

Tese de doutorado

Extensores de Distorção e Rotação na Teoria da Gravitação de Einstein

VIRGINIA VELMA FERNÁNDEZ

Instituto de Física “Gleb Wataghin” UNICAMP

Orientador: Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr.

Este exemplar corresponde à redação final da tese de doutorado defendida pela aluna Virginia Velma Fernández e aprovada pela comissão julgadora

15 de dezembro de 2000

Modique

Campinas 30 de novembro de 2000

UNIDADE	IFGW
N.º CHAMADA:	IF/1057
	Unicamp
F391m	
V.	Ex.
TOMBO	29.576
PROC.	281.97
C	☐
D	☒
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	08/02/97
N.º CPD	em.000966.75.2

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

F391m Fernández, Virginia Velma
Modelo de partícula clássica com spin / Virginia Velma Fernández. -- Campinas, SP : [s.n.] 1995.

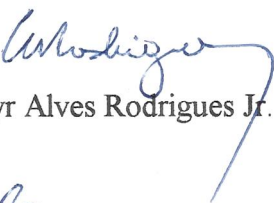
Orientador: Waldyr A. Rodrigues Júnior.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

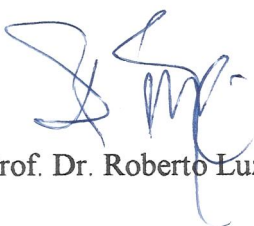
1.*Spin do eletron. 2. Lagrange, Equações de
3. Leis de conservação (Física). I. Rodrigues Júnior, Waldyr Alves. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

PARECER DE APROVAÇÃO
DEFESA DE TESE DE MESTRADO DE
VIRGÍNIA VELMA FERNÁNDEZ

DATA: 08 / 06 / 95

BANCA EXAMINADORA:


- Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr. (Orientador)


- Prof. Dr. Roberto Luzzi


- Prof. Dr. Guillermo Gerardo Cabrera Oyarzún

*Para meu pai
Amado Fernández e
Sabrina*

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu companheiro, Antonio M. Moya, pelo grande apoio durante a realização deste trabalho; e pelas suas oportunas discussões e críticas objetivas.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr., por ter-me sinalado o caminho e especialmente por ter-me permitido trabalhar com liberdade de ação e pensamento.

Agradeço ainda a minha família pela sua confiança em mim e no meu trabalho.

Gostaria de agradecer também à Fátima da Secretaria do DMA-IMECC, por datilografar o texto da Tese.

Finalmente agradeço ao CNPq o apoio financeiro na elaboração deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho estudamos um modelo de partícula clássica com spin proposto originalmente por Barut-Zanghi (1984); e reformulado no Formalismo do Fibrado de Clifford por Pavšic, Recami, Rodrigues Jr. (1993).

Desenvolvemos alguns teoremas de conservação e observamos a consistência deste modelo de Barut-Zanghi com as leis de conservação; damos ainda alguns argumentos heurísticos que nos conduzem a uma apropriada Hamiltoniana.

ABSTRACT

In this work we study a model of classical particle with spin that was first originally suggested by Barut-Zanghi (1984); it has recently translated into Clifford Fiber Bundle Formalism by Pavšic, Recami, Rodrigues Jr. (1993).

We develop some conservation theorems and point out the consistency of Barut-Zanghi model within the conservation laws; we also set any heuristic arguments yielding to an appropriate Hamiltonian for this one.

ÍNDICE

Introdução:	i
Capítulo 1: Preliminares	1
1. Introdução à Teoria de Espaço Linear	1
1.1 Multiformas sobre um Espaço Linear	1
1.2 Produto de Multiformas	2
1.3 Álgebra Exterior de Multiformas. Álgebra de Clifford de Multiformas	3
2. Introdução à Teoria de Variedades	4
2.1 Anel dos Campos Escalares	4
2.2 Módulo dos Campos Vetoriais. Módulo dos Derivadores	4
2.3 Módulo dos Campos k -Tensoriais	5
2.4 Módulo dos Campos Multiformas	6
2.5 Fibrado de Clifford	6
2.6 Campos sobre uma Curva Suave	6
2.7 Teorema	8
Capítulo 2: Formalismo Lagrangeano no Fibrado de Clifford	9
2.1 Espaço-Tempo Minkowskiano	9
2.2 Derivadas Parciais de Campos sobre a Variedade Minkowskiana	11
2.3 Derivada Absoluta de Campos sobre uma Linha-Mundo	12
2.4 Aplicações de Hestenes	14
2.5 Formalismo Lagrangeano	15
Capítulo 3: Modelo de Partícula Clássica com Spin	17
3.1 Lagrangeano de Barut-Zanghi	17
3.2 Conservação do Momento	21
3.3 Conservação da Energia	21
3.4 Conservação do Momento Angular	22

3.5 Hamiltoniana de Barut-Zanghi	23
Conclusões	27
Apêndice A	28
A. Teoria Eletromagnética	28
B. Partícula de Dirac-Hestenes	29
Apêndice B	31
A. Relação entre a Partícula Livre de Dirac e a Partícula Livre de Barut-Zanghi	31
B. Uma Base Lorentziana Natural para a Partícula de Barut-Zanghi	32
Apêndice C	35
A. Base Lorentziana Fundamentais	35
B. Espaço Tangente de Multiformas. Álgebra de Grassmann	36
C. Álgebra do Espaço-Tempo (STA)	36
Referências	39

Introdução

O objetivo principal desta tese é a apresentação do cálculo multivetorial e extensorial sobre variedades diferenciáveis e suas aplicações à Teoria da Relatividade Geral (*TRG*) de Einstein.

Aqui apresentamos as motivações para nossa empreitada¹.

Recordamos que na *TRG* o campo gravitacional é interpretado de uma maneira completamente diversa aos demais campos físicos; de fato, o campo gravitacional é interpretado canonicamente como uma propriedade geométrica do espaço-tempo^[1,4,53].

Cada campo gravitacional é modelado por uma quádrupla $\langle M, g, I_g, D \rangle$, onde:

(i) M é uma variedade diferenciável de dimensão quatro, paracompacta, conexa, orientada pelo elemento de volume $I_g \in \sec \Lambda^4(M)$, e orientada no tempo^[2,5].

(ii) $g \in \sec T_2^0(M)$ é um tensor simétrico com assinatura -2 , chamado de *métrica Lorentziana sobre M* (descreve o campo gravitacional na *TRG*).

(iii) D é a conexão de Levi-Civita de g .

A teoria supõe que *partículas* e *campos* movem-se como configurações especiais sobre a variedade diferenciável M .

As partículas são descritas por triplas $\langle (m, q), S, \sigma \rangle$ onde m (com $0 \leq m < \infty$) é a *massa* da partícula, q (com $-\infty < q < \infty$) é um parâmetro chamado de *carga elétrica* da partícula, S é o *spin* da partícula², e σ é uma curva regular dita a *linha de universo* da partícula.

Se $m > 0$ a partícula é dita um *bradyon*, e neste caso σ é uma *curva tipo-tempo* (que aponta para o futuro).

Se $m = 0$ a partícula é dita um *luxon*, e neste caso σ é uma *curva tipo-luz*.

Os campos físicos são modelados por seções especiais do fibrado tensorial ou de fibrados spinoriais apropriados.

As linhas de universo, que representam o movimento das partículas, bem como as variáveis tensoriais (ou spinoriais), que descrevem os campos físicos, satisfazem *sistemas de equações diferenciais* (em geral, chamadas de *leis de movimento*) nos quais aparece sempre o tensor métrico!

¹Supomos que o leitor está familiarizado com os conceitos da teoria de variedades, no nível apresentado nas refs. [1] e [56]

²Não será necessário caracterizarmos o spin no que segue.

O *conteúdo energético* de um sistema de partículas e/ou campos físicos é descrito pelos respectivos *tensores de energia-momento* $\mathbf{T}_p$ e $\mathbf{T}_c \in \sec T_0^2(M)$. Como é bem sabido, esses objetos aparecem no segundo membro da *equação de Einstein*^[6,9,11]. Já no primeiro membro, aparece um tensor, dito o *tensor de Einstein*.

A equação de Einstein pode ser escrita (após uma escolha conveniente de uma carta local sobre $U \subset M$), como um sistema de dez equações diferenciais não lineares que envolvem uma combinação de derivadas de primeira e segunda ordens das componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

A equação de Einstein é muitas vezes descrita de maneira pictórica^[1] dizendo-se que “a geometria diz como a matéria deve se *mover* e por seu turno a matéria diz com a geometria deve se *curvar*”. Esta descrição pictórica induz o iniciante a imaginar que de alguma forma a variedade diferenciável M que modela o espaço-tempo é curva. É necessário então que esclareçamos rigorosamente o que significa este conceito.

Recordemos que do ponto de vista matemático uma variedade diferenciável por si só possui apenas estrutura topológica e de diferenciabilidade das cartas de seu atlas maximal. Deve ficar bem claro que a estrutura topológica de M não é fixada na *TRG*, mais precisamente, a topologia de M é introduzida “à mão” em problemas e situações especiais^[12]. Por outro lado, M pode suportar diversas estruturas de espaços geométricos distintos.

No que segue diremos que um par $\langle M, \mathbf{D} \rangle$, onde M é uma variedade diferenciável e $\mathbf{D}$ é uma conexão arbitrária sobre M , é um *espaço dotado de regra de paralelismo*. Diremos que a tripla $\langle M, \mathbf{g}, \mathbf{D} \rangle$, onde M é uma variedade diferenciável, $\mathbf{D}$ é uma conexão sobre M e $\mathbf{g}$ é um tensor métrico sobre M é uma *estrutura de espaço geométrico*³. A assinatura do tensor métrico não precisa ser -2 , e de fato, é conveniente para nossos propósitos classificarmos estruturas geométricas onde $\mathbf{g}$ possui assinatura euclidiana $+4$.

Os objetos geométricos que caracterizam uma *estrutura de espaço geométrico* (ou simplesmente, *espaço geométrico*) são os campos tensoriais chamados⁴:

(i) *ametricidade* de $\mathbf{D}$, $\mathfrak{A} \in T_3^0(M)$,

$$\mathfrak{A} = \mathbf{D}\mathbf{g}. \quad (0.1)$$

³Dizemos indistintamente estrutura de espaço geométrico, ou simplesmente, espaço geométrico.

⁴As definições precisas destes objetos geométricos são dadas no capítulo 3.

(ii) *torsão* de $\mathbf{D}$, representada por um tensor $\mathfrak{T} \in T_2^1(M)$,

(iii) *curvatura Riemanniana* de $\mathbf{D}$, representada por um tensor $\mathfrak{R} \in T_3^1(M)$.

Os espaços-geométricos são ditos:

(a) espaço de Riemann-Cartan-Weyl ses $\mathfrak{A} \neq 0, \mathfrak{T} \neq 0, \mathfrak{R} \neq 0$,

(b) espaço de Riemann-Cartan ses $\mathfrak{A} = 0, \mathfrak{T} \neq 0, \mathfrak{R} \neq 0$,

(c) espaço de Riemann ses $\mathfrak{A} = \mathfrak{T} = 0, \mathfrak{R} \neq 0$.

■ Espaços chatos e espaços afins

Os espaços-geométricos $\langle M, \mathbf{g}, \mathbf{D} \rangle$ tais que $\mathfrak{A} = \mathfrak{T} = \mathfrak{R} = 0$ são ditos *espaços de Riemann (globalmente) chatos*.

Espaços dotados de estrutura de paralelismo onde $\mathfrak{T} = \mathfrak{R} = 0$ (globalmente) homeomorfos a $\mathbf{R}^n$, podem ser identificados com *espaços afins* da mesma dimensão.

Espaços afins de dimensão n são denotados por $\mathcal{A}^n$.

Também, espaços de Riemann chatos homeomorfos a $\mathbf{R}^n$ podem ser identificados com espaços afins.

Espaços afins dotados de tensor métrico euclidiano são denotados por $\mathbf{E}^n$, e ditos *euclidianos*.

Como é bem conhecido^[13,14], espaços afins possuem a propriedade fundamental de que sobre eles é possível definir-se uma operação dita diferença entre dois pontos, tal que se $p, q \in \mathcal{A}^n$ (ou $p, q \in \mathbf{E}^n$) são elementos de um dado espaço afim a diferença $(p - q) \in \mathbf{V}$, onde $\mathbf{V}$ é um espaço vetorial real de dimensão n . De uma maneira pictórica podemos dizer que um espaço afim é “um espaço vetorial do qual roubaram a origem”. Isto é, fixando-se um ponto arbitrário $o \in \mathcal{A}^n$ (dito origem) de um espaço afim, a diferença de qualquer ponto p do espaço afim em relação à origem $(p - o) \in \mathbf{V}$ é um vetor que apropriadamente pode-se chamar o vetor de posição de p .

Da classificação dada acima dos espaços geométricos fica claro que *curvatura* não é uma propriedade da variedade M , mas sim uma propriedade da conexão particular $\mathbf{D}$ que se introduz sobre M . Este ponto é crucial pois é bastante comum *confusões notáveis* entre o *conceito de curvatura* e o *conceito de entortamento* de uma *hipersuperfície*, o que leva a interpretações equivocadas e mesmo psicodélicas sobre o conteúdo físico e matemático da *TRG*. Mais especificamente, recordemos que qualquer variedade diferenciável (parte de um espaço geométrico) pode ser pensada como uma hipersuperfície mergulhada^[15] em um espaço euclidiano de dimen-

são apropriada⁵.

► Como primeiro exemplo, consideremos uma superfície cilíndrica $\mathcal{C}$ de dimensão 2 mergulhada em $\mathbf{E}^3$. Usando-se como métrica sobre $\mathcal{C}$ a métrica induzida de $\mathbf{E}^3$ (o espaço euclidiano tridimensional) e como conexão sobre $\mathcal{C}$ a conexão de Levi-Civita da métrica induzida de $\mathbf{E}^3$, pode-se verificar sem dificuldades que o *cilindro é chato*. Entretanto, um cilindro $S^1 \times \mathbf{R}$ é bem *diferente* de um plano $\mathbf{R}^2$ do ponto de vista topológico.

