

## EMILIO MANUEL BECERRA CASTRO

## EFEITOS ÓTICOS NÃO-LINEARES TRANSVERSAIS A BAIXAS INTENSIDADES DE LUZ.

CAMPINAS

2012



## Universidade Estadual de Campinas

UNICAMP

Instituto de Física "Gleb Wataghin" Departamento de Electrônica Quântica

Grupo de Laser e Aplicações

#### EMILIO MANUEL BECERRA CASTRO

# EFEITOS ÓTICOS NÃO-LINEARES TRANSVERSAIS A BAIXAS INTENSIDADES DE LUZ.

Teses apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Luis Eduardo Evangelista De Araujo

Este exemplar corresponde à versão final da Tese de Doutorado defendida pelo aluno Emilio Manuel Becerra Castro e aprovada pela comisão julgadora em 29/10/2012.

Assinatura do Orientador

Campinas - São Paulo 2012

#### FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR VALKÍRIA SUCCI VICENTE – CRB8/5398 - BIBLIOTECA DO IFGW UNICAMP

B386e	Becerra Castro, Emilio Manuel, 1977- Efeitos óticos não-lineares transversais a baixas intensidades de luz / Emilio Manuel Becerra Castro
	Campinas, SP : [s.n.], 2012.
	Orientador: Luis Eduardo Evangelista de Araujo. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".
	<ol> <li>Efeitos óticos não-lineares transversais.</li> <li>Transparência induzida eletromagneticamente.</li> <li>Não- linearidade Kerr gigante.</li> <li>Araujo, Luis Eduardo Evangelista de, 1971-</li> <li>Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin".</li> <li>Título.</li> </ol>

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Nonlinear optical effects at low transverse light intensities Palavras-chave em inglês: Nonlinear optical effects transverse Electromagnetically induced transparency Giant Kerr nonlinearity Área de Concentração: Física Titulação: Doutor em Ciências Banca Examinadora: Luís Eduardo Evangelista de Araujo [Orientador] Sandra Sampaio Vianna Luciano Soares da Cruz José Antonio Roversi Thiago Pedro Mayer Alegre Data da Defesa: 29-10-2012 Programa de Pós-Graduação em: Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **EMILIO MANUEL BECERRA CASTRO – RA 0871932** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 29 / 10 / 2012.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Luís Eduardo Evangelista de Araujo - Orientador do Candidato DEQ/IFGW/UNICAMP

Saudro S. Vianno

Profa. Dra. Sandra Sampaio Vianna - CCEN/DF/UFPE

Prof. Dr. Luciano Soares da Cruz - CCNH/UFABC GW/UNICAMP Prof José Antonio Roversi – DEQ/IF

Prof. Dr. Thiago Pedro Mayer Alegre - DFA/IFGW/UNICAMP

V

Dedico esta Dissertação aos meus pais Rosa e Emilio.

# Agradecimentos

Ao Prof. Luis Eduardo Evangelista De Araujo, pela oportunidade que me deu em trabalhar sob a sua orientação, pelas discussões e pelo apoio que me deu durante o trabalho. Principalmente pelo respeito às minhas limitações e pela sua infinita paciência, caro professor muito obrigado..!!

Aos meus pais, Rosa e Emilio pelo que representam em minha vida e muito mais.

As minhas irmãs e familiares pela força e apoio nos momentos difíceis dessa batalha.

À minha namorada e futura esposa, pelo amor, carinho e a compreensão nos momentos críticos e por saberem suportar pacientemente meu distanciamento durante a realização deste trabalho.

A meu filho, R. Adrian, fonte de inspiração e alegria que me deu a força para seguir em frente e encarar a vida longe de casa. Te amo filho...!!

Ao professor Flávio Cruz, por ter me recebido inicialmente no laboratório. Muito obrigado professor. Ao professor José Antonio Roversi por ter aceitado participar de todas as minhas bancas, dando sempre dicas para que eu pudesse melhorar o meu trabalho.

Agradeço imensamente ao professor Jorge A. Espichán Carrillo, uma grande pessoa e um excelente profissional, muito obrigado professor por seu apoio nesta etapa profissional da minha vida.

Agradeço imensamente o precioso e indispensável apoio do pessoal da CPG/IFGW e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Este trabalho foi financiado pelo CNPq.

# Resumo

Neste tese apresentamos um estudo teórico dos efeitos de coerência atômica em vapor atômico com o propósito de estudar teoricamente efeitos óticos não-lineares transversais a baixas intensidades de luz. Sob a condição da transparência induzida eletromagneticamente, um meio atômico pode desenvolver não-linearidades óticas gigantes, possibilitando a observação de efeitos óticos não-lineares a baixas intensidades. Investigamos três efeitos transversais: emissão cônica, focalização induzida e feixes de vórtices induzidos eletromagneticamente. Todos estes três efeitos têm origem na modulação de fase cruzada entre um laser de prova e um laser sinal, ambos fracos, com intensidades abaixo da intensidade de saturação das transições às quais estão acopladas.

Em emissão cônica, descrevemos a formação de anéis ao redor de um feixe de prova fraco. No estudo de focalização induzida, descrevemos como que a aplicação de uma máscara de intensidade ao feixe sinal pode levar à formação de lentes GRIN no vapor atômico, induzindo à focalização do laser de prova. Por último, estudamos a conversão do feixe de prova em um feixe de vórtice ótico pela aplicação de uma máscara de intensidade espiral ao feixe sinal.

# Abstract

In this thesis we present theoretical study of the effects of atomic coherence in atomic vapor for the purpose of studying theoretically transverse nonlinear optical effects at low light levels. Under the conditions of electromagnetically induced transparency, an atomic medium can develop giant optical nonlinearities, allowing the observation of nonlinear optical effects to low intensities. We investigate three transverse effects: conical emission, induced focusing and electromagnetically induced vortices. All three of these effects stem from cross-phase modulation between probe and a signal laser, both weak with intensities below the saturation intensity the transitions to they coupled.

In conical emission, we describe the formation of rings around a weak probe beam. In the study of induced focusing, we describe how applying an intensity mask to the signal beam can lead to the formation of GRIN lenses the atomic vapor, leading to focusing of the probe laser. Finally, we studied the conversion of the probe beam into an optical vortex beam by applying a spiral intensity mask to the signal beam.

# Sumário

A	grade	ecimientos	viii
R	esum	10	xi
A	bstra	act	xiii
Li	sta c	de símbolos	xvi
Li	sta d	de Figuras xv	viii
1	Intr	rodução e motivação	1
<b>2</b>	Inte	eração de luz e átomos	9
	2.1	Interação Radiação-Matéria	9
		2.1.1 Aproximação semi-clássica	10
	2.2	Propagação do campo em meios atômicos	13
		2.2.1 Equação de propagação do campo na aproximação do envelope variando len-	
		tamente	13
	2.3	Interação átomo-campo para átomos de dois níveis	16
	2.4	Equações óticas de Bloch	21
		2.4.1 Susceptibilidade Complexa	25
3	Тео	oria de EIT em um sistema ideal de três níveis	29
	3.1	O átomo de três níveis	29
	3.2	Transparência induzida eletromagneticamente	30
	3.3	Equações óticas de Bloch para a EIT	30
	3.4	Absorção e dispersão no meio com EIT	36

	3.5	Não-linearidades Kerr gigantes	39
4	$\mathbf{Em}$	issão cônica induzida eletromagneticamente	<b>45</b>
	4.1	Equações de amplitude de probabilidade acopladas para o sistema atômico	46
	4.2	Propagação do feixe de prova	51
	4.3	Padrão de difração no campo distante	54
5	Foc	alização cruzada induzida eletromagneticamente	61
	5.1	Modelo atômico para observar focalização cruzada	62
	5.2	Lente induzida eletromagneticamente	65
		5.2.1 Lente cilíndrica induzida eletromagneticamente	67
		5.2.2 Lente modulo $2\pi$ induzida eletromagneticamente	70
	5.3	Resultados e discussões	71
6	Feiz	xe de vórtice induzido eletromagneticamente	79
	6.1	Feixes de vórtices óticos	80
	6.2	Modelo atômico para feixe de vórtice induzido	82
	6.3	Resultado e conclusões	86
7	Cor	nclusões	95
Re	Referências Bibliográficas		97

## Lista de símbolos

- $\Omega_p$  Frequência de Rabi do feixe de prova
- $\Omega_c$  Frequência de Rabi do feixe de acoplamento
- $\Omega_s$  Frequência de Rabi do feixe sinal
- $\omega$  Frequência ótica do feixe sinal
- $\omega_c$  Frequência ótica do feixe de acoplamento
- $\omega_p$  Frequência ótica do feixe de prova
- $\omega_{21}$  Frequência da transição atômica 21
- $\omega_{24}$  Frequência da transição atômica 24
- $\chi$  Susceptibilidade atômica
- $\alpha_0$  Coeficiente de absorção de um fóton
- $\alpha$  Coeficiente de absorção de dois fótons
- $\phi$  Mudança de fase devido a modulação de fase cruzada
- $\phi_0$  Mudança de fase pico devido a modulação de fase cruzada
- $\gamma_4$  Taxa de decaimento do estado excitado  $|4\rangle$
- $\gamma_3$  Taxa de decaimento do estado excitado  $|3\rangle$
- $\delta$  Dessintonia do feixe sinal
- L Comprimento físico da amostra atômica
- $\ell$  Profundidade ótica
- ℵ Número de Fresnel
- $\varepsilon_0$  Permissividade elétrica
- *m* Carga topológica
- $\hbar$  Constante de Planck reduzida
- $d_{ij}$  Elemento de matriz de dipolo atômico
- N Densidade atômica

#### Sumário

- R Razão entre as frequências de Rabi dos feixes sinal e acoplamento
- $R_0$  Razão pico entre as frequências de Rabi dos feixes sinal e acoplamento
- $\Gamma$  Razão entre as taxas de decaimento dos estados excitados
- $\Delta$  Razão entre a dessintonia do feixe sinal e a taxa de decaimento  $\gamma_3$

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama de níveis de energia do sistema atômico de dois níveis. Os dois níveis estão
	ligados por um campo laser, o qual tem uma frequência angular $\omega$ e frequência de
	Rabi $\Omega.~$ O campo apresenta uma dessintoni a $\delta$ da ressonância atômica. O estado
	excitado e fundamental tem uma largura de linha $\gamma_2$ e $\gamma_1$ respectivamente 17
2.2	Curvas de absorção (a) e dispersão (b) de um sistema atômico de dois níveis na
	presença de um campo de prova dessintonizado da transição atômica $ 1\rangle \rightarrow  2\rangle$ por
	$\delta = \omega_{21} - \omega. \qquad 27$
3.1	Sistema atômico de três níveis tipo $\Lambda$ , com estados metaestável $ 1\rangle$ e $ 2\rangle$ , assim como
	o estado excitado  3). Os laser de acoplamento e prova são denotados por $\Omega_c$ e $\Omega_p,$
	respectivamente. Nesta figura também são mostradas as dessintonias dos laser de
	prova ( $\Delta$ ) e acoplamento ( $\delta$ ). $\gamma$ é a taxa de decaimento do estado excitado para os
	estados mais baixos, em quanto $\gamma_0$ representa a perda de coerência entre os estados
	fundamentais.
3.2	(a) Parte imaginaria e (b) parte real da susceptibilidade complexa de um sistema
	atômico de três níveis na configuração $\Lambda$ sob a condição de EIT, para $\gamma_{21} = 0.$ 37
3.3	(a) Parte imaginaria e (b) parte real da susceptibilidade para taxas de decaimento da
	transição $ 1\rangle \rightarrow  2\rangle$ diferentes de zero. (a) $\gamma_{21} = 0, 1\gamma_{31}$ ; (b) $\gamma_{21} = 10\gamma_{31}$ . Em todos
	os casos $\gamma_{31} = 1$ e $\Omega_c = 0, 5\gamma_{31}$
3.4	(a) Sistema atômico de 4 níveis para gerar não-linearidades gigantes. Nesta figura,
	$\Omega_s,\Omega_c$ e $\Omega_p$ são as frequência de Rabi dos las er sinal, acoplamento e prova respecti-
	vamente. $\Delta \omega_s$ é a dessintonia do campo sinal com a transição atômica $ 2\rangle \rightarrow  4\rangle$ . $\gamma_3$
	e $\gamma_4$ são as taxas de decaimento. (b) sistema atômico na configuração cascata de um
	átomo de 3 níveis convencional.

	3.5	$Re[\chi]$ em função da dessintonia do feixe de prova para $\gamma_{21} = 0$ e $\Omega_c = \gamma_{31}$ , com	
		$\gamma_{31} = 1$ . A diferença entre a curva continua e a curva pontilhada, é que a ultima	
		apresenta o efeito do feixe adicional.	42
2	4.1	Um átomo de quatro níveis aberto na configuração $N$ interagindo com três feixes	
		laser: sinal $(\Omega_s)$ , acoplamento $(\Omega_c)$ e prova $(\Omega_p)$ . O campo sinal é dessintonizado por	
		$\delta$ da transição atômica $ 2\rangle \rightarrow  4\rangle$ , entanto que $\gamma_3$ , $\gamma_4$ são as taxas de decaimento dos	
		estados $ 3\rangle$ e $ 4\rangle$ respectivamente.	46
4	4.2	Estrutura da transição hiperfina da linha $D_1$ de $^{87}\mathrm{Rb}$ com quebras de frequências	
		entre os níveis hiperfinos.	48
4	4.3	Formação de anéis no perfil transversal do feixe de prova induzida pelo feixe sinal,	
		logo depois de atravessar a mostra atômica de comprimento L	52
4	4.4	Padrão de difração do campo distante do feixe de prova depois de atravessar um meio	
		atômico de profundidade ótica (a) $\ell=33,$ (b) $\ell=65,$ (c) $\ell=130$ e (d) $\ell=190.~{\rm A}$	
		mudança de fase XPM máxima $\phi_0$ é mostrada em cada caso. Aqui, R=4, $\Delta=80$ e	
		$\Gamma=1.$ A intensidade de difração é normalizada como descrito no texto. $\hdots$	55
2	4.5	Padrão de difração do campo distante do feixe de prova para (a) R=4,5 e (b) R=5.	
		Em ambos casos, $\ell = 180$ e $\Delta = 120$	57
2	4.6	Padrão de difração do campo distante do feixe de prova com (curva tracejada) e sem	
		modulação (curva continua ) de XPM. Para R=4, $\Delta=80$ e $\ell=130.$	58
Ę	5.1	Um átomo de quatro níveis aberto na configuração $N$ interagindo com três feixes	
		laser: sinal $(\Omega_s)$ , acoplamento $(\Omega_c)$ e prova $(\Omega_p)$ . O campo sinal é dessintonizado por	
		$\delta$ da transição atômica $ 2\rangle \rightarrow  4\rangle$ , enquanto que $\gamma_3$ , $\gamma_4$ são as taxas de decaimento	
		dos estados $ 3\rangle$ e $ 4\rangle$ respectivamente. Aqui também é indicado a taxa de deca imento	
		dos estados fundamentais por $\gamma_0$	63

5.2Esboço da focalização do campo de prova induzida pelo feixe sinal e a definição dos eixos  $z \in x$  com respeito a mostra atômica. 65(a) Esboço da configuração espacial dos campos de prova, acoplamento e sinal com 5.3respeito à amostra atômica e a definição dos eixos  $x \in z$ . (b) Depois de deixar a amostra atômica estendida, o feixe de prova é focalizado a uma distancia focal F... 68Perfil de fase quadrático modulo  $2\pi$  para a geração de uma lente de Fresnel. Para 5.4simplificar, mostramos apenas quatro zonas no perfil de fase. 70Amplitude  $\exp[-\alpha(x)\ell/2]$ (curva tracejada) e fase (curva continua) transmitida no 5.5feixe de prova pela amostra atômica em função da distancia transversal x, para um 72perfil de intensidade parabólico para o feixe sinal. Para  $R_0 = 1$ ,  $\ell = 3000$  e  $\Delta = 120$ . 5.6(a) Intensidade do feixe de prova no eixo em função da distancia longitudinal d na saída da mostra atômica. (b) Intensidade do feixe de prova no plano focal para um 73Amplitude  $\exp[-\alpha(x)\ell/2]$  (curva tracejada) e fase (curva continua) transmitida no 5.7feixe de prova pela amostra atômica em função da distancia transversal x, para um perfil de intensidade modulo  $2\pi$  para o feixe sinal. Para  $R_0 = 1, \ell = 3000$  e  $\Delta = 120$ . 74(a) Intensidade do feixe de prova no eixo em função da distancia longitudinal d na 5.8saída da mostra atômica. (b) Intensidade do feixe de prova no plano focal para uma 75Amplitude  $\exp[-\alpha(x)\ell/2]$  (curva tracejada) e fase (curva continua) transmitida no 5.9feixe de prova pela amostra atômica em função da distancia transversal x, para um perfil de intensidade gaussiano para o feixe sinal. Para  $R_0 = 1, \ell = 3000$  e  $\Delta = 120$ . 765.10 (a) Intensidade do feixe de prova no eixo em função da distancia longitudinal d na saída da mostra atômica. (b) Intensidade do feixe de prova no plano focal para uma lente do tipo gaussiana. Para  $R_0 = 1, \ell = 3000$  e  $\Delta = 120...$ 77

6.1	As filas: (a) feixe helicoidal, (b) distribuição de intensidade e (c) frente de fase; para	
	$m = 0, m = \pm 1$ e $m = \pm 2$ . Figura adaptada a partir de: www.phorbitech.eu	80
6.2	Máscara de fase espiral para gerar frente de ondas helicoidais. Figura adaptada a	
	partir de: www.phorbitech.eu	81
6.3	(a) O modelo atômico: Um átomo de quatro níveis aberto interagindo com três feixes	
	de laser: prova $(\Omega_p)$ , acoplamento $(\Omega_c)$ e sinal $(\Omega_s)$ . As transições $ 1\rangle \rightarrow  3\rangle,  2\rangle \rightarrow  3\rangle$	
	e $ 2\rangle$ $\rightarrow$ $ 4\rangle$ são de dipolo elétrico permitidas, enquanto as transições $ 1\rangle$ $\rightarrow$ $ 2\rangle$ e	
	$ 3\rangle \rightarrow  4\rangle$ são proibidas por dipolo elétrico. (b) Esboço da configuração espacial dos	
	feixes de prova, acoplamento e sinal com respeito à amostra atômica e a definição	
	dos eixos $x$ e $z$ .	82
6.4	Máscara de fase espiral para carga topologica de $m = 1.$	83
6.5	Parte real e imaginaria da susceptibilidade do campo de prova induzida por a inten-	
	sidade azimutal do feixe sinal. A parte real de $\chi$ , (curva tracejada) esta associada	
	com o índice de refração dependendo linearmente com $\theta$ e a parte imaginaria de $\chi$	
	(curva solida) é associada com a absorção.	84
6.6	(a) Transmissão do campo de prova em função do ângulo azimutal $\theta.$ (b) Fase $\phi$	
	induzida no feixe de prova pelo feixe sinal em função do ângulo azimutal $ heta$	85
6.7	Em todas as figura: Esquerda (densidade de energia do feixe de prova ), Direita (in-	
	tensidade do feixe de prova no plano de observação em função da distancia transversal	
	$x^\prime);$ para diferentes valores da carga topológica. (a) $m=1,$ (b) $m=2,$ (c) $m=3$ e	
	(d) $m = 4$ . Aqui, $R_0 = 2$ e $\ell = 3000$	88
6.8	Em todas as figuras: Esquerda (densidade de energia do feixe de prova), Direita (in-	
	tensidade do feixe de prova no plano de observação em função da distancia transversal	
	$x^{\prime});$ para diferentes valores da carga topológica. (a) $m=1,$ (b) $m=2,$ (c) $m=3,$ e	
	(d) $m = 4$ . Aqui, $R_0 = 2$ e $\ell = 3000$	90

6.9	(a) Densidade de energia do feixe de prova. (b)Intensidade do feixe de prova no	
	plano de observação em função da distancia transversal $x'$ . Em ambos casos a carga	
	topológica de foi de $m = -4$	91
6.10	Máscara de intensidade para o feixe sinal, com uma carga topológica de $m = 3$ , para	
	$R_0 = 2,  \ell = 3000  \mathrm{e}  \Delta = 475. \dots \dots$	91
6.11	Máscara de intensidade para o feixe sinal com $m = 3$ . (a) Parte real (curva tracejada)	
	e imaginaria (curva continua) da susceptibilidade em função do ângulo azimutal $\theta$ .	
	(b) Função de transmissão (curva tracejada) e fase (curva continua) em função do	
	ângulo azimutal $\theta$ .	92
6.12	(a) Densidade de energia do feixe de prova. (b) Intensidade do feixe de prova no	
	plano de observação em função da distancia transversal $x'$ , para uma máscara de	
	intensidade do feixe sinal modulo $2\pi$ , com carga topológica de $m = 3$	93

### Capítulo 1

# Introdução e motivação

O campo da ótica não-linear explora como a interação entre a luz e um meio modifica as características óticas do meio. Por exemplo, o índice de refração pode mudar como função da intensidade da luz, efeito conhecido como não linearidade Kerr. Outros efeitos incluem a geração de segundo harmônico e geração de frequências harmônicas (isto é, geração de soma e diferença de frequência). Geralmente estes efeitos não-lineares são significativos para campos óticos com intensidades grandes. Entretanto, as propriedades óticas (tanto as lineares quanto as não-lineares) de sistemas atômicos podem ser manipuladas e alteradas drasticamente através da interação destes com feixes de laser. Tais manipulações se baseiam na indução de coerência atômica e interferência quântica entre diferentes níveis de energia atômico. Coerência quântica e interferência têm levado a muitos novos efeitos óticos, tais como laser sem inversão [1–3], aumento do índice refração [4–6] e Transparência Induzida Eletromagneticamente (EIT, sigla em inglês para "electromagnetically induced transparency"), [7–9], dentre outros.

EIT é uma técnica usada para modificar a resposta ótica de um meio atômico para campos laser ressonantes. O termo Transparência Induzida Eletromagneticamente foi introduzido pela primeira vez em 1990 no paper de Harris et *al.* [9]. Eles mostraram que quando um campo laser de acoplamento forte é usado para excitar uma transição ressonante num sistema atômico de 3 níveis, a absorção do laser de prova fraco pode ser reduzida ou completamente eliminada, dado que as duas transições ressonantes estejam coerentemente acopladas a um estado comum. Pouco depois em 1991, usando laser pulsados de alta potência, os autores reportaram a primeira observação de EIT em vapor de estrôncio [10]. A pesquisa inicial feita por Harris e colaboradores é agora referida como EIT tipo-lambda  $\Lambda$ , onde dois estados de energia "fundamentais" são acoplados a um nível excitado comum. A utilização do termo EIT desde então foi ampliada para incluir configurações tipo  $\vee$  e cascata,  $\Xi$ . Experimentos posteriores foram feitos utilizando fontes continuas em células de vapor [11], feixe atômico [12], armadilhas magneto ótica e condensados de Bose-Einstein [13]. Aplicações fundamentais de EIT em física atômica e óptica quântica incluem: redução da velocidade de luz (luz lenta) [14–17], transferência de estados quânticos entre fótons e átomos [18–21], chaves óticas [22,23], armazenamento e recuperação de pulsos de luz [24–27] e processamento de informação quântica [28], entre outras.

A década passada teve um enorme incremento de interesse em realizar ótica não-linear a baixas intensidades de luz usando meios preparados coerentemente. Diminuindo a intensidade necessária para atingir efeitos óticos não-lineares, muitas novas aplicações tornam-se possíveis. Uma aplicação interessante é a modulação de fase cruzada (XPM, sigla em inglês para "cross phase modulation"), na qual não linearidades Kerr são usadas para realizar medidas quânticas não demolidoras (QND, sigla em inglês para "quantum nondemolition measurement") [29,30]. Por algum tempo, mesmo não-linearidades Kerr grandes, seguem sendo pequenas ( $\chi^3 \sim 10^{-22} \text{ m}^2/\text{V}^2$ ) limitando as QND para campos intensos com um grande número de fótons. Ótica não-linear a baixas intensidades de luz tem sido de interesse recente no contexto de mistura de quatro ondas [31], teleportação de ensembles atômicos [32, 33], produção de estados de fótons correlacionados [34] e computação quântica [35, 36]. Processamento de informação baseado em luz requer interações não-lineares que levariam, por exemplo ao efeito Kerr ou equivalente a modulação de fase cruzada, na qual a fase do campo de luz é modificada por uma quantidade determinada pela intensidade do outro campo ótico. Essas não-linearidades sem absorção apreciável, pode, entretanto apenas ser obtida por pulsos laser intensos, contendo da ordem de 10<sup>10</sup> fótons. Neste sentido um dos principais desafios da ótica nãolinear é a observação de mudanças de fase cruzada, superior a  $\pi$ , usando dois campos de luz, cada um contendo um único fóton. Além de novas possibilidades para abordar questões fundamentais da

teoria quântica, tais interações podem ser utilizadas para realizar portas NOT-controlada [37] entre dois bits quânticos (qubits), definidos, por exemplo, pelo estado da polarização de um pulso de um único fóton. No entanto, dado a fragilidade das não-linearidades óticas não ressonantes e o papel dominante da absorção em processos ressonantes, a combinação da susceptibilidade Kerr grande de terceira ordem e susceptibilidade linear pequena parece ser incompatíveis. Usando a Transparência Induzida Eletromagneticamente, Schmidt e Imamuglu [38] mostraram que é teoricamente possível alcançar não linearidades Kerr que são até 10 ordens de magnitude maior que não linearidades Kerr convencional. Na análise de seu trabalho concluiu "This show that our scheme makes possible conditional phase shifts of the order of  $\pi$  with single photons, which should be beneficial for quantum nondemolition measurements of weak signal and quantum logic gate operation....the principal result here is that one can obtain arbitrarily large XPM phase shifts of the probe field by arbitrarily weak signal fields". A observação experimental destas não-linearidades Kerr gigantes foram posteriormente realizadas por Hoonsoo e colaboradores [39]. Outras diversas configurações de níveis de energia foram também utilizadas experimentalmente por diversos grupos de pesquisa para a observação destas não-linearidades Kerr gigantes [40–47]. Dentro de nosso grupo, utilizando esquemas que geram não-linearidades Kerr gigantes foram reportados grades de difração induzidas eletromagneticamente em vapores atômicos, onde a grade é criada com campos arbitrariamente fracos e eficiências de difração de até 30% são previstos para ocorrer [48,49].

Apesar de diversos fenômenos óticos não lineares a baixa intensidade já terem sido estudados [50], efeitos transversais sob esquemas de EIT foram pouco investigados. Um dos poucos exemplos consiste na observação da focalização ou defocalização do feixe de prova induzida pelo feixe de acoplamento [51,52]. Estudos de efeitos transversais são importantes, pois várias das aplicações de ótica não-linear a baixas intensidades, como por exemplo, medidas de não-demolição quântica [30] e teleportação quântica [53], requerem a indução cruzada de uma fase  $\pi$  no feixe de prova e esta indução pode não ser constante ao longo da seção transversal do feixe.

No artigo de Moseley e colaboradores publicado na Phys. Rev. Lett [51], os autores estudaram

a qualidade espacial do feixe de prova transmitido através do vapor de rubídio. Nesse experimento os autores observaram evidências convincentes de focalização e defocalização do feixe de prova, uma vez que foi variado a dessintonia perto da ressonância de uma transição atômica do rubídio. A observação foi consistente com a lente que seria esperada devido à distribuição espacial do laser de acoplamento e portanto variações espaciais induzidas no índice de refração. O efeito não é uma auto-indução, mas sim a modificação de um feixe (prova) por outro (acoplamento). O sinal da lente induzida depende da dessintonia do laser de prova e a intensidade da lente depende unicamente da intensidade do laser de acoplamento [52,54].

