|^2\sin\theta$, o que nos dá:

$$\max_{\vec{c}, \vec{c}'} \langle \beta_{CHSH} \rangle = 2\sqrt{|T\vec{c}|^2 + |T\vec{c}'|^2}. \quad (3.27)$$

Assim, tomando \vec{c} e \vec{c}' como sendo dois autovetores de $T^\dagger T$ com autovalores u e u' , respectivamente, então $|T\vec{c}|^2 = u$ e $|T\vec{c}'|^2 = u'$, o que determina a maximização final do valor médio de β_{CHSH} :

$$\max \langle \beta_{CHSH} \rangle = 2\max_{i,j} \sqrt{u_i + u_j}. \quad (3.28)$$

Podemos definir

$$M(\rho) = \max_{i,j} (u_i + u_j) \quad (3.29)$$

sendo que haverá uma violação da desigualdade de Bell sempre que $M > 1$.

3.2 Medidas de Emaranhamento

O emaranhamento de um estado pode ser indicado pela violação da desigualdade de Bell, mas todo estado emaranhado viola a desigualdade de Bell? Como medimos o emaranhamento? Vamos iniciar dando uma definição formal: um sistema físico, seja ele um estado puro ou misto, é dito *separável* se seu operador densidade puder ser escrito como a soma de produtos diretos de operadores densidade dos diferentes subsistemas

$$\rho = \sum_i \rho^{A(i)} \otimes \rho^{B(i)} \otimes \dots \otimes \rho^{N(i)}. \quad (3.30)$$

Um estado não-separável é dito **emaranhado**. Restringindo-nos a um sistema bipartite, temos que estados emaranhados são aqueles para os quais é impossível fazer

$$\rho = \sum_i \rho^{A(i)} \otimes \rho^{B(i)}. \quad (3.31)$$

Para quantificar o emaranhamento, vamos definir o estado **maximamente emaranhado** como aquele no qual, se não tivermos nenhuma informação sobre o subsistema A, o subsistema B parecerá maximamente misturado. A operação matemática correspondente ao processo físico de **ignorar tudo sobre um subsistema** é o **traço parcial** sobre aquele subsistema, que tem a dimensão do subsistema restante. Ou seja,

$$\rho_B = Tr_A \rho, \text{ onde } \langle l | \rho_B | l' \rangle = \sum_i \langle l k_i | \rho | l' k_i \rangle \quad (3.32)$$

onde $|l\rangle$ são os vetores da base do subsistema B e $|k_i\rangle$ os do subsistema A. Assim, um sistema bipartite de 2 níveis, com operador densidade ρ , será maximamente emaranhado se

$$\rho_B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Os sistemas de dois níveis são importantes porque são os análogos quânticos dos bits da comunicação clássica, sendo chamados de **qubits** [1]. Devido à sua importância para a computação quântica, são bem conhecidos e muito utilizados; os qubits maximamente emaranhados, para um sistema bipartite, são gerados por uma base de 4 vetores conhecidos como **estados de Bell**:

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \quad (3.34)$$

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle \pm |01\rangle). \quad (3.35)$$

Agora é possível definir uma medida de emaranhamento baseada no conceito de emaranhamento máximo: é a **entropia de emaranhamento**, definida como a **entropia de von Neumann** de um subsistema [30]:

$$S_E(\rho) = S(\rho_A) = -Tr(\rho_A \log_2 \rho_A). \quad (3.36)$$

Como a entropia total do estado puro é nula, cada um dos subsistemas apresenta a mesma entropia parcial [31]. O que esta medida quantifica é a quantidade de informação sobre um subsistema que se perde quando se ignora o outro subsistema. Um estado separável apresenta $S_E = 0$, o que significa que nenhuma informação é perdida quando se ignora o outro subsistema. Já um estado de Bell apresenta

$S_F = 1$, ou seja, quando um subsistema é ignorado o outro aparece como uma mistura estatística máxima: toda a informação sobre o estado inicial se perdeu. Dadas as dificuldades de se trabalhar com o logaritmo de um operador, pode-se usar em seu lugar a **entropia linear**, dada pela aproximação em primeira ordem da entropia de von Neumann:

$$S_L(\rho_A) = 1 - \text{Tr}\rho^2 \approx S(\rho_A) \quad (3.37)$$

que também fornece uma medida de emaranhamento.

Para sistemas 2x2, outra medida possível é a concorrência¹, definida por

$$C = |\langle \psi |^* \sigma_y \otimes \sigma_y | \psi \rangle|. \quad (3.38)$$

Ou seja, a concorrência mede o quanto o estado é afetado por uma operação global de *spin-flip*.

Para uma mistura de estados, determinar o emaranhamento de formação é mais complicado. É necessário encontrar todas as decomposições possíveis em estados puros e tomar a menor entropia entre elas:

$$E(\rho) = \min_{p_i, |\psi_i\rangle} \sum_i p_i E(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|). \quad (3.39)$$

Para ressaltar a dificuldade envolvida, vamos tomar como exemplo um *ensemble* dado pela mistura de dois estados de Bell:

$$\rho_{mix} = \frac{1}{2}(|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|). \quad (3.40)$$

Como temos uma mistura de dois estados maximamente emaranhados, uma das decomposições possíveis é

$$\frac{1}{2}E_f(|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|) + \frac{1}{2}E_f(|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|) = 1 \quad (3.41)$$

ou seja, aparentemente a mistura de dois estados maximamente emaranhados é também maximamente emaranhada. No entanto, a decomposição que minimiza o emaranhamento é a que descreve o sistema como uma mistura de dois estados separáveis:

$$\frac{1}{2}E_f(|00\rangle\langle 00|) + \frac{1}{2}E_f(|11\rangle\langle 11|) = 0. \quad (3.42)$$

¹Em inglês, *concurrence*, literalmente coincidência, freqüentemente traduzida como concorrência ou pelo neologismo *concorrência*.

A dificuldade de se determinar o emaranhamento de um sistema misto está resolvida caso o sistema seja bipartite 2x2 [32]: seja $H(x)$ a função de entropia binária

$$H(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x) \quad (3.43)$$

define-se o **emaranhamento de formação**, dado por

$$E_f(\rho) = H \left[\frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - C^2(\rho)}) \right], \quad (3.44)$$

onde $C(\rho)$ é a concorrência, já definida na equação 3.38, mas que, para estados mistos, pode ser calculada pela **fórmula de Hill-Wootters** [33]:

$$C = \max[0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}] \quad (3.45)$$

com os λ_i sendo os autovalores, em ordem decrescente, da matriz Λ :

$$\Lambda = \rho(\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (3.46)$$

O emaranhamento de formação está relacionado com a quantidade de cópias de um estado inicial necessárias para gerar um estado residual maximamente emaranhado usando apenas operações locais e comunicação clássica [33]. É importante ressaltar que a concorrência está univocamente relacionada com o emaranhamento de formação, sendo que ambos conseguem quantificar o emaranhamento.

3.3 Teletransporte

O conceito de teletransporte, empregado no âmbito da Teoria da Informação Quântica, consiste na transmissão de informação através de um canal que utiliza o princípio do emaranhamento. Quatro elementos estão envolvidos no teletransporte: o emissor (Alice), o receptor (Bob), o canal quântico e o canal clássico. Bennett *et al.* [2] desenvolveram o Protocolo Padrão de Teletransporte:

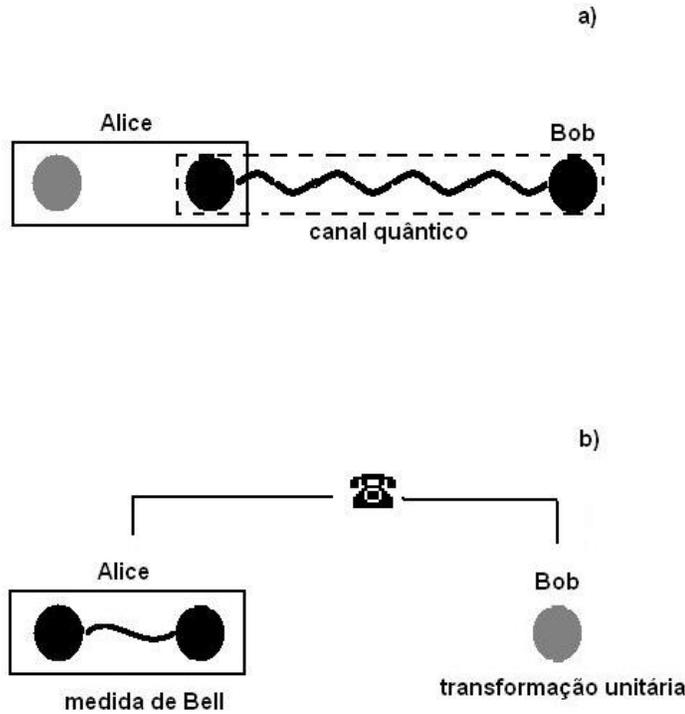


Figura 3.1: Protocolo padrão de teletransporte.

Alice possui um estado geral de dois qubits dado por

$$|\psi\rangle_1 = a|0\rangle + b|1\rangle. \quad (3.47)$$

O canal quântico é um estado de duas partículas maximamente emaranhadas, por exemplo o estado de Bell $|\Psi^-\rangle$:

$$|\psi\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \quad (3.48)$$

sendo que a partícula 2 fica no laboratório de Alice e a 3 vai para o laboratório de Bob. O estado global do sistema é

$$|\psi\rangle_{123} = \frac{a}{\sqrt{2}}(|001\rangle - |010\rangle) + \frac{b}{\sqrt{2}}(|101\rangle - |110\rangle). \quad (3.49)$$

Então Alice realiza uma medida de Bell (uma projeção na base dos estados de Bell) em seu par de partículas, com quatro resultados possíveis; essa projeção emaranha as partículas 1 e 2, desemaranhando 2 e 3; Alice informa Bob do resultado de sua medida, através de um canal clássico (como

um telefone, por exemplo), que por sua vez escolhe uma transformação unitária para aplicar sobre a partícula 3:

Medida de Alice	Estado Resultante de Bob	Transformação Unitária
$ \Psi^+\rangle$	$-(a 0\rangle + b 1\rangle)$	1
$ \Psi^-\rangle$	$-(a 0\rangle - b 1\rangle)$	σ_z
$ \Phi^+\rangle$	$a 1\rangle + b 0\rangle$	σ_x
$ \Phi^-\rangle$	$a 1\rangle - b 0\rangle$	$i\sigma_y$

Tabela 3.1: Resultados de Alice e Bob no Protocolo Padrão de Teletransporte (PPT).

Ao final do processo, depois de Bob aplicar a transformação indicada na tabela 3.3, o estado da partícula 1 terá sido teletransportado para a partícula 3. Alguns detalhes importantes devem ser notados:

- O PPT não pode ser usado para comunicação mais rápida que a velocidade da luz, pois Bob precisa receber, via canal clássico, a informação sobre qual transformação usar. O canal clássico, obviamente, é limitado pela velocidade da luz.
- Após o PPT, a partícula 1 está emaranhada com a 2. Seu estado não é mais o inicial; caso fosse, teria havido clonagem (partículas 1 e 3 no mesmo estado) e não transporte, o que é impossível pelo teorema da não-clonagem [34].
- Embora o PPT utilize um estado maximamente emaranhado como canal quântico, estados menos emaranhados também são úteis, dentro de um certo limite, conforme será visto adiante.

Fidelidade

Utilizando o PPT e um canal maximamente emaranhado, é possível teletransportar exatamente o mesmo estado da partícula 1 para a 3. Mas se o canal for emaranhado de maneira não-máxima? Que tipo de estado é útil para a execução do PPT? Introduzimos agora o conceito de **fração de singleto** $f(\rho)$ para um estado bipartite ρ :

$$f(\rho) = \max_{|\Phi\rangle} \langle \Phi | \rho | \Phi \rangle \quad (3.50)$$

onde ρ é o operador densidade do canal quântico e $|\Phi\rangle$ é um estado maximamente emaranhado. Assim, a fração de singleto é a maximização do valor médio de ρ sobre todos os estados maximamente emaranhados possíveis naquele espaço de Hilbert. No caso de sistemas 2×2 , $|\Phi\rangle$ são os quatro estados de Bell. Se o canal é um estado maximamente emaranhado, $f = 1$ e o teletransporte é realizado

perfeitamente. Se o par compartilhado é separável, então não há canal quântico e a fração de singleto máxima que pode ser obtida é $1/d$ [2]. Assim, canais de 2 qubits são úteis para teletransporte quando apresentam $f > 0.5$, pois estão acima do limite máximo atingível apenas com comunicação clássica. Para canais 2×2 , uma fórmula relaciona a $f(\rho)$ e a matriz de correlações quânticas T [35]:

$$f(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{N(\rho)} \right), & \text{se } \det T \leq 0 \\ \frac{1}{4} [1 + \max_{i,j,k} (|t_i| + |t_j| - |t_k|)], & \text{se } \det T > 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

onde

$$N(\rho) = \text{Tr} T^\dagger T \quad (3.52)$$

e $t_{i,j,k}$ são os autovalores de T .

Outro conceito bastante utilizado é o de **fidelidade de transmissão** $F(\rho)$, definida para um esquema geral de teletransporte, não necessariamente o PPT: nesse esquema, Alice pode realizar qualquer medida O no seu par de partículas. Seja $|\psi\rangle_1$ o estado da partícula 1, que se quer teletransportar, ρ a matriz densidade do canal quântico e ρ_{Bob} a matriz densidade reduzida de Bob; então

$$\rho_{Bob} = \text{Tr}_{Alice} [O(|\psi\rangle_{11} \langle \psi| \otimes \rho)] \quad (3.53)$$

e a fidelidade de transmissão é dada como

$$F(\rho, O) = \overline{\langle \psi | \rho_{Bob}^\psi | \psi \rangle} \quad (3.54)$$

sendo que a média é tomada sobre todos os estados da esfera de Bloch.

Podemos relacionar a fidelidade de transmissão com a fração de singleto da seguinte forma [36]:

$$F = \frac{fd + 1}{d + 1} \quad (3.55)$$

que, no caso de dois qubits, se torna

$$F = \frac{2f + 1}{3} \quad (3.56)$$

Agora podemos determinar em termos de F quais estados são úteis para o PPT: se $f > 1/2$, então $F > 2/3 \rightarrow N(\rho) > 1$.