Existe um objeto geométrico, dito *tensor de forma*^[55] que caracteriza variedades diferenciáveis quando estas são entendidas com superfícies mergulhadas em $\mathbf{E}^3$. O tensor de forma caracteriza o *entortamento* das superfícies, e distingue um cilindro chato (com a definição dada acima) de um plano (que é o protótipo de uma superfície chata). Para um plano o tensor de forma é nulo em qualquer ponto, enquanto que para um cilindro o tensor de forma não é nulo.

► Um outro exemplo digno de nota é o seguinte^[16]:

(A) Consideremos o toro $\mathcal{T}_1$ como uma superfície mergulhada em $\mathbf{E}^3$, e representado nas coordenadas canônicas pela equação,

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2). \quad (0.2)$$

$\mathcal{T}_1$ é uma variedade diferenciável de dimensão 2. Se consideramos sobre $\mathcal{T}_1$ uma estrutura de espaço geométrico, onde a métrica é a induzida de $\mathbf{E}^3$ e a conexão é a de Levi-Civita da métrica induzida de $\mathbf{E}^3$, então o *toro é curvo*, como é fácil verificar.

(B) O subconjunto $\mathcal{T}_2$ de $\mathbf{E}^4$,

$$\mathcal{T}_2 = \{x \in \mathbf{E}^4 / (x^1)^2 + (x^2)^2 = (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1\}, \quad (0.3)$$

é difeomorfo ao toro $\mathcal{T}_1$ definido em (A).

A estrutura de espaço geométrico definida sobre $\mathcal{T}_2$, onde a métrica é a induzida de $\mathbf{E}^4$ (métrica euclidiana) e a conexão é a de Levi-Civita da métrica induzida de $\mathbf{E}^4$, é *globalmente chata*, i.e., $\mathfrak{T} = \mathfrak{R} = 0$.

Estes exemplos deixam claro que não se pode confundir curvatura com entortamento.

⁵Aqui, apenas recordamos que uma estrutura geométrica, parte de uma estrutura espaço-tempo da *TRG* pode ser mergulhada^[12] em um espaço afim de dimensão 10.

Vemos desses exemplos que uma mesma variedade quando interpretada como uma hipersuperfície num espaço euclidiano de dimensão maior pode ou não ser curva! (ainda que herde como tensor métrico o tensor induzido daquela variedade onde encontra-se mergulhada, e ainda que se considere a superfície como equipada com a conexão de Levi-Civita da métrica induzida).

Em particular, no nosso exemplo, para o toro ser chato precisa ser mergulhado em um espaço de dimensão maior do que no caso em que ele é curvo!

► Mais um exemplo será útil para esclarecermos de vez a questão da curvatura.

Consideremos a esfera $S^2 \subset \mathbf{E}^3$, ela é claramente entortada como superfície mergulhada em $\mathbf{E}^3$.

Ela é uma superfície com curvatura de Riemann não nula (no caso, curvatura constante) quando interpretada com parte de uma estrutura de espaço-geométrico com tensor métrico induzido do tensor métrico de $\mathbf{E}^3$ e com conexão que é a de Levi-Civita da métrica induzida de $\mathbf{E}^3$.

Entretanto, é possível definir uma estrutura de espaço geométrico sobre a esfera, em relação à qual a esfera é um espaço de Riemann-Cartan, i.e., ela é chata (sua curvatura é nula), mas possui torsão!

De fato^[17], considere a seguinte regra de paralelismo sobre S^2 como mostra a Fig. 0.1, (ver pag.12). Definimos que um vetor é transportado paralelamente ao longo de uma curva se o ângulo entre o vetor e a latitude é mantido constante durante o deslocamento. Vê-se claramente que se transportamos um vetor ao longo do quadrilátero *infinitesimal* pqrs feito por latitudes e longitudes, primeiramente a partir de p ao longo de pqr e em seguida transportamos o mesmo vetor, a partir de p ao longo de psr, os vetores transportados paralelamente que resultam nos dois casos coincidirão, i.e., serão *paralelos*, e de acordo com a definição do tensor de curvatura de Riemann, a curvatura da esfera enquanto parte de uma especial estrutura de espaço geométrico é nula.

Por outro lado, é fácil de ver que a nossa estrutura de espaço geométrico possui torsão.

Considere a fig. 0.2 (ver pag.12), que mostra uma parametrização dos pontos p, q, r, s em termos das coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) .

De acordo com a definição, encontramos a torsão calculando-se a diferença entre pr_1 e pr_2 . Se transportamos o vetor pq ao longo de ps obtemos o vetor sr_1 cujo comprimento pela métrica

induzida de $\mathbf{E}^3$ é $R \sin \theta d\phi$. Se transportarmos o vetor pq ao longo de pr obtemos o vetor $qr_2 = qr$. Agora, o comprimento do vetor sr é

$$R \sin(\theta - d\theta) d\phi \simeq R \sin \theta d\phi - R \cos \theta d\theta d\phi, \quad (0.4)$$

encontramos que o vetor $r_1 r_2$ tem comprimento $R \cos \theta d\theta d\phi$ e encontra-se na direção $-\partial/\partial\phi$.

A conexão de Riemann-Cartan que implementamos sobre S^2 tem portanto torsão $\mathfrak{T}_{\theta\phi}^\phi$.

Sendo $g_{\phi\phi} = R^2 \sin^2 \theta$, vemos que o vetor $r_1 r_2$ possui componentes $(0, -\cot \theta d\theta d\phi)$ e portanto a componente dele na direção $\partial/\partial\phi$ é $\mathfrak{T}_{\theta\phi}^\phi d\theta d\phi$. E assim,

$$\mathfrak{T}_{\theta\phi}^\phi = -\cot \theta. \quad (0.5)$$

É importante ter em mente que a base natural $\{\partial/\partial\theta, \partial/\partial\phi\}$ não é bem definida nos polos. Tal é devido ao fato bem conhecido^[9,15] de que S^2 não admite dois campos vetoriais linearmente independentes em todos os pontos. Qualquer campo vetorial sobre S^2 necessariamente se anula em algum ponto, digamos l em S^2 , e portanto não pode ser linearmente independente de qualquer outro campo vetorial que não se anule em l .

Uma variedade diferenciável M de dimensão n que admita n campos vetoriais linearmente independentes $\{e_i \in \sec TM, i = 1, 2, \dots, n\}$ em todos os pontos de M é dita ser *paralelizável*.

A estrutura de espaço geométrico $\langle M, \mathbf{g}, \mathbf{D} \rangle$ que além de um espaço de Riemann-Cartan seja também paralelizável e tal que

$$D_{e_j} e_i = 0, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n \quad (0.6)$$

é dito um *espaço teleparalelo*.

Estes espaços teleparalelos, como pode-se verificar sem dificuldade, possuem *curvatura nula mas torsão não nula*, têm sido usados recentemente em formulações alternativas^[50] da *TRG* (ditas interpretações teleparalelas).

Dos exemplos expostos fica claro que uma variedade diferenciável M de dimensão n pode ser topologicamente equivalente a um plano n -dimensional, e contudo, pode suportar uma estrutura de espaço geométrico na qual a conexão possua curvatura e/ou torsão não nulas.

Esta observação é importante quando se pretende interpretar o campo gravitacional em teorias matematicamente equivalentes à TRG , não como uma componente da estrutura de espaço geométrico, mas sim como um campo físico no sentido de Faraday (como é o caso, por exemplo, do campo eletromagnético). Mas, pode-se perguntar, por quê desejar uma interpretação do formalismo matemático da TRG na qual o campo gravitacional perca o seu status de componente básico da estrutura de espaço geométrico? A razão será dada em seguida.

■ Vetores de Killing, simetrias e leis de conservação

Nesta seção, generalizaremos as estruturas de espaço geométricos, na linha de idéias da TRG , para obtermos as chamadas estruturas de espaço-tempo.

Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão finita (não necessariamente 4) que satisfaz as propriedades pedidas na definição de um espaço-tempo da TRG (em particular, sendo orientada por I_g , etc...), $\mathbf{g}$ uma métrica Lorentziana (de assinatura -2) e ∇ uma conexão arbitrária sobre M .

Diremos que a quádrupla $\langle M, \mathbf{g}, I_g, \nabla \rangle$ é

- (a) espaço-tempo de Einstein-Cartan-Weyl ses $\mathfrak{A} \neq 0, \mathfrak{T} \neq 0, \mathfrak{R} \neq 0$,
- (b) espaço-tempo de Einstein-Cartan ses $\mathfrak{A} = 0, \mathfrak{T} \neq 0, \mathfrak{R} \neq 0$,
- (c) espaço-tempo de Einstein (também conhecido na literatura simplesmente como espaço Lorentziano) ses $\mathfrak{A} = \mathfrak{T} = 0, \mathfrak{R} \neq 0$.

Nestas definições, naturalmente, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$ e $\mathfrak{R}$, se referem aos tensores de ametricidade, torsão e curvatura da conexão arbitrária ∇ .

Seja dado um campo tensorial arbitrário $\mathbf{T}$. Diremos que um difeomorfismo $l : U \rightarrow U$ ($U \subset M$) gerado pelo pseudo-grupo a um parâmetro caracterizado pelo campo vetorial ξ , é uma *simetria de $\mathbf{T}$* se e somente se

$$\mathfrak{L}_\xi \mathbf{T} = 0, \quad (0.7)$$

onde $\mathfrak{L}_\xi$ é a derivada de Lie na direção de ξ .

Isso significa que o campo arrastado (também dito deformado)^[3,5] $l_* \mathbf{T}$ induzido pelo difeomorfismo l satisfaz

$$l_* \mathbf{T} = \mathbf{T}. \quad (0.8)$$

Para os espaço-tempos onde a dimensão de M é quatro, as *simetrias do tensor métrico* $\mathbf{g}$ desempenham um papel muito importante. De fato, pode-se mostrar que a equação

$$\mathcal{L}_\xi \mathbf{g} = 0, \quad (0.9)$$

dita a *equação de Killing* possui no máximo dez vetores de Killing, e o número maximal só ocorre para *espaço-tempos de Einstein com curvatura constante*.

Só existem três espaço-tempos deste tipo, que são os espaço-tempos de Minkowski, de Sitter e anti de Sitter.

O espaço-tempo de Minkowski é a estrutura matemática subjacente à Relatividade Especial.

Todas as teorias clássicas e quântica de campos (com exceção da *TRG*) são formuladas com partículas e/ou campos que se movem sobre o espaço-tempo de Minkowski que possui uma “métrica constante $\boldsymbol{\eta}$ ”.

Adotando-se o formalismo Lagrangiano pode-se mostrar que leis de conservação fidedignas de momento-energia e momento angular existem para todas as teorias físicas formuladas sobre o espaço-tempo de Minkowski. A prova^[12,13] depende *crucialmente* da existência dos vetores de Killing da métrica $\boldsymbol{\eta}$. Este fato é muito importante porque dado um espaço-tempo de Einstein onde a curvatura não é constante, não existem em geral vetores de Killing suficientes para se formular leis de conservação fidedignas do momento-energia e momento angular.

Muitas tentativas foram feitas para se introduzir leis de conservação no formalismo canônico da *TRG*, a maioria baseada na introdução de pseudo-tensores de momento-energia para o campo gravitacional⁶ ou com a introdução de estruturas adicionais sobre M . Sem maiores comentários de nossa parte transcrevemos (em inglês, para manter o sabor original) o que pensam os matemáticos Sachs e Wu (ver^[4], p.98) sobre a questão:

“It is a shame to loose the special relativistic total energy conservation law in general relativity. Many of the attempts to resurrect it are quite interesting; many are simply garbage”.

De fato, pode-se mostrar que a falta de leis de conservação na *TRG* gera incoerências. Isto foi enfatizado por Logunov e colaboradores^[18] e também por Bozhkov e Rodrigues^[19].

⁶O primeiro a introduzir um pseudo-tensor de momento-energia para o campo gravitacional foi Einstein^[10], mas pode-se introduzir uma infinidade de pseudo-tensores de momento-energia distintos. A razão para esta possibilidade pode ser encontrada, por exemplo, em [3], [53] e [54].

Depois de 85 anos de tentativas infrutíferas, mesmo os físicos que poderiam por todos os padrões denominar-se relativistas ortodoxos, como é o caso, por exemplo, de Grishchuk, começam a endossar o movimento de que a *TRG* precisa de revisão^[20,21]. Na revisão sugere-se que o campo gravitacional seja interpretado como um campo no sentido de Faraday que “vive” num espaço-tempo de Minkowski.

Antes de prosseguirmos, achamos digno de nota mencionar que os grandes físicos de partículas e teoria de campos deste século, Feynman^[22], Schwinger^[23] e Weinberg^[24,25] adotaram postura semelhante, e formularam teorias da gravitação em espaço-tempo de Minkowski. Esta também foi a postura desde muito tempo de Rosen^[26], também foi a de Poincaré no seu primeiro artigo sobre Relatividade^[27].

Uma *tentativa original* de uma formulação da teoria da gravitação no espaço-tempo de Minkowski foi proposta por Rodrigues e Souza^[2,3] em 1993. Estes autores, usando o formalismo do fibrado de Clifford^[2,3], mostraram que o espaço-tempo de Einstein, que representa um campo gravitacional na *TRG*, poderia ser interpretado como uma deformação do espaço-tempo de Minkowski produzida por um tensor especial $\mathbf{h} \in \sec T_2^0 M$, dito o *tensor de deformação*. Esta interpretação é convincente mas, apesar de seus esforços, Rodrigues e Souza não conseguiram produzir um formalismo matemático adequado para trabalhar diretamente com o tensor de deformação.

O *formalismo matemático* onde é possível trabalhar com um campo $(1, 1)$ -extensorial h , chamado de *campo extensorial de distorção* (um objeto geométrico “aparentado” com $\mathbf{h}$), só foi inventado recentemente, e recebeu o nome de *cálculo multivetorial e extensorial em variedades*.

