João Paulo Caminha Cascudo Rodrigues

Propagação e convolução do fluxo primário de raios cósmicos ultra-energéticos segundo a resolução de energia estimada do Observatório *Pierre Auger*

Dissertação de mestrado apresentada à Pós-Graduação do Instituto de Física Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientadora: Profa. Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato

Campinas

2007

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

Rodrigues, João Paulo Caminha Cascudo
R618p Propagação e convolução do fluxo primário de raios cósmicos ultra-energéticos segundo a resolução de energia estimada do Observatório Pierre Auger / João Paulo Caminha Cascudo Rodrigues. -- Campinas, SP : [s.n.], 2007.

Orientador: Carola Dobrigkeit Chinellato.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Observatório Pierre Auger. 2. Raios cósmicos. 3. Corte GZK. 4. Chuveiros de raios cósmicos. 5. Convoluções (Matemática). I. Chinellato, Carola Dobrigkeit. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

(vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Propagation and convolution of the ultra-high energy cosmic ray spectrum due to the estimated energy resolution of the Pierre Auger Observatory
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
  1. Pierre Auger Observatory
  2. Cosmic rays
  3. GZK cutoff
  4. Cosmic showers
  5. Convolutions (Mathematics)
- **Área de concentração:** Teorias Específicas e Modelos de Interação; Sistemática de Partículas; Raios Cósmicos
- **Titulação:** Mestre em Física
- **Banca examinadora:**
  Profª Carola Dobrigkeit Chinellato
  Prof. Philippe Gouffon
  Prof. Ernesto Kemp
- **Data da defesa:** 26.02.2007
- **Programa de Pós Graduação em:** Física

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **JOÃO PAULO CAMINHA CASCUDO RODRIGUES – RA 040828** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 26 / 02 / 2007.

COMISSÃO JULGADORA:

Carola Dobrigkeit

Profa. Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato (Orientadora do Candidato) – DRCC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Philippe Gouffon – IF/USP

Prof. Dr. Ernesto Kemp – DRCC/IFGW/UNICAMP

Dedicatória

Ao meu avô Alcestes e ao papa João Paulo II, no século Karol Wojtyla. Homens distintos, cada um contemplou o mistério da vida à sua maneira. O sopro da vida não se extinguiu; parte virou saudade, parte transcendeu.

"E' dunque l'astro e spento, di pace apportator".

IN: La Clemenza di Tito, W. A. MOZART.

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

Aos meus pais e à família o apoio e a confiança no meu trabalho;

À Aline, minha companheira, todo o amor, carinho e os maravilhosos momentos que continuamos a desfrutar;

A *Wolfgang Amadeus Mozart*, cuja arte constitui o que de mais belo e profundo já foi produzido pela humanidade, o encanto que me proporciona há mais de uma década;

Ao CNPq o apoio financeiro;

E especialmente a minha orientadora Carola, a ajuda, o convívio, o aprendizado e todos os momentos divertidos pelos quais passamos na elaboração deste trabalho.

Sine tuo numine, Domine,

nihil est in homine,

nihil est innoxium.

Epígrafe

O RIO

Ser como o rio que deflui
Silencioso dentro da noite.
Não temer as trevas da noite.
Se há estrelas no céu, refleti-las
E se os céus se pejam de nuvens,
Como o rio as nuvens são água,
Refleti-las também sem mágoa
Nas profundidades tranqüilas.

Manuel Bandeira

RESUMO

Neste trabalho estuda-se a propagação pelo meio intergaláctico de raios cósmicos ultra-energéticos partindo de fontes com distribuição espacial uniforme, considerando as perdas de energia ocasionadas pela expansão adiabática do universo e pelas interações com a Radiação Cósmica de Fundo (produção de pares e^-e^+ e fotoprodução de píons), o que resulta no aparecimento do corte GZK (*Greisen-Zatsepin-Kuzmin*). A degradação de energia no espectro primário da radiação cósmica que chega ao topo da atmosfera terrestre é então analisada para diferentes *redshifts* das fontes injetoras. São utilizadas simulações de Monte Carlo bem como uma abordagem analítica, com a posterior comparação dos resultados obtidos em cada método. Uma vez conhecido o fluxo propagado, é feita uma estimativa da forma da resolução de energia do Observatório *Pierre Auger*, com a decorrente convolução desta resolução com o fluxo propagado, novamente utilizando-se ambos os métodos. Os resultados mostram que o corte GZK pode se mostrar severamente atenuado no fluxo convoluído, o que dificulta a sua constatação experimental.

ABSTRACT

In this work, we study the propagation of Ultra-High Energy Cosmic Rays (UHECR) which are injected into the intergalactic medium by sources with flat spatial distribution for several redshifts. The energy spectrum of UHECR observed on the Earth is directly influenced by the energy losses due to both the adiabatic expansion of the universe and interactions with the Cosmic Microwave Background radiation (e^-e^+ pair production and photoproduction of pions), which cause the so-called Greisen-Zatsepin-Kuzmin (GZK) cutoff. We perform Monte Carlo simulations and also consider a semi-analytical approach and compare the results obtained by each method. Once the propagated primary flux is known, we make a simple estimate of the shape of the Pierre Auger Observatory energy resolution. This resolution is folded with the propagated primary flux again utilizing both methods. The results show the GZK cutoff may be severely smeared and might not be detected as sharp as predicted.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

> *"For in 1938, I showed the presence in primary cosmic rays of particles of a million Gigavolts -- a million times more energetic than accelerators of that day could produce. Even now, when accelerators have far surpassed the Gigavolt mark, they still have not attained the energy of 10^{20} eV, the highest observed energy for cosmic rays. Thus, cosmic rays have not been dethroned as far as energy goes, and the study of cosmic rays has a bright future, if only to learn where these particles come from and how they are accelerated"*[i]

1.1 CHUVEIROS ATMOSFÉRICOS EXTENSOS

Um chuveiro atmosférico é causado por um raio cósmico (geralmente um próton) com energia alta o suficiente para gerar uma cascata de partículas que pode ser detectada no solo. Tal fenômeno físico, descoberto em 1938 por *Pierre Auger*, é constituído por três componentes principais: a hadrônica, que se desenvolve próxima ao eixo da direção do raio cósmico incidente; a eletromagnética, composta por fótons, elétrons e pósitrons, que possui grande abertura em relação ao eixo do chuveiro; e a muônica, que se desenvolve até a região intermediária. A figura 1.1 mostra o fluxo diferencial de raios cósmicos determinado por vários experimentos em função das energias primárias dos raios cósmicos, i.e., as energias com as quais eles chegam ao topo da atmosfera, antes do início dos chuveiros. As medições feitas para energias primárias maiores que 100 TeV são indiretas, obtidas justamente a partir da detecção das partículas produzidas pelos chuveiros.

Existe uma correlação média entre o número total de partículas criadas no chuveiro e a energia primária da partícula que o gerou. Entretanto, cada chuveiro é único, no sentido de que mesmo considerando chuveiros iniciados com igual energia e massa primárias, grandes flutuações ocorrem no tamanho máximo atingido pelos chuveiros, que é dado pelo número máximo de partículas produzidas na cascata. Como os mais variados métodos de detecção em

[i] *Pierre Auger*, *Journal de Physique*, **43**, 12, 1982.

grandes arranjos experimentais se baseiam na coleta das partículas do chuveiro, as flutuações intrínsecas no tamanho do chuveiro se refletem como flutuações na energia primária estimada.

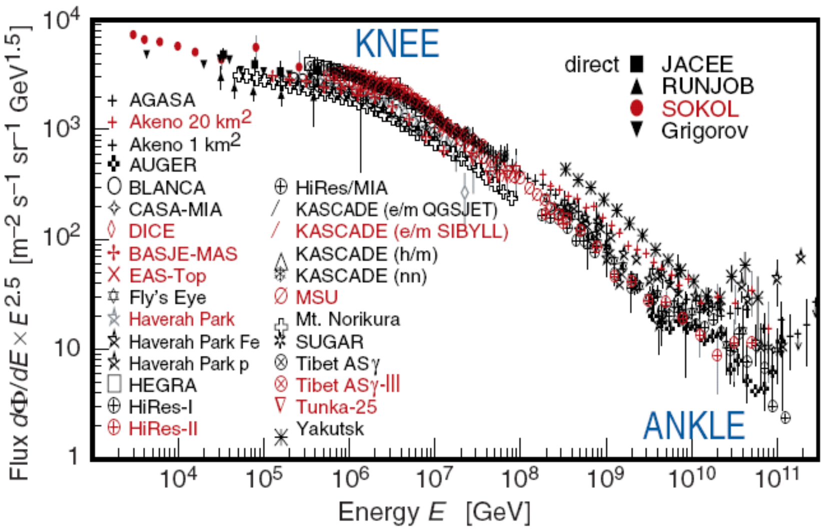

Fig. 1.1: Fluxo observado de raios cósmicos (Fonte: referência 1)

1.2 O CORTE GZK

Em 1965, *Penzias* e *Wilson* descobrem acidentalmente um excesso no sinal eletromagnético presente na atmosfera na faixa de microondas (medido na freqüência $\nu = 4{,}08$ GHz), descrito como "isotrópico, não polarizado e livre de variações sazonais",[2] representado por um ruído na antena utilizada correspondendo à temperatura $T = (3{,}5 \pm 1{,}0)$ K. Imediatamente, *Dicke, Peebles, Roll e Wilkinson* interpretam o sinal como sendo uma radiação cósmica de corpo negro resultante do Universo primordial e extremamente quente, que se esfria adiabaticamente com sua expansão.[3] Tal radiação ficou conhecida portanto como Radiação Cósmica de Fundo (RCF).[ii] Um ano depois, *Greisen*[4] e, independentemente, *Zatsepin/Kuzmin*[5] fizeram a notável previsão de que o fluxo de raios cósmicos seria severamente atenuado devido às perdas de energia em interações com os fótons dessa radiação de corpo negro, nominalmente a produção de

[ii] Em 1948, *Gamow, Alpher e Herman* calcularam a temperatura do Universo, mas não relacionaram a nenhum espectro térmico de corpo negro. O primeiro trabalho a mencionar uma radiação primordial na faixa de microondas passível de detecção é creditado pelo próprio *Penzias* a *Doroshkevich* e *Novikov* (1964).[6]

pares elétron-pósitron e, principalmente, a fotoprodução de píons. Esta queda abrupta no fluxo de raios cósmicos para energias acima de 3.10^{19} eV ficou conhecida como corte GZK (*Greisen-Zatsepin-Kuzmin*).

Surpreendentemente, o primeiro raio cósmico com energia acima de 10^{20} eV já havia sido detectado em 1963 por *John Linsley* em *Volcano Ranch*[7] e nas quatro décadas seguintes cerca de duas dezenas de eventos acima dessa energia foram registrados por diversos experimentos (*Haverah Park*[8], *SUGAR*[9], *Fly's Eye*[10]), em aparente contraste ao efeito GZK.

Dois dos mais recentes experimentos dedicados à detecção da radiação cósmica de altíssima energia, a saber, *AGASA*[11] e *HiRes* (I e II),[12] já observaram em conjunto mais de 1000 eventos acima de 10^{19} eV e mais de uma dezena acima de 10^{20} eV. Não obstante essas observações, os experimentos não concordam no tocante ao fluxo energético observado na região esperada do corte GZK. Na figura 1.2 estão mostrados os resultados experimentais de ambos os experimentos.

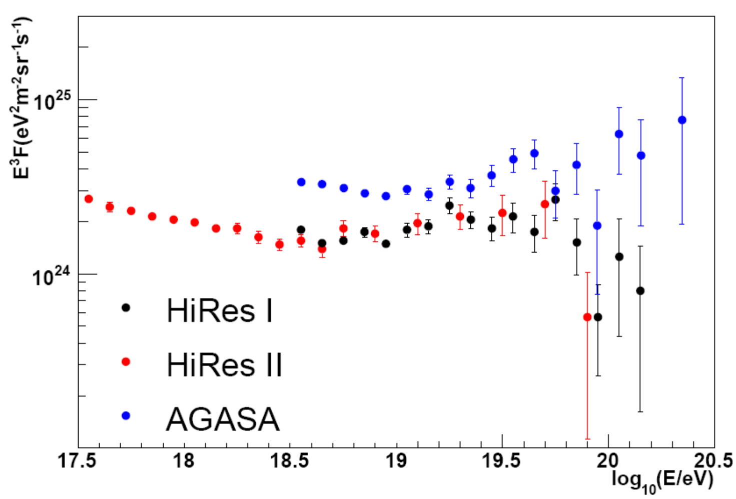

Fig. 1.2: Fluxos medidos por AGASA (fonte: referência 13) e HiRes I e II (fonte: referência 14).

Pode-se observar que:

a) Os resultados de *AGASA* estão sistematicamente acima dos de *HiRes*;

b) O espectro do *HiRes* apresenta uma mudança de inclinação no espectro de potência, próximo a $10^{19,8}$ eV, que não é observada nos dados de *AGASA*. O aumento da declividade do espectro de *HiRes* poderia ser pensado como um indicativo da existência do corte GZK, mas tal interpretação não tem a confirmação pelos dados do outro experimento.

Erros sistemáticos da ordem de 30% na determinação relativa da energia nos dois experimentos poderiam explicar o fator da ordem de dois mencionado. Se os valores de energia de *AGASA* estiverem sobreestimados em 15% e os de *HiRes* subestimados em 15%, os fluxos dos dois experimentos concordam abaixo de 10^{20} eV, dentro das faixas de erro.[15] Entretanto, para energias acima deste valor, a discrepância continua com significância estatística da ordem de 2,6 desvios padrão.

Há vários cenários que vêm sendo estudados para que as discrepâncias mencionadas possam ser compreendidas. Sem considerar o efeito GZK, um espectro energético tipo lei de potência da ordem do observado já por si só faz prever apenas alguns poucos eventos acima de 10^{20} eV nos dois experimentos mencionados (quando se leva em conta o tempo de exposição, a abertura angular e a área), o que faz com que a correta interpretação das observações seja bastante delicada. Hipóteses levantadas vão desde possíveis flutuações na propagação das partículas pelo meio intergaláctico devido ao caráter discreto do processo de fotoprodução de píons,[15] a efeitos do desconhecimento dos campos magnéticos cósmicos em larga escala, no que se refere a sua intensidade e estrutura,[16] ou mesmo erros sistemáticos nas medidas de energia dos experimentos.

O baixo número de eventos observado é insuficiente para uma interpretação conclusiva, seja a favor ou contra a existência do corte GZK. É neste contexto da necessidade de mais dados nessa região do espectro que surge o Observatório *Pierre Auger*.

1.3 O OBSERVATÓRIO *PIERRE AUGER*[iii]

A presente tese de mestrado está inserida no projeto maior da construção e operação do Observatório *Pierre Auger*.[17] Trata-se de uma colaboração internacional envolvendo mais de 50 instituições de 20 países, contando com os esforços de mais de 250 pesquisadores. O Brasil está participando deste projeto, em particular com pesquisadores do Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia do Instituto de Física *Gleb Wataghin*, da Universidade Estadual de Campinas.

O objetivo do Observatório *Pierre Auger* é estudar a radiação cósmica de altíssima energia, i.e., acima de 10^{18} eV, que incide sobre a Terra. Como os raios cósmicos a essas energias são muito raros,[iv] pouco se sabe a respeito de suas massas, origem e mecanismos de aceleração capazes de fazer com que tais energias sejam atingidas.

O objetivo a longo prazo é a construção de dois observatórios, um no hemisfério norte e outro no hemisfério sul, porém, como primeira etapa do projeto, iniciou-se a construção e operação do Observatório *Auger* no hemisfério sul, mais especificamente na Argentina, na província de *Mendoza*. Quando completo, o observatório cobrirá uma área de 3000 km^2, ocupada com um arranjo de detectores de superfície e outro de fluorescência. Atualmente ele é o maior detector de raios cósmicos já construído, projetado para utilizar a técnica de detecção híbrida, combinando as qualidades dos detectores de luz de fluorescência com as dos tanques de água em que se detecta a luz *Cherenkov*. O objetivo dos detectores é medir a energia e a composição em massa dos raios cósmicos de energias acima de 10^{18} eV, bem como a direção de chegada dessas partículas, em uma tentativa de traçar suas origens.

[iii] O sítio sul do Observatório Pierre Auger está localizado a 1400m de altitude acima do nível do mar e nas coordenadas: latitude 35°30’ sul e longitude 69°18’ oeste.
[iv] O fluxo integral por esferorradiano acima de 4 Eev (1 EeV = 10^{18} eV) é cerca de 1 partícula/(km^2.ano) e acima de 100 EeV é aproximadamente 0,5 partícula/(km^2. século).[17]

O arranjo de superfície consiste de cerca de 1600 tanques de água uniformemente distribuídos a uma distância de 1500 m entre si. As partículas de altas energias de um chuveiro que atravessam os tanques emitem radiação *Cherenkov*, que é detectada por três fotomultiplicadoras instaladas no topo de cada tanque. A figura 1.3 mostra a foto de um dos tanques instalados no sítio.[v]

Fig. 1.3: Um tanque instrumentado do arranjo de superfície operando no sítio sul do Observatório Pierre Auger.

Para os chuveiros observados pelos detectores de superfície, o principal observável é a função de distribuição lateral (número de partículas/área em função da distância ao centro do chuveiro). A determinação de energia deve se basear em um parâmetro que possua a menor flutuação possível. Assim, a partir da distribuição lateral é calculado o parâmetro S_{1000}, que é o sinal de um tanque localizado a 1000 m de distância do eixo do chuveiro, o que permite a determinação da energia por diferentes parametrizações. A importância deste parâmetro é sua baixa dependência com os modelos de desenvolvimentos de chuveiros e com a composição da partícula primária.

Concomitantemente, em noites escuras e sem nuvens os vinte e quatro telescópios de fluorescência podem registrar a luz de fluorescência emitida pelas moléculas de nitrogênio da atmosfera, excitadas pela passagem das partículas energéticas do chuveiro atmosférico. A

[v] Em fase de finalização do sítio sul do Observatório, no dia 29/01/2007 havia 1110 tanques instalados e coletando dados.

intensidade total de luz observada depende do número de partículas no chuveiro e, portanto, de sua energia. O desenvolvimento longitudinal de um chuveiro pode ser observado em detalhe com essa técnica.

A combinação das duas técnicas permite uma riqueza de informações maior sobre esses eventos altamente energéticos procurados, com verificação da sistemática e checagem de calibração exatamente nesses eventos medidos com a técnica híbrida. Entretanto, embora possam medir mais detalhes de cada evento, os detectores de fluorescência apenas operam 10% do tempo. Assim, os tanques de água, operando o tempo todo, detectam um número de eventos cerca de dez vezes maior.

Tanto o perfil longitudinal quanto a distribuição lateral das partículas em um chuveiro são afetados pelas flutuações intrínsecas. Para o Observatório *Pierre Auger* poder cumprir bem os seus objetivos, em particular o de medir o espectro energético primário na região do corte GZK, se faz necessária uma compreensão do impacto destas flutuações principalmente na determinação do fluxo diferencial observado.

Neste contexto, o objetivo do presente trabalho consiste em avaliar como os erros decorrentes da resolução de energia finita do Observatório *Pierre Auger* se fazem sentir no espectro energético observado. Será feita uma estimativa simples de sua resolução de energia, com a influência decorrente desses erros no espectro energético acima de 10 EeV, verificando como eles contribuem para as distorções acima do limiar do GZK. O espectro energético de raios cósmicos incidindo sobre a Terra será calculado a partir de algumas hipóteses sobre a distribuição uniforme de fontes extragalácticas, a composição, o espectro de injeção e sobre os efeitos que causam a redução da energia das partículas em sua propagação até o topo da atmosfera. A convolução deste fluxo propagado com a resolução de energia fornecerá a forma do fluxo final que tende a ser medido pelo Observatório.

2 ERROS

"It is quite likely that the lognormal distribution will be one of the most widely applied distributions in practical statistical work in the near future" [vi]

Em Física experimental de altas energias, distribuições medidas estão freqüentemente sujeitas a distorções causadas pela resolução finita dos detectores. Devido a essa incerteza experimental, a medição de uma variável x' distribuída segundo f(x') pode erroneamente levar a uma variável x distribuída segundo uma g(x). Assim, as informações físicas presentes em f(x') (distribuição correta) podem ser distorcidas em g(x) (distribuição medida).

Este problema é particularmente severo em física de raios cósmicos de energia ultra-alta, pois além de haver poucos eventos disponíveis, não se tem controle da reprodutibilidade da experiência e cada evento é único.

Este capítulo faz inicialmente uma revisão sobre a distribuição de erros lognormal, que será utilizada no final deste capítulo e também no capítulo 4, discutindo-se em seguida a primeira etapa do processo de convolução de erros experimentais na determinação do fluxo diferencial de raios cósmicos de energia ultra-alta.

2.1 A DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL

Tradicionalmente, utilizam-se nas mais diversas áreas da Física experimental distribuições gaussianas de erros para descrever flutuações de grandezas físicas. Tal aplicabilidade é justificada freqüentemente pelo Teorema do Limite Central (TLC), cujo enunciado é :

[vi] JOHNSON, N.L.; KOTZ, S. *Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions-1* Houghton Mifflin Company, 1970, p.128.

Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_n$ variáveis aleatórias independentes quaisquer, porém com variância finita não nula, e média também finita. A variável $x_j = \sum_{i=1}^{n} y_i$ tende a ser uma variável gaussiana à medida que $n \to \infty$. Assim, a função densidade de probabilidade das variáveis x_j se aproxima de uma gaussiana para n grande.

Como conseqüência do TLC, a soma de um grande número de flutuações y_j tende a ser gaussianamente distribuída, mesmo que as próprias flutuações não o sejam. A média e variância da variável x_j são, respectivamente, a soma das médias e variâncias das flutuações y_j. Geralmente não se tem acesso às quantidades físicas microscópicas que causam as flutuações, mas o efeito coletivo destas se manifesta em observáveis macroscópicos que, pelo TLC, possuem aproximadamente uma resolução gaussiana de erros.

Note que, na prática, nem sempre as condições do teorema são satisfeitas, i.e., média e variância finitas, além desta última ter de ser não nula. Além disso, o quão grande n deve ser para o TLC ser aproximadamente satisfeito varia a cada caso. De fato, para n finito, a região em torno da média $\langle x \rangle$ é aproximadamente gaussiana, porém a cauda da distribuição de x será gaussiana se e somente se as variáveis y_i forem gaussianamente distribuídas, caso contrário se verifica a ocorrência de caudas mais longas (ou menos) que as caudas gaussianas.[20]

Mesmo com essas restrições matemáticas, o número de situações físicas em que se verifica a ocorrência de erros gaussianos é enorme. Tal fato leva à (in)cômoda tendência de se atribuir uma função gaussiana de erros quando se desconhece a origem das flutuações que causam esses erros. Entretanto, o que não é muitas vezes levado em consideração é que, mesmo nas situações em que o TLC se aplica, uma distribuição gaussiana de erros é apenas uma conseqüência possível, mas não a única.

O que faz com que o número de glóbulos vermelhos no sangue, o tempo entre relâmpagos em tempestades, a freqüência de inundações e o tamanho de conchas possuam todos como característica em comum o fato de serem distribuídos não segundo uma distribuição normal, mas sim lognormal? Considere flutuações representadas por variáveis aleatórias independentes $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Dessa vez, a lei de composição dos efeitos dessas flutuações não será mais aditiva, como no caso anterior, e sim multiplicativa, i.e., $x_j = \prod_{i=1}^{n} z_i$. Tem-se:

$$x_j = \prod_{i=1}^{n} z_i \;\Rightarrow\; \ln\, x_j = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} z_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln\, z_i \;\therefore\; \ln\, x_j = \sum_{i=1}^{n} \ln\, z_i\,. \tag{2.1}$$

Novamente, pelo TLC, para n grande a grandeza $\ln x$ tende a ser gaussianamente distribuída. Assim, sendo uma função densidade de probabilidade normal em $y = \ln x$,

$$\frac{dP_N}{dy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left[-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} = \frac{dP_N}{d\ln x}, \tag{2.2}$$

então a função densidade de probabilidade em x é dita lognormal e é dada por:

$$\frac{dP_{LN}}{dx} = \frac{dP_N}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{\left[-(\ln x-\mu)^2/2\sigma^2\right]}. \tag{2.3}$$

Percebe-se então que uma distribuição lognormal em x é uma distribuição que ocorre quando $\ln x$ é distribuído gaussianamente, ou, equivalentemente, uma variável x é dita uma variável lognormal quando for a exponencial de uma variável gaussiana y.

O ponto principal é que o TLC não limita as distribuições de erros a distribuições normais, podendo ser lognormais. O fator determinante é a lei de composição das flutuações, i.e., se o efeito coletivo destas tem um caráter aditivo ou multiplicativo. Neste sentido, distribuições lognormais estão no mesmo nível fundamental das normais, diferindo apenas nas leis de composição que as originam (cf. figura 2.1).

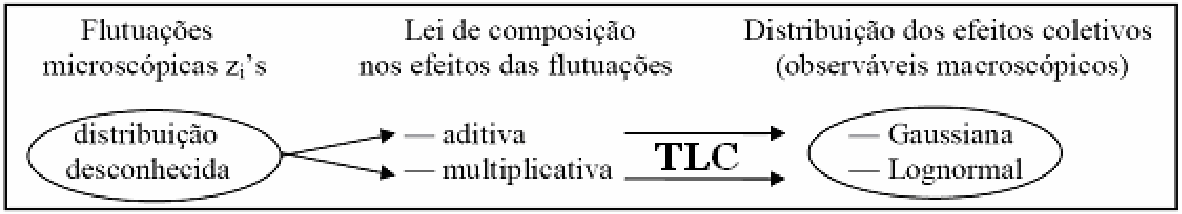

Fig. 2.1: Conseqüências do Teorema do Limite Central (TLC) de acordo com a lei de composição.

As principais características de uma distribuição lognormal[19,20] estão na tabela 2.1. Ressalta-se que o parâmetro σ na lognormal, chamado parâmetro de forma, não é o desvio padrão da variável x, mas sim o desvio padrão de $\ln x$. O parâmetro μ, chamado fator de escala, não é a média nem o pico, mas sim o logaritmo da mediana. O coeficiente de variação C, que caracteriza a dispersão relativa, pode ser definido para ambas as distribuições como sendo a razão entre o desvio padrão e a média, desde que esta última não seja nula. Uma das principais características da lognormal é que, além de ser assimétrica, possui uma cauda que pode se estender enormemente. Além disso, o intervalo que contém 95% da probabilidade depende exponencialmente de σ, ao contrário da gaussiana, em que depende linearmente. Essas características desempenharão um papel importante na análise da próxima seção. Na figura 2.2 é mostrado o comportamento da lognormal com relação a seus parâmetros σ e μ.

As inúmeras ocorrências de distribuições lognormais se dão nos mais diversos ramos,[19] dentre os quais a biologia (modelos de crescimentos populacionais, abundâncias de espécies), finanças (seguros e riscos), ciências atmosféricas (concentrações de poluentes, distribuições de aerossóis), spintrônica (flutuações de corrente em junções de tunelamento),[21] óptica e ondas (transporte através de meios desordenados),[22] entre outros.

Tabela 2.1: Distribuições normal e lognormal.

	Gaussiana	Lognormal
	$\dfrac{dP_N}{dy} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$	$\dfrac{dP_{LN}}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \mathrm{e}^{\left[-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$
Limites	$[-\infty,+\infty]$	$[0,+\infty]$
Mediana	μ	$\mathrm{e}^{\mu} = x_{1/2}$
Pico (moda)	μ	$\mathrm{e}^{\mu-\sigma^2} = x_{1/2}\mathrm{e}^{-\sigma^2}$
Média	μ	$\mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2} = x_{1/2}\mathrm{e}^{\sigma^2/2}$
Variância	σ^2	$\mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right)$
Desvio padrão	σ	$\mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}\sqrt{\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right)}$
C = desvio/média	$\sigma/\lvert\mu\rvert$	$\sqrt{\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right)}$
Intervalo 95%	$[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$	$\left[\mathrm{e}^{\mu-2\sigma}, e^{\mu+2\sigma}\right]$

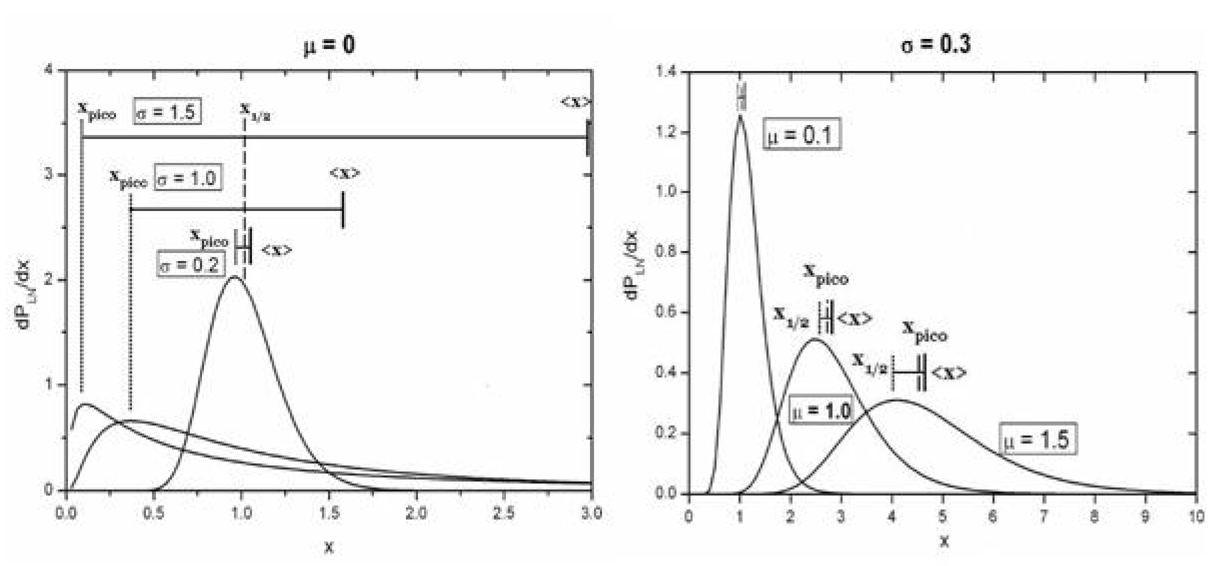

Fig. 2.2: Comportamento da lognormal de acordo com seus parâmetros. À esquerda, μ é mantido constante (implicando em igual mediana $x_{1/2}$) e σ é variado. A distância entre a posição do máximo x_{pico} e a média <x> é bastante sensível à variação em σ. À direita, σ é mantido constante (implicando em igual coeficiente de dispersão C) e μ variado.

