

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Física Gleb Wataghin

Thales Figueiredo Roque

**CORRELAÇÕES QUÂNTICAS ENTRE
DOIS OSCILADORES CONECTADOS POR
UM ACOPLAMENTO DEPENDENTE DO
TEMPO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESEN-
TADA AO INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WA-
TAGHIN DA UNICAMP PARA OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE MESTRE EM FÍSICA.

Orientador:

Prof. Dr. José Antonio Roversi

Departamento de Eletrônica Quântica

Grupo de Ótica Quântica

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação de mestrado defendida pelo aluno Thales Figueiredo Roque e orientada pelo prof. Dr. José A. Roversi.

José A. Roversi

CAMPINAS, 2012

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
VALKÍRIA SUCCI VICENTE – CRB8/5398 - BIBLIOTECA DO IFGW
UNICAMP**

R685c Roque, Thales Figueiredo, 1988-
Correlações quânticas entre dois osciladores conectados
por um acoplamento dependente do tempo / Thales
Figueiredo Roque. -- Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: José Antonio Roversi.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Física “Gleb Wataghin”.

1. Correlações quânticas. 2. Emaranhamento.
3. Descoerência. I. Roversi, José Antônio, 1947-
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física “Gleb
Wataghin”. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Quantum correlations between two oscillators connected by a time-dependent coupling

Palavras-chave em inglês:

Quantum correlations

Entanglement

Decoherence

Área de Concentração: Física

Titulação: Mestre em Física

Banca Examinadora:

José Antonio Roversi [Orientador]

Celso Jorge Villas Boas

Kyoko Furuya

Data da Defesa: 09-08-2012

Programa de Pós-Graduação em: Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE
THALES FIGUEIREDO ROQUE – R.A. 064666 APRESENTADA E APROVADA AO
INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS, EM 09/08/2012.

COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. José Antonio Roversi - Orientador do Candidato
DEQ/IFGW/UNICAMP



Prof. Dr. Celso Jorge Villas Boas – DF/UFSCar



Profa. Dra. Kyoko Furuya – DFMC/IFGW/UNICAMP

Agradecimentos

Aos meus pais, Dirceu e Maria Imaculada, que sempre fizeram o possível para dar as melhores condições para mim e meus irmãos, mesmo que isso amiúde os levassem a abrir mão de suas próprias vontades.

À minha irmã Priscila e meu irmão Tieres(in memorian), cujo apoio só não superou o de nossos pais.

Aos familiares que, direta ou indiretamente, me ajudaram a chegar até aqui.

Aos amigos de João Monlevade, em especial Wander, Thiago e Fernanda, por fazerem as doze horas de viagem para casa uma troca justa.

Aos amigos de Viçosa, em especial Tuzão, Bolota, Vitim, Leita, Thiagão, Iano, Guzim e tantos outros que a falta de espaço me priva de colocar aqui, por demonstrarem experimentalmente que anos de separação são facilmente contornados com um copo de cerveja.

Ao Coluni e seus professores, em especial Duarte, Doro, Daniel e Tia Cat, por terem feito parte ativa de uma das melhores épocas de minha vida e por terem colocado Viçosa permanentemente em minhas lembranças.

Aos amigos do famigerado ColuniCamp, em especial Lucas, Mingau, Zezão, Plínio, Araponga, Fabrício, Pinguim e Hugo, que conseguiram tornar Campinas um pedacinho de Minas, seja nos churrascos, nas peladas de quinta ou nas noites de pôquer.

Aos amigos de UNICAMP, pelos motivos mais variados: Francismar pela sempre boa conversa. Pedro, Vitor, Vinícius e Camile pelas salutares discussões acadêmicas. Marcelo, Beti, Eric, César, Guilherme, Gaúcho, Adriano e Frank, pelos diversos bandejões e por sempre me ouvirem discursar a respeito da superioridade do samba se comparado ao metal.

À Amanda, por tornar meus dias mais felizes.

Ao Ximenes, por ter sido um orientador como poucos e ter me ensinado que fazer ciência é mais que um fator H.

Aos professores que, sem se dar conta, tornaram-se exemplos e mantiveram o meu entusiasmo pela física, entre eles a profa. Kyoko Furuya, o prof. Marcus Aguiar e o prof. José Antonio Brum.

Ao prof. Roversi, por ter sido sempre tão diligente nestes dois anos de mestrado.

À FAPESP e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho analisamos a dinâmica das correlações quânticas em um sistema composto por dois osciladores harmônicos em contato com um mesmo reservatório térmico e acoplados entre si com um acoplamento dependente do tempo. O reservatório térmico é modelado de acordo com o modelo de Caldeira-Leggett e tanto a abordagem via integrais de caminho quanto a abordagem via equações mestras são usadas para estudar o sistema nos regimes Markoviano e não-Markoviano. O Hamiltoniano que descreve o sistema é bilinear nos operadores de campo, isto significa que se prepararmos o sistema em um estado Gaussiano, o estado do sistema será sempre Gaussiano. Para um estado Gaussiano toda a informação sobre as correlações quânticas está contida na matriz de covariância σ . Conhecida a matriz σ podemos medir o emaranhamento usando a negatividade logarítmica e calcular uma aproximação para a discórdia quântica em estados Gaussianos, que é a discórdia Gaussiana. Nós mostramos que mesmo à temperaturas muito altas as correlações quânticas, inclusive o emaranhamento, persistem. Esta persistência tem uma relação estreita com a estabilidade do sistema. Como as correlações quânticas são a principal assinatura da mecânica quântica, isto sugere que este tipo particular de acoplamento entre os osciladores pode reduzir a descoerência, introduzida pela interação com o reservatório térmico.

Abstract

In this work we analyse the dynamics of quantum correlations in a system composed by two harmonic oscillators in contact with a common heat bath and coupled with each other by a time dependent coupling. The heat bath is modeled according to the Caldeira-Leggett model and both the path integral and the master equation approaches are used to study the system in the Markovian and in the non-Markovian regime. The Hamiltonian that describes the system is bilinear in the field operators, this means that if we prepare the system in a Gaussian state, it remains in a Gaussian state indefinitely. For a Gaussian state all the information about the quantum correlations is in the covariance matrix σ and we are able to calculate the Logarithmic Negativity as a measure of the systems' entanglement and the Gaussian discord as an approximation to the usual quantum discord, that is a measure of quantum correlations. We have shown that in some circumstances we can observe the survival of quantum correlations and entanglement, even at very high temperatures. This survival has close relationship with the stability of the system's equation of motion. As quantum correlations are the main feature of quantum mechanics, this suggests that this particular coupling between the oscillators can reduce the decoherence effects induced by the interaction with the heat bath.

Sumário

Agradecimentos	vii
Resumo	ix
Abstract	xi
1 Introdução	1
2 Sistemas Abertos	4
2.1 Dinâmica Clássica	6
2.2 Dinâmica Quântica	9
2.2.1 Abordagem via Integrais de Caminho	9
2.2.2 Abordagem via Equações Mestras	12
3 Correlações Quânticas	15
3.1 Emaranhamento Quântico	15
3.1.1 Estados emaranhados: definição	16
3.1.2 O problema da separabilidade	17
3.1.3 Medidas de emaranhamento	19
3.2 Teoria de Informação: do clássico para o quântico	22
3.3 Discórdia Quântica	26
4 Estados Gaussianos	29
4.1 Sistema de N bósons	29
4.1.1 Matriz de covariância	30
4.2 Funções Características e Funções de Quasi-Probabilidade	30
4.3 Definição e Propriedades dos Estados Gaussianos	32
4.3.1 Transformações Simpléticas	32
4.3.2 Espectro Simplético	33
4.4 Sistemas <i>Bipartite</i>	34
4.5 Correlações Quânticas em Estados Gaussianos de Dois Modos	35

5	O Sistema	40
5.1	O Oscilador Paramétrico Dissipativo Clássico	42
5.2	O Oscilador Paramétrico Quântico	44
5.3	O Oscilador Paramétrico Quântico Dissipativo	46
5.3.1	Dinâmica Markoviana	46
5.3.2	Dinâmica Não-Markoviana	52
6	Resultados	58
6.1	Regime Markoviano	58
6.1.1	Acoplamento Paramétrico	58
6.1.2	Acoplamento Forte	64
6.1.3	Acoplamento Misto	65
6.2	Regime não-Markoviano	69
7	Conclusão	76
	Anexo 1	79
	Anexo 2	85
	Bibliografia	90

Capítulo 1

Introdução

A mecânica quântica é uma teoria extremamente bem sucedida no seu propósito de descrever o mundo em que vivemos. Graças à mecânica quântica pudemos entender desde a estrutura de materiais, passando por processos bioquímicos celulares até o mecanismo de funcionamento de estrelas. Um sucesso tão formidável ao descrever os processos naturais nos leva a um questionamento notável: por que as leis da mecânica quântica são tão diferentes das leis observadas cotidianamente por nós na natureza? Se a mecânica quântica deveria ser válida em um determinado regime e a mecânica clássica em outro, o que determinaria a fronteira entre o mundo regido por uma e o mundo regido pela outra? Desde a concepção da mecânica quântica, estas questões fundamentais perturbavam os físicos. A princípio acreditava-se que as dimensões do sistema (massa, dimensões espaciais, etc) seriam parâmetros relevantes, de maneira que sempre que a ação do sistema fosse maior que \hbar , o comportamento clássico emergiria. Mais tarde essa suposição mostrou-se inadequada, uma vez que sistemas quânticos de dimensões macroscópicas foram observados. O número de graus de liberdade também foi apontado como um fator determinante, porém fenômenos como a supercondutividade e a condensação de Bose-Einstein refutam esta hipótese. Foi apenas recentemente que a divisão entre o clássico e quântico passou a se melhor compreendida a partir do que chamamos descoerência.

A descoerência, ou seja, a perda de coerência pelo sistema, é o mecanismo pelo qual o comportamento clássico emerge em um sistema quântico. Em 1932, von Neumann já havia percebido que deveria haver algum tipo de processo não-unitário que levasse uma matriz densidade que representasse um dado estado quântico em uma mistura estatística clássica. Tal processo deveria basicamente selecionar uma base preferencial para o espaço de Hilbert do sistema e anular os elementos fora da diagonal da matriz densidade nesta base. Isto seria o necessário para inibir os principais fenômenos que diferenciam a mecânica quântica da mecânica clássica, a citar, a superposição coerente de estados e as correlações quânticas, uma vez que estes dependem justamente dos elementos não-diagonais da matriz densidade.

No entanto, foi apenas em meados de 1970 que um tal mecanismo foi proposto: a interação com o ambiente. De fato, sistemas macroscópicos quase nunca estão totalmente isolados do ambiente, de maneira que não há motivo para esperar que a equação de Schroedinger seja útil em tal situação, uma vez que esta só é válida em sistema fechados. A estratégia para acomodar a descoerência no formalismo[1] da mecânica quântica consiste em modelar o sistema composto “sistema + ambiente”, desta maneira a sua dinâmica pode ser estudada via equação de Schroedinger (pois temos então um sistema fechado). Como estamos interessados na dinâmica do sistema, podemos tirar o traço parcial com relação ao sistema, e então chegaremos ao processo não-unitário idealizado por von Neumann. Tal processo acontece em uma dada escala de tempo, e o motivo de não observarmos a transição do quântico para o clássico no mundo a nossa volta se deve ao fato de que a interação com o ambiente é tão forte que esta escala de tempo é extremamente pequena.

A interação com o ambiente tem então um papel crucial no que diz respeito ao limite entre o comportamento quântico e o clássico. No entanto, como fazer para a acomodar o ambiente na descrição de um sistema quântico? A solução mais bem sucedida para este problema foi a encontrada por Senitzki[2], na qual o ambiente é modelado como um número muito grande de graus de liberdade. Baseado nesse princípio foi concebido o modelo de Caldeira-Leggett[3], onde o ambiente é modelado como um banho de osciladores harmônicos. Por meio deste modelo podemos estudar não só descoerência e dissipação em um sistema físico, mas também a influência da temperatura do banho de osciladores nesses processos. Neste contexto a relação entre temperatura e descoerência passa a ser um importante objeto de estudo. Para muitos sistemas, temperaturas tais que $k_B T_c = E$ (onde E é a ordem de grandeza das energias acessíveis ao sistema e T_c pode ser chamada a temperatura característica do sistema) determinam uma temperatura limite para a observação de fenômenos quânticos. Temperaturas maiores que T_c levariam à descoerência. No entanto, existiriam sistemas que violam essa condição, permitindo em princípio a observação de fenômenos como a superposição e emaranhamento em temperaturas muito superiores? Esta importante questão foi respondida em [4], onde foi estudado um sistema composto por dois osciladores harmônicos acoplados entre si com um acoplamento do tipo $c(t) = c_0 + c_1 \cos(\omega_D t)$ e em contato com reservatórios térmicos independentes. No sistema em questão, estados emaranhados a altas temperaturas foram observados. Sendo o emaranhamento, segundo Schroedinger, a principal diferença entre os mundos clássico e quântico, isto prova que o sistema é regido pelas leis da mecânica quântica, não se observando os efeitos da descoerência. Cabe então perguntar até onde a descoerência pode ser suprimida, preservando o emaranhamento e outras correlações quânticas, e eventualmente os intensificando, em sistemas acoplados a banhos térmicos a altas temperaturas. Este tópico tem enorme importância teórica, uma vez que a temperatura definitivamente perde seu posto de determinância na distinção entre o comportamento clássico e o quântico, e o seu papel no processo de descoerência pode ser agora melhor compreendido. Do ponto

de vista da aplicação, o impacto de tais descobertas não seria menor, seria muito mais fácil a produção de estados emaranhados, uma vez que uma das grandes dificuldades experimentais de se lidar com sistemas quânticos é a necessidade de um controle rigoroso da temperatura. Além disso, o emaranhamento é o principal recurso quando se fala de processamento quântico de informação. Sem o emaranhamento, tarefas como a criptografia quântica, o teletransporte quântico e a codificação super-densa não seriam possíveis. Mais que o emaranhamento, as correlações quânticas em geral aparecem como um importante recurso neste contexto. Desta maneira, encontrar maneiras mais simples de produzir estados com um grau apreciável de correlações quânticas é um grande avanço.

Visando responder, ou pelo menos ajudar a esclarecer, os questionamentos expostos acima, apresentaremos nesta dissertação o estudo feito com um sistema formado por dois osciladores harmônicos acoplados com um acoplamento dependente do tempo e em contato com um reservatório térmico comum. Os objetivos deste estudo visam encontrar maneiras de amenizar os efeitos da descoerência, mantendo o sistema em um regime quântico no qual persistam as correlações quânticas. A dissertação está dividida da seguinte maneira: o capítulo 2 foi devotado aos sistemas abertos e aos estratagemas encontrados para acomodá-los na mecânica quântica. Abordamos tanto o formalismo de integrais de caminho quanto o de equações mestras. No capítulo 3 abordamos as correlações quânticas, a citar, o emaranhamento e a discórdia quântica. Exploramos desde as definições até as maneiras encontradas para se medir estas correlações. Abordamos também neste capítulo os fundamentos da teoria de informação, necessária para que se possa definir de maneira clara as correlações quânticas. No capítulo 4 apresentamos os estados Gaussianos, que serão os estados com os quais trabalharemos. Discutimos a teoria envolvida na definição dos estados Gaussianos, as motivações experimentais em se trabalhar com estes estados, e as maneiras de se medir correlações quânticas em tais estados. No capítulo 5 aplicamos o conhecimento exposto nos capítulos precedentes ao sistema de interesse. Foram analisados os regimes Markoviano e não-Markoviano. No capítulo 6 apresentamos e discutimos os resultados obtidos e no capítulo 7 fazemos as considerações finais e comentamos as perspectivas futuras para o projeto.

Capítulo 2

Sistemas Abertos

Sistemas fechados são sistemas que não interagem com o ambiente que o circunda. Tal conceito é obviamente uma idealização, porém, foi de vital importância para o desenvolvimento das ciências naturais. Em particular, grande parte das leis da física, que vão desde as leis de conservação da mecânica clássica, passando pelas três leis da termodinâmica até a equação de Schroedinger, só são válidas em sistemas fechados.

No entanto, nem sempre a interação entre o sistema e o ambiente pode ser desprezada, e necessitamos de estratégias para acomodá-la na teoria. Na mecânica clássica, sistemas abertos geralmente podem ser bem descritos se incluirmos um termo dissipativo dependente da velocidade na equação de movimento. A inclusão deste termo tem como consequência, em particular, um dos fenômenos mais observados experimentalmente em sistemas abertos: a dissipação de energia do sistema para o ambiente. Um exemplo de uma equação deste tipo é a equação generalizada de Langevin clássica,

$$m\ddot{q} + m \int_{-\infty}^t d\xi \gamma(t - \xi) \dot{q}(\xi) + \frac{d}{dq} V(q) = F(t), \quad (2.1)$$

onde m é a massa da partícula, $\gamma(t)$ é o kernel de fricção, $V(q)$ é o potencial que age sobre a partícula e $F(t)$ é uma força estocástica, a qual geralmente supõe-se que obedece uma estatística Gaussiana, ou seja, totalmente caracterizada pelos primeiros e segundos momentos, dados por:

$$\langle F(t) \rangle = 0, \quad (2.2)$$

$$\langle F(t)F(t') \rangle = \chi(t - t'). \quad (2.3)$$

O movimento de uma partícula Browniana coloidal imersa em um fluido viscoso é bem descrito por uma equação do tipo Langevin, onde $\gamma(t - \xi) = \gamma\delta(t - \xi)$ e $\langle F(t)F(t') \rangle = 2\eta k_B T \delta(t - t')$.

Para sistemas quânticos, a descrição de sistemas abertos era especialmente desafiadora. De fato, técnicas usuais de quantização se baseavam no conhecimento da Hamiltoniana ou então da Lagrangeana do sistema. No entanto, é impossível obter a equação de movimento 2.1 sem que haja uma dependência temporal explícita na Hamiltoniana ou na Lagrangeana. Os primeiros trabalhos em cima deste problema basearam-se em encontrar tais Hamiltonianas ou Lagrangeanas e aplicar as técnicas convencionais de quantização[5]. Porém, este procedimento levava a alguns problemas no que diz respeito às relações de incerteza[6]. Houveram tentativas de se modificar o procedimento de quantização[7], no entanto tais tentativas eram em geral fisicamente questionáveis e/ou reproduziam resultados experimentais apenas em situações bem específicas. A tentativa mais bem sucedida, pioneiramente considerada em [2], baseou-se no fato de que um sistema aberto pode ser modelado por um pequeno número de graus de liberdade que interagem com um número muito maior de graus de liberdade. Um dos modelos mais famosos que segue esta linha é o modelo de Caldeira-Leggett[3]. Este modelo supõe um sistema em contato com um reservatório de partículas. Supõe-se ainda que a interação entre o sistema e o reservatório é fraca, de maneira que podemos assumir que a resposta do reservatório ao sistema é linear e que as partículas do reservatório são fracamente perturbadas, sendo levemente retiradas da configuração de equilíbrio, de maneira que podemos aproximar o potencial que age sobre as partículas do reservatório por um potencial harmônico. O Hamiltoniano total, sistema mais reservatório, é dado por:

$$H = H_S + H_I + H_R \quad (2.4)$$

$$= \underbrace{\frac{p^2}{2M} + V(x)}_{H_S} - x \underbrace{\sum_{k=1}^N c_k q_k}_{H_I} + \underbrace{\sum_{k=1}^N \left(\frac{p_k^2}{2m_k} + \frac{1}{2} m_k \omega_k^2 q_k^2 \right)}_{H_R}, \quad (2.5)$$

onde o sub-índice k distingue as partículas do reservatório e c_k é a constante de acoplamento entre a partícula k do reservatório e o sistema.

Este modelo será a base do estudo aqui apresentado e portanto nos aprofundaremos um pouco nele. De posse do Hamiltoniano 2.5, analisaremos primeiro a dinâmica clássica de uma partícula acoplada ao banho de osciladores, esta etapa é importante para a definição e melhor compreensão de algumas grandezas físicas que serão importantes para o restante do trabalho, e em seguida analisaremos a dinâmica quântica. No caso quântico existem duas maneiras principais de se atacar o problema, uma delas recorre à formulação de integrais de caminho da mecânica quântica, e a outra é baseada na própria equação de Schrödinger, que nos leva às equações mestras. Dado que ambas as abordagens foram importantes neste trabalho, exporemos ambas nas subseções que se seguem.

2.1 Dinâmica Clássica

A partir do Hamiltoniano 2.5, chegamos às seguintes equações de movimento:

$$m\ddot{x} + \frac{d}{dx}V(x) + \sum_{k=1}^N \left(\frac{c_k^2}{m_k\omega_k^2} \right) x = \sum_{k=0}^N c_k q_k, \quad (2.6)$$

$$m_k \ddot{q}_k + m_k \omega_k^2 q_k = c_k x. \quad (2.7)$$

Como podemos ver, temos $N + 1$ equações diferenciais acopladas. A melhor maneira de resolvê-las é utilizando-se a técnica da transformada de Laplace. Aplicando a transformada de Laplace à eq. (2.7) temos,

$$\mathcal{L}[q_k] = \frac{sq_k(0)}{s^2 + \omega_k^2} + \frac{\dot{q}_k(0)}{s^2 + \omega_k^2} + \frac{c_k \mathcal{L}[x]}{m_k(s^2 + \omega_k^2)}. \quad (2.8)$$

Fazendo a transformação inversa da equação acima, chegamos ao seguinte resultado:

$$q_k(t) = q_k(0) \cos \omega_k t + \frac{p_k(0)}{m_k \omega_k} \sin \omega_k t + \frac{c_k}{m_k \omega_k} \int_0^t d\xi x(\xi) \sin \omega_k(t - \xi). \quad (2.9)$$

Integrando por partes o último termo da eq.(2.9), podemos escrever $q_k(t)$ de uma forma mais conveniente,

$$q_k(t) = q_k(0) \cos \omega_k t + \frac{p_k(0)}{m_k \omega_k} \sin \omega_k t + \frac{c_k}{m_k \omega_k} [x(t) - x(0) \cos \omega_k t] - \frac{c_k}{m_k \omega_k} \int_0^t d\xi \dot{x}(\xi) \cos \omega_k(t - \xi). \quad (2.10)$$

Substituindo a eq.(2.10) na eq.(2.6), chegamos ao seguinte resultado:

$$m\ddot{x}(t) + m \int_0^t d\xi \gamma(t - \xi) \dot{x}(\xi) + \frac{d}{dx}V(x) = \zeta(t) - m\gamma(t)x(0), \quad (2.11)$$

onde,

$$\gamma(t) = \Theta(t) \frac{1}{m} \sum_{k=0}^N \frac{c_k^2}{m_k \omega_k^2} \cos \omega_k t \quad (2.12)$$

e

$$\zeta(t) = \sum_{k=0}^N c_k \left(q_k(0) \cos \omega_k t + \frac{p_k(0)}{m_k \omega_k} \sin \omega_k t \right). \quad (2.13)$$

Tomando a média de $x_k(0)$ e $p_k(0)$ com relação a uma distribuição canônica clássica específica (vide referência [8] para mais detalhes), podemos chegar à eq.(2.1). Um fato notável nas eqs. (2.11) e (2.1) é a presença de memória nestas equações, o que é atestado pela presença das integrais do lado esquerdo da igualdade. Os efeitos de memória do sistema dependem diretamente da forma da função $\gamma(t)$.

Introduziremos agora a densidade espectral,

$$I(\omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^N \frac{c_k^2}{m_k \omega_k} \delta(\omega - \omega_k), \quad (2.14)$$

que nada mais é que uma sequência de deltas de Dirac localizadas nas frequências dos osciladores no banho. É um fato notável que, para descrever a dinâmica da partícula, toda a informação que precisamos sobre o banho está contida na densidade espectral. Em particular, a função $\gamma(t)$ está relacionada com a densidade espectral pela seguinte expressão:

$$\gamma(t) = \Theta(t) \frac{2}{\pi m} \int_0^{\infty} d\omega \frac{I(\omega)}{\omega} \cos \omega t. \quad (2.15)$$

No entanto, para que o modelo adotado simule uma partícula em interação com o ambiente, o número N de osciladores deve ser muito grande, de maneira que podemos considerar a distribuição de frequências dos osciladores como um contínuo e a função espectral como uma função suave. Devido à relação entre a função $\gamma(t)$ e a densidade espectral $I(\omega)$ na eq.(2.15), a densidade espectral está diretamente ligada à memória do sistema. Como exemplo, vamos considerar o caso em que a densidade espectral é dada por,

$$I(\omega) = m\gamma\omega, \quad (2.16)$$

onde se diz que temos uma densidade espectral estritamente ôhmica. Para tal densidade espectral dizemos que temos uma resposta instantânea do sistema ao banho, dado que $\gamma(t)$ é dado por,

$$\gamma(t) = 2\gamma\Theta(t)\delta(t). \quad (2.17)$$

Esta situação claramente é uma idealização, na medida que sempre existe uma escala de tempo, devida a efeitos inerciais do banho, na qual a memória do sistema é relevante. Este

é o motivo pelo qual toda densidade espectral $I(\omega)$ deve satisfazer a condição,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} I(\omega) = 0. \quad (2.18)$$

Esta condição determina uma escala de tempo na qual a memória do sistema é importante. No caso estritamente ôhmico, a violação desta condição leva a divergências que podem ser resolvidas definindo-se uma frequência de corte ω_C , que deve ser muito maior que as frequências envolvidas no problema, tal que,

$$I(\omega) = \begin{cases} m\gamma\omega, & \text{se } \omega \leq \omega_C, \\ 0, & \text{se } \omega > \omega_C. \end{cases} \quad (2.19)$$

Em particular, devemos estar interessados em estudar a dinâmica do sistema em escalas de tempo muito maiores que $\tau = \omega_C^{-1}$.

Densidades espectrais fisicamente mais realistas são:

$$I(\omega) = m\gamma\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_C}\right), \quad (2.20)$$

$$I(\omega) = m\gamma\omega \exp\left(-\frac{\omega^2}{\omega_C^2}\right), \quad (2.21)$$

$$I(\omega) = m\gamma\omega \frac{\omega_C^2}{\omega_C^2 + \omega^2}. \quad (2.22)$$

Todas estas densidades espectrais (2.20 - 2.22) são chamadas de densidades espectrais ôhmicas, sendo que em (2.20) usou-se uma regularização exponencial, em (2.21) uma regularização Gaussiana e em (2.22) foi usada uma regularização algébrica. As densidades espectrais acima introduzem efeitos de memória na dinâmica do sistema, uma vez que a função $\gamma(t)$ passa a não ser mais delta correlacionada, como no caso estritamente ôhmico. Desta maneira o regime estritamente ôhmico é também chamado de regime Markoviano, por desprezar efeitos de memória e os casos onde estes efeitos são considerados são ditos não-Markovianos. Todas as densidades espectrais consideradas acima levam aos mesmos resultados que o caso estritamente ôhmico no limite $\omega_C \rightarrow \infty$ e podemos observar que para $\omega \ll \omega_C$, as densidades espectrais acima são aproximadamente lineares em ω (por isso são chamadas ôhmicas). No entanto, podemos estar interessados em uma densidade espectral que se comporte como ω^s , $s > 0$. Neste caso basta multiplicar as eqs. (2.20-2.22) por $\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^{s-1}$. Temos então o caso sub-ôhmico para $0 < s < 1$ e super-ôhmico para $s > 1$.

2.2 Dinâmica Quântica

2.2.1 Abordagem via Integrais de Caminho

Teoria de Feynman-Vernon

Seja um sistema em contato com um reservatório¹, descrito pelo seguinte Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_I + \hat{H}_R \quad (2.23)$$

$$= \underbrace{\frac{\hat{P}^2}{2M} + V(\hat{X})}_{\hat{H}_S} + \underbrace{\sum_{\alpha} v_{\alpha}(\hat{X}, \hat{q}_{\alpha})}_{\hat{H}_I} + \underbrace{\sum_{\alpha} \left(\frac{\hat{p}_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq \alpha} v_B(\hat{q}_{\alpha}, \hat{q}_i) \right)}_{\hat{H}_R}, \quad (2.24)$$

onde \hat{H}_S é o Hamiltoniano de uma partícula sujeita ao potencial $V(\hat{X})$, \hat{H}_R é o Hamiltoniano de um reservatório composto por N osciladores harmônicos, e \hat{H}_I é o Hamiltoniano de interação entre a partícula e o reservatório. Se o sistema total é inicialmente descrito por um operador densidade $\hat{\rho}(0)$, então a evolução temporal do mesmo é dada por,

$$\hat{\rho}(t) = \exp \left[\frac{-i\hat{H}t}{\hbar} \right] \hat{\rho}(0) \exp \left[\frac{i\hat{H}t}{\hbar} \right]. \quad (2.25)$$

Na representação de coordenadas,

$$\begin{aligned} \langle x, \mathbf{q} | \hat{\rho}(t) | y, \mathbf{s} \rangle &= \int dx' d\mathbf{q}' dy' d\mathbf{s}' \langle x, \mathbf{q} | \exp \left[\frac{-i\hat{H}t}{\hbar} \right] | x', \mathbf{q}' \rangle \\ &\quad \times \langle x', \mathbf{q}' | \hat{\rho}(0) | y', \mathbf{s}' \rangle \langle y', \mathbf{s}' | \exp \left[\frac{i\hat{H}t}{\hbar} \right] | y, \mathbf{s} \rangle. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Podemos imediatamente identificar o propagador

$$K(x, \mathbf{q}, t, x', \mathbf{q}', 0) = \langle x, \mathbf{q} | \exp \left[\frac{-i\hat{H}t}{\hbar} \right] | x', \mathbf{q}' \rangle. \quad (2.27)$$

Porém, o propagador também pode ser dado por[9]:

$$K(x, \mathbf{q}, t, x', \mathbf{q}', 0) = \int \mathcal{D}x \mathcal{D}\mathbf{q} \exp \left[\frac{iS(x, \mathbf{q})}{\hbar} \right], \quad (2.28)$$

¹Chamaremos sistema apenas o sistema em contato com o reservatório. Quando quisermos nos referir ao conjunto como um todo, diremos sistema total.

onde temos uma integração dupla de caminho e S é a ação do sistema total, dada por,

$$S = S_S + S_I + S_R$$

$$= \int_0^t dt \left[\frac{P^2}{2M} - V(X) - \sum_{\alpha} v_{\alpha}(X, q_{\alpha}) + \sum_{\alpha}^N \left(\frac{p_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} - \frac{1}{2} \sum_{i \neq \alpha} v_B(q_{\alpha}, q_i) \right) \right]. \quad (2.29)$$

Podemos então escrever o operador densidade na representação de coordenadas como,

$$\langle x, \mathbf{q} | \hat{\rho}(t) | y, \mathbf{s} \rangle =$$

$$\int dx' d\mathbf{q}' dy' ds' K(x, \mathbf{q}, t, x', \mathbf{q}', 0) \langle x', \mathbf{q}' | \hat{\rho}(0) | y', \mathbf{s}' \rangle K(y, \mathbf{s}, t, y', \mathbf{s}', 0). \quad (2.30)$$

A expressão acima nos dá o operador densidade evoluído do sistema total. No entanto, não estamos interessados na dinâmica do sistema total, de maneira que nos basta saber o operador densidade reduzido com relação ao sistema, $\hat{\rho}_S$,

$$\rho_S(x, y, t) = \int d\mathbf{q} \langle x, \mathbf{q} | \hat{\rho}(t) | y, \mathbf{q} \rangle$$

$$= \int dx' d\mathbf{q}' dy' ds' d\mathbf{q}' K(x, \mathbf{q}, t, x', \mathbf{q}', 0) \langle x', \mathbf{q}' | \hat{\rho}(0) | y', \mathbf{s}' \rangle K(y, \mathbf{q}, t, y', \mathbf{s}', 0). \quad (2.31)$$

Se supusermos que o operador densidade é fatorizável no tempo $t = 0$,

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_S(0) \hat{\rho}_R(0), \quad (2.32)$$

onde $\hat{\rho}_S$ atua no espaço de Hilber \mathcal{H}_S do sistema e $\hat{\rho}_R$ atua no espaço de Hilber \mathcal{H}_R do reservatório, então podemos escrever o operador densidade $\hat{\rho}_S$, substituindo as equações (2.28) e (2.29) em (2.31), da seguinte maneira:

$$\rho_S(x, y, t) = \int dx' dy' J(x, y, t; x', y', 0) \rho_S(x', y', 0), \quad (2.33)$$

onde,

$$J(x, y, t; x', y', 0) = \int \mathcal{D}x \mathcal{D}y \exp \left[\frac{iS_S(x)}{\hbar} \right] \exp \left[\frac{-iS_S(y)}{\hbar} \right] \mathcal{F}(x, y), \quad (2.34)$$

e

$$\mathcal{F}(x, y) = \int d\mathbf{q}' ds' d\mathbf{q} \rho_R(\mathbf{q}', \mathbf{s}', 0) \int \mathcal{D}\mathbf{q} \mathcal{D}\mathbf{s}$$

$$\times \exp \left[\frac{i}{\hbar} [S_I(x, \mathbf{q}) - S_I(y, \mathbf{s}) + S_R(\mathbf{q}) - S_R(\mathbf{s})] \right]. \quad (2.35)$$

$J(x, y, t; x', y', 0)$ é chamado super-propagador do sistema e $\mathcal{F}(x, y)$ é chamado funcional de influência do reservatório. Toda a informação sobre o efeito do reservatório sobre sistema está contida no funcional de influência. Portanto, se conhecido o funcional de influência \mathcal{F} (o que está longe de ser uma tarefa simples), podemos em princípio determinar a dinâmica do sistema.