Propriedades da focalização induzida eletromagneticamente são importantes de serem avaliadas em virtude de que elas interessam para o desenho de qualquer experimento no campo da coerência atômica. De especial interesse para esta lente será a susceptibilidade atômica dos esquemas experimentais propostos, de índice de refração maior, sem absorção apreciável. O laser de prova será sujeito de uma lente muito forte no ponto de absorção minima e máxima refração [55,56]. No ano do 2011 Zhao e colaboradores [57] exploraram teoricamente um método para gerar lentes de Fresnel sintonizáveis em meios coerentes baseados na transparência induzida eletromagneticamente. Os resultados obtidos pelos autores mostram que imagens de intensidade modulada no campo de acoplamento modelam o meio coerente para induzir o perfil de fase quadrático modulo  $2\pi$  desejado para a lente, para difratar o campo de prova. Neste sentido eles estudam a focalização e propriedades de imagens da lente induzida. Em particular mostraram que as imagens no campo de acoplamento podem flexivelmente controlar as imagens no campo de prova por difração. Os resultados obtidos mostram que lentes óticas baseadas em EIT podem ser geradas com técnicas simples, isto é, as imagens no campo de acoplamento podem ser produzidas utilizando máscaras de amplitude e lentes de vidro.

Emissão cônica (CE, sigla de inglês de "conical emission") é o fenômeno de formação de anéis no padrão de campo distante em torno do feixe original. CE tem uma grande e polêmica historia desde sua primeira observação em 1970 por Grischkowsky no âmbito de estudar auto-focalização

em vapor de potássio [58]. CE é um dos muitos exemplos de efeitos não-lineares transversais, e é observada normalmente quando um feixe laser forte sintonizado para o lado azul da ressonância de uma transição atômica propaga-se através de um meio denso de átomos de dois níveis. O cone gerado é deslocado espectralmente (na maioria dos casos deslocado ao vermelho) da linha da transição ou este pode estar na mesma frequência como o feixe original e manifestar como vários anéis concêntricos (no campo distante) ao redor do feixe laser de bombeio. CE tem sido observada usando laser de ondas continuas e feixes pulsados, com uma duração do pulso no regime de nanosegundos (ns) em vapores atômicos. Tais observações em vapores atômicos incluem: sódio [59–61], césio [62], estrôncio [63–65], cálcio [66], potássio [58], bário [67,68] usando laser pulsados e sódio [69] usando laser de corante de onda continua (cw). CE pode se originar a partir de efeitos não-lineares do tipo Kerr, tal como auto-modulação de fase [62, 70, 71] e modulação de fase cruzada [72]. No entanto, vários outros mecanismos físicos também têm sido propostos para explicar CE: mistura de quatro ondas pelo efeito Stark-AC [73], CE devido à dispersão paramétrica de quatro fótons [74], emissão cônica devido a processos tipo Cerenkov [75, 76], CE anômala devido ao tipo de processos de conversão paramétrica descendente [77], emissão cônica devido ao desdobramento espacial-temporal do pulso laser em ondas solitárias [78], efeitos cooperativos [79], entre outros [80]. Tipicamente, observações experimentais de CE tem sido realizadas por las<br/>er pulsados, com intensidades  $\geq 10^6$ W/cm<sup>2</sup>, embora CE já foi observada em vapor de bário meta estável sob excitação cw com apenas  $25~{\rm W/cm^2}$ [81]. Entretanto, tal intensidade relativamente baixa usada no experimento com bário é mais de três ordens de magnitude acima da intensidade de saturação da transição atômica.

Vórtices são um fenômeno onipresente na natureza. Eles têm sido desde há muito observados em furacões, tornados e até mesmo em algo tão simples como o redemoinho de café em uma caneca. Foi somente em 1974, no entanto, que Berry e Nye lançaram a teoria de que um campo de luz pode assumir o carácter de um vórtice [82]. Desde então, os vórtices óticos têm se tornado mais do que uma curiosidade matemática e demonstraram seu valor prático em numerosos campos, incluindo a pinça ótica e computação quântica [83].

Um feixe com vórtice ótico é caracterizado por uma distribuição de intensidade em forma de anel com uma singularidade de fase, e portanto amplitude de campo zero no centro. Um vórtice ótico é um feixe de luz cuja fase varia em uma forma helicoidal ao longo da direção de propagação do feixe [84,85]. Um vórtice ótico é caracterizado pela dependência de fase azimutal do tipo  $\exp(im\theta)$ , onde m é a carga topológica, a qual pode tomar valores positivos ou negativos. A magnitude da carga topológica representa a fase total acumulada pela onda helicoidal em uma revolução completa em torno do ponto de vórtice. O sinal da carga topológica representa a helicidade esquerda ou mão direita. Desde a descoberta de que os vórtices transportam momento angular orbital (OAM, sigla em inglês para "orbital angular momentum") [86], esse OAM transportado por tal campo lhe permite aprisionar e girar partículas [87-89]. Outras aplicações de vórtices óticos incluem, microscopia ótica [90,91], astronomia [92], manipulação de estados quânticos [93,94] entre outras [95]. Dentro dos experimentos em vapor atômico temos o reportado por Barreio e colaboradores [97], onde utilizando uma grade induzida eletromagneticamente em átomos de césio frio foi possível a geração de luz carregando momento angular orbital. No artigo publicado por Pugatch e colaboradores [98], utilizando a transparência induzida eletromagneticamente foi possível armazenar e recuperar vórtices óticos em vapor quente de <sup>87</sup>Rb. Outros experimentos reportados incluem a geração e manipulação de feixes Larguerre-Gaussianos [99].

Esta tese está divida da forma que consideramos mais adequada para a abordagem teórica de nosso tema. O capítulo 2 aborda alguns conceitos básicos tais como interação radiação matéria dentro da aproximação semi-clássica. Também mostramos a equação de propagação do campo no meio atômico, a qual é derivada a partir das equações de Maxwell, o capítulo continua com a interação de átomo campo na aproximação de átomos de dois níveis, na qual a equação de Liouville descrevendo a evolução temporal do sistema é apresentada. Este capítulo finaliza com a apresentação das equações óticas de Bloch.

No capítulo 3 é feita uma revisão da interação de um sistema atômico de três níveis com campos eletromagnéticos externos, aqui o fenômeno da transparência induzida eletromagneticamente é introduzido. Para este sistema atômico encontraremos que a evolução do sistema atômico é descrito pelas equações óticas de Bloch, deste conjunto de equações poderemos estudar as propriedades de absorção e dispersão do sistema de três níveis no regime da transferência induzida eletromagneticamente, finalizaremos este capítulo discutindo o fenômeno de não-linearidades Kerr gigantes.

O capítulo 4 são apresentados nossos resultados acerca do estudo realizado sobre os efeitos da emissão cônica induzida eletromagneticamente. Prevemos teoricamente a ocorrência de CE com excitação de campos fracos em um meio atômico sobre EIT. No campo distante, uma estrutura de anéis pode ser induzida no perfil transversal do feixe de prova, por um feixe sinal com intensidades abaixo do nível de saturação da linha.

No capítulo 5 apresentamos nossos resultados acerca do estudo realizado sobre os efeitos da focalização cruzada induzida eletromagneticamente num sistema atômico de 4 níveis sob a condição da transparência induzida eletromagneticamente. Aplicando diferentes máscaras para a intensidade do feixe sinal, diferentes lentes (cilíndrico, Fresnel e gaussiano) podem ser induzidas na amostra atômica. Finalmente focalização do feixe de prova é analisada em termos dos parâmetros de excitação (intensidade, dessintonia e profundidade ótica da amostra atômica).

O capítulo 6, o qual corresponde ao ultimo capítulo de nossas contribuições, apresentamos os resultados acerca do estudo realizado sobre os feixes de vórtices induzidos eletromagneticamente. A transferência da singularidade do campo sinal para o campo de prova pode ser alcançada sob esquemas de excitação que geram não-linearidades óticas gigantes experimentadas no sistema atômico de quatro níveis, sem absorção apreciável nos campos óticos. Através da não-linearidade ótica, a singularidade na frequência de Rabi é convertida em uma singularidade na fase do feixe de prova levando à geração do vórtice ótico.

No sétimo capítulo e ultimo são apresentadas as conclusões desta tese.

### Capítulo 2

# Interação de luz e átomos

Este capítulo está preocupado com a introdução do conhecimento básico necessário para a compreensão do fenômeno da Transparência Induzida Eletromagneticamente, a qual será abordada no capitulo posterior.

Este capítulo começa com a introdução da interação radiação-matéria dentro da aproximação semiclássica. Em seguida, a equação de propagação do campo no meio atômico é derivada a partir das equações de Maxwell, onde a aproximação de envelope variando lentamente é introduzida. O capítulo continua com a interação do átomo-campo, na aproximação de átomos de dois níveis; aqui, a equação de Liouville é apresentada, a qual descreve a evolução temporal do sistema. O capítulo finaliza com a apresentação das equações óticas de Bloch, as quais são usadas para calcular, a população e a coerência em sistemas multiníveis.

#### 2.1 Interação Radiação-Matéria

Uma descrição quântica completa da interação átomo-laser não é fácil. É portanto melhor aproximar a interação considerando o sistema atômico e o campo de radiação separadamente. Sob a aproximação semiclássica, usamos a aproximação clássica para o campo de radiação e a descrição quântica para o sistema atômico. A interação entre estas duas descrições é dada pela aproximação de dipolo elétrico. Assume-se que o campo elétrico de radiação interage com o átomo através do seu dipolo elétrico. Além disso, negligenciaremos a variação espacial do campo elétrico dado que seu comprimento de onda é muito maior que as dimensões atômicas. Estas aproximações nos permitem ignorar os efeitos quânticos e simplesmente considerar uma onda clássica interagindo com um átomo. Desta forma começamos a descrição da interação radiação matéria.

#### 2.1.1 Aproximação semi-clássica

Para começar o estudo da interação átomo-luz, vamos supor que o hamiltoniano de um elétron ligado a um átomo na ausência de campos externos, é dado por

$$\hat{\mathscr{H}}_0 = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + V(r), \qquad (2.1)$$

onde V(r) é a interação de Coulomb habitual ligando o elétron com o núcleo e  $r = |\vec{r}|$ . Na representação do espaço de configurações,  $\hat{\vec{p}} = -i\nabla$  e a função de onda é dada por  $\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle$ .

Assumimos que os auto estados de energia,  $|k\rangle$  de  $\hat{\mathscr{H}}_0$ , satisfazem a equação de Schrödinger independente do tempo:

$$\hat{\mathscr{H}}_{0}\psi_{k}^{(0)}(\vec{r}) = E_{k}\psi_{k}^{0}(\vec{r}), \qquad (2.2)$$

onde  $\langle \vec{r} | k \rangle = \psi_k^{(0)}(\vec{r})$  são conhecidos.

Na presença de campos externos, o modelo resultante corresponde a um elétron de carga e e massa m confinado por um potencial V(r) determinado pelo núcleo, com um campo eletromagnético externo descrito pelos potenciais vetor  $\vec{A}(\vec{r},t)$  e escalar  $\Phi(\vec{r},t)$ , com a interação dada pela prescrição de acoplamento mínimo [96], ou seja

$$\hat{\mathscr{H}}(\vec{r},t) = \frac{1}{2m} [\vec{p} + e\vec{A}(\vec{r},t)]^2 - e\Phi(\vec{r},t) + V(r), \qquad (2.3)$$

onde -e é a carga do elétron, e tomada como sendo positiva, com os campos sendo dados por

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\nabla \Phi(\vec{r},t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t},$$
  
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r},t),$$
 (2.4)

os quais são invariantes sob as transformações de calibre

$$\Phi'(\vec{r},t) = \Phi(\vec{r},t) - \frac{\partial \chi(\vec{r},t)}{\partial t},$$
  
$$\vec{A'}(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \nabla \chi(\vec{r},t).$$
 (2.5)

A equação de Schrödinger dependente do tempo é

$$\hat{\mathscr{H}}(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t}.$$
(2.6)

A fim de simplificar a forma da interação átomo-campo, temos que definir um operador unitário  $\hat{R}$ , tal que  $\Psi'(\vec{r},t) = \hat{R}\Psi(\vec{r},t)$ . Inserindo esta nova função de onda na equação de Schrödinger, Eq.(2.6) temos

$$\hat{\mathscr{H}}'\Psi'(\vec{r},t) = i\hbar \frac{\partial \Psi'(\vec{r},t)}{\partial t},$$
(2.7)

com

$$\hat{\mathscr{H}}' = \hat{R}\hat{\mathscr{H}}\hat{R}^{\dagger} + i\hbar\frac{\partial\hat{R}}{\partial t}\hat{R}^{\dagger}.$$
(2.8)

Escolhendo $\hat{R}=e^{-ie\chi(\vec{r},t)/\hbar}$ de modo que (usando $\vec{p}=-i\hbar\nabla)$ 

$$\hat{\mathscr{H}}' = \frac{1}{2m} [\vec{p} + e\vec{A}']^2 - e\Phi' + V(r), \qquad (2.9)$$

onde  $\vec{A'} \in \Phi'$  são dados pela Eq.(2.5). Neste ponto fazemos a escolha definitiva do calibre, chamado o calibre de Coulomb (ou radiação), para o qual  $\Phi = 0$  e  $\vec{A}$  satisfaz a condição de transversalidade,  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ . O potencial vetor  $\vec{A}$  quando não há fontes (J = 0) situadas próximo do átomo, satisfaz a equação de onda

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0.$$
 (2.10)

O calibre de Coulomb tem a vantagem que o campo de radiação é completamente descrito pelo

potencial vetor, como é evidente a partir da Eq.(2.3), o qual neste calibre, escrevemos como

$$\hat{\mathscr{H}}(\vec{r},t) = \frac{1}{2m} [\vec{p} + e\vec{A}(\vec{r},t)]^2 + V(r)$$
  
$$= \frac{\vec{p^2}}{2m} + \frac{e}{m}\vec{A}\cdot\vec{p} + \frac{e^2}{2m}\vec{A}^2 + V(r).$$
(2.11)

A Eq.(2.9) agora pode ser reescrita como

$$\hat{\mathscr{H}}'(\vec{r},t) = \frac{1}{2m} [\vec{p} + e(\vec{A} + \nabla\chi)]^2 + e\frac{\partial\chi}{\partial t} + V(r).$$
(2.12)

Poderemos fazer uma simplificação adicional usando a aproximação de dipolo. Para um campo eletromagnético que possua um comprimento de onda característico  $\lambda$  muito maior do que a dimensão atômica<sup>1</sup> r, poderemos desprezar a variação espacial do campo ao longo do átomo. A aproximação de dipolo [100] consiste então em tomar  $\vec{k} \cdot \vec{r} \ll 1$ , o qual nos permite escrever o potencial vetor na forma:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$
(2.13)

Escolhendo,

$$\nabla \chi(\vec{r},t) = -\vec{A}(t),$$
  

$$\frac{\partial \chi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{r} \cdot \vec{E}(t),$$
(2.14)

a Eq.(2.12) pode ser reescrita nesta aproximação como:

$$\hat{\mathscr{H}}' = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(r) + e\vec{r} \cdot \vec{E}(t).$$
(2.15)

Esta equação contém apenas um termo de interação (dentro da aproximação de dipolo), em oposição

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>O tamanho do átomo é da ordem de 1Å. Assim para frequências menores que 10<sup>18</sup> Hz os campos enxergam o átomo como um ponto

aos dois termos da Eq.(2.11).

Esta aproximação para o Hamiltoniano de interação será utilizada ao longo deste trabalho. A quantidade  $-e\mathbf{r}$  é o momento de dipolo:  $\vec{d} = -e\vec{r}$ . Em geral, isto é, para uma representação não especificada, o momento de dipolo é um operador,  $\hat{d}$ . Denotaremos como tal no que segue. Assim, podemos escrever

$$\hat{\mathscr{H}}' = \hat{\mathscr{H}}_0 - \hat{d} \cdot \vec{E}(t), \qquad (2.16)$$

onde  $\hat{\mathscr{H}}_0$  é dado pela Eq.(2.1)

### 2.2 Propagação do campo em meios atômicos

Na seção anterior vimos que quando se considera a interação de um átomo com o campo de radiação cujo comprimento de onda é grande em comparação ao tamanho do átomo, a aproximação de dipolo dá a contribuição dominante para o acoplamento átomo-campo. Nesta seção nós vamos trabalhar a partir das equações de Maxwell para descrever a propagação da luz através do meio atômico na *aproximação de amplitude lentamente variável*, SVEA, (SVEA, sigla em inglês para , "Slowly varying amplitude approximation").

## 2.2.1 Equação de propagação do campo na aproximação do envelope variando lentamente

As Equações de Maxwell são formuladas em torno dos campos eletromagnéticos: o campo elétrico  $\vec{E}(\vec{r},t)$  e o campo magnético  $\vec{B}(\vec{r},t)$ . Duas outras variáveis relacionadas a esses campos são definidas também, chamadas o vetor deslocamento

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r},t) + \vec{P}(\vec{r},t), \qquad (2.17)$$
e a intensidade magnética,  $\vec{H}(\vec{r},t)$ , a qual esta relacionada ao vetor indução magnética  $\vec{B}(\vec{r},t)$ , por:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \mu_0 \vec{H}(\vec{r},t) + \vec{M}(\vec{r},t).$$
(2.18)

Nas equações anteriores são definidas a polarização  $\vec{P}(\vec{r},t)$  e a magnetização  $\vec{M}(\vec{r},t)$  que podem ser induzidas no meio; também temos que  $\varepsilon_0$  e  $\mu_0$  são a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética no vácuo. A densidade de carga e corrente são representadas por  $\rho(\vec{r},t)$  e  $\vec{j}(\vec{r},t)$ , respectivamente.

Considerando que o campo eletromagnético interagirá com uma amostra atômica neutra, i.é,  $|\vec{j}(\vec{r},t)| = \rho(\vec{r},t) = 0$ , e que além disso, estamos interessados apenas nos efeitos da polarização elétrica induzida no meio atômico pelo campo eletromagnético, poderemos ignorar quaisquer efeitos decorrentes de magnetização, portanto  $|\vec{M}(\vec{r},t)| = 0$ . Sob essas premissas, encontramos que a equação para uma onda eletromagnética no meio se reduz a:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r},t)) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}(\vec{r},t)}{\partial t^2}.$$
(2.19)

Empregando a identidade vetorial  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r},t) = \nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r},t)) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r},t)$  e assumindo que o campo elétrico varia lentamente no plano transversal à direção de propagação,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r},t) \simeq 0$ , chegamos à equação de onda

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}(\vec{r},t)}{\partial t^2}.$$
(2.20)

Como é típico em ótica, consideremos uma propagação unidirecional do campo ao longo do eixo z, em tal situação os vetores campo elétrico e a polarização induzida podem ser expressos como

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E(z,t)\hat{e}_{xy}$$
  $P(\vec{r},t) = P(z,t)\hat{e}_{xy},$  (2.21)

onde  $\hat{e}_{xy}$ é o vetor de polarização unidade no plano perpendicular à direção de propagação. Devido

ao fato do campo propagar-se apenas na direção z, podemos reescrever a Eq.(2.20), a qual reduz-se para a equação em 1D, dada por:

$$\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}(\vec{r},t)}{\partial t^2}.$$
(2.22)

Se agora consideremos que o campo elétrico é quase monocromático e com frequência portadora  $\omega$ , o módulo de vetor de onda é dado por,  $|\vec{k}| = k = \omega/c$ ,

$$E(z,t) = E_0(z,t)e^{i(kz-\omega t)} + c.c,$$
(2.23)

onde c.c indica o complexo conjugado e  $E_0(z,t)$  é o envelope do campo, o qual é em geral uma função complexa. Este campo induz a polarização no meio

$$P(z,t) = P_0(z,t)e^{i(kz-\omega t)} + c.c,$$
(2.24)

onde  $P_0$  é geralmente uma função complexa.

Vamos assumir que o envelope do campo  $E_0(z,t)$  varia lentamente numa escala temporal muito maior que a de um ciclo de oscilação do campo e é praticamente constante em dimensões comparadas às atômicas. Estas aproximações são bastante plausíveis para comprimentos de onda típicos da região ótica do espectro eletromagnético. Essa aproximação é conhecida como aproximação de amplitude lentamente variável, a qual nos leva às seguintes relações para a variável espacial

$$\left|\frac{\partial E_0(z,t)}{\partial t}\right| \ll \omega |E_0(z,t)|, \quad \left|\frac{\partial E_0(z,t)}{\partial z}\right| \ll k |E_0(z,t)|, \\ \left|\frac{\partial P_0(z,t)}{\partial t}\right| \ll \omega \left|P_0(z,t)\right|, \quad \left|\frac{\partial P_0(z,t)}{\partial z}\right| \ll k \left|P_0(z,t)\right|,$$
(2.25)

substituindo as Eqs.(2.21) na Eq.(2.22) e aplicando a aproximação de amplitude lentamente variável

temos:

$$\frac{\partial E_0(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_0(z,t)}{\partial t} = i \frac{k}{2\varepsilon_0} P_0(z,t).$$
(2.26)

Em termos de quantidades reais, esta equação diz

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_0(z,t) = -\frac{k}{2\varepsilon_0}Im(P_0(z,t)), \qquad (2.27)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_0(z,t) = \frac{k}{2\varepsilon_0}Re(P_0(z,t)).$$
(2.28)

Em muitos problemas da ótica quântica e ótica não-linear envolvendo a propagação de campos óticos variando lentamente em meios quase ressonantes, as Eq.(2.27) ou Eq.(2.28) constituem o ponto de partida da discussão. Como se vê, estas equações essencialmente descrevem a interação de um conjunto de átomos com um campo de radiação. O campo de radiação é representado por  $E_0(z,t)$  e o conjunto de átomos (o qual constituem o meio) são descrito por  $P_0(z,t)$ . Nos capítulos seguintes, discutiremos vários aspectos da propagação de um pulso de luz em meios atômicos sob a condição da Transparência Induzida Eletromagneticamente.

#### 2.3 Interação átomo-campo para átomos de dois níveis

O mundo real de átomos, moléculas e sólidos é bastante complicado e até mesmo o átomo real mais simples, o átomo de hidrogênio, tem uma estrutura de níveis de energia não-trivial. É portanto muitas vezes necessário ou desejável aproximar o comportamento de um átomo real para um sistema quântico muito mais simples. Para muitos fins, apenas dois níveis de energia atômicos desempenham um papel significativo na interação com o campo eletromagnético, de modo que temse tornado habitual em muitos tratamentos teóricos representar o átomo por um sistema quântico de unicamente dois auto estados de energia. Este é o mais básico de todos os sistemas quânticos e geralmente simplifica o tratamento substancialmente [101, 102].

Embora o modelo de dois níveis ignore muitas das características presentes no sistema atômico



Figura 2.1: Diagrama de níveis de energia do sistema atômico de dois níveis. Os dois níveis estão ligados por um campo laser, o qual tem uma frequência angular  $\omega$  e frequência de Rabi  $\Omega$ . O campo apresenta uma dessintonia  $\delta$  da ressonância atômica. O estado excitado e fundamental tem uma largura de linha  $\gamma_2$  e  $\gamma_1$  respectivamente.

real, há uma enorme riqueza no processo físico que é descrito na aproximação de átomos de dois níveis [103]. O bom conhecimento desse modelo atômico simplificado permite o estudo de situações mais complexas, tais como aquelas que envolvem um meio estendido destes sistemas interagindo com um dado campo. A aproximação de átomos de dois níveis é portanto, perto da realidade e não apenas uma conveniência matemática em algumas situações experimentais. Em seguida começamos a desenvolver a álgebra para a interação do campo e o átomo de dois níveis.

Na aproximação de átomos de dois níveis, para um átomo (ou molécula), nós rotulamos o nível superior do nosso átomo de dois níveis por  $|2\rangle$ , e o inferior por  $|1\rangle$  como mostrado na Fig.2.1. A função de onda correspondente para o caso em que o sistema esteja em um estado puro, pode ser escrita como

$$|\psi(t)\rangle = c_2(t)|2\rangle + c_1|1\rangle, \qquad (2.29)$$

onde  $c_2(t)$  e  $c_1(t)$  são as amplitudes de probabilidade de se encontrar o átomo no estado  $|2\rangle$  ou  $|1\rangle$ .

A partir da Eq.(2.29) podemos escrever o operador densidade para o sistema ilustrado na Fig.2.1. O correspondente operador densidade  $\hat{\rho}$  para o caso de um estado puro é definido como o projetor  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$  para este estado, e os elementos de matriz densidade  $\rho_{ij} = \langle j|\hat{\rho}|i\rangle$  são dados pelos produtos bilineares

 $\begin{array}{lll} \rho_{22} &=& c_2(t)c_2^*(t), & \text{probabilidade de estar no nível superior}; \\ \rho_{21} &=& c_2(t)c_1^*(t), & \text{coerência entre os estados}; \\ \rho_{12} &=& c_1(t)c_2^*(t) = \rho_{21}^*, \\ \rho_{11} &=& c_1(t)c_1^*(t), & \text{probabilidade de estar no nível inferior}. \end{array}$ 

Na notação de matriz, o operador densidade  $\hat{\rho}$  é por conseguinte

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} c_1(t)c_1^*(t) & c_1(t)c_2^*(t) \\ c_2(t)c_1^*(t) & c_2(t)c_2^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}.$$
(2.30)

Esta matriz densidade é precisamente o produto externo

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^*(t) & c_2^*(t) \end{pmatrix}.$$
(2.31)

Em termos da matriz densidade, Eq.(2.30), o valor esperado para qualquer variável dinâmica  $\hat{O}$  do sistema, é dado pelo cálculo do traço, Tr() do operador  $O\rho(t)$ , ou seja

$$\begin{split} \langle \hat{O} \rangle &= \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle = \sum_{m,n} c_m^*(t) c_n(t) \langle m | \hat{O} | n \rangle \\ &= \sum_{m,n} \rho_{nm} O_{mn} \\ &= Tr(\hat{O}\hat{\rho}) \end{split}$$
(2.32)

#### 2.3.0.1 Equação de Liouville

Ao tratar com cada um dos estados puros, a equação de Schrödinger descreve como os estados evoluem. Em princípio, esta pode ser estendida para aplicar a sistemas de muitas partículas também. Quando o número de partículas aumenta, o número de cálculos necessários para descrever como o sistema completo evolui pode se tornar muito difícil. Portanto uma abordagem alternativa deve ser tomada. Considere o estado,  $|\psi(t_0)\rangle$ , que em algum tempo t ele terá evoluído para o estado  $|\psi(t)\rangle$ , tal que :

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle. \tag{2.33}$$

Obviamente

$$\hat{U}(t=t_0,t_0) = 1. \tag{2.34}$$

Substituindo a Eq.(2.33) na equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{\mathscr{H}} |\psi(t)\rangle, \qquad (2.35)$$

obtém-se

$$i\hbar \left[ \frac{\partial \hat{U}(t,t_0)}{\partial t} |\psi(t_0)\rangle + \hat{U}(t,t_0) \frac{\partial |\psi(t_0\rangle)}{\partial t} \right] = \hat{\mathscr{H}} |\psi(t_0)\rangle$$
  
$$\therefore \qquad i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t,t_0)}{\partial t} |\psi(t_0)\rangle = \hat{\mathscr{H}} \hat{U}(t,t_0) |\psi(t_0)\rangle. \tag{2.36}$$

Da Eqs.(2.34) e Eq.(2.36), para um operador hamiltoniano independente do tempo temos

$$\hat{U}(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathscr{H}}t}.$$
(2.37)

Se consideramos agora uma variável  $\hat{\mathscr{D}}$  que evolui quando o estado  $|\psi(t)\rangle$  evolui conforme a Eq.(2.33), então

$$\langle \psi(t) | \hat{\mathscr{D}} | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | \hat{U}^{\dagger} \hat{\mathscr{D}} \hat{U} | \psi(t_0) \rangle$$
  
=  $\langle \psi(t_0) | \hat{\mathscr{D}}_0 | \psi(t_0) \rangle$  (2.38)

$$\Rightarrow \hat{U}^{\dagger} \hat{\mathscr{D}} \hat{U} = \hat{\mathscr{D}}_{0}, \qquad (2.39)$$

 $\operatorname{como}$ 

$$\hat{U}^{\dagger}\hat{U} = 1, \qquad (2.40)$$

temos que,

$$\hat{\mathscr{D}} = \hat{U}\hat{\mathscr{D}}_0\hat{U}^{\dagger}.$$
(2.41)

Diferenciando em relação a t, temos

$$\frac{d\hat{\mathscr{D}}}{dt} = \hat{U}\hat{\mathscr{D}}_{0}\frac{\partial\hat{U}^{\dagger}}{\partial t} + \hat{U}\frac{\partial\hat{\mathscr{D}}_{0}}{\partial t}\hat{U}^{\dagger} + \frac{\partial\hat{U}}{\partial t}\hat{\mathscr{D}}_{0}\hat{U}^{\dagger}, \\
= \frac{1}{i\hbar}(\hat{\mathscr{H}}\hat{\mathscr{D}} - \hat{\mathscr{D}}\hat{\mathscr{H}}) + \hat{U}\frac{\partial\hat{\mathscr{D}}_{0}}{\partial t}\hat{U}^{\dagger}, \\
\Rightarrow \frac{d\hat{\mathscr{D}}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{\mathscr{H}},\hat{\mathscr{D}}] + \frac{\partial\hat{\mathscr{D}}}{\partial t}.$$
(2.42)

Se  $\hat{\mathscr{D}}$  é de fato o operador densidade  $\hat{\rho},$  segue-se que

$$\dot{\hat{\rho}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}, \hat{\mathscr{H}}] + \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t}, \qquad (2.43)$$

 ${\rm onde}$ 

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t}\Big|_{relax} = \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\gamma \hat{\rho},$$

portanto temos que

$$\dot{\hat{\rho}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}, \hat{\mathscr{H}}] - \gamma \hat{\rho}.$$
(2.44)

Isto é conhecido como a equação de Liouville-von Neumann, que descreve a evolução temporal do operador densidade, equivalente à equação de Schrödinger. Em forma matricial esta equação pode ser escrita como:

$$\dot{\rho}_{mn} = \frac{i}{\hbar} \sum_{k} (\rho_{mk} \mathscr{H}_{kn} - \mathscr{H}_{mk} \rho_{kn}) - \gamma_{mn} \rho_{mn}, \qquad (2.45)$$

 $\operatorname{com}$ 

$$\gamma_{mn} = \frac{\gamma_m + \gamma_n}{2} \tag{2.46}$$

#### 2.4 Equações óticas de Bloch

As equações de Bloch para a ótica são uma ferramenta útil para entender a interação de um sistema atômico com radiação monocromática quase ressonante. A evolução da coerência e da população podem ser derivadas da equação de Liouville, Eq.(2.44).

