

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Física Gleb Wataghin

Emaranhamento e Comunicação Quântica na Interação entre Cavidades Acopladas, Átomos e Íons Aprisionados

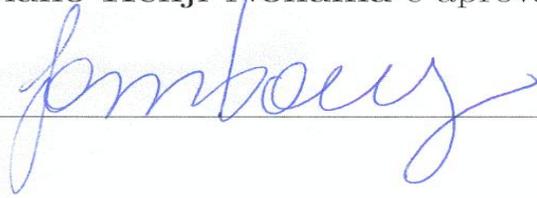
Fabiano Kenji Nohama
Aluno

José Antonio Roversi
Orientador

Suporte Financeiro:
CAPES

17 de Julho de 2008

Este exemplar corresponde à redação final da tese de doutorado defendida pelo aluno **Fabiano Kenji Nohama** e aprovada pela comissão julgadora.



FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

N69e

Nohama, Fabiano Kenji
Emaranhamento e comunicação quântica na interação
entre cavidades acopladas, átomos e íons aprisionados /
Fabiano Kenji Nohama. -- Campinas, SP : [s.n.], 2008.

Orientador: José Antonio Roversi.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Informação quântica. 2. Ótica quântica. 3. Campos
acoplados. 4. Interação átomo-campo. 5. Íons aprisionados.
I. Roversi, José Antonio. II. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

(vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Entanglement and quantum communication in the interaction among coupled cavities, atoms and trapped ions
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 1. Quantum information
 2. Quantum optics
 3. Coupled fields
 4. Atom-field interaction
 5. Trapped ions
- **Área de concentração:** Física Geral
- **Titulação:** Doutor em Ciências
- **Banca examinadora:**

Prof. José Antonio Roversi
Prof. Carlos Henrique Monken
Prof. Miled Hassan Youssef Moussa
Prof. Antonio Vidiella Barranto
Prof. Marcos Cesar de Oliveira
- **Data da defesa:** 11/04/2008
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



Secretaria de Pós-Graduação - Tel: (19) 3521-5305 FAX: (19) 3521-4142

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **FABIANO KENJI NOHAMA - RA 962290**, APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN" DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 11/04/2008.

COMISSÃO JULGADORA:


Prof. Dr. José Antonio Roversi – DEQ/IFGW/UNICAMP
(Orientador do Candidato)


Prof. Dr. Carlos Henrique Monken – DF/UFMG


Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa – IF/UFSCAR


Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco – DEQ/IFGW/UNICAMP


Prof. Dr. Marcos César de Oliveira – DFMC/IFGW/UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas - Instituto de Física Gleb Wataghin – Secretaria da Pós-Graduação
CP 6165 – CEP 13083-970 - Campinas - SP –
Fone: +55 19 3521-5305 / 3521-5279 / 3521-5280
e-mail: secpos@ifi.unicamp.br

Dedico esta tese à minha falecida mãe Helena e ao meu pai Ysao.

Agradecimentos

Ao Prof. José Antonio Roversi pela orientação,

Aos colegas do grupo de pesquisa,

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)
pelo apoio financeiro,

À minha família e aos meus amigos.

Resumo

Nesta tese estudamos um sistema de duas cavidades acopladas e sua interação com átomos de dois níveis bem como com íons aprisionados. Para o acoplamento entre as cavidades consideramos dois mecanismos distintos: (1) acoplamento pela sobreposição dos campos e; (2) acoplamento via fibra óptica.

Considerando a interação dos campos acoplados com átomos de dois níveis nós observamos o emaranhamento em um sistema tripartite (quando as cavidades estão interagindo com apenas um átomo). Também foi possível obter a transferência do estado quântico entre dois átomos localizado em cavidades diferentes. Além disso elaboramos uma proposta relativamente simples para a geração de estados maximamente emaranhados (estados de Bell) entre dois átomos utilizando as duas cavidades acopladas.

Por último, estudamos dois íons aprisionados, cada um deles localizado no interior de cavidades diferentes. As duas cavidades sendo conectadas por uma fibra óptica. Neste caso foi possível observar a transferência de um conjunto de estados de dois-qubits a partir dos graus de liberdade (de movimento e dos estados internos) de um dos íons para o outro, localizado em uma cavidade diferente.

Nas propostas envolvendo a transferência de estados quânticos e a geração de estados de Bell foram incluídos os efeitos de dissipação devido à presença de um reservatório de temperatura $T = 0K$. Com isso pudemos concluir que as propostas são confiáveis para as reais taxas de dissipação observadas em experimentos.

Abstract

In this thesis we studied a system of two coupled cavities and its interaction with two-level atoms and trapped ions. For the coupling between the cavities we considered two situations: (1) coupling due the overlap between the fields and; (2) coupling by optical fiber.

Considering the interaction of the coupled fields with two-level atoms we observed the entanglement in a tripartite system (when the cavities are interacting with only one atom). When both cavities are interacting with an atom it was possible to obtain the quantum state transfer between two atoms located in different cavities. Besides, we conceived a relatively simple proposal to the generation of maximally entangled states (EPR states) between two atoms using the two coupled cavities.

At last we studied two trapped ions, each one located inside different cavities. The two cavities are connected by an optical fiber, where it was possible to observe the transfer of a two-qubits set from the movement and internal states degrees of freedom of one of the ions to the other one, located in a different cavity.

In the proposals involving the quantum state transfer and the EPR state generation we included the dissipation effects due the presence of a reservoir at temperature $T = 0$. With this we concluded that the proposals are reliable considering dissipation rates observed in experiments.

Conteúdo

Introdução	1
1 Conceitos Fundamentais	4
1.1 Quantização do Campo Eletromagnético	4
1.1.1 Expansão em modos normais do campo	5
1.1.2 Quantização do campo	6
1.1.3 Estados de Fock	7
1.2 Interação da radiação com a matéria	9
1.2.1 Teoria semiclássica	9
1.2.2 Teoria Quântica	10
1.3 Aprisionamento de Íons em um Potencial Eletromagnético	13
1.3.1 Equações de movimento	14
1.3.2 Interação entre um íon aprisionado e uma cavidade eletromagnética	16
1.4 Emaranhamento de Sistemas Quânticos:	18
1.4.1 Medidas de Emaranhamento:	19
2 Dissipação em Sistemas Quânticos	22
2.1 Aproximação da Equação Mestra	22
2.2 Oscilador harmônico amortecido	26
2.3 Emissão Espontânea	29
2.4 Cavidade Eletromagnética Dissipativa	31
3 Acoplamento entre duas cavidades eletromagnéticas	34
3.1 Acoplamento direto	34
3.1.1 Diagonalização das Cavidades Acopladas	35
3.1.2 Mudança de Base	37
3.2 Acoplamento via fibra óptica	38

3.3	Realizações experimentais envolvendo cavidades eletromagnéticas e fibras ópticas	40
4	Interação entre átomos e cavidades acopladas	44
4.1	Dinâmica de emaranhamento na interação entre um átomo e duas cavidades acopladas	44
4.1.1	Hamiltoniano do Sistema	44
4.1.2	Evolução Temporal do Sistema	46
4.1.3	Análise do Emaranhamento do sistema	48
4.2	Transferência do estado quântico entre dois átomos usando campos acoplados	52
4.2.1	Evolução Temporal do Sistema	53
4.2.2	Transmissão de um Estado Quântico	56
4.2.3	Transferência de Estados Quânticos sob Dissipação	60
4.3	Geração de estados de Bell utilizando cavidades acopladas	64
4.3.1	Evolução temporal do sistema	65
4.3.2	Geração dos estados de Bell	68
4.3.3	Geração dos estados de Bell com dissipação	72
5	Comunicação entre íons aprisionados em cavidades acopladas por uma fibra óptica	76
5.1	Evolução temporal do sistema	77
5.2	Transmissão dos estados de dois qubits	82
5.3	Transferência do estado de dois qubits sob dissipação	85
6	Conclusões	92
	Apêndice	96
A	Equação mestra e operador densidade reduzido na transmissão dos estados de dois qubits	96
A.1	Banda Lateral Azul	96
A.2	Banda Lateral Vermelha	100
	Bibliografia	105

Introdução

O estudo da interação entre campos eletromagnéticos, átomos e íons tem fornecido diversos recursos para a análise de fenômenos fundamentais da física quântica, assim como propostas para a implementação em informação [1, 2] e computação quântica [3, 4], onde os átomos (ou íons) são normalmente usados para guardar informação quântica e os fótons para transportá-la.

Um dos aspectos mais abordados refere-se ao emaranhamento entre as partes que compõem estes tipos de sistemas e seus graus de emaranhamento. Em geral é observado a transferência de emaranhamento entre corpos massivos e campos eletromagnéticos. Além disso, existe bastante interesse em utilizar sistemas envolvendo átomos e campos para obter a geração de estados emaranhados com propriedades especiais, como por exemplo os estados de Bell em sistemas bipartite ou os estados GHZ e os estados Cluster para sistemas multipartite.

Roversi et al. [5] investigaram as interações de um par de átomos de dois níveis com uma cavidade de um único modo, onde foram observados as propriedades de emaranhamento quando um dos átomos está ressonante com o campo e o outro está dispersivo, i.e., longe da ressonância.

Franco et al. [6] apresentaram um esquema onde é possível gerar estados generalizados de Bernoulli em duas cavidades separadas usando um par de átomos de dois níveis inicialmente em um estado emaranhado. Referente a estados emaranhados multipartite, Guo et al [7] propuseram a geração de estados do tipo Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) e estados W para um modelo de N átomos de dois níveis idênticos interagindo com uma cavidade no regime dispersivo.

Outro tipo de proposta utilizada para aplicação em informação quântica envolve a interação de íons aprisionados com campos eletromagnéticos. Um exemplo deste tipo de proposta foi apresentado por Cirac e Zoller [8], onde temos íons em um arranjo de microarmadilhas. Nesse trabalho a manipulação individual de cada ion é feita através de um campo externo e a comunicação entre os sitios é feita pela interação coulombiana quando íons vizinhos são aproximados.

Além disso existem modelos envolvendo a interação entre cavidades eletromagnéticas e íons aprisionados, onde o campo também está quantizado. Neste sentido Semião et al [9] investigaram a geração de estados de Bell formados pelo movimento do íon e o campo da cavidade. Mundt et al [10, 11] apresentaram um aparato experimental onde é possível obter o acoplamento coerente entre íons de cálcio aprisionados numa armadilha imersa em uma cavidade óptica.

Também têm sido bastante estudados os protocolos de comunicação quântica entre dois subsistemas distantes entre si. O protocolo mais conhecido é o modelo de tele-

porte quântico, onde devemos ter duas pessoas em laboratórios distantes (usualmente apresentados na literatura como Alice e Bob) que compartilham um par de subsistemas desacoplados que se encontra em um estado maximamente emaranhado. Em seguida, Alice faz com que seu subsistema entre em contato com um terceiro corpo que se encontra no estado quântico que ela deseja transmitir. Depois de um dado tempo de interação Alice faz uma medida sobre este corpo. A transmissão de informação é completada após Bob executar uma operação unitária de rotação em seu respectivo par. Um caso de teleporte quântico bastante estudado envolve a comunicação entre dois átomos utilizando duas cavidades eletromagnéticas maximamente emaranhadas [12, 13].

Um protocolo de comunicação quântica mais básico foi apresentado por Cirac et al [14] e se refere a transferência do estado quântico, onde temos dois sistemas acoplados por um canal quântico. Este canal quântico pode corresponder a duas cavidades ópticas separadas por um espelho parcialmente refletor (para distâncias curtas), ou conectadas por uma fibra óptica (para distâncias longas). Dentro deste protocolo, Serafini et al [15] apresentaram um modelo onde um sistema de duas cavidades acopladas por uma fibra óptica é utilizado para realizar transferência do estado quântico entre dois átomos de dois níveis.

Nesta tese trabalhamos com um sistema formado por duas cavidades eletromagnéticas acopladas e sua interação com átomos ou íons aprisionados de dois níveis. Com este sistema estudamos o emaranhamento entre as partes que formam o sistema, obtivemos a geração de estados maximamente emaranhados e apresentamos propostas para a transferência dinâmica de estado quântico entre os átomos (ou íons).

Esta Tese está organizada da seguinte forma: No capítulo 1 faremos revisão de alguns conceitos fundamentais sobre quantização do campo eletromagnético e sua interação com a matéria. Além disso discutiremos sobre o método de aprisionamento de íons [16] e sobre o conceito de emaranhamento em sistemas quânticos.

No capítulo 2 vamos apresentar o sistema de cavidades acopladas, no qual consideramos dois tipos de acoplamento: (1) acoplamento dado pela sobreposição dos campos [17] e (2) acoplamento via fibra óptica [18].

No capítulo 3 apresentaremos o modelo utilizado para descrever sistemas quânticos dissipativos. Consideramos neste caso apenas o tratamento da equação mestra e sua aplicação em osciladores harmônicos, cavidades eletromagnéticas e átomos de dois níveis.

No capítulo 4 estudamos a interação entre as cavidades acopladas do capítulo 2 e átomos de dois níveis, onde apresentamos a evolução temporal do sistema e os resultados obtidos através da simulação do modelo proposto.

No capítulo 5 as cavidades estarão interagindo com íons aprisionados no lugar

dos átomos, acrescentando ao sistema o movimento de oscilação do íon. Para este sistema estaremos mais preocupados com a comunicação entre os dois íons através da interação deles com os campos acoplados.

Capítulo 1

Conceitos Fundamentais

Antes de iniciarmos a análise do sistema é mais conveniente apresentarmos uma revisão sobre alguns conceitos de Física Quântica referentes à teoria quântica do campo eletromagnético, aprisionamento de íons e emaranhamento entre partes de um sistema quântico.

Com esse objetivo iremos utilizar este capítulo para descrever a quantização do campo e sua interação com a matéria. Além disso, discutiremos sobre as técnicas de aprisionamento de íons (em especial sobre a armadilha de Paul) e as medidas de emaranhamento.

1.1 Quantização do Campo Eletromagnético

Na teoria clássica da radiação, as grandezas físicas do campo eletromagnético (campo elétrico \mathbf{E} e campo magnético \mathbf{H}) obedecem as equações de Maxwell, dadas no espaço livre por:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0; & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

com os vetores deslocamento \mathbf{D} e indutivo \mathbf{B} dados por:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{D}; \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}.\tag{1.2}$$

Aqui μ_0 e ϵ_0 são, respectivamente, a permissividade e a permeabilidade no espaço livre (sem carga) e satisfazem $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$ onde c é a velocidade da luz no vácuo. No caso do campo livre podemos obter, a partir das relações acima, a seguinte equação para o campo elétrico:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.3)$$

Para este projeto nos interessa apenas a quantização do campo eletromagnético no interior de uma cavidade. A extensão do modelo para casos mais gerais, como o campo eletromagnético no espaço livre sem fronteiras, pode ser vista no capítulo 2 do livro *Advanced Quantum Mechanics* de Sakurai [19] e no capítulo 1 do livro *Quantum Optics* de Scully e Zubairy [20].

1.1.1 Expansão em modos normais do campo

Seja o campo elétrico no interior de uma cavidade ressonante de comprimento L , polarizado no eixo x . Neste caso, a solução da equação (1.3) corresponde a expansão do campo em seus modos normais:

$$E_x(z, t) = \sum_j A_j q_j(t) \text{sen}(k_j z), \quad (1.4)$$

onde q_j é a amplitude do modo normal e $k_j = \frac{j\pi}{L}$.

Os coeficientes da expansão acima são dados por:

$$A_j = \left(\frac{2\nu_j^2 m_j}{V\epsilon_0} \right), \quad (1.5)$$

onde $\nu_j = \frac{j\pi c}{L}$ é a frequência do modo normal j , V é o volume da cavidade e m_j é uma constante com dimensões de massa.

A componente não nula do campo magnético H_y é obtida usando as equações de Maxwell e considerando a expansão (1.4) do campo elétrico:

$$H_y(z, t) = \sum_j A_j \frac{\dot{q}_j \epsilon_0}{k_j} \text{cos}(k_j z). \quad (1.6)$$

Conhecendo os campos elétrico e magnético podemos determinar a Hamiltoniana clássica do campo:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_V dV [\epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_y^2], \quad (1.7)$$

cuja integração é feita sobre o volume da cavidade. Substituindo as expansões (1.4) para E_x e (1.6) para H_y na equação (1.7), obtemos a Hamiltoniana em função das amplitudes dos modos normais q_j e sua derivada \dot{q}_j :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_j m_j \nu_j^2 q_j^2 + m_j \dot{q}_j^2 = \sum_j m_j \nu_j^2 q_j^2 + \frac{p_j^2}{m_j}, \quad (1.8)$$

onde $p_j = m_j \dot{q}_j$ é o momento canônico do j -ésimo modo. Podemos observar que a forma da Hamiltoniana (1.8) é análoga à soma das energias de osciladores independentes entre si. Logo, podemos dizer que cada modo do campo é dinamicamente equivalente a um oscilador harmônico.

1.1.2 Quantização do campo

O sistema dinâmico representado pela Hamiltoniana (1.8) pode ser quantizado identificando as variáveis canônicas q_j e p_j como operadores \hat{q}_j e \hat{p}_j que obedecem as seguintes relações de comutação:

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad [\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0. \quad (1.9)$$

É mais conveniente reescrever o problema em função dos operadores \hat{b}_j e \hat{b}_j^\dagger definidos pelas transformações canônicas abaixo:

$$\hat{b}_j e^{-i\nu_j t} = \frac{1}{\sqrt{2m_j\hbar\nu_j}} (m_j\nu_j\hat{q}_j + i\hat{p}_j); \quad \hat{b}_j^\dagger e^{i\nu_j t} = \frac{1}{\sqrt{2m_j\hbar\nu_j}} (m_j\nu_j\hat{q}_j - i\hat{p}_j). \quad (1.10)$$

Os operadores \hat{b}_j^\dagger e \hat{b}_j são chamados de operadores de criação e destruição, respectivamente. A razão para estes nomes será dada com mais detalhes na próxima seção.

Em função dos novos operadores, o Hamiltoniano (1.8) pode ser reescrito como:

$$\mathcal{H} = \hbar \sum_j \nu_j \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \frac{1}{2} \right). \quad (1.11)$$

A partir de (1.9) podemos escrever as relações de comutação dos operadores \hat{b}_j e \hat{b}_j^\dagger :

$$[\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] = \delta_{ij}; \quad [\hat{b}_i, \hat{b}_j] = [\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j^\dagger] = 0. \quad (1.12)$$

Em termos de \hat{b}_j e \hat{b}_j^\dagger os campos elétrico e magnético assumem a forma abaixo:

$$E_x(z, t) = \sum_j \mathcal{E}_j \left(\hat{b}_j e^{-i\nu_j t} + \hat{b}_j^\dagger e^{i\nu_j t} \right) \text{sen}(k_j z), \quad (1.13)$$

$$H_y(z, t) = -i\epsilon_0 c \sum_j \mathcal{E}_j \left(\hat{b}_j e^{-i\nu_j t} - \hat{b}_j^\dagger e^{i\nu_j t} \right) \cos(k_j z), \quad (1.14)$$

onde a quantidade $\mathcal{E}_j = \left(\frac{\hbar\nu_j}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2}$ tem as dimensões de um campo elétrico.

1.1.3 Estados de Fock

Primeiramente nos restringiremos a campos com um único modo de frequência ν com operadores de criação \hat{b}^\dagger e destruição \hat{b} . Seja $|n\rangle$ autoestado de energia de autovalor E_n :

$$\mathcal{H} |n\rangle = \hbar\nu \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (1.15)$$

Aplicando o operador \hat{b} à esquerda e utilizando a relação de comutação $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$, nós obtemos a relação abaixo:

$$\mathcal{H} \hat{b} |n\rangle = (E_n - \hbar\nu) \hat{b} |n\rangle. \quad (1.16)$$

Desta forma, podemos dizer que o estado:

$$|n-1\rangle = \frac{\hat{b}}{\alpha_n} |n\rangle \quad (1.17)$$

também é um autoestado de energia com autovalor reduzido $E_{n-1} = E_n - \hbar\nu$. A constante α_n é a constante de normalização do estado $|n-1\rangle$.

Repetindo o procedimento n vezes estaremos diminuindo a energia em intervalos de tamanho $\hbar\nu$ até obtermos a relação abaixo:

$$\mathcal{H} \hat{b} |0\rangle = (E_0 - \hbar\nu) |0\rangle, \quad (1.18)$$

onde E_0 é a energia do estado fundamental, indicando que a energia $(E_0 - \hbar\nu)$ do estado $\hat{b} |0\rangle$ é menor que E_0 . Como não são permitidas energias menores que a energia do estado fundamental devemos concluir que:

$$\hat{b} |0\rangle = 0. \quad (1.19)$$

O estado $|0\rangle$ é conhecido como estado de vácuo. Agora é possível obter a energia E_0 a partir das equações de autovalores:

$$\mathcal{H} |0\rangle = \frac{1}{2} \hbar \nu |0\rangle \Rightarrow E_0 = \frac{1}{2} \hbar \nu, \quad (1.20)$$

E, sabendo que $E_{n-1} = E_n - \hbar \nu$, podemos determinar o valor de E_n :

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \nu \quad (1.21)$$

Da equação (1.15) nós obtemos que:

$$\hat{b}^\dagger \hat{b} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (1.22)$$

Ou seja, os autoestados de energia também são autoestados do operador de número $\hat{n} = \hat{b}^\dagger \hat{b}$.

Agora podemos determinar o valor da constante de normalização α_n :

$$\langle n-1 | n-1 \rangle = \frac{1}{|\alpha_n|^2} \langle n | \hat{b}^\dagger \hat{b} |n\rangle = \frac{n}{|\alpha_n|^2} = 1. \quad (1.23)$$

Considerando a constante de normalização um número real temos $\alpha_n = \sqrt{n}$. Logo, a equação (1.17) pode ser escrita como:

$$\hat{b} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (1.24)$$

Podemos proceder de forma análoga com o operador \hat{b}^\dagger para obter a equação abaixo:

$$\hat{b}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (1.25)$$

A aplicação da equação acima repetidas vezes sobre o estado de vácuo nos leva à relação:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{b}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (1.26)$$

Observando a equação (1.21) podemos associar os autoestados de energia a presença de n quantas ou fótons de energia $\hbar \nu$. Os autoestados $|n\rangle$ são conhecidos como estados de Fock ou estados de número. Eles formam um conjunto completo de estados, ou seja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1. \quad (1.27)$$

Logo, podemos dizer que qualquer estado arbitrário do campo pode ser escrito como uma superposição dos estados de Fock:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \quad (1.28)$$

1.2 Interação da radiação com a matéria

Nesta seção discutiremos sobre o acoplamento entre um átomo de dois níveis com um modo do campo eletromagnético. Na primeira parte apresentaremos a teoria semiclássica da interação átomo-campo, onde o átomo é tratado como um sistema quântico de dois níveis e o campo é descrito classicamente. Em seguida consideraremos a teoria quântica, onde os dois subsistemas estão quantizados. Assim como foi feito na seção anterior, nos restringiremos ao caso onde o campo está confinado no interior de uma cavidade.

1.2.1 Teoria semiclássica

Um elétron de carga e e massa m interagindo com um campo eletromagnético externo é descrito pela seguinte Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 + eU(\mathbf{r}, t) + V(r), \quad (1.29)$$

onde $\hat{\mathbf{p}}$ é o operador momento canônico, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ e $U(\mathbf{r}, t)$ são respectivamente os potenciais vetor e escalar do campo externo e $V(r)$ é o potencial eletrostático, normalmente representado pelo potencial de ligação atômica.

No nosso caso nos restringimos ao calibre de radiação onde:

$$U(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.30)$$

O problema consiste de um elétron preso por um potencial $V(r)$ a um núcleo localizado na posição \mathbf{r}_0 . Quando o comprimento de onda do campo é muito maior que a dimensão do átomo ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$), podemos aplicar a aproximação de dipolo e escrever o potencial vetor como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(t) \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r})] = \mathbf{A}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_0} (1 + i\mathbf{k}\mathbf{r} + \dots) \approx \mathbf{A}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_0} = \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t), \quad (1.31)$$

A equação de Schrodinger para este problema (na aproximação de dipolo) é dada por:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\nabla - \frac{ie}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \right]^2 + V(r) \right\} \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (1.32)$$

Para simplificar a equação (1.32) podemos definir uma nova função $\phi(\mathbf{r}, t)$:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \exp \left[\frac{ie}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{r} \right] \phi(\mathbf{r}, t). \quad (1.33)$$

Substituindo (1.33) na equação de Schrodinger (1.32) obtemos:

$$i\hbar \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = [\mathcal{H}_0 - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)] \phi, \quad (1.34)$$

onde:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r), \quad (1.35)$$

é a Hamiltoniana não perturbada do elétron e usamos $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$. Logo, a Hamiltoniana total do sistema pode ser escrita como:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \quad (1.36)$$

no qual a Hamiltoniana de interação:

$$\mathcal{H}_1 = -e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t), \quad (1.37)$$

é dada em termos do campo \mathbf{E} , que é independente do calibre escolhido.

1.2.2 Teoria Quântica

Nesta seção ilustraremos a interação entre um átomo de dois níveis e um campo eletromagnético quando ambos estão quantizados. Na aproximação de dipolo o sistema é descrito pela seguinte Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_C - e\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}}, \quad (1.38)$$

onde \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_C são, respectivamente, as energias livres do átomo e do campo eletromagnético e \mathbf{r} é posição do elétron.

A energia livre do campo é dada em termos dos operadores de criação e destruição por:

$$\mathcal{H}_C = \hbar \sum_j \nu_j \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \frac{1}{2} \right). \quad (1.39)$$

Na aproximação de dipolo elétrico o operador campo elétrico é calculado na posição pontual do átomo. Considerando o átomo na posição z_0 , nós temos da equação (1.13) que:

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\epsilon} \sum_j \mathcal{E}_j \left(\hat{b}_j + \hat{b}_j^\dagger \right) \text{sen}(k_j z_0), \quad (1.40)$$

onde $\hat{\epsilon}$ é um vetor unitário de polarização do campo e $\mathcal{E}_j = \left(\frac{\hbar \nu_j}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2}$.

O Hamiltoniano livre do átomo \mathcal{H}_A e o operador $e\hat{\mathbf{r}}$ podem ser representados na base $\{|i\rangle\}$ de autoestados de energia livre do átomos como:

$$\mathcal{H}_A = \sum_i E_i |i\rangle \langle i|; \quad (1.41)$$

$$e\hat{\mathbf{r}} = \sum_{i,j} |i\rangle \langle i| e\hat{\mathbf{r}} |j\rangle \langle j| = \sum_{i,j} \vec{D}_{ij} |i\rangle \langle j|,$$

onde $\vec{D}_{ij} = e \langle i| \hat{\mathbf{r}} |j\rangle$ é o elemento de matriz de transição de dipolo elétrico.

Deve-se observar que os elementos de matriz de transição de dipolo diagonais \vec{D}_{ii} são nulos. Isto pode ser melhor ilustrado quando expressamos os elementos de matriz na base de autoestados $|\vec{r}\rangle$ do operador $\hat{\mathbf{r}}$:

$$e \langle i| \hat{\mathbf{r}} |i\rangle = e \langle i| \left(\int d^3\vec{r} |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| \right) \hat{\mathbf{r}} \left(\int d^3\vec{r}_1 |\vec{r}_1\rangle \langle \vec{r}_1| \right) |i\rangle = e \int d^3\vec{r} |\Psi_i(\vec{r})|^2 \vec{r}, \quad (1.42)$$

onde $\Psi_i(\vec{r}) = \langle \vec{r}|i\rangle$ é a amplitude de probabilidade do elétron na órbita correspondente à $|i\rangle$.

Como $|\Psi_i(\vec{r})|^2$ é uma função simétrica em \vec{r} enquanto o próprio \vec{r} é antisimétrico, tem-se que a integral em (1.42) tem valor nulo.

Para átomos de dois níveis, representados pelos estados fundamental (estado $|g\rangle$ de energia E_g) e excitado (estado $|e\rangle$ de energia E_e), podemos expressar \mathcal{H}_A e $e\hat{\mathbf{r}}$ em função dos operadores atômicos abaixo:

$$\sigma_+ = |e\rangle \langle g|; \quad \sigma_- = |g\rangle \langle e|; \quad \sigma_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|. \quad (1.43)$$

O operador σ_+ é o operador de levantamento atômico, que leva um átomo no estado fundamental para o estado excitado enquanto σ_- é o operador de abaixamento,

que leva um átomo no estado excitado para o estado fundamental. O operador σ_z corresponde a um dos operadores de Pauli de Spin 1/2.

Em função dos operadores dados em (1.43) e sabendo que $\vec{D}_{gg} = \vec{D}_{ee} = 0$, temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_A &= E_g |g\rangle \langle g| + E_e |e\rangle \langle e| = \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + \frac{1}{2} (E_g + E_e); \\ e\hat{\mathbf{r}} &= \vec{D}_{eg} \sigma_+ + \vec{D}_{ge} \sigma_-, \end{aligned} \quad (1.44)$$

onde usamos $(E_e - E_g) = \hbar \omega_a$. O elemento de matriz de transição de dipolo entre dois níveis diferentes também pode anular-se pelos mesmos argumentos utilizados na expressão (1.42), mas estamos interessados em utilizar níveis $|g\rangle$ e $|e\rangle$ onde isto não ocorre.

Agora substituímos as equações (1.39), (1.40) e (1.44) em (1.38) para obtermos o Hamiltoniano abaixo:

$$\mathcal{H} = \hbar \sum_j \nu_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + \hbar \sum_j (g_j^{eg} \sigma_+ + g_j^{ge} \sigma_-) (\hat{b}_j + \hat{b}_j^\dagger), \quad (1.45)$$

onde

$$g_j^{kl} = -\frac{\vec{D}_{kl} \cdot \hat{\mathbf{e}} \mathcal{E}_j \text{sen}(k_j z_0)}{\hbar}. \quad (1.46)$$

Na equação (1.45) foi omitida a energia de ponto zero $\hbar \nu_j / 2$ e o termo de energia constante $(E_g + E_e) / 2$, pois eles contribuem em apenas uma fase global na evolução temporal do sistema. Para simplificar o problema iremos considerar que os elementos \vec{D}_{kl} assumem valores reais, o que significa que teremos $g_j^{eg} = g_j^{ge}$.

Neste trabalho nos restringiremos a campos de um único modo, o que nos permite escrever o Hamiltoniano (1.45) na forma abaixo:

$$\mathcal{H} = \hbar \nu \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + \hbar g (\sigma_+ + \sigma_-) (\hat{b} + \hat{b}^\dagger), \quad (1.47)$$

Quando descrevemos o sistema na representação de interação, obtemos o seguinte Hamiltoniano de interação:

$$\tilde{\mathcal{H}}_{Int} = \hbar g \left(e^{i(\omega_a - \nu)t} \sigma_+ \hat{b} + e^{-i(\omega_a - \nu)t} \sigma_- \hat{b}^\dagger + e^{-i(\omega_a + \nu)t} \sigma_- \hat{b} + e^{i(\omega_a + \nu)t} \sigma_+ \hat{b}^\dagger \right), \quad (1.48)$$

Podemos observar que os termos $\sigma_+ \hat{b}^\dagger$ e $\sigma_- \hat{b}$ são multiplicados por exponenciais complexas de frequência $\omega_a + \nu$, passando a ser chamados de termos contra-girantes.

Por outro lado, os termos $\sigma_+ \hat{b}$ e $\sigma_- \hat{b}^\dagger$ são multiplicados por exponenciais complexas de frequência $\omega_a - \nu$, passando a ser chamados de termos girantes.

Assumindo que o campo da cavidade e o modo de transição do átomo estão próximos da ressonância ($\omega_a \approx \nu$), a frequência dos termos contra-girantes assume valor muito maior ($\approx 2\nu$) comparado com a dos termos girantes (próximo de zero). Calculando a média temporal sobre cada uma das exponenciais dos termos contra-girantes, temos que:

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{i2\nu t} dt = \frac{\text{sen}(\nu T)}{\nu T} e^{\nu T} \quad ; \quad \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i2\nu t} dt = \frac{\text{sen}(\nu T)}{\nu T} e^{\nu T}. \quad (1.49)$$

As contribuições das duas exponenciais se tornam desprezíveis quando o intervalo de tempo T utilizado na média temporal for muito grande comparado com o dado a partir da frequência ν do campo na cavidade. Além disso, o intervalo de tempo T deve ser inversamente proporcional a constante de acoplamento átomo-campo ($T \sim 1/g$).

Logo, podemos dizer que os termos contra-girantes podem ser desprezados quando o modo da cavidade e o átomo são quase ressonantes e a condição $\nu \gg g$ é satisfeita. Esta aproximação é chamada aproximação de ondas girantes (RWA em inglês) e é constantemente utilizada na área de Ótica quântica. Esta aproximação também deixa de ser válida quando as excitações do campo são suficientemente fortes.

Na aproximação de ondas girantes, o Hamiltoniano (1.47) pode ser simplificado:

$$\mathcal{H} = \hbar\nu \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \hbar\omega_a \sigma_z + \hbar g (\sigma_+ \hat{b} + \sigma_- \hat{b}^\dagger). \quad (1.50)$$

O Hamiltoniano (1.50) representa o modelo de Jaynes-Cummings, que descreve a interação entre uma cavidade eletromagnética de um único modo e um átomo de dois níveis. Devido a sua simplicidade, este é um dos modelos mais estudados nas áreas de ótica e informação quântica.

1.3 Aprisionamento de Íons em um Potencial Eletromagnético

Nas últimas décadas, o aprisionamento de íons tem apresentado importantes avanços tanto na teoria quanto em experimentos. Uma das principais vantagens deste tipo de aprisionamento está no fato de não ser necessário provocar mudanças no estado interno do íon ao contrário do que ocorre no aprisionamento de átomos

neutros. Desta forma, o método de aprisionamento em si não promove o emaranhamento entre o movimento do íon e seus estados internos.

Os tipos de armadilhas mais populares são: a armadilha de Penning, onde é utilizado uma combinação de campos elétricos e magnéticos estáticos; e a armadilha de Paul, na qual utiliza-se um campo oscilante variando no espaço, geralmente na faixa de radiofrequência (rf).

1.3.1 Equações de movimento

Nesta seção é apresentada a armadilha de Paul linear, ilustrado na figura 1.1. Um potencial rf $U(t) = U_0 + V_0 \cos(\Omega t)$ é aplicado em dois eletrodos lineares diagonalmente opostos entre si. Os outros dois eletrodos são aterrados através de capacitores (não mostrados na figura) conectados à terra.

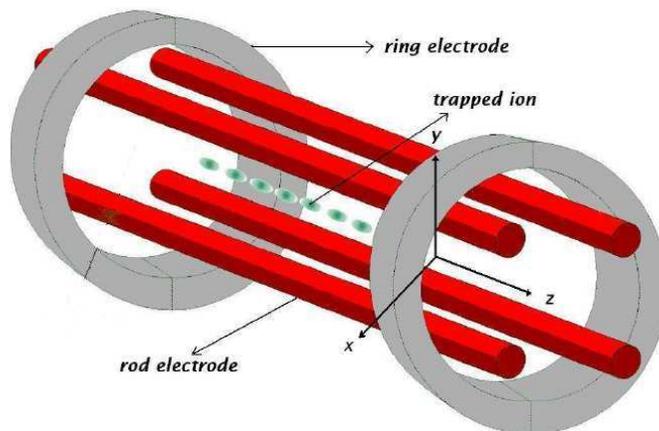


Figura 1.1: Esquema representando os eletrodos da armadilha linear de Paul. <http://heart-c704.uibk.ac.at/>.

Nesta configuração, o potencial resultante no eixo da armadilha (eixo z) é dado por:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{U(t)}{2r_0^2} (x^2 - y^2) \quad (1.51)$$

onde r_0 é a distância entre o eixo z e a superfície dos eletrodos.