Podemos ver que a teoria de Feynman-Vernon se aplica a sistemas mais gerais do que o considerado no modelo de Caldeira-Leggett. Felizmente, para este modelo em específico existe um resultado exato para o funcional de influência[9] e pode-se mostrar que o super-propagador é dado por[3],

$$J(x, y, t; x', y', 0) = \int \int \mathcal{D}x \mathcal{D}x' \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[S_S(x) - S_S(y) - \int_0^t \int_0^\tau d\tau ds [x(\tau) - y(\tau)] \alpha_I(\tau - s) [x(s) + y(s)] \right] \right\} \times \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int_0^t \int_0^\tau d\tau ds [x(\tau) - y(\tau)] \alpha_R(\tau - s) [x(s) - y(s)] \right], \quad (2.36)$$

onde,

$$\alpha_R(t) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k^2}{2m_k \omega_k} \coth \left(\frac{\hbar \omega_k}{2kT} \right) \cos(\omega_k t) \quad (2.37)$$

e

$$\alpha_I(t) = - \sum_{k=1}^N \frac{c_k^2}{2m_k \omega_k} \sin(\omega_k t). \quad (2.38)$$

A partir da eq.(2.14), podemos constatar que tanto $\alpha_R(t)$ quanto $\alpha_I(t)$ podem ser escritos em função da densidade espectral $I(\omega)$. Em particular, para o caso estritamente ôhmico pode-se mostrar[3] que o super-propagador (2.36) pode ser escrito da seguinte forma,

$$J(x, y, t; x', y', 0) = \int \int \mathcal{D}x \mathcal{D}x' \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[S_S(x) - S_S(y) - m\gamma \int_0^t d\tau [x(\tau) - y(\tau)] [\dot{x}(\tau) + \dot{y}(\tau)] \right] \right\} \times \exp \left[-\frac{m\gamma}{\hbar\pi} \int_0^{\omega_C} d\omega \coth \left(\frac{\hbar\omega}{2kT} \right) \int_0^t \int_0^\tau d\tau ds [x(\tau) - y(\tau)] \cos(\tau - s) [x(s) - y(s)] \right]. \quad (2.39)$$

Dependendo da forma do Lagrangeano do sistema, é possível simplificar ainda mais a expressão (2.39) resolvendo-se as integrais de caminho. Por hora, deixaremos a resultado desta maneira e voltaremos a olhar esta expressão futuramente.

2.2.2 Abordagem via Equações Mestras

Suponha um sistema em contato com um reservatório, cujo Hamiltoniano tem a seguinte forma:

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_I + \hat{H}_R, \quad (2.40)$$

onde, no Hamiltoniano genérico acima, \hat{H}_S é o Hamiltoniano do sistema, \hat{H}_I é o Hamiltoniano de interação entre o sistema e o reservatório e \hat{H}_R é o Hamiltoniano do reservatório. O operador densidade que descreve o sistema total (sistema + reservatório) será denotado por $\hat{\chi}$, e satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{d}{dt}\hat{\chi} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \hat{\chi}]. \quad (2.41)$$

Seja \hat{A} um operador genérico, chamaremos \tilde{A} o operador \hat{A} na versão de interação, ou seja,

$$\tilde{A} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_R)t\right]\hat{A}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_R)t\right]. \quad (2.42)$$

Reescrevendo a eq.(2.41) na versão de interação, nós obtemos,

$$\frac{d}{dt}\tilde{\chi} = \frac{1}{i\hbar}[\tilde{H}_I(t), \tilde{\chi}], \quad (2.43)$$

onde $\tilde{H}_I(t)$ é explicitamente dependente do tempo, devido à transformação 2.42. Integrando formalmente a eq.(2.43) obtemos,

$$\tilde{\chi}(t) = \tilde{\chi}(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t d\xi [\tilde{H}_I(\xi), \tilde{\chi}(\xi)]. \quad (2.44)$$

Substituindo a eq.(2.44) na eq.(2.43) e lembrando que $\tilde{\chi}(0) = \hat{\chi}(0)$:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\chi} = \frac{1}{i\hbar}[\tilde{H}_I(t), \hat{\chi}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\xi [\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(\xi), \tilde{\chi}(\xi)]]. \quad (2.45)$$

A eq.(2.45) é exata. Uma vez que não estamos interessados na dinâmica do reservatório, podemos fazer a seguinte simplificação. Suponha que inicialmente o operador densidade $\hat{\chi}$ seja fatorizável,

$$\hat{\chi}(0) = \hat{\rho}(0)\hat{R}(0), \quad (2.46)$$

onde $\hat{\rho}(0)$ e $\hat{R}(0)$ são os operadores densidade do sistema e do reservatório, respectivamente, em $t = 0$. Lembrando que

$$Tr_R[\tilde{\chi}] = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S\right]\hat{\rho}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S\right] = \tilde{\rho}, \quad (2.47)$$

e assumindo que $Tr_R[\tilde{H}_I(t)\hat{R}_0] = 0$ (o que pode ser feito simplesmente somando o termo $Tr_R[\tilde{H}_I(t)\hat{R}_0]$ ao Hamiltoniano do sistema), chegamos à seguinte equação:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho} = -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t d\xi Tr_R\{[\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(\xi), \tilde{\chi}(\xi)]]\}. \quad (2.48)$$

Esta é a equação mestra exata para o sistema. Porém, existem algumas aproximações que tornam a eq.(2.48) mais tratável do ponto de vista matemático. A primeira é a chamada aproximação de Born, que supõe fraca a interação entre o sistema e o reservatório, de maneira que para qualquer tempo t , $\tilde{\chi}(t)$ pode ser aproximado por,

$$\tilde{\chi}(t) = \tilde{\rho}(t)\hat{R}_0 + \mathcal{O}(\hat{H}_I), \quad (2.49)$$

onde supõe-se que \hat{H}_I é pequeno se comparado com as energias típicas dos Hamiltonianos \hat{H}_S e \hat{H}_R . Desta maneira, desprezando termos de ordem maior que \hat{H}_I^2 , a eq.(2.48) pode ser escrita como,

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho} = -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t d\xi Tr_R\{[\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(\xi), \tilde{\rho}(\xi)\hat{R}_0]]\}. \quad (2.50)$$

Outra aproximação possível é a chamada aproximação Markoviana, que consiste em supor que efeitos de memória são desprezíveis, permitindo escrever a eq.(2.50) da seguinte forma,

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t d\xi Tr_R\{[\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(\xi), \tilde{\rho}(t)\hat{R}_0]]\}. \quad (2.51)$$

A rigor, a evolução temporal do sistema depende de sua história passada basicamente porque os estados anteriores do sistema influenciaram a evolução temporal do reservatório devido à interação entre ambos. Logo é natural esperar que esta influência sobre o banho seja refletida de volta na evolução temporal do próprio sistema. Desta maneira, a aproximação Markoviana só se justifica se estudamos a dinâmica do sistema em uma escala de tempo que é muito maior que a escala de tempo de correlação do banho, e conseqüentemente muito maior que a escala de tempo onde a memória do sistema é reelevantante.

Existem diversas maneiras de encontrar a equação mestra que descreve um sistema, o método utilizado nesta subseção é apenas uma delas e foi baseado no que foi apresentado

em [10]. Em particular, pode-se obter a equação mestra a partir do próprio propagador do sistema, como foi feito em [11].

Capítulo 3

Correlações Quânticas

3.1 Emaranhamento Quântico

Primeiramente considerado em 1935 por Schrödinger[12] e Einstein, Podolsky e Rosen[13], o emaranhamento é uma intrigante propriedade de sistemas quânticos que criou de uma vez por todas uma cisma entre a mecânica clássica e a mecânica quântica. Tal propriedade é uma consequência direta de um dos postulados mais fundamentais da mecânica quântica, enunciado a seguir[14, 15]:

A todo estado de um sistema físico está associado um vetor pertencente a um espaço de Hilbert.

Para a compreensão mais clara do postulado acima, se faz necessário definir o que é um espaço de Hilbert. O espaço de Hilbert é um espaço vetorial complexo, completo e munido de uma métrica, que é dada por um produto interno. Por ser um espaço vetorial, vale o princípio de superposição, ou seja, a combinação linear de dois vetores pertencentes ao espaço de Hilbert também pertence ao espaço de Hilbert. Um ponto fundamental da teoria sobre a qual foi construída a mecânica quântica é que o espaço de Hilbert de um sistema composto é dado pelo produto tensorial dos espaços de Hilbert associados a cada um dos subsistemas.

Para expor as estranhas consequências do princípio de superposição, vamos fazer um experimento imaginário¹: suponha que temos dois elétrons e a cada um deles está associado um espaço de Hilbert \mathcal{H}_i , $i = 1, 2$. Uma possível base para \mathcal{H}_i é composta por $|1\rangle_i$ (projeção do spin do elétron i no eixo z é $\frac{1}{2}$) e $|0\rangle_i$ (projeção do spin do elétron i no eixo z é $-\frac{1}{2}$). O espaço de Hilbert total é dado por $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Os dois elétrons estão inicialmente presos em uma armadilha e o estado do sistema total é

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 - |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \right) \quad (3.1)$$

¹Um experimento parecido com o aqui proposto foi de fato realizado com fótons(em vez de elétrons) separados por mais de 144 Km[16].

(note que, pelo princípio da superposição, este é um vetor pertencente ao espaço de Hilbert \mathcal{H} , portanto é um estado quântico possível). Suponha agora que os dois elétrons foram transportados para lugares muito afastados um do outro, mas de maneira a manter o vetor de estado do sistema total $|\Psi\rangle$ inalterado. Vamos então fazer a medida da orientação do spin do elétron 1. Pelos postulados da mecânica quântica sabemos que temos probabilidade $\frac{1}{2}$ de medir o elétron 1 tanto no estado $|1\rangle$ quanto no estado $|0\rangle$. Porém, o mais intrigante é que ao descobrir o estado do elétron 1, automaticamente descobrimos também o estado do elétron 2. Ou seja, de alguma maneira o processo de medição feito do elétron 1 perturbou o sistema físico como um todo, fazendo com que pudéssemos prever com certeza o estado do elétron 2. Mas como isso é possível? Como pode uma medida realizada sobre o elétron 1 perturbar o elétron 2, que está a quilômetros de distância do primeiro. A chave para entender este problema está no fato de que a mecânica quântica é não-local, ou seja, medidas em um subsistema podem sim afetar um outro subsistema afastado do primeiro. Mas onde entra o emaranhamento nesta história? O emaranhamento é um tipo particular de correlação não-clássica e não-local, que foi responsável pelo estranho resultado observado no experimento imaginário acima.

Foi recentemente o emaranhamento deixou de ser visto apenas como mais um estranho fenômeno do mundo quântico e passou a ser um recurso de vital importância para o processamento quântico de informação, sendo ele o responsável por tarefas que seriam impossíveis de serem realizadas utilizando-se apenas recursos clássicos, como a criptografia quântica[17], o teletransporte quântico[18] e a codificação densa quântica[19]. Esta seção será dedicada a definir, qualificar e quantificar este importante fenômeno.

3.1.1 Estados emaranhados: definição

Cabe agora definir o que é um estado emaranhado. Para isso, teremos que fazer uma distinção entre estado puros e estados mistos. Para estado puros temos:

Definição 1 *Um estado quântico puro descrito por um vetor no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$ (onde \mathcal{H}_i é o espaço de Hilbert associado a cada um dos subsistemas que compõem o sistema total), é separável se, e somente se, pode ser escrito da seguinte maneira:*

$$|\Psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_N\rangle, \quad (3.2)$$

onde $|\phi_i\rangle \in \mathcal{H}_i$. Se não for este o caso, o estado é dito emaranhado.

Um exemplo de estado puro emaranhado é o chamado estado singleto (3.1), que foi utilizado no experimento imaginário. Para estados mistos temos:

Definição 2 *Um estado quântico descrito por um operador densidade $\hat{\rho}$ que atua no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$ (onde \mathcal{H}_i é o espaço de Hilbert associado a cada um dos*

subsistemas que compõem o sistema total), é separável se, e somente se, pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\hat{\rho} = \sum_{i=0}^k p_i \hat{\rho}_i^1 \otimes \hat{\rho}_i^2 \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_i^N, \quad (3.3)$$

onde $p_i > 0$, $\sum_i p_i = 1$ e $\hat{\rho}_i^j$ atua em \mathcal{H}_j . Se não for este o caso, o estado é dito emaranhado.

Um exemplo de estado misto separável é o estado

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}|0, 0\rangle\langle 0, 0| + \frac{1}{2}|1, 1\rangle\langle 1, 1|, \quad (3.4)$$

e um exemplo de estado misto emaranhado são os estados da forma

$$\hat{\rho} = \frac{1-z}{4}(|0, 0\rangle\langle 0, 0| + |1, 1\rangle\langle 1, 1|) + \frac{z}{2}|\psi\rangle\langle\psi|, \quad (3.5)$$

onde $|\psi\rangle = |0, 0\rangle + |1, 1\rangle$ e $z \geq \frac{1}{3}$. Os estados do tipo (3.5) são chamados estados de Werner. Para $z < \frac{1}{3}$ os estados de Werner são separáveis. Desta maneira, fica claro que o emaranhamento é um fenômeno típico de sistemas compostos.

No entanto, as definições acima não são úteis do ponto de vista prático. Em especial para estados mistos, tentar descobrir se um dado estado é separável ou não usando o critério acima corresponderia a escrever o operador densidade em todas as bases possíveis (que são infinitas) e checar se em ao menos uma delas a definição acima é satisfeita, o que é uma tarefa hercúlea. Dado este fato, outros critérios de separabilidade foram então desenvolvidos. A próxima seção será devotada a estes critérios.

3.1.2 O problema da separabilidade

Nesta seção apresentaremos critérios úteis do ponto de vista prático para descobrir se um dado estado é emaranhado ou não. Nos limitaremos ao caso de sistemas bipartite (onde temos apenas dois subsistemas), que é o caso de interesse para o resto do trabalho. No caso de sistemas multipartites, o cenário é bem mais complexo e foge ao escopo desta dissertação. Trataremos o problema da separabilidade inicialmente em estados puros e depois em estados mistos.

Separabilidade em estado puros

Para estados puros bipartite temos um critério simples para a separabilidade baseado na decomposição de Schmidt.

Teorema 1 *Decomposição de Schmidt*

Seja $|\psi\rangle$ um estado puro de um sistema bipartite composto pelos subsistemas A e B , aos

quais estão associados os espaços de Hilbert \mathcal{H}_A (de dimensão d_A) e \mathcal{H}_B (de dimensão d_B), respectivamente. Existe então uma base ortonormal $\{|i_A\rangle\}$ para \mathcal{H}_A e uma base ortonormal $\{|i_B\rangle\}$ para \mathcal{H}_B tal que

$$|\psi\rangle = \sum_i^{\text{Min}\{d_A, d_B\}} \lambda_i |i_A\rangle \otimes |i_B\rangle, \quad (3.6)$$

onde $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_i \lambda_i^2 = 1$.

A decomposição de Schmidt é única. Os λ_i 's são chamados coeficientes de Schmidt e o número N_S de λ_i 's diferentes de zero é chamado número de Schmidt. Um estado puro é separável se, e somente se, $N_S = 1$, do contrário temos um estado puro emaranhado. Dado que esta decomposição pode ser encontrada via decomposição em valores singulares (SVD²), este é um critério de grande aplicabilidade.

Separabilidade em estados mistos

Para estados mistos bipartite diversos critérios práticos para determinação da separabilidade foram desenvolvidos, dentre eles, citaremos aqui os de maior relevância para este trabalho, que são o critério PPT³, ou critério de Perez-Horodecki e as testemunhas de emaranhamento.

Critério PPT

Um dos critérios mais fortes para a separabilidade de estados mistos é o critério PPT, que é enunciado a seguir.

Teorema 2 (Critério PPT)

Se um estado descrito por um operador densidade $\hat{\rho}$ é separável, então a transposta parcial de $\hat{\rho}$ com relação ao subsistema i , $\hat{\rho}^{T_i}$, é definida semi-positiva.

Ou seja, a transposta parcial de um estado separável é por sua vez um operador densidade. Quando publicado, conjecturou-se que o critério PPT poderia ser um critério necessário e suficiente para a separabilidade. De fato, foi mostrado que para casos de baixa dimensionalidade (2×2 e 2×3) [21][22] isso era verdade, no entanto para sistemas de dimensão 2×4 e 3×3 , contra-exemplos foram encontrados [23]. Portanto, no caso geral o critério PPT não é um critério suficiente para a separabilidade.

Testemunhas de emaranhamento

²Do inglês, *Singular Value Decomposition*

³Do inglês, *Positive Partial Transpose*

Uma testemunha de emaranhamento \hat{W} de um estado emaranhado $\hat{\rho}$ é um operador hermitiano que atua no espaço de Hilbert \mathcal{H} do sistema total e que tem a seguinte propriedade:

$$\text{Tr}[\hat{W}\hat{\rho}] < 0, \quad (3.7)$$

$$\text{Tr}[\hat{W}\hat{\sigma}] \geq 0, \text{ se } \hat{\sigma} \text{ é um estado separável qualquer.} \quad (3.8)$$

Em particular, um estado $\hat{\rho}$ é emaranhado se, e somente se, existe uma testemunha de emaranhamento de $\hat{\rho}$ [20, 21].

Matematicamente, o conjunto dos estados *bipartites* separáveis $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ é um conjunto convexo e fechado[21]. Temos então como consequência do teorema de Hahn-Banach que dado um estado $\hat{\rho} \notin \mathcal{D}$ (estado emaranhado), existe um hiperplano que separa o conjunto \mathcal{D} do estado $\hat{\rho}$. A testemunha de emaranhamento de um estado $\hat{\rho}$ define um hiperplano que faz esse papel. Em particular, podemos estabelecer uma hierarquia entre duas testemunhas de emaranhamento \hat{W}_1 e \hat{W}_2 . Diz-se que \hat{W}_1 é mais fina que \hat{W}_2 se, e somente se, $\text{Tr}[\hat{W}_2\hat{\rho}] < 0 \Rightarrow \text{Tr}[\hat{W}_1\hat{\rho}] < 0$, sendo que o contrário não é verdadeiro. Uma testemunha de emaranhamento ótima deve ser totalmente tangente ao conjunto \mathcal{D} .

Testemunhas de emaranhamento provêm uma maneira prática, inclusive do ponto de vista experimental, de detectar o emaranhamento uma vez que em geral não é necessário ter informação completa sobre o estado para que se possa encontrar uma testemunha de emaranhamento que dependa de observáveis acessíveis experimentalmente.

3.1.3 Medidas de emaranhamento

Utilizando os critérios expostos na subseção anterior, temos ferramentas eficientes para qualificar um estado como separável ou emaranhado. No entanto, apenas a qualificação de um estado com relação à sua separabilidade não é suficiente. Foi observado que alguns protocolos de processamento de informação quântica eram mais eficientes se utilizados alguns estados ao invés de outros, e esta eficiência estava ligada ao quão emaranhados estavam os estados. Desta maneira tornou-se necessário procurar meios de medir o emaranhamento. Com este intuito, vamos discutir agora as medidas de emaranhamento.

Para definir uma medida de emaranhamento, adotaremos uma abordagem axiomática, que pode ser encontrada em mais detalhes em [24, 25]. Tal abordagem assera que qualquer grandeza física à qual se queira chamar medida de emaranhamento deve satisfazer alguns pré-requisitos. Sejam $\hat{\rho}$ e $\hat{\sigma}$ operadores densidade associados a estados quânticos pertencentes ao espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ e $E(\hat{\rho})$ uma candidata a medida de emaranhamento, então:

- $E(\hat{\rho})$ não deve aumentar sob uma transformação Γ do tipo OLCC(Operações Locais e

Comunicação Clássica),

$$E(\Gamma(\hat{\rho})) \leq E(\hat{\rho}). \quad (3.9)$$

Lembrando que o emaranhamento é um fenômeno ocorrente em sistemas compostos, OLCC consistem em operações locais feitas nos subsistemas, podendo ser mediadas por comunicação clássica. Uma vez que pode-se mostrar que não se pode criar estados emaranhados por meio de OLCC[25], não devemos ser capazes de aumentar este recurso por meio de tais transformações.

- $E(\hat{\rho}) \geq 0$ e $E(\hat{\rho}) = 0$ se, e somente se, $\hat{\rho}$ é um estado emaranhado.

De fato, a única condição realmente necessária para que E seja considerada uma medida de emaranhamento é a monotonicidade por OLCC. A segunda condição pode ser obtida quase que completamente da primeira com base no fato de que todo estado separável pode ser transformado em qualquer outro estado separável utilizando-se OLCC[26]. Desta maneira, E deve ser um mínimo em estados separáveis.

Estas são as condições mais básicas que uma medida de emaranhamento deve satisfazer, no entanto, algumas outras propriedades são desejáveis. Dentre elas está a continuidade, ou seja,

$$\hat{\sigma} \rightarrow \hat{\rho} \quad \Rightarrow \quad E(\hat{\sigma}) \rightarrow E(\hat{\rho}), \quad (3.10)$$

a convexidade,

$$E(p_1\hat{\rho}_1 + p_2\hat{\rho}_2 + \dots + p_N\hat{\rho}_N) \leq p_1E(\hat{\rho}_1) + p_2E(\hat{\rho}_2) + \dots + p_NE(\hat{\rho}_N), \quad (3.11)$$

e a aditividade, que consiste em, dados dois operadores densidade $\hat{\rho}$ e $\hat{\sigma}$ que atuam em espaços de Hilbert distintos, então

$$E(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma}) = E(\hat{\rho}) + E(\hat{\sigma}). \quad (3.12)$$

A convexidade é mais interessante do ponto de vista matemático, pois a condição de monotonicidade sob transformações do tipo OLCC pode ser colocada de uma maneira simples se a candidata à medida de emaranhamento for convexa[25]. Já a aditividade é uma propriedade desejável pois o produto tensorial entre os estados $\hat{\rho}$ e $\hat{\sigma}$ não contém correlações mais que as correlações internas de cada estado, portanto, espera-se a aditividade da medida de emaranhamento com relação a $\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma}$.

Quanto às medidas de emaranhamento conhecidas atualmente, para o caso de estados puros, temos uma medida universalmente aceita que é a entropia de emaranhamento. No caso de estados mistos, como de praxe, a situação é bem mais complexa e diversas medidas de emaranhamento existem. Trataremos primeiro os estados puros e em seguida consideraremos estados mistos.

Quantificando o emaranhamento em estados puros: a entropia de emaranhamento

Para estados puros temos uma medida canônica de emaranhamento que é a entropia de emaranhamento E_V . A entropia de emaranhamento de um estado puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ é dada por:

$$E_V(|\psi\rangle) = S\left(\text{Tr}_A[|\psi\rangle\langle\psi|]\right) = S\left(\text{Tr}_B[|\psi\rangle\langle\psi|]\right) = \sum_i \lambda_i^2 \log \lambda_i^2, \quad (3.13)$$

onde os λ_i 's são os coeficientes de Schmidt. De fato, pelo menos para sistemas bipartite, a condição de monotonicidade por OLCC implica na existência de estados maximamente emaranhados $|\psi_d\rangle$ [24]. Se supusermos que a dimensão dos espaços de Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B é d , tais estados puros maximamente emaranhados, são dados por:

$$|\psi_d\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}\left(|0, 0\rangle + |1, 1\rangle + \dots + |d-1, d-1\rangle\right), \quad (3.14)$$

ou qualquer estado que seja resultado de uma transformação unitária local sobre $|\psi_d\rangle$. Pode-se mostrar então que, se nos são dadas n cópias do estado $|\psi\rangle$, podemos por meio de operações locais em cada subsistema, concentrar o emaranhamento em um número n' de estados maximamente emaranhados, onde $n' \rightarrow nE_V(|\psi\rangle)$ no limite em que $n \rightarrow \infty$ [27]. Podemos ver que a entropia de emaranhamento E_V é zero se $|\psi\rangle$ é um estado puro, e como ele depende apenas dos coeficientes de Schmidt, também é invariante por transformações unitárias locais. Pode-se ainda mostrar que a entropia de emaranhamento E_V não aumenta sob transformações do tipo OLCC[28]. Desta maneira, podemos dizer que a entropia de emaranhamento E_V é uma medida de emaranhamento.

Quantificando o emaranhamento em estados mistos

Para estados mistos temos uma gama de medidas de emaranhamento, onde a praticidade em se usar uma determinada medida ou outra depende fortemente do tipo de estado com o qual estamos lidando. Listaremos aqui as medidas de emaranhamento mais relevantes para este trabalho.

Emaranhamento de Formação

O emaranhamento de formação faz parte de um grupo de medidas de emaranhamento chamadas de raízes convexas. Tais medidas são construídas a partir de alguma medida \tilde{E} de emaranhamento definida para estados puros. Define-se então a extensão em raiz convexa de \tilde{E} como sendo

$$E(\hat{\rho}) = \min_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i \tilde{E}(|\psi_i\rangle), \quad (3.15)$$

onde a minimização é tomada sobre todas as decomposições possíveis de $\hat{\rho}$ em estados puros ($\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$). Tais medidas são convexas por construção e pode-se mostrar[24] que se \tilde{E} satisfizer a condição de não aumentar em média sob transformações do tipo OLCC⁴, então E também é monótona por OLCC.

O emaranhamento de formação E_F foi a primeira de tais medidas a ser introduzida e é a extensão de raiz convexa da entropia de emaranhamento:

$$E(\hat{\rho}) = \min_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i E_V(|\psi_i\rangle). \quad (3.16)$$

O processo de otimização é altamente não-trivial no caso geral, porém são conhecidas soluções analíticas para o caso de dois *qubits*[29] ou estados com simetrias especiais como os estados de Werner[30], estados isotrópicos[31] e estados Gaussianos de dois modos simétricos[32]. A aditividade da entropia de formação é uma questão em aberto.

Negatividade e Negatividade Logarítmica

A negatividade \mathcal{N} quantifica o quanto a transposta parcial do operador densidade $\hat{\rho}$, $\hat{\rho}^{T_i}$, falha em ser semi-positiva definida. A negatividade é dada pela soma dos autovalores negativos de $\hat{\rho}^{T_i}$:

$$\mathcal{N}(\hat{\rho}) = \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i = \frac{\|\hat{\rho}^{T_i}\| - 1}{2}, \quad \text{onde } \|\hat{A}\| \equiv \text{Tr} \left[\sqrt{\hat{A}^\dagger \hat{A}} \right]. \quad (3.17)$$

Associada à negatividade \mathcal{N} está a negatividade logarítmica $E_{\mathcal{N}}$, que têm a mesma interpretação que a negatividade e é dada por:

$$E_{\mathcal{N}}(\hat{\rho}) = \log \|\hat{\rho}^{T_i}\| = \log(1 + 2\mathcal{N}(\hat{\rho})). \quad (3.18)$$

Da interpretação da negatividade e da negatividade logarítmica fica claro que estas só são medidas de emaranhamento para estados para os quais o critério PPT é necessário e suficiente para a separabilidade. A negatividade \mathcal{N} é monótona com relação às transformações do tipo OLCC, convexa, porém não é aditiva[33]. Já a negatividade logarítmica $E_{\mathcal{N}}$ é aditiva, porém não é convexa[33]. Foi mostrado no entanto que $E_{\mathcal{N}}$ é fortemente monótona com relação às transformações do tipo OLCC[34].

3.2 Teoria de Informação: do clássico para o quântico

Suponha que conhecemos uma dada distribuição de probabilidade p_x , $x = 1, 2, \dots, N$, associada a uma variável aleatória X . Supondo que temos à nossa disposição um número n

⁴Está é uma condição mais forte do que a condição enunciada em (3.9), medidas que satisfazem esta condição são ditas fortemente monótonas com relação às transformações do tipo OLCC.

(muito grande) de cópias da variável aleatória X e que podemos verificar o resultado de cada uma delas, podemos na melhor das hipóteses estimar o número de vezes que cada resultado foi observado, ou seja, $n_1 = np_1, n_2 = np_2, \dots, n_N = np_N$. A ordem em que os resultados foram observados nos é desconhecida, porém sabemos que o número total de ordenações diferentes dos resultados é dado por $n!/\prod_{x=1}^N n_x!$. Temos então, usando a aproximação de Stirling,

$$\log \left(\frac{n!}{\prod_{x=1}^N n_x!} \right) \approx n \log n - n - \sum_{x=1}^N (n_x \log n_x - n_x) \quad (3.19)$$

$$= n \log n - \sum_{x=1}^N np_x \log np_x \quad (3.20)$$

$$= -n \sum_{x=1}^N p_x \log p_x = nH(X). \quad (3.21)$$

A equação (3.21) define a entropia de Shannon $H(X)$ [35], que é interpretada como uma medida da nossa ignorância a respeito do resultado que a variável aleatória X pode assumir. Por simplicidade utilizamos uma variável aleatória discreta, porém todas as considerações feitas aqui podem ser diretamente aplicadas para variáveis aleatórias contínuas.

A entropia de Shannon satisfaz as seguintes desigualdades:

$$0 \leq H(X) \leq H(Y), \quad (3.22)$$

onde $p_y = 1/N, y = 1, 2, \dots, N$, é a distribuição de probabilidade associada a Y . Ou seja, a distribuição de probabilidade onde todos os resultados são igualmente possíveis maximiza a nossa ignorância a respeito do resultado da variável aleatória. Definimos $H(X) = 0$ se $p_x = \delta_{x,x'}$, onde $\delta_{i,j}$ é a delta de Kronecker, pois não há incerteza alguma sobre o resultado desta variável aleatória.

No caso de termos duas variáveis aleatória X e Y , podemos definir outras quantidades entrópicas associadas à entropia de Shannon, listadas a seguir.