O desenvolvimento deste cálculo em variedades, como apresentado nesta tese, tem origens em idéias matemáticas primeiramente propostas por Hestenes e Sobczyk no livro (já um clássico) “*Clifford Algebra to Geometrical Calculus*”^[28], e posteriormente formuladas com rigor por Moya^[29].

Os conceitos e a tecnologia (the tricks of the trade) do cálculo multivetorial e extensorial em variedades apresentados nesta tese são originais: a álgebra de Clifford canônica^[33], a álgebra de Clifford métrica^[34], as noções de derivação para as funções multivetoriais e para os funcionais multivetoriais^[37,38,39], as noções de derivação covariante para os campos multivetoriais e extensoriais sobre variedades diferenciáveis^[40,41] e a formulação dos conceitos de estruturas

geométricas e de espaço-tempo^[46,47].

Contudo, uma descrição rigorosa de todos os resultados matemáticos que obtivemos nesta tese ocuparia um espaço muito grande, e ademais tornaria a leitura dos capítulos que se seguem provavelmente muito áridas para serem apreciadas por físicos. Assim, optamos por uma apresentação informal dos principais resultados que foram obtidos, e providenciamos uma familiarização com os diversos conceitos por intermédio de uma quantidade suficiente de exemplos que variam de simples até bastante sofisticados, deixando a apresentação de provas de teoremas sofisticados, sem grande interesse para o desenvolvimento das idéias físicas, para as referências^[30,31].

Uma das características deste trabalho é uma apresentação nova da *teoria da derivação covariante* em variedades diferenciáveis^[30,40,41]. Assim, introduzimos conceitos genuinamente novos, como por exemplo, o *extensor de conexão*, mostramos que ele tem associado um *campo extensorial de rotação* Ω , que usualmente fica escondido na formulação tensorial do cálculo em variedades.

O extensor de distorção h juntamente com o extensor de rotação Ω , permitem interpretar rigorosamente o formalismo da *TRG* de Einstein com deformações de estruturas geométricas apropriadas. Uma das estruturas que aparece logo de partida é a estrutura geométrica de Minkowski, dotada de um extensor métrico constante η (um objeto geométrico aparentado com o tensor métrico $\boldsymbol{\eta}$ do espaço-tempo de Minkowski) em cada aberto $U \subset M$.

Na nossa interpretação da *TRG* o extensor de rotação pode ser obtido diretamente do extensor de distorção, mas o formalismo deixa claro que teorias de gravitação mais gerais^[47] devem ser desenvolvidas, porque sugere que o extensor de rotação tem como fonte física um extensor associado à densidade de spin, tal como ocorre nas chamadas teorias de calibre da gravitação formuladas em fibrados principais afins^[48,49,50].

Uma tentativa de usar o cálculo multivetorial e rudimentos do cálculo extensorial para a formulação da teoria da gravitação como uma teoria de calibre (mas em sentido bem diferente daquele onde a formulação é realizada em fibrados principais afins) foi desenvolvida em [51]. Infelizmente apesar das boas idéias daquele trabalho, ele peca pela introdução de conceitos completamente equivocados do ponto de vista matemático que tornam a teoria non sequitur (veja ^[30,52] para detalhes).

Também deve ficar bem claro aqui que a “desmontagem” do espaço-tempo de Minkowski-

Einstein (modelo da *TRG*) numa estrutura geométrica de Minkowski não é suficiente para resolver completamente o problema das leis de conservação na teoria da gravitação assim entendida. Isso se deve ao fato de que numa teoria de campos sobre uma estrutura geométrica de Minkowski, ainda que exista o número maximal de vetores que resolvam a equação de Killing em $U \subset M$, não é condição suficiente para garantir a existência das leis de conservação, já que, os vetores de Killing precisam satisfazer a condição adicional (ver por exemplo^[3]),

$$\mathcal{L}_\xi \mathfrak{T} = 0. \quad (0.10)$$

É provável que a única solução simultanea da equação de Killing (0.9) e da eq.(0.10) implique que $\mathfrak{T} = 0$. Neste caso estaremos de volta a um espaço-tempo de Minkowski e o campo extensorial de rotação precisa ser entendido somente como um campo físico que tem origem nas distribuições de spins dos campos físicos.

Neste trabalho concentramo-nos na aplicação do cálculo multivetorial e extensorial para uma formulação Lagrangiana da *TRG* que não se pode considerar completamente heterodoxa.

Acreditamos que os resultados apresentados nesta tese levam a novos caminhos na investigação da estrutura do campo gravitacional, pelo menos no que se refere a uma formulação clássica deste conceito, e pretendemos ainda dedicar um bom tempo a estas questões.

Fig. 0.1 Definição de paralelismo com curvatura nula e torsão não nula sobre S^2 . Um vetor forma um ângulo α com a longitude em p , e este ângulo é mantido constante durante o transporte paralelo.

Fig. 0.2 O vetor $sr_1(qr_2)$ é o vetor $pq(ps)$ transportado paralelamente para $s(q)$. A torsão não se anula.

CAPÍTULO 1

Multivetores e extensores

Seja $\mathbf{V}$ um espaço vetorial sobre R com dimensão finita (i.e., $\dim \mathbf{V} = n$ onde $n \in \mathbb{N}$). O espaço dual de $\mathbf{V}$ será denotado por V , e o espaço de k -formas⁷ (k é um inteiro tal que $0 \leq k \leq n$) sobre $\mathbf{V}$ será denotado por $\Lambda^k(V)$. Como é usual, $\Lambda^0(V) = R$ e $\Lambda^1(V) = V$.

1. Multivetores

Uma soma formal $X = X_0 + X_1 + \cdots + X_k + \cdots + X_n$ de k -formas sobre $\mathbf{V}$ (exatamente $n + 1$ termos) será chamada de *multivetor sobre V* .

O conjunto de multivetores sobre V tem uma estrutura natural de espaço vetorial⁸ sobre R e será denotado por $\Lambda(V)$. Ele será chamado o *espaço dos multivetores sobre V* .

Sejam $\langle \mathbf{e}_k \rangle$ e $\langle \varepsilon^k \rangle$ bases de $\mathbf{V}$ e V onde a segunda é dual da primeira (i.e., $\varepsilon^k(\mathbf{e}_j) = \delta_j^k$), então $\langle 1 + \varepsilon^{j_1} + \cdots + \varepsilon^{j_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{j_n} \rangle$ é uma base de $\Lambda(V)$. Portanto, se $\dim \mathbf{V} = n$ então $\dim \Lambda(V) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

1.1 Operador k -parte e involuções

Introduzimos um operador linear fundamental no espaço $\Lambda(V)$.

Seja k um inteiro, com $0 \leq k \leq n$, o operador linear $\langle \rangle_k$ definido por $X \mapsto \langle X \rangle_k = X_k$ é chamado de *operador k -parte*, e $\langle X \rangle_k$ é lido a *k -parte de X* .

As próprias k -formas são chamadas de *multivetores homogêneos de graduação k* (ou *multivetores k -homogêneos*). É óbvio que para qualquer multivetor k -homogêneo X deve ser: $\langle X \rangle_l = X$ se $l = k$, e $\langle X \rangle_l = 0$ se $l \neq k$. E ainda, todo multivetor pode ser expresso como a soma de suas k -partes, de $k = 0$ até $k = n$, isto é, $X = \sum_{k=0}^n \langle X \rangle_k$.

⁷Uma k -forma sobre $\mathbf{V}$, com $2 \leq k$, é um k -tensor sobre $\mathbf{V}$ totalmente antisimétrico. Por conveniência, um escalar real e um 1-tensor sobre $\mathbf{V}$ são ditos uma 0-forma sobre $\mathbf{V}$ e uma 1-forma (ou simplesmente, forma) sobre $\mathbf{V}$.

⁸A soma de multivetores e a multiplicação de multivetores por escalares são definidas pelos seguintes esquemas:
(i) se $X = X_0 + X_1 + \cdots + X_n$ e $Y = Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_n$ então $X + Y = (X_0 + Y_0) + (X_1 + Y_1) + \cdots + (X_n + Y_n)$,
(ii) se $\alpha \in R$ e $X = X_0 + X_1 + \cdots + X_n$ então $\alpha X = \alpha X_0 + \alpha X_1 + \cdots + \alpha X_n$.

Os multivetores k -homogêneos são chamados às vezes de k -vetores. Os 0-vetores (precisamente os números reais), os 1-vetores, os 2-vetores ... são chamados de *escalares*, *vetores*, *bivetores*, ..., *etc.* Os n -vetores e os $n - 1$ -vetores são nomeados como *pseudoescalares* e *pseudovetores* respectivamente.

Introduzimos duas involuções fundamentais no espaço vetorial $\Lambda(V)$.

O operador linear $-$, definido por $X \mapsto \overline{X}$ tal que $\langle \overline{X} \rangle_k = (-1)^k \langle X \rangle_k$, é chamado de *operador de conjugação*, $\overline{X}$ é lido o *conjugado de X*.

O operador linear $\sim$, definido por $X \mapsto \tilde{X}$ tal que $\langle \tilde{X} \rangle_k = (-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)} \langle X \rangle_k$, é chamado de *operador de reversão*, $\tilde{X}$ é lido o *reverso de X*.

Obviamente ambos *operadores lineares*, a conjugação e a reversão, são *involuções*; isto é, $\overline{\overline{X}} = X$ e $\tilde{\tilde{X}} = X$.

1.2 Produto exterior

O produto exterior (ou produto de Grassmann) de dois multivetores sobre V é um multivetor sobre V , definido por $(X, Y) \mapsto X \wedge Y$ tal que

$$\langle X \wedge Y \rangle_k = \sum_{j=1}^k \langle X \rangle_j \wedge \langle Y \rangle_{k-j}. \quad (1.1)$$

Note que no lado direito da equação acima aparece o produto exterior⁹ de uma j -forma sobre $\mathbf{V}$ por uma $(k - j)$ -forma sobre $\mathbf{V}$.

O produto exterior de multivetores é uma lei interna no espaço $\Lambda(V)$. Ele possui as leis distributivas à esquerda e à direita e as leis associativas (a associatividade propriamente dita e a associatividade mista). As primeiras são consequência das correspondentes leis distributivas do produto exterior de k -formas e as segundas podem ser provadas sem maiores dificuldades.

O espaço vetorial de multivetores munido com este produto exterior é uma álgebra associativa costumeiramente chamada de *álgebra exterior dos multivetores sobre V*.

Apresentamos algumas propriedades interessantes na álgebra exterior dos multivetores.

⁹O produto exterior de k -formas sobre $\mathbf{V}$ é definido como segue: (i) $\alpha, \beta \in R : \alpha \wedge \beta = \alpha\beta$, (ii) $\alpha \in R$ e $x \in \Lambda^k(V)$ com $k \geq 1 : \alpha \wedge x = x \wedge \alpha = \alpha x$, (iii) $x \in \Lambda^j(V)$ e $y \in \Lambda^k(V)$ com $j, k \geq 1 : x \wedge y = \frac{(j+k)!}{j!k!} \mathcal{A}(x \otimes y)$ onde $\mathcal{A}$ é o conhecido operador de antisimetização na álgebra linear ordinária.

i. Para todos $\alpha, \beta \in R$ e $X \in \Lambda(V)$

$$\alpha \wedge \beta = \alpha\beta, \quad (1.2a)$$

$$\alpha \wedge X = X \wedge \alpha = \alpha X, \quad (1.2b)$$

respectivamente, o produto real ordinário e a multiplicação de multivetores por escalares reais.

ii. Para todos $X_j \in \Lambda^j(V)$ e $Y_k \in \Lambda^k(V)$

$$X_j \wedge Y_k = (-1)^{jk} Y_k \wedge X_j. \quad (1.3)$$

iii. Para todos $a \in \Lambda^1(V)$ e $X \in \Lambda(V)$

$$a \wedge X = \overline{X} \wedge a. \quad (1.4)$$

iv. Para todos $X, Y \in \Lambda(V)$

$$\overline{X \wedge Y} = \overline{X} \wedge \overline{Y}, \quad (1.5a)$$

$$\widetilde{X \wedge Y} = \widetilde{Y} \wedge \widetilde{X}. \quad (1.5b)$$

1.3 Produto escalar canônico

Seja $\langle \mathbf{b}_j \rangle$ uma base arbitrária, porém fixa, de $\mathbf{V}$. Um produto escalar^[32] de multivetores sobre V pode ser definido por

$$X \cdot Y = \langle X \rangle_0 \langle Y \rangle_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \langle X \rangle_k(\mathbf{b}^{j_1}, \dots, \mathbf{b}^{j_k}) \langle Y \rangle_k(\mathbf{b}_{j_1}, \dots, \mathbf{b}_{j_k}), \quad (1.6)$$

onde escrevemos $\mathbf{b}^{j_1} = \mathbf{b}_{j_1}, \dots, \mathbf{b}^{j_k} = \mathbf{b}_{j_k}$ por conveniência de notação e usamos também a convenção de Einstein para as somas sobre os índices $j_1, \dots, j_k$.

O produto definido pela equação acima é um produto escalar bem-definido no espaço dos multivetores sobre V , obviamente, associado à base arbitrária $\langle \mathbf{b}_j \rangle$.

Ele é simétrico ($X \cdot Y = Y \cdot X$), satisfaz a linearidade ($X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$), possui a associatividade mista ($(\alpha X) \cdot Y = X \cdot (\alpha Y) = \alpha(X \cdot Y)$) e é não-degenerado (i.e., $X \cdot Y = 0$ para todo X , implica $Y = 0$).

Todavia, este produto escalar tem a propriedade de ser definido positivo, isto é, $X \cdot X \geq 0$ para todo X , e $X \cdot X = 0$ se e só se $X = 0$.

Esse produto escalar de multivetores será chamado de *produto escalar canônico*, induzido naturalmente pela base arbitrária $\langle \mathbf{b}_j \rangle$.

