

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN

TESE DE DOUTORADO

**Formulações geométricas da teoria de Dirac e simetrias
latentes da equação de Dirac-Kähler: desenvolvimentos
algébricos e aplicações em teorias de calibre**

Ricardo Antonio Mosna
Orientador: Prof. Dr. Jayme Vaz Jr.

*Tese apresentada ao Instituto de Física Gleb
Wataghin da Universidade Estadual de Campinas
como requisito parcial para a obtenção do título de
Doutor em Ciências.*

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Jayme Vaz Jr. (orientador)
Profa. Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato
Prof. Dr. César Augusto Linhares da Fonseca Jr
Prof. Dr. Francesco Toppan
Prof. Dr. Márcio José Menon

Campinas, 16 de fevereiro de 2004

Estouro de bolha de sabão. Rufem os tambores de brinquedo.

John (João D. Ulhoa) em Isopor, 1999.

Financiamento FAPESP, processo 98/16486-8

Agradecimentos

Agradeço a todos que me ajudaram, ou tentaram me ajudar, no decorrer destes anos de doutorado. Em especial, agradeço profundamente à minha família, pelo suporte, paciência, dedicação e carinho, e ao meu orientador Jayme, por ter aturado meus altos e baixos todo esse tempo, sem nunca perder a paciência e sempre disposto a ajudar em tudo o que fosse possível. Gostaria ainda de expressar minha gratidão aos amigos, por serem amigos . . . donT geT senTimental. it always ends up dRRiveLLLL. Agradeço finalmente à FAPESP, pela bolsa, e ao assessor deste projeto, cujos pareceres foram de grande utilidade.

Resumo

Neste trabalho, obtemos novas formulações multivetoriais da equação de Dirac — através da introdução de estruturas $\mathbb{Z}_2$ -graduadas alternativas em álgebras de Clifford — e exploramos certas simetrias latentes da equação de Dirac-Kähler para a obtenção de modelos de teorias de calibre, particularmente no contexto das interações eletrofracas.

Discutimos ainda como as técnicas desenvolvidas no contexto de tais representações multivetoriais podem ser úteis em outras situações, como na construção de representações quaterniônicas da teoria de Dirac e no problema da reconstrução tomográfica de um espinor de Dirac. Com relação à equação de Dirac-Kähler, inicialmente revisitamos sua bem conhecida degenerescência em termos de quatro equações de Dirac desacopladas, definidas em diferentes ideais da álgebra. A arbitrariedade na escolha de tais ideais define uma simetria global da lagrangiana, que aqui estendemos a uma simetria local. Os campos de calibre resultantes então acoplam os diferentes ideais, de maneira que as interações entre os setores de quiralidade positiva e negativa são naturalmente suprimidas. Ainda, em tal formalismo, as antipartículas são automaticamente representadas na lagrangiana, com as quiralidades corretas. Ao restringirmos as interações àquelas que conservam a carga elétrica, o modelo resultante é equivalente ao modelo eletrofraco simétrico, desde que identifiquemos os léptons (ou quarks) de uma dada geração com os diferentes ideais. Quando a simetria é quebrada, de maneira que os ideais correspondentes ao neutrino (antineutrino) de quiralidade positiva (negativa) permaneçam fixos, o modelo de Glashow-Weinberg-Salam é recuperado. Tal formalismo também nos permite uma interpretação geométrica para o mecanismo de Higgs.

Abstract

In this work, new multivector formulations of the Dirac equation are obtained via the introduction of alternative $\mathbb{Z}_2$ -gradings of Clifford algebras. Certain latent symmetries of the Dirac-Kähler equation are also explored in order to construct gauge theory models, especially in the context of the electroweak interactions. We also discuss how the multivector techniques developed here can be useful in other situations, as in constructing quaternionic representations of the Dirac equation, and in obtaining a tomographic scheme for the state reconstruction of a Dirac spinor.

With respect to the Dirac-Kähler equation, we start by revising its well-known fourfold degeneracy that leads to uncoupled Dirac equations living in minimal left ideals of the Dirac algebra. The arbitrariness in choosing one such system of ideals defines a global symmetry of the Dirac-Kähler Lagrangian. We gauged such symmetry by considering independent choices for the system of minimal left ideals at each spacetime point. The resulting gauge fields then naturally couple the different ideals, in a way that interactions between left-handed and right-handed particles are naturally suppressed. Moreover, the formalism automatically gives rise to a term in the Lagrangian corresponding to the associated antiparticles, with the correct handedness. By restricting the interactions to those conserving electric charge, the resulting model turns out to be equivalent to the symmetric model of electroweak interactions, provided that we identify the leptons (or quarks) of a given generation with the different ideals. When the symmetry is broken, so that the ideals corresponding to the right-handed neutrino and left-handed antineutrino remain fixed, the Glashow-Weinberg-Salam is recovered. The formalism also allows a geometric interpretation for the Higgs mechanism.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Conceitos fundamentais	5
2.1	Preliminares algébricos	5
2.2	Estrutura e classificação das álgebras de Clifford	9
2.3	Representações, ideais e idempotentes	10
2.4	Grupos ortogonais e recobrimentos	12
2.5	Espinores e a álgebra do espaço-tempo	14
2.5.1	Conjuntos espectrais	15
2.6	Espinores e fibrados de Clifford	19
3	$\mathbb{Z}_2$-graduações de álgebras de Clifford e estruturas multivetoriais	27
3.1	$\mathbb{Z}_2$ -graduações de álgebras de Clifford	28
3.2	Compatibilidade com a estrutura multivetorial	30
3.3	Classificação	33
3.4	Aplicações	33
3.4.1	Mudança de assinatura em álgebras de Clifford	34
3.4.2	Álgebras espinoriais	36
4	Representações multivetoriais da teoria de Dirac	39
4.1	Equação de Dirac-Hestenes	40
4.2	Equações multivetoriais generalizadas	42
4.3	Mapas espinoriais	46
4.4	Representações quaterniônicas da teoria de Dirac	48
4.5	Formulação lagrangiana	51
4.6	De volta à equação de Dirac-Hestenes	51
4.7	Covariância da equação de Dirac-Hestenes	53

5	Equação de Dirac-Kähler e interações eletrofracas	57
5.1	Equação de Dirac-Kähler	57
5.2	Simetrias	60
5.2.1	Transformações globais	60
5.2.2	Transformações locais	61
5.2.3	Calibre unitário	64
5.3	Interação entre ideais	67
5.4	Interações eletrofracas	73
5.4.1	Modelo simétrico	74
5.4.2	Modelo de Glashow-Weinberg-Salam	75
5.5	Termos massivos	78
5.6	Transcrição em redes	81
6	Conclusões	83
A	Álgebra	89
A.1	Generalidades	89
A.2	Ideais e idempotentes	91
A.3	Representações	91
B	Alguns conceitos geométricos	93
B.1	Derivada exterior, codiferencial e conexão	93
B.2	Derivadas covariantes em fibrados associados	97
C	Aplicação suplementar: tomografia quântica para espinores de Dirac	101
D	Lista de publicações	115

Capítulo 1

Introdução

O estudo de formulações multivetoriais da equação de Dirac tem-se mostrado um objeto de interesse recorrente, com motivações tanto físicas quanto matemáticas. Como exemplos, podemos citar os trabalhos de Ivanenko, Fock e Landau (1928), Proca (1930), Eddington (1948), Schönberg (1951), Kähler (1962) e Hestenes (1967), além de várias tentativas de discretização de férmions em redes, através da equação de Dirac-Kähler [Bec82, Joo86, Rab82, Lin90, Lin91]. De uma maneira geral, tais estudos têm a característica comum de buscar uma representação de campos espinoriais por meio de entidades geométricas, num sentido que pretendemos tornar mais preciso adiante.

Na abordagem de Hestenes para a teoria de Dirac, espinores são representados por elementos pares da álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$ associada ao espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{M}$. Desta forma, os espinores constituem mais que um espaço vetorial neste contexto, fechando de fato uma álgebra. A representação da equação de Dirac neste caso é dada pela chamada equação de Dirac-Hestenes:

$$e^\mu \partial_\mu \Psi e_{21} - qA\Psi = m\Psi e_0,$$

onde $\{e_\mu\}$ é um referencial em $\mathbb{M}$, correspondendo a um dado observador. Sob uma mudança de referencial, os vetores e_μ se transformam como $e_\mu \rightarrow U^{-1}e_\mu U$, onde U é um elemento do grupo de recobrimento das transformações de Lorentz. A equação acima é então covariante desde que Ψ se transforme por $\Psi \rightarrow \Psi U$. Por outro lado, sabemos que a equação de Dirac usual

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu) |\psi\rangle = m|\psi\rangle$$

é ainda “covariante” sob mudanças de representação $\gamma^\mu \rightarrow S\gamma^\mu S^{-1}$ para as matrizes γ^μ , que não têm análogo imediato no formalismo de Hestenes. Desta forma, somos naturalmente levados a perguntar qual é a contrapartida de tais transformações no contexto multivetorial.

A resposta a que chegamos é que diferentes representações para as matrizes γ^μ induzem diferentes subálgebras $\mathcal{C}\ell_0 \subset \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$ a serem identificadas com o espaço dos espinores [Mos02].

Tais subálgebras constituem uma generalização da parte par usual de uma álgebra de Clifford, e correspondem à subálgebra par (generalizada) de diferentes $\mathbb{Z}_2$ -gradações $\mathcal{C}\ell_0 \oplus \mathcal{C}\ell_1$ de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$. Um exame mais detalhado mostra ainda que as $\mathbb{Z}_2$ -gradações relevantes neste contexto apresentam uma certa compatibilidade com a estrutura multivetorial do espaço-tempo $\mathbb{M}$, de maneira que $\mathbb{M}$ (que pode ser pensado de maneira natural como um subspaço de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$) deve ser preservado pelas projeções $\pi_i : \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}\ell_i$ correspondentes.

Isto nos motivou a identificar e classificar as $\mathbb{Z}_2$ -gradações de álgebras de Clifford que apresentam tal compatibilidade com a estrutura multivetorial correspondente [Mos03a]. Após apresentar no capítulo 2 os conceitos matemáticos fundamentais a serem utilizados neste trabalho, no capítulo 3 caracterizamos precisamente tal classe de $\mathbb{Z}_2$ -gradações (definição 3.3) e, em seguida, obtemos uma classificação completa das subálgebras pares generalizadas $\mathcal{C}\ell_0$ correspondentes. Antes de aplicar tal formalismo no contexto da equação de Dirac, mostramos ainda como tal classe de $\mathbb{Z}_2$ -gradações pode ser utilizada para a obtenção de mapas de mudança de assinatura em uma álgebra de Clifford arbitrária.

No capítulo 4, voltamos à equação de Dirac e, como discutido acima, empregamos as $\mathbb{Z}_2$ -gradações do capítulo 3 para generalizar o procedimento de Hestenes. Desta forma, derivamos versões multivetoriais da equação de Dirac correspondentes a uma ampla classe de representações das matrizes γ^μ . Mostramos também que tal abordagem leva a um procedimento natural para a obtenção de representações quaterniônicas para a equação de Dirac. Ainda neste capítulo, abordamos a questão da covariância dos objetos representados pela equação de Dirac-Hestenes, em espaços possivelmente curvos. Mais precisamente, mostramos que o objeto que aparece na equação de Dirac-Hestenes deve ser considerado uma *representação* de um campo espinorial — explicitamente dependente de uma escolha de referencial espinorial — no fibrado de Clifford $\mathcal{C}\ell(M, g)$ [Mos04a]. Discutimos ainda como tal representação limita a topologia do espaço-tempo M em questão.

Uma outra forma de representação multivetorial de espinores é dada pelo conceito de espinores algébricos. Neste caso, o espaço de estados é identificado com um ideal à esquerda minimal $\mathcal{I}$ da álgebra de Clifford pertinente que, por sua vez, é determinado por um certo idempotente P . Como veremos, diferentes escolhas para a representação das matrizes γ^μ induzem, neste caso, diferentes escolhas de P e, conseqüentemente, diferentes ideais $\mathcal{I}$ a serem identificados com o espaço dos espinores. Como revemos no capítulo 5, tal idéia aparece implicitamente no contexto da equação de Dirac-Kähler (EDK)

$$i(d - \delta)\psi = m\psi,$$

onde d é a derivada exterior e δ é o operador codiferencial no espaço-tempo de Minkowski. Da mesma forma que a equação de Dirac, a EDK pode ser pensada como uma raiz quadrada da equação de Klein-Gordon. Deve-se observar, no entanto, que as equações de Dirac e de Dirac-Kähler descrevem objetos fundamentalmente diferentes. A primeira descreve partículas de spin-1/2, que se transformam portanto como espinores sob transformações de Lorentz. Já os objetos descritos pela EDK se

transformam como formas diferenciais (e portanto tensores) sob a ação do grupo de Lorentz. Apesar disso, é um fato bem conhecido que as equações de Dirac e de Dirac-Kähler são, em um certo sentido, intimamente relacionadas. De fato, no contexto de espaço-tempo chato é possível considerar identifi- cações (não-canônicas) entre formas diferenciais e espinores, no sentido mencionado acima. Nestas circunstâncias, a EDK se decompõe em quatro equações de Dirac desacopladas, definidas em ideais à esquerda minimais de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ [Bec82, Joo86, Rab82, Lin90, Lin91]. Além disso, a arbitrariedade na escolha dos ideais — usados para decompor a EDK em quatro cópias da equação de Dirac — constitui uma simetria global do sistema.

Na última parte desta dissertação, estendemos tal simetria a uma simetria local admitindo sis- temas de ideais que variam continuamente. Os campos de calibre resultantes então acoplam os diferentes ideais da álgebra, de maneira que as interações entre os setores de quiralidade positiva e negativa são naturalmente suprimidas. Em tal formalismo, as antipartículas são automaticamente representadas na lagrangiana, com as quiralidades corretas. A estrutura das interações em tal modelo então sugere que os léptons (ou quarks) de uma dada geração de partículas sejam identificados com os diferentes ideais. Ao restringirmos as interações àquelas que conservam a carga elétrica, o modelo resultante é equivalente ao modelo eletrofraco simétrico [Moh98]. Quando a simetria é quebrada, de maneira que os ideais correspondentes ao neutrino (antineutrino) de quiralidade positiva (negativa) permaneçam fixos, o modelo de Glashow-Weinberg-Salam é recuperado. Finalmente, mostramos que tal formalismo dá origem a uma interpretação geométrica para o mecanismo de Higgs. Neste contexto, o campo de Higgs corresponde essencialmente a uma parametrização do sistema de ideais associados às diferentes partículas [Mos04b].

O capítulo 6 apresenta nossas conclusões gerais. No apêndice A, reunimos e complementamos os conceitos algébricos fundamentais tratados no capítulo 2. O apêndice B discute alguns conceitos geométricos utilizados no texto principal, com atenção especial à teoria de derivadas covariantes em fibrados associados. No apêndice C, anexamos a publicação [Mos03b] onde fazemos uma aplicação da relação entre representações das matrizes γ^μ e idempotentes de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$, discutida acima, ao problema da reconstrução tomográfica de um espinor de Dirac. Finalmente, no apêndice D, rela- cionamos os trabalhos desenvolvidos durante o período deste doutorado, que foram publicados ou estão em preparação.

Capítulo 2

Conceitos fundamentais

Neste capítulo, discutimos brevemente as definições e resultados fundamentais a serem utilizados nos capítulos que seguem. Maiores detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em [Ati64, Ben87, Cho82, Coq82, Law89, Lou97, Nak96].

2.1 Preliminares algébricos

Seja V um espaço vetorial n -dimensional sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Denotaremos a álgebra tensorial (dos tensores contravariantes) sobre V por $T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(V)$, onde $T^k(V)$ é gerado por elementos da forma $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$, com $v_1, \dots, v_k \in V$, e $T^0(V) = \mathbb{R}$. O subespaço de $T^k(V)$ formado pelos tensores anti-simétricos será denotado por $\Lambda^k(V)$ e seus elementos serão chamados de k -vetores. O produto exterior $\wedge$ é definido pela anti-simetrização de $\otimes$:

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\sigma} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)},$$

onde S_k é o grupo das permutações de $\{1, 2, \dots, k\}$. Dada uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V , segue da anti-simetria de $\wedge$ que $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ é uma base de $\Lambda^k(V)$. Com isso, $\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$ e $\Lambda^k(V) = 0$ para $k > n$. Seja $V^{\wedge} = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(V)$ o espaço vetorial 2^n -dimensional dos multivetores sobre V . A álgebra de Grassmann (ou exterior) $\Lambda(V)$ sobre V é definida dotando-se o espaço vetorial $V^{\wedge}$ do produto exterior $\wedge$, de forma que

$$\Lambda(V) = (V^{\wedge}, \wedge).$$

Dado um multivetor $A = A_0 + A_1 + \cdots + A_n$, com $A_k \in \Lambda^k(V)$, denotamos a projeção de A em $\Lambda^k(V)$ por $\langle A \rangle_k = A_k$.

Uma métrica em V é uma aplicação $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear, simétrica e não-degenerada (isto é, $g(x, y) = 0 \ \forall y \in V \Rightarrow x = 0$). Podemos sempre diagonalizar g para encontrar uma base

ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V tal que $g(e_i, e_i) = +1$ se $i \leq p$ e $g(e_i, e_i) = -1$ se $i > p$, para um certo $p \in \{0, 1, \dots, n\}$. Desta forma, dados dois vetores $x, y \in V$, com $x = \sum_i x^i e_i$, $y = \sum_i y^i e_i$, temos

$$g(x, y) = x^1 y^1 + \dots + x^p y^p - x^{p+1} y^{p+1} - \dots - x^{p+q} y^{p+q}.$$

Dizemos que tal g tem assinatura (p, q) . Uma métrica g em V induz um produto interno em $\Lambda^k(V)$, que denotaremos ainda por g , da seguinte maneira. Dados $u_1 \wedge \dots \wedge u_k, v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \Lambda^k(V)$, definimos

$$g(u_1 \wedge \dots \wedge u_k, v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \det(g(u_i, v_j)),$$

e estendemos tal produto a $\Lambda(V)$ declarando $\Lambda^k(V)$ e $\Lambda^l(V)$ ortogonais se $k \neq l$. Assim, dados $A = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \dots + \langle A \rangle_n$ e $B = \langle B \rangle_0 + \langle B \rangle_1 + \dots + \langle B \rangle_n$, temos

$$g(A, B) = \sum_{k=0}^n g(\langle A \rangle_k, \langle B \rangle_k).$$

A métrica g ainda induz um produto interior (ou contração) entre um vetor $u \in V$ e um k -vetor $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ por

$$u \lrcorner (v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} g(u, v_i) v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_k, \quad (2.1)$$

com a extensão linear natural para $u \lrcorner a$, $a \in V^\wedge$. Notamos que dados $u, v \in V$, temos

$$u \lrcorner v = g(u, v).$$

É interessante ainda observar que $\lrcorner$ é o operador adjunto de $\wedge$ em $V^\wedge$, no sentido que $g(A \lrcorner B, C) = g(B, \tilde{A} \wedge C)$, onde $A, B, C \in V^\wedge$ e $(\cdot)^\sim$ é o operador de reversão, introduzido logo a seguir.

Seja V^* o espaço dual de V , isto é, V^* é o espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das aplicações lineares $\alpha : V \rightarrow \mathbb{K}$. A métrica g em V dá origem a um isomorfismo $\tau : V \rightarrow V^*$ entre V e seu dual por $\tau(x) = g(x, \cdot)$. Sob tal isomorfismo, g induz uma métrica g^* em V^* dada por $g^*(\alpha, \beta) := g(\tau^{-1}(\alpha), \tau^{-1}(\beta))$. Dada uma base $\{e_i\}$ de V , escrevamos $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ e denotemos a matriz inversa de (g_{ij}) por (g^{ij}) . Se $\{\theta^i\}$ é a base dual correspondente em V^* (dada por $\theta^i(e_j) = \delta_j^i$), é fácil ver que $g^*(\theta^i, \theta^j) = g^{ij}$ e $\theta^i = g^{ij} \tau(e_j)$.¹ A álgebra exterior sobre V^* é naturalmente dada por $\Lambda(V^*) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(V^*)$. Neste contexto, os elementos de $\Lambda^k(V^*)$ são chamados de k -formas. Finalmente, notamos que os objetos de $\Lambda^k(V^*)$ agem multilinearmente em k -uplas de vetores por $f_1 \wedge \dots \wedge f_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma (f_1 \otimes \dots \otimes f_k)(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$, onde S_k é o grupo das permutações de $\{1, 2, \dots, k\}$. De forma análoga, k -vetores agem naturalmente sobre k -uplas de 1-formas.

¹Estamos utilizando a convenção de Einstein, isto é, somamos sobre índices repetidos.

Álgebras de Clifford

Introduzimos o produto de Clifford (ou geométrico), induzido pela métrica g , no espaço vetorial $V^\wedge = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(V)$ da seguinte forma. Dados $u \in V$ e $A \in V^\wedge$, definimos

$$uA = u \wedge A + u \lrcorner A, \quad (2.2)$$

e estendemos tal produto a todo $V^\wedge$ por linearidade e associatividade. Denotaremos tal álgebra por $\mathcal{Cl}(V, g)$ e a denominaremos álgebra de Clifford associada ao par (V, g) .

Com essa definição, dados dois vetores $x, y \in V$:

$$xy = g(x, y) + x \wedge y, \quad (2.3)$$

e assim

$$xy + yx = 2g(x, y). \quad (2.4)$$

Em particular,

$$\|x\|^2 = x^2, \quad (2.5)$$

onde $\|x\|^2 := g(x, x)$.

Definimos o operador de paridade $(\cdot)^\wedge : V^\wedge \rightarrow V^\wedge$ como a aplicação linear agindo em um k -vetor A_k por $\hat{A}_k = (-1)^k A_k$. Definimos a reversão $(\cdot)^\sim : V^\wedge \rightarrow V^\wedge$ como a aplicação linear agindo em produtos (de Clifford) simples de k -vetores por $(v_1 \cdots v_k)^\sim = v_k \cdots v_1$. Segue que se A_k é um k -vetor, então $\tilde{A}_k = (-1)^{[k/2]} A_k$, onde $[k/2]$ denota a parte inteira de $k/2$. Em termos da álgebra de Clifford, é imediato ver que $(\cdot)^\wedge$ é simplesmente o automorfismo algébrico² gerado pela expressão $\hat{v} = -v$ em vetores $v \in V$. Analogamente, $(\cdot)^\sim$ é o anti-automorfismo algébrico gerado pela expressão $\tilde{v} = v$ em vetores $v \in V$.

É importante notar que a eq. (2.4) não é válida para multivetores arbitrários. De fato, é fácil mostrar que o produto interno entre dois multivetores arbitrários toma a forma

$$g(A, B) = \langle \tilde{A}B \rangle_0, \quad (2.6)$$

como pode ser facilmente verificado em termos de uma base ortonormal de $V^\wedge$. Segue imediatamente uma relação que será bastante utilizada no decorrer deste trabalho:

$$\langle AB \rangle_0 = \langle BA \rangle_0, \quad \forall A, B \in \mathcal{Cl}(V, g). \quad (2.7)$$

Notamos que a eq. (2.7) é análoga à propriedade cíclica do traço em matrizes (cf proposição 2.7).

²Se W é um espaço vetorial, um endomorfismo de W é uma aplicação linear $\varphi : W \rightarrow W$. Um endomorfismo que é inversível é chamado de automorfismo. Denotamos o grupo dos endomorfismos (automorfismos) de W por $\text{End}(W)$ ($\text{Aut}(W)$). Definem-se analogamente endomorfismos e automorfismos algébricos exigindo-se que tais aplicações sejam também homomorfismos de álgebras.

Em várias ocasiões, é útil podermos expressar o produto exterior e a contração em termos do produto de Clifford. No caso em que $u \in V$ e $A \in \mathcal{Cl}(V, g)$, valem as seguintes relações

$$u \wedge A = \frac{1}{2} (uA + \hat{A}u), \quad u \lrcorner A = \frac{1}{2} (uA - \hat{A}u), \quad (2.8)$$

como mostra um cálculo direto.

Dada uma base *ortonormal* $\{e_i\}$ de V , segue da definição do produto de Clifford que $e_i \wedge e_j = e_i e_j$ se $i \neq j$. Segue imediatamente que o k -vetor $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ pode ser escrito como

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} = e_{i_1} \cdots e_{i_k}. \quad (2.9)$$

Ainda no contexto de uma base ortonormal $\{e_i\}$, a eq. (2.4) nos dá $e_i e_j + e_j e_i = 2g_{ij}$, onde $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. Quando um subconjunto $\{E_i\}$ de $\mathcal{Cl}(V, g)$, *não necessariamente* composto de 1-vetores em V , satisfaz a propriedade análoga $E_i E_j + E_j E_i = 2g_{ij}$, dizemos que $\{E_i\}$ é um ONS³. Neste caso, a expressão $E_i E_j + E_j E_i$ não necessariamente representa o produto interno $g(E_i, E_j)$ entre E_i e E_j , que é dado pela eq. (2.6). Se c é um elemento inversível qualquer de $\mathcal{Cl}(V, g)$, a expressão $E_i = c e_i c^{-1}$ claramente dá origem a um exemplo de ONS.

Subálgebra par

O operador de paridade $(\cdot)^\wedge$ induz a seguinte decomposição fundamental de $\mathcal{Cl}(V, g)$ como soma direta de subespaços vetoriais

$$\mathcal{Cl}^+(V, g) = \bigoplus_{k \text{ par}} \Lambda^k(V), \quad (2.10a)$$

$$\mathcal{Cl}^-(V, g) = \bigoplus_{k \text{ ímpar}} \Lambda^k(V), \quad (2.10b)$$

de forma que

$$\mathcal{Cl}(V, g) = \mathcal{Cl}^+(V, g) \oplus \mathcal{Cl}^-(V, g).$$

Segue imediatamente que

$$\mathcal{Cl}^\pm(V, g) \mathcal{Cl}^\pm(V, g) \subseteq \mathcal{Cl}^+(V, g) \quad \text{e} \quad \mathcal{Cl}^\pm(V, g) \mathcal{Cl}^\mp(V, g) \subseteq \mathcal{Cl}^-(V, g), \quad (2.11)$$

de maneira que tal decomposição define uma estrutura $\mathbb{Z}_2$ -graduada em $\mathcal{Cl}(V, g)$ (vide capítulo 3 para maiores detalhes). Notamos que $\mathcal{Cl}^+(V, g)$ é então uma subálgebra, denominada de *subálgebra par usual* de $\mathcal{Cl}(V, g)$. Denominamos ainda $\mathcal{Cl}^-(V, g)$ de parte ímpar usual de $\mathcal{Cl}(V, g)$.

Notamos que, utilizando exatamente o mesmo procedimento acima, podemos definir um produto de Clifford sobre o espaço das formas, de maneira a obtermos a álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(V^*, g^*)$. As construções são completamente análogas às consideradas acima.

³Tal sigla vem da expressão em inglês *orthonormal set*.

Finalmente, observamos que existem várias outras maneiras de se definir as álgebras de Clifford e de Grassmann⁴ (como mostram, por exemplo, o capítulo 14 de [Lou97] e os capítulos 1 e 2 de [Ben87]). Nas definições acima, tanto a álgebra de Grassmann como a álgebra de Clifford são definidas sobre o mesmo espaço vetorial $V^\wedge$ dos multivetores, o que nos permite dar uma interpretação geométrica direta para os elementos de $\mathcal{Cl}(V, g)$.

2.2 Estrutura e classificação das álgebras de Clifford

Um espaço vetorial real V munido de uma métrica de assinatura (p, q) será denotado a seguir simplesmente por $\mathbb{R}^{p,q}$. Neste caso, a álgebra de Clifford real correspondente $\mathcal{Cl}(V, g)$ será denotada por $\mathcal{Cl}_{p,q}(\mathbb{R})$, $\mathcal{Cl}_{p,q}$ ou ainda $\mathbb{R}_{p,q}$, com $\mathcal{Cl}_{0,0} := \mathbb{R}$.

Seja $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ a álgebra das matrizes de ordem n sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, onde $\mathbb{H}$ é a álgebra dos quatérnions.⁵ Temos então a seguinte classificação para as álgebras de Clifford reais.

Proposição 2.1 $\mathcal{Cl}_{p,q}(\mathbb{R})$ é dada, a menos de isomorfismos, por

$p - q \pmod{8}$	$\mathcal{Cl}_{p,q}(\mathbb{R})$
0	$\mathcal{M}(2^{[n/2]}, \mathbb{R})$
1	$\mathcal{M}(2^{[n/2]}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}(2^{[n/2]}, \mathbb{R})$
2	$\mathcal{M}(2^{[n/2]}, \mathbb{R})$
3	$\mathcal{M}(2^{[n/2]}, \mathbb{C})$
4	$\mathcal{M}(2^{[n/2]-1}, \mathbb{H})$
5	$\mathcal{M}(2^{[n/2]-1}, \mathbb{H}) \oplus \mathcal{M}(2^{[n/2]-1}, \mathbb{H})$
6	$\mathcal{M}(2^{[n/2]-1}, \mathbb{H})$
7	$\mathcal{M}(2^{[n/2]}, \mathbb{C})$

onde $n = p + q$ e $[n/2]$ denota a parte inteira de $n/2$. Equivalentemente,

$$\mathcal{A}_{p,q} \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}(m, \mathbb{R}),$$

onde

$p - q \pmod{8}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{A}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{C}$

e m é dado por $2^n = (\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{A}) m^2$.

⁴Por exemplo, seja $\mathcal{I}$ o ideal (vide seção 2.3) da álgebra tensorial $T(V)$ gerado por elementos da forma $A \otimes (u \otimes u - g(u, u)) \otimes B$, onde $u \in V$ e $A, B \in \Lambda(V)$. Então, mostra-se que $\mathcal{Cl}(V, g) \cong T(V)/\mathcal{I}$. Notamos que a própria álgebra de Grassmann pode ser definida de maneira semelhante: se $\mathcal{J}$ é o ideal de $T(V)$ gerado por elementos da forma $A \otimes u \otimes u \otimes B$, onde $u \in V$ e $A, B \in \Lambda(V)$, então $\Lambda(V) \cong T(V)/\mathcal{J}$. Uma outra definição para $\mathcal{Cl}(V, g)$ é ainda dada pelo teorema 3.8, página 34.

⁵Assim, $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) = \mathbb{K} \otimes \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$.

As subálgebras pares usuais $\mathcal{C}\ell_{p,q}^+(\mathbb{R})$ podem ser classificadas da seguinte maneira:

Proposição 2.2 $\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \cong \mathcal{C}\ell_{q,p-1} \cong \mathcal{C}\ell_{p,q-1} \cong \mathcal{C}\ell_{q,p}^+$.

Segue das proposições 2.1 e 2.2 que

$$\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \cong \mathcal{B} \otimes \mathcal{M}(m, \mathbb{R}), \quad (2.12)$$

onde

$p - q \pmod{8}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{B}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$

(2.13)

e m é dado por $2^{p+q-1} = m^2 \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{B}$.

Podemos ainda considerar álgebras de Clifford sobre o corpo dos números complexos, que são particularmente úteis no contexto da teoria de Dirac. Adotaremos a definição $\mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{R})$ para as álgebras de Clifford complexas, que serão ainda denotadas por $\mathcal{C}\ell(V, g)$, $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ ou simplesmente $\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}_{p,q}$. Como podemos sempre multiplicar um elemento da álgebra complexificada pela unidade imaginária i , segue que todas as álgebras $\mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{C})$, com $p + q$ fixo, são isomorfas. Isto torna a classificação das álgebras de Clifford complexas particularmente simples, como vemos abaixo.

Proposição 2.3 *A menos de isomorfismos, $\mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{C})$ só depende de $n = p + q$ e é dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\ell_{2k}(\mathbb{C}) &= \mathcal{M}(2^k, \mathbb{C}), \\ \mathcal{C}\ell_{2k+1}(\mathbb{C}) &= \mathcal{M}(2^k, \mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}(2^k, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Como discutimos no apêndice A, uma classe particularmente importante de álgebras consiste das chamadas álgebras *simples*, que apresentam uma série de características interessantes. Aqui notamos apenas que segue da proposição A.2 e das proposições 2.1 e 2.3 acima que as álgebras de Clifford sobre espaços de dimensão par, tanto reais como complexas, podem ser caracterizadas como álgebras simples.

2.3 Representações, ideais e idempotentes

Uma representação de um grupo G sobre um espaço vetorial V é um homomorfismo de grupos $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$. Analogamente, uma representação de uma álgebra $\mathcal{A}$ sobre um espaço vetorial V é um homomorfismo de álgebras $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \text{Aut}(V)$. Em quaisquer destes casos, chamamos V de espaço de representação e dizemos que V carrega a representação ρ .

Por exemplo, denotando a aplicação identidade em V por id_V , temos a representação trivial de $\mathcal{A}$ sobre V dada por $\rho(a) = \text{id}_V, \forall a \in \mathcal{A}$. Um exemplo mais útil é dado pela representação regular de uma álgebra $\mathcal{A}$, que utiliza como espaço de representação a própria álgebra. Tal representação é definida por

$$l : \mathcal{A} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A}), \quad l(a)b = ab, \quad \forall a, b \in \mathcal{A}. \quad (2.14)$$

Como álgebras de matrizes são naturalmente identificadas com espaços de automorfismos, a classificação das álgebras de Clifford vista na seção anterior leva naturalmente a diversas representações destas álgebras. Por exemplo, vemos da proposição 2.3 que a álgebra de Clifford complexificada associada ao espaço de Minkowski é tal que

$$\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C}) \cong \mathcal{M}(4, \mathbb{C}).$$

Isto naturalmente dá origem a representações de $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$ da forma $\rho : \mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$. Voltaremos a este ponto mais tarde.

Duas representações $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \text{Aut}(V)$ e $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \text{Aut}(W)$ são ditas equivalentes se existe um isomorfismo $S : V \rightarrow W$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho(a)} & V \\ S \downarrow & & \downarrow S \\ W & \xrightarrow{\varphi(a)} & W \end{array}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$.

Dizemos que uma representação $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \text{Aut}(V)$ é irredutível se nenhum subespaço não-trivial de V é deixado invariante por ρ , isto é, se dado um subespaço W de V , temos

$$\rho(a)(W) \subseteq W \quad \forall a \in \mathcal{A} \Rightarrow W = \{0\} \quad \text{ou} \quad W = V.$$

Se V puder ser decomposto como soma direta de subespaços não-triviais invariantes por ρ , dizemos que ρ é redutível. Nesse caso, ρ induz uma representação sobre cada um desses subespaços.

Um ideal à esquerda $\mathcal{I}$ de uma álgebra $\mathcal{A}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$. Definem-se analogamente ideais à direita e bilaterais de $\mathcal{A}$. Dizemos que um ideal $\mathcal{I}$ é minimal se não contém nenhum ideal diferente de $\{0\}$ e $\mathcal{I}$. No caso de uma álgebra de matrizes, cada coluna define claramente um ideal minimal à esquerda. Por outro lado, no caso geral, a representação regular (eq. (2.14)) deixa vários subespaços invariantes, sendo imediato que cada um desses espaços é um ideal à esquerda de $\mathcal{A}$. Podemos, no entanto, sempre tomar um tal subespaço $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ com dimensão mínima. É então uma tautologia dizer que $\mathcal{I}$ é um ideal à esquerda minimal, carregando uma representação irredutível de $\mathcal{A}$.

Um elemento não-nulo P de uma álgebra $\mathcal{A}$ é chamado de idempotente se $P^2 = P$. Dizemos que um idempotente P é primitivo se P não puder ser escrito como soma de dois idempotentes ortogonais, isto é, se não existirem idempotentes u, v com $uv = 0$ e $P = u + v$. Tal terminologia é justificada pelo fato de que todo idempotente não primitivo de uma álgebra pode sempre ser escrito como soma de idempotentes primitivos ortogonais. Para $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$, e mais geralmente para qualquer álgebra simples (apêndice A), é possível mostrar que todos os idempotentes primitivos são conjugados entre si, isto é, que dados dois idempotentes primitivos P, Q , existe elemento inversível R na álgebra tal que $Q = RPR^{-1}$.

Dado um elemento a de uma álgebra $\mathcal{A}$, é claro que $\mathcal{A}a$ é sempre um ideal à esquerda de $\mathcal{A}$, talvez não minimal. Como veremos adiante, no caso em que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Clifford (isto é, $\mathcal{A} = \mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{C})$), os ideais à esquerda minimais de $\mathcal{A}$ podem ser associados a espaços de espinores e, portanto, têm importância fundamental. A relevância dos idempotentes primitivos para nossa discussão vem da seguinte caracterização de ideais minimais à esquerda.

Proposição 2.4 *Os ideais minimais à esquerda de uma álgebra de Clifford $\mathcal{A}$ são da forma AP , onde P é um idempotente primitivo.*

2.4 Grupos ortogonais e recobrimentos

Nesta seção, nos concentraremos no caso específico do espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$. Uma discussão geral sobre isometrias em espaços de assinatura arbitrária pode ser encontrada, por exemplo, em [Ben87].

O grupo das isometrias de um espaço vetorial V , munido de uma métrica g , é formado pelas aplicações $\varphi \in \text{Aut}(V)$ que preservam g , isto é, que satisfazem $g(\varphi(x), \varphi(y)) = g(x, y) \forall x, y \in V$. No caso do espaço de Minkowski, tal grupo é denominado grupo de Lorentz, usualmente denotado por $O_{1,3}$ ou $\mathcal{L}$. A componente conexa da identidade $SO_{1,3}^e$ (ou $\mathcal{L}_+^\uparrow$) de tal grupo consiste das transformações de Lorentz que preservam causalidade (ortócronas) e preservam a orientação espaço-temporal (próprias). Tais transformações são também chamadas de transformações de Lorentz restritas.

Isometrias têm uma caracterização bastante útil no contexto das álgebras de Clifford. Notamos inicialmente que, dado um elemento inversível $A \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$, a aplicação $ad_A : x \mapsto x' = Ax A^{-1}$ é tal que $x'^2 = Ax A^{-1} Ax A^{-1} = Ax^2 A^{-1} = x^2$. Segue da eq. (2.5) que ad_A é isometria sempre que ad_A preserva o subespaço $\mathbb{R}^{1,3}$ (dos 1-vetores) de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$. Com isto em mente, definimos o grupo de Clifford $\Gamma_{1,3}$ como o subgrupo dos elementos inversíveis A em $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ tais que $ad_A(\mathbb{R}^{1,3}) \subseteq \mathbb{R}^{1,3}$. Com isso, a discussão acima nos dá imediatamente que $ad_A \in O_{1,3} \forall A \in \Gamma_{1,3}$, de maneira que podemos escrever

$$ad : \Gamma_{1,3} \rightarrow O_{1,3}.$$

Pode-se mostrar que tal aplicação é de fato sobrejetora,⁶ de forma que o grupo $\Gamma_{1,3}$ recobre o grupo de Lorentz. Tal recobrimento é do tipo $\infty - 1$ (infinito para 1) já que, para todo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$ad_{\lambda A} = ad_A.$$

⁶Tal propriedade é válida no caso geral desde que $\mathbb{R}^{p,q}$ tenha dimensão par. Para a construção análoga em espaços de assinatura arbitrária, temos que modificar ligeiramente a definição de tal aplicação para que esta propriedade seja satisfeita [Ben87].

No entanto, é sempre possível reduzir o grupo de Clifford $\Gamma_{1,3}$ de maneira que recobrimentos *duplos* de $O_{1,3}$ (e subgrupos) sejam obtidos. De fato, a redução de $\Gamma_{1,3}$ ao subgrupo

$$\text{Spin}_{1,3}^e = \{A \in \Gamma_{1,3} : A \in \mathcal{C}\ell_{1,3}^+ \text{ e } g(A, A) = 1\} \quad (2.15)$$

produz exatamente um recobrimento duplo do grupo de Lorentz restrito $\text{SO}_{1,3}^e = \mathcal{L}_+^\dagger$. Mais precisamente, temos $ad : \text{Spin}_{1,3}^e \rightarrow \text{SO}_{1,3}^e$ sobrejetora com $\ker ad|_{\text{Spin}_{1,3}^e} = \{\pm 1\} = \mathbb{Z}_2$, de forma que

$$\frac{\text{Spin}_{1,3}^e}{\mathbb{Z}_2} \cong \text{SO}_{1,3}^e.$$

Isto significa que, dada uma transformação de Lorentz restrita $\Lambda \in \text{SO}_{1,3}^e$, existe $S \in \text{Spin}_{1,3}^e$ tal que $\Lambda = ad_{\pm S}$ e assim

$$\Lambda(x) = ad_{\pm S}(x) = SxS^{-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{1,3}. \quad (2.16)$$

Tal resultado pode ser estendido para espaços de assinatura arbitrária. Neste caso, a generalização imediata da eq. (2.15):

$$\text{Spin}_{p,q}^e = \{A \in \Gamma_{p,q} : A \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \text{ e } g(A, A) = 1\} \quad (2.17)$$

nos dá o recobrimento duplo

$$\frac{\text{Spin}_{p,q}^e}{\mathbb{Z}_2} \cong \text{SO}_{p,q}^e. \quad (2.18)$$

Notamos da eq. (2.17) que $\text{Spin}_{p,q}^e \subset \mathcal{C}\ell_{p,q}^+$. Além disso, para $p+q \leq 5$, pode-se caracterizar $\text{Spin}_{p,q}^e$ simplesmente como

$$\text{Spin}_{p,q}^e = \{R \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^+ : R\tilde{R} = 1\} \quad (p+q \leq 5). \quad (2.19)$$

Em particular, tal resultado vale no contexto do espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$, de forma que podemos reescrever a eq. (2.16) como

$$\Lambda(x) = Sx\tilde{S}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{1,3}.$$

É interessante observar que os grupos $\text{Spin}_{n,0}^e$, com $n \geq 3$, e $\text{Spin}_{1,n-1}^e$, com $n \geq 4$, são simplesmente conexos. Desta forma, nestes casos o recobrimento duplo obtido acima é de fato universal. Em particular, vemos que $\text{Spin}_{1,3}^e$ é o recobrimento universal de $\mathcal{L}_+^\dagger$, de onde imediatamente concluímos que (como grupos)

$$\text{Spin}_{1,3}^e \cong SL(2, \mathbb{C}),$$

onde $SL(2, \mathbb{C})$ é o grupo das matrizes 2×2 complexas A com $\det A = 1$.

O fato de $\text{Spin}_{1,n-1}^e$, $n \geq 4$, ser o recobrimento universal de $\text{SO}_{1,n-1}^e$ é particularmente interessante do ponto de vista físico. De fato, um grupo de simetrias G normalmente age sobre um sistema quântico via operadores unitários, que formam uma representação projetiva de G . Em uma representação projetiva, exige-se que as regras de uma representação valham apenas a menos de uma fase (que é tudo o que precisamos no contexto da mecânica quântica). No entanto, sob hipóteses

bastante amplas (vide p. ex. teorema 2.21 de [Tha92]), uma tal representação projetiva induz uma representação unitária (usual) do grupo de recobrimento universal de G . Assim, ações de grupos de simetrias são intimamente relacionadas a representações unitárias dos grupos de recobrimento correspondentes.

Finalmente, observamos que a álgebra de Lie associada a $\text{Spin}_{p,q}^e$ tem uma caracterização bastante simples:

$$\text{Lie}(\text{Spin}_{p,q}^e) = \Lambda^2(\mathbb{R}^{p,q}),$$

com o colchete de Lie sendo dado pelo comutador usual em $\mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{R})$. Desta forma, isometrias podem ser sempre escritas como produtos de termos do tipo $e^{\frac{\theta}{2}e_\mu \wedge e_\nu}$, onde $\{e_\mu\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{p,q}$. Claramente, em $\mathbb{R}^{1,3}$ tal termo representa (i) uma rotação no plano dado por $e_\mu \wedge e_\nu$ se $1 \leq \mu < \nu \leq 3$, ou (ii) um *boost* na direção k se $\mu = 0$ e $\nu = k = 1, 2, 3$.

2.5 Espinores e a álgebra do espaço-tempo

Denotemos por $|\psi\rangle$ a expressão de um espinor de Dirac, com valores em $\mathbb{C}^4$, em relação a um certo referencial. A equação de Dirac em espaço-tempo chato é então dada por (em unidades naturais, onde $\hbar = c = 1$)

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu) |\psi\rangle = m|\psi\rangle, \quad (2.20)$$

onde q e m denotam respectivamente a carga e a massa da partícula de spin-1/2 descrita por $|\psi\rangle$, A_μ é o potencial eletromagnético, e $\{\gamma^\mu\}$ são as matrizes gama em uma dada representação, satisfazendo

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = g^{\mu\nu}, \quad (2.21)$$

com $(g^{\mu\nu}) = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Diremos ainda que tais γ^μ são *matrizes de Dirac* quando estas satisfizerem, além da eq. (2.21), a condição

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

Sob uma transformação de Lorentz restrita $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu) \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ conectando dois referenciais inerciais

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu,$$

temos a transformação

$$|\psi'(x'^\mu)\rangle = L|\psi(\Lambda^\mu{}_\nu x^\mu)\rangle \quad (2.22)$$

para o espinor, onde a matriz L relaciona-se a $\Lambda^\mu{}_\nu$ por

$$\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu = L^{-1} \gamma^\mu L.$$

Tais L são gerados pelas transformações infinitesimais definidas por $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Por exemplo, um *boost* com velocidade $v = \tanh \theta$ (com $c = 1$) na direção $\vec{n}$ corresponde a $L = e^{i\frac{\theta}{2}(\vec{n}^k \sigma_{k0})}$, enquanto

uma rotação espacial de um ângulo φ em torno de $\vec{n}$ nos dá $L = e^{i\frac{\varphi}{2}(n^1\sigma_{23}+n^2\sigma_{31}+n^3\sigma_{12})}$. Assim, $\sigma^{\mu\nu}$ são geradores de transformações de Lorentz que agem sobre a parte espinorial de $|\psi\rangle$.⁷

A eq. (2.21) mostra que as matrizes γ^μ geram uma cópia da álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$. Mais precisamente, tomando uma base ortonormal $\{e_\mu\}$ de $\mathbb{R}^{1,3}$, segue imediatamente da eq. (2.21) que

$$\rho : \mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}(4, \mathbb{C}),$$

definido por

$$\rho(1) = I_{4 \times 4}, \quad \rho(e^\mu) = \gamma^\mu, \quad (2.23)$$

é isomorfismo de álgebras complexas. Tal ρ define uma representação de $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}^4$, de maneira que os espinores de Dirac $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^4$ são elementos do espaço de representação correspondente. Como $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C}) \cong \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$, tal representação é claramente irredutível.⁸ Lembramos da seção 2.3 que a representação regular l (eq. (2.14)) também define uma representação irredutível de $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$, onde o espaço de representação é dado por um ideal à esquerda minimal da álgebra. Como em uma álgebra simples todas as representações irredutíveis são equivalentes (apêndice A), concluímos que ρ e l são necessariamente equivalentes. Desta forma, podemos identificar elementos de ideais à esquerda minimais de $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$ com espinores de Dirac. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 2.5 *Um espinor algébrico é um elemento de um ideal à esquerda minimal de uma álgebra de Clifford.*

Como adiantamos na introdução, a arbitrariedade na escolha de um tal ideal à esquerda minimal dentro de $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$ pode ser utilizada na construção de modelos de teorias de calibre e, em especial, para se recuperar as interações eletrofracas. Este é o assunto do capítulo 5.