- Entropia Relativa

$$H(p_x||q_x) = \sum_x p_x \log \left(\frac{p_x}{q_x} \right) = -H(X) - \sum_x p_x \log(q_x). \quad (3.23)$$

A entropia relativa mede o quão próximas são duas distribuições p_x e q_x , para isso as duas distribuições devem ser definidas sobre o mesmo índice (no caso, x). De fato, pode-se mostrar[36] que $H(p_x||q_x) \geq 0$, valendo a igualdade apenas se $p_x = q_x$.

- Entropia Conjunta

$$H(X, Y) = - \sum_{x,y} p_{(x,y)} \log p_{(x,y)}. \quad (3.24)$$

A entropia conjunta mede a ignorância acerca do par de variáveis aleatórias (X, Y) . Fica claro da definição acima que se X e Y são variáveis aleatórias independentes (isto é, $p_{(x,y)} = p_x p_y$), então $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$. Além disso, a entropia conjunta satisfaz a seguinte relação:

$$H(X, Y) \geq H(X), H(Y). \quad (3.25)$$

Desta maneira a incerteza sobre o par (X, Y) é sempre maior ou igual que a incerteza sobre apenas X ou apenas Y .

- Entropia Condicional

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y). \quad (3.26)$$

A entropia condicional mede a ignorância sobre X dado que conhecemos o resultado de Y . É importante notar que $H(X|Y)$ não é simétrica com respeito à troca de X e Y . Além disso, as seguintes desigualdades são satisfeitas[36]:

$$0 \leq H(X|Y) \leq H(X), \quad (3.27)$$

onde $H(X|Y) = 0$ apenas se $X = f(Y)$, ou seja, o resultado de X é completamente determinado pelo resultado de Y , e $H(X|Y) = H(X)$ se X e Y são independentes.

- Informação Mútua

$$H(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (3.28)$$

$$= H(X) - H(X|Y) \quad (3.29)$$

Como o nome diz, a informação mútua mede a informação comum às duas variáveis aleatórias. Como consequência das desigualdades (3.27), $H(X : Y)$ também satisfaz as seguintes desigualdades:

$$0 \leq H(X : Y) \leq H(Y), \quad (3.30)$$

onde $H(X : Y) = 0$ se X e Y são independentes e $H(X : Y) = H(Y)$ se Y é função de X .

A transição para a teoria de informação quântica é feita basicamente substituindo-se a distribuição de probabilidade por um operador densidade $\hat{\rho}$ e a entropia de Shannon pela

entropia de von Neumann S que é dada por,

$$S(\hat{\rho}) = -Tr[\hat{\rho} \log \hat{\rho}]. \quad (3.31)$$

A entropia de von Neumann pode ser interpretada como a incerteza sobre o estado do sistema quântico ao qual está associado o operador densidade $\hat{\rho}$. Listaremos algumas propriedades satisfeitas pela entropia de von Neumann[37].

- A entropia de von Neumann é invariância por transformações unitárias.
- A entropia de von Neuman de um operador densidade $\hat{\rho}$ que atua em um espaço de Hilbert de dimensão N satisfaz a seguinte desigualdade,

$$0 \leq S(\hat{\rho}) \leq \log \frac{1}{N}, \quad (3.32)$$

onde o limitante inferior é a entropia de von Neumann de um estado puro (definida como sendo zero) e o limitante superior corresponde à entropia de von Neumann do estado completamente aleatório.

- A entropia de von Neumann é concava, ou seja,

$$S(\lambda_1 \hat{\rho}_1 + \lambda_2 \hat{\rho}_2 + \dots + \lambda_n \hat{\rho}_n) \geq \lambda_1 S(\hat{\rho}_1) + \lambda_2 S(\hat{\rho}_2) + \dots + \lambda_n S(\hat{\rho}_n). \quad (3.33)$$

Segundo a interpretação adotada, a concavidade de S implica que a nossa ignorância sobre o estado do sistema é maior se não sabemos como o sistema foi preparado.

- A entropia de von Neumann é sub-aditiva. Suponha que temos um sistema bipartite, então:

$$S(\hat{\rho}) \leq S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_B), \quad (3.34)$$

onde $\hat{\rho}_i$ é o operador densidade reduzido com relação ao subsistema i . A igualdade é válida na expressão acima apenas se $\hat{\rho} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$. A sub-aditividade de S , que discorda totalmente da desigualdade (3.25), reflete o fato de que podemos ter informação completa sobre o sistema como um todo ($S(\hat{\rho}) = 0$), mas termos incerteza sobre os subsistemas ($S(\hat{\rho}_1), S(\hat{\rho}_2) \neq 0$). Isto não acontece no caso clássico.

Procuraremos agora a extensão quântica das demais quantidades entrópicas definidas no caso clássico. Para tal vamos supor que estamos lidando com um sistema bipartite descrito pelo operador densidade $\hat{\rho}$. Para a entropia condicional, a extensão quântica não é tão direta como dito anteriormente. Neste caso a entropia condicional pretende mensurar a

nossa informação sobre o subsistema A, dado que fizemos uma medição do subsistema B e conhecemos o seu estado. Existe, porém, uma gama de medições que podem ser feitas sobre o subsistema B, sendo necessária a escolha um conjunto completo de operadores de medição sobre o subsistema B, $\{\Pi_j^B\}$, onde o índice j é relativo aos diferentes resultados que podem ser obtidos no processo de medição. Fazendo medida sobre o subsistema B, podemos encontrar o resultado j com probabilidade $p_j = \text{Tr}[(\Pi_j^B \otimes \mathbb{1}_A)\hat{\rho}]$ (onde $\mathbb{1}_A$ é o operador identidade do subsistema A), e o estado do subsistema A é então descrito pelo seguinte operador densidade:

$$\hat{\rho}_{A|\Pi_j^B} = \frac{(\Pi_j^B \otimes \mathbb{1}_A)\hat{\rho}(\Pi_j^B \otimes \mathbb{1}_A)}{\text{Tr}[(\Pi_j^B \otimes \mathbb{1}_A)\hat{\rho}]}.$$
 (3.35)

Podemos desta maneira definir a entropia condicional com relação a $\{\Pi_j^B\}$ como sendo

$$S(A|\{\Pi_j^B\}) = \sum_j p_j S(\hat{\rho}_{A|\Pi_j^B}).$$
 (3.36)

Ao tentar definir a extensão quântica da informação mútua esbarramos em um fato notável. Se utilizamos a expressão (3.28), a extensão é direta, bastando substituir a entropia de Shannon pela entropia de von Neumann, e chegamos à seguinte expressão:

$$I(\hat{\rho}) = S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_B) - S(\hat{\rho}).$$
 (3.37)

A expressão acima é manifestamente invariante por transformações unitárias, portanto podemos escolher a decomposição que bem entendermos para $\hat{\rho}$. Porém, utilizando a expressão (3.29), a extensão quântica da informação mútua é:

$$J(\hat{\rho}) = S(\hat{\rho}_A) - S(A|\{\Pi_j^B\}).$$
 (3.38)

A expressão acima, além de ser assimétrica com relação aos subsistemas A e B, também depende do conjunto de operadores de medição $\{\Pi_j^B\}$ escolhido. Claramente as expressões (3.37) e (3.38) são incompatíveis.

3.3 Discórdia Quântica

A discórdia quântica \mathcal{D} é definida justamente como a diferença entre $I(\hat{\rho})$ e $J(\hat{\rho})$ [38, 40], sujeita a um processo de minimização:

$$\mathcal{D}(A|B) = \min_{\{\Pi_j^B\}} \{I(\hat{\rho}) - J(\hat{\rho})\} = S(\hat{\rho}_A) - S(\hat{\rho}) + \min_{\{\Pi_j^B\}} \{S(A|\{\Pi_j^B\})\}$$
 (3.39)

Fica claro da definição acima que a discórdia quântica é assimétrica com relação aos subsistemas A e B.

A discórdia quântica tem as seguintes propriedades:

•

$$\mathcal{D}(A|B) \geq 0. \quad (3.40)$$

O processo de medir o subsistema B e inferir o estado do subsistema A implica em um aumento de entropia, de maneira que $S(A|\{\Pi_j^B\}) \geq S(\hat{\rho}) - S(\hat{\rho}_A)$.

•

$$\mathcal{D}(A|B) = 0 \Leftrightarrow \hat{\rho} = \sum_j \Pi_j^B \hat{\rho} \Pi_j^B. \quad (3.41)$$

•

$$\mathcal{D}(A|B) = S_V(\hat{\rho}). \quad (3.42)$$

De fato, se temos um estado puro, $S(\hat{\rho}) = S(A|\{\Pi_j^B\}) = 0$, e $\mathcal{D}(A|B) = S(\hat{\rho}_A) = S_V(\hat{\rho})$. Portanto a discórdia quântica representa uma medida de emaranhamento para estados puros.

- $\mathcal{D}(A|B)$ pode ser diferente de zero para estado separáveis.

Medidas da discórdia quântica em estados de Werner separáveis indicam discórdia diferente de zero. É importante frisar que isto só pode acontecer em estados mistos. Para estados puros, discórdia quântica e emaranhamento são sinônimos, como atesta a eq.(3.42).

Com exceção da terceira propriedade, todas as demais foram demonstradas em [38], onde a discórdia quântica foi introduzida.

Dado que a relação (3.41), satisfeita pelo operador densidade de um estado cuja discórdia é zero, é a mesma condição satisfeita pelo operador densidade de um estado que sofreu descoerência, e sabendo que a descoerência é o mecanismo pelo qual o comportamento clássico emerge em sistemas quânticos, é de se esperar que a discórdia esteja de alguma forma ligada às características não-clássicas de um sistema. De fato, a discórdia quântica é uma medida das correlações quânticas entre os subsistemas A e B, sendo que o processo de minimização visa encontrar um conjunto de operadores de medição que perturbe o mínimo possível o subsistema A. Discórdia quântica igual a zero indica que o estado pode ser equivalentemente descrito por uma distribuição de probabilidade clássica, só podendo neste caso haver correlações clássicas entre os subsistemas. Do ponto de vista operacional a discórdia é uma grandeza de difícil cálculo no caso geral, uma vez que uma complexa minimização tem de ser feita.

Nos últimos anos, uma grande atenção tem sido dada para a discórdia quântica. O motivo deste súbito interesse se baseia na possibilidade da discórdia quântica estar por trás da eficiência de alguns protocolos de computação quântica que não utilizam estados emaranhados. Esta possibilidade foi primeiramente considerada em [39] e desde então uma grande quantidade de artigos tem trabalhado em cima deste tópico. O atrativo maior em se trabalhar com a discórdia quântica e não com o emaranhamento se deve basicamente à robustez da discórdia quântica frente a interações com o ambiente se comparada ao emaranhamento. Caso esta conjectura se confirme, a realização de um computador quântico estará consideravelmente mais próxima.

Capítulo 4

Estados Gaussianos

Estados Gaussianos compreendem uma série de estados quânticos que são mais facilmente manipuláveis do ponto de vista experimental e ocupam um lugar de destaque quando se trata de informação quântica com estados de variável contínua. Não bastasse o apelo experimental, estados Gaussianos possuem uma estrutura matemática interessante e mais simples de tratar do que outros estados de variável contínua. Exemplos de estados Gaussianos são estados coerentes, estados comprimidos e o vácuo da eletrodinâmica quântica. Neste capítulo apresentaremos a definição e as principais propriedades destes estados.

4.1 Sistema de N bósons

Seja um sistema de N bósons, onde podemos definir operadores de criação e aniquilação com as relações usuais de comutação para bósons: $[\hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger] = \delta_{kl}$, onde $k, l = 1, 2, \dots, n$. O espaço de Hilbert do sistema é dado por $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \mathcal{H}_N$, onde \mathcal{H}_k é o espaço de Hilbert do bóson k . O Hamiltoniano do sistema (bósons não interagentes) é dado por $H = \sum_{k=1}^N \hbar\omega_k (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2})$ e os operadores de quadratura (posição e momento) são dados por:

$$\hat{q}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger), \quad \hat{p}_k = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger). \quad (4.1)$$

Se definimos um vetor $\hat{\mathbf{R}} = \{\hat{q}_1, \hat{p}_1, \dots, \hat{q}_N, \hat{p}_N\}$, podemos escrever a relação de comutação da seguinte maneira:

$$[\hat{R}_k, \hat{R}_l] = i\Omega_{k,l}, \quad (4.2)$$

onde a matriz Ω é dada por:

$$\Omega = \oplus_{k=1}^N \omega, \quad \omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

ω é chamada matriz simplética.

Uma base conveniente do espaço \mathcal{H} é a base formada pelos estados de Fock $|n_1, n_2, \dots, n_N\rangle$ e o chamado estado de vácuo do sistema é dado por $|0\rangle = |0, 0, \dots, 0\rangle$, satisfazendo a condição $a_k|0\rangle = 0$.

4.1.1 Matriz de covariância

A matriz de covariância é definida da seguinte maneira:

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{2} \langle \{\hat{R}_i, \hat{R}_j\} \rangle - \langle \hat{R}_i \rangle \langle \hat{R}_j \rangle, \quad (4.4)$$

onde $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ é o anticomutador dos operadores \hat{A} e \hat{B} e $\langle \hat{A} \rangle = Tr[\hat{\rho}\hat{A}]$ é a média do operador \hat{A} . A matriz de covariância é simétrica e positiva definida. Pode-se mostrar que as relações de incerteza entre os operadores canônicos se traduzem em termos da matriz de covariância na seguinte expressão[41]:

$$\sigma + \frac{i}{2}\Omega \geq 0. \quad (4.5)$$

Como foi dito anteriormente, σ e Ω são matrizes, e a expressão acima diz matriz $\sigma + \frac{i}{2}\Omega$ é semi-definida positiva, ou seja, cada um dos seus autovalores é maior ou igual que zero. Vamos considerar o caso da matriz de covariância de um sistema de N bósons em equilíbrio térmico com um dado reservatório. Neste caso $\hat{\rho} = \otimes_{k=1}^N \hat{\rho}_k$ [43], onde

$$\hat{\rho}_k = \frac{e^{-\beta \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k}}{Tr[e^{-\beta \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k}]} = \frac{1}{1 + N_k} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{N_k}{1 + N_k} \right)^n |n_k\rangle \langle n_k|, \quad (4.6)$$

onde $N_k = (e^{\hbar\omega_k\beta} - 1)^{-1}$ é o número médio de quanta de energia térmica no modo k e $\beta = (K_B T)^{-1}$, sendo T a temperatura do reservatório. Desta maneira, a matriz de covariância do sistema é dada por,

$$\sigma = \frac{1}{2} \text{Diag}(2N_1 + 1, 2N_2 + 1, \dots, 2N_N + 1). \quad (4.7)$$

4.2 Funções Características e Funções de Quasi-Probabilidade

Um estado quântico é completamente definido pelo seu operador densidade $\hat{\rho}$. No entanto, existe uma maneira alternativa, e completamente equivalente, de descrever um estado quântico através das chamadas funções características ou funções de quasi-probabilidade[45]. De fato, podemos obter tais funções a partir de $\hat{\rho}$ e vice-versa. As funções características são

dadas pela seguinte expressão:

$$\chi(\xi, s) = Tr[\hat{\rho}\hat{D}(\xi)] \exp\left[\frac{s|\xi|^2}{2}\right], \quad (4.8)$$

onde $\chi : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{C}$ e $\hat{D}(\xi) = \exp[i\hat{R}^T\Omega\xi]$, sendo o domínio chamado de espaço de fase quântico, em analogia com a mecânica clássica[46]. A variável s pode assumir os valores 1, 0 e -1. A partir das funções características podemos definir, via transformada de fourier, as funções de quasi-probabilidade, dadas por:

$$W(\alpha, s) = \frac{1}{\pi^{2N}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\xi, s) \exp[\xi^*\alpha - \xi\alpha^*] d^{2N}\xi \quad (4.9)$$

Funções de quasi-probabilidade são funções reais e normalizadas que permitem o cálculo dos momentos associados a produtos especialmente ordenados dos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger . Os valores assumidos por s estão associados à ordem de \hat{a} e \hat{a}^\dagger nesses produtos. $W(\alpha, 1) = P(\alpha)$ é a chamada representação P de Glauber-Sudarshan[47, 48] e está associada à ordenação normal dos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger (isto é, todos os operadores \hat{a}^\dagger na esquerda e todos os operadores \hat{a} na direita). $W(\alpha, 0) = W(\alpha)$ é a função de Wigner[49] e está associada à ordenação simétrica dos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger . Por fim, $W(\alpha, -1) = Q(\alpha)$ é a função de Husimi ou função Q[50], e está associada à ordenação anti-normal dos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger (isto é, todos os operadores \hat{a} na esquerda e todos os operadores \hat{a}^\dagger na direita). Dado um operador $\hat{O} = f(\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger)$, $k = 1, 2, \dots, N$, temos a seguinte identidade:

$$\langle \hat{O} \rangle = Tr[\hat{\rho}\hat{O}] = \int_{\mathbb{R}^{2N}} W(\alpha, s) f(\alpha, \alpha^*) d^{2N}\alpha, \quad (4.10)$$

onde $f(\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger)$ deve ser uma função normalmente, simetricamente ou anti-normalmente ordenada, de acordo com o valor de s escolhido (1, 0 e -1, respectivamente). Alguns resultados que seguem diretamente da eq.(4.10), por exemplo, a normalização da função de quasi-probabilidade:

$$Tr[\hat{\rho}] = 1 = \int_{\mathbb{R}^{2N}} W(\alpha, s) d^{2N}\alpha, \quad (4.11)$$

e a pureza μ :

$$\mu = Tr[\hat{\rho}^2] = \int_{\mathbb{R}^{2N}} W^2(\alpha, s) d^{2N}\alpha = \int_{\mathbb{R}^{2N}} |\chi(\alpha, s)|^2 d^{2N}\alpha. \quad (4.12)$$

A última igualdade segue do teorema de Parseval e do fato da função de quasi-probabilidade ser uma função real.

Dado que as funções de quasi-probabilidade nos permitem calcular o valor médio de operadores por meio de uma integral ponderada pela função de quasi-probabilidade, podemos dizer que tais funções são análogos quânticos das distribuições de probabilidade definidas

no espaço de fase da mecânica clássica, não podendo ser diretamente interpretadas com distribuições de probabilidade pois a princípio estas funções podem assumir valores negativos.

Para o caso específico da função de Wigner, podemos escrevê-la explicitamente em termos dos autovalores dos operadores de quadratura p_k e q_k :

$$W(p, q) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \exp\left[-\frac{2iy\rho}{\hbar}\right] \langle q - y | \rho | q + y \rangle dy. \quad (4.13)$$

As referências [45] e [51] fazem um bom tratamento em cima deste assunto.

4.3 Definição e Propriedades dos Estados Gaussianos

Definição 3 Um estado $\hat{\rho}$ é Gaussiano se a sua função de Wigner tem a seguinte forma:

$$W(\hat{\mathbf{R}}) = \frac{\exp[-\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{R}} - \langle \hat{\mathbf{R}} \rangle)^T \sigma^{-1} (\hat{\mathbf{R}} - \langle \hat{\mathbf{R}} \rangle)]}{(2\pi)^N \sqrt{\text{Det}[\sigma]}}, \quad (4.14)$$

onde $\hat{\mathbf{R}} = \{\hat{q}_1, \hat{p}_1, \hat{q}_2, \hat{p}_2, \dots, \hat{q}_N, \hat{p}_N\}$ e σ é a matriz de covariância associada a $\hat{\mathbf{R}}$.

Temos então que estados Gaussianos são completamente caracterizados pelos seus primeiros e segundos momentos. Um exemplo de estado Gaussiano é o estado coerente. O estado coerente é definido como sendo um auto-estado do operador de aniquilação \hat{a} , e é dado pela aplicação do operador de deslocamento de Weyl $\hat{D}(\alpha)$ no estado de vácuo,

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})|0\rangle, \quad (4.15)$$

de maneira que $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$. No caso de N modos, o estado coerente, que neste caso é o produto tensorial de estados coerentes de cada modo, pode ser escrito de maneira equivalente como,

$$|\xi\rangle = \hat{D}(\xi)|0\rangle = \exp[i\hat{R}^T \Omega \xi]|0\rangle, \quad (4.16)$$

de maneira que $\hat{a}_k|\xi\rangle = (\xi_k + i\xi_{k+1})|\xi\rangle$, onde ξ é um vetor pertencente ao espaço de fase quântico de dimensão $2N$ e $|0\rangle$ é o estado de vácuo de N modos.

4.3.1 Transformações Simpléticas

Como já foi exposto anteriormente, estados Gaussianos possuem vantagens tanto do ponto de vista teórico quanto experimental. Logo, é interessante saber as condições que deve satisfazer um Hamiltoniano H , de maneira que o estado evoluído a partir de um estado Gaussiano também seja um estado Gaussiano. De fato, mostrou-se[52] que Hamiltonianos lineares ou bilineares nos modos do campo preservam o caráter Gaussiano de um estado com

relação à evolução temporal. Ou seja, o Hamiltoniano mais geral com o qual pretendemos trabalhar é

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^n g_k^{(1)} \hat{a}_k^\dagger + \sum_{k \geq l=1}^n g_{kl}^{(2)} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l + \sum_{k,l=1}^n g_{kl}^{(3)} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l^\dagger + h.c. \quad (4.17)$$

A transformação gerada por um Hamiltoniano do tipo (4.17) nos primeiros e segundos momentos é[43],

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\Rightarrow F\mathbf{R} + \mathbf{d}, \\ \sigma &\Rightarrow F\sigma F^T, \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde \mathbf{d} é um vetor real e F é uma matriz simplética. O inverso também é verdadeiro, qualquer transformação do tipo (4.18), chamada transformação simplética é gerada por uma transformação unitária induzida por um Hamiltoniano do tipo (4.17)[53][54]. As matrizes simpléticas já são conhecidas da mecânica clássica. A condição para que uma transformação de $(Q, P) \Rightarrow (Q', P')$ seja uma transformação canônica é que o jacobiano da transformação seja uma matriz simplética. Uma matriz S é simplética se ela satisfaz a seguinte propriedade,

$$S^T \Omega S = \Omega, \quad (4.19)$$

onde Ω é a matriz (4.3). O grupo das matrizes reais $2N \times 2N$ satisfazendo esta condição formam um grupo, o grupo simplético $Sp(2N, \mathbb{R})$.

Como o vetor de primeiros momentos \mathbf{R} pode ser arbitrariamente modificado por meio de transformações unitárias locais sobre $\hat{\rho}$, conclui-se então que toda informação sobre correlações quânticas de um estado Gaussiano deve estar contida na matriz de covariância, pois as correlações quânticas devem ser invariantes por transformações unitárias locais.

4.3.2 Espectro Simplético

Dado que a matriz de covariância contém toda a informação que precisamos para caracterizar as correlações quânticas de um estado Gaussiano, cabe enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3 (Williamson) *Dado $V \in M(2N, \mathbb{R})$, simétrica e positiva definida, existe $S \in Sp(2N, \mathbb{R})$ e $D \in M(N, \mathbb{R})$ diagonal e positiva definida tal que:*

$$V = S^T \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} S. \quad (4.20)$$

O teorema de Williamson garante que existe uma transformação simplética que diagonaliza a matriz de covariância. Ou seja, podemos transformar a matriz de covariância de

um estado Gaussiano em uma matriz de covariância semelhante à do sistema formado por N bósons em equilíbrio térmico. Dado que o grupo das transformações simpléticas é gerado por Hamiltonianos no máximo bilineares nos modos dos campos[53], o sentido físico desta diagonalização é que todo estado Gaussiano $\hat{\rho}$ pode ser obtido do estado de N bósons em equilíbrio térmico a partir de uma transformação unitária U associada à matriz simplética S . O conjunto de autovalores gerados neste processo, que chamaremos de $\nu_k, k = 1, 2, \dots, N$, podem ser obtidos a partir dos autovalores da matriz $i\Omega\sigma$ e são chamados autovalores simpléticos ou espectro simplético.

O princípio de incerteza de Heisenberg pode ser expresso em termos dos autovalores simpléticos. Seja S a matriz simplética que diagonaliza a matriz de covariância σ , dado que a transformação de similaridade de uma matriz definida semi-positiva é definida semi-positiva,

$$S^T(\sigma + \frac{i}{2}\Omega)S \geq 0 \quad (4.21)$$

$$V + \frac{i}{2}\Omega \geq 0 \quad (4.22)$$

a última desigualdade implica, pela estrutura da matriz Ω , que cada submatriz 2×2 de $(V + i\Omega)$ do tipo

$$\begin{bmatrix} \nu_k & i \\ -i & \nu_k \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

deve ser definida positiva, o que por sua vez implica que $\nu_k \geq 1/2$. Se definirmos $\nu_- = \text{Min}\{\nu_k\}$, o princípio de incerteza pode ser escrito simplesmente como a condição $\nu_- \geq 1/2$.

4.4 Sistemas *Bipartite*

Vamos considerar agora estados Gaussianos de um sistema *bipartite* cujo espaço de Hilbert é dado por $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Suponha que temos m modos no sistema A e n modos no sistema B, como o produto tensorial de espaços de Hilbert se traduz como uma soma direta no espaço de fase, a matriz de covariância do sistema bipartite pode ser escrita de maneira genérica na seguinte forma:

$$\sigma = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

onde A é uma matriz $(2m \times 2m)$, B é uma matriz $(2n \times 2n)$ e C é uma matriz $(2m \times 2n)$. Como as matrizes A e B são simétricas e definidas positivas, podemos a partir do teorema de Williamson encontrar matrizes simpléticas S_A e S_B , associadas aos operadores unitários

$U_A \in \mathcal{H}_A$ e $U_B \in \mathcal{H}_B$, respectivamente, que as diagonalizam. Temos então:

$$(S_A \oplus S_B)^T \sigma (S_A \oplus S_B) = \begin{bmatrix} S_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_B \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_B \end{bmatrix}^T \quad (4.25)$$

$$= \begin{bmatrix} S_A^T A S_A & S_A C S_B^T \\ S_B C^T S_A^T & S_B^T B S_B \end{bmatrix}^T \quad (4.26)$$

$$= \begin{bmatrix} V_A & S_A C S_B^T \\ S_B C^T S_A^T & V_B \end{bmatrix}^T, \quad (4.27)$$

onde V_A e V_B são matrizes diagonais. Escrevendo a matriz de covariância na forma (4.24), invariantes simpléticos com respeito a transformações simpléticas pertencentes ao grupo $Sp(2m, \mathbb{R}) \otimes Sp(2n, \mathbb{R})$ (é bom lembrar que $Sp(2m, \mathbb{R}) \otimes Sp(2n, \mathbb{R}) \subset Sp(2m + 2n, \mathbb{R})$) podem ser indentificados, como $I_1 = \text{Det}[A]$, $I_2 = \text{Det}[B]$, $I_3 = \text{Det}[C]$ e $I_4 = \text{Det}[\sigma]$. Em particular, no caso em que $m = n = 1$, algumas simplificações a mais são possíveis, e σ pode ser escrita na seguinte forma, chamada forma normal¹:

$$\sigma = \begin{bmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & d \\ c & 0 & b & 0 \\ 0 & d & 0 & b \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Os invariantes simpléticos neste caso são: $I_1 = a^2$, $I_2 = b^2$, $I_3 = cd$ e $I_4 = (ab - c^2)(ab - d^2)$. Quando $a = b$, o estado é chamado simétrico. Os autovalores simpléticos em termos dos invariantes simpléticos são dados por:

$$2\nu_{\pm}^2 = I_1 + I_2 + 2I_3 \pm \sqrt{(I_1 + I_2 + 2I_3)^2 - 4I_4}. \quad (4.29)$$

Esta seção teve como base o que foi apresentado em [46]. Uma discussão mais completa e detalhada sobre estados Gaussianos pode ser encontrada em [43].

4.5 Correlações Quânticas em Estados Gaussianos de Dois Modos

Nesta seção apresentaremos formas de se mensurar correlações quânticas em estados Gaussianos de dois modos. Limitar-nos-emos a tais estados pois estes são os estados para os quais existem resultados mais expressivos e além disso são os estados que serão importantes para o trabalho aqui desenvolvido.

¹A forma normal pode ser obtida sempre que $m = n$. A ref. [43] mostra como se prova esta propriedade.

Como já foi dito anteriormente, as correlações quânticas de um estado Gaussiano devem depender apenas da matriz de covariância do mesmo, uma vez que os primeiros momentos podem ser arbitrariamente modificados por meio de transformações unitárias locais e sabemos que as correlações quânticas são invariantes por tais transformações. Ou seja, tudo que precisamos saber sobre um estado Gaussiano para calcular as correlações quânticas no mesmo é a sua matriz de covariância. Sabemos também que transformações unitárias correspondem a transformações simpléticas no espaço de fase, portanto transformações desta natureza não alteram a informação sobre as correlações quânticas contidas na matriz de covariância. A primeira pergunta que se deve fazer é como qualificar um estado Gaussiano como separável ou não. Como discutimos anteriormente, o critério de PPT nos dá uma maneira relativamente simples de resolver este problema, bastando analisar a transposta parcial do operador densidade. Porém, como proceder no caso de estados Gaussianos? Já vimos que estados Gaussianos são tratados de maneira simples no espaço de fase e o estudo do operador densidade necessitaria que abrissemos mão do espaço de fase e voltássemos a trabalhar no espaço de Hilbert, o que não parece uma boa solução. O mais interessante seria descobrir como a operação de transposição parcial age no espaço de fase. Felizmente isso já foi feito para estados Gaussianos de dois modos e foi provado[42] que neste caso a operação de transposição parcial com relação ao subsistema A corresponde a uma operação de reversão temporal do subsistema A, não modificando o subsistema B. Tal operação corresponde à aplicação da matriz

$$\Delta_A = \text{Diag}\{1, -1\} \oplus \mathbf{1}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

à matriz de covariância do sistema. Caso a transposição parcial seja feita com relação ao subsistema B, basta aplicar o operador $\Delta_B = \mathbf{1}_2 \oplus \text{Diag}\{1, -1\}$. Como o critério PPT assera que a transposta parcial do operador densidade tem que ser por sua vez um operador densidade, a transformação da matriz de covariância com relação à matriz Δ_A (ou Δ_B) deve por sua vez ser uma matriz de covariância fisicamente plausível, ou seja, que satisfaça as relações canônicas de incerteza. Desta maneira, definindo $\tilde{A} \equiv \Delta_i A \Delta_i$, sendo A uma matriz 4×4 arbitrária temos,

$$\tilde{\sigma} + \frac{i}{2}\Omega \geq 0. \quad (4.31)$$

Designando os invariânciastes simpléticos da matriz de covariância $\tilde{\sigma}$ por \tilde{I}_i , pode-se mostrar

as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_1 &= I_1, \\
\tilde{I}_2 &= I_2, \\
\tilde{I}_3 &= -I_3, \\
\tilde{I}_4 &= I_4.
\end{aligned}
\tag{4.32}$$

A partir das relações acima, podemos calcular os autovalores simpléticos utilizando a expressão (4.29), e impondo a condição (4.31),

$$\tilde{\nu}_- \geq \frac{1}{2},
\tag{4.33}$$

onde

$$2\tilde{\nu}_\pm^2 = I_1 + I_2 - 2I_3 \pm \sqrt{(I_1 + I_2 - 2I_3)^2 - 4I_4}.
\tag{4.34}$$

Desta forma temos uma maneira simples para classificar um estado Gaussiano de dois modos como separável ou não. Simon et. al.[42] mostraram ainda que o critério PPT é uma condição necessária e suficiente para a separabilidade de estados Gaussianos de dois modos. Devido a este último fato, a negatividade logarítmica pode ser usada como uma medida de emaranhamento. De fato, foi mostrado em [33] que a negatividade logarítmica $E_{\mathcal{N}}$ pode ser calculada através dos invariantes simpléticos,

$$E_{\mathcal{N}} = \begin{cases} 0, & \text{se } \tilde{\nu}_- \geq \frac{1}{2}, \\ \log(2\tilde{\nu}_-), & \text{se } \tilde{\nu}_- < \frac{1}{2}. \end{cases}
\tag{4.35}$$

A negatividade logarítmica na verdade quantifica o quanto a desigualdade (4.33) é violada. Portanto, agora também temos uma forma simples de mensurar o emaranhamento de um estado Gaussiano de dois modos.