Algumas propriedades importantes do produto escalar canônico são as seguintes:

i. Para todos os escalares $\alpha, \beta \in R$

$$\alpha \cdot \beta = \alpha\beta, \quad (1.7)$$

isto é, o produto real ordinário.

ii. Para todos os j -vetores $X_j \in \Lambda^j(V)$ e k -vetores $Y_k \in \Lambda^k(V)$

$$X_j \cdot Y_k = 0, \text{ se } j \neq k. \quad (1.8)$$

iii. Para quaisquer k -vetores simples, digamos $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ e $w_1 \wedge \dots \wedge w_k$, é válida a seguinte fórmula

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \cdot (w_1 \wedge \dots \wedge w_k) = \begin{vmatrix} v_1 \cdot w_1 & \cdots & v_1 \cdot w_k \\ \vdots & & \vdots \\ v_k \cdot w_1 & \cdots & v_k \cdot w_k \end{vmatrix}, \quad (1.9)$$

onde as duas barras $||$ denotam, como de costume, o determinante clássico.

iv. Para todos os multivetores $X, Y \in \Lambda(V)$

$$\overline{X} \cdot Y = X \cdot \overline{Y}, \quad (1.10a)$$

$$\tilde{X} \cdot Y = X \cdot \tilde{Y}. \quad (1.10b)$$

Sejam $\langle \varepsilon^j \rangle$ e $\langle \varepsilon_j \rangle$ um par de bases recíprocas de V (i.e., $\varepsilon^j \cdot \varepsilon_k = \delta_k^j$). Podemos construir

exatamente duas bases naturais para o espaço dos multivetores sobre V , que são:

$$\langle 1, \varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{j_k}, \dots, \varepsilon^{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{j_n} \rangle, \quad (1.11a)$$

$$\langle 1, \varepsilon_{j_1}, \dots, \varepsilon_{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_k}, \dots, \varepsilon_{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_n} \rangle. \quad (1.11b)$$

v . Todo multivetor $X \in \Lambda(V)$ pode ser expresso por qualquer uma das duas fórmulas de expansão seguintes

$$X = X \cdot 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} X \cdot (\varepsilon^{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{j_k}) (\varepsilon_{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_k}), \quad (1.12a)$$

$$= X \cdot 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} X \cdot (\varepsilon_{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_k}) (\varepsilon^{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{j_k}), \quad (1.12b)$$

ou, numa notação mais compacta, usando um índice coletivo¹⁰ J ,

$$X = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} (X \cdot \varepsilon^J) \varepsilon_J = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} (X \cdot \varepsilon_J) \varepsilon^J. \quad (1.13)$$

1.4 Produtos contraídos canônicos

Podemos definir dois novos produtos^[32] para os multivetores sobre V utilizando somente propriedades do produto escalar canônico.

O *produto contraído à esquerda* de X e Y é dado por $(X, Y) \mapsto X \lrcorner Y$ tal que

$$(X \lrcorner Y) \cdot Z = Y \cdot (\tilde{X} \wedge Z), \quad (1.14)$$

para um multivetor arbitrário Z .

¹⁰O índice coletivo J toma valores sobre o conjunto de índices: $\emptyset$ (conjunto vazio), $j_1, \dots, j_1 \dots j_k, \dots, j_1 \dots j_n$. ε^J denota a base escalar $\varepsilon^\emptyset = 1$, os vetores base $\varepsilon^{j_1}, \dots$, os k -vetores base $\varepsilon^{j_1 \dots j_k} = \varepsilon^{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{j_k} \dots$ e o pseudoescalar base $\varepsilon^{j_1 \dots j_n} = \varepsilon^{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{j_n}$.

$\nu(J)$ é o número de índices, definido por: $\nu(J) = 0, 1, \dots, k, \dots, n$ para J tomando valores sobre o conjunto de índices já mencionado.

O *produto contraído à direita* de X e Y é dado por $(X, Y) \mapsto X \lrcorner Y$ tal que

$$(X \lrcorner Y) \cdot Z = X \cdot (Z \wedge \widetilde{Y}), \quad (1.15)$$

para um multivetor arbitrário Z .

O espaço dos multivetores sobre V munido com quaisquer dos *produtos contraídos canônicos* $\lrcorner$ ou $\lrcorner$ possui uma estrutura natural de álgebra não associativa. Elas serão chamadas de *álgebras interiores canônicas dos multivetores sobre V* .

Algumas propriedades importantes e úteis dos produtos contraídos são listados a seguir:

i. Para todos $\alpha, \beta \in R$ e $X \in \Lambda(V)$

$$\alpha \lrcorner \beta = \alpha \lrcorner \beta = \alpha \beta, \quad (1.16a)$$

$$\alpha \lrcorner X = X \lrcorner \alpha = \alpha X, \quad (1.16b)$$

respectivamente, o produto real ordinário e a multiplicação de multivetores por escalares reais.

ii. Para todos $X_j \in \Lambda^j(V)$ e $Y_k \in \Lambda^k(V)$

$$X_j \lrcorner Y_k = 0, \text{ se } j > k, \quad (1.17a)$$

$$X_j \lrcorner Y_k = 0, \text{ se } j < k. \quad (1.17b)$$

iii. Para todos $X_j \in \Lambda^j(V)$ e $Y_k \in \Lambda^k(V)$, com $j \leq k$, temos que $X_j \lrcorner Y_k \in \Lambda^{k-j}(V)$ e $Y_k \lrcorner X_j \in \Lambda^{k-j}(V)$, e

$$X_j \lrcorner Y_k = (-1)^{j(k-j)} Y_k \lrcorner X_j. \quad (1.18)$$

iv. Para todos $X_k, Y_k \in \Lambda^k(V)$

$$X_k \lrcorner Y_k = X_k \lrcorner Y_k = \widetilde{X_k} \cdot Y_k = X_k \cdot \widetilde{Y_k}. \quad (1.19)$$

v. Para todos $a \in \Lambda^1(V)$ e $X \in \Lambda(V)$

$$a \lrcorner X = -\overline{X} \lrcorner a. \quad (1.20)$$

vi. Para todos $a \in \Lambda^1(V)$ e $X, Y \in \Lambda(V)$

$$a \lrcorner (X \wedge Y) = (a \lrcorner X) \wedge Y + \overline{X} \wedge (a \lrcorner Y). \quad (1.21)$$

vii. Para todos $X, Y, Z \in \Lambda(V)$

$$X \lrcorner (Y \lrcorner Z) = (X \wedge Y) \lrcorner Z, \quad (1.22a)$$

$$(X \lrcorner Y) \lrcorner Z = X \lrcorner (Y \wedge Z). \quad (1.22b)$$

1.5 Produto de Clifford canônico

É possível definir ainda um novo produto para os multivetores sobre V utilizando os produtos contraídos canônicos (à esquerda e à direita) e o produto exterior.

O produto *geométrico* (ou produto de *Clifford*)^[32] de dois multivetores sobre V é um outro multivetor sobre V definido pela seguinte axiomática:

(i) Para todos $\alpha \in R$ e $X \in \Lambda(V)$

$$\alpha X = X \alpha$$

igual à multiplicação do multivetor X pelo escalar real α .

(ii) Para todos $a \in \Lambda^1(V)$ e $X \in \Lambda(V)$

$$aX = a \lrcorner X + a \wedge X,$$

$$Xa = X \lrcorner a + X \wedge a.$$

(iii) Para todos $X, Y, Z \in \Lambda(V)$

$$X(YZ) = (XY)Z.$$

O produto de Clifford canônico é distributivo e associativo (precisamente pelo axioma (iii)). Sua lei distributiva segue diretamente das correspondentes leis distributivas dos produtos contraídos canônicos (à esquerda e à direita) e do produto exterior.

O espaço dos multivetores sobre V munido com o produto de Clifford canônico é naturalmente uma álgebra associativa. Ela será chamada de *álgebra de Clifford canônica*^[32] dos multivetores sobre V , e denotada convenientemente por $\mathcal{Cl}(V)$.

Listamos a seguir algumas identidades muito importantes que envolvem o produto de Clifford canônico.

i. Para todos $X, Y \in \Lambda(V)$

$$\overline{XY} = \overline{X} \overline{Y}. \quad (1.23a)$$

$$\widetilde{XY} = \widetilde{Y} \widetilde{X}. \quad (1.23b)$$

ii. Para todos $a \in \Lambda^1(V)$ e $X \in \Lambda(V)$

$$a \lrcorner X = \frac{1}{2}(aX - \overline{X}a). \quad (1.24a)$$

$$a \wedge X = \frac{1}{2}(aX + \overline{X}a). \quad (1.24b)$$

iii. Para todos $X, Y \in \Lambda(V)$

$$X \cdot Y = \langle \widetilde{X}Y \rangle_0 = \langle X\widetilde{Y} \rangle_0. \quad (1.25)$$

iv. Sejam $I \in \Lambda^n(V)$, $a \in \Lambda^1(V)$ e $X \in \Lambda(V)$, é válida a seguinte identidade:

$$I(a \wedge X) = (-1)^{n-1} a \lrcorner (IX). \quad (1.26)$$

Esta fórmula notável é mencionada às vezes na literatura matemática com o nome de *identidade de dualidade*.

2. Extensores

Uma aplicação linear entre duas partes¹¹ quaisquer de $\Lambda(V)$, isto é, $t : \Lambda_1^\circ(V) \rightarrow \Lambda_2^\circ(V)$ tal que para todos $\alpha, \alpha' \in R$ e $X, X' \in \Lambda_1^\circ(V) : t(\alpha X + \alpha' X') = \alpha t(X) + \alpha' t(X')$, será chamado de

¹¹Uma soma qualquer de espaços vetoriais de k -vetores sobre $\mathbf{V}$, claramente um subespaço de $\Lambda(V)$, é dito uma *parte de* $\Lambda(V)$. Uma notação conveniente é $\Lambda^\circ(V)$.

extensor^[33] sobre V .

O conjunto dos extensores sobre V , cujos domínio e co-domínio são $\Lambda_1^\diamond(V)$ e $\Lambda_2^\diamond(V)$, tem uma estrutura natural de *espaço vetorial sobre R* .

No caso de $\Lambda_1^\diamond(V)$ e $\Lambda_2^\diamond(V)$ serem iguais a $\Lambda(V)$, tal espaço dos extensores será convenientemente denotado por *ext*-(V).

2.1 (p, q) -Exensores

Sejam p, q dois números inteiros com $0 \leq p, q \leq n$. O extensor sobre V com domínio $\Lambda^p(V)$ e co-domínio $\Lambda^q(V)$ é dito um (p, q) -*extensor*^[33] sobre V .

O espaço vetorial real dos (p, q) -extensores sobre V será denotado por (p, q) -*ext*(V).

Se $\dim(\mathbf{V}) = n$ então $\dim((p, q)$ -*ext*(V)) = $\binom{n}{p} \binom{n}{q}$.

2.2 Operador adjunto

Seja $(\langle \varepsilon^j \rangle, \langle \varepsilon_j \rangle)$ um par arbitrário de bases recíprocas para V (i.e., $\varepsilon^j \cdot \varepsilon_i = \delta_i^j$). O operador linear agindo nos espaços dos extensores sobre V , (p, q) -*ext*(V) $\ni t \mapsto t^\dagger \in (q, p)$ -*ext*(V) tal que

$$t^\dagger(X) = \frac{1}{p!} (t(\varepsilon^{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{j_p}) \cdot X) \varepsilon_{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_p} \quad (1.27a)$$

$$= \frac{1}{p!} (t(\varepsilon_{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_p}) \cdot X) \varepsilon^{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{j_p}, \quad (1.27b)$$

será chamado de *operador adjunto*^[33], $t^\dagger$ é lido como *adjunto de t* .

O operador adjunto está bem-definido já que as somas que aparecem no lado direito não dependem das bases recíprocas $(\langle \varepsilon^j \rangle, \langle \varepsilon_j \rangle)$.

Enunciamos agora algumas propriedades relevantes que envolvem o operador adjunto.

i. O operador adjunto é involutivo, isto é

$$(t^\dagger)^\dagger = t. \quad (1.28)$$

ii. Seja t um (p, q) -extensor sobre V , então para todos $X \in \Lambda^p(V)$ e $Y \in \Lambda^q(V)$ temos que

$$t(X) \cdot Y = X \cdot t^\dagger(Y). \quad (1.29)$$

iii. Sejam $t \in (q, r)\text{-ext}(V)$ e $u \in (p, q)\text{-ext}(V)$. O extensor sobre V , $t \circ u$ (composição de u com t), que claramente pertence a $(p, r)\text{-ext}(V)$, satisfaz

$$(t \circ u)^\dagger = u^\dagger \circ t^\dagger. \quad (1.30)$$

2.3 (1, 1)-Extensores

2.3a Partes simétrica e antisimétrica de (1, 1)-extensores

Um extensor $t \in (1, 1)\text{-ext}(V)$ é dito *adjunto simétrico* (*adjunto antisimétrico*) se e somente se $t = t^\dagger$ ($t = -t^\dagger$).

Teorema: Para todo $t \in (1, 1)\text{-ext}(V)$, existem exatamente dois (1, 1)-extensores sobre V , digamos t_+ e t_- , tais que t_+ é adjunto simétrico (i.e., $t_+ = t_+^\dagger$) e t_- é adjunto antisimétrico (i.e., $t_- = -t_-^\dagger$) e a seguinte decomposição é válida:

$$t(a) = t_+(a) + t_-(a). \quad (1.31)$$

Esses (1, 1)-extensores estão dados pela fórmula

$$t_\pm(a) = \frac{1}{2}(t(a) \pm t^\dagger(a)). \quad (1.32)$$

t_+ e t_- são chamados de *partes simétrica adjunta e antisimétrica adjunta de t* , respectivamente.