2.5.1 Conjuntos espectrais

Um resultado fundamental relativo a álgebras simples (apêndice A) é o de que a unidade 1 de uma tal álgebra pode sempre ser escrita como uma soma

$$1 = \sum_{k=1}^r P_k \quad (2.24)$$

de idempotentes primitivos P_k , com

$$P_k P_l = \delta_{kl} P_k \quad (2.25)$$

(neste caso, dizemos que os idempotentes são ortogonais). Um sistema de idempotentes primitivos $\{P_k\}_{k=1}^r$ satisfazendo as eqs. (2.24) e (2.25) é denominado um *conjunto espectral*. Ainda, o número

⁷Ainda, os geradores correspondentes para o espaço-tempo são as componentes do momento angular $L_{\mu\nu}$. Assim, agindo sobre o espaço total das funções de onda, as transformações de Lorentz são geradas por $M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}$.

⁸Isto não deve ser confundido com o fato de que espinores de Dirac carregam a representação *redutível* $D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$ do grupo $\text{Spin}_{1,3}^e \cong SL(2, \mathbb{C})$.

r na expressão acima é invariante em qualquer decomposição como a acima. Por exemplo, para $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ temos $r = 4$. A seguir, discutimos alguns exemplos de conjuntos espectrais.

Álgebra do espaço-tempo complexa

Em termos da representação matricial $\rho : \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ dada pela eq. (2.23), podemos sempre escolher um conjunto espectral $\{P_k\}$ para $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ tal que

$$\rho(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.26a)$$

$$\rho(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(P_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.26b)$$

Com isso, o espaço dos espinores algébricos associados ao ideal minimal à esquerda $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P_k$, correspondente à definição 2.5, é identificado com a k -ésima coluna de $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$. Por exemplo, um espinor algébrico $\psi \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P_1$ neste caso é levado, via ρ , ao espinor-coluna

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |\psi\rangle P_1, \quad P_1 = \rho(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

É claro que o conjunto $\{P_k\}$, determinado pelas eqs. (2.26), depende da escolha da representação ρ acima, ou seja, da escolha da representação das matrizes γ_μ . Consideremos alguns exemplos:

- (i) Na representação padrão $\gamma_\mu = \gamma_\mu^{st}$ das matrizes de Dirac, temos [Itz80]:

$$\gamma_0^{st} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_k^{st} = \begin{pmatrix} 0 & -\tau_k \\ \tau_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.27)$$

(τ_k são as matrizes de Pauli). Um cálculo direto mostra que os idempotentes matriciais nas eqs. (2.26) são dados por $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_0^{st})\frac{1}{2}(1 \pm i\gamma_{12}^{st})$. Desta forma, os idempotentes correspondentes $P_k \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$, determinados por ρ , são

$$P_1 = \frac{1}{2}(1 + e_0)\frac{1}{2}(1 + ie_{12}), \quad P_2 = \frac{1}{2}(1 + e_0)\frac{1}{2}(1 - ie_{12}), \quad (2.28a)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(1 - e_0)\frac{1}{2}(1 + ie_{12}), \quad P_4 = \frac{1}{2}(1 - e_0)\frac{1}{2}(1 - ie_{12}). \quad (2.28b)$$

(ii) Na representação quirial $\gamma_\mu = \gamma_\mu^{ch}$, onde [Itz80]

$$\gamma_0^{ch} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_k^{ch} = \begin{pmatrix} 0 & -\tau_k \\ \tau_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.29)$$

um cálculo análogo nos dá

$$P_1 = \frac{1}{2}(1 + e_{30})\frac{1}{2}(1 - ie_{0123}), \quad P_2 = \frac{1}{2}(1 + e_{30})\frac{1}{2}(1 + ie_{0123}), \quad (2.30a)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(1 - e_{30})\frac{1}{2}(1 - ie_{0123}), \quad P_4 = \frac{1}{2}(1 - e_{30})\frac{1}{2}(1 + ie_{0123}). \quad (2.30b)$$

(iii) Na representação de Majorana $\gamma_\mu = \gamma_\mu^{mj}$, onde [Itz80]

$$\gamma_0^{mj} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_2 \\ \tau_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1^{mj} = \begin{pmatrix} -i\tau_3 & 0 \\ 0 & -i\tau_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2^{mj} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_2 \\ -\tau_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3^{mj} = \begin{pmatrix} i\tau_1 & 0 \\ 0 & i\tau_1 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

um cálculo análogo nos dá

$$P_1 = \frac{1}{2}(1 + e_{20})\frac{1}{2}(1 + ie_1), \quad P_2 = \frac{1}{2}(1 + e_{20})\frac{1}{2}(1 - ie_1), \quad (2.32a)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(1 - e_{20})\frac{1}{2}(1 + ie_1), \quad P_4 = \frac{1}{2}(1 - e_{20})\frac{1}{2}(1 - ie_1). \quad (2.32b)$$

O estudo da relação entre diferentes representações das matrizes γ^μ e diferentes conjuntos espectrais $\{P_k\}$ em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ mostra-se útil em diferentes contextos, não necessariamente relacionados a formulações multivetoriais da equação de Dirac. No apêndice C, anexamos uma publicação [Mos03b] onde exploramos tal tópico para construir um esquema de reconstrução tomográfica para espinores de Dirac.

Álgebra do espaço-tempo real

No caso da álgebra do espaço-tempo real $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$, sabemos da proposição 2.1 que

$$\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{M}(2, \mathbb{H}).$$

Por exemplo, uma representação matricial $\zeta : \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}(2, \mathbb{H})$ é dada por

$$\zeta(e_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \zeta(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\{e_a\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{1,3}$ e i, j, k são as unidades imaginárias quaterniônicas. Um conjunto espectral para $\mathcal{M}(2, \mathbb{H})$ é dado for $\{f_1, f_2\}$, onde

$$f_1 = \frac{1}{2}(1 + e_0), \quad f_2 = \frac{1}{2}(1 - e_0). \quad (2.33)$$

Isto pode ser visto da proposição A.7 ou diretamente da representação matricial acima, de onde segue que as imagens de f_1 e f_2 em $\mathcal{M}(2, \mathbb{H})$ são

$$\zeta(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\mathcal{M}(2, \mathbb{H})$ é uma álgebra simples, todos os seus idempotentes primitivos são conjugados entre si (apêndice A). Assim, a expressão geral de um idempotente primitivo em $\mathcal{M}(2, \mathbb{H})$ é dada por

$$f = \frac{1}{2}(1 + u), \quad (2.34)$$

onde $u = Se_0S^{-1}$ para algum elemento inversível $S \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$.

Finalmente, consideremos algumas relações motivadas pela correspondência entre espinores-coluna e espinores algébricos.

Conjugação hermitiana e traço em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$

Proposição 2.6 *Dada uma representação $\rho : \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ como na eq. (2.23), definamos uma operação de conjugação em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ por*

$$A^\dagger := \rho^{-1}(\rho(A)^\dagger), \quad A \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C}), \quad (2.35)$$

onde $\rho(A)^\dagger$ denota a conjugação hermitiana usual em $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$. Então

$$A^\dagger = e_0 \tilde{A}^* e_0. \quad (2.36)$$

Conseqüentemente, tal operação independe de ρ .

dem.: Segue da definição (2.35) que, dados $\lambda \in \mathbb{C}$ e $A, B \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$, temos $(\lambda A)^\dagger = \lambda^*(A)^\dagger$ e $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$. Logo, a ação de $(\cdot)^\dagger$ é determinada por $(e_\mu)^\dagger$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, que é dado por $(e_\mu)^\dagger = \rho^{-1}(\rho(e_\mu)^\dagger) = \rho^{-1}(\gamma_\mu^\dagger) = \rho^{-1}(\gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0) = e_0 e_\mu e_0$. Por outro lado, se $f : \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ é dado por $f(A) = e_0 \tilde{A}^* e_0$, é imediato que $f(\lambda A) = \lambda^* f(A)$, $f(AB) = f(B)f(A)$ e $f(e_\mu) = e_0 e_\mu e_0$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Portanto, $f = (\cdot)^\dagger$. $\square$

Proposição 2.7 *Nas condições acima, o traço em $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ é relacionado à projeção escalar $\langle \cdot \rangle_0$ em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ por $\text{tr}(\rho(\psi)) = 4\langle \psi \rangle_0$.*

dem.: Expandindo $\psi = a + a^\mu e_\mu + \dots$, temos $\rho(\psi) = aI + a^\mu \gamma_\mu + \dots \Rightarrow \text{tr}(\rho(\psi)) = 4a = 4\langle \psi \rangle_0$. $\square$

Corolário 2.8 *Na notação acima, $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 4\langle \psi_1^\dagger \psi_2 \rangle_0$.*

O corolário acima pode ser usado para definir um produto interno em cada ideal minimal à esquerda em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$. Dados os espinores algébricos ψ_1, ψ_2 em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P$, definimos

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = 4\langle \psi_1^\dagger \psi_2 \rangle_0, \quad (2.37)$$

de maneira que $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$. Notemos que, com isso, $\langle \bar{\psi}_1 | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, e^0 \psi_2 \rangle$, onde $\langle \bar{\psi} | = \langle \psi | \gamma^0$.

Observação 2.9 Um conjunto de idempotentes primitivos $\{P_k\}$ em $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$ definido via eqs. (2.26) sempre satisfaz $P_k^\dagger = P_k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Isto segue imediatamente da eq. (2.35) e da expressão de $\rho(P_k)$ nas eqs. (2.26).

2.6 Espinores e fibrados de Clifford

Seja M uma variedade munida de um tensor métrico g de assinatura (p, q) . Com isso, cada espaço tangente $T_x M$ de M , dotado da métrica g_x , é isomorfo a $\mathbb{R}^{p,q}$. Desta forma, faz sentido definir o fibrado de Clifford $\mathcal{Cl}(M, g)$ sobre M por

$$\mathcal{Cl}(M, g) = \bigcup_{x \in M} \mathcal{Cl}(T_x M, g_x). \quad (2.38)$$

Há, no entanto, uma outra maneira de se definir tal fibrado, que torna aparente a relação de $\mathcal{Cl}(M, g)$ com possíveis estruturas espinórias associadas a M .

Lembramos que dado um fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$ com grupo estrutural G , e dada uma representação ρ de G sobre um espaço vetorial V , podemos construir o fibrado vetorial $P \times_\rho V$, associado a P , cujos elementos são classes de equivalência de pares $(p, v) \in P \times V$, com $[(p, v)] = \{(pg^{-1}, \rho(g) \cdot v) : g \in G\}$ [Cho82] (vide também apêndice B). A estrutura vetorial de $P \times_\rho V$ é então dada por $\alpha[(p, v_1)] + \beta[(p, v_2)] = [(p, \alpha v_1 + \beta v_2)]$, onde α, β são escalares associados ao espaço vetorial V .

Definição 2.10 Um espaço-tempo é uma variedade 4-dimensional lorentziana (i.e., munida de um tensor métrico de assinatura $(1, 3)$), orientada e orientada no tempo [Cho82].

Dado um espaço-tempo M , denotaremos por $P_{\text{SO}_{1,3}^e}(M)$ o fibrado principal dos referenciais ortonormais em M , cujas seções podem ser pensadas como referenciais $\{e_\mu\}$ orientados e orientados no tempo [Cho82]. É um fato bem conhecido que o fibrado tangente TM pode ser identificado com o fibrado vetorial associado

$$TM = P_{\text{SO}_{1,3}^e}(M) \times_\varphi \mathbb{R}^{1,3}, \quad (2.39)$$

onde $\varphi : \text{SO}_{1,3}^e \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^{1,3})$, $\varphi(g) : v \mapsto gv$, é a representação canônica de $\text{SO}_{1,3}^e$ sobre $\mathbb{R}^{1,3}$. Tal representação admite uma extensão a toda a álgebra de Clifford⁹ $\mathbb{R}_{1,3}$ dada por $\bar{\varphi} : \text{SO}_{1,3}^e \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}_{1,3})$, $\bar{\varphi}(g) \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \varphi(g) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge \varphi(g) \cdot v_k$. A construção análoga à eq. (2.39) para o fibrado vetorial associado a $P_{\text{SO}_{1,3}^e}$ — agora com fibra típica $\mathbb{R}_{1,3}$ e representação $\bar{\varphi} : \text{SO}_{1,3}^e \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}_{1,3})$ — nos dá então diretamente

$$\mathcal{Cl}(M, g) = P_{\text{SO}_{1,3}^e}(M) \times_{\bar{\varphi}} \mathbb{R}_{1,3}. \quad (2.40)$$

⁹Aqui $\mathbb{R}_{1,3}$ denota a álgebra de Clifford associada ao espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$. Seguiremos sempre a convenção de denotar tal álgebra por $\mathbb{R}_{1,3}$ (ao invés de $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$) quando esta for identificada com a fibra típica de um fibrado associado.

Desta forma, seções do fibrado $\mathcal{Cl}(M, g)$ se transformam como tensores sob transformações de Lorentz. Como discutimos na seção 2.4, no contexto de *espinores* é necessário introduzir representações do recobrimento universal $\text{Spin}_{1,3}^e$ do grupo de Lorentz. Em outras palavras, o que se deseja é associar espinores com seções de um fibrado associado a um certo fibrado principal $P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$, com grupo estrutural $\text{Spin}_{1,3}^e$, de maneira “compatível” com a estrutura de $P_{\text{SO}_{1,3}^e}(M)$. Tal noção de compatibilidade é tornada precisa pela definição a seguir.

Antes disso, lembremos que o homomorfismo $ad : \text{Spin}_{1,3}^e \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^{1,3})$ define um recobrimento duplo (de fato, o recobrimento universal) do grupo de Lorentz restrito $\text{SO}_{1,3}^e$ (seção 2.4). Desta forma, ad define uma representação do grupo $\text{Spin}_{1,3}^e$ sobre $\mathbb{R}^{1,3}$, que pode ser claramente estendida a uma representação de $\text{Spin}_{1,3}^e$ sobre $\mathbb{R}_{1,3}$ da maneira evidente:

$$ad : \text{Spin}_{1,3}^e \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}_{1,3}), \quad ad_u : a \mapsto uau^{-1}. \quad (2.41)$$

Definição 2.11 *Uma estrutura espinorial para M consiste de um fibrado principal $\pi_s : P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M) \rightarrow M$, com grupo $\text{Spin}_{1,3}^e$, e um mapa*

$$s : P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M) \rightarrow P_{\text{SO}_{1,3}^e}(M) \quad (2.42)$$

satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $\pi(s(p)) = \pi_s(p) \ \forall p \in P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$, onde π é a projeção associada ao fibrado $P_{\text{SO}_{1,3}^e}(M)$;
- (ii) $s(pu) = s(p)ad_u \ \forall p \in P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$, onde ad é dado pela eq. (2.41).

É importante observar que uma estrutura espinorial para M nem sempre existe e, quando existe, nem sempre é única. Seja $H^n(M, \mathbb{Z}_2)$ o n -ésimo grupo de cohomologia de M a coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ [Nak96]. Pode-se mostrar que uma condição necessária e suficiente para que M admita uma estrutura espinorial é que a segunda classe de Stiefel-Whitney $w_2(M)$ (que é um elemento de $H^2(M, \mathbb{Z}_2)$) de M se anule. Ainda, quando uma tal estrutura espinorial existe, pode-se mostrar que ela é única, a menos de isomorfismos, se e somente se $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ é trivial. Portanto, a existência e unicidade de estruturas espinoriais é governada pela topologia de M , e não por condições locais.

Definição 2.12 *Seções de $P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$ são denominadas referenciais espinoriais, enquanto seções de $P_{\text{SO}_{1,3}^e}(M)$ são denominadas referenciais de Lorentz. Ainda, chamaremos as seções de $\mathcal{Cl}(M, g)$ de campos de Clifford.*

Observação 2.13 *Para um espaço-tempo não-compacto M (definição 2.10), um resultado fundamental, devido a Geroch [Ger68], mostra que M admite uma estrutura espinorial se, e somente se, $P_{\text{SO}_{1,3}^e}(M)$ é trivial.*

Lembramos que um fibrado principal é trivial se, e somente se, admite uma seção global [Nak96]. Desta forma, o resultado de Geroch nos diz que um espaço-tempo não-compacto admite uma estrutura espinorial se, e somente se, admite um referencial de Lorentz globalmente definido.

Observação 2.14 *É interessante notar que o resultado de Geroch continua sendo válido se substituirmos $P_{\text{SO}_{1,3}^e}(M)$ por $P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$ na observação 2.13 ([Ger68], nota de rodapé 25). Desta forma, quando um espaço-tempo não-compacto possui uma estrutura espinorial, o fibrado $P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$ é trivial e, portanto, todo fibrado associado a $P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$ é também trivial.*

Observamos que o homomorfismo $ad : \text{Spin}_{1,3}^e \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}_{1,3})$ da eq. (2.41) é tal que $ad_{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}_{1,3}}$. Desta forma, ad induz uma representação de $\text{SO}_{1,3}^e$ sobre $\mathbb{R}_{1,3}$, que claramente coincide com $\bar{\varphi}$ usado na eq. (2.40). Com isso, pode-se mostrar que $\mathcal{C}\ell(M, g)$ pode ser identificado com o fibrado associado

$$\mathcal{C}\ell(M, g) = P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M) \times_{ad} \mathbb{R}_{1,3}. \quad (2.43)$$

É importante notar entretanto que a definição de $\mathcal{C}\ell(M, g)$ independe da existência de uma estrutura espinorial para M , como mostra a eq. (2.40) (e ainda a eq. (2.38)).

Notamos ainda que a estrutura de fibrado associado de $P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M) \times_{ad} \mathbb{R}_{1,3}$ nos diz que os elementos de $\mathcal{C}\ell(M, g)$ podem ser identificados com classes de equivalência $[(p, a)]$ de pares (p, a) , onde $p \in P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$, $a \in \mathbb{R}_{1,3}$ e $(p, a) \sim (p', a') \Leftrightarrow p' = pu^{-1}$, $a' = uau^{-1}$, para algum $u \in \text{Spin}_{1,3}^e$.

Observação 2.15 *Denotaremos a base canônica¹⁰ de $\mathbb{R}^{1,3} \subseteq \mathbb{R}_{1,3}$ por $\{E_a\}$, onde aqui $\mathbb{R}_{1,3}$ deve ser considerado uma álgebra de Clifford abstrata, identificada com a fibra típica dos fibrados associados a $P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$ (cf nota de rodapé 9). Assim, tais E_a não denotam vetores tangentes a M , que são elementos de $TM \subset \mathcal{C}\ell(M, g)$, mas apenas elementos da fibra típica pertinente.*

Suponhamos que M possua uma estrutura espinorial e seja $\Xi \in \text{sec } P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$ ¹¹ um referencial espinorial globalmente definido em M , com $\{e_a\}$ o referencial de Lorentz correspondente (definição 2.11), dado por $\{e_a(x)\} = s(\Xi(x))$. Então, o mapa $\mathcal{C}\ell(M, g) \rightarrow P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M) \times_{ad} \mathbb{R}_{1,3}$ gerado pela correspondência

$$e_a(x) \mapsto [(\Xi(x), E_a)] \quad (2.44)$$

claramente implementa o isomorfismo da eq. (2.43).¹²

Definição 2.16 *Seja M uma variedade munida de uma estrutura espinorial. Um fibrado espinorial real (complexo) em M é um fibrado associado*

$$S(M) = P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M) \times_{\rho} V$$

onde ρ é uma representação de $\text{Spin}_{1,3}^e$ sobre o espaço vetorial real (complexo) V .

¹⁰Isto é, $E_0 = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^t$, $E_1 = (0 \ 1 \ 0 \ 0)^t$, $E_2 = (0 \ 0 \ 1 \ 0)^t$ e $E_3 = (0 \ 0 \ 0 \ 1)^t$.

¹¹Denotaremos o espaço das seções em um dado fibrado principal ou vetorial S por $\text{sec } S$.

¹²Notamos ainda que tal identificação é covariante sob uma mudança de referencial. De fato, se $\Xi' \in \text{sec } P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$ é um outro referencial espinorial em M , sabemos da estrutura de fibrado principal de $P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$ que, para cada $x \in M$, existe (um único) $u(x) \in \text{Spin}_{1,3}^e$ tal que $\Xi'(x) = \Xi(x)u(x)$. Se definirmos, como acima, $e'_a(x) = s(\Xi'(x))$, então $e'_a(x) = s(\Xi(x)u(x)) = s(\Xi(x))ad_{u(x)} = (ad_{u(x)})_a^b e_b(x) \mapsto (ad_{u(x)})_a^b [(\Xi(x), E_b)] = [(\Xi(x), (ad_{u(x)})_a^b E_b)] = [(\Xi(x), ad_{u(x)} E_a)] = [(\Xi(x), u(x)E_a u(x)^{-1})] = [(\Xi(x)u(x), E_a)] = [(\Xi'(x), E_a)]$.

Se $V = \mathbb{C}^4$ e μ é a representação $D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$ do grupo $\text{Spin}_{1,3}^e \cong SL(2, \mathbb{C})$, o fibrado $S(M)$ corresponde à definição usual para o fibrado espinorial representando partículas de Dirac [Cho82]. Como vimos na seção 2.5, espinores podem ser ainda definidos através de ideais à esquerda minimais de $\mathbb{R}_{1,3}$. A versão covariante de tal construção é considerada a seguir (vide também eq. (2.45)).

Definição 2.17 *O fibrado espinorial real de Clifford à esquerda em M é o fibrado associado*

$$\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M) = P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M) \times_l \mathbb{R}_{1,3}$$

onde l é a representação regular de $\text{Spin}_{1,3}^e$ sobre $\mathbb{R}_{1,3}$, isto é, $l(u) : a \mapsto ua$.

Segue da estrutura de fibrado associado que os elementos de $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ são classes de equivalência de pares (p, a) , onde $p \in P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$, $a \in \mathbb{R}_{1,3}$ e $(p, a) \sim (p', a') \Leftrightarrow p' = pu^{-1}$, $a' = ua$, para algum $u \in \text{Spin}_{1,3}^e$. É interessante ainda notar que o fibrado acima é um caso particular de fibrado espinorial real em M (definição 2.16).

Proposição 2.18 *Existe uma ação à direita natural de $\mathbb{R}_{1,3}$ em $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$.*

dem.: Dados $b \in \mathbb{R}_{1,3}$ e $\alpha \in \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M, g)$, seja (p, a) um representante para α e definamos $\alpha b := [(p, ab)]$. Se outro representante (pu^{-1}, ua) for escolhido para α , temos $(pu^{-1}, uab) \sim (p, ab)$ e assim αb é um elemento bem definido de $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$. $\square$

Denotemos o espaço das funções $\mathbb{R}_{1,3}$ -valorizadas em M por $\mathcal{F}(M, \mathbb{R}_{1,3})$. Segue imediatamente da proposição acima que

Corolário 2.19 *Existe uma ação à direita natural de $\mathcal{F}(M, \mathbb{R}_{1,3})$ em $\text{sec } \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$.*

Podemos agora facilmente generalizar o conceito de espinor algébrico da seção 2.5 para campos espinoriais. Dado um idempotente primitivo $P \in \mathbb{R}_{1,3}$, a proposição acima nos permite definir subfibrados de $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ correspondentes a ideais minimais em cada fibra típica de $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$. Mais precisamente, todo idempotente primitivo $f \in \mathbb{R}_{1,3}$ induz um subfibrado $I(M)$ de $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$, constituído por elementos da forma

$$\varphi = \varphi f, \quad \varphi \in \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M).$$

Seções $\psi \in \text{sec } I(M) \subset \text{sec } \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ serão chamadas de campos espinoriais algébricos reais.

De maneira inteiramente análoga, definimos o fibrado espinorial de Clifford à esquerda complexo

$$\mathbb{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M) = P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M) \times_l (\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}_{1,3}). \quad (2.45)$$

Do mesmo modo, um idempotente primitivo de $P \in \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}_{1,3}$ define um subfibrado $I_{\mathbb{C}}(M)$ de $\mathbb{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$, constituído por elementos da forma $\varphi = \varphi P \in \mathbb{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$. Seções de tal subfibrado serão chamadas de campos espinoriais algébricos complexos.

Por exemplo, consideremos o conjunto espectral $\{P_k\}$ associado à representação padrão das matrizes de Dirac (vide observação 2.15):

$$P_1 = \frac{1}{2}(1 + E_0)\frac{1}{2}(1 + iE_{12}), \quad P_2 = \frac{1}{2}(1 + E_0)\frac{1}{2}(1 - iE_{12}), \quad (2.46a)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(1 - E_0)\frac{1}{2}(1 + iE_{12}), \quad P_4 = \frac{1}{2}(1 - E_0)\frac{1}{2}(1 - iE_{12}). \quad (2.46b)$$

A escolha $P = P_1$ define então espinores algébricos complexos $\psi \in \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}}^l(M)$ satisfazendo

$$\psi = \psi P, \quad \psi \in \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}}^l(M), \quad P = \frac{1}{2}(1 + E_0)\frac{1}{2}(1 + iE_{12}). \quad (2.47)$$

É ainda útil definir fibrados à direita, de forma análoga ao que fizemos acima.

Definição 2.20 *O fibrado espinorial real de Clifford à direita em M é o fibrado associado*

$$\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}}^r(M) = P_{\text{Spin}_{1,3}}(M) \times_r \mathbb{R}_{1,3}$$

onde r é a representação de $\text{Spin}_{1,3}^e$ em $\mathbb{R}_{1,3}$ dada por $r(a) : \mathbb{R}_{1,3} \rightarrow \mathbb{R}_{1,3}$, $x \mapsto xa^{-1}$.

Notamos que os elementos de $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}}^r(M)$ são classes de equivalência $[(p, a)]$ de pares (p, a) , onde $p \in P_{\text{Spin}_{1,3}}(M)$, $a \in \mathbb{R}_{1,3}$ e $(p, a) \sim (p', a') \Leftrightarrow p' = pu^{-1}$, $a' = au^{-1}$, para algum $u \in \text{Spin}_{1,3}^e$.

O fibrado à direita complexo $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}}^r(M) = P_{\text{Spin}_{1,3}}(M) \times_r (\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}_{1,3})$ pode ainda ser definido da maneira evidente. A proposição 2.18 e o corolário 2.19 têm o seguinte análogo à direita.

Proposição 2.21 *Existe uma ação à esquerda natural de $\mathbb{R}_{1,3}$ em $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}}^r(M)$. Segue que existe uma ação à esquerda natural de $\mathcal{F}(M, \mathbb{R}_{1,3})$ em $\sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}}^r(M)$.*

É ainda possível definir as seguintes ações nos vários fibrados associados a $P_{\text{Spin}_{1,3}}(M)$.

Proposição 2.22 *Existe uma ação à esquerda natural de $\sec \mathcal{C}\ell(M, g)$ em $\sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}}^l(M)$ e uma ação à direita natural de $\sec \mathcal{C}\ell(M, g)$ em $\sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}}^r(M)$.*

dem.: Dados $\alpha \in \sec \mathcal{C}\ell(M, g)$ e $\beta \in \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}}^l(M, g)$, sejam (p, a) um representante de $\alpha(x)$, e (p, b) um representante de $\beta(x)$ (com $p \in \pi^{-1}(x)$). Definamos $(\alpha\beta)(x) := [(p, ab)] \in \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}}^l(M, g)$. Se (pu^{-1}, uau^{-1}) e (pu^{-1}, ub) são outros representantes $\alpha(x)$ e $\beta(x)$, respectivamente, temos $(pu^{-1}, uau^{-1}ub) = (pu^{-1}, uab) \sim (p, ab)$ e assim $(\alpha\beta)(x)$ é um elemento bem definido de $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}}^l(M, g)$. $\square$

Proposição 2.23 *Existem emparelhamentos naturais*

$$(i) \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}}^l(M) \times \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}}^r(M) \rightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, g),$$

$$(ii) \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}}^r(M) \times \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}}^l(M) \rightarrow \mathcal{F}(M, \mathbb{R}_{1,3}).$$

dem.: Sejam $\alpha \in \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}}^l(M)$ e $\beta \in \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}}^r(M)$, com $\alpha(x) = [(p, a)]$ e $\beta(x) = [(p, b)]$ (onde $p \in \pi^{-1}(x)$). Definimos então $(\alpha\beta)(x) := [(p, ab)] \in \mathcal{C}\ell(M, g)$ e $(\beta\alpha)(x) := ab \in \mathbb{R}_{1,3}$. Uma argumentação análoga à acima mostra que tais elementos estão bem definidos. $\square$

Seções associadas a um referencial espinorial

Segue diretamente da definição de $\mathcal{C}\ell(M, g)$ dada pela eq. (2.38) que a seção unidade $\mathbf{1} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, g)$, dada por $x \mapsto 1 \in \mathcal{C}\ell(T_x M, g_x)$, é certamente bem definida. Para referência futura, vejamos como isto também pode ser visto da estrutura de fibrado associado de $P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M) \times_{ad} \mathbb{R}_{1,3}$.

Dadas duas trivializações locais

$$\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \text{Spin}_{1,3}^e, \quad \Phi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times \text{Spin}_{1,3}^e$$

do fibrado principal $P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$, com $\Phi_i(u) = (x := \pi(u), \phi_{i,x}(u))$, temos a função de transição correspondente $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Spin}_{1,3}^e$,

$$g_{ij}(x) = \phi_{i,x}(u) \circ \phi_{j,x}(u)^{-1},$$

onde tal g_{ij} independe de u [Cho82]. As funções de transição correspondentes de um fibrado associado, determinado por uma representação ρ sobre o espaço vetorial V , são sempre dadas por $\rho \circ g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{End}(V)$ [Cho82]. Desta forma, as funções de transição correspondentes a trivializações locais

$$\Psi_i : \pi_c^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}_{1,3}, \quad \Psi_j : \pi_c^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times \mathbb{R}_{1,3}$$

do fibrado associado $\mathcal{C}\ell(M, g) = P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M) \times_{ad} \mathbb{R}_{1,3}$ são dadas por $h_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}_{1,3})$, com

$$h_{ij}(x) = ad_{g_{ij}(x)}.$$

Consideremos a seção local $\mathbf{1}_i : U_i \rightarrow \mathcal{C}\ell(M, g)$, dada por

$$\mathbf{1}_i(x) = \Psi_i^{-1}(x, 1). \quad (2.48)$$

Como $h_{ij}(x) \cdot 1 = ad_{g_{ij}(x)}(1) = g_{ij}(x)^{-1} g_{ij}(x) = 1$, a expressão acima induz uma seção *global* $\mathbf{1} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, g)$, cuja expressão local é dada por (2.48), ou seja,

$$\mathbf{1}|_{U_i} = \mathbf{1}_i.$$

Assim, a seção identidade é bem definida em $\mathcal{C}\ell(M, g)$, como já sabíamos de antemão da definição de $\mathcal{C}\ell(M, g)$ dada pela eq. (2.38).

Vamos agora considerar o fibrado vetorial $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{p,q}^e}^r(M) = P_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M) \times_r \mathbb{R}_{p,q}$. Neste caso, as funções de transição correspondentes a trivializações locais

$$\Omega_i : \pi_{sc}^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}_{p,q}, \quad \Omega_j : \pi_{sc}^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times \mathbb{R}_{p,q}$$

de $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{p,q}^e}^r(M)$ são dadas por $k_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}_{p,q})$, com

$$k_{ij}(x) = r(g_{ij}(x)),$$

onde $r(u) : \mathbb{R}_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}_{p,q}$, $a \mapsto au^{-1}$. Desta forma, definindo seções locais $\mathbf{1}_i^r : U_i \rightarrow \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{p,q}^e}^r(M)$,

$$\mathbf{1}_i^r(x) = \Omega_i^{-1}(x, 1), \quad x \in U_i,$$

vemos que tais seções *não* coincidem nas intersecções $U_i \cap U_j$. De fato, como $\Omega_i(\mathbf{1}_i^r(x)) = (x, 1)$ e $\Omega_j(\mathbf{1}_j^r(x)) = (x, 1)$, temos $\mathbf{1}_i^r(x) = \mathbf{1}_j^r(x) \Leftrightarrow 1 = k_{ij}(x) \cdot 1 \Leftrightarrow 1 = r(g_{ij}(x)) \cdot 1 \Leftrightarrow 1 = 1g_{ij}(x)^{-1} \Leftrightarrow g_{ij}(x) = 1$. Uma argumentação análoga vale ainda para o fibrado $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{p,q}^e}^l(M)$. Com isso, temos a

Proposição 2.24 *Existe uma “seção unidade” globalmente definida em $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{p,q}^e}^r(M)$ ($\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{p,q}^e}^l(M)$) se, e somente se, $P_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M)$ é trivial.*

Em geral, $P_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M)$ não é um fibrado trivial (quando existe). No entanto, como vimos na observação 2.14, se M é um espaço-tempo não-compacto então $P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$ é trivial sempre que M admitir uma estrutura espinorial. Neste caso, vemos da proposição acima que $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^r(M)$ e $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ têm “seções unidade” globalmente definidas. É importante notar entretanto que, mesmo neste caso, cada escolha diferente de trivialização global em $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^r(M)$ induz uma seção $\mathbf{1}_i^r$ distinta. Portanto, contrariamente ao fibrado de Clifford $\mathcal{C}\ell(M, g)$, não existe escolha canônica de “seção unidade” em $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^r(M)$ e $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$.

No caso de um espaço-tempo não-compacto M admitindo uma estrutura espinorial, a observação 2.14 nos permite tomar referenciais espinoriais globalmente definidos em M . Claramente, cada escolha de referencial espinorial $\Xi \in \sec P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$ induz uma trivialização global $\Phi_\Xi : P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M) \rightarrow M \times \text{Spin}_{1,3}^e$, dada por $\Phi_\Xi^{-1}(x, 1) = \Xi(x)$. Como mostramos a seguir, o referencial espinorial Ξ pode ainda ser usado para induzir certas seções de referência nos vários fibrados associados a $P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$:

(i) $\mathcal{C}\ell(M, g)$ Seja $\{E_a\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{1,3} \subseteq \mathbb{R}_{1,3}$, como na observação 2.15. Seja $e_a \in \sec \mathcal{C}\ell(M, g)$ definido por $e_a(x) = [(\Xi(x), E_a)]$. Notamos que isto induz uma base multivetorial $\{e_I(x)\}$ para cada $x \in M$. Notamos ainda que esta definição de e_a é compatível com a especificação do referencial de Lorentz $\{e_a\} = s(\Xi)$ determinada pelo mapa $s : P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M) \rightarrow P_{\text{SO}_{1,3}^e}(M)$, associado à estrutura espinorial em M (vide eq. (2.44) e nota de rodapé 12).

(ii) $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ Seja $\mathbf{1}_\Xi^l \in \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ definido por $\mathbf{1}_\Xi^l(x) = [(\Xi(x), 1)]$. Segue imediatamente do corolário 2.19 que uma seção arbitrária $\alpha \in \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ pode ser escrita como $\alpha = \mathbf{1}_\Xi^l f$, com $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R}_{1,3})$.

(iii) $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^r(M, g)$ Seja $\mathbf{1}_\Xi^r \in \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^r(M)$ definido por $\mathbf{1}_\Xi^r(x) = [(\Xi(x), 1)]$. Segue imediatamente do corolário 2.19 que uma seção arbitrária $\alpha \in \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^r(M)$ pode ser escrita como $\alpha = f \mathbf{1}_\Xi^r$, com $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R}_{1,3})$.

Proposição 2.25 *As várias seções definidas acima, associadas a uma escolha de um dado referencial Ξ , se relacionam por*

- (i) $E_a = \mathbf{1}_{\Xi}^r(x) e_a(x) \mathbf{1}_{\Xi}^l(x)$,
- (ii) $\mathbf{1}_{\Xi}^l \mathbf{1}_{\Xi}^r = 1 \in \mathcal{Cl}(M, g)$,
- (iii) $\mathbf{1}_{\Xi}^r \mathbf{1}_{\Xi}^l = 1 \in \mathbb{R}_{1,3}$.

dem.: Imediata. Por exemplo, para cada $x \in M$ temos da proposição 2.22 que $\mathbf{1}_{\Xi}^r(x) e_a(x) = [(\Xi(x), 1E_a)] = [(\Xi(x), E_a)] \in \sec \mathcal{Cl}_{\text{Spin}_{1,3}^e}^r(M)$. Segue da proposição 2.23 que $\mathbf{1}_{\Xi}^r(x) e_a(x) \mathbf{1}_{\Xi}^l(x) = E_a 1 = E_a$. $\square$

Vejamos agora como as seções definidas acima se comportam sob uma mudança de referencial espinorial. Dados dois referenciais espinoriais globais $\Xi, \Xi' \in \sec(P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M))$ (como acima), sabemos da estrutura de fibrado principal de $P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$ que, para cada $x \in M$, existe (um único) $u(x) \in \text{Spin}_{1,3}^e$ tal que $\Xi'(x) = \Xi(x)u(x)^{-1}$. Sejam $e_a, \mathbf{1}_{\Xi}^r, \mathbf{1}_{\Xi}^l$ e $e'_a, \mathbf{1}_{\Xi'}^r, \mathbf{1}_{\Xi'}^l$ as seções globais correspondentes associadas respectivamente a Ξ e Ξ' (como acima).

Proposição 2.26 *Sejam Ξ, Ξ' dois referenciais espinoriais relacionados por $\Xi' = \Xi u^{-1}$, onde $u : x \mapsto u(x) \in \text{Spin}_{1,3}^e$. Então*

- (i) $e'_a = U^{-1} e_a U$,
- (ii) $\mathbf{1}_{\Xi'}^l = \mathbf{1}_{\Xi}^l u^{-1} = U^{-1} \mathbf{1}_{\Xi}^l$,
- (iii) $\mathbf{1}_{\Xi'}^r = u \mathbf{1}_{\Xi}^r = \mathbf{1}_{\Xi}^r U$,

onde $U \in \sec \mathcal{Cl}(M, g)$ é o campo de Clifford associado a u por $U(x) = [(\Xi(x), u(x))] \in \mathcal{Cl}(M, g)$. Ainda, em (ii) e (iii), u^{-1} e u agem respectivamente em $\mathbf{1}_{\Xi}^l \in \sec \mathcal{Cl}_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ e $\mathbf{1}_{\Xi}^r \in \sec \mathcal{Cl}_{\text{Spin}_{1,3}^e}^r(M)$ segundo a proposição 2.19.

dem.: (i) Na notação acima, $e'_a(x) = [(\Xi'(x), E_a)] = [(\Xi(x)u(x)^{-1}, E_a)] = [(\Xi(x), u(x)^{-1} E_a u(x))] = [(\Xi(x), u(x)^{-1})][(\Xi(x), E_a)][(\Xi(x), u(x))] = U(x)^{-1} e_a(x) U(x)$.

(iii) Segue da proposição 2.22 que $\mathbf{1}_{\Xi'}^r(x) = [(\Xi'(x), 1)] = [(\Xi(x)u(x)^{-1}, 1)] = [(\Xi(x), 1u(x))] = [(\Xi(x), u(x))] = u(x) \mathbf{1}_{\Xi}^r(x)$, onde no último passo usamos a proposição 2.19 e o fato de que $\mathbf{1}_{\Xi}^r(x) = [(\Xi(x), 1)]$. Para a segunda parte, temos $u(x) \mathbf{1}_{\Xi}^r(x) = [(\Xi(x), u(x))] = [(\Xi(x), 1)][(\Xi(x), u(x))] = \mathbf{1}_{\Xi}^r(x) U(x)$. Notemos que no último passo temos um produto entre um elemento de $\mathcal{Cl}_{\text{Spin}_{1,3}^e}^r(M)$ (i.e. $[(\Xi(x), 1)]$) e um elemento de $\mathcal{Cl}(M, g)$ (i.e. $[(\Xi(x), u(x))]$). O caso (ii) é inteiramente análogo. $\square$

Capítulo 3

$\mathbb{Z}_2$ -gradações de álgebras de Clifford e estruturas multivetoriais

Como discutimos na seção 2.1, as álgebras de Clifford possuem uma estrutura $\mathbb{Z}_2$ -graduada natural, induzida pela decomposição de $\mathcal{C}\ell(V, g)$ em suas partes par e ímpar usuais. Tal $\mathbb{Z}_2$ -gradação freqüentemente desempenha um papel fundamental em vários desenvolvimentos teóricos. Por exemplo, a estrutura $\mathbb{Z}_2$ -graduada usual do fibrado de Clifford sobre uma variedade riemanniana pode ser empregada na construção de modelos de mecânica quântica supersimétrica [Fro98], com interessantes conexões entre geometria e física. Por outro lado, a $\mathbb{Z}_2$ -gradação usual de $\mathcal{C}\ell(V, g)$ pode ser utilizada na representação de espinores por elementos pares desta álgebra, de forma que o espaço dos espinores efetivamente fecha uma álgebra. Tal construção dá origem à formulação multivetorial de Hestenes para a teoria de Dirac [Hes67, Hes75, Hes95], e tem uma generalização natural para álgebras de Clifford arbitrárias [Dim89].

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita, dotado de uma métrica g . A estrutura de espaço vetorial subjacente a $\mathcal{C}\ell(V, g)$ é naturalmente $\mathbb{Z}$ -graduada pela estrutura multivetorial de $V^\wedge$. No entanto, a estrutura *algébrica* de $\mathcal{C}\ell(V, g)$ não é $\mathbb{Z}$ -graduada, mas apenas $\mathbb{Z}_2$ -graduada. Além disso uma dada $\mathbb{Z}_2$ -gradação arbitrária de $\mathcal{C}\ell(V, g)$ não apresenta em geral nenhuma compatibilidade com os subespaços homogêneos $\Lambda^k(V)$ de $\mathcal{C}\ell(V, g)$. Neste capítulo, estudamos em detalhe a classe de $\mathbb{Z}_2$ -gradações $\mathcal{C}\ell(V, g) = \mathcal{C}\ell_0 \oplus \mathcal{C}\ell_1$ que são, em um certo sentido, compatíveis com a estrutura multivetorial de $\Lambda(V)$ (definição 3.3) [Mos03a]. Na seção 3.2, obtemos uma caracterização completa para as subálgebras pares generalizadas $\mathcal{C}\ell_0$ correspondentes (proposição 3.5). Isto nos permite obter uma classificação completa para $\mathcal{C}\ell_0$ (tabela 3.1).

Na seção 3.4, algumas aplicações preliminares são consideradas. Inicialmente, consideramos o problema de mudança de assinatura em uma álgebra de Clifford arbitrária. Existem várias situações onde mudanças de assinatura são úteis, como em formulações euclidianas de teorias de campos, no

estudo de instantons, em teoria de campos em temperatura finita e em teorias de calibre na rede. Em [Lou97] e [Mir01], os autores discutem as mudanças de assinatura específicas $(1, 3) \rightarrow (3, 1)$ e $(1, 3) \rightarrow (4, 0)$. Como sabemos, a rotação de Wick é baseada na continuação analítica de uma dada função, e a legitimidade deste procedimento depende da inexistência de pólos na região de continuação no plano complexo. Para evitar tais possíveis problemas, assim como para evitar a complexificação de uma álgebra real, os autores de [Mir01] propõem um procedimento algébrico para, partindo de um dado problema no espaço de Minkowski, obter-se um problema equivalente em um espaço com assinatura modificada.¹ Na seção 3.4.1, mostramos como as $\mathbb{Z}_2$ -gradações acima podem ser utilizadas para generalizar o formalismo algébrico de [Lou97, Mir01] para álgebras de Clifford de dimensões arbitrárias. Isto abre a possibilidade de se aplicar tal formalismo, futuramente, em teorias físicas definidas em espaços de dimensão arbitrária. Analogamente aos trabalhos mencionados acima, nosso método é puramente algébrico, sendo implementado por uma deformação da estrutura algébrica correspondente, via deformação do produto de Clifford. Especificamente, todas as possíveis mudanças de assinatura em $\mathcal{Cl}(V, g)$ serão parametrizadas por $\mathbb{Z}_2$ -gradações desta álgebra. Finalmente, na seção 3.4.2 discutimos a possibilidade do emprego de tais $\mathbb{Z}_2$ -gradações alternativas para se definir espaços de espinores (voltaremos a tal tópico no próximo capítulo).

3.1 $\mathbb{Z}_2$ -gradações de álgebras de Clifford

Dizemos que um espaço vetorial W é graduado por um grupo abeliano G se W pode ser escrito como uma soma direta $W = \bigoplus_i W_i$ de subespaços indexados por elementos $i \in G$. Os elementos de W_i são chamados de homogêneos de grau i , e definimos $\deg(w) = i$ se $w \in W_i$. Dizemos que uma álgebra é G -graduada se (a) seu espaço vetorial subjacente é um espaço vetorial G -graduado e (b) seu produto satisfaz $\deg(ab) = \deg(a) + \deg(b)$ [Ben87].

A álgebra tensorial $T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(V)$ é um exemplo elementar de álgebra $\mathbb{Z}$ -graduada. Outro exemplo é dado pela álgebra de Grassmann $\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(V)$, onde a estrutura $\mathbb{Z}$ -graduada é induzida pela $\mathbb{Z}$ -gradação usual de $T(V)$. Notamos que tal $\mathbb{Z}$ -gradação de $\Lambda(V)$ não é de maneira nenhuma única [Ozi97, Fau00]. No entanto, suponhamos que queiramos identificar V com o espaço tangente $T_x M$ em um certo ponto x de um espaço-tempo M . Então, no contexto desta estrutura $\mathbb{Z}$ -graduada para $\Lambda(V)$, podemos interpretar os elementos de grau 0 como escalares, os elementos de grau 1 como vetores tangentes a M e assim por diante, de maneira que tal gradação induz a estrutura multivetorial usual em $\Lambda(V)$. Daqui por diante, salvo menção contrária, consideraremos $\Lambda(V)$ sempre dotado de tal estrutura multivetorial (voltaremos a esta questão na seção 4.6).

Neste sentido, o espaço vetorial $V^\wedge = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(V)$ dos multivetores — que é o espaço vetorial subjacente a $\mathcal{Cl}(V, g)$ — possui uma estrutura $\mathbb{Z}$ -graduada natural, onde k -vetores têm grau k . No

¹A mudança de assinatura correspondente é então usada em [Mir01] no contexto da equação de Dirac e no estudo de soluções (anti-)auto-duais de campos de calibre.

entanto, é importante observar que a estrutura *algébrica* de $\mathcal{Cl}(V, g)$ não é $\mathbb{Z}$ -graduada. De fato, vemos imediatamente da eq. (2.3) que o produto de Clifford entre dois 1-vetores (que são elementos de grau 1) é dado por uma soma de elementos de graus 0 e 2. Por outro lado, existem (infinitas) estruturas $\mathbb{Z}_2$ -graduadas compatíveis com o produto de Clifford. Por exemplo, segue da eq. (2.11) que a decomposição $\mathcal{Cl}^+(V, g) \oplus \mathcal{Cl}^-(V, g)$ define de fato uma $\mathbb{Z}_2$ -gradação de $\mathcal{Cl}(V, g)$, onde $\mathcal{Cl}^\pm(V, g)$ é dado pelas eqs. (2.10). Esta é a chamada $\mathbb{Z}_2$ -gradação *usual* de $\mathcal{Cl}(V, g)$.

Por abuso de linguagem, nos referiremos a uma $\mathbb{Z}_2$ -gradação arbitrária de $\mathcal{Cl}(V, g)$ — gerada pelos subespaços homogêneos $\mathcal{Cl}_0$ e $\mathcal{Cl}_1$ de graus 0 e 1 respectivamente — simplesmente por $\mathcal{Cl}(V, g) = \mathcal{Cl}_0 \oplus \mathcal{Cl}_1$. Com isso, (a estrutura de espaço vetorial subjacente a) $\mathcal{Cl}(V, g)$ é dada pela soma direta $\mathcal{Cl}_0 \oplus \mathcal{Cl}_1$, com

$$\mathcal{Cl}_i \mathcal{Cl}_j \subseteq \mathcal{Cl}_{i+j \pmod{2}}. \quad (3.1)$$

Naturalmente, $\mathcal{Cl}_0$ é então uma subálgebra de $\mathcal{Cl}(V, g)$.