Para um átomo de dois níveis interagindo com um campo de radiação quase monocromática a aproximação mais comum para a interação é a do tipo dipolo elétrico, já discutida na seção anterior, acoplando dois níveis de diferentes paridades. Nesta aproximação o operador hamiltoniano para o sistema é dado por:

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_a - \hat{d} \cdot \vec{E}, \qquad (2.47)$$

desta expressão nós podemos escrever o operador hamiltoniano do átomo livre em uma representação matricial definido pela nossa base de dois estados ao utilizar a relação de completude dado por,  $|1\rangle\langle 1|+|2\rangle\langle 2|=1$ . Portanto, a expressão para o hamiltoniano do átomo livre fica

$$\hat{\mathscr{H}}_{a} = (|1\rangle\langle 1|+|2\rangle\langle 2|)\hat{H}_{a}(|1\rangle\langle 1|+|2\rangle\langle 2|)$$
$$= \hbar\omega_{1}|1\rangle\langle 1|+\hbar\omega_{2}|2\rangle\langle 2|.$$
(2.48)

Agora usamos a relação de completude para expressar o operador de posição  $\vec{r}$  em auto-estados de energia. Desde que os auto-estados de energia da função de onda  $\psi_j(\vec{r})$  têm paridade bem definida, os elementos diagonais desaparecem, isto é

$$\langle j|\vec{r}|j\rangle = \int d^3r |\psi_j(\vec{r})|^2 \vec{r} = 0.$$
 (2.49)

De fato, desde que  $|\psi_j(\vec{r})|^2$  é uma função par <br/>e $\vec{r}$  é uma função impar, o integrando é igual a zero. Os elementos for<br/>a da diagonal podem ser escritos como

$$e\langle 2|\vec{r}|1\rangle = e \int d^3 r \psi_2^*(\vec{r}) \vec{r} \psi_1(\vec{r}) \equiv d_{21}, \qquad (2.50)$$

е

$$e\langle 1|\vec{r}|2\rangle = e \int d^3 r \psi_1^*(\vec{r}) \vec{r} \psi_2(\vec{r}) \equiv d_{21}^*, \qquad (2.51)$$

portanto, o operador de dipolo  $e\vec{r}$  toma a forma

$$\vec{d} = e\vec{r} = d_{21}|2\rangle\langle 1| + d_{21}^*|1\rangle\langle 2|$$
(2.52)

Notamos que o operador descreve transições do estado fundamental  $|1\rangle$  para o estado excitado  $|2\rangle$  e vice-versa. A fim de destacar essa propriedade mais claramente, nós aplicamos o operador  $e\vec{r}$  no estado  $|1\rangle$  e achamos

$$e\vec{r}|1\rangle = d_{21}|2\rangle\langle 1|1\rangle + d_{21}^{*}|1\rangle\langle 2|1\rangle = d_{21}|2\rangle, \qquad (2.53)$$

e do mesmo modo

$$e\vec{r}|2\rangle = d_{21}|2\rangle\langle 1|2\rangle + d_{21}^*|1\rangle\langle 2|2\rangle = d_{21}^*|1\rangle.$$
(2.54)

Supondo que o campo eletromagnético (clássico) que interage com o sistema atômico de dois níveis possui frequência angular  $\omega$  e está dessintonizado por um  $\delta$  da transição atômica, tal como mostrado na Fig.2.1, seja dado por:

$$E(t) = E_0 e^{i\omega t} + E_0^* e^{-i\omega t}, (2.55)$$

o hamiltoniano de interação pode ser re-escrito como

$$\hat{\mathscr{H}}_{i} = -[d_{21}E_{0}e^{i\omega t}|2\rangle\langle 1| + d_{21}^{*}E_{0}e^{i\omega t}|1\rangle\langle 2|] - [d_{21}E_{0}^{*}e^{-i\omega t}|2\rangle\langle 1| + d_{21}^{*}E_{0}^{*}e^{-i\omega t}|1\rangle\langle 2|].$$
(2.56)

Definindo a frequência de Rabi como :  $\Omega=2d_{21}E_0/\hbar$ o hamiltoniano agora é dado como

$$\hat{\mathscr{H}}_{i} = -\frac{\hbar}{2} [\Omega e^{i\omega t} + \Omega^{*} e^{-i\omega t}] |2\rangle \langle 1| -\frac{\hbar}{2} [\Omega e^{i\omega t} + \Omega^{*} e^{-i\omega t}] |1\rangle \langle 2|].$$
(2.57)

Este é o ponto em que a aproximação de onda girante (RWA, sigla em inglês para "Rotating Wave Approximation") é feita. Como a aproximação de dipolo tem sido assumida, e para que esta continue sendo válida, o campo elétrico deve ser próximo da ressonância com a transição atômica. Isto indica que o termo  $\omega - \omega_{21} \ll \omega + \omega_{21}$  e as exponenciais complexas multiplicando  $\Omega$  e  $\Omega^*$  podem ser consideradas rapidamente oscilante. Assim, em qualquer escala de tempo apreciável as oscilações vão rapidamente em média para zero. A aproximação de onda girante, portanto consiste em poder desprezar os termos que oscilam rapidamente e conservar apenas os termos com oscilação lenta. Nesta aproximação o hamiltoniano de interação é reescrito

$$\hat{\mathscr{H}}_{i} = -\frac{\hbar}{2} [\Omega^{*} e^{-i\omega t} |2\rangle \langle 1| + \Omega e^{i\omega t} |1\rangle \langle 2|].$$
(2.58)

Portanto, do operador hamiltoniano do átomo livre, Eq.(2.48) e do hamiltoniano de interação, Eq.(2.58), temos que o hamiltoniano total do sistema é dado pela seguinte equação

$$\hat{\mathscr{H}} = \hbar\omega_1 |1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2 |2\rangle\langle 2| -\frac{\hbar}{2} [\Omega^* e^{-i\omega t} |2\rangle\langle 1| + \Omega e^{i\omega t} |1\rangle\langle 2|].$$
(2.59)

Assim, da Equação de Liouville, dada por Eq.(2.45), e utilizando as Eq.(2.46) e Eq.(2.59) as equações de movimento para os elementos de matriz densidade são

$$\dot{\rho}_{21} = i\frac{\Omega^*}{2}e^{-i\omega t}(\rho_{11} - \rho_{22}) - (i\omega_{21} + \gamma_{21})\rho_{21}, \qquad (2.60)$$

$$\dot{\rho}_{22} = i\frac{\Omega^*}{2}e^{-i\omega t}\rho_{12} - i\frac{\Omega}{2}e^{i\omega t}\rho_{21} - \gamma_2\rho_{22}, \qquad (2.61)$$

$$\dot{\rho}_{11} = i\frac{\Omega}{2}e^{i\omega t}\rho_{21} - i\frac{\Omega^*}{2}e^{-i\omega t}\rho_{12} - \gamma_1\rho_{11} + \gamma_2\rho_{22}, \qquad (2.62)$$

$$\dot{\rho}_{12} = \dot{\rho}_{21}^*. \tag{2.63}$$

Dado que as ultimas quatro equações diferenciais apresentam coeficientes que dependem do tempo, é então desejável que procuremos reescrevê-las através de uma troca de variáveis no intuito de torná-las equações diferencias lineares com coeficientes constantes. Com este proposito, definimos

$$\rho_{22} = \tilde{\rho}_{22}, \qquad (2.64)$$

$$\rho_{11} = \tilde{\rho}_{11},$$
(2.65)

$$\rho_{21} = \tilde{\rho}_{21} e^{-i\omega t}. \tag{2.66}$$

Como se pode notar, tal troca de variáveis leva-nos ao seguinte sistema de equações diferencias lineares com coeficientes constantes:

$$\dot{\tilde{\rho}}_{21} = \frac{i\Omega^*}{2}(\tilde{\rho}_{11} - \tilde{\rho}_{22}) + (i\delta - \gamma_{21})\tilde{\rho}_{21}, \qquad (2.67)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{22} = \frac{i\Omega^*}{2}\tilde{\rho}_{12} - \frac{i\Omega}{2}\tilde{\rho}_{21} - \gamma_2\tilde{\rho}_{22}, \qquad (2.68)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{11} = \frac{i\Omega}{2}\tilde{\rho}_{21} - \frac{i\Omega^*}{2}\tilde{\rho}_{12} - \gamma_1\tilde{\rho}_{11} + \gamma_2\rho_{22}, \qquad (2.69)$$

onde  $\delta = \omega_{21} - \omega$  é a dessintonia entre o campo e a transição atômica.

Para se estudar as características estacionárias do sistema de dois níveis ilustrado na Fig.2.1, nós fazemos que

$$\dot{\tilde{\rho}}_{21} = \dot{\tilde{\rho}}_{22} = \dot{\tilde{\rho}}_{11} = 0, \qquad (2.70)$$

e, no caso de que o sistema de dois níveis seja fechado,

$$\gamma_1 = 0, \tag{2.71}$$

$$\rho_{11} + \rho_{22} = 1. \tag{2.72}$$

Neste regime, as equações óticas de Bloch reduzem-se a

$$\gamma_2 \tilde{\rho}_{22} = \frac{i}{2} \Omega(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}),$$
 (2.73)

$$(\gamma_{21} - i\delta)\rho_{21} = \frac{i}{2}\Omega(\tilde{\rho}_{11} - \tilde{\rho}_{22}).$$
(2.74)

Substituindo a Eq.(2.72) na Eq.(2.74) leva a

$$\tilde{\rho}_{21} = \frac{i\Omega}{2(\gamma_{21} - i\delta)} (1 - 2\tilde{\rho}_{22}).$$
(2.75)

Agora substituindo a Eq.(2.75) e o complexo conjugado desta na Eq.(2.73) nos permite encontrar a solução para  $\tilde{\rho}_{22}$ 

$$\tilde{\rho}_{22} = \frac{\Omega^2 \gamma_{21}}{2\gamma_2 (\gamma_{21}^2 + \delta^2) + 2\gamma_{21} \Omega^2}.$$
(2.76)

Como o sistema de dois níveis em consideração é um sistema fechado, para o qual  $\gamma_1 = 0$ , então da Eq.(2.46), temos que  $\gamma_{21} = \frac{\gamma_2}{2}$ , portanto substituindo este valor, a Eq.(2.76) reduz-se a

$$\tilde{\rho}_{22} = \frac{\Omega^2}{\gamma_2^2 + 4\delta^2 + 2\Omega^2}.$$
(2.77)

Para encontrar a solução de estado estacionário para a coerência entre os dois níveis, substituímos a Eq.(2.77) na Eq.(2.75) para finalmente achar que a coerência é dada pela seguinte expressão

$$\tilde{\rho}_{21} = \frac{\Omega(i\gamma_2 - 2\delta)}{\gamma_2^2 + 4\delta^2 + 2\Omega^2}$$
(2.78)

#### 2.4.1 Susceptibilidade Complexa

A polarização macroscópica  $\vec{P}$ , para um meio com N osciladores por unidade de volume, com momento de dipolo  $\vec{d}$ , é dado por

$$\vec{P}(t) = N \langle \vec{d} \rangle. \tag{2.79}$$

Partindo do pressuposto de que  $\vec{P}$  é proporcional ao campo elétrico aplicado  $\vec{E}$ ,  $\vec{P}$  pode ser escrito como:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} (\chi e^{-i\omega t} + \chi^* e^{i\omega t}), \qquad (2.80)$$

onde  $\chi$  é a susceptibilidade complexa do meio [104]. Das Eq.(2.32), Eq.(2.79) e Eq.(2.80) obtemos que

$$N(\tilde{\rho}_{21}e^{-i\omega t}d_{12} + \tilde{\rho}_{12}e^{i\omega t}d_{21}) = \varepsilon_0 E_0(\chi e^{-i\omega t} + \chi^* e^{i\omega t}),$$
(2.81)

substituindo a frequência de Rabi nesta ultima equação, obtemos

$$Nd_{21}^2(\tilde{\rho}_{21}e^{-i\omega t} + \tilde{\rho}_{12}e^{i\omega t}) = \frac{\varepsilon_0\hbar\Omega}{2}(\chi e^{-i\omega t} + \chi^* e^{i\omega t}).$$
(2.82)

Da igualdade dos coeficientes com  $e^{-i\omega t}$ , encontramos que a susceptibilidade complexa é dada

$$\chi = \frac{2Nd_{21}^2}{\varepsilon_0\hbar\Omega}\tilde{\rho}_{21}.$$
(2.83)

A dependência da polarização linear sobre os elementos de matriz densidade é claramente apresentado se a susceptibilidade é expressa em termos da parte real  $(\chi_r)$  e imaginário  $(\chi_i)$  como

$$\chi = \chi_r + i\chi_i,$$

ao substituir a expressão de  $\tilde{\rho}_{21}$ , dada pela Eq.(2.78), na Eq.(2.83), finalmente achamos que a susceptibilidade complexa é dada por:

$$\chi = \frac{2Nd_{21}^2}{\varepsilon_0\hbar} \left( \frac{-2\delta}{\gamma_2^2 + 4\delta^2 + 2\Omega^2} + i\frac{\gamma_2}{\gamma_2^2 + 4\delta^2 + 2\Omega^2} \right),\tag{2.84}$$

onde

$$\chi_r = -\frac{4Nd_{21}^2}{\varepsilon_0\hbar} \left(\frac{\delta}{\gamma_2^2 + 4\delta^2 + 2\Omega^2}\right),\tag{2.85}$$



Figura 2.2: Curvas de absorção (a) e dispersão (b) de um sistema atômico de dois níveis na presença de um campo de prova dessintonizado da transição atômica  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  por  $\delta = \omega_{21} - \omega$ .

е

$$\chi_i = \frac{2Nd_{21}^2}{\varepsilon_0 \hbar} \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_2^2 + 4\delta^2 + 2\Omega^2} \right), \tag{2.86}$$

Para um campo estacionário  $E_0(z,t) = E_0(z)$  e  $P_0(z,t) = P_0(z)$ , a Eq.(2.26) reduz-se à equação de propagação independente do tempo

$$\frac{\partial E_0(z)}{\partial z} = \frac{ik}{2} (\chi_r + i\chi_i) E_0(z), \qquad (2.87)$$

nesta ultima equação substituímos  $P_0(z) = \varepsilon_0 \chi E_0(z)$ . Finalmente resolvendo a Eq.(2.87), a amplitude do campo logo depois de se propagar no meio atômico de comprimento L pode ser expressa como:

$$E_0(z) = E_0 e^{-\alpha_0 L/2} e^{i\phi L}, \qquad (2.88)$$

na qual o coeficiente de absorção é dado como:  $\alpha_0 = \frac{2\pi}{\lambda} Im(\chi)$  e a fase que ganha o campo ao atravessar a mostra atômica é  $\phi = \frac{\pi L}{2} Re(\chi)$ . Apesar de falarmos separadamente das partes real e imaginária da coerência  $\tilde{\rho}_{21}$ , estamos sempre nos referindo à mesma informação extraída do sistema, estando a parte real e imaginária relacionadas através das relações de Kramers-Kroning [105].

A Fig.2.2 mostra a parte real e imaginaria desta susceptibilidade. Como podemos observar na Fig. 2.2(a), o perfil de absorção apresenta um perfil do tipo Lorentziano, com a largura de linha determinado pela taxa de decaimento do estado excitado,  $\Delta \omega = \sqrt{\gamma_2^2 + 2\Omega^2}$ . Na condição de ressonância do campo com a transição atômica ( $\delta = 0$ ), esta curva apresenta seu valor máximo. No caso da curva de dispersão, Fig.2.2(b), como podemos observar esta curva tem um perfil de dispersão familiar, com dispersão anômala (diminuição do  $Re(\chi)$  com a frequência ) na parte central do perfil de absorção dentro da largura de linha. Já para grandes dessintonias do campo em relação à frequência da transição atômica, tanto as curvas de absorção e dispersão apresentam valor nulo.

## Capítulo 3

# Teoria de EIT em um sistema ideal de três níveis

### 3.1 O átomo de três níveis

A interação entre a luz e matéria em um sistema atômico de dois níveis é a base para a descrição de muitos aspectos na física atômica, tais como oscilações de Rabi, relógios atômicos e a força de radiação usada no resfriamento a laser [105,106]. Contrariamente para átomos de dois níveis, muitos mais efeitos físicos podem ser observados em outros tipos de sistemas atômicos.

Desde os anos 1990 a comunidade da ótica quântica têm procurado desenvolver sua compreensão da dinâmica de sistemas atômicos mais complexos, isto é com mais de dois níveis. Por exemplo percebeu-se que sistemas de três níveis podem exibir características novas que não são possíveis no sistema de dois níveis. Portanto, os sistemas de três níveis têm sido objeto de extensos estudos, tanto teóricos como experimentais, nos últimos trinta anos. A razão para este interesse nos sistemas de três níveis é a utilização deste para observar efeitos de interferência quântica. Um exemplo interessante é a transparência induzida eletromagneticamente (EIT) [50].

#### 3.2 Transparência induzida eletromagneticamente

A abreviatura EIT, tenta descrever a redução da absorção de um campo laser de prova, devido ao efeito de interferência quântica destrutiva o qual permite a propagação deste campo através de um meio atômico de outra forma opaco; um laser de "acoplamento" é usado para criar a interferência necessária para permitir a transmissão de pulsos de prova ressonante. As ressonâncias absortivas normalmente associadas a um sistema de dois níveis podem ser feitas parcialmente transparente sob alguma largura de frequência. Como demonstrado por meio das relações de Kramers-Kroning qualquer alteração na absorção de um meio também modifica a dispersão [105]. Devido à janela de transmissão estreita característico do fenômeno de EIT, maior dispersão ocorre. Este controle da resposta ótica de um meio é devido à capacidade de induzir coerência utilizando campos de laser. Mais especificamente, a evolução do sistema átomo-luz depende da fase das amplitudes atômicas do estado e não apenas da dinâmica populacional dos níveis atômicos.

A primeira observação experimental de EIT foi feita em 1990 por Harris, em vapor de estrôncio [10]. Para esse experimento, os feixes se acoplam para formar um sistema  $\Lambda$ , assim chamado porque a forma feita pelos feixes se assemelha à letra grega, como mostrado na Fig.3.1. Existem duas outras configurações de estados geralmente usados para o estudo de EIT,  $\Xi$  (cascata) e V. Na descrição que se segue, só o sistema  $\Lambda$  sera apresentado, no entanto os outros dois sistemas são facilmente descritos por alterações apropriadas nas energias e acoplamentos. Comum a todas estas configurações é o fato de que não há acoplamento entre dois dos estados constituintes  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  da Fig.3.1.

### 3.3 Equações óticas de Bloch para a EIT

Consideremos o sistema de três níveis na configuração  $\Lambda$ , como esquematicamente mostrado na Fig.3.1. Da mesma maneira que a susceptibilidade complexa, e portanto a absorção e dispersão do meio, para o sistema de dois níveis foi calculada no capítulo anterior, é possível calcular a



Figura 3.1: Sistema atômico de três níveis tipo  $\Lambda$ , com estados metaestável  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , assim como o estado excitado  $|3\rangle$ . Os laser de acoplamento e prova são denotados por  $\Omega_c$  e  $\Omega_p$ , respectivamente. Nesta figura também são mostradas as dessintonias dos laser de prova ( $\Delta$ ) e acoplamento ( $\delta$ ).  $\gamma$  é a taxa de decaimento do estado excitado para os estados mais baixos, em quanto  $\gamma_0$  representa a perda de coerência entre os estados fundamentais.

susceptibilidade complexa para o sistema  $\Lambda$  de três níveis. Como foi feito no capítulo anterior, dentro da aproximação de dipolo o hamiltoniano do sistema completo pode ser escrito como

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_a - \hat{d} \cdot \vec{E}. \tag{3.1}$$

Utilizando a relação de completude,  $|1\rangle\langle 1|+|2\rangle\langle 2|+|3\rangle\langle 3|=1$ , o hamiltoniano do sistema atômico,  $\hat{\mathscr{H}}_a$  é dado por

$$\hat{\mathscr{H}}_{a} = \hbar\omega_{1}|1\rangle\langle1| + \hbar\omega_{2}|2\rangle\langle2| + \hbar\omega_{3}|3\rangle\langle3|, \qquad (3.2)$$

supondo que os campos que interagem com o sistema atômico estão em fase e possuem amplitudes reais e constantes. Além disso, como estamos trabalhando na aproximação de dipolo, a estrutura espacial do campo não vai ser levada em conta, assim escrevemos que os campos de acoplamento e prova são dados por:

$$E_c(t) = E_c^0(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}), \qquad (3.3)$$

$$E_p(t) = E_p^0(e^{-i\omega_p t} + e^{i\omega_p t}), (3.4)$$

e o hamiltoniano de interação, na aproximação de onda girante é dado

$$\hat{\mathscr{H}}_{i} = -\frac{\hbar\Omega_{p}}{2} \left( |3\rangle\langle 1|e^{-i\omega_{p}t} + |1\rangle\langle 3|e^{i\omega_{p}t} \right) - \frac{\hbar\Omega_{c}}{2} \left( |3\rangle\langle 2|e^{-i\omega t} + |2\rangle\langle 3|e^{i\omega t} \right), \tag{3.5}$$

neste caso, a frequência de Rabi do feixe de prova é,  $\Omega_p = \frac{2E_p^0 d_{31}}{\hbar}$ , enquanto a do laser de acoplamento é dado por,  $\Omega_c = \frac{2E_c^0 d_{32}}{\hbar}$ , onde temos considerado as frequências de Rabi dos laser de prova e acoplamento como sendo quantidades reais. Nesta aproximação o hamiltoniano total do sistema pode ser escrito como

$$\hat{\mathscr{H}} = \hbar\omega_1 |1\rangle \langle 1| + \hbar\omega_2 |2\rangle \langle 2| + \hbar\omega_3 |3\rangle \langle 3| - \frac{\hbar\Omega_p}{2} \left( |3\rangle \langle 1| e^{-i\omega_p t} + |1\rangle \langle 3| e^{i\omega_p t} \right) - \frac{\hbar\Omega_c}{2} \left( |3\rangle \langle 2| e^{-i\omega t} + |2\rangle \langle 3| e^{i\omega t} \right)$$
(3.6)

A função de onda correspondente para o caso do sistema atômico de três níveis, neste caso pode ser representada por

$$|\Psi(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle + c_3(t)|3\rangle,$$
 (3.7)

enquanto que o correspondente operador densidade é escrito como

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} |c_1(t)|^2 & c_1(t)c_2^*(t) & c_1(t)c_3^*(t) \\ c_2(t)c_1^*(t) & |c_2(t)|^2 & c_2(t)c_3^*(t) \\ c_3(t)c_1^*(t) & c_3(t)c_2^*(t) & |c_3(t)|^2. \end{pmatrix}.$$
(3.8)

Usando a equação de Liouville [Eq.(2.44)]

$$\dot{\hat{\rho}} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{\mathscr{H}}, \hat{\rho}] - \gamma \hat{\rho}, \qquad (3.9)$$

poderemos achar que as equações que governam a evolução das populações para o sistema de três

níveis são dadas por

$$\dot{\rho}_{33} = \frac{i\Omega_p}{2}(\rho_{13}e^{-i\omega_p t} - \rho_{31}e^{i\omega_p t}) + \frac{i\Omega_c}{2}(\rho_{23}e^{-i\omega t} - \rho_{32}e^{i\omega t}) - \gamma\rho_{33}, \qquad (3.10)$$

$$\dot{\rho}_{22} = \frac{i\Omega_c}{2}(\rho_{32}e^{i\omega t} - \rho_{23}e^{-i\omega t}) - \gamma_0\rho_{22} + \frac{\gamma}{2}\rho_{33} + \gamma_0\rho_{11}, \qquad (3.11)$$

$$\dot{\rho}_{11} = \frac{i\Omega_p}{2}(\rho_{31}e^{i\omega_p t} - \rho_{13}e^{-i\omega_p t}) - \gamma_0\rho_{11} + \frac{\gamma}{2}\rho_{33} + \gamma_0\rho_{22}.$$
(3.12)

Da mesma forma, as equações de movimento para as coerências são dadas pelo seguinte conjunto de equações:

$$\dot{\rho}_{31} = \frac{i}{2}\Omega_p e^{-i\omega_p t} (\rho_{11} - \rho_{33}) - i\omega_{31}\rho_{31} + \frac{i}{2}\rho_{21}\Omega_p e^{-i\omega_p t} - \gamma_{31}\rho_{31}, \qquad (3.13)$$

$$\dot{\rho}_{32} = \frac{i}{2}\Omega_c e^{-i\omega t} (\rho_{22} - \rho_{33}) - i\omega_{32}\rho_{32} + \frac{i}{2}\rho_{12}\Omega_p e^{-i\omega_p t} - \gamma_{32}\rho_{32}, \qquad (3.14)$$

$$\dot{\rho}_{21} = i\frac{\Omega_c}{2}\rho_{31}e^{i\omega t} - i\frac{\Omega_p}{2}\rho_{23}e^{-i\omega_p t} - i\omega_{21}\rho_{21} - \gamma_{21}\rho_{21}, \qquad (3.15)$$

onde  $\gamma_{31} = \frac{\gamma + \gamma_0}{2}$ ,  $\gamma_{32} = \frac{\gamma + \gamma_0}{2}$  e  $\gamma_{12} = \frac{\gamma_0 + \gamma_0}{2}$ , respectivamente.