A equação de movimento clássica para uma partícula, de massa m e carga $Z|e|$, para o potencial acima é dada por:

$$m\ddot{\vec{r}} = Z|e|\vec{E} = -Z|e|\nabla\phi(\vec{r}, t) \quad (\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}). \quad (1.52)$$

Com o potencial dado em (1.51), as equações de movimento são desacopladas nas coordenadas espaciais:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{Z|e|}{mr_0^2} [U_0 + V_0 \cos(\Omega t)] x &= 0; \\ \ddot{y} - \frac{Z|e|}{mr_0^2} [U_0 + V_0 \cos(\Omega t)] y &= 0; \\ \ddot{z} &= 0. \end{aligned} \quad (1.53)$$

As equações não nulas podem ser escritas na forma da equação diferencial de Mathieu:

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + [a + 2b \cos(2\xi t)] x = 0, \quad \frac{d^2y}{d\xi^2} - [a + 2b \cos(2\xi t)] y = 0, \quad (1.54)$$

através das substituições:

$$a = \frac{4Z|e|U_0}{mr_0^2\Omega^2}; \quad b = \frac{2Z|e|V_0}{mr_0^2\Omega^2}; \quad \xi = \frac{\Omega t}{2}. \quad (1.55)$$

As equações de Mathieu pertencem à classe geral de equações com coeficientes periódicos e podem, em geral, ser resolvidas a partir do teorema de Floquet. No regime $a \ll b^2 \ll 1$, a solução aproximada e estável para as equações (1.54) podem ser obtidas em uma série de Fourier. Para valores comumente usados em experimentos podemos considerar apenas a solução de ordem mais baixa, que é dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \left[1 + \frac{b}{2} \cos \Omega t\right] \cos(\omega_x t + \phi_x), \\ y(t) &= y_0 \left[1 - \frac{b}{2} \cos \Omega t\right] \cos(\omega_y t + \phi_y), \end{aligned} \quad (1.56)$$

onde:

$$\omega_x = \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{b^2}{2} + a}; \quad \omega_y = \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{b^2}{2} - a}, \quad (1.57)$$

e x_0, y_0, ϕ_x e ϕ_y são constantes definidas pelas condições iniciais. Podemos observar que o íon segue nas direções x e y (perpendiculares ao eixo da armadilha) movimentos harmônicos de frequências ω_x e ω_y , respectivamente. A amplitude do movimento nas duas direções apresenta uma modulação de frequência Ω .

A oscilação harmônica (de frequências ω_x e ω_y) é chamada de movimento secular enquanto a oscilação secundária de frequência Ω é chamada de micromovimento. A aplicação de determinadas condições na armadilha (adição de eletrodos secundários, por exemplo) permitem minimizar o micromovimento, podendo então ser desprezado.

Desprezando o micromovimento, o íon se comporta como se estivesse em um potencial efetivo harmônico na direção radial dado por:

$$U_{2D} = \frac{m}{2Z|e|} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2). \quad (1.58)$$

Para o confinamento do íon na direção z aplica-se potenciais U_1 e U_2 nos eletrodos em forma de anel da figura 1.1. Para $U_1 = U_2 = U_{12}$ foi demonstrado através de métodos numéricos que o movimento axial do íon, quando está próximo ao centro da armadilha, é harmônico com frequência ω_z dada aproximadamente por:

$$\frac{m}{2Z|e|} \omega_z z_0 \approx \varphi U_{12}, \quad (1.59)$$

sendo z_0 a distância do centro da armadilha até o eletrodo anelar e φ um fator geométrico.

Logo, o potencial efetivo na armadilha linear de Paul nas três direções é dada por:

$$U_{3D} = \frac{m}{2Z|e|} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2). \quad (1.60)$$

Para valores usuais em experimentos, a amplitude no movimento radial (nos eixos x e y) tem valor desprezível comparado a amplitude na direção axial (eixo z). Por esta razão estaremos considerando neste trabalho apenas o movimento axial do íon.

1.3.2 Interação entre um íon aprisionado e uma cavidade eletromagnética

Da seção anterior vimos que a armadilha em si não provoca emaranhamento entre os níveis eletrônicos e o movimento vibracional do íon. No entanto, é possível acoplá-los de forma coerente aplicando um campo eletromagnético sobre o íon. Esse acoplamento ocorre porque o processo de absorção (ou emissão) de um fóton provoca um movimento de recuo do íon.

Nesta seção apresentaremos a dedução do Hamiltoniano que descreve este sistema para, em seguida, reduzir o problema ao caso em que o campo está quantizado no interior de uma cavidade.

A Hamiltoniana clássica para um íon de massa m , preso no potencial harmônico (1.60), é dado por:

$$H_{Mov} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\nu^2 z^2}{2}, \quad (1.61)$$

onde foi desprezado o movimento do íon nas direções x e y (com amplitude muito menor que a amplitude do movimento na direção z).

O movimento do íon é quantizado associando as variáveis canônicas z e p com operadores \hat{z} e \hat{p} que satisfazem a relação de comutação $[\hat{z}, \hat{p}] = i\hbar$. É mais conveniente reescrever o problema em função dos operadores de aniquilação e destruição \hat{a} e \hat{a}^\dagger definidos pelas transformações canônicas abaixo:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\nu}} (m\nu\hat{z} + i\hat{p}), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\nu}} (m\nu\hat{z} - i\hat{p}). \quad (1.62)$$

Em função dos novos operadores e desprezando o termo constante $1/2\hbar\nu$, o Hamiltoniano (1.61) pode ser reescrito como:

$$H_{Mov} = \hbar\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}. \quad (1.63)$$

Além do grau de liberdade vibracional do íon, também devemos considerar o grau de liberdade correspondente à sua estrutura interna. Desta forma, o Hamiltoniano livre do íon é dado por:

$$H_{Ion} = \hbar\nu\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_a\sigma_z. \quad (1.64)$$

Consideraremos a seguir o caso onde o íon se encontra no interior de uma cavidade eletromagnética de um único modo. Da seção 1.1 sabemos que o Hamiltoniano livre do campo no interior da cavidade é:

$$H_{Cav} = \hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b}, \quad (1.65)$$

onde \hat{b}^\dagger e \hat{b} são os operadores de criação e destruição correspondentes ao modo do campo na cavidade e ω é a frequência do campo.

Para a interação entre o íon e o campo na cavidade consideraremos novamente a aproximação de dipolo elétrico, de onde temos o seguinte Hamiltoniano de interação:

$$H_{IC} = -e\hat{\mathbf{r}}_{\text{rel}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{r}}, t), \quad (1.66)$$

onde $\hat{\mathbf{r}}_{\text{rel}}$ é o operador de posição relativa entre o elétron e o núcleo do íon, $\hat{\mathbf{r}}$ é o operador posição do centro de massa do íon e $\hat{\mathbf{E}}$ é o operador campo elétrico da cavidade.

Para simplificar o problema consideraremos o caso onde o campo está alinhado na mesma direção da oscilação do íon (direção z). Com isso, podemos escrever $\hat{\mathbf{r}} = (0, 0, \hat{z})$ e, conseqüentemente, podemos expressar o operador campo elétrico na forma abaixo:

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\epsilon}\mathcal{E} \left(\hat{b} + \hat{b}^\dagger \right) \cos(k\hat{z} + \phi), \quad (1.67)$$

no qual $\hat{\epsilon}$ é um vetor de polarização e $\mathcal{E} = \left(\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2}$, sendo ϵ_0 a permissividade no vácuo, V o volume da cavidade e ϕ é a fase dependente da posição do centro da armadilha com relação ao campo da cavidade (o centro da armadilha está localizado no nodo do campo da cavidade para $\phi = 0$ e no antinodo para $\phi = \pm\pi/2$).

Substituindo (1.67) em (1.66), temos que o Hamiltoniano que descreve a interação entre o íon e o campo no interior da cavidade é dada por:

$$H_{IC} = \hbar g (\sigma_+ + \sigma_-) \left(\hat{b}^\dagger + \hat{b} \right) \cos [\eta (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \phi], \quad (1.68)$$

com σ_+ e σ_- sendo os operadores levantamento e abaixamento do íon, g a constante de acoplamento entre o íon e o campo da cavidade e $\eta = 2\pi a_0/L_C$ a constante de Lamb-Dicke, dada em função da largura do poço quântico a_0 e do comprimento de onda L_C do modo da cavidade.

1.4 Emaranhamento de Sistemas Quânticos:

Quando o sistema quântico a ser estudado é formado por mais de um subsistema, ele pode ser representado como o produto tensorial destes subsistemas e sua base é tomada como o produto tensorial entre as bases do subsistemas. No entanto, isto não significa que todo estado global do sistema pode ser descrito como produto tensorial de estados de cada subsistema.

Na verdade podemos classificar os estados do espaço global em dois grupos. No primeiro deles temos os **estados do tipo produto tensorial** e correspondem aos casos em que o estado do sistema pode ser escrito como produto tensorial de cada parte do sistema. Nesse caso, o operador densidade do sistema global pode ser escrito como (no caso de dois subsistemas):

$$\rho = \sum_A w_A \rho_A^{(1)} \otimes \rho_A^{(2)} \quad (1.69)$$

onde a soma dos pesos positivos w_a satisfazem $\sum w_a = 1$, e $\rho_A^{(1)}$ e $\rho_A^{(2)}$ são operadores densidade dos dois subsistemas.

Quando o sistema se encontra neste tipo de estado, significa que as medidas sobre uma parte do sistema independe do estados das outras partes que compõem o sistema.

Estados que não podem ser escritos desta forma são chamados de **estados emaranhados** e correspondem a situações onde as previsões da medida sobre uma parte do sistema dependem dos estados das outras partes que compõem o sistema.

A existência destes estados leva à descrição de diversos fenômenos que não existem no seu correspondente clássico, como a propriedade de não localidade característica nestes tipo de estado.

Por esta razão, o emaranhamento é identificado como a propriedade mais característica da mecânica quântica. Além disso, nos últimos anos o conceito de emaranhamento tem apresentado papel fundamental na elaboração de diversos protocolos na teoria informação quântica.

1.4.1 Medidas de Emaranhamento:

Quando existe interação entre as partes que compõem um sistema, elas começam a compartilhar informações que não podem mais ser associadas a um subsistema individualmente. Com isso, a evolução temporal pode levar um estado inicialmente do tipo produto a um estado emaranhado, onde dizemos que ocorreu um processo de emaranhamento entre os subsistemas.

É conveniente para descrever o processo de emaranhamento estabelecer critérios que nos indiquem o quanto os subsistemas estão emaranhados, uma medida de emaranhamento.

Ao longo dos anos foram estabelecidos vários critérios para descrever o emaranhamento de sistemas quânticos, de onde foram definidas diversas alternativas para a medida de emaranhamento.

No caso de um sistema bipartite, formado por dois subsistemas A e B , o emaranhamento quando o sistema está em um estado puro $|\psi\rangle$ pode ser quantificado pela entropia de qualquer um dos subsistemas A e B [21]:

$$E(\psi) = -Tr(\rho_A \log_2 \rho_A) = -Tr(\rho_B \log_2 \rho_B), \quad (1.70)$$

onde $\rho_A = Tr_B |\psi\rangle \langle \psi|$ é o traço parcial de $|\psi\rangle \langle \psi|$ sobre o subsistema B e ρ_B tem significado análogo.

Quando estendemos o problema para estados de mistura, onde o operador densidade pode ser representado por um ensemble de estados $|\psi_i\rangle$ com probabilidade p_i dado por:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (1.71)$$

é necessário reavaliar outra forma para quantificar o emaranhamento do sistema. Uma das medidas mais básicas neste caso é a **Entropia de Formação** [22], que é dada como uma média do emaranhamento dos estados puros $|\psi_i\rangle$, minimizada sobre todas as decomposição possíveis de ρ na forma dada em (1.71):

$$E_F(\rho) = \min \sum_i p_i E(\psi_i). \quad (1.72)$$

Para um sistema de dois qubits (sistema 2×2) temos a grandeza conhecida como concorrência (*concurrence*) proposta por Wootters [23], que é definida como:

$$C(\rho) = \max(0, \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4), \quad (1.73)$$

onde $\{\sigma_i\}$ são as raízes quadradas dos autovalores da matriz A arranjadas em ordem decrescente, e a matriz A é dada em função do operador densidade ρ e da matriz de Pauli σ_y como:

$$A = \rho (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad (1.74)$$

Para $C = 0$ os dois subsistemas se apresentam em estados separados enquanto para $C = 1$ os dois subsistemas se encontram em um estado maximamente emaranhado.

Desta forma, podemos dizer que o emaranhamento em sistemas 2×2 está bem entendido atualmente. No entanto, o emaranhamento de sistemas multipartite ainda não possui uma formulação geral e permanece uma questão não respondida completamente.

Um dos critérios de emaranhamento que pode ser aplicado nesta situação foi apresentado por Peres [24], onde foi observado que, se o operador obtido por transposição parcial sobre o operador densidade tiver apenas autovalores não-negativos, os subsistemas que formam o sistema são separáveis.

A partir deste critério foi definida a grandeza conhecida como **Negatividade** [25] que é dada em função da soma do módulo dos autovalores negativos (λ_M) do operador ρ^{T_k} :

$$E_N(\rho^{T_k}) = 2\max\{0, \lambda_M\}, \quad (1.75)$$

onde ρ^{T_k} é a transposta parcial com relação ao subsistema K a ser observado. Neste mesmo trabalho, Vidal mostrou que é possível fazer a análise do emaranhamento até sistemas tripartite usando esta medida. Por este motivo, nos restringiremos apenas na negatividade para fazer uma análise do emaranhamento neste trabalho.

Capítulo 2

Dissipação em Sistemas Quânticos

Todas as análises que fizemos até aqui se referem a sistemas quânticos isolados, sem contato com um ambiente externo. No entanto, a influência do ambiente sobre o sistema quântico é muito difícil de ser evitado. Por este motivo, se torna necessário descrever o sistema em situações reais para obtermos previsões mais próximas dos resultados obtidos em experimentos.

Neste capítulo faremos uma análise dos sistemas estudados nas seções anteriores considerando os efeitos de dissipação. Nós consideramos aqui apenas a aproximação da equação mestra para obter o modelo que descreve o sistema nesta situação [26].

2.1 Aproximação da Equação Mestra

O modelo utilizado para descrever a dissipação consiste no acoplamento do sistema aberto S com um reservatório R , representado por um Hamiltoniano com a seguinte forma:

$$H = H_S + H_R + H_{SR}, \quad (2.1)$$

onde H_S e H_R são os Hamiltonianos de S e R , respectivamente, e H_{SR} é o Hamiltoniano de interação do sistema com o reservatório.

No nosso caso pretendemos descrever apenas o sistema S detalhadamente. Como o reservatório nos interessa apenas indiretamente, suas propriedades só precisam ser especificadas em termos gerais (a temperatura ou a densidade de estados, por exemplo).

Em outras palavras, desejamos obter informações do sistema S sem precisar de muitos detalhes do sistema global $G = S \oplus R$. Se $\rho_G(t)$ é o operador densidade para $G = S \oplus R$, podemos definir o operador reduzido $\rho_S(t)$ como:

$$\rho_S(t) = Tr_R [\rho_G(t)], \quad (2.2)$$

onde Tr_R é o traço parcial sobre as variáveis do reservatório.

A equação de Von Newmann correspondente ao operador $\rho_G(t)$ é dada por:

$$\frac{d}{dt}\rho_G(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho_G(t)]. \quad (2.3)$$

Em seguida, passamos a descrever o operador $\rho_G(t)$ na representação de interação:

$$\tilde{\rho}_G(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(H_S+H_R)t} \rho_G(t) e^{-\frac{i}{\hbar}(H_S+H_R)t} \quad (2.4)$$

Na representação de interação, a equação de Von Newmann (2.3) é escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_G(t) &= \frac{i}{\hbar} (H_S + H_R) \tilde{\rho}_G(t) - \frac{i}{\hbar} \tilde{\rho}_G(t) (H_S + H_R) \\ &+ e^{\frac{i}{\hbar}(H_S+H_R)t} \left(\frac{d}{dt}\rho_G(t) \right) e^{-\frac{i}{\hbar}(H_S+H_R)t} = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_{SR}(t), \rho_G(t)], \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde o Hamiltoniano de interação $\tilde{H}_{SR}(t)$ é dado por:

$$\tilde{H}_{SR}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(H_S+H_R)t} H_{SR} e^{-\frac{i}{\hbar}(H_S+H_R)t}. \quad (2.6)$$

Integrando a equação (2.5), nós temos que:

$$\tilde{\rho}_G(t) = \rho_G(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [\tilde{H}_{SR}(t'), \rho_G(t')], \quad (2.7)$$

Em seguida, substituímos $\tilde{\rho}_G(t)$ dentro do comutador em (2.5) para obter a seguinte equação:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_G(t) = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_{SR}(t), \rho_G(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\tilde{H}_{SR}(t'), [\tilde{H}_{SR}(t'), \rho_G(t')]]. \quad (2.8)$$

Escolhemos escrever a equação de Von Newmann nesta forma para facilitar a visualização das aproximações que serão aplicadas adiante.

Agora, iremos considerar que a interação começa a agir no instante $t = 0$ e que não existe correlação entre o sistema e o reservatório no instante inicial. Com isso, temos que:

$$\rho_G(0) = \tilde{\rho}_G(0) = \rho_S(0) \otimes R_0, \quad (2.9)$$

onde R_0 é o operador densidade inicial do reservatório. Em seguida, aplicamos o traço parcial sobre o reservatório em (2.8), de onde obtemos a equação mestra do sistema:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_R \left\{ \left[\tilde{H}_{SR}(t'), \left[\tilde{H}_{SR}(t'), \rho_G(t') \right] \right] \right\}. \quad (2.10)$$

Para simplificar o problema, eliminamos na equação (2.10) o termo contendo $Tr_R \left\{ \left[\tilde{H}_{SR}(t), \rho_G(0) \right] \right\}$ assumindo a condição:

$$Tr_R \left[\tilde{H}_{SR}(t) R_0 \right] = 0. \quad (2.11)$$

Esta relação é garantida se os operadores do reservatório acoplados a S no Hamiltoniano $\tilde{H}_{SR}(t)$ têm média zero no estado R_0 . Para os modelos de interação sistema-reservatório estudados nesta tese, a condição (2.11) é satisfeita e será ilustrada com mais detalhes na próxima seção.

Apesar de assumirmos que ρ_G pode ser fatorado no instante inicial $t = 0$, correlações entre o sistema e o reservatório podem surgir em tempos posteriores devido ao acoplamento entre os dois. No entanto, nós assumimos que este acoplamento é muito fraco, de forma que $\rho_G(t)$ tenha somente variações da ordem de H_{SR} de um estado não-correlacionado.

Além disso, o reservatório R é um sistema tal que o seu estado deve permanecer virtualmente inalterado pelo seu acoplamento com o sistema S (por outro lado, esperamos que o estado de S seja significativamente alterado pelo seu acoplamento por R). Logo, podemos escrever que:

$$\tilde{\rho}_G(t) = \tilde{\rho}_S(t) \otimes R_0 + O(H_{SR}). \quad (2.12)$$

Com estas hipóteses, aplicamos a aproximação de Born na equação (2.10), onde desprezamos os termos de segunda ordem em H_{SR} . Desta forma obtemos a seguinte equação:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_R \left\{ \left[\tilde{H}_{SR}(t'), \left[\tilde{H}_{SR}(t'), (\rho_S(t') \otimes R_0) \right] \right] \right\}. \quad (2.13)$$

Devemos observar que a equação (2.13) não é uma equação Markoviana, uma vez que a evolução de $\tilde{\rho}_S(t)$ depende de sua história passada através da integração sobre $\tilde{\rho}_S(t')$.

Agora aplicamos uma segunda aproximação na equação mestra, conhecida como aproximação de Markov, que consiste em substituir $\tilde{\rho}_S(t')$ por $\tilde{\rho}_S(t)$. Com isto nós obtemos a equação mestra na aproximação de Born-Markov:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_R \left\{ \left[\tilde{H}_{SR}(t'), \left[\tilde{H}_{SR}(t'), (\rho_S(t) \otimes R_0) \right] \right] \right\}. \quad (2.14)$$

Esta aproximação tem uma argumentação física razoável. O sistema S depende de sua história passada porque seus estados anteriores ficam registrados como mudanças no estado do reservatório através do Hamiltoniano de interação H_{SR} ; os estados anteriores são refletidos de volta na futura evolução de S quando ele interage com o reservatório alterado.

No entanto, se o reservatório é um sistema muito grande mantido em equilíbrio térmico, ele não é capaz de preservar por muito tempo as pequenas mudanças trazidas pela interação com S . Logo, se o tempo de correlação do reservatório for muito menor que a escala de tempo para mudanças significativas em S podemos assumir que o sistema se comporta aproximadamente como um sistema Markoviano.

A aproximação em (2.14) pode ser vista explicitamente em um modelo mais específico, como por exemplo em uma interação escrita como:

$$H_{SR} = \hbar \sum_i \hat{s}_i \Gamma_i, \quad (2.15)$$

onde \hat{s}_i são operadores no espaço de Hilbert de S e Γ_i são operadores no espaço de Hilbert de R . Desta forma temos, na representação de interação:

$$\tilde{H}_{SR}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(H_S+H_R)t} H_{SR} e^{-\frac{i}{\hbar}(H_S+H_R)t} = \hbar \sum_i \tilde{\hat{s}}_i(t) \tilde{\Gamma}_i(t). \quad (2.16)$$

Substituindo (2.16) em (2.13), a equação mestra na aproximação de Born é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) &= -\sum_{i,j} \int_0^t dt' Tr_R \left\{ \left[\tilde{\hat{s}}_i(t) \tilde{\Gamma}_i(t), \left[\tilde{\hat{s}}_j(t') \tilde{\Gamma}_j(t'), (\rho_S(t') \otimes R_0) \right] \right] \right\} \\ &= -\sum_{i,j} \int_0^t dt' \left\{ [\tilde{s}_i(t) \tilde{s}_j(t') \tilde{\rho}_S(t) - \tilde{s}_j(t') \tilde{\rho}_S(t) \tilde{s}_i(t)] \langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R \right. \\ &\quad \left. + [\tilde{\rho}_S(t) \tilde{s}_j(t') \tilde{s}_i(t) - \tilde{s}_i(t) \tilde{\rho}_S(t) \tilde{s}_j(t')] \langle \tilde{\Gamma}_j(t) \tilde{\Gamma}_i(t') \rangle_R \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

aqui nós usamos a propriedade cíclica do traço ($Tr(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = Tr(\hat{C}\hat{A}\hat{B}) = Tr(\hat{B}\hat{C}\hat{A})$) e definimos as funções de correlação como:

$$\langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R = Tr_R [R_0 \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t')], \quad \langle \tilde{\Gamma}_j(t) \tilde{\Gamma}_i(t') \rangle_R = Tr_R [R_0 \tilde{\Gamma}_j(t) \tilde{\Gamma}_i(t')]. \quad (2.18)$$

Logo, podemos dizer que a aproximação Markoviana é válida se as funções de correlações são proporcionais à função $\delta(t - t')$.

2.2 Oscilador harmônico amortecido

Agora iremos apresentar um modelo mais específico onde a aproximação Markoviana pode ser utilizada. Vamos considerar o sistema composto $S \oplus R$ é representado pelos seguintes Hamiltonianos:

$$\begin{aligned} H_S &= \hbar\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}, & H_R &= \sum_j \hbar\omega_j\hat{h}_j^\dagger\hat{h}_j, \\ H_{SR} &= \sum_j \hbar \left(k_j^*\hat{a}\hat{h}_j^\dagger + k_j\hat{a}^\dagger\hat{h}_j \right) = \hbar\hat{a}\Gamma^\dagger + \hat{a}^\dagger\Gamma. \end{aligned} \quad (2.19)$$

O sistema consiste de um oscilador harmônico de frequência ν e operadores de criação e destruição \hat{a}^\dagger e \hat{a} . O reservatório R é dado como uma coleção de osciladores harmônicos de frequência ω_j e correspondentes operadores de criação e aniquilação \hat{h}_j^\dagger e \hat{h}_j , respectivamente, e definimos $\hat{\Gamma} = \sum_j k_j\hat{h}_j$.

Neste modelo, o reservatório se encontra em equilíbrio térmico com operador densidade dado por:

$$R_0 = \prod_m e^{-\hbar\omega_m\hat{h}_m^\dagger\hat{h}_m/k_B T} (1 - e^{-\hbar\omega_m/k_B T}), \quad (2.20)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann.

O modelo de reservatório de osciladores é bastante útil, pois pode ser aplicado em diversas situações físicas. Ele pode ser os muitos modos do campo radiante do vácuo no qual uma cavidade óptica pode decair através de um espelho parcialmente transmissor ou no qual um átomo excitado pode decair via emissão espontânea. Além disso, ele pode representar os modos de fônon em um sólido.

Além disso o produto $\tilde{H}_{SR}R_0$ para este modelo pode ser escrito na forma abaixo:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{SR}R_0 &= \sum_j \hbar \left\{ k_j^* e^{i(\omega_j - \nu)t} \hat{a} \left[\prod_m (1 - e^{-\hbar\omega_m/k_B T}) \hat{h}_j^\dagger e^{-\hbar\omega_m\hat{h}_m^\dagger\hat{h}_m/k_B T} \right] \right. \\ &\quad \left. + k_j e^{-i(\omega_j - \nu)t} \hat{a}^\dagger \left[\prod_m (1 - e^{-\hbar\omega_m/k_B T}) \hat{h}_j e^{-\hbar\omega_m\hat{h}_m^\dagger\hat{h}_m/k_B T} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

de onde podemos notar que os termos em colchete, contendo os operadores do reservatório, formam operadores não-diagonais na base de autoestados do Hamiltoniano

H_R . Isto significa que o traço parcial sobre as variáveis do reservatório no produto acima é nulo, satisfazendo a condição (2.11) apresentada na seção anterior.

A identificação com (2.17) é feita imediatamente com as associações:

$$s_1 = \hat{a}; \quad s_2 = \hat{a}^\dagger; \quad \Gamma_1 = \Gamma^\dagger = \sum_j k_j^* \hat{h}_j^\dagger; \quad \Gamma_2 = \Gamma = \sum_j k_j \hat{h}_j \quad (2.22)$$

onde $\tilde{\Gamma}(t) = \sum_j k_j \hat{h}_j e^{-i\omega_j t}$.

Substituindo (2.20) e os operadores (2.22) (na representação de interação) na equação mestra (2.17), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) = & - \int_0^t dt' \left\{ [\hat{a}\hat{a}\tilde{\rho}_S(t') - \hat{a}\tilde{\rho}_S(t')\hat{a}] e^{-i\nu(t+t')} \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t)\tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R + h.c. \right. \\ & + [\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\tilde{\rho}_S(t') - \hat{a}^\dagger\tilde{\rho}_S(t')\hat{a}^\dagger] e^{i\nu(t+t')} \langle \tilde{\Gamma}(t)\tilde{\Gamma}(t') \rangle_R + h.c. \\ & + [\hat{a}\hat{a}^\dagger\tilde{\rho}_S(t') - \hat{a}^\dagger\tilde{\rho}_S(t')\hat{a}] e^{-i\nu(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t)\tilde{\Gamma}(t') \rangle_R + h.c. \\ & \left. + [\hat{a}^\dagger\tilde{\rho}_S(t') - \hat{a}\tilde{\rho}_S(t')\hat{a}^\dagger] e^{i\nu(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}(t)\tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R + h.c. \right\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde as funções de correlação no reservatório são dadas explicitamente por:

$$\langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t)\tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = \sum_{j,k} k_j^* k_k^* e^{i\omega_j t} e^{i\omega_k t'} Tr_R \left(R_0 \hat{h}_j^\dagger \hat{h}_k^\dagger \right) = 0, \quad (2.24)$$

$$\langle \tilde{\Gamma}(t)\tilde{\Gamma}(t') \rangle_R = \sum_{j,k} k_j k_k e^{-i\omega_j t} e^{-i\omega_k t'} Tr_R \left(R_0 \hat{h}_j \hat{h}_k \right) = 0, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t)\tilde{\Gamma}(t') \rangle_R &= \sum_{j,k} k_j^* k_k e^{i\omega_j t} e^{-i\omega_k t'} Tr_R \left(R_0 \hat{h}_j^\dagger \hat{h}_k \right) \\ &= \sum_j |k_j|^2 e^{i\omega_j(t-t')} \bar{n}(\omega_j, T), \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Gamma}(t)\tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= \sum_{j,k} k_j k_k^* e^{-i\omega_j t} e^{i\omega_k t'} Tr_R \left(R_0 \hat{h}_j \hat{h}_k^\dagger \right) \\ &= \sum_j |k_j|^2 e^{-i\omega_j(t-t')} [\bar{n}(\omega_j, T) + 1], \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde $\bar{n}(\omega_j, T)$ é o número médio de fótons para um oscilador com frequência ω_j em equilíbrio térmico à temperatura T :

$$\bar{n}(\omega_j, T) = Tr_R \left(R_0 \hat{h}_j^\dagger \hat{h}_j \right) = \frac{e^{-\hbar\omega_j/k_B T}}{1 - e^{-\hbar\omega_j/k_B T}} \quad (2.28)$$

Em seguida nós aproximamos o reservatório a uma distribuição contínua de osciladores harmônicos. Isto significa que a soma sobre o índice j nas funções de correlação não nulas (2.26) e (2.27) é substituída por uma integração sobre uma frequência contínua ω , onde nós introduzimos uma densidade de estados $g(\omega)$ tal que $g(\omega)d\omega$ indica o número de osciladores com frequência entre ω e $\omega + d\omega$.

Além disso, fazemos a mudança de variável $\tau = t - t'$ para obter uma melhor visualização das aproximações a serem feitas. Com isso, a equação (2.23) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = & - \int_0^t dt' \left\{ [\hat{a}\hat{a}^\dagger\tilde{\rho}_S(t-\tau) - \hat{a}^\dagger\tilde{\rho}_S(t-\tau)\hat{a}] e^{-i\nu\tau} \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t)\tilde{\Gamma}(t-\tau) \rangle_R + h.c. \right. \\ & \left. + [\hat{a}\hat{a}^\dagger\tilde{\rho}_S(t-\tau) - \hat{a}^\dagger\tilde{\rho}_S(t-\tau)\hat{a}] e^{i\nu\tau} \langle \tilde{\Gamma}(t)\tilde{\Gamma}^\dagger(t-\tau) \rangle_R + h.c. \right\}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde as funções de correlação não nulas são:

$$\langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t)\tilde{\Gamma}(t-\tau) \rangle_R = \int_0^\infty d\omega e^{i\omega\tau} g(\omega) |k(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, T), \quad (2.30)$$

$$\langle \tilde{\Gamma}(t)\tilde{\Gamma}^\dagger(t-\tau) \rangle_R = \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega\tau} g(\omega) |k(\omega)|^2 [\bar{n}(\omega, T) + 1]. \quad (2.31)$$

Agora podemos argumentar de forma geral sobre a aproximação de Markov. Podemos observar nas equações (2.30) e (2.31) que, para τ grande o suficiente, os termos exponenciais oscilam muito rapidamente comparado com a variação das funções $g(\omega)$, $|k(\omega)|^2$ e $\bar{n}(\omega, T)$, levando o produto no interior das integrais essencialmente a zero. Desta forma, podemos dizer que a integração sobre τ ocorre em um intervalo bem limitado, que deve ser menor que o tempo t_R de correlação do reservatório.

Quando o tempo de correlação do reservatório t_R é muito menor que o tempo de decaimento do sistema t_S , também temos que a integração sobre τ abrange tempos que são muito mais curtos que o tempo de escala da evolução de $\tilde{\rho}_S$. Com isso podemos substituir $\tilde{\rho}_S(t-\tau)$ por $\tilde{\rho}_S(t)$ (aproximação de Markov) na equação (2.29), de onde obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = & \alpha (\hat{a}\tilde{\rho}_S(t)\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\tilde{\rho}_S(t)) \\ & + \beta (\hat{a}\tilde{\rho}_S(t)\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\tilde{\rho}_S(t)\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\tilde{\rho}_S(t) - \tilde{\rho}_S(t)\hat{a}\hat{a}^\dagger), \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde:

$$\begin{aligned} \alpha & \equiv \int_0^\infty d\omega g(\omega) |k(\omega)|^2 \int_0^t d\tau e^{-i(\omega-\nu)\tau}, \\ \beta & \equiv \int_0^\infty d\omega g(\omega) |k(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, T) \int_0^t d\tau e^{-i(\omega-\nu)\tau}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Uma vez que t é da ordem de t_S , que é muito maior que os tempos englobados pela integral sobre τ (pois são menores que t_R), podemos estender a integração sobre τ até infinito e calcular α e β usando a relação abaixo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t d\tau e^{-i(\omega - \nu)\tau} = \pi\delta(\omega - \nu) + i\frac{P}{\nu - \omega}, \quad (2.34)$$

onde P é o valor principal de Cauchy. Assim temos que:

$$\alpha = \pi g(\nu) |k(\nu)|^2 + i\Delta; \quad \beta = \pi g(\nu) |k(\nu)|^2 + i\Delta' e \quad (2.35)$$

$$\Delta \equiv P \int_0^\infty d\omega \frac{g(\omega) |k(\omega)|^2}{\nu - \omega}; \quad \Delta' \equiv P \int_0^\infty d\omega \frac{g(\omega) |k(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, T)}{\nu - \omega}. \quad (2.36)$$

Após definir a taxa de dissipação como $\chi = 2\pi g(\nu) |k(\nu)|^2$ e o número médio de fótons térmicos no reservatório como $\bar{n} \equiv \bar{n}(\nu, T)$, finalmente obtemos a equação mestra para o oscilador harmônico amortecido:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S &= -i\Delta [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \tilde{\rho}_S] + \frac{\chi}{2} (\bar{n} + 1) (2\hat{a} \tilde{\rho}_S \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \tilde{\rho}_S - \tilde{\rho}_S \hat{a}^\dagger \hat{a}) \\ &\quad + \frac{\chi}{2} \bar{n} (2\hat{a}^\dagger \tilde{\rho}_S \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \tilde{\rho}_S - \tilde{\rho}_S \hat{a} \hat{a}^\dagger). \end{aligned} \quad (2.37)$$

O "shift" Δ na frequência é pequeno e geralmente é desprezado, como foi feito neste trabalho. Retornando para a representação de Schrodinger temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_S &= \frac{1}{i\hbar} [H_S, \rho_S] + \frac{\chi}{2} (\bar{n} + 1) (2\hat{a} \rho_S \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \rho_S - \rho_S \hat{a}^\dagger \hat{a}) \\ &\quad + \frac{\chi}{2} \bar{n} (2\hat{a}^\dagger \rho_S \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \rho_S - \rho_S \hat{a} \hat{a}^\dagger). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Desta forma, podemos dizer que a equação mestra pode ser separada em um termo de evolução unitária (dada pelo termo contendo o comutador com H_S) e os termos de dissipação (segundo e terceiro termos da equação (2.38)).

2.3 Emissão Espontânea

Outro efeito que iremos considerar é a emissão espontânea de um átomo de dois níveis. Neste caso temos um átomo que emite radiação devido a sua interação com os muitos modos de um campo radiante em equilíbrio térmico à temperatura T . Nas aproximações de dipolo e de ondas girantes, o Hamiltoniano que descreve o sistema S e sua interação com o reservatório R é dada por:

$$H_S = \hbar\omega_a\hat{\sigma}_z, \quad H_R = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}}\hat{h}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger\hat{h}_{\mathbf{k},\lambda}, \quad (2.39)$$

$$H_{SR} = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar \left(k_{\mathbf{k},\lambda}^* \hat{\sigma}_- \hat{h}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger + k_{\mathbf{k},\lambda} \hat{\sigma}_+ \hat{h}_{\mathbf{k},\lambda} \right) = \hbar\hat{\sigma}_- \Gamma^\dagger + \hat{\sigma}_+ \Gamma,$$

onde: $k_{\mathbf{k},\lambda} \equiv -ie^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_A} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2\hbar\epsilon_0 V}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda} \cdot \mathbf{d}_{21}$.

A soma se estende sobre os modos do campo radiante com vetor de onda \mathbf{k} e polarização λ . Os modos possuem frequência $\omega_{\mathbf{k}}$ e vetores unitários de polarização $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda}$; \mathbf{r}_A é a posição do átomo, V é o volume de quantização e $k_{\mathbf{k},\lambda}$ é a constante de acoplamento de dipolo com o modo do campo com vetor de onda \mathbf{k} e polarização λ .