Agora, temos algumas observações interessantes sobre os estados úteis para teletransporte e os que violam a desigualdade de Bell: primeiro, notemos que $M(\rho)$ é dado pela soma dos dois maiores

autovalores de $T^\dagger T$ e $N(\rho)$ é dado pela soma de todos. Assim, $N \geq M$, ou seja, todo estado de dois qubits que viola a desigualdade de Bell é útil para o PPT. A inversa não é verdadeira: alguns estados emaranhados não violam a desigualdade de Bell mas são úteis para o PPT (como os estados de Werner [37]), com $N > 1 > M$ e outros ainda não violam Bell nem servem para teletransporte, pois apresentam $1 > N > M$.

4 Geração de Estados Comprimidos

Estados comprimidos da luz já são experimentalmente gerados através da utilização de cristais não-lineares [38], mas, para aplicações em cavidades duas novas propostas surgiram recentemente. Elas envolvem a interação de um campo externo clássico, como um laser, com um átomo de 3 níveis em uma cavidade; a situação é parecida com aquela que produz a hamiltoniana de Jaynes-Cummings de 2 fótons, mostrada na seção 2.7, mas algumas distinções são importantes: para gerar o JCM de 2 fótons não há acoplamento $g \leftrightarrow e$ forçado por um campo externo e o nível intermediário é eliminado, enquanto para gerar estados comprimidos, há um campo clássico acoplando os níveis $g \leftrightarrow e$ e o átomo é preparado no nível intermediário i ; laser, campo e transições atômicas podem ser dispersivos [8] ou ressonantes [9].

4.1 Esquema Dispersivo

A Hamiltoniana do esquema dispersivo é nada mais que uma modificação do modelo de Jaynes-Cummings, que leva em conta a presença os três níveis atômicos e as possíveis transições entre eles, conforme mostrados na figura 4.1:

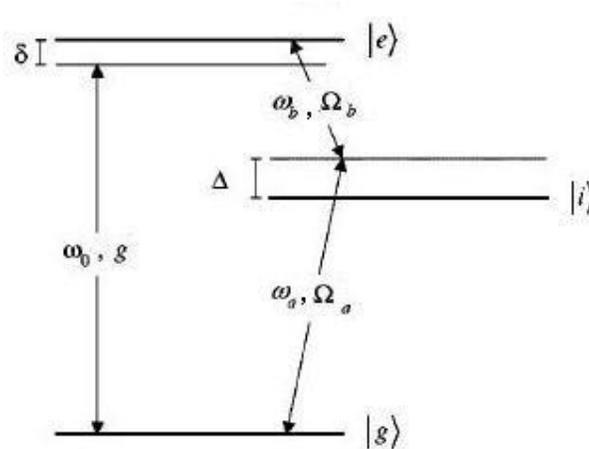


Figura 4.1: Esquema para a geração de estados comprimidos com campo dissonante.

Inicialmente, vamos considerar que a cavidade apresenta dois modos:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (4.1)$$

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_a\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_b\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hbar\omega_e\sigma_{ee} + \hbar\omega_i\sigma_{ii} + \hbar\omega_g\sigma_{gg}, \quad (4.2)$$

$$\hat{V} = \hbar(\Omega_a\hat{a}\sigma_{ig} + \Omega_b\hat{b}\sigma_{ei} + ge^{-i\omega_0t}\sigma_{ge} + H.c.), \quad (4.3)$$

onde \hat{a} e \hat{b} são os operadores de aniquilação dos modos da cavidade, $\Omega_{a,b}$ são os acoplamentos átomo \leftrightarrow modos da cavidade, g é o acoplamento átomo \leftrightarrow campo clássico.

Na representação de interação, que é dada por $\hat{H}_I = e^{i\hat{H}_0t/\hbar}\hat{V}e^{-i\hat{H}_0t/\hbar}$, temos

$$\hat{H}_I = (\Omega_a\hat{a}\sigma_{ie}e^{-i\Delta t} + \Omega_b\hat{b}\sigma_{ei}e^{i\Delta t} + ge^{i\delta t}\sigma_{eg} + H.c.) + \Delta(\sigma_{gg} + \sigma_{ee}) \quad (4.4)$$

que num referencial giratório dado por $\exp[-i\Delta t(\sigma_{ee} + \sigma_{gg})]H_I\exp[i\Delta t(\sigma_{ee} + \sigma_{gg})]$ resulta em:

$$\hat{H} = \Omega_a(\hat{a}\sigma_{ig} + \hat{a}^\dagger\sigma_{gi}) + \Omega_b(\hat{b}\sigma_{ei} + \hat{b}^\dagger\sigma_{ie}) + g(e^{i\delta t}\sigma_{ge} + e^{-i\delta t}\sigma_{eg}). \quad (4.5)$$

Fazendo $\Delta \gg \Omega_{a,b}$, as transições induzidas pelos modos da cavidade entre os níveis $g \leftrightarrow i$ e $i \leftrightarrow e$ ocorrem numa escala de tempo muito mais lenta que as induzidas pelo campo externo entre os níveis $g \leftrightarrow e$, o que nos permite utilizar a aproximação adiabática, definida por

$$\frac{d}{dt}\sigma_{ig} = \frac{d}{dt}\sigma_{ie} = 0. \quad (4.6)$$

Resolvendo as equações de movimento de Heisenberg para estes operadores:

$$\dot{\sigma}_{ig} = -\frac{i}{\hbar}[\sigma_{ig}, H] = i\Omega_a^*\hat{a}^\dagger(\sigma_{gg} - \sigma_{ii}) + i\Omega_b\hat{b}\sigma_{eg} - ig e^{-i\delta t}\sigma_{ie} - i\Delta\sigma_{ig} = 0, \quad (4.7)$$

$$\sigma_{ig} = \frac{\Omega_a^*}{\Delta}\hat{a}^\dagger(\sigma_{gg} - \sigma_{ii}) + \frac{\Omega_b}{\Delta}\hat{b}\sigma_{eg} - \frac{g}{\Delta}e^{-i\delta t}\sigma_{ie}. \quad (4.8)$$

$$\dot{\sigma}_{ei} = -\frac{i}{\hbar}[\sigma_{ei}, H] = i\Omega_a^*\hat{a}^\dagger\sigma_{ge} + i\Omega_b\hat{b}(\sigma_{ee} - \sigma_{ii}) - ig^*e^{i\delta t}\sigma_{ig} - i\Delta\sigma_{ie} = 0, \quad (4.9)$$

$$\sigma_{ie} = \frac{\Omega_a^*}{\Delta}\hat{a}^\dagger\sigma_{ge} + \frac{\Omega_b}{\Delta}\hat{b}(\sigma_{ee} - \sigma_{ii}) - \frac{g^*}{\Delta}e^{i\delta t}\sigma_{ig}. \quad (4.10)$$

Assim, usando $\Delta^2 \gg |g|^2$, podemos escrever

$$\sigma_{ig} = \frac{\Omega_a^*}{\Delta} \hat{a}^\dagger (\sigma_{gg} - \sigma_{ii}) + \frac{\Omega_b}{\Delta} \hat{b} \sigma_{eg} - \frac{\Omega_a g}{\Delta^2} \hat{a}^\dagger e^{-i\delta t} \sigma_{ge} - \frac{\Omega_b g}{\Delta^2} e^{-i\delta t} \hat{b} (\sigma_{ee} - \sigma_{ii}). \quad (4.11)$$

$$\sigma_{ie} = \frac{\Omega_a^*}{\Delta} \hat{a}^\dagger \sigma_{ge} + \frac{\Omega_b^*}{\Delta} \hat{b} (\sigma_{ee} - \sigma_{ii}) - \frac{\Omega_a g^*}{\Delta^2} \hat{a}^\dagger e^{i\delta t} (\sigma_{gg} - \sigma_{ii}) - \frac{\Omega_b g^*}{\Delta^2} \hat{b} e^{i\delta t} \sigma_{eg}. \quad (4.12)$$

Substituindo na Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \hat{H}/\hbar &= (\Delta + \frac{|\Omega_a|^2}{\Delta}) \sigma_{gg} + (\Delta + \frac{|\Omega_b|^2}{\Delta}) \sigma_{ee} - (\frac{|\Omega_a|^2 + |\Omega_b|^2}{\Delta}) \sigma_{ii} \\ &\quad + g(1 - \frac{|\Omega_a|^2 + |\Omega_b|^2}{2\Delta^2}) (e^{-i\delta t} \sigma_{ge} + e^{i\delta t} \sigma_{eg}) \\ &\quad + \frac{- (|\Omega_b|^2 \hat{b}^\dagger \hat{b} + |\Omega_a|^2 \hat{a}^\dagger \hat{a}) \sigma_{ii} + |\Omega_a|^2 \hat{a}^\dagger \hat{a} \sigma_{gg} + |\Omega_b|^2 \hat{b}^\dagger \hat{b} \sigma_{ee}}{\Delta} \\ &\quad - \frac{g}{\Delta^2} (|\Omega_a|^2 \hat{a}^\dagger \hat{a} + |\Omega_b|^2 \hat{b}^\dagger \hat{b}) (e^{-i\delta t} \sigma_{ge} + e^{i\delta t} \sigma_{eg}) \\ &\quad + \frac{\Omega_a \Omega_b \hat{a} \hat{b} \sigma_{eg} + \Omega_a^* \Omega_b^* \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \sigma_{ge}}{\Delta} \\ &\quad - \frac{g}{\Delta^2} (\Omega_a \Omega_b \hat{a} \hat{b} e^{-i\delta t} + \Omega_a^* \Omega_b^* \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger e^{i\delta t}) (\sigma_{ee} - \sigma_{ii} + \sigma_{gg}). \end{aligned} \quad (4.13)$$

É possível ver que o nível intermediário i é um autoestado do sistema; então, preparando o átomo neste estado, a Hamiltoniana se reduz a

$$\hat{H} = \frac{\hbar g}{\Delta^2} (\Omega_a \Omega_b e^{-i\delta t} \hat{a} \hat{b} + H.c.) + \frac{\hbar}{\Delta} (|\Omega_b|^2 \hat{b}^\dagger \hat{b} - |\Omega_a|^2 \hat{a}^\dagger \hat{a} - |\Omega_a|^2 - |\Omega_b|^2). \quad (4.14)$$

Submetendo essa Hamiltoniana a uma rotação $U(t) = \exp[\frac{-it}{\Delta} (|\Omega_a|^2 \hat{a}^\dagger \hat{a} + |\Omega_b|^2 \hat{b}^\dagger \hat{b})]$ temos:

$$H_F = \frac{g}{\Delta^2} (\Omega_a \Omega_b e^{-it(\delta - \frac{|\Omega_a|^2 + |\Omega_b|^2}{\Delta})} \hat{a} \hat{b} + \Omega_a^* \Omega_b^* e^{it(\delta - \frac{|\Omega_a|^2 + |\Omega_b|^2}{\Delta})} \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger). \quad (4.15)$$

Assim, se acertamos o valor de $\delta = \frac{|\Omega_a|^2 + |\Omega_b|^2}{\Delta}$, temos:

$$H_F = \frac{g}{\Delta^2} (\Omega_a \Omega_b \hat{a} \hat{b} + \Omega_a^* \Omega_b^* \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger) \quad (4.16)$$

o que nos gera o operador de evolução temporal

$$U_T(t) = \exp(\frac{\zeta^*}{2} \hat{a} \hat{b} - \frac{\zeta}{2} \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger) = S[\zeta(t)], \quad (4.17)$$

com

$$\zeta(t) = \frac{2\Omega_a\Omega_b g t e^{-i\pi/2}}{\Delta^2}.$$

Desse modo, conseguimos gerar um operador de compressão para um estado inicial qualquer na cavidade, com duas situações possíveis:

- Caso $\omega_a = \omega_b$, temos um operador de compressão de 1 modo

$$\hat{S}(\zeta) = \exp\left(\frac{\zeta}{2}\hat{a}^{\dagger 2} - \frac{\zeta^*}{2}\hat{a}^2\right) \quad (4.18)$$

$$\hat{S}(\zeta)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \sum_n \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} (-0.5e^{i\phi} \text{tgh} r)^n |2n\rangle. \quad (4.19)$$

- Caso $\omega_a \neq \omega_b$, temos um operador de compressão de 2 modos

$$\hat{S}(\zeta)_{AB} = \exp\left(\zeta\hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger} - \zeta^*\hat{a}\hat{b}\right) \quad (4.20)$$

$$\hat{S}(\zeta)_{AB}|0\rangle = \frac{1}{\cosh r} \sum_n (\text{tgh} r)^n |n\rangle_A |n\rangle_B. \quad (4.21)$$

Os dois tipos de vácuo comprimido serão usados no capítulo 5 na análise dos efeitos da compressão sobre o emaranhamento atômico.

O esquema de geração de compressão de 1 modo pode ser experimentalmente implementado, utilizando-se um átomo de rubídio (trata-se do já conhecido **maser de 2 fótons** [10]). Os níveis escolhidos são $e = 40S$, $i = 39P_{3/2}$, $g = 39S$, com os parâmetros relevantes dados por:

- $\omega_{eg} \approx 10^{11} Hz$.
- $\omega_{ig} \approx \omega_{ei} \approx 5.10^{10} Hz$.
- $|\Omega_a| = |\Omega_b| \approx 7.10^5 Hz$.
- $g \approx 7.10^5 Hz$.
- tempo de interação $\approx 6.10^{-4} s$.
- $\Delta \approx 3.9.10^6 Hz$.
- $\delta \approx 2.5.10^5 Hz$.

4.2 Esquema Ressonante

O esquema ressonante considera que as transições atômicas dipólo-permitidas $i \leftrightarrow e$ e $g \leftrightarrow i$ estão em ressonância com a cavidade, enquanto a transição dipólo-proibida $g \leftrightarrow e$ está em ressonância com o campo externo [9]; a Hamiltoniana do processo é inicialmente a mesma do caso dispersivo, mas se torna diferente ao serem introduzidas condições distintas; a primeira delas é o regime de laser forte, $g \gg \Omega_{a,b}$.