Dado que estas últimas equações diferenciais apresentam coeficientes que dependem do tempo, da mesma forma como foi feito no capítulo anterior, é então desejável que procuremos reescrevêlas através de uma troca de variáveis no intuito de torná-las equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, assim.

$$\rho_{33} = \tilde{\rho}_{33}, \tag{3.16}$$

$$\rho_{22} = \tilde{\rho}_{22}, \tag{3.17}$$

$$\rho_{11} = \tilde{\rho}_{11}, \tag{3.18}$$

$$\rho_{31} = \tilde{\rho}_{31} e^{-i\omega_p t}, \qquad (3.19)$$

$$\rho_{32} = \tilde{\rho}_{32} e^{-i\omega t}, \qquad (3.20)$$

$$\rho_{21} = \tilde{\rho}_{21} e^{-(\omega_p - \omega)t}, \qquad (3.21)$$

com essa mudança de variáveis, obtemos o seguinte conjunto de equações diferenciais para a população

$$\dot{\tilde{\rho}}_{33} = i\frac{\Omega_p}{2}(\tilde{\rho}_{13} - \tilde{\rho}_{31}) + i\frac{\Omega_c}{2}(\tilde{\rho}_{23} - \tilde{\rho}_{32}) - \gamma\tilde{\rho}_{33}, \qquad (3.22)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{22} = i\frac{\Omega_c}{2}(\tilde{\rho}_{32} - \tilde{\rho}_{23}) - \gamma_0\tilde{\rho}_{22} + \frac{\gamma}{2}\tilde{\rho}_{33} + \gamma_0\rho_{11}, \qquad (3.23)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{11} = i\frac{\Omega_p}{2}(\tilde{\rho}_{31} - \tilde{\rho}_{13}) - \gamma_0 \tilde{\rho}_{11} + \frac{\gamma}{2}\tilde{\rho}_{33} + \gamma_0 \rho_{22}, \qquad (3.24)$$

e a coerência do sistema atômico

$$\dot{\tilde{\rho}}_{31} = i\frac{\Omega_p}{2}(\tilde{\rho}_{11} - \tilde{\rho}_{33}) - (i\Delta + \gamma_{31})\tilde{\rho}_{31} + i\frac{\Omega_c}{2}\tilde{\rho}_{21}, \qquad (3.25)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{32} = i\frac{\Omega_c}{2}(\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{33}) - (i\delta + \gamma_{32})\tilde{\rho}_{32} + i\frac{\Omega_p}{2}\tilde{\rho}_{12}, \qquad (3.26)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{21} = i\frac{\Omega_c}{2}\tilde{\rho}_{31} - i\frac{\Omega_p}{2}\tilde{\rho}_{23} - \tilde{\rho}_{21}(i(\Delta - \delta) + \gamma_{21}), \qquad (3.27)$$

onde definimos as dessintonias dos lasers de prova e acoplamento, com suas respectivas transições atômicas, como sendo  $\Delta = \omega_{31} - \omega_p$  e  $\delta = \omega_{32} - \omega$ , respectivamente.

As Eqs.(3.22-3.27) formam um sistema de equações diferenciais de primeira ordem com coeficientes constantes. Além dessas equações, temos também a condição de normalização  $\tilde{\rho}_{11} + \tilde{\rho}_{22} + \tilde{\rho}_{33} = 1$ , que é associado ao fato da população total do sistema ser conservada.

Para estudar as características estacionárias do sistema de três níveis ilustrado na Fig.3.1, nós fazemos

$$\dot{\tilde{\rho}}_{31} = \dot{\tilde{\rho}}_{32} = \dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0. \tag{3.28}$$

Da mesma forma, podemos considerar as características estacionarias das populações. Neste regime temos

$$\dot{\tilde{\rho}}_{33} = \dot{\tilde{\rho}}_{22} = \dot{\tilde{\rho}}_{11} = 0. \tag{3.29}$$

No caso de EIT, onde  $\Omega_c \gg \Omega_p$ , nós podemos considerar que o sistema está inicialmente preparado no estado fundamental  $|1\rangle$ , assim

$$\tilde{\rho}_{33} \simeq \tilde{\rho}_{22} \simeq 0, \tag{3.30}$$

$$\tilde{\rho}_{11} \simeq 1. \tag{3.31}$$

Substituindo as Eq.(3.28,3.30) e a Eq.(3.31), na equação de movimento para as coerências, achamos o seguinte conjunto de equações

$$i\Omega_c\tilde{\rho}_{21} \simeq 2\Gamma_{31}\tilde{\rho}_{31} - i\Omega_p, \qquad (3.32)$$

$$i\Omega_p \tilde{\rho}_{12} \simeq 2\Gamma_{32} \tilde{\rho}_{32}, \tag{3.33}$$

$$i\Omega_c\tilde{\rho}_{31} \simeq 2\Gamma_{21}\tilde{\rho}_{21} + i\Omega_p\tilde{\rho}_{23}, \qquad (3.34)$$

onde definimos  $\Gamma_{31} = \gamma_{31} + i\Delta$ ,  $\Gamma_{32} = \gamma_{32} + i\delta \in \Gamma_{21} = \gamma_{21} + i(\Delta - \delta)$ , respectivamente.

Dado que nós estamos considerando que a população está inicialmente preparada no estado fundamental  $|1\rangle$ , isto é  $\tilde{\rho}_{33} = \tilde{\rho}_{22} \simeq 0$ , então a coerência entre os níveis  $|3\rangle \in |2\rangle$  pode ser considerada também pequena, isto junto com o fato que  $\Omega_c \gg \Omega_p$ , então o termo  $i\Omega_p\tilde{\rho}_{23}$ , na Eq.(3.34) pode ser desconsiderado.

Com essas considerações, e dado que as propriedades de dispersão e absorção do meio experimentada pelo feixe de prova são dadas pela parte real e imaginária da coerência  $\tilde{\rho}_{31}$ , vamos em seguida substituir a Eq.(3.34) na Eq.(3.32), com o qual achamos que a coerência entre os níveis  $|3\rangle \in |1\rangle$  é dada por

$$\tilde{\rho}_{13} = \frac{2\Omega_p(\delta - \Delta + i\gamma_{21})}{4\gamma_{21}\gamma_{31} + 4\Delta(\delta - \Delta) + \Omega_c^2 + 4i(\gamma_{21}\Delta + \gamma_{31}(\Delta - \delta))}.$$
(3.35)

#### 3.4 Absorção e dispersão no meio com EIT

Para determinar as propriedades óticas do meio EIT como medidas pelo feixe de prova, nós precisamos de uma expressão para a susceptibilidade linear como função da frequência do laser de prova. Tal como foi feito no capítulo 2, esta susceptibilidade esta diretamente relacionada à coerência da transição atômica  $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ , e é dada pela seguinte expressão

$$\chi = \frac{N d_{31}^2}{\varepsilon_0 \hbar \Omega_p} \tilde{\rho}_{31}. \tag{3.36}$$

Para o caso quando o campo de acoplamento está na ressonância ( $\delta = 0$ ) com a transição atômica  $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ , podemos substituir a Eq.(3.35) na Eq.(3.36) e encontrar que a parte real ( $\chi_r$ ) e imaginária ( $\chi_i$ ) da susceptibilidade complexa,  $\chi = \chi_r + i\chi_i$ , são dadas por

$$\chi_r = \frac{2Nd_{31}^2}{\varepsilon_0\hbar} \frac{\Delta(4\gamma_{21}^2 + 4\Delta^2 - \Omega_c^2)}{(4\gamma_{21}\gamma_{31} - 4\Delta^2 + \Omega_c^2)^2 + 16\Delta^2(\gamma_{21} + \gamma_{31})^2},$$
(3.37)

$$\chi_i = \frac{2Nd_{31}^2}{\varepsilon_0\hbar} \frac{4\gamma_{31}(\gamma_{21}^2 + \Delta^2) + \gamma_{21}\Omega_c^2}{(4\gamma_{21}\gamma_{31} - 4\Delta^2 + \Omega_c^2)^2 + 16\Delta^2(\gamma_{21} + \gamma_{31})^2}.$$
(3.38)

A susceptibilidade linear, como mostrado na Fig.3.2 exibe um certo número de características importantes do fenômeno EIT. Primeiro de tudo reconhecemos que na condição de ressonância  $\Delta = 0$ , tanto a parte real e como imaginária da susceptibilidade são iguais a zero no limite quando a taxa de decaimento da coerência  $\tilde{\rho}_{21}$  é zero, ou seja  $\gamma_{21} = 0$ . Este é o chamado limite ideal da EIT, uma vez que esta condição não é atingida na natureza, dado que a taxa de decoerência do estado fundamental  $|2\rangle$  é sempre diferente de zero.

Como podemos observar na Fig.3.2(a), devido à presença do campo de acoplamento, o campo de prova ressonante ( $\Delta = 0$ ) experimenta um meio totalmente transparente deixando de ser absorvido. Nesta situação o campo de acoplamento forte causa um desdobramento tanto do nível excitado quanto no nível fundamental  $|2\rangle$  devido ao deslocamento Stark, levando o átomo a uma configuração do átomo vestido.



Figura 3.2: (a) Parte imaginaria e (b) parte real da susceptibilidade complexa de um sistema atômico de três níveis na configuração  $\Lambda$  sob a condição de EIT, para  $\gamma_{21} = 0$ .

Quando a intensidade do laser de acoplamento for tal que a separação entre os níveis vestidos do estado excitado  $|3\rangle$ , devido ao deslocamento Stark, for menor que a largura de linha, isto é  $\Omega_c < \gamma$ , o feixe de prova experimentará dois caminhos indistinguíveis para a transição  $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ . Nesta situação ocorre o surgimento de uma interferência quântica destrutiva entre os dois caminhos possíveis, com o qual a absorção do campo de prova é completamente cancelada. Essa interferência destrutiva é máxima quando o campo de prova esta na ressonância com sua respectiva transição.

No entanto em sistemas atômicos reais, a taxa de decaimento da transição proibida  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  é diferente de zero devido a colisões atômicas e tempo de trânsito. Todas as características importantes de EIT permanecem observáveis mesmo quando  $\gamma_{21} \neq 0$ , desde que a frequência de Rabi do campo de acoplamento satisfaça a seguinte desigualdade,

$$\sqrt{\gamma_{31}\gamma_{21}} \ll |\Omega_c| \ll \gamma_{31}. \tag{3.39}$$

Na Fig.3.3 é mostrado a parte imaginaria da susceptibilidade linear  $\chi$ , para dois diferentes valores da taxa de decaimento da coerência  $\tilde{\rho}_{21}$ , isto é:  $\gamma_{21} = 0, 1\gamma_{31}$  [Fig.3.3(a)], e  $\gamma_{21} = 10\gamma_{31}$ , [Fig.3.3(b)]. Nestes gráficos tomamos  $\Omega_c = 0, 5\gamma_{31}$ . Como podemos observar na Fig.3.3(a) o perfil de absorção ainda mostra um pequeno cancelamento da absorção do campo de prova na condição da ressonância  $(\Delta = 0)$ , desde que a desigualdade, dada na Eq.(3.39) é ainda satisfeita. Já para o caso em que



Figura 3.3: (a) Parte imaginaria e (b) parte real da susceptibilidade para taxas de decaimento da transição  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  diferentes de zero. (a)  $\gamma_{21} = 0, 1\gamma_{31}$ ; (b) $\gamma_{21} = 10\gamma_{31}$ . Em todos os casos  $\gamma_{31} = 1$  e  $\Omega_c = 0, 5\gamma_{31}$ .

 $\gamma_{21} \gg \gamma_{31}$ , como mostrado na Fig.3.3(b), o minimo de absorção está ausente. Neste limite a interferência construtiva aumenta o coeficiente de absorção, diminuindo a transmissão do campo de prova. Isto implica que os efeitos EIT podem ser observados em gases atômicos densos, ou mesmo em sólidos, desde que haja uma transição metaestável com uma taxa de decaimento relativamente grande, a qual satisfaça  $\gamma_{21} \ll \gamma_{31}$ .

Finalmente como podemos observar na Fig.3.2(b) para o caso de EIT ideal, a curva de dispersão apresenta uma variação muito rápida em torno da ressonância, quando comparada com o caso de átomos de dois níveis, Fig.2.2(b). Em módulo esta curva tem uma inclinação muito maior que a observada para o caso de átomos de dois níveis. Isto conduz via a Eq.(3.40)

$$v_{gr} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}},\tag{3.40}$$

a velocidades de grupo muitos pequenas associadas a este fenômeno, tal como demostrado experimentalmente por Hau e colaboradores [14], onde os autores reportarem velocidades de grupo entorno de 17m/s.

Associado com a redução da velocidade de pulsos de luz é também observado o armazenamento de luz e consequentemente a informação nela contida. Num artigo [24] publicado na revista Nature no ano do 2001 por Liu e colaboradores, se confirmo experimentalmente que é possível armazenar a informação ótica em um meio atômico, e posteriormente recuperalá utilizando o fenômeno de EIT. Outros experimentos associados com a redução de velocidades de pulsos de luz, como armazenamento de imagens também reportados [107, 108]

#### 3.5 Não-linearidades Kerr gigantes

Em 1678, Christiaan Huygens estipulado que '... feixes de luz viajando em uma mesma região do espaço ou um meio não tem qualquer efeito entre si, tal que luz não pode ser utilizada para controlar luz'. Esta característica essencial da luz no espaço livre significa que as interações entre os campos são impossíveis de ocorrer sem o uso de um meio não absorvente. Com a demostração do laser por Maiman no ano de 1960 [109], começou um esforço gigantesco dirigido ao estudo e desenvolvimento de fontes de luz laser intensos e de meios não-lineares para controlar luz com luz.

Tal como foi mostrado no capítulo anterior, para o caso da ótica convencional (isto é linear), a polarização induzida no meio depende linearmente da amplitude do campo elétrico, assim

$$\vec{P}(t) = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \tag{3.41}$$

Já para altas intensidades de luz, podemos esperar que a relação entre a polarização elétrica e a intensidade do campo elétrico torna-se não linear, isto é, a relação dada na Eq.(3.41) pode agora ser escrita como uma série de potências na amplitude do campo elétrico E(t). Considerando somente escalares, teremos que

$$P(t) = \chi^{(1)}E(t) + \chi^{(2)}E^2(t) + \chi^{(3)}E^3(t) + \dots,$$
(3.42)

onde  $\chi^{(2)}$ ,  $\chi^{(3)}$  são as susceptibilidades não-lineares de segunda ordem, terceira ordem, etc. Na presença de campos laser intensos, muitos materiais mostram não-linearidades as quais podem

#### 3.5. Não-linearidades Kerr gigantes

causar que o perfil do índice refração siga o perfil de intensidade do campo laser aplicado. O efeito Kerr, o qual está relacionado à susceptibilidade de terceira ordem,  $\chi^{(3)}$ , é um efeito ótico que ocorre quando um feixe de luz intenso propaga-se através de cristais, vidros, mas também em outros meios, tais como gases. Sua origem física é a polarização não-linear gerada no meio, que por si só modifica as propriedades de propagação da luz. O efeito Kerr é o efeito de uma resposta não-linear ocorrendo instantaneamente o qual pode ser descrito como uma modificação no índice de refração. Em particular, o índice de refração para feixes laser muito intensos é modificado de acordo a

$$n = n_0 + n_2 I, (3.43)$$

onde  $n_0$  é o índice de refração linear,  $n_2$  é o índice de refração não-linear e I é a intensidade ótica. A não-linearidade Kerr cruzada, também chamado modulação de fase cruzada (XPM, sigla em ingles para "Cross-Phase Modulation"), é a mudança de fase de um feixe de luz causada pela interação com outro feixe num meio não-linear, especificamente um meio Kerr. Estas não-linearidades Kerr cruzadas tem recebido muita atenção, uma vez que podem encontrar diversas aplicações, como detecção não destrutiva de estados de Bell [29,30], e portas de fase quânticas para operações lógicas quânticas [37]. Nestas aplicações, susceptibilidades não-lineares grandes são desejáveis para baixas potências de bombeio. Ao mesmo tempo, a susceptibilidade linear deve ser a mais baixa possível para todos os campos que participam no processo não-linear para minimizar a absorção. Estes objetivos são, no entanto, incompatíveis em dispositivos convencionais.

A observação destes efeitos óticos não-lineares sempre esteve associada a altas intensidades de luz, com campos contendo uma grande quantidade de fótons. Usando a transparência induzida eletromagneticamente, Schmidt e Imamoglu no ano 1996 mostraram que é teoricamente possível alcançar não-linearidades Kerr gigantes em um sistema atômico de 4 níveis na denominada configuração do tipo N. Nesta tese, a qual constitui um trabalho original, nós exploramos este sistema atômico para estudar efeitos óticos não-lineares transversais a baixas intensidades de luz.

O sistema usado por Schmidt e Imamoglu para gerar não-linearidades Kerr gigantes, é mostrado



Figura 3.4: (a) Sistema atômico de 4 níveis para gerar não-linearidades gigantes. Nesta figura,  $\Omega_s$ ,  $\Omega_c \in \Omega_p$  são as frequência de Rabi dos laser sinal, acoplamento e prova respectivamente.  $\Delta \omega_s$  é a dessintonia do campo sinal com a transição atômica  $|2\rangle \rightarrow |4\rangle$ .  $\gamma_3 \in \gamma_4$  são as taxas de decaimento. (b) sistema atômico na configuração cascata de um átomo de 3 níveis convencional.

na Fig.3.4(a). O elemento principal aqui é novamente o subsistema EIT tipo  $\Lambda$ , consistindo dos níveis  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle \in |3\rangle$ . Os níveis  $|2\rangle \in |3\rangle$  são coerentemente acoplados por um laser de acoplamento com frequência de Rabi  $\Omega_c$ , o qual é assumido como não perturbativo, permanece inalterado, e pode ser tratado classicamente.

O estado  $|2\rangle$  é assumido como sendo metaestável de modo que a taxa de decaimento deste estado pode ser desprezada. Além disso, um campo sinal está presente, o qual tem uma frequência Rabi  $\Omega_s$  e é dessintonizado da transição  $|2\rangle \rightarrow |4\rangle$  por  $\Delta \omega_s$ . Esta é a peça chave do esquema proposto pelos autores: nós podemos entender o aumento previsto da não-linearidade Kerr, recordando a dispersão acentuada obtida em transparência para  $\Omega_c \ll \gamma_3$ . Neste limite, uma pequena alteração na dessintonia de dois fótons que é causada, por exemplo, por uma mudança na energia do estado  $|2\rangle$ , pode dar origem a um aumento drástico de  $Re[\chi]$ , o qual é experimentado pelo feixe de prova. Esta mudança na dispersão do meio pode ser observada na curva pontilhada na Fig.3.5 que tem os mesmo valores da curva contínua, mas com a presença de uma pequena perturbação aplicada no nível  $|2\rangle$ . Nesta situação podemos compreender o papel do campo sinal como sendo criar uma mudança Stark-ac no estado fundamental  $|2\rangle$ , conduzindo assim a uma grande mudança no índice de refração na frequência do feixe de prova.



Figura 3.5:  $Re[\chi]$  em função da dessintonia do feixe de prova para  $\gamma_{21} = 0$  e  $\Omega_c = \gamma_{31}$ , com  $\gamma_{31} = 1$ . A diferença entre a curva continua e a curva pontilhada, é que a ultima apresenta o efeito do feixe adicional.

A não linearidade de modulação de fase cruzada entre o campo sinal e o campo de prova, o qual é aplicado na transição  $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ , foi calculada pelos autores assumindo condições perturbativas para  $\Omega_p$ . Destes cálculos, a susceptibilidade de terceira ordem é encontrada como sendo

$$\chi_{xpm}^{(3)} = \frac{N|\mu_{13}|^2|\mu_{24}|^2}{2\varepsilon_0\hbar^3} \left[ \frac{1}{\Omega_c^2 \Delta \omega_s} + i \frac{\gamma_4}{2\Omega_c^2 \Delta \omega_s^2} \right],\tag{3.44}$$

Para avaliar a importância do resultado mostrado na Eq.(3.44), é ilustrativo compará-lo com a susceptibilidade Kerr não-linear ( $\chi^{(3)}_{3-level}$ ) de um sistema atômico padrão representado na Fig.3.4(b). Para este sistema, consistindo de um estado fundamental  $|a\rangle$ , um estado intermediário  $|b\rangle$  e um estado excitado  $|c\rangle$ , encontramos

$$Re[\chi_{3-level}^{(3)}] = \frac{|\mu_{ab}|^2 |\mu_{bc}|^2 N}{2\varepsilon_0 \hbar^3} \frac{1}{\Delta \omega_a^2 \Delta \omega_s},$$
(3.45)

em ambas susceptibilidades  $(\chi_{xpm}^{(3)} e \chi_{3-level}^{(3)})$  temos que  $\mu_{ij}$  denota os elementos de matriz de dipolo elétrico para uma dada transição,  $\Delta \omega_i$  denota a dessintonia do campo com respeito à transição atômica  $|i\rangle \rightarrow |j\rangle$  e N a densidade atômica.

Ao examinar a dependência na dessintonia da frequência para  $Re[\chi^{(3)}]$  em ambos esquemas

mostrados na Fig.3.4, pode-se observar que a dessintonia do nível intermediário para o sistema de três níveis padrão é substituída pela frequência de Rabi do laser de acoplamento no sistema de quatro níveis proposto pelos autores. Para o caso do sistema de três níveis descrito na Fig.3.4(b), pode-se aumentar a não-linearidade através da diminuição da dessintonia, especialmente em relação ao estado intermediário  $|b\rangle$ , a qual, como pode ser observado na Eq.(3.45), aparece quadrática em  $Re[\chi_{3-level}^{(3)}]$ . No entanto, isto pode fazer com que haja um aumento muito grande da absorção da onda incidente com frequência  $\omega_a$ . Já para o caso do sistema de quatro níveis, o valor da frequência de Rabi do campo de acoplamento é somente limitado pela condição de EIT ( $\Omega_c^2 > \gamma_2 \gamma_3$ ), portanto  $\Omega_c$  pode ser escolhido para ser muito menor que  $\gamma_3$ , desde que  $\gamma_2 \approx 0$ . Isto por sua vez, implica que a magnitude da não-linearidade Kerr pode ser ordens de magnitude maior neste último caso. Esta é a essência do efeito Kerr gigante, proposto por Schmidt e Imamoglu. Finalmente podemos mencionar que a observação de não-linearidades Kerr gigantes a baixas intensidades de luz foram reportadas experimentalmente no ano do 2003, por Hoonsoo Kang e Yifu Zhu [39].

Coeficientes de XPM,  $n_2 = 2 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{W}$  foram observadas em células de vapor de átomos de <sup>87</sup>Rb [43]. Este valor é alto se comparado com valores obtidos para cristais  $(10^{-16} - 10^{-14} \text{ cm}^2/\text{W})$ , vidros  $(10^{-16} - 10^{-15} \text{ cm}^2/\text{W})$  e semicondutores  $(10^{-14} - 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{W})$  [105].

## Capítulo 4

# Emissão cônica induzida eletromagneticamente

Na ultima seção do capítulo anterior mostramos que usando as propriedades notáveis da transparência induzida eletromagneticamente, não-linearidades óticas gigantes podem ser obtidas perturbando o sistema atômico EIT tipo  $\Lambda$ . Isto é feito, introduzindo um campo fraco adicional, denominado campo sinal, o qual está na ressonância com a transição atômica  $|2\rangle \rightarrow |4\rangle$ . A observação desta não-linearidade gigante pode ser entendida devido à perturbação causada pelo campo sinal, o qual cria uma mudança Stark-ac no estado  $|2\rangle$ , conduzindo a uma mudança muito grande no índice de refração na frequência do laser de prova.

Não-linearidades óticas do tipo Kerr desempenham um papel fundamental no campo da ótica não-linear [105]. Normalmente não-linearidades Kerr são bastantes baixas devido a grandes dessintonias, as quais enfraquecem a não-linearidade, e são necessárias para evitar absorção. Portanto, efeitos não-lineares práticos requerem campos óticos intensos, mesmo em vapores atômicos, o qual pode apresentar uma grande resposta não-linear perto de uma ressonância atômica. Quando um feixe laser intenso propaga-se através de um meio não-linear, efeitos transversais, os quais mudam o perfil espacial do feixe, podem ser observados. Emissão cônica (CE, sigla em inglês para "Conical emission") é um desses efeitos não-lineares transversais, e tem sido objeto de extenso estudo [80].

Neste capítulo, o qual corresponde a nossa primeira contribuição original, prevemos teoricamente a ocorrência de CE com excitação de campos fracos em um meio atômico sob EIT. Nós exploramos



Figura 4.1: Um átomo de quatro níveis aberto na configuração N interagindo com três feixes laser: sinal  $(\Omega_s)$ , acoplamento  $(\Omega_c)$  e prova  $(\Omega_p)$ . O campo sinal é dessintonizado por  $\delta$  da transição atômica  $|2\rangle \rightarrow |4\rangle$ , entanto que  $\gamma_3$ ,  $\gamma_4$  são as taxas de decaimento dos estados  $|3\rangle \in |4\rangle$  respectivamente.

as não-linearidades gigantes que um vapor atômico pode exibir sob EIT para induzir uma mudança de fase (XPM) no feixe de prova que varia radialmente. No campo distante, uma estrutura de anéis pode ser induzida no perfil transversal do feixe de prova, por um feixe sinal com intensidades abaixo do nível de saturação da linha ( $\approx 5 \text{ mW/cm}^2$  para o vapor de rubídio).

# 4.1 Equações de amplitude de probabilidade acopladas para o sistema atômico

A Fig.4.1 mostra o modelo atômico. Este consiste de um átomo de quatro níveis aberto interagindo com três campos laser de onda continua (cw). Os níveis  $|3\rangle \in |4\rangle$  são os estados excitados que naturalmente decaem com taxas  $\gamma_3 \in \gamma_4$ , respectivamente. O nível  $|1\rangle$  é o estado fundamental, e o estado  $|2\rangle$  é um estado metaestável com uma taxa de decaimento insignificante ( $\gamma_2 \approx 0$ ). As transições  $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ ,  $|2\rangle \rightarrow |3\rangle \in |2\rangle \rightarrow |4\rangle$ , são de dipolo elétrico permitidas, enquanto as transições  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle \in |3\rangle \rightarrow |4\rangle$ , são proibidas por dipolo elétrico. Os níveis  $|1\rangle \in |3\rangle$  estão ligados pelo feixe de prova com frequência de Rabi  $\Omega_p$  e comprimento de onda  $\lambda$ , enquanto a transição  $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$  é excitada pelo feixe de acoplamento (frequência de Rabi  $\Omega_c$ ). Ambos os feixes de acoplamento e prova estão em ressonância com suas respectivas transições, e EIT do feixe de prova ocorre se  $\Omega_c \gg \Omega_p$ . O feixe sinal (frequência de Rabi  $\Omega_s$ ) é dessintonizado da transição  $|2\rangle \rightarrow |4\rangle$  por  $\delta = \omega_{24} - \omega$ , onde  $\omega_{24}$  é a frequência da transição atômica e  $\omega$  é a frequência ótica do feixe sinal.