Novamente, fazemos a associação dos operadores com a notação utilizada em (2.17):

$$s_1 = \hat{\sigma}; \quad s_2 = \hat{\sigma}_+; \quad \Gamma_1 = \Gamma^\dagger = \sum_{\mathbf{k},\lambda} k_{\mathbf{k},\lambda}^* \hat{h}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger; \quad \Gamma_2 = \Gamma = \sum_{\mathbf{k},\lambda} k_{\mathbf{k},\lambda} \hat{h}_{\mathbf{k},\lambda} \quad (2.40)$$

Daqui por diante a derivação da equação mestra para o átomo de dois níveis segue passos análogos aos que foram utilizados com o oscilador harmônico amortecido. Utilizando estes passos, obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) &= \left[\frac{\kappa}{2}(\bar{n} + 1) + i(\Delta' + \Delta) \right] (\hat{\sigma}_- \tilde{\rho}_S(t) \hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \tilde{\rho}_S(t)) + \\ &\quad \left[\frac{\kappa}{2} \bar{n} + i\Delta' \right] (\hat{\sigma}_+ \tilde{\rho}_S(t) \hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+ \tilde{\rho}_S(t)), \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde $\bar{n} = \bar{n}(\omega_a, T)$ e

$$\kappa \equiv 2\pi \sum_{\lambda} \int_0^{\infty} d^3k g(\mathbf{k}) |k(\mathbf{k}, \lambda)|^2 \delta(kc - \omega_a), \quad (2.42)$$

$$\Delta \equiv \sum_{\lambda} P \int_0^{\infty} d^3k \frac{g(\mathbf{k}) |k(\mathbf{k}, \lambda)|^2}{\omega_a - kc}; \quad \Delta' \equiv \sum_{\lambda} P \int_0^{\infty} d^3k \frac{g(\mathbf{k}) |k(\mathbf{k}, \lambda)|^2}{\omega_a - kc} \bar{n}(\omega, T).$$

Sabendo que $\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- = (1 + \sigma_z)/2$ e $\hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+ = (1 - \sigma_z)/2$, podemos reescrever (2.41) como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S &= -i \frac{1}{2} (2\Delta' + \Delta) [\hat{\sigma}_z, \tilde{\rho}_S] + \frac{\kappa}{2} (\bar{n} + 1) (2\hat{\sigma}_- \tilde{\rho}_S \hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \tilde{\rho}_S - \tilde{\rho}_S \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-) \\ &\quad + \kappa \bar{n} (2\hat{\sigma}_+ \tilde{\rho}_S \hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+ \tilde{\rho}_S - \tilde{\rho}_S \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Na representação de Schrodinger, o termo $(2\Delta' + \Delta)$ é um pequeno "shift" na frequência do átomo e corresponde ao *Lamb shift* e ao *efeito Stark*. Como não estamos interessados em observar ambos os efeitos neste trabalho, escolhemos desprezar este

termo. Além disso, a sua presença não provoca mudanças significativas nos resultados obtidos nesta tese.

Retornando a representação de Schrodinger nós finalmente obtemos a equação mestra para o átomo de dois níveis:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S &= \frac{1}{i\hbar} [H_S, \rho_S] + \frac{\kappa}{2}(\bar{n} + 1) (2\hat{\sigma}_-\rho_S\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\rho_S - \rho_S\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-) \\ &+ \frac{\kappa}{2}\bar{n} (2\hat{\sigma}_+\rho_S\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\rho_S - \rho_S\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Projetando a equação (2.44) na base atômica, encontramos as equações de movimento para os elementos de matriz do operador densidade do átomo:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{ee} &= \langle e | \dot{\rho}_S | e \rangle \\ &= -\kappa(\bar{n} + 1)\rho_{ee} + \kappa\bar{n}\rho_{gg} \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\dot{\rho}_{eg} = (\dot{\rho}_{eg})^* = -i\omega_a\rho_{eg} - \kappa\left(\bar{n} + \frac{1}{2}\right)\rho_{eg} \quad (2.46)$$

$$\dot{\rho}_{gg} = \kappa(\bar{n} + 1)\rho_{ee} - \kappa\bar{n}\rho_{gg}. \quad (2.47)$$

Podemos notar na equação (2.45) que o primeiro termo (contendo ρ_{ee}) corresponde ao decaimento do nível superior $|e\rangle$ para o nível inferior $|g\rangle$ enquanto o segundo termo corresponde a excitação do nível $|g\rangle$ para o nível $|e\rangle$. Para reservatórios com temperatura zero ($\bar{n} = 0$) o segundo processo deixa de acontecer e temos apenas o processo de decaimento, correspondente ao fenômeno de emissão espontânea do átomo.

Como os outros níveis atômicos não participam no processo, também temos que $\dot{\rho}_{ee} + \dot{\rho}_{gg} = 0$. Na equação (2.46) temos o decaimento dos elementos diagonais (segundo termo na equação), que corresponde ao processo de decoerência devido ao contato do sistema com o ambiente externo. O primeiro termo corresponde a evolução unitária do átomo.

2.4 Cavidade Eletromagnética Dissipativa

Por último consideramos uma cavidade eletromagnética de um único modo que sofre decaimento devido a imperfeições nos espelhos. Neste caso, temos o acoplamento do modo do campo da cavidade com os vários modos do campo que compõem o reservatório, que é representado pelos seguintes Hamiltonianos:

$$H_S = \hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b}, \quad H_R = \sum_j \hbar\omega_j\hat{h}_j^\dagger\hat{h}_j, \quad (2.48)$$

$$H_{SR} = \sum_j \hbar \left(k_j^* \hat{b} \hat{h}_j^\dagger + k_j \hat{b}^\dagger \hat{h}_j \right) = \hbar\hat{b}\Gamma^\dagger + \hat{b}^\dagger\Gamma.$$

Podemos observar que os passos serão exatamente os mesmos que foram utilizados no caso do oscilador harmônico amortecido, sendo a única diferença a substituição dos operadores de movimento \hat{a}^\dagger e \hat{a} pelos operadores de campo \hat{b}^\dagger e \hat{b} . Portanto, a equação mestra para a cavidade dissipativa é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S &= \frac{1}{i\hbar} [H_S, \rho_S] + \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1) \left(2\hat{b}\rho_S\hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger\hat{b}\rho_S - \rho_S\hat{b}^\dagger\hat{b} \right) \\ &\quad + \frac{\gamma}{2}\bar{n} \left(2\hat{b}^\dagger\rho_S\hat{b} - \hat{b}\hat{b}^\dagger\rho_S - \rho_S\hat{b}\hat{b}^\dagger \right), \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde $\gamma = 2\pi g(\omega) |k(\omega)|^2$ é a taxa de decaimento da cavidade e $\bar{n} = \bar{n}(\omega, T)$. As definições para as funções $g(\omega)$, $k(\omega)$ e $\bar{n}(\omega, T)$ são as mesmas que foram utilizadas no oscilador amortecido.

Na base dos estados de Fock obtemos, a partir da equação (2.49), um conjunto de equações diferenciais acopladas para os elementos de matriz $\rho_{m,n} = \langle m | \dot{\rho}_S | n \rangle$ ($m, n = 0, 1, \dots$):

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{m,n} &= -i\omega(m-n)\rho_{m,n} + \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1) \left[2\sqrt{(m+1)(n+1)}\rho_{m+1,n+1} - (m+n)\rho_{m,n} \right] \\ &\quad + \frac{\gamma}{2}\bar{n} \left[2\sqrt{m\bar{n}}\rho_{m-1,n-1} - (m+n+2)\rho_{m,n} \right], \end{aligned} \quad (2.50)$$

cujas soluções nos permitem obter o operador densidade que descreve o campo no interior da cavidade dissipativa.

Mesmo sem resolver a equação (2.50) é possível obter o número médio de fótons ao longo do tempo $\langle N \rangle (t)$ diretamente da equação (2.49):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle N \rangle (t) &= \frac{d}{dt} Tr \left\{ \rho_S \hat{b}^\dagger \hat{b} \right\} = Tr \left\{ \frac{d\rho_S}{dt} \hat{b}^\dagger \hat{b} \right\} \\ &= \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1) Tr \left\{ \left(2\hat{b}\rho_S\hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger\hat{b}\rho_S - \rho_S\hat{b}^\dagger\hat{b} \right) \hat{b}^\dagger \hat{b} \right\} \\ &\quad + \frac{\gamma}{2}\bar{n} Tr \left\{ \left(2\hat{b}^\dagger\rho_S\hat{b} - \hat{b}\hat{b}^\dagger\rho_S - \rho_S\hat{b}\hat{b}^\dagger \right) \hat{b}^\dagger \hat{b} \right\}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Usando a relação de comutação entre \hat{b}^\dagger e \hat{b} e a propriedade de invariância do traço sob permutações cíclicas, temos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle N \rangle (t) &= \frac{\gamma}{2} (\bar{n} + 1) [2 \langle N^2 \rangle (t) - \langle N \rangle (t) - 2 \langle N^2 \rangle (t)] \\
&+ \frac{\gamma}{2} \bar{n} [2 \langle N^2 \rangle (t) + 2 \langle N \rangle (t) + 1 - 2 \langle N^2 \rangle (t) + \langle N \rangle (t)] \\
&= -\gamma [\langle N \rangle (t) - \bar{n}], \tag{2.52}
\end{aligned}$$

cuja solução é:

$$\langle N \rangle (t) = \bar{n} - e^{-\gamma t} [\langle N \rangle (0) - \bar{n}]. \tag{2.53}$$

A equação (2.53) indica que o número médio de fótons decai exponencialmente ao longo do tempo até o sistema entrar em equilíbrio com o reservatório, ou seja, quando o número médio de fótons for igual ao número médio de fótons térmicos no reservatório ($\langle N \rangle = \bar{n}$).

Capítulo 3

Acoplamento entre duas cavidades eletromagnéticas

Neste capítulo apresentamos um sistema formado por duas cavidades eletromagnéticas acopladas entre si. Foram considerados dois tipos de acoplamento: i) Acoplamento direto, dado pela sobreposição dos modos desacoplados das cavidades; ii) Acoplamento via fibra óptica, onde as duas cavidades estão conectadas por uma fibra óptica.

3.1 Acoplamento direto

Neste caso, o Hamiltoniano que descreve as duas cavidades interagentes é dada por:

$$H = \hbar\omega_1\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_1 + \hbar\omega_2\hat{b}_2^\dagger\hat{b}_2 + H_{C_1C_2} \quad (3.1)$$

onde \hat{b}_i^\dagger e \hat{b}_i são os operadores de criação e destruição correspondente a cavidade i , ω_i é a frequência da cavidade i e $H_{C_1C_2}$ é o Hamiltoniano de interação entre as cavidades.

Para este modelo de acoplamento consideramos adequado utilizar o trabalho de Zoubi et al [17], onde o sistema se encontra em um meio dielétrico e os espelhos entre as cavidades possuem uma baixa taxa de transmitância (ver figura 3.1).

O Hamiltoniano de acoplamento deste modelo é derivado fenomenologicamente, partindo da definição do operador potencial vetor da cavidade i :

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\hat{b}_i + \mathbf{u}_i^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\hat{b}_i^\dagger, \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{u}_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ é o modo do campo na cavidade i , \mathbf{r} é o vetor posição e \mathbf{r}_i é a posição do centro geométrico da cavidade i .

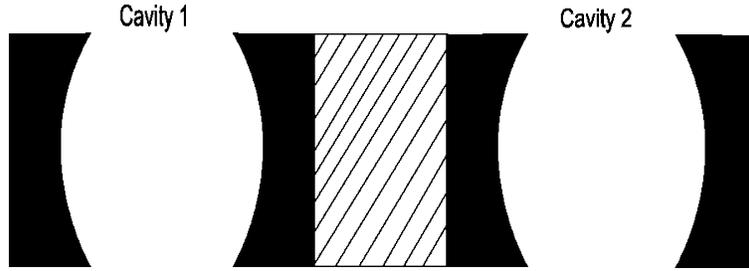


Figura 3.1: Esquema de um sistema formado por duas cavidades acopladas. A região preenchida por linhas diagonais representa o local onde ocorre a sobreposição entre os dois campos eletromagnéticos.

É assumido que o acoplamento é proporcional à integral de sobreposição dos dois campos eletromagnéticos na região entre as duas cavidades. Este modelo é uma boa aproximação se as cavidades estão bem separadas, i.e., quando o acoplamento não é muito forte. Consequentemente, o Hamiltoniano de acoplamento é, sob a aproximação de ondas girantes(RWA):

$$H_{C_1C_2} = \hbar\lambda \left(\hat{b}_1\hat{b}_2^\dagger + \hat{b}_1^\dagger\hat{b}_2 \right), \quad (3.3)$$

onde λ é a constante de acoplamento entre as cavidades e é proporcional à integral de sobreposição:

$$\lambda \propto \int \mathbf{u}_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{u}_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)d\mathbf{r}. \quad (3.4)$$

O acoplamento entre as cavidades pode ser visto como o equivalente óptico ao limite de ligação forte utilizado na física do estado sólido [27], onde a sobreposição entre as funções de onda atômica exige correções para descrever cada átomo individualmente.

Este modelo de acoplamento pode ser utilizado também para cavidades separadas apenas por um único espelho[28, 29]. Neste caso podemos considerar tanto o regime óptico quanto o de microondas para descrever o sistema.

3.1.1 Diagonalização das Cavidades Acopladas

O Hamiltoniano que descreve as duas cavidades pode ser diagonalizado através de uma transformação canônica, onde ele passa a ser descrito em função de novos operadores bosônicos B_1 e B_2 dados por [30, 31]:

$$\hat{B}_1 = p\hat{b}_1 + q\hat{b}_2 \quad ; \quad \hat{B}_2 = p\hat{b}_1 - q\hat{b}_2. \quad (3.5)$$

Estes operadores devem satisfazer as relações de comutação de operadores bosônicos, de onde obtemos uma restrição nos valores dos coeficientes p e q :

$$\left. \begin{aligned} [B_1^\dagger, B_1] &= p^2 [b_1^\dagger, b_1] + q^2 [b_2^\dagger, b_2] = -1 \\ [B_2^\dagger, B_2] &= q^2 [b_1^\dagger, b_1] + p^2 [b_2^\dagger, b_2] = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow p^2 + q^2 = 1; \quad (3.6)$$

$$[B_1^\dagger, B_2] = pq [b_1^\dagger, b_1] - qp [b_2^\dagger, b_2] = -pq + qp = 0.$$

Em função dos novos operadores, o Hamiltoniano pode ser reescrito como:

$$H = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\Omega_1\hat{B}_1^\dagger\hat{B}_1 + \hbar\Omega_2\hat{B}_2^\dagger\hat{B}_2 + \hbar\Delta \left(\hat{B}_1\hat{B}_2^\dagger + \hat{B}_1^\dagger\hat{B}_2 \right) \quad (3.7)$$

onde temos as três frequências abaixo:

$$\Omega_1 = \omega_1 p^2 + \omega_2 q^2 + 2\lambda pq \quad (3.8)$$

$$\Omega_2 = \omega_1 q^2 + \omega_2 p^2 - 2\lambda pq \quad (3.9)$$

$$\Delta = (\omega_1 - \omega_2) pq + 2\lambda (q^2 - p^2) \quad (3.10)$$

Para obtermos a diagonalização do Hamiltoniano que descreve as duas cavidades, devemos ter $\Delta = 0$. A partir desta condição e sabendo que também devemos ter $p^2 + q^2 = 1$, obtemos a seguinte solução para p e q :

$$p^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\omega_1 - \omega_2}{\sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\lambda^2}} \quad ; \quad q^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\omega_1 - \omega_2}{\sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\lambda^2}} \quad (3.11)$$

E conseqüentemente, também temos as frequências Ω_1 e Ω_2 :

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \left[(\omega_1 + \omega_2) + \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\lambda^2} \right] \quad (3.12)$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2} \left[(\omega_1 + \omega_2) - \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\lambda^2} \right]$$

Nesta tese consideramos apenas o caso de duas cavidades ressonantes com a mesma frequência ω ($= \omega_1 = \omega_2$). Como neste caso os coeficientes p e q possuem o mesmo valor ($p = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$), obtemos o Hamiltoniano abaixo:

$$H = \hbar\Omega_1 \hat{B}_1^\dagger \hat{B}_1 + \hbar\Omega_2 \hat{B}_2^\dagger \hat{B}_2 \quad (3.13)$$

onde:

$$\Omega_1 = \omega + \lambda \quad ; \quad \Omega_2 = \omega - \lambda \quad (3.14)$$

3.1.2 Mudança de Base

Para descrever a evolução temporal deste sistema, é mais conveniente representar o sistema de duas cavidades em função da base $\{|l_1\rangle_{B_1} |l_2\rangle_{B_2}\}$, onde os estados $|l_i\rangle_{B_i}$ ($i = 1, 2$) são os estados de Fock associados ao operador \hat{B}_i .

Neste caso é necessário conhecer a relação entre as bases $\{|k_1\rangle_{b_1} |k_2\rangle_{b_2}\}$ e $\{|l_1\rangle_{B_1} |l_2\rangle_{B_2}\}$. Para determinar esta relação começamos pela definição dos estados de Fock na base $\{|k_1\rangle_{b_1} |k_2\rangle_{b_2}\}$:

$$|k_1\rangle_{b_1} |k_2\rangle_{b_2} = \frac{(\hat{b}_1^\dagger)^{k_1} (\hat{b}_2^\dagger)^{k_2}}{\sqrt{k_1!} \sqrt{k_2!}} |0\rangle_{b_1} |0\rangle_{b_2}. \quad (3.15)$$

Sabendo a relação (3.5) entre os operadores \hat{B}_i e \hat{b}_i e que $|0\rangle_{b_1} |0\rangle_{b_2} = |0\rangle_{B_1} |0\rangle_{B_2}$, podemos reescrever a equação acima como:

$$|k_1\rangle_{b_1} |k_2\rangle_{b_2} = \frac{(p\hat{B}_1^\dagger + q\hat{B}_2^\dagger)^{k_1}}{\sqrt{k_1!}} \frac{(p\hat{B}_1^\dagger - q\hat{B}_2^\dagger)^{k_2}}{\sqrt{k_2!}} |0\rangle_{B_1} |0\rangle_{B_2}. \quad (3.16)$$

Os dois binômios nesta expressão podem ser escritos na forma das séries de potência abaixo:

$$(p\hat{B}_1^\dagger + q\hat{B}_2^\dagger)^{k_1} = \sum_{l_1=0}^{k_1} \frac{k_1!}{l_1!(k_1-l_1)!} (p\hat{B}_1^\dagger)^{l_1} (q\hat{B}_2^\dagger)^{k_1-l_1}; \quad (3.17)$$

$$(p\hat{B}_1^\dagger - q\hat{B}_2^\dagger)^{k_2} = \sum_{l_2=0}^{k_2} \frac{k_2!}{l_2!(k_2-l_2)!} (p\hat{B}_1^\dagger)^{l_2} (-q\hat{B}_2^\dagger)^{k_2-l_2}. \quad (3.18)$$

Substituindo estas duas equações em (3.16) obtemos a relação entre as duas bases:

$$|k_1\rangle_{b_1} |k_2\rangle_{b_2} = \sum_{l_1=0}^{k_1} \sum_{l_2=0}^{k_2} Q(k_1, k_2, l_1, l_2) |l_1 + l_2\rangle_{B_1} |k_1 + k_2 - l_1 - l_2\rangle_{B_2}, \quad (3.19)$$

onde:

$$Q(k_1, k_2, l_1, l_2) = (-1)^{k_2+l_2} \frac{\sqrt{k_1!k_2! (l_1 + l_2) (k_1 + k_2 - l_1 - l_2)}}{l_1!l_2! (k_1 + l_1) (k_2 - l_2)}. \quad (3.20)$$

Para obter esta relação também utilizamos a definição dos estados de Fock para a base $\{|l_1\rangle_{B1} |l_2\rangle_{B2}\}$:

$$|l_1\rangle_{B1} |l_2\rangle_{B2} = \frac{(\hat{b}_1^\dagger)^{l_1}}{\sqrt{l_1!}} \frac{(\hat{b}_2^\dagger)^{l_2}}{\sqrt{l_2!}} |0\rangle_{B1} |0\rangle_{B2}. \quad (3.21)$$

A expressão (3.19) também pode ser escrita como:

$$|k_1\rangle_{b1} |k_2\rangle_{b2} = \sum_{L=0}^{k_1+k_2} P(L, k_1, k_2) |L\rangle_{B1} |k_1 + k_2 - L\rangle_{B2}, \quad (3.22)$$

onde:

$$P(L, k_1, k_2) = \sum_{l_1=0}^{k_1} \sum_{l_2=0}^{k_2} Q(k_1, k_2, l_1, l_2) \delta_{l_1+l_2, L}. \quad (3.23)$$

Esta forma é mais conveniente se desejarmos utilizar estas expressões em cálculo numérico.

3.2 Acoplamento via fibra óptica

Outro tipo de acoplamento entre as duas cavidades ocorre quando temos uma fibra óptica, de comprimento l , fazendo a conexão entre os dois campos, como ilustrado na figura 3.2.

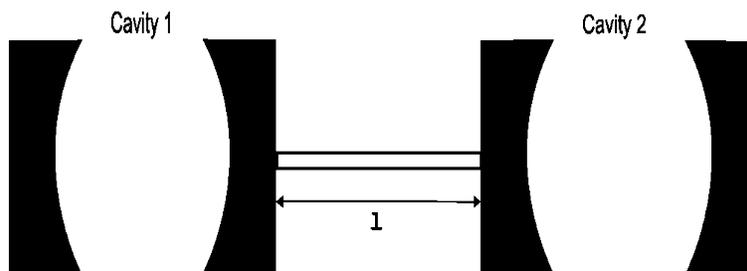


Figura 3.2: Esquema de um sistema formado por duas cavidades acopladas conectadas por uma fibra óptica

Neste caso, temos o acoplamento entre três subsistemas (cavidade 1, cavidade 2, fibra óptica) que é descrito pelo seguinte Hamiltoniano:

$$\begin{aligned}
H_S = & \sum_{i=1}^2 \hbar\omega \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \hbar\beta_j \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j + \hbar\lambda_j \left[\hat{c}_j \left(\hat{b}_1^\dagger + (-1)^j e^{i\varphi} \hat{b}_2^\dagger \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \hat{c}_j^\dagger \left(\hat{b}_1 + (-1)^j e^{-i\varphi} \hat{b}_2 \right) \right] \right\}, \tag{3.24}
\end{aligned}$$

onde \hat{b}_i^\dagger e \hat{b}_i são os operadores de criação e aniquilação correspondentes aos modos das cavidades 1 e 2, ambas de frequência ω , \hat{c}_j^\dagger e \hat{c}_j são os operadores de criação e aniquilação correspondente ao modo j da fibra, de frequência β_j e $\varphi = 2\pi\omega l/c$ é a fase devida a propagação do campo na fibra de comprimento l .

Seja $\bar{\lambda}$ a taxa de decaimento das cavidades no continuum de modos da fibra. Em uma fibra de comprimento l temos a quantização dos modos no interior da fibra com espaçamento $2\pi c/l$ em frequências consecutivas. Nesta situação, o número de modos da fibra que interagem significativamente com as cavidades é:

$$n \approx \frac{l\bar{\lambda}}{2\pi c}. \tag{3.25}$$

No nosso caso, consideramos a situação no qual $n \leq 1$ (“limite de fibra curta”), onde apenas um modo (ressonante) da fibra vai interagir com as cavidades. Este limite é válido em muitas situações experimentais reais: $l \leq 1m$ e $\bar{\lambda} \simeq 1GHz$ são exemplo de valores dentro deste limite.

O acoplamento λ com o modo da fibra pode ser estimado como:

$$\lambda \simeq \sqrt{\frac{4\pi\bar{\lambda}c}{l}}, \tag{3.26}$$

onde podemos observar que o valor de λ pode aumentar se a refletividade do espelho conectado à fibra diminuir.

Neste limite o Hamiltoniano pode ser reescrito como:

$$H_S = \sum_{i=1}^2 \hbar\omega \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i + \hbar\omega \hat{c}^\dagger \hat{c} + \hbar\lambda \left[\hat{c} \left(\hat{b}_1^\dagger + e^{i\varphi} \hat{b}_2^\dagger \right) + \hat{c}^\dagger \left(\hat{b}_1 + e^{-i\varphi} \hat{b}_2 \right) \right]. \tag{3.27}$$

O Hamiltoniano (3.27) pode ser diagonalizado se definirmos novos operadores bosônicos [15]:

$$\begin{aligned}
\hat{d}_1 &= \frac{1}{2} \left(\hat{b}_1 + e^{-i\varphi} \hat{b}_2 + \sqrt{2} \hat{c} \right); & \hat{d}_2 &= \frac{1}{2} \left(\hat{b}_1 + e^{i\varphi} \hat{b}_2 - \sqrt{2} \hat{c} \right); \\
\hat{d}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{b}_1 - e^{-i\varphi} \hat{b}_2 \right). \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Em função dos novos operadores o Hamiltoniano assume a forma abaixo

$$H_S = \sum_{k=1}^3 \hbar \Omega_k \hat{d}_k^\dagger \hat{d}_k, \quad (3.29)$$

onde $\Omega_{1,2} = \omega \pm \sqrt{2}\lambda$ e $\Omega_3 = \omega$ são as frequências dos modos normais \hat{d}_1 , \hat{d}_2 e \hat{d}_3 .

Em alguns trabalhos envolvendo este modelo [32], o termo $e^{-i\varphi}$ contendo a fase devida à propagação do campo na fibra é incorporado à definição do operador de campo \hat{b}_2 . Nesta notação, os termos $e^{\pm i\varphi}$ são descartados na descrição do sistema.

O modelo de acoplamento via fibra óptica nos permite trabalhar com cavidades separadas por distâncias muito maiores que o acoplamento devido a sobreposição dos modos desacoplados (seção 3.1), mesmo com as condições impostas pelo limite de fibra curta. No entanto a presença da fibra óptica nos restringe a trabalhar apenas com cavidades no regime óptico (na seção 3.1 podemos utilizar também as cavidades de microondas).

3.3 Realizações experimentais envolvendo cavidades eletromagnéticas e fibras ópticas

O tipo mais conhecido de cavidade eletromagnética utilizada em experimentos é a cavidade de Fabry-Perot, onde a onda eletromagnética é aprisionada utilizando dois espelhos de alta refletância.

Para frequências na faixa de microondas temos as cavidades supercondutoras, que possuem fatores de qualidade da ordem de $10^8 - 10^{10}$, onde os fótons têm tempos de vida na faixa de $1 - 100ms$. Um exemplo deste tipo de cavidade pode ser visto no trabalho feito por Raimond et al. [33], onde é apresentada uma montagem experimental envolvendo a interação entre átomos de Rydberg e a cavidade de Fabry-Perot, montada com dois espelhos esféricos de Niobio (ver figura 3.3).

Na faixa de frequência óptica também temos microcavidades do tipo Fabry-Perot que, embora tenham um decaimento maior que as cavidades de microondas, ainda possuem altos valores para o fator de qualidade ($10^3 - 10^6$).

Para estes tipos de cavidades já foi obtido o acoplamento entre duas microcavidades semicondutoras separadas por um material dielétrico, como pode ser visto no trabalho apresentado por Stanley et al. [34] (figura 3.4). Neste caso o sistema integrado é formado durante o processo de crescimento dos espelhos dielétricos, onde é possível controlar a refletividade do espelho do meio de tal forma a satisfazer a condição sobre o acoplamento das cavidades da seção 3.1.

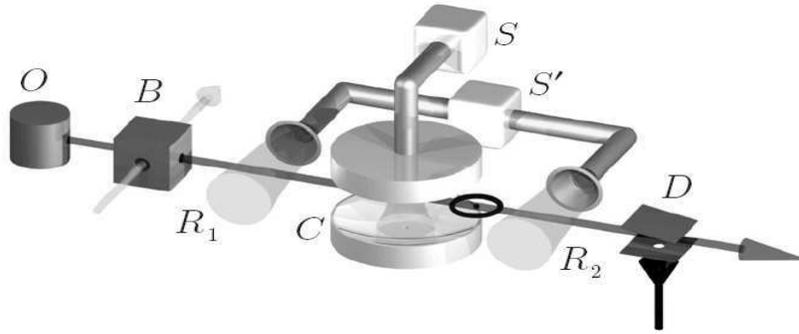


Figura 3.3: Montagem experimental onde uma cavidade de microondas é atravessada por átomos de Ridberg. Raimond et al [33]

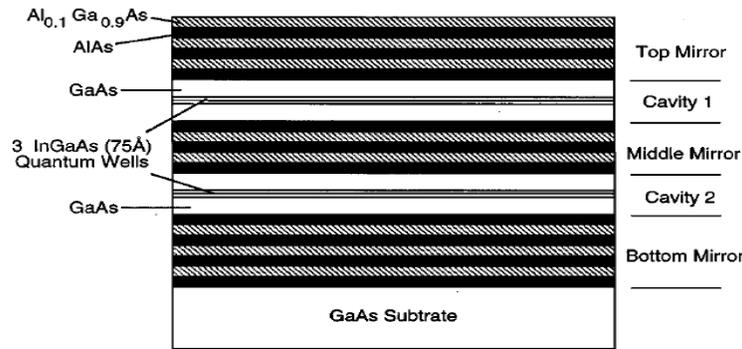


Figura 3.4: Esquema representando duas cavidades semicondutoras acopladas. Stanley et al [34]

Além disso, também temos o acoplamento da microcavidade de Fabry-Perot com fibras ópticas. No artigo de Eriksson et al. [35], a microcavidade acoplada à fibra é utilizada para detecção de um único átomo no interior de um 'atom chip'. Para que ocorra o acoplamento da cavidade com a fibra é necessário colar o final da fibra com o espelho na direção do eixo da cavidade, como ilustrado na figura 3.5.

Ainda na faixa de frequência óptica temos, além das cavidades de Fabry-Perot, as microcavidades de “galeria sussurrante” (“whispering gallery cavities”) [36], onde as ondas são confinadas no interior de microestruturas dielétricas (em geral feitas de sílica ou quartzo) através de reflexões internas totais contínuas. Como podemos ver na tabela da figura 3.6, diversas formas geométricas são utilizadas para as microestruturas (esferas, toros ou discos por exemplo).

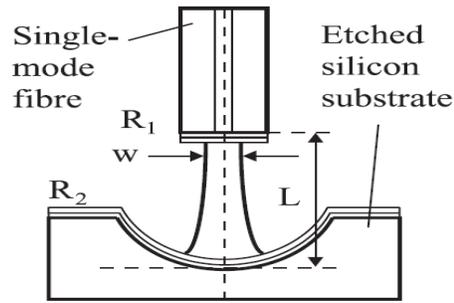


Figura 3.5: Microcavidade de Fabry-Perot acoplada a uma fibra óptica. Eriksson et al [35]

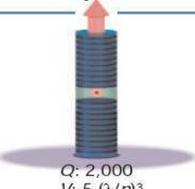
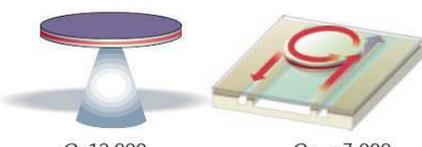
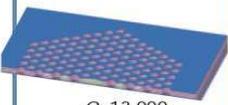
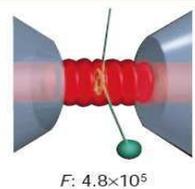
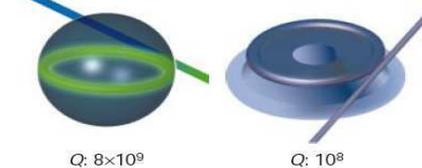
	Fabry-Perot	Whispering gallery	Photonic crystal
High Q	 $Q: 2,000$ $V: 5 (\lambda/n)^3$	 $Q: 12,000$ $V: 6 (\lambda/n)^3$ $Q_{III-v}: 7,000$ $Q_{Poly}: 1.3 \times 10^5$	 $Q: 13,000$ $V: 1.2 (\lambda/n)^3$
Ultra-high Q	 $F: 4.8 \times 10^5$ $V: 1,690 \mu\text{m}^3$	 $Q: 8 \times 10^9$ $V: 3,000 \mu\text{m}^3$ $Q: 10^8$	

Figura 3.6: Lista de Cavidades ópticas disponíveis atualmente. Vahala [36]

Para as microcavidades em forma de esferas e toros foram observados altas taxas de eficiência no acoplamento entre os modos de “corredor sussurrante” (“whispering gallery modes”) e fibras ópticas, chegando a uma eficiência de acoplamento acima de 99,97% [37].

Por último temos as microcavidades baseadas em cristais fotônicos, que são construídas fazendo um arranjo de buracos na forma hexagonal no cristal fotônico, deixando de fazer um furo no ponto central do arranjo. Com isto temos um modo do campo “defeituoso” que permanece aprisionado na pequena região sem buraco no centro do hexágono. Este tipo de cavidade possui a vantagem de aprisionar a luz em volumes extremamente pequenos, mas suas taxas de dissipação ainda são acima dos valores previstos na teoria.

Para este sistema, Hwang et al. [38] apresentaram um arranjo experimental (figura 3.7) onde é possível otimizar o acoplamento entre a cavidade baseada em cristal fotônico e uma fibra óptica para uma eficiência acima de 80%.

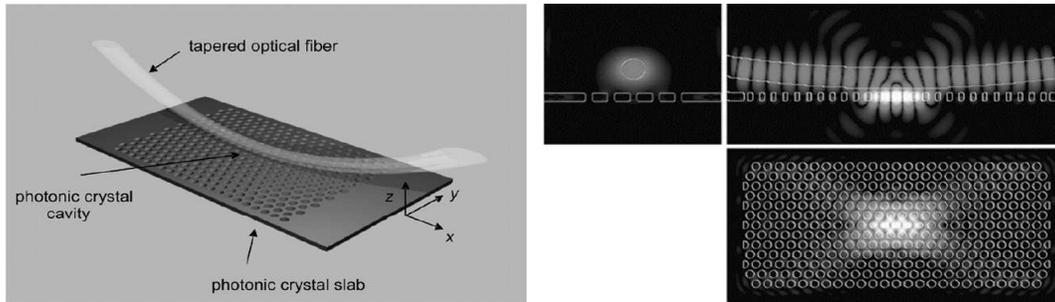


Figura 3.7: Arranjo experimental envolvendo o acoplamento entre uma microcavidade baseada em cristal fotônico e uma fibra óptica. Hwang et al. [38]

Capítulo 4

Interação entre átomos e cavidades acopladas

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos em modelos envolvendo a interação entre átomos de dois níveis e as cavidades acopladas do capítulo 3. Em cada seção consideramos diferentes configurações possíveis com o objetivo de observar o emaranhamento e a transmissão de informação quântica entre as partes que compõem o sistema.

4.1 Dinâmica de emaranhamento na interação entre um átomo e duas cavidades acopladas

Nesta seção trabalharemos com um sistema de duas cavidades acopladas, uma delas interagindo com um átomo de dois níveis. A interação entre o átomo e sua respectiva cavidade obedece o conhecido modelo de Jaynes-Cummings.

Para o acoplamento entre as cavidades nós consideramos o modelo apresentado na seção 3.1, onde o sistema se encontra em um meio dielétrico e os espelhos entre as cavidades possuem uma baixa taxa de transmitância (ver figura 4.1).