Cada $\mathbb{Z}_2$ -gradação $\mathcal{Cl}(V, g) = \mathcal{Cl}_0 \oplus \mathcal{Cl}_1$ induz naturalmente um automorfismo de espaços vetoriais

$$\alpha : \mathcal{Cl}(V, g) \rightarrow \mathcal{Cl}(V, g)$$

definido por

$$\alpha|_{\mathcal{Cl}_i} = (-1)^i \text{id}_{\mathcal{Cl}_i},$$

onde $\text{id}_{\mathcal{Cl}_i}$ denota o automorfismo identidade em $\mathcal{Cl}_i$. É importante observar que

$$\alpha^2 = \text{id}_{\mathcal{Cl}(V, g)}. \quad (3.2)$$

O automorfismo α será denominado *involução graduada* associada à $\mathbb{Z}_2$ -gradação $\mathcal{Cl}(V, g) = \mathcal{Cl}_0 \oplus \mathcal{Cl}_1$. Definimos as projeções $\pi_i : \mathcal{Cl}(V, g) \rightarrow \mathcal{Cl}_i$ por

$$\pi_i(a) = \frac{a + (-1)^i \alpha(a)}{2}. \quad (3.3)$$

Denotaremos ainda $a_i = \pi_i(a)$.

Dada uma $\mathbb{Z}_2$ -gradação $\mathcal{Cl}(V, g) = \mathcal{Cl}_0 \oplus \mathcal{Cl}_1$, nos referiremos a $\mathcal{Cl}_0$ e $\mathcal{Cl}_1$ como as partes α -par e α -ímpar de $\mathcal{Cl}(V, g)$. Ainda, um elemento de $\mathcal{Cl}_0$ ($\mathcal{Cl}_1$) será chamado de α -par (α -ímpar). Notamos que a $\mathbb{Z}_2$ -gradação usual nos dá $\mathcal{Cl}_0 = \mathcal{Cl}^+(V, g)$ e $\mathcal{Cl}_1 = \mathcal{Cl}^-(V, g)$, sendo o automorfismo correspondente dado por $\alpha = (\cdot)^\wedge$ (operador de paridade usual).

O lema a seguir contém resultados bastante simples que facilitarão nossa discussão a seguir.

Lema 3.1 *Seja $\mathcal{Cl}(V, g) = \mathcal{Cl}_0 \oplus \mathcal{Cl}_1$ uma $\mathbb{Z}_2$ -gradação com involução graduada correspondente α . Então:*

- (i) α é um automorfismo de álgebras, com $\alpha(1) = 1$;
- (ii) $\Lambda^0(V) \subset \mathcal{Cl}_0$ (i.e., escalares são sempre α -pares).

dem.: (i) Dados $a, b \in \mathcal{Cl}(V, g)$, $\alpha(ab) = \sum_{ij} \alpha(a_i b_j) = \sum_{ij} (-1)^{i+j} a_i b_j = \sum_i (-1)^i a_i \sum_j (-1)^j b_j = \alpha(a)\alpha(b)$. Para mostrar que $\alpha(1) = 1$, notamos que $1\alpha(1) = \alpha(1) \Rightarrow \alpha(1)\alpha^2(1) = \alpha^2(1) \Rightarrow \alpha(1)1 = 1$ (pois $\alpha^2 = \text{identidade}$) $\Rightarrow \alpha(1) = 1$.

(ii) Dado um escalar $c \in \Lambda^0(V)$, temos $\alpha(c) = c\alpha(1) = c$, onde usamos (i). Portanto, $c \in \mathcal{Cl}_0$. $\square$

3.2 Compatibilidade com a estrutura multivetorial

Nas $\mathbb{Z}_2$ -graduações arbitrárias de $\mathcal{Cl}(V, g)$ discutidas acima, as projeções par (π_0) e ímpar (π_1) não necessariamente preservam a estrutura multivetorial de $\Lambda(V)$ (vide exemplo 3.7). Em outras palavras, dado um k -vetor $a \in \Lambda^k(V)$, é possível que a parte α -par (α -ímpar) de a seja formada por uma soma não-homogênea de multivetores de graus diferentes.

Proposição 3.2 *Seja $\mathcal{Cl}(V, g) = \mathcal{Cl}_0 \oplus \mathcal{Cl}_1$ uma $\mathbb{Z}_2$ -graduação com involução graduada correspondente α . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *As projeções π_i , $i = 0, 1$, preservam cada $\Lambda^k(V)$, $k = 1, \dots, n$;*
- (ii) *$\pi_i(V) \subseteq V$, $i = 0, 1$;*
- (iii) *α preserva cada $\Lambda^k(V)$, $k = 1, \dots, n$;*
- (iv) *$\alpha(V) \subseteq V$.*

dem.: Segue da definição de π_i (eq. (3.3)) que $\pi_i(\Lambda^k(V)) \subseteq \Lambda^k(V)$ se, e somente se, $\alpha(\Lambda^k(V)) \subseteq \Lambda^k(V)$. Assim, (i) $\Leftrightarrow$ (iii) e (ii) $\Leftrightarrow$ (iv). Ainda, claramente (iii) $\Rightarrow$ (iv). Resta portanto demonstrar a implicação (iv) $\Rightarrow$ (iii). Observamos inicialmente que, assumindo (iv), $\alpha|_V : V \rightarrow V$ é uma isometria. De fato, dados $x, y \in V$, segue da eq. (2.4) e do lema 3.1 que $2g(\alpha(x), \alpha(y)) = \alpha(x)\alpha(y) + \alpha(y)\alpha(x) = \alpha(xy + yx) = \alpha(2g(x, y)) = 2g(x, y)$.

Se $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de V , todo elemento $a \in \Lambda^k(V)$ pode ser escrito como uma combinação linear de termos do tipo $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = e_{i_1} \dots e_{i_k}$ (eq. (2.9)). Como $\alpha|_V$ é uma isometria, $\{\alpha(e_i)\}$ é também uma base ortonormal de V e assim $\alpha(e_{i_1} \dots e_{i_k}) = \alpha(e_{i_1}) \dots \alpha(e_{i_k}) = \alpha(e_{i_1}) \wedge \dots \wedge \alpha(e_{i_k}) \in \Lambda^k(V)$, onde utilizamos novamente a eq. (2.9). Isto mostra que, assumindo (iv), temos $a \in \Lambda^k(V) \Rightarrow \alpha(a) \in \Lambda^k(V)$, estabelecendo desta forma (iv) $\Rightarrow$ (iii). $\square$

Definição 3.3 *Quando uma $\mathbb{Z}_2$ -graduação $\mathcal{Cl}(V, g) = \mathcal{Cl}_0 \oplus \mathcal{Cl}_1$ satisfizer uma (e portanto todas) as condições acima, diremos que tal $\mathbb{Z}_2$ -graduação preserva a estrutura multivetorial de $\Lambda(V)$.*

Para esta classe de $\mathbb{Z}_2$ -graduações, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.4 *Seja $\mathcal{Cl}(V, g) = \mathcal{Cl}_0 \oplus \mathcal{Cl}_1$ uma $\mathbb{Z}_2$ -graduação que preserva a estrutura multivetorial de $\Lambda(V)$. Seja*

$$V_i := V \cap \mathcal{Cl}_i,$$

isto é, V_0 (V_1) é o espaço dos 1-vetores α -pares (α -ímpares). Então, $V = V_0 \oplus V_1$ com $V_0 = V_1^\perp$ (e $V_1 = V_0^\perp$). Segue que cada subespaço V_i é não-degenerado².

dem.: Como assumimos que a $\mathbb{Z}_2$ -graduação preserva a estrutura multivetorial de $\Lambda(V)$, temos imediatamente que cada π_i preserva V . Isto induz uma $\mathbb{Z}_2$ -graduação para o espaço vetorial V , de maneira que $V = V_0 \oplus V_1$. Além disso, tal decomposição é ortogonal. De fato, dados $x \in V_0$ e $y \in V_1$, temos $xy + yx = 2g(x, y)$. Como o membro esquerdo pertence a $\mathcal{C}\ell_1$ e o membro direito pertence a $\mathcal{C}\ell_0$ (lema 3.1), temos necessariamente $g(x, y) = 0$. Assim, $V_0 \perp V_1$ e, em particular, $V_0 \subseteq V_1^\perp$. Segue de uma simples contagem dimensional que $V_0 = V_1^\perp$ (pois $\dim(V_0) + \dim(V_1) = n$ e $\dim(V_1) + \dim(V_1^\perp) = n$). $\square$

Seja $g_i : V_i \times V_i \rightarrow \mathbb{R}$ a métrica induzida por g em cada subespaço V_i , $i = 0, 1$. Para fixar a notação, suponhamos que g tenha assinatura (p, q) , com $p + q = n$. A proposição acima nos garante que g_i é não-degenerada, de forma que se g_i tem assinatura (p_i, q_i) então $p_0 + p_1 = p$ e $q_0 + q_1 = q$. Sejam $\mathcal{B}_0 = \{v_1, \dots, v_a\}$ e $\mathcal{B}_1 = \{v_{a+1}, \dots, v_{a+b}\}$ bases ortonormais de V_0 e V_1 , respectivamente. Com isso, $\{v_1, \dots, v_{a+b}\}$ é base ortonormal de V e, portanto, $\{1, v_{i_1} \cdots v_{i_k} : 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n, k = 1, \dots, n\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{C}\ell(V, g)$. Segue da eq. (3.1) que $\mathcal{C}\ell_0$ é gerado (como álgebra) por elementos da forma

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & v_i, \quad \text{com } i \leq a, \\ \text{(ii)} \quad & v_i v_j, \quad \text{com } i, j > a. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Isto nos dá imediatamente

$$\mathcal{C}\ell_0 \cong \mathcal{C}\ell_{p_0, q_0} \otimes \mathcal{C}\ell_{p_1, q_1}^+,$$

onde o produto tensorial é sobre $\mathbb{R}$ e vem do fato de os elementos em (i) e (ii) comutarem. Temos portanto a seguinte proposição:

Proposição 3.5 *Seja $\mathcal{C}\ell(V, g) = \mathcal{C}\ell_0 \oplus \mathcal{C}\ell_1$ uma $\mathbb{Z}_2$ -graduação que preserva a estrutura multivetorial de $\Lambda(V)$. Então*

$$\mathcal{C}\ell_0 \cong \mathcal{C}\ell_{p_0, q_0} \otimes \mathcal{C}\ell_{p-p_0, q-q_0}^+, \tag{3.5}$$

onde (p_i, q_i) é a assinatura da métrica induzida por g no subespaço $V_i = V \cap \mathcal{C}\ell_i$.³

Notamos que:

(i) se $p_0 = q_0 = 0$, então a eq. (3.5) nos dá $\mathcal{C}\ell_0 = \mathcal{C}\ell^+(V, g)$. Esta é a $\mathbb{Z}_2$ -graduação usual de $\mathcal{C}\ell(V, g)$.

(ii) se $p_0 = p$ e $q_0 = q$, então $\mathcal{C}\ell_0 = \mathcal{C}\ell(V, g)$ e $\mathcal{C}\ell_1 = 0$. Portanto, este caso corresponde à $\mathbb{Z}_2$ -graduação trivial de $\mathcal{C}\ell(V, g)$.

²Isto é, a métrica induzida por g em cada subespaço V_i é não-degenerada.

³Lembramos que a proposição 3.4 nos garante que tal métrica induzida é não-degenerada.

Toda $\mathbb{Z}_2$ -gradação não-trivial $\mathcal{Cl}(V, g) = \mathcal{Cl}_0 \oplus \mathcal{Cl}_1$ que preserva a estrutura multivetorial de $\Lambda(V)$ nos permite escolher um elemento *invertível* $u \in \mathcal{Cl}_1$. De fato, como V_1 é não-degenerado (proposição 3.4) e não-trivial (já que assumimos que a $\mathbb{Z}_2$ -gradação é não-trivial), podemos escolher $u \in V_1$ com $u^2 \neq 0$. Isto pode ser usado para se construir o isomorfismo de espaços vetoriais $\varphi : \mathcal{Cl}_0 \rightarrow \mathcal{Cl}_1$, $x \mapsto ux$.⁴ Desta forma, a classe de $\mathbb{Z}_2$ -gradações dada pela definição 3.3 é tal que

$$(a) \dim \mathcal{Cl}_0 = \dim \mathcal{Cl}(V, g) \text{ (caso trivial), ou} \quad (3.6a)$$

$$(b) \dim \mathcal{Cl}_0 = \frac{1}{2} \dim \mathcal{Cl}(V, g). \quad (3.6b)$$

Neste ponto, é interessante considerar alguns exemplos de $\mathbb{Z}_2$ -gradações que preservam ou não a estrutura multivetorial de $\Lambda(V)$.

Exemplo 3.6 Consideremos a álgebra do espaço-tempo $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$. Definamos uma $\mathbb{Z}_2$ -gradação em $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{Cl}_0$ e $\mathcal{Cl}_1$ são gerados, como espaços vetoriais, pelas colunas da tabela abaixo

	$\mathcal{Cl}_0$	$\mathcal{Cl}_1$
$\Lambda^0(V)$	1	
$\Lambda^1(V)$	e_1, e_2, e_3	e_0
$\Lambda^2(V)$	e_{12}, e_{23}, e_{31}	e_{10}, e_{20}, e_{30}
$\Lambda^3(V)$	e_{123}	$e_{012}, e_{023}, e_{031}$
$\Lambda^4(V)$		e_{0123}

onde $\{e_a\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{1,3}$. Notamos que, dado um 1-vetor arbitrário $v = v^0 e_0 + v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3 \in \mathbb{R}^{1,3}$, temos $\pi_0(v) = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3 \in \mathbb{R}^{1,3}$ e $\pi_1(v) = v^0 e_0 \in \mathbb{R}^{1,3}$. Desta forma, as projeções π_i , $i = 0, 1$, preservam $\mathbb{R}^{1,3}$. Assim, pela condição (ii) da proposição 3.2, tal $\mathbb{Z}_2$ -gradação preserva a estrutura multivetorial de $\Lambda(\mathbb{R}^{1,3})$. Ainda, neste caso, $p_0 = 0$, $q_0 = 3$, de forma que a proposição 3.5 nos dá $\mathcal{Cl}_0 \cong \mathcal{Cl}_{0,3} \otimes \mathcal{Cl}_{1,0}^+ \cong \mathcal{Cl}_{0,3}$ (o que pode ainda ser visto diretamente da tabela acima). Assim,

$$\mathcal{Cl}_0 \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}.$$

Portanto, tal subálgebra *não é isomorfa* à subálgebra par usual de $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$, que é dada por $\mathcal{Cl}_{1,3}^+(\mathbb{R}) \cong \mathcal{Cl}_{3,0}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{M}(2, \mathbb{C}) \cong [\text{álgebra de Pauli}]$.

Exemplo 3.7 Por simplicidade, vamos momentaneamente considerar $\mathcal{Cl}(V, g)$ como uma álgebra de matrizes $m \times m$, como na proposição 2.1. Definamos aqui $\mathcal{Cl}_0$ e $\mathcal{Cl}_1$, respectivamente, como o espaço das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} A & 0_{a \times b} \\ 0_{b \times a} & B \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0_{a \times a} & C \\ D & 0_{b \times b} \end{pmatrix},$$

⁴Notamos que $\varphi^{-1}(x) = \frac{u}{u^2} x$.

onde A e B matrizes quadradas de ordem a e b , respectivamente, com $a + b = m$. É fácil ver que isto define de fato uma $\mathbb{Z}_2$ -gradação de $\mathcal{Cl}(V, g)$. Tomando a e b não-nulos tais que $a \neq b$, vemos imediatamente que $\dim \mathcal{Cl}_0 \neq \frac{1}{2} \dim \mathcal{Cl}(V, g)$. Segue das eqs. (3.6) que tal $\mathbb{Z}_2$ -gradação não preserva a estrutura multivetorial de $\Lambda(V)$.

3.3 Classificação

Na proposição 3.5, obtivemos uma fórmula explícita para a subálgebra par $\mathcal{Cl}_0$ relativa a uma $\mathbb{Z}_2$ -gradação que preserva a estrutura multivetorial da álgebra de Grassmann correspondente. Tal expressão pode ser utilizada para a classificação de $\mathcal{Cl}_0$ em espaços com assinaturas arbitrárias. De fato, um cálculo direto — usando os fatos de que $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{C} \otimes \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ e $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \cong \mathcal{M}(4, \mathbb{R})$ (vide, p. ex., apêndice A de [Ben87]) — mostra que $\mathcal{Cl}_0 \cong \mathcal{M}(k, \mathbb{R}) \otimes \mathcal{D}$, onde $\mathcal{D}$ é dado pela tabela 3.1 e k é fixado por $k^2 \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{D} = 2^{n-1}$, onde $n = p + q$. É interessante notar que isto nos dá uma periodicidade de ordem 4 em termos de $p_0 - q_0$.

$p_0 - q_0 \setminus p - q$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$
1	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$
2	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}$
3	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

Tabela 3.1: Subálgebras pares $\mathcal{Cl}_0$ associadas a $\mathbb{Z}_2$ -gradações preservando a estrutura multivetorial de $\Lambda(\mathbb{R}^{p,q})$. A tabela exhibe $\mathcal{D}$ em $\mathcal{Cl}_0 \cong \mathcal{M}(k, \mathbb{R}) \otimes \mathcal{D}$, onde $k^2 \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{D} = 2^{n-1}$ e $n = p + q$. Aqui, $p - q$ e $p_0 - q_0$ devem ser considerados mod 8 e mod 4 respectivamente.

Notamos que a primeira linha da tabela acima reproduz, como caso particular, a classificação das subálgebras pares usuais em (2.13). Vemos ainda da tabela 3.1 que $\mathcal{Cl}_0$ nem sempre é uma álgebra de Clifford. Por exemplo, quando $p - q = 1 \pmod{4}$ e $p_0 - q_0 = 1 \pmod{4}$, temos $\mathcal{Cl}_0 \cong \mathcal{M}(k, \mathbb{R}) \otimes (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R})$, e sabemos pela seção 2.2 que nenhuma álgebra de Clifford possui esta forma.

3.4 Aplicações

Consideramos aqui algumas aplicações para a classe de $\mathbb{Z}_2$ -gradações estudada na seção anterior. Na seção 3.4.1, mostramos como tais $\mathbb{Z}_2$ -gradações podem ser usadas para parametrizar as mudanças de assinatura em uma álgebra de Clifford arbitrária, como adiantado na introdução. Na seção 3.4.2, discutimos como tais $\mathbb{Z}_2$ -gradações podem ser utilizadas para a definição de espinores operatoriais [Dim89, Mos02] (voltaremos a este tópico no capítulo seguinte)

3.4.1 Mudança de assinatura em álgebras de Clifford

Uma caracterização interessante das álgebras de Clifford (tomada muitas vezes como sua própria definição) é dada pelo seguinte teorema (vide, p. ex., [Cru91]).

Teorema 3.8 *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita dotado de uma métrica g . Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra real, associativa e com unidade, digamos $1_{\mathcal{A}}$. Dada uma aplicação linear $\Gamma : V \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $(\Gamma(v))^2 = g(v, v)1_{\mathcal{A}}$, existe um único homomorfismo $\bar{\Gamma} : \mathcal{Cl}(V, g) \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\bar{\Gamma}|_V = \Gamma$.*

Denominaremos um mapa Γ como acima de *mapa de Clifford* para o par (V, g) . Um exemplo importante de tal mapa é dado pela aplicação

$$\Gamma : V \rightarrow \text{End}(V^\wedge),$$

definida por

$$\Gamma(v) = v \wedge + v \lrcorner, \quad (3.7)$$

que implementa a identificação de Chevalley [Lou97] de $\mathcal{Cl}(V, g)$ com uma subálgebra de $\text{End}(V^\wedge)$.

Baseados em tal construção, associemos a cada $\mathbb{Z}_2$ -graduação $\mathcal{Cl}(V, g) = \mathcal{Cl}_0 \oplus \mathcal{Cl}_1$, com involução graduada correspondente α , a aplicação linear

$$\Gamma_\alpha : V \rightarrow \text{End}(V^\wedge), \quad \Gamma_\alpha(v) = v \wedge + \alpha(v) \lrcorner. \quad (3.8)$$

Proposição 3.9 *Se a $\mathbb{Z}_2$ -graduação $\mathcal{Cl}(V, g) = \mathcal{Cl}_0 \oplus \mathcal{Cl}_1$ preserva a estrutura multivetorial de $\Lambda(V)$, então a aplicação Γ_α da eq. (3.8) é um mapa de Clifford para o par $(V, g^{(\alpha)})$, onde dados $u, v \in V$, a métrica deformada $g^{(\alpha)}$ é definida por $g^{(\alpha)}(u, v) = g(u_0, v_0) - g(u_1, v_1)$, com $u_i = \pi_i(u)$, $v_i = \pi_i(v)$, $i = 0, 1$.*

dem.: Da hipótese de que a $\mathbb{Z}_2$ -graduação preserva a estrutura multivetorial de $\Lambda(V)$, temos que $\alpha(v) \in V \ \forall v \in V$. Com isso, $(\Gamma_\alpha(v))^2(x) = (v \wedge + \alpha(v) \lrcorner)(v \wedge x + \alpha(v) \lrcorner x) = v \wedge (\alpha(v) \lrcorner x) + \alpha(v) \lrcorner (v \wedge x) = (\alpha(v) \lrcorner v)x, \ \forall x \in V$. Assim, $(\Gamma_\alpha(v))^2 = g(\alpha(v), v) \text{id}_{V^\wedge}$ e portanto

$$(\Gamma_\alpha(v))^2 = \begin{cases} g(v, v) \text{id}_{V^\wedge} & \text{se } v \in V_0, \\ -g(v, v) \text{id}_{V^\wedge} & \text{se } v \in V_1, \end{cases}$$

onde $V_i := V \cap \mathcal{Cl}_i$, $i = 0, 1$ (como definido na proposição 3.4). $\square$

Sob as condições acima, podemos definir um produto de Clifford $\vee_\alpha$, associado a Γ_α , no espaço vetorial dos multivetores $V^\wedge$ por

$$v \vee_\alpha a = v \wedge a + \alpha(v) \lrcorner a, \quad v \in V, a \in V^\wedge,$$

que pode ser estendido por linearidade e associatividade a todo $V^\wedge$. Segue que $(V^\wedge, \vee_\alpha)$ é a álgebra de Clifford associada ao par $(V, g^{(\alpha)})$, onde $g^{(\alpha)}$ foi definido na proposição 3.9.

Dados $v \in V$ e $a \in V^\wedge$, com $v_i := \pi_i(v)$, este produto é relacionado ao produto de Clifford original (denotado por justaposição) por

$$\begin{aligned} v \vee_\alpha a &= v_0 \wedge a + v_1 \wedge a + v_0 \lrcorner a - v_1 \lrcorner a \\ &= v_0 a + v_1 \wedge a - v_1 \lrcorner a. \end{aligned}$$

Segue das eqs. (2.8) que $v_1 \wedge a - v_1 \lrcorner a = \hat{a}v_1$ e, portanto, que o produto de Clifford correspondente ao espaço $(V, g^{(\alpha)})$ pode ser escrito em termos do produto de Clifford original como

$$v \vee_\alpha a = v_0 a + \hat{a}v_1, \quad (3.9)$$

onde $v \in V$ e $a \in V^\wedge$. Uma expressão geral para o produto $\vee_\alpha$ entre multivetores arbitrários pode ser obtida da equação acima por recursão.

Consideremos agora a situação onde se quer mudar a assinatura da métrica de (p, q) para (r, s) , com $p+q = r+s$. Para isso, vamos simular o produto de Clifford associado à nova métrica utilizando a estrutura algébrica de $\mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{R})$. Mais especificamente, consideremos uma base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^{p,q}$, de forma que $e_k^2 = +1$ para $k = 1, \dots, p$ e $e_k^2 = -1$ para $k = p+1, \dots, p+q$. Suponhamos que queiramos que o sinal de e_k^2 seja mudado (de $+1$ para -1 ou vice-versa) para os vetores específicos $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$ de $\mathcal{B}$. Definimos então uma $\mathbb{Z}_2$ -gradação conveniente para $\mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{R})$ declarando $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$ como α -ímpares, e declarando os vetores restantes de $\mathcal{B}$ como α -pares. Em outras palavras, escolhemos a α -paridade dos elementos de $\mathcal{B}$ por

	$\mathcal{C}\ell_0$	$\mathcal{C}\ell_1$
1-vetores	e_i 's restantes	$e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$

Tal escolha gera naturalmente uma $\mathbb{Z}_2$ -gradação em que os elementos α -pares (α -ímpares) são dados por produtos de

- (a) um número par (ímpar) de elementos em $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$;
- (b) qualquer número de elementos em $\mathcal{B} \setminus \{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$.

Então, pela proposição 3.9, o produto $\vee_\alpha$ correspondente claramente implementa a mudança de assinatura desejada $\mathcal{C}\ell_{p,q} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{r,s}$.

Para esclarecer o processo acima, observemos que inicialmente temos um espaço de multivetores $V^\wedge = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(V)$ (que tem apenas estrutura de espaço vetorial e não de álgebra). Então, vários produtos podem ser definidos em $V^\wedge$. Como vimos, a álgebra de Grassmann $\Lambda(V) = (V^\wedge, \wedge)$ é obtida dotando $V^\wedge$ do produto exterior, enquanto a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{p,q} = (V^\wedge, \text{produto de Clifford})$ é obtida dotando $V^\wedge$ do produto da eq. (2.2). Da mesma forma, a discussão acima mostra que a álgebra de Clifford associada ao espaço de assinatura modificada (isto é, com assinatura (r, s)) é dado por $\mathcal{C}\ell_{r,s} = (V^\wedge, \vee_\alpha)$. Além disso, o produto $\vee_\alpha$ é parametrizado por $\mathbb{Z}_2$ -gradações e é relacionado ao produto de Clifford original pela eq. (3.9).

A seguir, discutimos alguns exemplos:

(i) A $\mathbb{Z}_2$ -graduação *trivial* ($\mathcal{C}\ell_0 = \mathcal{C}\ell_{p,q}$) é gerada por

	$\mathcal{C}\ell_0$	$\mathcal{C}\ell_1$
1-vetores	$e_1, \dots, e_n$	—

de forma que $\alpha = \text{id}_{\mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{R})}$. Desta maneira, temos $\vee_\alpha = [\text{produto de Clifford original}]$. Em outras palavras, a $\mathbb{Z}_2$ -graduação trivial produz uma mudança de assinatura trivial (i.e., nenhuma).

(ii) A $\mathbb{Z}_2$ -graduação *usual* ($\mathcal{C}\ell_0 = \mathcal{C}\ell_{p,q}^+$) é gerada por

	$\mathcal{C}\ell_0$	$\mathcal{C}\ell_1$
1-vetores	—	$e_1, \dots, e_n$

de forma que $\alpha|_{\mathbb{R}^{p,q}} = -\text{id}_{\mathbb{R}^{p,q}}$. Com isso, $\vee_\alpha$ produz a mudança $\mathcal{C}\ell_{p,q} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{q,p}$. Um cálculo direto mostra que dados $a, b \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$, temos $a \vee_\alpha b = b_0 a_0 + b_0 a_1 + b_1 a_0 - b_1 a_1$, onde $a_i = \pi_i(a)$ e $b_j = \pi_j(b)$. Esta é precisamente a transformação introduzida por Lounesto em [Lou97], lá denominada *tilt transformation*.

(iii) Para a $\mathbb{Z}_2$ -graduação gerada por

	$\mathcal{C}\ell_0$	$\mathcal{C}\ell_1$
1-vetores	$e_1, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_n$	e_k

temos $\mathcal{C}\ell_{p,q} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{p-1,q+1}$ se originalmente $e_k^2 = +1$, e $\mathcal{C}\ell_{p,q} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{p+1,q-1}$ se e_k originalmente $e_k^2 = -1$.

(iv) Finalmente, para a $\mathbb{Z}_2$ -graduação gerada por

	$\mathcal{C}\ell_0$	$\mathcal{C}\ell_1$
1-vetores	e_i 's restantes	$e_{i_1}, \dots, e_{i_{ r-p }}$

temos uma mudança de assinatura arbitrária $\mathcal{C}\ell_{p,q} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{r,s}$. Portanto, o produto $\vee_\alpha$ parametriza todas as possíveis mudanças de assinatura em $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ através de $\mathbb{Z}_2$ -graduações.

3.4.2 Álgebras espinoriais

A identificação da subálgebra par de uma álgebra de Clifford com um espaço de espinores é predominantemente conhecida no contexto da abordagem de Hestenes para a teoria de Dirac [Hes67, Hes75, Hes95] (que revemos na seção 4.1). Em tal formulação, o estado do elétron é descrito por um espinor operatorial [Fig90] $\Psi \in \mathcal{C}\ell_{1,3}^+(\mathbb{R})$ que satisfaz a equação de Dirac-Hestenes

$$e^\mu \partial_\mu \Psi e_{21} - qA\Psi = m\Psi e_0,$$

onde $\{e_\mu\}$ é um referencial ortonormal no espaço de Minkowski, correspondendo a um dado observador. Observamos que o espaço dos espinores operatoriais é mais que um espaço vetorial, fechando de fato uma álgebra. Isto leva, entre outros resultados, a uma elegante decomposição canônica

para Ψ , que generaliza a decomposição polar para números complexos e dá origem a uma série de interpretações geométricas para a teoria [Hes95].

No capítulo seguinte, obtemos novas formulações multivetoriais da equação de Dirac através da utilização das subálgebras pares $\mathcal{Cl}_0$ — estudadas nas seções anteriores — como espaço de representação de espinores. A equação de Dirac-Hestenes generalizada neste contexto é então dada por $\check{\partial}\Psi\sigma + m\Psi u = 0$, onde $\Psi \in \mathcal{Cl}_0$, σ e u são elementos respectivamente α -par e α -ímpar, com $\sigma^2 = -1$, $u^2 = 1$, e $\check{\partial}\Psi := \pi_0(\partial)\Psi u + \pi_1(\partial)\Psi$ [Mos02].

Uma questão que se coloca é se é possível generalizar tal procedimento para álgebras de Clifford arbitrárias. Neste caso, notamos inicialmente que a subálgebra par $\mathcal{Cl}_0$ é, em geral, muito “grande” para representar irredutivelmente espinores. De fato, como discutimos na seção 2.5 (vide também [Che54]), o espaço dos espinores é classicamente dado por um ideal à esquerda minimal $\mathcal{I}$ da álgebra de Clifford pertinente. Por outro lado, as $\mathbb{Z}_2$ -gradações consideradas aqui são tais que $\dim \mathcal{Cl}_0 = \frac{1}{2} \dim \mathcal{Cl}_{p,q}(\mathbb{R})$ (eq. (3.6b)). Desta forma, $\mathcal{I}$ e $\mathcal{Cl}_0$ têm a mesma dimensão apenas no caso de álgebras de Clifford isomorfas a álgebras de matrizes 2×2 , isto é, para $\mathcal{Cl}_{2,0}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$, $\mathcal{Cl}_{3,0}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ e $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{M}(2, \mathbb{H})$ (a menos de isomorfismos). O caso $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$ será analisado em detalhes no próximo capítulo. Por outro lado, para a álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{3,0}(\mathbb{R})$, que desempenha na teoria de Pauli um papel análogo ao de $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$ na teoria de Dirac, nosso método produz álgebras de espinores isomorfas a $\mathbb{H}$, $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ (vide tabela 3.1). Desta forma, um estudo da teoria de Pauli na linha do próximo capítulo resultaria em três diferentes tipos de álgebras (não-isomorfas) de espinores para este caso.

Finalmente, observamos que no caso de uma álgebra de Clifford arbitrária, é ainda possível definir uma subálgebra apropriada $\mathcal{E}$, que carrega uma representação irredutível de $\mathcal{Cl}_{p,q}(\mathbb{R})$, tomando a parte par (usual) de sucessivas $\mathbb{Z}_2$ -gradações de $\mathcal{Cl}_{p,q}(\mathbb{R})$ [Dim89]. Claramente, pode-se também generalizar tal procedimento utilizando as $\mathbb{Z}_2$ -gradações estudadas aqui.

Capítulo 4

Representações multivetoriais da teoria de Dirac

A forma tradicional da equação de Dirac em espaço-tempo chato é dada por (em unidades naturais, onde $\hbar = c = 1$)

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu) |\psi\rangle = m|\psi\rangle. \quad (4.1)$$

Aqui, $|\psi\rangle = (\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4)^t$ denota um espinor-coluna tomando valores em $\mathbb{C}^4$ e $\{\gamma_\mu\}$ é um conjunto de matrizes de Dirac em alguma representação. Como discutimos na seção 2.5, podemos equivalentemente expressar tal equação em termos de espinores algébricos. Para isso, notamos inicialmente que um espinor-coluna pode ser incluído em $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ definindo-se, por exemplo,

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |\psi\rangle P, \quad \text{onde } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Desta forma, $|\psi\rangle$ pode ser pensado como um elemento do ideal minimal à esquerda $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})P$, determinado pelo idempotente primitivo $P \in \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$. Como vimos na seção 2.5, a álgebra de matrizes $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ é (não-canonicamente) isomorfa a $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$. Seja $\rho : \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ um tal isomorfismo fixo mas arbitrário, como na eq. (2.23). Então $P := \rho^{-1}(P)$ é um idempotente primitivo em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$, e o correspondente ideal minimal à esquerda $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P$ pode então ser tomado como o espaço dos espinores algébricos neste contexto.

Notamos que cada escolha de ρ induz um idempotente $P = \rho^{-1}(P)$ de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ que, por sua vez, determina um espaço de espinores algébricos $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P$ correspondente. Na seção seguinte, mostramos como a equação de Dirac-Hestenes pode ser obtida através de uma escolha específica

de ρ para, em seguida, generalizá-la. No que segue, seja $\{e_\mu\}$ um referencial fixo do espaço de Minkowski, correspondendo a um certo observador.

4.1 Equação de Dirac-Hestenes

A escolha de Hestenes para ρ , que denotaremos por ρ_{st} , é dada por

$$\rho_{st}(e_\mu) = \gamma_\mu^{st}, \quad (4.3)$$

onde γ_μ^{st} são matrizes de Dirac na representação padrão (eqs. (2.27)). Como mostramos na seção 2.5.1, o idempotente $P \in \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ da eq. (4.2) é dado, em termos de $\{\gamma_\mu^{st}\}$, por $P = \frac{1}{2}(1 + \gamma_0^{st})\frac{1}{2}(1 + i\gamma_{12}^{st})$. Desta forma, o idempotente $P = \rho^{-1}(P) \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ determinado por ρ_{st} é dado por

$$P = P_{st} = \frac{1}{2}(1 + e_0)\frac{1}{2}(1 + ie_{12}).$$

Aplicando ρ_{st}^{-1} à equação de Dirac (4.1) e utilizando a relação

$$P_{st}e_{21} = iP_{st}, \quad (4.4)$$

temos imediatamente

$$e^\mu \partial_\mu \psi e_{21} - qA\psi = m\psi, \quad (4.5)$$

onde $A = A^\mu e_\mu$ é o 4-vetor potencial eletromagnético e $\psi = \psi P$ é um espinor algébrico em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P$, dado por $\psi = \rho_{st}^{-1}(P)$.

Observamos que um espinor de Dirac possui 8 graus de liberdade reais (4 complexos), enquanto um elemento genérico de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ possui 32 graus de liberdade reais (16 complexos). No entanto, a relação $\psi = \psi P \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})P$ reduz o número de graus de liberdade reais de ψ para 8. Alternativamente, podemos extrair os mesmos 8 graus de liberdade de ψ tomando sua parte real¹ em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$, e verificando que esta pertence a um ideal minimal de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$. De fato, segue da eq. (4.4) que $\text{Im}(\psi) = -\text{Re}(i\psi) = \text{Re}(\psi e_{12}) \Rightarrow \text{Im}(\psi) = \text{Re}(\psi)e_{12}$. Assim, a parte real de ψ em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ carrega toda a informação de ψ . Notamos ainda que $\psi = \psi \frac{1}{2}(1 + e_0)\frac{1}{2}(1 + ie_{12}) \Rightarrow \psi^* = \psi^* \frac{1}{2}(1 + e_0)\frac{1}{2}(1 - ie_{12})$, de forma que a parte real $\frac{1}{2}(\psi + \psi^*)$ de ψ é um elemento do ideal à esquerda minimal² $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})\frac{1}{2}(1 + e_0)$ de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$, que contém apenas 8 graus de liberdade (reais), como deveria ser.

A discussão acima nos mostra que podemos projetar a eq. (4.5) em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$, obtendo desta maneira

$$\gamma^\mu \partial_\mu \Phi e_{21} - qA\Phi = m\Phi, \quad \Phi \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})\frac{1}{2}(1 + e_0), \quad (4.6)$$

¹É importante notar que isso não é de maneira nenhuma equivalente a tomar a parte real de um espinor-coluna em $\mathbb{C}^4$, o que resultaria em um objeto com apenas 4 graus de liberdade reais.

²Vide eq. (2.33).

que é uma equação escrita em termos de espinores algébricos reais, definida no ideal minimal à esquerda $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})^{\frac{1}{2}}(1 + e_0)$.

Por outro lado, se Φ_+ (Φ_-) denota a parte par (ímpar) usual de Φ , então $\Phi \in \mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})^{\frac{1}{2}}(1 + e_0) \Rightarrow \Phi = \Phi e_0 \Rightarrow \Phi_{\pm} = \Phi_{\mp} e_0$. Assim, Φ_+ e $\Phi_- = \Phi_+ e_0$ carregam a mesma informação, e podemos representar a equação acima na subálgebra par $\mathcal{Cl}_{1,3}^+(\mathbb{R})$, ao invés de no ideal $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})^{\frac{1}{2}}(1 + e_0)$. Mais precisamente, separando a eq. (4.6) nas partes par e ímpar de $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$ (note que $e_0, A \in \mathbb{R}^{1,3} \subset \mathcal{Cl}_{1,3}^-(\mathbb{R})$), temos

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \partial_\mu \Phi_- e_{21} - qA\Phi_- &= m\Phi_+, \text{ em } \mathcal{Cl}_{1,3}^+(\mathbb{R}), \\ \gamma^\mu \partial_\mu \Phi_+ e_{21} - qA\Phi_+ &= m\Phi_-, \text{ em } \mathcal{Cl}_{1,3}^-(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Utilizando o fato de que $\Phi_- = \Phi_+ e_0$, vemos que apenas uma das equações acima é independente. Denotando $\Psi = \Phi_+ \in \mathcal{Cl}_{1,3}^+(\mathbb{R})$, temos então a equação de Dirac-Hestenes:

$$\partial \Psi e_{21} - qA\Psi = m\Psi e_0, \quad \Psi \in \mathcal{Cl}_{1,3}^+(\mathbb{R}), \quad (4.7)$$

onde $\partial = e^\mu \partial_\mu$. Notamos que o espaço dos espinores Ψ agora fecha uma álgebra, denominada álgebra dos *espinores operatoriais*.

É fácil ver que tudo que foi feito até aqui independe do referencial $\{e_\mu\}$ pois, como vimos na seção 2.4, uma outra escolha $\{e'_\mu\}$ deve ser relacionada a $\{e_\mu\}$ por

$$e'_\mu = U^{-1} e_\mu U,$$

com $U \in \text{Spin}_{1,3}^e$. Com isso, a equação de Dirac-Hestenes tem a mesma forma no referencial $\{e'_\mu\}$ desde que definamos

$$\Psi' = \Psi U. \quad (4.8)$$

Na seção 4.7 analisaremos a questão da covariância de Ψ mais profundamente, utilizando para isso o formalismo desenvolvido na seção 2.6.

Decomposição canônica

Como $\Psi \in \mathcal{Cl}_{1,3}^+(\mathbb{R})$, vemos que o elemento $\Psi\tilde{\Psi} \in \mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$ é par e satisfaz $(\Psi\tilde{\Psi})^\sim = (\Psi\tilde{\Psi})$. Logo, $\Psi\tilde{\Psi} \in \Lambda^0 \oplus \Lambda^4$. Como $\Lambda^0 \oplus \Lambda^4 = \{a + b e_{0123} : a, b \in \mathbb{R}\}$, com $e_{0123}^2 = -1$, temos $\Lambda^0 \oplus \Lambda^4 \cong \mathbb{C}$. Assim, podemos escrever

$$\Psi\tilde{\Psi} = \varrho e^{\beta e_{0123}}.$$

Segue que, para $\varrho \neq 0$:

$$\Psi = (\Psi\tilde{\Psi})^{1/2} \frac{\Psi}{(\Psi\tilde{\Psi})^{1/2}} = (\varrho e^{\beta e_{0123}})^{1/2} \frac{\Psi}{(\varrho e^{\beta e_{0123}})^{1/2}}$$

(observemos que e_{0123} comuta com $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+(\mathbb{R})$ e assim o elemento $1/(\varrho e^{\beta e_{0123}})^{1/2} = \rho^{-1/2} e^{-\beta e_{0123}/2}$ está bem definido nesta equação). Desta forma:

$$\Psi = \sqrt{\varrho} e^{\beta e_{0123}/2} R, \quad (4.9)$$

onde $R \stackrel{def}{=} (\Psi \tilde{\Psi})^{-1/2} \Psi$. Notamos que esta decomposição é uma generalização da decomposição polar utilizada na formulação de de Broglie-Bohm da mecânica quântica não-relativística.

Observamos que $R \in \mathcal{C}\ell_{1,3}^+(\mathbb{R})$ e $R\tilde{R} = \tilde{R}R = 1$, isto é, $R \in \text{Spin}_{1,3}^e$ (eq. (2.19)). Desta maneira, Ψ determina uma base móvel $\{v_\mu\}$ dada por

$$v_\mu = R e_\mu \tilde{R},$$

de onde Hestenes tira uma série de interpretações locais de observáveis da mecânica quântica [Hes95].

4.2 Equações multivetoriais generalizadas

É um fato bem conhecido que uma representação arbitrária das matrizes de Dirac é relacionada a uma dada escolha fixa — digamos $\{\gamma_\mu^{st}\}$ — por $\gamma_\mu = S \gamma_\mu^{st} S^{-1}$, onde S é uma matriz unitária.³ A transformação correspondente para o espinor-coluna é então dada por

$$\begin{aligned} \gamma_\mu^{st} &\mapsto \gamma_\mu = S \gamma_\mu^{st} S^{-1}, \\ |\psi\rangle &\mapsto S |\psi\rangle. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Como discutimos acima e na seção 2.5, podemos associar a cada tal $\{\gamma_\mu\}$ um novo isomorfismo $\rho : \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$, definido por

$$\rho(e_\mu) := \gamma_\mu.$$

Definindo

$$S := \rho_{st}^{-1}(S) \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C}),$$

temos então $\rho(e_\mu) = \gamma_\mu = S \gamma_\mu^{st} S^{-1} = S \rho_{st}(e_\mu) S^{-1} = \rho_{st}(S e_\mu S^{-1}) = \rho_{st}(ad_S(e_\mu))$, onde $ad_S : \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ é definido por $ad_S(a) = S a S^{-1}$. Desta forma,

$$\rho = \rho_{st} \circ ad_S. \quad (4.11)$$

Aplicando ρ^{-1} à eq. (4.1) para o caso livre (a introdução de interações eletromagnéticas é direta, através da substituição $\partial_\mu \mapsto \partial_\mu + ieA_\mu$), com $|\psi\rangle$ na forma (4.2), temos

$$ie_\mu \partial^\mu \psi = m \psi, \quad (4.12)$$

³Isto é relacionado ao fato de que a álgebra $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C}) \cong \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ é central simples, de forma que todos os seus automorfismos são internos (apêndice A).

onde $\psi = \rho^{-1}(|\psi\rangle)$. Lembremos de (4.2) que $|\psi\rangle = |\psi\rangle P$, e portanto $\psi = \psi P$, com $P = \rho^{-1}(P)$. Assim, ψ é um espinor algébrico em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P$. Segue de (4.11) que $P = S^{-1}P_{st}S = \frac{1}{2}(1+u)\frac{1}{2}(1+i\sigma)$, onde $u = S^{-1}e_0S$ e $\sigma = S^{-1}e_{12}S$ são tais que $[u, \sigma] = 0$, $u^2 = 1$ e $\sigma^2 = -1$.

Ainda que u e σ não sejam necessariamente reais, os conjuntos de matrizes de Dirac normalmente considerados em aplicações satisfazem tal condição⁴. Desta forma, por simplicidade, vamos assumir que o idempotente $P = \rho^{-1}(P)$ possa ser escrito como

$$P = \frac{1}{2}(1+u)\frac{1}{2}(1+i\sigma), \quad (4.13)$$

once u, σ são elementos *reais* tais que $[u, \sigma] = 0$, $u^2 = 1$ e $\sigma^2 = -1$. Tal P dá origem ao conjunto espectral (seção 2.5.1):

$$P_1 = \frac{1}{2}(1+u)\frac{1}{2}(1+i\sigma), \quad P_2 = \frac{1}{2}(1+u)\frac{1}{2}(1-i\sigma), \quad (4.14a)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(1-u)\frac{1}{2}(1+i\sigma), \quad P_4 = \frac{1}{2}(1-u)\frac{1}{2}(1-i\sigma), \quad (4.14b)$$

com $P_1 = P$. Como

$$iP = -P\sigma, \quad (4.15)$$

temos da eq. (4.12) que

$$e^\mu \partial_\mu \psi \sigma + m\psi = 0. \quad (4.16)$$

Observamos que a mesma discussão da seção anterior com relação aos graus de liberdade de ψ se aplica aqui. Como $u, \sigma \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$, temos da eq. (4.15) que $\text{Im}(\psi) = -\text{Re}(i\psi) = \text{Re}(\psi\sigma) \Rightarrow \text{Im}(\psi) = \text{Re}(\psi)\sigma$, de forma que novamente a parte real de ψ em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ carrega toda a informação de ψ . Além disso, $\psi = \psi\frac{1}{2}(1+u)\frac{1}{2}(1+i\sigma) \Rightarrow \psi^* = \psi^*\frac{1}{2}(1+u)\frac{1}{2}(1-i\sigma)$, e novamente concluímos que a parte real $\frac{1}{2}(\psi + \psi^*)$ de ψ é um elemento de um ideal à esquerda minimal de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$, agora dado por $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})\frac{1}{2}(1+u)$.⁵ Definindo $\Phi = 4\text{Re}(\psi)$ e tomando a parte real da eq. (4.16), temos então

$$\partial\Phi\sigma + m\Phi = 0, \quad \Phi \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})\frac{1}{2}(1+u), \quad (4.17)$$

que é a equação Dirac escrita em termos de espinores algébricos reais em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$. Na seção 4.1, a passagem de espinores algébricos para espinores operatoriais foi feita tomando a $\mathbb{Z}_2$ -graduação usual $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}\ell_{1,3}^+ \oplus \mathcal{C}\ell_{1,3}^-$ de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$, e então projetando o análogo de (4.17) em $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+(\mathbb{R})$. Lembramos que isto foi imediato, pois o análogo de u (i.e. e_0) era ímpar e o análogo de σ (i.e. e_{12}) era par. No entanto, tais condições não valem no contexto mais geral desta seção, já que u e σ são elementos

⁴Obviamente, isto não significa que a matriz S da eq. (4.10) seja necessariamente real. Por exemplo, no caso da representação padrão γ_μ^{st} , temos que $\rho_{st} : \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ é tal que $\rho_{st}(i \otimes a) = i\rho_{st}(1 \otimes a)$ para $a \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$, ainda que $\rho_{st}(1 \otimes a)$ não seja necessariamente uma matriz real. De fato, temos (por exemplo) $\rho_{st}(e_2) = \gamma_2^{st} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

⁵Vide eq. (2.34).

arbitrários, advindos da escolha inicial da representação das matrizes de Dirac. Por exemplo, no contexto da representação de Majorana (exemplo 4.2 a seguir), temos $u = e_{20}$, que é um elemento *par* segundo a $\mathbb{Z}_2$ -gradação usual $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+ \oplus \mathcal{C}\ell_{1,3}^-$. Desta forma, para que possamos obter uma redução análoga da eq. (4.17) neste contexto, *definiremos* uma $\mathbb{Z}_2$ -gradação $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}\ell_0 \oplus \mathcal{C}\ell_1$ tal que $u \in \mathcal{C}\ell_1$ e $\sigma \in \mathcal{C}\ell_0$, i.e., tal que u é ímpar e σ é par com relação a *esta* $\mathbb{Z}_2$ -gradação.