2.2 Convolução de erros

Como o fluxo do espectro primário $\Phi(E')$ não é acessível aos presentes experimentos, deve-se considerar que o fluxo medido $\Phi_c(E)$ é o resultado do fluxo primário $\Phi(E')$ convoluído com a distribuição dos erros na resolução de energia, o que representa a probabilidade de que eventos com energia E' sejam reconstruídos erroneamente como tendo energia E. Assim, sendo dP/dE a densidade de probabilidade que representa a função de reconstrução de energia com mediana E', então o fluxo medido é dado pela integral de convolução:

$$\Phi_c(E) = \int_0^\infty \frac{dP(E,E')}{dE} \Phi(E') dE' . \tag{2.4}$$

Note que se deve associar E' com a mediana da distribuição dP/dE, e não ao seu pico ou valor médio, pois assim se garante igual probabilidade de um evento ser reconstruído com energia E acima ou abaixo de E'. Esse detalhe é insignificante quando se consideram distribuições simétricas como as gaussianas, mas significativo quando consideradas distribuições assimétricas com longas caudas, como a lognormal. Uma outra diferença é que, no caso gaussiano, se dP/dE está normalizado com relação à variável E, também o está com relação à sua mediana E', que é a variável de integração na eq. (2.4).

Considere inicialmente que o espectro diferencial primário de raios cósmicos no topo da atmosfera seja uma lei de potência, i.e,

$$\Phi(E') = AE'^{-\gamma}, \tag{2.5}$$

onde A é a constante de normalização. Para se ter uma idéia inicial dos efeitos de erros na reconstrução de energia, a integral de convolução dada pela eq (2.4) será feita utilizando-se a eq.(2.5) com distribuições gaussiana e lognormal.

2.2.1 CASO GAUSSIANO

Um detalhe a ser considerado é que gaussianas são definidas tanto para valores positivos quanto negativos de sua variável. No caso presente, isto implica, matematicamente, na possibilidade de se obter valores negativos para a energia. Para ilustrar essa situação, considere dois tipos de distribuições gaussianas: uma na qual seu desvio padrão σ é constante, i.e., independente do valor da energia média, e outra na qual o desvio padrão relativo é constante, i.e, $\sigma = C\langle E\rangle$. A tabela 2.2 mostra a probabilidade de se obter valores de energia negativa para alguns valores de mediana E' e C, com $\sigma_{cte} = 0.5$ EeV. (Tais probabilidades nada mais são do que o valor em porcentagem da função de distribuição cumulativa gaussiana, calculada de $-\infty$ a 0). Esses resultados independem da escala de energia (EeV, eV, J, ...), apenas importando o coeficiente de dispersão $C = \sigma/\langle E\rangle = \sigma/E'$, que é adimensional.

Tabela 2.2: Probabilidade de obter energias negativas com a distribuição normal.

E' (EeV)	$\sigma_{cte} = 0,5$ EeV	$\sigma = 0,5\,E'$(EeV)	$\sigma = 0,6\,E'$(EeV)
1	2,2 %	2,2 %	4,8%
2	$3.\,10^{-3}$ %	2,2 %	4,8%
10	$3\,.\,10^{-87}$ %	2,2 %	4,8%
100	$3.\,10^{-8687}$ %	2,2 %	4,8%

Para o caso comum em que o desvio padrão independe da energia, percebe-se que a possibilidade de energias negativas contribuírem para a integral de convolução cai muito rapidamente a zero para energias maiores que EeV. Assim, a eq(2.4) pode ser redefinida no intervalo $[-\infty, +\infty]$, no qual a gaussiana é devidamente definida e normalizada:

$$\Phi_c(E)_{Gabs.} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} E'^{-\gamma}\, e^{\frac{-(E-E')^2}{2\sigma^2}}\, dE' \,. \tag{2.6}$$

O mesmo não pode ser feito no caso de um desvio padrão proporcional à energia média, pois, como visto, se o desvio padrão relativo for da ordem de 60% da energia, então a contribuição de energias negativas na integral de convolução chega a quase 5%, uma contribuição pequena porém não desprezível de fontes fisicamente sem sentido (E'< 0). Para manter a condição $\Phi(E') = 0 \;\; \forall E' < 0$ faz-se necessário fazer a integral de convolução apenas para energias não negativas. Como conseqüência, deve-se renormalizar a gaussiana de $\sigma_{relativo}$ apenas para valores de energia iguais ou maiores a zero, sendo a nova constante de normalização N calculada como:

$$N=\left[\int_0^{\infty} e^{\frac{-(E-E')^2}{2\sigma^2}}\,dE\right]^{-1}=\left[\sigma\int_{-E'/\sigma}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz\right]^{-1}=\left[\sigma\left(\int_{-E'/\sigma}^{0} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz+\int_0^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz\right)\right]^{-1}=\left[\sigma\left(\int_{-E'/\sigma}^{0} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz+\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)\right]^{-1}.$$

Utilizando a função erro dada por

$$erro\left(x/\sqrt{2}\right)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_x^0 e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz, \tag{2.7}$$

e considerando que é uma função ímpar, então N fica:

$$N=\left[\sigma\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}erro\left(\frac{-E'}{\sqrt{2}\sigma}\right)+\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)\right]^{-1}=\left[\sigma\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{2}erro\left(\frac{E'}{\sqrt{2}\sigma}\right)+\frac{1}{2}\right)\right]^{-1},$$

$$\therefore\quad N=\frac{2}{\sqrt{2\pi}CE'\left[1+erro\left(1/(\sqrt{2}C)\right)\right]},\ \text{onde } C=\sigma/E'. \tag{2.8}$$

Como a função erro não é analítica, a constante de normalização N para uma gaussiana de desvio padrão relativo dada pela eq(2.8) só pode ser calculada numericamente. A integral de convolução fica expressa como:

$$\Phi_c(E)_{Grel.}=\frac{2A}{\sqrt{2\pi}\left\{1+erro\left[(\sqrt{2}C)^{-1}\right]\right\}C}\int_0^{\infty}E'^{-(\gamma+1)}\,e^{\frac{-(E-E')^2}{2C^2E'^2}}\,dE' \tag{2.9}$$

A integral de convolução para o caso gaussiano de σ constante, eq (2.6), foi resolvida aproximadamente pelo método do ponto de sela para energias altas, i.e., $E >> \sigma$:

$$\Phi_c(E)_{Gabs.} \cong AE^{-\gamma}\left[1+\frac{\sigma^2}{2E^2}\gamma(\gamma+1)\right] . \qquad (2.10)$$

Em contrapartida, para o caso gaussiano com σ relativo, o método do ponto de sela até segunda ordem não apresenta convergência, restando resolver a eq(2.9) numericamente. Parametrizando o fluxo convoluído para vários valores de σ e γ, obteve-se o seguinte resultado:

$$\Phi_c(E)_{Grel.} \cong AE^{-\gamma}\left[1+\frac{C^2(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}\right] \qquad (2.11)$$

Comparando-se a eq(2.10) e a eq(2.11), ambas apresentam um fluxo convoluído maior que o original. Os resultados retomam o fluxo original multiplicados por um fator que, no caso da gaussiana com σ constante, depende da energia, porém à medida que E aumenta, o fluxo convoluído tende a ser igual ao original (cf. figura 2.3).

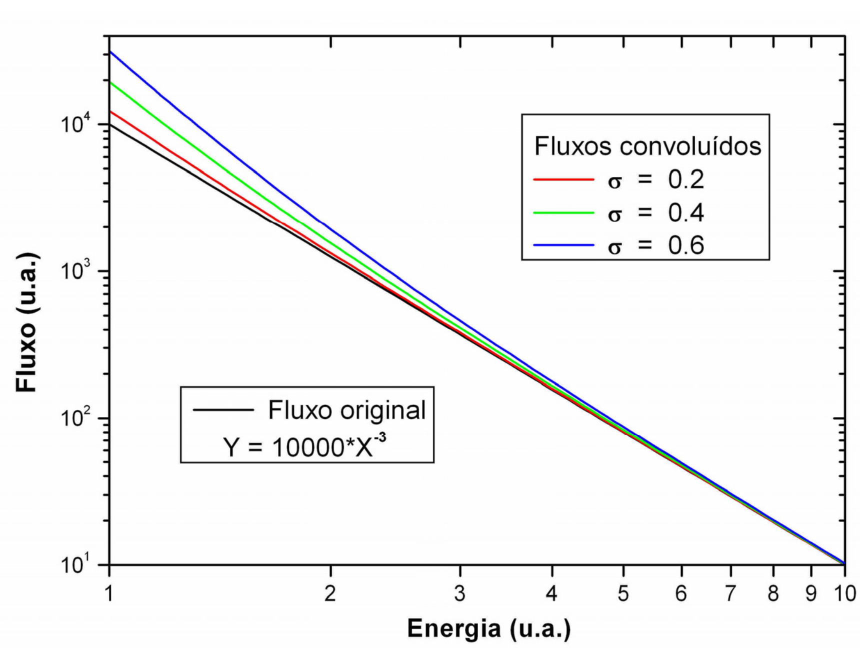

Fig. 2.3: Fluxos convoluídos com gaussianas de σ constante (γ =3).

No caso de σ relativo, o fator multiplicativo não depende da energia, logo a forma do fluxo não é alterada, apenas sua normalização (tal característica será posteriormente retomada no estudo da lognormal). O fato de a gaussiana de σ relativo manter seus efeitos sobre o fluxo convoluído para qualquer energia se deve ao fato de que sua dispersão $C = \sigma / E'$ se mantém a mesma, ao contrário da gaussiana de σ constante, em que, à medida que a energia aumenta, sua dispersão diminui, pois C é inversamente proporcional a E', mantido σ constante. A figura 2.4 evidencia essa característica, em que para altas energias essa gaussiana se comporta praticamente como uma função delta, modificando em quase nada o fluxo nessa região, o que faz com que o fluxo convoluído retorne para os valores originais, conforme observado na figura 2.3.

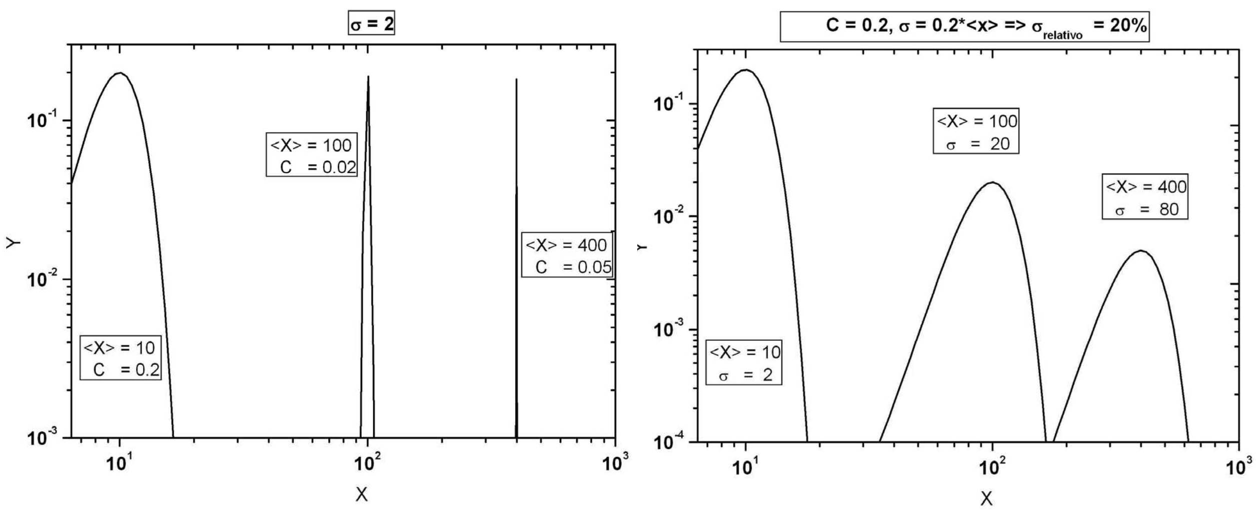

Fig. 2.4: Comparação (em escala logarítmica) entre gaussianas de σ constante (esq.) e σ relativo constante (dir.). A primeira curva à esquerda é a mesma para os dois gráficos e é utilizada como referência.

O fato de a normalização ser mudada, conforme a eq(2.11), pode parecer à primeira vista estranho, pois o processo de convolução de erros na resolução da energia deve ser apenas uma redistribuição das energias associadas às partículas, não havendo criação nem destruição de eventos. O fato de haver alteração na normalização significaria que o número total de eventos distribuídos antes da convolução segundo $\Phi(E')$ fosse diferente do número total de eventos distribuídos após a convolução segundo $\Phi_c(E)$. De fato, este é um ponto sutil que será analisado a seguir.

O primeiro fato a se levar em consideração é que um espectro decrescente do tipo lei de potência como o da eq(2.5) não pode ser normalizado no intervalo $[0, \infty]$. Só é possível definir e determinar a constante de normalização A da eq(2.5) impondo uma energia mínima não nula a partir da qual o fluxo original passa a ser considerado. Assim, numa situação mais realística, o intervalo a ser considerado para convolução deve ser $[E'_{min}, \infty]$, com $E'_{min} > 0$.

Uma conseqüência direta desta imposição é o surgimento de um "efeito de borda". Considere um pequeno intervalo de energia ΔE, centrado em E. Ao se fazer a convolução, "coloca-se" a mediana da distribuição de erros em E'(energia correta do evento), verificando a probabilidade do evento originalmente com energia E' ser reconstruído dentro do intervalo ΔE e ser interpretado como tendo energia E, que pode ou não conter a energia original E'. Há igual probabilidade da energia E ser maior ou menor que E'. Fixado E, à medida que a integração em E' ocorre, dois efeitos vão se somando: eventos com energia $E' > E + \Delta E/2$ e também $E' < E - \Delta E/2$ caem no intervalo ΔE, aumentando o número de eventos em ΔE, mas eventos que originalmente estavam dentro de ΔE podem ser jogados para fora desse intervalo.

O resultado final da entrada e saída de eventos na vizinhança de ΔE é o que determina o fluxo convoluído em cada intervalo ΔE considerado. A isonomia desse balanço de entrada e saída de eventos é afetada quando E está próximo da borda E'_{min}, pois nessa região o intervalo ΔE pode perder eventos para energias menores que E'_{min}, mas não recebe nenhuma contribuição das energias menores que E'_{min}, pois o fluxo é nulo nessa região por definição de E'_{min}. Assim, perto da borda E'_{min} deve haver uma diminuição do fluxo convoluído com relação ao original. Isso garante que <u>mesmo que haja um aumento na normalização do fluxo para energias altas, no total o número de eventos após a convolução não aumenta</u>. Entretanto, <u>a análise física do fluxo</u>

convoluído só deve ser feita longe da borda E'_{min}, pois este efeito de borda introduz artificialmente uma espécie de erro sistemático nessa região.

Para uma melhor ilustração e compreensão deste efeito, recorreu-se a simulações de Monte Carlo para convolução de fluxos. (A comparação de resultados analíticos com simulações será uma constante nesta tese.) Na figura 2.5 tem-se o resultado de 50000 eventos sorteados segundo a lei de potência dada pela eq(2.6), normalizada para uma energia mínima $E'_{min} = 1$, com $\gamma = 3$ e convoluídos com gaussianas de σ constante.

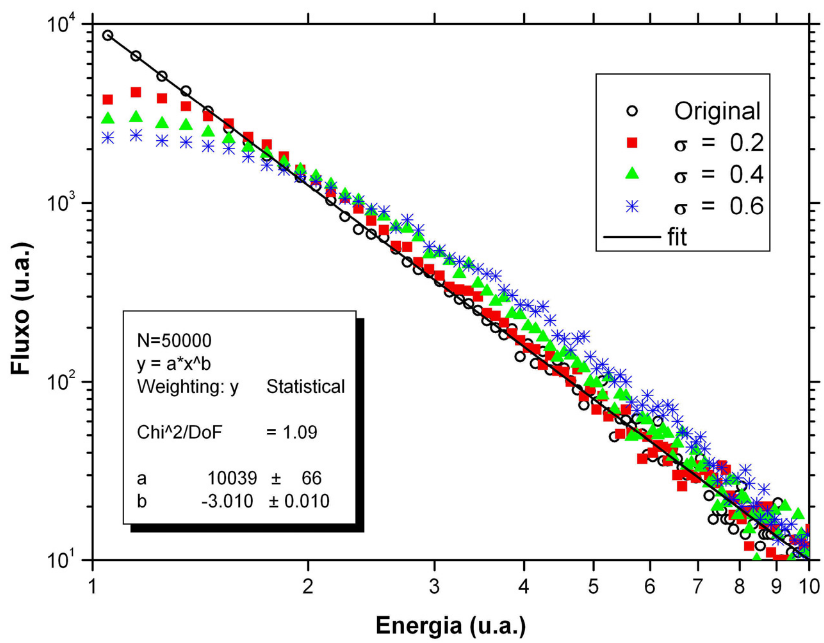

Fig. 2.5: Resultados dos fluxos obtidos por Monte Carlo para uma distribuição normal de σ constante.

A figura 2.5 ilustra claramente o efeito de borda: para energias entre 1 e 2, o fluxo convoluído está abaixo do fluxo original, pois muitos pontos caíram na região de $E < 1$, mas não receberam em contrapartida nenhum ponto dessa região, pois $E'_{min} = 1$. O efeito é mais severo considerando gaussianas com maior dispersão, i.e, com maior σ, pois a probabilidade dos pontos caírem mais longe na região $E < 1$ é maior. Entre o intervalo de energias 2 e 3, ocorre a transição deste efeito de bordas para o real efeito da convolução da gaussiana com o fluxo original, que é o aumento no fluxo. Para energias maiores que 3 ocorre o previsto pela eq(2.10): o fluxo convoluído é maior, mas à medida que a energia aumenta, ele tende a se aproximar do fluxo original.

Essa tendência dos efeitos de uma resolução de energia gaussiana com σ constante serem desprezíveis para energias altas explica em parte o fato deste assunto ter pouco destaque em estudos sobre erros estatísticos e sistemáticos na comunidade de raios cósmicos. Entretanto, como visto anteriormente, uma distribuição lognormal é perfeitamente plausível de ocorrer e os efeitos decorrentes de sua convolução serão tratados na próxima seção.

2.2.2 Caso lognormal

A lognormal já é devidamente normalizada e definida apenas para valores não negativos de sua variável, não sendo necessário, portanto, renormalizá-la. Note que nem mesmo a introdução de uma energia mínima E'_{min} para o fluxo original afeta essa normalização, pois a função de erros dP/dE deve estar normalizada para sua variável E. Assim, a função de erros neste caso é dada por:

$$\frac{dP_{LN}}{dE} = N_{LN} \frac{e^{-\frac{(\ln E - \ln E')^2}{2\sigma^2}}}{E}, onde N_{LN} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}. \tag{2.12}$$

Felizmente, a integral de convolução da lognormal pode ser feita analiticamente.Têm-se:

$$\Phi_c(E)_{LN} = \frac{AN_{LN}}{E} \int_{E'_{min}}^{\infty} E'^{-\gamma} e^{-\frac{(\ln E - \ln E')^2}{2\sigma^2}} dE' = \frac{AN_{LN}}{E} \int_{E'_{min}}^{\infty} e^{-\gamma \ln E'} e^{-\frac{(\ln E - \ln E')^2}{2\sigma^2}} dE' ,$$

$$= \frac{AN_{LN}}{E} \int_{\ln E'_{min}}^{\infty} e^{-(\gamma-1)\ln E' - \frac{(\ln E - \ln E')^2}{2\sigma^2}} d\ln E' .$$

Desenvolvendo e resolvendo por quadratura,

$$\Phi_c(E)_{LN} = \frac{AN_{LN}}{E} \int_{ln E'_{min}}^{\infty} e^{-(\gamma-1) ln E' + \frac{-ln^2 E + 2 ln E \, ln E' - ln^2 E'}{2\sigma^2}} d\, ln E'$$

$$= \frac{AN_{LN}}{E} e^{\frac{-ln^2 E}{2\sigma^2}} e^{\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{ln E}{\sigma^2} - (\gamma-1)\right]^2} \int_{ln E'_{min}}^{\infty} e^{\frac{-ln^2 E'}{2\sigma^2} + \left[\frac{ln E}{\sigma^2} - (\gamma-1)\right] ln E' - \frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{ln E}{\sigma^2} - (\gamma-1)\right]^2} d\, ln E'$$

$$= \frac{AN_{LN}}{E} e^{\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{-2 ln E(\gamma-1)}{\sigma^2} + (\gamma-1)^2\right]} \int_{ln E'_{min}}^{\infty} e^{\frac{-\left\{ln E' - \left[\frac{ln E}{\sigma^2} - (\gamma-1)\right]\sigma^2\right\}^2}{2\sigma^2}} d\, ln E'$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma E} e^{-ln E(\gamma-1) + \frac{\sigma^2(\gamma-1)^2}{2}} \int_{ln E'_{min}}^{\infty} e^{\frac{-\left\{ln E' - \left[ln E - (\gamma-1)\sigma^2\right]\right\}^2}{2\sigma^2}} d\, ln E'$$

$$= \frac{AE^{-(\gamma-1)}}{E} e^{[\sigma(\gamma-1)]^2 / 2} \int_{ln E'_{min}}^{\infty} \frac{e^{\frac{-\left\{ln E' - \left[ln E - (\gamma-1)\sigma^2\right]\right\}^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} d\, ln E'$$

$$\therefore\ \Phi_c(E)_{LN} = \Phi(E) e^{[\sigma(\gamma-1)]^2 / 2} f(E),\ onde\ f(E) = \int_{ln E'_{min}}^{\infty} \frac{e^{\frac{-\left\{ln E' - \left[ln E - (\gamma-1)\sigma^2\right]\right\}^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} d\, ln E' . \quad (2.13)$$

A função $f(E)$ na eq(2.13) é uma integral gaussiana em lnE' que seria igual a 1 se E'_{min} fosse zero. Para $E'_{min} \neq 0$, $f(E)$ pode ser expressa como a função erro dada pela eq(2.7). Assim, o fluxo convoluído pela lognormal fica:

$$\therefore\ \Phi_c(E)_{LN} = \Phi(E) e^{[\sigma(\gamma-1)]^2 / 2} \frac{1}{2}\left\{1 + erro\left[\frac{ln E - ln E' - (\gamma-1)\sigma^2}{\sqrt{2}\sigma}\right]\right\} . \quad (2.14)$$

O fluxo convoluído retoma o fluxo original dado pela eq(2.5) multiplicado por um fator constante (proporcional à exponencial de σ^2) e outro que tende rapidamente a 1 à medida que E aumenta em relação a E' e σ. Este último termo é o responsável pelo efeito de borda discutido anteriormente, porém desta vez ele aparece explicitamente no cálculo analítico da convolução. A figura 2.6 mostra o gráfico correspondente à eq(2.14) para vários σ.

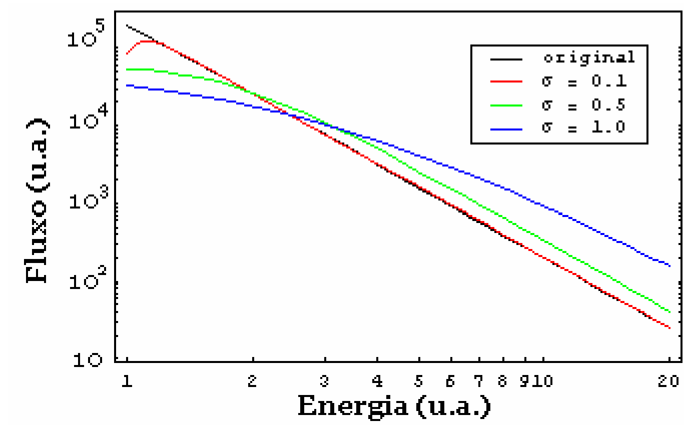

Fig. 2.6: Fluxos convoluídos com lognormais de diferentes σ (γ=3, E'_{min} = 1).

Novamente, para efeito de comparação e também para se certificar de que o efeito de borda foi plenamente incluído no cálculo analítico, fez-se a convolução da lognormal também por algoritmos de Monte Carlo, conforme a figura 2.7. Os resultados são idênticos: para cada σ, há uma região onde os efeitos de borda se evidenciam e, à medida que E aumenta, o fluxo convoluído tende a ser maior e (em escala logarítmica) paralelo ao original. A intensidade e região em que esses efeitos ocorrem dependem fortemente do σ da lognormal.

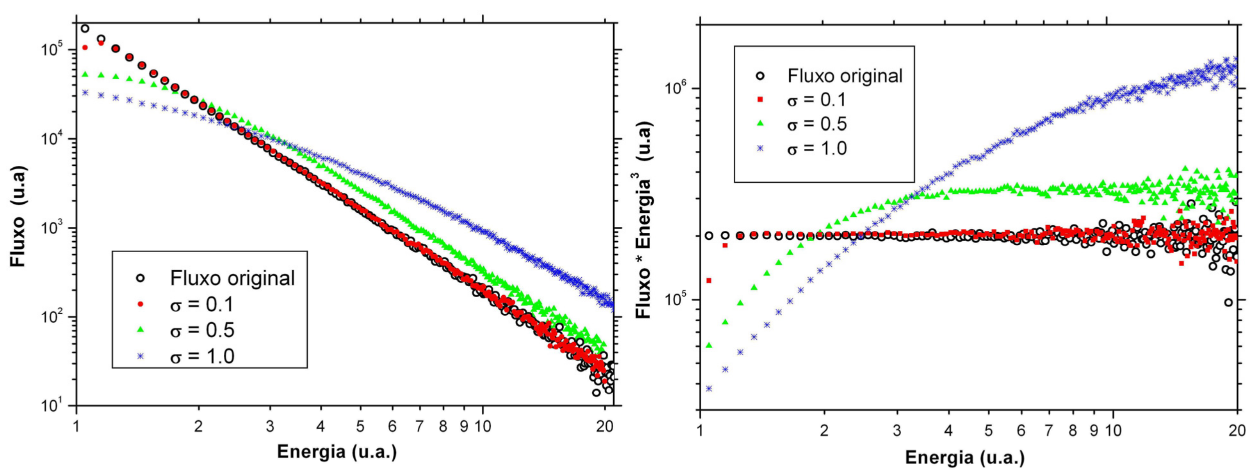

Fig. 2.7: À esq., fluxos convoluídos com lognormais de diferentes σ (γ=3, E'_{min} = 1) por simulação de Monte Carlo (10^6 eventos sorteados para cada curva). À dir., os mesmos resultados multiplicados por E^3.

O caso da convolução lognormal, por possuir solução analítica, permite um aprofundamento na compreensão da resolução de energia. O método de convolução requer um conhecimento *a priori* do fluxo original de raios cósmicos $\Phi(E')$. Experimentalmente, é justamente este fluxo que precisa ser determinado. Assim, o procedimento a ser adotado é supor a forma do fluxo original $\Phi(E)$ (por exemplo eq(2.5)), fazer a convolução com a função de resolução de energia dP/dE, obter o fluxo convoluído $\Phi_c(E)$ e compará-lo com os dados experimentais para o fluxo observado, como por exemplo os do Observatório *Pierre Auger*. O ideal seria justamente inverter essa ordem e calcular o fluxo verdadeiro $\Phi(E')$ a partir do fluxo observado $\Phi_c(E)$, ou seja, fazer uma deconvolução:

$$\Phi_{verdadeiro}(E') = \int_0^\infty \frac{dP(E,E')}{dE'} \Phi_{observado}(E)dE\,. \tag{2.15}$$

O problema é que, enquanto na integral de convolução dP/dE possui uma origem física (representa o efeito do aparato experimental que possui resolução finita sobre a medição da grandeza $\Phi(E')$, sendo portanto a resposta do detector), na integral de deconvolução dP/dE' é uma função "mágica" que corrigiria automaticamente as incertezas experimentais introduzidas pelo detector. Métodos de deconvolução se baseiam então na inversão da integral de convolução, eq(2.4), mantendo-se dP/dE. Tal processo, intrinsecamente ligado à teoria de probabilidades, é complexo, depende muito das funções envolvidas e escapa do objetivo do presente trabalho, porém precisa ser abordado em futuros trabalhos pela colaboração *Pierre Auger*, a exemplo do que tem sido feito em outros experimentos de altas energias.[23] Entretanto, o caso lognormal será utilizado para ilustrar o comportamento de dP/dE'.

Considere as energias E e E' variáveis aleatórias descritas por uma função densidade de probabilidade conjunta $\Psi(E,E')$, devidamente normalizada:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \Psi(E,E')dE'\,dE = 1 \ . \tag{2.16}$$

A probabilidade de se obter $a \leq E < b$ e $c \leq E' < d$ é dada por:

$$P(a \leq E < b, c \leq E' < d) = \int_a^b \int_c^d \Psi(E,E')dE'\,dE \ . \tag{2.17}$$

Sendo $\Phi_c(E)$ e $\Phi(E')$ densidades de probabilidades marginais, i.e,

$$\begin{aligned} \Phi_c(E) &= \int_0^\infty \Psi(E,E')dE', \\ \Phi(E') &= \int_0^\infty \Psi(E,E')dE, \end{aligned} \tag{2.18}$$

se o fluxo original $\Phi(E')$ está normalizado, então, por eq(2.17) e eq(2.18), o <u>fluxo convoluído $\Phi_c(E)$ permanece normalizado sempre</u>. Considerando as funções de resolução de energia como densidades de probabilidade condicional,

$$\begin{aligned} \frac{dP(E,E')}{dE} &= \frac{\Psi(E,E')}{\Phi(E')}, \\ \frac{dP(E',E)}{dE'} &= \frac{\Psi(E,E')}{\Phi_c(E)}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

então $\Psi(E,E')$ é o próprio integrando da integral de convolução (eq(2.4)). Como conseqüência das relações acima, segue o teorema de Bayes:

$$\frac{dP(E',E)}{dE'} = \frac{\dfrac{dP(E,E')}{dE}\Phi(E')}{\Phi_c(E)} \ . \tag{2.20}$$

No caso lognormal, substituindo eq(2.5), eq(2.12) e eq (2.14) na eq(2.20), obtém-se a função "mágica", mas ainda ao custo de se fazer a suposição sobre o fluxo original. Este resultado serve para ilustrar a forma esperada dessa função, caso a resolução de energia seja lognormal. A figura 2.8 mostra *dP/dE* e *dP/dE'*, como funções de duas variáveis, *E* e *E'*. Como $\Phi_c(E)$ retoma o fluxo original, para *E* longe da borda $\Phi(E')/\Phi_c(E)$ tende a ser constante e portanto *dP/dE'* tende a ser lognormal também.