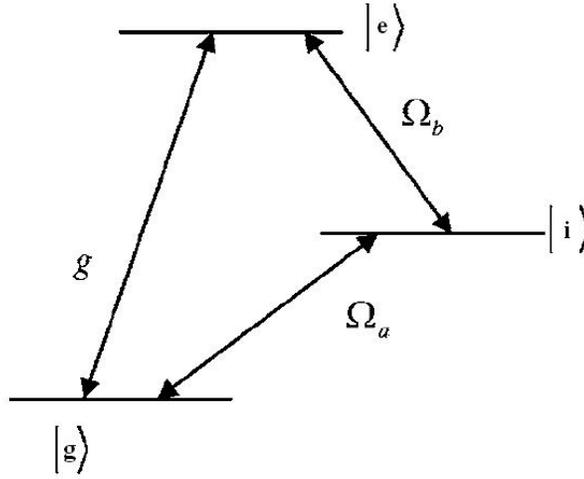


Figura 4.2: Esquema para a geração de estados comprimidos com campo ressonante.

Separando a Hamiltoniana em duas partes

$$\hat{H}_{clas} = ge^{i\varphi}\sigma_{ge} + H.c. \quad (4.22)$$

$$\hat{H}_{cav} = \Omega_a\hat{a}\sigma_{ig} + \Omega_b\hat{b}\sigma_{ei} + H.c. \quad (4.23)$$

e passando para um referencial giratório dado por

$$\hat{H} = e^{i\hat{H}_{clas}t}\hat{H}_{cav}e^{i\hat{H}_{clas}t} \quad (4.24)$$

temos

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{\Omega_a}{\sqrt{2}}[e^{-i\varphi/2}hata^\dagger(e^{igt}|+\rangle + e^{-igt}|-\rangle)\langle i| + e^{i\varphi/2}\hat{a}|i\rangle(e^{-igt}\langle +| + e^{igt}\langle -|)] \\ & + \frac{\Omega_b}{\sqrt{2}}[e^{i\varphi/2}\hat{b}^\dagger|i\rangle(e^{-igt}\langle +| - e^{igt}\langle -|) + e^{-i\varphi/2}\hat{b}(e^{igt}|+\rangle - e^{-igt}|-\rangle)\langle i|] \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde $|+\rangle, |-\rangle$ são os kets da base vestida:

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi/2}|g\rangle + e^{-i\omega/2}|e\rangle), \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi/2}|g\rangle - e^{-i\varphi/2}|e\rangle). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Como g é muito grande, estamos no caso de dinâmica fortemente dispersiva, sendo aplicável o método descrito na seção anterior. Assim,

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2g}[(|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|)(\Omega_a^2 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Omega_b^2 \hat{b} \hat{b}^\dagger) \\ &+ \Omega_a \Omega_b (|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|)(\hat{a}^\dagger \hat{b} e^{i\varphi} + \hat{a} \hat{b}^\dagger e^{-i\varphi}) \\ &- 2\Omega_a \Omega_b \sigma_{ii}(\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger e^{-i\varphi} + \hat{a} \hat{b} e^{i\varphi}). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Agora, se preparamos o átomo inicialmente no estado intermediário, a Hamiltoniana toma a forma

$$\hat{H} = \frac{-\Omega_a \Omega_b}{g} (e^{-i\varphi} \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger + e^{i\varphi} \hat{a} \hat{b}) \quad (4.28)$$

o que nos dá o seguinte operador de evolução temporal:

$$\hat{U}(t) = \exp\left(\frac{\zeta^*}{2} \hat{a} \hat{b} - \frac{\zeta}{2} \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger\right) = S[\zeta(t)], \quad (4.29)$$

com

$$\zeta(t) = \frac{2}{g} \Omega_a \Omega_b t e^{-i(\varphi + \pi/2)}. \quad (4.30)$$

Ou seja, também é possível gerar estados comprimidos usando um esquema de campo ressonante com átomo de 3 níveis tipo escada, sendo que teremos o campo comprimido de 1 modo caso $\omega_a = \omega_b$ ou o campo comprimido de 2 modos caso $\omega_a \neq \omega_b$. O campo comprimido de 1 modo pode ser implementado experimentalmente com um átomo de rubídio, com o mesmo sistema de maser de 2 fótons do caso dispersivo, mas selecionando (para o rubídio) os seguintes níveis: $e = 39S$, $i = 38P_{3/2}$, $g = 38S$. Os parâmetros relevantes são [11, 12]:

- $\omega_{eg} \approx 10^{11} Hz$.
- $|\Omega_a| \approx 7.10^5 Hz$.
- $g \approx 7.10^6 Hz$.

- $t_i \approx 6.10^{-4} s$.
- $\Delta \approx 5.10^5 Hz$.

É importante notar que temos $\Delta \ll \omega_{eg}$, sendo possível tratar o sistema como se ele fosse exatamente ressonante ($\Delta \approx 0$). O caso ressonante, no entanto, apresenta um inconveniente: experimentalmente o processo do maser de 2 fótons entre os níveis $e \leftrightarrow g$ é muito mais raro que a cascata de 1 fóton $e \leftrightarrow i \leftrightarrow g$ [11].

5 Emaranhamento atômico via cavidade

Neste capítulo exploraremos os aspectos do emaranhamento que surgem via interação átomo-campo em uma cavidade. Um átomo, ao interagir com o campo em uma cavidade, se torna emaranhado com ele; um segundo átomo, ao interagir com o mesmo campo, pode se tornar emaranhado com o primeiro, permitindo aplicações em computação quântica. Já foram feitas propostas de utilização deste mecanismo com estados comprimidos [39] em uma cavidade e comprimidos de dois modos em duas cavidades [40, 41], considerando um mesmo tempo de interação para ambos os átomos. Aqui, por outro lado, se considera uma única cavidade, com tempos de interação gerais (não necessariamente iguais), com campos comprimidos e coerentes, em processos de um e dois fótons. Os átomos apresentam dois níveis efetivos cuja transição está em ressonância com a cavidade, sistema já realizado experimentalmente por Hagley *et al.* [4]

5.1 Cavidade inicialmente em estado de Vácuo

Consideramos que a interação é descrita pela Hamiltoniana de Jaynes-Cummings dada no capítulo 2, indicando trocas de 1 ou 2 fótons entre átomo e campo. Começamos com um caso básico: o campo inicial é o vácuo e o átomo inicialmente no estado excitado; por aplicação direta da evolução temporal de Jaynes-Cummings de 1 fóton ressonante (eq. 2.109), a dinâmica é

$$|\psi(t)\rangle = \cos gt|e, 0\rangle - i \operatorname{sen} gt|g, 1\rangle. \quad (5.1)$$

A matriz densidade do sistema pode ser montada numa base de 4 kets: $|e, 0\rangle, |e, 1\rangle, |g, 0\rangle, |g, 1\rangle$; assim,

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos^2 gt & 0 & 0 & \cos gt \operatorname{sen} gt \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos gt \operatorname{sen} gt & 0 & 0 & \operatorname{sen}^2 gt \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

A concorrência, dada pelas equações 3.38 ou 3.45, é

$$C = |2 \operatorname{sen} gt \cos gt|. \quad (5.3)$$

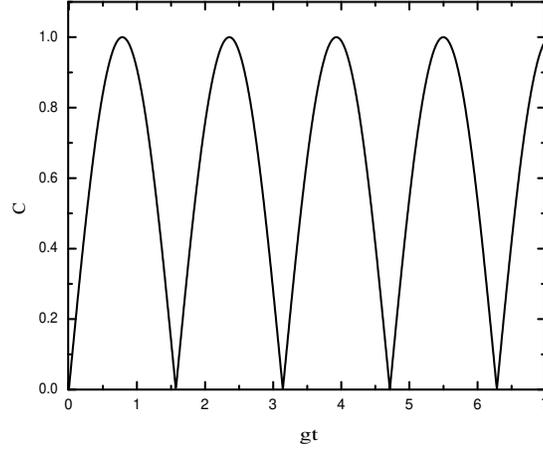


Figura 5.1: Concorrência em função do tempo para o estado inicial $|e\rangle|0\rangle$

Os picos indicam os instantes de formação de estados maximamente emaranhados ($C = 1$), $|\psi\rangle = (|e, 0\rangle \pm i|g, 1\rangle)/\sqrt{2}$, enquanto os mínimos indicam estados separáveis ($C = 0$).

O próximo passo é o emaranhamento entre dois átomos que atravessam a mesma cavidade sucessivamente:

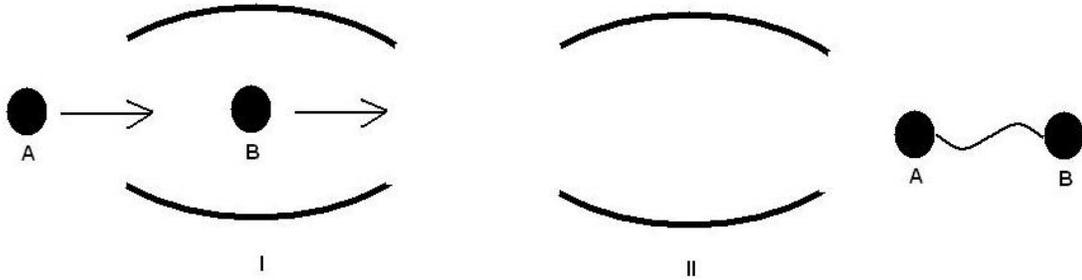


Figura 5.2: Esquema de emaranhamento atômico via cavidade: (I) os átomos passam sucessivamente pela cavidade e (II) ficam emaranhados.

Cada átomo interage com o campo da cavidade separadamente; continuando no regime ressonante, basta aplicar sucessivamente a equação 2.109 ao estado inicial para obter a evolução do sistema; estamos interessados nos estados maximamente emaranhados, então precisamos escolher um estado inicial que facilite a geração: começaremos com o mesmo estado experimentalmente usado por Haggley *et al.* [4], onde o primeiro átomo está no estado excitado, o segundo no fundamental e a cavidade preparada inicialmente no vácuo:

$$|\psi(t=0)\rangle = |g\rangle_2 |e\rangle_1 |0\rangle_f. \quad (5.4)$$

Após o átomo 1 interagir com a cavidade durante o tempo t_1 e o 2 durante o tempo t_2 , o sistema fica no estado

$$|\psi(t_1, t_2)\rangle = U(t_1) \otimes U(t_2)|\psi(0)\rangle = \cos gt_1 |g, e, 0\rangle - i \text{sen} gt_1 \cos gt_2 |g, g, 1\rangle - \text{sen} gt_1 \text{sen} gt_2 |e, g, 0\rangle. \quad (5.5)$$

Queremos verificar o emaranhamento atômico sem medirmos nenhuma propriedade do campo; por isso, vamos tomar o traço sobre ele no formalismo de operadores densidade; o subsistema atômico é 2×2 e nos dá a matriz ρ_A de ordem 4 na base $\{|e, e\rangle, |e, g\rangle, |g, e\rangle, |g, g\rangle\}$:

$$\rho_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen}^2 gt_1 \text{sen}^2 gt_2 & -\cos gt_1 \text{sen} gt_1 \text{sen} gt_2 & 0 \\ 0 & -\cos gt_1 \text{sen} gt_1 \text{sen} gt_2 & \cos^2 gt_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}^2 gt_1 \cos^2 gt_2 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Agora é possível medir o emaranhamento entre os átomos em função dos tempos de interação; a concorrência atômica é mostrada na figura 5.3. Os tempos de interação que garantem máximo emaranhamento entre os átomos são dados por múltiplos de $2gt_1 = gt_2 = (k + \frac{1}{2})\pi, k = 0, 1, 2, \dots$; nestes tempos, o estado atômico é dado por $|\psi\rangle_A = (|g, e\rangle + |e, g\rangle)/\sqrt{2}$, completamente desemaranhado do campo.

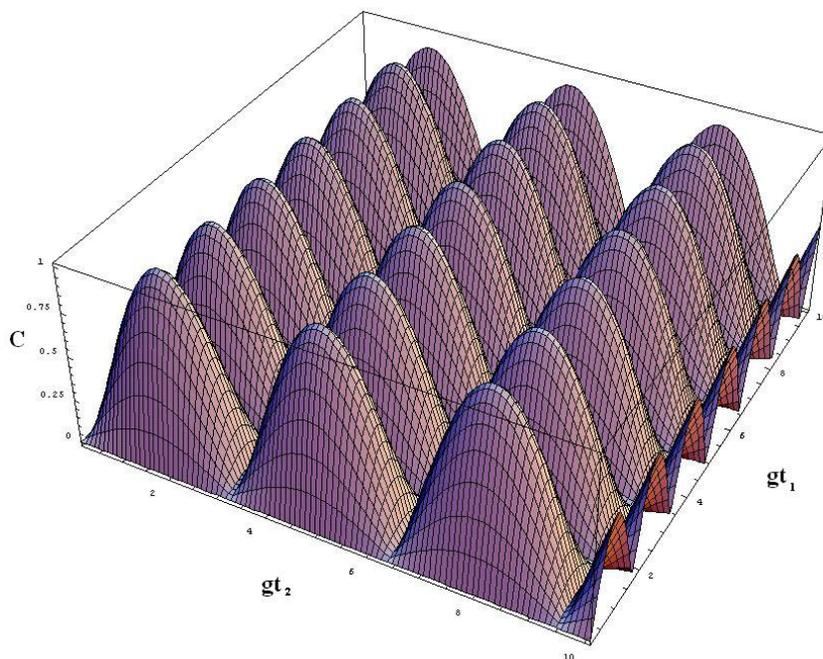


Figura 5.3: Concorrência em função dos tempos de interação para cavidade inicialmente no vácuo.

O mesmo pode ser visto na figura 5.4, que mostra a entropia linear em função dos tempos de interação: o desemaranhamento do campo garante que o estado atômico seja puro, com entropia nula.