Lembramos que, como discutido em detalhe no capítulo 3, os subespaços $\mathcal{C}\ell_0$ e $\mathcal{C}\ell_1$ satisfazem então $\mathcal{C}\ell_i \mathcal{C}\ell_j \subseteq \mathcal{C}\ell_{i+j(\bmod 2)}$, de maneira que $\mathcal{C}\ell_0$ é uma subálgebra de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$. Lembramos ainda que a cada $\mathbb{Z}_2$ -gradação $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}\ell_0 \oplus \mathcal{C}\ell_1$ corresponde uma involução graduada α tal que $\mathcal{C}\ell_i = \{a \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R}) : \alpha(a) = (-1)^i a\}$, $i = 0, 1$. O automorfismo α é relacionado a $\mathcal{C}\ell_0 \oplus \mathcal{C}\ell_1$ exatamente da mesma forma que $(\cdot)^\wedge$ é relacionado a $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{C}\ell_{1,3}^-(\mathbb{R})$. Finalmente, lembramos que as projeções em $\mathcal{C}\ell_i$ são dadas por $\pi_i : \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}\ell_i$, $\pi_i(a) = \frac{a + (-1)^i \alpha(a)}{2}$, $i = 0, 1$. Utilizando a mesma notação do capítulo 3, denominaremos $\mathcal{C}\ell_0$ ($\mathcal{C}\ell_1$) de parte α -par (α -ímpar) de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$.

Tendo introduzido tais $\mathbb{Z}_2$ -gradações alternativas, é agora possível obter uma versão multivetorial da eq. (4.17) através de um procedimento direto, análogo ao da seção 4.1. Como $\Phi = \Phi \frac{1+u}{2}$ e $u \in \mathcal{C}\ell_1$, segue que $\Phi = \Phi u$ e $\pi_1(\Phi) = \pi_0(\Phi)u$. Separando (4.17) em suas partes α -par e α -ímpar, temos

$$\pi_0(\partial)\Psi u \sigma + \pi_1(\partial)\Psi \sigma + m\Psi u = 0,$$

onde

$$\Psi = \pi_0(\Phi) = \pi_0(4 \operatorname{Re}(\psi)). \quad (4.18)$$

Definindo um operador de Dirac induzido $\check{\partial}$, agindo em $\mathcal{C}\ell_0$ por $\check{\partial}(\cdot) = \pi_0(\partial)(\cdot)u + \pi_1(\partial)(\cdot)$, a expressão acima pode ser finalmente escrita como

$$\check{\partial}\Psi \sigma + m\Psi u = 0, \quad \Psi \in \mathcal{C}\ell_0. \quad (4.19)$$

Os elementos de $\mathcal{C}\ell_0$ serão ainda chamados de *espinores operatoriais*.

Exemplo 4.1 (Representação padrão) Partindo das matrizes de Dirac na representação padrão $\{\gamma_\mu^{st}\}$, vimos na seção 4.1 que $P = \rho_{st}^{-1}(P)$ é dado por $P = P_{st} = \frac{1}{2}(1 + e_0)\frac{1}{2}(1 + ie_{12})$. Desta forma, temos neste caso $u = e_0$ e $\sigma = e_{12}$. Vemos que e_0 (e_{12}) já é ímpar (par) segundo a $\mathbb{Z}_2$ -gradação usual de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$, de maneira que podemos tomar $\mathcal{C}\ell_0 = \mathcal{C}\ell_{1,3}^+(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}\ell_1 = \mathcal{C}\ell_{1,3}^-(\mathbb{R})$. Também $\check{\partial} = \partial$. Com isso, a eq. (4.19) reduz-se neste caso a

$$\partial\Psi e_{12} + m\Psi e_0 = 0, \quad \Psi \in \mathcal{C}\ell_{1,3}^+(\mathbb{R}),$$

que é a equação de Dirac-Hestenes, como era esperado.

Exemplo 4.2 (Representação de Majorana) Como discutimos na seção 2.5.1, partindo das matrizes de Dirac na representação de Majorana (eqs. (2.31)), um cálculo direto nos dá $P = P_{mj} =$

$\frac{1}{2}(1 + e_{20})\frac{1}{2}(1 + ie_1)$. Desta forma, temos neste caso $u = e_{20}$ e $\sigma = e_1$. O próximo passo é definir uma $\mathbb{Z}_2$ -gradação de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$ tal que e_{20} é α -ímpar e e_1 é α -par. Uma escolha conveniente é dada pelo exemplo 3.6, página 32:

	$\mathcal{C}\ell_0$	$\mathcal{C}\ell_1$
0-vetores	1	
1-vetores	e_1, e_2, e_3	e_0
2-vetores	e_{12}, e_{23}, e_{31}	e_{10}, e_{20}, e_{30}
3-vetores	e_{123}	$e_{012}, e_{023}, e_{031}$
4-vetores		e_{0123}

onde as colunas da tabela acima correspondem a bases para os espaços vetoriais subjacentes a $\mathcal{C}\ell_0$ e $\mathcal{C}\ell_1$. Como discutimos no exemplo 3.6, neste caso

$$\mathcal{C}\ell_0 \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \quad (\text{como álgebras reais}),$$

de maneira que tal álgebra *não é isomorfa* à álgebra dos espinores operatoriais de Hestenes, que é dada por $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+(\mathbb{R}) \cong \mathcal{C}\ell_{3,0}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{M}(2, \mathbb{C}) \cong [\text{álgebra de Pauli}]$. Ainda, como $\pi_0(\partial) = e_k \partial^k$ e $\pi_1(\partial) = e_0 \partial^0$, temos $\check{\partial}(\cdot) = e_k \partial^k(\cdot) e_{20} + e_0 \partial^0(\cdot)$. De (4.19), vemos que a versão operatorial correspondente da equação de Dirac é dada, neste caso, por

$$e_0 \partial^0 \Psi + e_k \partial^k \Psi e_{20} = m \Psi e_{20} e_1, \quad \Psi \in \mathcal{C}\ell_0.$$

Multiplicando à direita por e_0 e notando da tabela acima que $e_0 \Psi e_0 = \hat{\Psi}$, $\forall \Psi \in \mathcal{C}\ell_0$, temos finalmente

$$\partial^0 \hat{\Psi} + e_k \partial^k \Psi e_2 = m \Psi e_{12}, \quad \Psi \in \mathcal{C}\ell_0 = \mathcal{C}\ell_{0,3} \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}.$$

Exemplo 4.3 (Representação quiral) Consideremos agora a representação quiral $\rho_{ch}(e_\mu) = \gamma_\mu^{ch}$ (eqs. (2.29)). Como discutimos na seção 2.5.1, um cálculo direto então resulta em $P = P_{ch} = \frac{1}{2}(1 + e_{30})\frac{1}{2}(1 + ie_{12})$, isto é, $u = e_{30}$ e $\sigma = e_{12}$. Antes de derivarmos a versão operatorial da equação de Dirac para este caso, consideremos o operador de quiralidade neste contexto. Lembramos que o operador de quiralidade agindo em espinores-coluna é dado por [Bjo64] $\text{ch}(|\psi\rangle) = \gamma_5 |\psi\rangle$, onde $\gamma_5 = \gamma^5 := -i\gamma_{0123}$. Aplicando ρ^{-1} , temos a expressão correspondente para espinores algébricos: $\text{ch}(\psi) = -ie_{0123}\psi = e_{0123}\psi\sigma = e_{0123}\psi u\sigma$, pois $\psi = \psi u$. Assim, $\text{ch}(\psi) = e_{0123}\psi e_{30}e_{12} = -e_{0123}\psi e_{0123} = \hat{\psi}$. Aplicando o isomorfismo (4.18) entre espinores algébricos e operatoriais (que é o isomorfismo ι discutido na seção 4.3), temos $\text{ch}(\Psi) = 4\pi_0(\text{Re}(\hat{\psi}))$. Tal expressão reduz-se a $\text{ch}(\psi) = 4\pi_0(\text{Re}(\psi))^\wedge = \hat{\Psi}$ desde que os automorfismos $(\cdot)^\wedge$ e α comutem. Como os vetores e_μ têm $\wedge$ -paridade definida (são todos $\wedge$ -ímpares) e geram $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$, tal relação vale se, e somente se, cada e_μ tem α -paridade definida (obviamente, alguns dos e_μ 's podem ser α -ímpares e outros α -pares).

Uma escolha conveniente para tal $\mathbb{Z}_2$ -graduação é dada por

	$\mathcal{C}\ell_0$	$\mathcal{C}\ell_1$
0-vetores	1	
1-vetores	e_0	e_1, e_2, e_3
2-vetores	e_{12}, e_{23}, e_{31}	e_{01}, e_{02}, e_{03}
3-vetores	$e_{012}, e_{023}, e_{031}$	e_{123}
4-vetores		e_{0123}

(4.20)

Note que $u = e_{30}$ é α -ímpar, $\sigma = e_{12}$ é α -par e que todos os vetores e_μ têm α -paridade definida. Segue da discussão acima que

$$ch(\Psi) = \hat{\Psi}. \quad (4.21)$$

Ainda, decompondo $\mathcal{C}\ell_0$ em suas partes par e ímpar usuais $\mathcal{C}\ell_0^\pm := \mathcal{C}\ell_0 \cap \mathcal{C}\ell_{1,3}^\pm$, segue da eq. (4.21) que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\ell_0^+ &= [\text{espaço dos espinores com quiralidade positiva}], \\ \mathcal{C}\ell_0^- &= [\text{espaço dos espinores com quiralidade negativa}]. \end{aligned}$$

Retornando à equação de Dirac, e procedendo como no exemplo 4.2, obtemos

$$e_0 \partial^0 \Psi e_{30} + e_k \partial^k \Psi = -m \Psi e_{30} e_{21}, \quad \Psi \in \mathcal{C}\ell_0.$$

Após algumas simplificações, temos finalmente

$$-\partial^0 \Psi e_{12} + (e_{23} \partial^1 + e_{31} \partial^2 + e_{12} \partial^3) \hat{\Psi} = m e_0 \Psi, \quad \Psi \in \mathcal{C}\ell_0, \quad (4.22)$$

onde usamos o fato de que e_0 comuta com a álgebra α -par $\mathcal{C}\ell_0$ definida em (4.20).

4.3 Mapas espinoriais

Seja $\iota : \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P \rightarrow \mathcal{C}\ell_0$ o mapa (4.18) relacionando espinores algébricos a espinores operatoriais, isto é,

$$\iota(\psi) = \Psi = 4\pi_0(\text{Re}(\psi)).$$

Notamos que a eq. (4.15) induz uma estrutura complexa⁶ em $\mathcal{C}\ell_0$ por $J : \Psi \mapsto -\Psi\sigma$. Segue que, sob tal estrutura complexa, ι é um isomorfismo complexo. Para ver isso, vamos inicialmente exibir a aplicação inversa de ι .

Como $\psi = \psi P_1$ (cf eqs. (4.14)), temos $2\text{Re}(\psi) = (\psi + \psi^*) = \psi P_1 + \psi^* P_2$. Como $u \in \mathcal{C}\ell_1$ e $\sigma \in \mathcal{C}\ell_0$, temos $\alpha(P_1) = P_3$ e $\alpha(P_2) = P_4$. Assim, $\Psi = 4\pi_0(\text{Re}(\psi)) = \psi P_1 + \psi^* P_2 + \alpha(\psi) P_3 + \alpha(\psi^*) P_4$. Multiplicando à direita por P_1 , temos (lembremos que $\psi = \psi P_1$):

$$\psi = \Psi P_1, \quad (4.23)$$

⁶Uma estrutura complexa em um espaço vetorial V é um endomorfismo J em V tal que $J^2 = -\text{id}_V$.

e portanto $\iota^{-1}(\Psi) = \Psi P_1$. Obviamente, ι^{-1} é $\mathbb{R}$ -linear. Ainda, $\iota^{-1}(J(\Psi)) = \iota^{-1}(-\Psi\sigma) = -\Psi\sigma P_1 = i\Psi P_1 = i\iota^{-1}(\Psi)$ e portanto ι^{-1} (e ι) são isomorfismos complexos, como afirmamos.

Consideremos agora a versão operatorial da ação de uma matriz $A \in \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ sobre $|\psi\rangle$. Aplicando o isomorfismo $\rho : \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ da seção anterior, e definindo $A = \rho^{-1}(A)$, temos que $A|\psi\rangle \mapsto A\psi$ define a ação correspondente sobre espinores algébricos. Decompondo A em suas partes real e complexa (em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$) $A = A_R + iA_I$, temos $A\psi = A_R\psi - A_I\psi\sigma$. Para obter a ação correspondente sobre espinores operatoriais, basta aplicar ι a esta expressão, o que resulta em

$$\iota(A_R\psi) = \begin{cases} A_R\Psi, & \text{se } A_R \in \mathcal{C}\ell_0, \\ A_R\Psi u, & \text{se } A_R \in \mathcal{C}\ell_1, \end{cases} \quad (4.24)$$

com expressões análogas para A_I . De fato, se $A_R \in \mathcal{C}\ell_0$ então $\pi_0(\text{Re}(A_R\psi)) = \pi_0(A_R \text{Re}(\psi)) = A_R\pi_0(\text{Re}(\psi))$. Similarmente, se $A_R \in \mathcal{C}\ell_1$ então $\pi_0(A_R \text{Re}(\psi)) = \pi_0(A_R \text{Re}(\psi)u) = \pi_0(A_R \text{Re}(\psi)u) = A_R\pi_0(\text{Re}(\psi))u$, onde utilizamos o fato de que $\psi = \psi u$.

Mais precisamente, a eq. (4.24) é relacionada à seguinte representação de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$ em $\mathcal{C}\ell_0$. Dado $A \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$ e $\Psi \in \mathcal{C}\ell_0$, decomponhamos $A = A_0 + A_1$ com $A_i = \pi_i(A) \in \mathcal{C}\ell_i$ e definamos

$$\mathbf{ev} : \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{End}(\mathcal{C}\ell_0)$$

por

$$\mathbf{ev}(A)\Psi = A_0\Psi + A_1\Psi u. \quad (4.25)$$

Notamos que, dados $A, B \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$, temos $\mathbf{ev}(A)\mathbf{ev}(B)\Psi = \mathbf{ev}(A)(B_0\Psi + B_1\Psi u) = A_0(B_0\Psi + B_1\Psi u) + A_1(B_0\Psi + B_1\Psi u)u = (A_0B_0 + A_1B_1)\Psi + (A_0B_1 + B_0A_1)\Psi u = \mathbf{ev}(AB)\Psi$, de forma que $\mathbf{ev}$ é de fato uma representação de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$. Notamos ainda que a ação do operador de Dirac induzido $\check{\partial}$, definido na seção 4.2, pode então ser escrita como

$$\check{\partial}(\cdot) = \mathbf{ev}(\partial)(\cdot)u.$$

Vamos agora expressar o operador momento no formalismo operatorial. Para espinores-coluna, temos $p_\mu[|\psi\rangle] = i\partial_\mu |\psi\rangle$. Através de ρ , temos para espinores algébricos $p_\mu[\psi] = i\partial_\mu \psi = -\partial_\mu \psi \sigma$. Aplicando ι e lembrando que σ é α -par, temos então

$$p_\mu[\Psi] = -\partial_\mu \Psi \sigma. \quad (4.26)$$

Finalmente, consideremos o produto escalar entre espinores. Se $|\theta\rangle$ e $|\psi\rangle$ são espinores-coluna, a parte espinorial do produto escalar é dada por $\langle\theta|\psi\rangle = |\theta\rangle^\dagger |\psi\rangle$. Sejam Θ e Ψ os espinores operatoriais correspondentes a $\theta = \rho^{-1}(|\theta\rangle)$ e $\psi = \rho^{-1}(|\psi\rangle)$. Então

$$\langle\theta|\psi\rangle = 4\langle\Theta^\dagger\Psi P\rangle_0, \quad (4.27)$$

onde a conjugação hermitiana em $(\cdot)^\dagger$ em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ foi definida na proposição 2.6 (notamos que, como espinores operatoriais são reais, a eq. (2.36) nos dá $\Theta^\dagger = e_0\tilde{\Theta}e_0$). Para demonstrar (4.27),

lembramos da proposição 2.7 que o traço em $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ é relacionado a $\langle \cdot \rangle_0$ em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ por $\text{tr}(\rho(\psi)) = 4\langle \psi \rangle_0$. Assim, $\langle \theta | \psi \rangle = \text{tr}(\rho(\theta)^\dagger \rho(\psi)) = 4\langle \theta^\dagger \psi \rangle_0 = 4\langle P^\dagger \Theta^\dagger \Psi P \rangle_0 = 4\langle \Theta^\dagger \Psi P P^\dagger \rangle_0 = 4\langle \Theta^\dagger \Psi P \rangle_0$, onde substituímos $\theta = \Theta P$, $\psi = \Psi P$ (da eq. (4.23)), utilizamos a propriedade cíclica de $\langle \cdot \rangle_0$ (eq. (2.7)) e usamos o fato de que $P^\dagger = P$ (observação 2.9).

4.4 Representações quaterniônicas da teoria de Dirac

Nesta seção, analisamos como as equações multivetoriais das seções anteriores podem ser úteis no contexto de representações quaterniônicas da teoria de Dirac.

Representação quaterniônica do tipo quiral

Continuando a discussão da seção 4.2, projetemos a eq. (4.22) em $\mathcal{C}\ell_0^\pm$ (com a álgebra α -par $\mathcal{C}\ell_0$ definida em (4.20)):

$$\begin{aligned} -\partial^0 \Psi_+ e_{12} + (e_{23} \partial^1 + e_{31} \partial^2 + e_{12} \partial^3) \Psi_+ &= m e_0 \Psi_- \quad \text{em } \mathcal{C}\ell_0^+, \\ -\partial^0 \Psi_- e_{12} - (e_{23} \partial^1 + e_{31} \partial^2 + e_{12} \partial^3) \Psi_- &= m e_0 \Psi_+ \quad \text{em } \mathcal{C}\ell_0^-. \end{aligned}$$

Multiplicando a segunda equação à esquerda por e_0 e definindo $\chi := \Psi_+$, $\eta := \Psi_- e_0$ (note que $\chi, \eta \in \mathcal{C}\ell_0^+$), temos:

$$\begin{aligned} -\partial^0 \chi e_{12} + (e_{23} \partial^1 + e_{31} \partial^2 + e_{12} \partial^3) \chi &= m \eta, \\ -\partial^0 \eta e_{12} - (e_{23} \partial^1 + e_{31} \partial^2 + e_{12} \partial^3) \eta &= m \chi, \end{aligned}$$

que são equações definidas inteiramente em $\mathcal{C}\ell_0^+ = \text{span}_{\mathbb{R}}\{1, e_{12}, e_{23}, e_{31}\}$. Notemos que tal álgebra é isomorfa a $\mathbb{H}$ via $1 \mapsto 1$, $e_{23} \mapsto i$, $e_{31} \mapsto j$, $e_{12} \mapsto k$, onde i, j, k denotam as unidades quaterniônicas imaginárias. Para simplificar a notação, sejam $\mathbf{i}_1 = i$, $\mathbf{i}_2 = j$ e $\mathbf{i}_3 = k$, e sejam χ e η (por abuso de notação) os quatérnions correspondentes a χ e η pelo mapa acima. Então

$$\begin{aligned} -\partial^0 \chi k + \mathbf{i}_l \partial^l \chi &= m \eta, \\ -\partial^0 \eta k - \mathbf{i}_l \partial^l \eta &= m \chi. \end{aligned}$$

Notamos que estas equações desacoplam no limite $m \rightarrow 0$, como esperado. Em termos de $\begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^2$:

$$-\partial^0 \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} k + \partial^l \begin{pmatrix} \mathbf{i}_l & 0 \\ 0 & -\mathbf{i}_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Segue da eq. (4.26), com $\sigma = e_{12}$, que o operador momento age em $\begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix}$ segundo $\mathbf{p}_\mu[\begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix}] = -\partial_\mu \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} k$. Desta forma, a equação acima pode ser escrita como

$$\mathbf{p}^0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} + \mathbf{p}^l \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i}_l \\ \mathbf{i}_l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} k = m \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Definamos $\gamma_\mu : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ por

$$\gamma_0 \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \gamma_l \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i}_l \\ \mathbf{i}_l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} k, \quad (4.28)$$

onde $l = 1, 2, 3$. Notemos que:

(i) a ação de γ_l consiste tanto de multiplicação matricial à esquerda como de multiplicação escalar (quaterniônica) à direita, i.e., $\gamma_l \in GL(2, \mathbb{H}) \cdot \mathbb{H}^*$, $l = 1, 2, 3$;⁷

(ii) $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$, onde o produto $\gamma_\mu \gamma_\nu$ é dado pela composição usual;

(iii) $[\gamma_\mu, \mathbf{p}_\nu] = 0$, pois γ_μ comuta com multiplicação à direita por k .

Substituindo γ_μ na equação acima, temos

$$\gamma_\mu \mathbf{p}^\mu \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix},$$

que é a equação de Dirac correspondente a uma representação quaterniônica do tipo quiral das matrizes de Dirac, dada por (4.28) (vide também [Leo01]).

Dado $q = q^0 + q^l \mathbf{i}_l \in \mathbb{H}$, denotemos por $\bar{q} = q^0 - q^l \mathbf{i}_l$ o quaternion conjugado correspondente. Um cálculo direto então mostra que o produto escalar (4.27) entre espinores pode ser escrito como

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \text{proj}_{\mathbb{C}'} (\bar{\chi}_1 \chi_2 + \bar{\eta}_1 \eta_2), \quad (4.29)$$

onde $\begin{pmatrix} \chi_i \\ \eta_i \end{pmatrix} \leftrightarrow |\psi_i\rangle$ e $\text{proj}_{\mathbb{C}'}$ projeta $\mathbb{H}$ no subespaço complexo $\mathbb{C}' = \text{span}_{\mathbb{R}}\{1, -k\} \subseteq \mathbb{H}$. Em outras palavras, $\mathbb{C}'$ é um subespaço complexo de $\mathbb{H}$ com unidade imaginária $\sqrt{-1}$ dada por $-k$. Note que, se tivéssemos escolhido incluir $|\psi\rangle$ na quarta coluna de $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ (ao invés de (4.2)), então teríamos $\sqrt{-1} \leftrightarrow k$. Mais geralmente, redefinindo o isomorfismo acima entre $\mathcal{C}\ell_0^+$ e $\mathbb{H}$, podemos identificar subespaços complexos com unidade imaginária correspondendo a qualquer quaternion unitário puramente imaginário.

Observemos que (4.29) é simplesmente o produto escalar quaterniônico entre $\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \chi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ projetado em um subespaço complexo $\mathbb{C}' \subseteq \mathbb{H}$. Isto mostra que, neste formalismo, pode-se *derivar* a projeção complexa para o produto escalar em [Rot89]. Desta forma, mostramos que a formulação quaterniônica da mecânica quântica em [Rot89] pode ser *derivada* de nosso formalismo.⁸

⁷Em geral, o grupo $GL(n, \mathbb{H}) \cdot \mathbb{H}^*$ é definido [Har90] como o grupo de transformações de $\mathbb{H}^n$ da forma $v \mapsto Av\lambda$, onde $A \in GL(n, \mathbb{H})$ é uma matriz quaterniônica inversível $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ age como multiplicação escalar à direita.

⁸É interessante ressaltar que tal formulação quaterniônica [Rot89] (também [Leo01]) é fundamentalmente diferente da chamada mecânica quântica quaterniônica de Finkelstein et al [Fin62], Emch [Emc63] e Adler [Adl95]. De fato, em [Fin62, Emc63, Adl95] o produto escalar utilizado é verdadeiramente quaterniônico, e não apenas uma projeção complexa como em [Rot89, Leo01]. Desta forma, não é surpreendente que a formulação quaterniônica a que nos referimos no texto principal possa ser efetivamente derivada, ao invés de postulada.

Representação quaterniônica do tipo padrão (*standard*)

Outra decomposição da mesma álgebra $\mathcal{C}\ell_0$, definida em (4.20), pode ser obtida observando-se que tal $\mathcal{C}\ell_0$ é isomorfo a $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ (como álgebras reais). Para ver isso, consideremos os idempotentes centrais ortogonais⁹ $f_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm e_0)$ em $\mathcal{C}\ell_0$. Temos então imediatamente $\mathcal{C}\ell_0 = \mathcal{C}\ell_0 f_+ \oplus \mathcal{C}\ell_0 f_-$, onde $\oplus$ denota soma direta de álgebras. Cada fator $\mathcal{C}\ell_0 f_{\pm}$ é claramente isomorfo a $\mathbb{H}$ através do mapa $\mathcal{C}\ell_0 f_{\pm} \rightarrow \mathbb{H}$, $f_{\pm} \mapsto 1$, $e_{23} f_{\pm} \mapsto i$, $e_{31} f_{\pm} \mapsto j$, $e_{12} f_{\pm} \mapsto k$. Como as subálgebras $\mathcal{C}\ell_0 f_{\pm}$ são ortogonais (i.e., $\mathcal{C}\ell_0 f_{\pm} \mathcal{C}\ell_0 f_{\mp} = 0$), é natural definir $\xi : \mathcal{C}\ell_0 \rightarrow \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ por

$$\begin{aligned}\xi(f_+) &= (1, 0), \quad \xi(e_{23} f_+) = (i, 0), \quad \xi(e_{31} f_+) = (j, 0), \quad \xi(e_{12} f_+) = (k, 0), \\ \xi(f_-) &= (0, 1), \quad \xi(e_{23} f_-) = (0, i), \quad \xi(e_{31} f_-) = (0, j), \quad \xi(e_{12} f_-) = (0, k).\end{aligned}$$

Ou, em termos dos elementos em (4.20):

$$\begin{aligned}\xi(1) &= (1, 1), \quad \xi(e_0) = (1, -1), \\ \xi(e_{23}) &= (i, i), \quad \xi(e_{31}) = (j, j), \quad \xi(e_{12}) = (k, k), \\ \xi(e_{023}) &= (i, -i), \quad \xi(e_{031}) = (j, -j), \quad \xi(e_{012}) = (k, -k).\end{aligned}$$

Notamos de passagem que, dado $\Psi \in \mathcal{C}\ell_0$, com $\xi(\Psi) = (q_1, q_2)$, a reversão $(\cdot)^{\sim}$ e o operador de paridade usual $(\cdot)^{\wedge}$ são dados em $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ por $\xi(\hat{\Psi}) = (q_2, q_1)$ e $\xi(\tilde{\Psi}) = (\bar{q}_1, \bar{q}_2)$. Aplicando ξ à eq. (4.22):

$$-\partial^0(q_1, q_2)(k, k) + (\mathbf{i}_l, \mathbf{i}_l)\partial^l(q_2, q_1) = m(1, -1)(q_1, q_2).$$

Ou, em termos de $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^2$:

$$-\partial^0 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} k + \partial^l \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i}_l \\ \mathbf{i}_l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Novamente, temos $\mathbf{p}_{\mu}[\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}] = -\partial_{\mu} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} k$. Assim

$$\mathbf{p}^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \mathbf{p}^l \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i}_l \\ -\mathbf{i}_l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} k = m \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix},$$

ou

$$\gamma_{\mu} \mathbf{p}^{\mu} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix},$$

onde as aplicações $\gamma_{\mu} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ são agora definidas por

$$\gamma_0 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_l \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i}_l \\ -\mathbf{i}_l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} k,$$

com $l = 1, 2, 3$.

⁹Isto é, f_+ e f_- comutam com todos os elementos de $\mathcal{C}\ell_0$ e $f_+ f_- = f_- f_+ = 0$.

Consideremos estados de energia positiva/negativa neste formalismo. Por simplicidade, consideremos o elétron em repouso. Então, o operador energia em espinores-coluna é dado por $\mathcal{E}[|\psi\rangle] = m\gamma_0 |\psi\rangle$. Isto induz $\mathcal{E}[\psi] = me_0\psi$ em espinores algébricos. Aplicando o isomorfismo ι e (4.24), temos $\mathcal{E}[\Psi] = me_0\Psi$ para espinores operatoriais. Isto nos dá $\mathcal{E}[(q_1, q_2)] = m\xi(e_0\Psi) = m(1, -1)(q_1, q_2) = (mq_1, -mq_2)$ em $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Desta forma, estados da forma $(q, 0)$ e $(0, q)$ podem ser pensados como estados de energia positiva e negativa, respectivamente. Da discussão acima, vemos que a representação quaterniônica das matrizes de Dirac neste caso é do tipo padrão (*standard*).

4.5 Formulação lagrangiana

Em termos de espinores-coluna, a equação de Dirac pode ser derivada da lagrangiana [Itz80]

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\langle \bar{\psi} | \gamma^\mu \partial_\mu | \psi \rangle - \partial_\mu \langle \bar{\psi} | \gamma^\mu | \psi \rangle) - m \langle \bar{\psi} | \psi \rangle.$$

Podemos então utilizar os mapas espinoriais da seção 4.3 para obter a expressão correspondente no contexto multivetorial:

$$\mathcal{L} = -\langle \tilde{\Psi} \check{\partial}(\Psi) \sigma \epsilon_0 \rangle_0 - m \langle \tilde{\Psi} \Psi u \epsilon_0 \rangle_0, \quad \Psi \in \mathcal{C}\ell_0, \quad (4.30)$$

onde definimos $\epsilon_0 = ue_0$ se $e_0 \in \mathcal{C}\ell_0$ e $\epsilon_0 = e_0$ se $e_0 \in \mathcal{C}\ell_1$ (note que ϵ_0 é sempre α -ímpar). Não é difícil mostrar que as equações de movimento derivadas da lagrangiana acima são de fato dadas por (4.19), como esperado.

4.6 De volta à equação de Dirac-Hestenes

Na seção 4.2, obtivemos versões multivetoriais da equação de Dirac correspondendo a diferentes $\mathbb{Z}_2$ -graduações da álgebra do espaço-tempo. Tais equações, bem como as álgebras dos espinores operatoriais a elas associadas, têm em geral uma estrutura diferente da obtida no formalismo de Hestenes. Nesta seção, mostramos que se permitirmos $\mathbb{Z}$ -graduações arbitrárias¹⁰ para a álgebra exterior associada a $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$, podemos sempre obter uma equação multivetorial similar à equação de Dirac-Hestenes. Uma interpretação geométrica de tal situação será considerada no final desta seção.

Seja novamente $\{e_\mu\}$ uma base ortonormal do espaço-tempo chato $\mathbb{M} \cong \mathbb{R}^{1,3}$, correspondendo ao referencial de um dado observador. Mostramos na seção 4.2 que a cada representação das matrizes $\{\gamma_\mu\}$ corresponde uma versão multivetorial da equação de Dirac. Para isso, primeiramente definimos

¹⁰Por uma $\mathbb{Z}$ -graduação arbitrária do espaço dos multivetores, queremos dizer uma $\mathbb{Z}$ -graduação do espaço vetorial subjacente a $\Lambda(\mathbb{M})$ que não seja necessariamente dada por $\bigoplus_{k=0}^4 \Lambda^k(\mathbb{M})$, onde $\mathbb{M} \cong \mathbb{R}^{1,3}$ denota o espaço tangente ao espaço-tempo em um dado ponto.

a representação $\rho : \mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$, $\rho(e_\mu) = \gamma_\mu$, e então escrevemos equação de Dirac no ideal $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})P$, onde $P = \frac{1}{2}(1+u)\frac{1}{2}(1+i\sigma)$, com

$$u = S^{-1}e_0S, \quad \sigma = S^{-1}e_{12}S,$$

para um certo $S \in \mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$. Tomando uma $\mathbb{Z}_2$ -graduação conveniente $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R}) = \mathcal{Cl}_0 \oplus \mathcal{Cl}_1$, pudemos então obter a versão multivetorial correspondente da equação de Dirac na álgebra $\mathcal{Cl}_0$.

O elemento S acima define o ONS¹¹ $\{E_\mu\}$ dado por $E_\mu = S^{-1}e_\mu S$. Definamos o operador de paridade $(\cdot)^P$ e a reversão $(\cdot)^R$, relativos ao ONS $\{E_\mu\}$, por

$$(E_\mu)^P = -E_\mu,$$

estendido a $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$ como um automorfismo, e

$$(E_\mu)^R = E_\mu,$$

estendido a $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$ como um anti-automorfismo. Com isso, $(\cdot)^R$ e $(\cdot)^P$ definem uma $\mathbb{Z}$ -graduação para o espaço vetorial subjacente a $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$ por

$$\bigoplus_{k=0}^4 C^k,$$

onde $C^0 = \mathbb{C}$ (escalares), $C^1 = \{a : a^P = -a \text{ e } a^R = a\}$, $C^2 = \{a : a^P = a \text{ e } a^R = -a\}$, $C^3 = \{a : a^P = -a \text{ e } a^R = -a\}$ e $C^4 = \text{span}_{\mathbb{C}}\{E_{0123}\}$.¹²

Seja $\rho : \mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ o isomorfismo definido por $\rho(E_\mu) = \gamma_\mu^{st}$. Procedendo como na seção 4.2, mas agora com $P = \frac{1}{2}(1+E_0)\frac{1}{2}(1+iE_{12})$, i.e., com $u=E_0$ e $\sigma=E_{12}$, obtemos o análogo da eq. (4.17):

$$\mathfrak{D}\Phi E_{12} + m\Phi = 0,$$

onde $\Phi := 4\text{Re}(\psi)$ e $\mathfrak{D} := E_\mu \partial^\mu$ (notemos que $\mathfrak{D}$ em geral é diferente de ∂ , pois os elementos E_μ , em geral, não são 1-vetores em $\mathbb{M}$). A $\mathbb{Z}$ -graduação acima para a estrutura de *espaço vetorial* subjacente a $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$ induz então uma $\mathbb{Z}_2$ -graduação para a estrutura *algébrica* de $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$ por

$$\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R}) = \mathcal{Cl}_0 \oplus \mathcal{Cl}_1,$$

onde $\mathcal{Cl}_0 := \bigoplus_{k \text{ par}} C^k$ e $\mathcal{Cl}_1 := \bigoplus_{k \text{ ímpar}} C^k$. Com relação à notação da seção 4.2, podemos tomar agora $\alpha = (\cdot)^P$ e $\check{\partial} = \mathfrak{D}$, resultando em

$$\mathfrak{D}\Psi E_{21} = m\Psi E_0, \tag{4.31}$$

¹¹Lembramos que um ONS foi definido na seção 2.1, página 8, como um subconjunto $\{E_i\}$ de $\mathcal{Cl}_{p,q}(\mathbb{R})$, não necessariamente composto de 1-vetores em $\mathbb{R}^{p,q}$, satisfazendo a propriedade $E_i E_j + E_j E_i = 2g_{ij}$. Notamos que o produto interno entre os elementos do ONS acima é dado por (eq. (2.6)) $g(E_\mu, E_\nu) = \langle \tilde{E}_\mu E_\nu \rangle_0 = \langle \tilde{S} e_\mu \tilde{S}^{-1} S^{-1} e_\nu S \rangle_0 = \langle e_\mu (S \tilde{S})^{-1} e_\nu S \tilde{S} \rangle_0$. No caso em que $S \in \text{Spin}_{1,3}^e$, sabemos que o mapa $e_\mu \rightarrow S^{-1} e_\mu S$ é uma isometria em $\mathbb{R}^{1,3}$ e $S \tilde{S} = 1$ (eq. (2.19)), o que resulta em $g(E_\mu, E_\nu) = g(e_\mu, e_\nu) = g_{\mu\nu}$. No entanto, no contexto desta seção, onde S não é necessariamente um elemento de $\text{Spin}_{1,3}^e$, esta conclusão em geral é falsa.

¹²Notamos de passagem que C^4 é o complemento ortogonal de C^0 dentro de $\{a : a^P = a \text{ e } a^R = a\}$.

com $\Psi \in \mathcal{C}\ell_0 = C^0 \oplus C^2 \oplus C^4$ e $\mathfrak{D} := E_\mu \partial^\mu$. Vemos que a eq. (4.31) apresenta uma forma similar à equação de Dirac-Hestenes. Notamos ainda que o ONS $\{E_\mu\}$ gera um espaço vetorial real $W := \text{span}_{\mathbb{R}}\{E_0, E_1, E_2, E_3\} \subset \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$, sobre o qual podemos definir a métrica $h(x, y) = \frac{1}{2}(xy + yx)$, $x, y \in W$ (nesta expressão, os produtos xy e yx são os produtos de Clifford induzidos de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$). Como resultado, W é isometricamente isomorfo a $\mathbb{M}$ e portanto $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(W) \cong \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$. No entanto, o espaço vetorial W é formado por combinações de multivetores de *diferentes graus* em $\Lambda(\mathbb{M})$. Obviamente, $\text{Spin}^e(W)$ ainda é o recobrimento duplo do grupo $\text{SO}^e(W)$ de W e $\text{SO}^e(W) \cong \mathcal{L}_+^\uparrow$ (como grupos), onde $\mathcal{L}_+^\uparrow$ denota o grupo de Lorentz restrito. Apesar disso, $\mathcal{L}_+^\uparrow$ e $\text{SO}^e(W)$ têm interpretações geométricas fundamentalmente distintas. Em particular, o grupo de simetria do espaço-tempo físico (formado por 1-vetores em $\mathbb{M} \subset \Lambda(\mathbb{M})$) é dado por $\mathcal{L}_+^\uparrow$, e não por $\text{SO}^e(W)$.

Consideremos agora representações das matrizes de Dirac que resultam em E_μ reais¹³. Neste caso, W é um subespaço vetorial de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$ isometricamente isomorfo a $\mathbb{M}$, e $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(W) \cong \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$ (note que a representação padrão nos dá a igualdade estrita $W = \mathbb{M}$). Portanto, diferentes representações $\{\gamma_\mu\}$ das matrizes de Dirac determinam, neste contexto, diferentes *fatias* W de $\Lambda(\mathbb{M})$, sendo que cada um destas fatias corresponde a uma cópia diferente de $\mathbb{M}$, isto é, a uma maneira diferente de mergulhar o espaço-tempo no espaço 16-dimensional dos multivetores.

Finalmente, observamos que estruturas multivetoriais alternativas têm sido objeto de estudo recente na literatura, com aplicações em modelos em teoria quântica de campos [Fau98] e q-quantização de álgebras de Clifford [Fau99] (vide também [Fau00] e referências ali contidas).

4.7 Covariância da equação de Dirac-Hestenes

Vimos na seção 4.1 que, no contexto da equação de Dirac-Hestenes em espaço-tempo chato, o estado do elétron é representado por um elemento par Ψ de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$. No entanto, uma formulação covariante da equação de Dirac-Hestenes em um espaço-tempo M certamente não pode identificar Ψ com uma seção do fibrado de Clifford $\mathcal{C}\ell(M, g)$. De fato, como vimos na seção 2.6, campos de Clifford (isto é, seções de $\mathcal{C}\ell(M, g)$) transformam-se como tensores e portanto não podem ser associados de maneira covariante a uma partícula de spin-1/2.

Nesta seção, mostramos que o objeto descrito pela equação de Dirac-Hestenes é de fato uma *representação* em $\mathcal{C}\ell(M, g)$ — dependente de uma escolha de referencial espinorial — de um campo espinorial [Mos04a]. Claramente, tal procedimento só é possível quando a variedade admite referenciais espinoriais globalmente definidos. Felizmente, no caso relevante de variedades lorentzianas não-compactas de dimensão 4 (orientadas e orientadas no tempo), o teorema de Geroch nos garante a existência de tais referenciais sempre que M admitir uma estrutura espinorial (observação 2.14).

Seja $\{E_a\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{1,3} \subseteq \mathbb{R}_{1,3}$, como na observação 2.15 e nota de rodapé 9. Lembremos que, neste contexto, $\mathbb{R}_{1,3}$ deve ser simplesmente considerado uma álgebra de Clifford abstrata,

¹³Isto é equivalente à nossa hipótese de que u e σ são reais na eq. (4.13).

identificada com a fibra típica dos vários fibrados $\mathcal{C}\ell(M, g)$, $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ e $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^r(M)$. Consideremos inicialmente a equação de Dirac em termos de um espinor algébrico ψ como na eq. (2.47), isto é, $\psi \in \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$, com $\psi = \psi P$, $P = \frac{1}{2}(1 + E_0)\frac{1}{2}(1 + iE_{12})$.

A equação de Dirac para tal ψ , em interação com um campo eletromagnético $A \in \sec \Lambda^1(M) \subset \sec \mathcal{C}\ell(M, g)$, é dada por

$$e^a(i\nabla_{e_a}^s - qA_a)\psi = m\psi, \quad (4.32)$$

onde $\nabla_{e_a}^s$ é a derivada covariante induzida no fibrado associado $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ (vide apêndice B). Ou ainda, em termos do operador de Dirac espinorial $D^s = e^a\nabla_{e_a}^s$ (definição B.4):

$$(iD^s - qA)\psi = m\psi. \quad (4.33)$$

Notamos que esta equação é satisfeita pelo objeto intrínseco $\psi \in \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$, que não faz menção a nenhum referencial em particular. Seja $\Xi \in P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$ um referencial espinorial em M e escrevamos, como na seção 2.6, $e_a(x) = [(\Xi(x), E_a)]$. Se $\psi(x) = [(\Xi(x), |\psi(x)\rangle)]$, onde $|\psi(x)\rangle \in \mathbb{R}_{1,3}P$ é o representante de $\psi(x)$ com relação a $\Xi(x)$, temos a seguinte representação da eq. (4.32) (vide proposição B.3):

$$E^a(i\partial_a + i\frac{1}{2}\omega_a - qA_a)|\psi\rangle = m|\psi\rangle, \quad (4.34)$$

onde $\omega_a = \frac{1}{2}\Gamma_{acb}e^b \wedge e^c$ (1-forma de conexão da proposição B.2), com Γ_{ab}^c dado por $\nabla_{e_a}e_b = \Gamma_{ab}^c e_c$ e $\Gamma_{abc} = g_{cd}\Gamma_{ab}^d$.

Desta forma, sob o isomorfismo

$$\rho : \mathbb{R}_{1,3} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}(4, \mathbb{C}), \quad \rho(E_a) = \gamma_a^{st},$$

que, como sabemos, resulta em

$$\rho(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vemos que a eq. (4.34) pode ser escrita na forma usual em termos de espinores-coluna em $\mathbb{C}^4$. Notamos ainda que, sob uma troca de referencial espinorial $\Xi' = \Xi u^{-1}$, com $u : x \mapsto u(x) \in \text{Spin}_{1,3}^e$, o representante de ψ transforma-se como¹⁴

$$|\psi'\rangle = u|\psi\rangle,$$

como deveria ser (afinal de contas, foi para isso que o fibrado $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ foi construído). Por exemplo, $u = e^{i\frac{\varphi}{2}E_{12}}$ corresponde a uma rotação local em torno do eixo z , que age sobre o representante $|\psi\rangle$ como acima, reproduzindo desta maneira a transformação usual em termos de espinores-coluna da seção 2.5.

¹⁴Pois $[(\Xi', |\psi'\rangle)] = \psi = [(\Xi, |\psi\rangle)] = [(\Xi' u, |\psi\rangle)] = [(\Xi', u|\psi\rangle)]$.

Lembramos que os elementos de $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ são classes de equivalência da forma $[(p, a)]$ com $(p, a) \sim (pu^{-1}, ua)$, $u \in \text{Spin}_{1,3}^e$. Como $\text{Spin}_{1,3}^e \subset \mathbb{R}_{1,3}^+$ (eq. (2.19)), faz sentido considerar o subfibrado $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^{l+}(M)$ dos elementos *pares*, isto é, da forma $[(p, a)] \in \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ com $a \in \mathbb{R}_{1,3}^+$. Desta forma, procedendo analogamente à seção 4.1, podemos obter a seguinte equação em $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^{l+}(M)$, que é inteiramente equivalente à eq. (4.32):

$$D^s \Psi E_{21} - qA\Psi = m\Psi E_0, \quad \Psi \in \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^{l+}(M). \quad (4.35)$$

É importante notar, entretanto, que tal equação é fundamentalmente diferente da equação de Dirac-Hestenes da seção 4.1. De fato, os objetos $\Psi \in \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^{l+}(M)$ não são simplesmente elementos da álgebra $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+(\mathbb{R})$, mas sim espinores legítimos. Ainda, os elementos $E_0, E_{12} \in \mathbb{R}_{1,3}$ não correspondem a um referencial de Lorentz $\{e_a\}$, mas a elementos fixos da álgebra $\mathbb{R}_{1,3}$ (observação 2.15) que agem em $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ segundo a proposição 2.18.

No entanto, podemos obter *representantes* de Ψ (associados a escolhas de referenciais espinoriais Ξ) em $\mathcal{C}\ell(M, g)$ da seguinte maneira. Dado um referencial espinorial $\Xi \in \sec P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$, definamos as seções $\mathbf{1}_\Xi^l$, $\mathbf{1}_\Xi^r$ e e_a , respectivamente em $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$, $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^r(M)$ e $\mathcal{C}\ell(M, g)$, como na seção 2.6. Podemos então utilizar a proposição 2.25 para escrever a eq. (4.35) em termos de seções no fibrado de $\mathcal{C}\ell(M, g)$:

$$(D^s \Psi) \mathbf{1}_\Xi^r e_{21} \mathbf{1}_\Xi^l - qA\Psi = m\Psi \mathbf{1}_\Xi^r e_0 \mathbf{1}_\Xi^l.$$

Multiplicando à direita por $\mathbf{1}_\Xi^r$ e utilizando novamente a proposição 2.25, temos

$$e^a (\nabla_{e_a}^s \Psi) \mathbf{1}_\Xi^r e_{21} - qA\Psi \mathbf{1}_\Xi^r = m\Psi \mathbf{1}_\Xi^r e_0.$$

Segue da proposição B.5 e da eq. (B.13) que

$$(\nabla_{e_a}^s \Psi) \mathbf{1}_\Xi^r = \nabla_{e_a} (\Psi \mathbf{1}_\Xi^r) - \Psi \nabla_{e_a}^s (\mathbf{1}_\Xi^r) = \nabla_{e_a} (\Psi \mathbf{1}_\Xi^r) + \frac{1}{2} \Psi \mathbf{1}_\Xi^r \omega_a.$$

Assim,

$$e^a \left[\nabla_{e_a} (\Psi \mathbf{1}_\Xi^r) + \frac{1}{2} \Psi \mathbf{1}_\Xi^r \omega_a \right] e_{21} - qA(\Psi \mathbf{1}_\Xi^r) = m(\Psi \mathbf{1}_\Xi^r) e_0.$$

É então natural definir, para cada referencial espinorial Ξ , um campo de Clifford $\Psi_\Xi \in \sec \mathcal{C}\ell(M, g)$ (vide proposição 2.23) por

$$\Psi_\Xi := \Psi \mathbf{1}_\Xi^r \in \mathcal{C}\ell(M, g). \quad (4.36)$$

Com isso, temos

$$e^a \left[\nabla_{e_a} \Psi_\Xi + \frac{1}{2} \Psi_\Xi \omega_a \right] e_{21} - qA\Psi_\Xi = m\Psi_\Xi e_0. \quad (4.37)$$

Neste ponto, é interessante voltar à discussão do início desta seção. Como dissemos repetidas vezes, não faz sentido considerar identificações canônicas entre campos espinoriais e campos de multivetores, pois tais objetos transformam-se diferentemente sob transformações de Lorentz (espinores podem distinguir entre rotações de 2π e rotações de 4π). Desta forma, é natural que se

pergunte como a equação acima — onde o estado da partícula é representado pelo campo multivetorial $\Psi_\Xi \in \mathcal{Cl}(M, g)$ — pode fazer sentido. A resposta está no fato de que a definição de Ψ_Ξ na eq. (4.36) é intrinsecamente dependente de uma escolha para o referencial espinorial. Claramente, este é o preço a pagar para que se possa fazer sentido do procedimento de Hestenes de representar espinores por formas diferenciais, que não poderia de fato ser canônico.