Falta agora uma maneira de medir a discórdia em estados Gaussianos. Porém, antes de discutir este problema, é importante que encontremos uma maneira de calcular a entropia de von Neuman. Como já foi discutido antes, a entropia de von Neuman é invariante por transformações unitárias, ou seja, se pretendemos escrevê-la como função da matriz de covariância, podemos indiscriminadamente realizar transformações simpléticas na matriz de covariância sem que isso modifique a entropia de von Neuman. Dado este fato, é de se esperar que alguma simplificação sobre o problema possa ser obtida se operarmos a diagonalização simplética sobre a matriz de covariância. Seja ς a matriz de covariância depois de operada a diagonalização simplética, então

$$\varsigma = \text{diag}\{\nu_-, \nu_-\} \oplus \text{diag}\{\nu_+, \nu_+\}.
\tag{4.36}$$

Como a soma direta no espaço de fase se traduz como um produto tensorial no espaço de Hilbert, e dado que $S(\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B) = S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_B)$, a entropia de von Neuman de um estado Gaussiano de dois modos pode ser calculada como a soma das entropias de von Neuman de cada um dos dois modos. Pode-se mostrar então que[55],

$$S(\hat{\rho}) = f(\nu_+) + f(\nu_-), \quad (4.37)$$

onde $f(\nu) = (\nu + \frac{1}{2}) \ln(\nu + \frac{1}{2}) - (\nu - \frac{1}{2}) \ln(\nu - \frac{1}{2})$ é a entropia de von Neuman do estado Gaussiano de um modo ao qual está associado o autovalor simplético ν . A extensão para um estado Gaussiano de N modos $\hat{\rho}$ é direta, sendo dada por,

$$S(\rho) = \sum_{i=1}^N f(\nu_i). \quad (4.38)$$

Uma vez que já temos uma maneira de calcular a entropia de von Neuman, podemos utilizar a expressão (3.39) para calcular a discórdia quântica, e chegamos à seguinte expressão:

$$\mathcal{D}(\sigma) = f(\sqrt{I_2}) - f(\nu_+) - f(\nu_-) + \min_{\{\Pi_j^B\}} \{S(A|\{\Pi_j^B\})\}. \quad (4.39)$$

No entanto, o processo de minimização envolvido no cálculo da discórdia quântica é altamente não-trivial, e não se conhece ainda uma expressão para a discórdia em estados Gaussianos. Porém, se limitarmos os conjuntos completos de operadores de medição $\{\Pi_j^B\}$ aos chamados operadores Gaussianos, o cenário se torna mais animador. Operadores Gaussianos são operadores que, se aplicados em um estado Gaussiano, levam em outro estado Gaussiano. Se limitarmos o processo de minimização a operadores Gaussianos, temos então a chamada discórdia Gaussiana. Obviamente, a discórdia Gaussiana será um limitante superior da discórdia usual. De fato, para tal conjunto de operadores pode-se encontrar um conjunto de operadores ótimos[56, 57]. Nessa condição chegou-se à seguinte expressão para a discórdia Gaussiana:

$$\mathcal{D}(A : B) = f(\sqrt{I_2}) - f(\nu_+) - f(\nu_-) + f(\sqrt{\epsilon}). \quad (4.40)$$

onde,

$$\epsilon = \begin{cases} \frac{2I_3^2 + (I_2 - 1)(I_4 - I_1) + 2|I_3| \sqrt{I_3^2 + (I_2 - 1)(I_4 - I_1)}}{(I_2 - 1)^2}, \\ \text{se } (I_4 - I_1 I_2)^2 \leq (1 + I_2) I_3^2 (I_1 + I_4); \\ \frac{I_1 I_2 - I_3^2 + I_4 - \sqrt{I_3^4 + (I_4 - I_1 I_2)^2 - 2I_3^2 (I_1 I_2 + I_4)}}{2I_2}, \\ \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.41)$$

Infelizmente não se conhecem maneiras de estimar o quão próxima da discórdia usual está

a discórdia Gaussiana.

Capítulo 5

O Sistema

Consideraremos um sistema formado por osciladores harmônicos idênticos acoplados entre si por um acoplamento dependente do tempo e em contato com um mesmo banho térmico de osciladores harmônicos. O Hamiltoniano do sistema é dado por,

$$H = \underbrace{\frac{P_1^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}X_1^2 + \frac{P_2^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}X_2^2 + c(t)X_1X_2}_{H_S} - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \left[c_k x_k (X_1 + X_2) + \frac{c_k^2}{2m_k \omega_k^2} (X_1 + X_2)^2 \right]}_{H_I} + \underbrace{\sum_k \left[\frac{P_k}{2m_k} + \frac{m_k \omega_k^2}{2} x_k^2 \right]}_{H_B}, \quad (5.1)$$

onde H_S é o Hamiltoniano do sistema e $c(t) = mc_0 + mc_1 \cos(\omega_D t)$. H_I é o Hamiltoniano responsável pela interação entre o sistema e o banho, o segundo termo dentro do somatório de H_I corresponde ao contra-termo, que evita a renormalização do potencial harmônico. Finalmente, H_B é o Hamiltoniano do banho de osciladores.

O primeiro passo para o estudo deste sistema é a definição dos modos normais ‘+’ e ‘-’, dados por,

$$\begin{cases} X_+ = (X_1 + X_2)/\sqrt{2} \\ P_+ = (P_1 + P_2)/\sqrt{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} X_- = (X_1 - X_2)/\sqrt{2} \\ P_- = (P_1 - P_2)/\sqrt{2} \end{cases}, \quad (5.2)$$

Nestas novas variáveis, o Hamiltoniano H pode ser escrito da seguinte forma:

$$H = H_+ + H_-, \quad (5.3)$$

onde,

$$H_+ = \frac{P_+^2}{2m} + \frac{m\Omega_+^2(t)}{2}X_+^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{P_k^2}{2m_k} + \frac{m_k \omega_k^2}{2} \left(x_k - \frac{\sqrt{2}c_k}{m_k \omega_k^2} X_+ \right)^2 \right] \quad (5.4)$$

é o Hamiltoniano do modo '+', com $\Omega_+^2(t) = \omega_0^2 + c_0 + c_1 \cos(\omega_D t)$, e

$$H_- = \frac{P_-^2}{2m} + \frac{m\Omega_-^2(t)}{2} X_-^2, \quad (5.5)$$

é o Hamiltoniano do modo '-', com $\Omega_-^2(t) = \omega_0^2 - c_0 - c_1 \cos(\omega_D t)$.

Escrito em termo dos modos normais, o Hamiltoniano pode ser colocado de uma forma separável, onde temos um oscilador paramétrico acoplado a um banho térmico de osciladores harmônicos, agora com uma constante de acoplamento $c'_k = \sqrt{2}c_k$, para o modo '+', e um oscilador paramétrico livre para o modo '-'. Podemos portanto estudar a dinâmica dos dois modos de maneira independente.

Neste trabalho estudaremos o caso em que os osciladores 1 e 2 foram preparados inicialmente nos estados coerentes $|\alpha_1\rangle$ e $|\alpha_2\rangle$. O estado coerente foi definido em (4.15) e sua função de onda adimensionalizada é dada por[6],

$$\langle x|\alpha\rangle = \left(\frac{\omega_0}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{\omega_0}{2}x^2 + \sqrt{2\omega_0}\alpha x - \frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\right]. \quad (5.6)$$

Logo a função de onda dos dois osciladores é dada por,

$$\langle x_1, x_2|\alpha_1, \alpha_2\rangle = \left(\frac{\omega_0}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\omega_0}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \sqrt{2\omega_0}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \frac{|\alpha_1|^2}{2} - \frac{\alpha_1^2}{2} - \frac{|\alpha_2|^2}{2} - \frac{\alpha_2^2}{2}\right]. \quad (5.7)$$

Escrevendo esta função de onda em termos das variáveis x_+ e x_- chegamos ao seguinte resultado:

$$\langle x_1, x_2|\alpha_1, \alpha_2\rangle = \left(\frac{\omega_0}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\omega_0}{2}(x_+^2 + x_-^2) + \sqrt{2\omega_0}(\alpha_+ x_+ + \alpha_- x_-) - \frac{|\alpha_+|^2}{2} - \frac{\alpha_+^2}{2} - \frac{|\alpha_-|^2}{2} - \frac{\alpha_-^2}{2}\right], \quad (5.8)$$

onde $\alpha_{\pm} = (\alpha_1 \pm \alpha_2)/\sqrt{2}$. Ou seja, se o estado inicial do osciladores é um estado coerente, o estados iniciais dos modos normais '+' e '-' também são estados coerentes. Este resultado é muito importante pois precisaremos saber o estado inicial dos modos normais para que possamos estudar a dinâmica dos mesmos.

Antes de prosseguir vamos escrever o Hamiltoniano em termos de quantidades adimensi-

onais. Definindo as grandezas adimensionais,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{t} = \frac{\omega_D t}{2} \\ \tilde{X}_\pm = \sqrt{\frac{m\omega_D}{2\hbar}} X_\pm \\ \tilde{P}_\pm = \sqrt{\frac{2}{\hbar m \omega_D}} P_\pm \\ \tilde{\omega}_0 = \frac{2\omega}{\omega_D} \\ \tilde{c}_1 = \frac{2c_1}{\omega_D^2} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{c}_0 = \frac{4c_0}{\omega_D^2} \\ \tilde{x}_k = \sqrt{\frac{m_k \omega_D}{2\hbar}} x_k \\ \tilde{P}_k = \sqrt{\frac{2}{\hbar m_k \omega_D}} P_k \\ \tilde{\omega}_k = \frac{2\omega_k}{\omega_D} \\ \tilde{c}_k = \frac{4c_k}{\sqrt{m m_k} \omega_D^2} \end{array} \right. , \quad (5.9)$$

podemos então escrever o Hamiltoniano da seguinte maneira:

$$\frac{2}{\hbar \omega_D} H = \underbrace{\frac{\tilde{P}_+^2}{2} + \frac{\tilde{\Omega}_+^2(\tilde{t})}{2} \tilde{X}_+^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\tilde{P}_k^2}{2} + \frac{\tilde{\omega}_k^2}{2} \left(\tilde{x}_k - \sqrt{2} \frac{\tilde{c}_k}{\omega_k^2} \tilde{X}_+ \right)^2 \right]}_{\tilde{H}_+} + \underbrace{\frac{\tilde{P}_-^2}{2} + \frac{\tilde{\Omega}_-^2(\tilde{t})}{2} \tilde{X}_-^2}_{\tilde{H}_-}, \quad (5.10)$$

onde $\tilde{\Omega}_\pm^2(\tilde{t}) = \tilde{\omega}_0^2 \pm \tilde{c}_0 \pm \tilde{c}_1 \cos(2\tilde{t})$.

Nas seções que se seguem trataremos o oscilador paramétrico quântico não-dissipativo, visando achar solução para modo ‘-’, e o oscilador paramétrico quântico dissipativo, para os regimes Markoviano e não-Markoviano, visando achar a solução para o modo ‘+’. No entanto, para melhor entendimento do problema, estudaremos primeiro o oscilador paramétrico dissipativo clássico.

5.1 O Oscilador Paramétrico Dissipativo Clássico

Uma partícula em um meio dissipativo, sujeita a um potencial do tipo $V(x, t) = \frac{m}{2}[\omega_0^2 + \epsilon \cos(\omega_D t)]$, no regime clássico, é descrita pela seguinte equação de movimento:

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + m\omega^2(t) = 0, \quad (5.11)$$

onde $\omega^2(t) = \omega_0^2 + \epsilon \cos(\omega_D t)$. Para trabalhar com grandezas adimensionais, faremos as seguintes reescalas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{t} = \frac{\omega_D t}{2} \\ \tilde{\omega}_0 = \frac{2\omega_0}{\omega_D} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{c}_1 = \frac{2c_1}{\omega_D^2} \\ \tilde{\gamma} = \frac{2\gamma}{\omega_D} \end{array} \right. . \quad (5.12)$$

Com estas modificações a eq. (5.11) toma a seguinte forma,

$$\ddot{x} + \tilde{\gamma}\dot{x} + \tilde{\omega}^2(\tilde{t})x = 0 \quad (5.13)$$

onde $\tilde{\omega}^2(\tilde{t}) = \tilde{\omega}_0^2 + 2\tilde{\epsilon} \cos(2\tilde{t})$ e as derivadas são tomadas com relação a \tilde{t} . Como só utilizaremos grandezas adimensionais, omitiremos o til no que se segue para melhor clareza das equações. Fazendo a mudança de variável, $x = Y e^{-\frac{\gamma t}{2}}$, podemos escrever as eq. (5.11) como,

$$\ddot{Y} + \left[\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} + 2\epsilon \cos(2t) \right] Y = 0 \quad (5.14)$$

A equação diferencial acima é uma equação de Mathieu e suas soluções não possuem uma representação analítica. Consideraremos as soluções $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ desta equação, satisfazendo as seguinte condições iniciais:

$$\begin{cases} \phi_1(t_0) = 0 \\ \dot{\phi}_1(t_0) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \phi_2(t_0) = 1 \\ \dot{\phi}_2(t_0) = 0 \end{cases}. \quad (5.15)$$

Como o Wronskiano de equação de Mathieu é independente do tempo[58], temos que,

$$W[\phi_1(t), \phi_2(t)] = W[\phi_1(0), \phi_2(0)] = \dot{\phi}_1(0)\phi_2(0) - \phi_1(0)\dot{\phi}_2(0) = 1, \quad (5.16)$$

ou seja, as soluções $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ são linearmente independentes. Definindo as seguintes funções,

$$\begin{cases} f_1(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} \phi_1(t) \\ f_2(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} \phi_2(t), \end{cases} \quad (5.17)$$

podemos escrever as soluções da equação (5.13),

$$x(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t), \quad (5.18)$$

onde α_1 e α_2 são constantes. Outro conjunto possível de soluções da eq. (5.14) são as chamadas soluções de Floquet[59],

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = e^{i\nu t} p(t) \\ \varphi_2(t) = \varphi_1(-t) \end{cases}, \quad (5.19)$$

onde $p(t)$ é um função de período π e ν é chamado expoente característico de Floquet. A existência de soluções da forma acima é garantida pela teoria de Floquet para equações diferenciais. O expoente característico ν é uma função de c_1 e de $(\omega_0^2 - \gamma^2/4)$ e a estabilidade das soluções está ligada aos valores que ν pode assumir. Se ν é real, então temos soluções estáveis. Se ν é complexo, então temos uma solução estável e uma instável. Para c_1 pequeno se comparado a $(\omega_0^2 - \gamma^2/4)$, temos uma equação aproximada para ν [59]:

$$\sin(\nu\pi/2) = \sqrt{\Delta(0)} \sin(\sqrt{\lambda}\pi/2), \quad (5.20)$$

onde $\Delta(0) \approx 1 + \cot(\sqrt{\lambda}\pi/2)\frac{\pi c_1^2}{4\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}$ e $\lambda = \omega_0^2 - \gamma^2/4$. A figura 5.1 traz o diagrama de estabilidade das soluções da equação de Mathieu em função de c_1 e $\omega_0^2 - \gamma^2/4$. As regiões pretas são regiões onde ao menos uma das soluções é instável. A figura 5.1 foi feita no software *Mathematica* utilizando-se a rotina *MathieuCharacteristicExponent*.

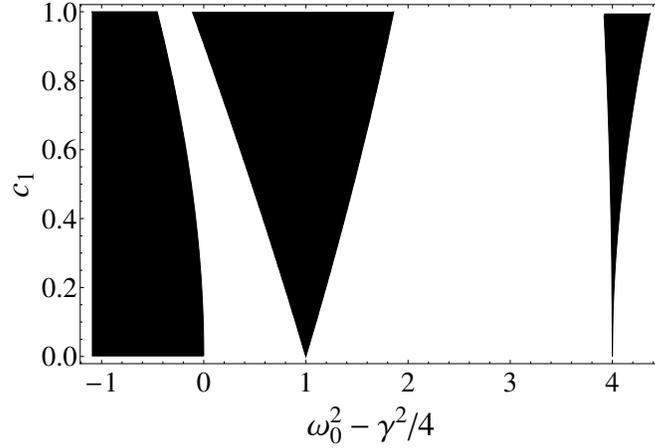


Figura 5.1: Diagrama de estabilidade das soluções da equações de Mathieu em função de $\omega_0^2 - \gamma^2/4$ e c_1 . As regiões pretas correspondem a soluções instáveis.

5.2 O Oscilador Paramétrico Quântico

A equação de Schroedinger adimensionalizada para o oscilador paramétrico quântico é dada por:

$$i\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\Psi(\tilde{x}, \tilde{t}) = \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{2}\tilde{\omega}^2(\tilde{t})\right)\Psi(\tilde{x}, \tilde{t}). \quad (5.21)$$

onde $\tilde{\omega}^2(\tilde{t}) = \tilde{\omega}_0^2 + 2\cos(2\tilde{t})$ e a adimensionalização foi feita de acordo com as relações (5.9). Por conveniência, omitiremos o til daqui em diante. O fato de termos um Hamiltoniano periódico implica que podemos encontrar soluções de Floquet para a equação de Schroedinger. Se fixarmos o tempo inicial $t_0 = 0$, as soluções da eq. (5.21) são dadas por,

$$\Psi_n(x, t) = \exp(-i\epsilon_n t)\chi_n(x, t), \quad (5.22)$$

onde $\chi_n(x, t) = \chi_n(x, t + \pi)$ é chamada função de Floquet e ϵ_n é o expoente característico de Floquet, também chamado de quasi-energia. Devido à dependência temporal do Hamiltoniano, a função de Floquet $\chi_n(x, t)$ é dependente do tempo e a ortonormalidade só vale para tempos fixos, ou seja,

$$\langle \chi_n(x, t) | \chi_m(x, t) \rangle = \delta_{n,m}. \quad (5.23)$$

Um estudo detalhado sobre o oscilador paramétrico quântico e suas funções de onda pode ser encontrado em [60]. Como estamos interessados em estudar correlações quânticas em estados Gaussianos, ou seja, estamos interessados na matriz de covariância, podemos ser um pouco mais pragmáticos e abordar o problema de uma maneira mais simples. Consideremos as variâncias, dadas pelas seguintes expressões:

$$\sigma_{xx} = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad (5.24)$$

$$\sigma_{xp} = \frac{1}{2} \langle xp + px \rangle - \langle x \rangle \langle p \rangle, \quad (5.25)$$

$$\sigma_{pp} = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2. \quad (5.26)$$

O teorema de Ehrenfest afirma que a evolução temporal do valor médio de um operador \hat{A} é dada pela seguinte equação:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = -i \langle [\hat{A}, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle. \quad (5.27)$$

Pode-se então mostrar que as variâncias σ_{xx} , σ_{xp} e σ_{pp} satisfazem o seguinte conjunto de equações diferenciais acopladas:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{xx} &= 2\sigma_{xp}, \\ \dot{\sigma}_{xp} &= \sigma_{pp} - \omega^2(t)\sigma_{xx}, \\ \dot{\sigma}_{pp} &= -2\omega^2(t)\sigma_{xp}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

A partir das equações acima podemos chegar em uma equação diferencial desacoplada para σ_{xx} ,

$$\ddot{\sigma}_{xx} + 4\omega^2(t)\dot{\sigma}_{xx} + 2 \left\{ \frac{d}{dt} \omega^2(t) \right\} \sigma_{xx} = 0. \quad (5.29)$$

Pode-se mostrar por substituição direta que a equação acima têm a seguinte solução:

$$\sigma_{xx}(t) = \sigma_{pp}^0 \phi_1^2(t) + \sigma_{xp}^0 \phi_1(t)\phi_2(t) + \sigma_{xx}^0 \phi_2^2(t), \quad (5.30)$$

onde $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ são definidos em (5.15) e σ_{xx}^0 , σ_{xp}^0 e σ_{pp}^0 são as variâncias no tempo inicial t_0 . A partir das eqs. (5.28), podemos encontrar as expressões para as demais variâncias,

$$\sigma_{xp}(t) = \sigma_{pp}^0 \phi_1(t)\dot{\phi}_1(t) + \sigma_{xp}^0 [\phi_1(t)\dot{\phi}_2(t) + \dot{\phi}_1(t)\phi_2(t)] + \sigma_{xx}^0 \phi_2(t)\dot{\phi}_2(t) \quad (5.31)$$

e

$$\sigma_{pp}(t) = \sigma_{pp}^0 \dot{\phi}_1^2(t) + \sigma_{xp}^0 \dot{\phi}_1(t)\dot{\phi}_2(t) + \sigma_{xx}^0 \dot{\phi}_2^2(t). \quad (5.32)$$

Conhecidas então as soluções $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ e a matriz de covariância do estado inicial, podemos em princípio estudar a evolução temporal da matriz de covariância do oscilador paramétrico livre.

5.3 O Oscilador Paramétrico Quântico Dissipativo

Nesta seção analisaremos a dinâmica do oscilador paramétrico dissipativo no caso em que o estado inicial do sistema é descrito por um operador densidade fatorizável (vide (2.32)). Analisaremos primeiramente a dinâmica Markoviana e em seguida a dinâmica não-Markoviana.

5.3.1 Dinâmica Markoviana

A aproximação Markoviana, como já dito anteriormente, aplica-se a casos onde efeitos de memória na interação do sistema com o banho de osciladores harmônicos são desprezíveis. Tal aproximação pode ser obtida se considerarmos uma densidade espectral dada por,

$$I(\omega) = \begin{cases} m\gamma\omega, & \text{se } \omega \leq \omega_C, \\ 0, & \text{se } \omega > \omega_C, \end{cases} \quad (5.33)$$

onde ω_C é a frequência de corte. Dentro desta aproximação, o formalismo de integrais de caminho é especialmente útil dada a simplicidade com que a dinâmica do sistema é descrita.

O propagador do oscilador paramétrico quântico dissipativo pode ser encontrado a partir da eq.(2.39). Para este caso em específico, as integrais de caminho são quadráticas e é possível calculá-las exatamente, chegando ao seguinte resultado:

$$J(x_f, y_f, t; x_i, y_i, 0) = \frac{1}{N(t)} \exp \left\{ i \left[S(x_{cl}) - S(y_{cl}) - \gamma \int_0^t [\dot{x}_{cl}(s) + \dot{y}_{cl}(s)] [x_{cl}(s) - y_{cl}(s)] ds \right] \right\} \\ \times \exp \left[- \int_0^t \int_0^s [x_{cl}(\tau) - y_{cl}(\tau)] K(\tau - s) [x_{cl}(s) - y_{cl}(s)] d\tau ds \right], \quad (5.34)$$

onde,

$$K(s) = \frac{2\gamma}{\pi} \int_0^{\omega_C} \omega \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \cos(s)\omega d\omega, \quad (5.35)$$

e $S(x_{cl})$ e $S(y_{cl})$ são as ações nos caminhos clássicos obtidos a partir do seguinte Lagrangeano:

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2(t)}{2} x^2 - \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\omega^2(t)}{2} y^2 - \gamma(\dot{x} + \dot{y})(x - y). \quad (5.36)$$

onde $\omega^2(t) = \omega_0^2 + c_0 + 2c_1 \cos(2t)$. Em todas as equações apresentadas acima as grandezas físicas já estão adimensionalizadas segundo as relações (5.9) e $\tilde{T} = 2K_B T / \hbar \omega_D$. O til foi omitido para maior clareza das equações. As equações de Euler-Lagrange para o Lagrangeano acima são:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\gamma\dot{y} + \omega^2(t)x = 0 \\ \ddot{y} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2(t)y = 0 \end{cases} \quad (5.37)$$

Definindo as variáveis $Q = x + y$ e $q = x - y$ e substituindo na equação acima temos,

$$\begin{cases} \ddot{Q} + 2\gamma\dot{Q} + \omega^2(t)Q = 0 \\ \ddot{q} - 2\gamma\dot{q} + \omega^2(t)q = 0 \end{cases} \quad (5.38)$$

As equações (5.38) são muito parecidas com a equação de movimento do oscilador paramétrico dissipativo clássico. Fazendo uma segunda mudança de variável, $Q = Y_1 e^{-\gamma t}$ e $q = Y_2 e^{\gamma t}$, podemos escreve-las como:

$$\begin{cases} \ddot{Y}_1 + (\omega_0^2 + c_0 + 2c_1 \cos(2t) - \gamma^2)Y_1 = 0 \\ \ddot{Y}_2 + (\omega_0^2 + c_0 + 2c_1 \cos(2t) - \gamma^2)Y_2 = 0 \end{cases} \quad (5.39)$$

As duas equações diferenciais acima são formalmente idênticas à eq.(5.14). Portanto, novamente temos uma equação de Mathieu e consideraremos as soluções $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ desta equação, satisfazendo as condições iniciais (5.15). Definindo as seguintes funções:

$$\begin{cases} f_1(t) = e^{-\gamma t} \phi_1(t) \\ f_2(t) = e^{-\gamma t} \phi_2(t), \end{cases} \quad (5.40)$$

podemos escrever as soluções das equações (5.38),

$$\begin{cases} Q(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \\ q(t) = e^{2\gamma t} [c_3 f_1(t) + c_4 f_2(t)]. \end{cases} \quad (5.41)$$

Imporemos agora as seguintes condições de contorno para as eqs.(5.41):

$$\begin{cases} Q(0) = Q_i & Q(t) = Q_f \\ q(0) = q_i & q(t) = q_f. \end{cases} \quad (5.42)$$

Desta maneira, chegamos ao seguinte resultado,

$$\begin{cases} Q(s) = Q_i u_1(t, s) + Q_f u_2(t, s) \\ q(s) = q_i v_1(t, s) + q_f v_2(t, s), \end{cases} \quad (5.43)$$

onde definimos as funções auxiliares,

$$\begin{cases} u_1(t, s) = f_2(s) - f_1(s) \frac{f_2(t)}{f_1(t)} \\ u_2(t, s) = \frac{f_1(s)}{f_1(t)} \end{cases}, \quad \begin{cases} v_1(t, s) = \left(f_2(s) - f_1(s) \frac{f_2(t)}{f_1(t)} \right) e^{2\gamma s} \\ v_2(t, s) = \frac{f_1(s)}{f_1(t)} e^{2\gamma(s-t)} \end{cases}. \quad (5.44)$$

A partir das eqs.(5.43) podemos chegar finalmente a uma expressão para os caminhos clássicos $x_{cl}(t)$ e $y_{cl}(t)$,

$$\begin{aligned} x_{cl}(t) &= \frac{1}{2} [Q_i u_1(t, s) + Q_f u_2(t, s) + q_i v_1(t, s) + q_f v_2(t, s)], \\ y_{cl}(t) &= \frac{1}{2} [Q_i u_1(t, s) + Q_f u_2(t, s) - q_i v_1(t, s) - q_f v_2(t, s)], \end{aligned} \quad (5.45)$$

e calcular os termos do propagador. Vamos primeiro calcular o expoente do primeiro termo, que chamaremos $\Theta(x_f, y_f)$.

$$\Theta(x_f, y_f) = S(x_{cl}) - S(y_{cl}) - \gamma \int_0^t [\dot{x}_{cl}(s) + \dot{y}_{cl}(s)] [x_{cl}(s) - y_{cl}(s)] ds \quad (5.46)$$

Por simplicidade, denotaremos $x_{cl}(t)$ e $y_{cl}(t)$ por x e y , respectivamente. Colocando as ações em termos dos Lagrangeanos,

$$\begin{aligned} \Theta(x_f, y_f) &= \int_0^t \frac{1}{2} [\dot{x}^2 - \omega^2(t)x^2 - \dot{y}^2 + \omega^2(t)y^2 - 2\gamma(\dot{x}x - \dot{x}y + \dot{y}x - \dot{y}y)] \quad (5.47) \\ &= \frac{1}{2} [x\dot{x} - y\dot{y}]_0^t + \frac{\gamma}{2} [y^2 - x^2]_0^t + \int_0^t \frac{1}{2} \left\{ x[-\ddot{x} - 2\gamma\dot{y} - \omega^2(t)x] \right. \\ &\quad \left. + y[\ddot{y} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2(t)y] \right\} ds. \end{aligned} \quad (5.48)$$

A expressão (5.48) foi obtida fazendo uma integração por partes. Como os termos dentro da integral no último termo são indenticamente nulos(vide eqs(5.37)), chegamos ao seguinte resultado:

$$\Theta(x_f, y_f) = \frac{1}{2} [x\dot{x} - y\dot{y}]_0^t + \frac{\gamma}{2} (y_f^2 - x_f^2 - y_i^2 + x_i^2) \quad (5.49)$$

$$= \frac{1}{2} [x\dot{x} - y\dot{y}]_0^t - \frac{\gamma}{2} (Q_f q_f - Q_i q_i). \quad (5.50)$$

Antes de continuar com os cálculos é importante o uso de algumas relações de fácil demonstração. Por simplicidade, denotaremos as derivadas com relação a s das funções $u(t, s)$ e $v(t, s)$

no ponto s_0 por $\dot{u}(t, s_0)$ e $\dot{v}(t, s_0)$, respectivamente. Temos então,

$$\dot{v}_1(t, t) = -\dot{u}_2(t, 0), \quad (5.51)$$

$$\dot{v}_1(t, 0) = \dot{u}_1(t, 0) + 2\gamma, \quad (5.52)$$

$$\dot{v}_2(t, t) = \dot{u}_2(t, t) + 2\gamma, \quad (5.53)$$

$$\dot{v}_2(t, 0) = -\dot{u}_1(t, t). \quad (5.54)$$

A eq. (5.51) é obtida com o uso da eq. (5.16). Utilizando as relações acima e as eqs. (5.45) pode-se mostrar que,

$$[x\dot{x} - y\dot{y}]_0^t = Q_f q_f [\dot{u}_2(t, t) + \gamma] - Q_f q_i \dot{u}_2(t, 0) - Q_i q_i [\dot{u}_1(t, 0) + \gamma] + Q_i q_f \dot{u}_1(t, t). \quad (5.55)$$

Substituindo o resultado acima (5.50), podemos finalmente chegar a uma expressão para $\Theta(x_f, y_f)$,

$$\Theta(x_f, y_f) = b_4(t)Q_f q_f - b_3(t)Q_f q_i + b_2(t)Q_i q_f - b_1(t)Q_i q_i, \quad (5.56)$$

onde,

$$b_1(t) = \dot{u}_1(t, 0)/2, \quad (5.57)$$

$$b_2(t) = \dot{u}_1(t, t)/2, \quad (5.58)$$

$$b_3(t) = \dot{u}_2(t, 0)/2, \quad (5.59)$$

$$b_4(t) = \dot{u}_2(t, t)/2. \quad (5.60)$$

Falta agora calcular o expoente da segunda exponencial do projetor, o qual chamaremos de $\Phi(x_f, y_f)$. Para este temos,

$$\Phi(x_f, y_f) = \int_0^t \int_0^s [x_{cl}(\tau) - y_{cl}(\tau)]K(\tau - s)[x_{cl}(s) - y_{cl}(s)]d\tau ds. \quad (5.61)$$

Lembrando que a função $K(\tau - s)$ é par e que as variáveis de integração são mudas, podemos mostrar que a integral feita na região de integração definida por $\tau \in [0, s]$ e $s \in [0, t]$ é igual à mesma integral feita na região de integração definida por $s \in [0, \tau]$ e $\tau \in [0, t]$. Como a união dessas duas regiões tem como resultado a região de integração definida por $s \in [0, t]$ e $\tau \in [0, t]$, podemos reescrever a eq.(5.61) como,

$$\Phi(x_f, y_f) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t q(\tau)K(\tau - s)q(s)d\tau ds. \quad (5.62)$$