2.3b Extensão de (1, 1)-extensores

Seja $(\langle \varepsilon^j \rangle, \langle \varepsilon_j \rangle)$ um par arbitrário de bases recíprocas para V (i.e., $\varepsilon^j \cdot \varepsilon_i = \delta_i^j$). O operador linear agindo nos espaços dos extensores sobre V , $(1, 1)\text{-ext}(V) \ni t \mapsto \underline{t} \in \text{ext}(V)$ tal que

$$\underline{t}(X) = 1 \cdot X + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} ((\varepsilon^{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{j_k}) \cdot X) t(\varepsilon_{j_1}) \wedge \dots \wedge t(\varepsilon_{j_k}) \quad (1.33a)$$

$$= 1 \cdot X + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} ((\varepsilon_{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_k}) \cdot X) t(\varepsilon^{j_1}) \wedge \dots \wedge t(\varepsilon^{j_k}), \quad (1.33b)$$

será chamado de *operador de extensão*^[33], $\underline{t}$ é lido como *extendido de t*.

O operador de extensão está bem-definido já que as somas acima não dependem de $(\langle \varepsilon^j \rangle, \langle \varepsilon_j \rangle)$.

O operador de extensão preserva graduação, isto é, se $X \in \Lambda^k(V)$ então $\underline{t}(X) \in \Lambda^k(V)$.

Listamos algumas propriedades notáveis da extensão dos $(1, 1)$ -extensores:

i. Seja $t \in (1, 1)\text{-ext}(V)$, para todos $\alpha \in R$, $v \in \Lambda^1(V)$ e $v_1, \dots, v_k \in \Lambda^1(V)$ temos que

$$\underline{t}(\alpha) = \alpha, \quad (1.43a)$$

$$\underline{t}(v) = t(v), \quad (1.34b)$$

$$\underline{t}(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = t(v_1) \wedge \dots \wedge t(v_k). \quad (1.34c)$$

Esta última propriedade tem um corolário imediato:

$$\underline{t}(X \wedge Y) = \underline{t}(X) \wedge \underline{t}(Y), \quad (1.35)$$

para todos $X, Y \in \Lambda(V)$.

ii. Para todos $t, u \in (1, 1)\text{-ext}(V)$ vale a seguinte identidade

$$\underline{t \circ u} = \underline{t} \circ \underline{u}. \quad (1.36)$$

iii. Seja $t \in (1, 1)\text{-ext}(V)$ com inverso $t^{-1} \in (1, 1)\text{-ext}(V)$ (i.e., $t \circ t^{-1} = t^{-1} \circ t = i_d$, onde $i_d \in (1, 1)\text{-ext}(V)$ é o extensor identidade), então

$$(\underline{t})^{-1} = \underline{(t^{-1})}. \quad (1.38)$$

Isto é, o inverso do extendido é igual ao extendido do inverso. Assim, podemos usar um símbolo mais simples, digamos $\underline{t}^{-1}$, para denotar ambos os extensores $(\underline{t})^{-1}$ e $\underline{(t^{-1})}$.

iv. Para qualquer $(1, 1)$ -extensor sobre V , o operador de extensão comuta com o operador adjunto,

$$\underline{(t^\dagger)} = (\underline{t})^\dagger. \quad (1.39)$$

Portanto, é possível utilizar a notação mais simples $\underline{t}^\dagger$ para denotar ambos os extensores $\underline{(t^\dagger)}$ e $(\underline{t})^\dagger$.

v. Seja $t \in (1, 1)\text{-ext}(V)$, para todos $X, Y \in \Lambda(V)$ temos que

$$X \lrcorner t(Y) = \underline{t}(\underline{t}^\dagger(X) \lrcorner Y). \quad (1.40)$$

2.3c Escalares caraterísticos

Seja $(\langle \varepsilon^j \rangle, \langle \varepsilon_j \rangle)$ um par arbitrário de bases recíprocas para V (i.e., $\varepsilon^j \cdot \varepsilon_i = \delta_i^j$).

Associado a qualquer $t \in (1, 1)\text{-ext}(V)$ podemos introduzir o escalar real^[33]

$$\text{tr}[t] = t(\varepsilon^j) \cdot \varepsilon_j = t(\varepsilon_j) \cdot \varepsilon^j. \quad (1.41)$$

Ele não depende do par de bases $(\langle \varepsilon^j \rangle, \langle \varepsilon_j \rangle)$, e será chamado de *traço de t* .

Para todo $t \in (1, 1)\text{-ext}(V)$,

$$\text{tr}[t^\dagger] = \text{tr}[t]. \quad (1.42)$$

Associado a qualquer $t \in (1, 1)\text{-ext}(V)$ podemos introduzir um outro escalar real^[33]

$$\det[t] = \frac{1}{n!} \underline{t}(\varepsilon^{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{j_n}) \cdot (\varepsilon_{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_n}) \quad (1.43a)$$

$$= \frac{1}{n!} \underline{t}(\varepsilon_{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_n}) \cdot (\varepsilon^{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{j_n}). \quad (1.43b)$$

Ele também não depende do par de bases $(\langle \varepsilon^j \rangle, \langle \varepsilon_j \rangle)$, e será chamado de *determinante de t* .

Empregando as fórmulas combinatórias $v^{j_1} \wedge \dots \wedge v^{j_n} = \epsilon^{j_1 \dots j_n} v^1 \wedge \dots \wedge v^n$ e $v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_n} = \epsilon_{j_1 \dots j_n} v_1 \wedge \dots \wedge v_n$, onde $\epsilon^{j_1 \dots j_n}$ e $\epsilon_{j_1 \dots j_n}$ são os símbolos de permutação¹² de ordem n e $v^1, \dots, v^n$ e $v_1, \dots, v_n$ são vetores, podemos escrever outras fórmulas mais convenientes para o determinante

¹²Como sabemos, os símbolos de permutação de ordem n definem-se:

$$\epsilon^{j_1 \dots j_n} = \epsilon_{j_1 \dots j_n} = \begin{cases} 1, & j_1 \dots j_n \text{ é permutação par de } 1, \dots, n \\ -1, & j_1 \dots j_n \text{ é permutação ímpar de } 1, \dots, n \\ 0, & \text{de outro modo} \end{cases}.$$

Recorde-se que $\epsilon^{j_1 \dots j_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n} = n!$

de t , que são:

$$\det[t] = \underline{t}(\varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n) \cdot (\varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n) = \underline{t}(\overline{\varepsilon}) \cdot \underline{\varepsilon} \quad (1.44a)$$

$$= \underline{t}(\varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n) \cdot (\varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n) = \underline{t}(\underline{\varepsilon}) \cdot \overline{\varepsilon}. \quad (1.44b)$$

Note que temos usado as notações abreviadas: $\overline{\varepsilon} = \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n$ e $\underline{\varepsilon} = \varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n$.

O determinante de $(1, 1)$ -extensor tem as seguintes propriedades notáveis:

i. Para todo $t \in (1, 1)\text{-ext}(V)$,

$$\det[t^\dagger] = \det[t]. \quad (1.45)$$

ii. Seja $t \in (1, 1)\text{-ext}(V)$, para todo $I \in \Lambda^n(V)$ é

$$\underline{t}(I) = \det[t]I. \quad (1.46)$$

iii. Para todos $t, u \in (1, 1)\text{-ext}(V)$,

$$\det[t \circ u] = \det[t] \circ \det[u]. \quad (1.47)$$

iv. Seja $t \in (1, 1)\text{-ext}(V)$ com inverso $t^{-1} \in (1, 1)\text{-ext}(V)$ (i.e., $t \circ t^{-1} = t^{-1} \circ t = i_d$, onde $i_d \in (1, 1)\text{-ext}(V)$ é o extensor identidade), então

$$\det[t^{-1}] = (\det[t])^{-1}. \quad (1.48)$$

Amiúde usaremos a notação abreviada $\det^{-1}[t]$ para significar tanto $\det[t^{-1}]$ quanto $(\det[t])^{-1}$.

v. Se $t \in (1, 1)\text{-ext}(V)$ é não-degenerado (i.e., $\det[t] \neq 0$), então existe seu inverso $t^{-1} \in (1, 1)\text{-ext}(V)$, e ele é dado pela fórmula

$$t^{-1}(a) = \det^{-1}[t] \underline{t}^\dagger(aI) I^{-1}, \quad (1.49)$$

onde $I \in \Lambda^n(V)$ é qualquer pseudoescalar não nulo.

2.3d Bivector caraterístico

Seja $(\langle \varepsilon^j \rangle, \langle \varepsilon_j \rangle)$ um par arbitrário de bases recíprocas para V (i.e., $\varepsilon^j \cdot \varepsilon_i = \delta_i^j$). Associado a qualquer $t \in (1, 1)\text{-ext}(V)$ podemos introduzir o bivector

$$biv[t] = t(\varepsilon^j) \wedge \varepsilon_j = t(\varepsilon_j) \wedge \varepsilon^j. \quad (1.50)$$

Ele é um bivector caraterístico^[33] do extensor t já que não depende do par de bases $(\langle \varepsilon^j \rangle, \langle \varepsilon_j \rangle)$, e será chamado de *bivector de t* .

Listamos algumas propriedades que envolvem o bivector de $(1, 1)$ -extensor.

i. Seja $t \in (1, 1)\text{-ext}(V)$, então

$$biv[t^\dagger] = -biv[t]. \quad (1.51)$$

ii. A parte antisimétrica adjunta de qualquer $t \in (1, 1)\text{-ext}(V)$ pode ser fatorada pela notável fórmula

$$t_-(a) = \frac{1}{2}biv[t] \times a, \quad (1.52)$$

onde $\times$ simboliza o produto comutador¹³.

2.3e Generalização de $(1, 1)$ -extensores

Seja $(\langle \varepsilon^j \rangle, \langle \varepsilon_j \rangle)$ um par arbitrário de bases recíprocas para V (i.e., $\varepsilon^j \cdot \varepsilon_i = \delta_i^j$). O operador linear agindo nos espaços dos extensores sobre V , $(1, 1)\text{-ext}(V) \ni t \mapsto T \in \text{ext}(V)$ tal que

$$T(X) = t(\varepsilon^j) \wedge (\varepsilon_j \lrcorner X) = t(\varepsilon_j) \wedge (\varepsilon^j \lrcorner X), \quad (1.53)$$

será chamado de *operador de generalização*^[33], T é lido como *generalizado de t* .

O operador de generalização está bem-definido dado que as somas acima não dependem de $(\langle \varepsilon^j \rangle, \langle \varepsilon_j \rangle)$.

O operador de generalização preserva graduação, isto é, se $X \in \Lambda^k(V)$ então $T(X) \in \Lambda^k(V)$.

Listamos algumas propriedades notáveis da generalização do $(1, 1)$ -extensor t :

¹³O produto comutador de dois multivetores A e B define-se: $A \times B = \frac{1}{2}(AB - BA)$.

i. Para todos $\alpha \in R$ e $v \in \Lambda^1(V)$ temos que

$$T(\alpha) = 0, \quad (1.54a)$$

$$T(v) = t(v). \quad (1.54b)$$

ii. Para todos $X, Y \in \Lambda(V)$ é válida a seguinte identidade

$$T(X \wedge Y) = T(X) \wedge Y + X \wedge T(Y) \quad (1.55)$$

iii. O operador de generalização comuta com o operador de adjunção. Portanto, $T^\dagger$ significa tanto *adjunto do generalizado* quanto *generalizado do adjunto*.

iv. A parte antisimétrica adjunta do generalizado de t coincide com o generalizado da parte simétrica adjunta de t , e pode ser fatorada por

$$T_-(X) = \frac{1}{2} biv[t] \times X, \quad (1.56)$$

para todo $X \in \Lambda(V)$.

3. Álgebra de Clifford métrica

Um $(1, 1)$ -extensor sobre V , digamos g , adjunto simétrico (i.e., $g = g^\dagger$) e não-degenerado (i.e., $\det g \neq 0$), será chamado de *extensor métrico sobre V* .

3.1 Produto escalar métrico

Um novo produto escalar gerado por um extensor métrico g pode ser definido a partir do produto escalar canônico. Este é

$$X \cdot_g Y = \underline{g}^{-1}(X) \cdot Y. \quad (1.57)$$

Ele será chamado de *produto escalar métrico*^[34].

Como podemos ver, este é um produto escalar bem-definido no espaço dos multivetores sobre V .

Ele é simétrico (i.e., $X \cdot_g Y = Y \cdot_g X$), é linear (i.e., $X \cdot_g (Y + Z) = X \cdot_g Y + X \cdot_g Z$), possui associatividade mista (i.e., $(\alpha X) \cdot_g Y = X \cdot_g (\alpha Y) = \alpha(X \cdot_g Y)$) e é não-degenerado (i.e., $X \cdot_g Y = 0$ para todo X , implica $Y = 0$).

Algumas propriedades importantes do produto escalar métrico são as seguintes:

i. Para todos $\alpha, \beta \in R$

$$\alpha \cdot_g \beta = \alpha\beta, \quad (1.58)$$

(i.e., o produto real ordinário).

ii. Para todos $X_j \in \Lambda^j(V)$ e $Y_k \in \Lambda^k(V)$

$$X_j \cdot_g Y_k = 0, \text{ se } j \neq k. \quad (1.59)$$

iii. Para todos os k -vetores simples $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \Lambda^k(V)$ e $w_1 \wedge \dots \wedge w_k \in \Lambda^k(V)$, temos que

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \cdot_g (w_1 \wedge \dots \wedge w_k) = \begin{vmatrix} v_1 \cdot_g w_1 & \dots & v_1 \cdot_g w_k \\ \vdots & & \vdots \\ v_k \cdot_g w_1 & \dots & v_k \cdot_g w_k \end{vmatrix}, \quad (1.60)$$

onde $\|$ denota o determinante clássico.

iv. Para todos $X, Y \in \Lambda(V)$

$$\overline{X} \cdot_g Y = X \cdot_g \overline{Y}. \quad (1.61a)$$

$$\tilde{X} \cdot_g Y = X \cdot_g \tilde{Y}. \quad (1.61b)$$

3.2 Produtos contraídos métricos

Os *produtos contraídos métricos*^[57,34] à esquerda e à direita de dois multivetores X e Y são dados por

$$X \lrcorner_g Y = \underline{g}^{-1}(X) \lrcorner Y, \quad (1.62)$$

$$X \lrcorner_g Y = X \lrcorner \underline{g}^{-1}(Y). \quad (1.63)$$

O espaço dos multivetores sobre V munido com cada um dos produtos contraídos tem estrutura de álgebra não-associativa. As álgebras assim construídas são chamadas de *álgebras interiores métricas dos multivetores sobre V* .