Notamos ainda que a derivada covariante agindo em $\Psi_\Xi \in \mathcal{Cl}(M, g)$ na eq. (4.37) é a derivada covariante *tensorial* ∇_V em $\mathcal{Cl}(M, g)$, como deveria ser. Entretanto, notamos da expressão acima que ∇_V age em Ψ_Ξ sempre conjuntamente com o termo $\frac{1}{2}\Psi_\Xi\omega_a$. Desta forma, é natural definir-se uma “derivada covariante efetiva” $\nabla_V^{(s)}$ agindo em Ψ_Ξ por

$$\nabla_{e_a}^{(s)}\Psi_\Xi := \nabla_a\Psi_\Xi + \frac{1}{2}\Psi_\Xi\omega_a.$$

Então, a eq. (B.9) nos dá

$$\nabla_{e_a}^{(s)}\Psi_\Xi = \partial_{e_a}(\Psi_\Xi) + \frac{1}{2}\omega_a\Psi_\Xi,$$

de maneira que $\nabla^{(s)}$ recupera a *forma* da derivada covariante espinorial, como era de se esperar.

Com esta notação, temos finalmente a equação de Dirac-Hestenes para o campo de multivetores $\Psi_\Xi \in \sec\mathcal{Cl}(M, g)$, *representando* o espinor $\Psi \in \sec\mathcal{Cl}_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M, g)$ no referencial Ξ , em um espaço-tempo lorentziano não-compacto arbitrário:

$$e^a\nabla_{e_a}^{(s)}\Psi_\Xi e_{21} - qA\Psi_\Xi = m\Psi_\Xi e_0. \quad (4.38)$$

É fácil ver que a formulação acima recupera as transformações características do formalismo de Hestenes, como na eq. (4.8). De fato, consideremos dois referenciais espinoriais $\Xi, \Xi' \in \sec P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M)$, com $\Xi' = \Xi u^{-1}$, $u : x \mapsto u(x) \in \text{Spin}_{1,3}^e$. Segue da proposição 2.26 que $e'_a = U^{-1}e_a U$ e $\Psi_{\Xi'} = \Psi \mathbf{1}_{\Xi'}^r = \Psi u \mathbf{1}_\Xi^r = \Psi \mathbf{1}_\Xi^r U = \psi_\Xi U$. Portanto, os vários campos de Clifford dependentes da escolha de Ξ na eq. (4.38) se transformam como

$$e'_a = U^{-1}e_a U, \quad (4.39)$$

$$\Psi_{\Xi'} = \Psi_\Xi U,$$

em concordância com a eq. (4.8).

Capítulo 5

Equação de Dirac-Kähler e interações eletrofracas

5.1 Equação de Dirac-Kähler

Sabemos que a equação de Dirac

$$i\gamma^\mu \partial_\mu |\psi\rangle = m|\psi\rangle \quad (5.1)$$

pode ser pensada, num certo sentido, como uma raiz quadrada da equação de Klein-Gordon. Matematicamente, isto se deve ao fato de o operador de Dirac $\gamma^\mu \partial_\mu$ ser uma raiz quadrada do operador de onda $\square = \partial^\mu \partial_\mu$. Seja d a derivada exterior (agindo em formas) e δ o operador codiferencial no espaço-tempo de Minkowski (vide apêndice B). Então, o operador de Dirac-Kähler $d - \delta$ também define uma raiz quadrada do operador de onda (eq. (B.5), página 96). Desta forma, a equação de Dirac-Kähler (EDK)

$$i(d - \delta)\psi = m\psi \quad (5.2)$$

pode ser igualmente pensada como uma raiz quadrada da equação de Klein-Gordon. Deve-se observar, no entanto, que as equações (5.1) e (5.2) descrevem objetos fundamentalmente distintos. Na eq. (5.1), $|\psi\rangle$ representa uma partícula de spin-1/2, que se transforma portanto como um espinor sob transformações de Lorentz. Por outro lado, os objetos descritos pela EDK se transformam como formas diferenciais (e portanto tensores) sob a ação do grupo de Lorentz.

Apesar disso, é um fato bem conhecido que as equações de Dirac e de Dirac-Kähler são, em um certo sentido, intimamente relacionadas. De fato, como discutido no capítulo anterior, no contexto de espaço-tempo chato é sempre possível considerar identificações (não-canônicas) entre formas diferenciais e espinores algébricos. Com isso, pode-se mostrar (como revemos a seguir) que ocorre um desacoplamento da EDK em quatro equações de Dirac definidas em ideais à esquerda minimais de

$\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ [Bec82, Joo86, Rab82, Lin90, Lin91]. Em outras palavras, a EDK define, neste contexto, quatro equações de Dirac desacopladas governando espinores algébricos.

Desacoplamento em 4 equações de Dirac

Consideremos a EDK (5.2) em espaço-tempo chato, onde $\psi \in \Omega_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{1,3})$ é uma forma diferencial complexa em $\mathbb{R}^{1,3}$. Segue da eq. (B.7), página 96, que podemos escrever a EDK neste caso como

$$ie^{\mu} \partial_{\mu} \psi = m\psi. \quad (5.3)$$

Seja $\{P_k\}$ um conjunto espectral em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$, como na seção 2.5.1. Multiplicando a eq. (5.3) à direita por P_k , temos

$$ie^{\mu} \partial_{\mu} \psi_k = m\psi_k, \quad (5.4)$$

onde $\psi_k := \psi P_k$ é um espinor algébrico no ideal à esquerda minimal $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P_k$.

Podemos escrever tal equação em uma forma mais familiar procedendo como na seção 2.5.1. Para isso, tomemos uma representação particular $\{\gamma^{\mu}\}$ das matrizes de Dirac, digamos a representação quiral, e definamos

$$\rho : \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}(4, \mathbb{C}), \quad \rho(e^{\mu}) = \gamma^{\mu}, \quad (5.5)$$

como na eq. (2.23). Escolhendo $\{P_k\}$ como nas eqs. (2.26), isto é, tal que

$$\begin{aligned} \rho(P_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \rho(P_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \rho(P_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \rho(P_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e aplicando ρ à eq. (5.4), temos finalmente

$$i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} |\psi_k\rangle = m|\psi_k\rangle, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

com $|\psi_k\rangle = \rho(\psi_k)$ um espinor-coluna definido na k -ésima coluna de $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$. Desta forma, temos quatro equações de Dirac desacopladas, definidas nas diferentes colunas de $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$.

Lagrangiana de Dirac-Kähler

A EDK pode ser derivada da ação

$$\mathcal{S} = 4 \int \langle \bar{\psi} [i(d - \delta) - m] \psi \rangle_0 d^4x,$$

onde $\bar{\psi} = \psi^\dagger e^0$ (a operação de conjugação hermitiana em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ foi definida na proposição 2.6). Equivalentemente,

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L} d^4x,$$

onde

$$\frac{1}{4}\mathcal{L} = \langle \bar{\psi} [i(d - \delta) - m] \psi \rangle_0, \quad (5.6)$$

isto é,

$$\frac{1}{4}\mathcal{L} = \langle \bar{\psi} (e^\mu i \partial_\mu - m) \psi \rangle_0. \quad (5.7)$$

Segue que a decomposição da equação de Dirac-Kähler pode ser obtida diretamente de $\mathcal{L}$. De fato, escrevendo $\psi = \psi \sum_k P_k = \sum_k \psi_k$, com $\psi_k := \psi P_k$, temos

$$\frac{1}{4}\mathcal{L} = i \langle \psi^\dagger e^0 (e^\mu i \partial_\mu - m) \psi \rangle_0 = i \sum_{kl} \langle \psi_k^\dagger e^0 (e^\mu i \partial_\mu - m) \psi_l \rangle_0.$$

Notamos agora que $\psi_k = \psi_k P_k$ (sem soma em k) e $P_k^\dagger = P_k$ (observação 2.9) nos dão

$$\langle \psi_k^\dagger e^0 (e^\mu i \partial_\mu - m) \psi_l \rangle_0 = \delta_{kl} \langle \psi_k^\dagger e^0 (e^\mu i \partial_\mu - m) \psi_l \rangle_0,$$

onde utilizamos a propriedade cíclica de $\langle \cdot \rangle_0$ (eq. (2.7)). Assim,

$$\frac{1}{4}\mathcal{L} = i \sum_{k=1}^4 \langle \psi_k^\dagger e^0 (e^\mu i \partial_\mu - m) \psi_k \rangle_0.$$

Aplicando o isomorfismo ρ da eq. (5.5), vemos que isto é equivalente a

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^4 \langle \bar{\psi}_k | (\gamma^\mu i \partial_\mu - m) | \psi_k \rangle,$$

que é claramente uma lagrangiana correspondente a quatro equações de Dirac desacopladas.

Nota sobre a questão da covariância I

Como discutimos acima, os objetos que aparecem na EDK (5.2) são formas diferenciais e, portanto, o procedimento de se obter 4 equações de Dirac da EDK é válido somente sob uma identificação (não-canônica) entre formas diferenciais e espinores. No entanto, para justificar os desenvolvimentos a seguir, podemos sempre partir diretamente da lagrangiana (5.7), que faz efetivamente sentido tanto para objetos tensoriais quanto espinoriais¹ (pensados como elementos de um ideal à esquerda minimal em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$).

¹Notamos que tal afirmação não seria verdadeira no caso da eq. (5.6), que só faz sentido para objetos ψ tensoriais.

5.2 Simetrias

Tomando $m = 0$ (termos massivos serão considerados mais tarde), vemos da discussão acima que

$$\frac{1}{4}\mathcal{L} = i \sum_{k=1}^4 \langle \psi_k^\dagger e^0 e^\mu \partial_\mu \psi_k \rangle_0, \quad \psi_k = \psi P_k \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P_k, \quad (5.8)$$

é uma lagrangiana modelando equações de Dirac desacopladas satisfeitas por espinores algébricos em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P_k$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Como vimos na seção 2.3, todos os idempotentes primitivos em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ são conjugados entre si. Ou seja, fixando um tal idempotente primitivo de referência $\mathring{P}$, podemos expressar qualquer outro como

$$P = R^{-1} \mathring{P} R, \quad (5.9)$$

para algum elemento inversível $R \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$. Escolhendo, por exemplo, $\mathring{P} = P_1^{ch} = \frac{1}{2}(1 + e_{30}) - \frac{1}{2}(1 - ie_{0123})$ (eqs. (2.30)), temos a seguinte forma geral de um idempotente primitivo em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$:

$$P = \frac{1}{2}(1 + u) \frac{1}{2}(1 + i\sigma), \quad (5.10)$$

onde $u = R^{-1}e_{30}R$ e $\sigma = R^{-1}(-e_{0123})R$ satisfazem $[u, \sigma] = 0$, $u^2 = 1$ e $\sigma^2 = -1$. Analogamente, o conjunto espectral correspondente às eqs. (2.30) pode ser escrito como

$$P_1 = \frac{1}{2}(1 + u) \frac{1}{2}(1 + i\sigma), \quad P_2 = \frac{1}{2}(1 - u) \frac{1}{2}(1 + i\sigma), \quad (5.11a)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(1 - u) \frac{1}{2}(1 - i\sigma), \quad P_4 = \frac{1}{2}(1 + u) \frac{1}{2}(1 - i\sigma). \quad (5.11b)$$

Notamos que as eqs. (5.11) nos dão (semelhantemente ao capítulo 4):

$$iP_k = -P_k\sigma, \quad k = 1, 2; \quad (5.12a)$$

$$iP_k = P_k\sigma, \quad k = 3, 4. \quad (5.12b)$$

Assim, uma transformação de fase de um espinor em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P_k$ pode ser escrita como multiplicação à direita por $e^{\alpha\sigma}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

5.2.1 Transformações globais

Levando em conta a discussão acima, consideremos agora uma transformação global para os idempotentes P_k em (5.8):

$$P_k \rightarrow P'_k = S^{-1} P_k S, \quad (5.13a)$$

$$u \rightarrow u' = S^{-1} u S, \quad (5.13b)$$

$$\sigma \rightarrow \sigma' = S^{-1} \sigma S, \quad (5.13c)$$

onde S é um elemento inversível em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$. Dado um espinor algébrico $\psi_k = \psi_k P_k$ em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P_k$ (sem soma em k), temos $\psi_k = \psi_k S P'_k S^{-1}$. Multiplicando ambos os membros à direita por S , temos $\psi_k S = \psi S P'_k$. Desta forma, $\psi'_k = \psi_k S$ pode ser tomado como a representação do espinor no ideal transformado $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P'_k$. As relações (5.13a)-(5.13c) devem portanto ser completadas por

$$\psi_k \rightarrow \psi'_k = \psi_k S. \quad (5.13d)$$

Notamos que isto transporta a equação de Dirac definida no ideal $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P_k$ para o ideal $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P'_k$.

As transformações acima induzem a seguinte transformação na lagrangiana (5.8):

$$\frac{1}{4}\mathcal{L}' = i\sum_{k=1}^4 \langle \psi_k'^\dagger e^0 e^\mu \partial_\mu \psi'_k \rangle_0 = i\sum_{k=1}^4 \langle S^\dagger \psi_k^\dagger e^0 e^\mu \partial_\mu (\psi_k S) \rangle_0.$$

Para S constante, temos

$$\frac{1}{4}\mathcal{L}' = i\sum_{k=1}^4 \langle S S^\dagger \psi_k^\dagger e^0 e^\mu \partial_\mu \psi_k \rangle_0,$$

onde novamente utilizamos a propriedade cíclica de $\langle \cdot \rangle_0$ (eq. (2.7)). Segue que a lagrangiana é invariante por tais tranformações globais desde que $S \in U(4)$. A álgebra de Lie correspondente é dada por $u(4) = \{A \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C}) : A + A^\dagger = 0\}$, isto é,

$$u(4) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{i, ie_0, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{23}, e_{31}, ie_{01}, ie_{02}, ie_{03}, e_{012}, e_{023}, e_{031}, ie_{123}, e_{0123}\}. \quad (5.14)$$

Devido à invariância da lagrangiana pela ação conjunta de (5.13), chamaremos tais transformações de *transformações internas*. É importante notar que estas agem à direita no espinor ψ , o que não tem análogo imediato no formalismo de espinores-coluna em $\mathbb{C}^4$. De fato, tais transformações alteram o próprio ideal que modela o espaço dos espinores (algébricos), modificando a maneira como tal espaço é imerso em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$.

5.2.2 Transformações locais

Vamos agora estender as transformações acima a transformações locais. Em outras palavras, consideraremos escolhas independentes para o ideal $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P_k$ em cada ponto x do espaço-tempo, de forma a termos $P_k = P_k(x)$.

Consideremos uma transformação interna local, da forma (cf eqs. (5.13))

$$\begin{aligned} P_k &\rightarrow P'_k = S^{-1} P_k S, \\ \psi_k &\rightarrow \psi'_k = \psi_k S, \end{aligned}$$

onde $S : x \mapsto S(x)$ toma valores em $U(4)$. Temos então

$$\begin{aligned} \langle \psi_k^\dagger e^0 e^\mu \partial_\mu \psi_k \rangle_0 &= \langle (\psi'_k S^{-1})^\dagger e^0 e^\mu \partial_\mu (\psi'_k S^{-1}) \rangle_0 = \\ &= \langle S \psi_k'^\dagger e^0 e^\mu (\partial_\mu \psi'_k) S^\dagger \rangle_0 + \langle S \psi_k'^\dagger e^0 e^\mu \psi'_k \partial_\mu S^{-1} \rangle_0 = \\ &= \langle \psi_k'^\dagger e^0 e^\mu (\partial_\mu \psi'_k) \rangle_0 + \langle \psi_k'^\dagger e^0 e^\mu \psi'_k (\partial_\mu S^{-1}) S \rangle_0, \end{aligned}$$

de maneira que a eq. (5.8) nos dá

$$\frac{1}{4}\mathcal{L} = i\sum_{k=1}^4 \left(\langle \psi_k'^\dagger e^0 e^\mu \partial_\mu \psi_k' \rangle_0 + \langle \psi_k'^\dagger e^0 e^\mu \psi_k' (\partial_\mu S^{-1}) S \rangle_0 \right).$$

O último termo destrói a invariância da lagrangiana, o que nos leva (segundo o procedimento usual das teorias de calibre) a introduzir uma derivada covariante que restaure tal invariância. Fazendo

$$\partial_\mu \psi_k \rightarrow D_\mu \psi_k = \partial_\mu \psi_k + \psi_k W_\mu, \quad (5.15)$$

temos então

$$\begin{aligned} \langle \psi_k^\dagger e^0 e^\mu D_\mu \psi_k \rangle_0 &= \langle \psi_k^\dagger e^0 e^\mu \partial_\mu \psi_k \rangle_0 + \langle \psi_k^\dagger e^0 e^\mu \psi_k W_\mu \rangle_0 = \\ &= \langle \psi_k'^\dagger e^0 e^\mu \partial_\mu \psi_k' \rangle_0 + \langle \psi_k'^\dagger e^0 e^\mu \psi_k' (\partial_\mu S^{-1}) S \rangle_0 + \langle S \psi_k'^\dagger e^0 e^\mu \psi_k' S^{-1} W_\mu \rangle_0 = \\ &= \langle \psi_k'^\dagger e^0 e^\mu \partial_\mu \psi_k' \rangle_0 + \langle \psi_k'^\dagger e^0 e^\mu \psi_k' (S^{-1} W_\mu S + (\partial_\mu S^{-1}) S) \rangle_0. \end{aligned}$$

Segue da expressão acima que a nova lagrangiana, obtida da anterior segundo (5.15):

$$\frac{1}{4}\mathcal{L} = i\sum_{k=1}^4 \langle \psi_k e^0 e^\mu \partial_\mu \psi_k \rangle_0 + i\langle \psi_k e^0 e^\mu \psi_k W_\mu \rangle_0, \quad (5.16)$$

isto é,

$$\mathcal{L} = i\langle \psi^\dagger e^0 e^\mu D_\mu \psi \rangle_0, \quad (5.17)$$

é invariante sob a transformação conjunta

$$P_k \rightarrow P'_k = S^{-1} P_k S, \quad (5.18a)$$

$$\psi_k \rightarrow \psi'_k = \psi_k S, \quad (5.18b)$$

$$W_\mu \rightarrow W'_\mu = S^{-1} W_\mu S + (\partial_\mu S^{-1}) S, \quad (5.18c)$$

com $W_\mu \in u(4)$.

É importante notar que a derivada covariante $D_\mu \psi_k = \partial_\mu \psi_k + \psi_k W_\mu$ não preserva o ideal $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P_k$, já que W_μ age à direita em ψ_k . Isto nos motiva a utilizar os ideais $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P_k$, $k = 1, 2, 3, 4$, para representar espaços de estados de diferentes partículas que, desta forma, interagem através do campo de calibre W_μ . Na seção 5.4, mostraremos que tal procedimento recupera o modelo eletrofraco simétrico [Moh98] que, num certo limite, contém o modelo de Glashow-Weinberg-Salam (GWS).

Notamos que vários autores consideraram anteriormente a identificação das colunas de uma dada álgebra de matrizes com diferentes partículas [Hes82, Chi87, Chi96, Tra01, Joy02, Bor03a, Bor03b]. No entanto, até onde sabemos, nenhum destes autores construiu uma teoria de calibre baseada na liberdade de escolha dos espinores algébricos imersos no campo de Dirac-Kähler. Em [Hes82], Hestenes identifica dois ideais fixos da álgebra $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$ com os espaços de estados do elétron e do neutrino, sendo as transformações de calibre aquelas que preservam a corrente eletromagnética.

Como resultado, o autor recupera o modelo de GWS, mas não considera termos de massa nem antipartículas, que em nosso formalismo aparecem de maneira natural (como veremos na seção 5.4). Em [Chi87, Chi96], Chisholm e Farwell desenvolvem certos modelos de *spin gauge theory*, onde tanto o espaço-tempo como o espaço interno (da teoria de calibre) são combinados numa estrutura de fibrado de Clifford com fibra $\mathcal{C}\ell_{r,s}(\mathbb{R})$. Como consequência, as transformações de calibre em tal teoria agem tanto nos espinores quanto nos próprios vetores-base e_μ (diferentemente de nosso caso). Ainda, os espinores sofrem transformação à esquerda e não à direita. Tomando $\mathcal{C}\ell_{2,6}(\mathbb{R})$ como a álgebra de Clifford de tal teoria, os autores mostraram ser possível expressar a teoria de GWS como uma *spin gauge theory*. Notemos no entanto que, como a álgebra usada é $\mathcal{C}\ell_{2,6}(\mathbb{R})$, foram utilizadas uma dimensão temporal extra e 3 dimensões espaciais extras para esse fim: neste contexto, as simetrias do grupo $SU(2)_L$ das interações eletrofracas são dadas por transformações do espaço correspondente às dimensões extras. Em [Tra01], Trayling e Baylis utilizam espinores algébricos em $\mathcal{C}\ell_{7,0}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{M}(8, \mathbb{C})$ (também com ideais fixos) para descrever o modelo padrão (partículas e antipartículas). Semelhantemente ao trabalho de Hestenes, os autores consideram como transformações de calibre aquelas que preservam a corrente (e deixam a componente de quiralidade positiva do neutrino estéril); semelhantemente ao trabalho de Chisholm e Farwell, a álgebra usada incorpora dimensões extras, sendo o grupo $SU(2)_L$ gerado por rotações no espaço das dimensões extras. Já em [Joy02], Joyce utiliza a álgebra $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ para modelar uma teoria com grupo de calibre $U(1) \times U(1) \times SU(3)$, que o autor interpreta como uma teoria “eletroforte”, onde o grupo $U(1) \times U(1)$ é responsável por dois campos fotônicos e o grupo $SU(3)$ pela simetria de cor dos quarks. As transformações que o autor utiliza são uma mistura de transformações agindo à esquerda e à direita no espaço dos espinores, e os quatro ideais minimais de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ (tomados fixos) são usados para modelar um elétron e três cores de quarks. Finalmente, em [Bor03a, Bor03b], Borstnik e Nielsen propõem um método geral para a construção de famílias de espinores habitando os diferentes ideais à esquerda minimais de qualquer álgebra de Clifford. Similarmente ao nosso trabalho, cada “família” é composta por dois espinores de Weyl, que os autores associam a um par composto por partícula + antipartícula. No entanto, a dinâmica de tal modelo não é induzida pela lagrangiana de Dirac-Kähler. Como veremos na seção 5.4, a estrutura das interações em nosso modelo permite que interpretemos o campo ψ , com valores em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$, como sendo composto por léptons (ou quarks) de uma dada geração de partículas. Por outro lado, os resultados de Borstnik e Nielsen os levaram a sugerir que cada ideal seja associado a uma geração diferente de partículas, o que dá origem sempre a um número par de gerações. Em nosso caso isso não ocorre, de forma que o modelo apresentado aqui é perfeitamente compatível com o número atualmente conhecido de 3 gerações de partículas.

Nota sobre a questão da covariância II

Como vimos na seção 2.5, a equação de Dirac escrita em termos de espinores algébricos $\varphi \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P$ é completamente equivalente à da formulação usual em termos de espinores-coluna. É interessante

observar, no entanto, que o uso de espinores algébricos tem o mérito de explicitar a simetria relacionada à liberdade de escolha do idempotente P , que determina o espaço de estados neste contexto.²

Desenvolvamos melhor este ponto. Para isso, consideremos a lagrangiana de Dirac (em oposição à lagrangiana da EDK) em espaço-tempo chato [Itz80]

$$\mathcal{L}_D = \langle \bar{\varphi} | \gamma^\mu i \partial_\mu - m | \varphi \rangle,$$

onde $\langle \bar{\varphi} | = \langle \varphi | \gamma^0$. Em termos de espinores algébricos definidos no ideal à esquerda minimal $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P$, tal equação pode ser escrita, para $m = 0$, como

$$\frac{1}{4} \mathcal{L}_D = i \langle \varphi^\dagger e^0 e^\mu \partial_\mu \varphi \rangle_0, \quad \varphi \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P. \quad (5.19)$$

Procedendo exatamente como acima, vemos que $\mathcal{L}_D$ é invariante sob transformações globais (com $S \in U(4)$):

$$\begin{aligned} P &\rightarrow P' = S^{-1} P S, \\ \varphi &\rightarrow \varphi' = \varphi S, \end{aligned}$$

que transportam a equação de Dirac definida no ideal $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P$ para o ideal $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P'$. Ao considerar transformações locais, a lagrangiana deixa de ser invariante, de maneira que somos levados a introduzir, exatamente como acima, a derivada covariante

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + \varphi W_\mu,$$

que restaure tal invariância. Como W_μ não preserva ideais, tal raciocínio (baseado agora apenas na equação de Dirac, e não na EDK) novamente sugere que associemos os diferentes ideais de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ a diferentes partículas. O objeto fundamental deste modelo seria então um campo $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ -valorizado φ , com 16 graus de liberdade complexos, cujas projeções φP_k em um sistema de ideais modelariam diferentes partículas interagindo entre si. Com isso, recuperamos a mesma linha de raciocínio acima.

5.2.3 Calibre unitário

Escolhamos agora o seguinte conjunto espectral $\{\hat{P}_k\}$ de referência (eq. (5.9)):

$$P_1 = \frac{1}{2}(1+u)\frac{1}{2}(1+i\sigma), \quad P_2 = \frac{1}{2}(1-u)\frac{1}{2}(1+i\sigma), \quad (5.20a)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(1-u)\frac{1}{2}(1-i\sigma), \quad P_4 = \frac{1}{2}(1+u)\frac{1}{2}(1-i\sigma), \quad (5.20b)$$

com

$$\hat{u} = e_{30} \quad \text{e} \quad \hat{\sigma} = -e_{0123}. \quad (5.20c)$$

²Como vimos na seção 2.5.1, tal simetria é intimamente relacionada à liberdade de escolha da representação das matrizes γ^μ na formulação usual da equação de Dirac.

Notamos que isto corresponde ao conjunto espectral das eqs. (2.30). Como discutimos no início da seção 5.2, dados os espinores individuais

$$x \mapsto \psi_k(x), \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

com $\psi_k(x) \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P_k(x)$, é então sempre possível encontrar $R(x) \in U(4)$ tal que $P_k(x) = R^{-1}(x)\mathring{P}_k R(x)$. Isto corresponde a uma transformação de calibre da forma (cf eqs. (5.18))

$$P_k = R^{-1}\mathring{P}_k R, \quad (5.21a)$$

$$\psi_k = \mathring{\psi}_k R, \quad (5.21b)$$

$$W_\mu = R^{-1}\mathring{W}_\mu R + (\partial_\mu R^{-1})R. \quad (5.21c)$$

Denominaremos a escolha de calibre onde o espinor é dado por $\mathring{\psi}$ (com os correspondentes $\mathring{P}_k, \mathring{W}_\mu$) de *calibre unitário*. O sentido de tal nomenclatura será esclarecido adiante. Notemos que as eqs. (5.21) podem ser usadas para *parametrizar* o campo de idempotentes primitivos pelo campo $U(4)$ -valorizado $x \mapsto R(x)$.

Operador de quiralidade Derivemos agora a expressão do operador de quiralidade para as diferentes partículas ψ_k contidas no campo ψ .

Lembramos que a ação do operador de quiralidade sobre um espinor-coluna $|\psi\rangle$ é dada por

$$\text{ch}(|\psi\rangle) = \gamma^5 |\psi\rangle, \quad \text{com } \gamma^5 := i\gamma^{0123} = -i\gamma_{0123}.$$

Consideremos inicialmente a expressão correspondente no calibre unitário. Aplicando o isomorfismo ρ^{-1} dado pela eq. (5.5), com $\{\gamma^\mu\}$ na representação quiral, obtemos a expressão correspondente para um espinor algébrico $\mathring{\psi}_k \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})\mathring{P}_k$:

$$\text{ch}(\mathring{\psi}_k) = -ie_{0123}\mathring{\psi}_k.$$

Segue de $\mathring{\psi}_k = \mathring{\psi}_k \mathring{P}_k$ e das eqs. (5.12) que

$$\text{ch}(\mathring{\psi}) = -ie_{0123}\mathring{\psi}\mathring{P}_k = e_{0123}\mathring{\psi}_k(\pm\hat{\sigma}) = \mp e_{0123}\mathring{\psi}_k e_{0123} = \pm\hat{\psi}_k,$$

onde o sinal de cima corresponde a $k = 1, 2$, o sinal de baixo corresponde a $k = 3, 4$, e $(\cdot)^\wedge$ é o operador de paridade usual em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$. Portanto,

$$\mathring{\psi}_k \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})\mathring{P}_k, \quad k = 1, 2 \Rightarrow \text{ch}(\mathring{\psi}_k) = \hat{\psi}_k, \quad (5.22a)$$

$$\mathring{\psi}_k \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})\mathring{P}_k, \quad k = 3, 4 \Rightarrow \text{ch}(\mathring{\psi}_k) = -\hat{\psi}_k. \quad (5.22b)$$

Lembramos que um estado com quiralidade positiva (negativa) é um auto-estado do operador de quiralidade com autovalor $+1$ (-1). De (5.22), temos o seguinte esquema para as quiralidades dos

diferentes setores de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$:

	$\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})\mathring{P}_k, k = 1, 2$	$\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})\mathring{P}_k, k = 3, 4$
$\mathcal{C}\ell_{1,3}^+(\mathbb{C})$	+	-
$\mathcal{C}\ell_{1,3}^-(\mathbb{C})$	-	+

(5.23)

Observamos ainda que a expressão de ch em um calibre arbitrário é dada por $\text{ch}(\psi) = -ie_{0123}\psi = -ie_{0123}\mathring{\psi}R = \text{ch}(\mathring{\psi})R$, ou seja,

$$\text{ch}(\psi) = \text{ch}(\mathring{\psi})R. \quad (5.24)$$

Finalmente, notamos que a substituição da derivada covariante $D_\mu\mathring{\psi} = \partial_\mu\mathring{\psi} + \mathring{\psi}\mathring{W}_\mu$ em (5.8) nos dá

$$\frac{1}{4}\mathcal{L} = i\langle\mathring{\psi}^\dagger e^0 e^\mu D_\mu\mathring{\psi}\rangle_0, \quad (5.25)$$

que é a lagrangiana no calibre unitário.

Lagrangiana de interação

Utilizando a expressão da derivada covariante $D_\mu\mathring{\psi} = \partial_\mu\mathring{\psi} + \mathring{\psi}\mathring{W}_\mu$ na eq. (5.25), temos

$$\frac{1}{4}\mathcal{L} = i \sum_{k,l=1}^4 \langle\mathring{\psi}_k^\dagger e^{0\mu} (\partial_\mu\mathring{\psi}_l + \mathring{\psi}_l\mathring{W}_\mu)\rangle_0,$$

onde denotamos $e^{0\mu} = e^0 e^\mu$ e $\psi_k = \psi P_k$, $k = 1, 2, 3, 4$. O primeiro termo pode ser reduzido exatamente como na seção 5.1, de forma que

$$\frac{1}{4}\mathcal{L} = i \left(\sum_{k=1}^4 \langle\mathring{\psi}_k^\dagger e^{0\mu} \partial_\mu\mathring{\psi}_k\rangle_0 + \sum_{k,l=1}^4 \langle\mathring{\psi}_k^\dagger e^{0\mu} \mathring{\psi}_l\mathring{W}_\mu\rangle_0 \right). \quad (5.26)$$

Novamente, o primeiro termo da eq. (5.26) corresponde a lagrangianas de Dirac para diferentes partículas livres modeladas nos ideais $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P_k$, $k = 1, 2, 3, 4$. O último termo, que denotaremos por

$$\frac{1}{4}\mathcal{L}_I = i \sum_{k,l=1}^4 \langle\mathring{\psi}_k^\dagger e^{0\mu} \mathring{\psi}_l\mathring{W}_\mu\rangle_0, \quad (5.27)$$

contém toda a interação entre $\mathring{\psi}_1, \mathring{\psi}_2, \mathring{\psi}_3$ e $\mathring{\psi}_4$.

É interessante, para o que segue, separar a contribuição dos campos de calibre $\mathring{W}_\mu \in u(4)$ em duas partes

$$u(4) = \mathfrak{g}^{(0)} + \mathfrak{g}^{(1)}, \quad (5.28)$$

onde $\mathfrak{g}^{(0)} = u(4) \cap \mathcal{C}\ell_{1,3}^+(\mathbb{C})$ e $\mathfrak{g}^{(1)} = u(4) \cap \mathcal{C}\ell_{1,3}^-(\mathbb{C})$, isto é,

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{i, e_{12}, e_{23}, e_{31}, ie_{01}, ie_{02}, ie_{03}, e_{0123}\}, \quad (5.29a)$$

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{ie_0, e_1, e_2, e_3, e_{012}, e_{023}, e_{031}, ie_{123}\}. \quad (5.29b)$$

Notamos que $\mathfrak{g}^{(0)}$ é então uma subálgebra de Lie de $u(4)$ e que $\mathfrak{g}^{(0)}$ e $\mathfrak{g}^{(1)}$ não comutam. Notamos ainda que os elementos de $\mathfrak{g}^{(0)}$ ($\mathfrak{g}^{(1)}$) são precisamente aqueles que comutam (anticomutam) com e_{0123} e, portanto, com $\hat{\sigma} = -ie_{0123}$. Desta forma:

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \{A \in u(4) : [A, \hat{\sigma}] = 0\}; \quad (5.30a)$$

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \{A \in u(4) : \{A, \hat{\sigma}\} = 0\}. \quad (5.30b)$$

Tendo em mente a eq. (5.27), observamos que $\langle \psi_k^\dagger e^{0\mu} \psi_l \hat{W}_\mu \rangle_0 = \langle (\psi_k^\dagger \hat{P}_k)^\dagger e^{0\mu} (\psi_l \hat{P}_l) \hat{W}_\mu \rangle_0 = \langle \psi_k^\dagger e^{0\mu} \psi_l \hat{P}_l \hat{W}_\mu \hat{P}_k \rangle_0$. Segue das eqs. (5.20) que

$$\hat{W}_\mu \in \mathfrak{g}^{(0)} \Rightarrow \langle \psi_k^\dagger e^{0\mu} \psi_l \hat{W}_\mu \rangle_0 = 0 \text{ se } [k = 1, 2 \text{ e } l = 3, 4] \text{ ou } [k = 3, 4 \text{ e } l = 1, 2], \quad (5.31a)$$

$$\hat{W}_\mu \in \mathfrak{g}^{(1)} \Rightarrow \langle \psi_k^\dagger e^{0\mu} \psi_l \hat{W}_\mu \rangle_0 = 0 \text{ se } [k = 1, 2 \text{ e } l = 1, 2] \text{ ou } [k = 3, 4 \text{ e } l = 3, 4]. \quad (5.31b)$$

Com isso, temos dois casos a considerar:

(i) $\hat{W}_\mu \in \mathfrak{g}^{(0)} \subset \mathcal{C}\ell_{1,3}^+(\mathbb{C})$:

Então, a eq. (5.31a) nos dá que $\langle \psi_k^\dagger e^{0\mu} \psi_l \hat{W}_\mu \rangle_0$ é possivelmente não-nulo somente nos casos em que $[k = 1, 2 \text{ e } l = 1, 2]$ ou $[k = 3, 4 \text{ e } l = 3, 4]$. Como estamos considerando $\hat{W}_\mu$ par, temos que $\langle \psi_k^\dagger e^{0\mu} \psi_l \hat{W}_\mu \rangle_0 \neq 0$ somente se ψ_k e ψ_l tiverem a mesma paridade (par/par ou ímpar/ímpar). Segue da tabela (5.23) que só há acoplamento, neste caso, entre termos de mesma quiralidade (+/+ ou -/-).

(ii) $\hat{W}_\mu \in \mathfrak{g}^{(1)} \subset \mathcal{C}\ell_{1,3}^-(\mathbb{C})$:

Então, a eq. (5.31b) nos dá que $\langle \psi_k^\dagger e^{0\mu} \psi_l \hat{W}_\mu \rangle_0$ é possivelmente não-nulo somente nos casos em que $[k = 1, 2 \text{ e } l = 3, 4]$ ou $[k = 3, 4 \text{ e } l = 1, 2]$. Como estamos considerando $\hat{W}_\mu$ ímpar, temos que $\langle \psi_k^\dagger e^{0\mu} \psi_l \hat{W}_\mu \rangle_0 \neq 0$ somente se ψ_k e ψ_l tiverem paridades opostas (par/ímpar ou ímpar/par). Segue da tabela (5.23) que só há acoplamento, também neste caso, entre termos de mesma quiralidade (+/+ ou -/-).

Portanto, o modelo considerado aqui prevê que os setores de quiralidade positiva e negativa são completamente desacoplados, de acordo com o que é observado experimentalmente.

5.3 Interação entre ideais

Segue imediatamente das eqs. (5.31) que a lagrangiana de interação (5.27) pode ser decomposta como

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_I^{(0)} + \mathcal{L}_I^{(1)}, \quad (5.32)$$

onde

$$\frac{1}{4} \mathcal{L}_I^{(0)} = i \sum_{k,l=1}^2 \langle \psi_k^\dagger e^{0\mu} \psi_l \hat{W}_\mu \rangle_0 + i \sum_{k,l=3}^4 \langle \psi_k^\dagger e^{0\mu} \psi_l \hat{W}_\mu \rangle_0, \quad \hat{W}_\mu \in \mathfrak{g}^{(0)}, \quad (5.33a)$$

$$\frac{1}{4} \mathcal{L}_I^{(1)} = i \sum_{k=1}^2 \sum_{l=3}^4 \langle \psi_k^\dagger e^{0\mu} \psi_l \hat{W}_\mu \rangle_0 + i \sum_{k=3}^4 \sum_{l=1}^2 \langle \psi_k^\dagger e^{0\mu} \psi_l \hat{W}_\mu \rangle_0, \quad \hat{W}_\mu \in \mathfrak{g}^{(1)}. \quad (5.33b)$$

Isto significa que os campos de calibre em $\mathfrak{g}^{(0)}$ acoplam separadamente os ideais $1 \leftrightarrow 2$ e $3 \leftrightarrow 4$. Já os campos de calibre em $\mathfrak{g}^{(1)}$ acoplam as partículas nos ideais 1,2 com as partículas nos ideais 3,4.

No restante desta seção, determinamos a forma precisa das interações provenientes de $\mathcal{L}_I^{(0)}$ e $\mathcal{L}_I^{(1)}$.

Notamos que podemos reescrever (5.29a) como

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_{12}, e_{23}, e_{31}, e_{0123}, e_{12}e_5, e_{23}e_5, e_{31}e_5, e_{0123}e_5\},$$

onde $e_5 := -ie_{0123}$. Alternativamente, podemos tomar uma base (sobre $\mathbb{R}$) para $\mathfrak{g}^{(0)}$ formada pelos seguintes elementos:

$$\begin{aligned} e_{12} \frac{1}{2} (1 + e_5), & \quad e_{12} \frac{1}{2} (1 - e_5), \\ e_{23} \frac{1}{2} (1 + e_5), & \quad e_{23} \frac{1}{2} (1 - e_5), \\ e_{31} \frac{1}{2} (1 + e_5), & \quad e_{31} \frac{1}{2} (1 - e_5), \\ e_{0123} \frac{1}{2} (1 + e_5), & \quad e_{0123} \frac{1}{2} (1 - e_5). \end{aligned} \tag{5.34}$$

Observamos que $\text{span}_{\mathbb{R}}\{e_{12} \frac{1}{2} (1 \pm e_5), e_{23} \frac{1}{2} (1 \pm e_5), e_{31} \frac{1}{2} (1 \pm e_5), e_{0123} \frac{1}{2} (1 \pm e_5)\} \cong su(2) \oplus u(1)$. Como $\frac{1}{2} (1 \pm e_5) \frac{1}{2} (1 \pm e_5) = \frac{1}{2} (1 \pm e_5)$ e $\frac{1}{2} (1 \pm e_5) \frac{1}{2} (1 \mp e_5) = 0$, segue imediatamente que

$$\mathfrak{g}^{(0)} = su(2) \oplus su(2) \oplus u(1) \oplus u(1).$$

Ou, se $G \subset U(4)$ é o grupo de Lie gerado por $\mathfrak{g}^{(0)}$, temos

$$G = SU(2) \times SU(2) \times U(1) \times U(1). \tag{5.35}$$

Observação 5.1 Na decomposição acima de G como o produto direto entre $SU(2) \times SU(2)$ e $U(1) \times U(1)$, o fator $U(1) \times U(1)$ age trivialmente sobre os idempotentes P_k (eq. (5.18a)). Desta forma, as transformações correspondentes a $U(1) \times U(1)$ preservam cada ideal $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P_k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Ainda assim, tais transformações produzem uma transformação não-trivial sobre os espinores (eq. (5.18b), produzindo as usuais transformações de fase para as partículas correspondentes. Além disso — exatamente pelo fato de que tais transformações preservam individualmente cada ideal — podemos associar geradores diferentes de $U(1) \times U(1)$ a cada partícula.

Dado $\psi \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$, denotemos (como anteriormente) $\psi_k = \psi P_k \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P_k$. Denotemos ainda:

- (i) a parte par de ψ_k por $\psi_{k,0}$, isto é, $\psi_{k,0} = \frac{1}{2}(\psi_k + \hat{\psi}_k)$;
- (ii) a parte ímpar de ψ_k por $\psi_{k,1}$, isto é, $\psi_{k,1} = \frac{1}{2}(\psi_k - \hat{\psi}_k)$.