Do ponto de vista experimental, nosso sistema se aplica, por exemplo, ao caso da excitação de átomos frios de <sup>87</sup>Rb, confinados em uma armadilha magneto-ótica, cujo tempo de vida do nível excitado é de aproximadamente de 27 ns e com um estado fundamental  $|2\rangle$  com uma taxa de decaimento de  $\gamma_{21} \sim 10^4 \text{ s}^{-1}$ . Lasers de diodo podem fornecer as potências necessárias para os laser sinal, acoplamento e prova, respectivamente. Por exemplo, para o subsistema EIT tipo  $\Lambda$ , um campo de prova fraco e o laser de acoplamento forte são empregados para excitar a transição  $D_1$ de  $|F = 1\rangle \equiv |1\rangle \leftrightarrow |F = 2\rangle \equiv |3\rangle$  e  $|F = 2\rangle \equiv |2\rangle \leftrightarrow |F' = 2\rangle \equiv |3\rangle$  respectivamente. A XPM ou a equivalente não-linearidade Kerr é realizada através da aplicação do campo sinal que excita a transição  $|2\rangle \leftrightarrow |F' = 3\rangle \equiv |4\rangle$  [44]. A estrutura da transição hiperfina da linha  $D_1$  de <sup>87</sup>Rb na qual pode ser implementado nosso esquema é mostrado na Fig.4.2.

A interação entre o sistema atômico e os três campos laser mostrado na Fig. 4.1 é descrita pelo hamiltoniano

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_a - \vec{d} \cdot \vec{E}, \tag{4.1}$$

onde o hamiltoniano do átomo livre é dado por

$$\hat{\mathscr{H}}_{a} = \sum_{n=1}^{4} \hbar \omega_{n} |n\rangle \langle n|.$$
(4.2)

Os três campos laser interagindo com o sistema atômico são dados respectivamente por

$$E(t) = E_p e^{-i\omega_p t} + E_c e^{-i\omega_c t} + E_s e^{-i\omega_s t} + c.c,$$
(4.3)

onde c.c indica o complexo conjugado. A equação de onda do sistema atômico de 4 níveis, neste caso pode ser escrita como

$$|\psi(\vec{r},t)\rangle = b_1(t)|1\rangle + b_2(t)|2\rangle e^{-i(\omega_p - \omega_c)t} + b_3(t)|3\rangle e^{-i\omega_p t} + b_4(t)|4\rangle e^{-i(\omega_p + \omega_s - \omega_c)t},$$
(4.4)



Figura 4.2: Estrutura da transição hiperfina da linha  $D_1$  de <sup>87</sup>Rb com quebras de frequências entre os níveis hiperfinos.

onde as funções base  $|i\rangle,\,(i=1,2,3,4)$ são as autofunções de  $\hat{\mathscr{H}}_a,$  determinada por

$$\hat{\mathscr{H}}_a|i\rangle = E_i|i\rangle,\tag{4.5}$$

aqui  $\omega_i$  estão relacionadas com os autovalores da energia de acordo com,  $E_i = \hbar \omega_i$ . Da equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(\vec{r},t)\rangle}{\partial t} = \hat{\mathscr{H}} |\psi(\vec{r},t)\rangle, \qquad (4.6)$$

substituindo as Eqs. (4.2-4.4) e dado que os auto-estados de energia da função de onda  $|\psi(\vec{r},t)\rangle$ , têm paridade bem definida [Eq.(2.49)], os elementos na diagonal principal do operador de dipolo elétrico são iguais a zero, isto é,  $d_{11} = d_{22} = d_{33} = d_{44} = 0$ , assim como também as transições proibidas por dipolo,  $d_{12} = d_{12}^* = d_{14} = d_{41}^* = d_{34} = d_{43}^* = 0$ .

Definindo a frequência de Rabi para os laser de prova, acoplamento e sinal como,  $\Omega_p = 2\mu_{13}E_p/\hbar$ ,  $\Omega_c = 2\mu_{23}E_c/\hbar \ e \ \Omega_s = 2\mu_{24}E_s/\hbar$ , podemos achar que a evolução temporal do sistema atômico é dada pelo seguinte conjunto de equações de movimento para as amplitudes de probabilidades dos estados atômicos, dentro da aproximação de onda girante (RWA), estas são dadas por:

$$\dot{b}_1 = \frac{i}{2}\Omega_p b_3, \tag{4.7}$$

$$\dot{b}_2 = -i\Delta\omega_{21}b_2 + \frac{i}{2}\Omega_c b_3 + \frac{i}{2}\Omega_s b_4,$$
(4.8)

$$\dot{b}_3 = \frac{i}{2}\Omega_p b_1 + \frac{i}{2}\Omega_c b_2 - i(\Delta\omega_{31} - \frac{i}{2}\gamma_3)b_3, \qquad (4.9)$$

$$\dot{b}_4 = \frac{i}{2}\Omega_s b_2 - i(\delta - \frac{i}{2}\gamma_4)b_4, \qquad (4.10)$$

neste conjunto de equações adicionamos fenomenologicamente os decaimentos dos estados excitados,  $\gamma_3 \in \gamma_4$  no sistema atômico, fazendo  $\Delta \omega_{13} \rightarrow \Delta \omega_{13} - i\gamma_3 \in \delta \rightarrow \delta - i\gamma_4$ .

Vamos a considerar que o laser de prova está na ressonância com a transição atômica  $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ ,  $(\Delta\omega_{31} = 0)$ , e que este laser é muito fraco, de tal modo que a população do sistema atômico é preparada inicialmente no estado fundamental  $|1\rangle$ , isto é,  $b_1 \approx 1$ . Dado que EIT requer ressonância de dois fótons, na Eq.(4.8) escolhemos  $\Delta\omega_{21} = \omega_{21} + \omega_c - \omega_p = 0$ . Destas considerações podemos resolver o conjunto de Eqs.(4.7-4.10) no regime perturbativo, considerando só até primeira ordem para o laser de prova e para todas as ordens para os campos de acoplamento e sinal. No regime de
estado estacionário, obtemos que a amplitude de probabilidade para o estado excitado,  $b_3$ , é dada por:

$$b_3 = \frac{i\Omega_p \Omega_s^2}{2\Omega_c^2 \Gamma_4 + 2\Gamma_3 \Omega_s^2},\tag{4.11}$$

onde temos definido  $\Gamma_3 = \gamma_3/2$  e  $\Gamma_4 = i\delta + \gamma_4/2$ .

A polarização atômica induzida na frequência do campo de prova é dada por

$$P_{13} = Nd_{13}b_1^*b_3, (4.12)$$

onde N é a densidade atômica. Escrevendo a polarização, Eq.(4.12) como

$$P_{13} = \varepsilon_0 \chi E_p, \tag{4.13}$$

onde  $\chi$  é a susceptibilidade atômica e  $E_p$  é a amplitude do campo de prova. Da igualdade das Eq.(4.12) e Eq.(4.13) podemos encontrar que a susceptibilidade é dada por

$$\chi = \frac{Nd_{13}b_{1}^{*}b_{3}}{\varepsilon_{0}E_{p}},$$
  
=  $\frac{2Nd_{13}^{2}b_{1}^{*}b_{3}}{\varepsilon_{0}\hbar\Omega_{p}},$  (4.14)

onde substituímos  $\Omega_p = 2d_{13}E_p/\hbar$ . Ao substituir as amplitudes de probabilidades,  $b_1$  e  $b_3$ , obtemos que a parte real e imaginaria da susceptibilidade são dadas por

$$Re[\chi] = \frac{4Nd_{13}^2\Omega_s^2}{\varepsilon_0\hbar} \frac{\Omega_c^2\delta}{4\Omega_c^4\delta^2 + (\Omega_c^2\gamma_4 + \Omega_s^2\gamma_3)^2},$$
(4.15a)

$$Im[\chi] = \frac{2Nd_{13}^2\Omega_s^2}{\varepsilon_0\hbar} \frac{\Omega_c^2\gamma_4 + \Omega_s^2\gamma_3}{4\Omega_c^4\delta^2 + (\Omega_c^2\gamma_4 + \Omega_s^2\gamma_3)^2}.$$
 (4.15b)

Ao derivar as Eqs.(4.15), nenhuma aproximação foi feita com respeito à magnitude de  $\Omega_s$ ,  $\Omega_c$  ou  $\delta$ . Para apresentar os resultados de uma forma adimensional, definimos  $R = \Omega_s / \Omega_c$ ,  $\Gamma = \gamma_4 / \gamma_3$  e

 $\Delta = \delta / \gamma_3.$ 

$$Re[\chi] = 2K \frac{R^2 \Delta}{4\Delta^2 + (\Gamma + R^2)^2},$$
 (4.16a)

$$Im[\chi] = K \frac{\Gamma R^2 + R^4}{4\Delta^2 + (\Gamma + R^2)^2}.$$
 (4.16b)

No limite de  $\Delta \gg \Gamma$ , R as Eqs. (4.16) podem ser simplificadas para

$$Re[\chi] = K \frac{R^2}{2\Delta}, \qquad (4.17a)$$

$$Im[\chi] = K \frac{\Gamma R^2 + R^4}{4\Delta^2}$$
(4.17b)

onde temos definido  $K = 2Nd_{13}^2/\hbar\varepsilon_0\gamma_3$ . Na ausência do feixe sinal, (R=0) a susceptibilidade atômica  $\chi$  é nula uma vez que o campo de acoplamento torna o átomo transparente para o campo de prova.

## 4.2 Propagação do feixe de prova

Dado que a interação do átomo com o campo induz uma polarização que oscila na frequência do campo de prova, é conveniente expressar a polarização da seguinte forma

$$P = P_{13}(z,\rho)e^{-i\omega_p t + ik_p z} + c.c, \qquad (4.18)$$

onde c.c é o complexo conjugado e  $P_{13}$  é dado pela Eq.(4.13), é amplitude da polarização variando lentamente. A propagação do feixe de prova através da amostra atômica é descrita pela equação de onda de Maxwell, Eq.(2.20), com a polarização atômica atuando como fonte de excitação. Na aproximação do envelope variando lentamente, temos

$$-i\frac{1}{2k_p}\nabla_T^2 E_P + \frac{\partial E_p}{\partial z} = i\frac{k_p}{2\varepsilon_0}P_p, \qquad (4.19)$$



Figura 4.3: Formação de anéis no perfil transversal do feixe de prova induzida pelo feixe sinal, logo depois de atravessar a mostra atômica de comprimento L.

onde  $\nabla_T$  é gradiente transversal,  $k_p = 2\pi/\lambda$  é o número de onda,  $E_p \equiv E_p(z, \rho)$  e  $P_p \equiv P_{13}(z, \rho)$ . Substituindo a Eq.(4.13), junto com as Eqs.(4.17), na Eq.(4.19), está equação é agora escrita como:

$$-i\frac{1}{2k_p}\nabla_T^2 E_P + \frac{\partial E_p}{\partial z} = i\frac{4Nd_{13}^2\pi}{\lambda\gamma_3\hbar\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{4\Delta} + \frac{i}{2}\frac{\Gamma R^2 + R^4}{4\Delta^2}\right)E_p,\tag{4.20}$$

Suponhamos que o feixe de prova se propaga ao longo da direção z e entra num meio atômico estendido de comprimento L em z = 0, tal como esquematicamente mostrado na Fig.4.3. Assumindo que o campo de prova incidente na amostra seja uma onda plana com perfil de intensidade do tipo gaussiano, isto é

$$E_p(z=0,\rho,t) = E_0(\rho)e^{i(k_p z - \omega t)},$$
(4.21)

 $\operatorname{com}$ 

$$E_0(\rho) = E_p^0 e^{-\rho^2/a^2}; (4.22)$$

 $E_p^0$  é a amplitude de campo de prova de entrada e a o diâmetro do feixe.

Também assumimos que o campo de acoplamento tem um perfil transversal uniforme ou um diâmetro de feixe muito maior que o diâmetro do feixe de prova. Para simplificar a notação, nós escolhemos o diâmetro do feixe de prova a, como a unidade para a coordenada radial  $\rho$  e  $z_0$  como a unidade para a coordenada longitudinal z, onde  $z_0 = 1/\alpha_0 = \hbar \varepsilon_0 \gamma_3 \lambda / 4N \pi d_{13}^2$  é o comprimento de absorção de um fóton de prova na ausência do campo de acoplamento. Portanto, numa forma

adimensional a Eq.(4.20) torna-se

$$-i\frac{1}{\aleph}\nabla_T^2 E_p + \frac{\partial E_p}{\partial z'} = (-\alpha/2 + i\sigma)E_p, \qquad (4.23)$$

onde  $\alpha = (\Gamma R^2 + R^4)/4\Delta^2$  é o coeficiente de absorção de dois fótons;  $\sigma = R^2/4\Delta$  é proporcional à modulação de fase cruzada induzida pelo feixe sinal no feixe de prova;  $\aleph = 4\pi a^2/\lambda z_0$  é o número de Fresnel do feixe de prova.

O termo transversal pode ser eliminado da Eq.(4.23) se  $\aleph \gg 1$ . Por exemplo, para uma amostra de vapor de rubídio, com parâmetros típicos como: diâmetro do feixe de prova de a = 1 mm,  $\gamma_3/2\pi = 5.8$  MHz,  $\aleph \approx 3 \times 10^{12}$  cm<sup>-3</sup> e  $d_{13} = 2.5 \times 10^{-29}$  Cm, então o número de Fresnel para o feixe de prova calculado foi de aproximadamente,  $\aleph \approx 1.6 \times 10^6$ . Sob esta condição, difração do feixe de prova dentro da amostra pode ser desprezado, e sua propagação na amostra pode ser descrita por

$$\frac{\partial E_p}{\partial z'} = (-\alpha/2 + i\sigma)E_p. \tag{4.24}$$

A Eq.(4.24) é facilmente resolvida, tal que agora o campo de prova no plano de saída da amostra atômica é dado por:

$$E_p(\rho) = E_0(\rho)e^{-\alpha\ell/2 + i\phi},$$
 (4.25)

onde a profundidade ótica  $\ell$  é dada pela seguinte equação

$$\ell = \alpha_0 L = L/z_0. \tag{4.26}$$

Na ausência do fenômeno de EIT, pela Eq.(2.88), a intensidade de luz transmitida pelo meio atômico é proporcional a  $\exp(-\ell)$ . Como o coeficiente de absorção de dois fótons  $\alpha \ll 1$ , sob EIT, a intensidade de luz transmitida  $[\exp(-\alpha \ell/2)]$  é muito maior.

Da Eq.(4.25) podemos observar que a medida que o feixe de prova atravessa a amostra atômica de profundidade ótica  $\ell$ , este adquire uma fase  $\phi = \sigma \ell$  do feixe sinal através de XPM. No limite de R≪ 1, mudanças de fase de XPM podem ser induzidos no feixe de prova com intensidade do campo sinal arbitrariamente fraca para comprimentos de interação grandes, tais como os encontrados em células de vapor atômico. O sistema é limitado somente pela pequena absorção não-linear dada por  $\alpha$  [38]. Para comprimentos de interação curtos, consistentes com armadilhas magneto-óticas, uma alta XPM pode ser obtida para R≳ 1, à custa de uma maior dessintonia do feixe sinal de modo a manter a absorção de feixe de prova a mais baixa possível. Se a taxa de decoerência do estado fundamental é desprezível ( $\gamma_2 \approx 0$ ), ambos feixes, sinal e acoplamento podem ainda ser fracos.

Se o feixe sinal, propagando-se colinear com o feixe de prova, também tem um perfil do tipo gaussiano de largura idêntica à do feixe de prova, então a fase induzida no feixe de prova por XPM será

$$\phi = \phi(\rho) = \phi_0 e^{-2\rho^2}, \tag{4.27}$$

onde  $\phi_0 = R^2 \ell / 4\Delta$  é a mudança de fase pico de XPM. Por conseguinte, o feixe sinal induz uma mudança de fase no feixe prova que varia com a distância transversal  $\rho$  do eixo ótico do feixe de prova. A máxima fase de XPM  $\phi_0$  transmitida para o campo de prova depende de três parâmetros: a razão da frequência de Rabi sinal-acoplamento R, a dessintonia sinal  $\Delta$  e a profundidade ótica  $\ell$  do meio atômico. Em módulo, a mudança de fase é a mesma para dessintonias sinal positivas e negativas de igual magnitude.

### 4.3 Padrão de difração no campo distante

O padrão de difração de campo distante do feixe de prova transmitido é encontrado tomando a transformada de Fourier bidimensional (2D) do campo de prova no plano de saída. Devido à simetria cilíndrica do problema, a transformada de Fourier 2D reduz-se à transformada de Hankel de ordem zero. A distribuição de intensidade do campo distante do feixe de prova no plano de



Figura 4.4: Padrão de difração do campo distante do feixe de prova depois de atravessar um meio atômico de profundidade ótica (a)  $\ell = 33$ , (b)  $\ell = 65$ , (c)  $\ell = 130$  e (d)  $\ell = 190$ . A mudança de fase XPM máxima  $\phi_0$  é mostrada em cada caso. Aqui, R=4,  $\Delta = 80$  e  $\Gamma = 1$ . A intensidade de difração é normalizada como descrito no texto.

observação a uma distância D afastado da mostra, é dado por:

$$I(k_r a) \propto \left| \int_0^\infty E_0(\rho) e^{\left[ -\alpha(\rho)\ell/2 + i\phi(\rho) \right]} J_0(k_r \rho) \rho d\rho \right|^2, \tag{4.28}$$

onde  $k_r = k_p r/D$  é o número de onda radial, com r sendo a coordenada radial no plano de observação (em unidades de a);  $J_0$  é a função de Bessel de ordem zero. Campos difratados de diferentes regiões de sobreposição entre os feixes de bombeio e prova podem interferir uns com outros se eles têm o mesmo vetor de onda. A interferência, que pode ser construtiva ou destrutiva, produz vários anéis concêntricos na região do campo distante. O número de anéis é aproximadamente dado por  $\phi_0/2\pi$  [110]. Os anéis são gerados na mesma frequência ótica do feixe de prova original.

#### 4.3. Padrão de difração no campo distante

As Figs.4.4 mostram o perfil espacial transverso do feixe de prova difratado para vários valores da profundidade ótica  $\ell$  dentro da mostra atômica. Aqui todas as curvas são normalizadas com respeito à intensidade em r = 0, com a fase não-linear sendo  $\phi \equiv 0$ . A fase máxima  $\phi_0$  para cada valor de  $\ell$  é também indicado em cada uma das figuras. À medida que o comprimento de interação aumenta, a mudança de fase XPM aumenta e junto com ela o número de anéis de CE. Para  $\ell = 33$ , a mudança de fase  $\phi_0$  é inferior a  $2\pi$  e uma estrutura de anel não começou a se formar ainda, embora que um pequeno pedestal possa ser visto na Fig.4.4(a). No caso mostrado na Fig.4.4(b), para  $\ell = 65$  ( $\phi_0 = 1, 0 \times 2\pi$ ), um único anel se forma em torno do eixo ótico do feixe de prova. Para  $\ell = 130$ , Fig.4.4(c), a mudança de fase de XPM máxima é  $\phi_0 = 2, 0 \times 2\pi$ , e um segundo anel pode ser observado nesta figura. Finalmente para uma profundidade ótica de  $\ell = 190$ , temos que a mudança de fase máxima é  $\phi_0 = 3, 0 \times 2\pi$ , e um terceiro anel pode ser observado, como mostrado na Fig.4.4(d). Embora o diâmetro do primeiro anel permaneça aproximadamente constante, o diâmetro do anel externo, aumenta com a distância de propagação.

O diâmetro do anel mais externo está diretamente relacionado com o ângulo de meio cone  $\theta$ , o qual é estimado por [110]

$$\theta \approx \frac{1}{k_p} \left| \frac{d\phi}{d\rho} \right|_{max}.$$
(4.29)

Substituindo a Eq.(4.27) na Eq.(4.29) encontramos que o ângulo do cone é dado pela seguinte expressão:

$$\theta \propto \frac{\ell R^2}{|\Delta|}.$$
(4.30)

Como podemos observar na Eq.(4.30), o ângulo do cone é diretamente proporcional com o quadrado da razão entre as frequência de Rabi dos laser sinal e acoplamento R e linearmente proporcional com a profundidade ótica  $\ell$ . Esta proporcionalidade do ângulo do cone com a razão das frequência Rabi dos feixes sinal-acoplamento foi verificada na Fig.4.5. Como  $\ell = L/z_0 \propto N$ , o ângulo do cone varia linearmente com a densidade atômica N. CE como resultado de auto-modulação de fase também exibe uma dependência linear do ângulo do cone com N [62], enquanto que a CE de mistura



Figura 4.5: Padrão de difração do campo distante do feixe de prova para (a) R=4,5 e (b) R=5. Em ambos casos,  $\ell = 180$  e  $\Delta = 120$ .

de quatro ondas,  $\theta \propto N^{0,5}$  [73] e emissão cônica devido a efeitos cooperativos,  $\theta \propto N^2$  [79]. CE ocorre para ambas dessintonias vermelho e azul do campo sinal, e o ângulo do cone como pode ser observado na Eq.(4.30) é inversamente proporcional à dessintonia sinal.

Na Fig.4.5 mostramos os padrões de difração para dois valores diferentes da razão da frequência de Rabi dos feixes sinal e acoplamento R. O diâmetro do anel mais externo aumenta por um fator de  $(5/4,5)^2 \approx 1,23$ , quando R muda de R=4,5 para R=5, como previsto pela Eq.(4.30) e como pode ser verificado nas Figs. 4.5(a)-4.5(b) respectivamente.

Assim como para a fase de XPM  $\phi$ , o coeficiente de absorção não-linear é também radialmente variável,  $\alpha(\rho) = (\Gamma R^2 e^{-2\rho^2} + R^4 e^{-4\rho^4})/4\Delta^2$ . Para verificar que o padrão de CE resulta da mudança de fase de XPM induzida no campo de prova pelo feixe sinal, nós artificialmente fixamos  $\phi(\rho) \equiv$ 0, mas mantemos a dependência radial no coeficiente de absorção  $\alpha(\rho)$  na Eq.(4.28). O padrão de difração com e sem a fase de modulação de fase cruzada é mostrado na Fig.4.6. Em ambos casos, R=4,  $\Delta = 80$ ,  $\ell = 130$  e  $\Gamma = 1$ ; sob tais condições,  $\alpha(0)\ell=1,38$ , correspondendo a 50% da transmissão do feixe de prova no eixo. Aqui os padrões de intensidade são normalizados pela suas intensidades pico para melhor visualização e comparação das duas curvas. Como podemos observar na Fig.4.6 sem XPM, nenhuma estrutura de anel é vista na distribuição de intensidade do campo distante, confirmando que XPM é o mecanismo principal responsável para CE em nosso esquema.



Figura 4.6: Padrão de difração do campo distante do feixe de prova com (curva tracejada) e sem modulação (curva continua ) de XPM. Para R=4,  $\Delta = 80$  e  $\ell = 130$ .

Exceto para a forma particular do termo  $e^{-\alpha(\rho)\ell/2}$ , a Eq.(4.28) é bastante geral e descreve o padrão de difração de campo distante observada sob qualquer mecanismo físico que induz uma alteração do índice de refração da amostra proporcional à intensidade da luz na amostra atômica. A principal novidade em nosso trabalho é o mecanismo físico responsável para CE: mudanças de fase de XPM gigantes experimentadas por um feixe de prova fraco induzida por um campo sinal também fraco.

A seguir vamos a estimar a frequência de Rabi necessária para observar CE sob o presente sistema. Em vapor atômico com alargamento homogêneo, EIT ocorre para  $\Omega_c^2 > \gamma_2 \gamma_3$ , o qual define o limite inferior necessário para a frequência de Rabi do feixe de acoplamento. Tipicamente em armadilhas magneto-óticas por exemplo,  $\gamma_2/2\pi \approx 1$  kHz [39]; para  $\gamma_3/2\pi = 10$  MHz, é preciso ter  $\Omega_c/2\pi > 100$  kHz. Para átomos dentro de uma célula de vapor alargada colisionalmente, temos que:  $\gamma_3/2\pi \approx 650$  MHz e  $\gamma_2/2\pi \lesssim 1$  kHz [115], portanto  $\Omega_c/2\pi \gg 800$  kHz para que EIT possa acontecer. Em nossa discussão considerou-se um regime de excitação no qual  $\Omega_s \gtrsim \Omega_c \gg \Omega_p$ . Assim, não-linearidades Kerr suficientemente grandes para causar CE no feixe de prova podem ser obtidas com ambas frequências de Rabi dos laser sinal e acoplamento bem abaixo do nível de saturação ( $\Omega_s, \Omega_c, \Omega_p < \gamma_3$ ), tanto em amostras atômicas quentes, quanto frias. Para vapor de sódio, estas frequências de Rabi corresponderiam a intensidades abaixo de 5 mW/cm<sup>2</sup>. Os níveis de luz estimados para a observação de CE no nosso esquema são várias ordens de magnitude inferior àqueles necessários em todos os regimes de CE estudados até agora.

Para observar CE sob o esquema proposto, as profundidades óticas requeridas são facilmente obtidas em células de vapor, apesar de que previsões precisas exigiriam a introdução do alargamento Doppler não-homogêneo no modelo. O caso de átomos frios representa um desafio experimental em que as profundidades óticas para desenvolver a mudança de fase de XPM são bastantes grandes. Mas profundidades óticas tão grandes como 160 foram relatadas para sódio em armadilhas magnetoóticas [111] e profundidades óticas de 105 demostradas em nuvem de átomos de Cs [112]. Como foi observado na Fig.4.4(b), profundidade ótica de  $\ell = 65$  são suficiente para observar a formação de um único anel de CE. Assim, emissão cônica nas condições aqui estudadas podem ser observados com a tecnologia atual disponível. Os resultados mostrados neste capitulo foram relatados e publicados na Phys. Rev. A. [113]

Em conclusão, propusemos um esquema no qual emissão cônica pode ser observada em vapor atômico excitado com baixos níveis de luz. Explorando as grandes mudanças de fases de XPM oferecidas pelo fenômeno da EIT, anéis de difração podem ser induzidos no feixe de prova pelo campo sinal com intensidades inferior à intensidade de saturação de uma transição atômica.

# Capítulo 5

# Focalização cruzada induzida eletromagneticamente

Neste capítulo nós investigamos teoricamente a focalização cruzada entre dois campos fracos mediados por uma amostra atômica de quatro níveis sob a condição da transparência induzida eletromagneticamente. Mostraremos que devido às não-linearidades óticas gigantes experimentadas pelo sistema atômico, focalização cruzada entre o feixe de prova e o feixe sinal (com as intensidades de ambos os campos abaixo do nível de saturação) é possível. Aplicando diferentes máscaras para a intensidade do feixe sinal, diferentes formas de lentes (cilíndrico, Fresnel e gaussiano) podem ser induzidas na amostra atômica. Finalmente a focalização do feixe de prova é analisada em termos dos parâmetros de excitação (intensidade, dessintonia e profundidade ótica da amostra atômica).

A motivação para o desenvolvimento destes estudos, cujos resultados são apresentados neste segundo capítulo de nossas contribuições, veio principalmente dos trabalhos desenvolvidos por Moseley e colaboradores [51,52]. Nestes artigos os autores observaram e elucidaram um "efeito de focalização induzida eletromagneticamente" em um esquema atômico de três níveis na denominada configuração cascata. Este fenômeno tem implicações importantes para a desenvolvimento de experimentos futuros nesta área, tal como magnetômetros ultra-sensíveis, microscopia de alta sensibilidade, entre outros [114], além de ser interessante por si só como uma lente variável é induzida em um feixe laser por outro, sem a alta absorção associada em ambos campos. Por exemplo no artigo publicado por Zhao e colaboradores [57] na Optics Express no ano de 2011, os autores exploraram teoricamente um método para gerar lentes de Fresnel sintonizáveis em meios coerentes baseados na transparência induzida eletromagneticamente. Os resultados obtidos pelos autores mostram que imagens de intensidade modulada no campo de acoplamento modelam o meio coerente para induzir o perfil de fase quadrático modulo  $2\pi$  desejado para a lente, para difratar o campo de prova. Neste sentido eles estudam a focalização e propriedades de imagens da lente induzida. Em particular mostraram que as imagens no campo de acoplamento podem flexivelmente controlar as imagens no campo de prova por difração. Os resultados obtidos mostram que lentes óticas baseadas na EIT podem ser geradas com técnicas simples, isto é, as imagens no campo de acoplamento podem ser produzidas utilizando máscaras de amplitude e lentes de vidro.