4.1.1 Hamiltoniano do Sistema

O Hamiltoniano que descreve o sistema da figura 4.1 é dado por:

$$H = \hbar \sum_{i=1}^2 \omega_i \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i + \frac{\hbar \omega_a}{2} \sigma_z + \hbar g \left(\hat{b}_1 \sigma_+ + \hat{b}_1^\dagger \sigma_- \right) + \hbar \lambda \left(\hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger + \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 \right), \quad (4.1)$$

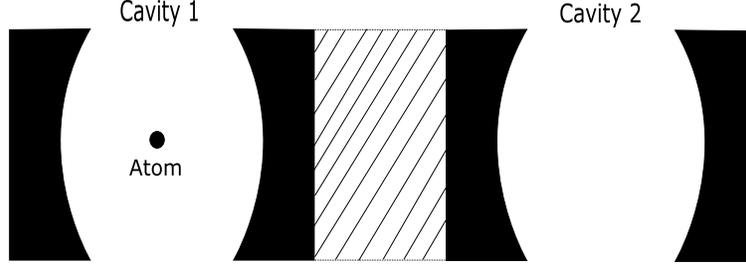


Figura 4.1: Esquema de um sistema formado por duas cavidades acopladas, uma delas interagindo com um átomo de dois níveis. A região preenchida por linhas diagonais representa o local onde ocorre a sobreposição entre os dois campos eletromagnéticos.

onde \hat{b}_i^\dagger e \hat{b}_i são os operadores de criação e destruição correspondentes à cavidade i , ω_i é a frequência da cavidade i , ω_a é a frequência atômica, σ_+ e σ_- são os operadores atômicos de levantamento e abaixamento, e g é a constante de acoplamento entre o átomo e a cavidade 1. A constante λ é a constante de acoplamento entre as cavidades e é proporcional a integral de sobreposição entre os dois campos:

$$\lambda \propto \int \mathbf{u}_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{u}_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)d\mathbf{r}. \quad (4.2)$$

Como já foi visto na seção 3.1, podemos diagonalizar o Hamiltoniano que descreve as duas cavidades no caso ressonante ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) quando passamos a descrever o sistema em função dos operadores abaixo:

$$\hat{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b}_1 + \hat{b}_2) \quad ; \quad \hat{B}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b}_1 - \hat{b}_2) \quad (4.3)$$

Em função destes operadores, o Hamiltoniano do sistema pode ser reescrito como:

$$H = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\Omega_1\hat{B}_1^\dagger\hat{B}_1 + \hbar\Omega_2\hat{B}_2^\dagger\hat{B}_2 + \frac{\hbar g}{\sqrt{2}}\left[\left(\hat{B}_1 + \hat{B}_2\right)\sigma_+ + \left(\hat{B}_1^\dagger + \hat{B}_2^\dagger\right)\sigma_-\right] \quad (4.4)$$

onde $\Omega_1 = \omega + \lambda$ e $\Omega_2 = \omega - \lambda$.

Nosso objetivo nesta seção consiste em observar a dinâmica do emaranhamento que ocorre entre as três partes que compõem o sistema (cavidade 1, cavidade 2 e átomo). Para isto, iremos analisar a evolução temporal da grandeza conhecida como Negatividade.

4.1.2 Evolução Temporal do Sistema

Antes de analisar a dinâmica de emaranhamento devemos determinar a evolução temporal do sistema descrito pelo Hamiltoniano (4.1). Ao longo do processo foram impostas algumas restrições no modelo para simplificar a solução do problema.

Representação de Interação:

Para obter a evolução temporal do sistema, utilizamos a representação de Interação, onde descrição do sistema depende apenas do Hamiltoniano de interação. Para fazer essa mudança de representação, separamos o Hamiltoniano em uma soma de três termos:

$$H = H_C + H_a + H_{aC} \quad (4.5)$$

onde H_C corresponde ao Hamiltoniano livre das duas cavidades, H_a ao Hamiltoniano livre do átomo e H_{aC} o Hamiltoniano de interação átomo-campo:

$$\begin{aligned} H_a &= \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z; \quad H_c = \hbar\Omega_1\hat{B}_1^\dagger\hat{B}_1 + \hbar\Omega_2\hat{B}_2^\dagger\hat{B}_2 \quad e \\ H_{aC} &= \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \left[\left(\hat{B}_1 + \hat{B}_2 \right) \sigma_+ + \left(\hat{B}_1^\dagger + \hat{B}_2^\dagger \right) \sigma_- \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

O Hamiltoniano de interação do sistema nesta representação é dada como:

$$\tilde{H}_{aC} = e^{\frac{i}{\hbar}(H_C+H_a)t} H_{aC} e^{-\frac{i}{\hbar}(H_C+H_a)t} \quad (4.7)$$

Através das propriedades dos operadores de criação e destruição das cavidades e dos operadores de levantamento e abaixamento atômico, podemos demonstrar que:

$$\begin{aligned} e^{i\Omega_i\hat{B}_i^\dagger\hat{B}_i t}\hat{B}_i^\dagger e^{-i\Omega_i\hat{B}_i^\dagger\hat{B}_i t} &= e^{i\Omega_i t}\hat{B}_i^\dagger \quad ; \quad e^{i\Omega_i\hat{B}_i^\dagger\hat{B}_i t}\hat{B}_i e^{-i\Omega_i\hat{B}_i^\dagger\hat{B}_i t} = e^{-i\Omega_i t}\hat{B}_i \\ e^{i\frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z t}\sigma_+ e^{-i\frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z t} &= e^{i\omega_a t}\sigma_+ \quad ; \quad e^{i\frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z t}\sigma_- e^{-i\frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z t} = e^{-i\omega_a t}\sigma_- \end{aligned} \quad (4.8)$$

Usando estas relações, podemos escrever o Hamiltoniano de Interação como:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{aC} &= \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \left[\left(e^{-i(\Omega_1-\omega_a)t}\hat{B}_1 + e^{-i(\Omega_2-\omega_a)t}\hat{B}_2 \right) \sigma_+ + \right. \\ &\quad \left. \left(e^{i(\Omega_1-\omega_a)t}\hat{B}_1^\dagger + e^{i(\Omega_2-\omega_a)t}\hat{B}_2^\dagger \right) \sigma_- \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para obtermos um Hamiltoniano de interação independente do tempo consideramos que o sistema se encontra no regime onde o acoplamento entre as cavidades

é muito maior que o acoplamento átomo-campo ($\lambda \gg g$). Além disso, escolhe-mos $\Omega_2 = \omega_a$ para que a expressão (4.9) tenha dependência temporal apenas nas exponenciais contendo as frequências:

$$(\Omega_1 - \Omega_2) = 2\lambda \gg g.$$

Com isso, podemos utilizar a aproximação de ondas girantes para eliminar os termos que dependem destas frequências, o que nos leva à expressão abaixo:

$$\tilde{H}_{aC} = \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \left[\hat{B}_2 \sigma_+ + \hat{B}_2^\dagger \sigma_- \right]. \quad (4.10)$$

Este Hamiltoniano tem a forma do conhecido modelo de Jaynes-Cummings, que descreve a interação de um átomo de dois níveis com uma cavidade eletromagnética de um modo.

Operador de Evolução Temporal:

Na representação de Interação, o operador de evolução temporal é dado por:

$$U_I = e^{-\frac{i}{\hbar} \tilde{H}_{aC} t} = e^{-\frac{ig}{\sqrt{2}} [\hat{B}_2 \sigma_+ + \hat{B}_2^\dagger \sigma_-] t}. \quad (4.11)$$

A expressão acima pode ser escrita como uma série de potências:

$$U_I = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{igt}{\sqrt{2}} \right)^k \frac{[\hat{B}_2 \sigma_+ + \hat{B}_2^\dagger \sigma_-]^k}{k!}. \quad (4.12)$$

A aplicação do termo em colchetes sobre os autoestados atômicos nos levam a resultados diferentes, dependendo do valor da potência k :

para k par:

$$\begin{aligned} [\hat{B}_2 \sigma_+ + \hat{B}_2^\dagger \sigma_-]^k |g\rangle &= \left(\hat{B}_2^\dagger \hat{B}_2 \right)^{\frac{k}{2}} |g\rangle; \\ [\hat{B}_2 \sigma_+ + \hat{B}_2^\dagger \sigma_-]^k |e\rangle &= \left(\hat{B}_2 \hat{B}_2^\dagger \right)^{\frac{k}{2}} |e\rangle. \end{aligned} \quad (4.13)$$

para k ímpar:

$$\begin{aligned} [\hat{B}_2 \sigma_+ + \hat{B}_2^\dagger \sigma_-]^k |g\rangle &= \hat{B}_2 \left(\hat{B}_2^\dagger \hat{B}_2 \right)^{\frac{k-1}{2}} |e\rangle; \\ [\hat{B}_2 \sigma_+ + \hat{B}_2^\dagger \sigma_-]^k |e\rangle &= \hat{B}_2^\dagger \left(\hat{B}_2 \hat{B}_2^\dagger \right)^{\frac{k-1}{2}} |g\rangle. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Aplicando o operador (4.12) sobre o projetor do sistema atômico e utilizando as relações (4.13) e (4.14), obtemos o operador de evolução temporal na base atômica:

$$U_I = \cos\left(\frac{gt}{\sqrt{2}}\sqrt{\hat{B}_2\hat{B}_2^\dagger}\right)|e\rangle\langle e| + \cos\left(\frac{gt}{\sqrt{2}}\sqrt{\hat{B}_2^\dagger\hat{B}_2}\right)|g\rangle\langle g| \\ -i\hat{B}_2^\dagger\frac{\text{sen}\left(\frac{gt}{\sqrt{2}}\sqrt{\hat{B}_2\hat{B}_2^\dagger}\right)}{\sqrt{\hat{B}_2\hat{B}_2^\dagger}}|g\rangle\langle e| - i\hat{B}_2\frac{\text{sen}\left(\frac{gt}{\sqrt{2}}\sqrt{\hat{B}_2^\dagger\hat{B}_2}\right)}{\sqrt{\hat{B}_2^\dagger\hat{B}_2}}|e\rangle\langle g|. \quad (4.15)$$

4.1.3 Análise do Emaranhamento do sistema

Nessa seção é apresentada a análise da evolução temporal do emaranhamento entre as três partes que compõem o sistema. Como medida de emaranhamento nós utilizamos a **Negatividade** (ver seção 1.4.1), dada em função da soma dos autovalores negativos (λ_M) do operador ρ^{T_k} :

$$E_N(\rho^{T_k}) = 2\max\{0, \lambda_M\} \quad (4.16)$$

onde ρ^{T_k} é a transposta parcial com relação ao subsistema K (átomo, cavidade 1, cavidade 2) a ser observado.

Em seguida observamos a evolução temporal da negatividade para diferentes tipos de estados iniciais. É mais conveniente representar o sistema na base $\{|l_1\rangle_{B_1} |l_2\rangle_{B_2}\}$ quando o operador de evolução (4.15) for utilizado. Para os casos apresentados nesta seção utilizamos as seguintes expressões, obtidas a partir da equação (3.19):

$$\begin{aligned} |0\rangle_{B_1} |0\rangle_{B_2} &= |0\rangle_{b_1} |0\rangle_{b_2}; \\ |0\rangle_{B_1} |1\rangle_{B_2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_{b_1} |0\rangle_{b_2} - |0\rangle_{b_1} |1\rangle_{b_2}); \\ |1\rangle_{B_1} |0\rangle_{B_2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_{b_1} |0\rangle_{b_2} + |0\rangle_{b_1} |1\rangle_{b_2}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Caso A: $|\Psi_0\rangle = |e\rangle |0\rangle_{b_1} |0\rangle_{b_2} = |e\rangle |0\rangle_{B_1} |0\rangle_{B_2}$.

O primeiro caso analisado foi o estado inicial onde o átomo se encontra no estado excitado e ambas as cavidades estão no estado de vácuo. Aplicando o operador de evolução temporal (4.15) no estado inicial acima, nós obtemos o estado do sistema após um tempo de interação t :

$$|\Psi(\tau)\rangle = \cos\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) |e\rangle |0\rangle_{B1} |0\rangle_{B2} - i\sin\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) |g\rangle |0\rangle_{B1} |1\rangle_{B2}, \quad (4.18)$$

onde $\tau = gt$.

Uma vez determinado a evolução temporal do estado do sistema estudamos a negatividade (4.16) a partir do operador densidade $\rho(t) = |\Psi(t)\rangle \langle\Psi(t)|$, cujos resultados podem ser vistos na figura 4.2. A negatividade do átomo (figura 4.2.a) oscila com frequência $g/\sqrt{2}$ enquanto a negatividade das duas cavidades oscilam com a metade desta frequência (figuras 4.2.b e 4.2.c).

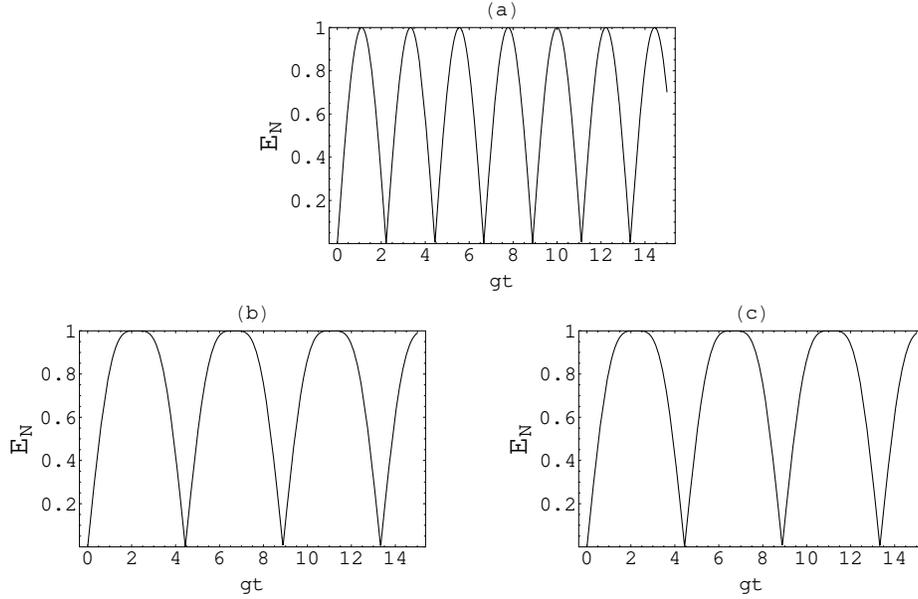


Figura 4.2: Negatividade em função do tempo normalizado gt correspondente ao: (a) átomo, (b) cavidade 1 e (c) cavidade 2 para o estado inicial $|e\rangle |0\rangle_{b1} |0\rangle_{b2}$. Estes resultados foram obtidos com $\omega_a = 25g$, $\lambda/g = 6.25$ e $\omega = \omega_a + \lambda$.

Pode-se observar que, nos instantes de tempo $t_n = (2n+1)\pi/(g\sqrt{2})$ a negatividade do átomo é zero e ambas as cavidades têm negatividade igual a 1. Isto significa que o átomo está separado do resto do sistema enquanto as duas cavidades se encontram em um estado maximamente emaranhado.

Este resultado é consistente uma vez que, nestes instantes de tempo, o átomo está no estado fundamental e as duas cavidades estão em um dos estados de Bell:

$$|\Psi(t_n)\rangle = |g\rangle |0\rangle_{B1} |1\rangle_{B2} = \frac{1}{\sqrt{2}} |g\rangle (|0\rangle_{b1} |1\rangle_{b2} - |1\rangle_{b1} |0\rangle_{b2}). \quad (4.19)$$

Também existem instantes de tempo ($t = (2n + 1)\pi/(2g\sqrt{2})$) onde a negatividade do átomo é igual a 1. Em $\delta t = \pi/(2g\sqrt{2})$ ($n = 0$), o estado do sistema se encontra em um estado do tipo Bell entre o átomo e o modo normal B_2 :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle |1\rangle_{B_2} - i |e\rangle |0\rangle_{B_2}) |0\rangle_{B_1}. \quad (4.20)$$

Enquanto que, para $\delta t = 3\pi/(2g\sqrt{2})$ ($n = 1$), temos outro estado do tipo Bell entre o átomo e o modo normal B_2 :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle |1\rangle_{B_2} + i |e\rangle |0\rangle_{B_2}) |0\rangle_{B_1}. \quad (4.21)$$

Desta forma podemos dizer que, nos instantes $t = (2n + 1)\pi/(2g\sqrt{2})$, o sistema se encontra alternadamente entre os estados (4.20) e (4.21).

Para $t = 2n\pi/(g\sqrt{2})$ a negatividade para todos os subsistemas é zero. Isto corresponde aos instantes de tempo onde o sistema retorna ao seu estado inicial, no qual todas as partes do sistema estão separados entre si.

Caso B: $|\Psi_0\rangle = |g\rangle |n_1\rangle_{b_1} |n_2\rangle_{b_2}$.

Agora apresentaremos os resultados correspondentes a situação onde o átomo está inicialmente no estado fundamental e cada cavidade se encontra no estado de Fock. Consideramos primeiro a configuração onde $n_1 = 1$ e $n_2 = 0$, correspondente ao estado inicial:

$$|\Psi_0\rangle = |g\rangle |1\rangle_{b_1} |0\rangle_{b_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} |g\rangle (|0\rangle_{B_1} |1\rangle_{B_2} + |1\rangle_{B_1} |0\rangle_{B_2}). \quad (4.22)$$

Aplicando novamente o operador (4.15) no estado inicial, obtemos que:

$$\begin{aligned} |\Psi(\tau)\rangle &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) |e\rangle |0\rangle_{B_1} |0\rangle_{B_2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{cos}\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) |g\rangle |0\rangle_{B_1} |1\rangle_{B_2} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i2\lambda\tau/g} |g\rangle |1\rangle_{B_1} |0\rangle_{B_2}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Na figura 4.3 nós temos a negatividade para cada subsistema associado ao estado (4.23). Neste caso, a negatividade correspondente às duas cavidades tem oscilações secundárias cuja frequência aumenta com o valor da razão λ/g entre a constante de acoplamento entre os modos das cavidades e o acoplamento entre o átomo e a cavidade 1. No entanto, a presença do átomo no estado fundamental induz uma modulação entre os instantes de tempo $t = (2n + 1)\pi/(g\sqrt{2})$. Estas oscilações também são afetadas pelos valores de n_1 e n_2 no estado inicial das cavidades.

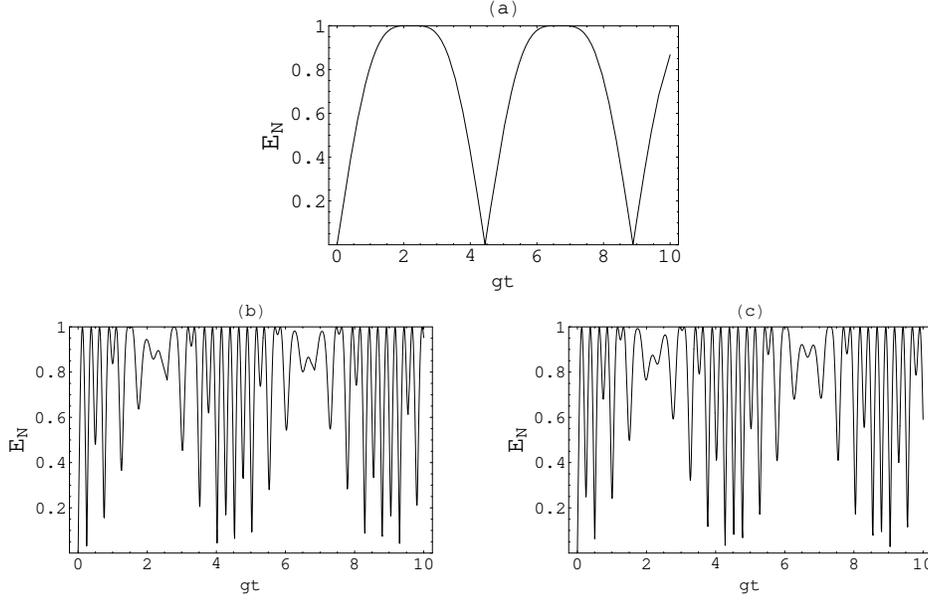


Figura 4.3: Negatividade em função do tempo normalizado gt correspondente ao: (a) átomo, (b) cavidade 1 e (c) cavidade 2 para o estado inicial $|g\rangle |1\rangle_{b1} |0\rangle_{b2}$. Estes resultados foram obtidos com $\omega_a = 25g$, $\lambda/g = 6.25$ e $\omega = \omega_a + \lambda$.

Nós também observamos que a negatividade correspondente à cavidade 1 tem a mesma estrutura que a da cavidade 2, mas apresentam diferenças nas oscilações de alta frequência.

Consideramos também a configuração $n_1 = 0$ e $n_2 = 1$, onde o sistema está inicialmente no estado:

$$|\Psi_0\rangle = |g\rangle |0\rangle_{b1} |1\rangle_{b2} = \frac{1}{\sqrt{2}} |g\rangle (|1\rangle_{B1} |0\rangle_{B2} - |0\rangle_{B1} |1\rangle_{B2}). \quad (4.24)$$

Utilizando o mesmo método dos casos anteriores obtemos um estado análogo ao estado (4.23), mas com diferença nas fases relativas:

$$\begin{aligned} |\Psi(\tau)\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) |e\rangle |0\rangle_{B1} |0\rangle_{B2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{cos}\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) |g\rangle |0\rangle_{B1} |1\rangle_{B2} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i2\lambda\tau/g} |g\rangle |1\rangle_{B1} |0\rangle_{B2}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Na figura 4.4 temos comportamento da negatividade em cada subsistema para esta situação. Comparando a figura 4.3 com os resultados da figura 4.4, notamos

que a negatividade para o átomo tem o mesmo comportamento em ambos os estados iniciais $|g\rangle |1\rangle_{b1} |0\rangle_{b2}$ e $|g\rangle |0\rangle_{b1} |1\rangle_{b2}$.

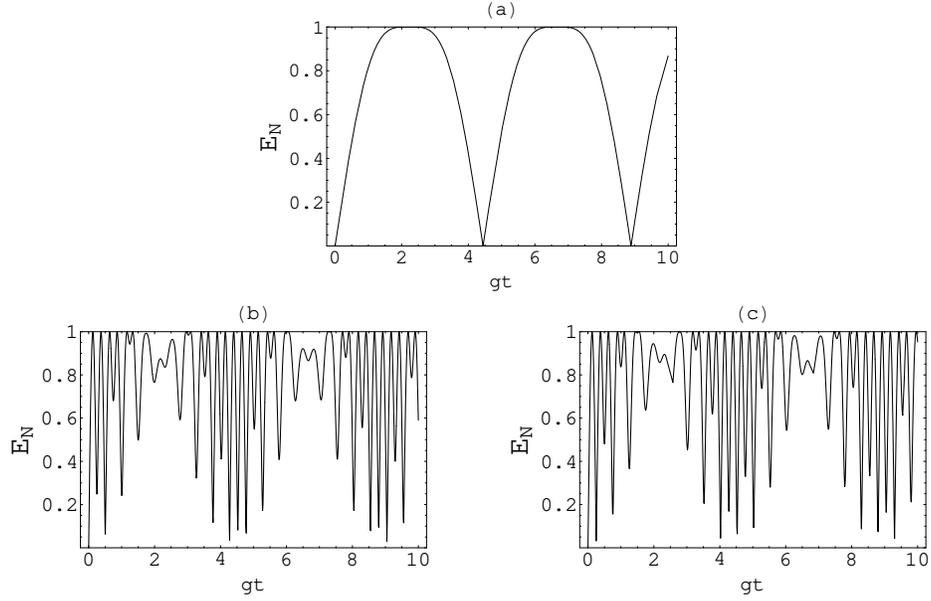


Figura 4.4: Negatividade em função do tempo normalizado gt correspondente ao: (a) átomo (b) cavidade 1 (c) cavidade 2 para o estado inicial $|g\rangle |0\rangle_{b1} |1\rangle_{b2}$. Estes resultados foram obtidos com $\omega_a = 25g$, $\lambda/g = 6.25$ e $\omega = \omega_a + \lambda$.

Além disso, a negatividade para a cavidade 1 no estado inicial $|g\rangle |1\rangle_{b1} |0\rangle_{b2}$ corresponde a mesma curva apresentada para a negatividade da cavidade 2 no estado inicial $|g\rangle |0\rangle_{b1} |1\rangle_{b2}$, sendo válido também o inverso.

4.2 Transferência do estado quântico entre dois átomos usando campos acoplados

Além do sistema da seção 4.1 estudamos também o caso no qual cada uma das cavidades está interagindo com um átomo de dois níveis em seu interior (ver figura 4.5).

Neste caso o Hamiltoniano do sistema é a mesma dada por (4.1), mas acrescen-

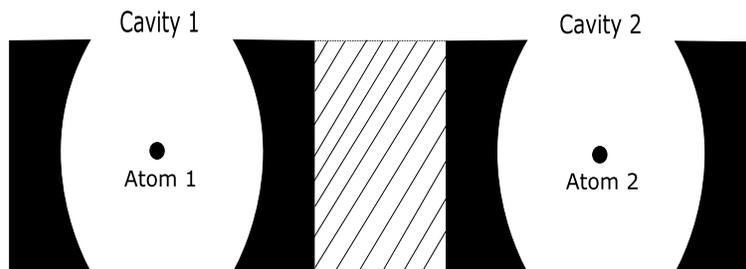


Figura 4.5: Esquema de um sistema formado por duas cavidades acopladas, cada uma delas interagindo com um átomo de dois níveis. A região preenchida por linhas diagonais representa o local onde ocorre a sobreposição entre os dois campos eletromagnéticos.

tando a energia livre do segundo átomo e sua interação com sua respectiva cavidade:

$$\begin{aligned}
 H_S = & \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_{1z} + \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_{2z} + \hbar\omega_1\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_1 + \hbar\omega_2\hat{b}_2^\dagger\hat{b}_2 + \hbar\lambda\left(\hat{b}_1\hat{b}_2^\dagger + \hat{b}_1^\dagger\hat{b}_2\right) \\
 & + \hbar g\left(\hat{b}_1\sigma_{1+} + \hat{b}_1^\dagger\sigma_{1-}\right) + \hbar g\left(\hat{b}_2\sigma_{2+} + \hat{b}_2^\dagger\sigma_{2-}\right), \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

onde \hat{b}_i^\dagger e \hat{b}_i são os operadores de criação e destruição correspondentes à cavidade i , σ_{i+} e σ_{i-} são os operadores atômicos de levantamento e abaixamento do átomo i , ω_i é a frequência da cavidade i , ω_a é a frequência atômica dos dois átomos, λ é a constante de acoplamento entre as cavidades e g é a constante de acoplamento entre o átomo i e a cavidade i .

Estaremos considerando que os dois átomos possuem a mesma frequência ω_a e que a constante de acoplamento de cada átomo com suas respectivas cavidades tem o mesmo valor g . Os resultados obtidos nesta seção já foram publicados e também podem ser conferidos no **Journal of Modern Optics** de maio de 2007 [39].

4.2.1 Evolução Temporal do Sistema

As etapas para descrever o sistema são as mesmas utilizadas na seção 4.1, exceto pela existência de mais um subsistema representando o segundo átomo. Devido às dificuldades que surgem neste caso, foi mais conveniente descrever a evolução temporal através da equação de Schrödinger, onde foram determinados os coeficientes do vetor de estado em função do tempo.

Hamiltoniano de Interação:

Para diagonalizar o hamiltoniano que descreve as duas cavidades, utilizamos a mesma transformação canônica dada em (3.5), que no caso de duas cavidades ressonantes ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) é dada por:

$$\hat{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{b}_1 + \hat{b}_2) \quad ; \quad \hat{B}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{b}_1 - \hat{b}_2). \quad (4.27)$$

Esta transformação nos permite reescrever o Hamiltoniano (4.1) como:

$$\begin{aligned} H_S = & \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\hbar\omega_a}{2} \sigma_{jz} + \hbar\Omega_j \hat{B}_j^\dagger \hat{B}_j \right) + \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \left[(\hat{B}_1 + \hat{B}_2) \sigma_{1+} + (\hat{B}_1^\dagger + \hat{B}_2^\dagger) \sigma_{1-} \right] \\ & + \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \left[(\hat{B}_1 - \hat{B}_2) \sigma_{2+} + (\hat{B}_1^\dagger - \hat{B}_2^\dagger) \sigma_{2-} \right], \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde $\Omega_1 = \omega + \lambda$ e $\Omega_2 = \omega - \lambda$.

Em seguida, passamos a descrever o sistema na representação de interação e utilizamos a aproximação de ondas girantes, de onde obtemos o Hamiltoniano de interação abaixo:

$$\tilde{H}_{aC} = \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \left[\hat{B}_2 \sigma_{1+} + \hat{B}_2^\dagger \sigma_{1-} \right] - \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \left[\hat{B}_2 \sigma_{2+} + \hat{B}_2^\dagger \sigma_{2-} \right]. \quad (4.29)$$

A aproximação de ondas girantes foi utilizada da mesma forma que a da seção 4.1.2. Logo, as restrições impostas para obter o resultado acima são as mesmas:

$$\lambda \gg g \quad ; \quad \Omega_2 = \omega_a. \quad (4.30)$$

Solução da Equação de Schrödinger:

Na representação de interação a equação de Schrödinger é dada por:

$$\frac{d}{dt} \left| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle = -\frac{i}{\hbar} \tilde{H}_{aC} \left| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle, \quad (4.31)$$

onde $\left| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle$ é o estado do sistema no tempo t (na representação de Interação).

Na base $\{|k_1\rangle_{B_1} |k_2\rangle_{B_2}\}$ de estados associados aos operadores \hat{B}_1 e \hat{B}_2 , nós consideramos que a solução geral da equação de Schrodinger é um estado puro:

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}(t)\rangle = & \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} [C_{k_1,k_2}^{gg}(t) |k_1\rangle_{B_1} |k_2\rangle_{B_2} |g\rangle_1 |g\rangle_2 + C_{k_1,k_2}^{ge}(t) |k_1\rangle_{B_1} |k_2\rangle_{B_2} |g\rangle_1 |e\rangle_2 \\ & + C_{k_1,k_2}^{eg}(t) |k_1\rangle_{B_1} |k_2\rangle_{B_2} |e\rangle_1 |g\rangle_2 + C_{k_1,k_2}^{ee}(t) |k_1\rangle_{B_1} |k_2\rangle_{B_2} |e\rangle_1 |e\rangle_2] \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde $|g\rangle_i$ e $|e\rangle_i$ são os estados fundamental e excitado do átomo i e os estados $|k_i\rangle_{B_i}$ são autoestados do operador $\hat{B}_i^\dagger \hat{B}_i$ ($i = 1, 2$) com autovalor k_i .

Substituindo (4.32) na equação de Schrodinger, obtemos um conjunto de equações diferenciais envolvendo os coeficientes $C_{k_1,k_2}^{i,j}$. Estas equações podem ser separadas em grupos de quatro equações diferenciais acopladas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} C_{k_1,k_2}^{gg}(t) &= -ig\sqrt{\frac{k_2}{2}} [C_{k_1,k_2-1}^{eg}(t) - C_{k_1,k_2-1}^{ge}(t)]; \\ \frac{d}{dt} C_{k_1,k_2-1}^{ge}(t) &= -\frac{i}{\sqrt{2}}g [\sqrt{k_2-1}C_{k_1,k_2-2}^{ee}(t) - \sqrt{k_2}C_{k_1,k_2}^{gg}(t)]; \\ \frac{d}{dt} C_{k_1,k_2-1}^{eg}(t) &= -\frac{i}{\sqrt{2}}g [\sqrt{k_2}C_{k_1,k_2}^{gg}(t) - \sqrt{k_2-1}C_{k_1,k_2-2}^{ee}(t)]; \\ \frac{d}{dt} C_{k_1,k_2-2}^{ee}(t) &= -ig\sqrt{\frac{k_2-1}{2}} [C_{k_1,k_2-1}^{ge}(t) - C_{k_1,k_2-1}^{eg}(t)]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Devemos notar que, na notação adotada em (4.33), devemos descartar os coeficientes $C_{k_1,k_2}^{i,j}(t)$ com índices negativos, que correspondem a situação onde ocorreu a aplicação do operador de destruição \hat{B}_i ($i = 1, 2$) no estado de vácuo $|0\rangle_{B_i}$.

As equações em (4.33) correspondem a um conjunto de equações diferenciais a coeficientes constantes. Estas equações podem ser resolvidas se escritas na forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \vec{C}(t) = \mathbf{M} \vec{C}(t); \quad (4.34)$$

onde:

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} C_{k_1,k_2}^{gg}(t) \\ C_{k_1,k_2-1}^{ge}(t) \\ C_{k_1,k_2-1}^{eg}(t) \\ C_{k_1,k_2-2}^{ee}(t) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M} = \frac{ig}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{k_2} & -\sqrt{k_2} & 0 \\ \sqrt{k_2} & 0 & 0 & -\sqrt{k_2-1} \\ \sqrt{k_2} & 0 & 0 & -\sqrt{k_2-1} \\ 0 & \sqrt{k_2-1} & -\sqrt{k_2-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

A matriz \mathbf{M} é diagonalizável, logo a solução de (4.34) pode ser escrita na forma:

$$\vec{C}(t) = \text{Exp}[\mathbf{M}t] \vec{C}(0), \quad (4.36)$$

de onde obtemos os coeficientes $C_{k_1, k_2}^{i,j}(t)$ em função de seus valores iniciais:

$$\begin{aligned} C_{k_1, k_2}^{gg}(t) &= -\frac{1}{2k_2-1} [1 - k_2 (1 + \cos(\Lambda_{k_2} t))] C_{k_1, k_2}^{gg}(0) \\ &+ \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k_2}{2k_2-1}} \text{sen}(\Lambda_{k_2} t) C_{k_1, k_2-1}^{ge}(0) - \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k_2}{2k_2-1}} \text{sen}(\Lambda_{k_2} t) C_{k_1, k_2-1}^{eg}(0) \\ &+ \frac{\sqrt{k_2(k_2-1)}}{2k_2-1} [1 - \cos(\Lambda_{k_2} t)] C_{k_1, k_2-2}^{ee}(0); \\ C_{k_1, k_2-1}^{ge}(t) &= \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k_2}{2k_2-1}} \text{sen}(\Lambda_{k_2} t) C_{k_1, k_2}^{gg}(0) + \cos^2\left(\frac{\Lambda_{k_2}}{2} t\right) C_{k_1, k_2-1}^{ge}(0) \\ &+ \text{sen}^2\left(\frac{\Lambda_{k_2}}{2} t\right) C_{k_1, k_2-1}^{eg}(0) + -\frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k_2-1}{2k_2-1}} \text{sen}(\Lambda_{k_2} t) C_{k_1, k_2-2}^{ee}(0); \\ C_{k_1, k_2-1}^{eg}(t) &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k_2}{2k_2-1}} \text{sen}(\Lambda_{k_2} t) C_{k_1, k_2}^{gg}(0) + \text{sen}^2\left(\frac{\Lambda_{k_2}}{2} t\right) C_{k_1, k_2-1}^{ge}(0) \\ &+ \cos^2\left(\frac{\Lambda_{k_2}}{2} t\right) C_{k_1, k_2-1}^{eg}(0) + \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k_2-1}{2k_2-1}} \text{sen}(\Lambda_{k_2} t) C_{k_1, k_2-2}^{ee}(0); \\ C_{k_1, k_2-2}^{ee}(t) &= \frac{\sqrt{k_2(k_2-1)}}{2k_2-1} [1 - \cos(\Lambda_{k_2} t)] C_{k_1, k_2}^{gg}(0) \\ &- \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k_2-1}{2k_2-1}} \text{sen}(\Lambda_{k_2} t) C_{k_1, k_2-1}^{ge}(0) + \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k_2-1}{2k_2-1}} \text{sen}(\Lambda_{k_2} t) C_{k_1, k_2-1}^{eg}(0) \\ &- \frac{1}{2k_2-1} [1 - k_2 (1 + \cos(\Lambda_{k_2} t))] C_{k_1, k_2-2}^{ee}(0). \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde $\Lambda_{k_2} = \sqrt{2k_2 - 1}g$.

Substituindo (4.37) em (4.32) podemos determinar o estado do sistema em qualquer instante de tempo se o seu estado inicial, dado pelos coeficientes $C_{k_1, k_2}^{i,j}(0)$, for conhecido.

4.2.2 Transmissão de um Estado Quântico

Nosso objetivo nesta seção consiste em obter o transporte de um estado de superposição atômico a partir do átomo 1 para o átomo 2, que está localizado na outra cavidade. Com este propósito consideramos que, no instante inicial, o átomo 1 se encontra em um estado de superposição, o átomo 2 no estado fundamental e ambas as cavidades estão no estado de vácuo:

$$|\Psi_0\rangle = (\cos\theta |g\rangle_1 + e^{i\phi} \text{sen}\theta |e\rangle_1) |g\rangle_2 |0\rangle_{b_1} |0\rangle_{b_2} \quad (4.38)$$

A transmissão do estado quântico é obtida se o sistema faz a transição entre os estados:

$$\begin{aligned} & (\cos\theta |g\rangle_1 + e^{i\phi} \sin\theta |e\rangle_1) |g\rangle_2 |0\rangle_{b1} |0\rangle_{b2} \\ & \rightarrow |g\rangle_1 (\cos\theta |g\rangle_2 + e^{i\alpha} \sin\theta |e\rangle_2) |0\rangle_{b1} |0\rangle_{b2}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

onde $|0\rangle_{bi}$ é o estado de vácuo da cavidade i (acoplada ao átomo i).