Então, podemos escrever

$$\psi = \sum_{k=1}^4 \sum_{p=0}^1 \psi_{k,p}.$$

Substituindo $\psi = \sum_{k=1}^4 \sum_{p=0}^1 \psi_{k,p}$ (notemos que k denota o ideal e p a paridade) em (5.33a), temos

$$\begin{aligned} -\frac{i}{4} \mathcal{L}_I^{(0)} &= \sum_{k,k'=1p,p'=0}^2 \sum_{p'=0}^1 \langle \psi_{k,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{k',p'} \dot{W}_\mu \rangle_0 + \sum_{k,k'=3p,p'=0}^4 \sum_{p'=0}^1 \langle \psi_{k,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{k',p'} \dot{W}_\mu \rangle_0 = \\ &= \sum_{k,k'=1p,p'=0}^2 \sum_{p'=0}^1 \langle (\psi_{k,p} \dot{P}_k)^\dagger e^{0\mu} \psi_{k',p'} \dot{P}_{k'} \dot{W}_\mu \rangle_0 + \sum_{k,k'=3p,p'=0}^4 \sum_{p'=0}^1 \langle (\psi_{k,p} \dot{P}_k)^\dagger e^{0\mu} \psi_{k',p'} \dot{P}_{k'} \dot{W}_\mu \rangle_0 = \\ &= \sum_{k,k'=1p,p'=0}^2 \sum_{p'=0}^1 \langle \psi_{k,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{k',p'} \dot{P}_{k'} \dot{W}_\mu \dot{P}_k \rangle_0 + \sum_{k,k'=3p,p'=0}^4 \sum_{p'=0}^1 \langle \psi_{k,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{k',p'} \dot{P}_{k'} \dot{W}_\mu \dot{P}_k \rangle_0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Em termos da base $\mathbf{g}^{(0)}$ dada por (5.34), podemos escrever $\dot{W}_\mu = \dot{W}_{\mu,m}^{(+)} E_{(+)}^m + \dot{W}_{\mu,m}^{(-)} E_{(-)}^m$, $m = 1, 2, 3, 4$, com

$$\begin{aligned} E_{(\pm)}^1 &= \frac{e_{23}}{2} \frac{1 \pm e_5}{2}, \quad E_{(\pm)}^2 = \frac{e_{13}}{2} \frac{1 \pm e_5}{2}, \quad E_{(\pm)}^3 = \frac{e_{12}}{2} \frac{1 \pm e_5}{2}, \\ E_{(\pm)}^4 &= \frac{e_{0123}}{2} \frac{1 \pm e_5}{2}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Notamos que $\{E_{(\pm)}^1, E_{(\pm)}^2, E_{(\pm)}^3, E_{(\pm)}^4\}$ é base de $su(2) \oplus u(1)$. Tendo em mente que (eqs. (5.20))

$$\dot{P}_1 = \frac{1}{2}(1 + e_{30}) \frac{1}{2}(1 + e_5), \quad \dot{P}_2 = \frac{1}{2}(1 - e_{30}) \frac{1}{2}(1 + e_5), \quad (5.38a)$$

$$\dot{P}_3 = \frac{1}{2}(1 - e_{30}) \frac{1}{2}(1 - e_5), \quad \dot{P}_4 = \frac{1}{2}(1 + e_{30}) \frac{1}{2}(1 - e_5), \quad (5.38b)$$

observamos que

$$E_{(+)}^m \dot{P}_3 = \dot{P}_3 E_{(+)}^m = 0, \quad E_{(+)}^m \dot{P}_4 = \dot{P}_4 E_{(+)}^m = 0, \quad (5.39a)$$

$$E_{(-)}^m \dot{P}_1 = \dot{P}_1 E_{(-)}^m = 0, \quad E_{(-)}^m \dot{P}_2 = \dot{P}_2 E_{(-)}^m = 0, \quad (5.39b)$$

e

$$\text{se } m = 1, 2: \quad E_{(+)}^m \dot{P}_1 = \dot{P}_2 E_{(+)}^m, \quad E_{(+)}^m \dot{P}_2 = \dot{P}_1 E_{(+)}^m, \quad E_{(-)}^m \dot{P}_3 = \dot{P}_4 E_{(-)}^m, \quad E_{(-)}^m \dot{P}_4 = \dot{P}_3 E_{(-)}^m;$$

$$\text{se } m = 3, 4: \quad E_{(\pm)}^m \dot{P}_k = \dot{P}_k E_{(\pm)}^m \quad \forall k.$$

Como $\dot{P}_k \dot{P}_{k'} = \delta_{kk'} \dot{P}_k$, temos então de (5.36) que

$$\begin{aligned} -\frac{i}{4} \mathcal{L}_I^{(0)} &= \sum_{p,p'=0}^1 \langle \psi_{1,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{2,p'} (\dot{W}_{\mu,1}^{(+)} E_{(+)}^1 + \dot{W}_{\mu,2}^{(+)} E_{(+)}^2) \rangle_0 + \langle \psi_{2,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{1,p'} (\dot{W}_{\mu,1}^{(+)} E_{(+)}^1 + \dot{W}_{\mu,2}^{(+)} E_{(+)}^2) \rangle_0 + \\ &+ \sum_{p,p'=0}^1 \langle \psi_{1,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{1,p'} (\dot{W}_{\mu,3}^{(+)} E_{(+)}^3 + \dot{W}_{\mu,4}^{(+)} E_{(+)}^4) \rangle_0 + \langle \psi_{2,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{2,p'} (\dot{W}_{\mu,3}^{(+)} E_{(+)}^3 + \dot{W}_{\mu,4}^{(+)} E_{(+)}^4) \rangle_0 + \\ &+ \sum_{p,p'=0}^1 \langle \psi_{3,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{4,p'} (\dot{W}_{\mu,1}^{(-)} E_{(-)}^1 + \dot{W}_{\mu,2}^{(-)} E_{(-)}^2) \rangle_0 + \langle \psi_{4,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{3,p'} (\dot{W}_{\mu,1}^{(-)} E_{(-)}^1 + \dot{W}_{\mu,2}^{(-)} E_{(-)}^2) \rangle_0 + \\ &+ \sum_{p,p'=0}^1 \langle \psi_{3,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{3,p'} (\dot{W}_{\mu,3}^{(-)} E_{(-)}^3 + \dot{W}_{\mu,4}^{(-)} E_{(-)}^4) \rangle_0 + \langle \psi_{4,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{4,p'} (\dot{W}_{\mu,3}^{(-)} E_{(-)}^3 + \dot{W}_{\mu,4}^{(-)} E_{(-)}^4) \rangle_0. \end{aligned}$$

Como $E_{(\pm)}^1, E_{(\pm)}^2, E_{(\pm)}^3, E_{(\pm)}^4$ são todos elementos pares de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$, isto nos dá (observe os índices de soma):

$$\begin{aligned} -\frac{i}{4}\mathcal{L}_I^{(0)} = & \sum_{p=0,1} \langle \psi_{1,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{2,p} (\dot{W}_{\mu,1}^{(+)} E_{(+)}^1 + \dot{W}_{\mu,2}^{(+)} E_{(+)}^2) \rangle_0 + \langle \psi_{2,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{1,p} (\dot{W}_{\mu,1}^{(+)} E_{(+)}^1 + \dot{W}_{\mu,2}^{(+)} E_{(+)}^2) \rangle_0 + \\ & + \sum_{p=0,1} \langle \psi_{1,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{1,p} (\dot{W}_{\mu,3}^{(+)} E_{(+)}^3 + \dot{W}_{\mu,4}^{(+)} E_{(+)}^4) \rangle_0 + \langle \psi_{2,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{2,p} (\dot{W}_{\mu,3}^{(+)} E_{(+)}^3 + \dot{W}_{\mu,4}^{(+)} E_{(+)}^4) \rangle_0 + \\ & + \sum_{p=0,1} \langle \psi_{3,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{4,p} (\dot{W}_{\mu,1}^{(-)} E_{(-)}^1 + \dot{W}_{\mu,2}^{(-)} E_{(-)}^2) \rangle_0 + \langle \psi_{4,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{3,p} (\dot{W}_{\mu,1}^{(-)} E_{(-)}^1 + \dot{W}_{\mu,2}^{(-)} E_{(-)}^2) \rangle_0 + \\ & + \sum_{p=0,1} \langle \psi_{3,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{3,p} (\dot{W}_{\mu,3}^{(-)} E_{(-)}^3 + \dot{W}_{\mu,4}^{(-)} E_{(-)}^4) \rangle_0 + \langle \psi_{4,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{4,p} (\dot{W}_{\mu,3}^{(-)} E_{(-)}^3 + \dot{W}_{\mu,4}^{(-)} E_{(-)}^4) \rangle_0. \end{aligned}$$

Segue da forma de $\dot{P}_k$ nas eqs. (5.38), e de termos sempre $\psi_{k,p} \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})\dot{P}_k$, que

$$\begin{aligned} i\psi_{1,p}E_{(+)}^1 &= i\psi_{1,p}e_5E_{(+)}^1 = \psi_{1,p}e_{0123}\frac{e_{23}}{2} = \frac{1}{2}\psi_{1,p}e_{10}, \\ i\psi_{1,p}E_{(+)}^2 &= i\psi_{1,p}e_{30}E_{(+)}^2 = i\psi_{1,p}e_{30}\frac{e_{13}}{2} = \frac{i}{2}\psi_{1,p}e_{10}, \\ i\psi_{1,p}E_{(+)}^3 &= i\psi_{1,p}e_{30}E_{(+)}^3 = i\psi_{1,p}e_{30}\frac{e_{12}}{2} = \psi_{1,p}\frac{e_5}{2} = \frac{1}{2}\psi_{1,p}, \\ i\psi_{1,p}E_{(+)}^4 &= i\psi_{1,p}\frac{e_{0123}}{2} = -\frac{1}{2}\psi_{1,p}e_5 = -\frac{1}{2}\psi_{1,p}. \end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga, temos como resultado

k	$i\psi_{k,p}E_{(+)}^1$	$i\psi_{k,p}E_{(+)}^2$	$i\psi_{k,p}E_{(+)}^3$	$i\psi_{k,p}E_{(+)}^4$
1	$\frac{1}{2}\psi_{1,p}e_{10}$	$\frac{i}{2}\psi_{1,p}e_{10}$	$\frac{1}{2}\psi_{1,p}$	$-\frac{1}{2}\psi_{1,p}$
2	$\frac{1}{2}\psi_{2,p}e_{10}$	$-\frac{i}{2}\psi_{2,p}e_{10}$	$-\frac{1}{2}\psi_{2,p}$	$-\frac{1}{2}\psi_{2,p}$
k	$i\psi_{k,p}E_{(-)}^1$	$i\psi_{k,p}E_{(-)}^2$	$i\psi_{k,p}E_{(-)}^3$	$i\psi_{k,p}E_{(-)}^4$
3	$-\frac{1}{2}\psi_{3,p}e_{10}$	$-\frac{i}{2}\psi_{3,p}e_{10}$	$\frac{1}{2}\psi_{3,p}$	$\frac{1}{2}\psi_{3,p}$
4	$-\frac{1}{2}\psi_{4,p}e_{10}$	$\frac{i}{2}\psi_{4,p}e_{10}$	$-\frac{1}{2}\psi_{4,p}$	$\frac{1}{2}\psi_{4,p}$

Com isso,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^{(0)} = & 2 \sum_{p=0,1} \{ \langle \psi_{1,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{2,p} (\dot{W}_{\mu,1}^{(+)} - i\dot{W}_{\mu,2}^{(+)}) e_{10} \rangle_0 + \langle \psi_{2,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{1,p} (\dot{W}_{\mu,1}^{(+)} + i\dot{W}_{\mu,2}^{(+)}) e_{10} \rangle_0 + \\ & + \langle \psi_{1,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{1,p} (\dot{W}_{\mu,3}^{(+)} - \dot{W}_{\mu,4}^{(+)}) \rangle_0 + \langle \psi_{2,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{2,p} (-\dot{W}_{\mu,3}^{(+)} - \dot{W}_{\mu,4}^{(+)}) \rangle_0 + \\ & + \langle \psi_{3,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{4,p} (-\dot{W}_{\mu,1}^{(-)} + i\dot{W}_{\mu,2}^{(-)}) e_{10} \rangle_0 + \langle \psi_{4,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{3,p} (-\dot{W}_{\mu,1}^{(-)} - i\dot{W}_{\mu,2}^{(-)}) e_{10} \rangle_0 + \\ & + \langle \psi_{3,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{3,p} (\dot{W}_{\mu,3}^{(-)} + \dot{W}_{\mu,4}^{(-)}) \rangle_0 + \langle \psi_{4,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{4,p} (-\dot{W}_{\mu,3}^{(-)} + \dot{W}_{\mu,4}^{(-)}) \rangle_0 \}, \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^{(0)} = & 2 \sum_{p=0,1} \{ -\hat{W}_{\mu,3}^{(+)} (-\langle \psi_{1,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{1,p} \rangle_0 + \langle \psi_{2,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{2,p} \rangle_0) - \hat{W}_{\mu,4}^{(+)} (\langle \psi_{1,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{1,p} \rangle_0 + \langle \psi_{2,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{2,p} \rangle_0) + \\ & + \hat{W}_{\mu,3}^{(-)} (\langle \psi_{3,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{3,p} \rangle_0 - \langle \psi_{4,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{4,p} \rangle_0) + \hat{W}_{\mu,4}^{(-)} (\langle \psi_{3,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{3,p} \rangle_0 + \langle \psi_{4,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{4,p} \rangle_0) + \\ & + \hat{W}_{\mu,1}^{(+)} (\langle \psi_{1,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{2,p} e_{10} \rangle_0 + \langle \psi_{2,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{1,p} e_{10} \rangle_0) + i \hat{W}_{\mu,2}^{(+)} (-\langle \psi_{1,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{2,p} e_{10} \rangle_0 + \langle \psi_{2,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{1,p} e_{10} \rangle_0) - \\ & - \hat{W}_{\mu,1}^{(-)} (\langle \psi_{3,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{4,p} e_{10} \rangle_0 + \langle \psi_{4,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{3,p} e_{10} \rangle_0) - i \hat{W}_{\mu,2}^{(-)} (-\langle \psi_{3,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{4,p} e_{10} \rangle_0 + \langle \psi_{4,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{3,p} e_{10} \rangle_0) \}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Vamos expressar tal lagrangiana na notação de *bras* e *kets* usual. Na seção 5.1, definimos o isomorfismo entre $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ e $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ dado pela eq. (5.5), com $\{\gamma^\mu\}$ na representação quiral. Com isso, dados dois espinores $\varphi_k, \psi_k \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P_k$, o corolário 2.8 nos dá

$$\langle \varphi_k | \psi_k \rangle = 4 \langle \varphi_k^\dagger \psi_k \rangle_0. \quad (5.41)$$

Segue que

$$\langle \psi_{k,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{k,p} \rangle_0 = \frac{1}{4} \langle \bar{\psi}_{k,p} | \gamma^\mu | \psi_{k,p} \rangle.$$

Os termos cruzados, do tipo $\langle \psi_{1,p}^\dagger e^{0\mu} \psi_{2,p} e_{10} \rangle_0$, requerem um pouco mais de trabalho pois ψ_1 e ψ_2 habitam ideais diferentes. Sejam $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle$ espinores-coluna em $\mathbb{C}^4$, escritos no contexto da representação quiral, e incluídos em $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ |\varphi_1\rangle & |\varphi_2\rangle & 0 & 0 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}.$$

Sejam τ_i , $i = 1, 2, 3$, as matrizes de Pauli:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

É então imediato ver que a transposição $\mathbf{t}_{1 \leftrightarrow 2}$ de espinores entre as duas primeiras colunas pode ser implementada via multiplicação à direita por $\gamma_{10} = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & -\tau_1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ |\varphi_1\rangle & |\varphi_2\rangle & 0 & 0 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \gamma_{10} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ |\varphi_2\rangle & |\varphi_1\rangle & 0 & 0 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}.$$

Notamos que isto ocorre porque e_{10} comuta com $e_5 := -ie_{0123}$ e anticomuta com e_{30} , de forma que $e_{10}\hat{P}_1 = \hat{P}_2 e_{10}$.

Aplicando o isomorfismo ρ^{-1} dado pela eq. (5.5), com $\{\gamma^\mu\}$ na representação quiral, obtemos a expressão correspondente para espinores algébricos

$$\mathbf{t}_{1 \leftrightarrow 2} : \psi \mapsto \mathbf{t}_{1 \leftrightarrow 2}(\psi) = \psi e_{10}.$$

De modo análogo,

$$\mathbf{t}_{3 \leftrightarrow 4} : \psi \mapsto \mathbf{t}_{3 \leftrightarrow 4}(\psi) = -\psi e_{10}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \langle \bar{\varphi}_1 | \gamma^\mu | \varphi_2 \rangle &= |\varphi_1\rangle^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu |\varphi_2\rangle = \\ &= \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ |\varphi_1\rangle & 0 & 0 & 0 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ |\varphi_2\rangle & 0 & 0 & 0 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ |\varphi_1\rangle & 0 & 0 & 0 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ 0 & |\varphi_2\rangle & 0 & 0 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \gamma_{10} \right\} = \\ &= 4 \langle \varphi_1^\dagger e^{0\mu} \varphi_2 e_{10} \rangle_0. \end{aligned}$$

Procedendo analogamente para espinores algébricos em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})\hat{P}_k$, $k = 3, 4$, temos

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1^\dagger e^{0\mu} \varphi_2 e_{10} \rangle_0 &= \frac{1}{4} \langle \bar{\varphi}_1 | \gamma^\mu | \varphi_2 \rangle, \\ \langle \varphi_3^\dagger e^{0\mu} \varphi_4 e_{10} \rangle_0 &= -\frac{1}{4} \langle \bar{\varphi}_3 | \gamma^\mu | \varphi_4 \rangle. \end{aligned}$$

Substituindo na eq. (5.40), temos então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^{(0)} &= \frac{1}{2} \sum_{p=0,1} \{ \dot{W}_{\mu,1}^{(+)} (\langle \bar{\psi}_{1,p} | \gamma^\mu | \dot{\psi}_{2,p} \rangle + \langle \bar{\psi}_{2,p} | \gamma^\mu | \dot{\psi}_{1,p} \rangle) + i \dot{W}_{\mu,2}^{(+)} (-\langle \bar{\psi}_{1,p} | \gamma^\mu | \dot{\psi}_{2,p} \rangle + \langle \bar{\psi}_{2,p} | \gamma^\mu | \dot{\psi}_{1,p} \rangle) + \\ &+ \dot{W}_{\mu,3}^{(+)} (\langle \bar{\psi}_{1,p} | \gamma^\mu | \dot{\psi}_{1,p} \rangle - \langle \bar{\psi}_{2,p} | \gamma^\mu | \dot{\psi}_{2,p} \rangle) - \dot{W}_{\mu,4}^{(+)} (\langle \bar{\psi}_{1,p} | \gamma^\mu | \dot{\psi}_{1,p} \rangle + \langle \bar{\psi}_{2,p} | \gamma^\mu | \dot{\psi}_{2,p} \rangle) + \\ &+ \dot{W}_{\mu,1}^{(-)} (\langle \bar{\psi}_{3,p} | \gamma^\mu | \dot{\psi}_{4,p} \rangle + \langle \bar{\psi}_{4,p} | \gamma^\mu | \dot{\psi}_{3,p} \rangle) + i \dot{W}_{\mu,2}^{(-)} (-\langle \bar{\psi}_{3,p} | \gamma^\mu | \dot{\psi}_{4,p} \rangle + \langle \bar{\psi}_{4,p} | \gamma^\mu | \dot{\psi}_{3,p} \rangle) + \\ &+ \dot{W}_{\mu,3}^{(-)} (\langle \bar{\psi}_{3,p} | \gamma^\mu | \dot{\psi}_{3,p} \rangle - \langle \bar{\psi}_{4,p} | \gamma^\mu | \dot{\psi}_{4,p} \rangle) + \dot{W}_{\mu,4}^{(-)} (\langle \bar{\psi}_{3,p} | \gamma^\mu | \dot{\psi}_{3,p} \rangle + \langle \bar{\psi}_{4,p} | \gamma^\mu | \dot{\psi}_{4,p} \rangle) \}. \end{aligned}$$

Definindo $\Psi_{12,p} = \begin{pmatrix} |\dot{\psi}_{1,p}\rangle \\ |\dot{\psi}_{2,p}\rangle \end{pmatrix}$, $\Psi_{34,p} = \begin{pmatrix} |\dot{\psi}_{3,p}\rangle \\ |\dot{\psi}_{4,p}\rangle \end{pmatrix}$, $p = 0, 1$ como acima, temos então (observe que os termos em $p = 0$ e $p = 1$ são completamente desacoplados):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^{(0)} &= \sum_{p=0,1} \{ (\bar{\Psi}_{12,p} \gamma^\mu \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \Psi_{12,p}) \cdot \dot{\mathbf{W}}_\mu^{(+)} - \frac{1}{2} (\bar{\Psi}_{12,p} \gamma^\mu \Psi_{12,p}) \dot{W}_{\mu,4}^{(+)} + \\ &+ (\bar{\Psi}_{34,p} \gamma^\mu \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \Psi_{34,p}) \cdot \dot{\mathbf{W}}_\mu^{(-)} + \frac{1}{2} (\bar{\Psi}_{34,p} \gamma^\mu \Psi_{34,p}) \dot{W}_{\mu,4}^{(-)} \}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

onde $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ e $\dot{\mathbf{W}}_\mu^{(\pm)} = (\dot{W}_{\mu,1}^{(\pm)}, \dot{W}_{\mu,2}^{(\pm)}, \dot{W}_{\mu,2}^{(\pm)})$.

Um raciocínio análogo leva à seguinte expressão para a parte restante $\mathcal{L}_I$ na eq. (5.32), ou seja, para $\mathcal{L}_I^{(1)}$. Dado $\dot{W}_\mu \in \mathfrak{g}^{(1)}$, da forma $\dot{W}_\mu = X_\mu^1 e_1 + X_\mu^2 e_{013} + X_\mu^3 e_{023} + X_\mu^4 e_2 + Y_\mu^1 i e_0 + Y_\mu^2 e_3 +$

$Y_\mu^3 i e_{123} + Y_\mu^4 e_{012}$, com $X_\mu^k, Y_\mu^k \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^{(1)} = & E_{\mu,+} \sum_{p=0}^1 \langle \bar{\psi}_{4,p+1} | \gamma^\mu | \psi_{1,p} \rangle + G_{\mu,+} \sum_{p=0}^1 \langle \bar{\psi}_{4,p+1} | \gamma^\mu | \psi_{2,p} \rangle + \\ & + H_{\mu,+} \sum_{p=0}^1 \langle \bar{\psi}_{3,p+1} | \gamma^\mu | \psi_{1,p} \rangle + F_{\mu,+} \sum_{p=0}^1 \langle \bar{\psi}_{3,p+1} | \gamma^\mu | \psi_{2,p} \rangle + \\ & + hc, \end{aligned} \quad (5.43)$$

onde hc denota o termo conjugado hermitiano correspondente e

$$\begin{aligned} E_{\mu,+} &= -X_\mu^3 - X_\mu^4 + i(X_\mu^1 + X_\mu^2), \\ F_{\mu,+} &= -X_\mu^3 + X_\mu^4 + i(X_\mu^1 - X_\mu^2), \\ G_{\mu,+} &= Y_\mu^1 - Y_\mu^4 + i(Y_\mu^2 - Y_\mu^3), \\ H_{\mu,+} &= Y_\mu^1 + Y_\mu^4 + i(-Y_\mu^2 - Y_\mu^3). \end{aligned}$$

5.4 Interações eletrofracas

Como vimos na seção 5.2 (especialmente em (5.23)), os dubletos $\Psi_{12,0}$ e $\Psi_{34,0}$ têm respectivamente quiralidades positiva e negativa. Os geradores $E_{(+)}^4$ e $E_{(-)}^4$ são responsáveis por transformações de fase independentes nesses dois dubletos. Lembramos que uma situação semelhante ocorre nos modelos eletrofracos usuais. Consideremos primeiramente o modelo de Glashow-Weinberg-Salam (GWS). Neste caso, os setores de quiralidade negativa e positiva admitem, como aqui, transformações de fase *globais* independentes, da forma $L \rightarrow e^{-i\theta} L$, $R \rightarrow e^{-i\theta'} R$. Estas transformações são inteiramente análogas às do nosso grupo $U(1) \times U(1)$, gerado por $E_{(+)}^4$ e $E_{(-)}^4$. No modelo de GWS, tal $U(1) \times U(1)$ não é estendido, como um todo, a simetrias locais. Ao invés disso, os parâmetros θ e θ' (semelhantes aos nossos $\hat{W}_{\mu,4}^{(+)}$ e $\hat{W}_{\mu,4}^{(-)}$) são combinados de forma a gerar as transformações

$$\begin{aligned} L &\rightarrow e^{-i(\alpha \frac{Y}{2} + \beta N)} L & (Y = -1, N = 1), \\ R &\rightarrow e^{-i(\alpha \frac{Y}{2} + \beta N)} R & (Y = -2, N = 1), \end{aligned}$$

onde Y e N são identificados, respectivamente, com os geradores de hipercarga e número leptônico. Desta forma, o $U(1) \times U(1)$ inicial é reescrito como $U(1)_Y \times U(1)_N$, e o grupo $U(1)_N$ não é estendido a uma simetria local por argumentos fenomenológicos (não há evidência do bóson correspondente). No modelo eletrofraco simétrico, algo semelhante ocorre. Novamente temos um grupo $U(1) \times U(1)$ global gerando transformações de fase independentes para os setores de quiralidade positiva e negativa. No entanto, apenas uma combinação de tal $U(1) \times U(1)$, identificada com $U(1)_{B-L}$, é estendida a uma simetria local (aqui B e L denotam, respectivamente, número bariônico e leptônico). Seguindo esse padrão também em nosso modelo, vamos estender apenas um subgrupo de $U(1) \times U(1)$ a uma

simetria local. No nosso caso, temos $\Psi_{12,p} \rightarrow e^{\frac{i}{2}\hat{W}_{\mu,4}^{(+)}} \Psi_{12,p}$, $\Psi_{34,p} \rightarrow e^{\frac{i}{2}\hat{W}_{\mu,4}^{(-)}} \Psi_{34,p}$, que reescrevemos como

$$\begin{aligned}\Psi_{12,p} &\rightarrow e^{-\frac{i}{2}(\alpha y + \beta X)} \Psi_{12,p} & (y = 1, X = 1), \\ \Psi_{34,p} &\rightarrow e^{-\frac{i}{2}(\alpha y + \beta X)} \Psi_{34,p} & (y = 1, X = -1),\end{aligned}$$

de maneira que y corresponde ao gerador $-iI \in U(4)$ e X corresponde ao gerador $e_{0123} \in U(4)$ (primeiro e último elementos de (5.14)). No que segue, vamos estender apenas $U(1)_y$ a uma simetria local. Nessa notação, vemos que a observação 5.1 nos diz que podemos atribuir valores diferentes de y para partículas diferentes.

5.4.1 Modelo simétrico

Levando em conta a discussão acima, vemos imediatamente que a lagrangiana da eq. (5.42) é reduzida a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_I^{(sym)} = \sum_{p=0,1} \{ & (\bar{\Psi}_{12,p} \gamma^\mu \frac{\tau}{2} \Psi_{12,p}) \cdot \hat{\mathbf{W}}_\mu^{(+)} + (\bar{\Psi}_{34,p} \gamma^\mu \frac{\tau}{2} \Psi_{34,p}) \cdot \hat{\mathbf{W}}_\mu^{(-)} + \\ & + \frac{y}{2} (\bar{\Psi}_{12,p} \gamma^\mu \Psi_{12,p} + \bar{\Psi}_{34,p} \gamma^\mu \Psi_{34,p}) \hat{W}_{\mu,4} \}.\end{aligned}\quad (5.44)$$

A lagrangiana acima, quando restrita ao setor $p = 0$, coincide com a lagrangiana de interação do modelo eletrofraco simétrico [Moh98], desde que façamos as seguintes identificações (levando em conta a tabela (5.23)):

$$\begin{aligned}\Psi_{12,0} \equiv \psi_R &= \begin{pmatrix} |\psi_{\nu_l R}\rangle \\ |\psi_{lR}\rangle \end{pmatrix}, & \Psi_{34,0} \equiv \psi_L &= \begin{pmatrix} |\psi_{\nu_l L}\rangle \\ |\psi_{lL}\rangle \end{pmatrix}, & y &= -1, \\ \hat{\mathbf{W}}_\mu^{(+)} &= g_R \hat{\mathbf{W}}_\mu^R, & \hat{\mathbf{W}}_\mu^{(-)} &= g_L \hat{\mathbf{W}}_\mu^L, & \hat{W}_{\mu,4} &= g' B_\mu,\end{aligned}$$

onde l pode denotar um elétron, múon ou tau, e ν_l denota o neutrino correspondente. No caso de quarks, a identificação correspondente é

$$\Psi_{12,0} \equiv q_R = \begin{pmatrix} |\mathbf{u}_R\rangle \\ |\mathbf{d}_R\rangle \end{pmatrix}, \quad \Psi_{34,0} \equiv q_L = \begin{pmatrix} |\mathbf{u}_L\rangle \\ |\mathbf{d}_L\rangle \end{pmatrix}, \quad y = \frac{1}{3},$$

onde $\mathbf{u}$ denota o quark u, c ou t e $\mathbf{d}$ denota o quark correspondente na mesma geração, isto é, d, s ou b . Desta forma,

- (i) o grupo $U(1) = \{e^{iy\alpha}\}$ corresponde ao grupo $U(1)_{B-L}$ do modelo eletrofraco simétrico (note a atribuição dos valores de y a cada partícula);
- (ii) o grupo $SU(2)_+ = \{\exp(\sum_{m=1}^3 W_m^{(+)} E_{(+)}^m)\}$ corresponde a $SU(2)_R$ do modelo eletrofraco simétrico;
- (iii) o grupo $SU(2)_- = \{\exp(\sum_{m=1}^3 W_m^{(-)} E_{(-)}^m)\}$ corresponde a $SU(2)_L$ do modelo eletrofraco simétrico.

Resta considerar o setor $p = 1$ da lagrangiana (5.44), isto é, o setor correspondente a $\check{\psi} \in \mathcal{C}\ell_{1,3}^-(\mathbb{C})$. Inicialmente, notamos da tabela (5.23) que a atribuição das quiralidades para $p = 1$ é exatamente *oposta* à do setor $p = 0$. Desta forma, o grupo $SU(2)_+ = \{\exp(\sum_{m=1}^3 W_m^{(+)} E_{(+)}^m)\}$, que é responsável pela interação entre os ideais $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})\check{P}_k$, $k = 1, 2$, e que identificamos acima com o $SU(2)_R$ do modelo eletrofraco simétrico, agirá agora no setor de quiralidade *negativa* (setor *left*) quando restrito a $\mathcal{C}\ell_{1,3}^-(\mathbb{C})$. Isso é exatamente o que se espera do acoplamento entre os campos de calibre e as *antipartículas* associadas aos léptons e quarks acima. Denotando a antipartícula associada a e por $\check{e}$ e assim por diante, é portanto natural fazer as identificações

$$\Psi_{12,1} \equiv \check{\psi}_L = \begin{pmatrix} |\psi_{\check{\nu}_L}\rangle \\ |\psi_{\check{l}_L}\rangle \end{pmatrix}, \quad \Psi_{34,1} \equiv \check{\psi}_R = \begin{pmatrix} |\psi_{\check{\nu}_R}\rangle \\ |\psi_{\check{l}_R}\rangle \end{pmatrix}, \quad y = 1,$$

para léptons, e

$$\Psi_{12,1} \equiv \check{q}_L = \begin{pmatrix} |\check{\mathbf{u}}_L\rangle \\ |\check{\mathbf{d}}_L\rangle \end{pmatrix}, \quad \Psi_{34,1} \equiv \check{q}_R = \begin{pmatrix} |\check{\mathbf{u}}_R\rangle \\ |\check{\mathbf{d}}_R\rangle \end{pmatrix}, \quad y = -\frac{1}{3},$$

para quarks. Notamos que o valor de y para as antipartículas é o negativo dos valores correspondentes para as partículas, consistentemente com a identificação desse $U(1)$ com $U(1)_{B-L}$.

Desta forma, recuperamos o modelo eletrofraco simétrico, onde partículas e antipartículas são automaticamente descritas por elementos de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$. Vemos que, neste contexto, partículas e antipartículas são auto-estados do operador de paridade $(\cdot)^\wedge$ de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$.

Em resumo, a discussão acima nos dá a seguinte atribuição de partículas (para o caso leptônico):

	$\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})\check{P}_1$	$\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})\check{P}_2$	$\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})\check{P}_3$	$\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})\check{P}_4$
$\mathcal{C}\ell_{1,3}^+(\mathbb{C})$	ν_{lR}	l_R	ν_{lL}	l_L
$\mathcal{C}\ell_{1,3}^-(\mathbb{C})$	$\check{l}_L$	$-\check{\nu}_{lL}$	$\check{l}_R$	$-\check{\nu}_{lR}$

(5.45)

Por fim, analisemos a contribuição vinda do termo restante $\mathcal{L}_I^{(1)}$ da decomposição de $\mathcal{L}_I$ dada pela eq. (5.32). É fácil ver que — no contexto das atribuições acima para as partículas — tal termo não é útil, ou seja, que as simetrias correspondentes não devem ser estendidas a simetrias locais. Por exemplo, vemos da eq. (5.43) que $E_{\mu,+}$ mediará ambas as transições $e_L \rightarrow \check{e}_L$ e $\check{\nu}_R \rightarrow \nu_R$. Da primeira transição, concluímos que o bóson correspondente teria carga $+2$, enquanto a segunda transição demandaria um bóson neutro. Portanto, a simetria global correspondente a $E_{\mu,\pm}$ não deve ser estendida a uma simetria local no contexto do modelo acima. Em outras palavras, o princípio de conservação da carga elétrica impõe uma redução do grupo de calibre de $U(4)$ para o subgrupo G dado pela eq. (5.35).

5.4.2 Modelo de Glashow-Weinberg-Salam

No modelo tradicional de GWS, o neutrino é representado por um espinor de Weyl, com quiralidade negativa. Assim, a componente com quiralidade positiva do neutrino é nula, enquanto a componente

com quiralidade positiva do elétron não interage com nenhuma outra partícula. Uma extensão mínima de tal modelo, bastante comum na literatura, admite a existência de uma componente com quiralidade positiva para o neutrino, desde que esta não interaja com nenhuma partícula e seja invariante pelo grupo de calibre. Esta versão é mais realista que a anterior, já que experimentos recentes sugerem fortemente que neutrinos são partículas massivas, não podendo portanto ser descritos por espinores de Weyl. A seguir, veremos que podemos obter tal cenário dentro de nosso modelo sob a hipótese de que a simetria correspondente a $SU(2)_+$ não é estendida a uma simetria local, de forma que os idempotentes P_1 e P_2 mantêm-se fixos, enquanto P_3 e P_4 continuam a variar de ponto a ponto. Nessas circunstâncias, é imediato ver que a lagrangiana de interação da eq. (5.44) é reduzida a

$$\mathcal{L}_I^{(GWS)} = \sum_{p=0,1} \{g(\bar{\Psi}_{34,p}\gamma^\mu \frac{\tau}{2}\Psi_{34,p}) \cdot \mathring{\mathbf{W}}_\mu + \frac{1}{2}(\bar{\Psi}_{12,p}\gamma^\mu y\Psi_{12,p} + \bar{\Psi}_{34,p}\gamma^\mu y\Psi_{34,p})g'B_\mu\}.$$

As identificações $\Psi_{12,0} \equiv \begin{pmatrix} |\psi_{\nu_L R}\rangle \\ |\psi_{lR}\rangle \end{pmatrix}$ e $\Psi_{34,0} \equiv \begin{pmatrix} |\psi_{\nu_L L}\rangle \\ |\psi_{lL}\rangle \end{pmatrix}$ (como na seção anterior) nos dão então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^{(GWS)} = & \frac{1}{2}(\langle \bar{\psi}_{\nu_L L}|\gamma^\mu|\psi_{lL}\rangle + \langle \bar{\psi}_{lL}|\gamma^\mu|\psi_{\nu_L L}\rangle)g\mathring{W}_{\mu,1} + \frac{i}{2}(-\langle \bar{\psi}_{\nu_L L}|\gamma^\mu|\psi_{lL}\rangle + \langle \bar{\psi}_{lL}|\gamma^\mu|\psi_{\nu_L L}\rangle)g\mathring{W}_{\mu,2} + \\ & + \frac{1}{2}(\langle \bar{\psi}_{\nu_L L}|\gamma^\mu|\psi_{\nu_L L}\rangle - \langle \bar{\psi}_{lL}|\gamma^\mu|\psi_{lL}\rangle)g\mathring{W}_{\mu,3} + \frac{y}{2}(\langle \bar{\psi}_{\nu_L L}|\gamma^\mu|\psi_{\nu_L L}\rangle + \langle \bar{\psi}_{lL}|\gamma^\mu|\psi_{lL}\rangle)g'B_\mu + \\ & + \frac{y}{2}(\langle \bar{\psi}_{\nu_L R}|\gamma^\mu|\psi_{\nu_L R}\rangle + \langle \bar{\psi}_{lR}|\gamma^\mu|\psi_{lR}\rangle)g'B_\mu + \text{antipartículas}, \end{aligned}$$

onde o último termo refere-se à contribuição do setor $\mathcal{C}\ell_{1,3}^-(\mathbb{C})$ (i.e., $p = 1$). De agora em diante, ignoraremos tal termo. Com isso:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^{(GWS)} = & \frac{g}{2}\langle \bar{\psi}_{lL}|\gamma^\mu|\psi_{\nu_L L}\rangle(\mathring{W}_{\mu,1} + i\mathring{W}_{\mu,2}) + \frac{g}{2}\langle \bar{\psi}_{\nu_L L}|\gamma^\mu|\psi_{lL}\rangle(\mathring{W}_{\mu,1} - i\mathring{W}_{\mu,2}) + \\ & + \frac{1}{2}\langle \bar{\psi}_{\nu_L L}|\gamma^\mu|\psi_{\nu_L L}\rangle(g\mathring{W}_{\mu,3} + y(\nu_L L)g'B_\mu) + \frac{1}{2}\langle \bar{\psi}_{lL}|\gamma^\mu|\psi_{lL}\rangle(-g\mathring{W}_{\mu,3} + y(lL)g'B_\mu) + \\ & + \frac{y(\nu_L R)}{2}\langle \bar{\psi}_{\nu_L R}|\gamma^\mu|\psi_{\nu_L R}\rangle g'B_\mu + \frac{y(lR)}{2}\langle \bar{\psi}_{lR}|\gamma^\mu|\psi_{lR}\rangle g'B_\mu. \end{aligned}$$

Definindo, como de costume, $W_{\mu,\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathring{W}_{\mu,1} \pm i\mathring{W}_{\mu,2})$ e tomando

	y
$\nu_L L$	-1
lL	-1
$\nu_L R$	0
lR	-2

que coincide com a atribuição da hipercarga às diferentes partículas no modelo de GWS, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_I^{(GWS)} = & \frac{g}{\sqrt{2}} \langle \bar{\psi}_{lL} | \gamma^\mu | \psi_{\nu lL} \rangle \dot{W}_{\mu,+} + \frac{g}{\sqrt{2}} \langle \bar{\psi}_{\nu lL} | \gamma^\mu | \psi_{lL} \rangle \dot{W}_{\mu,-} + \frac{1}{2} \langle \bar{\psi}_{\nu lL} | \gamma^\mu | \psi_{\nu lL} \rangle (g \dot{W}_{\mu,3} - g' B_\mu) - \\ & - \frac{1}{2} \langle \bar{\psi}_{lL} | \gamma^\mu | \psi_{lL} \rangle (g \dot{W}_{\mu,3} + g' B_\mu) - \langle \bar{\psi}_{lR} | \gamma^\mu | \psi_{lR} \rangle g' B_\mu,\end{aligned}\quad (5.46)$$

que é a lagrangiana de interação do modelo de GWS.

Desta forma, a mesma análise da formulação usual correspondente à obtenção dos bósons $W_\pm$, Z e A do modelo de GWS aplica-se aqui. Em particular, revisemos o papel do ângulo de Weinberg θ_w (ou *weak mixing angle*) na lagrangiana acima (faremos isso para referência das eqs. (5.47) na seção seguinte). Lembramos [Hua92] que θ_w define uma rotação no espaço gerado por $W_{\mu,3}$ e B_μ :

$$\begin{aligned}W_{\mu,3} &= \cos \theta_w Z_\mu + \sin \theta_w A_\mu, \\ B_\mu &= -\sin \theta_w Z_\mu + \cos \theta_w A_\mu,\end{aligned}$$

de maneira que (i) o neutrino não interaja com o campo eletromagnético A_μ (já que neutrinos são partículas neutras) e (ii) a constante de acoplamento eletromagnética para o elétron seja e . Os termos correspondentes a $W_{\mu,3}$, B_μ na eq. (5.46) ficam então

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2} \langle \bar{\psi}_{\nu lL} | \gamma^\mu | \psi_{\nu lL} \rangle (g W_{\mu,3} - g' B_\mu) - \frac{1}{2} \langle \bar{\psi}_{lL} | \gamma^\mu | \psi_{lL} \rangle (g W_{\mu,3} + g' B_\mu) = \\ &= \frac{1}{2} \langle \bar{\psi}_{\nu lL} | \gamma^\mu | \psi_{\nu lL} \rangle (g [\cos \theta_w Z_\mu + \sin \theta_w A_\mu] + g' [\sin \theta_w Z_\mu - \cos \theta_w A_\mu]) + \\ &+ \frac{1}{2} \langle \bar{\psi}_{lL} | \gamma^\mu | \psi_{lL} \rangle (-g [\cos \theta_w Z_\mu + \sin \theta_w A_\mu] + g' [\sin \theta_w Z_\mu - \cos \theta_w A_\mu]) = \\ &= \frac{1}{2} \langle \bar{\psi}_{\nu lL} | \gamma^\mu | \psi_{\nu lL} \rangle [g \cos \theta_w + g' \sin \theta_w] Z_\mu + (g \sin \theta_w - g' \cos \theta_w) A_\mu + \\ &+ \frac{1}{2} \langle \bar{\psi}_{lL} | \gamma^\mu | \psi_{lL} \rangle [(-g \cos \theta_w + g' \sin \theta_w) Z_\mu - (g \sin \theta_w + g' \cos \theta_w) A_\mu],\end{aligned}$$

de forma que é necessário exigir que

$$\begin{aligned}g \sin \theta_w - g' \cos \theta_w &= 0, \\ \frac{1}{2} (g \sin \theta_w + g' \cos \theta_w) &= e.\end{aligned}$$

Assim,

$$e = g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w.$$

Com isso, um cálculo direto mostra que os coeficientes de $\langle \bar{\psi}_{lL} | \gamma^\mu | \psi_{lL} \rangle$ e $\langle \bar{\psi}_{\nu lL} | \gamma^\mu | \psi_{\nu lL} \rangle$ em $\mathcal{L}_I$ (eq. (5.46)) são dados por (note que $g' = \tan \theta_w g$)

$$g W_{\mu,3} - g' B_\mu = g \frac{Z_\mu}{\cos \theta_w}, \quad (5.47a)$$

$$g W_{\mu,3} + g' B_\mu = g \left[(\cos^2 \theta_w - \sin^2 \theta_w) \frac{Z_\mu}{\cos \theta_w} + 2 \sin \theta_w A_\mu \right]. \quad (5.47b)$$

5.5 Termos massivos

O objetivo desta seção é analisar a contrapartida do mecanismo de Higgs no modelo considerado aqui. Veremos que, introduzindo um termo cinético associado à dinâmica do campo de idempotentes $P_k(x)$, o mecanismo de Higgs é essencialmente recuperado. Vamos nos restringir, por simplicidade, ao subcaso tratado na seção 5.4.2, que corresponde ao modelo de GWS.

A lagrangiana considerada até agora não incorpora nenhum termo relativo ao campo de idempotentes $x \mapsto P_k(x)$ utilizado para modelar as diferentes partículas. Como vimos na seção 5.2.3, essa arbitrariedade dos ideais pode ser parametrizada por um campo G -valorizado $x \mapsto R(x)$, de maneira que

$$P_k = R^{-1} \hat{P}_k R, \quad (5.48a)$$

$$\psi = \hat{\psi} R, \quad (5.48b)$$

$$W_\mu = R^{-1} \hat{W}_\mu R + (\partial_\mu R^{-1}) R. \quad (5.48c)$$

Desta forma, o campo $x \mapsto R(x)$ pode ser considerado um grau de liberdade legítimo do modelo e, como tal, ser representado por um certo termo $\mathcal{L}_P$ na lagrangiana. A escolha mais ingênua para tal $\mathcal{L}_P$ é dada pelo termo cinético $\kappa \langle (\partial_\mu R)^\dagger (\partial^\mu R) \rangle_0 = \frac{\kappa}{4} \text{tr} [(\partial_\mu R)^\dagger (\partial^\mu R)]$, onde κ é uma constante³. No entanto, isto apresenta duas dificuldades imediatas:

- (i) é necessário impor um vínculo à lagrangiana que restrinja os valores assumidos pelo campo $R(x)$ ao grupo G (em outras palavras, é necessário implementar, via lagrangiana, o vínculo $RR^\dagger = 1$);
- (ii) tal termo não é invariante de calibre.

Para contornar o primeiro problema, notamos que R pode ser escrito como $e^{(ae_{12}+be_{23}+ce_{31})}$ (onde desprezamos o fator em $U(1)$ que preserva os idempotentes e, portanto, é irrelevante na descrição do campo $x \mapsto P_k(x)$). Multiplicando tal expressão por uma constante real $\rho \in \mathbb{R}_+$, temos que $\phi = \rho R = \rho e^{(ae_{12}+be_{23}+ce_{31})}$ assume valores em $\mathbb{R}_+ \times SU(2) \cong \mathbb{R}_+ \times S^3 \cong \mathbb{R}^4$. Isso nos permite tratar o vínculo acima considerando inicialmente o elemento ϕ no espaço vetorial $V = \text{span}_{\mathbb{R}}\{1, e_{12}, e_{23}, e_{31}\} \cong \mathbb{R}^4$ e, depois, impondo que $\phi\phi^\dagger = \rho^2$ seja igual a 1 (observamos que, nesta notação, $R = \frac{1}{\rho}\phi = \frac{1}{\sqrt{\phi^\dagger\phi}}\phi$). Voltaremos a este ponto logo a seguir.

Para contornar o problema (ii) acima, notamos que, sob uma transformação de calibre (5.48), R deve transformar-se como

$$R \rightarrow R' = RS, \quad (5.49)$$

e assim

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi S. \quad (5.50)$$

Desta forma, para transformações globais (S constante), temos $\langle (\partial_\mu \phi')^\dagger (\partial^\mu \phi') \rangle_0 \rightarrow \langle (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) \rangle_0$, pois $SS^\dagger = 1$. Para transformações de calibre locais, com $S = S(x)$, aparecerão termos do tipo $\partial_\mu S$

³Notamos que esta igualdade vale a menos da identificação entre matrizes e elementos de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$, como vimos na proposição 2.7.

que destróem tal invariância. Como a transformação de ϕ (eq. (5.50)) é idêntica à transformação de ψ_k (eq. (5.18b)), a forma covariante correspondente é claramente dada por

$$\mathcal{L}_P = \kappa \langle (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) \rangle_0. \quad (5.51)$$

Mais geralmente, como $D_\mu \phi$ se transforma (sob transformações internas) pela direita, i.e.,

$$D_\mu \phi \rightarrow D'_\mu \phi' = (D_\mu \phi) S,$$

vemos que o termo cinético mais geral envolvendo os idempotentes P_3 e P_4 é da forma⁴

$$\mathcal{L}_P = \sum_{k=3}^4 \kappa_k \langle (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) P_k \rangle_0. \quad (5.52)$$

A seguir, desenvolvemos tal expressão.

Aplicando uma transformação de calibre (5.18) a $\mathcal{L}_P$, com $S(x) = R(x)^{-1}$, temos

$$\begin{aligned} \langle (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) P_k \rangle_0 &= \langle (D_\mu \phi R^{-1})^\dagger (D^\mu \phi R^{-1}) R P_k R^{-1} \rangle_0 = \\ &= \langle (D_\mu \rho)^\dagger (D^\mu \rho) \dot{P}_k \rangle_0. \end{aligned}$$

Substituindo $D_\mu \rho = \partial_\mu \rho + \rho \dot{W}_\mu$:

$$\begin{aligned} \langle (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) P_k \rangle_0 &= \left\langle \left(\partial_\mu \rho - \rho \dot{W}_\mu \right) \left(\partial^\mu \rho + \rho \dot{W}^\mu \right) \dot{P}_k \right\rangle_0 = \\ &= \left\langle \left((\partial_\mu \rho)(\partial^\mu \rho) - \rho^2 \dot{W}_\mu \dot{W}^\mu \right) \dot{P}_k \right\rangle_0 = \\ &= \frac{1}{4} \langle (\partial_\mu \rho)(\partial^\mu \rho) - \rho^2 \dot{W}_\mu \dot{W}^\mu \dot{P}_k \rangle_0. \end{aligned}$$

Escrevendo $\dot{W}_\mu = \dot{W}_{\mu,m} E^m$, com E^m 's dados por (5.37), temos então⁵

$$\begin{aligned} \langle \dot{W}_\mu \dot{W}^\mu \dot{P}_3 \rangle_0 &= -\frac{1}{16} \left[g^2 \dot{W}_{\mu,1} \dot{W}_1^\mu + g^2 \dot{W}_{\mu,2} \dot{W}_2^\mu + (g \dot{W}_{\mu,3} + g' B_\mu) (g \dot{W}_3^\mu + g' B^\mu) \right], \\ \langle \dot{W}_\mu \dot{W}^\mu \dot{P}_4 \rangle_0 &= -\frac{1}{16} \left[g^2 \dot{W}_{\mu,1} \dot{W}_1^\mu + g^2 \dot{W}_{\mu,2} \dot{W}_2^\mu + (g \dot{W}_{\mu,3} - g' B_\mu) (g \dot{W}_3^\mu - g' B^\mu) \right]. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_P &= \frac{\kappa_4}{4} \left[(\partial_\mu \rho)(\partial^\mu \rho) + \frac{\rho^2}{4} \left(g^2 \dot{W}_{\mu,1} \dot{W}_1^\mu + g^2 \dot{W}_{\mu,2} \dot{W}_2^\mu + (g \dot{W}_{\mu,3} - g' B_\mu) (g \dot{W}_3^\mu - g' B^\mu) \right) \right] + \\ &+ \frac{\kappa_3}{4} \left[(\partial_\mu \rho)(\partial^\mu \rho) + \frac{\rho^2}{4} \left(g^2 \dot{W}_{\mu,1} \dot{W}_1^\mu + g^2 \dot{W}_{\mu,2} \dot{W}_2^\mu + (g \dot{W}_{\mu,3} + g' B_\mu) (g \dot{W}_3^\mu + g' B^\mu) \right) \right]. \end{aligned}$$

⁴Lembramos que no caso particular tratado nesta seção, os idempotentes P_1 e P_2 são considerados fixos, enquanto P_3 e P_4 variam de ponto a ponto (vide discussão inicial da seção 5.4.2).

⁵A escolha $y = +1$ para ϕ é motivada pelo termo de massa para o elétron, a ser considerado adiante.

Segue de (5.47) que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_P = & \frac{\kappa_4}{4} \left[(\partial_\mu \rho)(\partial^\mu \rho) + \frac{1}{4} g^2 \rho^2 \left(\dot{W}_{\mu,1} \dot{W}_1^\mu + \dot{W}_{\mu,2} \dot{W}_2^\mu + \frac{Z_\mu Z^\mu}{\cos^2 \theta_w} \right) \right] + \\ & + \frac{\kappa_3}{4} \left[(\partial_\mu \rho)(\partial^\mu \rho) + \frac{1}{4} g^2 \rho^2 \left(\dot{W}_{\mu,1} \dot{W}_1^\mu + \dot{W}_{\mu,2} \dot{W}_2^\mu + ((\cos^2 \theta_w - \sin^2 \theta_w) \frac{Z_\mu}{\cos \theta_w} + 2 \sin \theta_w A_\mu)^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

A primeira linha da expressão acima é exatamente o termo de massa para os bósons vindo do mecanismo de Higgs no modelo de GWS [Hua92]. A segunda linha nos dá um termo espúrio, pois levaria a fótons de massa possivelmente não-nula. Assim, nosso modelo pode ser fenomenologicamente ajustado tomando $\kappa_3 = 0$ e $\frac{\kappa_4}{4} = \rho_0^2$, onde $\rho_0 \simeq 174 \text{ GeV}$ [Hua92, pag. 110]. Com isso, temos o seguinte termo cinético para ϕ :

$$\mathcal{L}_P = \rho_0^2 \left[(\partial_\mu \rho)(\partial^\mu \rho) + \frac{1}{4} g^2 \rho^2 \left(\dot{W}_{\mu,1} \dot{W}_1^\mu + \dot{W}_{\mu,2} \dot{W}_2^\mu + \frac{Z_\mu Z^\mu}{\cos^2 \theta_w} \right) \right].$$

Em retrospecto, podemos então afirmar que o campo $\phi = \rho R$ faz, num certo sentido, o papel do campo de Higgs na geração de massa para os campos de calibre.