As propriedades mais importantes dos produtos contraídos métricos são:

i. Para todos os multivetores X, Y e Z , temos que

$$(X \underset{g}{\lrcorner} Y) \underset{g}{\cdot} Z = Y \underset{g}{\cdot} (\tilde{X} \wedge Z), \quad (1.64a)$$

$$(X \underset{g}{\lrcorner} Y) \underset{g}{\cdot} Z = X \underset{g}{\cdot} (Z \wedge \tilde{Y}). \quad (1.64b)$$

ii. Para todos $\alpha, \beta \in R$ e $X \in \Lambda(V)$

$$\alpha \underset{g}{\lrcorner} \beta = \alpha \underset{g}{\lrcorner} \beta = \alpha\beta, \quad (1.65a)$$

$$\alpha \underset{g}{\lrcorner} X = X \underset{g}{\lrcorner} \alpha = \alpha X, \quad (1.65b)$$

i.e., o produto real ordinário e a multiplicação de multivetores por escalares reais.

iii. Para todos $X_j \in \Lambda^j(V)$ e $Y_k \in \Lambda^k(V)$

$$X_j \underset{g}{\lrcorner} Y_k = 0, \text{ se } j > k. \quad (1.66a)$$

$$X_j \underset{g}{\lrcorner} Y_k = 0, \text{ se } j < k. \quad (1.66b)$$

iv. Para todos $X_j \in \Lambda^j(V)$ e $Y_k \in \Lambda^k(V)$, com $j \leq k$, temos que: $X_j \underset{g}{\lrcorner} Y_k \in \Lambda^{k-j}(V)$ e $Y_k \underset{g}{\lrcorner} X_j \in \Lambda^{k-j}(V)$, e

$$X_j \underset{g}{\lrcorner} Y_k = (-1)^{j(k-j)} Y_k \underset{g}{\lrcorner} X_j. \quad (1.67)$$

v. Para todos $X_k, Y_k \in \Lambda^k(V)$

$$X_k \underset{g}{\lrcorner} Y_k = X_k \underset{g}{\lrcorner} Y_k = \tilde{X}_k \underset{g}{\cdot} Y_k = X_k \underset{g}{\cdot} \tilde{Y}_k. \quad (1.68)$$

vi. Para todos $a \in \Lambda^1(V)$ e $X \in \Lambda(V)$

$$a \underset{g}{\lrcorner} X = -\overline{X} \underset{g}{\lrcorner} a. \quad (1.69)$$

vii. Para todos $a \in \Lambda^1(V)$ e $X, Y \in \Lambda(V)$

$$a \lrcorner_g (X \wedge Y) = (a \lrcorner_g X) \wedge Y + \overline{X} \wedge (a \lrcorner_g Y). \quad (1.70)$$

3.3 Produto de Clifford métrico

O *produto de Clifford métrico*^[57,34] de dois multivetores sobre V é dado pelo seguinte esquema axiomático:

(i) Para todos $\alpha \in R$ e $X \in \Lambda(V)$

$$\alpha \lrcorner_g X = X \lrcorner_g \alpha = \alpha X,$$

i.e., o produto do multivetor X pelo real α .

(ii) Para todos $a \in \Lambda^1(V)$ e $X \in \Lambda(V)$

$$\begin{aligned} a \lrcorner_g X &= a \lrcorner_g X + a \wedge X, \\ X \lrcorner_g a &= X \lrcorner_g a + X \wedge a. \end{aligned}$$

(iii) Para todos $X, Y, Z \in \Lambda(V)$

$$X \lrcorner_g (Y \lrcorner_g Z) = (X \lrcorner_g Y) \lrcorner_g Z.$$

O produto de Clifford métrico de multivetores é distributivo e associativo. A sua lei distributiva segue das correspondentes leis distributivas dos produtos contraídos (à esquerda e à direita) e do produto exterior. A sua lei associativa é precisamente o axioma (iii).

$\Lambda(V)$ munido com o produto de Clifford métrico é uma *álgebra associativa*. Ela será chamada de *álgebra de Clifford métrica dos multivetores sobre V* , e denotada por $\mathcal{C}\ell_g(V)$.

Encerrando esta seção, listamos algumas propriedades muito úteis nos cálculos que serão apresentados nos próximos capítulos.

i. Para todos $a \in \Lambda^1(V)$ e $X, Y, Z \in \Lambda(V)$:

$$\begin{aligned}
\overline{X \lrcorner_g Y} &= \overline{X} \lrcorner_g \overline{Y}, \\
\widetilde{X \lrcorner_g Y} &= \widetilde{X} \lrcorner_g \widetilde{Y}. \\
a \lrcorner_g X &= \frac{1}{2}(a \lrcorner_g X - \overline{X} \lrcorner_g a), \\
a \wedge X &= \frac{1}{2}(a \lrcorner_g X + \overline{X} \lrcorner_g a). \\
X \cdot_g Y &= \left\langle \widetilde{X} \lrcorner_g Y \right\rangle_0 = \left\langle X \lrcorner_g \widetilde{Y} \right\rangle_0. \\
X \lrcorner_g (Y \lrcorner_g Z) &= (X \wedge Y) \lrcorner_g Z, \\
(X \lrcorner_g Y) \lrcorner_g Z &= X \lrcorner_g (Y \wedge Z).
\end{aligned} \tag{1.71}$$

ii. Seja $I \in \Lambda^n(V)$, para todos $a \in \Lambda^1(V)$ e $X \in \Lambda(V)$:

$$I \lrcorner_g (a \wedge X) = (-1)^{n-1} a \lrcorner_g (I \lrcorner_g X). \tag{1.72}$$

Esta identidade notável será chamada de *identidade de dualidade métrica*.

CAPÍTULO 2

Funções e funcionais multivetoriais

1. Funções multivetoriais de variável real

Uma aplicação de um subconjunto aberto de R (digamos $S \subseteq R$) ao espaço dos multivetores sobre V , $X : S \rightarrow \Lambda(V)$, será chamada de *função multivetorial de variável real*^[37], ou ainda, *multivetor dependente de um parâmetro real*.

Por razões de simplicidade, nos casos da imagem $X(\lambda)$ ser um escalar, um vetor ou um bivector, $\dots$, etc. a função multivetorial $\lambda \mapsto X(\lambda)$ será dita função escalar, vetorial ou bivectorial, $\dots$, etc. de variável real.

1.1 Limite e continuidade

As noções de limite e continuidade podem ser introduzidas facilmente seguindo caminhos análogos ao caso das funções ordinárias.

Assim, um *multivetor* $L \in \Lambda(V)$ é dito o *limite de* $X(\lambda)$ *para* $\lambda \in S$ *aproximando-se a* $\lambda_0 \in S$ se, e somente se, para todo real $\varepsilon > 0$ existe um real $\delta > 0$ tal que¹⁴ $\|X(\lambda) - L\| < \varepsilon$, se $0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$. Isso é denotado por $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} X(\lambda) = L$.

Os teoremas de limite para essas funções multivetoriais são completamente análogos aos teoremas de limite já conhecidos no caso das funções reais ordinárias:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} (X(\lambda) + Y(\lambda)) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} X(\lambda) + \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} Y(\lambda). \quad (2.1)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} (X(\lambda) * Y(\lambda)) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} X(\lambda) * \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} Y(\lambda), \quad (2.2)$$

onde $*$ é qualquer um dos quatro produtos de multivetores, i.e., $(\wedge)$, $(\cdot)$, $(\lrcorner, \lrcorner)$ ou (*Clifford*).

$X(\lambda)$ é dita *contínua em* $\lambda_0 \in S$ se, e somente se, $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} X(\lambda) = X(\lambda_0)$. A soma e todos os produtos de funções contínuas são funções contínuas.

¹⁴O módulo de um multivetor define-se $\|X\| = \sqrt{X \cdot X}$. Essa definição tem sentido já que o produto escalar canônico é definido positivo (ver pag.16).

1.2 Derivada

A noção de derivação para essas funções multivetoriais de variável real é formulada também em analogia com o caso das funções reais ordinárias.

Assim, a *derivada de $X(\lambda)$ em λ_0* é definida por

$$X'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{X(\lambda) - X(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}. \quad (2.3)$$

As regras de derivação, como é de esperar-se, são análogas às já conhecidas do cálculo elementar:

$$(X + Y)' = X' + Y' \quad (2.4)$$

$$(X * Y)' = X' * Y + X * Y' \text{ (regra de Leibnitz)} \quad (2.5)$$

$$(X \circ \phi)' = (X' \circ \phi)\phi' \text{ (regra da cadeia),} \quad (2.6)$$

onde $*$ significa $(\wedge)$, $(\cdot)$, $(\lrcorner, \lrcorner)$ ou (*produto de Clifford*); e ϕ é uma função real ordinária derivável (ϕ' é a derivada de ϕ).

No espaço vetorial dessas funções multivetoriais de variável real, do tipo deriváveis, é possível introduzir um operador de derivação $\frac{d}{d\lambda}$, definido simplesmente por $\frac{d}{d\lambda}X(\lambda) = X'(\lambda)$.

Na mesma linha de raciocínio podemos desenvolver as noções de limite, continuidade e derivação para funções multivetoriais de várias variáveis reais. Mais uma vez, teremos propriedades completamente análogas ao caso das funções reais de várias variáveis.

2. Funções multivetoriais de variável multivetorial

Uma aplicação de uma parte de $\Lambda(V)$ (digamos $\Lambda^\circ(V) \subseteq \Lambda(V)$) ao espaço dos multivetores sobre V , $F : \Lambda^\circ(V) \rightarrow \Lambda(V)$, será chamada de *função multivetorial de variável multivetorial*^[38], ou ainda, *multivetor dependente de multivetor*.

Se $F(X)$ é um escalar, um vetor ou um bivector, ..., etc., então F é dita *função escalar, vetorial ou bivectorial, ..., etc. de variável multivetorial*.

2.1 Limite e continuidade

Introduzimos as noções de limite e continuidade seguindo a mesma linha de idéias já utilizadas na seção 1., quando elaboramos esses conceitos fundamentais para funções multivetoriais de variável real.

Um multivetor $M \in \Lambda(V)$ é dito o *limite de $F(X)$ para $X \in \Lambda^\circ(V)$ aproximando-se a $X_0 \in \Lambda^\circ(V)$* se, e somente se, para qualquer real $\varepsilon > 0$ existe um real $\delta > 0$ tal que $\|F(X) - M\| < \varepsilon$, se $0 < \|X - X_0\| < \delta$. Isso é denotado por $\lim_{X \rightarrow X_0} F(X) = M$.

Quando estamos tratando com funções escalares de variável multivetorial, $\Lambda^\circ(V) \ni X \mapsto \Phi(X) \in R$, a correspondente definição de $\lim_{X \rightarrow X_0} \Phi(X) = \mu$ se reduz a: para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um real $\delta > 0$ tal que $|\Phi(X) - \mu| < \varepsilon$, se $0 < \|X - X_0\| < \delta$.

Os teoremas de limite são análogos aos já conhecidos no cálculo elementar, a saber:

$$\lim_{X \rightarrow X_0} (F(X) + G(X)) = \lim_{X \rightarrow X_0} F(X) + \lim_{X \rightarrow X_0} G(X). \quad (2.7)$$

$$\lim_{X \rightarrow X_0} (F(X) * G(X)) = \lim_{X \rightarrow X_0} F(X) * \lim_{X \rightarrow X_0} G(X), \quad (2.8)$$

onde $*$ significa, como é usual, $(\wedge)$, $(\cdot)$, $(\lrcorner, \lrcorner)$ ou (produto de Clifford).

Seja $F : \Lambda^\circ(V) \rightarrow \Lambda(V)$ uma função multivetorial de variável multivetorial. F é dita contínua em $X_0 \in \Lambda^\circ(V)$ se, e somente se, $\lim_{X \rightarrow X_0} F(X) = F(X_0)$.

A soma $X \mapsto (F + G)(X) = F(X) + G(X)$ e quaisquer dos produtos multivetoriais $X \mapsto (F * G)(X) = F(X) * G(X)$ de funções multivetoriais contínuas são elas mesmas funções multivetoriais contínuas.

2.2 Diferenciabilidade

Uma função multivetorial de variável multivetorial $F : \Lambda^\circ(V) \rightarrow \Lambda(V)$ é dita *diferenciável em $X_0 \in \Lambda^\circ(V)$* se e somente se *existe um extensor sobre V* , digamos $f_{X_0} \in \text{ext}(V)$, tal que
$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{F(X) - F(X_0) - f_{X_0}(X - X_0)}{\|X - X_0\|} = 0.$$

Se tal f_{X_0} existe, ele deve ser *único*. f_{X_0} será chamado de *diferencial (extensor) de F em X_0* .

2.2a Derivada direcional

Seja F qualquer função multivetorial diferenciável em X_0 , tomemos um número real $\lambda \neq 0$ e um multivetor arbitrário A , então existe o multivetor $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(X_0 + \lambda \langle A \rangle_{X_0}) - F(X_0)}{\lambda}$.

Tal multivetor será denotado por $F'_A(X_0)$ (ou, numa notação operacional, $A \cdot \partial_X F(X_0)$) e chamado de *derivada direcional*^[29,37] de F em X_0 na direção do multivetor A .