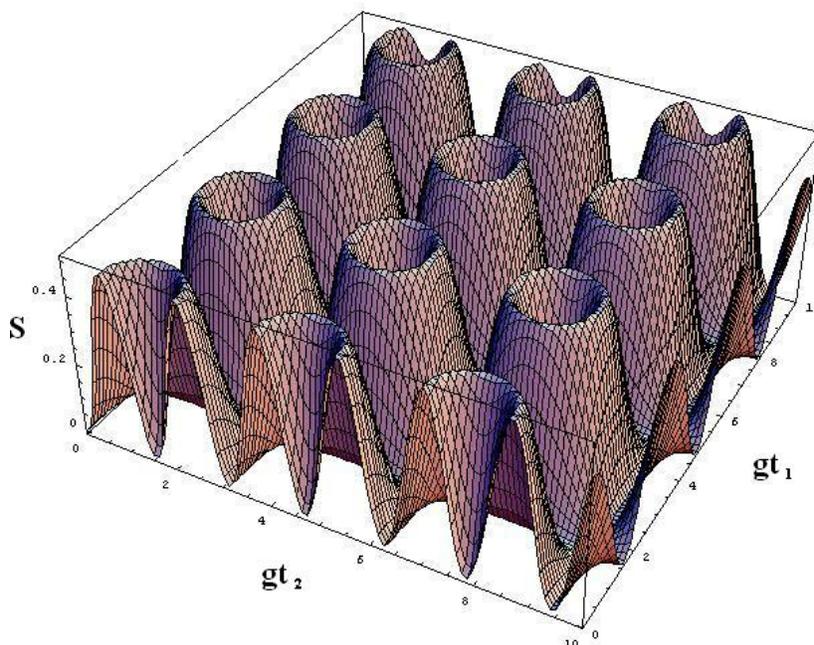


Figura 5.4: Entropia linear em função dos tempos de interação para cavidade inicialmente no vácuo.

Para um processo de 2 fótons, preparando os átomos também no estado $|ge\rangle$, após a evolução

temporal dada pela equação 2.148 o estado global do sistema fica

$$|\psi(t_1, t_2)\rangle = \cos(gt_1\sqrt{2!})|g, e, 0\rangle - i\sin(gt_1\sqrt{2!})\cos(gt_2\sqrt{2!})|g, g, 2\rangle - \sin(gt_1\sqrt{2!})\sin(gt_2\sqrt{2!})|e, g, 0\rangle. \quad (5.7)$$

Percebe-se que para múltiplos de $gt_2 = 2gt_1 = k\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ temos o estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g, e\rangle - |e, g\rangle) \otimes |0\rangle. \quad (5.8)$$

Assim, estes são os tempos de interação com máximo emaranhamento atômico. Os tempos que produzem um estado atômico separável são os múltiplos de $gt_2 = 2gt_1 = \pi/2$. A concorrência é mostrada na figura 5.5:

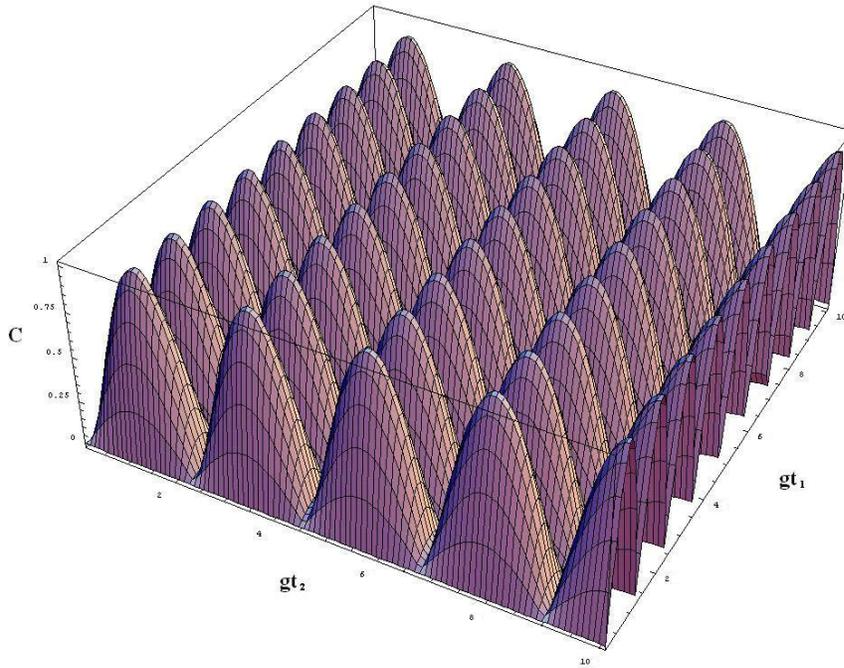


Figura 5.5: Concorrência em função dos tempos de interação para cavidade inicialmente no vácuo.

A estrutura é semelhante ao do processo de 1 fóton, uma “caixa-de-ovos”, mas agora a periodicidade é dada por $\pi/4\sqrt{2}$ na direção de gt_1 e $\pi/2\sqrt{2}$ na direção de gt_2 , ou seja, a periodicidade do processo de 1 fóton dividida por $\sqrt{2}$. A frequência de picos na direção de gt_1 é o dobro daquela na direção de gt_2 ; isso ocorre porque ambos os átomos interagem com o mesmo campo.

5.2 Vácuo Comprimido de 1 modo

A análise da influência da compressão no emaranhamento exige, inicialmente, a compressão do campo na cavidade. Isso pode ser feito através da conversão paramétrica, conforme mostrado no capítulo 4, cruzando a cavidade com um átomo preparatório de 3 níveis, após o quê o campo na cavidade é dado, na base de Fock, pela equação 2.72, mantendo inalterados os estados atômicos. O estado inicial é

$$|\psi(0)\rangle = |g\rangle_2 |e\rangle_1 |\zeta\rangle_f, \quad (5.9)$$

com

$$|\zeta\rangle_f = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \sum_n \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} \left(-\frac{1}{2} e^{i\phi} \operatorname{tgh} r\right)^{2n} |2n\rangle. \quad (5.10)$$

Aplicando o operador de evolução temporal JCM, tem-se o estado global do sistema

$$\begin{aligned} |\psi(t_1, t_2)\rangle = \sum_{n=0} f_n & (\cos\sqrt{2n+1}gt_1 \cos\sqrt{2n}gt_2 |g, e, 2n\rangle - i\cos\sqrt{2n+1}gt_1 \operatorname{sen}\sqrt{2n}gt_2 |e, e, 2n-1\rangle) \\ & - i\operatorname{sen}\sqrt{2n+1}gt_1 \cos\sqrt{2n+1}gt_2 |g, g, 2n+1\rangle - \operatorname{sen}\sqrt{2n+1}gt_1 \operatorname{sen}\sqrt{2n+1} |e, g, 2n\rangle), \end{aligned} \quad (5.11)$$

com

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \sum_n \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} \left(-\frac{1}{2} e^{i\phi} \operatorname{tgh} r\right)^n. \quad (5.12)$$

O número médio de fótons inicialmente presente na cavidade depende do parâmetro de compressão r , como pode ser visto pela equação 2.79. Então a cavidade não pode mais ser vista como um sistema de 2 níveis (ou qubit); na verdade ela apresenta infinitos níveis acessíveis. O traço parcial sobre a cavidade nos dá a matriz reduzida

$$\rho_A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_6 \\ 0 & a_2 & a_5 & 0 \\ 0 & a_5^* & a_3 & 0 \\ a_6^* & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

$$a_1 = \sum_n |f_n|^2 \text{sen}^2 \sqrt{2n} g t_2 \cos^2 \sqrt{2n+1} g t_1, \quad (5.14)$$

$$a_2 = \sum_m |f_n|^2 \text{sen}^2 \sqrt{2n+1} g t_2 \text{sen}^2 \sqrt{2n+1} g t_1, \quad (5.15)$$

$$a_3 = \sum_n |f_n|^2 \cos^2 \sqrt{2n} g t_2 \cos^2 \sqrt{2n+1} g t_1, \quad (5.16)$$

$$a_4 = \sum_n |f_n|^2 \cos^2 \sqrt{2n+1} g t_2 \text{sen}^2 \sqrt{2n+1} g t_1, \quad (5.17)$$

$$a_5 = \sum_n |f_n|^2 \text{sen} \sqrt{2n+1} g t_2 \text{sen} \sqrt{2n+1} g t_1 \cos \sqrt{2n} g t_2 \cos \sqrt{2n+1} g t_1, \quad (5.18)$$

$$a_6 = \sum_n f_n^* f_{n+1} \text{sen} \sqrt{2n+2} g t_2 \cos \sqrt{2n+1} g t_2 \cos \sqrt{2n+3} g t_1 \text{sen} \sqrt{2n+1} g t_1. \quad (5.19)$$

Nas figuras 5.6 e 5.7 vemos o impacto da compressão na dinâmica do emaranhamento. Enquanto para $r = 0$ havia uma estrutura tipo “caixa-de-ovos” com amplitude máxima igual 1, o surgimento da compressão reduz os picos da estrutura (para $r = 0.5$, a amplitude é $C \approx 0.8$, enquanto para $r = 1$ não chega a $C = 0.5$), bem como a deforma lateralmente: ao invés de pacotes suaves e periódicos, temos pacotes com muito mais estrutura sem periodicidade exata; as regiões de separabilidade, que para o vácuo puro eram estreitas, para $r = 1$ se tornaram largas superfícies onde nenhum emaranhamento é possível. Além disso, observa-se que com o aumento da compressão há o deslocamento lateral dos instantes de máximo emaranhamento, que passam a não se situar mais em $g t_2 = 2g t_1 = \pi/2$. Também observamos uma perda de periodicidade: seja qual for o ponto de máximo, não há outro a uma distância 2π ; o mesmo vale para os pontos de separabilidade.

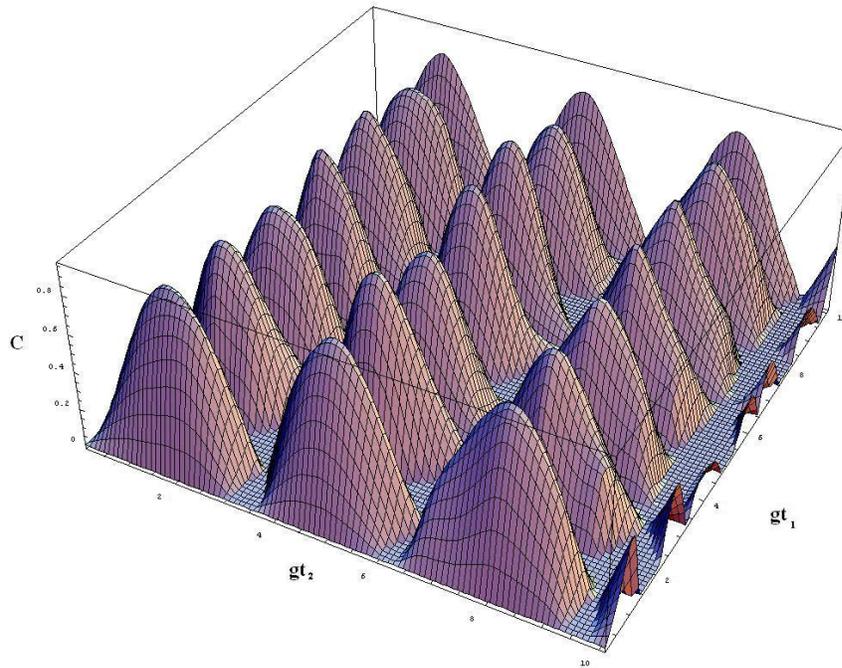


Figura 5.6: Concorrência em função dos tempos de interação, para $r = 0.5$.

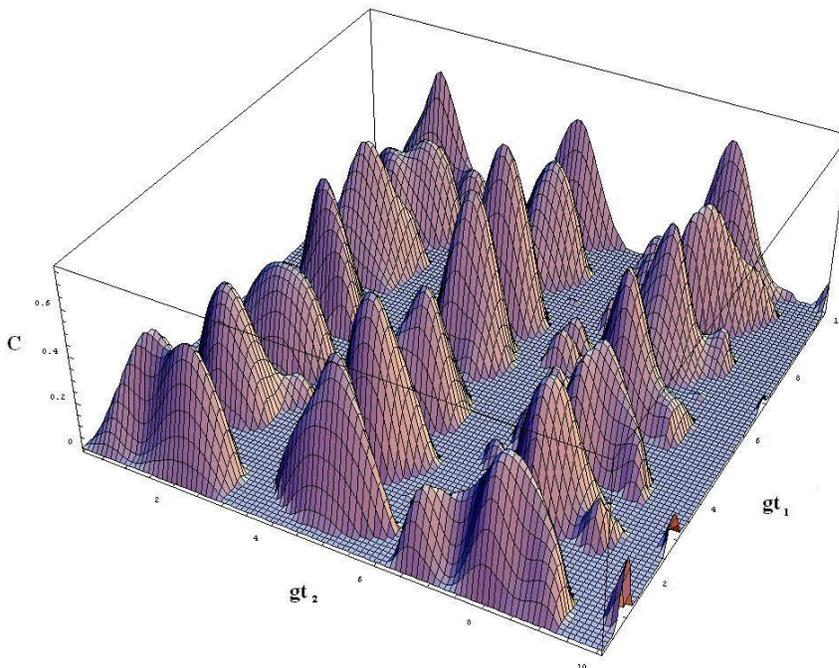


Figura 5.7: Concorrência em função dos tempos de interação, para $r = 1$.