Substituindo as eqs. (5.43) na equação acima, chegamos à seguinte expressão:

$$\Phi(q_f, q_i) = a_{11}(t)q_i^2 + [a_{12}(t) + a_{21}(t)]q_iq_f + a_{22}(t)q_f^2, \quad (5.63)$$

onde,

$$a_{ij}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t v_i(t, \tau) K(\tau - s) v_j(t, s) d\tau ds. \quad (5.64)$$

Finalmente chegamos a uma expressão final para o propagador,

$$J(Q_f, q_f, t; Q_i, q_i, 0) = \frac{1}{N(t)} \exp\left\{i [b_4(t)Q_fq_f - b_3(t)Q_fq_i + b_2(t)Q_iq_f - b_1(t)Q_iq_i]\right\} \\ \times \exp\left\{-a_{11}(t)q_i^2 - [a_{12}(t) + a_{21}(t)]q_iq_f - a_{22}(t)q_f^2\right\}. \quad (5.65)$$

A normalização $N(t)$ é determinada pela seguinte condição que deve ser satisfeita por qualquer operador densidade:

$$Tr[\hat{\rho}] = 1. \quad (5.66)$$

Vamos agora utilizar o fato de que inicialmente o modo '+' está em um estado coerente. A função de onda do estado coerente foi dada em (5.6), portanto, inicialmente o operador densidade do sistema é dado por $\hat{\rho} = |\alpha_+\rangle\langle\alpha_+|$, e tem a seguinte representação:

$$\rho(x, y) = \langle x|\hat{\rho}|y\rangle \\ = \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi}} \exp\left[-\frac{\omega_0}{2}(x^2 + y^2) + \sqrt{2\omega_0}\alpha_R(x + y) - i\sqrt{2\omega_0}\alpha_I(x - y) - 2\alpha_R^2\right]. \quad (5.67)$$

Escrito em termos de Q e q , o operador densidade tem a seguinte forma:

$$\rho(Q, q, 0) = \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi}} \exp\left[-\frac{\omega_0}{4}(q^2 + Q^2) + \sqrt{2\omega_0}\alpha_RQ + i\sqrt{2\omega_0}\alpha_Iq - 2\alpha_R^2\right]. \quad (5.68)$$

Segundo (2.33) e (5.65), o operador densidade evoluído $\rho(Q_f, q_f, t)$ é dado por,

$$\rho(Q_f, q_f, t) = \frac{1}{N(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i [b_4(t)Q_fq_f - b_3(t)Q_fq_i + b_2(t)Q_iq_f - b_1(t)Q_iq_i]\right\} \\ \times \exp\left\{-a_{11}(t)q_i^2 - [a_{12}(t) + a_{21}(t)]q_iq_f - a_{22}(t)q_f^2\right\} \times \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi}} \exp\left[-\frac{\omega_0}{4}(q_i^2 + Q_i^2) + \sqrt{2\omega_0}\alpha_RQ_i \\ + i\sqrt{2\omega_0}\alpha_Iq_i - 2\alpha_R^2\right] dQ_i dq_i \quad (5.69)$$

A integral acima pode ser calculada analiticamente, porém a conta é demasiado extensa para

que seja colocada aqui, de maneira que só exporemos resultado,

$$\rho(Q_f, q_f, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{[Q_f - \bar{Q}(t)]^2}{2\sigma^2(t)}\right] \exp[-G(t)q_f^2] \exp[iC(t)Q_fq_f + iD(t)q_f] \quad (5.70)$$

onde,

$$\bar{Q}(t) = \sqrt{2\omega_0} \frac{\alpha_I}{b_3(t)} - 2\sqrt{\frac{2}{\omega_0}} \frac{b_1(t)}{b_3(t)} \alpha_R, \quad (5.71)$$

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{4\omega_0 a_{11}(t) + \omega_0^2 + 4b_1(t)}{2\omega_0 b_3^2(t)}}, \quad (5.72)$$

$$G(t) = a_{22}(t) + \frac{b_2^2(t)}{\omega_0} - 2 \frac{[b_1(t)b_2(t) - a_{12}(t)\omega_0]^2}{4\omega_0^2 a_{11}(t) + \omega_0^3 + 4\omega_0 b_1^2(t)} \quad (5.73)$$

$$C(t) = b_4(t) - 2 \frac{b_1(t)b_2(t) - \omega_0 a_{12}(t)}{\omega_0 \sigma^2(t) b_3(t)} \quad (5.74)$$

e

$$D(t) = 2\sqrt{\frac{2}{\omega_0}} b_2(t) \alpha_R + 2\bar{Q}(t) \frac{b_1(t)b_2(t) - \omega_0 a_{12}(t)}{\omega_0 \sigma^2(t) b_3(t)}. \quad (5.75)$$

Uma vez que já temos $\rho(Q, q, t)$ (omitiremos o subíndice f daqui para frente), podemos calcular os elementos da matriz de covariância. As contas envolvidas são muito extensas, de

maneira que apresentaremos aqui apenas os resultados.

$$\begin{aligned}\langle \hat{x} \rangle &= Tr[\hat{\rho}\hat{x}], \\ &= \frac{\overline{Q}(t)}{2}\end{aligned}\tag{5.76}$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{p} \rangle &= Tr[\hat{\rho}\hat{p}], \\ &= 2\sqrt{\frac{2}{\omega_0}}b_2(t)\alpha_R + b_4(t)\overline{Q}(t).\end{aligned}\tag{5.77}$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{x}^2 \rangle &= Tr[\hat{\rho}\hat{x}^2], \\ &= \frac{\sigma^2}{4} + \langle \hat{x} \rangle^2.\end{aligned}\tag{5.78}$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{p}^2 \rangle &= Tr[\hat{\rho}\hat{p}^2], \\ &= C^2(t)\sigma^2(t) + 2G(t) + \langle \hat{p} \rangle^2,\end{aligned}\tag{5.79}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle &= Tr[\hat{\rho}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})], \\ &= \frac{1}{2}C(t)\sigma^2(t) + \langle \hat{x} \rangle \langle \hat{p} \rangle.\end{aligned}\tag{5.80}$$

O que foi apresentado nas três última seções tem como base o artigo [62]. Para uma discussão mais detalhada, consultar esta referência.

5.3.2 Dinâmica Não-Markoviana

A dinâmica não-Markoviana pode ser estudada se utilizarmos valores menores para a frequência de corte ω_C . Neste caso a densidade espectral estritamente ôhmica utilizada na subseção anterior não é adequada pois esta apresenta um corte muito abrupto em $\omega = \omega_C$. Quando são usados valores de ω_C muito grandes, este corte abrupto não causa problemas pois o sistema “interage” fracamente com frequências tão maiores que sua frequência natural. Mas para valores de ω_C comparáveis a ω_0 , que são os valores para os quais o comportamento não-Markoviano aparece, um corte deste tipo não representa uma densidade espectral fisicamente plausível. Neste caso temos que fazer com que a densidade espectral $I(\omega)$ tenda a zero para ω tendendo a infinito de maneira mais suave, ou seja escolhendo uma regularização adequada. As densidades espectrais (2.20 - 2.22) são algumas opções possíveis. Infelizmente, neste caso o formalismo de integrais de caminho é um tanto árido para ser utilizado diretamente, sendo mais conveniente o uso de equações mestras (as quais podem também ser obtidas do super-propagador). Para tal, vamos primeiro escrever o Hamiltoniano do nosso sistema em termos

dos operadores de aniquilação

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \left(\hat{X} + \frac{i\hat{P}}{\omega_0} \right), \quad (5.81)$$

e

$$\hat{b}_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left(\hat{x}_k + \frac{i\hat{p}_k}{\omega_k} \right). \quad (5.82)$$

Em termos destes operadores o Hamiltoniano pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{\lambda(t)}{2}\hat{a}^2 + \frac{\lambda^*(t)}{2}(\hat{a}^\dagger)^2 + \omega(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}}_{\hat{H}_S} + \underbrace{\sum_k \omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k}_{\hat{H}_B} - \underbrace{\sum_k g_k (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{b}_k + \hat{b}_k^\dagger)}_{\hat{H}_I}, \quad (5.83)$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{c_0 + c_1 \cos(2t)}{2\omega_0} + \sum_k \frac{c_k^2}{2\omega_0\omega_k^2} \\ &= \frac{c_0 + c_1 \cos(2t)}{2\omega_0} + \frac{1}{2\omega_0} \int_0^\infty \frac{I(\omega)}{2\omega} d\omega, \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \omega_0 + \frac{c_0 + c_1 \cos(2t)}{2\omega_0} + \sum_k \frac{c_k^2}{2\omega_0\omega_k^2} \\ &= \omega_0 + \frac{c_0 + c_1 \cos(2t)}{2\omega_0} + \frac{1}{2\omega_0} \int_0^\infty \frac{I(\omega)}{\omega} d\omega, \end{aligned} \quad (5.85)$$

e

$$g_k = \frac{c_k}{2\omega_0}. \quad (5.86)$$

É bom lembrar que neste Hamiltoniano, todas as quantidades presentes já estão devidamente adimensionalizadas.

Para um Hamiltoniano com a forma do Hamiltoniano (5.83), Chang e Law[61] encontraram uma equação mestra exata[61]. Tal equação mestra foi concebida para descrever um oscilador com parâmetros dependentes do tempo e os traços gerais de sua dedução, que são diferentes dos apresentados na subsecção 2.2.2, serão expostos aqui. Suponha que o estado inicial do sistema descrito pelo Hamiltoniano (5.83) seja dado por,

$$\hat{\chi}(0) = |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes \prod_k \left[\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega_k}{k_B T}} \right) e^{-\frac{\hbar\omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k}{k_B T}} \right], \quad (5.87)$$

onde o estado inicial do sistema é o estado coerente $|\alpha\rangle$ e o banho está inicialmente em

equilíbrio térmico. Para encontrar a equação mestra do sistema os autores utilizaram um caminho diferente do exposto anteriormente. Como o estado inicial do sistema total é um estado Gaussiano, a equação mestra deve ter apenas termos bilineares em \hat{a} e \hat{a}^\dagger , que são os operadores de aniquilação e criação do sistema, de maneira que o estado evoluído também seja um estado Gaussiano. Além disso, a equação mestra deve ser Hermitiana e garantir que o traço do operador densidade seja unitário ($Tr[\frac{d}{dt}\hat{\rho}] = 0$). Nestas condições a equação mestra mais geral satisfeita pelo operador densidade reduzido com relação ao sistema deve ter a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho} = & -i[\hat{H}_S(t) + \widehat{\Delta H}_S(t), \hat{\rho}] - \gamma_1(t)(\{\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}\} - 2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger) - \gamma_2(t)(\{\hat{a}\hat{a}^\dagger, \hat{\rho}\} - 2\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ & - \gamma_3(t)(\{\hat{a}^2, \hat{\rho}\} - 2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}) - \gamma_3^*(t)(\{(\hat{a}^\dagger)^2, \hat{\rho}\} - 2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a}^\dagger), \end{aligned} \quad (5.88)$$

onde $\widehat{\Delta H}_S(t) = \frac{\Delta\lambda^2(t)}{2}\hat{a}^2 + \frac{\Delta\lambda^{*2}(t)}{2}(\hat{a}^\dagger)^2 + \Delta\omega(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}$ e $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ é o anticomutador dos operadores \hat{A} e \hat{B} . Assim, a estratégia adotada para determinar os coeficientes da equação mestra foi comparar as equações de movimento obtidas utilizando-se a eq.(5.88) com as equações de movimento obtidas utilizando-se a versão de Heisenberg.

A equação de movimento para o operador \hat{a} na versão de Heisenberg é,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{a}(t) = & -i\lambda^*(t)\hat{a}^*(t) - i\omega(t)\hat{a}(t) - i\sum_k g_k [\hat{b}_k(0)e^{-i\omega_k t} + \hat{b}_k^\dagger(0)e^{i\omega_k t}] - \\ & \int_0^t ds K(t-s) [\hat{a}(s) + \hat{a}^\dagger(s)], \end{aligned} \quad (5.89)$$

onde $K(t)$ é chamado kernel de memória e é dado pela seguinte expressão,

$$K(t) = -2i\sum_k g_k^2 \sin(\omega_k t) = -2i\int_0^\infty d\omega I(\omega) \sin(\omega t). \quad (5.90)$$

Na última igualdade utilizamos o fato de termos um número infinito de osciladores no banho. Para deixar a notação mais clara, a derivada temporal será denotada por um ponto no caso de funções e por d/dt no caso de operadores. Dada a linearidade da eq.(5.89), a solução geral da mesma pode ser escrita da seguinte forma,

$$\hat{a}(t) = G(t)\hat{a}(0) + L^*(t)\hat{a}^\dagger + \hat{F}(t), \quad (5.91)$$

onde $\hat{F}(t) = \sum_k [\mu_k(t)\hat{b}_k(0) + \nu_k(t)\hat{b}_k^\dagger(0)]$. Substituindo a eq.(5.91) na eq.(5.89), chegamos ao seguinte conjunto de equações integro-diferenciais acopladas

$$\dot{G}(t) = -i\lambda^*(t)L(t) - i\omega(t)G(t) - \int_0^t ds K(t-s)[G(s) + L(s)], \quad (5.92)$$

$$\dot{L}(t) = i\lambda(t)G(t) + i\omega(t)L(t) + \int_0^t ds K(t-s)[G(s) + L(s)], \quad (5.93)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{F}(t) = & -i\lambda^*(t)\hat{F}^\dagger(t) - i\omega(t)\hat{F}(t) - \int_0^t ds K(t-s)[\hat{F}(s) + \hat{F}^\dagger(s)] - \\ & i \sum_k g_k [\hat{b}_k(0)e^{-i\omega_k t} + \hat{b}_k^\dagger(0)e^{i\omega_k t}], \end{aligned} \quad (5.94)$$

com as condições iniciais $G(0) = 1$, $L(0) = 0$, $\mu_k(0) = 0$ e $\nu_k(0) = 0$. Uma vez que as equações de movimento para $\langle \hat{a} \rangle$, $\langle \hat{a}^2 \rangle$ e $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ devem ser iguais independentemente de serem obtidas via equação de Heisenberg ou via equação mestra, basta comparar as equações obtidas pelos dois caminhos para que possamos encontrar os coeficientes da equação mestra (5.88). Procedendo desta maneira, os coeficientes da equação mestra encontrados são¹,

$$\begin{aligned} 2i\Delta\omega(t) = \frac{1}{W(t)} \int_0^t ds K(t-s) \left\{ [G(t) - L(t)][G^*(s) + L^*(s)] \right. \\ \left. + [G^*(t) - L^*(t)][G(s) + L(s)] \right\}, \end{aligned} \quad (5.95)$$

$$\gamma_1(t) = -\frac{\dot{W}(t)}{2W(t)} + \gamma_2(t), \quad (5.96)$$

$$\begin{aligned} 2\gamma_2(t) = \frac{d}{dt} \langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{F}(t) \rangle - \frac{\dot{W}(t)}{W(t)} \langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{F}(t) \rangle - \frac{\dot{L}(t)G^*(t) - \dot{G}^*(t)L(t)}{W(t)} \langle \hat{F}^2(t) \rangle \\ - \frac{\dot{L}^*(t)G(t) - \dot{G}(t)L^*(t)}{W(t)} \langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{F}^\dagger(t) \rangle, \end{aligned} \quad (5.97)$$

$$\begin{aligned} -2\gamma_3^*(t) = \frac{d}{dt} \langle \hat{F}(t)\hat{F}(t) \rangle - 2 \frac{\dot{G}(t)G^*(t) - \dot{L}^*(t)L(t)}{W(t)} \langle \hat{F}(t)\hat{F}(t) \rangle \\ - \frac{\dot{L}^*(t)G(t) - \dot{G}(t)L^*(t)}{W(t)} \langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{F}(t) + \hat{F}(t)\hat{F}^\dagger(t) \rangle \end{aligned} \quad (5.98)$$

e

$$\Delta\lambda(t) = \Delta\omega(t) - i[\gamma_1(t) - \gamma_2(t)], \quad (5.99)$$

¹Mais detalhes sobre as contas podem ser encontrados no Anexo 1

onde $W(t) = G(t)G^*(t) - L(t)L^*(t)$ e as funções de autocorrelação do banho de osciladores, $\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t) \rangle$, $\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t)^\dagger \rangle$ e $\langle \hat{F}(t)^\dagger\hat{F}(t) \rangle$, são dadas pelas seguintes expressões:

$$\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t) \rangle = \int_0^t ds' \int_0^t ds'' \kappa_T(s' - s'') [\Gamma_2^*(t, s') - \Gamma_1(t, s')] [\Gamma_1(t, s'') - \Gamma_2^*(t, s'')], \quad (5.100)$$

$$\langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{F}(t) \rangle = \int_0^t ds' \int_0^t ds'' \kappa_T(s' - s'') [\Gamma_1^*(t, s') - \Gamma_2(t, s')] [\Gamma_1(t, s'') - \Gamma_2^*(t, s'')], \quad (5.101)$$

e

$$\langle \hat{F}(t)\hat{F}^\dagger(t) \rangle = \int_0^t ds' \int_0^t ds'' \kappa_T(s' - s'') [\Gamma_1(t, s') - \Gamma_2^*(t, s')] [\Gamma_1^*(t, s'') - \Gamma_2(t, s'')]. \quad (5.102)$$

A função $\kappa_T(\tau)$ é um kernel de memória dependente da temperatura, e é dada pela seguinte expressão,

$$\kappa_T(\tau) = \sum_k g_k^2 \left[2 \frac{\cos(\omega_k \tau)}{e^{\hbar\beta\omega_k} - 1} + e^{-i\omega_k \tau} \right]. \quad (5.103)$$

Já as funções $\Gamma_1(t, s)$ e $\Gamma_2(t, s)$ são soluções das seguintes equações integro-diferenciais acopladas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \Gamma_1(\tau + t', t') &= -i\lambda^*(\tau + t')\Gamma_2(\tau + t', t') - i\omega(\tau + t')\Gamma_1(\tau + t', t') \\ &\quad - \int_0^\tau ds K(\tau - s) [\Gamma_1(s + t', t') + \Gamma_2(s + t', t')] \end{aligned} \quad (5.104)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \Gamma_2(\tau + t', t') &= i\lambda(\tau + t')\Gamma_1(\tau + t', t') + i\omega(\tau + t')\Gamma_2(\tau + t', t') \\ &\quad + \int_0^\tau ds K(\tau - s) [\Gamma_1(s + t', t') + \Gamma_2(s + t', t')]. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Para uma compreensão maior dos termos que compõem as expressões dos coeficientes da equação mestra (5.88), o leitor é aconselhado a consultar o Anexo 1 desta dissertação, onde a derivação destas expressões é feita de maneira detalhada.

É importante notar que a equação mestra (5.88) foi deduzida para um estado inicial coerente. No entanto, devido à representação P de Glauber-Sudarshan[47, 48], na qual qualquer operador $\hat{\rho}$ admite uma representação diagonal em termos de estados coerentes, a equação pode ser utilizada para estados iniciais arbitrários.

Agora que já temos uma equação mestra que descreve a evolução temporal do nosso sistema, com coeficientes que em princípio podem ser encontrados, temos de encontrar uma maneira de calcular a matriz de covariância. A partir da equação mestra (5.88) chegamos às seguintes equações para a evolução da média dos seguintes operadores:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{a}\rangle = -[\gamma_1(t) - \gamma_2(t) + i\chi(t)]\langle\hat{a}\rangle - i\Lambda^*(t)\langle\hat{a}^\dagger\rangle, \quad (5.106)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{a}^2\rangle = -2[\gamma_1(t) - \gamma_2(t) + i\chi(t)]\langle\hat{a}^2\rangle - 2i\Lambda^*(t)\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle - i\Lambda^*(t) - 2\gamma_3^*(t), \quad (5.107)$$

e

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle = -2[\gamma_1(t) - \gamma_2(t)]\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle + i\Lambda(t)\langle\hat{a}^2\rangle - i\Lambda^*(t)\langle(\hat{a}^\dagger)^2\rangle + 2\gamma_2(t). \quad (5.108)$$

onde $\chi(t) = \omega(t) + \Delta\omega(t)$ e $\Lambda(t) = \lambda(t) + \Delta\lambda(t)$. A partir das equações acima, podemos encontrar as seguintes equações:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{Q}\rangle = [\gamma_1(t) - \gamma_2(t) - Im\{\Lambda(t)\}]\langle\hat{Q}\rangle + [\chi(t) - Re\{\Lambda(t)\}]\langle\hat{P}\rangle, \quad (5.109)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{P}\rangle = [\gamma_1(t) - \gamma_2(t) + Im\{\Lambda(t)\}]\langle\hat{Q}\rangle - [\chi(t) + Re\{\Lambda(t)\}]\langle\hat{P}\rangle, \quad (5.110)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\hat{Q}^2\rangle = & -2[\gamma_1(t) - \gamma_2(t) + Im\{\Lambda(t)\}]\langle\hat{Q}^2\rangle + [\chi(t) - Re\{\Lambda(t)\}]\frac{\langle\hat{Q}\hat{P} + \hat{P}\hat{Q}\rangle}{\omega_0} \\ & - \frac{2}{\omega_0}Re\{\gamma_3(t)\} + \frac{1}{\omega_0}[\gamma_1(t) + \gamma_2(t)], \end{aligned} \quad (5.111)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\hat{P}^2\rangle = & -2[\gamma_1(t) - \gamma_2(t) - Im\{\Lambda(t)\}]\langle\hat{P}^2\rangle - \omega_0[\chi(t) + Re\{\Lambda(t)\}]\langle\hat{Q}\hat{P} + \hat{P}\hat{Q}\rangle \\ & + \omega_0[2Re\{\gamma_3(t)\} + \gamma_1(t) + \gamma_2(t)], \end{aligned} \quad (5.112)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\hat{Q}\hat{P} + \hat{P}\hat{Q}\rangle = & -2[\gamma_1(t) - \gamma_2(t)]\langle\hat{Q}\hat{P} + \hat{P}\hat{Q}\rangle - \omega_0Re\{\Lambda(t)\}\langle\hat{Q}^2\rangle - \frac{Re\{\Lambda(t)\}}{\omega_0}\langle\hat{P}^2\rangle \\ & + 4Im\{\gamma_3(t)\}. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Como podemos ver, a resolução do problema requer a solução de complicadas equações integro-diferenciais. Se recorrermos a métodos numéricos estas equações podem ser resolvidas e então a matriz de covariância pode ser calculada.

Capítulo 6

Resultados

Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos para as medidas de correlações quânticas (CQ), a citar, a negatividade logarítmica e a discórdia Gaussiana, no sistema de interesse. Para tal consideraremos inicialmente três situações distintas no regime Markoviano, o acoplamento paramétrico ($c_0 = 0$ e $c_1 \neq 0$), o acoplamento forte ($c_0 \approx \omega_0^2$ e $c_1 = 0$) e o acoplamento misto ($c_0 \neq 0$ e $c_1 \neq 0$). O principal objetivo é analisar a dinâmica da negatividade logarítmica e da discórdia Gaussiana em função de parâmetros como a temperatura e o acoplamento entre os dois osciladores. Ao fim consideraremos o regime não-Markoviano. Todas as grandezas físicas serão colocadas em termos de ω_0 e $T_0 = \hbar\omega_0/K_B$. A negatividade logarítmica (En) e a discórdia Gaussiana (DG) foram calculadas em função de $\tau = \omega_0 t$. Em todos os resultados utilizamos como estado inicial dos modos normais ‘+’ e ‘-’ o estado coerente $|\alpha\rangle$ onde $\alpha = \frac{1}{2}(1 + i)$ e $\gamma = 0,005\omega_0/\sqrt{2}$.

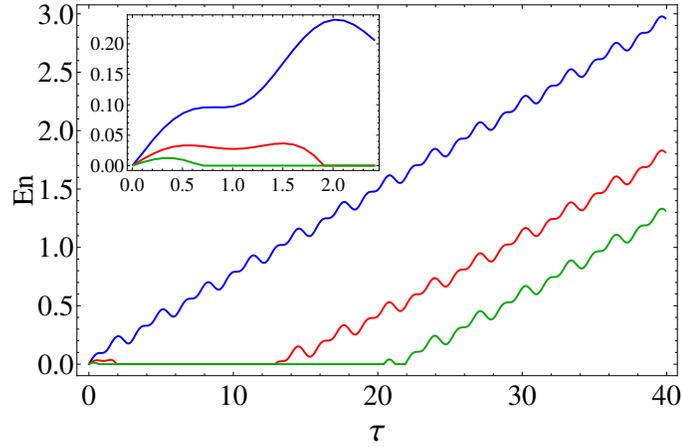
6.1 Regime Markoviano

Como dito anteriormente, na dinâmica Markoviana consideramos uma densidade espectral estritamente ôhmica, o que envolve uma frequência de corte ω_C . Nos resultados aqui apresentados a frequência de corte utilizada foi $\omega_C = 200\omega_0$. Tal valor para ω_C satisfaz os pré-requisitos de ser muito maior que as frequências envolvidas no sistema e de definir uma escala de tempo $\tau_C = \omega_C^{-1}$ que é muito menor que a escala de tempo que estamos interessados para estudar a dinâmica do sistema.

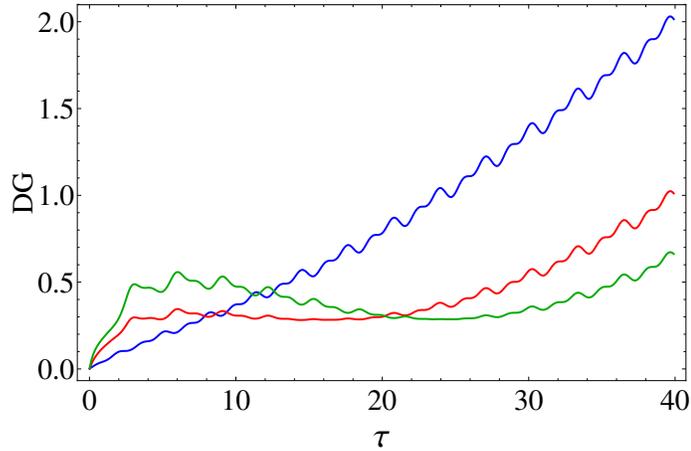
6.1.1 Acoplamento Paramétrico

Apresentaremos aqui os resultados obtidos para o acoplamento paramétrico, isto é, com $c_0 = 0$.

A figura 6.1 traz os gráficos da negatividade logarítmica e da discórdia Gaussiana para diferentes valores de T, e a figura 6.2 para diferentes valores de c_1 . De maneira geral pode-



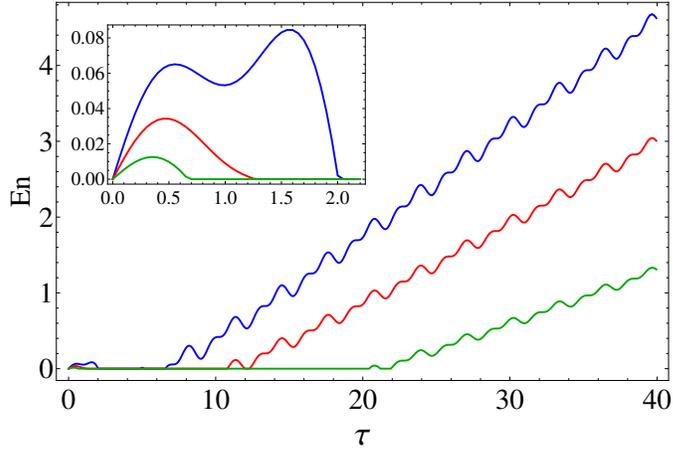
(a) Negatividade Logarítmica



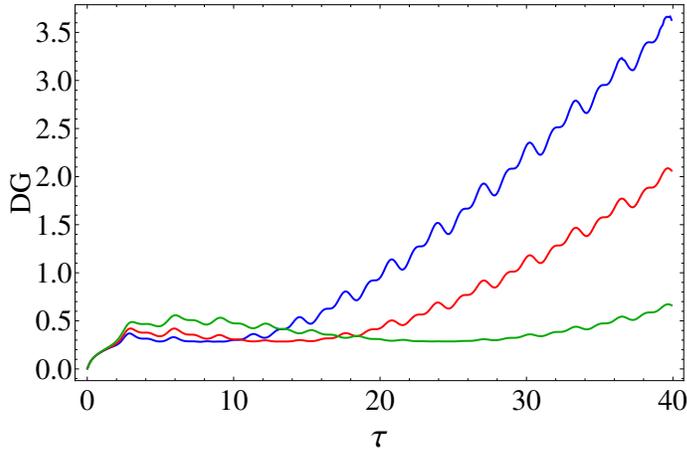
(b) Discórdia Gaussiana

Figura 6.1: Gráficos das CQ's em função de τ para $T = 10T_0$ (curva azul), $T = 50T_0$ (curva vermelha) e $T = 100T_0$ (curva verde). Todas as curvas foram obtidas com $c_1 = 0, 2\omega_0^2$ e $\omega_D = 2\omega_0$. No interior do gráfico temos um segundo gráfico mais aproximado para pequenos de τ .

mos observar que mesmo para temperaturas muito altas ainda podemos observar o sistema em um estado emaranhado. No gráfico 6.1(a), para as temperaturas mais altas, o emaranhamento sofre uma morte súbita (a morte súbita é mais facilmente observada no gráfico interior ao gráfico citado). Depois de algum tempo o sistema volta a se encontrar em um estado emaranhado e o valor da negatividade logarítmica cresce incessantemente para os tempos simulados. Este intervalo de tempo que o sistema leva para se emaranhar definitivamente (isto é, sem que o sistema volte a ser encontrado em um estado separável futuramente), que nós chamaremos τ_R (tempo de *revival*), aumenta com o aumento de T , porém a velocidade com que o emaranhamento cresce, que nós chamaremos r , parece independe de T . Comparando o gráfico da negatividade logarítmica com o gráfico da discórdia Gaussiana, podemos concluir que a discórdia Gaussiana é mais robusta com relação a mudanças na temperatura,



(a) Negatividade Logarítmica



(b) Discórdia Gaussiana

Figura 6.2: Gráficos das CQ's em função de τ para $c_1 = 0, 4\omega_0^2$ (curva azul), $c_1 = 0, 3\omega_0^2$ (curva vermelha) e $c_1 = 0, 1\omega_0^2$ (curva verde). Todas as curvas foram obtidas com $T = 100T_0$ e $\omega_D = 2\omega_0$. No interior do gráfico temos um segundo gráfico mais aproximado para pequenos de τ .

pois mesmo para temperaturas muito altas esta sempre foi diferente de zero. É interessante notar que no intervalo de tempo em que o sistema está em um estado separável, a discórdia Gaussiana atinge um valor máximo e então começa a diminuir, só voltando a crescer depois que o sistema já se encontra em um estado emaranhado. Quanto maior a temperatura, maior o valor de τ_R e maior o valor máximo da discórdia Gaussiana neste intervalo. Para este anti-intuitivo fenômeno ainda não foi encontrada uma explicação, talvez a discórdia Gaussiana não seja uma boa aproximação para a discórdia quântica nesta situação. É importante salientar que o valor máximo atingido pela discórdia Gaussiana neste intervalo de tempo nunca ultrapassou uma unidade de informação, respeitando o teorema provado em [56]. Outro ponto notável é que o gráfico da discórdia Gaussiana é muito parecido com o gráfico da negatividade logarítmica quando o sistema se encontra em um estado emaranhado. Dado que a discórdia

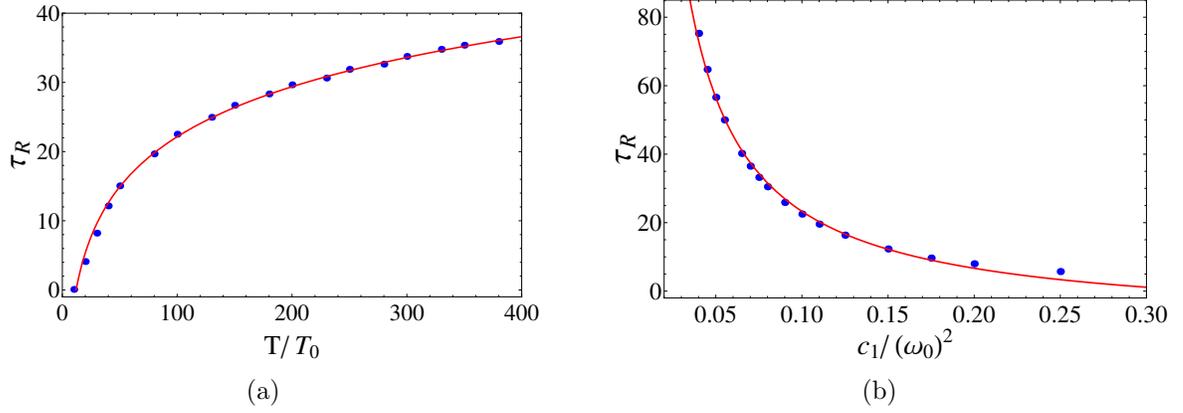


Figura 6.3: (a) Gráfico de τ_R em função de T para $c_1 = 0, 2\omega_0^2$ e $\omega_D = 2\omega_0$. A curva ajustada aos pontos é $\tau_R = (10, 4 \pm 0, 2) \ln(T/T_0) - (25,9 \pm 0,8)$. (b) Gráfico de τ_R em função de c_1 para $T = 100T_0$ e $\omega_D = 2\omega_0$. A curva ajustada aos pontos é $\tau_R = (3, 32 \pm 0, 05)\omega_0^2/c_1 - (9, 9 \pm 0, 7)$.