Notamos agora que se impuséssemos o vínculo $\rho \equiv 1$ diretamente na lagrangiana (através de, por exemplo, um multiplicador de Lagrange), teríamos

$$\mathcal{L}_P = \frac{1}{4} g^2 \rho_0^2 \left(\dot{W}_{\mu,1} \dot{W}_1^\mu + \dot{W}_{\mu,2} \dot{W}_2^\mu + \frac{Z_\mu Z^\mu}{\cos^2 \theta_w} \right),$$

o que daria a atribuição correta para as massas dos bósons $W_\pm$ e Z . No entanto, termos de massa diretos como este levam a teorias não-renormalizáveis. Isto pode ser contornado exigindo-se que o vínculo $\phi^\dagger \phi = 1$ seja válido apenas aproximadamente. Para isso, podemos introduzir um potencial $V = V(\phi^\dagger \phi)$ com um mínimo estável para $\phi^\dagger \phi = 1$. A escolha mais simples⁶ é dada por

$$V(\phi^\dagger \phi) = \lambda (\phi^\dagger \phi - 1)^2, \quad (5.53)$$

que é evidentemente invariante de calibre. Com isso, no calibre unitário, o termo correspondente na lagrangiana toma a forma

$$\mathcal{L}_{mb} = \rho_0^2 \left[(\partial_\mu \rho)(\partial^\mu \rho) + \frac{1}{4} g^2 \rho^2 \left(\dot{W}_{\mu,1} \dot{W}_1^\mu + \dot{W}_{\mu,2} \dot{W}_2^\mu + \frac{Z_\mu Z^\mu}{\cos^2 \theta_w} \right) \right] - \lambda (\rho^2 - 1)^2. \quad (5.54)$$

Voltaremos a tal expressão logo a seguir. Antes disso, analisemos a questão da massa dos férmions. Na lagrangiana de Dirac, atribui-se massa ao elétron através do termo $\mathcal{L}_{me} = -m \langle \bar{\psi}_e | \psi_e \rangle = -m (\langle \bar{\psi}_{eL} | \psi_{eR} \rangle + \langle \bar{\psi}_{eR} | \psi_{eL} \rangle)$. Como $|\psi_{eL}\rangle$ e $|\psi_{eR}\rangle$ transformam-se diferentemente sob a ação de $SU(2)_L$, tal termo não é invariante sob a ação deste grupo. A maneira usual de contornar tal dificuldade é a introdução do campo de Higgs φ transformando-se como um dublete sob $SU(2)_L$, de

⁶Tal simplicidade é de fato compulsória, pois pode-se mostrar que (5.53) é a forma mais geral de V (a menos de uma constante aditiva) compatível com uma teoria renormalizável [Moh98].

maneira que a expressão $\bar{\psi}_L \varphi \psi_{eR} + hc$ é invariante. Por outro lado, analisemos o termo $\mathcal{L}_{me} = -m \langle \bar{\psi}_e | \psi_e \rangle = -m (\langle \bar{\psi}_{eL} | \psi_{eR} \rangle + \langle \bar{\psi}_{eR} | \psi_{eL} \rangle)$ no contexto das seções anteriores. Notamos inicialmente que, para que o termo $\langle \bar{\psi}_{eL} | \psi_{eR} \rangle$ faça sentido, é necessário que ambos os espinores sejam escritos em termos de uma *mesma estrutura* de ideais $\{\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P_k\}$. No contexto da seção 5.4.2, os ideais P_1 e P_2 são fixos, e dados por $P_1 = \dot{P}_1$, $P_2 = \dot{P}_2$, de forma que ψ_{eR} é sempre definido no ideal $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})\dot{P}_2$. Assim, a única maneira consistente de se definir o produto escalar entre ψ_{eL} e ψ_{eR} é inicialmente obter a expressão de $\psi_{eL} \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})P_4$ no ideal $\dot{P}_4$ (isto é, $\dot{\psi}_L = \psi_L R^\dagger$ (eq. (5.21b)) e, só então, fazer o produto. Como $\dot{\psi}_{eR} \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})\dot{P}_2$ e $\dot{\psi}_{eL} \in \mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})\dot{P}_4$, temos que inicialmente transportar $\dot{\psi}_{eR}$ para o ideal de $\dot{P}_4$. Como $\dot{P}_2 e_0 = e_0 \dot{P}_4$, vemos que tal produto é dado por $4 \langle (\psi_{eL} R^\dagger)^\dagger e^0 \dot{\psi}_{eR} e^0 \rangle_0 = 4 \langle R \psi_{eL}^\dagger e^0 \dot{\psi}_{eR} e^0 \rangle_0 \rightarrow 4 \langle \phi \psi_{eL}^\dagger e^0 \dot{\psi}_{eR} e^0 \rangle_0$ onde no último passo promovemos R ao campo não restrito a vínculos ϕ (indistinguível de R para pequenas excitações). Voltando à notação de *bras* e *kets*, temos então, no calibre unitário (onde $\phi = \rho$):

$$\mathcal{L}_{me} = -m\rho \left(\langle \bar{\psi}_{eL} | \dot{\psi}_{eR} \rangle + \langle \bar{\psi}_{eR} | \dot{\psi}_L \rangle \right) = -m\rho \langle \bar{\psi}_e | \dot{\psi}_e \rangle. \quad (5.55)$$

Como $\mathcal{L}_{me} = 4 \langle \phi \psi_{eL}^\dagger e^0 \dot{\psi}_{eR} e^0 \rangle_0 + hc$ é invariante de calibre e coincide com o termo de Yukawa no calibre unitário, vemos que $\mathcal{L}_{me}$ é igual ao termo de Yukawa usual que dá massa ao elétron.

Fazendo $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_{mb} + \mathcal{L}_{me}$ (eqs. (5.54) e (5.55)), temos portanto o seguinte termo de massa para a lagrangiana (no calibre unitário):

$$\mathcal{L}_m = \rho_0^2 \left[(\partial_\mu \rho)(\partial^\mu \rho) + \frac{1}{4} g^2 \rho^2 \left(\dot{W}_{\mu,1} \dot{W}_1^\mu + \dot{W}_{\mu,2} \dot{W}_2^\mu + \frac{Z_\mu Z^\mu}{\cos^2 \theta_w} \right) \right] - \lambda (\rho^2 - 1)^2 - m\rho \langle \bar{\psi}_e | \dot{\psi}_e \rangle.$$

Para fazer contato com a notação usual, podemos redefinir ρ de maneira a incorporar a constante ρ_0 , na forma $\rho \rightarrow \rho_0 \rho$ (notamos que temos então $\langle \phi^\dagger \phi \rangle = \langle \rho^2 \rangle = \rho_0^2$). Redefinindo também λ por $\lambda \rightarrow \frac{\lambda}{\rho_0^4}$, temos finalmente

$$\mathcal{L}_m = (\partial_\mu \rho)(\partial^\mu \rho) + \frac{1}{4} g^2 \rho^2 \left(\dot{W}_{\mu,1} \dot{W}_1^\mu + \dot{W}_{\mu,2} \dot{W}_2^\mu + \frac{Z_\mu Z^\mu}{\cos^2 \theta_w} \right) - \lambda (\rho^2 - \rho_0^2)^2 - m \frac{\rho}{\rho_0} \langle \bar{\psi}_e | \dot{\psi}_e \rangle,$$

que é o termo de massa usual no modelo de GWS.

Desta forma, tal formalismo nos permite uma interpretação alternativa para o mecanismo de Higgs. Vemos que, neste contexto, o campo de Higgs corresponde essencialmente a uma parametrização do campo de idempotentes primitivos que define o sistema de ideais associado às diferentes partículas.

5.6 Transcrição em redes

Vimos na seção 5.1 que a EDK em espaço-tempo chato apresenta uma degenerescência característica, resultando em quatro equações de Dirac desacopladas habitando diferentes ideais da álgebra. É um fato bem conhecido que tal degenerescência é intimamente relacionada ao chamado problema da

duplicação de espécies (*species doubling problem*) de certas tentativas de discretização da equação de Dirac [Bec82, Joo86, Rab82, Lin90, Lin91]. De fato, como campos de Dirac-Kähler são formas diferenciais, a EDK possui uma transcrição natural em redes, induzida pela dualidade de de Rham entre formas diferenciais e co-cadeias. Com isso, o desacoplamento da EDK em equações de Dirac pode ser utilizado para se obter uma aproximação discreta para a equação de Dirac [Bec82, Joo86, Rab82, Lin90, Lin91]. Em tal abordagem, não há duplicação de espécies introduzida pelo processo de transcrição em si, mas continua havendo a degenerescência originada do fato de que a EDK contém quatro cópias da equação de Dirac.

Por outro lado, o modelo apresentado neste capítulo pode ser formalmente considerado uma extensão da EDK onde os ideais acoplam-se de maneira essencial. Desta forma, o mesmo procedimento utilizado na transcrição da EDK em redes (via dualidade de de Rham) pode ser considerado aqui. Isto abre a possibilidade de estendermos as tentativas de discretização da equação de Dirac, mencionadas acima, ao domínio das interações eletrofracas. É importante observar que a degenerescência da EDK usual — intimamente relacionada ao problema da duplicação — passa a ter então uma nova interpretação. Neste novo contexto, os graus de liberdade extras representam diferentes léptons (ou quarks) de uma dada geração de partículas. Tal abordagem pode, portanto, ter algo a dizer no problema (ainda em aberto) da formulação das interações eletrofracas em redes.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho, revisitamos e estendemos a utilização de espinores operatoriais e algébricos na formulação de teorias físicas. Inicialmente, identificamos e caracterizamos as $\mathbb{Z}_2$ -graduações $\mathcal{C}\ell_0 \oplus \mathcal{C}\ell_1$ de uma dada álgebra de Clifford que são, em um certo sentido, compatíveis com a estrutura multivetorial da álgebra de Grassmann subjacente. As subálgebras pares $\mathcal{C}\ell_0$ associadas a tais $\mathbb{Z}_2$ -graduações foram então utilizadas na definição de espinores operatoriais, dando origem a novas versões multivetoriais da equação de Dirac [Mos02]. Mostramos ainda que tal abordagem leva a um procedimento natural para a obtenção de representações quaterniônicas da teoria de Dirac. Por outro lado, estudamos em detalhe a estrutura algébrica associada a tal classe de $\mathbb{Z}_2$ -graduações, obtendo desta forma uma classificação completa das subálgebras pares correspondentes [Mos03a]. Como aplicação, discutimos o emprego de tal formalismo no contexto de mudanças de assinatura em uma álgebra de Clifford arbitrária. Ainda, como aplicação suplementar, utilizamos o formalismo desenvolvido aqui¹ no problema da reconstrução tomográfica de um espinor de Dirac [Mos03b] (apêndice C). Dentro do mesmo tópico de versões multivetoriais da equação de Dirac, analisamos em detalhe a questão da covariância da equação de Dirac-Hestenes em espaços possivelmente curvos. Caracterizamos precisamente os objetos que aparecem em tal equação como *representações* de um campo espinorial — explicitamente dependentes de uma escolha de referencial espinorial no espaço-tempo M — e discutimos como tal procedimento limita a topologia de M [Mos04a].

Na última parte desta dissertação, revisitamos a equação de Dirac-Kähler em espaço-tempo chato. Demos especial atenção a sua bem conhecida degenerescência, que resulta em quatro equações de Dirac desacopladas habitando diferentes ideais da álgebra. Mostramos inicialmente que a arbitrariedade na escolha de tal sistema de ideais define uma simetria global agindo sobre campos de Dirac-Kähler. Considerando sistemas de ideais variando continuamente, estendemos tal simetria a uma simetria local. Vimos que os campos de calibre resultantes então acoplam os diferentes ideais

¹Especialmente no contexto do estudo da relação entre representações das matrizes γ^μ e idempotentes de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$.

da álgebra, de maneira que as respectivas interações preservam cada setor de quiralidade definida. Vimos ainda que, em tal formalismo, as antipartículas são automaticamente representadas na lagrangiana, com as quiralidades corretas. Ao restringirmos as interações àquelas que conservam a carga elétrica, o modelo resultante é equivalente ao modelo eletrofraco simétrico, desde que identifiquemos os léptons (ou quarks) de uma dada geração com os diferentes ideais. Quando a simetria é quebrada, de maneira que os ideais correspondentes ao neutrino (antineutrino) de quiralidade positiva (negativa) permaneçam fixos, mostramos que o modelo de Glashow-Weinberg-Salam é recuperado. Neste contexto, mostramos ainda que o mecanismo de Higgs admite uma interpretação alternativa, onde o campo de Higgs corresponde essencialmente a uma parametrização dos ideais associados às diferentes partículas [Mos04b].

Em nossa opinião, a principal contribuição de tal construção não é a de fornecer uma fundamentação alternativa para as interações eletrofracas, mas sim a de revelar conexões entre sistemas físicos que são, em princípio, de naturezas diferentes. De fato, como mencionamos na seção 5.6, uma das principais utilizações da EDK na literatura ocorre no contexto de tentativas de discretização de férmions em redes. Uma vez que o modelo apresentado aqui pode ser formalmente considerado como um espécie de EDK com interações extras, somos naturalmente levados a considerar a possibilidade de estender tais tentativas de discretização para o caso das interações eletrofracas. Neste contexto, a degenerescência (antes indesejada) da EDK é reinterpretada, de maneira que os graus de liberdade adicionais agora representam diferentes léptons (ou quarks) de uma dada geração de partículas. Esperamos que tal abordagem possa ser útil no problema (ainda em aberto) da formulação das interações eletrofracas em redes.



Figura 6.1: Possível aplicação do formalismo desenvolvido no capítulo 5.

Finalmente, gostaríamos de observar que o princípio fundamental do modelo apresentado no capítulo 5 é a extensão, a uma simetria local, da liberdade de escolha do ideal a representar o espaço dos espinores. No caso particular considerado aqui — onde o espaço-tempo é dado por $\mathbb{R}^{1,3}$ — vimos que tal princípio resulta em um modelo fenomenologicamente consistente, que recupera descrições usuais das interações eletrofracas. Um caminho que se abre é a aplicação de tal princípio a espaços de diferentes dimensões e assinaturas, como por exemplo $\mathbb{R}^{1,9}$.

Bibliografia

- [Adl95] Adler S. L., *Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields*, Oxford University Press, New York, 1995.
- [Ati64] Atiyah M. F., Bott R. e Shapiro A., “Clifford Modules”, *Topology* **3** (suppl. 1), 3-38 (1964).
- [Bec82] Becher P. e Joos H., “The Dirac-Kähler Equation and Fermions on the Lattice”, *Z. Phys. C* **15**, 343-365 (1982).
- [Ben87] Benn I. M. e Tucker R. W., *An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics*, Adam Hilger, Bristol, 1987.
- [Bjo64] Bjorken D. e Drell S., *Relativistic Quantum Mechanics*, Mc-Graw Hill, New York, 1964.
- [Bor03a] Borstnik N. M. e Nielsen H. B., “Weyl Spinor of $SO(1,13)$, Families of Spinors of the Standard Model and Their Masses”, hep-ph/0301029, 27-51 (2003).
- [Bor03b] Borstnik N. M. e Nielsen H. B., “How to generate families of spinors”, *J. Math. Phys.* **44**, 4817-4827 (2003), hep-th/0303224.
- [Che54] Chevalley C., *The Algebraic Theory of Spinors*, Columbia University Press, New York, 1954.
- [Chi87] Chisholm J. S. R. e Farwell R. S., “Electroweak spin gauge theories and the frame field”, *J. Phys. A* **20**, 6561-6580 (1987).
- [Chi96] Chisholm J. S. R. e Farwell R. S., “Properties of Clifford Algebras for Fundamental Particles”, In “Clifford (geometric) algebras with applications in Physics, Mathematics, and Engineering”, capítulo 27, Baylis W. E. (ed.), Birkhauser, Boston, 1996.
- [Chi99] Chisholm J. S. R. e Farwell R. S., “Gauge transformations of spinors within a Clifford algebraic structure”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, 2085-2823 (1999).
- [Cho82] Choquet-Bruhat Y., DeWitt-Morette C. e Dillard-Bleick M., *Analysis, Manifolds and Physics*, revised edition, North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1982.

- [Coq82] Coquereaux R., “Modulo 8 periodicity of real Clifford algebras and particle physics”, *Phys. Lett.* **115B**, 389-395 (1982).
- [Cru91] Crumeyrolle, A., *Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [Dim89] Dimakis A., “A new representation of Clifford algebras”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, 3171-3193 (1989).
- [Emc63] Emch G. G., “Mécanique Quantique Quaternionienne et Relativité Restreinte I.”, *Helv. Phys. Acta* **36**, 739-769 (1963); “II.”, *Helv. Phys. Acta* **36**, 770-788 (1963).
- [Fau98] Fauser B., “On an easy transition from operator dynamics to generating functionals by Clifford algebras”, *J. Math. Phys.* **39**, 4928-4947 (1998), hep-th/9710186.
- [Fau99] Fauser B., “Hecke algebra representations within Clifford geometric algebras of multivectors”, *J. Phys. A* **32**, 1919-1936 (1999), math.QA/9710020.
- [Fau01] Fauser B., “On the equivalence of Daviau’s space Clifford algebraic, Hestenes’ and Parra’s formulations of (real) Dirac theory”, *Int. J. Theor. Phys.* **40**, 441-453 (2001), hep-th/9908200.
- [Fau00] Fauser B. e Ablamowicz R., “On the decomposition of Clifford algebras of arbitrary bilinear form”, in “Clifford algebras and their applications in Mathematical Physics - volume 1: Algebra and Physics”, 341-366, Ablamowicz R. e Fauser B. (eds.), Birkhauser, Boston, 2000, math.QA/9911180.
- [Fig90] Figueiredo V. L., Rodrigues W. A. e Oliveira E. C., “Covariant, Algebraic and Operator Spinors”, *Int. J. Theor. Phys.* **29**, 371-395 (1990).
- [Fin62] Finkelstein D., Jauch J. M., Schiminovich S. e Speiser D., “Foundations of Quaternion Quantum Mechanics”, *J. Math. Phys.* **3**, 207-220 (1962).
- [Fro98] Fröhlich J., Grandjean O. e Recknagel A., “Supersymmetric Quantum Theory and Differential Geometry”, *Commun. Math. Phys.* **193**, 527-594 (1998), hep-th/9612205.
- [Ger68] Geroch, R., “Spinor Structure of Space-Times in General Relativity I”, *J. Math. Phys.* **9**, 1739-1744 (1968).
- [Gra78] Graf W., “Differential Forms as Spinors”, *Ann. Inst. Henri Poincaré XXIX*, 85-109 (1978).
- [Gul96] Gull S., Doran C. e Lasenby A., “Electron physics I and II”, In “Clifford (geometric) algebras with applications in Physics, Mathematics, and Engineering”, capítulos 9 e 10, Baylis W. E. (ed.), Birkhauser, Boston, 1996.

- [Har90] Harvey F. R., *Spinors and Calibrations*, Academic Press, San Diego, 1990.
- [Hes67] Hestenes D., “Real Spinor Fields”, *J. Math. Phys.* **8**, 798-808 (1967).
- [Hes75] Hestenes D., “Observables, Operators, and Complex Numbers in Dirac Theory”, *J. Math. Phys.* **16**, 556-571 (1975).
- [Hes82] Hestenes D., “Space-Time Structure of Weak and Electromagnetic Interactions”, *Found. Phys.* **12**, 153-168 (1982).
- [Hes95] Hestenes D., “Real Dirac Theory”, *Adv. Appl. Clifford Algebras* **7**, 97-144 (1997).
- [Hua92] Huang, G., *Quarks, Leptons & Gauge Fields*, World Scientific, Singapore, 1992.
- [Itz80] Itzykson C. e Zuber J., *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, Singapore, 1980.
- [Joo86] Joos H., “On Geometry and Physics of Staggered Lattice Fermions”, In “Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics”, 399-423, Chisholm J. S. R. e Common A. K. (eds.), Kluwer, Dordrecht, 1986.
- [Joy02] Joyce W. P., “Gauge freedom of Dirac theory in complexified spacetime algebra”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 4737-4747 (2002).
- [Kae62] Kähler E., “Der Innere Differentialkalkül”, *Rend. Mat.* **21**, 425-523 (1962).
- [Law89] Lawson B. H., Jr. e Michelsohn M. L., *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1989.
- [Leo01] de Leo S., “Quaternionic Lorentz Group and Dirac Equation”, *Found. Phys. Lett.* **14**, 37-50 (2001), hep-th/0103129.
- [Lin90] Linhares C. A. e Mignaco J. A., “New symmetries for the Dirac equation”, *Notas de Física do CBPF*, CBPF-NF-003/90 (1990).
- [Lin91] Linhares C. A. e Mignaco J. A., “SU(4) properties of the Dirac-Kähler equation”, *Notas de Física do CBPF*, CBPF-NF-008/91 (1991).
- [Lou97] Lounesto P., *Clifford Algebras and Spinors*, London Math. Soc. Lec. Note Series 239, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [Mir01] Miralles D., Parra J. M. e Vaz J., “Signature change and Clifford algebras”, *Int. J. Theor. Phys.* **40**, 227-239 (2001), math-ph/0003041.
- [Mos02] Mosna R. A., Miralles D. e Vaz J., “Multivector Dirac equations and $\mathbb{Z}_2$ -gradings of Clifford algebras”, *Int. J. Theor. Phys.* **41**, 1651-1671 (2002).

- [Mos03a] Mosna R. A., Miralles D. e Vaz J., “ $\mathbb{Z}_2$ -gradings of Clifford algebras and multivector structures”, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 4395–4405 (2003), math-ph/0212020.
- [Mos03b] Mosna R. A. e Vaz J., “Quantum tomography for Dirac spinors”, Phys. Lett. A **315**, 418–425 (2003), quant-ph/0303072.
- [Mos04a] Mosna R. A. e Rodrigues W. A., “The Bundles of Algebraic and Dirac-Hestenes Spinor Fields”, em publicação em J. Math. Phys., vol. 45, n° 7 (2004), math-ph/0212033.
- [Mos04b] Mosna R. A. e Vaz J., “Dirac-Kähler equation and electroweak interactions”, em preparação.
- [Moh98] Mohapatra R. N. e Pal P. B., *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics*, World Scientific, Singapore, 1998.
- [Nak96] Nakahara M., *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing, Bristol, 1996.
- [Ozi97] Oziewicz Z., “Clifford algebra of multivectors: The minimum polynomials of the tensor product of the Dirac matrices and the opposite Clifford algebra”, in “Proc. Int. Conf. on the Theory of the Electron” (Cuautitlan, Mexico, 1995), Keller J. e Oziewicz Z. (eds.), Adv. in Appl. Clifford Alg. **7** (Suppl.), 467–486 (1997).
- [Rab82] Rabin J. M., “Homology Theory of Lattice Fermion Doubling”, Nucl. Phys. **B201**, 315–332 (1982).
- [Rot89] Rotelli P., “The Dirac Equation on the Quaternion Field”, Mod. Phys. Lett. **A4**, 933–934 (1989).
- [Tha92] Thaller B., *The Dirac Equation*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [Tra01] Trayling G. e Baylis W. E., “A geometric basis for the standard model gauge group”, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 3309–3324 (2001).

Apêndice A

Álgebra

Neste apêndice, revisamos brevemente alguns resultados algébricos utilizados no texto principal. Maiores detalhes podem ser encontrados, por exemplo, no apêndice A de [Ben87] e em [Lou97].

A.1 Generalidades

Uma álgebra $\mathcal{A}$ é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ munido de um produto $(a, b) \mapsto ab$ satisfazendo

$$\begin{aligned}\lambda(ab) &= (\lambda a)b = a(\lambda b), \\ a(b+c) &= ab+ac, \\ (a+b)c &= ac+bc,\end{aligned}$$

$\forall a, b, c \in \mathcal{A}, \forall \lambda \in \mathbb{K}$. Desta forma, uma álgebra é um conjunto com estrutura de espaço vetorial e de anel tal que as respectivas operações são compatíveis. Dizemos que a álgebra $\mathcal{A}$ é associativa quando seu produto for associativo, e que $\mathcal{A}$ tem unidade se existe $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ tal que $1_{\mathcal{A}}a = a1_{\mathcal{A}} = a, \forall a \in \mathcal{A}$. Se para todo $a \neq 0$ existir $b \in \mathcal{A}$ tal que $ab = ba = 1_{\mathcal{A}}$, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de divisão. Neste caso, tal b é único e é denotado por a^{-1} . Daqui por diante, todas as álgebras consideradas serão associativas.

O centro $\mathcal{Cen}(\mathcal{A})$ de uma álgebra $\mathcal{A}$ é formado pelos elementos de $\mathcal{A}$ que comutam com a toda a álgebra, isto é, $a \in \mathcal{Cen}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow ab = ba \forall b \in \mathcal{A}$. Notamos que $\lambda 1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{Cen}(\mathcal{A}), \forall \lambda \in \mathbb{K}$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra central se $\mathcal{Cen}(\mathcal{A}) = \text{span}\{1_{\mathcal{A}}\} = \{\lambda 1_{\mathcal{A}}; \lambda \in \mathbb{K}\}$, isto é, se o centro de $\mathcal{A}$ for o “menor possível”.

É fácil verificar (trabalhando em uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^{p,q}$), que o centro de $\mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{R})$ (seções 2.1 e 2.2) é dado por

$$\mathcal{Cen}(\mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ \mathbb{R} \oplus \Lambda^n(\mathbb{R}^{p,q}), & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

onde $n = p + q$ e $\mathbb{R} = \Lambda^0(\mathbb{R}^{p,q}) \subseteq \mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{R})$.

Um ideal à esquerda $\mathcal{I}$ de uma álgebra $\mathcal{A}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$. Definem-se analogamente ideais à direita e bilaterais de $\mathcal{A}$. Um elemento não nulo $a \in \mathcal{A}$ é dito nilpotente se $a^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Dizemos que uma álgebra ou um ideal é nilpotente quando todos os seus elementos são nilpotentes. Segue que todo ideal nilpotente (à esquerda, à direita ou bilateral) de $\mathcal{A}$ está contido em um único ideal nilpotente maximal, chamado de radical. Dizemos que uma álgebra é *semi-simples* se seu radical é nulo.

Uma álgebra $\mathcal{A}$ é dita *simples* se seus únicos ideais são os triviais, desde que $\mathcal{A}$ não seja unidimensional e nilpotente. A razão desta última restrição é que, com ela, podemos demonstrar que toda álgebra simples é semi-simples. Mais ainda:

Proposição A.1 *Uma álgebra é semi-simples se, e somente se, é simples ou soma direta de álgebras simples.*

Este resultado ganha força com a seguinte caracterização das álgebras simples.

Proposição A.2 *Uma álgebra $\mathcal{A}$ é simples se, e somente se, $\mathcal{A} \cong \mathcal{D} \otimes \mathcal{M}$, onde $\mathcal{D}$ é uma álgebra de divisão e $\mathcal{M}$ é uma álgebra de matrizes.*

No que segue, a menos de indicação contrária, nos restringiremos a álgebras sobre $\mathbb{R}$. Com isso, o teorema acima caracteriza as álgebras simples de maneira bastante direta. De fato, as únicas álgebras associativas de divisão sobre $\mathbb{R}$ são $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}$ (quatérnions). Com isso:

Proposição A.3 *Uma álgebra (associativa sobre $\mathbb{R}$) $\mathcal{A}$ é simples se, e somente se, $\mathcal{A} \cong \mathcal{D} \otimes \mathcal{M}$, onde $\mathcal{D} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ e $\mathcal{M}$ é uma álgebra de matrizes sobre $\mathbb{R}$.*

Segue da proposição A.3 e da classificação das álgebras de Clifford da proposição 2.13 que

$$\begin{aligned} p - q = 1 \bmod 4 &\Rightarrow \mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{R}) \text{ é soma direta de 2 álgebras simples,} \\ p - q \neq 1 \bmod 4 &\Rightarrow \mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{R}) \text{ é álgebra simples,} \end{aligned}$$

e portanto, da proposição A.1, $\mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{R})$ é sempre semi-simples.

Se V é um espaço vetorial, um endomorfismo de V é uma aplicação linear $\varphi : V \rightarrow V$. Um endomorfismo que é inversível é chamado de automorfismo. Denotamos por $\text{End}(V)$ e $\text{Aut}(V)$ o conjunto dos endomorfismos e automorfismos de V , respectivamente. Definem-se analogamente endomorfismos e automorfismos algébricos exigindo-se que tais aplicações sejam também homomorfismos de álgebras. Uma classe importante de automorfismos de uma álgebra $\mathcal{A}$ é dada por seus automorfismos internos, isto é, da forma $\varphi : x \mapsto axa^{-1}$ para algum $a \in \mathcal{A}$ inversível. A proposição a seguir mostra que, num certo sentido, álgebras centrais simples têm automorfismos simples.

Proposição A.4 *Toda automorfismo de uma álgebra central simples é interno.*

A.2 Ideais e idempotentes

Um elemento P de uma álgebra $\mathcal{A}$ é chamado de idempotente se $P^2 = P$ e $P \neq 0$. Naturalmente, a unidade de uma álgebra é sempre idempotente. Por outro lado, é fácil ver que em uma álgebra de divisão $\mathcal{A}$ o único idempotente é a unidade. De fato, se $P \neq 0$, basta multiplicar ambos os lados de $P^2 = P$ por P^{-1} para concluirmos que $P = 1_{\mathcal{A}}$.

Dizemos que um idempotente P é primitivo se P não pode ser escrito como soma de dois idempotentes ortogonais, isto é, se não existem u, v idempotentes com $uv = 0$ e $P = u + v$. A proposição a seguir justifica tal terminologia.

Proposição A.5 *Todo idempotente não primitivo pode ser escrito como soma de idempotentes primitivos ortogonais.*

Vamos agora nos restringir ao caso em que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{p,q}(\mathbb{R})$. Como vimos na seção 2.5, os ideais minimais à esquerda de $\mathcal{A}$ são associados a espaços de espinores e, portanto, têm importância fundamental. É claro que se $a \in \mathcal{A}$, então $\mathcal{A}a$ é sempre um ideal à esquerda de $\mathcal{A}$, talvez não minimal. A importância dos idempotentes primitivos para nossa discussão vem da proposição seguinte.

Proposição A.6 *Os ideais à esquerda minimais de uma álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{p,q}(\mathbb{R})$ são da forma $\mathcal{Cl}_{p,q}(\mathbb{R})P$, onde P é um idempotente primitivo.*

Desta forma, é de importância fundamental conhecermos quais são os idempotentes primitivos de uma álgebra de Clifford.

Proposição A.7 ([Lou97]) *Sejam $\{e_i\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{p,q}$ e $\{e_I\}$ a base de multivetores correspondente. Sejam r_i os números de Radon-Hurwitz, definidos abaixo*

i	0	1	2	3	4	5	6	7
r_i	0	1	2	2	3	3	3	3

com $r_{i+8} = r_i + 4$.

Então, existem $k = q - r_{q-p}$ elementos $e_{I_1}, \dots, e_{I_k}$ que comutam entre si e quadram $+1$ ($e_{I_i}^2 = +1$).

Ainda, os 2^k idempotentes

$$\frac{1}{2}(1 \pm e_{I_1}) \frac{1}{2}(1 \pm e_{I_2}) \cdots \frac{1}{2}(1 \pm e_{I_k})$$

definem um conjunto espectral de $\mathcal{Cl}_{p,q}$. Além disso, todo idempotente primitivo em $\mathcal{Cl}_{p,q}$ é da forma acima.

A.3 Representações

Uma representação de uma álgebra $\mathcal{A}$ é um homomorfismo $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \text{Aut}(V)$ para algum espaço vetorial V . Neste caso, chamamos V de espaço de representação e dizemos que V carrega a representação ρ .

Exemplos comuns são a representação trivial ($\rho(a) = \text{id}_V, \forall a \in \mathcal{A}$) e a representação regular, que usa como espaço de representação a própria álgebra $\mathcal{A}$. Tal representação é dada por $l: \mathcal{A} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A})$, $l(a)b = ab, \forall a, b \in \mathcal{A}$.

Dizemos que uma representação $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \text{Aut}(V)$ é irredutível se nenhum subespaço não-trivial de V é deixado invariante por ρ , isto é, se dado um subespaço U de V , temos

$$\rho(a)(U) \subseteq U \quad \forall a \in \mathcal{A} \Rightarrow U = \{0\} \quad \text{ou} \quad U = V.$$

Se V puder ser decomposto como soma direta de subespaços invariantes, dizemos que ρ é redutível. Nesse caso, ρ induz uma representação de $\mathcal{A}$ sobre cada um desses subespaços.

Duas representações $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \text{Aut}(V)$ e $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \text{Aut}(U)$ são equivalentes se existe um isomorfismo $S: V \rightarrow U$ tal que o seguinte diagrama comuta para todo $a \in \mathcal{A}$:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho(a)} & V \\ S \downarrow & & \downarrow S \\ U & \xrightarrow{\varphi(a)} & U \end{array}$$

Para álgebras simples e semi-simples, temos os seguintes resultados classificando suas representações irredutíveis.

Proposição A.8 *Todas as representações irredutíveis de uma álgebra simples são equivalentes.*

Proposição A.9 *Representações irredutíveis de uma álgebra semi-simples são equivalentes se, e somente se, seus núcleos coincidem.*

Apêndice B

Alguns conceitos geométricos

Neste apêndice, discutimos brevemente alguns conceitos geométricos utilizados no texto principal. Em particular, discutimos com certa atenção o conceito de derivadas covariantes em fibrados associados. Maiores detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em [Ben87, Cho82, Nak96].

B.1 Derivada exterior, codiferencial e conexão

Seja M uma variedade n -dimensional dotada de uma métrica g . Lembramos que os fibrados tangente e cotangente sobre M são definidos respectivamente por

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M \quad \text{e} \quad T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^* M,$$

com as estruturas diferenciais usuais. Seções de TM são chamadas de campos vetoriais, enquanto seções de T^*M são chamadas de 1-formas diferenciais. Definimos ainda¹ $T^{r,s}(M) = \bigcup_{x \in M} T^{r,s}_x(M)$, $\Lambda^k(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(T_x M)$ e $\Lambda(M)$ da maneira evidente. Seções de $\Lambda^k(M)$ são chamadas de campos de k -vetores. De maneira análoga, definimos o fibrado $\bigcup_{x \in M} \Lambda^k(T_x^* M)$ cujas seções são k -formas diferenciais. Denotaremos ainda o espaço das k -formas diferenciais em M por $\Omega^k(M)$, com $\Omega(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$.

Dadas coordenadas locais $(x^1, \dots, x^n)$ em um aberto $U \subseteq M$, os vetores tangentes coordenados $\frac{\partial}{\partial x^i}$ definem uma base local $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ de TM , enquanto as 1-formas duais dx^i correspondentes definem uma base local $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ de T^*M . Desta forma, dados² $X \in \sec TM$ e $\omega \in \Omega^k(M)$, temos localmente:

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{e} \quad \omega = \frac{1}{k!} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

¹Aqui $T^{r,s}(V)$ denota a álgebra tensorial sobre o espaço vetorial V .

²Denotaremos as seções em um dado fibrado principal ou vetorial S por $\sec S$.

onde $X^i, \omega_{i_1 \dots i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis. Denotamos o espaço das funções reais diferenciáveis em M por $C^\infty(M)$. Um campo vetorial $X \in \sec TM$ age em funções $f \in C^\infty(M)$ por $X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$, definindo assim a derivada de f ao longo de X .

Derivada exterior

O operador de derivada exterior d age em $\Omega(M)$ levando $\Omega^k(M)$ em $\Omega^{k+1}(M)$. Sua ação sobre uma 0-forma f (isto é, sobre $f \in C^\infty(M)$) define a 1-forma df por

$$df(X) = X(f), \quad \forall X \in \sec TM,$$

isto é, $df(X)$ nos dá a derivada de f ao longo de X . Em termos de coordenadas locais, segue que $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. A ação de d sobre k-formas diferenciais é dada por

$$d\omega = \frac{1}{k!} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^r} dx^r \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

(tal definição independe do sistema de coordenadas utilizado). Um cálculo direto mostra que $d^2 = 0$.

O fibrado de Clifford $\mathcal{Cl}(M, g)$ é definido por (eq. (2.38))

$$\mathcal{Cl}(M, g) = \bigcup_{x \in M} \mathcal{Cl}(T_x M, g_x),$$

com a estrutura diferenciável evidente. Seções de $\mathcal{Cl}(M, g)$ serão aqui chamadas de campos de Clifford. Podemos ainda, de maneira completamente análoga, considerar a álgebra de Clifford construída a partir do fibrado das formas diferenciais (em oposição ao fibrado dos multivetores), obtendo assim o fibrado

$$\mathcal{Cl}(M, g^*) = \bigcup_{x \in M} \mathcal{Cl}(T_x^* M, g_x^*). \quad (\text{B.1})$$

Conexão

Uma conexão ∇ em TM é uma aplicação $\nabla : \sec TM \times \sec TM \rightarrow \sec TM$, $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, que satisfaz as propriedades

$$(i) \quad \nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z;$$

$$(ii) \quad \nabla_X (fY) = X(f) + f \nabla_X Y,$$

$\forall X, Y, Z \in \sec TM, \forall f, g \in C^\infty(M)$. Dada uma base local $\{e_i\}$ de M , seja $\{\theta^i\}$ a respectiva base (local) dual em $\Omega^1(M)$. Definimos os coeficientes de conexão Γ_{ij}^k relativos a $\{e_i\}$ por $\Gamma_{ij}^k = \theta^k(\nabla_{e_i} e_j)$. Equivalentemente, podemos definir as 1-formas de conexão $\omega^i_j \in \Omega^1(M)$ por $\nabla_X e_j = \omega^i_j(X) e_i$. Assim,

$$\omega^j_i = \Gamma_{ki}^j \theta^k. \quad (\text{B.2})$$

Denotamos ainda $\Gamma_{ijk} = g_{kl} \Gamma_{ij}^l$.

A aplicação ∇ pode ser estendida de maneira única a $\nabla : \sec TM \times \sec T^{r,s}(M) \rightarrow \sec T^{r,s}(M)$, exigindo-se que ∇_X comute com contrações e satisfaça a regra de Leibniz com relação ao produto

tensorial. Dizemos que uma conexão ∇ é compatível com a métrica g se $\nabla_X g = 0 \ \forall X \in TM$. Pode-se mostrar [Ben87] que derivação covariante induzida no fibrado de Clifford $\mathcal{Cl}(M, g)$ satisfaz a regra de Leibniz com relação ao produto de Clifford se, e somente, a conexão é compatível com a métrica.

O resultado fundamental da geometria (pseudo-)riemanniana nos diz que, dada uma variedade M munida de uma métrica g , existe uma única conexão em M compatível com g e com torção nula³, que é a denominada conexão de Levi-Civita. Nesta dissertação, a conexão utilizada é sempre a de Levi-Civita.

Codiferencial

Dado um espaço vetorial V , vimos na seção 2.1 que $\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k}$, de modo que $\dim \Lambda^{n-k}(V^*) = \dim \Lambda^k(V^*)$. Assim, o espaço das $(n-k)$ -formas é isomorfo ao espaço das k -formas. O operador de Hodge $\star : \Lambda^k(V^*) \rightarrow \Lambda^{n-k}(V^*)$ nos dá um tal isomorfismo. Dado $\phi \in \Lambda^k(V^*)$, definimos $\star\phi \in \Lambda^{n-k}(V^*)$ por

$$\psi \wedge \star\phi = g(\psi, \phi) \varepsilon, \quad \forall \psi \in \Lambda^{n-k}(V^*), \quad (\text{B.3})$$

onde ε é o elemento de volume de V^* . Em termos do produto de Clifford, um cálculo simples mostra que

$$\star\phi = \tilde{\phi}\varepsilon = \tilde{\phi} \lrcorner \varepsilon,$$

onde $(\cdot)^\sim$ é o operador de reversão (definido na seção 2.1). Segue que, se a assinatura da métrica é (p, q) :

$$\star\star\alpha = (-1)^{k(n-k)} (-1)^q \alpha, \quad \text{se } \alpha \in \Lambda^k(V^*).$$

Em particular, $\star^2 = +1$ em $\mathbb{R}^3$ euclidiano. Já para o espaço de Minkowski (isto é, com assinatura $(1,3)$), temos $\star^2\alpha = -\alpha$, onde $(\cdot)^\wedge$ é o operador de paridade (definido na seção 2.1).

Suponhamos que a variedade M seja orientada por um elemento de volume $\varepsilon \in \Omega^n(M)$. Em termos de uma base ortonormal local positivamente orientada $\{\theta^i\}$ de $\Omega^1(M)$, o elemento de volume usual em M é dado por⁴

$$\varepsilon = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n.$$

Vemos que o operador $\star$ de Hodge pode ser estendido para $\Omega(M)$ da maneira evidente: $(\star\alpha)_p = \star(\alpha_p)$, $\forall p \in M$. Para variedades orientadas compactas, a métrica g induz naturalmente uma métrica em $\Omega(M)$ da seguinte maneira. Dados $\psi, \phi \in \Omega(M)$, definimos (cf eq. (B.3))

$$(\psi, \phi) = \int_M \psi \wedge \star\phi. \quad (\text{B.4})$$

³O tensor de torção $T : \sec TM \times \sec TM \rightarrow \sec TM$ associado a ∇ é definido por $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$.

⁴Se $\{\theta'^1, \dots, \theta'^n\}$ é outra base local de $\Omega^1(M)$, com $\theta'^j = A_i^j \theta^i$, então $\theta'^1 \wedge \cdots \wedge \theta'^n = \det A \ \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n$, onde $A = (A_i^j)$. Desta forma, se $\{\theta'^1, \dots, \theta'^n\}$ é outra base ortonormal local, com a mesma orientação que $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$, então $\det A = 1$ e assim $\theta'^1 \wedge \cdots \wedge \theta'^n = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n$.

Definimos o operador codiferencial δ em (M, g) por

$$\delta = \star^{-1} d \star (\cdot)^\wedge,$$

onde $(\cdot)^\wedge$ é o operador de paridade (definido na seção 2.1). Assim, dado $\phi \in \Omega^k(M)$, temos $\delta\phi = (-1)^{n(k+1)+q+1} \star d \star \phi$. Segue de $d^2 = 0$ que $\delta^2 = 0$. Notamos que δ leva k -formas em $(k-1)$ -formas. Notamos ainda que, em uma variedade compacta, uma simples integração por partes mostra que $(\phi, d\psi) = (\delta\phi, \psi)$ de maneira que, neste caso, δ é o operador adjunto de d .

Operador de Dirac-Kähler

O operador laplaciano Δ agindo em formas é definido por

$$\Delta = -(d\delta + \delta d).$$

Não é difícil mostrar que, em espaços chatos, $\Delta = \partial^\mu \partial_\mu$. Desta forma, Δ corresponde ao laplaciano usual em assinatura $(n, 0)$, e ao operador de onda $\square$ em assinatura $(1, 3)$.

O operador $d - \delta$ será aqui chamado de *operador de Dirac-Kähler*. Notamos que, como $d^2 = \delta^2 = 0$, temos

$$\Delta = (d - \delta)^2, \tag{B.5}$$

de maneira que o operador de Dirac-Kähler pode ser pensado como uma raiz quadrada de Δ .

É interessante observar que d não depende da métrica em M . Já δ depende de g através do operador $\star$ de Hodge. De qualquer forma, tais objetos não dependem da conexão de M . No entanto, para uma conexão ∇ compatível com a métrica, a proposição a seguir relaciona d , δ e ∇ .

Proposição B.1 *Seja ∇ uma conexão compatível com a métrica. Se $\{e^1, \dots, e^n\}$ é uma base local de $\Omega^1(M)$, então*

- (i) $d = e^a \wedge \nabla_a$,
- (ii) $\delta = -e^a \lrcorner \nabla_a$.

Segue que $d - \delta = e^a \wedge \nabla_a + e^a \lrcorner \nabla_a$, isto é,

$$d - \delta = e^a \nabla_a, \tag{B.6}$$

onde o lado direito age em formas através do produto de Clifford em $\mathcal{Cl}(M, g^*)$ (eq. (B.1)). Desta forma, no contexto de um espaço-tempo chato, temos imediatamente

$$d - \delta = e^a \partial_a. \tag{B.7}$$

B.2 Derivadas covariantes em fibrados associados

Nesta seção, deduziremos expressões para a derivada covariante de seções dos vários fibrados associados a $P_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M)$, discutidos na seção 2.6. Para isso, usaremos a teoria geral de conexões em fibrados associados. Mais precisamente, partiremos de uma conexão $\mathbf{\Gamma}$ no fibrado principal $P_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M)$ (vide, p. ex., [Cho82]) e deduziremos as expressões induzidas por $\mathbf{\Gamma}$ em $\mathcal{C}\ell(M, g)$, $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ e $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^r(M)$.

Seja $\pi : P \rightarrow M$ um fibrado principal com grupo estrutural G , dotado de uma conexão $\mathbf{\Gamma}$ [Cho82]. Dados $x \in M$ e $p \in \pi^{-1}(x)$, tal conexão pode ser usada para se definir uma aplicação linear injetora $\Gamma_p : T_x M \rightarrow T_p P$, de maneira que $\Gamma_p(T_x M)$ define o chamado subespaço horizontal de $T_p P$ determinado por $\mathbf{\Gamma}$. Dada uma curva $\sigma : I = (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, com $\sigma(0) = x$, o transporte paralelo de $p \in \pi^{-1}(x)$ ao longo de σ é dado pela curva $\hat{\sigma} : I \rightarrow P$ unicamente definida (via teoria de equações diferenciais ordinárias) por $\hat{\sigma}(0) = p$ e

$$\frac{d}{dt}\hat{\sigma}(t) = \Gamma_p\left(\frac{d}{dt}\sigma(t)\right).$$

Denotamos ainda $p_{\parallel t} = \hat{\sigma}(t)$.

Seja $E = P \times_{\rho} V$ o fibrado vetorial associado a P pela representação ρ de G no espaço vetorial V . Seja

$$\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G, \quad \Phi_i(p) = (\pi(p), \phi_i(p)),$$

uma trivialização local de P , com a trivialização local associada de E

$$\Xi_i : \pi_E^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F, \quad \Xi_i(q) = (\pi_E(q), \chi_i(q)),$$

onde $\pi_E : E \rightarrow M$ é a projeção usual. Dado $\Psi = [(p, \psi)] \in E$, com $\pi_E(\Psi) = x$, o transporte paralelo de Ψ ao longo de σ é dado pela curva $\tilde{\sigma}$, com $\pi_E(\tilde{\sigma}(t)) = \sigma(t)$, e

$$\chi_i(\tilde{\sigma}(t)) = \rho(\phi_i(\hat{\sigma}(t)) \circ \phi_i(p)^{-1}) \chi_i(\Psi). \quad (\text{B.8})$$

Denotamos ainda $\Psi_{\parallel t} = \tilde{\sigma}(t)$.

O transporte paralelo (que como vimos acima é induzido pela conexão $\mathbf{\Gamma}$ em P), define então a seguinte noção de derivada covariante no fibrado associado $E = P \times_{\rho} V$. Seja $\Psi \in \text{sec } E$ uma seção em E definida ao longo da curva σ acima, com $v = \dot{\sigma}(0)$. Seja $\Psi_{\parallel t}^0$ o transporte paralelo de $\Psi_t := \Psi(\sigma(t))$ de $\sigma(t)$ até $x = \sigma(0)$. A derivada covariante induzida por P em seções de E é então definida por

$$(\nabla_v^E \Psi)(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Psi_{\parallel t}^0 - \Psi_0).$$

Não é difícil ver que esta definição de ∇ , quando aplicada ao fibrado de Clifford $\mathcal{C}\ell(M, g) = P_{\text{Spin}_{1,3}^e}(M) \times_{ad} \mathbb{R}_{1,3}$ (eq. (2.43)), coincide de fato com a definição de ∇ vista anteriormente.