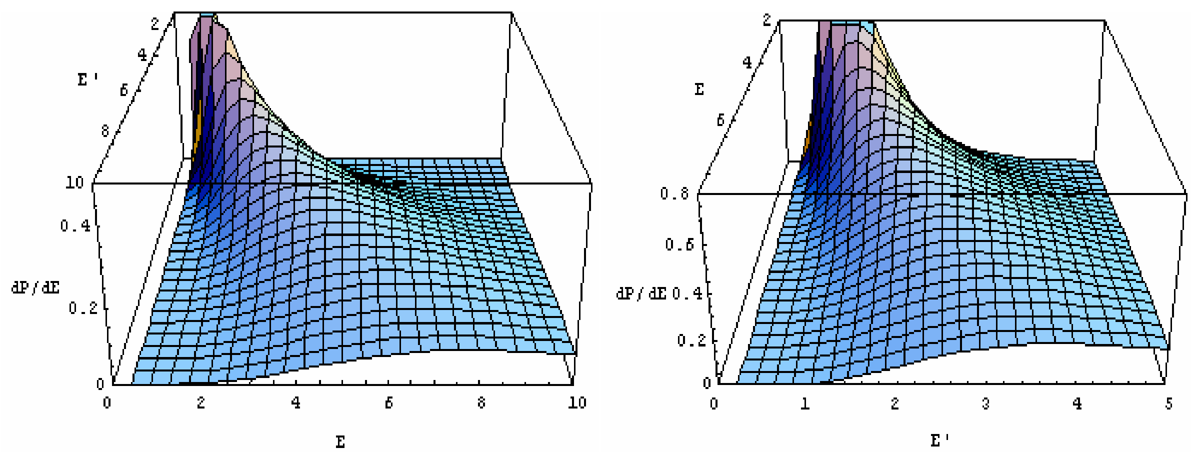

Fig. 2.8: À esq, dP/dE em função de E e E´. As linhas paralelas ao eixo de E são lognormais para uma dada mediana E'. O processo de convolução contabiliza, fixado E, a contribuição de cada lognormal em E para todos os E's. À dir, a correspondente dP/dE', dada pela eq(2.20). (σ= 0,5; γ=3; E'_{min} = 0,1).

Por fim, ressalta-se que, mesmo que as fontes de raios cósmicos ultra-energéticos emitam um fluxo segundo uma lei de potência, há uma degradação de energia que os raios cósmicos sofrem no percurso desde a origem até chegarem à Terra. Dessa forma, no próximo capítulo se determinam as perdas de energia e em seguida o fluxo primário no topo da atmosfera após a propagação.

3 PROPAGAÇÃO DE RAIOS CÓSMICOS ULTRA-ENERGÉTICOS

> "COSMOS: A totalidade das formas. Como é necessário que nenhuma forma seja destruída, ou o todo seria imperfeito, foi impossível para seus entes permanecerem os mesmos em número, pois uma vez criados são perecíveis, mas partilham da eternidade como lhes é capaz. [...] E esta é a mais funcional obra da natureza, a que cada ente produza outro a sua imagem [, preservando a forma]."[vii]

O presente capítulo aborda o essencial sobre o extenso assunto que é a propagação de raios cósmicos pelo meio intergaláctico e a decorrente degradação de energia. Não se faz alusão a nenhum modelo de criação e aceleração dos raios cósmicos, e em contrapartida se considera que eles são enviados por fontes espalhadas uniformemente pelo universo. De fato, isto está de acordo com o conhecimento atual de que, em grandes escalas, o universo é homogêneo e isotrópico.

A primeira parte deste capítulo consiste na determinação dos processos que mais acarretam perdas de energia para os raios cósmicos. Em seguida é feita a propagação tanto por meio de simulações de Monte Carlo quanto analiticamente, com a devida comparação dos resultados por cada método.

3.1 PERDAS DE ENERGIA

Basicamente, raios cósmicos estão sujeitos a perdas de energia durante a propagação por dois tipos de processos: a) interações com as componentes do meio interestelar, b) efeitos cosmológicos, como a expansão adiabática do Universo. Dentre os constituintes do meio, foi considerada no presente trabalho a Radiação Cósmica de Fundo (RCF). Nuvens moleculares de H

[vii] *Suda*, a Enciclopédia Bizantina, séc. XII, verbete $K o \sigma \mu o \varsigma$.

e He não foram consideradas, tendo em vista sua baixa densidade em comparação com a RCF (~ 400 fótons/cm^3): no meio interestelar ela é ~ 1 partícula/cm^3 e no meio intergaláctico cai ainda mais para ~ 1 partícula/m^3. Campos magnéticos, responsáveis pelo processo de difusão de raios cósmicos, também não foram considerados por dois motivos: 1) Não se conhece exatamente a intensidade e orientação dos campos no meio intergaláctico. É sabido que em aglomerados de galáxias como Virgem a intensidade é da ordem de μG (1G = 10^{-4} T), porém estima-se que no meio intergaláctico seja inferior a 1 nG; 2) As trajetórias de raios cósmicos com energia superior a 10 EeV são aproximadamente retilíneas para campos da ordem de nG, sendo portanto o efeito de deflexão desprezível (cf. figura 3.1).

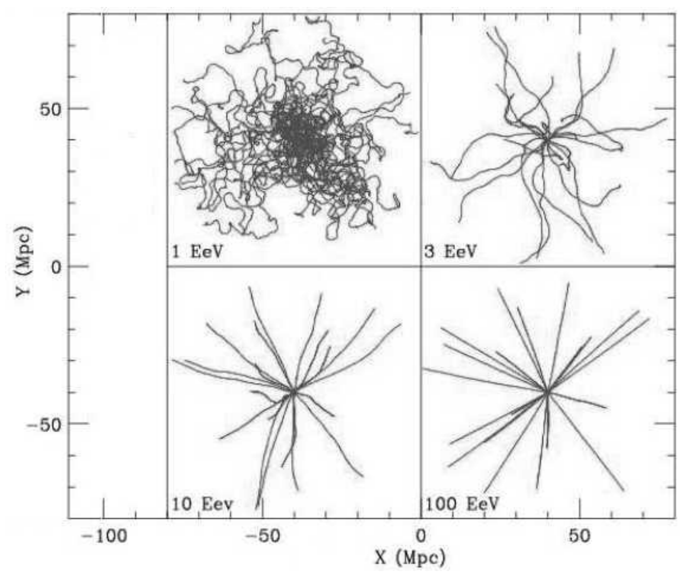

Fig. 3.1: Projeções no plano XY de trajetórias de prótons simuladas sob a influência de campos magnéticos de 1 nG com orientação aleatória para cada célula de 1 Mpc. (Fonte: referência 24).

O pico da RCF encontra-se atualmente na região de microondas, porém prótons relativísticos percebem os fótons da RCF na faixa de radiação gama, devido às transformações de Lorentz. No referencial laboratório, a RCF é isotrópica, porém no referencial de repouso do núcleon os fótons incidem com pequeno ângulo ~1/γ, onde γ é o fator de Lorentz do próton no referencial laboratório (cf. figura 3.2). Dentre as interações entre núcleons e a RCF, duas têm papel fundamental no processo de degradação de energia dos raios cósmicos: a produção de pares elétron-pósitron[25] e, principalmente, a fotoprodução inelástica de píons.[26] No presente trabalho, supõe-se que os raios cósmicos primários são prótons, porém a metodologia pode ser facilmente adaptada e aplicada para o caso de núcleos (A > 1), adicionando-se outro processo de perda de energia, a fotodesintegração.

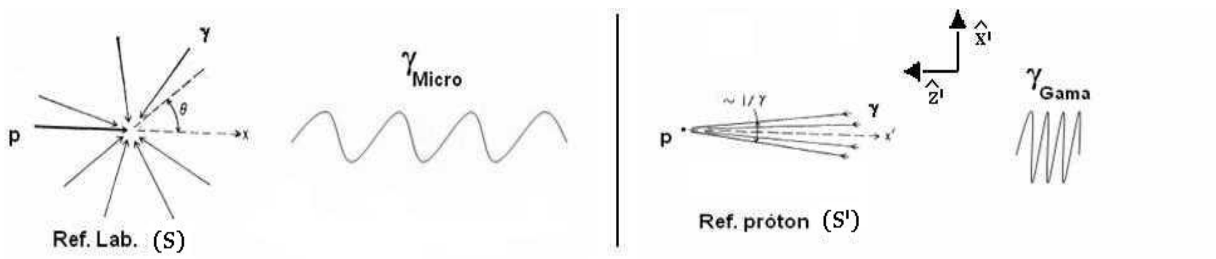

Fig. 3.2: Interação entre a RCF e um próton relativístico. À esq., no referencial do laboratório e à dir. no referencial de repouso do próton.

3.1.1 Produção de pares e^-e^+

Este processo ocorre devido à interação eletromagnética de um fóton e um *quark* constituinte de um núcleon, conforme figura 3.3.

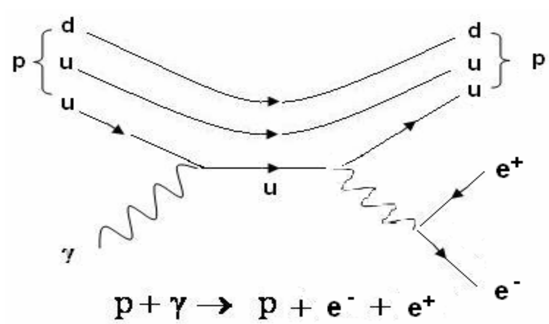

Fig. 3.3: Diagrama de *Feynman* para a produção de pares e^-e^+.

Considere no referencial laboratório S[viii] um próton altamente relativístico com energia E interagindo com um fóton da RCF incidente num ângulo θ e com energia ε. No referencial de

[viii] O referencial laboratório é aquele no qual a RCF é uma radiação isotrópica de corpo negro com temperatura T.

repouso do próton S', o fóton incide com energia ε'. A relação entre ε e ε' é devidamente obtida pela transformação de Lorentz:

$$\varepsilon' = \gamma\varepsilon(1+\beta\cos\theta) \ . \tag{3.1}$$

A energia mínima do fóton em S' para ocorrer a reação é $\varepsilon'_{min} = 2m_ec^2$. Após a interação, o fóton é aniquilado e surge o par elétron-pósitron. No referencial S', o elétron possui energia E'_- e ângulo de saída θ'_-, já o pósitron, E'_+ e θ'_+, respectivamente (cf.figura 3.4). As aproximações a serem feitas são: i) Despreza-se a energia de recuo do próton, pois a inelasticidade da reação é muito pequena ($K \sim m_e/m_p \sim 10^{-3}$); ii) Todas as colisões são frontais no referencial S', pois como γ >>1 e $\theta' \sim 1/\gamma$, então $\theta' \to 0$; iii) Utiliza-se a aproximação de Born em primeira ordem, de forma que e^- e e^+ são idênticos na interação com o núcleon.

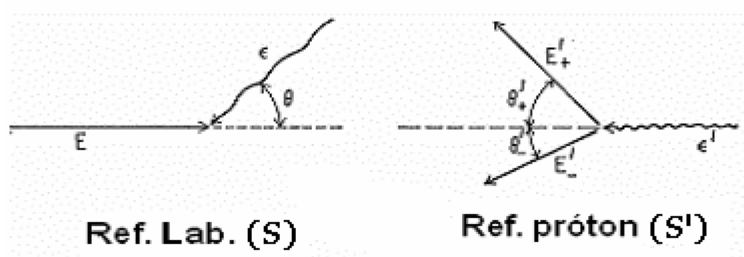

Fig. 3.4: Esquema da geometria da interação em ambos os referenciais.

O objetivo é obter as perdas de energia do próton. Em S, a taxa de perda de energia do próton é igual à taxa com que os elétrons e os pósitrons ganham energia menos a taxa com que a energia é perdida pelos fótons. Entretanto, com $\varepsilon << m_ec^2$, esta última contribuição é insignificante e portanto tem-se:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{dE_-}{dt} + \frac{dE_+}{dt} = \frac{d}{dt}(E_- + E_+) \ . \tag{3.2}$$

O *quadrimomentum* total P' no referencial S' após a interação é obtido:

$$\left.\begin{aligned} P'_{e^+} &= \left(\frac{E'_+}{c}, +P'_+ sen\theta'_+, 0, P'_+ \cos\theta'_+ \right) \\ P'_{e^-} &= \left(\frac{E'_-}{c}, -P'_- sen\theta'_-, 0, P'_- \cos\theta'_- \right) \end{aligned}\right\} \mathrm{P}' = \left(\frac{E'_- + E'_-}{c}, 0, 0, P'_+ \cos\theta'_+ + P'_- \cos\theta'_- \right). \quad (3.3)$$

Pela devida transformação de Lorentz, pode-se calcular a componente tipo tempo do *quadrimomentum* em S a partir da eq(3.3):

$$P_0 = \gamma\left(P'_0 - \beta P'_3\right) \Rightarrow \frac{E_+ + E_-}{c} = \gamma\left[\frac{E'_+ + E'_-}{c} - \beta\left(P'_+ \cos\theta'_+ + P'_- \cos\theta'_-\right)\right],$$

$$\therefore \quad E_+ + E_- = \gamma\left[E'_+ + E'_- - \beta c\left(P'_+ \cos\theta'_+ + P'_- \cos\theta'_-\right)\right]. \quad (3.4)$$

Substituindo eq(3.4) na eq(3.2) e considerando $dt'/dt = 1/\gamma$,

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt'}\left[E'_+ + E'_- - \beta c\left(P'_+ \cos\theta'_+ + P'_- \cos\theta'_-\right)\right]. \quad (3.5)$$

Pela aproximação iii, $E'_+ = E'_-$ e $P'_+ \cos\theta'_+ = P'_- \cos\theta'_-$. Assim, fazendo $\beta \to 1$, a eq(3.5) fica:

$$-\frac{dE}{dt} = 2\frac{d}{dt'}\left(E'_- - cP'_- \cos\theta'_-\right) = 2\frac{d\Delta'_-}{dt'}, \quad (3.6)$$

$$\text{com} \quad \Delta'_- = E'_- - cP'_- \cos\theta'_- \quad . \quad (3.7)$$

Expressando a eq(3.6) em função da distância propagada ($dx' = cdt'$ e $dx = cdt$), então:

$$-\frac{dE}{dx} = 2\frac{d\Delta'_-}{dx'}. \quad (3.8)$$

No referencial S', o próton assiste continuamente a aniquilação de fótons e o surgimento, a cada interação, de duas partículas, cada uma com energia Δ'_-. Neste referencial, portanto, o processo $\gamma \to e^- + e^+$ é totalmente inelástico. Assim, sendo N_I o número de interações, o ganho de energia da "partícula" Δ'_- por interação é $d\Delta'_- / dN_I = \Delta'_-$. Sendo N o número de fótons, tem-se que o número de fótons "varridos" por um elemento de área dA é proporcional ao número de colisões num elemento de área (seção de choque) $d\sigma$, i.e, $dA = (dN/dN_I)d\sigma$. Para um dado $\varepsilon', E'_{-}\ e\ \theta'_{-}$, tem-se então:

$$\frac{d\Delta'_{-}}{dx'} = \frac{d\Delta'_{-}}{dV'}\frac{dV'}{dx'} = \frac{dN}{dV'}\frac{d\Delta'_{-}}{dN}dA' = \frac{dN}{dV'}\frac{d\Delta'_{-}}{dN}\frac{dN}{dN_I}d\sigma = \frac{dN}{dV'}d\sigma\frac{d\Delta'_{-}}{dN_I} = dnd\sigma\frac{d\Delta'_{-}}{dN_I} = dnd\sigma\,\Delta'_{-}$$

$$\therefore \quad \frac{d\Delta'_{-}}{dx'} = n(\varepsilon')d\varepsilon'\frac{d\sigma}{dE'_{-}d\cos\theta'_{-}}dE'_{-}d\cos\theta'_{-}\Delta'_{-}\,, \qquad (3.9)$$

onde $n(\varepsilon') = dn/d(\varepsilon')$. A eq(3.9) precisa ser integrada em todas as contribuições de $\varepsilon', E'_{-}\ e\ \theta'_{-}$, resultando em:

$$\frac{d\Delta'_{-}}{dx'} = \int_{2m_ec^2}^{\infty} n'(\varepsilon')d\varepsilon' \int_{mc^2}^{\varepsilon'-mc^2} dE'_{-} \int_{-1}^{1} \frac{d\sigma}{d\cos\theta'_{-}dE'_{-}}\Delta'_{-}\,d\cos\theta'_{-}\,. \qquad (3.10)$$

Agora substituindo eq(3.10) na eq(3.8),

$$-\frac{dE}{dx} = 2\int_{2m_ec^2}^{\infty} n'(\varepsilon')d\varepsilon' \int_{m_ec^2}^{\varepsilon'-m_ec^2} dE'_{-} \int_{-1}^{1} \frac{d\sigma}{d\cos\theta'_{-}dE'_{-}}\Delta'_{-}d\cos\theta'_{-}\,. \qquad (3.11)$$

É necessário passar $n'(\varepsilon')$ para o referencial S. Pode-se mostrar (cf. apêndice 1) que a seguinte relação é válida:

$$n'(\varepsilon')\,d\varepsilon' = n(\varepsilon)\,d\varepsilon\int_{\theta}\frac{\gamma(1+\cos\theta)}{2}\,d\cos\theta \quad . \qquad (3.12)$$

A eq(3.12) fornece a transformação entre ε' e ε. Os limites de integração da eq(3.11) se transformam assim:

$$\varepsilon'_{min} = 2m_ec^2 = \gamma\varepsilon(1+(\cos\theta)_{min}) \ \therefore\ (\cos\theta)_{min} = \left(\frac{2m_ec^2}{\gamma\varepsilon}\right)-1,\ (\cos\theta)_{max} = 1$$

$$\varepsilon_{min} = \frac{\varepsilon'_{min}}{\gamma(1+\cos\theta_{max})} = \frac{2m_ec^2}{2\gamma} \quad \therefore \qquad \varepsilon_{min} = \frac{m_ec^2}{\gamma},\ \ \varepsilon_{max} = \infty \qquad (3.13)$$

Substituindo a eq(3.13) e a eq(3.12) na eq(3.11),

$$-\frac{dE}{dx}=\gamma\int_{m_ec^2/\gamma}^{\infty}n(\varepsilon)d\varepsilon\int_{(2m_ec^2/\gamma\varepsilon)-1}^{1}(1+\cos\theta)d\cos\theta\int_{m_ec^2}^{\varepsilon'-m_ec^2}dE'_-\int_{-1}^{1}\frac{d\sigma}{d\cos\theta'_-dE'_-}\Delta'_-d\cos\theta'_- \ . \qquad (3.14)$$

Expressando agora E'_- em unidades de m_ec^2 e fazendo as seguintes transformações:

i) $$E'_-\rightarrow m_ec^2E'_-,\ k'=\varepsilon'/m_ec^2\ \therefore \int_{m_ec^2}^{\varepsilon'-m_ec^2}dE'_-\ldots\rightarrow m_ec^2\int_1^{k'-1}dE'_-\ldots,$$

ii) $$\xi=\frac{2\gamma}{m_ec^2}\varepsilon\ \therefore \int_{m_ec^2/\gamma}^{\infty}d\varepsilon\ldots\rightarrow\frac{m_ec^2}{2\gamma}\int_2^{\infty}d\xi\ldots,$$

iii) $$(1+\cos\theta)=\frac{\varepsilon'}{\gamma\varepsilon}=\frac{2k'}{\xi},\ d\cos\theta=\frac{2}{\xi}dk'\ \ (k'\ fixo)\ \therefore \int_{\frac{2m_ec^2}{\gamma\varepsilon}-1}^{1}(1+\cos\theta)d\cos\theta=\frac{4}{\xi^2}\int_2^{\xi}k'dk',$$

iv) $$A(k',E'_-)=\frac{2k'}{\alpha r_0^2}\int_{-1}^{1}d\cos\theta'_-\ \Delta'_-\frac{d\sigma}{dE'_-d\cos\theta'_-}\ , \qquad (3.15)$$

onde α é a constante de estrutura fina e r_0 o raio clássico do elétron, então a eq(3.14) fica:

$$-\frac{dE}{dx}=\alpha r_0^2(m_ec^2)^2\int_2^{\infty}\frac{d\xi}{\xi^2}n\left(\frac{m_ec^2\xi}{2\gamma}\right)\int_2^{\xi}dk'\int_1^{k'-1}dE'_-A(k',E'_-)\ . \qquad (3.16)$$

A seção de choque diferencial da produção de pares é a conhecida seção de *Bethe-Heitler*,[27] podendo ser determinada no formalismo covariante da Eletrodinâmica Quântica.[28] Para o cálculo da função adimensional $A(k',E'_-)$ dada pela eq(3.15) é necessária a seção de choque diferencial da produção de pares integrada sobre o ângulo do pósitron θ'_+, o que foi feito por *Gluckstern* e *Hull*.[29] Foi utilizado então este resultado na determinação de $A(k',E'_-)$.[26]

Definindo-se (cf. figura 3.5)

$$\Phi(\xi)=\int_2^{\xi}dk'\int_1^{k'-1}dE'_-A(k',E'_-)\ , \qquad (3.17)$$

então a eq(3.16) fica expressa como:

$$-\frac{dE}{dx} = \alpha\, r_0^2 \left(m_e c^2\right)^2 \int_2^\infty \frac{\Phi(\xi)}{\xi^2} n\left(\frac{m_e c^2 \xi}{2\gamma}\right) d\xi \,. \tag{3.18}$$

A função $\Phi(\xi)$ está relacionada com o produto da seção de choque total e a inelasticidade da reação, como será visto na próxima seção. A eq(3.18) pode ser generalizada para o caso do alvo ser um núcleo de número atômico Z ≠ 1 (note que $n(a) = dn/da$):

$$-\frac{dE}{dx} = \alpha\, r_0^2 Z^2 m_e c^2 \int_2^\infty \frac{\Phi(\xi)}{\xi^2} n\left(\frac{\xi}{2\gamma}\right) d\xi \,. \tag{3.19}$$

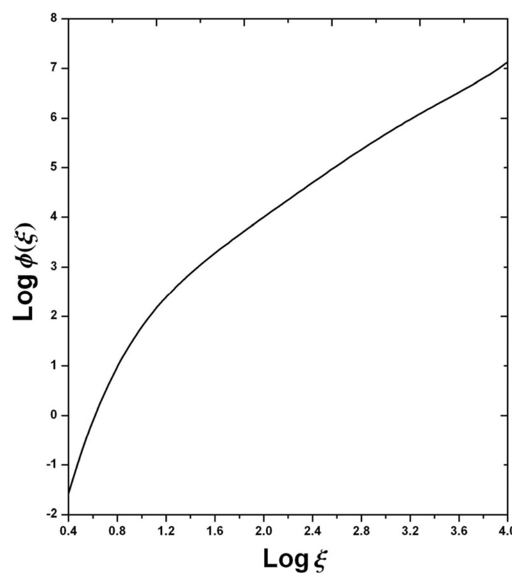

Fig. 3.5: Função $\Phi(\xi)$ dada pela eq(3.17).

Considerando agora a densidade média de fótons por unidade de energia da RCF dada pela distribuição de Planck:

$$n(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^2 \left[(\hbar c)^3 \left(e^{\frac{\varepsilon}{k_b T}} - 1\right)\right]^{-1} \,, \tag{3.20}$$

e definindo-se a variável ν:

$$\nu = \frac{m_e c^2}{2\gamma\, k_b T} \quad , \tag{3.21}$$

a eq(3.18) se torna:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{\alpha\, r_0^2 \left(m_e c^2 k_b T\right)^2}{\pi^2 (\hbar c)^3} f(\nu), \tag{3.22}$$

onde

$$f(\nu) = \nu^2 \int_0^\infty \Phi(\xi)\left(e^{\xi\nu} - 1\right)^{-1} d\xi \, . \tag{3.23}$$

A função $f(\nu)$, graficada na figura 3.6, é proporcional à taxa de perda de energia. A eq(3.22) fornece a taxa de perda de energia de um próton devido às sucessivas interações de produção de pares e^-e^+, na aproximação de perda contínua de energia. Como toda interação, tal processo é na realidade discreto, mas a baixa inelasticidade do processo permite tratar as perdas continuamente, segundo a eq(3.22).

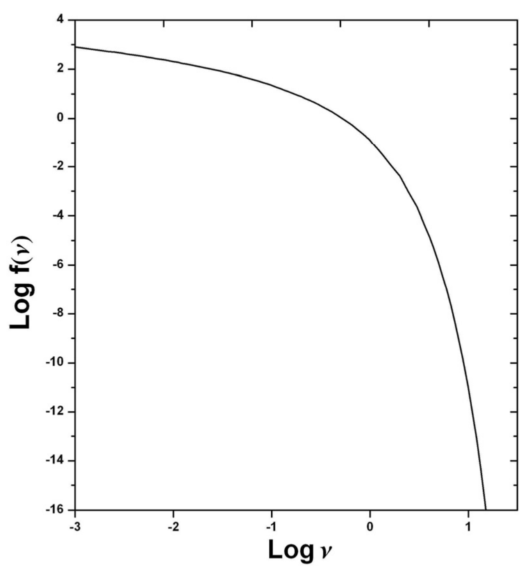

Fig. 3.6: Função $f(\nu)$ dada pela eq(3.23).

3.1.2 FOTOPRODUÇÃO DE PÍONS

O processo de fotoprodução de píons é o mais importante na determinação do corte GZK, como será visto. Há vários canais possíveis das reações hadrônicas, mas os principais são as ressonâncias (cf. exemplo na figura 3.7), seguidas pelas reações diretas. O primeiro passo é determinar, no referencial de repouso do próton, a energia mínima que um fóton precisa ter para que ocorra a reação.

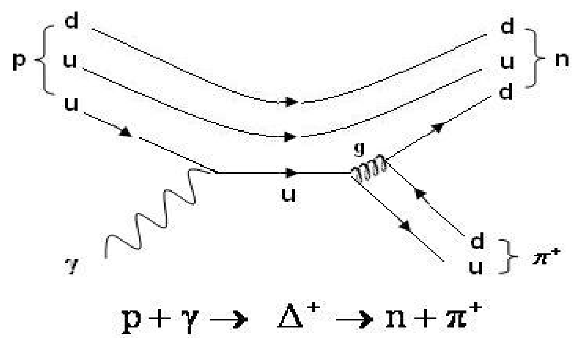

Fig. 3.7: Diagrama de *Feynman* para uma das ressonâncias.

Seja S o referencial do laboratório, S' o referencial do próton e S* o referencial centro de momentum. Fazendo $c = 1$, em S* a energia total $\sqrt{s}$ é dada por:

$$s = (\varepsilon^* + E_p^*)^2 - (\vec{P}_\gamma + \vec{P}_\gamma)^2 = (\varepsilon^* + E_p^*)^2 \quad , \qquad (3.24)$$

onde ε^* denota a energia do fóton e E_p^* a do próton. Em S',

$$s = (P'_{\mu\gamma} + P'_{\mu p})^2 = (P'_\mu\ P'^\mu)_\gamma + (P'_\mu\ P'^\mu)_p + 2P'_{\mu\gamma}\ P'^\mu_p = m_p^2 + 2m_p\varepsilon' \ . \qquad (3.25)$$

Como o fator de Lorentz do referencial centro de *momentum* em relação ao referencial laboratório é dado por: [30]

$$\gamma_{CM} = \frac{E_p + \varepsilon}{\sqrt{s}} \ , \qquad (3.26)$$

então para o próton relativístico $E_p >> \varepsilon$, logo:

$$\gamma_{CM} = \frac{E_p + \varepsilon}{\sqrt{s}} \cong \frac{E_p}{\sqrt{s}} = \frac{E_p}{\sqrt{m_p^2 + 2m_p\varepsilon'}} . \tag{3.27}$$

Sendo a e b os estados finais das partículas produzidas, então:[30]

$$E^*_{a,b} = \frac{s + m_{a,b}^2 - m_{b,a}^2}{2\sqrt{s}} . \tag{3.28}$$

A relação entre as energias médias de a e b em S e S* é dada por:

$$\left\langle E_{a,b} \right\rangle = \gamma_{CM} E^*_{a,b} = \frac{E_p}{\sqrt{s}}\left(\frac{s + m_{a,b}^2 - m_{b,a}^2}{2\sqrt{s}}\right) = \frac{E_p}{2}\left(1 + \frac{m_{a,b}^2 - m_{b,a}^2}{s}\right). \tag{3.29}$$

Para o caso de produção de um píon, a energia final média E_{pf} do próton após a interação é:

$$\left\langle E_{pf} \right\rangle = \frac{E_p}{2}\left(1 + \frac{m_p^2 - m_\pi^2}{s}\right) . \tag{3.30}$$

O fator de inelasticidade média do próton é:

$$K_p = \left|\frac{\Delta E_p}{E_p}\right| = 1 - \frac{\left\langle E_{pf} \right\rangle}{E_p} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m_p^2 - m_\pi^2}{s}\right) . \tag{3.31}$$

Pela eq(3.25) e considerando a invariância de s, a energia mínima do fóton em S' para formar N píons neutros (i.e., $\vec{V}^*_{pf} = \vec{V}^*_{pion} = 0$ em S*) é:

$$\begin{aligned} m_p^2 + (Nm_\pi)^2 + 2Nm_\pi m_p &= m_p^2 + 2m_p\varepsilon'_{\min,N\pi} \\ \Rightarrow \varepsilon'_{\min,N\pi} &= Nm_\pi\left(1 + \frac{Nm_\pi}{2m_p}\right). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Para o caso N = 1, pela eq(3.25), eq(3.31) e eq(3.32), tem-se que a energia mínima é $\varepsilon'_{min} = 145 MeV$ e a inelasticidade média mínima é $(K_p)_{min} = 0{,}126.$ Este valor é muito alto, pois a cada interação o próton perde no mínimo 12,6% de sua energia, evidenciando o caráter altamente discreto desta interação. À medida que *ε'* (e portanto *s*) aumenta(m), *K* médio tende assintoticamente a 0,5!