Gaussiana é um limitante superior para a discórdia quântica usual, que é uma medida de correlações quânticas, inclusive emaranhamento, este fato sugere que a discórdia Gaussiana é uma boa aproximação para a discórdia quântica quando o sistema se encontra em um estado emaranhado. Se esta suposição se confirmar, temos ainda que o emaranhamento seria o tipo predominante de correlação quântica.

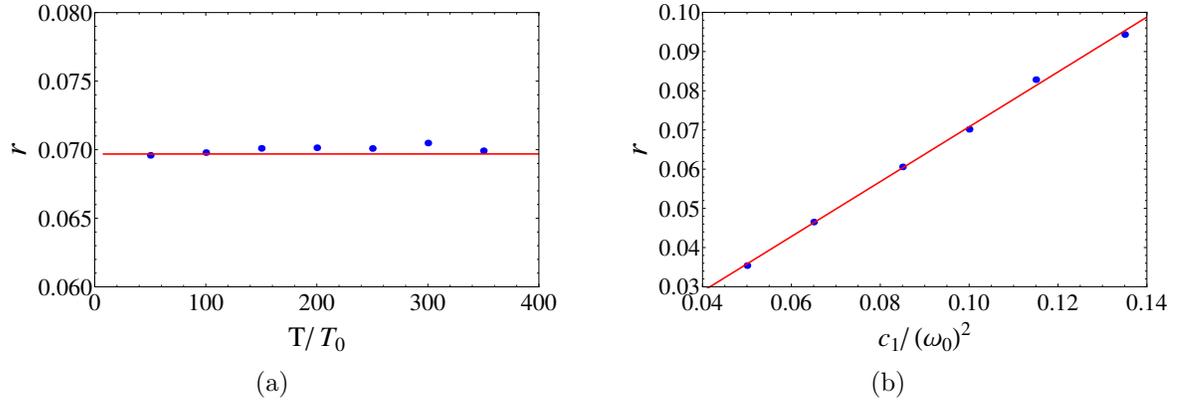


Figura 6.4: (a) Gráfico de r em função de T para $c_1 = 0, 2\omega_0^2$ e $\omega_D = 2\omega_0$. A curva ajustada é $r = (1, 7 \pm 0, 9)10^{-6}T/T_0 + (6, 97 \pm 0, 02)10^{-2}$. (b) Gráfico de r em função de c_1 para $T = 100T_0$ e $\omega_D = 2\omega_0$. A curva ajustada é $r = (0, 700 \pm 0, 01)c_1/\omega_0^2 + (0 \pm 1)10^{-3}$.

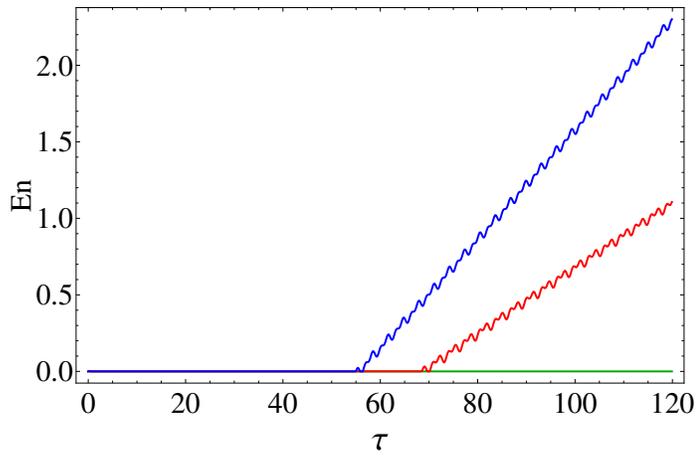
Na figura 6.2, onde analisamos as correlações quânticas para diferentes valores de c_1 , podemos observar que a diminuição de c_1 acarreta efeitos parecidos com os efeitos do aumento de T . Em particular a diminuição de c_1 leva à morte do emaranhamento (a morte súbita do emaranhamento novamente é mais facilmente observada no gráfico interior ao gráfico 6.2(a)), que volta a nascer e aumentar incessantemente depois de algum tempo. Este tempo τ_R que o sistema leva para se emaranhar definitivamente aumenta com a diminuição de c_1 .

Diferentemente do que aconteceu com relação à temperatura T , a velocidade r com que o emaranhamento cresce notoriamente depende de c_1 . Com respeito à discórdia Gaussiana, o comportamento da desta é similar ao observado na figura 6.1, tanto quando o sistema está em um estado separável quanto em um estado emaranhado. Novamente, observamos que os valores obtidos para discórdia Gaussiana sempre foram diferentes de zero.

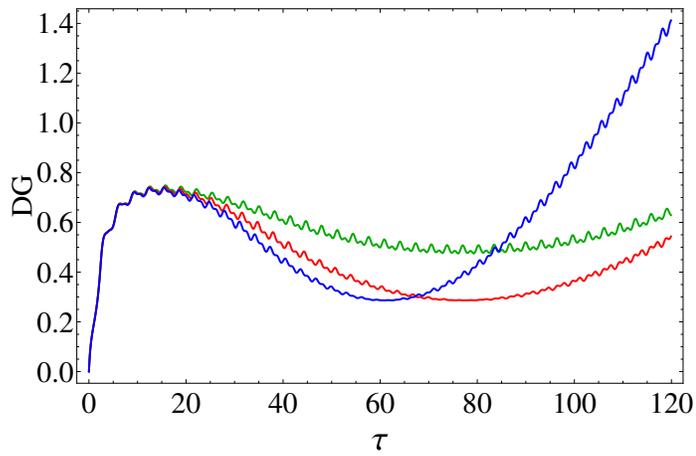
No entanto seria interessante fazer um estudo mais quantitativo dos gráficos apresentados até agora. A análise dos gráficos da negatividade logarítmica para um acoplamento paramétrico mostra que depois de um certo tempo o emaranhamento cresce incessantemente. Além disso, se observarmos com um pouco mais de cuidado veremos que a curva da negatividade logarítmica parece oscilar em torno de uma reta. O que fizemos então foi ajustar uma reta aos pontos de mínimo destas oscilações. A partir do coeficiente angular desta reta estimamos r , a velocidade de crescimento do emaranhamento, e estimamos τ_R como o valor de τ para o qual essa reta cruzava o eixo das abcissas. Definido desta maneira, podemos afirmar que o sistema sempre se encontra em um estado emaranhado se $\tau \geq \tau_R$, o que é coerente com a definição de τ_R . No gráfico 6.3(a) nós temos τ_R para diferentes valores de T e podemos ver que τ_R é uma função monotônica crescente de T . Dada a disposição dos pontos, ajustamos a curva $\tau_R = a \ln T/T_0 + b$ aos pontos obtidos e encontramos $a = (10,4 \pm 0,2)$ e $b = (-25,9 \pm 0,8)$. Já no gráfico 6.3(b) nós temos τ_R em função de c_1 e podemos ver que τ_R é uma função monotônica decrescente de c_1 , sendo que τ_R tende a zero com o crescimento de c_1 e tende a infinito quando c_1 tende a zero. Isto implica que τ_R deve ser uma função de alguma potência de $1/c_1$, de maneira que ajustamos a curva $\tau_R = a\omega_0^2/c_1^{-1} + b$ e encontramos $a = (3,32 \pm 0,05)$ e $b = (9,9 \pm 0,7)$. De maneira geral as simulações indicaram que para $\tau_R < 5$ a maneira que utilizamos para estimar τ_R não é adequada. Nestes casos, muitas vezes o emaranhamento levou algum tempo para apresentar o crescimento “linear” (se descontadas as flutuações). Desta maneira o valor de τ_R encontrado estima a partir de quando o emaranhamento passou a apresentar este comportamento “linear”, e não o valor de τ a depois do qual o sistema se encontrava sempre emaranhado. Geralmente nestes casos o emaranhamento sequer chegou a apresentar morte súbita.

No que diz respeito à velocidade de crescimento do emaranhamento, o gráfico 6.4(a) traz o valor do coeficiente angular r em função de T e de acordo com o gráfico podemos concluir que a dependência de r em T , se existe alguma, é muito fraca para poder ser observada, isto é evidenciado pelo ajuste linear feito, $r = aT/T_0 + b$, onde obtemos $a = (1,7 \pm 0,9)10^{-6}$ e $b = (6,97 \pm 0,02)10^{-2}$. Como podemos ver, o valor de a obtido, além de muito pequeno, tem pouca acurácia. No gráfico 6.4(b) plotamos o valor de r em função de c_1 e ajustamos a curva $r = aT/T_0 + b$, obtendo $a = (0,700 \pm 0,01)$ e $b = (0 \pm 1)10^{-3}$. Desta maneira podemos afirmar que a dinâmica das correlações quânticas depende mais fortemente de c_1 do que de T .

Vamos agora analisar o comportamento das correlações quânticas com relação a variações



(a) Negatividade Logarítmica



(b) Discórdia Gaussiana

Figura 6.5: Gráficos das CQ em função de τ para $\omega_D = 1,94\omega_0$ (curva azul), $\omega_D = 1,96\omega_0$ (curva vermelha) e $\omega_D = 2\omega_0$ (curva verde). Todas as curvas foram obtidas com $T = 100T_0$, $c_0 = 0$ e $c_1 = 0,1\omega_0^2$.

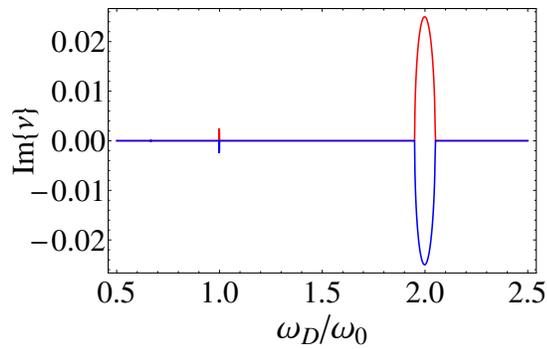


Figura 6.6: Gráfico de $Im\{\nu\}$ em função de ω_D para $c_0 = 0$ e $c_1 = 0,1\omega_0^2$ para o modo ‘-’(curva vermelha) e para o modo ‘+’(curva azul).

na frequência do acoplamento ω_D . A figura 6.5 traz os gráficos da negatividade logarítmica e da discórdia Gaussiana para diferentes valores de ω_D . Como fica claro, variações muito pequenas de ω_D podem levar à morte definitiva do emaranhamento. É interessante comparar a figura 6.5 com a figura 6.6, que traz a parte imaginária do expoente característico de Mathieu ν em função de ω_D . As duas figuras indicam que os osciladores só se emaranham definitivamente quando ω_D é tal que $Im\{\nu\} \neq 0$, ou seja, quando as soluções das equações de movimento são instáveis¹. Nas figuras 6.1-6.4 foi utilizado $\omega_D = 2\omega_0$. Se retornarmos à teoria da subseção 5.1, temos que ν depende de ω_0 , γ , c_0 , c_1 e, devido à reescala, depende fortemente de ω_D . Depois de feita a reescala, temos $\tilde{\omega}_0 = 1$ nas figuras 6.1-6.4. Como $\gamma \ll \omega_0$, $\tilde{\omega}^2 - \tilde{\gamma}^2/4 \approx \tilde{\omega}^2 = 1$, e neste caso, como podemos verificar na figura 5.1, todos os valores de \tilde{c}_1 considerados no diagrama de estabilidade levam a um comportamento instável das soluções das equações de movimento. Ou seja, em todas as figuras 6.1-6.4, onde sempre se verificou que a partir de algum tempo os osciladores se emaranhariam definitivamente, $Im\{\nu\} \neq 0$. O fato de ν não depender de T explica porque a dinâmica das correlações quânticas parece depender tão mais fortemente dos outros parâmetros.

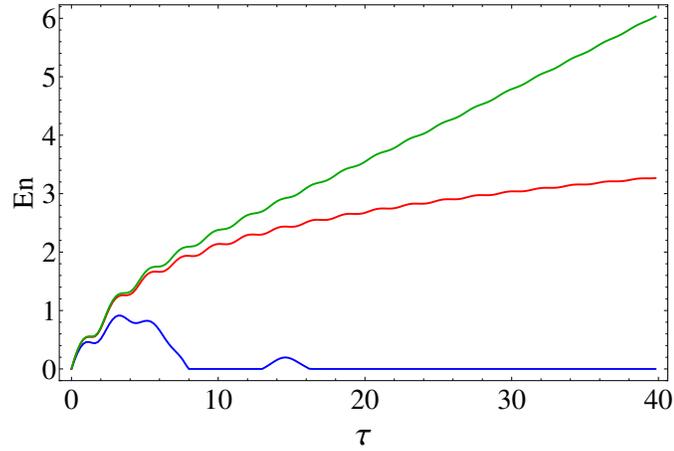
6.1.2 Acoplamento Forte

Consideraremos agora o caso de acoplamento forte entre os osciladores. Nesta situação c_0 tem valores próximos a ω_0^2 e $c_1 = 0$.

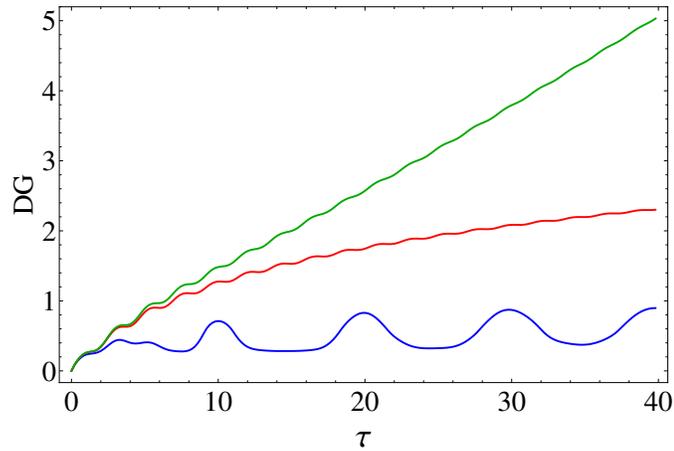
As figuras 6.7(a) e 6.7(b) mostram que as correlações quânticas são muito sensíveis às variações de c_0 na vizinhança de $c_0 = 1, 0\omega_0^2$. De fato, valores ligeiramente menores levam a uma dinâmica instável do emaranhamento, levando à morte do mesmo, assim como valores ligeiramente maiores fazem com que o emaranhamento cresça de maneira rápida. Tal comportamento se repete com a discórdia Gaussiana, com a única diferença que esta não vai a zero para valores de c_0 pouco menores que ω_0^2 . Novamente podemos ver que os gráficos da negatividade logarítmica e da discórdia Gaussianas são muito parecidos, parecendo apenas haver uma diferença de escala entre os mesmos. Já as figuras 6.8(a) e 6.8(b) mostram as correlações quânticas para a condição de ressonância, $c_0 = 1, 0\omega_0^2$, mas para diferentes temperaturas. Como podemos ver, o aumento de T , apesar de enfraquecer as correlações quânticas, não chega ao ponto de levar à morte o emaranhamento, por exemplo. A variação de T tem efeitos muito menos drásticos do que a variação de c_0 em torno de ω_0^2 .

Estes resultados corroboram a relação entre instabilidade e as correlações quânticas encontradas na subseção anterior. De fato, no acoplamento forte nós não temos osciladores paramétricos nos modos ‘+’ e ‘-’, pois $c_1 = 0$, logo não podemos recorrer ao expoente característico de Mathieu para medir a instabilidade do sistema, no entanto, podemos re-

¹Não estamos especificando em qual dos modos devemos encontrar soluções instáveis pois nos caso que estamos analisando, isto é $c_1 \neq 0$, $c_0 = 0$ e $\gamma \ll \omega_0$, o valor assumido por ν é praticamente igual tanto para o modo ‘+’ quanto para o modo ‘-’.



(a) Negatividade Logarítmica



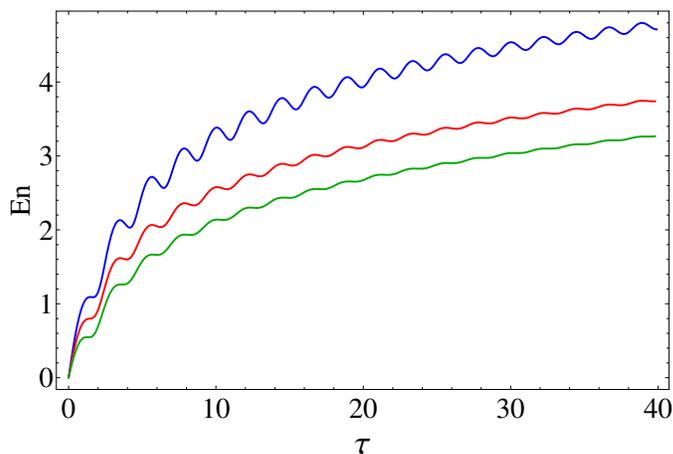
(b) Discórdia Gaussiana

Figura 6.7: Gráficos das CQ em função de τ para $c_0 = 0,9\omega_0^2$ (curva azul), $c_0 = 1,00\omega_0^2$ (curva vermelha) e $c_0 = 1,01\omega_0^2$ (curva verde). Todas as curvas foram obtidas com $c_1 = 0$ e $T = 100T_0$.

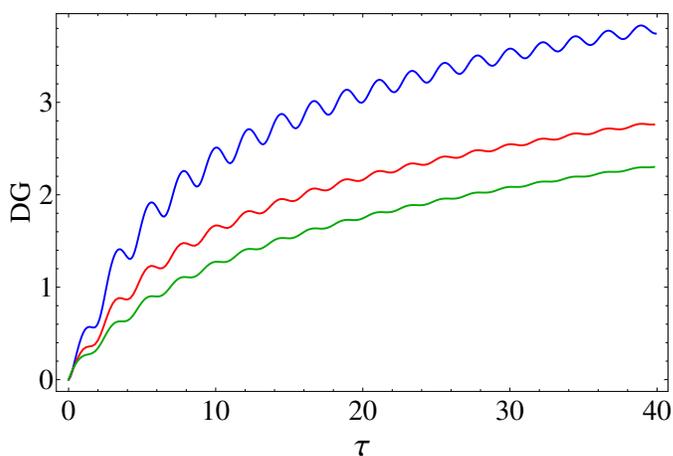
solver as equações de movimento destes modos analiticamente, e claramente a equação de movimento do modo ‘-’ (correspondente ao oscilador paramétrico livre) apresenta soluções instáveis se, e somente se, $c_0 \geq \omega_0^2$, que é justamente a condição encontrada para que tenhamos emaranhamento entre os osciladores.

6.1.3 Acoplamento Misto

Estamos considerando acoplamento misto aquele que tem tanto c_1 quanto c_0 diferentes de zero. Esta situação é similar ao caso do acoplamento paramétrico, os modos ‘+’ e ‘-’ representam osciladores paramétricos, portanto teremos novamente que resolver equações de Mathieu. No entanto, o fato de termos um $c_0 \neq 0$ faz com que estes osciladores tenham frequências diferentes. No caso paramétrico o valor de γ é tão pequeno frente a ω_0 que



(a) Negatividade Logarítmica



(b) Discórdia Gaussiana

Figura 6.8: Gráficos das CQ em função de τ para $T = 10T_0$ (curva azul), $T = 50T_0$ (curva vermelha) e $T = 100T_0$ (curva verde). Todas as curvas foram obtidas com $c_1 = 0$ e $c_0 = 1,00\omega_0^2$.

as frequências dos dois osciladores paramétricos são praticamente iguais. Desta maneira os dois modos apresentam soluções instáveis para os mesmos valores de ω_D . Quando temos um $c_0 \neq 0$, os modos em geral apresentam soluções instáveis para valores distintos de ω_D . A figura 6.9 traz o gráfico da parte imaginária do expoente característico de Mathieu dos modos ‘+’ e ‘-’ para o caso em que $c_0 = 0,05\omega_0^2$ e $c_1 = 0,1\omega_0^2$. No caso paramétrico a existência de soluções instáveis é crucial para a dinâmica das correlações quânticas, resta saber como as correlações quânticas se comportam nesta nova situação em que em geral não podemos ter instabilidade simultânea das soluções do modo ‘+’ e ‘-’.

De acordo com a figura 6.10, o emaranhamento só foi observado quando $\omega_D = 1,96\omega_0$, que é justamente quando o modo ‘-’ tem a parte imaginária do seu expoente característico diferente de zero, ou seja, apresenta soluções instáveis para a equação de movimento. Para

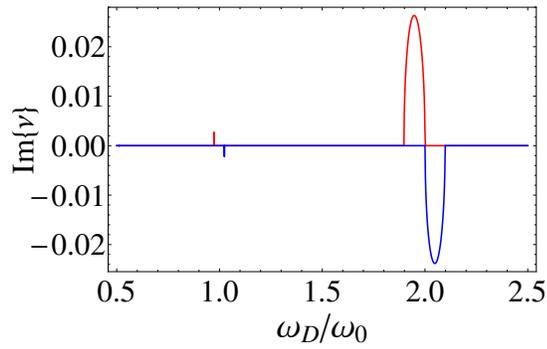
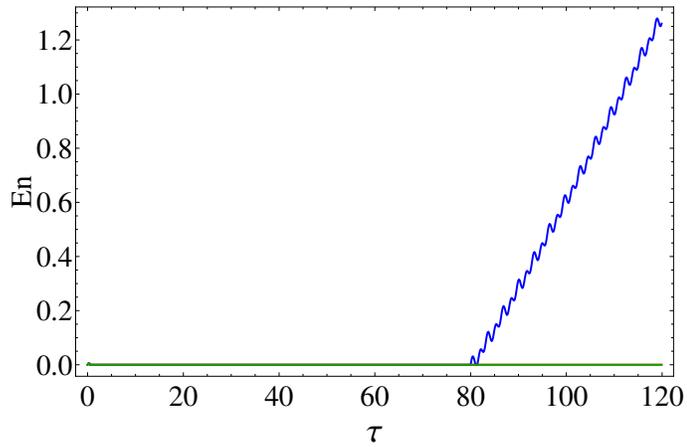
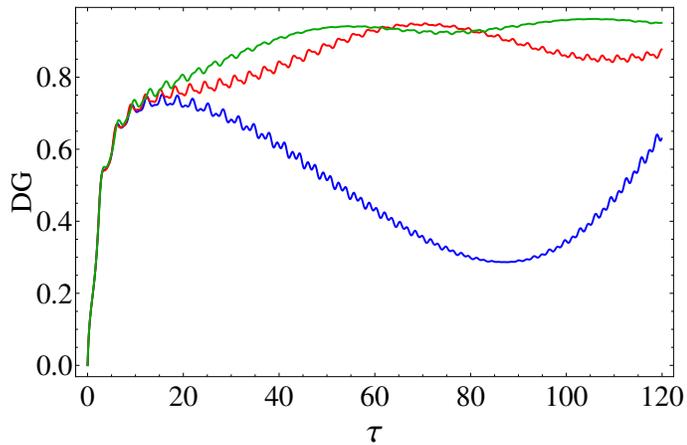


Figura 6.9: Gráfico de $Im\{\nu\}$ em função de ω_D para $c_0 = 0,05\omega_0^2$ e $c_1 = 0,1\omega_0^2$. A curva vermelha refere-se ao ν das soluções do modo ‘-’ e a curva azul ao ν das soluções do modo ‘+’.



(a) Negatividade Logarítmica



(b) Discórdia Gaussiana

Figura 6.10: Gráficos das CQ em função de τ para $\omega_D = 1,96\omega_0$ (curva azul), $\omega_D = 2,04\omega_0$ (curva vermelha) e $\omega_D = 1,8\omega_0$ (curva verde). Todas as curvas foram obtidas com $T = 100T_0$, $c_0 = 0,05\omega_0^2$ e $c_1 = 0,1\omega_0^2$.

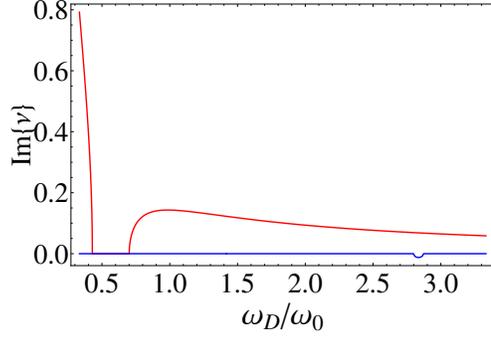
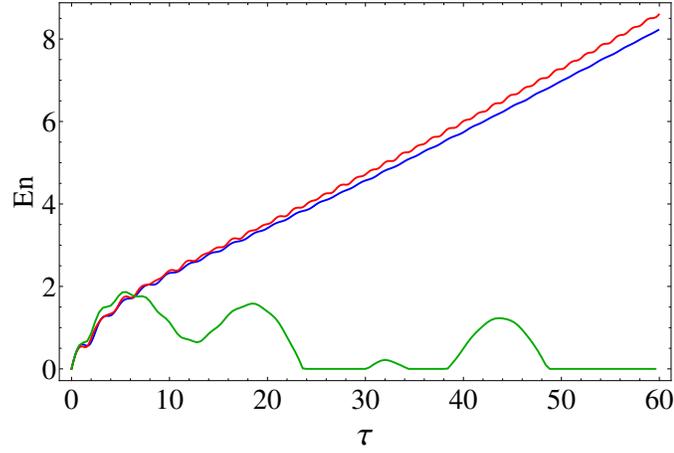


Figura 6.11: Gráfico de $Im\{\nu\}$ em função de ω_D para $c_0 = 1,01\omega_0^2$ e $c_1 = 0,1\omega_0^2$. A curva vermelha refere-se ao ν das soluções do modo ‘-’ e a curva azul ao ν das soluções do modo ‘+’.

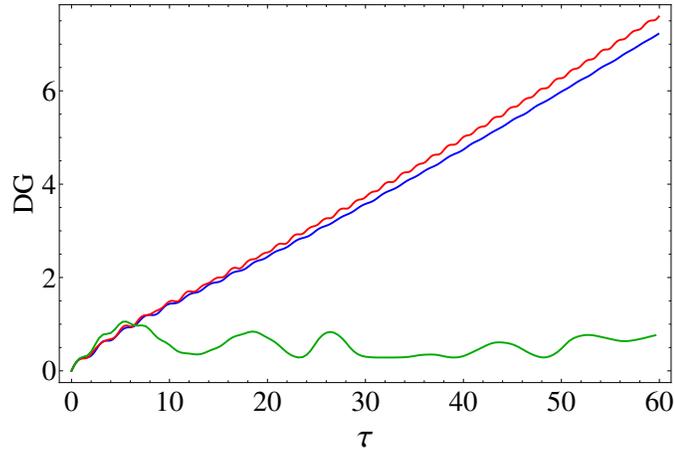
$\omega_D = 2.04\omega_0$ (modo ‘+’ instável) e $\omega_D = 1.8\omega_0$ (ambos os modos estáveis), o emaranhamento morreu depois de algum tempo e não foi mais observado. É interessante notar que quando temos pequenos valores para c_0 e c_1 no acoplamento misto, os resultados são muito parecidos com os obtidos para o acoplamento paramétrico com pequenos valores de c_1 . Em particular, podemos estimar os parâmetros r e τ_R da mesma maneira que no acoplamento paramétrico, e a dependência destes parâmetros em c_1 e T é a mesma.

Vamos considerar o caso em que $c_0 = 1,01\omega_0^2$ e $c_1 = 0,1\omega_0^2$. Dado o alto valor de c_0 (comparável a ω_0^2), espera-se que nesta situação seja bem mais fácil obter um estados emaranhado no sistema. A figura 6.11 traz o gráfico da parte imaginária de ν para os modos ‘+’ e ‘-’ em função de ω_D . Como podemos ver temos soluções instáveis para a equação de movimento do modo ‘-’ em grande parte dos valores de ω_D considerados. Já para o modo ‘+’, apenas um pequeno intervalo de ω_D apresenta soluções instáveis. Na figura 6.12 mostramos os gráficos da negatividade logarítmica e da discórdia Gaussiana em função de τ . Novamente o sistema só se emaranhou para definitivamente para $\omega_D = 2\omega_0$ e $\omega_D = 4\omega_0$, que são valores de ω_D que levam a instabilidade no modo ‘-’. Para $\omega_D = 0,5\omega_0$, valor de ω_D onde ambos os modos são estáveis, o emaranhamento morreu após algum tempo.

Por fim, é importante notar que, sempre que o pré-requisito de instabilidade do modo ‘-’ é satisfeito, os valores obtidos para a negatividade logarítmica são consideravelmente menores que os valores obtidos em [4]. Isto mostra que a interação indireta entre os osciladores via banho contribui de maneira significativa para a manutenção das correlações quânticas. Apesar desta interação indireta não ser capaz, por si só, de levar os osciladores a um estado emaranhado (como podemos observar na figura 6.3(b), pois τ_R tende a infinito quando c_1 tende a zero), talvez seja ela a responsável por manter a discórdia Gaussiana sempre diferente de zero.



(a) Negatividade Logarítmica



(b) Discórdia Gaussiana

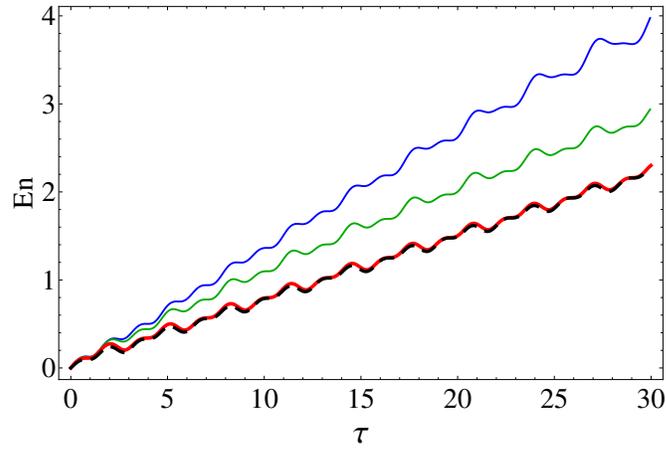
Figura 6.12: Gráficos das CQ em função de τ para $\omega_D = 2\omega_0$ (curva azul) $\omega_D = 4\omega_0$ (curva vermelha) e $\omega_D = 0,5\omega_0$ (curva verde). Todas as curvas foram obtidas com $T = 100T_0$, $c_0 = 1,01\omega_0^2$ e $c_1 = 0,1\omega_0^2$.