Tomando dois instantes, um de máximo ($2gt_1 = gt_2 = \pi/2$) e outro de mínimo ($2gt_1 = gt_2 = \pi$) emaranhamento para a cavidade no vácuo, é possível verificar a influência da compressão sobre a concorrência, conforme pode ser visto na figura 5.8:

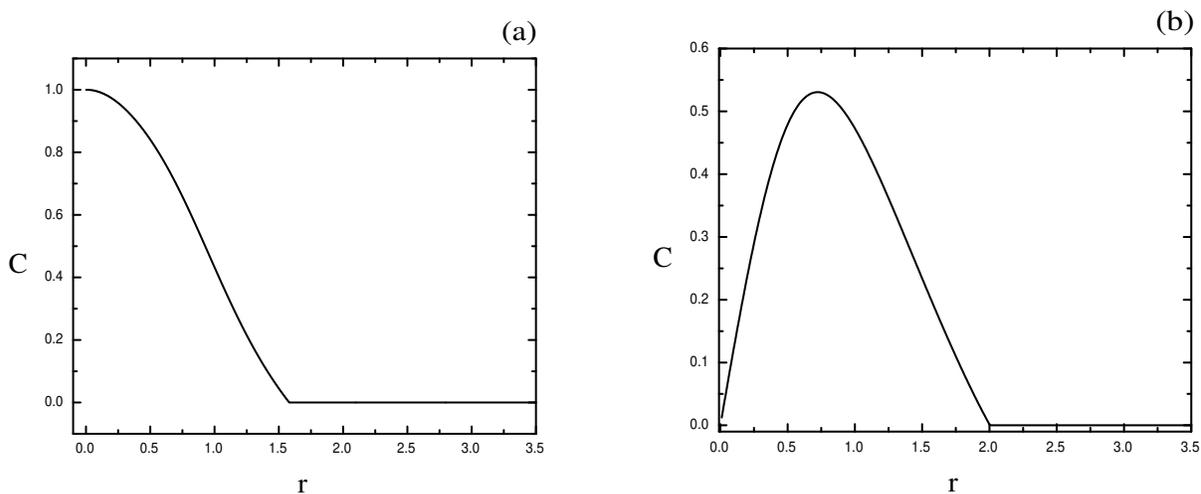


Figura 5.8: Concorrência em função do parâmetro de compressão, para (a) $gt_2 = 2gt_1 = \pi/2$ e (b) $gt_2 = 2gt_1 = \pi$.

Nestes tempos, observamos que o aumento da compressão prejudica o emaranhamento atômico: só é possível gerar estados maximamente emaranhados se $r = 0$, sendo que nenhum emaranhamento

é possível a partir de $r \approx 1.56$. A situação na figura 5.8b é a oposta: para tempos de interação $gt_1 = \pi/2$ e $gt_2 = \pi$, quando $r = 0$ o estado global é separável, enquanto um pequeno aumento na compressão provoca um ligeiro aumento no emaranhamento, com um pico de $C \approx 0.55$ em $r \approx 0.7$ e separabilidade a partir de $r \approx 2$. Assim, conclui-se que de forma geral a compressão reduz o emaranhamento, mas, devido ao deslocamento dos picos, ocorre que instantes de menor emaranhamento apresentam ganhos, sem nunca retornar à situação de emaranhamento máximo presente quando $r = 0$.

Para ilustrar o comportamento do emaranhamento atômico em termos de violação da desigualdade de Bell, temos os gráficos do fator M em função dos tempos de interação para $r = 0.5$ (figura 5.9) e $r = 1$ (figura 5.10). Na figura 5.9 observa-se que o estado inicial, separável e puro, apresenta $M = 1$, no limite clássico da desigualdade. Os picos de maior altura apresentam $M \approx 1.5$, indicando estados emaranhados. Observando-se a figura 5.10 percebe-se que a maior parte dos instantes apresenta $M < 1$, ou seja, sem violação da desigualdade. Comparando este resultado com a figura 5.7, vemos que a maior parte destes sistemas está emaranhada. Isso mostra uma situação já comentada no capítulo 3: nem todo estado emaranhado viola a desigualdade de Bell, embora todo aquele que viola certamente está emaranhado.

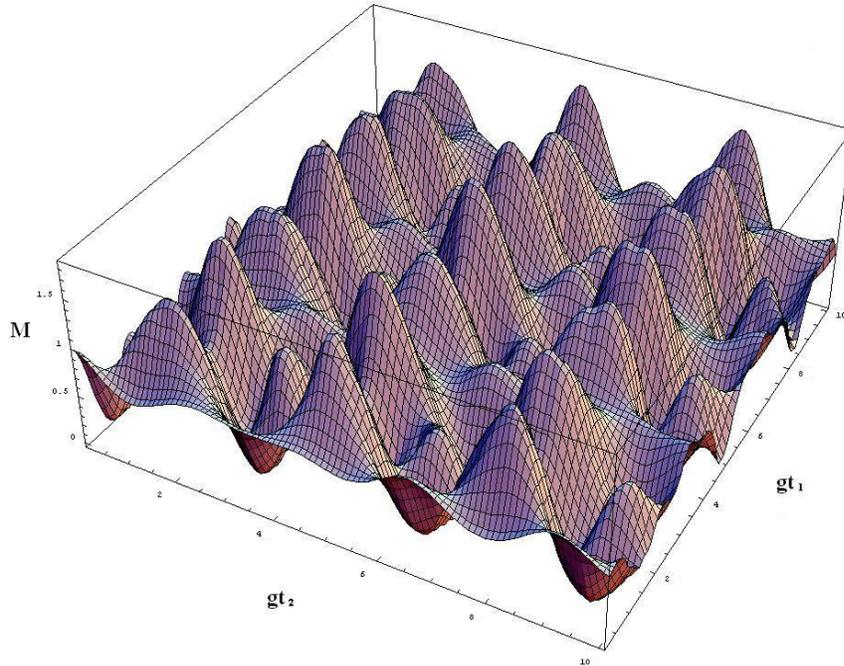


Figura 5.9: M em função dos tempos de interação, para $r = 0.5$.

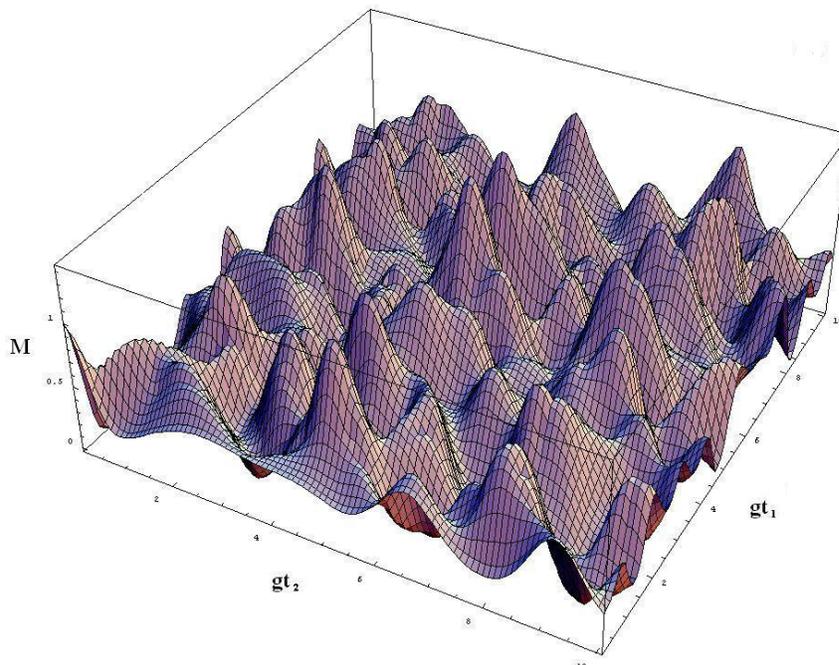


Figura 5.10: M em função dos tempos de interação, para $r = 1$.

Na figura 5.11, fixamos dois instantes para verificarmos a influência da compressão na violação da desigualdade de Bell. Vemos que, de maneira geral, a compressão dificulta a manifestação de aspectos não-clássicos no comportamento dos átomos. O mesmo comportamento visto para a concorrência pode ser observado aqui: a compressão desloca os picos de máxima violação, diminuindo o valor de M para alguns instantes e melhorando para outros, sem nunca retornar à violação máxima obtida com a cavidade no vácuo.

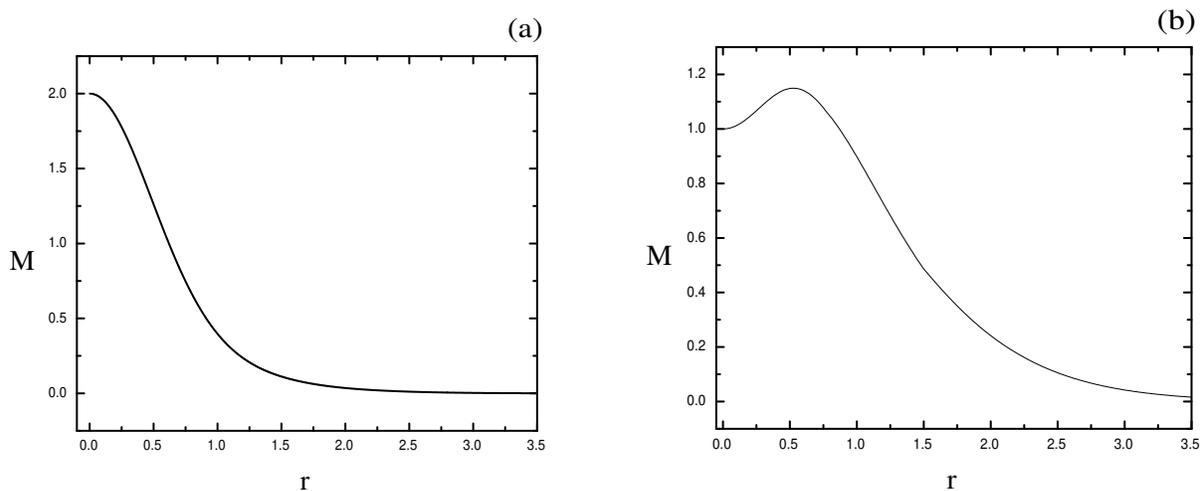


Figura 5.11: M em função do parâmetro de compressão, para (a) $gt_2 = 2gt_1 = \pi/2$ e (b) $gt_2 = 2gt_1 = \pi$.

5.3 Processo de 2 fótons

Mantendo a cavidade no vácuo comprimido e os átomos em $|g\rangle_2|e\rangle_1$, mas utilizando processos de 2 fótons (cujo mecanismo e condições necessárias de ocorrência são descritos na Seção 2.7) e o operador de evolução temporal dado pela equação 2.148, o sistema global, após as interações dos átomos nos tempos t_1 e t_2 , fica:

$$\begin{aligned}
 |\psi(t_1, t_2)\rangle = \sum_n f_n [& -i \operatorname{sen}(gt_2 \sqrt{n(n-1)}) \cos(gt_1 \sqrt{(n+1)(n+2)}) |e, e, n-2\rangle \\
 & - \operatorname{sen}(gt_2 \sqrt{(n+1)(n+2)}) \operatorname{sen}(gt_1 \sqrt{(n+1)(n+2)}) |e, g, n\rangle \\
 & + \cos(gt_2 \sqrt{n(n-1)}) \cos(gt_1 \sqrt{(n+1)(n+2)}) |g, e, n\rangle \\
 & - i \cos(gt_2 \sqrt{(n+1)(n+2)}) \operatorname{sen}(gt_1 \sqrt{(n+1)(n+2)}) |g, g, n+2\rangle],
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

com f_n sendo deduzido da equação 2.78

$$f_n = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2} \operatorname{tgh} r)^n}{n! \cosh r}} H_n(0). \tag{5.21}$$

Para que se possa calcular a concorrência e violação da desigualdade de Bell, é necessário montar a matriz densidade reduzida do subsistema atômico, dada por:

$$\rho_A = \begin{pmatrix} a_1 & a_7 & a_8 & a_6 \\ a_7^* & a_2 & a_4 & a_9 \\ a_8^* & a_4^* & a_3 & a_{10} \\ a_6^* & a_9^* & a_{10}^* & a_5 \end{pmatrix}, \tag{5.22}$$

com os coeficientes dados por

$$a_1 = \sum_n |f_n|^2 \text{sen}^2 \left(gt_2 \sqrt{n(n-1)} \right) \cos^2 \left(gt_1 \sqrt{(n+1)(n+2)} \right), \quad (5.23)$$

$$a_2 = \sum_n |f_n|^2 \text{sen}^2 \left(gt_2 \sqrt{(n+1)(n+2)} \right) \text{sen}^2 \left(gt_1 \sqrt{(n+1)(n+2)} \right), \quad (5.24)$$

$$a_3 = \sum_n |f_n|^2 \cos^2 \left(gt_2 \sqrt{n(n-1)} \right) \cos^2 \left(gt_1 \sqrt{(n+1)(n+2)} \right), \quad (5.25)$$

$$a_4 = - \sum_n |f_n|^2 \text{sen} \left(gt_2 \sqrt{(n+1)(n+2)} \right) \text{sen} \left(gt_1 \sqrt{(n+1)(n+2)} \right) \times \cos \left(gt_1 \sqrt{(n+1)(n+2)} \right) \cos \left(gt_2 \sqrt{n(n-1)} \right), \quad (5.26)$$

$$a_5 = \sum_n |f_n|^2 \cos^2 \left(gt_2 \sqrt{(n+1)(n+2)} \right) \text{sen}^2 \left(gt_1 \sqrt{(n+1)(n+2)} \right), \quad (5.27)$$

$$a_6 = \sum_n f_n^* f_{n+4} \text{sen} \left(gt_2 \sqrt{(n+3)(n+4)} \right) \cos \left(gt_1 \sqrt{(n+5)(n+6)} \right) \times \text{sen} \left(gt_1 \sqrt{(n+1)(n+2)} \right) \cos \left(gt_2 \sqrt{(n+1)(n+2)} \right), \quad (5.28)$$

$$a_7 = i \sum_n f_n^* f_{n+2} \text{sen}^2 \left(gt_2 \sqrt{(n+1)(n+2)} \right) \text{sen} \left(gt_1 \sqrt{(n+1)(n+2)} \right) \times \cos \left(gt_1 \sqrt{(n+3)(n+4)} \right), \quad (5.29)$$

$$a_8 = -i \sum_n f_n^* f_{n+2} \text{sen} \left(gt_2 \sqrt{(n+1)(n+2)} \right) \cos \left(gt_1 \sqrt{(n+1)(n+2)} \right) \times \cos \left(gt_1 \sqrt{(n+3)(n+4)} \right) \cos \left(gt_2 \sqrt{n(n-1)} \right), \quad (5.30)$$

$$a_9 = -i \sum_n f_n^* f_{n+2} \text{sen} \left(gt_1 \sqrt{(n+1)(n+2)} \right) \text{sen} \left(gt_1 \sqrt{(n+3)(n+4)} \right) \times \cos \left(gt_2 \sqrt{(n+1)(n+2)} \right) \text{sen} \left(gt_2 \sqrt{(n+3)(n+4)} \right), \quad (5.31)$$

$$a_{10} = i \sum_n f_n^* f_{n+2} \text{sen} \left(gt_1 \sqrt{(n+1)(n+2)} \right) \cos \left(gt_1 \sqrt{(n+3)(n+4)} \right) \times \cos^2 \left(gt_2 \sqrt{(n+1)(n+2)} \right), \quad (5.32)$$

onde f_n é o mesmo da equação 5.21.