## 5.1 Modelo atômico para observar focalização cruzada

O sistema atômico utilizado para observar focalização cruzada entre os feixes sinal e prova, é mostrado na Fig.5.1. O meio atômico é modelado através de um sistema de quatro níveis. A estrutura do nível hiperfino da transição  $D_1$  em <sup>87</sup>Rb tem essa estrutura de níveis de energia. Este sistema é similar ao discutido nos capítulos anteriores, a única diferença é o fato que neste sistema estamos incluindo por completeza uma taxa de decaimento  $\gamma_0$  para os estados fundamentais. No caso de átomos em movimento, devido a colisões e onde uma distribuição de velocidades deve ser assumida,  $\gamma_0$  possui um valor significativo. No caso em que tratamos átomos parados essa taxa de decaimento apresenta valores desprezíveis em relação à taxa de decaimento do estado excitado, isto é  $\gamma_0 \ll \gamma_3$ .

Embora o tratamento do problema mediante o formalismo de matriz densidade seja mais completo e nos permita incluir efeitos, tais como: emissão espontânea, defasagem entre os estados fundamentais ou repopulação, o conjunto de equações obtidas mediante este formalismo escala com o quadrado do número de estados atômicos e não é uma tarefa muito fácil ou eficiente resolver a equação mestra para um sistema complexo que envolve vários estados.

Em vários trabalhos foram usados um método aproximado, a equação de Schrödinger com um



Figura 5.1: Um átomo de quatro níveis aberto na configuração N interagindo com três feixes laser: sinal  $(\Omega_s)$ , acoplamento  $(\Omega_c)$  e prova  $(\Omega_p)$ . O campo sinal é dessintonizado por  $\delta$  da transição atômica  $|2\rangle \rightarrow |4\rangle$ , enquanto que  $\gamma_3$ ,  $\gamma_4$  são as taxas de decaimento dos estados  $|3\rangle \in |4\rangle$  respectivamente. Aqui também é indicado a taxa de decaimento dos estados fundamentais por  $\gamma_0$ .

hamiltoniano não hermitiano, onde os efeitos de emissão espontânea são incluídos substituindo a dessintonia  $\delta$  por  $\delta - i\gamma$ , onde  $\gamma$  é a taxa de decaimento por emissão espontânea do estado atômico [22]. Quando a excitação para os estados excitados é muito baixa, este método oferece uma boa solução aproximada e pode também reduzir grandemente a dificuldade de resolução do conjunto de equações mestra. Outra vantagem é que este método pode produzir um resultado analítico simples, mostrando claramente os efeitos da interação átomo-luz. Portanto os resultados do modelo apresentado neste capítulo podem se aproximar daqueles obtidos se abordássemos o problema mediante o formalismo de matriz densidade ao levarmos em conta o valor de  $\gamma_0$ .

Em um meio com alargamento homogêneo, poderemos resolver a equação de Schrödinger, na qual levando em conta os decaimentos dos estados fundamentais encontramos que as equações de movimento para as amplitudes de probabilidade do sistema atômico são agora dadas por

$$\dot{b}_1 = -\frac{\gamma_0}{2}b_1 + \frac{i}{2}\Omega_p b_3, \tag{5.1}$$

$$\dot{b}_2 = -\frac{\gamma_0}{2}b_2 + \frac{i}{2}\Omega_c b_3 + \frac{i}{2}\Omega_s b_4,$$
(5.2)

$$\dot{b}_3 = \frac{i}{2}\Omega_p b_1 + \frac{i}{2}\Omega_c b_2 - \frac{1}{2}\gamma_3 b_3, \qquad (5.3)$$

$$\dot{b}_4 = \frac{i}{2}\Omega_s b_2 - i(\delta - \frac{i}{2}\gamma_4)b_4, \tag{5.4}$$

Para grandes dessintonias do campo sinal,  $\delta \gg \gamma_4$ , poderemos ignorar qualquer incremento da taxa de decoerência dos estados fundamentais  $\gamma_0$  devido ao campo sinal [115].

Como foi feito no capitulo anterior, dentro da aproximação de onda girante, nós resolvemos este último conjunto de equações no regime perturbativo, considerando só até primeira ordem para o laser de prova e para todas as ordens para os campos de acoplamento e sinal. No regime de estado estacionário,  $\dot{b}_i = 0 \text{ com } (i = 1, 2, 3, 4)$ . Para um campo de prova fraco, isto é  $\Omega_p \ll \gamma_3$ , a população atômica permanece no estado fundamental  $|1\rangle$ ,  $(|b_1(t)|^2 \approx 1)$  enquanto os outros níveis permanecem vazios  $(|b_2(t)|^2 \approx |b_3(t)|^2 \approx |b_4(t)|^2 \approx 0)$ . Procedendo da mesma forma como foi feito com as Eqs.(4.12-4.13), podemos encontrar as expressões para  $\operatorname{Re}[\chi]$  e  $\operatorname{Im}[\chi]$ , as quais são novamente dadas pela Eq.(4.15). Ao derivar as equações para a parte real e imaginaria da susceptibilidade não foram feitas aproximações com respeito às magnitudes de  $\Omega_s$ ,  $\Omega_c$  ou  $\delta$ , exceto pela condição de EIT,  $\Omega_c^2 \gg \gamma_0 \gamma_3$ . Para simplificar as Eqs.(4.15), podemos utilizar as mesmas definições utilizadas no capitulo anterior, isto é  $\operatorname{R}=\Omega_s/\Omega_c$ ,  $\Gamma = \gamma_4/\gamma_3$  e  $\Delta = \delta/\gamma_3$ . Com isso,  $\operatorname{Re}[\chi]$  e  $\operatorname{Im}[\chi]$  são dadas por

$$Re[\chi] = K \frac{R^2}{2\Delta}, \qquad (5.5a)$$

$$Im[\chi] = K \frac{\Gamma R^2 + R^4}{4\Delta^2}$$
(5.5b)

onde consideramos o limite  $\Delta \gg \Gamma$ , R. Como podemos observar estas equações são idênticas àquelas mostradas no capitulo 4, devido ao fato que estamos invocando que a condição EIT ( $\Omega_c^2 \gg \gamma_0 \gamma_3$ )



Figura 5.2: Esboço da focalização do campo de prova induzida pelo feixe sinal e a definição dos eixos  $z \in x$  com respeito a mostra atômica.

seja satisfeita.

## 5.2 Lente induzida eletromagneticamente

Nesta seção vamos descrever teoricamente como induzir uma lente no meio atômico, a qual vai ser experimentada pelo feixe de prova ressonante. Forte focalização do feixe de prova pode ser observada com intensidades de feixe sinal bem abaixo no nível de saturação, tal como esquematicamente mostrado na Fig.5.2.

Nas referências [51,52] e [54] focalização do feixe de prova induzida pelo feixe de acoplamento foram observadas no meio atômico na configuração  $\Xi$  e  $\Lambda$  sob a condição da EIT. Essa focalização induzida eletromagneticamente (EIF, sigla em ingles para "Electromagnetically-induced focusing") foi atribuída ao perfil do índice de refração variando espacialmente na célula de vapor. Essa variação espacial do índice de refração aje como uma lente no meio, focalizando ou defocalizando o campo de prova.

Para mostrar a focalização do feixe de prova, nós vamos considerar o sistema atômico mostrado na Fig.5.1. Procedendo como no caso discutido no capítulo 4 para a observação da emissão cônica induzida eletromagneticamente, nós vamos supor que o feixe de prova propaga-se através de uma amostra atômica estendida de profundidade ótica  $\ell = L/z_0$ . No plano de entrada da amostra, o feixe de prova é assumido como sendo uma onda plana com um perfil de intensidade do tipo gaussiano, um modelo comum para a forma do feixes experimentais:  $E(z, x, t) = E_i exp[i(kz - \omega t)]$ , onde  $k = 2\pi/\lambda$  é o número de onda,  $\omega = 2\pi c/\lambda$  é a frequência ótica do feixe de prova e

$$E_i(x) = E_0(x)exp(-x^2/w_0^2).$$
(5.6)

Na Eq.(5.6),  $w_0$  é a cintura do feixe de prova e x é a coordenada no plano transversal. Para simplificar, nosso tratamento terá lugar em apenas uma dimensão transversal, mas deve ser facilmente extensível a duas dimensões, como foi feito na Eq.(4.21) do capitulo anterior. Consideraremos o caso em que o campo de acoplamento tem um diâmetro do feixe muito maior que o diâmetro do feixe de prova, de modo que o seu perfil transversal pode ser considerado uniforme. Como o feixe de prova é assumido como sendo suficientemente fraco, a propagação do campo de acoplamento é não afetada pela interação com os átomos.

Da Eq.(4.19), a equação de propagação do feixe de prova é dada como:

$$-i\frac{1}{2k_p}\nabla_T^2 E_P + \frac{\partial E_p}{\partial z} = i\frac{k_p}{2\varepsilon_0}P_p.$$
(5.7)

Como mostramos anteriormente, o termo transversal pode ser eliminado da Eq.(5.7), se o número de Fresnel,  $\aleph = 4\pi w_0^2/\lambda z_0 \gg 1$ , portanto difração do campo de prova dentro da amostra atômica pode ser negligenciada e o feixe de prova propaga-se sem ser perturbado pelos átomos. Substituindo as Eqs.(5.5) na Eq.(5.7) obtemos que

$$\frac{\partial E_p}{\partial z'} = (-\alpha/2 + i\sigma)E_p,\tag{5.8}$$

onde  $\alpha = (\Gamma R^2 + R^4)/4\Delta^2$  e  $\sigma = R^2/4\Delta$ . Ao resolver a Eq.(5.8) encontramos que no plano de saída

do meio atômico  $(z = \ell)$  o campo de prova é dado por

$$E_0(x) = E_i(x)exp[-\alpha\ell/2 + i\phi], \qquad (5.9)$$

Fora da amostra atômica, num plano de observação a uma distância normal  $d \gg L$  a partir do plano de saída do meio atômico, podemos avaliar o campo de prova  $E'_p$  aplicando a integral de difração de Fresnel:

$$E'_p(d,x) = \frac{exp[i(kd-\omega t)]}{i\sqrt{\lambda d}}exp(i\frac{kx^2}{2d})\int_{-\infty}^{\infty} \left\{E_0(x')exp(i\frac{kx'^2}{2d})\right\}exp(-i\frac{2\pi}{\lambda d}xx')dx'.$$
(5.10)

Da Eq.(5.10) pode-se determinar a intensidade do feixe de prova  $I = I(d, x) = |E'_p(d, x)|^2$ .

Como podemos observar na Eq.(5.5), se a intensidade do campo sinal tem um perfil de intensidade transverso variando espacialmente, então a mudança de fase de XPM induzida no feixe de prova pode seguir esse perfil do campo sinal, isto é  $\phi = \phi(x)$ . Como resultado o campo de prova irá experimentar uma variação transversal no índice de refração, convertendo a onda plana incidente em uma onda de saída cilíndrica. Nesta situação uma ação lente é esperada se a diferença de fase induzida entre o centro do feixe sinal e suas bordas for próxima de  $2\pi$ .

Vamos considerar três casos de lentes, cada uma correspondendo a um perfil espacial transversal diferente do campo sinal: cilíndrico, Fresnel e gaussiano. Nos três casos a mudança de fase de XPM induzida diminui radialmente, muito parecido como uma lente GRIN radial (GRIN, sigla em inglês para "Gradient index lenses") [116], na qual o índice de refração varia continuamente como uma função das coordenadas espaciais no meio.

#### 5.2.1 Lente cilíndrica induzida eletromagneticamente

Para induzir uma lente cilíndrica no meio atômico, um perfil de fase quadrático deve ser impresso sobre o campo de prova. Esta impressão pode ser realizada através do desenho de uma máscara para o campo sinal, tal como esquematicamente mostrado na Fig.5.3. O perfil de intensidade do



Figura 5.3: (a) Esboço da configuração espacial dos campos de prova, acoplamento e sinal com respeito à amostra atômica e a definição dos eixos  $x \in z$ . (b) Depois de deixar a amostra atômica estendida, o feixe de prova é focalizado a uma distancia focal F.

campo sinal ao passar através de tal máscara pode ser escrito como:

$$R^{2}(x) = \begin{cases} R_{0}^{2}(1 - x^{2}/w^{2}), & se \ |x| \le a, \\ 0, & caso \ contrário, \end{cases}$$
(5.11)

onde  $R_0$  é a amplitude pico da razão entre a frequência de Rabi sinal-acoplamento e a é o tamanho da pupila da máscara. Aqui nós vamos considerar w = a. A intensidade do feixe sinal tem seu máximo no eixo ótico (x = 0), diminuindo de forma parabólica com a direção transversal. Para x > a o feixe sinal é truncado. O mecanismo de XPM irá então converter este perfil de intensidade do feixe sinal no perfil de fase desejado para o feixe de prova. Como  $\phi = \sigma \ell = R^2 \ell / 4\Delta$ , portanto da Eq.(5.11) podemos obter a mudança de fase de prova, a qual é dado por

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_0(1 - x^2/a^2), & se \ |x| \le a, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$
(5.12)

onde  $\phi_0 = R_0^2 \ell/4\Delta$  é a mudança de fase de XPM pico. Dado que o índice de refração do vapor atômico é  $n = \sqrt{1 + Re[\chi]} \approx 1 + (1/2) \operatorname{Re}[\chi]$ , usando a Eq.(5.5) podemos encontrar que a lente atômica induzida tem um perfil de índice de refração parabólico dado pela seguinte equação

$$n(x) = \begin{cases} n_0 - (\lambda \phi_0 / 2\pi z_0 \ell) (x^2 / a^2), & se \ |x| \le a, \\ 1, & caso \ contrário, \end{cases}$$
(5.13)

onde  $n_0 = 1 + \lambda \phi_0 / (2\pi z_0 \ell)$  é o índice de refração máximo calculado no eixo ótico. Podemos comparar a Eq.(5.13) com o perfil do índice de refração de uma lente GRIN parabólica [116],

$$n(x) = n_0 - \frac{x^2}{2FL},\tag{5.14}$$

onde F é a distância focal da lente GRIN. Das Eqs.(5.13-5.14), encontramos que a distância focal da lente induzida eletromagneticamente é dado por

$$F = \frac{4\pi\Delta a^2}{R_0^2 \ell\lambda}.$$
(5.15)

Como observado nesta última equação, a distância focal diminui com o aumento da profundidade ótica e a intensidade do campo sinal através de  $R_0$ . Uma vez que assumimos que  $a \ge w_0$ , o tamanho da pupila é a dimensão crítica para determinação da distância focal da lente atômica induzida. Focalização do campo de prova é alcançada para dessintonias positivas do feixe sinal (sintonizado para o vermelho da transição), enquanto que dessintonias negativas (sintonizado para o azul da transição) levam à desfocalização. Tomemos, por exemplo, como parâmetros de excitação  $R_0 = 1, \Delta = 120$  e  $\ell = 3000$  para  $\lambda = 795$  nm. Sob essas condições, a máxima mudança de fase do feixe de prova será aproximadamente de  $\phi_0 \approx 2\pi$ , enquanto que a transmissão do feixe de prova  $exp(-\alpha\ell/2) \ge 0.95$ . A distância focal esperada para esta lente atômica induzida é calculada como sendo aproximadamente  $F \approx 0.91$  m, para  $a = \sqrt{2ln2}w_0 \approx 1.2$  mm. Grandes profundidades óticas ( $\ell = 3000$ ) podem ser facilmente obtidas em células de vapor atômico e estas são típicas de experimentos de luz lenta baseados no fenômeno de EIT. Para uma densidade atômica de N=  $3 \times 10^{12}$ cm<sup>-3</sup>, o comprimento de interação é  $z_0 \approx 1\mu$ m [na linha  $D_1^{87}Rb$  ( $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{1/2}$ )], de



Figura 5.4: Perfil de fase quadrático modulo  $2\pi$  para a geração de uma lente de Fresnel. Para simplificar, mostramos apenas quatro zonas no perfil de fase.

tal modo que o comprimento físico da célula de vapor seria L=3 mm. Em todas as discussões posteriores vamos assumir esses mesmos parâmetros de excitação.

## 5.2.2 Lente modulo $2\pi$ induzida eletromagneticamente

Para criar uma lente Fresnel GRIN, o perfil de fase contínuo parabólico da lente cilíndrica pode ser dividido em vários segmentos com curvaturas iguais e com uma descontinuidade por etapas entre eles conhecidos como zonas de Fresnel, tal como esquematicamente mostrado na Fig.5.4. Em cada zona de Fresnel uma mudança de fase de  $2\pi$  é alcançada. Para uma lente de Fresnel com uma distancia focal F, o raio da n-ésima zona é dado por

$$|x_n| = \sqrt{2n\lambda F},\tag{5.16}$$

com n = 1, 2, 3... Para induzir uma lente de Fresnel GRIN na amostra atômica, uma fase modulo  $2\pi$  deve ser impressa no feixe de prova. Para isso uma máscara de intensidade para o campo sinal pode ser desenhada, tal que este feixe ao passar através de tal máscara [Fig.5.3] pode ser escrito como

$$R^{2}(x) = \begin{cases} R_{0}^{2} \mod(1 - x^{2}/w^{2}, 1), & se \ |x| \le a, \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{cases}$$
(5.17)

onde mod indica a operação módulo. Desta última equação podemos obter que a modulação de fase para o feixe de prova é do tipo:

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_0 \mod(1 - x^2/w^2, 1), & se \ |x| \le a, \\ 0, & caso \ contrário, \end{cases}$$
(5.18)

Na Eq.(5.18) nós escolhemos  $w = x_1$  o tamanho da primeira zona de Fresnel; o número de zonas de Fresnel são limitadas pelo tamanho da pupila *a* da máscara.

## 5.3 Resultados e discussões

Inicialmente vamos discutir o caso do perfil do tipo parabólico para o campo sinal, tal como aquele dado pela Eq.(5.11). Para este perfil nós vamos considerar o tamanho da pupila igual à cintura do feixe de prova,  $a = w_0$ . Com esta escolha para o tamanho da pupila uma parcela significativa do feixe de prova irá sobrepor com o feixe sinal e experimentar a mudança de fase de XPM. Para este tamanho da pupila, difração do campo sinal dentro da amostra atômica pode ser desconsiderada  $(\aleph_s = a^2/\lambda L \approx 420 \gg 1)$ , portando é esperado que o feixe sinal mantenha o perfil de intensidade do tipo parabólico enquanto se propaga através da mostra atômica sem ser perturbado pelos átomos. Os resultados obtidos para este perfil são mostrados nas Figs.(5.5-5.6). Como podemos observar na Fig.5.5, este gráfico mostra a amplitude de prova  $\exp[-\alpha(x)\ell/2]$  e mudança de fase induzida no campo de prova em função da distância transversal x. Observamos que a transmissão do feixe de prova é aproximadamente de 95%, enquanto que a mudança de fase induzida no feixe de prova pelo feixe sinal é de aproximadamente  $2\pi$ , ambos variando parabolicamente com a distância a partir do eixo ótico. A absorção pico como pode ser observada nesta figura é para ser aproximadamente de 5%, isto indica que a lente induzida focaliza entorno do 90% da intensidade de prova incidente no



Figura 5.5: Amplitude  $\exp[-\alpha(x)\ell/2]$  (curva tracejada) e fase (curva continua) transmitida no feixe de prova pela amostra atômica em função da distancia transversal x, para um perfil de intensidade parabólico para o feixe sinal. Para  $R_0 = 1$ ,  $\ell = 3000$  e  $\Delta = 120$ .

plano focal. Com os parâmetros de excitação utilizados, o comprimento focal, tal como dado pela Eq.(5.15), é aproximadamente igual a  $F \approx 0.63$  m.

Da integral de difração de Fresnel, dada pela Eq.(5.10), nós determinamos a intensidade do feixe de prova no eixo,  $I_p(0, z)$ , como função da distancia longitudinal d a partir da saída da mostra atômica. A Fig.5.6(a) mostra a intensidade do campo de prova no eixo como função da distancia longitudinal d a partir da saída da mostra atômica. Como observamos nesta figura, a intensidade do campo de prova ocorre. Esta focalização é confirmada na Fig.5.6(b), a qual mostra a intensidade do campo de prova em função da distancia transversal x. Como podemos observar é claro que o tamanho do feixe de prova é menor no plano focal, onde a cintura do campo de prova calculada foi de 203  $\mu$ m, com a largura total à media altura FWHM, (FWHM, sigla em inglês para "Full Width Half Maximum"), calculada igual a FWHM=  $w_f \sqrt{2ln2} = 240 \ \mu$ m, onde  $w_f$  é a cintura do feixe de prova no plano focal. Este valor da cintura do feixe de prova no foco é maior do que o valor esperado da ótica de feixes Gaussianos  $(F\lambda/\pi w_0)/[1 + (F/z_R)^2]^{0.5} = 158 \ \mu$ m, onde  $z_R = \pi w_0^2/\lambda$  é o comprimento de Rayleigh. Ótica de feixes Gaussianos também prevê a localização do ponto focal para ser  $F/[1 + (F/z_R)^2]^{0.5} = 0.62 \ m$ . Pequenas ondulações são vistas nas asas do feixe focalizado.



Figura 5.6: (a) Intensidade do feixe de prova no eixo em função da distancia longitudinal d na saída da mostra atômica. (b) Intensidade do feixe de prova no plano focal para um perfil de tipo parabólico. Para  $R_0 = 1$ ,  $\ell = 3000$  e  $\Delta = 120$ .

Estas ondulações e desvio das previsões da ótica de feixes Gaussianos ocorre porque o feixe sinal é truncado de modo que apenas 86% do feixe de prova experimenta XPM. Uma alternativa para obter uma focalização muito mais forte no feixe de prova, é fazer com que o feixe de prova preencha completamente a abertura da lente atômica. Para satisfazer esta condição, a curvatura da máscara parabólica (w) e o tamanho da pupila (a) poderiam ser ambos duplicados (fazer  $w = a = 2w_0$  na Eq.(5.11)) por exemplo. Neste caso a máscara de intensidade do feixe sinal preenche o 100% do campo de prova. Entretanto, para uma mudança de fase fixa de  $\phi_0 = 2\pi$ , a diferença de fase em 86% do feixe de prova cairia por um fator de 4, levando a uma pior focalização. A princípio, os parâmetros de excitação podem ser ajustados para induzir uma mudança de fase muito maior e, consequentemente, focalizar o feixe de prova para obter uma cintura muito menor no plano focal, mas induzir mudanças de fase  $\phi_0$  muito maiores a  $2\pi$  com baixa absorção, pode não ser uma tarefa fácil ou mesmo viável de se conseguir experimentalmente.

Uma alternativa para aumentar a mudança de fase para valores superiores a  $2\pi$ , é criar o equivalente de uma lente de Fresnel GRIN, tal como mostrado na Eq.(5.17). Para induzir uma lente Fresnel GRIN na amostra atômica, nós vamos escolher o tamanho da pupila para ser igual a a = 1.7 mm, tal que unicamente três zonas de Fresnel serão criadas. O tamanho da primeira



Figura 5.7: Amplitude  $\exp[-\alpha(x)\ell/2]$  (curva tracejada) e fase (curva continua) transmitida no feixe de prova pela amostra atômica em função da distancia transversal x, para um perfil de intensidade modulo  $2\pi$  para o feixe sinal. Para  $R_0 = 1$ ,  $\ell = 3000$  e  $\Delta = 120$ .

zona de Fresnel é igual a  $x_1 = \sqrt{2\lambda F} = 1$  mm, de onde nós vamos escolher o valor da cintura do feixe sinal para ser igual a este valor da primeira zona de Fresnel,  $w = x_1$ . Neste caso o tamanho da menor zona de Fresnel é igual a  $s = x_3 - x_1 \approx 0.32$  mm, a qual da um número de Fresnel minimo ( $\aleph_s = s^2/\lambda L \approx 42 \gg 1$ ); difração do campo sinal dentro da amostra atômica pode ser desconsiderada e a forma geométrica da zona é mantida enquanto o feixe sinal propaga-se dentro da amostra atômica. Os resultados obtidos para a lente Fresnel GRIN são mostrados nas Figs. (5.7-5.8). No caso da Fig.5.7 está mostra a amplitude de prova  $\exp[-\alpha(x)\ell/2]$  a mudança de fase induzida no campo de prova como função da distancia transversal x. Valores semelhantes aos obtidos nos casos previamente discutidos podem ser observados. Com essas três zona de Fresnel, temos o equivalente de uma mudança de fase de  $6\pi$  através do perfil de intensidade do feixe de prova, desde o valor pico até os extremos, com absorção muito baixa,  $t \approx 95\%$ . Na Fig.5.8(a), o gráfico mostra a intensidade do feixe de prova no eixo ótico como função da distancia longitudinal d a partir da amostra atômica. Como podemos observar nesta figura a intensidade do campo de prova alcança um pico em z = 0.60m, onde a focalização do feixe de prova ocorre. Este resultado está muito mais próximo do valor esperado a partir da ótica de feixes Gaussianos, quando comparado ao valor obtido para o caso da lente cilíndrica. Esta focalização é verificada na parte (b) da Fig.5.8, onde podemos observar que o



Figura 5.8: (a)Intensidade do feixe de prova no eixo em função da distancia longitudinal d na saída da mostra atômica. (b) Intensidade do feixe de prova no plano focal para uma lente Fresnel GRIN. Para  $R_0 = 1$ ,  $\ell = 3000$  e  $\Delta = 120$ .

feixe de prova tem uma cintura no plano focal igual a 157  $\mu$ m (FWHM=185  $\mu$ m) muito menor ao valor obtido para a cintura do feixe prova na entrada da amostra atômica (FWHM=1,2 mm).

Um perfil de intensidade gaussiano para o feixe sinal também pode levar à focalização induzida observada no campo de prova. Mesmo para este perfil, como pode ser verificado nas seguintes figuras podemos observar a focalização induzida eletromagneticamente no feixe de prova, a qual é alcançada através do mecanismo de XPM. Para este perfil nós vamos a considerar que ambos os feixes, sinal e prova têm a mesma cintura,  $w_0 = w = 1$  mm. Para este valor da cintura, difração do feixe sinal dentro da amostra atômica pode ser desconsiderada, portanto este feixe não é afetado pelos átomos e propaga como se estivesse no espaço livre. A difração do feixe sinal foi desconsiderada devido ao fato que este campo tem um número de Fresnel  $\aleph_s = w_0^2/\lambda L \approx 420 \gg 1$ . A Fig.5.9 mostra a amplitude de prova  $\exp[-\alpha(x)\ell/2]$  a mudança de fase do feixe de prova induzida em função da distancia transversal x. Uma mudança de fase do aproximadamente  $2\pi$  é observada, assim como uma absorção muito pequena. Estes resultados são consistentes com os resultados mostrados previamente, dado que os parâmetros utilizados na simulação foram os mesmo. Da integral de difração de Fresnel, dada pela Eq.(5.10), nós determinamos a intensidade do feixe de prova no eixo,  $I_p(0, z)$ , como função da distancia longitudinal d a partir da saída da amostra atômica. Como pode-



Figura 5.9: Amplitude  $\exp[-\alpha(x)\ell/2]$  (curva tracejada) e fase (curva continua) transmitida no feixe de prova pela amostra atômica em função da distancia transversal x, para um perfil de intensidade gaussiano para o feixe sinal. Para  $R_0 = 1$ ,  $\ell = 3000$  e  $\Delta = 120$ .

se observar na Fig.5.10(a), a intensidade do feixe de prova alcança um pico em aproximadamente z = 0.46 m, onde uma focalização forte no feixe de prova ocorre. Esta focalização é confirmada na Fig.5.10(b), a qual mostra a intensidade do campo de prova no foco. Como pode-se observar nesta a figura o tamanho do feixe de prova é significativamente menor no plano focal, em que o feixe de prova é visto como tendo uma cintura 1/e de 215  $\mu$ m (largura em meia altura FWHM=253  $\mu$ m), muito menor que na saída da amostra atômica (FWHM=1,2 mm). Pequenas oscilações podem também ser observadas na Fig. 5.10(b) em torno do ponto central. Estas oscilações eventualmente se desenvolverão em anéis de emissão cônica no campo distante [113].