Retomando eq(3.17) e eq(3.19), pode-se mostrar[31] que $\Phi(\xi)$, dada pela eq(3.17), também pode ser expressa como:

$$\Phi(\xi) = \frac{m_p}{m_e}\left(\alpha r_0^2 Z^2\right)^{-1} \int_2^{\xi} k' \sigma(k') K(k') dk' , \tag{3.33}$$

onde *K(k')* é a inelasticidade e $\sigma(k')$ não é a seção de choque diferencial e sim a total. Substituindo este resultado na eq(3.19),

$$-\frac{dE}{dx} = m_p c^2 \int_2^{\infty} n\left(\frac{\xi}{2\gamma}\right) \frac{d\xi}{\xi^2} \int_2^{\xi} k' \sigma(k') K(k') dk' . \tag{3.34}$$

A equação acima tem um caráter geral e pode ser aplicada ao processo de fotoprodução de píons, ajustando-se os devidos limites e variáveis:

$$-\frac{dE}{dx} = m_p c^2 \int_{\xi_{min}}^{\infty} n\left(\frac{\xi}{2\gamma}\right) \frac{d\xi}{\xi^2} \int_{k'_{min}}^{\xi} k' \sigma(k') K(k') dk' \ , \tag{3.35}$$

$$\xi = \frac{2\gamma\varepsilon}{mc^2}, d\xi = \frac{2\gamma}{mc^2} d\varepsilon \Rightarrow \frac{d\xi}{\xi^2} = \frac{mc^2}{2\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2},$$

$$k' = \frac{\varepsilon'}{mc^2}, dk' = \frac{d\varepsilon'}{mc^2} \Rightarrow k' dk' = \frac{d\varepsilon}{\left(mc^2\right)^2},$$

$$n\left(\frac{\xi}{2\gamma}\right) = n\left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right) = mc^2 n(\varepsilon),$$

$$k'_{max} = \xi \Rightarrow \frac{\varepsilon'_{max}}{mc^2} = \frac{2\gamma}{mc^2}\varepsilon \quad \therefore \quad \varepsilon'_{max} = 2\gamma\varepsilon,$$

$$\varepsilon_{min} = \frac{\varepsilon'_{min}}{2\gamma},$$

$$\therefore \qquad -\frac{dE}{dx}=\frac{m_p c^2}{2\gamma}\int_{\varepsilon'_{min}/2\gamma}^{\infty} n(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}\int_{\varepsilon'_{min}}^{2\gamma\varepsilon}\varepsilon'\,\sigma(\varepsilon')K(\varepsilon')d\varepsilon' , \tag{3.36}$$

onde ε'_{min} é dado pela eq(3.32). Considerando a distribuição térmica da RCF, eq(3.20),

$$-\frac{dE}{dx}=\frac{E}{2(\gamma\pi)^2(\hbar c)^3}\int_{\varepsilon'_{min}/2\gamma}^{\infty}\left(e^{\frac{\varepsilon}{k_bT}}-1\right)^{-1}d\varepsilon\int_{\varepsilon'_{min}}^{2\gamma\varepsilon}\varepsilon'\,\sigma(\varepsilon')K(\varepsilon')d\varepsilon' . \tag{3.37}$$

A eq(3.37) fornece a taxa média com que o próton perde energia por distância propagada. Entretanto, como mencionado, este é um processo altamente discreto devido à natureza estocástica das reações e à grande inelasticidade. Uma abordagem mais precisa será utilizada na seção 3.2.1.; por ora pode-se considerar um resultado aproximado[32,33] da eq(3.37), válido para energias E do próton até 300 EeV:

$$-\frac{dE}{dx}=(3{,}45.10^{-36}cm^2/eV)\frac{2\gamma(k_bT)^3(\varepsilon'_{min})^2}{\pi^2(\hbar c)^3}e^{\frac{-\varepsilon'_{min}}{2\gamma k_bT}} . \tag{3.38}$$

3.1.3 Expansão adiabática do universo

O último processo a ser considerado é o único de fato contínuo, a expansão adiabática do Universo ou apenas *redshift* cosmológico. A Cosmologia é um campo muito rico e cheio de sutilezas, havendo uma variada literatura sobre o assunto,[34,35,36,37] cada uma com definições e notações próprias, principalmente sobre as várias definições de distância que se mede em Cosmologia.[37] Visando manter o foco do presente trabalho, esta seção não entra no mérito de descrever detalhadamente o embasamento teórico, indo direto para o cálculo das perdas de energia (ficando para leitura as referências indicadas).

A perda de energia de partículas devido ao *redshift* cosmológico pode ser associada à perda de energia interna dU de um gás com densidade de partículas n e temperatura T, realizando trabalho ao expandir de um volume V para um volume $V + dV$:

$$dU = -PdV \ . \tag{3.39}$$

Sendo a pressão e a energia média do gás dadas por

$$P = nk_bT, \quad E = 3k_bT \ , \tag{3.40}$$

então a eq(3.39) fica:

$$dU = -nEdV/3 \ . \tag{3.41}$$

Em contrapartida, a perda dU do gás é a soma das perdas individuais de energia de suas N partículas, i.e, $dU = NdE$, então eq(3.41) é reescrita como:

$$dE = -\frac{nE}{3N}dV \overset{n.E\ fixo}{\Rightarrow} \frac{dE}{dt} = -\frac{nE}{3N}\frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = -\frac{E}{3V}\frac{dV}{dt} \ . \tag{3.42}$$

Sendo $\vec{v}$ a velocidade de expansão e $\left(\vec{\nabla}V\right)_{\vec{v}\ \text{fixo}} = 0$, então pela derivada convectiva:

$$\frac{d}{dt}V(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\vec{v})\right)V(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial t}V(x,y,z) + \vec{\nabla}.(\vec{v}V(x,y,z)) = \vec{\nabla}.(\vec{v}V) = \left(\vec{\nabla}.\vec{v}\right)V \ , \tag{3.43}$$

e portanto a eq(3.42) fica:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{\left(\vec{\nabla}.\vec{v}\right)}{3}E \ . \tag{3.44}$$

Considere agora o modelo cosmológico de *Friedman-Lemaître* com a métrica de *Robertson-Walker*. Sendo R o fator de escala e r_c a coordenada radial comóvel, i.e., que permanece fixa para observadores comóveis independente da expansão do Universo, então

$$r_c = \frac{r}{R(t)} = constante \quad \Rightarrow \quad \frac{dr_c}{dt} = 0 \ , \tag{3.45}$$

Sendo Ω_m a densidade de matéria do Universo, Ω_Λ a densidade de energia escura (constante cosmológica) e o parâmetro de Hubble $H(z)$:

$$H(z) = \frac{\dot{R}}{R} = H_0\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda} \ , \tag{3.46}$$

então:
$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Rr}{R}\right) = \dot{R}\frac{r}{R} + R\frac{d}{dt}\left(\frac{r}{R}\right) = \dot{R}\frac{r}{R} + R\frac{dr_c}{dt} = \frac{\dot{R}}{R}r$$

$$\therefore \qquad v_r = H\,r \tag{3.47}$$

A eq(3.47) é a própria Lei de *Hubble*, onde v_r é a velocidade radial de afastamento e *r* é a distância comóvel, como será visto posteriormente. Portanto,

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right)\right] = 3H\ . \tag{3.48}$$

Substituindo a eq(3.48) na eq(3.44), tem-se a taxa de perda de energia pelo *redshift* cosmológico:

$$-\frac{dE}{dt} = HE\quad . \tag{3.49}$$

Sendo λ_a o comprimento de atenuação, i.e., a distância média em que, ao percorrê-la, a partícula perde essencialmente sua energia, e a função β a perda fracional de energia por unidade de comprimento, tem-se a seguinte relação:

$$\beta = \lambda_a^{-1} = \left|\frac{1}{E}\frac{dE}{dx}\right|\ . \tag{3.50}$$

$$\therefore \quad \beta_{redshift}(z) = H(z)/c\ . \tag{3.51}$$

A equação acima indica que $\beta_{redshift}$ independe da energia. De forma análoga, tem-se para a produção de pares e^-e^+ e também a fotoprodução de píons:

$$\beta_{pp}(E) = \left|\frac{1}{E}\frac{dE}{dx}\right|_{e+e-}, \tag{3.52}$$

$$\beta_{fp}(E) = \left|\frac{1}{E}\frac{dE}{dx}\right|_{fotopion}, \tag{3.53}$$

onde as taxas de perda de energia são dadas, respectivamente, por eq(3.22) e eq(3.38). Entretanto, no cálculo dessas duas perdas não se considerou até então efeitos cosmológicos, ou seja, são expressões válidas para a época atual, z = 0. Tendo em vista que tanto a temperatura quanto a energia dos fótons da Radiação Cósmica de Fundo dependem da época (z), assim como o volume, então a eq(3.52) e a eq(3.53) precisam ser corrigidas para cada z correspondente. A correção a ser feita é (cf. apêndice 2):

$$\beta_{pp,fp}(E,z) = (1+z)^3 \beta_0((1+z)E)_{pp,fp} \ , \tag{3.54}$$

onde $\beta_0((1+z)E)$ é a função original, não corrigida, mas calculada na energia "(1+ z)E". O efeito total dos três processos de perda de energia é portanto:

$$\beta_{total}(E,z) = [\lambda_a(E,z)_{total}]^{-1} = \beta_{pp}(E,z) + \beta_{fp}(E,z) + \beta_{redshift}(E,z) . \tag{3.55}$$

A figura 3.8 mostra a função β para cada um dos processos e o efeito total, assim como o comprimento de atenuação λ_a a que prótons altamente energéticos estão sujeitos atualmente (z = 0).

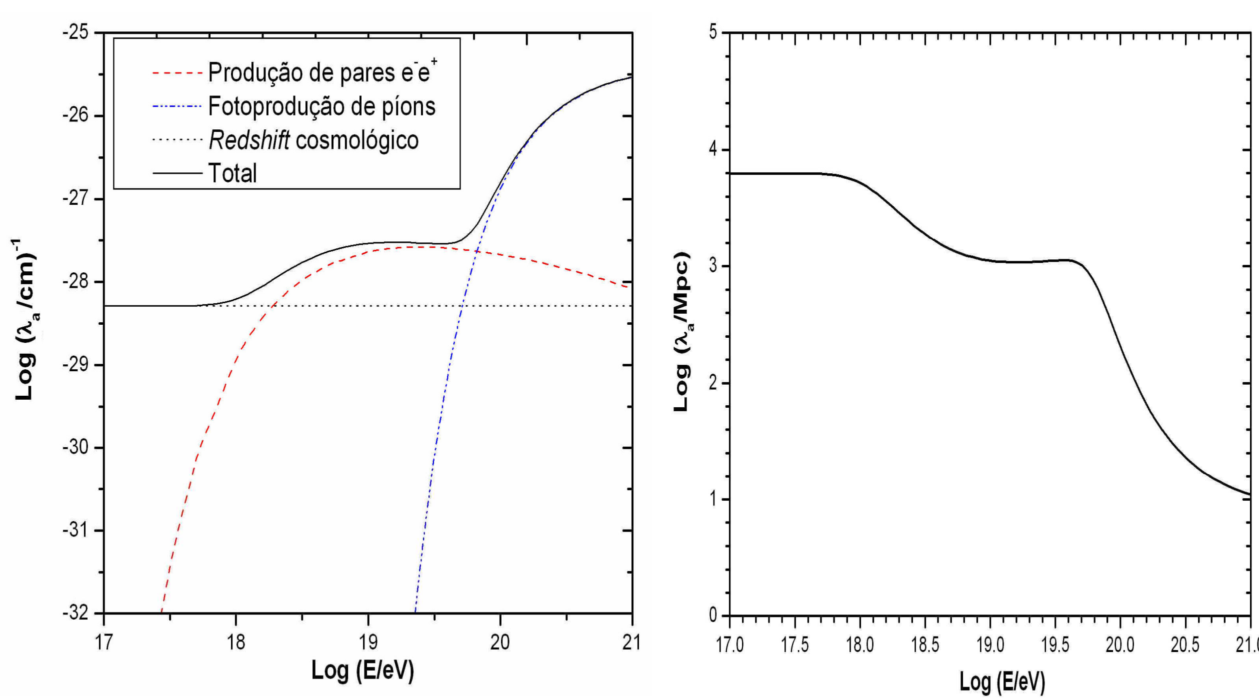

Fig.3.8: À esq., função β para cada um dos processos e o efeito conjunto. À dir, o correspondente comprimento de atenuação total (z =0).

É possível perceber claramente que cada efeito é predominante em certa faixa de energia: as perdas por *redshift* cosmológico são dominantes até energias da ordem de 1 EeV, a partir da qual os efeitos da produção de pares e^-e^+ atingem seu pico até energias ~ 50 EeV, e para energias acima a fotoprodução de píons passa a ser o grande agente causador da degradação de energia dos raios cósmicos. Nota-se ainda que partículas emitidas por fontes situadas até 10 Mpc[ix] podem chegar à Terra praticamente sem serem atenuadas, independente de sua energia. Considerando energias até 300 EeV (log(E/eV) ≈ 20,5), raios cósmicos provenientes de fontes situadas a uma distância de até 30Mpc praticamente não são atenuados. Esta é a região do super-aglomerado local de galáxias, região bastante ativa que pode ser responsável por parte do fluxo de raios cósmicos extragalácticos que chegam à Terra.[26]

O significado físico da figura 3.8 é crucial para compreensão sobre as alterações no fluxo de raios cósmicos e o aparecimento do corte GZK, pois a forma do fluxo propagado reproduz a do comprimento de atenuação, como será visto.

3.2 Simulações de Monte Carlo

As interações são processos estocásticos, mas conhecendo-se a função β, pode-se calcular, na aproximação de perda contínua, a energia que um próton perde ao se propagar por uma pequena distância D:

$$E_{perdida} = \int_{x_0}^{x_0+D} \frac{dE}{dx}dx = \int_{x_0}^{x_0+D} \beta E dx \approx \beta E D, \quad D \approx \lambda_1 << \lambda_a . \qquad (3.56)$$

Tal relação pode ser aplicada para as perdas por *redshift* e produção de pares e^-e^+, mas não para a fotoprodução de píons, pois seu livre caminho médio de interação λ_I é da ordem de

[ix] 1 pc ~3,26 anos-luz.

grandeza do caminho de atenuação λ_a. Tal peculiaridade decorre da alta inelasticidade do processo, o que requer uma abordagem teórica mais minuciosa, que servirá de base para a simulação de Monte Carlo.

3.2.1 A FOTOPRODUÇÃO DE PÍONS REVISITADA

Considere a reação $p+\gamma \rightarrow p+\pi^0$, em que no referencial laboratório um próton de energia inicial E_0 viajando na direção x interage com um fóton da RCF de energia ε, segundo um ângulo θ_0. Após a interação, o próton e o píon produzido saem, no referencial centro de *momentum*, diametralmente opostos segundo um ângulo θ_{CM} em relação à direção original do próton. As transformações de Lorentz de um *quadrimomentum* para quaisquer dois referenciais inerciais S e S'' em movimento relativo na direção x fornecem (para c = 1):

$$E = \gamma(\beta P_x'' + E'') \ . \tag{3.57}$$

Seja agora o referencial S'' o próprio referencial centro de *momentum* S*. As energias finais do próton e do píon em S (laboratório) são dadas por:

$$E_{p,\pi} = \gamma_{CM}\left(\beta_{CM}\left(P_x^*\right)_{p,\pi} + E_{p,\pi}^*\right) , \tag{3.58}$$

onde γ_{CM} *e* $E_{p,\pi}^*$ são dados pela eq(3.26) e eq(3.28). Como

$$\left(P_x^*\right)_p = -\left(P_x^*\right)_\pi = \left|\vec{P}\right| cos\,\theta_{CM} , \tag{3.59}$$

onde

$$\left|\vec{P}\right| = \sqrt{\frac{\left[s-\left(m_p+m_\pi\right)^2\right]\left[s-\left(m_p-m_\pi\right)^2\right]}{4s}} \ , \tag{3.60}$$

então a energia final do próton no laboratório é:

$$E_{pf} = \gamma_{CM}\left(\beta_{CM}\left|\vec{P}\right| cos\,\theta_{CM} + E_p^*\right), \tag{3.61}$$

sendo

$$\beta_{CM} = \sqrt{1-\gamma_{CM}^{-2}} \, . \tag{3.62}$$

Assim, ao contrário do que ocorre no referencial centro de *momentum*, a energia do próton no laboratório depende do ângulo de saída θ_{CM} . Como em S* este ângulo é isotrópico, então o ângulo médio de saída é $\theta_{CM} = \pi / 2$. Substituindo-se esse valor na eq(3.61), recupera-se eq(3.30), que é a perda média no ângulo de saída θ_{CM} do próton vista anteriormente. Como $s = s(\varepsilon') = s(\varepsilon, E, \theta_0)$, a inelasticidade K passa a ser uma função de quatro variáveis:

$$K(E_0, \varepsilon, \theta_0, \theta_{CM}) = 1 - \frac{E_{pf}(E_0, \varepsilon, \theta_0, \theta_{CM})}{E_0} \, . \tag{3.63}$$

Um melhor entendimento da dependência da inelasticidade com a energia do próton pode ser obtido com um simples algoritmo: supondo uma colisão frontal (θ = 0) e dada a energia inicial E do próton, sorteia-se a energia do fóton segundo a distribuição de Planck com a condição de que $\varepsilon > \varepsilon_{min}$, onde

$$\varepsilon_{min} = \frac{\varepsilon'_{min}}{2\gamma} = \frac{\varepsilon'_{min} m_p c^2}{2E} \cong \frac{145 MeV m_p c^2}{2E} \, . \tag{3.64}$$

Para um dado ângulo θ_{CM}, calcula-se a inelasticidade pela eq(3.63). Mantidos todos os parâmetros, repete-se o mesmo processo n vezes, variando apenas a energia do fóton, obtida a cada sorteio de uma distribuição de Planck. Tirando-se a média dos n valores de K, obtém-se uma inelasticidade (média sobre os fótons da RCF) para um dado E e θ_{CM}. Repete-se todo o processo variando-se θ_{CM} e depois a energia E, o que resulta em um mapeamento de K, conforme a figura 3.9. As curvas referentes aos ângulos $\theta_{CM} = 0$ *e* $\theta_{CM} = \pi$ são os envelopes do comportamento de K em função da energia do próton. A curva azul corresponde à inelasticidade média discutida anteriormente, sendo $\theta_{CM} = \pi/2$ e tendo como valor mínimo K = 0,126 e valor máximo assintótico K = 0,5. Para $\theta_{CM} = \pi$, um próton de energia $E = 10^{22}$ eV perde, em média, 90% de sua energia em apenas uma interação! Em compensação, se $\theta_{CM} = 0$, a interação passa a ser quase elástica para essa energia.

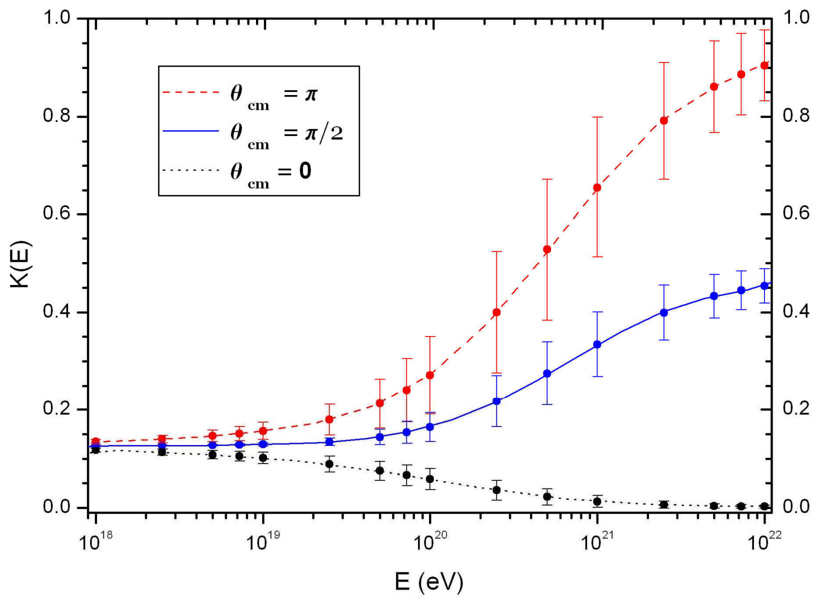

Fig. 3.9: Fator de inelasticidade K em função da energia E do próton antes da interação. Cada ponto é o resultado médio de 10^5 interações com fótons da RCF, cujas energias são sorteadas segundo a distribuição de Planck. As barras de erro representam o desvio padrão de cada ponto.

Da eq(3.36) e eq(3.50), obtém-se, com $\beta = v/c$, o comprimento de atenuação λ_a:

$$\lambda_a = \left|\frac{1}{E}\frac{dE}{dx}\right|^{-1} = \frac{1}{2\beta\gamma^2}\int_{\varepsilon_{min}}^{\infty} n(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}\int_{\varepsilon'_{min}}^{\varepsilon'_{max}} \varepsilon'\sigma(\varepsilon')K(\varepsilon')d\varepsilon' \;. \tag{3.65}$$

O comprimento de interação λ_I é a distância entre duas interações sucessivas. Se dN/dx é a taxa de interações por unidade de comprimento, então

$$\lambda_I = \left(\frac{dN}{dx}\right)^{-1}. \tag{3.66}$$

Sendo dE/dN a taxa de perda de energia por interação, então tem-se da definição da inelasticidade:

$$K = \frac{(\Delta E)_{1\ interação}}{E} = \frac{1}{E}\frac{dE}{dN} = \left|\frac{1}{E}\frac{dE}{dx}\right| \Big/ \frac{dN}{dx} = \frac{\lambda_a^{-1}}{\lambda_I^{-1}} \Rightarrow \lambda_a = \frac{\lambda_I}{K} \ . \tag{3.67}$$

Da eq(3.67), tem-se que $\lambda_I \leq \lambda_a$ sempre. Assim, o comprimento (ou livre caminho médio) de interação pode ser entendido como sendo o comprimento de atenuação no caso especial em que K = 1, ou seja, após a primeira interação a partícula perde toda sua energia e portanto a distância propagada até então é igual ao livre caminho médio de interação. Logo, fazendo K = 1 na eq(3.65), obtém-se o caminho de interação:

$$\lambda_1(E) = \frac{1}{2\beta\gamma^2}\int_{\varepsilon_{min}}^{\infty} n(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}\int_{\varepsilon'_{min}}^{\varepsilon'_{max}} \varepsilon'\,\sigma(\varepsilon')d\varepsilon' \,. \tag{3.68}$$

Note que a integral em ε' deve ser feita para um dado E e ε, portanto $d\varepsilon' = \gamma\varepsilon\beta\ d\ cos\,\theta$. Assim, utilizando a eq(3.1), a eq(3.68) pode facilmente ser reescrita como:

$$\lambda_1(E) = \int_{\varepsilon'_{min}/[\gamma(1+\beta)]}^{\infty} n(\varepsilon)d\varepsilon \int_{-1}^{1} \frac{(1+\beta\,cos\,\theta)}{2}\sigma(s)d\ cos\,\theta \ . \tag{3.69}$$

Para determinação da seção de choque total do processo $p + \gamma \rightarrow hádrons$ no referencial de repouso do próton foram utilizados dados experimentais[38] que foram ajustados (cf. figura 3.10) em quatro regiões distintas porém consecutivas. Com este resultado, obteve-se o comprimento de interação da fotoprodução de píons pela eq(3.69), conforme a figura 3.11. Sua forma se assemelha à forma do comprimento de atenuação desta mesma interação.

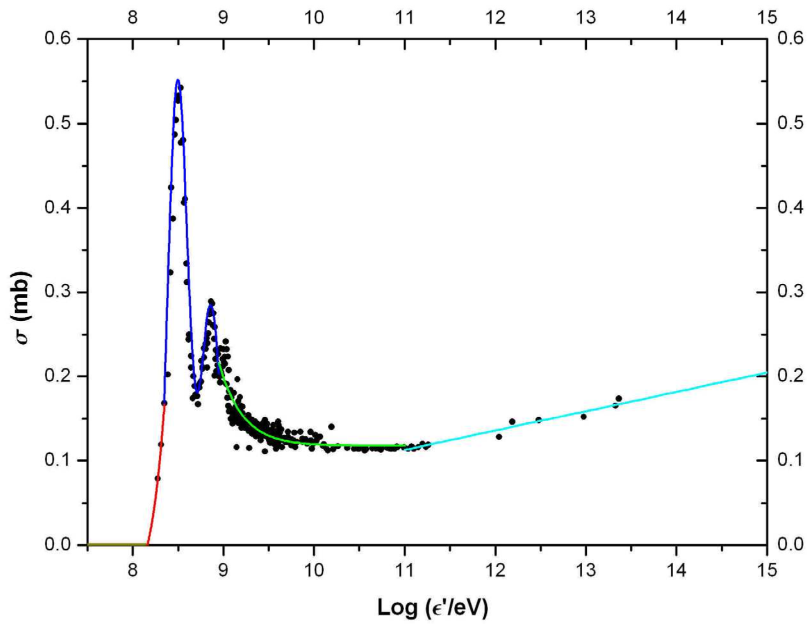

Fig. 3.10: Seção de choque total obtida para $p+\gamma \rightarrow hádrons$. O maior pico é causado pela ressonância $\Delta^{+}(1232)$. (Fonte dos pontos experimentais: referência 38).

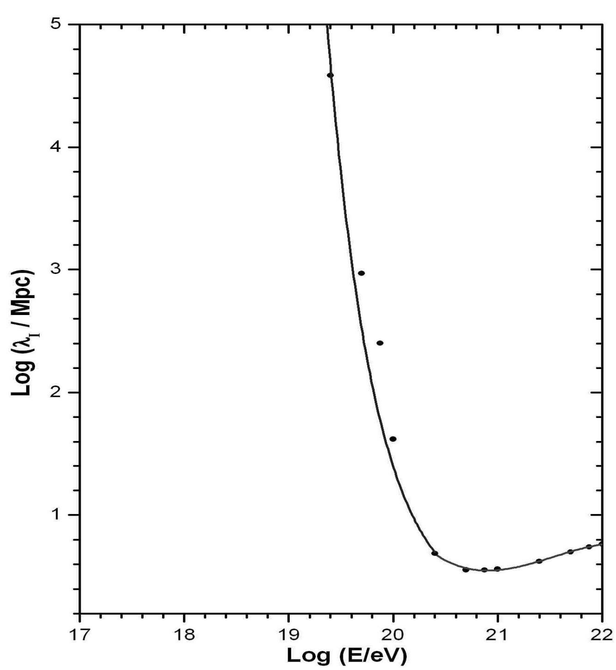

Fig. 3.11: Comprimento de interação calculado para a fotoprodução de píons (todos os canais hadrônicos), em função da energia E do próton.

3.2.2 O ALGORITMO DE PROPAGAÇÃO

O primeiro passo é atribuir a energia inicial do próton a ser propagado. O espectro de injeção é suposto uma lei de potência, porém corrigida com um fator de corte, pois é improvável que as estruturas responsáveis pela emissão de raios cósmicos ultra-energéticos, sejam quais forem, consigam fazê-lo à mesma taxa indefinidamente na energia. Assim, a energia do próton é sorteada segundo:

$$\Phi_0(E) = AE^{-\gamma} e^{-\frac{E}{E_{corte}}} \ , \tag{3.70}$$

onde foi adotado $E_{corte} = 10^{21,5}$ eV para a fonte.[x] Considerando que o espectro induzido por uma distribuição uniforme de fontes é quase indistinguível do induzido pela distribuição em larga escala das galáxias,[39] foi considerada uma distribuição espacial uniforme de fontes sem evolução, i.e., luminosidade constante:

$$n_{fontes} = \frac{dN^0_{fontes}}{dV} = constante \tag{3.71}$$

A etapa seguinte consiste em determinar por sorteio a distância da fonte emissora do próton. Considere inicialmente um universo euclidiano estático. Para uma dada energia E, a probabilidade de um próton ter vindo de uma distância entre r e $r + dr$ é dada pela razão entre o número de prótons provenientes de uma distância radial entre r e $r + dr$ e o número total de prótons provenientes de todas as distâncias:

$$\frac{dP}{dr}dr = \frac{\frac{dN^0_{protons}}{dr}dr}{\int \frac{dN^0_{protons}}{dr}dr} = \frac{\frac{dN^0_{protons}}{dN^0_{fontes}} \frac{dN^0_{fontes}}{dr} dr}{N^0_{protons\ total}} \ . \tag{3.72}$$

[x] Tal valor é comumente usado na literatura, pois para energias de corte abaixo deste valor um segundo efeito de corte à semelhança do corte GZK seria claramente manifestado no espectro observado. Para valores maiores, os efeitos da presença de tal corte de aceleração seriam praticamente nulos na região de energia do corte GZK.