Note-se que agora, sendo as transições de 2 fótons, não há mais os elementos nulos na matriz. A concorrência para os dois átomos é dada pelas figuras 5.12 e 5.13. Percebe-se uma maior robustez de emaranhamento: mesmo para $r = 1$ as regiões de separabilidade permanecem estreitas, diferentemente do observado para o processo de 1 fóton. A frequência de picos é maior nas duas direções, devido ao fato de que, para processos de 2 fótons os tempos de máximo emaranhamento ocorrem em intervalos menores por um fator de $\sqrt{2}$. Os pontos de maior emaranhamento, no entanto, apresentam a mesma altura para ambos os processos, sendo da ordem de 0.8 para $r = 0.5$ e 0.6 para $r = 1$.

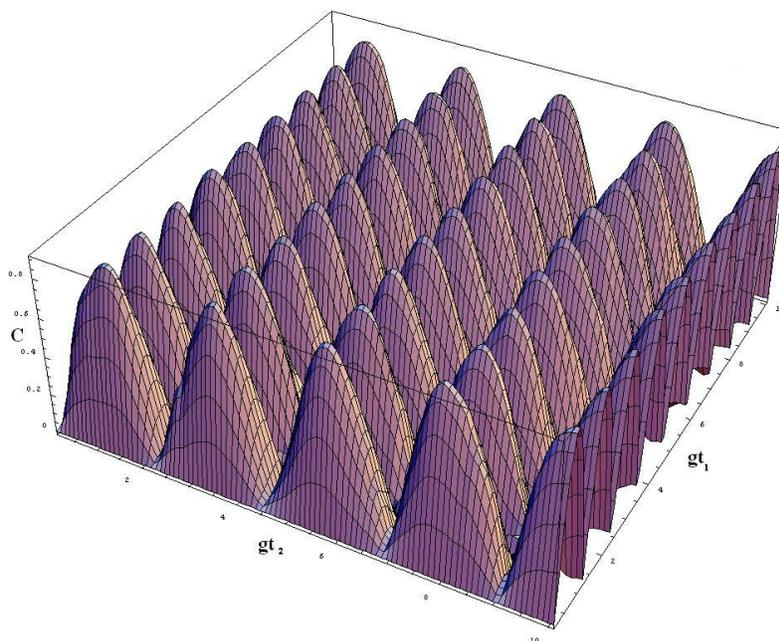


Figura 5.12: Concorrência em função dos tempos de interação para $r = 0.5$.

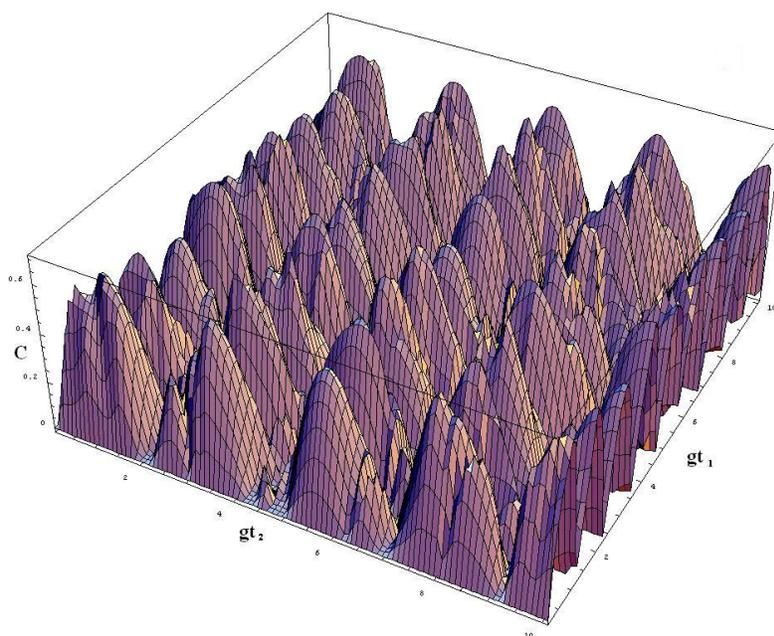


Figura 5.13: Concorrência em função dos tempos de interação para $r = 1$.

Para mostrar detalhes do processo de 2 fótons, vejamos nos tempos de máximo e mínimo emaranhamento, comparando com o processo de 1 fóton equivalente na figura 5.14. É importante notar que os processos de 1 e 2 fótons apresentam diferentes tempos de máximo emaranhamento para o esquema de Hagley, conforme foi mostrado na Seção 5.1. Comparando esses instantes distintos para avaliar a

influência da compressão e as mudanças ocasionadas pelo processo de 2 fótons, percebe-se que, na figura 5.14, o processo de 2 fótons produz emaranhamento mais persistente quanto à compressão, mas não há uniformidade no comportamento: o processo de 2 fótons pode apresentar tanto um emaranhamento maior quanto um menor, dependendo dos tempos de interação e da compressão inicial de maneira não-trivial.

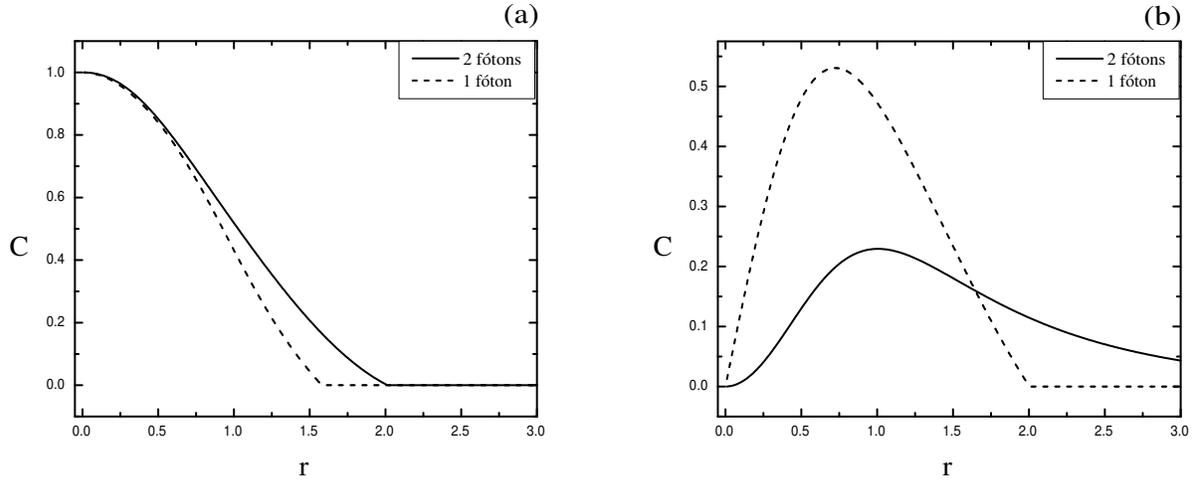


Figura 5.14: Concorrência em função de r para (a) linha pontilhada: $2gt_1 = gt_2 = \pi/2$, linha sólida: $2gt_1 = gt_2 = \pi/2\sqrt{2}$ e (b) linha pontilhada: $2gt_1 = gt_2 = \pi$, linha sólida: $2gt_1 = gt_2 = \pi/2\sqrt{2}$.

Para comparar os resultados sobre a violação da desigualdade de Bell com os obtidos para processos de 1 fóton, temos as figuras 5.15, 5.16 e 5.17: para $r = 0.5$ (figura 5.15), os picos mais altos apresentam as mesmas alturas que foram vistas para o processo de 1 fóton, com $M \approx 1.5$, aparecendo como diferença a periodicidade dos pontos de maior emaranhamento, da mesma forma que para a concorrência. O mesmo se aplica para $r = 1$ (figura 5.16), com uma distinção adicional: a estrutura se apresenta muito mais pronunciada e cheia de agudos que o caso de 1 fóton (figura 5.10).

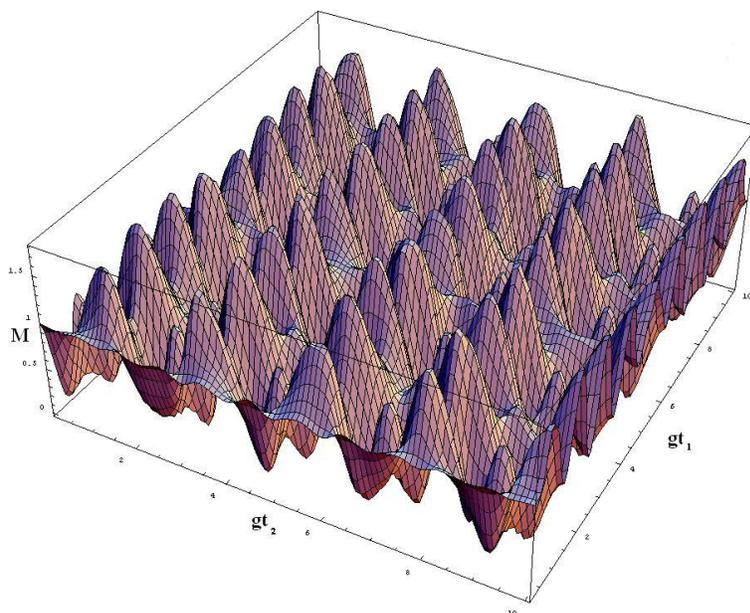


Figura 5.15: M em função dos tempos de interação para $r = 0.5$.

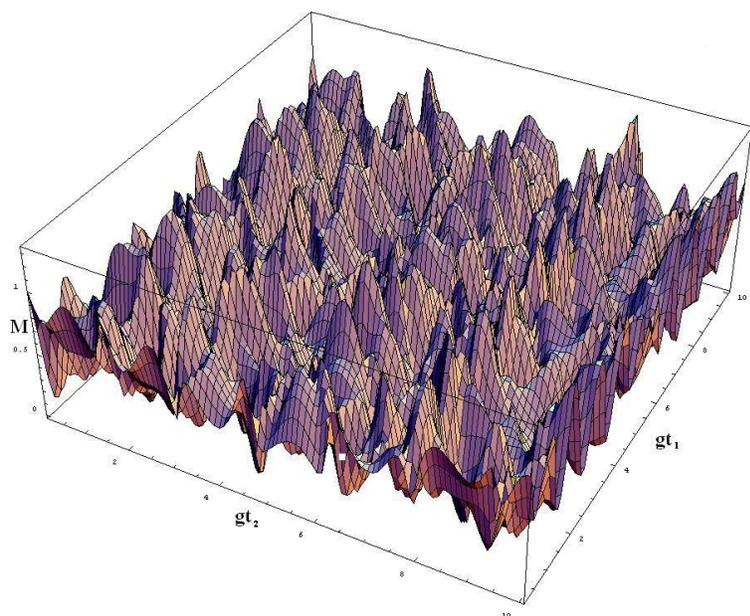


Figura 5.16: M em função dos tempos de interação para $r = 1$.

Na figura 5.17 temos os instantes de maior (lado **a**) e menor (lado **b**) emaranhamento para o esquema de Hagley. Percebe-se pequena diferença entre os processos de 1 e 2 fótons, embora o processo de 2 fótons “demore” mais para chegar a $M = 0$, característica que pode ser associada à maior persistência do emaranhamento.

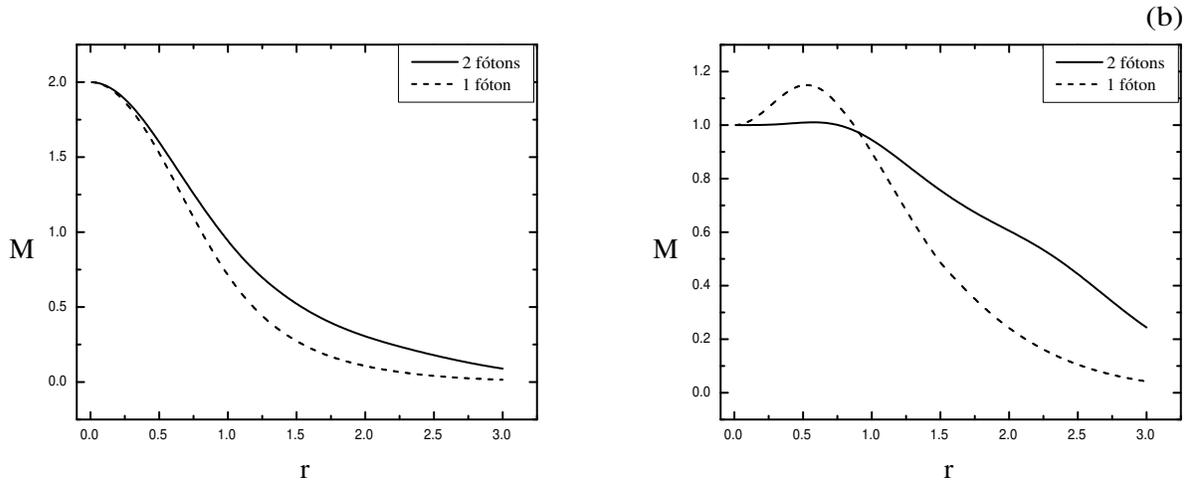


Figura 5.17: M em função de r para (a) linha pontilhada: $2gt_1 = gt_2 = \pi/2$, linha sólida: $2gt_1 = gt_2 = \pi/2\sqrt{2}$ e (b) linha pontilhada: $2gt_1 = gt_2 = \pi$, linha sólida: $2gt_1 = gt_2 = \pi/2\sqrt{2}$.

5.4 Vácuo Comprimido de 2 modos

No capítulo 4, vimos que havia possibilidade de gerarmos estados comprimidos de 1 e 2 modos. Avaliado na seção anterior o efeito da compressão de 1 modo, vamos agora analisar os efeitos da compressão de 2 modos.