$A \cdot \partial_X$ será dito o *operador de derivada direcional com relação a A* . Isto é,

$$F'_A(X_0) = A \cdot \partial_X F(X_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(X_0 + \lambda \langle A \rangle_{X_0}) - F(X_0)}{\lambda}, \quad (2.9)$$

ou ainda, numa forma mais conveniente,

$$F'_A(X_0) = A \cdot \partial_X F(X_0) = \left. \frac{d}{d\lambda} F(X_0 + \lambda \langle A \rangle_{X_0}) \right|_{\lambda=0}. \quad (2.10)$$

A derivada direcional de uma função multivetorial diferenciável de variável multivetorial é linear com relação ao multivetor de direção, isto é, para todos $\alpha, \beta \in R$ e $A, B \in \Lambda(V)$

$$F'_{\alpha A + \beta B}(X) = \alpha F'_A(X) + \beta F'_B(X), \quad (2.11)$$

ou, na notação operacional,

$$(\alpha A + \beta B) \cdot \partial_X F(X) = \alpha A \cdot \partial_X F(X) + \beta B \cdot \partial_X F(X). \quad (2.12)$$

A seguir, enunciamos os teoremas de derivação direcional para a soma, os produtos multivetoriais e as composições das funções multivetoriais diferenciáveis de variável multivetorial.

Sejam $X \mapsto F(X)$ e $X \mapsto G(X)$ duas funções diferenciáveis, a soma $X \mapsto (F + G)(X) = F(X) + G(X)$ e os produtos multivetoriais $X \mapsto (F * G)(X) = F(X) * G(X)$, onde $*$ significa $(\wedge)$, $(\cdot)$, $(\lrcorner, \llcorner)$ ou (*produto de Clifford*), são elas mesmas funções diferenciáveis. Temos as seguintes fórmulas

$$(F + G)'_A(X) = F'_A(X) + G'_A(X). \quad (2.13)$$

$$(F * G)'_A(X) = F'_A(X) * G(X) + F(X) * G'_A(X) \text{ (regra de Leibnitz)}. \quad (2.14)$$

Enunciamos três importantes regras de cadeia.

Sejam $X \mapsto F(X)$ e $X \mapsto G(X)$ duas funções multivetoriais diferenciáveis, a composição $X \mapsto (F \circ G)(X) = F(\langle G(X) \rangle_Y)$, com $Y \in \text{dom} F$, é uma função multivetorial diferenciável, e

$$(F \circ G)'_A(X) = F'_{G'(X)}(\langle G(X) \rangle_Y). \quad (2.15)$$

Sejam $X \mapsto F(X)$ e $\lambda \mapsto X(\lambda)$ duas funções multivetoriais diferenciáveis, a primeira de variável multivetorial e a segunda de variável real. A composição $\lambda \mapsto (F \circ X)(\lambda) = F(\langle X(\lambda) \rangle_Y)$, com $Y \in \text{dom} F$, é uma função multivetorial diferenciável de variável real, e

$$(F \circ X)'(\lambda) = F'_{X'(\lambda)}(\langle X(\lambda) \rangle_Y). \quad (2.16)$$

Sejam $\phi : R \rightarrow R$ e $\Psi : \Lambda^\circ(V) \rightarrow R$ uma função ordinária derivável e uma função escalar diferenciável de variável multivetorial. A composição $\phi \circ \Psi : \Lambda^\circ(V) \rightarrow R$ tal que $(\phi \circ \Psi)(X) = \phi(\Psi(X))$ é uma função escalar diferenciável de variável multivetorial, e

$$(\phi \circ \Psi)'_A(X) = \phi'(\Psi(X))\Psi'_A(X). \quad (2.17)$$

Os teoremas de derivação direcional, na notação operacional, ficam:

$$A \cdot \partial_X(F + G)(X) = A \cdot \partial_X F(X) + A \cdot \partial_X G(X). \quad (2.18)$$

$$A \cdot \partial_X(F * G)(X) = A \cdot \partial_X F(X) * G(X) + F(X) * A \cdot \partial_X G(X). \quad (2.19)$$

$$A \cdot \partial_X(F \circ G)(X) = A \cdot \partial_X G(X) \cdot \partial_Y F(\langle G(X) \rangle_Y), \text{ com } Y \in \text{dom} F. \quad (2.20)$$

$$\frac{d}{d\lambda}(F \circ X)(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}X(\lambda) \cdot \partial_Y F(\langle X(\lambda) \rangle_Y), \text{ com } Y \in \text{dom} F. \quad (2.21)$$

$$A \cdot \partial_X(\phi \circ \Psi)(X) = \frac{d}{d\mu}\phi(\Psi(X))A \cdot \partial_X \Psi(X). \quad (2.22)$$

2.2b Derivada

Seja F qualquer função multivetorial diferenciável em X_0 , e tomemos um par arbitrário de bases recíprocas para V , digamos $(\langle \varepsilon^j \rangle, \langle \varepsilon_j \rangle)$, (i.e., $\varepsilon^j \cdot \varepsilon_i = \delta_i^j$). Então existe um multivetor bem-

definido (i.e., independente do par de bases $(\langle \varepsilon^j \rangle, \langle \varepsilon_j \rangle)$ e dependente só da função multivetorial F) $\sum_J \frac{1}{\nu(J)!} \varepsilon^J F'_{\varepsilon_J}(X_0)$ (ou, também $\sum_J \frac{1}{\nu(J)!} \varepsilon_J F'_{\varepsilon_J}(X_0)$).

Tal multivetor será denotado por $F'(X_0)$ (ou, numa notação operacional, $\partial_X F(X_0)$), e chamado de *derivada*^[29,37] de F em X_0 . Isto é,

$$F'(X_0) = \partial_X F(X_0) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} \varepsilon^J F'_{\varepsilon_J}(X_0). \quad (2.23)$$

Vejamos algumas propriedades importantes da derivação de funções multivetoriais de variável multivetorial.

Seja $X \mapsto \Phi(X)$ uma função escalar diferenciável de variável multivetorial, então

$$A \cdot \partial_X \Phi(X) = A \cdot (\partial_X \Phi(X)). \quad (2.24)$$

Sejam $X \mapsto F(X)$, $X \mapsto G(X)$ e $X \mapsto \Phi(X)$ funções diferenciáveis, então

$$\partial_X (F + G)(X) = \partial_X F(X) + \partial_X G(X). \quad (2.25)$$

$$\partial_X (\Phi G)(X) = \partial_X \Phi(X) G(X) + \Phi(X) \partial_X G(X) \text{ (regra de Leibnitz)}. \quad (2.26)$$

Para uma melhor compreensão dos métodos de cálculo de derivadas de funções multivetoriais, vamos desenvolver a seguir alguns exemplos ilustrativos muito úteis.

Exemplo 2.1: Seja $\Lambda^\circ(V) \ni X \mapsto X \cdot X \in R$, onde $\Lambda^\circ(V)$ é alguma parte de $\Lambda(V)$. Calculemos: $A \cdot \partial_X (X \cdot X)$ e $\partial_X (X \cdot X)$

$$\begin{aligned} A \cdot \partial_X (X \cdot X) &= \left. \frac{d}{d\lambda} (X + \lambda \langle A \rangle_X) \cdot (X + \lambda \langle A \rangle_X) \right|_{\lambda=0} \\ &= \left. \frac{d}{d\lambda} (X \cdot X + 2\lambda \langle A \rangle_X \cdot X + \lambda^2 \langle A \rangle_X \cdot \langle A \rangle_X) \right|_{\lambda=0}, \\ A \cdot \partial_X (X \cdot X) &= 2 \langle A \rangle_X \cdot X = 2A \cdot X. \\ \partial_X (X \cdot X) &= \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} \varepsilon^J \varepsilon_J \cdot \partial_X (X \cdot X) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} \varepsilon^J 2(\varepsilon_J \cdot X) = 2X. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2: Seja $\Lambda^\circ(V) \ni X \mapsto B \cdot X \in R$, com $B \in \Lambda(V)$. Calculemos: $A \cdot \partial_X (B \cdot X)$ e

$$\partial_X(B \cdot X)$$

$$\begin{aligned} A \cdot \partial_X(B \cdot X) &= \left. \frac{d}{d\lambda} B \cdot (X + \lambda \langle A \rangle_X) \right|_{\lambda=0} = B \cdot \langle A \rangle_X = A \cdot \langle B \rangle_X, \\ \partial_X(B \cdot X) &= \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} \varepsilon^J \varepsilon_J \cdot \partial_X(B \cdot X) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} \varepsilon^J (\varepsilon_J \cdot \langle B \rangle_X) = \langle B \rangle_X. \end{aligned}$$

Exemplo 2.3: Seja $\Lambda^\diamond(V) \ni X \mapsto (BXC) \cdot X \in R$, com $B, C \in \Lambda(V)$. Calculemos:
 $A \cdot \partial_X((BXC) \cdot X)$ e $\partial_X((BXC) \cdot X)$

$$\begin{aligned} A \cdot \partial_X((BXC) \cdot X) &= \left. \frac{d}{d\lambda} (B(X + \lambda \langle A \rangle_X)C) \cdot (X + \lambda \langle A \rangle_X) \right|_{\lambda=0} \\ &= \left. \frac{d}{d\lambda} ((BXC) \cdot X + \lambda(B \langle A \rangle_X C) \cdot X + \lambda(BXC) \cdot \langle A \rangle_X + \lambda^2(B \langle A \rangle_X C) \cdot \langle A \rangle_X) \right|_{\lambda=0} \\ &= (B \langle A \rangle_X C) \cdot X + (BXC) \cdot \langle A \rangle_X = \langle A \rangle_X \cdot (BXC + \tilde{B}X\tilde{C}), \\ A \cdot \partial_X((BXC) \cdot X) &= A \cdot \langle BXC + \tilde{B}X\tilde{C} \rangle_X. \\ \partial_X((BXC) \cdot X) &= \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} \varepsilon^J \varepsilon_J \cdot \partial_X(BXC \cdot X) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} \varepsilon^J (\varepsilon_J \cdot \langle BXC + \tilde{B}X\tilde{C} \rangle_X), \\ \partial_X((BXC) \cdot X) &= \langle BXC + \tilde{B}X\tilde{C} \rangle_X. \end{aligned}$$

Neste último exemplo utilizamos essencialmente a identidade multivetorial $(AXB) \cdot Y = X \cdot (\tilde{A}Y\tilde{B})$.

Exemplo 2.4: Consideremos $x \wedge B$, com $x \in \Lambda^1(V)$ e $B \in \Lambda^2(V)$, então $x \wedge B \in \Lambda^3(V)$. Calculemos a derivada direcional $a \cdot \partial_x(x \wedge B)$, o divergente $\partial_x \lrcorner (x \wedge B)$, o rotacional $\partial_x \wedge (x \wedge B)$ e o gradiente $\partial_x(x \wedge B)$

$$\begin{aligned} a \cdot \partial_x(x \wedge B) &= \left. \frac{d}{d\lambda} (x + \lambda a) \wedge B \right|_{\lambda=0} = a \wedge B, \\ \partial_x \lrcorner (x \wedge B) &= \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \lrcorner \varepsilon_j \cdot \partial_x(x \wedge B) = \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \lrcorner (\varepsilon_j \wedge B) = (n-2)B, \\ \partial_x \wedge (x \wedge B) &= \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \wedge \varepsilon_j \cdot \partial_x(x \wedge B) = \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \wedge (\varepsilon_j \wedge B_k) = 0, \\ \partial_x(x \wedge B) &= \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \varepsilon_j \cdot \partial_x(x \wedge B) = \sum_{j=1}^n \varepsilon^j (\varepsilon_j \wedge B) \\ &= \sum_{j=1}^n (\varepsilon^j \lrcorner (\varepsilon_j \wedge B) + \varepsilon^j \wedge (\varepsilon_j \wedge B)), \end{aligned}$$

$$\partial_x(x \wedge B) = (n-2)B. \quad (n = \dim V)$$

Exemplo 2.5: Consideremos $x \lrcorner B \in \Lambda^1(V)$. Calculemos $a \cdot \partial_x(x \lrcorner B)$, $\partial_x \lrcorner(x \lrcorner B)$, $\partial_x \wedge(x \lrcorner B)$ e $\partial_x(x \lrcorner B)$

$$\begin{aligned} a \cdot \partial_x(x \lrcorner B) &= \left. \frac{d}{d\lambda}(x + \lambda a) \lrcorner B \right|_{\lambda=0} = a \lrcorner B. \\ \partial_x \lrcorner(x \lrcorner B) &= \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \lrcorner \varepsilon_j \cdot \partial_x(x \lrcorner B) = \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \lrcorner(\varepsilon_j \lrcorner B) = \sum_{j=1}^n (\varepsilon^j \wedge \varepsilon_j) \lrcorner B_k = 0, \\ \partial_x \wedge(x \lrcorner B) &= \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \wedge \varepsilon_j \cdot \partial_x(x \lrcorner B) = \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \wedge (\varepsilon_j \lrcorner B) = 2B. \\ \partial_x(x \lrcorner B) &= \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \varepsilon_j \cdot \partial_x(x \lrcorner B) = \sum_{j=1}^n \varepsilon^j (\varepsilon_j \lrcorner B) \\ \partial_x(x \lrcorner B) &= \sum_{j=1}^n (\varepsilon^j \lrcorner(\varepsilon_j \lrcorner B) + \varepsilon^j \wedge (\varepsilon_j \lrcorner B)) = 2B. \quad (n = \dim V) \end{aligned}$$

Estes exemplos resumem algumas das fórmulas mais importantes do cálculo de funções multivetoriais de variável multivetorial.

2.3 Operadores diferenciais ∂_X* e $\lrcorner(\partial_X)*$

Introduzimos os operadores diferenciais lineares^[29,38] ∂_X* definidos por

$$\partial_X * F(X_0) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} \varepsilon^J * \varepsilon_J \cdot \partial_X F(X_0), \quad (2.27)$$

onde $*$ é qualquer um dos produtos multivetoriais $(\wedge)$, $(\cdot)$, $(\lrcorner, \lrcorner)$ ou (*Clifford*).

Esses operadores diferenciais lineares estão bem-definidos, já que os multivetores no lado direito da definição acima dependem só da função multivetorial diferenciável envolvida e não do par de bases recíprocas utilizado.