Sabendo que $|0\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} = |0\rangle_{B1} |0\rangle_{B2}$ e resolvendo a equação diferencial em (4.33) para este estado inicial, determinamos que os coeficientes não nulos da solução (4.32) são:

$$\begin{aligned} C_{0,0}^{gg}(\tau) &= \cos\theta; & C_{0,1}^{gg}(\tau) &= -\frac{i}{2} e^{i\phi} \sin\theta \sin(\tau); \\ C_{0,0}^{ge}(\tau) &= e^{i\phi} \sin\theta \sin^2\left(\frac{\tau}{2}\right); & C_{0,0}^{eg}(\tau) &= e^{i\phi} \sin\theta \cos^2\left(\frac{\tau}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde definimos o tempo normalizado $\tau = gt$.

Usando a equação (3.19), podemos representar os estados das cavidades em função da base $\{|k_1\rangle_{b1} |k_2\rangle_{b2}\}$:

$$\begin{aligned} |\Psi(\tau)\rangle &= \left[\cos\theta e^{i\frac{\omega_a}{g}\tau} |g\rangle_1 |g\rangle_2 + e^{i\phi} \sin\theta \sin^2\left(\frac{\tau}{2}\right) |g\rangle_1 |e\rangle_2 \right. \\ & \quad \left. + e^{i\phi} \sin\theta \cos^2\left(\frac{\tau}{2}\right) |e\rangle_1 |g\rangle_2 \right] |0\rangle_{b1} |0\rangle_{b2} \\ & \quad - \frac{i}{2} e^{i\phi} \sin\theta \sin(\tau) |g\rangle_1 |g\rangle_2 [|0\rangle_{b1} |1\rangle_{b2} - |1\rangle_{b1} |0\rangle_{b2}]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Note que a evolução temporal do sistema, sob as condições indicadas em (4.30) e para o estado inicial (4.38) é independente da constante de acoplamento λ entre as duas cavidades. Isto ocorre porque o acoplamento entre as cavidades se encontra em um nível de saturação, onde as variações no valor de λ dentro das restrições dadas em 4.30 não provocam mudanças significativas no sistema.

Nos instantes de tempo $\tau = (2n + 1)\pi$ o estado do sistema é dado por:

$$|\Psi_1\rangle = |g\rangle_1 [\cos\theta |g\rangle_2 + e^{i\alpha} \sin\theta |e\rangle_2] |0\rangle_{b1} |0\rangle_{b2}, \quad (4.42)$$

onde $\alpha = \phi - (2n + 1)\frac{\omega_a\pi}{g}$.

Se nós temos a condição $\omega_a/g = 2l$ (l inteiro), o estado do átomo 2 nos instantes de tempo $\tau = (2n + 1)\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) é exatamente o mesmo estado de superposição do átomo 1 no instante inicial, ou seja, obtemos a transição desejada para a transmissão do estado quântico.

Se esta condição não for satisfeita haverá uma diferença na fase relativa do estado de superposição transmitido. No entanto, é possível obter o valor do ângulo ϕ a partir de α em (4.42) se soubermos os valores de ω_a (frequência dos átomos) e g (constante de acoplamento átomo-campo).

Para estudar como o sistema evolui para este estado, observamos a evolução temporal da fidelidade do estado do sistema [40] com relação ao estado $|\Psi_1\rangle$ em função dos parâmetros θ e ϕ que definem o estado inicial:

$$F_1(\tau) = |\langle \Psi_1 | \Psi(\tau) \rangle| = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta \sin^4 \left(\frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) \cos \left[\frac{\omega_a}{g} (\tau - (2n+1)\pi) \right]. \quad (4.43)$$

A função F_1 indica a proximidade do sistema com o estado desejado $|\Psi_1\rangle$, assumindo o valor 1 quando o sistema se encontra neste estado e valor 0 para um estado ortogonal a ele. Note que o valor de F_1 na equação (4.43) é independente da fase relativa ϕ .

Primeiramente, observamos a evolução temporal de F_1 em função do ângulo θ que determina o módulo dos coeficientes do estado quântico a ser transportado. A partir da equação (4.43) obtemos o resultado apresentado na figura 4.6 no caso $\omega_a/g = 16$ e $\phi = 0$.

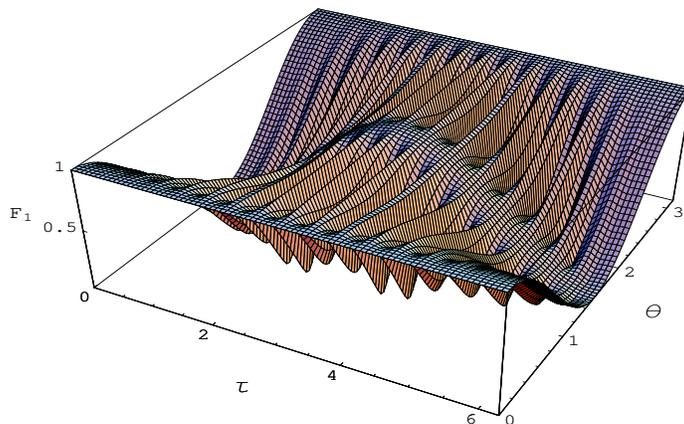


Figura 4.6: Fidelidade do sistema com relação ao estado $|\Psi_1\rangle$ em função do tempo normalizado $\tau = gt$ e θ . Os resultados foram obtidos com $\omega_a/g = 16$ e $\phi = 0$

Como esperado, esta fidelidade é 1 no instante $\tau = \pi$ para qualquer valor do ângulo θ , indicando o transporte de todos os possíveis estados de superposição do átomo 1 para o átomo 2.

Em $\theta = 0$ o sistema está inicialmente no estado fundamental e permanece neste estado ao longo do tempo. Como neste caso $|\Psi_1\rangle = |\Psi_0\rangle$ é óbvio que a curva para F_1 é uma linha reta no valor 1.

Para $\theta = \pi/2$, onde o átomo 1 está inicialmente no estado excitado, a curva aumenta a partir do valor zero para o valor máximo de forma suave. Este comportamento é o mesmo para qualquer valor da fração ω_a/g .

Para outros valores de θ , a função F_1 apresenta algumas oscilações antes de atingir o valor 1. A frequência destas oscilações aumenta com o valor da razão ω_a/g . Isto pode ser observado na figura 4.7 onde comparamos os resultados para $\omega_a/g = 10$ e $\omega_a/g = 100$ no estado inicial com $\theta = \pi/4$ e $\phi = 0$.

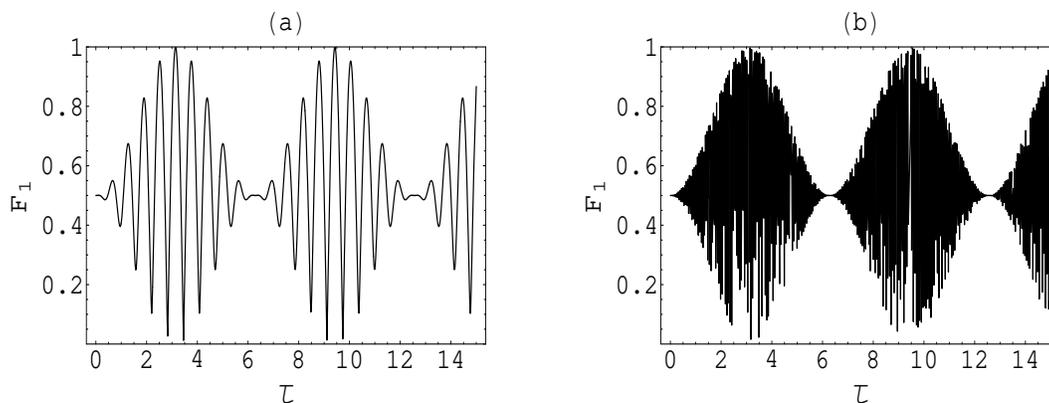


Figura 4.7: Fidelidade do sistema com relação ao estado $|\Psi_1\rangle$ com $\theta = \pi/4$ e $\phi = 0$ em função do tempo normalizado $\tau = gt$ para: (a) $\omega_a/g = 10$ e (b) $\omega_a/g = 100$.

Devemos notar que a frequência de transição atômica e a frequência dos modos das cavidades são muito maiores comparados com a constante de acoplamento átomo campo ($\omega_a, \omega \gg g$) para montagens experimentais envolvendo cavidades ópticas.

Estudamos também a fidelidade do sistema relacionada a seu estado inicial, representada pela função:

$$F_0(\tau) = |\langle \Psi_0 | \Psi(\tau) \rangle| = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta \cos^4 \left(\frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin^2 (2\theta) \cos^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega_a}{g} \tau \right). \quad (4.44)$$

As definições são análogas à função F_1 , lembrando que neste caso o sistema se encontra em seu estado inicial quando $F_0 = 1$ e em um estado ortogonal a $|\Psi_0\rangle$ quando $F_0 = 0$.

Podemos observar na figura 4.8 que, nos instantes de tempo $\tau = (2n)\pi$ a função F_0 atinge o valor 1 para qualquer θ , ou seja, o sistema retorna a seu estado inicial. Isto indica uma dinâmica de troca entre os dois átomos, que repete com período 2π .

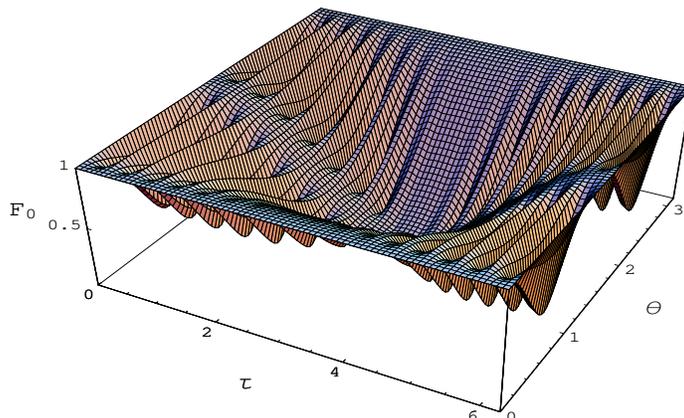


Figura 4.8: Fidelidade do sistema com relação ao estado inicial $|\Psi_0\rangle$ em função do tempo normalizado $\tau = gt$ e θ . Os resultados foram obtidos com $\omega_a/g = 16$ e $\phi = 0$

4.2.3 Transferência de Estados Quânticos sob Dissipação

Uma vez determinadas as condições para se obter a transmissão do estado quântico entre os dois átomos, devemos verificar a eficiência do processo quando o sistema está em contato com o ambiente.

Desta vez incluímos no sistema os efeitos de dissipação causados pela emissão espontânea dos dois átomos e as perdas das cavidades, onde consideramos que cada parte do sistema interage com reservatórios diferentes, representados como um banho de osciladores harmônicos. Logo, o Hamiltoniano do sistema global pode ser escrito como:

$$H_T = H_S + H_R + H_{SR}, \quad (4.45)$$

onde H_S é dado em (4.28), H_R é o Hamiltoniano do ambiente, dado como:

$$H_R = \sum_{j=1}^4 H_R^j = \sum_{j=1}^4 \sum_i \hbar\omega_{ij} \hat{h}_{ij}^\dagger \hat{h}_{ij}, \quad (4.46)$$

e o Hamiltoniano de interação entre o sistema e o reservatório é:

$$H_{SR} = \left(\hat{b}_1 \Gamma_1^\dagger + \hat{b}_1^\dagger \Gamma_1 \right) + \left(\hat{b}_2 \Gamma_2^\dagger + \hat{b}_2^\dagger \Gamma_2 \right) \\ + \left(\hat{\sigma}_{1-} \Gamma_3^\dagger + \hat{\sigma}_{1+} \Gamma_3 \right) + \left(\hat{\sigma}_{2-} \Gamma_4^\dagger + \hat{\sigma}_{2+} \Gamma_4 \right), \quad (4.47)$$

na qual temos $\Gamma_j = \sum_i \hbar g_{ij} \hat{h}_{ij}$.

A partir deste ponto é mais conveniente descrevermos o sistema através do formalismo do operador densidade, cuja evolução temporal, para reservatórios à temperatura $T = 0$, é dada pela equação mestra abaixo:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[\tilde{H}_{aC}, \rho(t) \right] + \sum_{i=1,2} \frac{\gamma}{2} \left(2\hat{b}_i \rho(t) \hat{b}_i^\dagger - \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i \rho(t) - \rho(t) \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i \right) \\ + \sum_{i=1,2} \frac{\kappa}{2} \left(2\sigma_{i-} \rho(t) \sigma_{i+} - \sigma_{i+} \sigma_{i-} \rho(t) - \rho(t) \sigma_{i+} \sigma_{i-} \right), \quad (4.48)$$

onde $\rho(t)$ é o operador densidade do sistema, γ é a taxa de decaimento da cavidade e κ é a taxa de emissão espontânea.

Para simplificar o problema, assumimos que as duas cavidades têm a mesma taxa de decaimento γ e que os átomos possuem a mesma taxa de emissão espontânea κ . Em função dos modos normais \hat{B}_i ($i = 1, 2$), a equação mestra tem a mesma forma que em (4.48):

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[\tilde{H}_{aC}, \rho(t) \right] + \sum_{i=1,2} \frac{\gamma}{2} \left(2\hat{B}_i \rho(t) \hat{B}_i^\dagger - \hat{B}_i^\dagger \hat{B}_i \rho(t) - \rho(t) \hat{B}_i^\dagger \hat{B}_i \right) \\ + \sum_{i=1,2} \frac{\kappa}{2} \left(2\sigma_{i-} \rho(t) \sigma_{i+} - \sigma_{i+} \sigma_{i-} \rho(t) - \rho(t) \sigma_{i+} \sigma_{i-} \right). \quad (4.49)$$

Em seguida, projetamos a equação na base de autoestados de energia do Hamiltoniano livre. Desta forma, a equação mestra estará definida em função dos elementos de matriz do operador densidade, que representaremos com a seguinte notação:

$$M_{i'j',k',l'}^{ij,k,l} = \langle i|_1 \langle j|_2 \langle k|_{B1} \langle l|_{B2} \rho(t) |i'\rangle_1 |j'\rangle_2 |k'\rangle_{B1} |l'\rangle_{B2}, \quad (4.50)$$

onde $k, l, k', l' = 0, 1, 2, 3, \dots$ e $i, j, i', j' = g, e$.

Considerando o estado inicial (4.38), os elementos de matriz não nulos em $t = 0$ são:

$$\begin{aligned}
M_{gg,0,0}^{gg,0,0}(0) &= \cos^2 \theta; & M_{gg,0,0}^{eg,0,0}(0) &= e^{-i\varphi} \sin \theta \cos \theta; \\
M_{eg,0,0}^{gg,0,0}(0) &= e^{i\varphi} \sin \theta \cos \theta; & M_{eg,0,0}^{eg,0,0}(0) &= \sin^2 \theta.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Sob a condição inicial acima, a equação mestra nos leva a três conjuntos de equações diferenciais acopladas:

Conjunto I:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} M_{eg,0,0}^{gg,0,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,0,1}^{gg,0,0}(t) - \frac{\kappa}{2} M_{eg,0,0}^{gg,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{gg,0,1}^{gg,0,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{eg,0,0}^{gg,0,0}(t) - M_{ge,0,0}^{gg,0,0}(t)] - \frac{\gamma}{2} M_{gg,0,1}^{gg,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{ge,0,0}^{gg,0,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,0,1}^{gg,0,0}(t) - \frac{\kappa}{2} M_{ge,0,0}^{gg,0,0}(t),
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Conjunto II:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} M_{gg,0,0}^{eg,0,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,0,1}^{eg,0,0}(t) - \frac{\kappa}{2} M_{gg,0,0}^{eg,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{gg,0,1}^{eg,0,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{gg,0,0}^{eg,0,0}(t) - M_{gg,0,0}^{ge,0,0}(t)] - \frac{\gamma}{2} M_{gg,0,1}^{eg,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{gg,0,0}^{ge,0,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,0,1}^{eg,0,0}(t) - \frac{\kappa}{2} M_{gg,0,0}^{ge,0,0}(t),
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Conjunto III:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}M_{gg,0,1}^{gg,0,1}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{gg,0,1}^{ge,0,0}(t) - M_{gg,0,1}^{eg,0,0}(t) - M_{ge,0,0}^{gg,0,1}(t) + M_{eg,0,0}^{gg,0,1}(t)] - \gamma M_{gg,0,1}^{gg,0,1}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{eg,0,0}^{eg,0,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{gg,0,1}^{eg,0,0}(t) - M_{eg,0,0}^{gg,0,1}(t)] - \kappa M_{eg,0,0}^{eg,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{eg,0,0}^{gg,0,1}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{eg,0,0}^{eg,0,0}(t) - M_{eg,0,0}^{ge,0,0}(t) - M_{gg,0,1}^{gg,0,1}(t)] - \frac{\kappa + \gamma}{2} M_{eg,0,0}^{gg,0,1}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{gg,0,1}^{eg,0,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{eg,0,0}^{eg,0,0}(t) - M_{ge,0,0}^{eg,0,0}(t) - M_{gg,0,1}^{gg,0,1}(t)] - \frac{\kappa + \gamma}{2} M_{gg,0,1}^{eg,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{eg,0,0}^{ge,0,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{eg,0,0}^{gg,0,1}(t) + M_{gg,0,1}^{ge,0,0}(t)] - \kappa M_{eg,0,0}^{ge,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{ge,0,0}^{eg,0,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{gg,0,1}^{eg,0,0}(t) + M_{ge,0,0}^{gg,0,1}(t)] - \kappa M_{ge,0,0}^{eg,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{gg,0,1}^{ge,0,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{ge,0,0}^{ge,0,0}(t) - M_{eg,0,0}^{ge,0,0}(t) - M_{gg,0,1}^{gg,0,1}(t)] - \frac{\kappa + \gamma}{2} M_{gg,0,1}^{ge,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{ge,0,0}^{gg,0,1}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{ge,0,0}^{ge,0,0}(t) - M_{eg,0,0}^{ge,0,0}(t) - M_{gg,0,1}^{gg,0,1}(t)] - \frac{\kappa + \gamma}{2} M_{ge,0,0}^{gg,0,1}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{ge,0,0}^{eg,0,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{gg,0,1}^{gg,0,1}(t) - M_{gg,0,1}^{ge,0,0}(t)] - \kappa M_{ge,0,0}^{eg,0,0}(t). \tag{4.54}
\end{aligned}$$

E, por último, temos o elemento de matriz do estado fundamental, definido em função da solução das equações anteriores:

$$M_{gg,0,0,0}^{gg,0,0,0}(t) = \int_0^t dt' \{ \kappa [M_{eg,0,0}^{eg,0,0}(t') + M_{ge,0,0}^{ge,0,0}(t')] + \gamma M_{gg,0,1}^{gg,0,1}(t') \} + M_{gg,0,0,0}^{gg,0,0,0}(0), \tag{4.55}$$

As equações nos conjuntos I a III formam conjuntos de equações diferenciais ordinárias a coeficientes constantes. Cada conjunto de equações pode ser resolvido se for escrito na forma matricial:

$$\frac{d}{dt}\vec{M}(t) = \mathbf{B}\vec{M}(t), \tag{4.56}$$

onde \vec{M} é um vetor contendo os elementos de matriz $M_{i'j',k',l}^{ij,k,l}$ de cada grupo e \mathbf{B} é sua respectiva matriz de coeficientes.

A matriz \mathbf{B} é diagonalizável, logo a solução de (4.56) pode ser escrita em função de seu valores iniciais:

$$\vec{M}(t) = \text{Exp}[\mathbf{B}t] \vec{M}(0), \quad (4.57)$$

Em cima da expressão (4.57) montamos uma rotina no programa MATHEMATICA para obter a sua solução numericamente para cada estado inicial do tipo (4.38). Uma vez obtida a solução dos conjuntos I à III, podemos encontrar $M_{gg,0,0,0}^{gg,0,0,0}(t)$ usando a equação (4.55).

Para definir a fidelidade do sistema com relação ao estado transportado consideramos, em primeiro lugar, o operador densidade reduzido na base definida pelos dois átomos, que é obtido através do traço parcial com relação as variáveis das duas cavidades:

$$\text{Tr}_{C_1 C_2} \{\rho(\tau)\} = \sum_{i,k} \langle i|_{B_1} \langle k|_{B_2} \rho(\tau) |i\rangle_{B_1} |k\rangle_{B_2}. \quad (4.58)$$

A partir do operador densidade reduzido (4.58), definimos a fidelidade de transmissão como:

$$F(\tau) = \langle \Psi_a | \text{Tr}_{C_1 C_2} \{\rho(\tau)\} | \Psi_a \rangle, \quad (4.59)$$

onde $|\Psi_a\rangle = |g1\rangle [\cos\theta |g2\rangle + e^{i\phi} \sin\theta |e2\rangle]$ é o estado dos dois átomos se o transporte do estado atômico é concluído.

A eficiência do processo vai ser dada como a média da fidelidade de transmissão sobre todos os estados iniciais possíveis, i.e., a média sobre todos os valores dos parâmetros θ e ϕ :

$$\bar{F}(\tau) = \langle F(\tau) \rangle_{\theta, \phi}, \quad (4.60)$$

A função acima foi calculada numericamente no instante de tempo $\tau = \pi$, quando se espera que a transferência do estado quântico ocorra ($\bar{F}(\pi) = 1$ sem a dissipação). No caso em que $\gamma = \kappa = 10^{-2}g$ o valor obtido foi $\bar{F} \approx 0.994$, indicando que o estado final ainda é bem próximo do esperado, ou que o processo ainda é confiável sob estas condições. Agora, quando consideramos $\gamma = \kappa = 10^{-3}g$ obtemos $\bar{F} \approx 0.999$, ou seja, o efeito da dissipação é desprezível a partir deste ponto.

4.3 Geração de estados de Bell utilizando cavidades acopladas

Nesta seção apresentaremos propostas para a geração de estados maximamente emaranhados [41] entre dois átomos utilizando campos eletromagnéticos acoplados. Nes-

tas propostas utilizamos duas cavidades acopladas por uma fibra óptica, onde podemos ter um átomo atravessando uma das cavidades ou dois átomos atravessando simultaneamente cavidades diferentes. Este trabalho foi realizado em conjunto com o aluno Bruno F.C. Yabu-uti e os resultados desta seção também podem ser conferidos em sua tese de mestrado [42].

4.3.1 Evolução temporal do sistema

Para as cavidades acopladas utilizamos o modelo apresentado na seção 3.2, onde consideramos que apenas um modo da fibra interage efetivamente com as duas cavidades. A interação entre o átomo (de dois níveis) e sua respectiva cavidade segue o modelo de Jaynes-Cummings. Com isso podemos determinar a evolução temporal do sistema em duas situações:

Átomo de dois níveis atravessando a cavidade j ($j = 1, 2$):

O Hamiltoniano do sistema durante a travessia do átomo é dada por:

$$\begin{aligned}
 H^{(j)} = & \hbar\omega_1\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_1 + \hbar\omega_2\hat{b}_2^\dagger\hat{b}_2 + \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar g \left(\hat{b}_j\sigma_+ + \hat{b}_j^\dagger\sigma_- \right) \\
 & + \hbar\beta\hat{c}^\dagger\hat{c} + \hbar\lambda \left[\hat{c} \left(\hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_2^\dagger \right) + \hat{c}^\dagger \left(\hat{b}_1 + \hat{b}_2 \right) \right], \quad (4.61)
 \end{aligned}$$

onde \hat{b}_i^\dagger e \hat{b}_i ($i = 1, 2$) são os operadores de criação e destruição correspondentes à cavidade i , ω_i é a frequência da cavidade i , ω_a é a frequência atômica, σ_+ e σ_- são os operadores atômicos de levantamento e abaixamento, e g é a constante de acoplamento entre o átomo e a cavidade j . A constante λ é a constante de acoplamento entre as cavidades e a fibra óptica.

Como foi feito na seção 3.2, o Hamiltoniano descrevendo as duas cavidades e a fibra óptica pode ser diagonalizado no caso ressonante ($\omega_1 = \omega_2 = \beta = \omega$), se descrevermos o sistema em função de novos operadores dados por [15]:

$$\begin{aligned}
 \hat{d}_1 = \frac{1}{2} \left(\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \sqrt{2}\hat{c} \right); \quad \hat{d}_2 = \frac{1}{2} \left(\hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \sqrt{2}\hat{c} \right); \\
 \hat{d}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{b}_1 - \hat{b}_2 \right). \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

Utilizando a representação de Interação e a transformação acima, nós obtemos o

seguinte Hamiltoniano de interação:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_I^{(j)} = & \hbar g \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left(e^{-i(\Omega_k - \omega_a)t} \sigma_+ \hat{d}_k + e^{i(\Omega_k - \omega_a)t} \sigma_- \hat{d}_k^\dagger \right) \right. \\ & \left. + \frac{(-1)^{j+1}}{\sqrt{2}} \left(e^{-i(\Omega_3 - \omega_a)t} \sigma_+ \hat{d}_3 + e^{i(\Omega_3 - \omega_a)t} \sigma_- \hat{d}_3^\dagger \right) \right], \end{aligned} \quad (4.63)$$

onde $\Omega_{1,2} = \omega \pm \sqrt{2}\lambda$ e $\Omega_3 = \omega$ são as frequências dos modos normais associados aos operadores \hat{d}_1 , \hat{d}_2 e \hat{d}_3 .

Por fim, utilizamos a aproximação de ondas girantes sob as condições:

$$(i) \omega \sim \omega_a \gg \sqrt{2}\lambda \quad (ii) \sqrt{2}\lambda \gg g. \quad (4.64)$$

Desta forma, os termos multiplicando as exponenciais $\sqrt{2}\lambda \gg g$ são eliminadas adiabaticamente, resultando na expressão abaixo:

$$\tilde{H}_I^{(j)} = (-1)^{j+1} \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \left(\sigma_+ \hat{d}_3 + \sigma_- \hat{d}_3^\dagger \right). \quad (4.65)$$

Considerando cavidades acopladas diretamente pela sobreposição dos dois campos pode-se observar que a expressão acima tem a mesma forma do Hamiltoniano de interação (4.10), obtido na seção 4.1. De forma análoga, obtemos a partir do Hamiltoniano (4.65) o operador de evolução temporal do sistema:

$$\begin{aligned} U_I^{(j)} = & \cos \left(\frac{gt}{\sqrt{2}} \sqrt{\hat{d}_3 \hat{d}_3^\dagger} \right) |e\rangle \langle e| + \cos \left(\frac{gt}{\sqrt{2}} \sqrt{\hat{d}_3^\dagger \hat{d}_3} \right) |g\rangle \langle g| \\ & + (-1)^{j+1} i \hat{d}_3^\dagger \frac{\text{sen} \left(\frac{gt}{\sqrt{2}} \sqrt{\hat{d}_3 \hat{d}_3^\dagger} \right)}{\sqrt{\hat{d}_3 \hat{d}_3^\dagger}} |g\rangle \langle e| + (-1)^{j+1} i \hat{d}_3 \frac{\text{sen} \left(\frac{gt}{\sqrt{2}} \sqrt{\hat{d}_3^\dagger \hat{d}_3} \right)}{\sqrt{\hat{d}_3^\dagger \hat{d}_3}} |e\rangle \langle g|. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Dois átomo de dois níveis atravessando cavidades diferentes:

Neste caso, o Hamiltoniano durante a travessia dos dois átomos é dado por:

$$\begin{aligned} H_S = & \sum_{i=1}^2 \left[\hbar \omega_i \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i + \frac{\hbar \omega_a}{2} \sigma_{iz} + \hbar g \left(\hat{b}_i \sigma_+ + \hat{b}_i^\dagger \sigma_- \right) \right] \\ & + \hbar \beta \hat{c}^\dagger \hat{c} + \hbar \lambda \left[\hat{c} \left(\hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_2^\dagger \right) + \hat{c}^\dagger \left(\hat{b}_1 + \hat{b}_2 \right) \right], \end{aligned} \quad (4.67)$$

onde consideramos que os dois átomos têm a mesma frequência ω_a e a mesma constante de acoplamento átomo-campo g .

Novamente reescrevemos o sistema em função dos operadores d_j ($j = 1, 2, 3$) e utilizamos a aproximação de ondas girantes nas condições (4.64) para obter o seguinte Hamiltoniano de interação:

$$\tilde{H}_I^{(1)+(2)} = \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \left[\hat{d}_3 \sigma_{1+} + \hat{d}_3^\dagger \sigma_{1-} \right] - \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \left[\hat{d}_3 \sigma_{2+} + \hat{d}_3^\dagger \sigma_{2-} \right]. \quad (4.68)$$

Pode-se notar que a expressão acima é equivalente ao Hamiltoniano (4.29) obtido na seção 4.2 utilizando cavidades acopladas pela sobreposição dos modos das duas cavidades. Da forma análoga, a evolução temporal para esta situação é determinada resolvendo a equação de Schrödinger na representação de interação:

$$\frac{d}{dt} \left| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle = -\frac{i}{\hbar} H_I^{(1)+(2)} \left| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle \quad (4.69)$$

onde $\left| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle$ é o estado do sistema no tempo t (na representação de Interação).

Análogo ao que foi feito na seção 4.2, nós consideramos que a solução geral da equação de Schrödinger tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle = & \sum_{l=0}^{\infty} [C_l^{gg}(t) |g\rangle_1 |g\rangle_2 + C_l^{ge}(t) |g\rangle_1 |e\rangle_2 \\ & + C_l^{eg}(t) |e\rangle_1 |g\rangle_2 + C_l^{ee}(t) |e\rangle_1 |e\rangle_2] |l\rangle_{d3}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde os coeficientes obedecem o conjunto de equações diferenciais abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} C_l^{gg}(t) &= -ig\sqrt{\frac{l}{2}} [C_{l-1}^{eg}(t) - C_{l-1}^{ge}(t)]; \\ \frac{d}{dt} C_{l-1}^{ge}(t) &= -\frac{i}{\sqrt{2}}g [\sqrt{l-1}C_{l-2}^{ee}(t) - \sqrt{l}C_l^{gg}(t)]; \\ \frac{d}{dt} C_{l-1}^{eg}(t) &= -\frac{i}{\sqrt{2}}g [\sqrt{l}C_l^{gg}(t) - \sqrt{l-1}C_{l-2}^{ee}(t)]; \\ \frac{d}{dt} C_{l-2}^{ee}(t) &= -ig\sqrt{\frac{l-1}{2}} [C_{l-1}^{ge}(t) - C_{l-1}^{eg}(t)]. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Podemos notar na equação (4.68) que os modos d_1 e d_2 não tem participação efetiva no Hamiltoniano de interação. Por esse motivo esses modos foram desconsiderados da solução (4.70), pois eles permanecem em seus estados iniciais durante a evolução temporal do sistema.

4.3.2 Geração dos estados de Bell

Uma vez estabelecidas as equações para a evolução temporal do sistema, passamos a analisar o emaranhamento entre dois átomos interagindo com as duas cavidades acopladas opticamente. Como resultado foi possível elaborar dois procedimentos relativamente simples para gerar estados de Bell entre dois átomos de dois níveis:

Método 1: Átomos passando sucessivamente nas cavidades

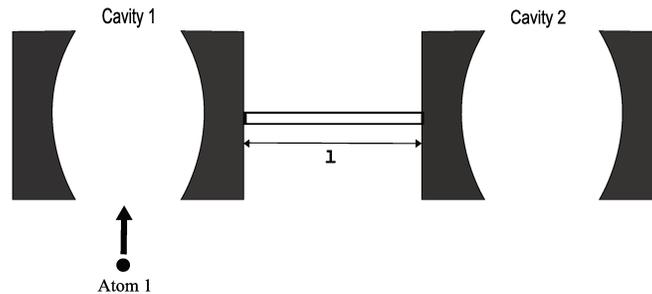


Figura 4.9: Etapa 1: passagem do átomo 1 (estado excitado) através da cavidade 1.

A primeira etapa deste método consiste em passar um único átomo (átomo 1) na cavidade 1, com o objetivo de gerar um estado átomo-campo maximamente emaranhado. Inicialmente, o átomo 1 se encontra no estado excitado e os modos do campo (cavidades e fibra óptica) estão no estado de vácuo:

$$|\Psi(0)\rangle = |e\rangle_1 |0\rangle_{b1} |0\rangle_{b2} |0\rangle_c \equiv |e\rangle_1 |0\rangle_{d3}. \quad (4.72)$$

Aplicando o operador de evolução temporal (4.66) com $j = 1$ no estado inicial acima, nós obtemos o estado do sistema após um tempo de interação t_1 (na representação de interação):

$$|\Psi(t_1)\rangle = \cos\left(\frac{gt_1}{\sqrt{2}}\right) |e\rangle_1 |0\rangle_{d3} - i \operatorname{sen}\left(\frac{gt_1}{\sqrt{2}}\right) |g\rangle_1 |1\rangle_{d3}. \quad (4.73)$$

Pode-se notar que para um tempo de interação $gt_1 = \pi/2\sqrt{2}$, o átomo e o modo normal d_3 estarão em um estado maximamente emaranhado:

$$\left| \tilde{\Psi}(gt_1 = \pi/2\sqrt{2}) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle_1 |1\rangle_{d3} - i |e\rangle_1 |0\rangle_{d3}) |0\rangle_{d1} |0\rangle_{d2}. \quad (4.74)$$

Também podemos ter outro estado maximamente emaranhado para $gt_1 = 3\pi/2\sqrt{2}$:

$$\left| \tilde{\Psi}(gt_1 = 3\pi/2\sqrt{2}) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle_1 |1\rangle_{d3} + i |e\rangle_1 |0\rangle_{d3}) |0\rangle_{d1} |0\rangle_{d2}. \quad (4.75)$$

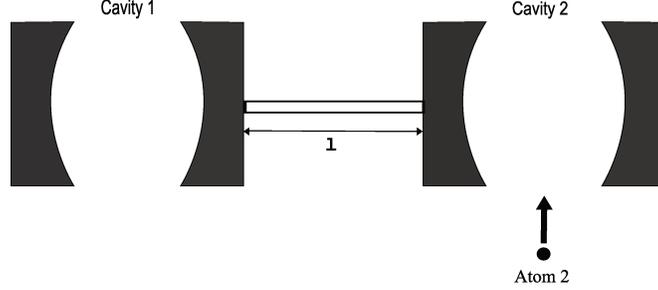


Figura 4.10: Etapa 2: passagem do átomo 2 (estado fundamental) através da cavidade 2.

Depois do átomo 1 atravessar a cavidade 1, nós enviamos outro átomo (átomo 2), preparado inicialmente no estado fundamental, através da cavidade 2. Agora utilizamos o operador de evolução temporal (4.66) com $j = 2$ (e atuando sobre o átomo 2) para obter o estado do sistema após o tempo de interação t_2 entre a cavidade 2 e o segundo átomo:

$$\begin{aligned} |\Psi(t_1, t_2)\rangle &= \cos\left(\frac{gt_1}{\sqrt{2}}\right) |e\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle - i \operatorname{sen}\left(\frac{gt_1}{\sqrt{2}}\right) \left[\cos\left(\frac{gt_2}{\sqrt{2}}\right) |g\rangle_1 |g\rangle_2 |1\rangle \right. \\ &\quad \left. + i \operatorname{sen}\left(\frac{gt_2}{\sqrt{2}}\right) |g\rangle_1 |e\rangle_2 |0\rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Podemos observar que, assumindo tempos de interação com valores $gt_1 = \pi/2\sqrt{2}$ e $gt_2 = \pi/\sqrt{2}$, nós obtemos um dos estados de Bell:

$$|\Psi_{at}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle_1 |e\rangle_2 + |e\rangle_1 |g\rangle_2). \quad (4.77)$$

É importante notar que outro estado de Bell pode ser gerado escolhendo $gt_1 = 3\pi/2\sqrt{2}$ e $gt_2 = \pi/\sqrt{2}$:

$$|\Psi_{at}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle_1 |e\rangle_2 - |e\rangle_1 |g\rangle_2). \quad (4.78)$$

Este procedimento é equivalente ao processo onde dois átomos atravessam sucessivamente uma única cavidade para criar um par maximamente emaranhado. No entanto, no nosso caso utilizamos duas cavidades separadas espacialmente, o que permite o emaranhamento de átomos em localizações remotas.