O estado de vácuo comprimido de 2 modos, escrito na base de Fock como

$$|\zeta\rangle_{AB} = \frac{1}{\cosh r} \sum_n (\tanh r)^n |n\rangle_A |n\rangle_B, \quad (5.33)$$

apresenta uma característica importante: os dois modos se tornam mais emaranhados quanto maior for r ; para comprovar isso, tomamos o traço sobre o sub-sistema A ; a matriz parcial é:

$$\rho_B = \frac{1}{\cosh^2 r} \sum_n \tanh^{2n} r |n\rangle \langle n|. \quad (5.34)$$

É visível o fato da matriz ser diagonal. Além disso, quando $r \rightarrow \infty$, os coeficientes vão a zero, indicando um sistema maximamente misturado; ou seja, o sistema global é maximamente emaranhado. Calculando a entropia linear em função do parâmetro de compressão podemos ver esse comportamento assintótico (figura 5.18):

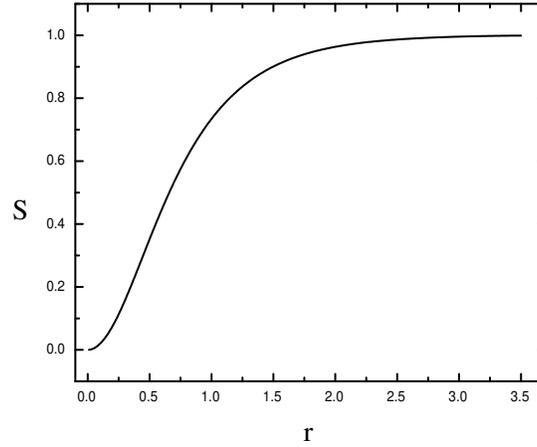


Figura 5.18: Entropia em função de r para o campo comprimido de dois modos.

É possível que este emaranhamento próprio do campo contribua para emaranhar dois átomos que atravessam a cavidade? Vamos preparar a cavidade num estado de vácuo comprimido e fazer com que cada transição atômica seja ressonante com apenas um dos modos do campo. O primeiro átomo chega excitado e o segundo chega no estado fundamental. O estado global do sistema neste caso é dado por:

$$|\psi(t_1, t_2)\rangle = \frac{1}{\cosh r} \sum_n \operatorname{tgh}^n r [\cos g t_1 \sqrt{n+1} \cos g t_2 \sqrt{n} |g, e; n, n\rangle - i \cos g t_1 \sqrt{n+1} \operatorname{seng} t_2 \sqrt{n} |e, e; n-1, n\rangle - i \operatorname{seng} t_1 \sqrt{n+1} \cos g t_2 \sqrt{n} |g, g; n, n+1\rangle - \operatorname{seng} t_1 \sqrt{n+1} \operatorname{seng} t_2 \sqrt{n} |e, g; n-1, n+1\rangle], \quad (5.35)$$

e por conseguinte a matriz densidade reduzida atômica terá a forma

$$\rho_A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_5 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ a_5^* & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}, \quad (5.36)$$

com os coeficientes dados por

$$a_1 = \sum_n |f_n|^2 \text{sen}^2(gt_2\sqrt{n}) \cos^2(gt_1\sqrt{n+1}), \quad (5.37)$$

$$a_2 = \sum_n |f_n|^2 \text{sen}^2(gt_2\sqrt{n+1}) \text{sen}^2(gt_1\sqrt{n}), \quad (5.38)$$

$$a_3 = \sum_n |f_n|^2 \cos^2(gt_2\sqrt{n}) \cos^2(gt_1\sqrt{n+1}), \quad (5.39)$$

$$a_4 = \sum_n |f_n|^2 \cos^2(gt_2\sqrt{n}) \text{sen}^2(gt_1\sqrt{n+1}), \quad (5.40)$$

$$a_5 = \sum_n f_n^* f_{n+1} \text{sen}(gt_2\sqrt{n+1}) \cos(gt_2\sqrt{n}) \text{sen}(gt_1\sqrt{n+1}) \cos(gt_1\sqrt{n+2}), \quad (5.41)$$

onde agora f_n é dado por

$$f_n = \frac{\text{tgh}^n r}{\cosh r}. \quad (5.42)$$

A concorrência em função dos tempos de interação apresenta o comportamento mostrado nas figuras 5.19 (para $r = 0.5$) e 5.20 (para $r = 1$). Como é possível perceber, agora não temos mais os tempos ótimos de interação para o vácuo dos esquemas anteriores; isso porque, como estamos tratando de dois modos, para $r = 0$ o sistema se comporta efetivamente como duas cavidades independentes, e neste caso os dois átomos continuarão em um estado separável, resultante da interação de um átomo com cada modo independentemente.

As figuras 5.19 e 5.20 mostram que, para este sistema, a compressão inibe mais rapidamente o emaranhamento; já para $r = 0.5$ as regiões de separabilidade são extensas. No entanto, como para $r = 0$ a separabilidade é total para quaisquer tempos de interação, qualquer emaranhamento que surja é causado pela compressão, pois esta aumenta o emaranhamento entre os modos da cavidade. Dessa maneira, há dois efeitos competindo: a compressão em si reduz a formação de emaranhamento atômico, mas aumenta o emaranhamento dos modos do campo, o quê por sua vez aumenta o emaranhamento atômico! Isso sugere que, para certos tempos de interação, a compressão pode provocar ganho de emaranhamento, embora a partir de certo valor de r haja apenas perda.

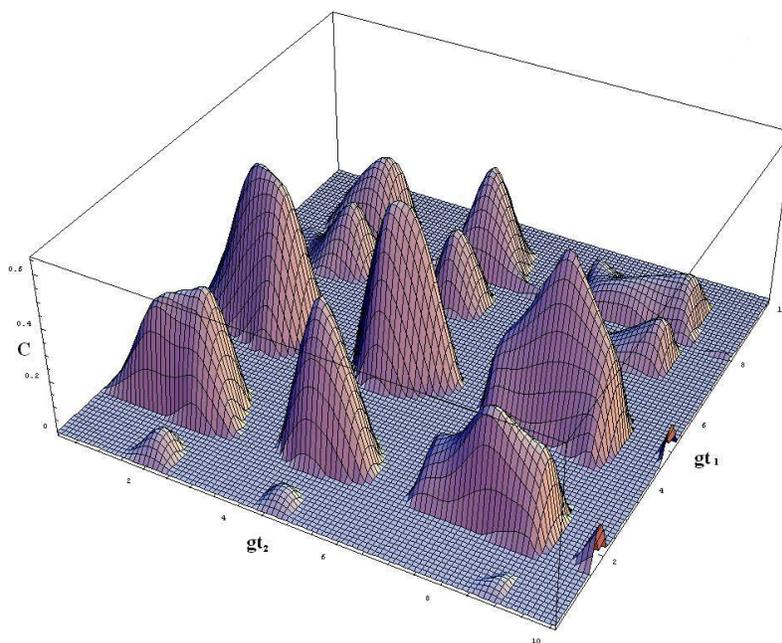


Figura 5.19: Concorrência em função dos tempos de interação para $r = 0.5$.

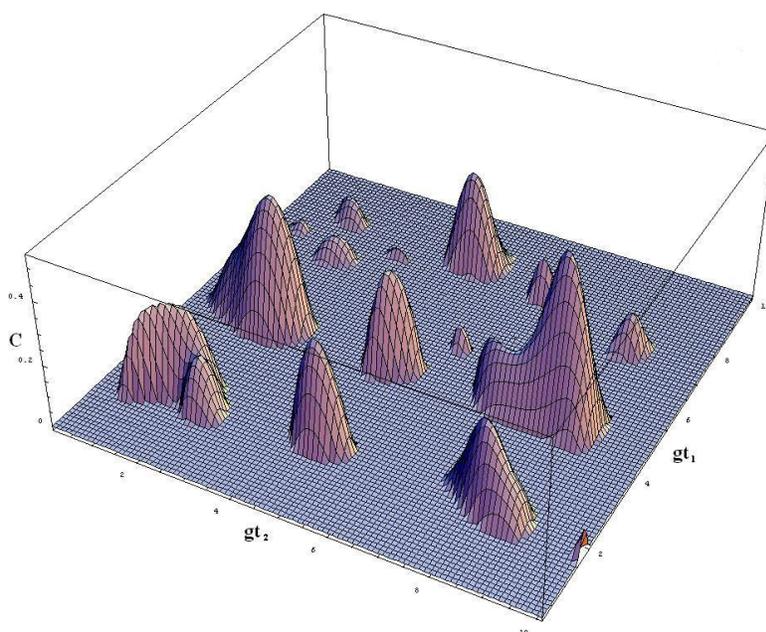


Figura 5.20: Concorrência em função dos tempos de interação para $r = 1$.

Procurando nos picos das figuras 5.19 e 5.20, encontramos alguns instantes com bom ganho; na figura 5.21 está calculada a concorrência em função da compressão para dois instantes:

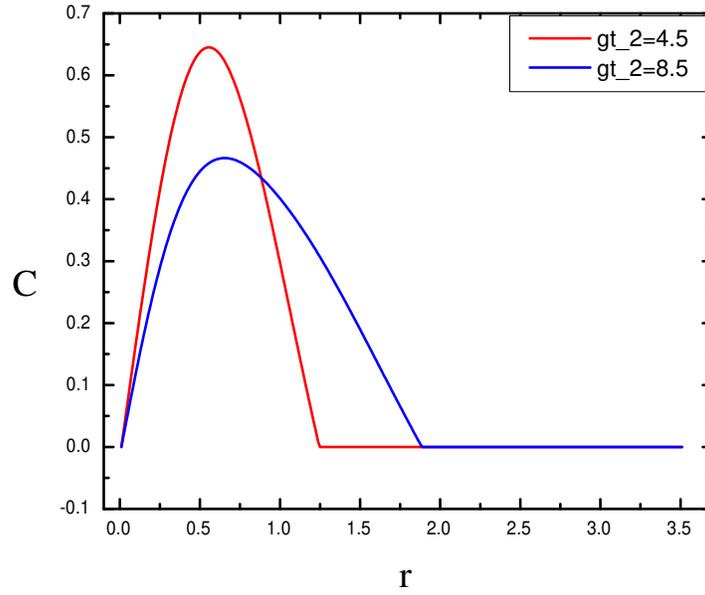


Figura 5.21: Concorrência em função de r para os átomos com diferentes tempos de interação, mas todos com $gt_1 = 4.5$.

Assim, observa-se que, para $gt_1 = gt_2 = 4.5$, ocorre um pico de emaranhamento da ordem de 0.65 para $r \approx 0.5$ resultado devido ao emaranhamento entre os modos do campo.

Para verificar a influência do estado inicial no emaranhamento, vamos considerar que os dois átomos entram na cavidade no estado fundamental. Com isso, o estado global tem a expressão:

$$|\psi(t_1, t_2)\rangle = \frac{1}{\cosh r} \sum_n \text{tgh}^n r [\cos gt_1 \sqrt{n} \cos gt_2 \sqrt{n} |g, g; n, n\rangle - i \text{sen} gt_1 \sqrt{n} \cos gt_2 \sqrt{n} |g, e; n, n-1\rangle - i \cos gt_1 \sqrt{n} \text{sen} gt_2 \sqrt{n} |e, g; n-1, n\rangle - \text{sen} gt_1 \sqrt{n} \text{sen} gt_2 \sqrt{n} |e, e; n-1, n-1\rangle]. \quad (5.43)$$

A matriz densidade reduzida, neste caso, tem a mesma forma da do caso anterior, mas os coeficientes são dados por:

$$a_1 = \sum_n |f_n|^2 \text{sen}^2(gt_2 \sqrt{n}) \text{sen}^2(gt_1 \sqrt{n}), \quad (5.44)$$

$$a_2 = \sum_n |f_n|^2 \text{sen}^2(gt_2 \sqrt{n+1}) \cos^2(gt_1 \sqrt{n}), \quad (5.45)$$

$$a_3 = \sum_n |f_n|^2 \cos^2(gt_2 \sqrt{n}) \text{sen}^2(gt_1 \sqrt{n}), \quad (5.46)$$

$$a_4 = \sum_n |f_n|^2 \cos^2(gt_2\sqrt{n}) \cos^2(gt_1\sqrt{n}), \quad (5.47)$$

$$a_5 = \sum_n f_n^* f_{n+1} \sin(gt_2\sqrt{n+1}) \cos(gt_2\sqrt{n}) \sin(gt_1\sqrt{n+1}) \cos(gt_1\sqrt{n}). \quad (5.48)$$

Assim, o resultado para a concorrência em função dos tempos de interação toma a forma apresentada nas figuras 5.22(para $r = 0.5$) e 5.23 (para $r = 1$):

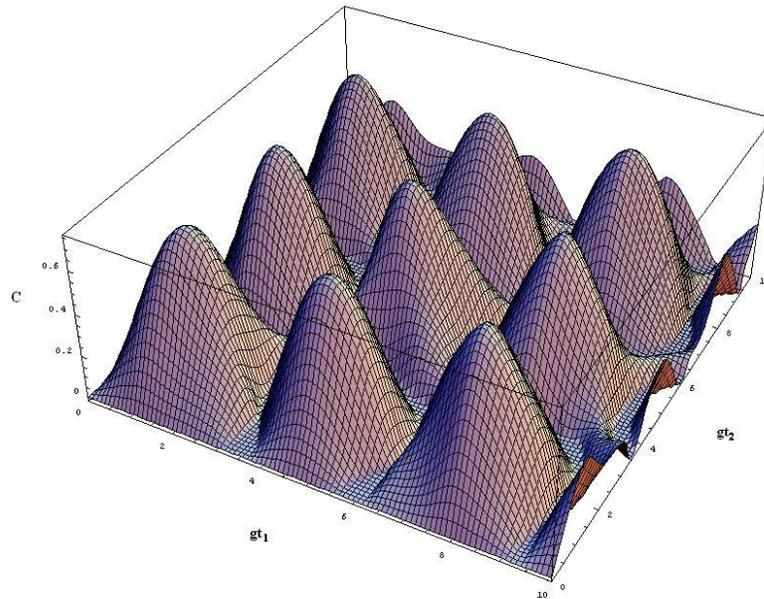


Figura 5.22: Concorrência em função de dos tempos de interação para $r = 0.5$.