Proposição B.2 *Seja V um campo vetorial em M . A derivada covariante $\nabla_V A$ de um campo de Clifford $A = A^I e_I \in \sec \mathcal{C}\ell(M, g)$ é dada por*

$$\nabla_V A = V(A^I) e_I + \frac{1}{2} [\omega_V, A],$$

onde $V(A) := V(A^I) e_I$ e $\omega : V \mapsto \omega_V$ é a 1-forma de conexão em termos da base $\{e_a\}$, dada por $\omega_V = \frac{1}{2} V^a \Gamma_{acb} e^b \wedge e^c$ (cf eq. (B.2)). Em notação menos precisa:

$$\nabla_V A = V(A) + \frac{1}{2} [\omega_V, A]. \quad (\text{B.9})$$

dem.: Escrevendo $A(t) = A(\sigma(t))$ em termos da base $\{e_I\}$ de seções definidas na seção 2.6, página 25, temos $A(t) = A^I(t) e_I(t) = A^I(t) [(\Xi(t), E_I)] = [(\Xi(t), A^I(t) E_I)] = [(\Xi(t), a(t))]$, onde $a(t) := A^I(t) E_I \in \mathbb{R}_{1,3}$ (vide nota de rodapé 9, página 19). Segue de (B.8) que

$$A_{||t}^0 = [(\Xi(0), g(t) a(t) g(t)^{-1})] \quad (\text{B.10})$$

para algum $g(t) \in \text{Spin}_{1,3}^e$, com $g(0) = 1$. Com isso,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g(t) a(t) g(t)^{-1} - a(0)) &= \left[\frac{dg}{dt} a g^{-1} + g \frac{da}{dt} g^{-1} + g a \frac{dg^{-1}}{dt} \right]_{t=0} = \\ &= \dot{a}(0) + \dot{g}(0) a(0) - a(0) \dot{g}(0) = \\ &= V(A^I) E_I + [\dot{g}(0), a(0)], \end{aligned}$$

onde $\dot{g}(0) \in \text{Lie}(\text{Spin}_{1,3}^e) = \Lambda^2(\mathbb{R}^{1,3})$. Assim,

$$\nabla_V A = V(A^I) e_I + \frac{1}{2} [\omega_V, A],$$

para algum $\omega_V \in \sec \bigwedge^2(M)$. Em particular, para a base de seções de 1-vetores $\{e_a\}$, tal expressão reduz-se a $V^a \Gamma_{ab}^c e_c = \nabla_V e_b = \frac{1}{2} [\omega_V, e_b]$, de maneira que $\omega_V = \frac{1}{2} V^a \Gamma_{acb} e^b \wedge e^c$. Desta forma, $\omega : V \mapsto \omega_V$ é a 1-forma de conexão ($\Lambda^2(M)$ -valorizada) em M . $\square$

Sob uma mudança de referencial espinorial como na proposição 2.26, onde a base móvel associada se transforma por $e'_a = U^{-1} e_a U$, temos a bem conhecida transformação para ω_V :

$$\frac{1}{2} \omega_V \mapsto U^{-1} \frac{1}{2} \omega_V U + (\nabla_V U^{-1}) U, \quad (\text{B.11})$$

como pode ser facilmente verificado.

De forma inteiramente análoga à proposição B.2, podemos determinar a derivada covariante induzida nos fibrados associados $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ e $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^r(M)$ discutidos na seção 2.6. Denotaremos tal objeto por ∇^s , de maneira a diferenciá-lo do caso anterior.

Proposição B.3 *Seja V um campo vetorial em M . Dadas as seções $\Psi \in \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ e $\Phi \in \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^r(M)$, temos*

$$\nabla_V^s \Psi = V(\Psi) + \frac{1}{2} \omega_V \Psi; \quad (\text{B.12})$$

$$\nabla_V^s \Phi = V(\Phi) - \frac{1}{2} \Psi \omega_V. \quad (\text{B.13})$$

dem.: A demonstração é análoga à da proposição B.2, com a diferença de que a eq. (B.10) é aqui substituída por $\Psi_{||t}^0 = [(\Xi(0), g(t)a(t))]$ no caso de Ψ , e $\Phi_{||t}^0 = [(\Xi(0), a(t)g(t)^{-1})]$ no caso de Φ . $\square$

Uma definição geral de operadores de Dirac pode ser encontrada em [Law89]. Para nossos propósitos, é suficiente considerar os casos dos fibrados $\mathcal{C}\ell(M, g)$ e $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ abaixo:

Definição B.4 *Seja $\{e_a\}$ uma base de seções em $\Lambda^1(M) \subset \mathcal{C}\ell(M, g)$. Definimos o operador de Dirac tensorial, agindo em seções de $\mathcal{C}\ell(M, g)$, por*

$$D = e^a \nabla_{e_a}.$$

Definimos ainda o operador de Dirac espinorial, agindo em seções de $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ ou $\mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^r(M)$, por

$$D^s = e^a \nabla_{e_a}^s.$$

Finalmente, observamos que as derivadas covariantes induzidas nos diferentes fibrados associados a $P_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M)$ satisfazem as seguintes regras de Leibniz.

Proposição B.5 *Seja V um campo vetorial em M . Dados $A, B \in \sec \mathcal{C}\ell(M, g)$, $\Psi \in \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^l(M)$ e $\Phi \in \sec \mathcal{C}\ell_{\text{Spin}_{1,3}^e}^r(M)$, temos*

$$\nabla_V(AB) = (\nabla_V A)B + A(\nabla_V B); \quad (\text{B.14})$$

$$\nabla_V^s(A\Psi) = A(\nabla_V^s \Psi) + (\nabla_V A)\Psi; \quad (\text{B.15})$$

$$\nabla_V^s(\Phi X) = \Phi(\nabla_V X) + (\nabla_V^s \Phi)X. \quad (\text{B.16})$$

Apêndice C

Aplicação suplementar: tomografia quântica para espinores de Dirac

Neste apêndice, reproduzimos a publicação [Mos03b], que faz uma aplicação da relação entre representações das matrizes γ^μ e idempotentes de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ — discutida na seção 2.5 — ao problema da reconstrução tomográfica de um espinor de Dirac.

Quantum tomography for Dirac spinors

R. A. Mosna⁽¹⁾ and J. Vaz Jr⁽²⁾

(1) Instituto de Física Gleb Wataghin, CPG, Universidade Estadual de Campinas,
CP 6165, 13083-970, Campinas, SP, Brazil.

(2) Departamento de Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas,
CP 6065, 13081-970, Campinas, SP, Brazil.

Physics Letters A 315 (2003) 418–425

© 2003 Elsevier B.V. All rights reserved.

Abstract

We present a tomographic scheme, based on spacetime symmetries, for the reconstruction of the internal degrees of freedom of a Dirac spinor. We discuss the circumstances under which the tomographic group can be taken as $SU(2)$, and how this crucially depends on the choice of the gamma matrix representation. A tomographic reconstruction process based on discrete rotations is considered, as well as a continuous alternative.

PACS numbers: 03.65.Wj, 03.30.+p, 03.65.Ca.

Keywords: Quantum tomography, Dirac spinor, Spin-1/2 particle.

C.1 Introduction

There is a long quest on the search of classical-like descriptions of quantum mechanics. As examples, we can mention the approaches of Wigner [1], Moyal [2], Feynman [3] and the various tentative hidden variable theories. In the first two cases, a set of (possibly negative) quasiprobability distributions, defined on the phase space, are the basic variables of the theory. In Feynman's approach, negative probabilities are allowed as a way to avoid the use of (probability) amplitudes. On the other hand, the tomographic formulation of quantum mechanics [4-16] has received considerable attention in recent years. In such an approach, the dynamical variables of the theory are a set of probability distributions, which have truly classical-like characteristics: they are non-negative, normalized and, in principle, all measurable.

For a review on the principles of the tomographic approach, we refer the reader to [6,13]. Here we briefly outline its main ideas. Consider a state $|\psi\rangle$ in some Hilbert space $\mathcal{H}$ describing a physical system. Let $\{|v_\alpha\rangle\}$ be an orthonormal basis of $\mathcal{H}$, whose elements are eigenvectors of a commuting set of Hermitian operators. Here, α should be interpreted as a multi-index that might contain discrete and/or continuous indices. Expanding $|\psi\rangle$ in this basis, we have $|\psi\rangle = \sum_\alpha \psi_\alpha |v_\alpha\rangle$, where the complex coefficients ψ_α represent probability amplitudes. The corresponding probabilities

$$w_\alpha = |\psi_\alpha|^2 = |\langle v_\alpha | \psi \rangle|^2$$

are called *marginal* distributions. Note that w_α are non-negative normalized probabilities which are, in principle, all measurable. The essence of the tomographic approach is to describe the physical state and its dynamics in terms of the marginals.

Of course, the information relative to the phases in ψ_α is lost when we consider the above marginals. Nevertheless, one can consider the action on $\mathcal{H}$ of a family of transformations $U(g)$, labeled by a certain parameter g belonging to a (Lie) group G . Defining the "rotated" marginals $w_\alpha(g) = |\langle v_\alpha | U(g) | \psi \rangle|^2$ (which are again measurable in principle) and writing $\psi_\alpha(g) = \sum_\beta U(g)_\alpha^\beta \psi_\beta$, it follows that the expression of $w_\alpha(g) = |\psi_\alpha(g)|^2$ carries interference terms among the relative phases of ψ_β . As a result, one can find such relative phases in terms of the rotated marginals.

The tomographic schemes are usually written in terms of the density matrix ρ associated with the physical system. Although in this work we are mainly interested in pure states, this leads to a natural framework to study more general mixed states. Then, the reconstruction process can be implemented by an integral transformation $\rho = \int d\alpha dg w_\alpha(g) K(\alpha, g)$, which determines ρ in terms of the rotated marginals (when α is a discrete index, the corresponding integral should be replaced by a discrete sum). Some applications of this tomographic scheme can be found in [5] (optical tomography, with $G = O(2)$), [7, 8, 13] (symplectic tomography, with $G = Sp(2, \mathbb{R})$) and [9, 10, 13, 14] (spin tomography, with $G = SU(2)$). In [15], the interesting problem of defining a minimum quorum of expectation values for the state reconstruction was addressed. Also, a study of

the properties of marginal distributions under relativistic transformations, especially in the context of the relativistic oscillator model, was presented in [16].

In this work, we present a tomographic scheme for the reconstruction of the internal degrees of freedom of Dirac spinors. These objects are known to describe relativistic spin-1/2 particles, as electrons. More precisely, a Dirac spinor $|\psi\rangle = (\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4)^t \in \mathbb{C}^4$ is an object carrying the representation $D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$ of $Spin_{1,3}^e \cong SL(2, \mathbb{C})$, the covering group of the restricted Lorentz group. As $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^4$, a tomographic scheme based on $SU(4)$ would certainly work for this case. However, to parallel the discussion with the non-relativistic case, and to give a direct physical meaning to the transformations $U(g)$, we demand that the tomographic group G be *generated by spacetime transformations*.

The choice of the gamma matrix representation in the Dirac theory plays a decisive role in this context. In fact, consider the tomographic reconstruction of a generic Dirac spinor $|\psi\rangle$, with 7 degrees of freedom (discounting a global phase). Let $\mathcal{L}$ be the restricted Lorentz group and $\tilde{\mathcal{L}}$ the associated covering group. Then, as we will show later,

(i) in the context of the Majorana representation, $|\psi\rangle$ can be tomographically recovered by taking G as the $SU(2)$ rotation subgroup of $\tilde{\mathcal{L}}$;

(ii) in the context of the standard representation, $|\psi\rangle$ can be tomographically recovered if we take $G = \tilde{\mathcal{L}}$, but not for $G = SU(2)$ as in (i);

(iii) in the context of the chiral representation, $|\psi\rangle$ cannot be tomographically reconstructed via spacetime transformations, i.e., even if G is taken as the whole $\tilde{\mathcal{L}}$ (unless $|\psi\rangle$ is a Weyl spinor, corresponding to a massless particle).

It is a well known result that the Lorentz group is a non-compact space which does not admit finite-dimensional unitary representations (except for the trivial one) [17]. This means that boosts inevitably give rise to non-unitary transformations for the spinor space. Although one might live with this situation, it is clearly preferable to work only with rotations, if possible. We see from the discussion above that, among the most common choices for $\{\gamma^\mu\}$, namely the Majorana, standard and chiral representations, only the first one is compatible with a tomographic procedure based on spatial transformations. In this case, the tomographic group is given by $SU(2)$. Alternatively, it is also possible to combine the marginals associated with both the standard and chiral representations, so that a tomographic reconstruction based on rotations is similarly achieved.

It should be noted that the discussion above regards the tomographic reconstruction of a full Dirac spinor. If one wants to reconstruct a spinor that is already known to be in the positive energy sector, then clearly less symmetry transformations are required (however, it is well known that this sector is not preserved by time evolution [18]; this is, in fact, a problem of the first quantized Dirac theory).

We observe that a shortcoming of describing a Dirac spinor by means of the marginals $w_k = |\psi_k|^2$, when compared to the non-relativistic case, is the lack of a clear interpretation for these objects. In

fact, consider the case of the standard representation. The projector associated with positive energy and spin up (in the z -direction) then reduces to

$$\frac{1}{2}(I + \gamma_0)\frac{1}{2}(I + i\gamma_1\gamma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

only in the reference frame in which the particle is at rest. When we consider an arbitrary particle in an indefinite state, we must consider the Fourier expansion of $\psi(x)$ in terms of eigenstates of momentum $\phi(p)$. But then, the physical interpretation of the first component of $\phi(p)$ changes with p . This happens because boosts mix the components ψ_k of $|\psi\rangle$. Therefore, the marginals $w_k = |\psi_k|^2$ do not correspond to an easy-to-describe physical property of the particle.¹ When we consider alternative gamma matrix representations, the interpretation of the marginals are even more unclear.

On the other hand, the bilinear covariants associated with $|\psi\rangle$ provide another classical-like description of the Dirac theory, in the sense that they are, in principle, measurable tensorial densities. In fact, once a reference frame is fixed, (i) the charge density (of an ensemble of particles) is given by the time-component eJ^0 of the 4-vector $eJ^\mu = e\langle\bar{\psi}|\gamma^\mu|\psi\rangle$, while the corresponding spatial components ecJ^k , $k = 1, 2, 3$, yield the associated 3-current; (ii) the second-order antisymmetric tensor $\frac{e\hbar}{2mc}S^{\mu\nu} = \frac{e\hbar}{2mc}\langle\bar{\psi}|i\gamma^{\mu\nu}|\psi\rangle$ corresponds to a density of intrinsic magnetic moment (components $\frac{e\hbar}{2mc}S^{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$) and intrinsic electric moment (components $\frac{e\hbar}{2mc}S^{0j}$, $j = 1, 2, 3$) of the ensemble of particles²; (iii) the pseudo-vector $\frac{\hbar}{2}K^\mu = \frac{\hbar}{2}\langle\bar{\psi}|i\gamma_{0123}\gamma^\mu|\psi\rangle$ corresponds to the spin density of the ensemble of particles; (iv) although the scalar and pseudo-scalar covariants have a less clear interpretation, the Fierz identities (see section C.2) can be used to express them in terms of a subset of the bilinear covariants discussed above [19, 20] (see also [21, 22]). Moreover, it is natural to expect that the manifest covariance of the bilinear covariants should somehow favor them over the marginals. For this reason, our plan in this article is to establish a well defined correspondence between the bilinear covariants and the marginals w_k , so that the latter inherit the measurability (and possibly the dynamics) of the former. As a result, in spite of the above difficulties, the quantities w_k do provide a set of non-negative, normalized and measurable quantities, describing the quantum state of the particle. Furthermore, it is known that the Dirac theory can be formulated in terms of the bilinear covariants [23] (see also [24]). Then, the above procedure might be useful for obtaining a Dirac equation written in terms of tomographic and classical-like quantities like w_k . We note however that, to achieve that goal, one would still have to develop a method to reconstruct

¹We note that this situation does not occur in Pauli theory, for a non-relativistic boost (i.e., a Galileo transformation corresponding to a change of velocity between frames) does not mix the components of a Pauli spinor.

²Such an electric moment can be thought of as being generated, via a well-known relativistic effect, by the intrinsic magnetic moment of the electron in motion.

the (position dependent) global phase of $|\psi\rangle$. This is out of the scope of the present article, where, just as in the non-relativistic spin tomography, we are only interested in the internal (i.e. spinorial) degrees of freedom of $|\psi\rangle$.

This article is organized as follows. In section C.2, we review some facts about Dirac spinors, including a reconstruction theorem [25] that allows one to express $|\psi\rangle$ in terms of the bilinear covariants. In section C.3, we obtain the aforementioned correspondence between the bilinear covariants and the marginals w_k . This can be considered a generalization of (the non-relativistic) spin tomography techniques presented in [9, 10, 13, 14]. The covariance of the bilinear covariants is then explored to tomographically reconstruct the spinor $|\psi\rangle$ from the marginals. In section C.4, we discuss the dependence of this tomographic approach on the choice of the gamma matrix representation. Section C.5 is reserved for some final remarks. In what follows, we use natural units ($\hbar = c = 1$).

C.2 Bilinear covariants

In order to establish notation, let us briefly review some well known facts about the Dirac theory. Let $|\psi\rangle = (\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4)^t$ be a Dirac spinor (in what follows, $|\psi\rangle$ always represents a pure state). Under a restricted Lorentz transformation $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu)$, this object transforms as $|\psi'(x)\rangle = L|\psi(\Lambda^{-1}x)\rangle$, where the matrix L is related to $\Lambda^\mu{}_\nu$ by $L^{-1}\gamma^\mu L = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$ [18] (L belongs to the covering space $\tilde{\mathcal{L}}$ of the restricted Lorentz group [26]). Denoting the Dirac conjugate of $|\psi\rangle$ by $\langle\bar{\psi}| = \langle\psi|\gamma_0$, we then have $\langle\bar{\psi}'| = \langle\bar{\psi}|L^{-1}$. This immediately yields the following 16 tensorial quantities, known as bilinear covariants:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \langle\bar{\psi}|\psi\rangle, \\ J^\mu &= \langle\bar{\psi}|\gamma^\mu|\psi\rangle, \\ S^{\mu\nu} &= \langle\bar{\psi}|i\gamma^{\mu\nu}|\psi\rangle, \text{ with } \gamma^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \\ K^\mu &= \langle\bar{\psi}|i\gamma_{0123}\gamma^\mu|\psi\rangle, \text{ with } \gamma_{0123} = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \\ \Omega_2 &= \langle\bar{\psi}| - \gamma_{0123}|\psi\rangle,\end{aligned}\tag{C.1}$$

which transform respectively as a scalar, a 4-vector, a tensor of second degree, a pseudovector and a pseudoscalar. These quantities are obviously not independent. The constraint relations among them are given by the Fierz identities (we use the conventions of [26]):

$$J_\mu J^\mu = \Omega_1^2 + \Omega_2^2, \tag{C.2a}$$

$$J_\mu J^\mu = -K_\mu K^\mu, \tag{C.2b}$$

$$J_\mu K^\mu = 0, \tag{C.2c}$$

$$J_\mu K_\nu - K_\mu J_\nu = -(\Omega_2 S_{\mu\nu} + \Omega_1 \tfrac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} S^{\alpha\beta}), \tag{C.2d}$$

with $\epsilon_{0123} = 1$. These 9 equations (note the anti-symmetry in $\mu\nu$) reduce the number of independent bilinear covariants to 7, as expected. Indeed, $|\psi\rangle$ has eight real components which reduce to seven independent quantities when a global phase is discarded.

Let us denote a bilinear covariant generically by $\rho^a = \langle\bar{\psi}|\Gamma^a|\psi\rangle$, where Γ^a can be read from eqs. (C.1) (we note that the 16 matrices Γ^a form a basis for the Dirac algebra). As the bilinear covariants are real, the quantity

$$\rho := \sum_a \rho^a \Gamma_a \quad (\text{C.3})$$

can be thought of as a vector in a 16-dimensional real vector space. In this context, the Fierz identities determine a 7-dimensional submanifold of $\mathbb{R}^{16}$ in which ρ lives in [27]. This submanifold generalizes the Bloch sphere of Pauli theory.

It follows from eq. (C.3) that

$$\rho = \Omega_1 + J + iS + iK\gamma_{0123} + \Omega_2\gamma_{0123},$$

where $J = J^\mu\gamma_\mu$, $S = \frac{1}{2}S^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}$ and $K = K^\mu\gamma_\mu$. It is also useful to note that there is a natural inner product defined on the Dirac algebra by $(A, B) = (1/4)\text{tr}(A\bar{B})$, where $\bar{B} := \gamma_0 B^\dagger \gamma_0$ is the Dirac conjugate of B . Note that $\rho^a = \langle\bar{\psi}|\Gamma^a|\psi\rangle = \text{tr}(\Gamma^a|\psi\rangle\langle\bar{\psi}|) = 4(\Gamma^a, |\psi\rangle\langle\bar{\psi}|)$, so that we can alternatively write

$$\rho = 4|\psi\rangle\langle\bar{\psi}|. \quad (\text{C.4})$$

A reconstruction theorem [27] can be used to obtain $|\psi\rangle$, apart from a global phase, from the bilinear covariants, i.e., from ρ . To see this, consider the action of ρ on a fixed spinor $|\eta\rangle$ (usually taken as $|\eta\rangle = (1\ 0\ 0\ 0)^t$). This gives $\rho|\eta\rangle = 4|\psi\rangle\langle\bar{\psi}|\eta\rangle$, and so $|\psi\rangle = \frac{1}{4\langle\bar{\psi}|\eta\rangle}\rho|\eta\rangle$. As $\langle\bar{\eta}|\rho|\eta\rangle = 4|\langle\bar{\psi}|\eta\rangle|^2$, we have $\langle\bar{\psi}|\eta\rangle = e^{i\phi}|\langle\bar{\psi}|\eta\rangle| = e^{i\phi}(\frac{1}{4}\langle\bar{\eta}|\rho|\eta\rangle)^{1/2}$. Substitution in the expression for $|\psi\rangle$ yields

$$|\psi\rangle = \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{4\langle\bar{\eta}|\rho|\eta\rangle}}\rho|\eta\rangle.$$

C.3 Marginal distributions and bilinear covariants

Let us now relate the marginal distributions to the bilinear covariants. To do that, we expand $|\psi\rangle$ in terms of the canonical basis $\{|v_k\rangle\}_{k=1}^4$ of $\mathbb{C}^4$, with $|v_1\rangle = (1\ 0\ 0\ 0)^t$, $|v_2\rangle = (0\ 1\ 0\ 0)^t$ and so on. If $|\psi\rangle = \sum \psi_k|v_k\rangle$, we have

$$w_k = |\psi_k|^2, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Consider the matrices (or projection operators) given by

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Then

$$w_k = \langle \psi | P_k | \psi \rangle = \langle \bar{\psi} | \gamma_0 P_k | \psi \rangle, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (\text{C.6})$$

To go further, we need to choose a specific representation of the gamma matrices to work with. In the Majorana representation [18] (other choices will be discussed shortly)

$$\gamma_0^{mj} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1^{mj} = \begin{pmatrix} -i\sigma_3 & 0 \\ 0 & -i\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2^{mj} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3^{mj} = \begin{pmatrix} i\sigma_1 & 0 \\ 0 & i\sigma_1 \end{pmatrix},$$

where σ_k are the Pauli matrices, a straightforward calculation yields

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_{20}^{mj})\frac{1}{2}(1 + i\gamma_1^{mj}), & P_2 &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_{20}^{mj})\frac{1}{2}(1 - i\gamma_1^{mj}), \\ P_3 &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_{20}^{mj})\frac{1}{2}(1 + i\gamma_1^{mj}), & P_4 &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_{20}^{mj})\frac{1}{2}(1 - i\gamma_1^{mj}). \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Substitution in eq. (C.6) leads to $w_{mj,k} = \langle \bar{\psi} | \frac{1}{4}(\gamma_0^{mj} \pm \gamma_2^{mj} \pm i\gamma_{01}^{mj} \pm i\gamma_{12}^{mj}) | \psi \rangle = \frac{1}{4}(J_0 \pm J_2 \pm S_{01} \pm S_{12})$, where the $\pm$ signs vary with k . More precisely

$$\begin{aligned} w_{mj,1} &= \frac{1}{4}(J_0 - J_2 + S_{01} + S_{12}), \\ w_{mj,2} &= \frac{1}{4}(J_0 - J_2 - S_{01} - S_{12}), \\ w_{mj,3} &= \frac{1}{4}(J_0 + J_2 + S_{01} - S_{12}), \\ w_{mj,4} &= \frac{1}{4}(J_0 + J_2 - S_{01} + S_{12}). \end{aligned}$$

After solving for J_0, J_2, S_{01} and S_{12} , we have

$$\begin{aligned} J_0 &= w_{mj,1} + w_{mj,2} + w_{mj,3} + w_{mj,4}, \\ J_2 &= -w_{mj,1} - w_{mj,2} + w_{mj,3} + w_{mj,4}, \\ S_{01} &= w_{mj,1} - w_{mj,2} + w_{mj,3} - w_{mj,4}, \\ S_{12} &= w_{mj,1} - w_{mj,2} - w_{mj,3} + w_{mj,4}. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

The result is a partial recovering of ρ in terms of the marginal distributions. Now we explore the symmetries of the Lorentz group to obtain the full expression for ρ , still in terms of marginal distributions.

Applying a restricted Lorentz transformation $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu)$ to our system, we have $|\psi'\rangle = L|\psi\rangle$. The corresponding Λ -dependent marginal distributions (cf eq. (C.6)) are:

$$w_k^{(\Lambda)} = \langle \bar{\psi}' | \gamma_0 P_k | \psi' \rangle = \langle \bar{\psi} | L^{-1} \gamma_0 P_k L | \psi \rangle. \quad (\text{C.9})$$

On the other hand, the new bilinear covariants are given by $\Omega_1^{(\Lambda)} = \Omega_1$, $J_\mu^{(\Lambda)} = \Lambda_\mu^\nu J_\nu$, $S_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta S_{\alpha\beta}$, $K_\mu^{(\Lambda)} = \Lambda_\mu^\nu K_\nu$ and $\Omega_2^{(\Lambda)} = \Omega_2$ (in the above notation, $w_{mj,k} = w_{mj,k}^{(I)}$, $J_\mu = J_\mu^{(I)}$, denote the quantities associated with the original frame, before the application of the symmetry transformation). It follows that $w_{mj,k}^{(\Lambda)} = \langle \bar{\psi} | L^{-1} \frac{1}{4} (\gamma_0^{mj} \pm \gamma_2^{mj} \pm i\gamma_{01}^{mj} \pm i\gamma_{12}^{mj}) L | \psi \rangle = \frac{1}{4} (J_0^{(\Lambda)} \pm J_2^{(\Lambda)} \pm S_{01}^{(\Lambda)} \pm S_{12}^{(\Lambda)})$, where the $\pm$ signs vary with k . More precisely,

$$\begin{aligned} J_0^{(\Lambda)} &= w_{mj,1}^{(\Lambda)} + w_{mj,2}^{(\Lambda)} + w_{mj,3}^{(\Lambda)} + w_{mj,4}^{(\Lambda)}, \\ J_2^{(\Lambda)} &= -w_{mj,1}^{(\Lambda)} - w_{mj,2}^{(\Lambda)} + w_{mj,3}^{(\Lambda)} + w_{mj,4}^{(\Lambda)}, \\ S_{01}^{(\Lambda)} &= w_{mj,1}^{(\Lambda)} - w_{mj,2}^{(\Lambda)} + w_{mj,3}^{(\Lambda)} - w_{mj,4}^{(\Lambda)}, \\ S_{12}^{(\Lambda)} &= w_{mj,1}^{(\Lambda)} - w_{mj,2}^{(\Lambda)} - w_{mj,3}^{(\Lambda)} + w_{mj,4}^{(\Lambda)}. \end{aligned} \quad (C.10)$$

Now we can vary Λ in the above expressions to recover all the bilinear covariants:

(a) taking $\Lambda = I$ =[identity] (i.e. no symmetry transformation), we determine (from eqs. (C.10) or eqs. (C.8)) J_0, J_2, S_{01} and S_{12} in terms of $w_{mj,k}$;

(b) taking $\Lambda = R_x$ =[$\pi/2$ -rotation about the x -axis], we have $J_0 = J_0^{(R_x)}$, $S_{01} = S_{01}^{(R_x)}$ and $J_3 = J_2^{(R_x)}$, $S_{31} = -S_{12}^{(R_x)}$. All these quantities are determined by the marginals $w_{mj,k}^{(R_x)}$ from eqs. (C.10);

(c) taking $\Lambda = R_y$ =[$\pi/2$ -rotation about the y -axis], we analogously obtain $J_0 = J_0^{(R_y)}$, $J_2 = J_2^{(R_y)}$ and $S_{03} = -S_{01}^{(R_y)}$, $S_{23} = S_{12}^{(R_y)}$. All these quantities are determined by the marginals $w_{mj,k}^{(R_y)}$ from eqs. (C.10);

(d) taking $\Lambda = R_z$ =[$\pi/2$ -rotation about the z -axis], we analogously obtain $J_0 = J_0^{(R_z)}$, $S_{12} = S_{12}^{(R_z)}$ and $J_1 = -J_2^{(R_z)}$, $S_{02} = S_{01}^{(R_z)}$. All these quantities are determined by the marginals $w_{mj,k}^{(R_z)}$ from eqs. (C.10).

So far, we have recovered the ten bilinear covariants J_μ and $S_{\mu\nu}$. The rest of them, namely Ω_1 , Ω_2 and K_μ , are easily obtained from the Fierz identities. In fact, eqs. (C.2) yield the identities [25]

$$\Omega_1 K_\nu = J^\mu (*S)_{\mu\nu}, \quad \Omega_2 K_\nu = -J^\mu S_{\mu\nu},$$

where $(*S)_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} S^{\alpha\beta}$, with $\epsilon_{0123} = 1$. In this way, all the bilinear covariants are obtained from the rotated marginals.

Writing everything in terms of the rotated marginals, it follows from (a)-(d) above and eqs. (C.10)

that:

$$\begin{aligned}
J_0 &= w_{mj,1} + w_{mj,2} + w_{mj,3} + w_{mj,4}, \\
J_1 &= w_{mj,1}^{(R_z)} + w_{mj,2}^{(R_z)} - w_{mj,3}^{(R_z)} - w_{mj,4}^{(R_z)}, \\
J_2 &= -w_{mj,1} - w_{mj,2} + w_{mj,3} + w_{mj,4}, \\
J_3 &= -w_{mj,1}^{(R_x)} - w_{mj,2}^{(R_x)} + w_{mj,3}^{(R_x)} + w_{mj,4}^{(R_x)}, \\
S_{01} &= w_{mj,1} - w_{mj,2} + w_{mj,3} - w_{mj,4}, \\
S_{02} &= w_{mj,1}^{(R_z)} - w_{mj,2}^{(R_z)} + w_{mj,3}^{(R_z)} - w_{mj,4}^{(R_z)}, \\
S_{03} &= -w_{mj,1}^{(R_y)} + w_{mj,2}^{(R_y)} - w_{mj,3}^{(R_y)} + w_{mj,4}^{(R_y)}, \\
S_{12} &= w_{mj,1} - w_{mj,2} - w_{mj,3} + w_{mj,4}, \\
S_{23} &= w_{mj,1}^{(R_y)} - w_{mj,2}^{(R_y)} - w_{mj,3}^{(R_y)} + w_{mj,4}^{(R_y)}, \\
S_{31} &= -w_{mj,1}^{(R_x)} + w_{mj,2}^{(R_x)} + w_{mj,3}^{(R_x)} - w_{mj,4}^{(R_x)}.
\end{aligned} \tag{C.11}$$

As we mentioned above, these quantities determine all the bilinear covariants, and thus reconstruct the spinor $|\psi\rangle$ as in the previous section. Moreover, the 6 relations $J_0 = J_0^{(R_x)} = J_0^{(R_y)} = J_0^{(R_z)}$, $S_{01} = S_{01}^{(R_x)}$, $J_2 = J_2^{(R_y)}$, $S_{12} = S_{12}^{(R_z)}$ in (b)-(d) yield 6 constraint equations among the 16 marginals above. This can be used to reduce the number of marginals in eqs. (C.11).

It is important to note that, in the above reconstruction of $|\psi\rangle$, we did not employ boosts. Indeed, the relevant tomographic group was generated by the Λ 's in the rotation subgroup $SO(3)$ of the Lorentz group $\mathcal{L}$. This corresponds to elements L in a $SU(2)$ subgroup of the associated covering group $\tilde{\mathcal{L}} = Spin_{1,3}^c \cong Sl(2, \mathbb{C})$.

C.3.1 A continuous alternative

From our previous discussion, we see that a crucial step to the tomographic recovering process is to reconstruct a vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ if one of its components is known in all frames. Let us fix a reference frame K and let us denote the K -components of $\mathbf{v}$ by (v^1, v^2, v^3) . Suppose we know the third component of $\mathbf{v}$ in all frames. Given another reference frame K' , if θ and φ are the polar and azimuthal angles of $\mathbf{e}'_3$ in relation to K , we have

$$\mathbf{e}'_3(\theta, \varphi) = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3.$$

Let $\nu(\theta, \varphi)$ be the third K' -component of $\mathbf{v}$, i.e. $\nu(\theta, \varphi) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_3$. Then, we can reconstruct $\mathbf{v}$ from $\nu(\theta, \varphi)$ by at least two procedures:

(I) Discrete method As $\mathbf{e}'_3(\pi/2, 0) = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}'_3(\pi/2, \pi/2) = \mathbf{e}_2$ and $\mathbf{e}'_3(0, 0) = \mathbf{e}_3$ we have $v^1 = \nu(\pi/2, 0)$, $v^2 = \nu(\pi/2, \pi/2)$ and $v^3 = \nu(0, 0)$. Thus, $\mathbf{v} = \nu(\pi/2, 0)\mathbf{e}_1 + \nu(\pi/2, \pi/2)\mathbf{e}_2 + \nu(0, 0)\mathbf{e}_3$. This is the reconstruction method we used in the previous section.

(II) Continuous method This method goes along the lines of [9, 10], in which all the directions (θ, φ) are considered. The idea is to recover $\mathbf{v}$ by an integral transformation of $\nu(\theta, \varphi)$:

$\mathbf{v} = \int_{S^2} d\Omega \mathbf{A}(\theta, \varphi) \nu(\theta, \varphi)$, where $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ is the solid angle element on the sphere. There is a lot of ambiguity in choosing the kernel $\mathbf{A}(\theta, \varphi)$, but a simple choice is given by $\mathbf{A}(\theta, \varphi) = (\frac{2}{\pi^2} \cos \varphi, \frac{2}{\pi^2} \sin \varphi, \frac{3}{4\pi} \cos \theta)$.

Each of the methods above leads to a different set of tomographic quantities describing the spinor. In the previous section, we employed a discrete method. On the other hand, if the continuous method is employed, the spinor would be described in terms of continuous variables analogous to $\nu(\theta, \varphi)$.

C.4 On the choice of the gamma matrix representation

In this section, we discuss the dependence of the tomographic approach developed above on the choice of the gamma matrix representation. Consider the expression (C.9) for $w_k^{(\Lambda)}$ in terms of the projection operators in eqs. (C.5):

$$w_k^{(\Lambda)} = \langle \bar{\psi} | L^{-1} \gamma_0 P_k L | \psi \rangle. \quad (\text{C.12})$$

Of course, the functional dependence of P_k in terms of γ_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, depends on the particular choice of the gamma matrix representation. For the Majorana representation, this is given by eqs. (C.7). A straightforward calculation shows that the analogous expressions for the standard and chiral representations are

$$P_k^{st} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_0^{st}) \frac{1}{2} (1 \pm i \gamma_{12}^{st}), \quad (\text{C.13a})$$

$$P_k^{ch} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_{30}^{ch}) \frac{1}{2} (1 \pm i \gamma_{0123}^{ch}), \quad (\text{C.13b})$$

where the $\pm$ signs vary with k . It follows from eq. (C.12) that

$$w_{st,k}^{(\Lambda)} = \frac{1}{4} \left[\Omega_1^{(\Lambda)} \pm J_0^{(\Lambda)} \pm S_{12}^{(\Lambda)} \pm K_3^{(\Lambda)} \right], \quad (\text{C.14a})$$

$$w_{ch,k}^{(\Lambda)} = \frac{1}{4} \left[J_0^{(\Lambda)} \pm J_3^{(\Lambda)} \pm K_0^{(\Lambda)} \pm K_3^{(\Lambda)} \right]. \quad (\text{C.14b})$$

For the standard representation, we see from eq. (C.14a) that, by performing rotations, we can recover $\Omega_1, J_0, S_{23}, S_{31}, S_{12}, K_1, K_2$ and K_3 from the marginals. Unfortunately, these bilinear covariants apparently do not suffice to entirely recover a generic Dirac spinor, with 7 degrees of freedom (discounting a global phase). This is more easily seen from the form of the generators of rotations (associated with the standard representation):

$$i\gamma_{jk}^{st} = \frac{i}{2} [\gamma_j^{st}, \gamma_k^{st}] = \begin{pmatrix} \sigma_l & 0 \\ 0 & \sigma_l \end{pmatrix}, \quad (jkl) \text{ cyclic}, l = 1, 2, 3.$$

It follows that rotations do not mix the first two components (i.e. ψ_1 and ψ_2) of $|\psi\rangle = (\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4)^t$ with the last ones (i.e. ψ_3 and ψ_4). In this way, the relative phase between the first and the last set

of components of $|\psi\rangle$ cannot be recovered solely with rotations. On the other hand, if boosts were allowed to reconstruct the spinor, then we could also obtain J_1, J_2, J_3 (from J_0), S_{01}, S_{02}, S_{03} (from S_{23}, S_{31}, S_{12}) and K_0 (from K_3). This would certainly reconstruct the spinor. Therefore, we have shown that, in the standard representation, the state can be reconstructed by means of restricted Lorentz transformations, but not through rotations (cf introduction).

For the chiral representation, we see from eq. (C.14b) that even if the whole Lorentz group is used, we can only recover J_μ and K_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, from the marginals. This is not sufficient to reconstruct all the bilinear covariants for a generic Dirac spinor, with 7 degrees of freedom (discounting a global phase). In fact, we know from the Fierz identities that $J^\mu J_\mu = -K^\mu K_\mu$ and $J^\mu K_\mu = 0$, and thus there are only 6 independent quantities in J_μ and K_μ . This situation changes if $|\psi\rangle$ is a Weyl spinor, corresponding to a massless spin-1/2 particle. In that case, we always have $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ and $S = 0$ [26] and then the reconstruction process could proceed as before. Note that the marginals $w_{ch,k}$ are associated with the probability of finding the particle with positive/negative chirality and spin up/down (in the z -direction). As a massless particle has definite chirality, the knowledge of the $w_{ch,k}$, $k = 1, 2, 3, 4$, would be enough information to recover its state. But, as we have seen, this is not true for a massive particle. This shows our claim (see introduction) that, in the chiral representation, the state of a massive particle cannot be reconstructed from spacetime symmetries, i.e., with G contained in $\tilde{\mathcal{L}}$.

Therefore, unlike the Majorana representation, neither the standard nor the chiral representations can be isolatedly used in such a tomographic scheme, based on rotations, for a generic Dirac spinor. A way out of this difficulty is to combine the marginals coming from both the standard and the chiral transformations. We see from the above discussion that, by performing rotations, we can then recover $\Omega_1, J_\mu, S_{23}, S_{31}, S_{12}$ and K_μ . These 12 bilinear covariants determine the rest of them through the Fierz identities, and we can proceed as before.

We would like to emphasize that, as Dirac spinors are objects in $\mathbb{C}^4$, a tomographic scheme based on $SU(4)$ -transformations would work irrespective of the choice of the gamma matrix representation. The representation dependence of the scheme proposed here is a direct consequence of our physical demand that the tomographic group be *generated by spacetime transformations*. As we discussed in the introduction, besides leading to a natural parallel with the non-relativistic case, this assumption yields a clear physical meaning to the tomographic transformations.

The general case

It is well known that an arbitrary representation $\{\gamma_\mu\}$ of the gamma matrices can be written as $\gamma_\mu = U\gamma_\mu^{st}U^{-1}$, where γ_μ^{st} corresponds to the standard representation and U is a unitary matrix (along with the corresponding transformation $|\psi\rangle \rightarrow U|\psi\rangle$ for the spinor). It follows from eq. (C.13a)

that, in terms of the new gamma matrices $\{\gamma_\mu\}$:

$$P_k = \frac{1}{2}(1 \pm u)\frac{1}{2}(1 \pm i\sigma),$$

where $u = U^{-1}\gamma_0^{st}U$ and $\sigma = U^{-1}\gamma_{12}^{st}U$. The discussion above shows that a tomographic scheme, based on spacetime transformations, works for the representation $\{\gamma_\mu\}$ only if the bilinear covariants associated with γ_0 , $\gamma_0 u$, $\gamma_0 \sigma$ and $\gamma_0 u \sigma$ are independent enough to reconstruct the spinor. It may happen that such a reconstruction is possible using only spatial rotations (as in the Majorana representation), or using necessarily boosts and rotations (as in the standard representation), or even not possible inside the Lorentz group (as in the chiral representation, with massive particles).

C.5 Concluding remarks

We have presented a tomographic scheme, based on spacetime transformations, for the reconstruction of the internal degrees of freedom of a Dirac spinor. The assumption that the tomographic group G is generated by spacetime transformations was shown to restrict the choice of the gamma matrices. The cases of standard, chiral and Majorana representations were studied in detail. We also analyzed under what conditions G can be taken as $SU(2)$. A direct tomographic process based on discrete rotations was considered, as well as a continuous alternative. Finally, as we mentioned in the introduction, the method considered here might be useful for obtaining an analogue of the Dirac equation in terms of tomographic quantities.

Acknowledgments *The authors are grateful to M. O. Terra Cunha and R. Rocha Jr for valuable suggestions. RAM acknowledges support from FAPESP (process number 98/16486-8). JV is grateful to CNPq (300707/93-2) and FAPESP (01/01618-0) for partial financial support.*

References

- [1] E. Wigner, “On the quantum correction for thermodynamic equilibrium”, *Phys. Rev.* **40**, 729 (1932).
- [2] J. E. Moyal, “Quantum Mechanics as a Statistical Theory”, *P. Camb. Philos. Soc.* **45**, 99 (1949).
- [3] R. Feynman, in: *Quantum Implications*, p. 235, B. J. Hiley and F. D. Peats (eds.), Routledge & Keagan, London, 1987.
- [4] J. Bertrand and P. Bertrand, “A tomographic approach to Wigner function”, *Found. Phys.* **17**, 397 (1987).
- [5] K. Vogel and H. Risken, “Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distribution for the rotated quadrature phase”, *Phys. Rev. A* **40**, 2847 (1989).
- [6] S. Mancini, V. I. Man’ko and P. Tombesi, “Different realizations of the tomographic principle in quantum state measurement”, *J. Mod. Opt.* **44**, 2281 (1997). Also quant-ph/9709012.

- [7] S. Mancini, V. I. Man'ko and P. Tombesi, "Symplectic tomography as classical approach to quantum systems", *Phys. Lett. A* **213**, 1 (1996);
- [8] S. Mancini, V. I. Man'ko and P. Tombesi, "Classical-like description of quantum dynamics by means of symplectic tomography", *Found. Phys.* **27**, 801 (1997). Also quant-ph/9609026.
- [9] V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, "Positive distribution description for spin states", *Phys. Lett. A* **229**, 335 (1997).
- [10] V. I. Man'ko and O. V. Man'ko, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **112**, 796 (1997); Engl. Transl.: "Spin state tomography", *JETP* **85**, 430 (1997).
- [11] U. Leonhardt, "Discrete Wigner function and quantum-state tomography", *Phys. Rev. A* **53**, 2998 (1996).
- [12] G. Cassinelli, G. M. D'Ariano, E. De Vito, A. Leviero, "Group theoretical quantum tomography", *J. Math. Phys.* **41**, 7940 (2000). Also quant-ph/0004026.
- [13] S. Mancini, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko and P. Tombesi, "The Pauli equation for probability distributions", *J. Phys. A* **34**, 3461 (2001). Also quant-ph/0005058.
- [14] M. O. Terra Cunha, V. I. Man'ko, M. O. Scully, "Quasiprobability and probability distributions for spin 1/2 states", *Found. Phys. Lett.* **14**, 103 (2001). Also quant-ph/0102038.
- [15] S. Weigert, "Quantum time evolution in terms of nonredundant probabilities", *Phys. Rev. Lett.* **84**, 802 (2000).
- [16] S. Mancini, V. I. Man'ko and P. Tombesi, "Relativistic properties of marginal distributions", *Phys. Scr.* **58**, 421 (1998). Also quant-ph/9806035.
- [17] E. Wigner, "On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group", *Annals Math.* **40**, 149 (1939); reprinted in *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **6**, 9 (1989).
- [18] C. Itzykson and J. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, Singapore, 1980.
- [19] L. de Broglie, *L'Electron Magnétique (Théorie de Dirac)*, Hermann et cie, Paris, 1934.
- [20] T. Takabayasi, "Relativistic Hydrodynamics of the Dirac Matter", *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **4**, 1 (1957).
- [21] G. Baym, *Lectures on Quantum Mechanics*, W. A. Benjamin, New York, 1969.
- [22] P. R. Holland, *Quantum Theory of Motion*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [23] J. P. Crawford, "Dirac equation for bispinor densities", pp. 353-361, in: *Proceedings of NATO and SERC Workshop on Clifford Algebras and Their Application in Mathematical Physics*, Canterbury, 1985, S. R. Chisholm and A. K. Common (eds.), NATO ASI C-183 (Reidel, Dordrecht, 1985).
- [24] P. R. Holland, "Relativistic algebraic spinors and quantum motions in phase space", *Found. Phys.* **16**, 701 (1986).
- [25] J. P. Crawford, "On the algebra of Dirac bispinor densities: factorization and inversion theorems", *J. Math. Phys.* **26**, 1439 (1985).
- [26] P. Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*, London Math. Soc. Lec. Note Series 239, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

- [27] J. P. Crawford, “Bispinor geometry for even-dimensional space-time”, J. Math. Phys. **31**, 1991 (1990).

Apêndice D

Lista de publicações

- Mosna R. A., Miralles D. e Vaz J., “Multivector Dirac equations and $\mathbb{Z}_2$ -gradings of Clifford algebras”, Int. J. Theor. Phys. **41**, 1651-1671 (2002).
- Mosna R. A., Miralles D. e Vaz J., “ $\mathbb{Z}_2$ -gradings of Clifford algebras and multivector structures”, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 4395–4405 (2003), math-ph/0212020.
- Mosna R. A. e Vaz J., “Quantum tomography for Dirac spinors”, Phys. Lett. A **315**, 418-425 (2003), quant-ph/0303072.
- Mosna R. A. e Rodrigues W. A., “The Bundles of Algebraic and Dirac-Hestenes Spinor Fields”, aceito para publicação em J. Math. Phys., vol. 45, n° 7 (2004), math-ph/0212033.
- Mosna R. A. e Pereira J. G., “Some remarks on the coupling prescription of teleparallel gravity”, aceito para publicação em Gen. Relat. Gravit., gr-qc/0312093.
- Mosna R. A. e Vaz J., “Dirac-Kähler equation and electroweak interactions”, em preparação.