Nos três casos discutidos confirmamos que a focalização observada no feixe de prova é produto do mecanismo de modulação de fase cruzada. Para isso, nós fizemos artificialmente  $\phi(x) = 0$ , mas mantivemos a dependência com a coordenada transversal x no coeficiente de absorção,  $\alpha(x)$ . Em todos os três casos discutidos a focalização do feixe de prova não foi observada sob estas condições, confirmando que a modulação de XPM é o mecanismo responsável para poder observar a focalização no feixe de prova

Em conclusão, propusemos um esquema experimental no qual é possível observar focalização induzida no feixe de prova por um feixe sinal em vapor atômico excitado com baixos níveis de luz.



Figura 5.10: (a) Intensidade do feixe de prova no eixo em função da distancia longitudinal d na saída da mostra atômica. (b) Intensidade do feixe de prova no plano focal para uma lente do tipo gaussiana. Para  $R_0 = 1$ ,  $\ell = 3000$  e  $\Delta = 120$ .

Desenhando diversas máscaras para o perfil do feixe sinal, diversos perfis podem ser impressos na amostra atômica, controlando as propriedades de focalização. Neste estudo observamos que o perfil de intensidade transverso do campo sinal leva ao perfil de índice de refração variar espacialmente, o qual é experimentando pelo feixe de prova ressonante. Esta variação espacial do índice de refração induz uma lente no meio focalizando o campo de prova, dependendo da dessintonia do campo sinal. Também podemos concluir que sob as condições estudadas para os três casos, cada um correspondendo a um perfil diferente do campo sinal, a focalização observada no feixe de prova é produto do mecanismo de XPM e não da variação espacial no coeficiente de absorção.

# Capítulo 6

# Feixe de vórtice induzido eletromagneticamente

Neste capítulo nós investigamos teoricamente um fenômeno diferente relacionado à susceptibilidade complexa, chamado a geração de vórtice ótico. O sistema atômico estudado para a geração de feixes de vórtices é o mesmo utilizado para o caso de emissão cônica e focalização induzida. Neste sentido, nós consideramos que o feixe de prova e os laser sinal e acoplamento atuam novamente em átomos na denominada configuração N. A diferença principal com os dois casos previamente estudados, é que agora nos vamos permitir que a razão entre as frequências de Rabi dos campos sinal e acoplamento R possa ter uma singularidade. A transferência desta singularidade ao campo de prova pode ser alcançada sob esquemas de excitação que geram não-linearidades óticas gigantes experimentadas no sistema atômico de quatro níveis, sem absorção apreciável nos campos óticos, devido ao fenômeno da transparência induzida eletromagneticamente. Através da não-linearidade ótica, a singularidade na frequência de Rabi é convertida em uma singularidade na fase do feixe de prova levando à geração do vórtice ótico.

A motivação para o desenvolvimento destes estudos, cujos resultados são apresentados neste capitulo final de nossas contribuições veio principalmente da possibilidade que estes feixes oferecem um novo grau de liberdade, o qual pode ser explorado por exemplo em aprisionamento e rotação de partículas [87], armazenamento de informação quântica [117], ou mesmo em experimentos de EIT como aquele reportado por Pugatch e colaboradores [98], no qual os autores utilizam vapor



Figura 6.1: As filas: (a) feixe helicoidal, (b) distribuição de intensidade e (c) frente de fase; para  $m = 0, m = \pm 1$  e  $m = \pm 2$ . Figura adaptada a partir de: www.phorbitech.eu

atômico de Rb quente; neste experimento o feixe de prova contem um vórtice, o qual é armazenado e posteriormente recuperado.

Antes de apresentar o modelo teórico sob o qual é possível observar a ocorrência da transferência de feixes de vórtice entre o campo sinal e prova, vamos primeiro fazer uma breve introdução aos feixes de vórtices óticos. Uma discussão mais aprofundada sobre estes feixes pode ser encontrada na referências [118–120]

## 6.1 Feixes de vórtices óticos

É conhecido da teoria de Maxwell que a luz, ou mais geralmente uma onda eletromagnética transporta não só energia, mas também momento. O momento pode ter contribuições, linear e angular; o momento angular pode ser separado em uma parte associada à polarização (momento angular de "spin") [121] e uma parte orbital associada à geometria da frente de onda do feixe de luz (momento angular orbital) [122].

Ao momento angular orbital está associado um vórtice ótico, o qual dá origem a uma amplitude do campo complexo que escrito em coordenadas cilíndricas tem a forma  $E(r, z, \theta) = u(r, z)e^{im\theta}e^{-ikz}$ onde  $\vec{k} = k\hat{z}$  é o vetor de onda do feixe, m é a carga topológica, positiva ou negativa, a qual determina a quantidade de vezes que a luz gira à medida que propaga pelo espaço, enquanto que



Figura 6.2: Máscara de fase espiral para gerar frente de ondas helicoidais. Figura adaptada a partir de: www.phorbitech.eu

o angulo azimutal,  $\theta = \arctan(y/x)$  é definido no plano perpendicular transversal à direção de propagação. A Fig.6.1 mostra alguns exemplos de frentes de onda contendo vórtices com diferentes cargas topológicas. Por convenção, a frente de onda helicoidal é destra se o sinal da carga topológica é positivo, e canhoto, no caso oposto. Como observado na Fig.6.1, para m = 0, o modo não é helicoidal e as frentes de onda são múltiplas superfícies desconectadas. Por exemplo, uma sequência de planos paralelos ( de onde vem o nome de "onda plana"). Para  $|m| \ge 1$ , os feixes tem frentes de fase helicoidais com o número de espirais entrelaçados dependendo da magnitude e sinal da carga topológica, respectivamente.

Talvez a abordagem mais óbvia para a geração de um feixe de fase helicoidal, é passar um feixe de onda plana por um elemento ótico com uma superfície helicoidal [126,127], como mostrado na Fig.6.2. A espessura ótica deste componente aumenta azimutalmente de acordo com  $m\lambda_0\theta/(2\pi\Delta n)$ , onde  $\lambda_0$  é o comprimento de onda e  $\Delta n = n - n_0$  é a diferença dos índices de refração entre a máscara e os seus arredores. Embora esta seja uma ideia aparentemente simples, em comprimentos de onda óticos esta abordagem exige extrema precisão no passo da superfície helicoidal. No centro da máscara a fase é indefinida (singularidade) e o feixe transmitido interfere destrutivamente, criando uma região de intensidade zero. Quando um feixe é passado através de uma de tais máscaras, a superfície helicoidal deve dar um carácter helicoidal ao feixe. Se o feixe incidente é descrito pela amplitude complexa  $E_0(r, \theta)$ , o feixe depois de passar através da máscara de fase espiral é agora



Figura 6.3: (a) O modelo atômico: Um átomo de quatro níveis aberto interagindo com três feixes de laser: prova  $(\Omega_p)$ , acoplamento  $(\Omega_c)$  e sinal  $(\Omega_s)$ . As transições  $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ ,  $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$  e  $|2\rangle \rightarrow |4\rangle$ são de dipolo elétrico permitidas, enquanto as transições  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  e  $|3\rangle \rightarrow |4\rangle$  são proibidas por dipolo elétrico. (b) Esboço da configuração espacial dos feixes de prova, acoplamento e sinal com respeito à amostra atômica e a definição dos eixos x e z.

escrito como,  $E(r, \theta) = t_m(\theta)E_0(r, \theta)$ , onde  $t_m = exp(im\theta)$  é a função de transmissão caracterizando a máscara de fase. Ao alterar a altura do passo d, ou material, feixes helicoidais com diferentes valores da carga topológica m podem ser produzidos por este método. Em seguida, apresentamos o modelo para a observação de geração de feixes de vórtices em vapor atômico.

## 6.2 Modelo atômico para feixe de vórtice induzido

O sistema atômico utilizado para transferir feixe de vórtice do campo sinal para o campo de prova é mostrado na Fig.6.3. Como observado nesta figura, este sistema é o mesmo utilizado na observação de emissão cônica e na focaliza induzida eletromagneticamente, portanto as expressões para a parte real e imaginária da susceptibilidade são dadas pelas Eqs.(4.17), as quais são dadas por

$$Re[\chi] = K \frac{R^2}{2\Delta}, \tag{6.1a}$$

$$Im[\chi] = K \frac{\Gamma R^2 + R^4}{4\Delta^2}$$
(6.1b)

Para imprimir uma frente de fase helicoidal no feixe sinal, nos vamos assumir que inicialmente



Figura 6.4: Máscara de fase espiral para carga topologica de m = 1.

este feixe é uma onda plana, a qual vai passar através de uma máscara de intensidade antes de interagir com a amostra atômica, tal como mostrado na parte (b) da Fig.6.3, de forma que a modulação em  $R^2$  varie azimutalmente. Portanto vamos considerar que a razão das frequências de Rabi entre os feixes sinal e acoplamento, em coordenadas cilíndricas é dado por

$$R^{2}(\theta) = \frac{R_{0}^{2}}{2\pi}\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$
(6.2)

Um exemplo da máscara de intensidade para um valor de carga topológica de m = 1, tal como dado pela Eq.(6.2) é mostrado na Fig.6.4. Com esta modulação de intensidade do feixe sinal, a parte real da susceptibilidade atômica será linear no ângulo azimutal  $\theta$ , enquanto que a dependência da parte imaginaria será quadrática. Estas dependências estão ilustradas na Fig.6.5.

Para determinar o efeito deste perfil do feixe sinal sobre o feixe de prova, vamos considerar que o campo de prova no plano de entrada da amostra atômica é uma onda plana com um perfil de intensidade gaussiano, isto é:  $E(z, \rho, t) = E_i exp[i(kz - \omega t)]$ , onde  $k = 2\pi/\lambda$  é o número de onda,  $\omega = 2\pi c/\lambda$  é a frequência ótica do feixe de prova e a amplitude do campo é dada como

$$E_i(\rho) = exp(-\rho^2/w_0^2)$$

Aqui,  $w_0$  é a cintura do feixe de prova e  $\rho$  é a distância radial. A propagação do feixe de prova



Figura 6.5: Parte real e imaginaria da susceptibilidade do campo de prova induzida por a intensidade azimutal do feixe sinal. A parte real de  $\chi$ , (curva tracejada) esta associada com o índice de refração dependendo linearmente com  $\theta$  e a parte imaginaria de  $\chi$  (curva solida) é associada com a absorção.

através da amostra atômica de comprimento L, na aproximação de amplitude lentamente variável é dada pela Eq.(5.8), a qual é

$$\frac{\partial E_p}{\partial z} = (-\alpha/2 + i\sigma)E_p,\tag{6.3}$$

como tínhamos mostrado nos capítulos anteriores, o coeficiente de absorção e a fase  $\sigma$ , são dados por  $\alpha = (\Gamma R^2 + R^4)/4\Delta^2$  e  $\sigma = R^2/4\Delta$ , respectivamente. Resolvendo esta última equação, o campo de prova no plano de saída da amostra atômica ( $z = \ell$ ), é dado por

$$E_0(\rho,\theta) = E_i(x,y)exp[-\alpha\ell/2 + i\phi].$$
(6.4)

A partir da Eq.(6.4), podemos obter que a função de transmissão para o meio atômico pode ser escrita como

$$T(\theta) = e^{-\alpha(\theta)\ell/2 + i\phi(\theta)}.$$
(6.5)

Da razão entre as frequências de Rabi entre os feixes sinal e acoplamento R(x), dado por Eq.(6.2), encontramos que a mudança de fase induzida no feixe de prova pode ser escrita como

$$\phi(\theta) = \frac{\phi_0}{2\pi}\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi \tag{6.6}$$



Figura 6.6: (a) Transmissão do campo de prova em função do ângulo azimutal  $\theta$ . (b) Fase  $\phi$  induzida no feixe de prova pelo feixe sinal em função do ângulo azimutal  $\theta$ .

onde  $\phi_0 = R_0^2 \ell / 4\Delta$  é a mudança de fase de XPM pico.

Como podemos observar da Eq.(6.5), à medida que o feixe de prova atravessa a mostra atômica de profundidade ótica  $\ell$ , este adquire uma fase  $\phi = \sigma \ell$  devido à presença do feixe sinal através da modulação de fase cruzada. Portanto se o feixe sinal tem um perfil de intensidade que varia azimutalmente, então a fase do feixe de prova irá também apresentar uma variação azimutal, aumentando linearmente com  $\theta$ . Desta função de transmissão, podemos observar também que a amplitude do feixe de prova é reduzida azimutalmente por um fator  $exp[-\alpha(\theta)\ell/2]$ , devido à absorção do meio. Esta dependência está ilustrada na Fig.6.6.

Dado que o índice de refração está relacionado com a parte real da susceptibilidade mediante a expressão  $n = \sqrt{1 + Re[\chi]} \approx 1 + (1/2)Re[\chi]$ , podemos usar a Eq.(6.2) para expressar o perfil do índice de refração como

$$n(\theta) = 1 + \frac{\phi_0 \lambda}{8z_0 \pi^2 \ell} \theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$
(6.7)

Da Eq.(6.7) para o índice de refração, observamos que o feixe de prova experimenta um índice de refração com variação azimutal, similarmente à de uma placa de fase espiral.

Ao substituir a Eq.(6.6) na função de transmissão, dado pela Eq.(6.5) e comparando o termo correspondente à fase com a função de transmissão de uma máscara de fase helicoidal, dada por:  $t_m(\theta) = exp(im\theta)$ , obtemos que a carga topológica para nosso sistema atômico de 4 níveis pode ser
escrita como,

$$m = \frac{R_0^2 \ell}{8\pi\Delta}.\tag{6.8}$$

Como podemos observar da Eq.(6.8), o valor da carga topológica m é diretamente proporcional ao quadrado da razão entre a frequência de Rabi dos feixes sinal e acoplamento, assim como da profundidade ótica da mostra atômica e inversamente proporcional à dessintonia do feixe sinal. Portanto, mediante o controle destes parâmetros atômicos, diversos valores da carga topológica podem ser gerados e diversos perfis de fase helicoidal do feixe sinal podem ser impressos ao feixe de prova mediante o mecanismo de modulação de fase cruzada. O sinal da carga topológica também pode ser controlado sintonizando o laser sinal para o vermelho ou azul da transição atômica, ocasionando m > 0 ou m < 0, respectivamente.

Para avaliar nossos resultados nós calculamos o padrão de difração do campo distante para o feixe de prova, no plano de observação a uma distância normal  $d \gg L$  a partir do plano de saída da amostra atômica mediante a integral de difração de Fresnel, a qual foi dada pela Eq.(5.10) e reescrevemos aqui

$$E'_{p}(d,x,y) = \frac{e^{i(kd-\omega t)}}{i\sqrt{\lambda d}} e^{i\frac{kx^{2}}{2d}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ T(x',y')E_{i}(x',y')e^{i\frac{k(x'^{2}+y'^{2})}{2d}} \right\} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda d}(xx'+yy')}dx'dy'.$$
(6.9)

A partir da Eq.(6.9) acima, podemos determinar a intensidade do feixe de prova no plano de observação, para diversos valores da carga topológica m, mediante uma escolha adequada dos parâmetros de excitação.

### 6.3 Resultado e conclusões

Nesta seção vamos mostrar os resultado obtidos para a geração de feixes de vórtices. Na discussão que segue, nós vamos considerar que ambos feixes, sinal e prova, têm a mesma cintura,  $w = w_0 = 1$  mm. Para este valor da cintura, o feixe sinal propaga-se através da amostra atômica sem ser perturbado pelos átomos, conservando sua forma durante a propagação dentro da amostra atômica.

Este tem um número de Fresnel  $\aleph = w^2/\lambda L \approx 420 \gg 1$ , com o qual difração do feixe sinal dentro da amostra atômica pode ser ignorada e sua propagação se produz como se estivesse no espaço livre.

Na Fig.6.7 mostramos a densidade de energia, assim como o perfil de intensidade do feixe de prova no plano de observação, para quatro valores diferentes da carga topológica. Inicialmente nós vamos considerar que unicamente a modulação de fase no feixe de prova está presente, fixando artificialmente o coeficiente de absorção  $\alpha(\theta) = 0$ . Como observado na Fig.6.7(a), a densidade de energia do feixe de prova mostra uma pequena região escura no centro deste perfil, correspondente à indução de um feixe de vórtice com carga topológica m = 1 ( $\Delta = 475, R_0 = 2, e \ell = 3000$ ). Este cancelamento da intensidade no centro do perfil é verificado na figura do lado, a qual mostra a intensidade do feixe de prova em função da distancia transversal x' no plano de observação. Como podemos observar nessa figura, o perfil de intensidade mostra um cancelamento da intensidade na parte central deste perfil. No caso da Fig.6.7(b), nós mantivemos os mesmos valores para a razão entre as frequências de Rabi dos feixes sinal-acoplamento e mudamos a dessintonia do feixe sinal para  $\Delta = 238$ . Com este novo valor para a dessintonia, a carga topológica calculada foi de aproximadamente m = 2. Como podemos observar nesta figura o perfil encontrado é semelhante ao encontrado para o caso de m = 1, entretanto a região escura é agora um pouco maior quando comparado para o caso anterior. Isto é verificado mediante o perfil de intensidade mostrado na figura lateral. Como observado nessa figura, a separação entre os dois picos de intensidade é agora maior que para o caso previamente discutido, indicando a geração de um feixe de vórtice com carga topológica maior. Finalmente nas Figs.6.7(c)-(d) mostramos o caso quando o feixe de vórtice gerado tem cargas topológicas m = 3 e m = 4 respectivamente. Para esses valores da carga topológica, a dessintonia do campo sinal foi  $\Delta = 159$  e  $\Delta = 119$ , respectivamente. Em todos os casos, mantivemos  $R_0 = 2$ , e  $\ell = 3000$ . Como mostrado nestas figuras, à medida que a carga topológica aumenta a separação entre os picos de máxima intensidade também aumenta. Esse resultado é consistente com o esperado para vórtices óticos [118–120, 123]. Finalmente podemos indicar que nos quatro casos previamente discutidos, o perfil observado é simétrico.



Figura 6.7: Em todas as figura: Esquerda (densidade de energia do feixe de prova ), Direita (intensidade do feixe de prova no plano de observação em função da distancia transversal x'); para diferentes valores da carga topológica. (a) m = 1, (b) m = 2, (c)m = 3 e (d) m = 4. Aqui,  $R_0 = 2$  e  $\ell = 3000$ .

### 6.3. Resultado e conclusões

Agora vamos a considerar o caso quando o coeficiente de absorção está presente. Neste caso devido à presença da modulação na amplitude no campo de prova, a intensidade do feixe de prova no plano de observação vai ter um perfil destorcido conforme aumentamos o valor da carga topológica devido à modulação de amplitude e absorção sofrida durante sua propagação dentro do meio. Para verificar isso, nós utilizamos os mesmos parâmetros utilizados no caso previamente discutido.

A Fig.6.8 mostra a densidade de energia e a intensidade do feixe de prova em função da distancia transversal x' no plano de observação. No caso da Fig.6.8(a), para os parâmetros atômicos utilizados temos que o coeficiente de absorção no eixo do feixe de prova é  $\alpha(0)\ell=0.066$ , para o qual a transmissão do feixe de prova é aproximadamente de 96%, indicando que a máscara de vórtice induzida transmite mais do 90% da radiação de prova incidente. Portanto devido à baixa absorção, a intensidade do feixe de prova mostra um perfil semelhante ao caso mostrado na Fig.6.7(a) onde o coeficiente de absorção não estava presente. No caso da Fig.6.8(b) observamos que esta mantém ainda uma simetria tanto na densidade de energia quanto na intensidade do feixe de prova no plano de observação, devido a que para a dessintonia sinal de  $\Delta = 238$ , o coeficiente de absorção no eixo do feixe de prova é agora igual a  $\alpha(0)\ell=0,2648$  com o qual a transmissão do feixe de prova é ainda alta,  $t \sim 87\%$ . No caso mostrado nas Figs.6.8(c)-(d) para  $\Delta = 159$  e  $\Delta = 119$ , podemos observar que a densidade de energia do feixe de prova no plano de observação não é mais simétrico devido a que em ambos casos a absorção máxima do feixe de prova é agora maior,  $t \sim 74\%$  e 58% respectivamente. Essa perda de simetria é verificada na figura do lado, a qual mostra o perfil de intensidade do campo de prova no plano de observação. Como podemos observar, este perfil não é mais simétrico devido à modulação na amplitude sofrida pelo feixe de prova devido ao coeficiente de absorção, mas é agora uma função variando espacialmente, devido à variação azimutal da absorção.

A Fig.6.9 mostra o caso quando o feixe sinal é sintonizado para lado azul ( $\Delta < 0$ ) da transição  $|2\rangle \rightarrow |4\rangle$ . Como podemos observar nesta figura, para  $\Delta = -119$ ,  $R_0 = 2$  e  $\ell = 3000$ , o valor da carga topológica é igual a m = -4. O perfil de intensidade é semelhante ao observado na Fig.6.8(d), mas refletida em relação àquela, indicando a geração de um feixe de vórtice de carga topológica



Figura 6.8: Em todas as figuras: Esquerda (densidade de energia do feixe de prova), Direita (intensidade do feixe de prova no plano de observação em função da distancia transversal x'); para diferentes valores da carga topológica. (a) m = 1, (b) m = 2, (c)m = 3, e (d) m = 4. Aqui,  $R_0 = 2$ e  $\ell = 3000$ .



Figura 6.9: (a) Densidade de energia do feixe de prova. (b) Intensidade do feixe de prova no plano de observação em função da distancia transversal x'. Em ambos casos a carga topológica de foi de m = -4

negativa.

Vórtices de carga topológica com m > 1 podem também ser gerados sem distorção mantendo-se os parâmetros de excitação fixos e mudando-se a máscara de intensidade aplicada ao feixe sinal. Ou seja, os parâmetros de excitação são escolhidos de modo a induzirem uma fase  $2\pi$  com baixa absorção. A seguir, a máscara é desenhada modulo  $2\pi$ , tal que, agora, a máscara define a carga topológica. Para isso, aplicamos a função mod, assim

$$R^2 = \frac{R_0^2}{2\pi} \operatorname{mod}[m\theta, 2\pi], \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$
(6.10)

onde m é escolhido a priori. A Fig.6.10 ilustra uma máscara correspondente a carga topológica,



Figura 6.10: Máscara de intensidade para o feixe sinal, com uma carga topológica de m = 3, para  $R_0 = 2$ ,  $\ell = 3000$  e  $\Delta = 475$ .



Figura 6.11: Máscara de intensidade para o feixe sinal com m = 3. (a) Parte real (curva tracejada) e imaginaria (curva continua) da susceptibilidade em função do ângulo azimutal  $\theta$ . (b) Função de transmissão (curva tracejada) e fase (curva continua) em função do ângulo azimutal  $\theta$ .

m = 3. Nesta máscara, observamos três zonas de modulação azimutal de intensidade, cada zona levando a uma modulação azimutal de fase que vai de zero a  $2\pi$ . A Fig.6.11(a) mostra a parte real (curva tracejada) e imaginaria (curva continua) da susceptibilidade, para m = 3. Como podemos observar nesta figura três zonas de modulação são induzidas na susceptibilidade do feixe de prova. A Fig.6.11(b) mostra a função de transmissão (curva tracejada) e fase (curva continua) correspondente a esta máscara.

Na discussão que segue vamos tomar como parâmetros de excitação  $R_0 = 2$ ,  $\Delta = 475$ ,  $\ell = 3000$ e  $\lambda = 795$  nm. Sob estas condições, a mudança de fase de prova pico é  $\phi_0 \approx 2\pi$  enquanto que a transmissão de prova é mantida  $\exp(-\alpha \ell/2) \gtrsim 0.96$ . Na Fig.6.12 vemos o vórtice gerado. Devido à baixa modulação da absorção, mesmo para uma carga topológica m = 3, temos agora um vórtice bastante simétrico. De maneira similar, vórtices com outros valores de carga topológica podem ser gerados.

Em conclusão, temos proposto um novo esquema no qual foi possível observar a geração de feixe de vórtices sob esquemas de excitação que explora não-linearidades óticas gigantes num vapor atômico excitado com níveis baixos de luz. Explorando as grandes mudanças de fases de modulações de fase cruzada proporcionada pela transparência induzida eletromagneticamente, feixes de vórtices podem ser induzidos no feixe de prova por um feixe sinal com intensidades abaixo do nível de



Figura 6.12: (a) Densidade de energia do feixe de prova. (b) Intensidade do feixe de prova no plano de observação em função da distancia transversal x', para uma máscara de intensidade do feixe sinal modulo  $2\pi$ , com carga topológica de m = 3.

saturação de uma transição atômica.

### Capítulo 7

# Conclusões

Nesta tese apresentamos os resultados dos trabalhos que realizamos sobre uma investigação teórica de efeitos óticos não-lineares transversais sob esquemas de excitação que geram não-linearidades óticas gigantes em um meio atômico de quatro níveis sobre a condição da transparência induzida eletromagneticamente. Vários efeitos óticos não-lineares manifestados por EIT em um sistema atômico com baixos níveis de luz, tais como emissão cônica, focalização induzida e geração de feixes de vórtice são descritos e analisados.

No capítulo 4 apresentamos os resultados do estudo sobre o efeito de emissão cônica induzida eletromagneticamente, na qual nós exploramos as não-linearidades gigantes que um vapor atômico pode apresentar sob EIT para gerar uma mudança de fase de XPM variando radialmente em um feixe de prova. Um feixe sinal com perfil transversal não homogêneo pode levar a uma mudança de fase de prova que depende da distância transversal do eixo de feixe. Campos de radiação no comprimento do feixe de prova podem interferir, criando vários anéis concêntricos na região do campo distante. Expressões muito simples para o número dos anéis e o diâmetro do anel mais externo foram obtidas e verificadas mediante a simulação. Finalmente, como esperado mostramos que os anéis de emissão cônica observado no perfil espacial no feixe de prova são resultado da mudança de fase de modulação de fase cruzada induzida no feixe de prova pelo feixe sinal.

No capítulo 5 apresentamos os resultados do estudo da focalização induzida eletromagneticamente, na qual nós analisados a focalização do campo de prova induzida pelo feixe sinal. Explorando as não-linearidades óticas experimentadas numa mostra atômica sob a condição de EIT, focalização do feixe de prova pode ser alcançada com intensidades dos campos bem abaixo do nível de saturação de uma transição atômica. Concluímos que devido ao perfil transversal do feixe sinal, variações espacias no índice de refração podem ser induzidas na amostra atômica, as quais serão experimentadas pelo feixe de prova ressonante. Mediante o desenho adequado de uma máscara para a intensidade do feixe sinal diversos perfis podem ser impressos na mostra atômica, aqui controlando as propriedades de focalização do feixe de prova. Neste caso obtivemos uma expressão muito simples para o comprimento focal, a qual depende dos parâmetros atômicos, tal como: a razão entre as frequências de Rabi sinal-acoplamento, dessintonia sinal e profundidade ótica. Com a escolha adequada destes parâmetros de excitação diversos valores para o comprimento focal podem ser obtidos com absorção muito baixa.