Sendo n_f a densidade espacial de fontes, então:

$$n_f = \frac{dN^0_{fontes}}{dV} = \frac{dN^0_{fontes}}{r^2 dr d\Omega} \Rightarrow \left(\frac{dN^0_{fontes}}{dr}\right)_{\substack{todos\\ \hat{a}ngulos}} = n_f 4\pi\, r^2 \ . \qquad (3.73)$$

Como a intensidade do fluxo cai com o quadrado da distância r_{pf} entre o próton e sua fonte, então:

$$\frac{dN^0_{protons}}{dN^0_{fontes}} = \frac{\Phi_0}{4\pi\ r^2_{pf}} \ . \qquad (3.74)$$

Substituindo-se a eq(3.74) e a eq(3.73) na eq(3.72), e considerando que quando o próton chega à Terra sua distância r_f à fonte se iguala à distância r entre a fonte e a Terra, obtém-se:

$$\frac{dP}{dr}dr = \frac{\Phi_0 n_f}{N^0_{\substack{protons\\ total}}}\left(\frac{r}{r_{pf}}\right)^2 dr = \frac{\Phi_0 n_f}{N^0_{\substack{protons\\ total}}} dr \ . \qquad (3.75)$$

Segundo eq(3.75), a probabilidade do próton ter vindo da região entre r e $r + dr$ depende do produto do fluxo da fonte pela densidade de fontes. Pela eq(3.70) e eq(3.71), estas grandezas não possuem nenhuma dependência em r, logo:

$$\frac{dP}{dr}dr = constante \ . \qquad (3.76)$$

Este resultado indica que fontes em diferentes distâncias possuem a mesma probabilidade de gerar um dado evento, considerando a mesma energia. Este mesmo raciocínio continua válido para um universo plano em expansão, desde que a distância r a ser considerada seja a distância comóvel D_c, que acompanha a expansão. Considere a métrica de *Robertson-Walker*, expressa em função das coordenadas comóveis angulares e radial:

$$ds^2 = (cdt)^2 - R^2(t)\left[\frac{dr_c^{\ 2}}{1-kr_c^2} + r_c^2\left(d\theta_c^{\ 2} + sen^2\theta_c\, d\varphi_c^{\ 2}\right)\right], \qquad (3.77)$$

onde *R(t)* é o fator de escala e *k* a constante de curvatura, que é nula para um universo plano. A trajetória de uma galáxia comóvel permanece fixa no espaço, i.e., possui velocidade peculiar nula, e portanto segue estritamente a lei de *Hubble*. Em geral, corpos possuem velocidade peculiar não nula, de modo que suas coordenadas comóveis evoluem no tempo. Considerando a trajetória dos prótons como se fossem a de fótons, pois $\gamma \sim 10^{11}$ para energias da ordem de 10^{20} eV , então suas trajetórias no espaço-tempo seguem uma geodésica. Assim, sua propagação radial $(d\theta_c \; e \; d\varphi_c = 0)$ é descrita por:

$$(cdt)^2 - R^2(t)dr_c = 0 \quad \Rightarrow \quad r_c = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{R(t)}, \tag{3.78}$$

sendo t_e a época da emissão e t_0 a época presente. A coordenada comóvel r_c se relaciona com a distância comóvel D_c como:

$$D_c = R(t_0)r_c = cR(t_0)\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \tag{3.79}$$

onde *a(t)* é o fator de escala adimensional. A equação acima pode ser reescrita em função do parâmetro de *Hubble* e *redshift z*:

$$D_c(t_0) = c\int_0^z \frac{dz}{H(z)} = \frac{c}{H_0}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3\Omega_m + \Omega_\Lambda}}, \tag{3.80}$$

sendo Ω_m a densidade de matéria total, Ω_Λ a densidade de energia escura (constante cosmológica), responsável pela expansão acelerada do Universo, e H_0 o valor atual do parâmetro de *Hubble*. Para um tempo *t* diferente da época atual,

$$D_c(t) = R(t)r_c = cR(t)\int_{t_e}^{t} \frac{dt'}{R(t')} = c\int_{t_e}^{t} \frac{dt'}{a(t')}. \tag{3.81}$$

Considerando o universo plano de *Einstein-de Sitter*, sem constante cosmológica, a relação unívoca entre tempo e *redshift* é:

$$t(z) = \frac{2}{3H_0(1+z)^{3/2}} \ . \tag{3.82}$$

Nesse universo, a distância comóvel de uma fonte atualmente em z é dada por:

$$D_c(z) = \frac{2c}{H_0}\left[1-(1+z)^{-1/2}\right]. \tag{3.83}$$

Considerando-se a constante cosmológica não-nula e $\Omega_{total} = \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, então D_c é dado pela eq(3.80) e $t(z)$ por:

$$t(z) = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} ln\left[\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{1-\Omega_\Lambda}(1+z)^{-3}} + \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{1-\Omega_\Lambda}(1+z)^{-3}+1}\right]. \tag{3.84}$$

No limite $\Omega_\Lambda \to 0$, a eq(3.84) se torna a eq(3.82). Um próton altamente energético emitido por uma fonte isotrópica no tempo t_e atravessa uma esfera de área $4\pi\, r_c^2(t)R(t)^2 = 4\pi D_c^2$ no instante t. Entretanto, a distância própria que o próton atravessa até o tempo presente t_0 não é D_c, e sim:

$$l = c(t_0 - t_e) \ . \tag{3.85}$$

O algoritmo[15] segue então: considerando fontes com um dado *redshift* máximo z_{max}, obtém-se a distância máxima $(D_c)_{max}$. Sorteia-se então a distância D_c da fonte a partir de uma distribuição uniforme e obtém-se o correspondente *redshift* z_e da fonte sorteada. Com z, calcula-se a distância l a ser percorrida pelo próton, segundo a eq(3.85).

O número de iterações a ser considerado é $N = l/\Delta x$, onde o passo de cada iteração é $\Delta x = 0{,}1Mpc\big/(1+z_e)^3$. Para cada iteração, o *redshift* do próton é atualizado da seguinte forma: a relação mais geral entre diferenciais de tempo e *redshift* é dada por:

$$\frac{R(t_0)}{R(t)}dt = -\frac{dz}{H(z)} \Rightarrow dt = -\frac{dz}{(1+z)H(z)} \Rightarrow cdt = -\frac{cdz}{(1+z)H(z)}\,. \tag{3.86}$$

Sendo o passo da iteração $\Delta x << l$, então se pode considerar $cdt \approx \Delta x$ e portanto a relação entre o *redshift* após a enésima iteração e o da anterior é calculada como:

$$\Delta x = -\frac{c\Delta z}{(1+z_{n-1})H(z_{n-1})},$$

$$\Rightarrow z_n = z_{n-1} - \frac{\Delta x}{c}(1+z_{n-1})H(z_{n-1}) = z_{n-1} - \frac{\Delta x H_0}{c}(1+z_{n-1})\sqrt{(1+z_{n-1})^3\Omega_m + \Omega_\Lambda}\,. \tag{3.87}$$

Ainda na mesma interação, as perdas de energia por produção de pares e^+e^- e *redshift* são calculadas pela eq(3.56), sendo $D = \Delta x$. Calcula-se o comprimento de interação $\lambda_I(E,z)$ da fotoprodução de píons para a energia do próton na presente iteração:

$$\lambda_{I\,fp}(E, z_{n-1}) = (1+z_{n-1})^{-3}\lambda_{I_0}((1+z_{n-1})E)_{fp}\,, \tag{3.88}$$

onde $\lambda_{I\,0}$ é dado pela eq(3.68), porém calculado na energia "$(1+z_{n-1})E$". O número de interações de fotoprodução de píons na iteração é sorteado de uma distribuição de Poisson com média $\langle N_{fótons}\rangle$, onde $\langle N_{fótons}\rangle = \Delta x/\lambda_I$ é o número médio de fótons que interagem na iteração de comprimento Δx. Este número é quase sempre 0 (maioria das vezes) ou 1 (raramente), cf. figura 3.12. Sendo 0, não há a interação hadrônica e portanto a iteração chega ao fim. Caso seja 1, então há uma interação de fotoprodução de píons: sorteiam-se a energia do fóton da RCF de uma distribuição de Planck com T = 2,728($1+z_{n-1}$)K e os ângulos de incidência e saída, θ_i e θ_{CM}, de uma distribuição uniforme. Com isso, pode-se calcular, sem média alguma, a inelasticidade para cada interação pela eq(3.61), e, portanto, a energia perdida. A iteração acaba e o mesmo processo é repetido em cada iteração, até o próton chegar à Terra, com energia final degradada.

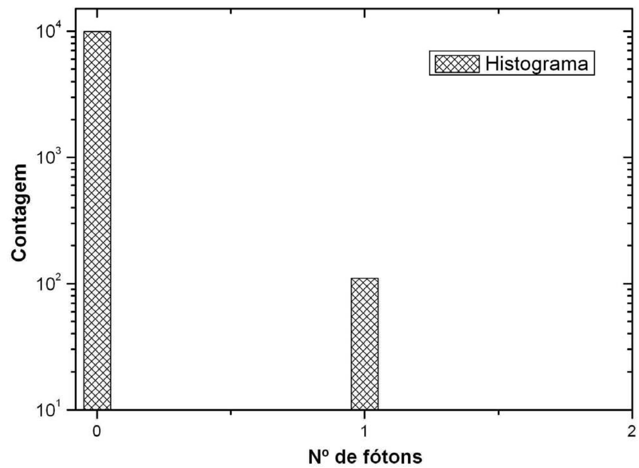

Fig. 3.12: Histograma do número de fótons que interagem hadronicamente com o próton em uma iteração, obtido por 10^4 sorteios de uma distribuição de *Poisson* com média $\Delta x / \lambda_I$.

Alguns resultados para o caso de uma fonte única localizada em um dado *z* são mostrados na figura 3.13, em que é mostrada a degradação da energia do próton com o decorrer das iterações. As linhas aparentemente contínuas caracterizam as perdas de energia por produção de pares e^+e^- e *redshift*, caracterizando uma perda de energia aproximadamente contínua, porém pequena. Os gráficos superiores mostram dois eventos partindo de uma mesma fonte próxima com z = 0,02. Os grandes saltos indicam quando ocorreu a fotoprodução de píons, e caracterizam as perdas como raras e estocásticas, porém com um elevado grau de inelasticidade: no gráfico superior à direita, por exemplo, na primeira fotoprodução de píons que ocorre, o próton já perde certa de 82% de sua energia! Nos gráficos inferiores, em que a distância da fonte é maior, percebe-se novamente que a maior degradação na energia ocorre em saltos devido à fotoprodução até certa energia, a partir da qual apenas as perdas por produção de pares e^+e^- e *redshift* ocorrem (note as escalas logarítmicas).

Os resultados referentes ao espectro propagado obtido pelas simulações serão mostrados na próxima seção, juntamente com os resultados analíticos.

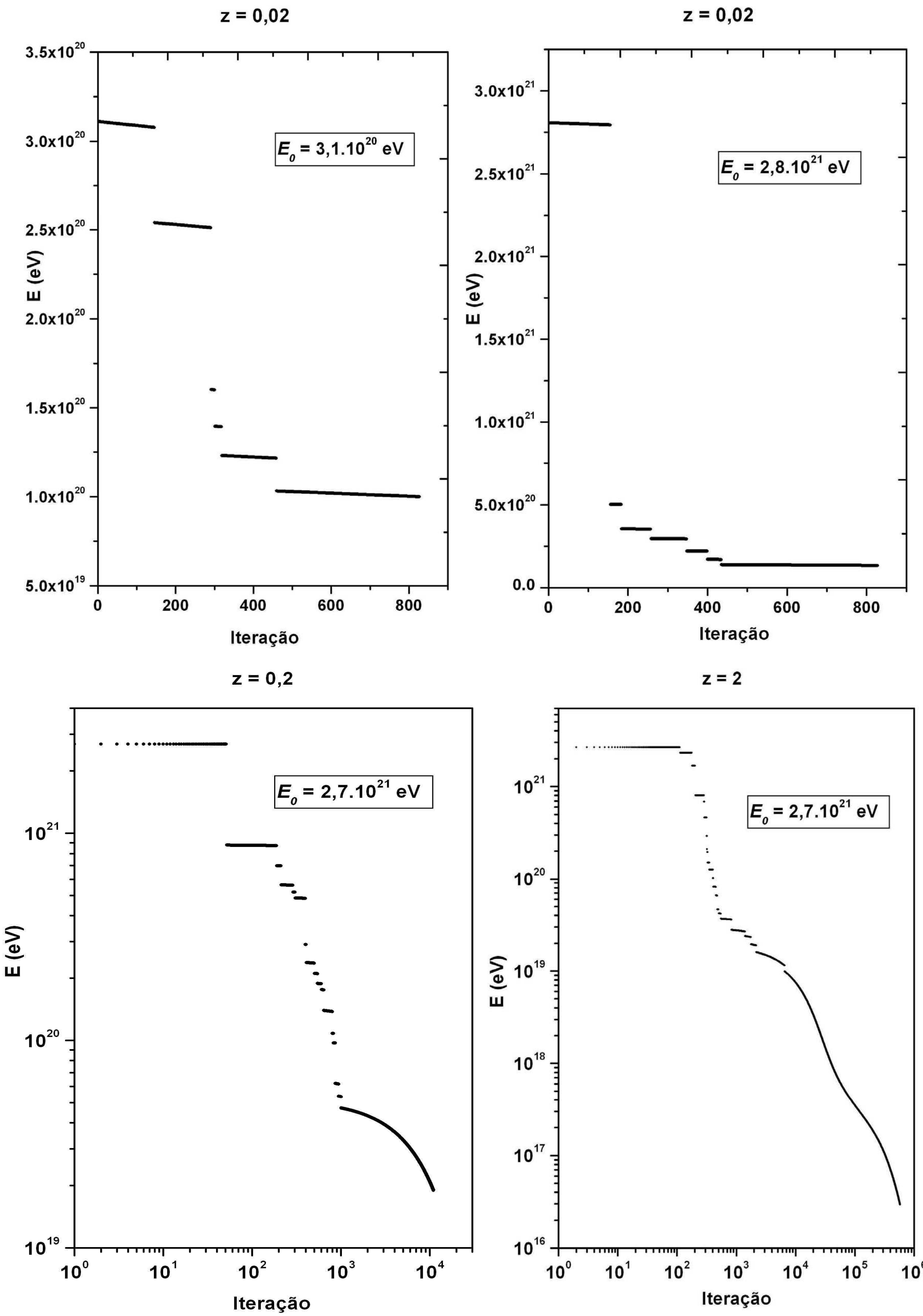

Fig. 3.13: Degradação de energia de prótons devido à propagação para vários *redshifts* *z* da fonte injetora.

3.3 A ABORDAGEM ANALÍTICA[xi]

Serão considerados dois casos para o cálculo do espectro propagado: no primeiro, determina-se o espectro proveniente de uma única fonte emissora em um dado z fixo (útil quando se pretende estudar a contribuição de uma fonte específica no espectro de raios cósmicos); no segundo, o caso mais geral de fontes espalhadas até um *redshift* máximo z_{max}. Novamente, são consideradas propagações retilíneas até a Terra.

3.3.1 FONTE ÚNICA

Caso não houvesse perdas de energia, o fluxo $F(E_e)dE_e$ de raios cósmicos emitidos com energia entre E_e e $E_e + dE_e$ segundo um espectro diferencial de injeção seria, no tempo presente t_0:

$$F(E_e)dE_e = \frac{\Phi(E_e)}{4\pi D_L^2(t_0)} dE_e = \frac{\Phi(E_e)}{4\pi(1+z)D_c^2(t_0)} dE_e \ , \tag{3.89}$$

onde $D_L = (1+z)D_C$ é a distância de luminosidade. Com a degradação de energia, o lado esquerdo da equação acima deve ser modificado para a energia final E após a propagação:

$$F(E)dE = \frac{\Phi(E_e)}{4\pi(1+z)D_c^2(t_0)} dE_e \,. \tag{3.90}$$

Considerando nula a constante cosmológica, a eq(3.83) pode ser inserida na equação acima, resultando:

$$F(E)dE = \frac{\Phi(E_e)}{16\pi\, c^2 / H_0^2\left(\sqrt{1+z}-1\right)^2} dE_e \quad \Rightarrow \quad F(E) = \frac{\Phi(E_e)}{16\pi\, c^2 / H_0^2\left(\sqrt{1+z}-1\right)^2} \frac{dE_e}{dE} \,. \tag{3.91}$$

Definindo-se $\lambda(E,z)$ como a razão entre as energias inicial e final propagada:

[xi] A rigor, a abordagem é semi-analítica, pois, apesar de todo o desenvolvimento teórico ser analítico, somente é possível calcular numericamente o fluxo propagado.

$$\lambda(E,z) = \frac{E_e(z)}{E} \ , \tag{3.92}$$

e considerando-se um espectro de injeção do tipo lei de potência, então:

$$\Phi(E_e) = AE_e^{-\gamma} = AE^{-\gamma}\lambda(E,z)^{-\gamma} \ . \tag{3.93}$$

Substituindo-se a eq(3.93) na eq(3.91), o fluxo diferencial propagado é dado por:

$$F(E) = \frac{H_0^2}{16\pi c^2} AE^{-\gamma} \frac{\lambda(E,z)^{-\gamma}}{\left(\sqrt{1+z}-1\right)^2} \frac{dE_e}{dE} = \frac{H_0^2}{16\pi c^2} \Phi(E)\eta \ , \tag{3.94}$$

em que η, que representa a razão entre o espectro propagado e o original, é o chamado fator de modificação:[32]

$$\eta(E,z) = \frac{\lambda(E,z)^{-\gamma}}{\left(\sqrt{1+z}-1\right)^2} \frac{dE_e}{dE} . \tag{3.95}$$

Pela eq(3.94), para se obter o fluxo diferencial propagado basta determinar o fator de modificação, pois o fluxo após a propagação retoma o espectro original multiplicado por este fator. Para determinação do fator $\lambda(E,z)$ faz-se necessário saber qual deve ser a energia $E_e(z)$ que o próton deve ter ao ser injetado para que chegue à Terra com energia E. A energia $E_e(z)$ é calculada numericamente unindo a eq(3.50) com a eq(3.55) e impondo como condição de contorno $E_e(z = 0) = E$:

$$-\frac{1}{E_e(z)} \frac{dE_e(z)}{dx} = \beta_{total}(E,z) = \beta_{pp}(E,z) + \beta_{fp}(E,z) + \beta_{redshift}(E,z), \ \ com \ \ E_e(0) = E . \tag{3.96}$$

A figura 3.14 mostra o comportamento de $\lambda(E,z)$, que cresce exponencialmente tanto com E, quanto com z. O fator dE_e/dE pode ser expresso como uma função, a ser calculada. A energia de um próton emitido em uma época z é a soma da energia atual E e do total perdido durante a propagação:

$$E_e(z) = E + \int_t^{t_0} dt \left(\frac{dE_e}{dt}\right)_{total} = E + \int_t^{t_0} dt \left[\left(\frac{dE_e}{dt}\right)_{redshift} + \left(\frac{dE_e}{dt}\right)_{RCF}\right], \tag{3.97}$$

onde

$$\left(\frac{dE_e}{dt}\right)_{RCF} = \left(\frac{dE_e}{dt}\right)_{pp} + \left(\frac{dE_e}{dt}\right)_{fotopion} = b(E_e, z)_{RCF} \,. \tag{3.98}$$

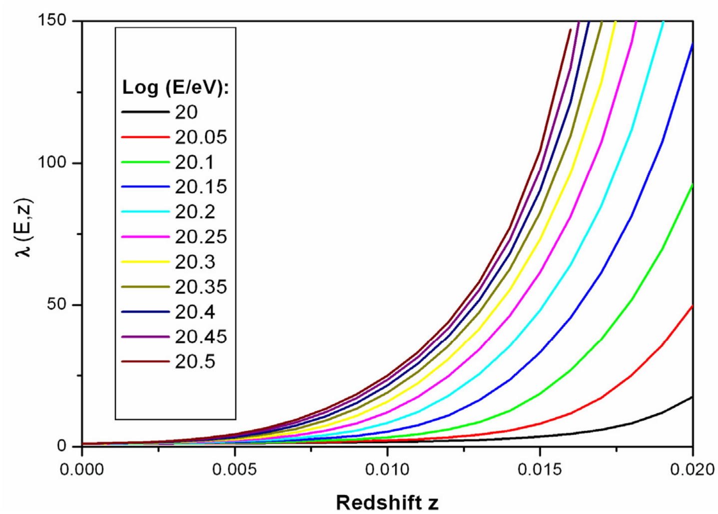

Fig. 3.14: Fator $\lambda(E,z)$, que é a razão entre a energia de emissão do próton e a energia com a qual este chega à Terra.

Pela eq(3.51) e a eq(3.98), a eq(3.97) fica:

$$E_e(z) = E + \int_t^{t_0} dt\; E_e H_0 (1+z')^{3/2} + \int_t^{t_0} dt\; b(E_e, z')_{RCF} \,. \tag{3.99}$$

Ainda considerando-se nula a constante cosmológica, tem-se pela eq(3.82):

$$dt = -\frac{dz}{H_0 (1+z)^{5/2}} \,. \tag{3.100}$$

A eq(3.99) fica portanto:

$$E_e(z) = E + \int_0^z \frac{dz'\, E_e(z')}{(1+z')} + \frac{1}{H_0}\int_0^z \frac{dz'\, b(E_e, z')_{RCF}}{(1+z')^{5/2}} \,. \tag{3.101}$$

À semelhança da função β, a função $b(E_e,z)$ é calculada como (cf. apêndice 2):

$$b(E_e, z')_{RCF} = (1+z')^2 b_0((1+z')E_e)_{RCF} \ , \qquad (3.102)$$

onde

$$b_0((1+z')E_e)_{RCF} = b_0((1+z')E_e)_{pp} + b_0((1+z')E_e)_{fp} = (1+z')cE_e\left[\beta_0((1+z')E_e)_{pp} + \beta_0((1+z')E_e)_{fp}\right]. \quad (3.103)$$

Substituindo a eq(3.102) na eq(3.101),

$$E_e(z) = E + \int_0^z \frac{dz'\, E_e(z')}{(1+z')} + \frac{1}{H_0}\int_0^z \frac{dz'\, b_0(E_e(1+z'))_{RCF}}{\sqrt{(1+z')}} \ . \qquad (3.104)$$

Definindo $y = dE_e/dE$ e derivando eq(3.104) em E, obtém-se:

$$y = 1 + \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')} y(z') + \frac{1}{H_0}\int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{(1+z')}} \ \frac{db_0(E_e(1+z'))_{RCF}}{dE} \ . \qquad (3.105)$$

Sendo $E' = (1+z')E_e$, então:

$$\frac{db_0(E_e(1+z'))_{RCF}}{dE} = \frac{db_0(E')_{RCF}}{dE} = \frac{db_0(E')_{RCF}}{dE'}\frac{dE'}{dE} = \frac{db_0(E')_{RCF}}{dE'}(1+z')\frac{dE_e}{dE},$$

$$\therefore \qquad \frac{db_0(E_e(1+z'))_{RCF}}{dE} = (1+z')y\left(\frac{db_0(E')_{RCF}}{dE'}\right)_{|E'=(1+z')E_e} . \qquad (3.106)$$

Com a eq(3.106), a eq(3.105) se torna:

$$y = 1 + \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')} y(z') + \frac{1}{H_0}\int_0^z dz' \sqrt{(1+z')}\, y(z')\left(\frac{db_0(E')_{RCF}}{dE'}\right)_{|E'=E_e(1+z')} . \qquad (3.107)$$

A equação diferencial correspondente à equação integral acima é:

$$dy = \frac{dz}{(1+z)} y(z) + \frac{1}{H_0} dz\sqrt{(1+z)}\, y(z)\left(\frac{db_0(E')_{RCF}}{dE'}\right)_{|E'=E_e(1+z)},$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{y} = \frac{dz}{(1+z)} + \frac{1}{H_0} dz\sqrt{(1+z)}\left(\frac{db_0(E')_{RCF}}{dE'}\right)_{|E'=E_e(1+z)} . \qquad (3.108)$$

Considerando que $dE_e/dE = 1$ para $z = 0$ e integrando da equação acima, sua solução é facilmente encontrada:

$$y=\frac{dE_e}{dE}=(1+z)e^{\frac{1}{H_0}\int_0^z dz'\sqrt{(1+z')}\left(\frac{db_0(E')_{RCF}}{dE'}\right)_{|E'=(1+z')\lambda(E,z')E}} \quad . \tag{3.109}$$

Para o caso em que a constante cosmológica não é nula, deve-se considerar que

$$dt=-\frac{dz}{H_0(1+z)\sqrt{\Omega_m(1+z)^3+\Omega_\Lambda}}, \tag{3.110}$$

e portanto a eq(3.109) fica:

$$\frac{dE_e}{dE}=(1+z)e^{\frac{1}{H_0}\int_0^z dz'\frac{(1+z')^2}{\sqrt{\Omega_m(1+z')^3+\Omega_\Lambda}}\left(\frac{db_0(E')_{RCF}}{dE'}\right)_{|E'=(1+z')\lambda(E,z')E}} \quad . \tag{3.111}$$

Com a eq(3.92), eq(3.96) e eq(3.109), o fator de modificação η, dado pela eq(3.95) para o caso de uma fonte única em z, fica determinado. A figura 3.15 mostra o fator de modificação correspondente a diferentes *redshifts* z (linhas contínuas), para o caso de constante cosmológica nula, a fim de comparar os resultados com trabalhos disponíveis na literatura.[15,32] As perdas de energia por produção de pares e por *redshift* foram computadas utilizando a eq(3.22) e a eq(3.51), respectivamente. As perdas por fotoprodução de píons foram calculadas como o inverso do comprimento de atenuação obtido a partir da eq(3.67) e da eq(3.69), nas quais parametrizações da figura 3.11 e da curva azul da figura 3.9 foram utilizadas.

A figura 3.15 também mostra os resultados obtidos por Monte Carlo, em que o fator de modificação foi obtido, para cada intervalo em log$E$, pela razão entre o número de eventos propagados com energia final neste intervalo e o número de eventos gerados pela fonte neste mesmo intervalo de energia. Neste resultado foi inserido o fator de normalização $\left(\sqrt{1+z}-1\right)^2$, a fim de se comparar com o resultado analítico, dado pela eq(3.95).

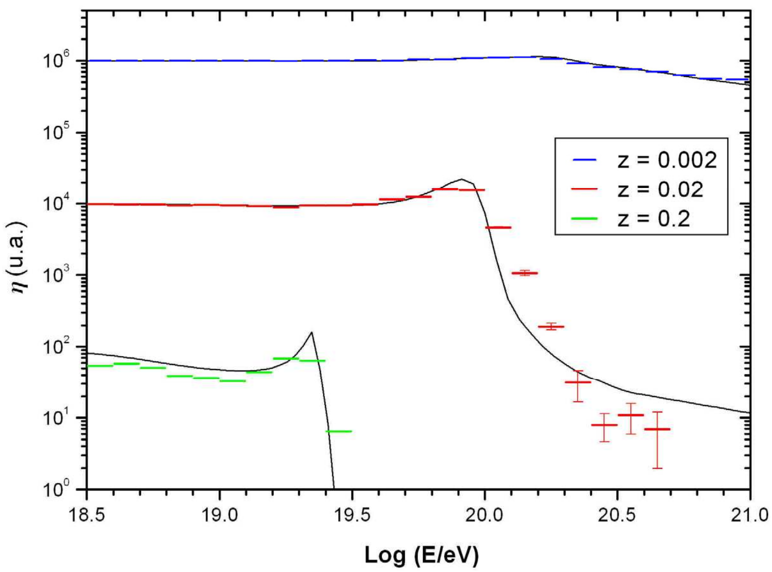

Fig. 3.15: Fator de modificação η para o caso de fontes únicas em um dado z em função da energia final E. As linhas contínuas são os resultados analíticos e os pontos foram gerados por Monte Carlo. (γ= 2,1)

Os resultados mostram uma clara concordância entre ambos os métodos e também com trabalhos anteriores.[15,32] O espectro de fontes situadas em *redshifts* maiores que 0,2 é extremamente atenuado já a partir de energias da ordem de $2{,}5.10^{19}$ eV (log(E/eV) = 19,4). Considerando a constante cosmológica, este valor sobe para 4.10^{19} eV (log(E/eV) = 19,6), cf. figura 3.16.

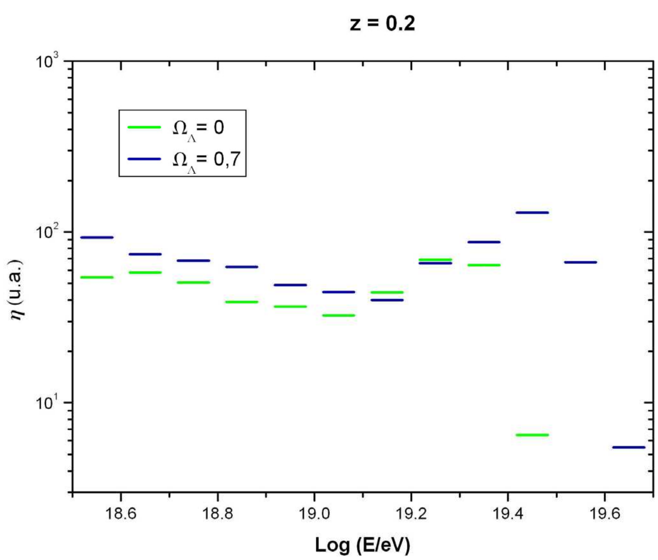

Fig. 3.16: Fator de modificação para fonte única, com e sem a constante cosmológica.

3.3.2 ESPECTRO DIFUSO

O fluxo difuso será calculado partindo da conservação do número de prótons por unidade de volume comóvel. Seja $n_p(E_e)$ o número de prótons com energia entre E_e e $E_e + dE_e$ por unidade de volume comóvel. Caso não houvesse perdas de energia, a contribuição de uma única fonte de raios cósmicos emitidos com energia entre E_e e $E_e + dE_e$ segundo um espectro diferencial de injeção seria:

$$n_p(E_e)dE_e = n_\Phi(E_e)dE_e dt\,, \tag{3.112}$$

onde $n_\Phi(E_e) = d\Phi(E_e)/dVol$ é o número de prótons emitido pela fonte com energia entre E_e e $E_e + dE_e$ por unidade de energia, tempo e volume. Considerando várias fontes, a contribuição de cada uma deve ser contabilizada no cálculo de n_p no tempo presente t_0. Agora, $n_\Phi = n_\Phi(E_e, t)$ e t é a época de emissão atribuída a cada fonte. A eq(3.112) deve ser reescrita como:

$$n_p(E_e)dE_e = \int_{t_{min}}^{t_0} n_\Phi(E_e)dE_e dt\,, \tag{3.113}$$

Com a degradação de energia, o lado esquerdo da equação acima deve ser modificado para a energia final E após a propagação:

$$n_p(E)dE = \int_{t_{\min}}^{t_0} n_\Phi(E_e)dE_e dt = N\int_{t_{\min}}^{t_0} E_e^{-\gamma} dE_e dt = NE^{-\gamma}\int_{t_{\min}}^{t_0} \lambda(E,t)^{-\gamma} dE_e dt\,,$$

$$\therefore \quad n_p(E) = N\Phi(E)\int_{t_{min}}^{t_0} \lambda(E,t)^{-\gamma}\frac{dE_e}{dE}dt\,, \tag{3.114}$$

onde $\Phi(E)$ é o espectro diferencial de injeção suposto do tipo lei de potência e N é a constante de normalização de n_Φ, estando relacionada à emissividade das fontes de raios cósmicos.[40] Com o auxílio da eq(3.110), a eq(3.114) fica:

$$n_p(E) = \frac{N\Phi(E)}{H_0} \int_0^{z_{max}} \frac{\lambda(E,z)^{-\gamma}}{(1+z)\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} \frac{dE_e}{dE} dz \quad . \tag{3.115}$$

A densidade de prótons $n_p(E)$ é calculada de acordo com eq(3.115), considerando a contribuição de fontes espalhadas uniformemente pelo espaço até um *redshift* z_{max}. O fluxo diferencial é obtido a partir da densidade $n_p(E)$, bastando multiplicar pela velocidade ~ c dos raios cósmicos e dividir pelo ângulo sólido total:

$$F(E) = \frac{cn_p(E)}{4\pi} = \frac{cN\Phi(E)}{4\pi H_0}\eta(E, z_{max}), \tag{3.116}$$

em que o fator de modificação η neste caso é dado por:

$$\eta(E, z_{max}) = \int_0^{z_{max}} \frac{\lambda(E,z)^{-\gamma}}{(1+z)\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} \frac{dE_e}{dE} dz \quad . \tag{3.117}$$

As funções $\lambda(E,z)$ e dE_e/dE são as mesmas obtidas na seção anterior. O fluxo diferencial $F(E)$ dado pela eq(3.116) é chamado fluxo universal ou cosmológico, que permeia todo o Universo e supõe fontes uniformemente distribuídas no espaço. Tal fluxo foi obtido apenas pela conservação do número de partículas, independente do modo de propagação das mesmas (retilínea ou difusa). Assim, desde que a separação entre as fontes seja pequena em comparação com os caminhos de atenuação ou interação, a eq(3.116) é válida mesmo com a presença de campos magnéticos. Na prática, se a distância entre as fontes for de até 50 Mpc, então mesmo na presença de campos magnéticos entre 0,1 – 10 nG o fluxo de raios cósmicos ultra-energéticos é aproximadamente o cosmológico, dado pela eq(3.116).[40]

A figura 3.17 mostra o fator de modificação para o caso de um espectro difuso universal sem constante cosmológica, calculado pela eq(3.117) (linhas contínuas). As simulações de Monte Carlo correspondentes para os mesmos z_{max} foram normalizadas impondo que o valor do primeiro intervalo de cada curva coincidisse com o respectivo valor do cálculo analítico. Uma vez encontrado esse valor, todos os intervalos seguintes na mesma curva foram normalizados pelo mesmo valor. A concordância verificada é excelente, como se pode observar. Para altas energias, as barras de erro aumentam devido ao pequeno número de eventos gerados nessa região, à semelhança do que ocorre com os experimentos reais de detecção de raios cósmicos de altíssima energia, como o Observatório *Pierre Auger*.