Método 2: Dois átomos passando simultâneamente em cavidades diferentes

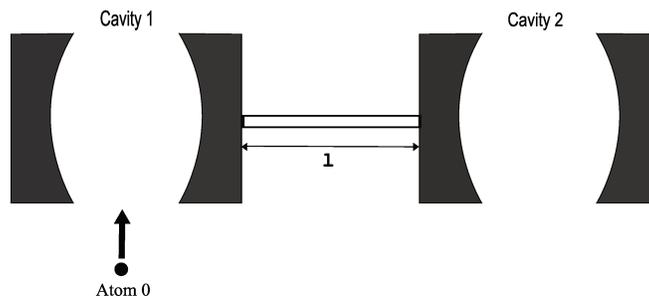


Figura 4.11: Etapa 1: passagem do átomo 0 (estado excitado) através da cavidade 1.

O primeiro passo deste método é o mesmo do anterior, onde passamos um átomo preparado no estado excitado (átomo de prova) através da cavidade 1. Os modos das cavidades e da fibra estão inicialmente no estado de vácuo:

$$|\Psi(0)\rangle = |e\rangle_0 |0\rangle_{b1} |0\rangle_{b2} |0\rangle_c \equiv |e\rangle_0 |0\rangle_{d3}. \quad (4.79)$$

A aplicação do operador de evolução temporal (4.66) com $j = 1$ nos leva ao estado (4.73) após um tempo de interação t_1 . Desta vez deixamos o átomo interagir com o campo por um tempo $gt_1 = \pi/\sqrt{2}$, levando o sistema ao seguinte estado:

$$\left| \Psi(\pi/\sqrt{2}) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |g\rangle_0 (|1\rangle_{b1} |0\rangle_{b2} - |0\rangle_{b1} |1\rangle_{b2}) \otimes |0\rangle_c. \quad (4.80)$$

Em seguida outros dois átomos, ambos no estado fundamental, são lançados simultaneamente em cavidades diferentes. Como as duas cavidades estão no estado de Bell depois da primeira etapa, o estado do sistema no início da segunda etapa é dada por:

$$|\Psi'(0)\rangle = |g\rangle_1 |g\rangle_2 \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_{b1} |0\rangle_{b2} - |0\rangle_{b1} |1\rangle_{b2}) \otimes |0\rangle_c. \quad (4.81)$$

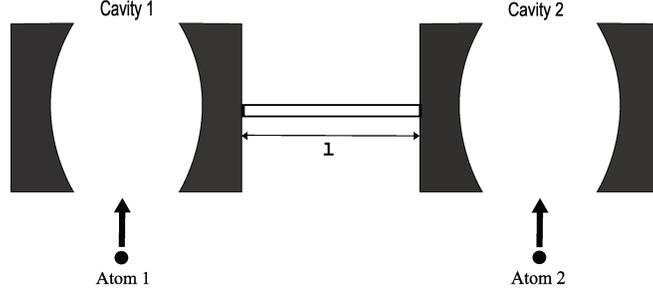


Figura 4.12: Etapa 2: passagem dos átomos 1 e 2 (ambos no estado fundamental) através das cavidades 1 e 2 respectivamente.

Nesta segunda etapa, a evolução temporal do sistema segue as equações diferenciais dadas em (4.71). Resolvendo este conjunto de equações diferenciais para o estado inicial (4.81) nós obtemos, para um tempo de interação t_2 :

$$|\Psi(t_2)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(gt_2) [|g\rangle_1 |e\rangle_2 - |e\rangle_1 |g\rangle_2] |0\rangle + \text{cos}(gt_2) |g\rangle_1 |g\rangle_2 |1\rangle \quad (4.82)$$

Se o tempo de interação for $gt_2 = \pi/2$ o sistema se encontra no estado:

$$|\Psi(\pi/2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|g\rangle_1 |e\rangle_2 - |e\rangle_1 |g\rangle_2] |0\rangle_{d3}, \quad (4.83)$$

onde omitimos uma fase global $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Podemos observar que os estados do campo estão separados dos estados dos dois átomos que se encontram em um estado de Bell. Desta forma, podemos concluir que foi obtida a geração de um estado maximamente emaranhado dos dois átomos quando eles deixam a cavidade.

Este esquema é similar à proposta feita por Gerry [43] usando duas cavidades desacopladas. Neste trabalho, o emaranhamento entre as cavidades na etapa 1 foi obtida injetando um átomo de dois níveis através das duas cavidades. Como em nosso método o átomo da etapa 1 atravessa apenas uma cavidade, o tempo necessário para emaranhar as duas cavidades é menor do que o tempo utilizado no trabalho de Gerry.

Em um trabalho recente, Zhang et. al. [32] propuseram um esquema para criar um par maximamente emaranhado de múltiplos átomos usando duas cavidades conectadas por uma fibra óptica. O esquema envolve a interação simultânea dos múltiplos átomos, tratados como partículas idênticas, com o sistema de cavidades acopladas. A comparação entre os resultados obtidos neste método e os desta seção podem ser vistos na tabela 4.1.

Simultaneamente	Zhang et. al.	Our scheme
Constante de acoplamento	$g_2 = (\pm 1 + \sqrt{2}) g_1$	$g_1 = g_2$
Tempo exigido	$g_1 t = \pi / \sqrt{2} \pm \sqrt{2}$	$gt = (1 + \sqrt{2}) \pi / 2$ ¹
Estado gerado	$1/\sqrt{2} (ge\rangle \pm eg\rangle)$	$1/\sqrt{2} (ge\rangle - eg\rangle)$
Successivamente	Zhang et. al.	Our scheme
Constante de acoplamento	-	$g_1 = g_2$
Tempo exigido	-	$gt = (4 \mp 1) \pi / 2\sqrt{2}$
Estado gerado	-	$1/\sqrt{2} (ge\rangle \pm eg\rangle)$

Tabela 4.1: Comparação entre Zhang et. al. [32] e o esquemas utilizados aqui.

Utilizando N átomos o procedimento de Zhang et al. apresentou uma diminuição de fator $1/\sqrt{N}$ no tempo necessário para completar o processo. No entanto, existem dificuldades operacionais em aplicar este modelo, uma vez que ele utiliza constantes de acoplamento átomo-campo com razões irracionais entre elas. Além disso, temos o problema de limitação no número de átomos que podem ser colocados em uma única cavidade sem que eles se acoplem.

4.3.3 Geração dos estados de Bell com dissipação

Nesta seção investigamos a influência da dissipação nas propostas de geração de estados de Bell apresentadas anteriormente. Esse efeito de dissipação ocorre principalmente devido a emissão espontânea dos átomos e ao vazamento de fótons das cavidades e da fibra. Com este objetivo, nós analisamos a equação mestra do sistema para cada um dos métodos apresentados. Não vamos apresentar aqui a solução detalhada da equação mestra em cada etapa, uma vez que o procedimento para resolvê-la é análogo ao que foi utilizado na seção 4.2.3.

Dissipação no Método 1

Como já sabemos, este método consiste em passar o primeiro átomo na cavidade 1 (etapa 1) para, em seguida, lançar o segundo átomo na cavidade 2 (etapa 2). O estado inicial do sistema antes da etapa 1 é dada em (4.72). O operador densidade do sistema na etapa 1 obedece, em função dos modos normais d_1 , d_2 e d_3 a equação mestra abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \left[\tilde{H}_I^{(1)}, \rho^{(1)}(t) \right] + \frac{\gamma}{2} \left(2\hat{d}_3\rho^{(1)}(t)\hat{d}_3^\dagger - \hat{d}_3^\dagger\hat{d}_3\rho^{(1)}(t) - \rho^{(1)}(t)\hat{d}_3^\dagger\hat{d}_3 \right) \\ &\quad + \frac{\kappa}{2} \left(2\sigma_{1-}\rho^{(1)}(t)\sigma_{1+} - \sigma_{1+}\sigma_{1-}\rho^{(1)}(t) - \rho^{(1)}(t)\sigma_{1+}\sigma_{1-} \right), \end{aligned} \quad (4.84)$$

onde $\rho^{(1)}$ é o operador densidade do sistema na etapa 1, κ é a taxa de emissão espontânea, γ e β são respectivamente as taxas de decaimento da cavidade e da fibra.

Os modos do campo correspondentes aos operadores d_1 e d_2 não têm participação efetiva na evolução unitária do sistema, como já foi indicado na seção anterior. Além disso, estes modos estão em seus respectivos estados estacionários (estado de vácuo) para os estados iniciais utilizados na seção 4.3.2, o que significa que seus estados não são afetados pela dissipação do sistema. Por estas razões, nós descartamos na equação (4.84) os termos contendo exclusivamente os operadores d_2 e d_3 , uma vez que estes modos irão permanecer nos respectivos estados de vácuo durante toda evolução temporal do sistema.

Logo após o primeiro átomo (átomo 1) deixar a cavidade iniciamos a segunda etapa, onde outro átomo (átomo 2) entra na cavidade 2. Considerando que o primeiro átomo interage com a cavidade em um intervalo de tempo $t = t_1$, temos que o operador densidade do sistema no início da segunda etapa é dado por:

$$\rho^{(2)}(t_2 = 0) = \rho^{(1)}(t_1) \otimes |g\rangle_2 \langle g|_2. \quad (4.85)$$

Com a inclusão do segundo átomo, a equação mestra do sistema tem a forma abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho^{(2)}(t_2) &= -\frac{i}{\hbar} \left[\tilde{H}_I^{(2)}, \rho^{(2)}(t_2) \right] + \frac{\gamma}{2} \left(2\hat{d}_3\rho^{(2)}(t_2)\hat{d}_3^\dagger - \hat{d}_3^\dagger\hat{d}_3\rho^{(2)}(t_2) - \rho^{(2)}(t_2)\hat{d}_3^\dagger\hat{d}_3 \right) \\ &\quad + \sum_{i=1,2} \frac{\kappa}{2} \left(2\sigma_{i-}\rho^{(2)}(t_2)\sigma_{i+} - \sigma_{i+}\sigma_{i-}\rho^{(2)}(t_2) - \rho^{(2)}(t_2)\sigma_{i+}\sigma_{i-} \right). \end{aligned} \quad (4.86)$$

A eficiência do processo será dada pela fidelidade dos dois átomos com relação ao estado de Bell:

$$F_{\pm} = \langle \psi_{\pm} | Tr_{C1FC2}(\rho) | \psi_{\pm} \rangle \quad (4.87)$$

onde $Tr_{C1FC2}(\rho)$ é o traço parcial do operador densidade sobre as variáveis do campo, e $|\psi_{\pm}\rangle = 1/\sqrt{2}(|g_1, e_2\rangle \pm |e_1, g_2\rangle)$.

Para $\kappa = \gamma = 0.01g$, usando os intervalos de tempo $gt_1 = \pi/2\sqrt{2}$ e $gt_2 = \pi/\sqrt{2}$, obtemos $F_+ = 0.983$. Com os intervalos de tempo $gt_1 = 3\pi/2\sqrt{2}$ e $gt_2 = \pi/\sqrt{2}$ temos $F_- = 0.972$.

Dissipação no Método 2:

Na primeira etapa deste método passamos um átomo de prova (átomo 0) através da cavidade 1. Logo, a equação mestra nesta etapa tem a mesma forma que a equação dada em (4.84):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \left[\tilde{H}_I^{(1)+(2)}, \rho^{(1)}(t) \right] + \frac{\gamma}{2} \left(2\hat{d}_3\rho^{(1)}(t)\hat{d}_3^\dagger - \hat{d}_3^\dagger\hat{d}_3\rho^{(1)}(t) - \rho^{(1)}(t)\hat{d}_3^\dagger\hat{d}_3 \right) \\ &\quad + \frac{\kappa}{2} \left(2\sigma_{0-}\rho^{(1)}(t)\sigma_{0+} - \sigma_{0+}\sigma_{0-}\rho^{(1)}(t) - \rho^{(1)}(t)\sigma_{0+}\sigma_{0-} \right). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Após a saída do átomo de prova lançamos dois átomos no estado fundamental para que cada um atravesse simultaneamente cavidades diferentes. O operador densidade do sistema no início desta etapa é dado por:

$$\rho^{(2)}(t_2 = 0) = \rho^{(1)}(t_1) \otimes |g\rangle_1 \langle g|_1 \otimes |g\rangle_2 \langle g|_2. \quad (4.89)$$

A equação mestra após a entrada dos dois átomos é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho^{(2)}(t_2) &= -\frac{i}{\hbar} \left[\tilde{H}_I^{(2)}, \rho^{(2)}(t_2) \right] + \frac{\gamma}{2} \left(2\hat{d}_3\rho^{(2)}(t_2)\hat{d}_3^\dagger - \hat{d}_3^\dagger\hat{d}_3\rho^{(2)}(t_2) - \rho^{(2)}(t_2)\hat{d}_3^\dagger\hat{d}_3 \right) \\ &\quad + \sum_{i=0,1,2} \frac{\kappa}{2} \left(2\sigma_{i-}\rho^{(2)}(t_2)\sigma_{i+} - \sigma_{i+}\sigma_{i-}\rho^{(2)}(t_2) - \rho^{(2)}(t_2)\sigma_{i+}\sigma_{i-} \right). \end{aligned} \quad (4.90)$$

Para este método temos apenas a geração do estado $|\psi_-\rangle$. Considerando novamente $\kappa = \gamma = 0.01g$, usando os intervalos de tempo $gt_1 = \pi/\sqrt{2}$ e $gt_2 = \pi/2$ e sem intervalo de tempo entre as duas etapas, nós obtemos $F_- = 0.981$.

Os três valores obtidos apontam a possibilidade de gerar experimentalmente estados maximamente emaranhados com fidelidade acima de 0.97. Considerando apenas a geração do estado $|\psi_+\rangle$ no método (i) e a geração do estado $|\psi_-\rangle$ no método (ii) podemos dizer que os dois estados de Bell podem ser gerados com fidelidade acima de 0.98.

Em experimento envolvendo átomos de césio em cavidades ópticas as taxas de dissipação são próximas aos valores utilizados nas simulações acima, como no trabalho

por Spillane et. al.[44], onde foi obtido $g/\max(\kappa, \gamma) \cong 165$ em uma microcavidade toroidal.

Para a fibra óptica, um acoplamento perfeito fibra-cavidade (eficiência acima de 99,97%) pode ser realizado [37]. Além disso, no regime $\nu \gg g$ somente o modo normal d_3 , independente do modo da fibra, está interagindo com o átomo. Logo, podemos dizer que a geração dos estados de Bell não é afetada pelas perdas da fibra.

Outras fontes de erro que podem ser relevantes na montagem experimental destes procedimentos são: i) Erro durante a preparação dos estados iniciais; ii) O acoplamento átomo campo não surge subitamente como foi feito no modelo; iii) Dispersão nas velocidades dos átomos; iv) Flutuação do acoplamento átomo-campo devido a posição do átomo no interior da cavidade; v) Absorção na fibra óptica; vi) Excitação dos modos normais associados à d_1 e d_2 , cuja participação foi desprezada nos Hamiltonianos (4.65) e (4.68).

Capítulo 5

Comunicação entre íons aprisionados em cavidades acopladas por uma fibra óptica

Neste capítulo apresentamos um modelo envolvendo duas cavidades idênticas conectadas por uma fibra óptica, onde cada cavidade está interagindo com um íon aprisionado em uma armadilha de Paul [9, 10] (ver figura 5.1). Os resultados obtidos do modelo são referentes à área de comunicação quântica, onde procuramos obter a transmissão de estados de 2-qubits a partir dos graus de liberdade (interno e de movimento) do íon 1 para o íon 2, localizado na outra cavidade. Estes resultados já foram publicados e também podem ser conferidos no **Journal of Physics B** de Fevereiro de 2008 [45].

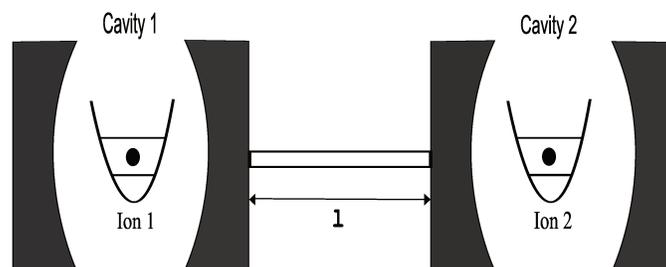


Figura 5.1: Representação esquemática de um sistema formado por duas cavidades acopladas por uma fibra óptica, cada uma interagindo com um íon aprisionado de dois níveis.

5.1 Evolução temporal do sistema

Para as cavidades acopladas, nós consideramos o modelo apresentado na seção 3.2, onde foi aplicado o “limite de fibra curta” para reduzir o problema a uma fibra de um único modo acoplando as duas cavidades.

Se os íons têm a mesma frequência de transição atômica ω_a e frequência de oscilação ν , o Hamiltoniano do sistema é dado por:

$$\begin{aligned}
 H_S = & \hbar\omega_1\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_1 + \hbar\nu\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_{1z} + \hbar\omega_2\hat{b}_2^\dagger\hat{b}_2 + \hbar\nu\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_{2z} \\
 & + \hbar g \sum_{i=1}^2 (\sigma_{i+} + \sigma_{i-}) \left(\hat{b}_i^\dagger + \hat{b}_i \right) \cos \left[\eta \left(\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i \right) + \phi \right] \\
 & + \hbar\beta\hat{c}^\dagger\hat{c} + \hbar\lambda \left[\hat{c} \left(\hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_2^\dagger \right) + \hat{c}^\dagger \left(\hat{b}_1 + \hat{b}_2 \right) \right], \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

onde \hat{b}_i^\dagger e \hat{b}_i são os operadores de criação e aniquilação correspondentes à cavidade i , \hat{a}_i^\dagger e \hat{a}_i são os operadores de criação e aniquilação da excitação vibracional do íon i , \hat{c}^\dagger e \hat{c} são os operadores de criação e aniquilação correspondentes ao modo da fibra com frequência β , σ_{i+} e σ_{i-} são os operadores levantamento e abaixamento do íon i , ω_i é a frequência da cavidade i , e g é a constante de acoplamento entre o íon i e o campo da cavidade i , $\eta = 2\pi a_0/L_C$ é a constante de Lamb-Dicke, dada em função da largura do poço quântico a_0 e do comprimento de onda L_C do modo da cavidade e ϕ é a fase dependente da posição do centro da armadilha com relação ao campo da cavidade.

As primeiras duas linhas do Hamiltoniano (5.1) descrevem as duas cavidades, os graus de liberdade dos dois íons (estado interno e o movimento vibracional) e suas respectivas interações [9]. A terceira linha está relacionada com o modo da fibra e sua interação com as duas cavidades [18].

Da seção 3.2, sabemos que no caso ressonante ($\omega_1 = \omega_2 = \beta = \omega$) é possível diagonalizar o Hamiltoniano que representa a interação entre as cavidades e a fibra óptica se descrevermos o sistema em função de novos operadores dados por [15]:

$$\begin{aligned}
 \hat{d}_1 = \frac{1}{2} \left(\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \sqrt{2}\hat{c} \right); \quad \hat{d}_2 = \frac{1}{2} \left(\hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \sqrt{2}\hat{c} \right); \\
 \hat{d}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{b}_1 - \hat{b}_2 \right). \tag{5.2}
 \end{aligned}$$

No regime de Lamb-Dicke ($\eta \ll 1$), onde a amplitude de oscilação do íon é muito pequena comparada com o comprimento de onda do campo na cavidade, a função cosseno na equação (5.1) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \cos \left[\eta \left(\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i \right) + \phi \right] &\approx -\eta \left(\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i \right) \sin \phi \\ &+ \left[1 - \frac{\eta^2 (1 + 2\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i)}{2} - \frac{(\hat{a}_i^\dagger)^2 + (\hat{a}_i)^2}{2} \right] \cos \phi. \end{aligned} \quad (5.3)$$

No regime de Lamb-Dicke e em função dos novos operadores, o Hamiltoniano pode ser reescrito na forma abaixo:

$$\begin{aligned} H_S &= \sum_{k=1}^3 \hbar \Omega_k \hat{d}_k^\dagger \hat{d}_k + \sum_{i=1}^2 \left\{ \hbar \nu \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{\hbar \omega_a}{2} \sigma_{iz} \right. \\ &+ \hbar g (\sigma_{i+} + \sigma_{i-}) \left[\hat{d}_1^\dagger + \hat{d}_2 + \hat{d}_2^\dagger + \hat{d}_1 + (-1)^{i+1} \sqrt{2} \left(\hat{b}_i^\dagger + \hat{b}_i \right) \right] \\ &\left. \times \left[\left(1 - \frac{\eta^2 (1 + 2\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i)}{2} - \frac{(\hat{a}_i^\dagger)^2 + (\hat{a}_i)^2}{2} \right) \cos \phi - \eta \left(\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i \right) \sin \phi \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde $\Omega_{1,2} = \omega \pm \sqrt{2}\lambda$ e $\Omega_3 = \omega$ são as frequências dos modos normais \hat{d}_1 , \hat{d}_2 e \hat{d}_3 .

Considerando que o Hamiltoniano livre do sistema é dado por:

$$H_0 = \sum_{k=1}^3 \hbar \Omega_k \hat{d}_k^\dagger \hat{d}_k + \sum_{i=1}^2 \hbar \nu \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{\hbar \omega_a}{2} \sigma_{iz}, \quad (5.5)$$

temos, na representação de interação, a seguinte expressão para o Hamiltoniano de

interação $H_I (= H_S - H_0)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_I &= e^{\frac{i}{\hbar}H_0} H_I e^{-\frac{i}{\hbar}H_0} \\
&= \hbar g \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{(-1)^{i+1}}{\sqrt{2}} \cos \phi \left(1 - \frac{\eta^2}{2} \left(1 + 2\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \right) \right) \left(e^{i(\omega-\omega_a)t} \sigma_{i-} \hat{d}_3^\dagger + e^{i(\omega+\omega_a)t} \sigma_{i+} \hat{d}_3^\dagger + h.c. \right) \right. \\
&\quad - \eta \sin \phi \left(e^{i(\omega+\omega_a+\nu)t} \sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_3^\dagger + e^{i(\omega+\omega_a-\nu)t} \sigma_{i+} \hat{a}_i \hat{d}_3^\dagger + h.c. \right) \\
&\quad - \eta \sin \phi \left(e^{i(\omega_a-\omega-\nu)t} \sigma_{i+} \hat{a}_i \hat{d}_3 + e^{i(\omega_a-\Omega_k+\nu)t} \sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_3 + h.c. \right) \\
&\quad - \frac{\eta^2}{2} \cos \phi \left(e^{i(\omega_a+\omega+2\nu)t} \sigma_{i+} (\hat{a}_i^\dagger)^2 \hat{d}_3^\dagger + e^{i(\omega_a+\omega-2\nu)t} \sigma_{i+} \hat{a}_i^2 \hat{d}_3^\dagger + h.c. \right) \\
&\quad - \frac{\eta^2}{2} \cos \phi \left(e^{i(\omega-\omega_a+2\nu)t} \sigma_{i-} (\hat{a}_i^\dagger)^2 \hat{d}_3^\dagger + e^{i(\omega-\omega_a-2\nu)t} \sigma_{i-} \hat{a}_i^2 \hat{d}_3^\dagger + h.c. \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left[\cos \phi \left(1 - \frac{\eta^2}{2} \left(1 + 2\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \right) \right) \left(e^{i(\Omega_k-\omega_a)t} \sigma_{i-} \hat{d}_k^\dagger + e^{i(\Omega_k+\omega_a)t} \sigma_{i+} \hat{d}_k^\dagger + h.c. \right) \right. \\
&\quad - \eta \sin \phi \left(e^{i(\Omega_k+\omega_a+\nu)t} \sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_k^\dagger + e^{i(\Omega_k+\omega_a-\nu)t} \sigma_{i+} \hat{a}_i \hat{d}_k^\dagger + h.c. \right) \\
&\quad - \eta \sin \phi \left(e^{i(\omega_a-\Omega_k-\nu)t} \sigma_{i+} \hat{a}_i \hat{d}_k + e^{i(\omega_a-\Omega_k+\nu)t} \sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_k + h.c. \right) \\
&\quad - \frac{\eta^2}{2} \cos \phi \left(e^{i(\omega_a+\Omega_k+2\nu)t} \sigma_{i+} (\hat{a}_i^\dagger)^2 \hat{d}_k^\dagger + e^{i(\omega_a+\Omega_k-2\nu)t} \sigma_{i+} \hat{a}_i^2 \hat{d}_k^\dagger + h.c. \right) \\
&\quad \left. - \frac{\eta^2}{2} \cos \phi \left(e^{i(\Omega_k-\omega_a+2\nu)t} \sigma_{i-} (\hat{a}_i^\dagger)^2 \hat{d}_k^\dagger + e^{i(\Omega_k-\omega_a-2\nu)t} \sigma_{i-} \hat{a}_i^2 \hat{d}_k^\dagger + h.c. \right) \right] \left. \right\}. \tag{5.6}
\end{aligned}$$

Agora, aplicando a aproximação de ondas girantes (RWA) sob as condições:

$$(i) \omega, \omega_a \gg \sqrt{2}\lambda, 3\nu; \quad (ii) \lambda, \nu \gg g; \quad (iii) \sqrt{2}\lambda - 3\nu \gg g, \tag{5.7}$$

Nós obtemos, na representação de interação, os seguintes Hamiltonianos:

A) Primeira banda lateral azul ($\omega_a - \omega = -\nu$):

$$\tilde{H}_I = \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \eta \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left(\sigma_{i+} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_3 + \sigma_{i-} \hat{a}_i \hat{d}_3^\dagger \right). \tag{5.8}$$

B) Primeira banda lateral vermelha ($\omega_a - \omega = \nu$):

$$\tilde{H}_I = \frac{\hbar g}{\sqrt{2}} \eta \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left(\sigma_{i+} \hat{a}_i \hat{d}_3 + \sigma_{i-} \hat{a}_i^\dagger \hat{d}_3^\dagger \right). \tag{5.9}$$

A condição (ii) corresponde ao regime onde a frequência de oscilação do íon e a constante de acoplamento cavidade-fibra são muito maiores que o acoplamento entre os níveis internos do íon e sua respectiva cavidade.

Além disso, a condição (iii) indica um regime onde a constante de acoplamento cavidade-fibra é muito alta comparado com a frequência de oscilação do íon. Esta condição é automaticamente satisfeita se $\lambda \geq 2\sqrt{2}\nu$.

Deve-se notar que os Hamiltonianos da primeira banda lateral azul e da primeira banda lateral vermelha foram obtidos considerando $\phi = -\pi/2$ (centro da armadilha no antinodo do campo da cavidade).

Os modos do campo \hat{d}_1 e \hat{d}_2 não participam efetivamente nos Hamiltonianos (5.8) e (5.9), permanecendo em seus estados iniciais durante a evolução temporal do sistema. Por esta razão descartaremos estes modos da descrição do sistema.

A evolução temporal do sistema é definida pela equação de Schrödinger:

$$\frac{d}{dt} \left| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle = -\frac{i}{\hbar} \tilde{H}_I \left| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle, \quad (5.10)$$

onde $\left| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle$ é o vetor de estado do sistema no tempo t (na representação de interação).

Para o caso A (primeira banda lateral azul) e considerando estados puros, o estado do sistema é dado por:

$$\begin{aligned} \left| \tilde{\Psi}(t) \right\rangle = & \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} [C_{k_1, k_2, t}^{gg}(t) |g\rangle_1 |g\rangle_2 + C_{k_1, k_2}^{ge}(t) |g\rangle_1 |e\rangle_2 \\ & + C_{k_1, k_2}^{eg}(t) |e\rangle_1 |g\rangle_2 + C_{k_1, k_2}^{ee}(t) |e\rangle_1 |e\rangle_2] |k_1\rangle_{a1} |k_2\rangle_{a2} |l\rangle_{d3}, \quad (5.11) \end{aligned}$$

onde os coeficientes obedecem o conjunto de equações diferenciais abaixo:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}C_{k_1,k_2,l}^{gg}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}}\sqrt{l}\left[\sqrt{k_1+1}C_{k_1+1,k_2,l-1}^{eg}(t)\right. \\
&\quad \left.-\sqrt{k_2+1}C_{k_1,k_2+1,l-1}^{ge}(t)\right]; \\
\frac{d}{dt}C_{k_1,k_2+1,l-1}^{ge}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{(l-1)(k_1+1)}C_{k_1+1,k_2+1,l-2}^{ee}(t)\right. \\
&\quad \left.-\sqrt{l(k_2+1)}C_{k_1,k_2,l}^{gg}(t)\right]; \\
\frac{d}{dt}C_{k_1+1,k_2,l-1}^{eg}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{l(k_1+1)}C_{k_1,k_2,l}^{gg}(t)\right. \\
&\quad \left.-\sqrt{(l-1)(k_2-1)}C_{k_1+1,k_2+1,l-2}^{ee}(t)\right]; \\
\frac{d}{dt}C_{k_1+1,k_2+1,l-2}^{ee}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}}\sqrt{l-1}\left[\sqrt{k_1+1}C_{k_1,k_2+1,l-1}^{ge}(t)\right. \\
&\quad \left.-\sqrt{k_2+1}C_{k_1+1,k_2,l-1}^{eg}(t)\right], \tag{5.12}
\end{aligned}$$

na qual $|g\rangle_j$ e $|e\rangle_j$ correspondem respectivamente aos estados fundamental e excitado do íon j e $|k\rangle_A$ são os estados de Fock do modo relacionado ao operador \hat{A} ($=\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{c}, \hat{d}_3, \hat{a}_1$ ou \hat{a}_2).

Para o caso B (primeira banda lateral vermelha), obtém-se da equação de Schrödinger que os coeficientes de (5.11) obedecem outro conjunto de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}C_{k_1,k_2,l}^{gg}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}}\sqrt{l}\left[\sqrt{k_1}C_{k_1-1,k_2,l-1}^{eg}(t)\right. \\
&\quad \left.-\sqrt{k_2}C_{k_1,k_2-1,l-1}^{ge}(t)\right]; \\
\frac{d}{dt}C_{k_1,k_2-1,l-1}^{ge}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{(l-1)k_1}C_{k_1-1,k_2-1,l-2}^{ee}(t)\right. \\
&\quad \left.-\sqrt{lk_2}C_{k_1,k_2,l}^{gg}(t)\right]; \\
\frac{d}{dt}C_{k_1-1,k_2,l-1}^{eg}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{lk_1}C_{k_1,k_2,l}^{gg}(t)\right. \\
&\quad \left.-\sqrt{(l-1)k_2}C_{k_1-1,k_2-1,l-2}^{ee}(t)\right]; \\
\frac{d}{dt}C_{k_1-1,k_2-1,l-2}^{ee}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}}\sqrt{l-1}\left[\sqrt{k_1}C_{k_1,k_2-1,l-1}^{ge}(t)\right. \\
&\quad \left.-\sqrt{k_2}C_{k_1-1,k_2,l-1}^{eg}(t)\right]. \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Uma vez determinada a evolução temporal do sistema, pode-se estudar a comunicação entre os dois íons através dos campos contidos na fibra óptica e nas duas cavidades.

5.2 Transmissão dos estados de dois qubits

Primeiro consideramos a situação onde os níveis vibracionais e eletrônicos do íon 1 estão definidos na base $\{|g\rangle_1 |0\rangle_{a1}, |e\rangle_1 |1\rangle_{a1}\}$:

$$|\Psi_0\rangle = [\cos \theta |g\rangle_1 |0\rangle_{a1} + e^{i\varphi} \sin \theta |e\rangle_1 |1\rangle_{a1}] |0\rangle_{b1} |0\rangle_c |0\rangle_{b2} |g\rangle_2 |0\rangle_{a2}. \quad (5.14)$$

Para este estado inicial nós aplicamos o Hamiltoniano correspondente à primeira banda lateral azul ($\omega_a - \omega = -\nu$). Neste caso resolvemos as equações diferenciais dadas em (5.12) sob as condições iniciais:

$$C_{0,0,0}^{gg} = \cos \theta; \quad C_{1,0,0}^{eg} = e^{i\varphi} \sin \theta. \quad (5.15)$$

Para estas condições iniciais os conjuntos de equações em (5.12) com coeficientes não nulos são:

- $k_1 = k_2 = l = 0$: $\frac{d}{dt} C_{0,0,0}^{gg}(t) = 0 \Rightarrow C_{0,0,0}^{gg}(t) = C_{0,0,0}^{gg}(0)$
- $k_1 = k_2 = 0$ e $l = 1$: neste caso o conjunto (5.12) se reduz a três equações:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} C_{0,0,1}^{gg}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} \sqrt{l} [C_{1,0,0}^{eg}(t) - C_{0,1,0}^{ge}(t)]; \\ \frac{d}{dt} C_{0,1,0}^{ge}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} C_{0,0,1}^{gg}(t); \\ \frac{d}{dt} C_{1,0,0}^{eg}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} C_{0,0,1}^{gg}(t), \end{aligned} \quad (5.16)$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{aligned} C_{0,0,1}^{gg}(t) &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \sin \theta \sin(\eta g t); \\ C_{0,1,0}^{ge}(t) &= e^{i\varphi} \sin \theta \sin^2(\eta g t/2); \quad C_{1,0,0}^{eg}(t) = e^{i\varphi} \sin \theta \cos^2(\eta g t/2). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Retornando à representação de Schrödinger, obtemos o estado do sistema em função do tempo escalado $\tau = \eta gt$, na forma

$$\begin{aligned}
|\Psi(\tau)\rangle &= \cos\theta e^{i\frac{\omega_a}{\eta g}\tau} |g\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} |0\rangle_{d3} \\
&\quad - \frac{ie^{i\varphi}}{\sqrt{2}} \sin\theta e^{-i\frac{\nu}{\eta g}\tau} \sin(\tau) |g\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} |1\rangle_{d3} \\
&\quad + e^{i\varphi} \sin\theta e^{-i\frac{\nu}{\eta g}\tau} \left[\sin^2\left(\frac{\tau}{2}\right) |g\rangle_1 |e\rangle_2 |0\rangle_{a1} |1\rangle_{a2} |0\rangle_{d3} \right. \\
&\quad \left. + \cos^2\left(\frac{\tau}{2}\right) |e\rangle_1 |g\rangle_2 |1\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} |0\rangle_{d3} \right]. \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Para os instantes de tempo $\tau_n = (2n + 1)\pi$ o estado do sistema é dado por:

$$|\Psi(\tau_n)\rangle = |g\rangle_1 |0\rangle_{a1} |0\rangle_{d3} \left[\cos\theta |g\rangle_2 |0\rangle_{a2} + e^{i(\varphi - \mu_n)} \sin\theta |e\rangle_2 |1\rangle_{a2} \right], \tag{5.19}$$

onde $\mu_n = (2n + 1)\frac{\omega}{\eta g}\pi$.

Pode-se observar que o estado de dois qubits formado pelos graus de liberdade do primeiro íon foi transmitido, a menos de uma fase relativa, para o segundo íon localizado na outra cavidade.

Para completar os resultados também consideramos a situação na qual os graus de liberdade do íon 1 formam um estado definido na base $\{|g\rangle_1 |1\rangle_{a1}, |e\rangle_1 |0\rangle_{a1}\}$:

$$|\Psi_1\rangle = [\cos\theta |g\rangle_1 |1\rangle_{a1} + e^{i\varphi} \sin\theta |e\rangle_1 |0\rangle_{a1}] |0\rangle_{b1} |0\rangle_c |0\rangle_{b2} |g\rangle_2 |1\rangle_{a2}. \tag{5.20}$$

Agora aplicamos o Hamiltoniano correspondente à primeira banda lateral vermelha ($\omega_a - \omega = \nu$). Observe que, devido à forma da Hamiltoniana, o movimento de oscilação do segundo íon deve estar inicialmente no estado $|1\rangle_{a2}$ para tornar possível a comunicação entre os dois íons.