No capítulo 6 discutimos um fenômeno diferente, a geração de feixes de vórtices em um sistema atômico de quatro níveis. Analisamos a geração de feixes de vórtices, a qual pode ser alcançada sob esquemas de excitação que geram não-linearidades óticas gigantes experimentadas no sistema atômico. Concluímos que mediante o desenho de uma máscara de intensidades para o feixe sinal variando azimutalmente, a transferência desta singularidades para o feixe de prova pode ser completada sobre esquemas de excitação que exploram o efeito da transparência induzida eletromagneticamente. Através da não-linearidade ótica, a singularidade na frequência de Rabi do feixe sinal, é convertida em uma singularidade na fase do feixe de prova levando à geração do vórtice ótico. Uma expressão simples para a carga topológica foi obtida, a qual mostramos que depende dos parâmetros atômicos, com o qual vórtices de cargas topológicas diferentes podem ser gerados. Além disso, mantendo os parâmetros de excitação fixos de modo a induzirem uma fase de  $2\pi$ , com baixa absorção, desenhamos uma máscara de intensidade modulo  $2\pi$  para o feixe sinal, tal que a máscara agora define a carga topológica, de tal modo que agora os vórtices gerados não apresentem a distorção observada como no caso em que a carga topológica era dependente dos parâmetros atômicos, onde os coeficientes de absorção e a fase variam azimutalmente.

- S. E. Harris. Laser without inversion: Interference of lifetime-broadened resonances. Phys Rev Lett., 62, 1033, 1989. (Cited on page 1.)
- [2] M. O. Scully, S. Y. Zhu and A. Gavrielides. Degenerate quantum-beat laser: Lasing without inversion and inversion without lasing. Phys. Rev. Lett., 62, 2813, 1989. (Cited on page 1.)
- [3] Shang-qing Gong, Hua-guo Teng and Zhi-zhan Xu. Lasing without population inversion in a simple three-level atomic system. Phys. Rev. A., 51, 3382-3385, 1995. (Cited on page 1.)
- [4] M. O. Scully. Enhancement of the indice of refraction via quantum coherence. Phys. Rev. Lett.,
  67, 1855-1858, 1991. (Cited on page 1.)
- [5] M. O. Scully and Shi-Yao Zhu. Ultra-large index of refraction via quantum interference. Opt. Commun., 87, 134, 1992. (Cited on page 1.)
- [6] U. Rathe, M. Fleisschhauer, S. Y. Zhu, T. W. Hansch and M. O. Scully. Nonlinear theory of index enhancement via quantum coherence and interference. Phys. Rev. A., 47, 4994-5002, 1993. (Cited on page 1.)
- [7] S. E. Harris. Electromagnetically induced transparency. Phys. Today, 70, 011801, 2004. (Cited on page 1.)
- [8] S. E. Harris, J. E. Field and A. Kasapi. Dispersive properties of Electromagnetically induced transparency. Phys. Rev. A, 46, R29-R32, 1992. (Cited on page 1.)
- [9] S. E. Harris, J. E. Field and A. Imamoğlu. Nonlinear optical processes using electromagnetically induced transparency. Phys. Rev. Lett, 64, 1107-1110, 1990. (Cited on page 1.)
- [10] K. J. Boller, A. Imamoğlu and S. E. Harris. Observation of electromagnetically induced transparency. Phys. Rev. Lett, 66, 2593-2596, 1991. (Cited on pages 2 and 30.)

- [11] M. Xiao, Yong-qing Li, Shao-zheng Jin and Julio Gea-Banacloche. Measurement of dispersive properties of electromagnetically induced transparency in rubidium atoms. Phys. Rev. Lett, 74, 6666-669, 1995. (Cited on page 2.)
- [12] G. G. Pandmabandu, G. R. Weich, I. N. Shubin, E. S. Fry, D. E. Nikonov, M. D. Lukin and M. O. Scully. Laser oscillation without population inversionin a sodium atomic beam. Phys. Rev. Lett, 76, 2053-2056, 1996. (Cited on page 2.)
- [13] S. E. Harris and L. V. Hau. Nonlinear optics at low light levels. Phys. Rev. Lett, 82, 4611-4616, 1997. (Cited on page 2.)
- [14] L. V. Hau, S. E. Harris, Zachary Dutto, Cyrus H. Behroozi. Ligh spedd reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas. Nature, 397, 594-598, 1999. (Cited on pages 2 and 38.)
- [15] S. Inouye, R. F. Low, S. Gupta, T. Pfau, A. Gorlitz and et.al. Amplification of Ligth and Atoms in a Bose-Einstein Condesate. Phys. Rev. Lett., 85, 4225-4228, 2000. (Cited on page 2.)
- [16] A. V. Turukhin, V. S. Sudarshana, M. S. Shahriar, J. A. Musser and et, al. Observation of Ultrslow and Store Light Pulse in a Solid. Phys. Rev. Lett, 88, 023602, 2001. (Cited on page 2.)
- [17] H. Kang, G. Hernandez, and Y. Zhu. Superluminal and slow ligth propagation in cold atoms. Phys. Rev. A, 70, 011801, 2004. (Cited on page 2.)
- [18] M. Fleischhauer and M. D. Lukin. Dark-State polaritons in Electromagnetically induced transparency. Phys, Rev. Lett., 84, 5094-5097, 2000. (Cited on page 2.)
- [19] M. D. Lukin, S. F. Yelin and M. Fleischhauer. Entanglement of atomic ensembles by trapping correlated photon state. Phys. Rev.Lett, 84, 4232-4235, 2000. (Cited on page 2.)
- [20] T. Chaneliere, D. N. Matsukevich, S. D. Jenkins, S. Y. Lan, T. A. B. Kennedy and A. Kuzmich.
   Storage and retrieval of single photons transmitted between remote quantum memories. Nature, 438, 833-836, 2005. (Cited on page 2.)

- [21] A. Peng, M. Johnsson, W. P. Bowen, P. K. Lan, H-A. Bachor and J. J. Hope. Squeezing and entanglement delay using slow light. Phys. Rev. A., 71, 033809, 2005. (Cited on page 2.)
- [22] E. Harris and Y. Yamamoto. Photon switching by quantum interference. Phys. Rev. Lett., 81, 3611-3614, 1998. (Cited on pages 2 and 63.)
- [23] J. Clarke, H. Chen and W. A. van Wijngaarden. Electromagnetically induced transparency and optical switching in a rubidium cascade system. Appl Opt., 40, 2047-2051, 2001. (Cited on page 2.)
- [24] C. Liu, Z. Dutton, C. H. Behroozi, and L. V. Hau. Observation of coherent optical information storage in an atomic medium using halted light pulses. Nature, 409, 490, 2001. (Cited on pages 2 and 38.)
- [25] D. F. Phillips, A. Fleisschhauer, A. Mair and R. L. Walsworth. Storage of light in vapor atomic. Phys. Rev. Lett, 86, 783-786, 2001. (Cited on page 2.)
- [26] O. Kocharovskaya, Y. Rostovtsev and M. O. Scully. Stopping Light via Hot Atoms. Phys. Rev. Lett, 86, 628-631, 2001. (Cited on page 2.)
- [27] M. Bajcsy, A. S. Zibrov and M. D. Lukin. Stationary pulse of ligth in an atomic medium. Nature.,
  426, 638-641, 2003. (Cited on page 2.)
- [28] R. G.Beausoleil, W. J. Munro, D. A. Rodrigues and T. P. Spiller. Aplications of electromagnetically induced transparency to quantum information processing. J. Mod. Opt., 51, 2441-2448, 2004. (Cited on page 2.)
- [29] S. D. Barrett, P. K. Nemoto, R. G. Beausolei, W. J. Munro and T. P. Spiller. Symmetry analyser for nodestructive Bell-state detection using weak nonlinearities. Phys. Rev. A., 71, 060302, 2005. (Cited on pages 2 and 40.)

- [30] A. D. Greentree, R. G. Beausoleil, L. C. L. Hollenberg, W. J. Munro, K. Nemoto, S. Prawer and T. P. Spiller. Single photon quantum non-demolition measurements in the presence of inhomogeneous broadeing. New Journal of Physics., 11, 093005, 2009. (Cited on pages 2, 3 and 40.)
- [31] Mattias T. Johnsson and M. A. Peng, M. Fleischhauer. Quantum theory of resonantly enhanced four-wave mixing: Mean-field and exact numerical solutions. Phys. Rev. A., 66, 043808, 2002;
  A. SZibrov, M. D. lukin, and M. O Scully. Nondegerate Parametric self-Oscillation via Multiwave Mixing in Coherent Atomic Media. Phys. Rev. Lett., 83, 4049-4052, 1999. (Cited on page 2.)
- [32] A. Furusawa et.al., Unconditional Quantum Teleportation. Science, 282,5389, 1998. (Cited on page 2.)
- [33] L.-M. Duan et al., Long-distance quantum communication with atomic ensembles and linear optics. Nature, 414, 413-418, 2001. (Cited on page 2.)
- [34] C. H. van der Wal et al., Atomic Memory for Correlated Photon State. Science, 301, 196, 2003;
   A. Kuzmich et al., Generation of nonclassical photon pairs for scalable quantum communication with atomic ensembles. Nature, 423,731, 2003. (Cited on page 2.)
- [35] Carlo Ottaviani et al., Polarization Qubit Phase Gate in Drive Atomic Media. Phys Rev. Lett.,
   90, 197902, 2003; M. O. Scully and Zubiary, QuantumOptics (Cambridge University Press,
   Cambridge, 1997) (Cited on page 2.)
- [36] J. Sheng, X. Yang, U. Khadka and M. Xiao. All-optical switching in an N-type four-level atomcavity system. Opt. Express., 19, 17059, 2011. (Cited on page 2.)
- [37] Q. A. Turchette, C.J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi and H. J. Kimble. Measurement of Conditional Phase Shifts for Quantum Logic. Phys. Rev. Lett., 75, 4710, 1995. (Cited on pages 3 and 40.)
- [38] H. Schmidt and A. Imamoğlu. Giant Kerr nonlinearities obtained by electromagnetically induced transparency. Opt. Lett, 21, 1936, 1996. (Cited on pages 3 and 54.)

- [39] Hoonsoo Kang and Yifu Zhu. Observation of Large Nonlinearity at Low Light Intensities. Phys. Rev. Lett., 91, 093601, 2003. (Cited on pages 3, 43 and 58.)
- [40] Shujing Li, Xudong Yang, Xuemin Cao, Chunhong Zhang, Changde Xie and Hai Wang. Enhanced Cross-Phase Modulation Based on a Double Electromagnetically Induced Transparency in a Four-Level Tripod Atomic System. Phys. Rev. Lett., 101, 073602, 2008. (Cited on page 3.)
- [41] A. B. Matsko, I. Novikova, G. R. Welch and M. S. Zubairy. Enhancement of kerr nonlinearity by multiphoton coherence. Opt. Express., 28, 96, 2003. (Cited on page 3.)
- [42] Zeng-Bin Wang, Karl-Peter Marzlin, and Barry C. Sanders. Large cross-phase modulation between slow copropagating weak pulses in <sup>87</sup>Rb. Phys. Rev. Lett., 97, 063901, 2006. (Cited on page 3.)
- [43] Shujing Li, Xudong Yang, Xuemin Cao, Chunhong Zhang, Changde Xie and Hai Wang. Enhanced cross-phase modulation based on double electromagnetically induced transparency in a four level tripod atomic system. Phys. Rev. Lett., 101, 073602, 2008. (Cited on pages 3 and 43.)
- [44] Hsiang-Yu Lo, Po-Ching Su, and Yong-Fan Chen. Low-light-level cross-phase modulation by quantum interference. Phys. Rev. A., 81, 053829, 2010. (Cited on pages 3 and 47.)
- [45] Hsiang-Yu Lo, Po-Ching Su, Yen-Chun Che, Hao-Chung Chen, Jun-Xian Chen and et.. Electromagnetically induced transparency based cross phase modulation at attojoule levels. Phys. Rev. A., 83, 041804, 2011. (Cited on page 3.)
- [46] Bor-Wen Shiau, Meng-Chang Wu, Chi-Ching Lin and Ying-Cheng Chen. Low-Light-Level Cross-Phase modulation with double slow light pulses. Phys. Rev. Lett., 106, 193006, 2011. (Cited on page 3.)
- [47] H. Wang, D. Goorskey and M. Xiao. Enhanced kerr nonlinearity via atomic coherence in a three level atomic system. Phys. Rev. Lett., 87, 073601, 2011. (Cited on page 3.)

- [48] Luis E. E. de Araujo. Electromagnetically Induced phase grating. Opt. Lett., 35, 977, 2010.(Cited on page 3.)
- [49] Silvânia Alves de Carvalho Grades de difração induzidas eletromagneticamente em vapores atômicos. Tese de Doutorado, 2011 (Cited on page 3.)
- [50] M. Fleischhauer, A. Imamoğlu and J. P. Marangos Electromagnetically Induced Transparency:
   Optics in coherent media. Rev. Mod. Phys., 77, 633, 2005. (Cited on pages 3 and 29.)
- [51] R. R. Moseley, S. Shepherd, D. J. Fulton, B. D. Sinclair and M. H. Dunn. Spatial Consequences of Electromagnetically Induced Transparency: Observation of Electromagnetically Induced Focusing. Phys. Rev. Lett, 74, 670-673, 1995. (Cited on pages 3, 61 and 65.)
- [52] R. R. Moseley, S. Shepherd, D. J. Fulton, B. D. Sinclair and M. H. Dunn. Electromagneticallyinduced focusing. Phys. Rev. Lett, 53, 408-415, 1996. (Cited on pages 3, 4, 61 and 65.)
- [53] D. Vitali, M. Fortunato, and P. Tombesi. Complete Quantum Teleportation with a Kerr Nonlinearity. Phys. Rev. Lett., 85, 445, 2000. (Cited on page 3.)
- [54] Gong Shang-Qing and Xu Zhi-Zhan. Electromagnetically Induced Focusing in a Λ-Type medium. Acta Physica Sinica, 6, 13, 1997. (Cited on pages 4 and 65.)
- [55] M. Fleischhauer, C. H. Keitel and M. O. Scully. Resonantly enhanced refractive index without absorption via atomic coherence. Phys. Rev. A., 46, 1468-1487, 1992. (Cited on page 4.)
- [56] M. O. Scully. From lasers and masers to phaseonium and phasers. Phys. Rports., 219, 191-201, 1992. (Cited on page 4.)
- [57] L. Zhaom, W. Duan and S. F. Yelin. All-optical Fresnel lens in coherent media: controlling image with image. Optics Express., 19, 981, 2011. (Cited on pages 4 and 61.)
- [58] D. Grischkowsky. Self-Focusing of Light by Potassium Vapor. Phys. Rev. Lett, 24,866-869, 1970.
   (Cited on page 5.)

- [59] I. Golub, R. Shuker, G. Erez. On the optical characteristics of the conical emission. Opt. Commun, 57,143-145, 1986. (Cited on page 5.)
- [60] D. J. Harter, P. Narum, M. G. Raytner, and R. Boyd. Four-Wave Parametric Amplification of Rabi Sidebands in Sodium. Phys. Rev. Lett, 46, 1192-1195, 1981. (Cited on page 5.)
- [61] D. J. Harter, P. Narum and R. Boyd. Four-wave mixing resonantly enhanced by ac-Stark-split levels in self-trapped filaments of light. Phys. Rev. A, 29,739-748, 1984. (Cited on page 5.)
- [62] M. L. Ter-Mikaelian, G. A. Torossian, G. G. Grigoryan. Conical emission in the quasiresonant media as a result of self-phase modulation. Opt. Commun, 119, 56-60, 1995. (Cited on pages 5 and 56.)
- [63] G. Brechignac, Ph. Cahuzac, A. Debarre. Anomalous off-axis emissions on the resonance strontium line, illuminated by a quasi-resonant pulsed laser light. Opt. Commun, 35, 87-91, 1980. (Cited on page 5.)
- [64] R. C. Hart, Li You, A. Gallagher, J. Cooper. Failures of the four-wave mixing model for cone emission. Opt. Commun, 111, 331-337, 1994. (Cited on page 5.)
- [65] B. D. Paul, M. L. Dowell, A. Gallagher and J. Cooper. Observation of conical emission from a single self-trapped beam. Phys. Rev. A, 59, 4784-4796, 1999. (Cited on page 5.)
- [66] M. Fernández-Guasti, J. L. Hernández-Pozos, E. Haro-Poniatowski. L.A. Julio-Sánchez. Anomalous conical emission in calcium vapour. Opt. Commun, 108, 367-376, 1994. (Cited on page 5.)
- [67] C. H. Skinner and P. D. Kleiber. Observation of anomalous conical emission from laser-excited barium vapor. Phys. Rev. A, 21, 151-156, 1980. (Cited on page 5.)
- [68] W. Chalupczak, W. Gawlik, J. Zachorowski. Degenerate parametric emission in dense barium vapour. Opt. Commun, 111, 613-622, 1994. (Cited on page 5.)

- [69] J. F. Valley, G. Khitrova, H. M. Gibbs, J. W. Grantham and Xu Jiajin. cw conical emission:
   First comparison and agreement between theory and experiment. Phys. Rev. Lett, 64, 2362-2365, 1990. (Cited on page 5.)
- [70] S. D. Durbin, S. M. Arakelian and Y. R. Shen. Laser induced diffraction rings from a nematic liquid crystal film. Opt. Lett, 6, 411, 1981. (Cited on page 5.)
- [71] Won-kyu Lee, Young-Chul, Jin-Ho Jeon, Jai-Hyung Lee and Joon-sung Chang. Conical emission as a result of self-phase modulation in samarium vapor under the near-resonant condition. J. Opt. Soc Am. B, 18, 101, 2001. (Cited on page 5.)
- [72] V. Pilla, L. de S. Menezes, M. A. R. C. Alencar and C. B. de Araújo. Laser-induced conical diffraction due to cross-phase modulation in a transparent medium. J. Opt. Soc Am. B, 20, 1269, 2003. (Cited on page 5.)
- [73] D. J. Harter and R. Boyd. Conical emission due to four-wave mixing enhanced by the ac Stark effect in self-trapped filaments of light. Opt. Lett., 7, 491-493, 1982. (Cited on pages 5 and 57.)
- [74] A. I. Plekhanov, S. G. Rautian, V. P. Safonov, B. M. Chernobrod. Frequency-angular diffusion of intense quasiresonant radiation. JETP. Lett., 36, 232-234, 1982. (Cited on page 5.)
- [75] I. Golub, G. Erez and R. Shuker. Cherenkov emission due to laser-induced moving polarisation in sodium. J. Phys. B: At. Mol. Phys., 19, 115-120, 1986. (Cited on page 5.)
- [76] L. You, J. Mostowski, J. Cooper and R. Shuker. Cone emission from laser-pumped two-level atoms. Phys. Rev A., 44, R6998-R7001, 1991. (Cited on page 5.)
- [77] I. Golub, G. Erez and R. Shuker. Anomalous blue shifted emission near the D1 transition from laser-excited sodium vapour. J. Phys. B: At. Mol. Phys., 20, 63-68, 1987. (Cited on page 5.)
- [78] M. E. Crenshaw and C. D. Cantrell. Conical emission as a result of pulse breakup into solitary waves. Phys. Rev. A., 39, 126-148, 1989. (Cited on page 5.)

- [79] Y. Ben-Aryet. Cooperative effects in cone emission from laser-pumped two-level atoms. Phys. Rev. A., 56, 854-858, 1997. (Cited on pages 5 and 57.)
- [80] R. W. Boyd, S. G. Lukishova, Y. R. Shen. Selffocusing: Past and Present: Fundamentals and Prospects. Springer, New York., 2009. (Cited on pages 5 and 45.)
- [81] G. De Filipo, and et al. Population of metastable barium associated with conical emission. Opt. Commun., 144, 315-321, 1997. (Cited on page 5.)
- [82] J. F. Nye, M. V. Berry. Dislocations in wave trains. Proc. Roy. Lond. A, 336, 165, 1974. (Cited on page 5.)
- [83] J. Leach, M. J. Padgett, S. M. Barnett, S. Franke-Arnold, J. Courtial. Measuring the orbital angular momentum of a single photon. Phys. Rev. Lett., 88, 257901, 2002. (Cited on page 5.)
- [84] L. Allen, M. J. Padget, M. Babiker. The orbital angular momentum of light. Prog. Opt., 39, 291-372, 1999. (Cited on page 6.)
- [85] M. S. Sosking and M. V. Vasnetsov. Singular optics. Prog. Opt., 42, 219-276, 2001. (Cited on page 6.)
- [86] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, J. P. Woerdman. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. Phys. Rev. A., 45, 8185, 1992. (Cited on page 6.)
- [87] H. He, M. E. J. Friese, N. R. Heckenberg and H. Rubinztein-Dulop. Direct Observation of Transfer of Angular Momentum to Absorptive Particles from a Laser Beam with a Phase Singularity. Phys. Rev. Lett., 75, 826-829, 1995. (Cited on pages 6 and 79.)
- [88] K. Dholakia, G. Spalding and M. MacDonald. Optical tweezers: The next generation. Phys.
   World., 15, 31-35, 2002. (Cited on page 6.)
- [89] D. G. Grier. A revolution in optical manipulation. Nature., 424, 810-816, 2003. (Cited on page 6.)

- [90] S. Fürhapter, A. Jesacher, S. Bernet, M. Ritsch-Marte. Spiral interferometry. Opt. Lett., 30, 1953, 2005. (Cited on page 6.)
- [91] S. W. Hell. Toward fluorescence nanoscopy. Nat. Biotechnol., 21, 1347, 2003. (Cited on page 6.)
- [92] G. Foo, D. M. Palacios, J. Swartzlander Jr. Optical vortex coronagraph. Opt. Lett., 30, 3308, 2005. (Cited on page 6.)
- [93] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, A. Zeillinger. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. Nature., 412, 313, 2001. (Cited on page 6.)
- [94] M. F. Andersen et al.. Quantized rotation of atoms from photons with orbital angular momentum.
   Phys. Rev. Lett., 97, 170406, 2006. (Cited on page 6.)
- [95] S. Franke-Arnold, L. Allen, M. Padget. Advances in optical angular momentum. Laser Photon. Rev., 2, 299, 2008. (Cited on page 6.)
- [96] M. O. Scully and M. S. Zubairy. Quantum Optics. Cambridge University Press., 1997. (Cited on page 10.)
- [97] S. Barrreiro and J. W. R. Tabosa. Generation of Light carrying orbibtal angular momentum via induced coherence grating in cold atoms. Phys. Rev. Lett., 90, 133001, 2003. (Cited on page 6.)
- [98] R. Pugatch, M. Shuker, O. Firstenberg, A. Ron, and N. Davidson. Topological stability of stored optical vortices. Phys. Rev. Lett., 98, 203601, 2007. (Cited on pages 6 and 79.)
- [99] L. Zhao, T. Wang and S. F. Yelin. Two-dimensional all-optical spatial light modulation with high speed in coherent media. Opt. Lett., 34, 1930, 2009. (Cited on page 6.)
- [100] W. P. Schleich. Quantum Optics in Phase Space. Wiley-vch, 2001. (Cited on page 12.)
- [101] L. Allen abd J. H, Eberly. Optical resonance and two-level atoms. Dover Publications., 1987.(Cited on page 16.)

- [102] M. Fox. Quantum optics. Oxford master series in physics, 2006. (Cited on page 16.)
- [103] J. A. Abate. Preparation of atomic sodium as a two-level atom. Optics Communications., 10, 269-272, 1974. (Cited on page 17.)
- [104] J. Gea-BanaclocheA. Yong-qing Li, Shao-zheng Jin, and Min Xiao. Electromagnetically Induced Transparency in ladder-type inhomogeneously broadened media: Theory and experiment. Phys. Rev. A., 51, 576-584,1974. (Cited on page 26.)
- [105] Boyd, R. W. Nonlinear Optics. Academic Press, 2008. (Cited on pages 27, 29, 30, 43 and 45.)
- [106] J. Harold. M and Peter van der Straten. Laser Cooling and Trapping. Academic Press., 2003. (Cited on page 29.)
- [107] M. Shuker, O. Firstenberg, R. Pugatch, A. Ron, and N. Davidson. Storing Images in Warm Atomic Vapor. Phys. Rev. Lett, 100, 223601, 2008. (Cited on page 39.)
- [108] A. I. Lvovsky, B. C. Sanders and Wolfgang Tittel. Optical quantum memory. Nature Photonics., 3, 706, 2009. (Cited on page 39.)
- [109] T. H. Maiman. Stimulated Optical Radiation in Ruby. Nature, 187, 493,1960. (Cited on page 39.)
- [110] S.D. Durbin, S.M. Arakelian, and Y. R. Shen. Laser-induced diffraction rings from a nematicliquid-crystal film. Opt. Lett., 6, 411, 1981. (Cited on pages 55 and 56.)
- [111] W. Ketterle, K. B. Davis, M. A. Joffe, A.Martin and D. E. Pritchard. High Densities of Cold Atoms in a Dark Spontaneous-Force Optical Trap. Phys. Rev. Lett., 70, 2253, 1993. (Cited on page 59.)
- [112] Yen-Wei lin, Hung-Chin Chou, P. P. dwivedi, Ying-Cheng Chen, and Ite A. Yu. Using a pair of rectangular coils in the MOT for the production of cold clouds with large optical density. Opt. Express., 16, 3753, 2008. (Cited on page 59.)

- [113] E. M. Becerra-Castro and Luis E. E. de Araujo. Electromagnetically induced conical emission. Phys. Rev. A., 82, 065802, 2010. (Cited on pages 59 and 76.)
- [114] J. Marangos. Focusing light with light. Nature, 374, 679, 1995. (Cited on page 61.)
- [115] M. V. Pack, R. M. Camacho, and J. C. Howell. Transients of the electromagnetically-inducedtransparency-enhanced refractive Kerr nonlinearity. Phys. Rev. A., 76, 033835, 2007. (Cited on pages 58 and 64.)
- [116] P. Stellman, K. Tian and G. Barbastathis. Desing of Gradient Index (GRIN) lens using photonic non-crystal. Laser and Electro-Optics., CLEO, 2007. (Cited on pages 67 and 69.)
- [117] D. Moretti, D. Felinto and J. W. R. Tabosa. Collapses and revivals of strored orbital angular momentum of light in a cold-atom emsemble. Phys. Rev. A., 79, 023825, 2009. (Cited on page 79.)
- [118] A. M. Yao and M. J. Padgett. Orbital angular momentum: origins, behavior and applications. Advances in Optics and Photonics, 3, 161, 2011. (Cited on pages 80 and 87.)
- [119] David L. Andrews. Structure Light and Its Applications: An Introduction to Phase-Structured Beams and Nanoscale Optical Forces. Academic Press, 2008. (Cited on pages 80 and 87.)
- [120] J. P. Torres and Lluis Torner. Twisted Photons. Wiley-Vch, 2011. (Cited on pages 80 and 87.)
- [121] R. A. Beth. Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light. Phys. Rev., 50, 115, 1936. (Cited on page 80.)
- [122] J. D. Jackson. Classsical electrodynamics. New York, N. Y. : J. Wiley., 3.ed. 1999. (Cited on page 80.)
- [123] A. V. Carpentier, H. Michinel and J. R. Salgueiro. Making optical vortice with computergenerated holograms. Am. J. Phys, 76, 10, 2008 (Cited on page 87.)

- [124] A. Javan, O. Kocharoskaya, H. Lee, and M. O. Scully. Narrowing of electromagnetically induced transparency resonance in a Dopple-broadened medium. Phys. Rev. A., 66, 013805, 2002. (Not cited.)
- [125] M. Erhard and H. Helm. Buffer-gas effects on dark resonances: Theory and experiment. Phys. Rev. A., 63, 043813, 2001. (Not cited.)
- [126] U. Masaya, A. Tonomura. Generation of electron beams carrying orbital angular momentum. Nature., 464, 737, 2010. (Cited on page 81.)
- [127] M. W. Beijersbergen, R. P. Coerwinkel, M. Kristensen, J. P. Woerdman. Helical-wavefront laser besms prodiced with a spiral phaseplate. Opt. Commun., 112, 321, 1994. (Cited on page 81.)