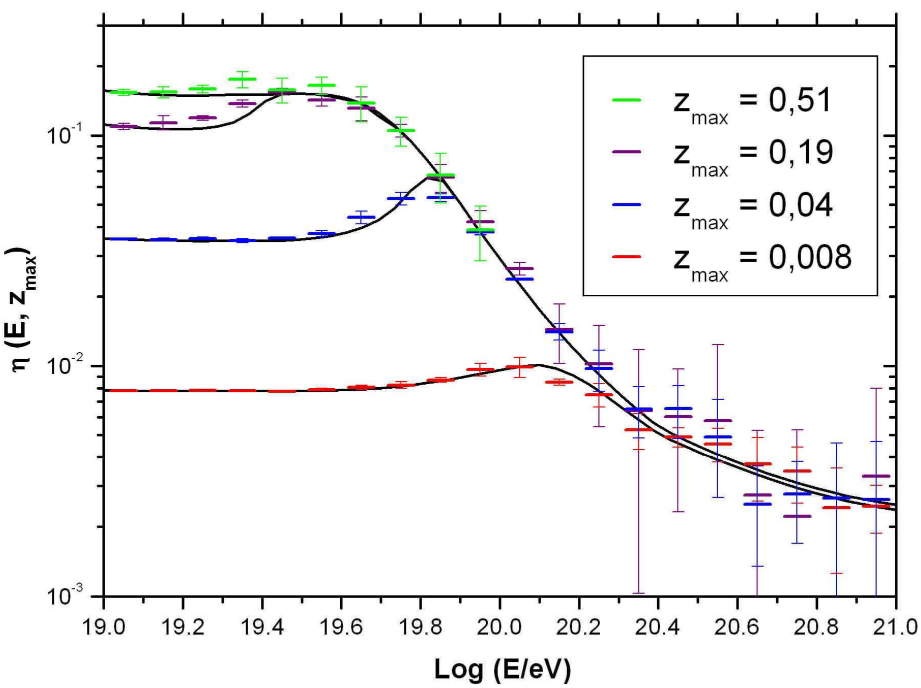

Fig. 3.17: Fator de modificação η para o caso do espectro cosmológico difuso de fontes localizadas até um *redshift* z_{max} em função da energia final E. As linhas contínuas são os resultados analíticos e os pontos foram gerados pelas simulações de Monte Carlo (γ= 2,1).

Para altas energias todas as curvas convergem para o mesmo valor, o que indica que a dependência de z_{max} do fator de modificação afeta o espectro apenas para baixas energias. De fato, conforme a figura 3.18, para energias a partir de 10 EeV, o fator de modificação para z_{max} maior que 0,5 permanece o mesmo quando comparado ao de z_{max} igual a 0,5. Como conseqüência, para análise do corte GZK pode-se considerar fontes situadas até um *redshift* máximo 0,5 sem perda alguma de generalidade.

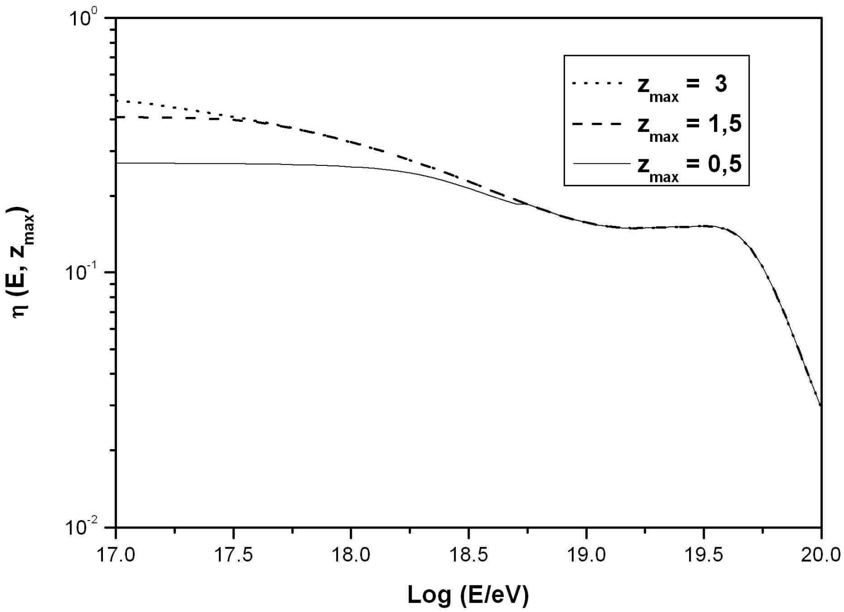

Fig. 3.18: Comportamento do fator de modificação η (espectro difuso) em relação a grandes valores de *redshift* z_{max}.

A dependência do fator de modificação η com relação ao índice espectral de injeção γ é mostrada na figura 3.19. Para dois casos extremos, $\gamma = 2{,}1$ e $\gamma = 2{,}7$, há apenas uma pequena variação na normalização, mas a forma do fator de modificação, e conseqüentemente do fluxo propagado, é mantida a mesma. Para $\gamma = 2{,}7$ é mostrado ainda qual seria o fator de modificação caso não houvesse interações de fotoprodução de píons. Nota-se claramente que neste caso não haveria queda abrupta do espectro, sendo a fotoprodução de píons, portanto, a grande causa do corte GZK.

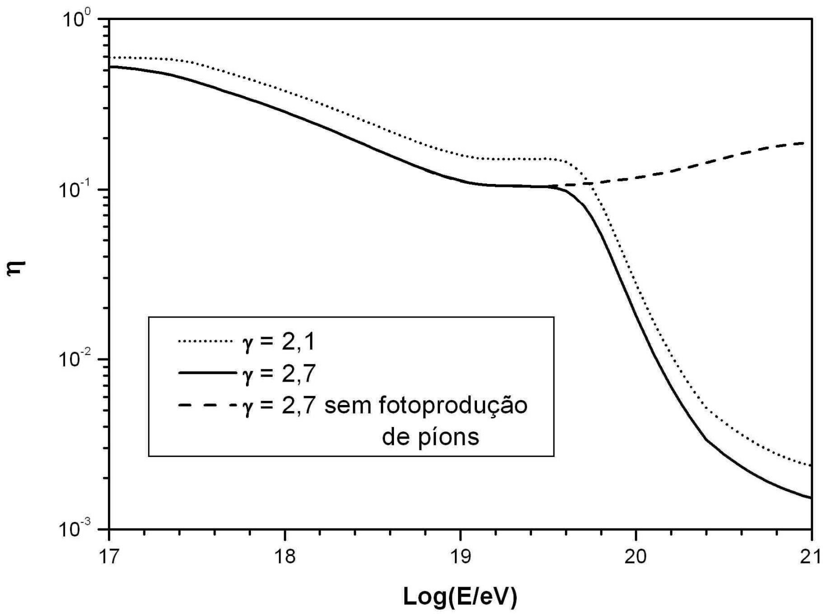

Fig. 3.19: Dependência do fator de modificação η (espectro difuso) com o índice espectral γ, considerando z_{max} = 1,5 e $\Omega_\Lambda = 0{,}7$. A curva tracejada representa η sem os efeitos da fotoprodução de píons.

O estudo do corte GZK pode ser feito agora. Não há uma definição única para qual seria a energia do corte GZK. Considerando o caso de fontes únicas, a queda abrupta no fator de modificação, e portanto também no fluxo, depende da distância da fonte (cf. figura 3.15). O conceito do corte GZK é melhor aplicado considerando o fluxo difuso cosmológico: a energia GZK seria aquela em que se inicia a queda abrupta no comprimento de atenuação λ_a. Segundo a figura 3.8, essa energia seria $E_i = 5.10^{19}$ eV, o que corresponde ao comprimento $\lambda_a = 10^3$ Mpc. A vantagem dessa definição é ser independente do índice espectral γ, porém essa energia E_i apenas revela o início do efeito GZK. Experimentalmente é mais útil definir uma energia maior, que revele de forma inequívoca a presença do corte. Assim, pode-se definir a energia GZK como aquela em que o fluxo diferencial[xii] propagado, a partir de E_i, cai à metade do valor correspondente à extrapolação da lei de potência para a mesma energia. A figura 3.20 mostra o

[xii] A rigor, esta definição se aplica melhor ao fluxo integral, que exibe uma menor dependência do índice espectral γ do que o diferencial. Para efeito de ilustração, a escolha do fluxo diferencial é perfeitamente cabível.

fluxo cosmológico segundo a eq(3.116), para N = 1. Por este critério, $E_{GZK} = 10^{19,82}$ eV = $6,6.10^{19}$ eV. O correspondente comprimento de atenuação é $\lambda_a = 660\, Mpc$, indicando que apenas fontes localizadas até *redshift* $z \approx 0,18$ (distância comóvel $D_c \approx 700$ Mpc) contribuem para o fluxo atenuado na faixa de energia acima de E_{GZK}.

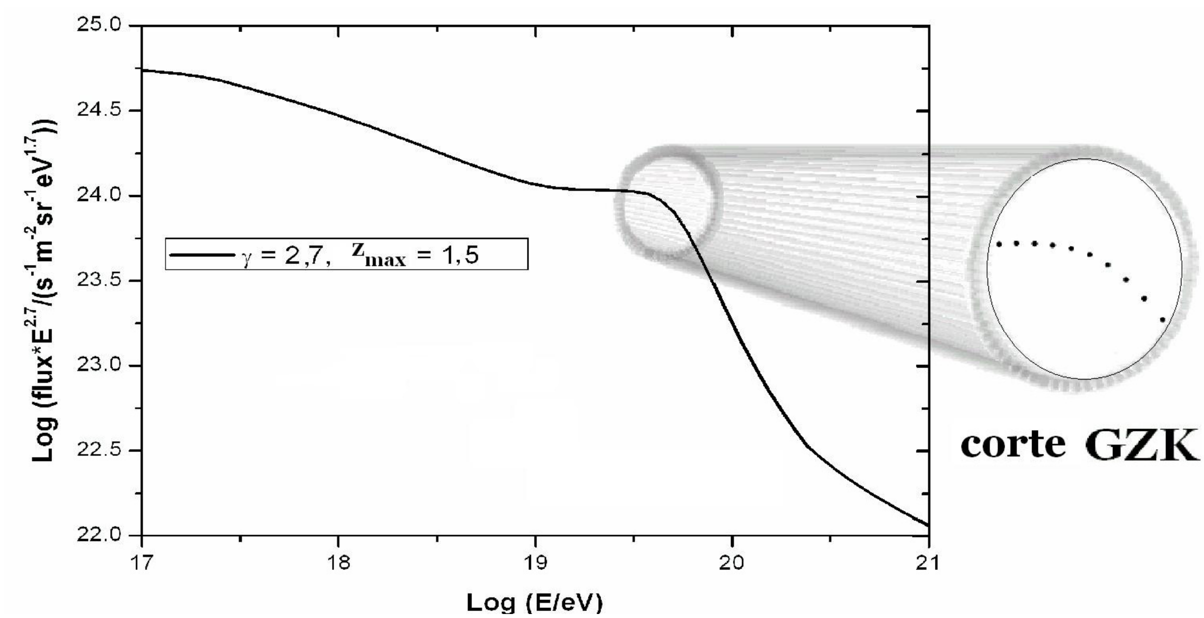

Fig. 3.20: Fluxo cosmológico diferencial e o corte GZK ($\Omega_\Lambda = 0,7$). Como o fluxo está multiplicado pelo fator $E^{2,7}$, ele possui a mesma forma do fator de modificação η.

Na figura 3.21 tem-se o mesmo fluxo porém multiplicado pelo fator E^3, forma comumente utilizada no estudo de raios cósmicos de ultra-alta energia. A menos de fatores de normalização, este é o fluxo esperado na Terra a ser comparado com dados experimentais.[xiii] Se os experimentos de raios cósmicos tivessem acesso direto a esse fluxo primário no topo da atmosfera, a questão sobre a existência ou não do corte GZK seria prontamente clarificada. Entretanto, a resolução de

[xiii] A rigor, esta previsão é válida para energias acima de 10^{19} eV, pois logo abaixo deste valor ocorre provavelmente uma transição entre o fluxo originado na própria Via-Láctea e o extragaláctico. Ainda, deve-se considerar que o espectro de raios cósmicos possui regiões com diferentes índices espectrais γ, separadas pelo "joelho" e "tornozelo".

energia finita na reconstrução de eventos pode alterar a forma deste fluxo e prejudicar a constatação do efeito GZK, caso exista, conforme será visto no próximo capítulo.

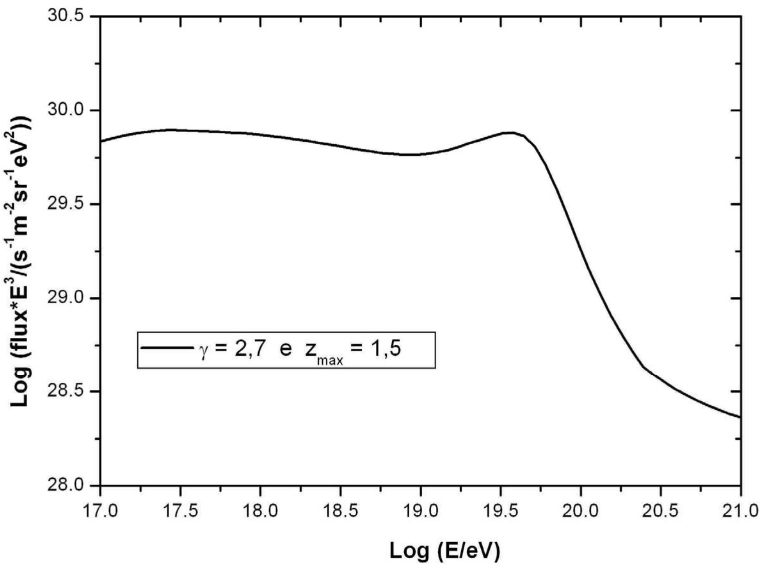

Fig. 3.21: Fluxo cosmológico diferencial multiplicado por E^3. ($\Omega_\Lambda = 0{,}7$)

4 O EFEITO GZK ATENUADO

> "*It is a curious fact that when a large number of items is classified on some homogeneity principle, the variate defined as the number of items in a class is often approximately lognormal*."[xiv]

Este capítulo é uma síntese dos anteriores aplicada ao Observatório *Pierre Auger*. São mostrados inicialmente alguns indícios de que a resolução de energia segue aproximadamente uma distribuição lognormal. Em seguida, é feita a correspondente convolução do fluxo propagado e análise dos efeitos sobre o corte GZK.

4.1 A LOGNORMAL E OS CHUVEIROS ATMOSFÉRICOS

Considere o seguinte *toy model*:[41] uma partícula altamente energética vinda do espaço entra na atmosfera terrestre com energia inicial E_0. Após percorrer uma distância equivalente ao seu comprimento de colisão λ na atmosfera, duas partículas surgem com energia $E/2$. Este processo de ramificação ocorre para cada uma das partículas, sendo que a cada colisão o número de partículas dobra e a energia de cada uma cai à metade. (cf. figura 4.1)

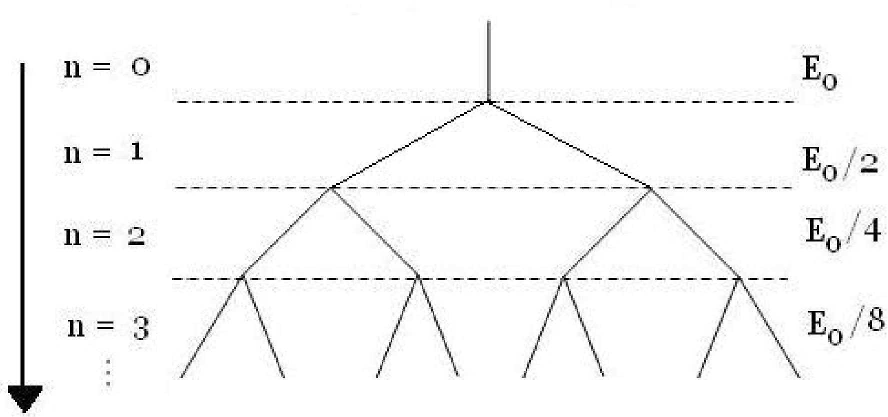

Fig. 4.1: Processo de ramificação de um chuveiro atmosférico.

[xiv] AITCHISON, J.; BROWN, J.A.C. *The Lognormal Distribution.* Cambridge University Press, 1957, p.27.

Após n ramificações, o número de partículas localizadas na profundidade atmosférica X ao longo do eixo do chuveiro[xv] é:

$$N(X) = 2^n = 2^{\frac{X}{\lambda}} . \tag{4.1}$$

Na profundidade X, a energia por partícula é:

$$E(X) = E_0 / N(X) . \tag{4.2}$$

O processo de ramificação ocorre até que $E(X) = E_c$, onde E_c é a energia crítica. Abaixo dessa energia, as partículas apenas perdem energia, decaem ou são absorvidas. Sendo X_{max} a profundidade correspondente ao máximo do chuveiro (i.e., o maior número de partículas), então pela eq(4.2):

$$N(X_{max}) = E_0 / E_c . \tag{4.3}$$

Considerando eq(4.1) e eq(4.3),

$$X_{max} = \frac{\lambda \, ln(E_0/E_c)}{ln 2} . \tag{4.4}$$

Assim, o número máximo de partículas de um chuveiro é proporcional à energia da partícula primária, enquanto que a profundidade em que ocorre o máximo é proporcional ao logaritmo da energia primária e, portanto, também proporcional ao número máximo:

$$N_{max} \propto E_0, \quad X_{max} \propto \; ln \, N_{max} . \tag{4.5}$$

Na prática, considerando chuveiros iniciados com mesma energia E_0, o ponto X_{max} em que ocorre o máximo de seu desenvolvimento apresenta flutuações aproximadamente gaussianas. Sendo X_{max} proporcional ao logaritmo de N_{max}, as flutuações de N_{max} tendem a ser, portanto, distribuídas segundo uma lognormal.

[xv] *Slant depth*, medida a partir do topo da atmosfera para baixo na direção de incidência do chuveiro (g/cm^2).

Mecanismos de ramificação como o mostrado acima são de fato geradores fundamentais de distribuições lognormais. Considere uma partícula com energia inicial E_i, que passa por sucessivas interações quaisquer em que ocorra perda de energia. A cada interação, descarta-se a outra partícula produzida e se acompanha apenas a partícula de maior energia, cujo valor vai sendo degradado após cada interação. Após várias interações, a partícula fica com energia final E_f que é, de fato, uma variável distribuída segundo uma lognormal. Este mecanismo de geração de lognormais é exatamente o processo de perda de energia que raios cósmicos sofrem na aproximação da *leading particle*, considerada no capítulo anterior, em que apenas a degradação de energia do próton inicial é acompanhada em cada interação. O caráter aleatório das interações está representado nas interações de fotoprodução de píons, já que as perdas por *redshift* e produção de pares e^-e^+ são tratadas continuamente e não contribuem para este efeito. A figura 4.2 mostra o resultado de vários prótons vindos de uma mesma fonte com mesma energia inicial e propagados até a Terra, segundo o algoritmo de Monte Carlo explicado no capítulo 3. O perfil lognormal previsto acima é claramente manifestado, com desvio padrão em torno de 24%.

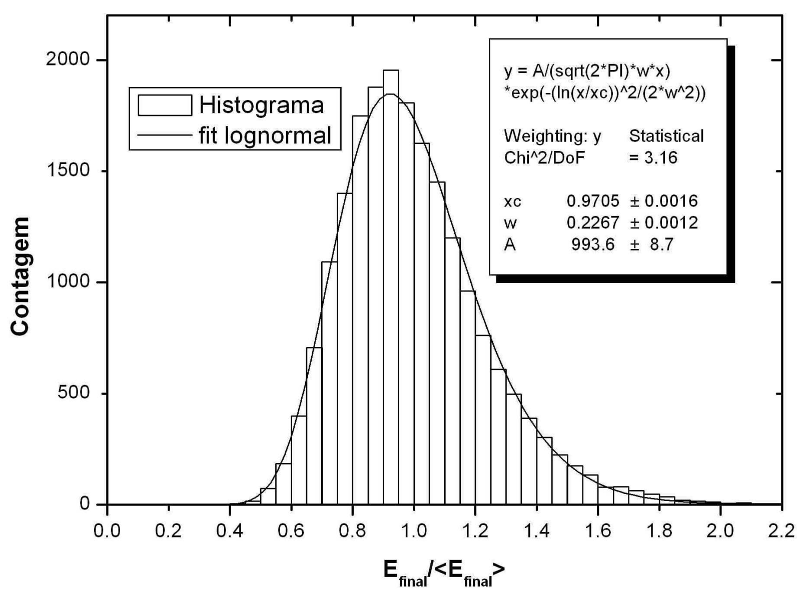

Fig. 4.2: Flutuações na energia final de prótons após propagação com mesma energia inicial $E = 10^{21}$ eV, emitidos pela mesma fonte (z = 0,02), devido ao processo de ramificação causado pelas interações estocásticas da fotoprodução de píons, obtidas com 2.10^4 eventos simulados.

Apesar da simplicidade do *toy model*, pode-se esperar que o comportamento do número de partículas de um chuveiro que atingem o solo reflita as flutuações de N_{max}. De fato, o número de partículas no final de chuveiros com mesma energia primária segue uma distribuição lognormal, conforme simulação feita no programa *AIRES/Sibyll*,[42] cf. figura 4.3. O parâmetro de forma obtido foi $\sigma = 0,13$. Tal característica é extremamente importante, pois, por não terem acesso direto ao número máximo de partículas, os métodos de detecção no solo se baseiam no número de partículas que o atingem. Apesar do número máximo de partículas presentes em chuveiros atmosféricos estar relacionado à energia primária da partícula, tal fato não ocorre de maneira unívoca. Assim, flutuações lognormais no número de partículas em chuveiros iniciados pela mesma energia primária E implicam na recíproca de que chuveiros iniciados por diferentes energias primárias podem terminar com aproximadamente o mesmo número de partículas, o que acarreta flutuações lognormais na resolução de energia.

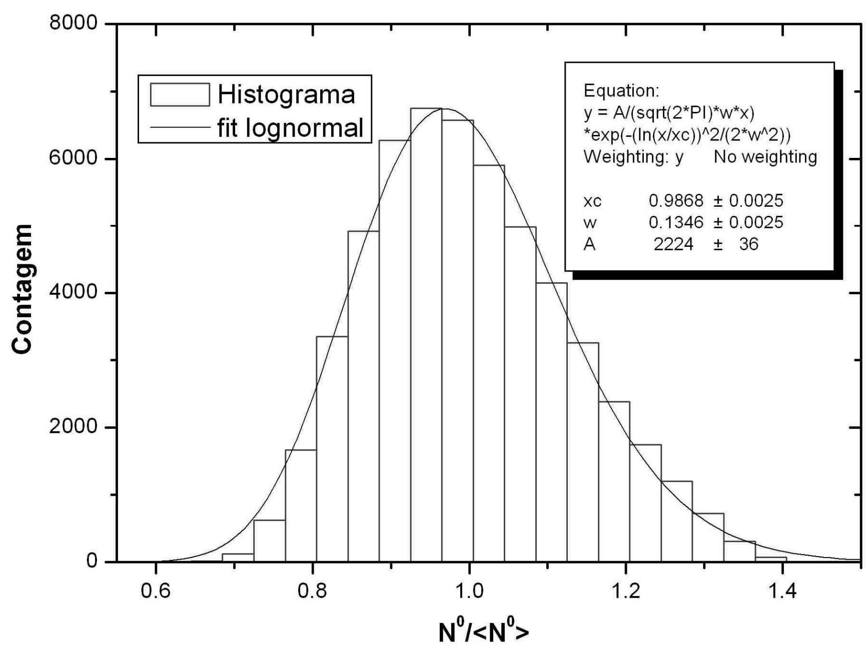

Fig. 4.3: Razão entre o número de partículas de um chuveiro que atingem o nível do mar e o número médio obtido com $5,5.10^4$ chuveiros simulados (*AIRES/Sibyll*) com energia primária do próton $E = 10^{19}$ eV.

Em alguns experimentos de raios cósmicos é utilizada a densidade $\rho(r)$ de partículas no solo a certa distância r do centro do chuveiro para determinar a energia primária do chuveiro. Conforme a figura 4.4, no caso de $\rho(r = 1000\text{m}) = \rho_{1000}$ as flutuações também seguem uma lognormal com $\sigma = 0{,}15$, segundo simulação feita com *AIRES/QGSJET*.[42]

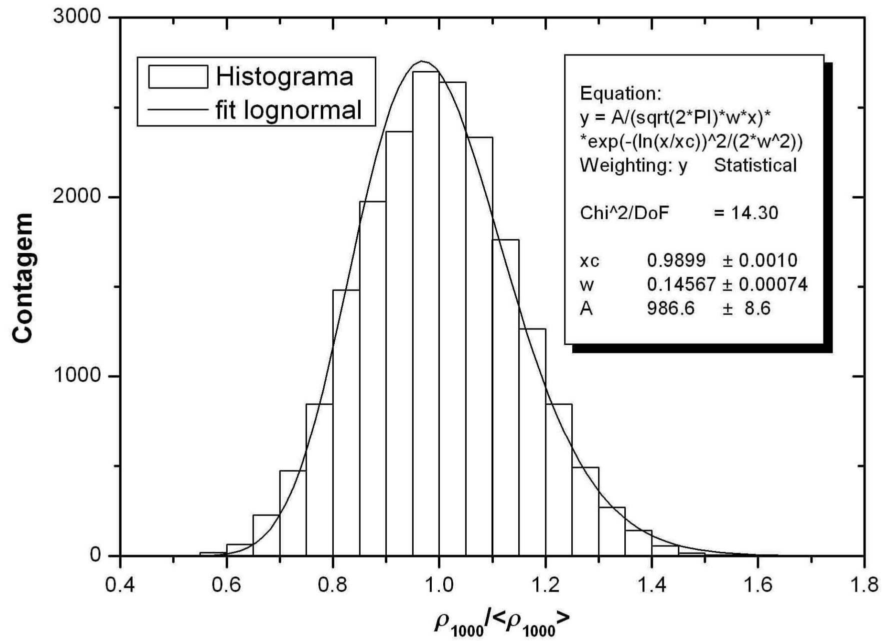

Fig. 4.4: Razão entre a densidade de partículas a 1000 m de distância do ponto de impacto do eixo do chuveiro e a densidade média. (2.10^4 chuveiros de energia primária do próton $E = 10^{19}$ eV simulados com *AIRES/QGSJET*.)

A principal característica que faz o Observatório *Pierre Auger* ser único no estudo de astropartículas altamente energéticas é sua técnica de detecção híbrida por dois métodos totalmente distintos: luz *Cherenkov* em detectores de superfície e luz de fluorescência captada por telescópios. Eventos híbridos, i.e., aqueles que são detectados e reconstruídos por ambas as técnicas, possuem excelente resolução e calibração de energia. Entretanto, como cerca de 90% dos eventos detectados pelo observatório são obtidos apenas pelos detectores de superfície, o desenvolvimento a seguir será feito apenas considerando estes detectores, sem a fluorescência. Antes, é interessante notar como a comparação entre os resultados de eventos híbridos e os obtidos com os mesmos eventos reconstruídos apenas com os detectores de superfície pode fornecer indícios sobre a resolução de energia do arranjo de superfície. A figura 4.5 mostra que o logaritmo da razão entre a energia obtida apenas com os detectores de superfície e a obtida de modo híbrido para um mesmo evento segue uma gaussiana, o que implica que a razão em si segue uma lognormal. Apesar da resolução de energia na técnica híbrida também ser finita, pode-se considerar que os resultados híbridos estão bem mais próximos dos valores corretos de energia primária e que a resolução de energia da técnica de superfície tende a uma distribuição lognormal.

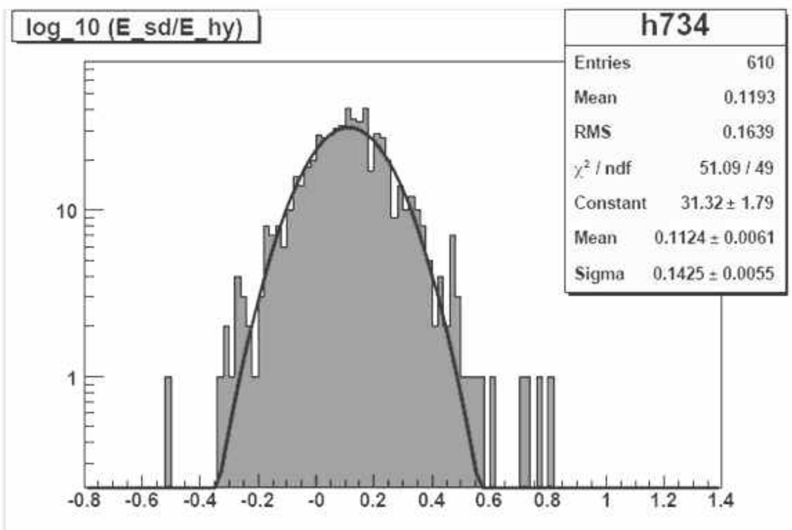

Fig. 4.5: Histograma do logaritmo da razão entre a energia obtida apenas com os detectores de superfície e a obtida de modo híbrido para os mesmos eventos (fonte: referência 43)

O parâmetro utilizado pela Colaboração *Pierre Auger* para determinação da energia é o S_{1000}, que é o sinal que seria medido em VEM[xvi] por um detector (tanque *Cherenkov*) localizado a 1000 m de distância do eixo do chuveiro no solo. Na prática, este parâmetro é obtido por meio da distribuição lateral de S, que relaciona o sinal real medido pelos detectores em função de sua distância r ao ponto de impacto do eixo do chuveiro no solo.