Desta vez resolvemos as equações diferenciais (5.13) sob as condições iniciais:

$$C_{1,1,0}^{gg} = \cos\theta; \quad C_{0,1,0}^{eg} = e^{i\varphi} \sin\theta. \tag{5.21}$$

Para estas condições iniciais, os conjuntos de equações em (5.13) com coeficientes não nulos são análogos aos obtidos em (5.16):

- $k_1 = k_2 = 1$ e $l = 0$: $\frac{d}{dt}C_{1,1,0}^{gg}(t) = 0 \Rightarrow C_{1,1,0}^{gg}(t) = C_{1,1,0}^{gg}(0)$.

- $k_1 = k_2 = l = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}C_{1,1,1}^{gg}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [C_{0,1,0}^{eg}(t) - C_{1,0,0}^{ge}(t)]; \\
\frac{d}{dt}C_{1,0,0}^{ge}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} C_{1,1,1}^{gg}(t); \\
\frac{d}{dt}C_{0,1,0}^{eg}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} C_{1,1,1}^{gg}(t), \tag{5.22}
\end{aligned}$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{aligned} C_{1,1,1}^{gg}(t) &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \sin \theta \sin(\eta gt); \\ C_{1,0,0}^{ge}(t) &= e^{i\varphi} \sin \theta \sin^2(\eta gt/2); \quad C_{0,1,0}^{ge}(t) = e^{i\varphi} \sin \theta \cos^2(\eta gt/2). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Com isso temos a seguinte solução (na representação de Schrödinger):

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \cos \theta e^{i\frac{(\omega-\nu)}{\eta g}\tau} |g\rangle_1 |g\rangle_2 |1\rangle_{a1} |1\rangle_{a2} |0\rangle_{d3} \\ &\quad - \frac{ie^{i\varphi}}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\frac{\nu}{\eta g}\tau} \sin(\tau) |g\rangle_1 |g\rangle_2 |1\rangle_{a1} |1\rangle_{a2} |1\rangle_{d3} \\ &\quad + e^{i\varphi} \sin \theta \exp^{-i\frac{\nu}{\eta g}\tau} \left[\sin^2\left(\frac{\tau}{2}\right) |g\rangle_1 |e\rangle_2 |1\rangle_{a1} |0\rangle_{a2} |0\rangle_{d3} \right. \\ &\quad \left. + \cos^2\left(\frac{\tau}{2}\right) |e\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_{a1} |1\rangle_{a2} |0\rangle_{d3} \right]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Para os instantes de tempo $\tau_n = (2n + 1)\pi$, o sistema se encontra no estado:

$$|\Psi(\tau_n)\rangle = |g\rangle_1 |1\rangle_{a1} |0\rangle_{d3} \left[\cos \theta |g\rangle_2 |1\rangle_{a2} + e^{i(\varphi-\mu_n)} \sin \theta |e\rangle_2 |0\rangle_{a2} \right], \quad (5.25)$$

onde $\mu_n = (2n + 1)\frac{\omega}{\eta g}\pi$.

E, da mesma forma, nós temos a transmissão do estado de dois qubits para o íon 2 a menos de uma fase relativa. A fase relativa μ_n e os instantes de tempo τ_n são os mesmos obtidos no caso anterior.

Em seguida, para estudar a evolução do sistema até a transmissão ser concluída, usamos a fidelidade de transmissão [40]:

$$F(\tau, \theta, \varphi) = \langle \zeta | \rho_2(\tau) | \zeta \rangle, \quad (5.26)$$

onde $\rho_2(\tau)$ é o operador densidade reduzido do íon 2, definido como o traço parcial sobre as variáveis do modo do campo d_3 , o modo de movimento a_1 e os níveis internos do íon 1:

$$\rho_2(\tau) = Tr_{a1} \{ Tr_{d3} \{ Tr_{d3} \{ \rho(\tau) \} \} \}, \quad (5.27)$$

e $|\zeta\rangle$ é o estado desejado do íon 2 após a transmissão.

Para ambos os estados iniciais $|\Psi_0\rangle$ (com $\omega_a - \omega = -\nu$) e $|\Psi_1\rangle$ (com $\omega_a - \omega = \nu$), a fidelidade F leva para a mesma função (somente no caso não dissipativo):

$$\begin{aligned} F(\tau, \theta, \varphi) &= \cos^4 \theta + \sin^2 \theta \sin^4\left(\frac{\eta g t}{2}\right) + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &\quad \times \left[\sin^2(\eta g t) + \cos^4\left(\frac{\eta g t}{2}\right) + 2 \cos(\omega t) \sin^2\left(\frac{\eta g t}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Nota-se de (5.28) que a fidelidade de transmissão para os estados iniciais considerados são independentes da fase relativa φ . Na figura 5.2 apresentamos a evolução

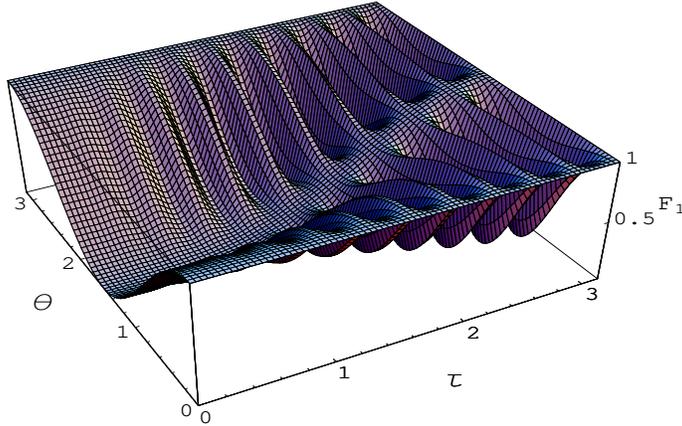


Figura 5.2: Fidelidade de transmissão do sistema em função do tempo escalado $\tau = \eta g t$ e θ . Os resultados foram obtidos com $\omega/(\eta g) = 20$ and $\varphi = 0$.

temporal de F em função do ângulo θ até o instante onde a transferência de estado é completada (em $\tau = \pi$).

Para estados iniciais com $0 < |\theta| < \pi/2$, onde os graus de liberdade do íon 1 estão em um estado emaranhado, podemos ver que a função $F(\tau, \theta, \varphi)$ apresenta oscilações antes de alcançar o valor 1 em $\tau = \pi$. A frequência destas oscilações aumenta com o valor da fração $\omega/(\eta g)$.

5.3 Transferência do estado de dois qubits sob dissipação

Nesta seção incluímos no sistema a emissão espontânea dos íons, perdas da fibra e das cavidades, assim como o amortecimento no movimento de oscilação dos íons para estudar a eficiência da transferência do estado quântico com dissipação.

Nesta situação, consideramos que cada parte do sistema está interagindo com reservatórios diferentes e independentes entre si. Logo, o Hamiltoniano do sistema global pode ser escrito como:

$$H_T = H_S + H_R + H_{SR}, \quad (5.29)$$

onde H_S é dado em (5.4), H_R é o Hamiltoniano do ambiente que consiste de um sistema de sete reservatórios, cada um representado como um banho de osciladores harmônicos:

$$H_R = \sum_{j=1}^7 H_R^j = \sum_{j=1}^7 \sum_i \hbar \omega_{ij} \hat{h}_{ij}^\dagger \hat{h}_{ij}, \quad (5.30)$$

e o Hamiltoniano de interação entre o sistema e o reservatório é:

$$\begin{aligned} H_{SR} = & \left(\hat{a}_1 \Gamma_1^\dagger + \hat{a}_1^\dagger \Gamma_1 \right) + \left(\hat{a}_2 \Gamma_2^\dagger + \hat{a}_2^\dagger \Gamma_2 \right) + \left(\hat{b}_1 \Gamma_3^\dagger + \hat{b}_1^\dagger \Gamma_3 \right) + \left(\hat{b}_2 \Gamma_4^\dagger + \hat{b}_2^\dagger \Gamma_4 \right) \\ & + \left(\hat{\sigma}_{1-} \Gamma_5^\dagger + \hat{\sigma}_{1+} \Gamma_5 \right) + \left(\hat{\sigma}_{2-} \Gamma_6^\dagger + \hat{\sigma}_{2+} \Gamma_6 \right) + \left(\hat{c} \Gamma_7^\dagger + \hat{c}^\dagger \Gamma_7 \right), \end{aligned} \quad (5.31)$$

na qual temos $\Gamma_j = \sum_i \hbar g_{ij} \hat{h}_{ij}$.

Os reservatórios descritos pelos Hamiltonianos H_R^3 , H_R^4 e H_R^7 representam os modos do campo radiante do vácuo no qual os campos da cavidade e da fibra podem decair enquanto os Hamiltonianos H_R^5 , H_R^6 representam os modos do campo no qual os átomos emitem fótons durante o processo de emissão espontânea. Para a oscilação dos íons consideramos como modelo de dissipação o contato dos modos vibracionais com reservatórios de bosons, representados pelos Hamiltonianos H_R^1 e H_R^2 .

Para o Hamiltoniano dado em (5.29) é mais apropriado usar o formalismo do operador densidade, cuja evolução temporal obedece a equação mestra [26] abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho(t) = & -\frac{i}{\hbar} \left[\tilde{H}_I, \rho(t) \right] + \sum_{i=1,2} \left[\frac{\chi}{2} \left(2\hat{a}_i \rho(t) \hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \rho(t) - \rho(t) \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \right) \right. \\ & + \frac{\gamma}{2} \left(2\hat{b}_i \rho(t) \hat{b}_i^\dagger - \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i \rho(t) - \rho(t) \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i \right) \\ & + \frac{\kappa}{2} \left(2\sigma_{i-} \rho(t) \sigma_{i+} - \sigma_{i+} \sigma_{i-} \rho(t) - \rho(t) \sigma_{i+} \sigma_{i-} \right) \\ & \left. + \frac{\varepsilon}{2} \left(2\hat{c} \rho(t) \hat{c}^\dagger - \hat{c}^\dagger \hat{c} \rho(t) - \rho(t) \hat{c}^\dagger \hat{c} \right), \right. \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde $\rho(t)$ é o operador densidade do sistema, γ é a taxa de decaimento da cavidade, ε é a taxa de decaimento da fibra óptica, χ é a taxa de amortecimento devido a flutuações da armadilha e κ é a taxa de emissão espontânea do íon.

Em função dos operadores de campo $d_{1,2,3}$, a equação mestra (5.32) pode ser

reescrita como:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho(t) = & -\frac{i}{\hbar} \left[\tilde{H}_I, \rho(t) \right] + \sum_{i=1,2} \left[\frac{\chi}{2} \left(2\hat{a}_i\rho(t)\hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\rho(t) - \rho(t)\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i \right) \right. \\
& + \frac{\kappa}{2} \left(2\sigma_{i-}\rho(t)\sigma_{i+} - \sigma_{i+}\sigma_{i-}\rho(t) - \rho(t)\sigma_{i+}\sigma_{i-} \right) \\
& + \frac{\gamma}{2} \left(2\hat{d}_3\rho(t)\hat{d}_3^\dagger - \hat{d}_3^\dagger\hat{d}_3\rho(t) - \rho(t)\hat{d}_3^\dagger\hat{d}_3 \right) \\
& + \sum_{i=1,2} \left[\frac{(\gamma + \varepsilon)}{4} \left(2\hat{d}_i\rho(t)\hat{d}_i^\dagger - \hat{d}_i^\dagger\hat{d}_i\rho(t) - \rho(t)\hat{d}_i^\dagger\hat{d}_i \right) \right] \\
& + \frac{(\gamma - \varepsilon)}{4} \left(2(\hat{d}_1\rho(t)\hat{d}_2^\dagger + \hat{d}_2\rho(t)\hat{d}_1^\dagger) \right. \\
& \left. - \hat{d}_1^\dagger\hat{d}_2\rho(t) - \hat{d}_2^\dagger\hat{d}_1\rho(t) - \rho(t)\hat{d}_1^\dagger\hat{d}_2 - \rho(t)\hat{d}_2^\dagger\hat{d}_1 \right). \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Na equação acima consideramos o caso onde todos os reservatório estão na temperatura $T = 0K$, que descreve com boa aproximação os mecanismos de dissipação citados acima. Em muitos experimentos existe também a presença de aquecimento no movimento do íon, mas Roos et al. [46] obtiveram, em experimentos envolvendo o esfriamento de íons Ca^+ aprisionados, uma taxa de aquecimento muito menor (1 phonon em 190ms) do que a taxa de amortecimento do movimento do íon. Modelos mais realistas que foram propostos para a dissipação no movimento do íon envolvem a presença de reservatórios de temperatura $T > 0K$ (Budini et al [47]) ou a presença de reservatórios de fase (Murao e Knight [48]).

Os modos do campo correspondentes aos operadores d_1 e d_2 não têm participação efetiva na evolução unitária do sistema, como já foi indicado na seção anterior. Além disso, estes modos estão em seus respectivos estados estacionários (estado de vácuo) para os estados iniciais utilizados na seção 5.2, o que significa que seus estados não são afetados pela dissipação do sistema. Por estas razões nós descartamos na equação (5.33) os termos contendo exclusivamente os operadores d_1 e d_2 , uma vez que estes modos irão permanecer nos respectivos estados de vácuo durante toda evolução temporal do sistema. Isto significa que a equação mestra é independente de ε , i.e., o sistema não é afetado pelas perdas da fibra óptica.

O operador densidade do sistema é obtido resolvendo a equação (5.33) com os estados iniciais e as Hamiltonianas de interação apresentados na seção anterior. A partir da solução usamos a equação (5.27) para determinar o operador reduzido $\rho_2(\tau)$ do íon 2.

O procedimento para obter numericamente a solução neste caso é mais complicada do que o apresentado na seção 4.2.3 e pode ser visto com mais detalhes nos

apêndices A.1 e A.2. Para a taxa de amortecimento do movimento consideramos no modelo $\chi \lesssim 1kHz$, tomando como base o tempo de decoerência do movimento do íon determinado na montagem experimental apresentada por Roos et al (da ordem de 1ms [46]).

Primeiramente, analisamos a transmissão do estado $|\vartheta_1\rangle = [\cos\theta |g\rangle |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\theta |e\rangle |1\rangle]$, quando o sistema está na configuração $\omega_a - \omega = -\nu$. A eficiência da transmissão será dada pelo valor médio da fidelidade de transmissão sobre todos os valores de θ e ϕ , i.e., sobre todos os estados de entrada possíveis, no instante $\tau = \pi$:

$$\bar{F}_1 = \left\langle \langle \vartheta_1 | \rho_2(\tau = \pi) | \vartheta_1 \rangle \right\rangle_{\theta, \phi} = \langle F_1(\tau = \pi, \theta, \varphi) \rangle_{\theta, \phi}. \quad (5.34)$$

Para $\kappa = 2 \times 10^{-7}\eta g$, $\chi = 2 \times 10^{-4}\eta g$ e $\gamma = 10^{-1}\eta g$ obtemos uma fidelidade média de $\bar{F}_1 = 0.990$, indicando que a transmissão é confiável neste caso. Mesmo quando $\kappa = 2 \times 10^{-6}\eta g$, $\chi = 2 \times 10^{-3}\eta g$ e $\gamma = \eta g$ nós ainda temos, em média, uma transmissão eficiente do estado quântico com $\bar{F}_1 = 0.904$.

Para ilustrar o efeito de dissipação nós apresentamos na figura 5.3 a evolução temporal da fidelidade de transmissão F_1 para diferentes valores da taxa de decaimento com $\omega/(\eta g) = 20$. Os resultados estão relacionados ao caso particular $\theta = \pi/4$ e $\theta = 3\pi/4$, quando temos a transferência dos estados de Bell $\frac{1}{\sqrt{2}} [|g\rangle |0\rangle \pm |e\rangle |1\rangle]$ (ambos os estados de entrada levam para a mesma curva apresentada na figura 5.3).

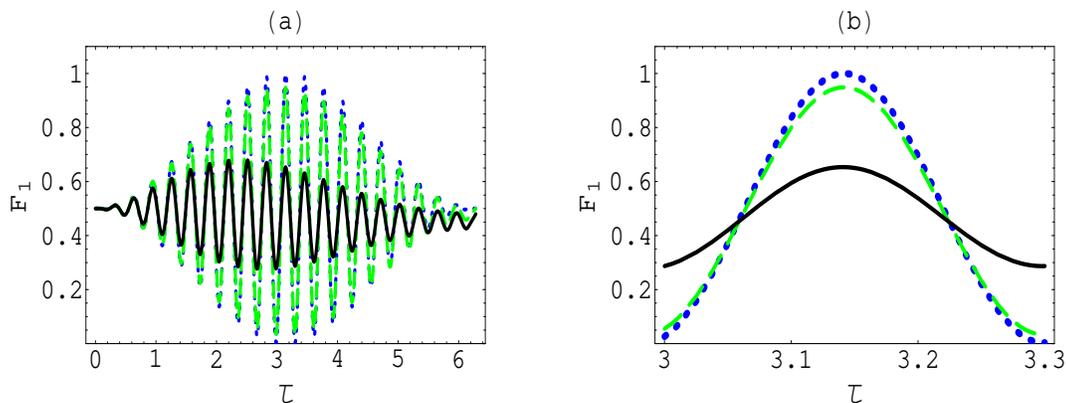


Figura 5.3: Fidelidade de transmissão dos estados de Bell $\frac{1}{\sqrt{2}} [|g\rangle |0\rangle \pm |e\rangle |1\rangle]$ em função do tempo escalado $\tau = \eta g t$ nos seguintes intervalos: a) $0 \leq \tau \leq 2\pi$, b) $3 \leq \tau \leq 3.3$. A linha pontilhada é para $\kappa = \chi = \gamma = 0$, a linha tracejada para $\kappa = 2 \times 10^{-2}\eta g$, $\chi = 0.5 \times \eta g$ e $\gamma = \eta g$ e a linha sólida para $\kappa = 2 \times 10^{-2}\eta g$, $\chi = 0.5 \times \eta g$ e $\gamma = \eta g$. Todos os resultados foram obtidos com $\omega/(\eta g) = 20$.

A linha pontilhada representa o caso onde o sistema está isolado do ambiente ($\kappa = \chi = \gamma = 0$) e corresponde a um corte na figura 5.2 nos valores $\theta = \pi/4$ e $\theta = 3\pi/4$. Como já foi indicado na seção anterior, a curva apresenta oscilações antes de atingir o valor 1 em $\tau = \pi$.

Para $\kappa = \chi = 2 \times 10^{-2}\eta g$ e $\gamma = 10^{-1}\eta g$ (linha tracejada), a função F_1 tem as mesmas oscilações, mas apresenta uma atenuação na amplitude de oscilação. Como esperado, a curva não alcança o valor 1 em $\tau = \pi$, mas para este caso ainda obtemos uma fidelidade de 0.949.

Conforme aumentamos as taxas de decaimento os efeitos da dissipação são mais evidentes como pode ser visto com $\kappa = 2 \times 10^{-2}\eta g$, $\chi = 0.5 \times \eta g$ e $\gamma = \eta g$ (linha sólida), onde a fidelidade de transmissão cai para 0.653. Também podemos observar a tendência da curva em tornar-se uma linha reta no valor 0.5, onde o sistema está indo para seu estado fundamental ($|g\rangle_2 |0\rangle_{a2}$) devido a presença do reservatório.

Em seguida consideramos a transmissão do estado $|\vartheta_2\rangle = [\cos\theta |g\rangle |1\rangle + e^{i\varphi} \sin\theta |e\rangle |0\rangle]$, quando o sistema está na configuração $\omega_a - \omega = \nu$. Da mesma forma, nós calculamos os valores médios da fidelidade para este tipo de estado:

$$\bar{F}_2 = \left\langle \langle \vartheta_2 | \rho_2(\tau = \pi) | \vartheta_2 \rangle \right\rangle_{\theta, \phi} = \langle F_2(\tau = \pi, \theta, \varphi) \rangle_{\theta, \phi}. \quad (5.35)$$

Para $\kappa = 2 \times 10^{-7}\eta g$, $\chi = 2 \times 10^{-4}\eta g$ e $\gamma = 10^{-1}\eta g$ nós ainda obtemos um valor alto para a fidelidade média ($\bar{F}_2 = 0.971$), mas em $\kappa = 2 \times 10^{-6}\eta g$, $\chi = 2 \times 10^{-3}\eta g$ e $\gamma = \eta g$ seu valor cai drasticamente para $\bar{F}_2 = 0.804$. Com isto, concluímos que a transmissão para este caso é mais suscetível à presença da dissipação.

Nesta configuração podemos ter a transmissão dos estados de Bell $\frac{1}{\sqrt{2}} [|g\rangle |1\rangle \pm |e\rangle |0\rangle]$, correspondentes aos valores $\theta = \pi/4$ e $\theta = 3\pi/4$. Novamente, nós apresentamos na figura 5.4 a evolução temporal da fidelidade de transmissão F_2 para diferentes valores nas taxas de decaimento com $\omega/(\eta g) = 20$.

As observações sobre as oscilações da curva são as mesmas que foram feitas na figura 5.3. No entanto, quando o reservatório é incluído, o centro das oscilações apresenta valores menores ao longo do tempo, uma vez que o estado fundamental do sistema é ortogonal ao estado desejado no íon 2. Para $\kappa = \chi = 2 \times 10^{-2}\eta g$ e $\gamma = 10^{-1}\eta g$ ainda temos, em $\tau = \pi$, uma fidelidade de 0.913 mas, como esperado, o valor cai para 0.210 quando $\kappa = 2 \times 10^{-2}\eta g$, $\chi = 0.5 \times \eta g$ e $\gamma = \eta g$, indicando que a transferência do estado quântico é ineficiente nestas taxas de decaimento.

Com os resultados acima, construímos a tabela 5.1 onde indicamos a fidelidade média de transmissão para dois conjuntos de valores de η e g considerando taxas de dissipação dadas por $\{\kappa, \chi, \gamma\} = (2\pi) \times \{0.2Hz, 0.2kHz, 100kHz\}$.

Pelos dados da tabela devemos ter $\eta \approx 0.2$ e $g \approx (2\pi) \times 5MHz$ para obter uma

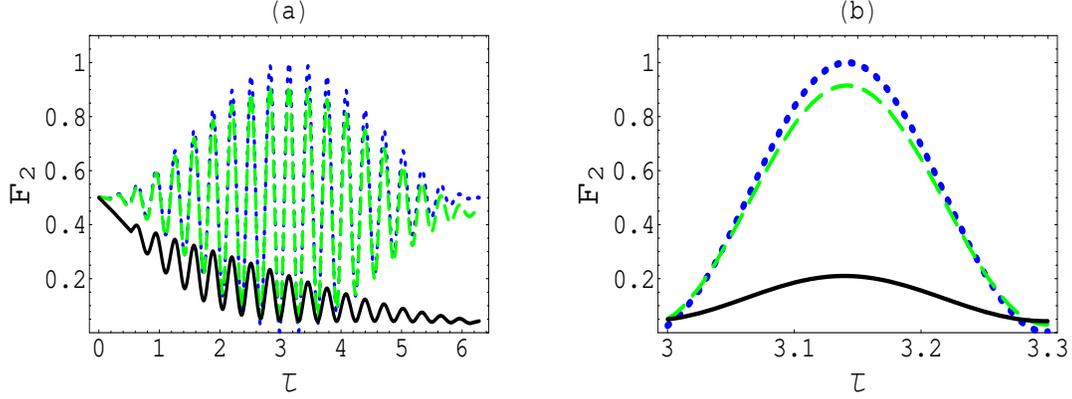


Figura 5.4: Fidelidade de transmissão dos estados de Bell $\frac{1}{\sqrt{2}} [|g\rangle |1\rangle \pm |e\rangle |0\rangle]$ em função do tempo escalado $\tau = \eta g t$ nos seguintes intervalos: a) $0 \leq \tau \leq 2\pi$, b) $3 \leq \tau \leq 3.3$. A linha pontilhada é para $\kappa = \chi = \gamma = 0$, a linha tracejada para $\kappa = \chi = 2 \times 10^{-2} \eta g$ e $\gamma = 10^{-1} \eta g$ e a linha sólida para $\kappa = 2 \times 10^{-2} \eta g$, $\chi = 0.5 \times \eta g$ e $\gamma = \eta g$. Todos os resultados foram obtidos com $\omega/(\eta g) = 20$

fidelidade média de $\bar{F}_1 = 0.990$ em $\omega_a - \omega = -\nu$ e $\bar{F}_2 = 0.971$ em $\omega_a - \omega = \nu$. Se tivermos $\eta \approx 0.2$ e $g \approx (2\pi) \times 500 \text{kHz}$ ainda teremos um valor razoavelmente alto da fidelidade média de transmissão para $\omega_a - \omega = -\nu$ ($\bar{F}_1 = 0.904$), mas seu valor para $\omega_a - \omega = \nu$ fica abaixo do desejável ($\bar{F}_1 = 0.804$).

$\{\eta, g\}$	$\{\kappa, \chi, \gamma\}$ (com relação à ηg)	\bar{F}_1 (BLA)	\bar{F}_2 (BLV)
$\{0.2, (2\pi) \times 5 \text{MHz}\}$	$\{2 \times 10^{-7}, 2 \times 10^{-4}, 10^{-1}\} \times (\eta g)$	0.990	0.971
$\{0.2, (2\pi) \times 500 \text{kHz}\}$	$\{2 \times 10^{-6}, 2 \times 10^{-3}, 1\} \times (\eta g)$	0.904	0.804

Tabela 5.1: Valores da fidelidade de transmissão média dos estados de dois-qubits na primeira banda lateral azul (BLA) e na primeira banda lateral vermelha (BLV) considerando taxas de dissipação $\{\kappa, \chi, \gamma\} = (2\pi) \times \{0.2 \text{Hz}, 0.2 \text{kHz}, 100 \text{kHz}\}$.

Nos resultados de Mundt et al. [10], envolvendo a interação entre íons aprisionados e cavidades ópticas, todas as taxas de dissipação estão abaixo ou próximas a estes valores, com $\kappa = (2\pi) \times 0.17 \text{Hz}$ (taxa de emissão espontânea) e $\gamma = (2\pi) \times 102 \text{kHz}$ (decaimento da cavidade).

A frequência de oscilação do íon ν para esta montagem experimental é da ordem de $5 \text{MHz} - 7 \text{MHz}$, o que significa que, dos dados da tabela, apenas o caso $g \approx (2\pi) \times 500 \text{kHz}$ pode ser considerado para satisfazer a condição $\nu \gg g$ imposta pelo modelo. Isto significa que, para esta situação, apenas a transmissão dos es-

tado preparados na base $\{|g\rangle |0\rangle, |e\rangle |1\rangle\}$ (na primeira banda lateral azul) pode ser realizada experimentalmente.

No entanto, a cavidade utilizada neste experimento tem finesse $\mathcal{F} = 35000$, o que torna viável obtermos valores menores para γ em cavidades ópticas com $\mathcal{F} > 50000$. A situação com $g \approx (2\pi) \times 5MHz$, que apresenta melhores resultados, também pode ser utilizada se for possível montar armadilhas de íons com frequência ν maiores que $50MHz$.

Outra fonte de erro que pode ser relevante nesta montagem experimental é a participação dos modos normais associados aos operadores d_1 e d_2 , que foi desprezada na aproximação utilizada nos Hamiltonianos (5.8) e (5.9).

Montagens experimentais com íons aprisionados no interior de cavidades ópticas já estão sendo utilizados por alguns grupos de pesquisa, como o Grupo de Óptica Quântica e Espectroscopia da Universidade de Insbruck (<http://heart-c704.uibk.ac.at/>). Recentemente estão sendo apresentadas propostas utilizando redes de cavidades ópticas e átomos [29] para implementação em computação quântica. Também existem propostas análogas envolvendo microcavidades esféricas, fibras ópticas e pontos quânticos ("quantum dots") [49, 50].

Capítulo 6

Conclusões

Nesta tese estudamos sistemas envolvendo duas cavidades acopladas e sua interação com átomos ou íons aprisionados (ambos de dois níveis). Para o acoplamento entre as cavidades consideramos duas propostas em nossos resultados: (1) Acoplamento pela sobreposição dos campos e; (2) Acoplamento via fibra óptica. Apesar de serem tipos de acoplamento diferentes eles levam aos mesmos resultados por terem o mesmo tipo de Hamiltoniano de interação.

Considerando o modelo proposto foi possível analisar o sistema em duas situações:

(1) Interação entre cavidades acopladas e átomos de dois níveis:

(1a) Emaranhamento em um sistema tripartite: Investigamos as propriedades de emaranhamento em um sistema tripartite composto por um sistema átomo-campo acoplado a uma segunda cavidade. Com este objetivo, analisamos a evolução temporal da negatividade correspondente a cada parte do sistema para quantificar o grau de emaranhamento entre os subsistemas.

Para o estado inicial $|e\rangle|0\rangle_{a1}|0\rangle_{a2}$, fomos capazes de gerar um estado de Bell dos modos da cavidade separadas do átomo (no estado fundamental) em instantes de tempo $t = (2n + 1)\pi/(g\sqrt{2})$. Com este resultado é possível elaborar um esquema para preparação de duas cavidades no estado de Bell $(|0\rangle_{a1}|1\rangle_{a2} - |1\rangle_{a1}|0\rangle_{a2})$ em um intervalo de tempo $\pi/(g\sqrt{2})$. Este estado de Bell pode ser usado para teleportação quântica entre íons aprisionados localizados em cavidades separadas [13] ou para testes de não localidade entre sistemas emaranhados [6].

Também estudamos o comportamento da negatividade para os estados iniciais $|g\rangle|1\rangle_{a1}|0\rangle_{a2}$ e $|g\rangle|0\rangle_{a1}|1\rangle_{a2}$. As similaridades entre os dois casos sugerem uma simetria em como o átomo interage com as duas cavidades, apesar do fato dele estar

acoplado a apenas uma das cavidades.

(1b) Transferência de estado quântico entre átomos usando campos acoplados: Nós consideramos aqui um sistema quatripartite formado por dois sistemas átomo-campo acoplados através da interação entre os campos (através da sobreposição dos modos desacoplados). Foi observado o transporte do estado quântico do átomo 1 para o átomo 2, os dois localizados em cavidades diferentes.

O transporte do estado quântico ocorreu para instantes de tempo $\tau = (2n + 1)\pi$ para qualquer estado de superposição do átomo 1. A condição $\omega_a/g = 2l$ (l inteiro) é necessária para fazer o átomo 2 assumir o exato estado de superposição que o átomo 1 estava em $\tau = 0$. No entanto, mesmo se esta condição não seja satisfeita, a relação entre a fase relativa do estado inicial do átomo 1 e a do estado transportado ainda é bem definida.

Para estudar como o sistema evolui durante a transmissão, observamos a fidelidade do sistema $|\langle \Psi_1 | \Psi(\tau) \rangle|$ comparado com o sistema em $\tau = (2n + 1)\pi$.

Para $0 < \theta < \pi$ a fidelidade apresenta oscilações antes da transmissão do estado seja obtida. A frequência destas oscilações aumenta com o valor da fração ω_a/g . Também notamos que a evolução temporal do sistema é independente da fase relativa do estado inicial de superposição. Nos instantes de tempo $\tau = (2n)\pi$ o sistema retorna a seu estado inicial, i.e., o estado quântico é transmitido de volta ao átomo 1. Isto é esperado porque a interação entre as cavidades permite a troca de fótons nas duas direções (da cavidade 1 para a cavidade 2 e vice-versa).

Os efeitos de dissipação pela emissão espontânea e perdas da cavidade também foram incluídas no sistema. Observamos que, apesar da dissipação, o valor médio da fidelidade ainda é capaz de alcançar valores próximos à unidade ($\bar{F} \approx 0.987$), mostrando que o procedimento para obter a transferência do estado quântico é confiável.

Devemos enfatizar que, para valores razoáveis dos parâmetros das perdas da cavidade e da emissão espontânea do átomo, a transmissão ocorre com fidelidade acima de 96.8%, mostrando a robustez do sistema físico em consideração.

(1c) Geração de estados de Bell: Nos resultados da interação entre átomos de dois níveis com um sistema de duas cavidades acopladas por uma fibra óptica uma análise similar foi realizada. Neste arranjo apresentamos dois esquemas alternativos para a geração de estados de Bell entre dois átomos separados: (i) Átomos passando sucessivamente nas cavidades e; (ii) Dois átomos passando simultaneamente em cavidades diferentes.

É importante notar que existem propostas equivalentes para produzir estados emaranhados usando apenas uma cavidade. No entanto, a utilização de cavidades

acopladas permite obter os mesmos resultados em localizações separadas espacialmente.

Consideramos também em nosso sistema a descoerência resultante da emissão espontânea dos átomos e das perdas nas cavidades e na fibra óptica. Neste caso resolvemos as equações mestra em todas as etapas nos dois métodos utilizados, nos restringindo à situação onde todos os subsistemas estão em contato com um reservatório com temperatura $T = 0$.

A eficiência da geração dos estados de Bell $|\psi_{\pm}\rangle = 1/\sqrt{2}(|g_1, e_2\rangle \pm |e_1, g_2\rangle)$ é dada pela fidelidade F_{\pm} dos dois átomos com relação ao estado desejado para diferentes valores das taxas de decaimento das cavidades (γ) e emissão espontânea dos átomos (κ).

Os resultados obtidos na simulação apontam a possibilidade de gerar experimentalmente estados maximamente emaranhados com fidelidade acima de 0.97. Considerando apenas a geração do estado $|\psi_{+}\rangle$ no método (i) e a geração do estado $|\psi_{-}\rangle$ no método (ii) podemos dizer que os dois estados de Bell podem ser gerados com fidelidade acima de 0.98.

(2) Interação entre cavidades acopladas e íons aprisionados: Por último, estudamos um sistema formado por duas cavidades eletromagnéticas acopladas por uma fibra óptica, cada cavidade interagindo com um íon dentro de uma armadilha de Paul. Foi observado o transporte de estados de dois qubits (incluindo os estados de Bell) a partir dos graus de liberdade do íon 1 para o íon 2, localizado em uma cavidade diferente. A transmissão destes estados pode ser útil para processamento de informação envolvendo portas lógicas de dois qubits em íon aprisionados ou para o envio de estados emaranhados em distâncias relativamente longas ($l \approx 1m$).

O transporte dos estados de dois-qubits ocorreu nos instantes de tempo $t_n = (2n + 1)\frac{\pi}{\eta g}$ para estados preparados na base $\{|g\rangle|0\rangle, |e\rangle|1\rangle\}$ (na primeira banda lateral azul) e $\{|g\rangle|1\rangle, |e\rangle|0\rangle\}$ (na primeira banda lateral vermelha). A condição $\omega/(\eta g) = 2l$ (l inteiro) é necessária para fazer o íon 2 assumir o exato estado de dois-qubits do íon 1 em $\tau = 0$. No entanto, mesmo que esta condição não seja satisfeita, a relação entre as fases relativas do estado inicial do íon 1 e do estado transportado ainda é bem determinada pelos parâmetros ω , η e g nas equações (5.19) e (5.25).

Também incluímos a interação entre o sistema e um reservatório na temperatura $T = 0$, para analisar a eficiência da transmissão sob a dissipação. Neste caso, o sistema não é afetado pela taxa de decaimento na fibra óptica para as condições (5.7) e os estados iniciais utilizados neste modelo.

Finalmente, observamos que a transferência dos estados de dois-qubits com os graus de liberdade dos íons podem ser obtidos usando a tecnologia disponível atu-

almente. No entanto, a transmissão dos estados quânticos preparados na base $\{|g\rangle|1\rangle, |e\rangle|0\rangle\}$ é mais suscetível à presença do reservatório, o que exige maior atenção nos valores das taxas de dissipação.

Perspectivas futuras: Na próxima etapa deste trabalho pretendemos incluir manipulações externas no sistema envolvendo íons aprisionados, como a utilização de um campo externo ou a passagem de átomos nas cavidades, para analisar a possibilidade de gerar estados maximamente emaranhados entre os íons.

Também estamos considerando a extensão deste modelo para uma rede quântica formada por íons aprisionados, cavidades e fibras ópticas [51, 50]. Neste caso estudaremos a comunicação quântica entre íons localizados em diferentes nodos e sua confiabilidade sob a influência do ambiente.