6.2 Regime não-Markoviano

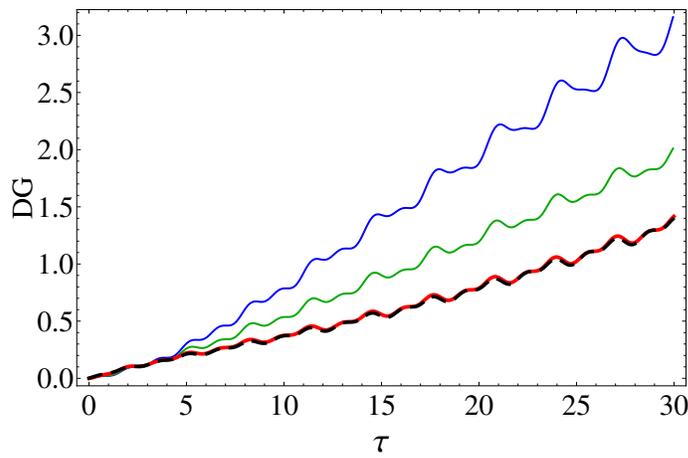
Para estudar a dinâmica das correlações quânticas no regime não-Markoviano utilizamos o formalismo de equações mestras, descrito na subseção 2.2.2. A densidade espectral do banho de osciladores utilizada foi,

$$I(\omega) = m\gamma\omega \exp\left(-\frac{\omega^2}{\omega_C^2}\right). \quad (6.1)$$

O único motivo para o uso de uma densidade espectral com regularização Gaussiana é a facilidade de implementação do método numérico para solução de equações integro-diferenciais, já que no caso da densidade espectral em questão evitamos o uso de integrações numéricas que poderiam tornar os cálculos mais lentos e menos precisos. O método numérico utilizado para



(a) Negatividade Logarítmica



(b) Discórdia Gaussiana

Figura 6.13: Gráfico das CQ's em função de τ para $\omega_C = 0,5\omega_0$ (curva azul), $\omega_C = 1,0\omega_0$ (curva verde) e $\omega_C = 5,0\omega_0$ (curva vermelha). A curva tracejada corresponde ao caso Markoviano. Todas as curvas foram obtidas com $T = 10T_0$, $c_1 = 0,2\omega_0^2$, $c_0 = 0$ e $\omega_D = 2\omega_0$.

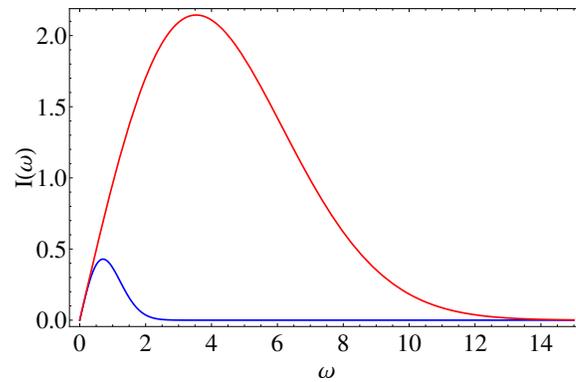
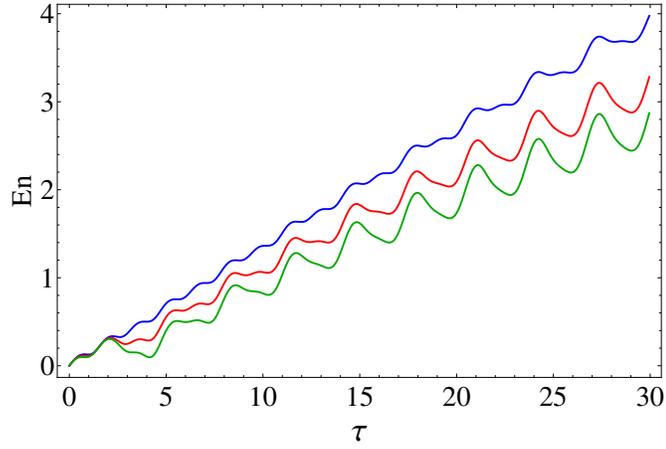
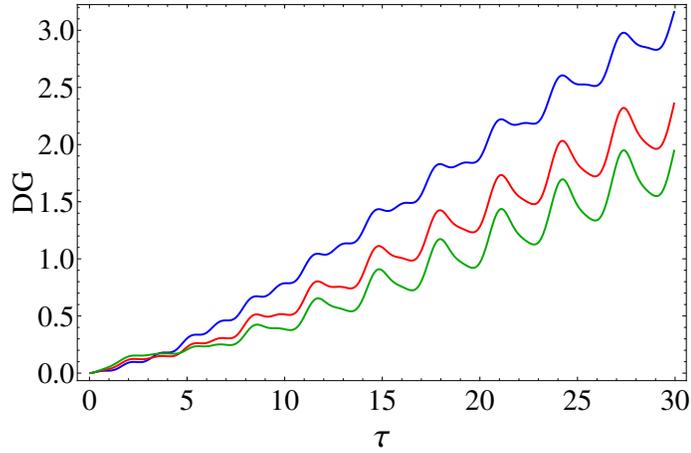


Figura 6.14: Gráfico de $I(\omega)$ para $\omega_C = 1$ (curva azul) e $\omega_C = 5$ (curva vermelha).



(a) Negatividade Logarítmica

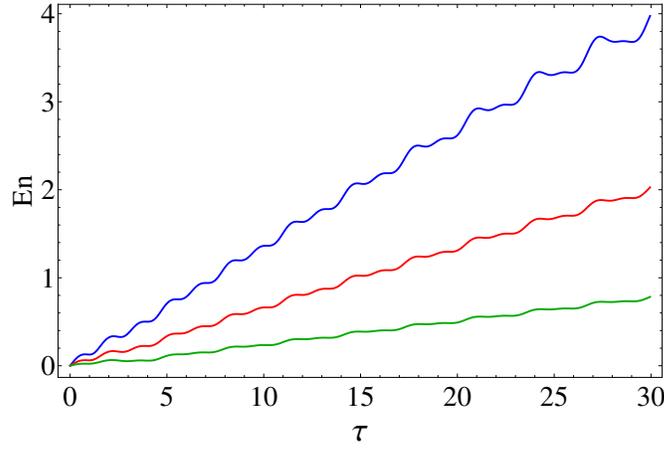


(b) Discórdia Gaussiana

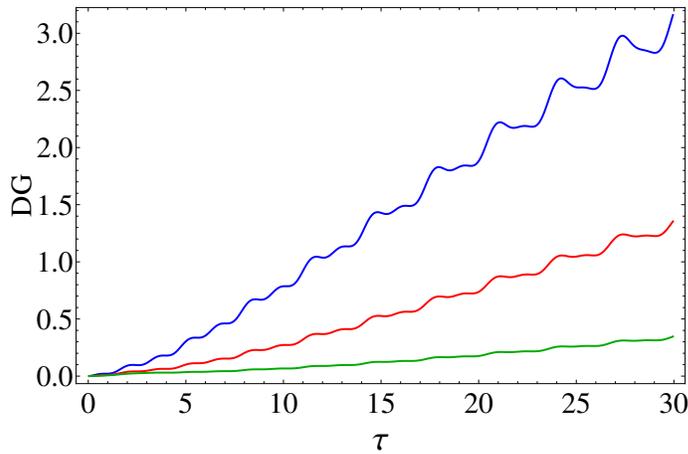
Figura 6.15: Gráficos das CQ's em função de τ para $T = 10T_0$ (curva azul), $T = 50T_0$ (curva vermelha) e $T = 100T_0$ (curva verde). Em todas as curvas $c_1 = 0, 2\omega_0^2$, $c_0 = 0$ e $\omega_C = 0, 5\omega_0$.

resolver as equações integro-diferenciais está descrito em [63]. No regime não-Markoviano, além de analisar a dinâmica das correlações quânticas com respeito à temperatura T do banho e aos parâmetros do acoplamento entre os osciladores, também estudamos os efeitos da frequência de corte ω_C .

A figura 6.13 traz os gráficos do emaranhamento e da discórdia Gaussiana, respectivamente, para diferentes valores da frequência de corte ω_C e podemos observar que a diminuição de ω_C contribui para o aumento das correlações quânticas. Este fato foi observado em todos os resultados obtidos no regime não-Markoviano e pode ser explicado se analisarmos a figura 6.14, que traz a função $I(\omega)$ para $\omega_C = 1\omega_0$ e $\omega_C = 5\omega_0$. Nela podemos ver que para $\omega_C = 1\omega_0$ é como se o sistema estivesse acoplado de maneira mais fraca ao reservatório do que para $\omega_C = 5\omega_0$. Logo é de se esperar que os efeitos da descoerência sejam mais discretos. Podemos observar que para $\omega_C = 5\omega_0$, o gráfico das correlações quânticas praticamente coincide com



(a) Negatividade Logarítmica



(b) Discórdia Gaussiana

Figura 6.16: Gráficos das CQ's em função de τ para $c_1 = 0,2\omega_0^2$ (curva azul), $c_1 = 0,1\omega_0^2$ (curva vermelha) e $c_1 = 0,04\omega_0^2$ (curva verde). Em todas as curvas $T = 10T_0$, $c_0 = 0$ e $\omega_C = 0.5\omega_0$.

o gráfico do caso Markoviano. Isto confirma o fato de que para $\omega_C \gg \omega_0$, o sistema está em um regime Markoviano.

No que diz respeito a variações de T e c_1 , as correlações quânticas mantiveram um comportamento parecido com o caso Markoviano. A figura 6.15 traz a negatividade logarítmica e a discórdia Gaussiana para diferentes valores de T . Dado o baixo valor de ω_C , mesmo para $T = 100T_0$ não foi observada a morte súbita do emaranhamento. A velocidade com que o emaranhamento cresce depende de T , porém de maneira discreta. Na figura 6.16 as correlações quânticas são estudadas com relação a variações de c_1 . Novamente, mesmo para $c_1 = 0.05\omega_0^2$ não é observada a morte súbita do emaranhamento, no entanto a velocidade com que o emaranhamento cresce depende fortemente de valor de c_1 .

Infelizmente, a estratégia que usamos no regime Markoviano para estudar a dinâmica das

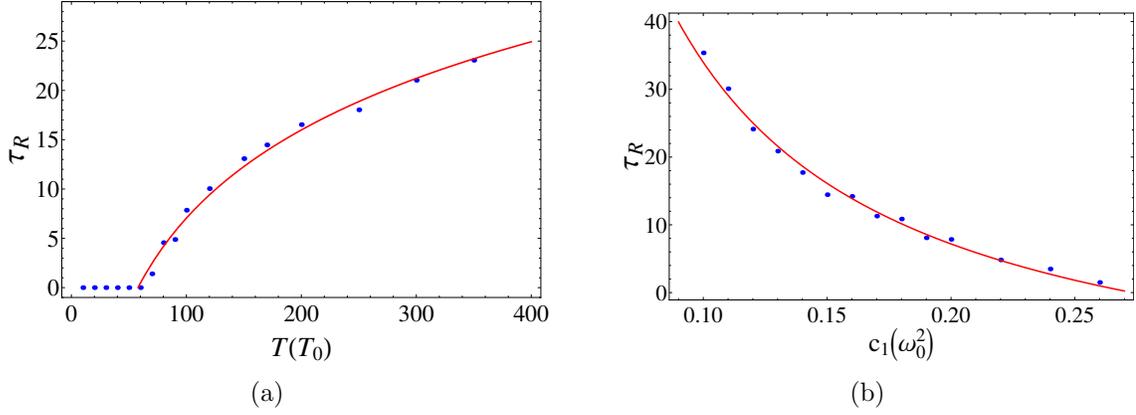
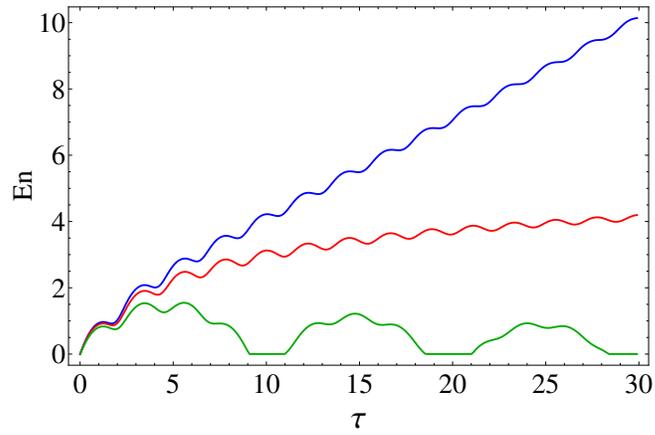


Figura 6.17: (a) Gráfico de τ_R em função de T para $c_1 = 0, 2\omega_0^2$. A curva ajustada é $\tau_R = (12,9 \pm 0,4) \ln(T/T_0) - (52 \pm 2)$. (b) Gráfico de τ_R em função de c_1 para $T = 100T_0$. A curva ajustada é $\tau_R = (5,3 \pm 0,1)\omega_0^2/c_1 - (19,6 \pm 0,9)$. Em ambos os gráficos $\omega_C = \omega_0$ e $\omega_D = 2\omega_0$

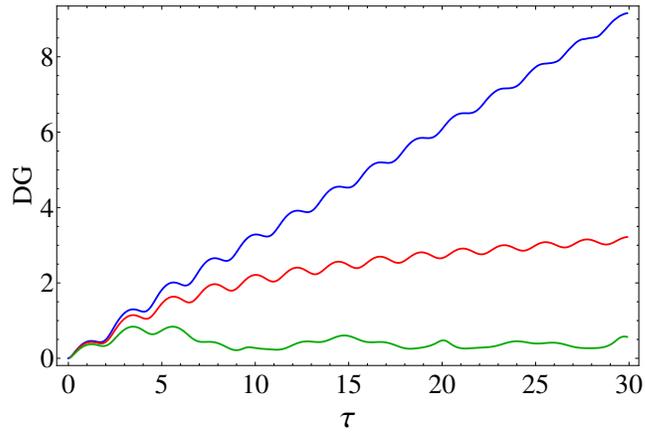
CQ, isto é, ajustar uma reta ao gráfico da negatividade logarítmica, não pode ser repetida no regime não-Markoviano basicamente porque a negatividade logarítmica não parece ser linear em τ se descontadas as oscilações. Desta maneira não foi possível estimar a velocidade de crescimento do emaranhamento no regime não-Markoviano, e o parâmetro τ_R teve de ser redefinido. Basicamente definimos τ_R como o intervalo entre a primeira morte do emaranhamento e o último nascimento do mesmo. Desta maneira temos em 6.17(a) τ_R em função de T e em função de c_1 em 6.17(b). Novamente ajustamos a curva $\tau_R = a \ln T/T_0 + b$ em 6.17(a) (neste caso para os pontos cujo $\tau_R \neq 0$), obtendo $a = (12,9 \pm 0,4)$ e $b = (-52 \pm 2)$, e ajustamos a curva $\tau_R = a\omega_0^2/c_1 + b$ em 6.17(b), obtendo $a = (5,3 \pm 0,1)$ e $b = (-19,6 \pm 0,9)$. Pode-se notar que com a nova definição de τ_R os ajustes não ficaram tão bons quanto os obtidos no caso Markoviano, no entanto, conseguimos encontrar os mesmos comportamentos.

Na figura 6.18 temos um caso de acoplamento forte no regime não-Markoviano. O comportamento das correlações quânticas para valores de c_0 próximos de ω_0^2 é bem parecido com o comportamento no caso Markoviano, com a única diferença que o caso não-Markoviano favorece mais o crescimento das correlações quânticas. Novamente podemos notar uma alta sensibilidade das CQ com relação a pequenas variações em torno de $c_0 = \omega_0^2$, sendo que apenas para $c_0 \geq \omega_0^2$ conseguimos observar emaranhamento para tempos longos. Ou seja, aqui também a instabilidade das soluções das equações de movimento, novamente do modo ‘-’, contribui de maneira decisiva para a dinâmicas das correlações quânticas.

Para estudar o papel das instabilidade na dinâmica não-Markoviana das CQ, vamos analisar a figura 6.20, que traz as correlações quânticas para diferentes valores de ω_D e a figura 6.19, que traz o gráfico da parte imaginária de ν em função de ω_D . Os gráficos confirmam que apenas quando $\omega_D = 1,9\omega_0$, valor que leva a instabilidade do modo ‘-’, conseguimos ob-



(a) Negatividade Logarítmica



(b) Discórdia Gaussiana

Figura 6.18: Gráfico das CQ's em função de τ para $c_0 = 0,9\omega_0^2$ (curva azul), $c_0 = 1,00\omega_0^2$ (curva vermelha) e $c_0 = 1,05\omega_0^2$ (curva verde). Todas as curvas foram obtidas com $c_1 = 0$ e $T = 100T_0$.

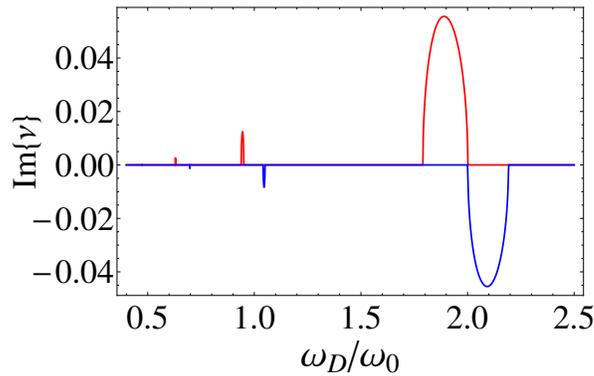
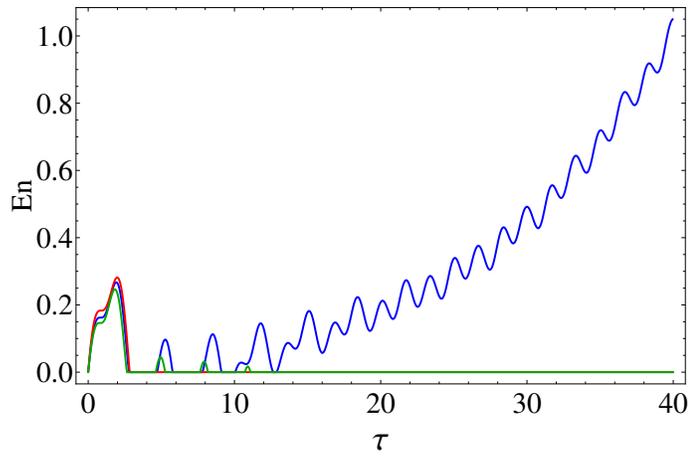
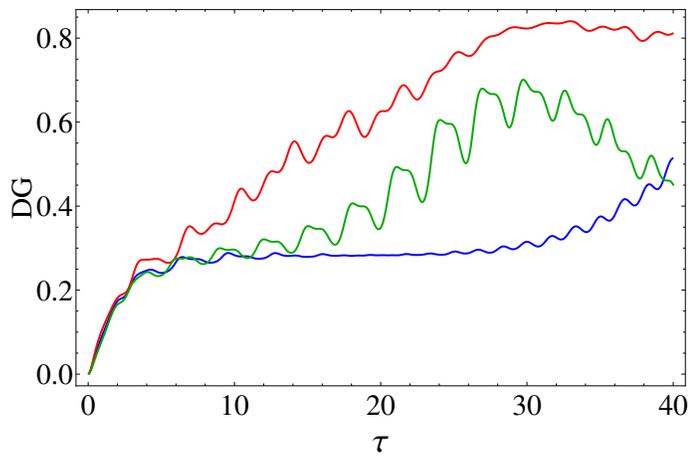


Figura 6.19: Gráfico da parte imaginária do expoente característico em função de ω_D para os modos '+' (curva azul) e '-' (curva vermelha) para $c_0 = 0,1\omega_0^2$ e $c_1 = 0,2\omega_0^2$.



(a) Negatividade Logarítmica



(b) Discórdia Gaussiana

Figura 6.20: Gráficos das CQ's em função de τ para $\omega_D = 1,9\omega_0$ (curva azul), $\omega_D = 1,7\omega_0$ (curva vermelha) e $\omega_D = 2,1\omega_0^2$ (curva verde). Todas as curvas foram obtidas com $T = 100T_0$, $c_0 = 0,1\omega_0^2$, $c_1 = 0,2\omega_0^2$ e $\omega_C = 1,0\omega_0$.

servar emaranhamento para tempos longos no sistema. Para $\omega_D = 2,1\omega_0$ (modo '+' instável) e $\omega_D = 1,7\omega_0$ (ambos os modos estáveis) o emaranhamento foi a zero depois de algum tempo e não foi observado novamente. Este resultado confirma o que foi exaustivamente visto no regime Markoviano. Este fato ajuda a evidenciar que para o nosso sistema o banho tem uma influência consideravelmente limitada sobre as CQ, uma vez que para densidades espectrais distintas, os principais aspectos da dinâmica se mantém.

Capítulo 7

Conclusão

Nesta dissertação fizemos um estudo das correlações quânticas em um sistema de dois osciladores harmônicos sujeitos a um acoplamento do tipo $c(t) = c_0 + c_1 \cos(\omega_D t)$ e em contato com um mesmo reservatório térmico. De maneira geral, conseguimos obter valores expressivos para a negatividade logarítmica e para a discórdia Gaussiana mesmo em temperaturas altas. Os valores obtidos para a negatividade logarítmica foram consideravelmente maiores que os obtidos em [4], onde os osciladores estavam acoplados a banhos independentes, podendo se afirmar então que a interação indireta dos osciladores via banho, apesar de não ser suficiente para por sí só emaranhar os osciladores, tem um importante papel na dinâmica das correlações quânticas.

Os resultados mostram que existe uma relação direta entre a instabilidade do sistema e a observação de estados emaranhamento no mesmo. Para os casos de acoplamento paramétrico e acoplamento misto, temos como medir a instabilidade utilizando o expoente característico de Floquet ν . Dependendo dos valores de ω_0 , c_0 , c_1 e ω_D podemos ter instabilidade no modo ‘-’, no modo ‘+’, ou nos dois modos, porém apenas quando o modo ‘-’ apresenta instabilidade (ou seja, $Im\{\nu\} \neq 0$ para o modo ‘-’) são observados estados emaranhados para tempos longos. Para estes tipos de acoplamento é importante lembrar que a razão ω_D/ω_0 é crucial para o emaranhamento, pequenas variações nesta razão podem levar o sistema de uma dinâmica instável para uma dinâmica estável, ou vice-versa. Em particular para pequenos valores de c_0 e c_1 , encontramos ainda importantes parâmetros para estudar a dinâmica das correlações quânticas: o tempo de *revival* τ_R , que estima o tempo que o sistema leva para se emaranhar definitivamente, e a taxa de crescimento do emaranhamento r . Os ajustes feitos com estes parâmetros mostram que τ_R depende de $\ln(T/T_0)$ e ω_0^2/c_1 e que r é linear em c_1/ω_0^2 e aparentemente não depende de T . Podemos observar claramente a partir destes ajustes que a dependência destes parâmetros em T é mais fraca que a dependência em c_1 . É importante notar que mesmo que a temperatura T do reservatório seja levada a valores muito altos, o máximo que observamos é um aumento em τ_R . Para o acoplamento forte, o modo ‘+’

não apresenta instabilidade, porém o modo ‘-’ apresenta instabilidade sempre que $c_0 \geq \omega_0^2$. De fato, apenas para valores de c_0 satisfazendo esta condição conseguimos observar estados emaranhados para tempos longos, inclusive em altas temperaturas. Novamente, variações de c_0 tem influência muito maior sobre a dinâmica das correlações quânticas do que variações de T .

No que diz respeito à discórdia Gaussiana, esta se mostrou mais robusta que a negatividade logarítmica, no sentido de que sua medida não vai a zero para nenhum $\tau > 0$ simulado, em todas as simulações. O fato do gráfico discórdia Gaussiana ser muito parecido com o gráfico da negatividade logarítmica sempre que o sistema apresenta um valor apreciável para a negatividade logarítmica ($E_N \geq 1$) sugere que, pelo menos nesta situação, a discórdia Gaussiana é uma boa aproximação para a discórdia quântica usual. Se esta suposição se confirmar, os resultados indicam que há correlações quânticas no sistema, mesmo em temperaturas muito altas, em todas as situações simuladas. Além disso, o emaranhamento seria a correlação quântica predominante no sistema quando a negatividade logarítmica é diferente de zero.

No regime não-Markoviano obtivemos valores maiores tanto para a negatividade logarítmica quanto para a discórdia Gaussiana. Esse aumento explica-se pela densidade espectral utilizada. Quanto mais não-Markoviano o sistema, menos osciladores do banho interagem fortemente com sistema e conseqüentemente, menor a descoerência do mesmo. Isto confirma a importância de banhos especialmente estruturados na dinâmica de sistemas abertos em geral. Para pequenos valores de c_0 e c_1 , manteve-se a dependência de τ_R em $\ln(T/T_0)$ e de ω_0^2/c_1 . Assim como no regime Markoviano, o emaranhamento do sistema está diretamente ligado à existência de soluções instáveis para o modo ‘-’. Um fato notável na dinâmica não-Markoviana das correlações quânticas é a observação de que para valores relativamente pequeno da frequência de corte ω_C , $\omega_C = 5\omega_0$, os resultados já eram praticamente iguais aos resultados obtidos no regime Markoviano.

De maneira geral, podemos concluir que apenas quando as soluções da equação de movimento do modo normal ‘-’, que é um oscilador paramétrico livre, apresentam instabilidade, estados emaranhados são observados no sistema para tempos longos. Esta relação entre instabilidade do sistema e emaranhamento explica porque as correlações quânticas são muito mais sensíveis a variações dos parâmetros dos osciladores do que a variações da temperatura T , uma vez que T não tem relação alguma com a instabilidade da dinâmica dos osciladores. É portanto razoável esperar que mesmo a altas temperaturas possamos observar emaranhamento.

No que diz respeito à realização experimental de um sistema nos moldes do que aqui é estudado, fica claro que, apesar de dispensar um rígido controle de temperatura, tal experimento necessitaria de um rígido controle dos parâmetros do acoplamento, na medida que pequenas variações destes parâmetros podem tirar o sistema da condição de instabilidade e

portanto levar à morte do emaranhamento. Apesar do acoplamento discutido aqui não ser de trivial realização experimental, regimes de acoplamento paramétrico[64, 65] e acoplamento forte[66] entre ressonadores já foram alcançados. Nossos resultados ainda deixam em aberto se outros tipo de acoplamentos mais facilmente realizáveis em laboratório e que levem a uma dinâmica instável dos modos normais não poderiam também levar à observação de estados emaranhados a altas temperaturas.

Anexo 1

Neste anexo vamos mostrar com mais detalhes como foi derivada a equação mestra utilizada para estudar a dinâmica não-Markoviana do sistema de interesse. Vamos primeiro encontrar as equações de movimento para $\langle \hat{a} \rangle$, $\langle \hat{a}^2 \rangle$ e $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ utilizando a equação de Heisenberg. Derivando a eq.(5.91) e eliminando as dependências nos operadores em $t = 0$ usando a própria eq.(5.91), nós chegamos na seguinte equação,

$$\frac{d}{dt} \hat{a}(t) = \Sigma(t) \hat{a}(t) + \Upsilon(t) \hat{a}^\dagger(t) + \frac{d}{dt} \hat{F}(t) - \Sigma(t) \hat{F}(t) - \Upsilon(t) \hat{F}^\dagger(t). \quad (7.1)$$

onde $\Sigma(t) = [\dot{G}(t)G^*(t) - \dot{L}^*(t)L(t)]/W(t)$, $\Upsilon(t) = [\dot{L}^*(t)G(t) - \dot{G}(t)L^*(t)]/W(t)$ e $W(t) = G(t)G^*(t) - L(t)L^*(t)$. Resta apenas tomar o valor médio da eq.(7.1). Para isto cabe lembrar que a média deve ser tomada com relação ao operador densidade do sistema em $t = 0$, dado pela eq.(5.83), afinal de contas todos os operadores envolvidos nas soluções gerais de $\hat{a}(t)$ e $\hat{F}(t)$ são operadores na versão de Heisenberg em $t = 0$. Desta maneira fica claro que o valor médio de \hat{F} , \hat{F}^\dagger e $d\hat{F}/dt$ com relação *ensemble* canônico é zero, logo a equação toma a seguinte forma,

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{a}(t) \rangle = \Sigma(t) \langle \hat{a}(t) \rangle + \Upsilon(t) \langle \hat{a}^\dagger(t) \rangle. \quad (7.2)$$

A partir da eq.(7.1) podemos, usando uma estratégia similar, chegar às seguintes equações,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{a}(t) \hat{a}(t) \rangle &= 2\Sigma(t) \langle \hat{a}(t) \hat{a}(t) \rangle + 2\Upsilon(t) \langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) \rangle + \Upsilon(t) + \frac{d}{dt} \langle \hat{F}(t) \hat{F}(t) \rangle - \\ &2\Sigma(t) \langle \hat{F}(t) \hat{F}(t) \rangle - \Upsilon(t) \langle \hat{F}(t) \hat{F}^\dagger(t) + \hat{F}^\dagger(t) \hat{F}(t) \rangle, \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) \rangle &= \frac{\dot{W}}{W} \langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) \rangle + \Upsilon^*(t) \langle \hat{a}(t) \hat{a}(t) \rangle + \Upsilon(t) \langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}^\dagger(t) \rangle + \frac{d}{dt} \langle \hat{F}^\dagger(t) \hat{F}(t) \rangle - \\ &\frac{\dot{W}}{W} \langle \hat{F}^\dagger(t) \hat{F}(t) \rangle - \Upsilon^*(t) \langle \hat{F}(t) \hat{F}(t) \rangle - \Upsilon(t) \langle \hat{F}^\dagger(t) \hat{F}^\dagger(t) \rangle. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Apesar de valores médios serem iguais tanto na versão de Schroedinger quanto na versão de Heisenberg, optamos por colocar a dependência temporal dos operadores explícita para deixar claro que as eqs.(7.1-7.4) foram obtidas utilizando-se a equação de Heisenberg. Vamos agora

obter equações similares utilizando a equação mestra (5.88). Segundo a equação mestra,

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{a}\rangle = -[\xi(t) + i\chi(t)]\langle\hat{a}\rangle - i\Lambda^*(t)\langle\hat{a}^\dagger\rangle, \quad (7.5)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{a}\hat{a}\rangle = -2[\xi(t) + i\chi(t)]\langle\hat{a}\hat{a}\rangle - 2i\Lambda^*(t)\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle - i\Lambda^*(t) - 2\gamma_3^*(t), \quad (7.6)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle = -2\xi(t)\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle + i\Lambda(t)\langle\hat{a}\hat{a}\rangle - i\Lambda^*(t)\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\rangle + 2\gamma_2(t), \quad (7.7)$$

onde $\xi(t) = \gamma_1(t) - \gamma_2(t)$, $\chi(t) = \omega(t) + \Delta\omega(t)$ e $\Lambda(t) = \lambda(t) + \Delta\lambda(t)$. Comparando as eqs.(7.5-7.7) com as eqs.(7.2-7.4) nós chegamos às seguinte relações:

$$\gamma_1(t) - \gamma_2(t) = -\frac{\dot{W}(t)}{2W(t)}, \quad (7.8)$$

$$2\gamma_2(t) = \frac{d}{dt}\langle\hat{F}^\dagger(t)\hat{F}(t)\rangle - \frac{\dot{W}(t)}{W(t)}\langle\hat{F}^\dagger(t)\hat{F}(t)\rangle - \Upsilon^*(t)\langle\hat{F}(t)\hat{F}(t)\rangle - \Upsilon(t)\langle\hat{F}^\dagger(t)\hat{F}^\dagger(t)\rangle, \quad (7.9)$$

$$-2\gamma_3^*(t) = \frac{d}{dt}\langle\hat{F}(t)\hat{F}(t)\rangle - 2\Sigma(t)\langle\hat{F}(t)\hat{F}(t)\rangle - \Upsilon(t)\langle\hat{F}(t)\hat{F}^\dagger(t) + \hat{F}^\dagger(t)\hat{F}(t)\rangle, \quad (7.10)$$

$$\lambda^*(t) + \Delta\lambda(t) = i\Upsilon(t), \quad (7.11)$$

$$\omega(t) + \Delta\omega(t) = i\Sigma(t) - i\frac{\dot{W}(t)}{2W(t)}. \quad (7.12)$$

Temos então cinco equações para os cinco coeficientes da equação mestra, a citar, $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$, $\Delta\lambda(t)$ e $\Delta\omega(t)$. Podemos portanto escrever estes coeficientes em termos das funções $L(t)$, $G(t)$ e das médias $\langle\hat{F}(t)\hat{F}(t)\rangle$, $\langle\hat{F}(t)\hat{F}^\dagger(t)\rangle$ e $\langle\hat{F}^\dagger(t)\hat{F}(t)\rangle$. Substituindo as derivadas das funções $L(t)$ e $G(t)$ nas equações (7.11) e (7.12) chegamos finalmente às eqs.(5.95-5.99).