[xvi] *Vertical Equivalent Muon*. 1 VEM = 100 fotoelétrons coletados por uma fotomultiplicadora.

A distribuição lateral de S é parametrizada[xvii] por uma função do tipo *Nishimura-Kamata-Greisen* (NKG), dada por:[44]

$$S(r,\theta) = S_{1000}\left[\left(\frac{r+700}{1700}\right)\frac{r}{1000}\right]^{\beta(S_{1000},\theta)} . \tag{4.6}$$

Uma série de ajustes é iterada até que os valores de β e S_{1000} atinjam convergência. O parâmetro β é um dos mais importantes na determinação de S_{1000} e portanto da energia e de seus erros sistemáticos. Valores errôneos atribuídos a β diminuem a incerteza na determinação de S_{1000} e causam o aparecimento de caudas longas nas distribuições dos valores estimados de S_{1000} e da energia. As flutuações na determinação de S_{1000} são estimadas a partir do erro dos ajustes e também dos erros sistemáticos e estatísticos de β, somados em quadratura:

$$\sigma_{S1000} = \sqrt{\sigma^2_{S1000,fit} + \sigma^2_{S1000,\beta(estatístico)} + \sigma^2_{S1000,\beta(sistemático)}} . \tag{4.7}$$

O valor médio de σ_{S1000} é da ordem de 15%. Conhecendo o valor de S_{1000}, a energia primária é calculada[xvii] como:[44]

$$E(/10EeV) = \left(\frac{S_{1000}}{S^{10EeV}_{38^o}}\, e^{\frac{X_0}{\lambda}(1/cos\theta - 1/cos38°)}\right)^{1/\alpha} , \tag{4.8}$$

onde X_0 = 875 g/cm^2 (1400 m acima do nível do mar) é a profundidade atmosférica do arranjo de detectores de superfície, $S^{10EeV}_{38^o} = (50{,}6 \pm 1{,}7_{sist.} \pm 12{,}6_{estat.})VEM$ é o valor absoluto de S_{1000} para chuveiros de 10 EeV incidentes no ângulo zenital 38° obtido pela calibração com o detector de fluorescência, $\lambda = (959 \pm 60_{sist.} \pm 190_{estat.})g/cm^2$ é o comprimento de atenuação de S_{1000} na atmosfera e $\alpha = 0{,}96 \pm 0{,}03$. O erro sistemático na energia é da ordem de 26-30%, dependendo da energia e ângulo zenital considerados.

[xvii] Há várias parametrizações disponíveis para obtenção de S_{1000} e sua relação com a energia primária E; a utilizada no presente trabalho é uma das mais recentes disponíveis para a Colaboração *Pierre Auger*.

Mesmo minimizando os erros dos parâmetros $S_{38^o}^{10EeV}$, λ e α, flutuações estatísticas na determinação de S_{1000} podem contribuir para a degradação na resolução de energia. O desenvolvimento a seguir visa mostrar por meio de cálculos simples como são as flutuações em S_{1000}. A fim de relacioná-las diretamente à resolução de energia sem incluir as incertezas dos três parâmetros, são utilizados chuveiros com energia $E = 10^{19}$eV e incidindo no ângulo zenital $\theta =$ 38°, de modo que nessas condições, pela eq(4.8), a resolução de energia pode ser considerada aproximadamente igual à resolução de S_{1000}.

As figuras 4.6 e 4.7, obtidas por simulação para as coordenadas do sítio sul do Observatório *Pierre Auger*, mostram que as principais componentes dos chuveiros atmosféricos são fótons, elétrons e múons, com suas respectivas antipartículas. Assim, apenas essas três componentes serão consideradas no cálculo a seguir.

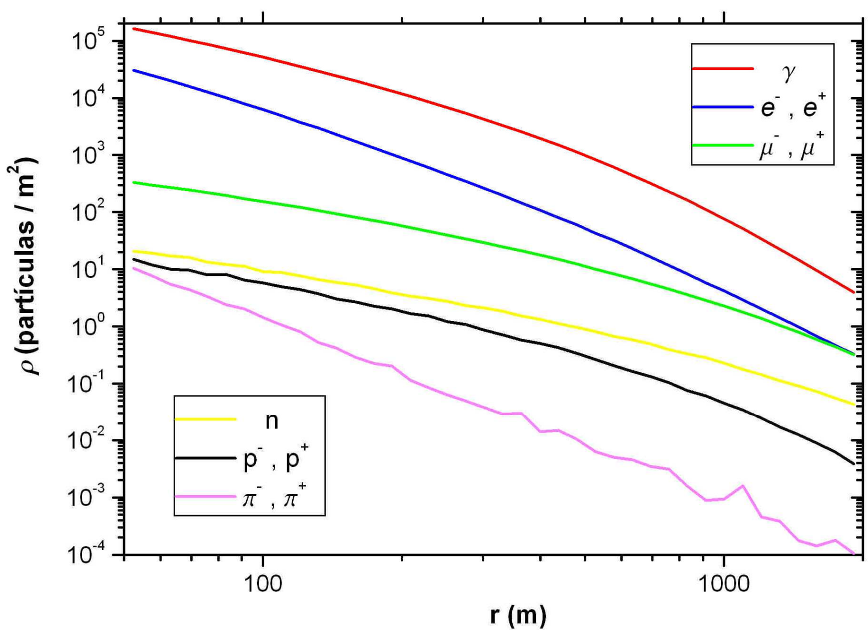

Fig. 4.6: Distribuição lateral de $\rho(r)$ obtida com um chuveiro simulado (*AIRES/QGSJET*, $E = 10^{19}$ eV, *thinning* relativo = 10^{-8}).

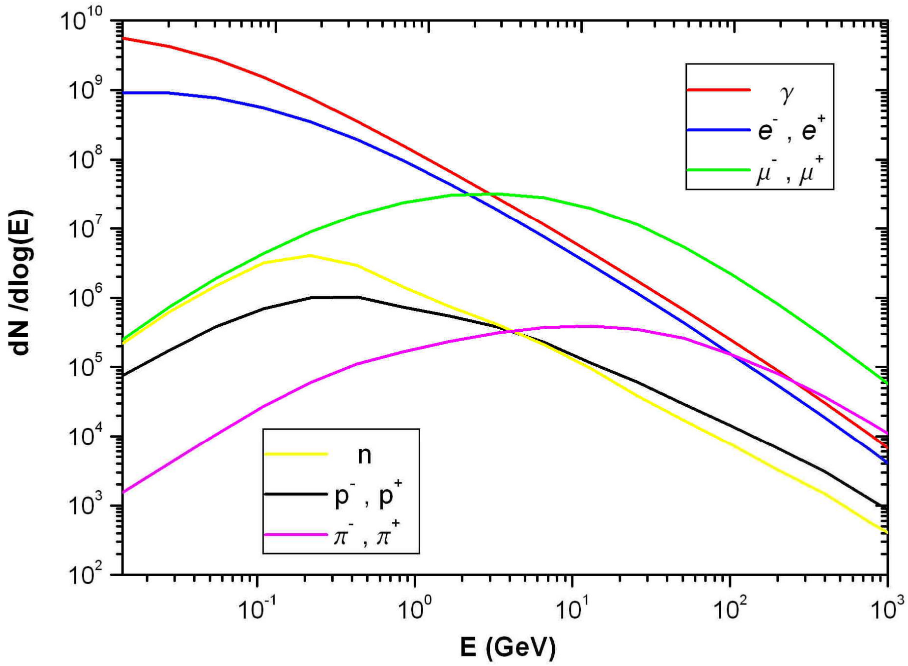

Fig. 4.7: Distribuição de energia das partículas de um chuveiro com energia primária $E = 10^{19}$ eV. (*AIRES /QGSJET*, *thinning* relativo = 10^{-8}).

Para cada componente, pode-se parametrizar S_{1000} em função de ρ_{1000} e da resposta dos detectores *Cherenkov* segundo a expressão:

$$(S_{1000})_{a=\gamma,e,\mu} = (\rho_{1000})_a \, Área_a \int \frac{dN_a}{dE'} f_{pmt}(E')_a \, dE' , \tag{4.9}$$

onde $Área_a$ é a área efetiva de detecção da componente "*a*", dN_a/dE' é a distribuição fracional da componente "*a*" em função da energia e $(f_{pmt})_a$ é a correspondente resposta do detector à partícula "*a*" com energia *E'*. Para o cálculo da equação acima, considerou-se dN_a/dE' um histograma de *N* intervalos de energia, o que implica que a eq(4.9) fica:

$$(S_{1000})_{a=\gamma,e,\mu} = \sum_{Energia} N^0_{partículas\,"a"/\,tanque} \,.\, fração \text{ de } partículas_{energiaE} \,.\, f_{pmt}(E')_a$$

$$= \sum_{i=1}^{\substack{N\,intervalos \\ de\;energia}} (\rho_{1000})_a \, Area_a \frac{N(i)_a}{N_{a\,total}} f_{pmt}(i)_a \tag{4.10}$$

Tanto para a área efetiva quanto para a resposta do detector são considerados resultados obtidos pela Colaboração *Auger*,[45,46] que se encontram na tabela 4.1 ($E_{intervalo}$ é a energia correspondente ao centro do intervalo considerado, em GeV).[xviii] A figura 4.8 mostra um exemplo da resposta dos tanques *Cherenkov* para partículas incidentes verticalmente.

Tabela 4.1: Parâmetros utilizados no cálculo de S_{1000}.

	γ	e±	μ±
Área (m²)	10,68	10,68	10,0
f_{pmt} (VEM/tanque)	26,4[$E_{intervalo}$(GeV)-0,0003]	34,2[$E_{intervalo}$(GeV)-0,0029]	3,0

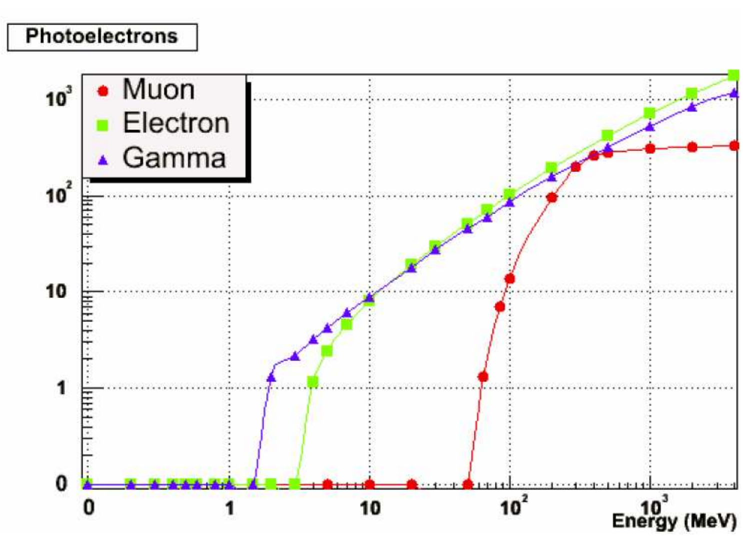

Fig. 4.8: Resposta de um tanque *Cherenkov* para partículas verticais em função da energia incidente, em escala logarítmica partindo do zero [sic!]. Fonte: referência 45.

A figura 4.9 mostra uma distribuição para r = 1000 m do número de partículas dentro de um tanque do *Auger* em função da energia.[xix] Essa distribuição, quando multiplicada pela

[xviii] Esta parametrização reflete a resposta média do tanque. A rigor, a própria resposta do detector apresenta flutuações que, caso consideradas, diminuem ainda mais a resolução de energia na reconstrução de eventos.

[xix] Para cada chuveiro, essa distribuição apresenta flutuações intrínsecas que afetam o sinal S_{1000}.

resposta do detector (cf. tabela 4.1) fornece o valor de S_{1000} em cada intervalo de energia, de acordo com a eq(4.10). Somando todas as contribuições, obtém-se o sinal S_{1000} de cada componente de um chuveiro.

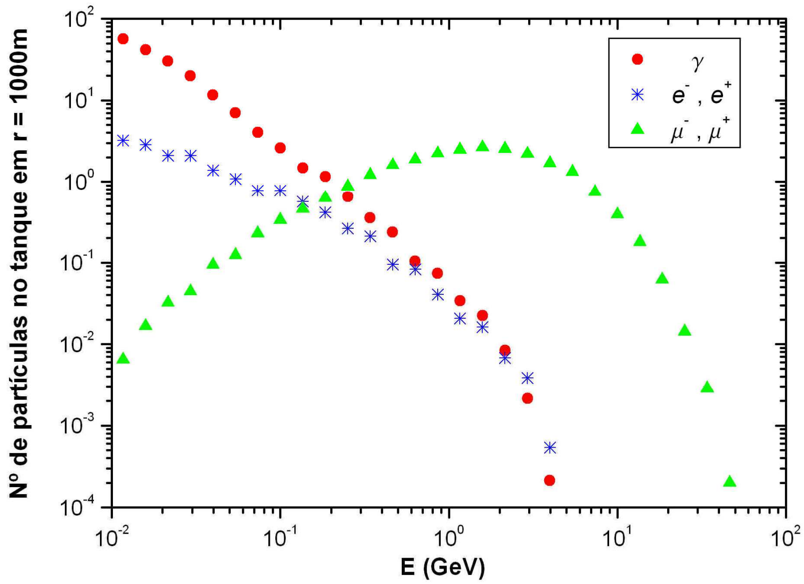

Fig. 4.9: Distribuição de energia das partículas no tanque a 1000 m do eixo de um chuveiro com energia primária E = 10^{19} eV. (*AIRES/QGSJET*, *thinning* relativo = 10^{-8}).

A figura 4.10 mostra o resultado das flutuações de S_{1000} obtidas para cada componente considerada de vários chuveiros: apesar de todas as etapas envolvidas no cálculo, as flutuações no sinal devido aos fótons seguem surpreendentemente uma distribuição estritamente lognormal,[xx] mantendo o efeito existente na distribuição de ρ_{1000}. As flutuações na componente muônica seguem vagamente uma lognormal, enquanto que a componente eletrônica difere totalmente ao seguir um decaimento exponencial. Entretanto, tal resultado talvez tenha como causa o baixo número de múons e elétrons presentes em cada chuveiro, devido ao nível de *thinning*[xxi] utilizado

[xx] De fato, a curva relacionada às flutuações de S_{1000} para os fótons foi a lognormal com menor χ^2 obtido no presente trabalho.

[xxi] Algoritmo adotado para energias abaixo de uma fração da energia primária, em que apenas uma pequena fração de partículas dentre aquelas produzidas em uma interação são seguidas, com uma posterior compensação estatística.

(10^{-5}). Assim, aliadas às flutuações físicas naturais, podem estar flutuações artificiais introduzidas pelo processo de *thinning* do programa de simulação.

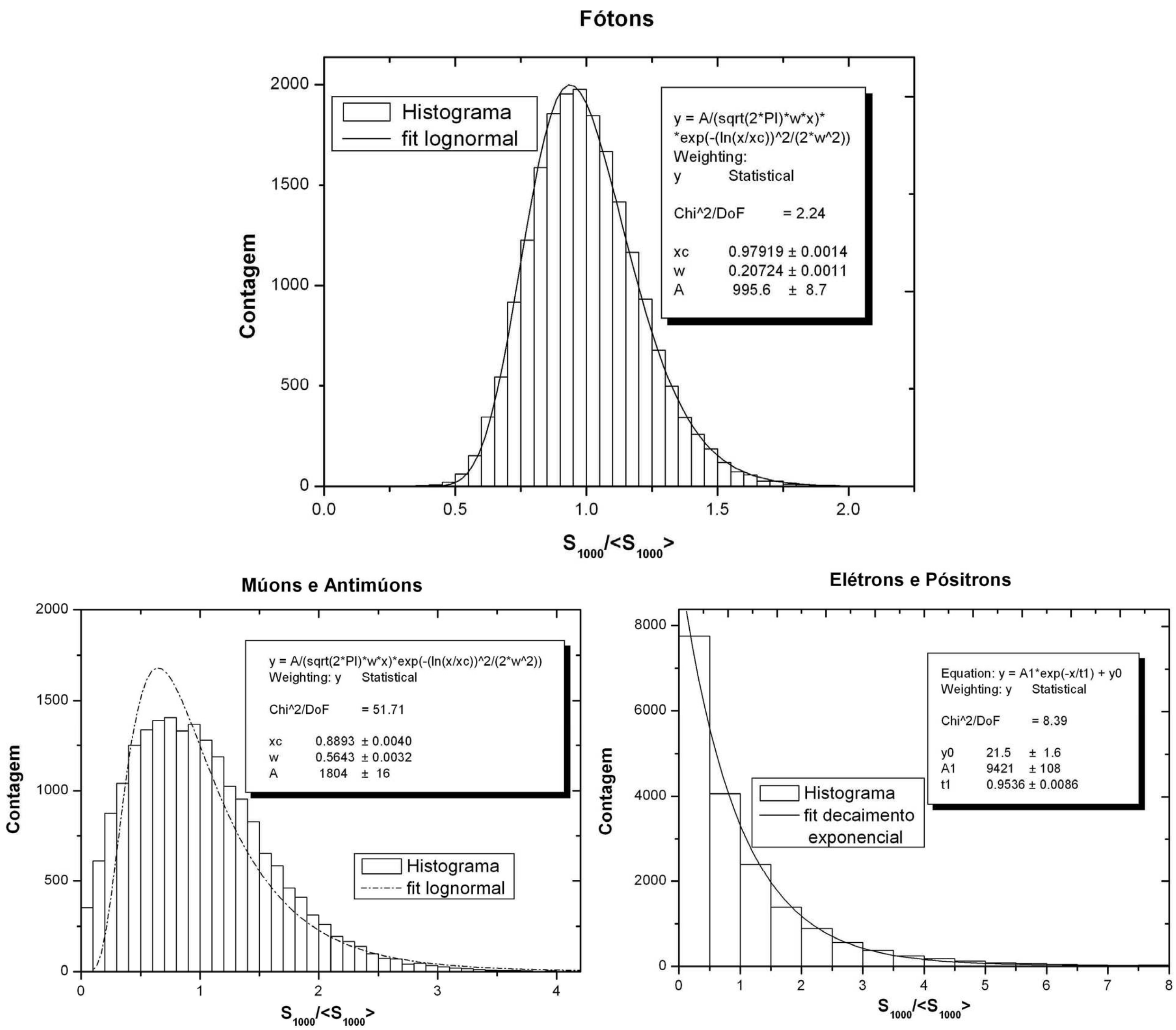

Fig. 4.10: Flutuações de S_{1000} nos tanques do *Auger* obtidas para cada componente com 2.10^4 chuveiros simulados (*AIRES/QGSJET, thinning relativo* = 10^{-5}).

O sinal total é a soma de S_{1000} das três componentes (cf. fig.4.11). Apesar da maioria dos fótons no tanque possuir baixas energias, é essa a principal componente do S_{1000} total, devido ao fato de sua concentração no máximo ser duas ordens de grandeza maior que as outras (cf.

fig.4.9). Assim, as flutuações intrínsecas de S_{1000} total seguem uma distribuição lognormal, implicando que a resolução de energia também está sujeita a esta distribuição, com o parâmetro de forma σ = 0,22. Se forem considerados os erros dos parâmetros da eq(4.8), as incertezas tendem a aumentar, diminuindo ainda mais a resolução de energia.

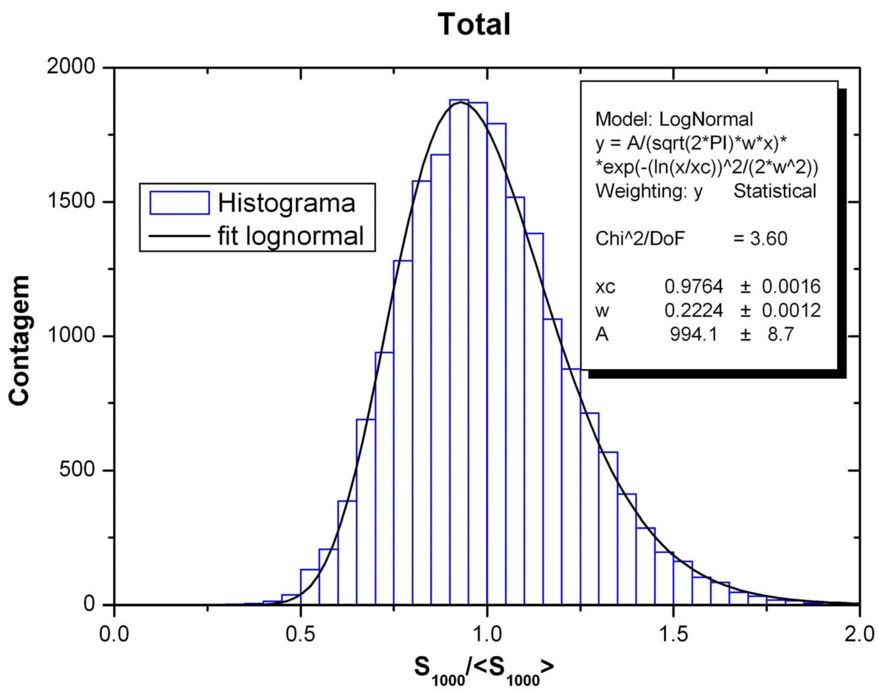

Fig. 4.11: Flutuações de S_{1000} total nos tanques do *Auger* obtidas com 2.10^4 chuveiros simulados (*AIRES/QGSJET, thinning* relativo = 10^{-5}).

4.2 CONVOLUÇÃO DO FLUXO PROPAGADO

Uma vez mostrado que a forma da resolução de energia do Observatório *Pierre Auger* tende a ser lognormal, fez-se a convolução do espectro propagado incidente na Terra com esta resolução,[47] utilizando-se o formalismo apresentado nos capítulos anteriores. A figura 4.12 mostra o resultado do processo de convolução (cf. seção 2.2) obtido numericamente a partir do fluxo propagado determinado segundo a abordagem analítica (cf. seção 3.3). Além do aumento da normalização do fluxo nessa faixa de energia, o efeito da resolução de energia lognormal é atenuar o corte GZK, que passa de uma queda abrupta para uma transição suave à medida que σ aumenta. O efeito GZK continua existindo, porém passa a ocorrer em energias cada vez maiores.

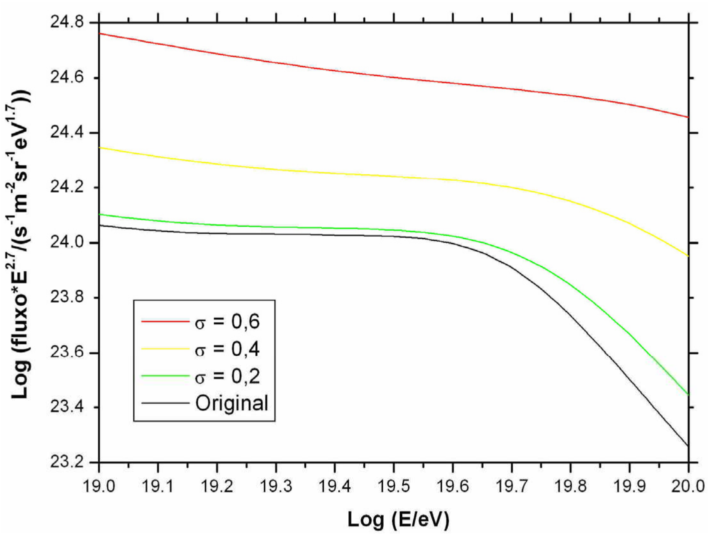

Fig. 4.12: Fluxos cosmológicos propagados pela abordagem analítica e convoluídos numericamente com resoluções de energia lognormais. ($\gamma = 2{,}7,\ \Omega_\Lambda = 0{,}76,\ z_{max} = 0{,}5$)

Para uma melhor compreensão da dependência destes resultados com o parâmetro de forma σ, a figura 4.13 mostra as mesmas curvas, porém normalizadas de modo que possuam em comum o fluxo referente à energia $E_N = 10^{19,5}$ eV.

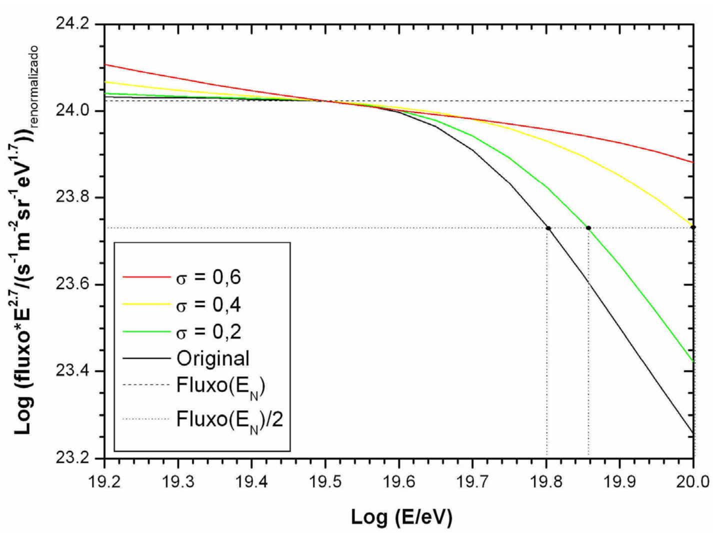

Fig. 4.13: Mesmos fluxos da fig.4.12, porém renormalizados para terem o mesmo valor na energia $E_N = 10^{19,5}$ eV. Os pontos de intersecção com a reta pontilhada inferior indicam a energia E_{GZK} correspondente à curva.

Na mesma figura, a linha horizontal inferior indica o fluxo correspondente à metade do fluxo em E_N. Como discutido no capítulo anterior, é útil definir a energia GZK como aquela em que o fluxo cai à metade do valor que teria segundo a extrapolação da lei de potência, sem perdas de energia (na figura 4.13, este valor está representado aproximadamente pela linha horizontal superior). Assim, para cada σ, obtém-se um valor diferente para E_{GZK}, dado pela intersecção da linha inferior com a curva correspondente ao σ considerado. Para o fluxo original, E_{GZK} = 6,3 10^{19} eV, enquanto que para $\sigma = 0{,}2$ e $\sigma = 0{,}4$, o valor sobe para $E_{GZK} = 7{,}2\ 10^{19}$ eV e $E_{GZK} = 10^{20}$ eV, respectivamente. A resolução de energia lognormal mascara portanto o efeito GZK ao empurrar o corte GZK para energias mais altas. Experimentalmente, tal efeito é extremamente indesejável, pois além da questão sobre a existência ou não do corte GZK, surge a complicação de onde procurá-lo. Além disso, a própria questão de sua existência fica comprometida, pois como há resultados experimentais conflitantes acerca do corte GZK, a presença de um efeito GZK atenuado não auxilia a resolução do enigma, ficando exatamente no meio termo sobre sua comprovação.

Novamente, vale ressaltar que a resolução de energia estimada na seção 4.1 ($\sigma = 0{,}22$) considera apenas flutuações intrínsecas no sinal S_{1000}, devendo ser portanto considerada como um limite inferior no atual estágio do Observatório *Pierre Auger*. Assim, é perfeitamente plausível que a resolução total esteja em torno de $\sigma = 0{,}3$, com talvez um limite superior $\sigma = 0{,}4$.

Para comparação de resultados, a convolução e propagação do fluxo nas mesmas condições foram feitas por simulação de Monte Carlo, segundo o algoritmo desenvolvido na seção 3.2.2. A figura 4.14 mostra tais resultados comparados aos obtidos analiticamente. Ao contrário do que foi feito no final do capítulo anterior, agora não há como normalizar as curvas considerando-se uma mesma energia de referência, devido ao efeito de borda introduzido pela convolução. Assim, cada curva foi normalizada igualando-se seu valor em um dado intervalo com o correspondente valor analítico. A escolha do intervalo de referência para cada curva foi arbitrária, porém estando na região central, de modo a não ser nem afetado pela região de borda, nem pela região em torno de 10^{20} eV, em que ocorrem maiores flutuações devido ao menor número de eventos.

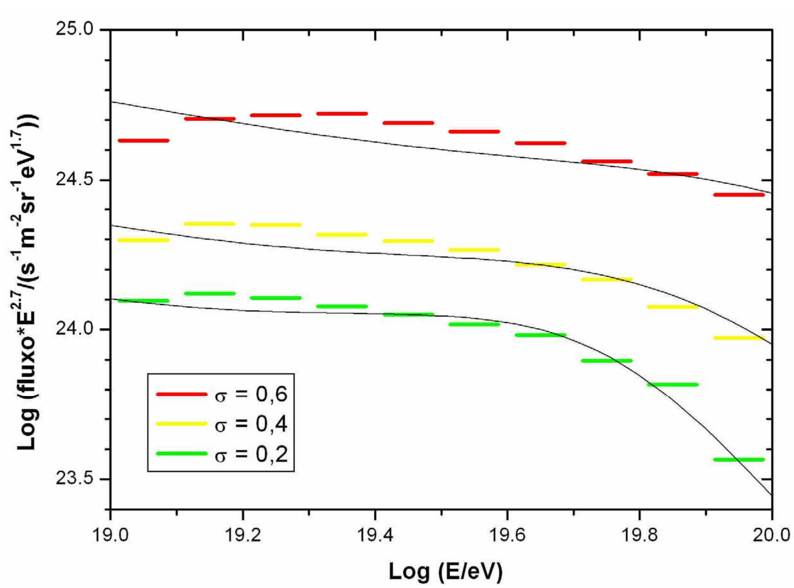

Fig. 4.14: Fluxos cosmológicos propagados e convoluídos por simulações de Monte Carlo, comparados com os resultados analíticos (linhas contínuas). Foram considerados 5.10^4 eventos com $\gamma = 2{,}7,\ \Omega_\Lambda = 0{,}76,\ z_{max} = 0{,}5$, E_{min}= 10^{19} eV.