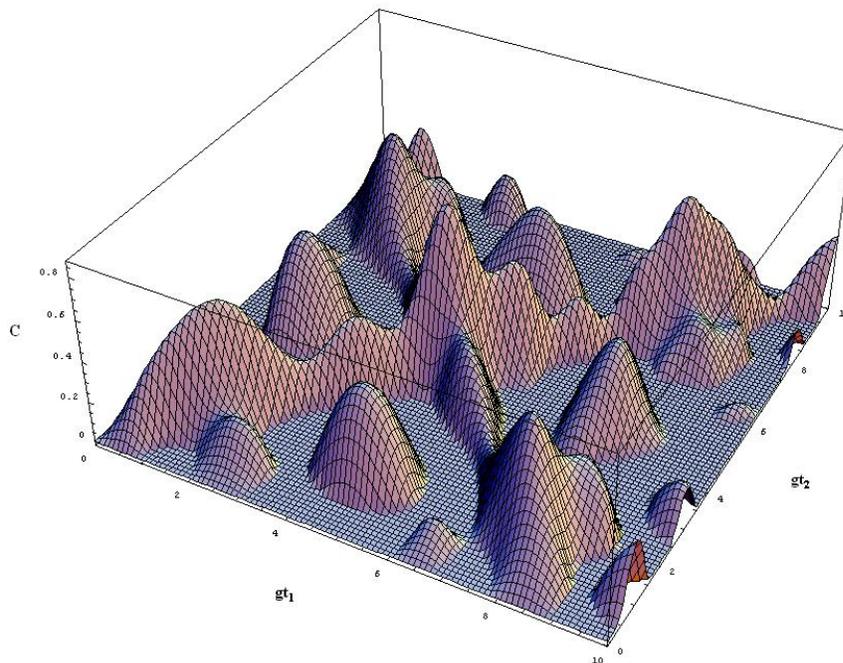


Figura 5.23: Concorrência em função de dos tempos de interação para $r = 1$.

Nota-se que o emaranhamento está muito mais robusto, em comparação com a situação gerada pelos caso anterior (átomos preparados em $|ge\rangle$). Os pontos de maior emaranhamento atingem no máximo cerca de 0.7 para $r = 0.5$ e 0.85 para $r = 1$, enquanto para os átomos inicialmente preparados em $|g\rangle_2|e\rangle_1$ atingiam no máximo $C \approx 0.6$ para $r = 0.5$ e $C \approx 0.4$ para $r = 1$, ou seja, há uma significativa melhora nos valores de emaranhamento. A frequência de picos é a mesma nas duas direções, devido ao fato de que cada átomo interage com um modo diferente, ao contrário das seções anteriores. Além disso, percebe-se que os instantes para os quais $gt_1 = gt_2$ apresentam emaranhamento mais persistente e até mesmo maior para $r = 1$ do que para $r = 0.5$.

Novamente, procurando nos picos das figuras 5.22 e 5.23 como indícios, encontramos os instantes de maior ganho de emaranhamento; fazendo um gráfico da concorrência em função do parâmetro de compressão, temos:

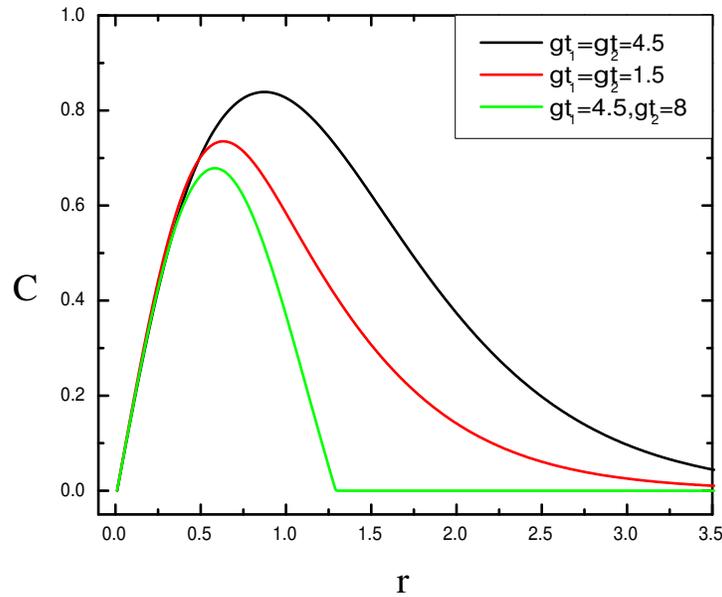


Figura 5.24: Concorrência em função de r para os átomos com diferentes tempos de interação.

Vemos que para $gt_1 = gt_2 = 4.5$ o emaranhamento obtido é alto e persistente, com um pico de 0.85 para $r = 1$. Para $gt_1 = gt_2 = 1.5$ os átomos atingem um emaranhamento de quase 0.8 em $r = 0.6$. Já o instante $gt_1 = 4.5, gt_2 = 8$ apresenta um pico menor e menos persistente, devido ao fato de ter $gt_1 \neq gt_2$.

Conclusões

Nesta dissertação estudamos a influência da compressão na dinâmica do emaranhamento quântico. Para tanto, o sistema físico escolhido foi uma cavidade inicialmente no vácuo e depois utilizando um átomo de 3 níveis tipo escada para atravessá-la, gera-se um vácuo comprimido, que será de 1 modo caso $\omega_a = \omega_b$ e de 2 modos caso contrário (figuras 4.1 e 4.2). Depois, preparamos os dois átomos no estado inicial $|g\rangle_2|e\rangle_1$ e os fazemos interagir não-simultaneamente com o campo na cavidade.

Para o vácuo comprimido de 1 modo, a compressão, de modo geral, reduz a formação de emaranhamento, embora para diferentes tempos de interação apresentem ganho graças ao deslocamento dos tempos de máximo e mínimo emaranhamentos. Por exemplo, para tempos de interação $2gt_1 = gt_2 = \pi/2$ a concorrência cai monotonicamente de $C = 1$ para o vácuo ($r = 0$) até $C = 0$ para $r \approx 1.56$. Comparando-se as figuras 5.6 e 5.7 percebe-se a redução dos picos de máximo emaranhamento, de $C \approx 0.8$ com $r = 0.5$ para $C \approx 0.6$ com $r = 1$. O deslocamento dos tempos de pico é evidenciado pelo fato de que, para $2gt_1 = gt_2 = \pi$, a concorrência, nula para o vácuo, se torna $C \approx 0.55$ em $r \approx 0.75$.

Passando para processos de 2 fótons, nos quais é necessário se assegurar que o regime utilizado torne o Stark *shift* irrelevante, fazendo a dessintonia Δ muito maior que os acoplamentos g_{ig} e g_{ie} . As investigações indicam que o emaranhamento é mais persistente quanto ao parâmetro de compressão do que no processo de 1 fóton, mas os valores de máximo emaranhamento possíveis em cada situação são aproximadamente os mesmos para os dois processos, conforme pode ser visto na figura 5.14. Além disso, há uma mudança na frequência dos pontos de máximo e mínimo emaranhamentos para o vácuo, devido ao fato da frequência de Rabi de 2 fótons ser proporcional a $\sqrt{n(n-1)}$, enquanto a de 1 fóton é proporcional a \sqrt{n} , conforme visto no capítulo 2.

No caso de um vácuo comprimido de 2 modos, por outro lado, a compressão melhora significativamente a formação de emaranhamento para valores específicos de tempos de interação e de parâmetros de compressão; isso ocorre pelo seguinte motivo: como cada átomo interage com um modo diferente, o emaranhamento atômico deve ocorrer através do emaranhamento pré-existente entre os modos, que é ampliado pela compressão; por outro lado, esta mesma compressão inibe a formação de emaranhamento atômico, resultando em dois efeitos concorrentes, que apresentam interferência construtiva apenas em pontos específicos. A robustez e a persistência do emaranhamento dependem fortemente do estado atômico inicial, que determina quais serão os tempos de interação necessários: para átomos preparados no estado $|g\rangle_2|e\rangle_1$, os tempos de interação com melhor ganho são dados por $gt_1 = gt_2 = 4.5$,

que apresentam concorrência da ordem de 0.65 para $r \approx 0.5$, enquanto para átomos preparados no estado $|g\rangle_2|g\rangle_1$ os tempos de melhor ganho são dados por $gt_1 = gt_2 = 4.5$, que apresentam concorrência de cerca de 0.85 para $r \approx 1$.

Quanto à influência do estado atômico inicial na robustez de emaranhamento, observou-se o seguinte: para os dois átomos inicialmente no estado $|g\rangle_2|e\rangle_1$, a concorrência em função dos tempos de interação para $r = 0.5$ (figura 5.19) e $r = 1$ (figura 5.20) mostra que, para a maioria dos tempos de interação os átomos não se emaranham, enquanto para o estado inicial $|g\rangle_2|g\rangle_1$ há uma maior região de instantes com ganhos no emaranhamento.

Perspectivas Futuras

Algumas possíveis investigações dando seqüência ao presente trabalho são as seguintes:

- Investigar a influência de possíveis perdas de coerência que podem alterar a dinâmica de emaranhamento encontrada para os átomos utilizando a metodologia seguida neste trabalho.
- Verificar a presença de uma compressão dinâmica do campo, gerada pelo próprio processo de 2 fótons, distinta da compressão inicial considerada aqui.
- Investigar a influência do Stark *shift* dinâmico sobre o emaranhamento atômico.
- Através de processos de medida dos estados atômicos, realizar a reconstrução dos campos no interior da cavidade.

Referências

- [1] MA Nielsen, IL Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press (2000); D Bouwmeester, AK Ekert, A Zeilinger, *The Physics of Quantum Information*, Springer (2000).
- [2] CH Bennett, G Brassard, C Crepeau, R Jozsa, A Peres, WK Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70** 895 (1993).
- [3] A Ekert, R Jozsa, *Rev. Mod. Phys.* **68** 733 (1996); JI Cirac, A Ekert, SF Huelga, C Machiavello, *Phys. Rev. A* **59** 4249 (1999).
- [4] E Hagley, X Maître, G Nogues, C Wunderlich, M Brune, JM Raimond, S Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **79** 1 (1997); S Haroche, *Fortschr. Phys.* **51** 388 (2003).
- [5] QA Turchette, CS Wood, BE King, CJ Myatt, D Leibfried, WM Itano, C Monroe, DJ Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **81** 3631 (1998).
- [6] ET Jaynes, FW Cummings, *Proc. IEEE* **51** 89 (1963).
- [7] LJ Jin, MF Fang, *Chin. Phys.* **15** 2012 (2006).
- [8] CJ Villas-Bôas, NG de Almeida, RM Serra, MHY Moussa, *Phys. Rev. A* **68** 061801 (2003); RM Serra, CJ Villas-Bôas, NG de Almeida, MHY Moussa, *Phys. Rev. A* **71** 045802 (2005).
- [9] CJ Villas-Bôas, MHY Moussa, *Eur. Phys. J. D* **32** 147 (2005); X Zou, Y Dong, G Guo, *Phys. Rev. A* **73** 025802 (2006).
- [10] M Brune, JM Raimond, S Haroche, *Phys. Rev. A*, **35** 154 (1987).
- [11] P Goy, JM Raimond, G Vitrant, S Haroche, *Phys. Rev. A* **26** 2733 (1982).
- [12] D Meschede, *J. Opt. Soc. Am. B* **4** 413 (1987).
- [13] F Dell'anno, S de Siena, F Illuminati, *Phys. Rep.* **428** 53 (2006).
- [14] JD Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley (1975).
- [15] G Arfken, H Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Harcourt Academic Press (2001).
- [16] R Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Oxford University Press (1973).

- [17] JJ Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison Wesley Publishing Co. (1994).
- [18] MO Scully, MS Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press (1997).
- [19] RJ Glauber, *Phys. Rev.* **130**, 2529 (1963).
- [20] SM Barnett, PM Radmore, *Methods in Theoretical Quantum Optics*, Clarendon Press (1997).
- [21] B Yurke, D Stoler, *Phys. Rev. Lett.* **57** 13 (1986).
- [22] DFV James, *Fortschr. Phys.* **48** 823 (2000).
- [23] P Alsing, MS Zubairy, *J. Opt. Soc. Am. B* **4** 177 (1987).
- [24] A Einstein, B Podolsky, N Rosen, *Phys. Rev.* **47** 777 (1935).
- [25] N Bohr, *Phys. Rev.* **48** 696 (1935).
- [26] JS Bell, *Physics* **1** 19 (1964).
- [27] JF Clauser, MA Horne, A Shimony, RA Holt, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969); JF Clauser, MA Horne, *Phys. Rev. D* **10** 526 (1974).
- [28] JF Clauser, A Shimony, *Rep. Prog. Phys.* **41** 1881 (1978); A Aspect, P Grangier, G Roger, *Phys. Rev. Lett.* **46** 470 (1981); A Aspect, P Grangier, G Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49** 91 (1982); A Aspect, J Dalibard, G Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49** 804 (1982).
- [29] P Horodecki, R Horodecki, M Horodecki, *Phys. Lett. A* **200** 340 (1995); R Horodecki, P Horodecki, *Phys. Lett. A* **210** 227 (1996).
- [30] CH Bennett, HJ Bernstein, S Popescu, B Schumacher, *Phys. Rev. A* **53** 2046 (1996).
- [31] M Araki, E Lieb, *Comm. Math. Phys.* **18** 160 (1970).
- [32] CH Bennett, DP DiVincenzo, JA Smolin, WK Wootters, *Phys. Rev. A* **54** 3824 (1996).
- [33] S Hill, WK Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **78** 5022 (1997).
- [34] WK Wootters, WH Zurek, *Nature* **299** 802 (1982).
- [35] P Badziag, M Horodecki, P Horodecki, R Horodecki, *Phys. Rev. A* **62** 012311 (2000).
- [36] M Horodecki, P Horodecki, R Horodecki, *Phys. Rev. A* **60** 1888 (1999).

-
- [37] R Werner, Phys. Rev. A **40** 4277 (1989).
- [38] G Hétet, O Glöckl, KA Pilypas, CC Harb, BC Buchler, HA Bachor, PK Lam, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **40** 221 (2007).
- [39] B Ghosh, AS Majumdar, N Nayak, arXiv:quant-ph/0605191 (2006).
- [40] W Son, MS Kim, J Lee, D Ahn, J. Mod. Opt. **49** 1739 (2002).
- [41] M Paternostro, W Son, MS Kim, arXiv:quant-ph/0310031 (2003).