Apêndice A

Equação mestra e operador densidade reduzido na transmissão dos estados de dois qubits

Neste apêndice apresentaremos o procedimento para obter numericamente a solução da equação mestra durante a transferência dos estados de dois qubits (seção 5.3):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) = & -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_I, \rho(t)] + \sum_{i=1,2} \left[\frac{\chi}{2} \left(2\hat{a}_i\rho(t)\hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\rho(t) - \rho(t)\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i \right) \right. \\ & \left. + \frac{\kappa}{2} (2\sigma_{i-}\rho(t)\sigma_{i+} - \sigma_{i+}\sigma_{i-}\rho(t) - \rho(t)\sigma_{i+}\sigma_{i-}) \right] \\ & + \frac{\gamma}{2} \left(2\hat{d}_3\rho(t)\hat{d}_3^\dagger - \hat{d}_3^\dagger\hat{d}_3\rho(t) - \rho(t)\hat{d}_3^\dagger\hat{d}_3 \right), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Os elementos de matriz serão dados na base formada pelos autoestados do Hamiltoniano livre de cada subsistema e são representados pela seguinte notação:

$$M_{i'j',k',l',m'}^{ij,k,l,m} = \langle i|_1 \langle j|_2 \langle k|_{a1} \langle l|_{a2} \langle m|_{d3} \rho(t) |i'\rangle_1 |j'\rangle_2 |k'\rangle_{a1} |l'\rangle_{a2} |m'\rangle_{d3}; \quad (\text{A.2})$$

onde $k, l, m, k', l', m' = 0, 1, 2, 3, \dots$ e $i, j, i'j' = g, e$.

A.1 Banda Lateral Azul

Neste regime consideramos a dissipação quando o estado inicial do sistema é dado por:

$$|\Psi_0\rangle = [\cos\theta |g\rangle_1 |0\rangle_{a1} + e^{i\varphi} \sin\theta |e\rangle_1 |1\rangle_{a1}] |0\rangle_{b1} |0\rangle_c |0\rangle_{b2} |g\rangle_2 |0\rangle_{a2}. \quad (\text{A.3})$$

Logo, os elementos de matriz não nulos em $t = 0$ são:

$$\begin{aligned} M_{gg,0,0,0}^{gg,0,0,0}(0) &= \cos^2\theta; & M_{gg,0,0,0}^{eg,1,0,0}(0) &= e^{-i\varphi} \sin\theta \cos\theta; \\ M_{eg,1,0,0}^{gg,0,0,0}(0) &= e^{i\varphi} \sin\theta \cos\theta; & M_{eg,1,0,0}^{eg,1,0,0}(0) &= \sin^2\theta; \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Equação Mestra

Projetando a equação mestra na base $\{|i'\rangle_1 |j'\rangle_2 |k'\rangle_{a1} |l'\rangle_{a2} |m'\rangle_{d3}\}$ e considerando a condição inicial (A.4), podemos observar que as equações diferenciais que definem a evolução temporal dos elementos de matriz relevantes ao problema podem ser separadas em quatro conjuntos:

Conjunto I:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_{eg,1,0,0}^{gg,0,0,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,0}(t) - \frac{(\kappa + \gamma)}{2} M_{eg,1,0,0}^{gg,0,0,0}(t); \\ \frac{d}{dt} M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{eg,1,0,0}^{gg,0,0,0}(t) - M_{ge,0,1,0}^{gg,0,0,0}(t)] - \frac{\gamma}{2} M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,0}(t); \\ \frac{d}{dt} M_{ge,0,1,0}^{gg,0,0,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,0}(t) - \frac{(\kappa + \gamma)}{2} M_{ge,0,1,0}^{gg,0,0,0}(t), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Conjunto II:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_{gg,0,0,0}^{eg,1,0,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,0}(t) - \frac{(\kappa + \gamma)}{2} M_{gg,0,0,0}^{eg,1,0,0}(t); \\ \frac{d}{dt} M_{gg,0,0,0}^{gg,0,0,1}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{gg,0,0,0}^{eg,1,0,0}(t) - M_{gg,0,0,0}^{ge,0,1,0}(t)] - \frac{\gamma}{2} M_{gg,0,0,0}^{gg,0,0,1}(t); \\ \frac{d}{dt} M_{gg,0,0,0}^{ge,0,1,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,0}(t) - \frac{(\kappa + \gamma)}{2} M_{gg,0,0,0}^{ge,0,1,0}(t), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Conjunto III:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,1}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{gg,0,0,1}^{ge,0,1,0}(t) - M_{gg,0,0,1}^{eg,1,0,0}(t) - M_{ge,0,1,0}^{gg,0,0,1}(t) + M_{eg,1,0,0}^{gg,0,0,1}(t)] - \gamma M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,1}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{eg,1,0,0}^{eg,1,0,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{gg,0,0,1}^{eg,1,0,0}(t) - M_{eg,1,0,0}^{gg,0,0,1}(t)] - (\kappa + \chi) M_{eg,1,0,0}^{eg,1,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{eg,1,0,0}^{gg,0,0,1}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{eg,1,0,0}^{eg,1,0,0}(t) - M_{eg,1,0,0}^{ge,0,1,0}(t) - M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,1}(t)] - \frac{\kappa + \chi + \gamma}{2} M_{eg,1,0,0}^{gg,0,0,1}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{gg,0,0,1}^{eg,1,0,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{eg,1,0,0}^{eg,1,0,0}(t) - M_{ge,0,1,0}^{eg,1,0,0}(t) - M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,1}(t)] - \frac{\kappa + \chi + \gamma}{2} M_{gg,0,0,1}^{eg,1,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{eg,1,0,0}^{ge,0,1,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{eg,1,0,0}^{gg,0,0,1}(t) + M_{gg,0,0,1}^{ge,0,1,0}(t)] - (\kappa + \chi) M_{eg,1,0,0}^{ge,0,1,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{ge,0,1,0}^{eg,1,0,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{gg,0,0,1}^{eg,1,0,0}(t) + M_{ge,0,1,0}^{gg,0,0,1}(t)] - (\kappa + \chi) M_{ge,0,1,0}^{eg,1,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{gg,0,0,1}^{ge,0,1,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{ge,0,1,0}^{ge,0,1,0}(t) - M_{eg,1,0,0}^{ge,0,1,0}(t) - M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,1}(t)] - \frac{\kappa + \chi + \gamma}{2} M_{gg,0,0,1}^{ge,0,1,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{ge,0,1,0}^{gg,0,0,1}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{ge,0,1,0}^{ge,0,1,0}(t) - M_{eg,1,0,0}^{eg,1,0,0}(t) - M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,1}(t)] - \frac{\kappa + \chi + \gamma}{2} M_{ge,0,1,0}^{gg,0,0,1}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{ge,0,1,0}^{ge,0,1,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,1}(t) - M_{gg,0,0,1}^{ge,0,1,0}(t)] - (\kappa + \chi) M_{ge,0,1,0}^{ge,0,1,0}(t); \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Conjunto IV:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} M_{eg,0,0,0}^{eg,0,0,0}(t) &= -\kappa M_{eg,0,0,0}^{eg,0,0,0}(t) + \chi M_{eg,1,0,0}^{eg,1,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{gg,1,0,0}^{gg,1,0,0}(t) &= -\chi M_{gg,1,0,0}^{gg,1,0,0}(t) + \kappa M_{eg,1,0,0}^{eg,1,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{ge,0,0,0}^{ge,0,0,0}(t) &= -\kappa M_{ge,0,0,0}^{ge,0,0,0}(t) + \chi M_{ge,0,1,0}^{ge,0,1,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{gg,0,1,0}^{gg,0,1,0}(t) &= -\chi M_{gg,0,1,0}^{gg,0,1,0}(t) + \kappa M_{ge,0,1,0}^{ge,0,1,0}(t), \tag{A.8}
\end{aligned}$$

E, por último, temos o elemento de matriz do estado fundamental, definido pela equação:

$$\begin{aligned}
M_{gg,0,0,0}^{gg,0,0,0}(t) &= \int_0^t dt' \{ \kappa [M_{eg,0,0,0}^{eg,0,0,0}(t') + M_{ge,0,0,0}^{ge,0,0,0}(t')] + \chi [M_{gg,1,0,0}^{gg,1,0,0}(t') + M_{gg,0,1,0}^{gg,0,1,0}(t')] \\
&\quad + \gamma M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,1}(t') \} + M_{gg,0,0,0}^{gg,0,0,0}(0), \tag{A.9}
\end{aligned}$$

As equações nos Conjuntos I à III formam conjuntos de equações diferenciais ordinárias a coeficientes constantes. Cada conjunto de equações pode ser resolvido se escrevermos na forma matricial:

$$\frac{d}{dt}\vec{M}(t) = \mathbf{B}\vec{M}(t); \quad (\text{A.10})$$

onde \vec{M} é um vetor contendo os elementos de matriz $M_{i'j',k',l',m'}^{ij,k,l,m}$ de cada grupo e \mathbf{B} é a matriz de coeficientes.

A matriz \mathbf{B} é diagonalizável, logo a solução de (A.10) pode ser escrita em função de seu valores iniciais:

$$\vec{M}(t) = \text{Exp}[\mathbf{B}t]\vec{M}(0), \quad (\text{A.11})$$

Com isso podemos programar uma rotina para resolver numericamente os Conjuntos I à III. Uma vez montado esta rotina também podemos programar uma rotina para resolver as equações do Conjunto IV e o elemento de Matriz $M_{gg,0,0,0}^{gg,0,0,0}(t)$, cuja solução depende dos conjuntos I à III.

Operador Densidade Reduzido do segundo íon

Uma vez obtido a solução da equação mestra, nós determinamos o operador densidade reduzido do íon 2, definido como o traço parcial sobre as variáveis do modo do campo d_3 , o modo de movimento a_1 e os níveis internos do íon 1:

$$\rho_2(\tau) = \text{Tr}_{a_1} \{ \text{Tr}_{d_3} \{ \text{Tr}_{d_3} \{ \rho(\tau) \} \} \}, \quad (\text{A.12})$$

O operador reduzido $\rho_2(\tau)$ pode ser descrito pelos elementos de matriz abaixo:

$$P_{i'k'}^{ik}(\tau) = \langle i|_2 \langle k|_{a_2} \rho_2(\tau) |i'\rangle_2 |k'\rangle_{a_2}. \quad (\text{A.13})$$

onde $k, k' = 0, 1, 2, 3, \dots$ e $i, i' = g, e$.

Em função dos elementos de matriz da solução da equação mestra, os elementos não nulos de $\rho_2(\tau)$ são dados por:

$$\begin{aligned} P_{e0}^{e0}(\tau) &= M_{ge,0,0,0}^{ge,0,0,0}(\tau); & P_{e1}^{g0}(\tau) &= M_{ge,0,1,0}^{gg,0,0,0}(\tau); & P_{g0}^{e1}(\tau) &= M_{gg,0,0,0}^{ge,0,1,0}(\tau); \\ P_{e1}^{e1}(\tau) &= M_{ge,0,1,0}^{ge,0,1,0}(\tau); & P_{g1}^{g1}(\tau) &= M_{gg,0,1,0}^{gg,0,1,0}(\tau); \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} P_{g0}^{g0}(\tau) &= M_{gg,0,0,0}^{gg,0,0,0}(\tau) + M_{eg,0,0,0}^{eg,0,0,0}(\tau) + M_{gg,1,0,0}^{gg,1,0,0}(\tau) + M_{eg,1,0,0}^{eg,1,0,0}(\tau) \\ &+ M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,1}(\tau); \end{aligned}$$

A.2 Banda Lateral Vermelha

No caso da banda lateral vermelha com o sistema preparado no estado inicial:

$$|\Psi_1\rangle = [\cos\theta |g\rangle_1 |1\rangle_{a1} + e^{i\varphi} \sin\theta |e\rangle_1 |0\rangle_{a1}] |0\rangle_{b1} |0\rangle_c |0\rangle_{b2} |g\rangle_2 |1\rangle_{a2}, \quad (\text{A.15})$$

os elementos de matriz não nulos em $t = 0$ são:

$$\begin{aligned} M_{gg,1,1,0}^{gg,1,1,0}(0) &= \cos^2\theta; & M_{gg,1,1,0}^{eg,0,1,0}(0) &= e^{-i\varphi} \sin\theta \cos\theta; \\ M_{eg,0,1,0}^{gg,1,1,0}(0) &= e^{i\varphi} \sin\theta \cos\theta; & M_{eg,0,1,0}^{eg,0,1,0}(0) &= \sin^2\theta; \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Equação Mestra

Considerando a condição inicial (A.15) e projetando a equação mestra na base de autoestados do Hamiltoniano livre, obtemos os seguintes conjuntos de equações:

Conjunto I:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_{eg,0,1,0}^{gg,1,1,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,1,1,1}^{gg,1,1,0}(t) - \frac{(\kappa + 3\chi)}{2} M_{eg,0,1,0}^{gg,1,1,0}(t); \\ \frac{d}{dt} M_{gg,1,1,1}^{gg,1,1,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{eg,0,1,0}^{gg,1,1,0}(t) - M_{ge,1,0,0}^{gg,1,1,0}(t)] - \frac{4\chi + \gamma}{2} M_{gg,1,1,1}^{gg,1,1,0}(t); \\ \frac{d}{dt} M_{ge,1,0,0}^{gg,1,1,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,1,1,1}^{gg,1,1,0}(t) - \frac{(\kappa + 3\chi)}{2} M_{ge,1,0,0}^{gg,1,1,0}(t), \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Conjunto II:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_{gg,1,1,0}^{eg,0,1,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,1,1,1}^{gg,1,1,0}(t) - \frac{(\kappa + 3\chi)}{2} M_{gg,1,1,0}^{eg,0,1,0}(t); \\ \frac{d}{dt} M_{gg,1,1,1}^{eg,0,1,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{gg,1,1,0}^{eg,0,1,0}(t) - M_{gg,1,1,0}^{ge,1,0,0}(t)] - \frac{(4\chi + \gamma)}{2} M_{gg,1,1,1}^{eg,0,1,0}(t); \\ \frac{d}{dt} M_{gg,1,1,0}^{ge,1,0,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,1,1,1}^{gg,1,1,0}(t) - \frac{(\kappa + 3\chi)}{2} M_{gg,1,1,0}^{ge,1,0,0}(t), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Conjunto III:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} M_{eg,0,1,0}^{eg,0,1,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{gg,1,1,1}^{eg,0,1,0}(t) - M_{eg,0,1,0}^{gg,1,1,1}(t)] - (\kappa + \chi) M_{eg,1,0,0}^{eg,1,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{eg,0,1,0}^{gg,1,1,1}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{eg,0,1,0}^{eg,0,1,0}(t) - M_{eg,0,1,0}^{ge,1,0,0}(t) - M_{gg,1,1,1}^{gg,1,1,1}(t)] - \frac{\kappa + 3\chi + \gamma}{2} M_{eg,0,1,0}^{gg,1,1,1}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{gg,1,1,1}^{eg,0,1,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{eg,0,1,0}^{eg,0,1,0}(t) - M_{ge,1,0,0}^{eg,0,1,0}(t) - M_{gg,1,1,1}^{gg,1,1,1}(t)] - \frac{\kappa + 3\chi + \gamma}{2} M_{gg,1,1,1}^{eg,0,1,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{eg,0,1,0}^{ge,1,0,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{eg,0,1,0}^{gg,1,1,1}(t) + M_{gg,1,1,1}^{ge,1,0,0}(t)] - (\kappa + \chi) M_{eg,0,1,0}^{ge,1,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{ge,1,0,0}^{eg,0,1,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{gg,1,1,1}^{eg,0,1,0}(t) + M_{ge,1,0,0}^{gg,1,1,1}(t)] - (\kappa + \chi) M_{ge,1,0,0}^{eg,0,1,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{gg,1,1,1}^{ge,1,0,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{ge,1,0,0}^{ge,1,0,0}(t) - M_{eg,0,1,0}^{ge,1,0,0}(t) - M_{gg,1,1,1}^{gg,1,1,1}(t)] - \frac{\kappa + 3\chi + \gamma}{2} M_{gg,1,1,1}^{ge,1,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{ge,1,0,0}^{gg,1,1,1}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{ge,1,0,0}^{ge,1,0,0}(t) - M_{ge,1,0,0}^{eg,0,1,0}(t) - M_{gg,1,1,1}^{gg,1,1,1}(t)] - \frac{\kappa + 3\chi + \gamma}{2} M_{ge,1,0,0}^{gg,1,1,1}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{ge,1,0,0}^{gg,1,1,1}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{gg,1,1,1}^{gg,1,1,1}(t) - M_{gg,1,1,1}^{ge,1,0,0}(t)] - (\kappa + \chi) M_{ge,1,0,0}^{gg,1,1,1}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{gg,1,1,1}^{gg,1,1,1}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{gg,1,1,1}^{ge,1,0,0}(t) - M_{gg,1,1,1}^{eg,0,1,0}(t) - M_{ge,1,0,0}^{gg,1,1,1}(t) + M_{eg,0,1,0}^{gg,1,1,1}(t)] \\
&\quad - (2\chi + \gamma) M_{gg,1,1,1}^{gg,1,1,1}(t), \tag{A.19}
\end{aligned}$$

Conjunto IV:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} M_{gg,1,0,1}^{gg,1,0,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{eg,0,0,0}^{gg,1,0,0}(t) + \chi M_{gg,1,1,1}^{gg,1,1,0}(t) - \frac{(2\chi + \gamma)}{2} M_{gg,1,0,1}^{gg,1,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{eg,0,0,0}^{gg,1,0,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,1,0,1}^{gg,1,0,0}(t) + \chi M_{eg,0,1,0}^{gg,1,1,0}(t) - \frac{(\kappa + \chi)}{2} M_{eg,0,0,0}^{gg,1,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{gg,0,1,1}^{gg,0,1,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{ge,0,0,0}^{gg,0,1,0}(t) + \chi M_{gg,1,1,1}^{gg,1,1,0}(t) - \frac{(2\chi + \gamma)}{2} M_{gg,0,1,1}^{gg,0,1,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{ge,0,0,0}^{gg,0,1,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,0,1,1}^{gg,0,1,0}(t) + \chi M_{ge,1,0,0}^{gg,1,1,0}(t) - \frac{(\kappa + \chi)}{2} M_{ge,0,0,0}^{gg,0,1,0}(t), \tag{A.20}
\end{aligned}$$

Conjunto V:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} M_{gg,1,0,0}^{gg,1,0,1}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,1,0,0}^{eg,0,0,0}(t) + \chi M_{gg,1,1,0}^{gg,1,1,1}(t) - \frac{(2\chi + \gamma)}{2} M_{gg,1,0,0}^{gg,1,0,1}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{gg,1,0,0}^{eg,0,0,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,1,0,0}^{gg,1,0,1}(t) + \chi M_{gg,1,1,0}^{eg,0,1,0}(t) - \frac{(\kappa + \chi)}{2} M_{gg,1,0,0}^{eg,0,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{gg,0,1,0}^{gg,0,1,1}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,0,1,0}^{ge,0,0,0}(t) + \chi M_{gg,1,1,0}^{gg,1,1,1}(t) - \frac{(2\chi + \gamma)}{2} M_{gg,0,1,0}^{gg,0,1,1}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{gg,0,1,0}^{ge,0,0,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,0,1,0}^{gg,0,1,1}(t) + \chi M_{gg,1,1,0}^{ge,1,0,0}(t) - \frac{(\kappa + \chi)}{2} M_{gg,0,1,0}^{ge,0,0,0}(t), \quad (\text{A.21})
\end{aligned}$$

Conjunto VI:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} M_{gg,1,0,0}^{gg,1,0,1}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,1,0,0}^{eg,0,0,0}(t) + \chi M_{gg,1,1,0}^{gg,1,1,1}(t) - \frac{(2\chi + \gamma)}{2} M_{gg,1,0,0}^{gg,1,0,1}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{gg,1,0,0}^{eg,0,0,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,1,0,0}^{gg,1,0,1}(t) + \chi M_{gg,1,1,0}^{eg,0,1,0}(t) - \frac{(\kappa + \chi)}{2} M_{gg,1,0,0}^{eg,0,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{gg,0,1,0}^{gg,0,1,1}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,0,1,0}^{ge,0,0,0}(t) + \chi M_{gg,1,1,0}^{gg,1,1,1}(t) - \frac{(2\chi + \gamma)}{2} M_{gg,0,1,0}^{gg,0,1,1}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{gg,0,1,0}^{ge,0,0,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} M_{gg,0,1,0}^{gg,0,1,1}(t) + \chi M_{gg,1,1,0}^{ge,1,0,0}(t) - \frac{(\kappa + \chi)}{2} M_{gg,0,1,0}^{ge,0,0,0}(t), \quad (\text{A.22})
\end{aligned}$$

Conjunto VII:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} M_{gg,0,1,1}^{gg,0,1,1}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{gg,0,1,1}^{ge,0,0,0}(t) - M_{ge,0,0,0}^{gg,0,1,1}(t)] + \chi M_{gg,1,1,1}^{gg,1,1,1}(t) - (\chi + \gamma) M_{gg,0,1,1}^{gg,0,1,1}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{gg,0,1,1}^{ge,0,0,0}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{ge,0,0,0}^{ge,0,0,0}(t) - M_{gg,0,1,1}^{gg,0,1,1}(t)] + \chi M_{gg,1,1,1}^{ge,1,0,0}(t) - \frac{\kappa + \chi + \gamma}{2} M_{gg,0,1,1}^{ge,0,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{ge,0,0,0}^{gg,0,1,1}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{ge,0,0,0}^{ge,0,0,0}(t) - M_{gg,0,1,1}^{gg,0,1,1}(t)] + \chi M_{ge,1,0,0}^{gg,1,1,1}(t) - \frac{\kappa + \chi + \gamma}{2} M_{ge,0,0,0}^{gg,0,1,1}(t); \\
\frac{d}{dt} M_{ge,0,0,0}^{ge,0,0,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{ge,0,0,0}^{gg,0,1,1}(t) - M_{gg,0,1,1}^{ge,0,0,0}(t)] + \chi M_{ge,1,0,0}^{ge,1,0,0}(t) - \kappa M_{ge,0,0,0}^{ge,0,0,0}(t), \quad (\text{A.23})
\end{aligned}$$

Conjunto VIII:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}M_{gg,1,0,1}^{gg,1,0,1}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{gg,1,0,1}^{eg,0,0,0}(t) - M_{eg,0,0,0}^{gg,1,0,1}(t)] + \chi M_{gg,1,1,1}^{gg,1,1,1}(t) - (\chi + \gamma) M_{gg,1,0,1}^{gg,1,0,1}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{gg,1,0,1}^{eg,0,0,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{eg,0,0,0}^{eg,0,0,0}(t) - M_{gg,1,0,1}^{gg,1,0,1}(t)] + \chi M_{gg,1,1,1}^{eg,0,1,0}(t) - \frac{\kappa + \chi + \gamma}{2} M_{gg,1,0,1}^{eg,0,0,0}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{eg,0,0,0}^{gg,1,0,1}(t) &= -\frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{eg,0,0,0}^{eg,0,0,0}(t) - M_{gg,1,0,1}^{gg,1,0,1}(t)] + \chi M_{eg,0,1,0}^{gg,1,1,1}(t) - \frac{\kappa + \chi + \gamma}{2} M_{eg,0,0,0}^{gg,1,0,1}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{eg,0,0,0}^{eg,0,0,0}(t) &= \frac{i\eta g}{\sqrt{2}} [M_{gg,1,0,1}^{eg,0,0,0}(t) - M_{eg,0,0,0}^{gg,1,0,1}(t)] + \chi M_{eg,0,1,0}^{eg,0,1,0}(t) - \kappa M_{eg,0,0,0}^{eg,0,0,0}(t), \quad (\text{A.24})
\end{aligned}$$

Conjunto IX:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}M_{gg,1,1,0}^{gg,1,1,0}(t) &= -2\chi M_{gg,1,1,0}^{gg,1,1,0}(t) + \gamma M_{gg,1,1,1}^{gg,1,1,1}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{gg,0,0,0}^{gg,0,0,1}(t) &= -\frac{\gamma}{2} M_{gg,0,0,0}^{gg,0,0,1}(t) + \chi [M_{gg,1,0,0}^{gg,1,0,1}(t) + M_{gg,0,1,0}^{gg,0,1,1}(t)]; \\
\frac{d}{dt}M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,0}(t) &= -\frac{\gamma}{2} M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,0}(t) + \chi [M_{gg,1,0,1}^{gg,1,0,0}(t) + M_{gg,0,1,1}^{gg,0,1,0}(t)]; \\
\frac{d}{dt}M_{gg,1,0,0}^{gg,1,0,0}(t) &= -\chi M_{gg,1,0,0}^{gg,1,0,0}(t) + \kappa M_{ge,1,0,0}^{ge,1,0,0}(t) + \chi M_{gg,1,1,0}^{gg,1,1,0}(t) + \gamma M_{gg,1,0,1}^{gg,1,0,1}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{gg,0,1,0}^{gg,0,1,0}(t) &= -\chi M_{gg,0,1,0}^{gg,0,1,0}(t) + \kappa M_{eg,0,1,0}^{eg,0,1,0}(t) + \chi M_{gg,1,1,0}^{gg,1,1,0}(t) + \gamma M_{gg,0,1,1}^{gg,0,1,1}(t); \\
\frac{d}{dt}M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,1}(t) &= -\gamma M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,1}(t) + \chi [M_{gg,1,0,1}^{gg,1,0,1}(t) + M_{gg,0,1,1}^{gg,0,1,1}(t)], \quad (\text{A.25})
\end{aligned}$$

E também temos:

$$\begin{aligned}
M_{gg,0,0,0}^{gg,0,0,0}(t) &= \int_0^t dt' \{ \kappa [M_{eg,0,0,0}^{eg,0,0,0}(t') + M_{ge,0,0,0}^{ge,0,0,0}(t')] + \chi [M_{gg,1,0,0}^{gg,1,0,0}(t') + M_{gg,0,1,0}^{gg,0,1,0}(t')] \\
&\quad + \gamma M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,1}(t') \} + M_{gg,0,0,0}^{gg,0,0,0}(0). \quad (\text{A.26})
\end{aligned}$$

Os conjuntos de equações nos Conjuntos I à III são resolvidos da mesma forma que na Banda Lateral Azul, escrevendo as equações na forma matricial. Após obter a solução destes casos, os outros Conjuntos de equações podem ser resolvidos numericamente.

Operador Densidade Reduzido do segundo íon

O procedimento adotado aqui é o mesmo utilizado na banda lateral azul, de onde obtemos que:

$$\begin{aligned}
 P_{e0}^{e0}(\tau) &= M_{ge,0,0,0}^{ge,0,0,0}(\tau) + M_{ge,1,0,0}^{ge,1,0,0}(\tau); \\
 P_{g1}^{e0}(\tau) &= M_{gg,0,1,0}^{ge,0,0,0}(\tau) + M_{gg,1,1,0}^{ge,1,0,0}(\tau); \\
 P_{e0}^{g1}(\tau) &= M_{ge,0,0,0}^{gg,0,1,0}(\tau) + M_{ge,1,0,0}^{gg,1,1,0}(\tau); \\
 P_{g0}^{g0}(\tau) &= M_{gg,0,0,0}^{gg,0,0,0}(\tau) + M_{eg,0,0,0}^{eg,0,0,0}(\tau) + M_{gg,1,0,0}^{gg,1,0,0}(\tau) + M_{gg,1,0,1}^{gg,1,0,1}(\tau) \\
 &+ M_{gg,0,0,1}^{gg,0,0,1}(\tau); \\
 P_{g1}^{g1}(\tau) &= M_{gg,0,1,0}^{gg,0,1,0}(\tau) + M_{gg,1,1,0}^{gg,1,1,0}(\tau) + M_{gg,0,1,1}^{gg,0,1,1}(\tau) + M_{gg,1,1,1}^{gg,1,1,1}(\tau) \\
 &+ M_{eg,0,1,0}^{eg,0,1,0}(\tau).
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

Bibliografia

- [1] A. Steane, *Quantum computing*, Rep. Prog. Phys.**61**, 117 (1998).
- [2] D. Bouwmeester, A. Ekert and A. Zeilinger, *The Physics of Quantum Information: Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computation*, Ed. Springer (2000).
- [3] E. Jané, M.B. Plenio and D. Jonathan, *Quantum-information processing in strongly detuned optical cavities*, Phys. Rev. **A65**, 050302 (2002).
- [4] F. Yamaguchi, P. Milman, M. Brune, J.M. Raimond and S. Haroche, *Quantum search with two-atom collisions in cavity QED*, Phys. Rev. **A66**, 010302 (2002).
- [5] J.A. Roversi, A. Viddiella-Barranco and H. Moya-Cessa, *Dynamics of two atoms coupled to a cavity field*, Mod.Phys.Lett. B **17** 219 (2003).
- [6] R. Lo Franco, G. Compagno, A. Messina, A. Napoli, *Bell's inequality for entangled generalized Bernoulli states in two spatially separate cavities*, quant-ph/0507277 (2005).
- [7] Guo-Ping Guo, Chuan-Feng Li, Jian Li e Guang-Can Guo, *Scheme for the preparation of multiparticle entanglement in cavity QED*, Phys. Rev. **A65**, 042102 (2002).
- [8] J.I. Cirac, P. Zoller, *A scalable quantum computer with ions in a array of microtraps*, Nature **404**, 579 (2000).
- [9] F.L. Semião, A. Vidiella-Barranco and J.A. Roversi, *Entanglement between motional states of a single trapped ion and light*, Phys.Rev **A64**, 024305 (2001).
- [10] A.B. Mundt, A. Kreuter, C. Becher, D. Leibfried, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler and R. Blatt, *Coupling a single atomic quantum bit to a high finesse optical cavity*, Phys. Rev. Lett. **89**, 103001 (2002).

- [11] A.B. Mundt, A. Kreuter, C. Russo, C. Becher, D. Leibfried, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler and R. Blatt, *Coherent coupling of a single Ca ion to a high finesse optical cavity*, Appl. Phys. B **76**, 117 (2003).
- [12] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres and W.K. Wootters, *Teleporting a Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [13] Jaeyoon Cho and Hai-Woong Lee, *Quantum teleportation with atoms trapped in cavities*, Phys. Rev. **A70**, 034305 (2004).
- [14] J.I. Cirac, P. Zoller, H.J. Kimble and M. Mabuchi, *Quantum State Transfer and Entanglement Distribution among Distant Nodes in a Quantum Network*, Phys. Rev. Lett. **78**, 3221 (1997).
- [15] A. Serafini, Stefano Mancini and Sougato Bose, *Distributed Quantum Computation via Optical Fibers*, Phys. Rev. Lett. **96**, 010503 (2006).
- [16] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe and D. Wineland, *Quantum dynamics of single trapped ions*, Rev. Mod. Phys. **75**, 281 (2003).
- [17] H. Zoubi, M. Orenstein and A. Ron, *Coupled microcavities with dissipation*, Phys. Rev. **A62**, 033801 (2000).
- [18] T. Pellizzari, *Quantum network with optical fibers*, Phys. Rev. Lett. **79**, 5242 (1997).
- [19] J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison Wesley, New York (1967).
- [20] M.O. Scully and M.S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [21] C.H. Bennett, H.J. Bernstein, S. Popescu and B. Schumacher *Concentrating partial entanglement by local operations* Phys. Rev. **A53**, 2046 (1996).
- [22] C.H. Bennett, D.P. diVincenzo, J. Smolin and W.K. Wootters, *Mixed-state entanglement and quantum error correction* Phys. Rev. **A54**, 3824 (1996).
- [23] W. K. Wootters, *Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
- [24] A. Peres, *Separability Criterion for Density Matrices*, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).

- [25] G. Vidal e R.F. Werner, *Computable measure of entanglement*, Phys. Rev. **A65**, 032314 (2002).
- [26] H.J. Carmichael, *Lectures Notes in Physics: An Open System aproach to Quantum Optics*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg (1993).
- [27] N.W. Ashcroft and N.D. Mermin, *Solid State Physics*, Saunders, Philadelphia,Pa. (1976).
- [28] A. Luis and L.L. Sánchez-Soto, *Atom-field resonant interaction without dissipation*, Phys. Lett. A **252**, 130 (1999).
- [29] M. J. Hartmann, F. G. S. L. Brandão and M. B. Plenio, *Strongly interacting polaritons in coupled arrays of cavities*, Nature Physics**2**, 849 (2006)
- [30] M.A. de Ponte, M.C. de Oliveira, M.H.Y. Moussa, *Decoherence in strongly coupled quantum oscillators*, quant-ph/0309082 (2003).
- [31] G.T. Nogueira, *Dinâmica de um sistema átomo - campo eletromagnético acoplado a uma segunda cavidade*, Tese de Mestrado, UNICAMP (2001).
- [32] Zhang-qi Yin and Fu-li Li, *Multiatom and resonant interaction scheme for quantum state transfer and logical gates between two remote cavities via an optical fiber*, Phys. Rev. A. **75**, 012324 (2007).
- [33] J.M. Raimond, T. Meunier, P. Bertet, S. Gleyzes, P. Maioli, A. Auffeves, G. Nogues, M. Brune and S. Haroche, *Probing a quantum field in a photon box*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **38**, S535 (2005).
- [34] R.P. Stanley, R.Houdré, U. Oesterle and M. Ilegems, *Coupled Semiconductor microcavities*, Appl. Phys. Lett. **65**, 2093 (1994).
- [35] S. Eriksson, M. Trupke, H.F. Powell, D. Sahagun, C.D.J. Sinclair, E.A. Curtis, B.E. Sauer, E.A. Hinds, Z. Moktadir, C.O. Gollasch and M. Kraft, *Integrated optical components on atom chips*, Eur. Phys. J. D, **35**, 135 (2005).
- [36] K.J. Vahala, *Optical microcavities*, Nature **424**, 839 (2003)
- [37] S. M. Spillane, T. J. Kippenberg, O. J. Painter, and K. J. Vahala, *Ideality in a Fiber-Taper-Coupled Microresonator System for Application to Cavity Quantum Electrodynamics*, Phys. Rev. Lett. **91**, 043902 (2003).

- [38] I. Hwang, G. Kim and Y. Lee *Optimization of coupling between photonic crystal resonator and curve microfiber*, IEE J. of Quantum Electronics, vol, **42**, 132 (2006)
- [39] F.K. Nohama and J.A. Roversi, *Quantum State Transfer between atoms located in coupled optical cavities*, J. Mod. Opt. **54**, 1139 (2007).
- [40] C.H. Bennett, D.P. DiVincenzo, J.A. Smolin and W.K. Wootters, *Mixed-state entanglement and quantum error correction*, Phys. Rev. **A54**, 3824 (1996).
- [41] A.Messina, *A single atom-based generation of Bell states of two cavities*, Eur. Phys. J. D **18**, 379 (2002).
- [42] B.F.C. Yabu-uti, *Emaranhamento quântico entre átomos localizados em cavidades distintas*, Tese de Mestrado, UNICAMP (2001).
- [43] C.C. Gerry, *Nonlocality of a single photon in cavity QED*, Phys. Rev. A. **53**, 4583 (1996).
- [44] S. M. Spillane, T. J. Kippenberg, O. J. Painter, and K. J. Vahala, *Ultrahigh-Q toroidal microresonators for cavity quantum electrodynamics*, Phys. Rev. **A71**, 013817 (2005).
- [45] F.K. Nohama and J.A. Roversi, *Two-qubit state transfer between trapped ions using electromagnetic cavities coupled by an optical fiber*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **41** 045503 (2008).
- [46] Ch. Roos, Th. Zeiger, H. Rohde, H.C. Nägerl, J. Eschner, D. Leibfried, F. Schmidt-Kaler and R. Blatt, *Quantum State Engineering on an Optical Transition and Decoherence in a Paul Trap*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4713 (1999).
- [47] A.A. Budini, R.L. de Matos Filho and N. Zagury, *Localization and dispersive like decoherence in vibronic states of a trapped ion*, Phys. Rev. A. **65**, 41402 (2002).
- [48] M. Muraio and P.L. Knight, *Decoherence in nonclassical motional states of a trapped ion*, Phys. Rev. A. **58**, 663 (1998).
- [49] W. Yao, Ren-Bao Liu, and L.J. Sham, J. Opt. B: Quant. Semiclass. Optics **7**, S318 (2005).
- [50] W. Yao, Ren-Bao Liu, and L.J. Sham, Phys. Rev. Lett. **95**, 030504 (2005).

- [51] F.L. Semião and K. Furuya, *Entanglement in the dispersive interaction of trapped ions with a quantized field*, Phys.Rev **A75**, 042315 (2007).