No entanto, para que possamos calcular os coeficientes da equação mestra, resta ainda encontrar as funções de autocorrelação do banho de osciladores, a citar: $\langle\hat{F}(t)\hat{F}(t)\rangle$, $\langle\hat{F}^\dagger(t)\hat{F}(t)\rangle$ e $\langle\hat{F}(t)\hat{F}^\dagger(t)\rangle$. Para isto, vamos precisar encontrar a solução da eq.(5.94). Como se trata de uma equação integro-diferencial não-homogênea, vamos utilizar o método das funções de Green para resolvê-la. Suponha que o vetor

$$\vec{\mathcal{V}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{F}(t) \\ \hat{F}^\dagger(t) \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

possa ser escrito da seguinte maneira,

$$\vec{\mathcal{V}}(t) = \int_0^t ds \Gamma(t, s) \vec{\mathcal{B}}(s), \quad (7.14)$$

onde

$$\mathbf{\Gamma}(t, s) = -i \begin{bmatrix} \Gamma_1(t, s) & \Gamma_2^*(t, s) \\ \Gamma_2(t, s) & \Gamma_1^*(t, s) \end{bmatrix}, \quad (7.15)$$

e

$$\vec{\mathcal{B}}(t) = \begin{bmatrix} \sum_k g_k [\hat{b}_k(0)e^{-i\omega_k t} + \hat{b}_k^\dagger(0)e^{i\omega_k t}] \\ -\sum_k g_k [\hat{b}_k(0)e^{-i\omega_k t} + \hat{b}_k^\dagger(0)e^{i\omega_k t}] \end{bmatrix}. \quad (7.16)$$

Além disso a matriz $\mathbf{\Gamma}(t, s)$ satisfaz a condição de contorno $\mathbf{\Gamma}(t, t) = -i\mathbf{1}_2$. Derivando a eq.(7.14) nós obtemos,

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{V}}(t) = \mathbf{\Gamma}(t, t)\vec{\mathcal{B}}(t) + \int_0^t ds \frac{d}{dt}\mathbf{\Gamma}(t, s)\vec{\mathcal{B}}(s). \quad (7.17)$$

Substituindo a eq.(5.94) do lado direito da igualdade chegamos a

$$\int_0^t ds \left[\frac{d}{dt}\mathbf{\Gamma}(t, s) + i\mathbf{M}(t)\mathbf{\Gamma}(t, s) \right] \vec{\mathcal{B}}(s) + \int_0^t ds \mathbf{K}(t-s) \int_0^s ds' \mathbf{\Gamma}(t, s') \vec{\mathcal{B}}(s') = 0. \quad (7.18)$$

onde

$$\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) & \lambda^*(t) \\ -\lambda(t) & -\omega(t) \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

e

$$\mathbf{K}(t-s) = K(t-s) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (7.20)$$

O segundo termo da eq.(7.18) é uma integral dupla na região $s' \in [0, s]$ para $s \in [0, t]$. Esta

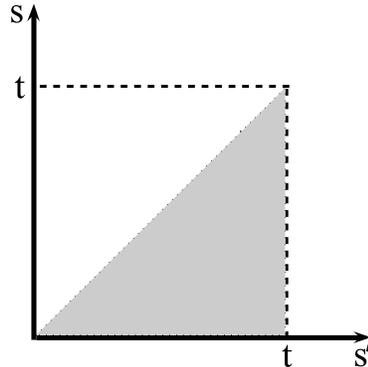


Figura 7.1: Região de integração da integral dupla da eq.(7.18). A região de integração está colorida de cinza.

região está desenhada na figura 7.1. Fica claro que esta mesma região de integração pode

ser descrita por $s \in [s', t]$ para $s' \in [0, t]$. Logo podemos reescrever a eq.(7.18) da seguinte maneira,

$$\int_0^t ds \left[\frac{d}{dt} \mathbf{\Gamma}(t, s) + i\mathbf{M}(t)\mathbf{\Gamma}(t, s) \right] \vec{\mathcal{B}}(s) + \int_0^t ds' \int_{s'}^t ds \mathbf{K}(t-s)\mathbf{\Gamma}(t, s') \vec{\mathcal{B}}(s') = 0. \quad (7.21)$$

Fazendo a transformação $s \rightarrow s - s'$ e lembrando que as variáveis de integração são mudas, chegamos enfim à seguinte equação,

$$\int_0^t ds \left[\frac{d}{dt} \mathbf{\Gamma}(t, s) + i\mathbf{M}(t)\mathbf{\Gamma}(t, s) + \int_0^{t-s} ds' \mathbf{K}(t-s-s')\mathbf{\Gamma}(s+s', s) \right] \vec{\mathcal{B}}(s) = 0. \quad (7.22)$$

Como a eq.(7.22) deve ser satisfeita para qualquer $\vec{\mathcal{B}}(s)$, chegamos enfim à seguinte equação integro-diferencial para $\mathbf{\Gamma}(t, s)$,

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{\Gamma}(\tau + s, s) + i\mathbf{M}(\tau + s)\mathbf{\Gamma}(\tau + s, s) + \int_0^\tau ds' \mathbf{K}(\tau - s')\mathbf{\Gamma}(s + s', s) = 0. \quad (7.23)$$

onde $\tau = t - s$. Desta maneira a solução para o operador $\hat{F}(t)$ é dada por,

$$\hat{F}(t) = -i \int_0^t ds [\Gamma_1(t, s) - \Gamma_2^*(t, s)] \sum_k g_k [\hat{b}_k(0)e^{-i\omega_k s} + \hat{b}_k^\dagger(0)e^{i\omega_k s}]. \quad (7.24)$$

Agora que já temos uma expressão para o operador $\hat{F}(t)$, podemos enfim calcular as funções de autocorrelação do banho. Nos limitaremos aqui ao cálculo de $\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t) \rangle$, uma vez que o cálculo de $\langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{F}(t) \rangle$ e $\langle \hat{F}(t)\hat{F}^\dagger(t) \rangle$ é inteiramente análogo. A função de autocorrelação $\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t) \rangle$ é dada por,

$$\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t) \rangle = Tr[\rho_B(0)\hat{F}(t)\hat{F}(t)]. \quad (7.25)$$

Substituindo a eq.(7.22) na eq.(7.25),

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}(t)\hat{F}(t) \rangle = & - \int_0^t ds \int_0^t ds' [\Gamma_1(t, s) - \Gamma_2^*(t, s)] [\Gamma_1(t, s') - \Gamma_2^*(t, s')] \times \\ & Tr \left[\rho_B(0) \sum_k \sum_{k'} g_k g_{k'} [\hat{b}_k(0)e^{-i\omega_k s} + \hat{b}_k^\dagger(0)e^{i\omega_k s}] [\hat{b}_{k'}(0)e^{-i\omega_{k'} s'} + \hat{b}_{k'}^\dagger(0)e^{i\omega_{k'} s'}] \right]. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Note que a média é tomada com relação ao operador densidade do banho em $t = 0$. Isto é feito pois $F(t)$ depende dos operadores de criação e aniquilação dos osciladores do banho em

$t = 0$. Lembrando que o banho está inicialmente em equilíbrio térmico, temos basicamente que calcular o kernel de memória dependente da temperatura, $\kappa_T(s - s')$ (mais tarde ficará claro que se trata de uma função de $s - s'$), dado por,

$$\kappa_T(s - s') = Tr \left[\prod_i \left[(1 - e^{-\hbar\beta\omega_i}) e^{-\hbar\beta\omega_i b_i^\dagger b_i} \right] \sum_k \sum_{k'} g_k g_{k'} \left[\hat{b}_k(0) e^{-i\omega_k s} + \hat{b}_k^\dagger(0) e^{i\omega_k s} \right] \times \right. \\ \left. \left[\hat{b}_{k'}(0) e^{-i\omega_{k'} s'} + \hat{b}_{k'}^\dagger(0) e^{i\omega_{k'} s'} \right] \right]. \quad (7.27)$$

Definindo $\{n_k\} = \{n_1, n_2, \dots\}$, a base do espaço de Hilbert do banho é dada pelo vetores de Fock $|\{n_k\}\rangle$, tal que $b_k^\dagger b_k |\{n_k\}\rangle = n_k |\{n_k\}\rangle$. Desta maneira a eq.(7.27) toma a seguinte forma,

$$\kappa_T(s - s') = \sum_{\{n_k\}} \langle \{n_k\} | \left[\prod_i \left((1 - e^{-\hbar\beta\omega_i}) e^{-\hbar\beta\omega_i b_i^\dagger b_i} \right) \sum_k \sum_{k'} g_k g_{k'} \left[\hat{b}_k(0) e^{-i\omega_k s} + \hat{b}_k^\dagger(0) e^{i\omega_k s} \right] \times \right. \\ \left. \left[\hat{b}_{k'}(0) e^{-i\omega_{k'} s'} + \hat{b}_{k'}^\dagger(0) e^{i\omega_{k'} s'} \right] \right] | \{n_k\} \rangle. \quad (7.28)$$

Usando a ortogonalidade dos vetores do espaço de Fock, a eq.(7.28) pode ser reescrita como,

$$\kappa_T(s - s') = \sum_k \sum_{n_k} g_k^2 (1 - e^{-\hbar\beta\omega_k}) e^{-\hbar\beta\omega_k n_k} \langle n_k | b_k(0) b_k(0) e^{-i\omega_k(s+s')} + b_k(0) b_k^\dagger(0) e^{-i\omega_k(s-s')} + \\ b_k^\dagger(0) b_k(0) e^{i\omega_k(s-s')} + b_k^\dagger(0) b_k^\dagger(0) e^{i\omega_k(s+s')} | n_k \rangle. \quad (7.29)$$

Ou seja, todos os produtos cruzados entre os operadores dos osciladores do banho foram eliminados. Simplificando ainda mais a eq.(7.29), obtemos

$$\kappa_T(s - s') = \sum_k g_k^2 (1 - e^{-\hbar\beta\omega_k}) \sum_{n_k} e^{-\hbar\beta\omega_k n_k} \left[(n+1) e^{-i\omega_k(s-s')} + n e^{i\omega_k(s-s')} \right]. \quad (7.30)$$

Manipulando a eq.(7.30), chegamos ao resultado final para $\kappa_T(t)$,

$$\kappa_T(s - s') = \sum_k g_k^2 \left[2 \frac{\cos \omega_k (s - s')}{e^{\hbar\beta\omega_k} - 1} + e^{-i\omega_k(s-s')} \right]. \quad (7.31)$$

Assim, a função de autocorrelação $\langle \hat{F}(t) \hat{F}(t) \rangle$ é dada por,

$$\langle \hat{F}(t) \hat{F}(t) \rangle = - \int_0^t ds \int_0^t ds' [\Gamma_1(t, s) - \Gamma_2^*(t, s)] [\Gamma_1(t, s') - \Gamma_2^*(t, s')] \kappa_T(s - s'). \quad (7.32)$$

As demais funções de autocorrelação podem ser calculadas de maneira similar e sua demonstração será omitida aqui.

Portanto, já sabemos em princípio como calcular todos os coeficientes da equação mestra (5.88), bastando para isso que consigamos resolver as diversas equações integro-diferenciais que surgiram durante a resolução do problema. No Anexo 2, mostramos um método numérico eficiente para a resolução de tais equações.

Anexo 2

Equações integro-diferenciais são equações que aparecem com frequência em problemas físicos, especialmente em sistemas cuja dinâmica depende dos estados passados do mesmo. O exemplo mais conhecido de tais equações é a equação de movimento de uma partícula coloidal em um meio viscoso, a qual é descrita pela eq.(2.1), chamada equação de Langevin generalizada. Tais equações dificilmente podem ser resolvidas analiticamente, de maneira que na maioria dos casos é imperioso o uso de métodos numéricos. Neste anexo vamos expor o método numérico utilizado para resolver as equações integro-diferenciais encontradas no estudo da dinâmica não-Markoviana do sistema estudado. Este método foi publicado por Wilkie e Wong em [63].

Considere um conjunto de N equações integro-diferenciais do tipo Langevin generalizada, isto é,

$$\dot{X}_j(t) = a_j(\mathbf{X}(t), t) - \int_0^t d\xi \gamma_j(t - \xi) b_j(\mathbf{X}(\xi), \xi) + f_j(t), \quad (7.33)$$

onde $j = 1, 2, \dots, N$, $\mathbf{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t)\}$ e $a_j(\mathbf{X}(t), t)$, $b_j(\mathbf{X}(t), t)$ e $f_j(t)$ são funções. Primeiramente vamos definir a função,

$$\lambda_j(t, u) = \int_0^t d\xi \gamma_j(t - \xi + u) b_j(\mathbf{X}(\xi), \xi). \quad (7.34)$$

Por construção, $\lambda_j(0, u) = 0$. Podemos então reescrever a eq.(7.33) da seguinte forma,

$$\dot{X}_j(t) = a_j(\mathbf{X}(t), t) - \lambda_j(t, 0) + f_j(t), \quad (7.35)$$

$$\dot{\lambda}_j(t, u) = \gamma_j(u) b_j(\mathbf{X}(t), t) + \partial \lambda_j(t, u) / \partial u. \quad (7.36)$$

Nós agora não temos mais equações integro-diferenciais, porém temos que resolver um conjunto maior de equações diferenciais ordinárias e parciais. Em termos da transformada de

Fourier da função $\lambda_j(t, u)$ com relação a u ,

$$\Lambda_j(t, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du \exp(-ius) \lambda_j(t, u), \quad (7.37)$$

as equações (7.35) e (7.36) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\dot{X}_j(t) = a_j(\mathbf{X}(t), t) - \lambda_j(t, 0) + f_j(t) \quad (7.38)$$

$$\dot{\Lambda}_j(t, s) = \Gamma_j(s) b_j(\mathbf{X}(t), t) + is \Lambda_j(t, s), \quad (7.39)$$

onde $\Lambda_j(0, s) = 0$, $\Gamma_j(t, s)$ é a transformada de Fourier da função $\gamma_j(u)$ e $\lambda_j(t, 0)$ pode ser obtida usando a transformada inversa, que neste caso é dada por,

$$\lambda_j(t, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \Lambda_j(t, s). \quad (7.40)$$

Até o momento não foi feita nenhuma aproximação. Note que transformamos o conjunto de equações integro-diferenciais inicial em um conjunto maior de equações diferenciais ordinárias e parciais e depois, em um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem em t , para cada valor de s . O preço que pagamos por isso é que esse conjunto é infinito, pois s é uma variável contínua. Para resolver este conjunto infinito de equações diferenciais precisamos discretizar a variável s , essa é nossa primeira aproximação. Como, em princípio, para cada valor de j temos uma equação diferente para $\Lambda_j(t, s)$ (pois $\Gamma_j(s)$ pode ser diferente para cada j), a discretização será feita para cada valor de j de maneira independente. Usaremos a seguinte discretização para a variável s :

$$s_j(k) = (-n_j^{rede} + k - 1) s_j^{max} / n_j^{rede}, \quad (7.41)$$

onde $k = 1, 2, \dots, 2n_j^{rede} + 1$. Em particular, $\lambda_j(t, 0)$ pode ser aproximado pela seguinte expressão,

$$\lambda_j(t, 0) = \frac{\Delta s_j}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{2n_j^{rede}+1} \Lambda_j(t, s_j(k)). \quad (7.42)$$

É importante notar que se $\gamma_j(t)$ é uma função simétrica e real, e $b_j(\mathbf{X}(t), t)$ é uma função real, então $\Lambda_j(t, -s) = [\Lambda_j(t, s)]^*$. Desta maneira as equações para $s \leq 0$ não precisam ser resolvidas.

Finalmente, nós temos o seguinte conjunto de equações diferenciais para resolver,

$$\dot{X}_j(t) = a_j(\mathbf{X}(t), t) - \frac{\Delta s_j}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{2n_j^{rede}+1} \Lambda_j(t, s_j(k)) + f_j(t) \quad (7.43)$$

$$\dot{\Lambda}_j(t, s_j(k)) = \Gamma_j(s_j(k))b_j(\mathbf{X}(t), t) + i s_j(k)\Lambda_j(t, s_j(k)), \quad (7.44)$$

onde $\Delta s_j = s_j^{max}/n_j^{rede}$ e $k = 1, 2, \dots, 2n_j^{rede} + 1$, ou seja, temos agora um número finito de equações diferenciais para resolver¹. Falta agora apenas uma maneira sistemática de estimar os parâmetros n_j^{rede} e s_j^{max} de maneira a poder tornar todo os cálculos práticos do ponto de vista computacional.

Estimativa de s_j^{max} e n_j^{rede}

Para grande parte dos problemas em que nos deparamos com equações integro-diferenciais, a função $\gamma_j(t)$ é uma função que vai a zero quando $|t|$ tende a infinito. Desta maneira, espera-se que a função $\Lambda_j(t, s)$ também tenda a zero quando $|s|$ tende a infinito. Se nós conhecessemos a função $\Lambda_j(t, s)$, poderíamos escolher s_j^{max} como sendo um valor de s tal que $s > s_j^{max}$ implicasse em $\Lambda_j(t, s) < \epsilon$, onde ϵ tem magnitude desprezível frente aos parâmetros do problema que estivéssemos interessados em resolver. Como não conhecemos $\Lambda_j(t, s)$, teremos de encontrar alguma maneira de estima-lo. A melhor maneira a princípio parece ser olhar para a solução da equação abaixo,

$$\dot{\Lambda}_j^{teste}(t, s) = \Gamma_j(s) + i s \Lambda_j^{teste}(t, s), \quad (7.45)$$

que é simplesmente a eq.(7.39) sem a dependência em $b_j(\mathbf{X}(t), t)$. A solução desta equação será a nossa função teste para estimar s_j^{max} . Pode-se mostrar que

$$Re\{\Lambda_j^{teste}(t, s)\} = \frac{\sin(st)}{s} \Gamma_j(s). \quad (7.46)$$

Em vez de olhar para todos os valores que t pode assumir, nos focaremos apenas no maior valor de t em que estamos interessados em estudar o nosso sistema, t^{max} . Assumindo que $\Gamma_j(s)$ é simétrica em s , vamos tentar encontrar s_j^{max} de tal maneira que a integral da função

¹É interessante observar que neste método o número de equações diferenciais que devem ser resolvidas é linear em n_j^{rede} , em outros métodos numéricos esta dependência é quadrática em n_j^{rede} . Referências sobre estes métodos podem ser encontradas em [63].

teste $\Lambda_j^{teste}(t^{max}, s)$ no intervalo $[0, s_j^{max}]^2$ seja convergente. Definindo a função $I_j(s)$ como

$$I_j(s) = \int_{-s}^s \left| \frac{\sin st}{s} \Gamma_j(s) \right|, \quad (7.47)$$

e escolhendo $\Delta s_j = 2\pi/t^{max}$ como uma primeira estimativa, vamos calcular o erro relativo entre $I_j(m\Delta s_j)$ e $I_j((m+1)\Delta s_j)$,

$$|I_j(m\Delta s_j) - I_j((m+1)\Delta s_j)| / |I_j((m+1)\Delta s_j)|. \quad (7.48)$$

para m inicialmente igual a um. Definindo uma variável auxiliar $iconv$, à qual inicialmente atribuímos o valor de zero, compararemos o erro relativo a uma tolerância máxima para o mesmo, que chamaremos tol_a . Caso o erro relativo seja menor que tol_a , somamos um ao valor de m e um ao valor de $iconv$. Caso o erro relativo seja maior que tol_a , somamos um ao valor de m e atribuímos valor zero a $iconv$. O procedimento só tem fim quando $iconv$ chegar ao valor de três. Definimos então $s_j^{max} = (m+1)\Delta s_j$, onde foi usado o último valor atribuído a m .

Uma vez encontrado s_j^{max} , podemos então tentar encontrar n_j^{rede} . Vamos inicialmente escolher $n_j^{rede} = 10$ e calcular uma aproximação para $I_j(s)$ usando-se a formula de Euler-MacLaurin,

$$I_j^{rede}(s_j^{max}) = \frac{\Delta s_j}{2} \left(|Re\{\Lambda_j^{teste}(t^{max}, 0)\}| + |\Lambda_j^{teste}(t^{max}, s_j^{max})| \right) + \Delta s_j \sum_{k=n_j^{rede}+2}^{2n_j^{rede}} |Re\{\Lambda_j^{teste}(t^{max}, s_j(k))\}|, \quad (7.49)$$

onde $s_j(k)$ foi definido em (7.41) e $\Delta s_j = s_j^{max}/n_j^{rede}$. Finalmente nós calculamos o erro relativo entre $I_j^{rede}(s_j^{max})$ e $I_j(s_j^{max})$, $|I_j(s_j^{max}) - I_j^{rede}(s_j^{max})| / |I_j(s_j^{max})|$, e o comparamos a uma tolerância máxima para este erro, que chamaremos tol_b . Depois de definir uma variável auxiliar, que chamaremos $iconv$, à qual é inicialmente dado o valor de zero, nós comparamos o erro relativo e tol_b . Se o erro relativo for menor que tol_b , soma-se um à $iconv$, e soma-se um a n_j^{rede} . Se o erro relativo for maior que tol_b , soma-se um a n_j^{rede} e atribuímos valor zero a $iconv$. Apenas quando $iconv$ chegar a valor de três paramos o procedimento e n_j^{rede} passa a ter o último valor a ele atribuído.

Estimados s_j^{max} e n_j^{rede} , o método numérico pode ser finalmente implementado. Métodos numéricos, como o Runge-Kutta, podem então ser utilizados para resolver o conjunto de

²Caso a função $\Gamma_j(s)$ não seja simétrica em s , o intervalo de integração deve ser substituído por $[-s_j^{max}, s_j^{max}]$, porém o método é o mesmo.

equações diferenciais.

Referências Bibliográficas

- [1] W. H. Zurek. Decoherence and the Transition from Quantum to Classical. *quant-ph/0306072*.
- [2] I. R. Senitzky. Dissipation in Quantum Mechanics. The Harmonic Oscillator. *Phys. Rev.* **119**, 670 (1960).
- [3] A. O. Caldeira and A. J. Leggett. Path Integral Approach to Quantum Brownian Motion. *Phys. A* **121**, 587-616 (1983).
- [4] F. Galve, L. A. Pachón and D. Zueco. Bringing Entanglement to High Temperature Limit. *Phys. Rev. Lett.* **105**, 180501 (2010).
- [5] E. Kanai. On the Quantization of the Dissipative Systems. *Prog. Theor. Phys.* **3**, 440 (1948).
- [6] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, Wiley-Interscience, New York, 1973.
- [7] H. Dekker. Quantization of the Linearly Damped Harmonic Oscillator. *Phys. Rev. A* **16**, 2126 (1977).
- [8] U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems*, World Scientific, Singapore, 2008.
- [9] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York (1965).
- [10] H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 1*, Springer, New York (1999).
- [11] B. L. Hu, J. P. Paz and Y. Zhang. Quantum Brownian Motion in a General Environment: Exact Master Equation with Nonlocal Dissipation and Colored Noise. *Phys. Rev D* **45**, 2843 (1992).
- [12] E. Schrödinger. Discussion of Probability Relations Between Separated Systems. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **31**, 555 (1935).

- [13] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Phys. Rev.***47**, 777 (1935).
- [14] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe, *Quantum Mechanics*, John Wiley and Sons, Paris (1978).
- [15] R. Shankar, *Principles of Quantum Mechanics*, Springer, New York (1994).
- [16] R. Ursin et al. Entanglement-Based Quantum Communication over 144 km. *Nature Phys.* **3**, 481-486 (2007).
- [17] A. Ekert. Quantum Cryptography Based on Bell's Theorem. *Phys. Rev. Lett*, **67**, 661 (1991).
- [18] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters. Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels. *Phys. Rev. Lett*, **70**, 1895 (1993).
- [19] C. H. Bennett and S. J. Wiesner. Communication via One- and Two-Particle Operators on Einstein-Podolsky-Rosen States. *Phys. Rev. Lett*, **69**, 2881 (1992).
- [20] B. M. Terhal. Bell Inequalities and the Separability Criterion. *Phys. Lett. A* **271**, 319 (2000).
- [21] M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Conditions. *Phys. Lett. A* **223**, 1 (1996).
- [22] A. Perez. Separability Criterion for Density Matrices. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413 (1996).
- [23] P. Horodecki. Separability Criterion and Inseparable Mixed States with Positive Partial Transposition. *Phys. Lett. A* **232**, 333 (1997).
- [24] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki. Quantum Entanglement. *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009).
- [25] M. B. Plenio and S. Virmani. An Introduction to Entanglement Measures. *Quant.Inf.Comput.* **7**, 1-51(2007).
- [26] G. Vidal. Entanglement Monotones. *J. Mod. Opt.* **47**, 355(2000).
- [27] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu and B Schumacher. Concentrating Partial Entanglement by Local Operations. *Phys. Rev. A* **53**, 2046 (1996).
- [28] S. Popescu and D. Rohrlich. Thermodynamics and the Measure of Entanglement. *Phys. Rev. A* **56**, 3319 (1997).

- [29] W. K. Wootters. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245 (1998).
- [30] K. G. H. Vollbrecht and R. F. Werner. Entanglement Measures under Symmetry. *Phys. Rev. A* **64**, 062307 (2001).
- [31] B. M. Terhal and K. G. H. Vollbrecht. Entanglement of Formation for Isotropic States. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2625 (2000).
- [32] G. Giedke, M. M. Wolf, O. Krüger, R. F. Werner and J. I. Cirac. Entanglement of Formation for Symmetric Gaussian States. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 107901 (2003).
- [33] G. Vidal and R. F. Werner. Computable Measure of Entanglement. *Phys. Rev. A* **65**, 032314 (2002).
- [34] M. B. Plenio. Logarithmic Negativity: A Full Entanglement Monotone That is not Convex. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 090503 (2005).
- [35] C. Shannon, W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication*, University of Illinois Press (1997).
- [36] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [37] A. Wehrl. General Properties of Entropy. *Rev. Mod. Phys.* **50**, 221 (1978).
- [38] H. Ollivier and W. H. Zurek. Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 017901 (2002).
- [39] A. Datta, A. Shaji and C. M. Caves. Quantum Discord and the Power of One Qubit. *Phys. Rev. Lett.* **100**, 050502 (2008).
- [40] L. Henderson and V Vedral. Classical, Quantum and Total Correlations. *J. Phys. A: Math. Gen.* **A 34**, 6899 (2001).
- [41] R. Simon, N. Mukunda and B. Dutta. Quantum-Noise Matrix for Multimode Systems: $U(n)$ Invariânciasce, Squeezing, and Normal Forms. *Phys. Rev. A* **49**, 1567 (1994).
- [42] R. Simon. Peres-Horodecki Separability Criterion for Continuous Variable Systems. *Phys. Rev. Lett* **84**, 2726 (2000).
- [43] A. Ferraro, S. Olivares and M. G. A. Paris, *Gaussian States in Quantum Information*, Bibliopolis, Napoli (2005).

- [44] S. Olivares. Quantum Optics in the Phase Space - A tutorial on Gaussian States. Eur. Phys. J. Special Topics **203**, 1 (2012).
- [45] A. M. Barnett and P. M. Radmore, *Methods in Theoretical Quantum Optics*, Clarendon Press, Oxford (1997).
- [46] G. Adesso, *Entanglement of Gaussian States*, PhD Thesis, University of Salerno, Salerno (2006). p 30-31.
- [47] R. J. Glauber. Coherent and Incoherent States of the Radiation Field. Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
- [48] E. C. G. Sudarshan. Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams. Phys. Rev. Lett. **10**, 277 (1963).
- [49] E. P. Wigner. On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium. Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
- [50] K. Husimi. Some Formal Properties of the Density Matrix. Proc. Phys. Math. Soc. Jpn **23**, 264 (1940).
- [51] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [52] B. L. Schumaker. Quantum Mechanical Pure States with Gaussian Wave Functions. Phys. Rep. **135**, 317 (1986).
- [53] Arvind, B. Dutta, N. Mukunda and R. Simon. The Real Symplectic Groups in Quantum Mechanics and Optics. Pramana-Journ. Phys. **45**, 471 (1995).
- [54] R. Simon, E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda. Gaussian Pure States in Quantum Mechanics and the Symplectic Group. Phys. Rev. A **37**, 3028 (1988).
- [55] G. S. Agarwal. Entropy, the Wigner Distribution Function, and the Approach to Equilibrium of a System of Coupled Harmonic Oscillators. Phys. Rev. A **3**, 828 (1971).
- [56] G. Adesso and A. Datta. Quantum versus Classical Correlations in Gaussian States. Phys. Rev. Lett. **105**, 030501(2010).
- [57] P. Giorda and M. Paris. Gaussian Quantum Discord. Phys. Rev. Lett., **105**, 020503 (2010).
- [58] N. W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*, Dover, New York (1964).

- [59] Z. X. Wang and D. R. Guo, *Special Functions*, World Scientific, Singapore (1989).
- [60] A. M. Perelomov and V. S. Popov. Group-Theoretical Aspects of the Variable Frequency Oscillator Problem. *Teoret. Mat. Fiz.*, **1**, 3 (1969)
- [61] K. W. Chang and C. K. Law. Non-Markovian Master Equation for a Damped Oscillator with Time-Varying Parameters. *Phys. Rev. A*, **81**, 052105 (2010).
- [62] C. Zerbe and P. Hänggi. Brownian Parametric Quantum Oscillator with Dissipation. *Phys. Rev. E*, **52**, 1533 (1995).
- [63] J. Wilkie and Y. M. Wong. A Linearly Scaling Grid Method for Generalized Langevin and other Integrodifferential Equations. *J. of Phys. A*, **41**, 335005 (2008)
- [64] C. Jiang, J. Li, W. He and K. Zhu. Parametric Coupling Between a Nanomechanical Resonator and a Superconducting Microwave Cavity . *Europhys. Lett.*, **91**, 58002 (2010).
- [65] L. Tian, M. S. Allman and R. W. Simmonds. Parametric Coupling between Macroscopic Quantum Resonators. *New J. of Phys.*, **10**, 115001 (2008).
- [66] S. Gröblacher, K. Hammerer, M. R. Vanner and M. Aspelmeyer. Observation of Strong Coupling between a Micromechanical Resonator and an Optical Cavity Field. *Nature*, **460**, p. 724-727 (2009).