Como discutido antes, para menores energias ocorre o efeito de borda, devendo a análise ser feita em energias maiores, perto da região do corte GZK. Nessa região, os resultados dos fluxos obtidos por cada método são compatíveis entre si, mesmo sendo a escolha da normalização arbitrária.

Para diminuir o efeito de borda, uma possibilidade seria diminuir a energia mínima de injeção dos prótons para valores menores que 10^{19} eV, o que garantiria que para energias logo acima deste valor não haveria o efeito de borda, porém isto reduziria o número de eventos na região do corte GZK. Como conseqüência, um maior número de eventos precisaria ser sorteado para se obterem os mesmos resultados na região GZK, implicando em um maior tempo computacional requerido.

Para energias finais maiores que 10^{20} eV, os resultados das simulações serão analisados por meio de três parâmetros, devido aos poucos eventos nessa faixa de energia. Para um dado σ, considerando a probabilidade de sobrevivência de partículas injetadas com $E > 10^{20}$ eV como sendo a razão entre o número de eventos propagados N_{σ}^{0} que permanecem com energia maior que este valor e o número de eventos injetados $N_{injetado}^{0}$ a partir dessa energia, então ela é, em porcentagem:

$$Prob(E > 100 EeV)_{\sigma} = 100\left(\frac{N_{\sigma}^{0}}{N_{injetado}^{0}}\right)_{E>100EeV} . \tag{4.11}$$

Uma medida da atenuação do efeito GZK pode ser dada pelo fator R_{σ}, que indica quantas vezes maior é o fluxo integral convoluído em relação ao fluxo integral apenas propagado previsto pelo efeito GZK para $E > 10^{20}$ eV. Tal fator pode ser dado, nessa faixa de energia, pela razão entre o número de eventos convoluídos para um dado σ e o número de eventos propagados sem convolução:

$$R_{\sigma} = \left(\frac{N_{convoluído(\sigma)}^{0}}{N_{propagadoGZK}^{0}}\right)_{E>100EeV} \tag{4.12}$$

Assim, devido à resolução de energia finita, o excesso de eventos obtidos acima do limite imposto pelo efeito GZK é, em porcentagem:

$$Exc_{\sigma} = 100\left(\frac{N_{convoluído(\sigma)}^{0} - N_{propagadoGZK}^{0}}{N_{propagadoGZK}^{0}}\right)_{E>100EeV} = 100(R_{\sigma} - 1) \tag{4.13}$$

A tabela 4.2 mostra os resultados obtidos com a simulação de Monte Carlo, em que do total de 5.10^4 eventos sorteados e propagados, apenas 984 foram injetados com energia maior que 10^{20} eV e destes somente 18 conseguiram chegar à Terra ainda com energia acima deste valor.

Tabela 4.2: Atenuação do efeito GZK para E > 100 EeV devido à resolução de energia

	Parâmetro de forma σ (lognormal)			
	0	0,2	0,4	0,6
$Prob_\sigma$ (%)	1,83	2,34	2,74	5,08
R_σ	1	1,28	1,50	2,78
Exc_σ (%)	0	27,78	50,00	177,78

Pela tabela, nota-se que para $\sigma = 0,4$ e E > 100 EeV, o excesso de eventos obtidos é 50% maior que o esperado devido ao efeito GZK. Um detalhe a ser ressaltado sobre a resolução de energia é que, conforme visto no capítulo 2, o parâmetro de forma σ da lognormal não é o desvio padrão da energia E, e sim de ln$E$. A figura 4.14 mostra a relação entre ambos os desvios padrão. Para valores até 0,2 eles essencialmente coincidem, porém a partir deste ponto começam a diferir.

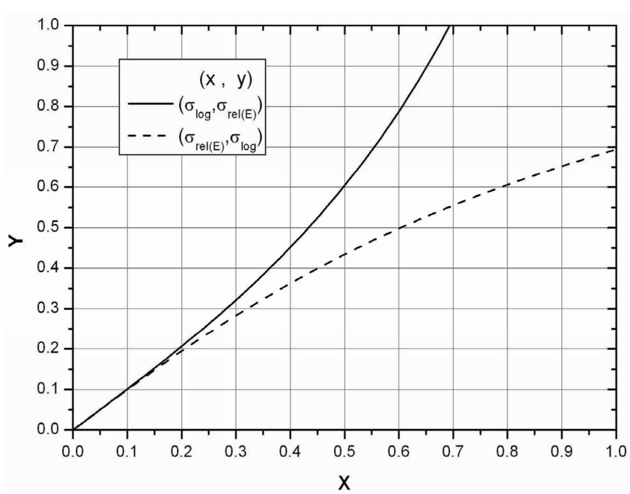

Fig. 4.15: Comparação entre o parâmetro de forma da lognormal (σ_{log}), que representa o desvio padrão de ln$E$, e o desvio padrão relativo da energia ($\sigma_{rel(E)}$).

O efeito da atenuação do corte GZK verificado neste capítulo devido a resoluções de energia lognormais se deve principalmente ao fato destas distribuições possuírem longas caudas, em comparação com as distribuições gaussianas. Como o aparecimento de longas caudas tende a ser verificado (cf. seção 2.1) mesmo que a resolução de energia não seja exatamente lognormal, os efeitos no fluxo convoluído, como presença do corte GZK atenuado, devem ser basicamente os mesmos considerando-se outras resoluções de energia com caudas longas,[48] como a distribuição de *Landau* e também a de *Moyal*.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Utilizando dois métodos distintos porém complementares, o analítico e o de simulações de Monte Carlo, foi estudada a propagação de raios cósmicos ultra-energéticos pelo meio intergaláctico até a Terra, com a devida determinação do fluxo propagado, que manifesta o chamado corte GZK. Em comum para ambos os métodos estão apenas as expressões calculadas e utilizadas para as perdas de energia por *redshift*, produção de pares e^-e^+ e fotoprodução de píons. Os resultados obtidos por cada método foram essencialmente os mesmos, demonstrando com sucesso a consistência com que os métodos foram utilizados.

Considerando a abordagem analítica dentro da aproximação da perda contínua de energia, "ajustes finos" podem ser feitos em cada caso: a) a produção de pares pode ser tratada considerando a massa finita do próton, o que implica em energias de recuo do próton não nulas, e introduzindo correções na seção de choque devido à distinguibilidade entre elétrons e pósitrons na interação com o próton;[40,49] b) como a densidade de matéria Ω_m utilizada nas perdas por *redshift* inclui a matéria escura, que não obedece à lei de radiação de corpo negro, então novas interações entre raios cósmicos e essa matéria podem existir e talvez sejam significantes nos processos de perda de energia; c) apesar da aproximação por perda contínua utilizada na fotoprodução de píons ter gerado resultados compatíveis com os resultados de Monte Carlo, em que a natureza estocástica das interações é devidamente tratada, para energias acima de 10^{21} eV pequenos desvios começam a aparecer, devendo ser utilizada a abordagem da equação cinética de transporte, que decorre da conservação do número de prótons e inclui as flutuações inerentes às interações.[40,50]

As simulações de Monte Carlo podem ser incrementadas adicionando-se campos magnéticos e considerando as trajetórias difusas no espaço tridimensional. Além disso, pode-se ir além da aproximação de *leading particle* e considerar o desenvolvimento de partículas secundárias decorrentes das interações, como fótons e neutrinos.[51]

A previsão teórica do corte GZK pode ter sua comprovação experimental dificultada pela resolução de energia finita dos aparatos de detecção. Foram mostrados alguns indícios de que, tanto em geral quanto no caso específico do Observatório *Pierre Auger*, esta resolução tende a ser distribuída segundo lognormais. Não obstante, mecanismos que envolvam processos de ramificação, tais como processos de degradação de energia durante a propagação de raios cósmicos ou desenvolvimento de chuveiros atmosféricos, em geral são geradores fundamentais de distribuições lognormais. As flutuações decorrentes na propagação são fundamentais para a determinação de fontes e mecanismos de aceleração de raios cósmicos ultra-energéticos, porém desde que o fluxo primário no topo da atmosfera seja conhecido. No estágio atual de conhecimento, o grande desafio é justamente a determinação deste fluxo primário, de modo que as flutuações mais importantes são aquelas que ocorrem nos chuveiros atmosféricos e que são responsáveis pela resolução de energia dos grandes arranjos experimentais, inclusive do Observatório *Pierre Auger*.

Uma vez conhecido o fluxo diferencial propagado, foi feita a convolução deste fluxo com distribuições de erros lognormais referentes à resolução de energia, novamente por ambas as abordagens, a analítica e a de simulações com algoritmos de Monte Carlo. Os efeitos observados sobre o fluxo propagado foram os mesmos: a) o corte GZK pode ser severamente atenuado, passando de uma queda abrupta no fluxo para uma transição gradual, dependendo de quão grande é o parâmetro de forma σ da lognormal referente à resolução de energia; b) o valor da energia GZK a ser observada no fluxo convoluído (e portanto no observado) é transladada para energias maiores do que o previsto teoricamente. Para $\sigma = 0,4$, essa energia passa de $E_{GZK} = 6,3.10^{19}$ eV (sem convolução) para $E_{GZK} = 10^{20}$ eV. Para essa nova energia, o fluxo diferencial é 3,5 vezes menor que o valor correspondente ao fluxo na energia GZK real (assumindo o índice espectral $\gamma = 2{,}7$), o que leva a um aumento dos erros estatísticos. Considerando ainda esta mesma resolução, o fluxo convoluído (integral) para energias acima de 10^{20} eV tende a apresentar um excesso de eventos da ordem de 50% em relação ao fluxo real que seria medido no topo da atmosfera caso houvesse acesso direto a ele.

Tais efeitos observados são extremamente indesejáveis em Física de raios cósmicos de altas energias que lida com fluxos gerados por espectros fortemente decrescentes. No caso específico do Observatório *Pierre Auger*, que pretende por fim ao debate sobre a existência ou não do corte GZK e acabar com a aparente discrepância entre os resultados obtidos pelos dois últimos maiores experimentos de raios cósmicos, HiRes e AGASA, tais efeitos devem ser considerados na determinação do fluxo primário.

O presente trabalho apresentou a abordagem direta sobre convolução, em que se supõe a forma do espectro inicial de injeção e em seguida é feita a propagação e convolução com a resolução de energia. É este fluxo convoluído que deve ser comparado com o fluxo medido. Entretanto, uma vez determinados os efeitos do processo de convolução, a conseqüência natural do presente trabalho seriam estudos sobre o processo inverso de deconvolução (*unfolding*),[52] visando calcular o fluxo real primário a partir do fluxo medido (e portanto convoluído naturalmente no processo de detecção). Recomenda-se, portanto, que tais estudos sejam feitos pela Colaboração *Pierre Auger* e técnicas de deconvolução passem a ser usadas na determinação do fluxo primário de raios cósmicos de energia ultra-alta, para que a existência (ou ausência) do real efeito GZK possa ser deslumbrada.

6 REFERÊNCIAS

1. HOERANDEL, J. *On the knee in the energy spectrum of cosmic rays*. **Astropart. Phys.**, v. 19, p. 193, 2003.
2. PENZIAS, A.A.; WILSON, R.W. *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080Mc/s*. **Ap. J.**, v. 142, p. 419, 1965.
3. DICKE, R.H; PEEBLES, P.J.E.; ROLL, P.G.; WILKINSON; D,T. *Cosmic Black-Body Radiation*. **Ap. J.**, v. 142, p. 414, 1965.
4. GREISEN, K. *End to the Cosmic Ray Spectrum?* **Phys. Rev Lett.**, v. 16, p. 748, 1966.
5. ZATSEPIN, T.; KUZMIN, V.A. *Upper limit of the spectrum of cosmic rays*. **JETP Lett.**, v. 4, p. 78, 1966.
6. PENZIAS, A.A. *The Origin of Elements*. **Nobel Lecture**, 1978. Disponível em: <http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1978/penzias-lecture.pdf>
7. LINSLEY, J. *Evidence for a Primary Cosmic-Ray Particle with Energy 10^{20} eV*. **Phys. Rev. Lett**., v. 10, p. 146 , 1963.
8. LAWRENCE, M.A.; REID, R.J.O; WATSON, A.A. *The cosmic ray energy spectrum above $4*10^{17}$ eV as measured by the Haverah Park array*. **J. Phys. G**, v. 17, p. 733, 1991.
9. WINN, M.M. et al. *The cosmic-ray energy spectrum above 10^{17} eV*. **J. Phys. G**, v. 12, p. 653, 1986.
10. BIRD, D.J. et al. *Evidence for correlated changes in the spectrum and composition of cosmic rays at extremely high energies*. **Phys. Rev. Lett**., v. 71, p. 3401, 1993.
11. TAKEDA, M. et al. *Extension of the Cosmic-Ray Energy Spectrum beyond the Predicted Greisen-Zatsepin-Kuz'min Cutoff*. **Phys. Rev. Lett.**, v. 81, p. 1163, 1998. TAKEDA, M. et al *Energy determination in the Akeno Giant Air Shower Array experiment*. **Astropart. Phys.**, v. 19, p. 447, 2003.
12. ABBASI, R.U. et al. [High Resolution Fly's Eye Collaboration] *Observation of the ankle and evidence for a high-energy break in the cosmic ray spectrum*. **Phys. Lett.**, v. B619, p. 271, 2005.
13. SHINOZAKI, K. *AGASA results*. **Nucl. Phys. Proc. Suppl.**, v. 151, p. 3, 2006.
14. ABBASI, R.U. et al. *Monocular measurement of the spectrum of UHE cosmic rays by the FADC detector of the HiRes experiment*. **Astropart. Phys.**, v. 23, p. 157, 2005.

15. OLINTO, A.; DE MARCO, D.; BLASI, P. *On the statistical significance of the GZK feature in the spectrum of ultra-high energy cosmic rays*. **Astropart. Phys.**, v. 20, p.53, 2003.

16. STANEV, T. *On the Luminosity of the Ultra High Energy Cosmic Rays Sources*, 2003. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0303123>

17. Design Report of the *Pierre Auger* Observatory, 1997. Disponível em: <http://www.auger.org/admin/DesignReport/index.html>

18. TRIBELSKY, M.I. *Tails of probability density for sums of random independent variables*, 2001. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/math.PR/0106037>

19. CROW, E.D.; SHIMIZU, K.S. **Lognormal distributions: theory and applications**. Marcel Dekker Inc., 1988.

20. ROMEO, M.; DA COSTA, V.; BARDOU, F. *Broad distributions effects in sums of lognormal random variables*. **Eur. Phys. J. B**, v. 32, p. 513, 2003.

21. DA COSTA, V. et al. *Experimental evidence and consequences of rare events in quantum tunneling*. **Eur. Phys. J. B**, v. 13, p. 297, 2000.

22. BEAULIEU, N. et al. *Estimating the distribution of a sum of independent lognormal random variables*. ***IEEE Trans. Commun***. v. 43, p. 2869, 1995.

23. ULRICH, H. et al. (KASCADE Collaboration**)** *Primary energy spectra of cosmic rays selected by mass groups in the knee region*. **Proc. 27th ICRC**, Hamburgo, p. 97, 2001.

24. CRONIN, J. *The highest-energy cosmic rays*, 2000. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0402487>

25. BLUMENTHAL, G.R. *Energy Loss of High-Energy Cosmic Rays in Pair Producing Collisions with Ambient Photons*. **Phys. Rev. D**, v.1,nº 6, p.1596, 1970.

26. STECKER, F. W. *Effect of Photomeson Production by the Universal Radiation Field on High-Energy Cosmic Rays*. **Phys. Rev. Lett.**, v.21, p. 1016, 1968.

27. BETHE, H.; HEITLER, W. *On the Stopping of Fast Particles and on the Creation of Positive Electrons*. **Proc.Roy.Soc. A**, v. 146, p. 83, 1934.

28. JAUCH, J.M.; ROHRLICH, F. **Theory of Photons and Electrons**.Addison-Wesley, 1955.

29. GLUCKSTERN, R.L.; HULL, M.H. *Polarization Dependence of the Integrated Bremsstrahlung Cross Section*. **Phys.Rev.**, v. 90, p. 1030, 1953. GLUCKSTERN, R.L.; HULL, M.H.; BREIT, G. *Polarization of Bremsstrahlung Radiation*. **Phys.Rev.**, v. 90, p. 1026, 1953.

30. HAGEDORN, R. **Relativistic kinematics: a guide to the kinematic problems of high-energy physics**. New York:W.A.Benjamin, 1964.

31. CHODOROWSKI, M. J. et al. *Reaction Rate and Energy-Loss Rate Photopair Production by Relativistic Nuclei*. **Astrophysical Journal**, v. 400, p.181, 1992.

32. BEREZINSKY, V.; GRIGORIEVA, S. *A bump in the ultra-high energy cosmic ray spectrum*. **Astron. Astroph**, v. 199, p. 1, 1988.

33. GEDDES, J. et al. *On the Injection Energy Distribution of Ultra-High Energy Cosmic Rays*. **Astrophysical Journal**, v. 459, p. 384, 1996.

34. PEEBLES, P.J.E. **Principles of physical cosmology**. New Jersey: Princeton Univ., 1993.

35. KOLB, E.W.; TURNER, M.S. **The early universe**. Redwood City, Calif.: Addison-Wesley, 1990.

36. WEINBERG, S. **Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity**. New York; Chichester: J. Wiley, 1972.

37. HOOG, D. *Distance measures in cosmology*, 2000. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/astro-ph /9905116>

38. W.-M. YAO et al. *Review of Particle Physics*. **J. Phys. G**, v. 33, p. 1, 2006. Disponível em: <http://pdg.lbl.gov/2006/hadronic-xsections/gammap_total.dat>

39. BLANTON, M.; P. BLASI, P.; OLINTO, A.V. *The Greisen–Zatzepin–Kuzmin feature in our neighborhood of the universe*. **Astropart. Phys.**, v. 15, p. 275, 2001.

40. BEREZINSKY, V.; GAZIZOV, A.Z.; GRIGORIEVA, S. *On astrophysical solution to ultra high energy cosmic rays*. **Phys.Rev. D**, v. 74, p. 043005, 2006.

41. GAISSER, T. **Cosmic Rays and Particle Physics**. Cambridge University Press, 1990.

42. SCIUTTO, S.J. *AIRES: A System for Air Shower Simulation*. **Proc. of the XXVI Int. Cosmic Ray Conf**., v. 1, p. 411, 1999. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/astro-ph /0106044> ; <www.fisica.unlp.edu.ar/auger/aires>

43. ZECH, A. *Resolution Studies of SD Reconstruction with Golden Hybrid Events*. Pierre Auger internal technical notes (GAP NOTE 2005-075).

44. ALLARD, D. et al. *A guide-line to the Auger-Surface-Detector Analysis*. Pierre Auger internal technical notes (GAP NOTE 2006-024).

45. ARISAKA, K. et al. *Determination of Absolute Energy & Composition with Minimum Systematic Uncertainties*. Pierre Auger internal technical notes (GAP NOTE 2004-037).

46. FERNANDEZ, G. et.al. *Surface Detector Response Using Lookup Table Based on GEANT4 Simulation*. Pierre Auger internal technical notes (GAP NOTE 2004-045).

47. ALBUQUERQUE, I.F.M.; SMOOT, G.F. *GZK cutoff distortion due to the energy error distribution shape*. **Astropart. Phys.**, v. 25, p. 375, 2006.

48. ESCOBAR, C. O.; Dos SANTOS, L.G.; VÁZQUEZ, R.A *The Effect of Non Gaussian Errors on the Determination of Steeply Falling Spectra,* 2002. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0202172>

49. BERG, R.A.; LINDER, C.N. *Electron-proton bremsstrahlung*. **Nucl. Phys.**, v. 26, p. 259, 1961.

50. BHATTACHARJEE, P; SIGL, G. *Origin and propagation of extremely high-energy cosmic rays*. **Phys. Rep.**, v. 327, p. 109, 2000.

51. ARMENGAUDA, E. et al. *CRPropa: A Numerical Tool for the Propagation of UHE Cosmic Rays, γ-rays and Neutrinos, 2006*. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0603675>

52. BLOBEL, V. *Unfolding methods in high-energy physics experiments*. CERN 8th school of computing, **CERN Yellow Report 85-09**. Disponível em: <http://cdsweb.cern.ch>

APÊNDICE 1

Relação entre a densidade de fótons nos referenciais S e S'

Seja dn uma densidade diferencial de fótons:

$$dn = \frac{dN}{dV} = \frac{dN}{d^3x} \ . \qquad \text{(A1.1)}$$

Como $d^4x = dx_0 d^3x$, então eq(A1.1) fica:

$$dn = \left(\frac{dN}{d^4x}\right) dx_0 \ . \qquad \text{(A1.2)}$$

Pela eq(A1.2), dn se transforma como a componente temporal dx_0 do quadrivetor posição, pois tanto dN quanto d^4x são invariantes de Lorentz. Como a energia ε do *quadrimomentum* se transforma como uma componente temporal, então:

$$\frac{dn}{\varepsilon} = \underbrace{\left(\frac{dN}{d^4x}\right)}_{in\,var\,iante} \overbrace{\left(\frac{dx_0}{\varepsilon}\right)}^{in\,var\,iante} = in\,var\,iante \qquad \text{(A1.3)}$$

Como conseqüência direta da eq(A1.3),

$$\frac{dn}{\varepsilon} = \frac{dn'}{\varepsilon'} \ . \qquad \text{(A1.4)}$$

No referencial S, seja dn a densidade de fótons <u>no intervalo</u> de energia $d\varepsilon$ e "ângulo" $d\cos\theta$, e $n(\varepsilon,\ \theta)$ a densidade de fótons <u>por unidade</u> de energia e "ângulo":

$$n(\varepsilon,\theta) = \frac{dn}{d\varepsilon\, d\cos\theta} \Rightarrow dn = n(\varepsilon,\theta) d\varepsilon\, d\cos\theta \ . \qquad \text{(A1.5)}$$

Sendo $n(\varepsilon)$ a densidade média de fótons por unidade de energia,

$$n(\varepsilon) = \int n(\varepsilon,\theta)\, d\cos\theta \, , \qquad \text{(A1.6)}$$

tem-se que, para uma distribuição isotrópica, *n(ε, θ)* é constante em *θ*, o que implica em:

$$n(\varepsilon)=\int_{-1}^{1} n(\varepsilon,\theta)\, d\cos\theta = n(\varepsilon,\theta)\int_{-1}^{1} d\cos\theta = 2\, n(\varepsilon,\theta) \;\therefore\; n(\varepsilon,\theta)=\frac{n(\varepsilon)}{2}. \qquad \text{(A1.7)}$$

Substituindo eq(A1.7) na eq(A1.5),

$$dn=\frac{n(\varepsilon)d\varepsilon\, d\cos\theta}{2} \;. \qquad \text{(A1.8)}$$

A eq(A1.5) no referencial S'é:

$$dn'=n'(\varepsilon',\theta')d\varepsilon'\, d\cos\theta' \;. \qquad \text{(A1.9)}$$

Substituindo a eq(A1.9) e a eq(A1.8) na eq(A1.4),

$$\frac{n'(\varepsilon',\theta')\, d\cos\theta'\, d\varepsilon'}{\varepsilon'}=\frac{n(\varepsilon)\, d\varepsilon\, d\cos\theta}{2\varepsilon}$$

$$n'(\varepsilon',\theta')\, d\cos\theta'\, d\varepsilon'=\frac{\varepsilon'}{2\varepsilon}n(\varepsilon)\, d\varepsilon\, d\cos\theta=\frac{\gamma(1+\cos\theta)}{2}n(\varepsilon)\, d\varepsilon\, d\cos\theta$$

$$\Rightarrow \int_{\theta'} n'(\varepsilon',\theta')\, d\cos\theta'\, d\varepsilon'=\int_{\theta}\frac{\gamma(1+\cos\theta)}{2}n(\varepsilon)\, d\varepsilon\, d\cos\theta$$

$$\therefore \quad n'(\varepsilon')\, d\varepsilon'=n(\varepsilon)\, d\varepsilon\int_{\theta}\frac{\gamma(1+\cos\theta)}{2}\, d\cos\theta \quad QED. \qquad \text{(A1.10)}$$

APÊNDICE 2

Cálculo das perdas de energia para uma época $z \neq 0$

Da eq(3.22) e da eq(3.23), têm-se as perdas de energia para produção de pares e^+e^-:

$$\beta_0(E)_{pp} = \left| \frac{1}{E}\frac{dE}{dx} \right|_{pp} = \frac{\alpha\, r_0^2 \left(m_e c^2 k_b T \nu\right)^2}{E\pi^2 (\hbar c)^3} \int_0^\infty \Phi(\xi)\left(e^{\xi\nu} - 1\right)^{-1} d\xi\,, \qquad \text{(A2.1)}$$

onde:

$$\xi = \frac{2\gamma\varepsilon}{m_e c^2} = \frac{2E\varepsilon}{m_p c^2 m_e c^2}\,, \qquad \nu = \frac{m_e c^2}{2\gamma\, k_b T} = \frac{m_e c^2 m_p c^2}{2E\, k_b T} \ . \qquad \text{(A2.2)}$$

A eq(A2.1) foi obtida para a distribuição de Planck (número de fótons por unidade de energia por unidade de volume) em $z = 0$. Para $z \neq 0$, deve-se levar em conta que a energia dos fótons, assim como a temperatura, aumenta de um fator (1+z), enquanto que o volume diminui com $(1+z)^3$:

$$\varepsilon \to (1+z)\varepsilon,\ T \to (1+z)T,\ \xi \to (1+z)\xi,\ \nu \to (1+z)^{-1}\nu,\ V \to (1+z)^{-3}V\ . \qquad \text{(A2.3)}$$

Entretanto, os produtos $\nu\xi$ e $T\nu$ permanecem invariantes. Logo, a distribuição de Planck para uma época z é:

$$n(\varepsilon, z) = \frac{dN^o}{d\varepsilon(z)dV(z)} = \frac{(1+z)^3}{(1+z)}\frac{dN^o}{d\varepsilon dV} \ . \qquad \text{(A2.4)}$$

Pela eq(A2.3) e eq(A2.4), eq(A.1) fica:

$$\beta(E,z)_{pp} = (1+z)^3 \frac{\alpha\, r_0^2 \left(m_e c^2 k_b T \nu\right)^2}{(1+z)E\pi^2 (\hbar c)^3} \int_0^\infty \Phi(\xi(1+z))\left(e^{\xi\nu} - 1\right)^{-1} d(\xi(1+z)) \ . \qquad \text{(A2.5)}$$

Apesar de ser a energia do fóton ε que sofre *redshift* (pois o efeito sobre o próton já está incluído nas perdas pela expansão adiabática), tem-se:

$$\xi(z) = (1+z)\xi = \frac{2E}{m_p c^2 m_e c^2}(1+z)\varepsilon = \frac{2\varepsilon}{m_p c^2 m_e c^2}(1+z)E\ . \tag{A2.6}$$

Assim, pode-se considerar matematicamente que a mudança em ξ ocorre devido à mudança na energia E do próton: $E \rightarrow (1+z)E$. Com isso, eq (A2.6) fica:

$$\beta(E,z)_{pp} = (1+z)^3 \beta_0(E(1+z))_{pp}\ , \tag{A2.7}$$

onde $\beta_0((1+z)E)_{pp}$ é a perda de energia no presente, mas calculada na energia "(1+z)E", e $\beta(E,z)_{pp}$ é o inverso do comprimento de atenuação de um próton com energia E na época correspondente ao *redshift z* no processo de produção de pares e^+e^-.

O mesmo procedimento é aplicado à fotoprodução de píons: pela eq(3.45), tem-se:

$$\beta_0(E)_{fp} = \left|\frac{1}{E}\frac{dE}{dx}\right|_{fp} = \frac{(m_p c^2)^2}{2E^2}\int_{\varepsilon'_{min}/2\gamma}^{\infty} n(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}\int_{\varepsilon'_{min}}^{2\gamma\varepsilon}\varepsilon'\sigma(\varepsilon')K(\varepsilon')d\varepsilon'\ . \tag{A2.8}$$

Sendo

$$\varepsilon' \rightarrow (1+z)\varepsilon',\quad \varepsilon \rightarrow (1+z)\varepsilon \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \rightarrow \frac{1}{(1+z)}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}\ , \tag{A2.9}$$

e considerando (A2.4), então eq(A2.7) fica:

$$\beta(E,z)_{fp} = (1+z)^3\frac{(m_p c^2)^2}{2E^2(1+z)^2}\int_{\varepsilon'_{\min}/2\gamma}^{\infty} n(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}\int_{\varepsilon'_{\min}}^{2\gamma\varepsilon}\varepsilon'(1+z)\sigma(\varepsilon'(1+z))K(\varepsilon'(1+z))d(\varepsilon'(1+z)). \tag{A2.10}$$

Como

$$\varepsilon'(z) = (1+z)\varepsilon'(E,\varepsilon) = \frac{E(1+\cos\theta)}{m_p c^2}(1+z)\varepsilon = \frac{\varepsilon(1+\cos\theta)}{m_p c^2}(1+z)E\ , \tag{A2.11}$$

então se pode considerar matematicamente que a causa da mudança em ε' é a mudança na energia E do próton: $E \rightarrow (1+z)E$. Com isso, eq (A2.10) fica:

$$\beta(E,z)_{fp} = (1+z)^3 \beta_0(E(1+z))_{fp} \ . \tag{A2.12}$$

Pela eq(A2.7) e eq(A2.12), o inverso do comprimento de atenuação devido às interações com a Radiação Cósmica de Fundo de prótons com energia *E* em uma época *z* é obtido a partir da expressão no tempo presente, calculada na energia (1+*z*)*E*:

$$\beta(E,z)_{RCF} = (1+z)^3 \beta_0(E(1+z))_{RCF} \ . \tag{A2.13}$$

A partir deste resultado, a transformação análoga para a função

$$b(E,z) = \left|\frac{dE}{dx}\right|_{(z)} \tag{A2.14}$$

é facilmente obtida:

$$\begin{aligned} b(E,z) &= E\left|\frac{1}{E}\frac{dE}{dx}\right|_{(z)} = E\beta(E,z) = E(1+z)^3 \beta_0(E(1+z)) \\ &= \frac{E(1+z)^3}{E(1+z)}\frac{d((1+z)E)}{dx} = (1+z)^2 \frac{d((1+z)E)}{dx}, \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad b(E,z) = (1+z)^2 b_0(E(1+z)) \, . \tag{A2.15}$$