Note que se $*$ é o produto de Clifford então o operador ∂_X* é precisamente o operador ∂_X (i.e., o operador derivada). Às vezes, ∂_X é chamado de *operador gradiente* e $\partial_X F$ é dito o *gradiente de F*.

Em particular, o operador $\partial_X \wedge$ é chamado de *operador rotacional* e $\partial_X \wedge F$ é dito o *rotacional de F*.

Os operadores $\partial_X \cdot$ e $\partial_X \lrcorner$ são chamados de *operadores divergentes* e $\partial_X \cdot F$ é dito o *divergente*

escalar de F e $\partial_X \lrcorner F$ é dito o *divergente contraído* de F .

Seja t um $(1, 1)$ -extensor sobre V , é possível introduzir agora outros operadores diferenciais lineares $\underline{t}(\partial_X) *$ definidos por

$$\underline{t}(\partial_X) * F(X_0) = \sum_J \frac{1}{\nu(J)!} \underline{t}(\varepsilon^J) * \varepsilon_J \cdot \partial_X F(X_0), \quad (2.28)$$

onde $*$ é qualquer um dos produtos multivetoriais $(\wedge)$, $(\cdot)$, $(\lrcorner, \lrcorner)$ ou (*Clifford*).

Esses operadores diferenciais lineares estão bem-definidos já que dependem só da função multivetorial diferenciável F e não do par de bases recíprocas $(\langle \varepsilon^j \rangle, \langle \varepsilon_j \rangle)$.

$\underline{t}(\partial_X) \wedge$ é chamado de *t-operador rotacional*, $\underline{t}(\partial_X) \wedge F$ é o *t-rotacional* de F .

$\underline{t}(\partial_X) \cdot$ e $\underline{t}(\partial_X) \lrcorner$ são chamados de *t-operadores divergentes*, $\underline{t}(\partial_X) \cdot F$ é o *t-divergente escalar* de F e $\underline{t}(\partial_X) \lrcorner F$ é o *t-divergente contraído* de F .

$\underline{t}(\partial_X)$ é chamado de *t-operador gradiente* e $\underline{t}(\partial_X) F$ é o *t-gradiente* de F .

3. Funcionais multivetoriais

Uma aplicação do espaço dos (p, q) -extensores sobre V ao espaço dos multivetores sobre V , $\mathcal{F} : (p, q)\text{-ext}(V) \rightarrow \Lambda(V)$, será chamada *funcional multivetorial de variável (p, q) -extensorial*^[29,39].

Se $\mathcal{F}[t]$ é um escalar, um vetor ou um bivector, ... etc., então $\mathcal{F}$ é dito *funcional escalar, vetorial ou bivectorial, ... etc. de variável (p, q) -extensorial*.

Seja t um (p, q) -extensor sobre V (i.e., t é uma aplicação linear de $\Lambda^p(V)$ a $\Lambda^q(V)$). Tomemos uma k -upla $(A^1, \dots, A^k)$ de p -vetores de $\Lambda^p(V)$ e uma função multivetorial de k variáveis q -vetoriais, $F : \underbrace{\Lambda^q(V) \times \dots \times \Lambda^q(V)}_{k \text{ cópias}} \rightarrow \Lambda(V)$.

F induz naturalmente um funcional multivetorial de variável (p, q) -extensorial, com relação à k -upla $(A^1, \dots, A^k)$, definido por $(p, q)\text{-ext}(V) \ni t \mapsto \mathcal{F}_{(A^1, \dots, A^k)}[t] = F[t(A^1), \dots, t(A^k)]$.

$\mathcal{F}_{(A^1, \dots, A^k)}$ se dirá funcional multivetorial *induzido* pela função multivetorial F , ou também, que F é *geradora* de $\mathcal{F}_{(A^1, \dots, A^k)}$.

3.1 Derivada de funcionais multivetoriais induzidos

Se $(X^1, \dots, X^k) \mapsto F(X^1, \dots, X^k)$ é uma função multivetorial diferenciável (i.e., diferen-

ciável com relação a cada uma das variáveis q -vetoriais $X^1, \dots, X^k$), então existirão as derivadas parciais de F , que são $\partial_{X^1} F, \dots, \partial_{X^k} F$. Podemos então construir exatamente k funcionais multivetoriais de variável (p, q) -extensorial induzidos por elas, a saber: $t \mapsto (\partial_{X^1} F)_{(A^1, \dots, A^k)}[t] = \partial_{X^1} F[t(A^1), \dots, t(A^k)], \dots, t \mapsto (\partial_{X^k} F)_{(A^1, \dots, A^k)}[t] = \partial_{X^k} F[t(A^1), \dots, t(A^k)]$.

Seja $A \in \Lambda(V)$ um multivetor arbitrário, o funcional multivetorial de variável (p, q) -extensorial, $(p, q)\text{-ext}(V) \ni t \mapsto A, \partial_t \mathcal{F}_{(A^1, \dots, A^k)}[t] \in \Lambda(V)$ tal que

$$A, \partial_t \mathcal{F}_{(A^1, \dots, A^k)}[t] = A \cdot A^1 (\partial_{X^1} F)_{(A^1, \dots, A^k)}[t] + \dots + A \cdot A^k (\partial_{X^k} F)_{(A^1, \dots, A^k)}[t], \quad (2.29)$$

será chamado de *derivada*^[29,39] de $\mathcal{F}_{(A^1, \dots, A^k)}$ com relação a t na direção de A .

A, ∂_t é chamado de *operador derivada com relação a t na direção de A* . Ele é linear com relação ao multivetor de direção, isto é, para todos $\alpha, \beta \in R$ e $A, B \in \Lambda(V)$

$$(\alpha A + \beta B), \partial_t = \alpha A, \partial_t + \beta B, \partial_t. \quad (2.30)$$

A derivação de funcionais multivetoriais tem três propriedades importantes:

$$A, \partial_t (\mathcal{F}_{(A^1, \dots, A^k)} + \mathcal{G}_{(A^1, \dots, A^k)})[t] = A, \partial_t \mathcal{F}_{(A^1, \dots, A^k)}[t] + A, \partial_t \mathcal{G}_{(A^1, \dots, A^k)}[t]. \quad (2.31)$$

$$A, \partial_t (\alpha \mathcal{F}_{(A^1, \dots, A^k)})[t] = \alpha (A, \partial_t \mathcal{F}_{(A^1, \dots, A^k)}[t]) \quad (2.32)$$

$$A, \partial_t (\mathcal{F}_{(A^1, \dots, A^k)} B)[t] = (A, \partial_t \mathcal{F}_{(A^1, \dots, A^k)}[t]) B. \quad (2.33)$$

Onde $\mathcal{F}_{(A^1, \dots, A^k)}$ e $\mathcal{G}_{(A^1, \dots, A^k)}$ são dois quaisquer funcionais multivetoriais induzidos, $\alpha \in R$ e $B \in \Lambda(V)$.

Encerramos esta seção apresentando alguns exemplos ilustrativos do cálculo de derivadas de funcionais multivetoriais (daremos os “truques de marca registrada”).

Exemplo 3.1: Seja $h \in (1, 1)\text{-ext}(V)$, consideremos o funcional escalar $h \mapsto h(b) \cdot h(c)$ e o funcional bivetorial $h \mapsto h(b) \wedge h(c)$, com $b, c \in \Lambda^1(V)$. O primeiro tem como geradora a função escalar de 2 variáveis vetoriais $(x, y) \mapsto x \cdot y$ e a geradora do segundo é a função bivetorial de 2 variáveis vetoriais $(x, y) \mapsto x \wedge y$. Calculamos as derivadas de ambos os funcionais escalar e

bivetorial com relação a h na direção de $a \in \Lambda^1(V)$,

$$\begin{aligned} a, \partial_h(h(b) \cdot h(c)) &= a \cdot b \partial_{h(b)}(h(b) \cdot h(c)) + a \cdot c \partial_{h(c)}(h(b) \cdot h(c)) \\ &= a \cdot b h(c) + a \cdot c h(b), \end{aligned}$$

onde utilizamos a fórmula de derivação vetorial $\partial_x(x \cdot y) = y$.

E,

$$\begin{aligned} a, \partial_h(h(b) \wedge h(c)) &= a \cdot b \partial_{h(b)}(h(b) \wedge h(c)) + a \cdot c \partial_{h(c)}(h(b) \wedge h(c)) \\ &= a \cdot b(n-1)h(c) - a \cdot c(n-1)h(b) \\ &= (n-1)(a \cdot b h(c) - a \cdot c h(b)) \\ &= (n-1)h(a \cdot bc - a \cdot cb) \\ &= (n-1)h(a \lrcorner (b \wedge c)), \end{aligned}$$

onde utilizamos a fórmula de derivação vetorial $\partial_x(x \wedge y) = (n-1)y$.

A segunda fórmula desenvolvida neste exemplo tem uma generalização muito útil. A derivada do funcional k -vetorial $h \mapsto \underline{h}(a^1 \wedge \dots \wedge a^k) = h(a^1) \wedge \dots \wedge h(a^k)$, com $a^1, \dots, a^k \in \Lambda^1(V)$, é

$$a, \partial_h \underline{h}(a^1 \wedge \dots \wedge a^k) = (n-k+1) \underline{h}(a \lrcorner (a^1 \wedge \dots \wedge a^k)).$$

Exemplo 3.2: Seja $t \in (1,1)\text{-ext}(V)$, o traço de t (i.e., $t \mapsto tr[t] = t(\varepsilon^j) \cdot \varepsilon_j$) é um funcional escalar de t , cuja geradora é a função escalar de n variáveis vetoriais $(x^1, \dots, x^n) \mapsto x^1 \cdot \varepsilon_1 + \dots + x^n \cdot \varepsilon_n$, e o bivector de t (i.e., $t \mapsto biv[t] = t(\varepsilon^j) \wedge \varepsilon_j$) é um funcional bivetorial de t , cuja geradora é a função bivetorial de n variáveis vetoriais $(x^1, \dots, x^n) \mapsto x^1 \wedge \varepsilon_1 + \dots + x^n \wedge \varepsilon_n$. Calculamos $a, \partial_t tr[t]$ e $a, \partial_t biv[t]$.

$$\begin{aligned} a, \partial_t tr[t] &= a \cdot \varepsilon^1 \partial_{t(\varepsilon^1)}(t(\varepsilon^1) \cdot \varepsilon_1 + \dots + t(\varepsilon^n) \cdot \varepsilon_n) + \dots \\ &\quad + a \cdot \varepsilon^n \partial_{t(\varepsilon^n)}(t(\varepsilon^1) \cdot \varepsilon_1 + \dots + t(\varepsilon^n) \cdot \varepsilon_n) \\ &= a \cdot \varepsilon^1 \varepsilon_1 + \dots + a \cdot \varepsilon^n \varepsilon_n = a. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}
a, \partial_t \text{biv}[t] &= a \cdot \varepsilon^1 \partial_{t(\varepsilon^1)}(t(\varepsilon^1) \wedge \varepsilon_1 + \cdots + t(\varepsilon^n) \wedge \varepsilon_n) + \cdots \\
&\quad + a \cdot \varepsilon^n \partial_{t(\varepsilon^n)}(t(\varepsilon^1) \wedge \varepsilon_1 + \cdots + t(\varepsilon^n) \wedge \varepsilon_n) \\
&= a \cdot \varepsilon^1 (n-1) \varepsilon_1 + \cdots + a \cdot \varepsilon^n (n-1) \varepsilon_n = (n-1)a.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.3: Seja $h \in (1,1)\text{-ext}(V)$, consideremos o funcional vetorial $h \mapsto h^\dagger(b)$, com $b \in \Lambda^1(V)$, e o funcional pseudoescalar $h \mapsto \underline{h}(I)$, com $I \in \Lambda^n(V)$. Calculamos as derivadas de ambos os funcionais:

$$\begin{aligned}
a, \partial_h h^\dagger(b) &= a, \partial_h (h^\dagger(b) \cdot \varepsilon^k \varepsilon_k) = a, \partial_h (b \cdot h(\varepsilon^k) \varepsilon_k) \\
&= a \cdot \varepsilon^1 \partial_{h(\varepsilon^1)}(b \cdot h(\varepsilon^k) \varepsilon_k) + \cdots + a \cdot \varepsilon^n \partial_{h(\varepsilon^n)}(b \cdot h(\varepsilon^k) \varepsilon_k) \\
&= a \cdot \varepsilon^1 (b \varepsilon_1) + \cdots + a \cdot \varepsilon^n (b \varepsilon_n) \\
&= b(a \cdot \varepsilon^1 \varepsilon_1 + \cdots + a \cdot \varepsilon^n \varepsilon_n) = ba,
\end{aligned}$$

onde utilizamos uma fórmula para a expansão de vetores para obtermos $h^\dagger(b)$ como funcional vetorial de h , a condição de produto escalar que envolve h e $h^\dagger$ (i.e., $h^\dagger(x) \cdot y = x \cdot h(y)$) e a fórmula de derivação vetorial $\partial_x(b \cdot x)c = bc$.

Também,

$$\begin{aligned}
a, \partial_h \underline{h}(I) &= a, \partial_h \underline{h}((I \cdot \varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n) \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n) \\
&= (I \cdot \varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n) a, \partial_h \underline{h}(\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n) \\
&= (I \cdot \varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n) \underline{h}(a \lrcorner (\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n)) \\
&= \underline{h}(a \lrcorner (I \cdot \varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n) \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n) \\
&= \underline{h}(a \lrcorner I) = \underline{h}(aI),
\end{aligned}$$

onde utilizamos uma fórmula para a expansão de pseudoescalares, a eq.(2.32) e a generalização da segunda fórmula do *exemplo 3.1*.

Exemplo 3.4: Seja $h \in (1,1)\text{-ext}(V)$, o determinante de h é um funcional escalar bem-

definido, i.e., $h \mapsto \det[h] = \underline{h}(\varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n) \cdot (\varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n)$. Calculamos $a, \partial_h \det[h]$,

$$\begin{aligned} a, \partial_h \det[h] &= a, \partial_h (\underline{h}(I) I^{-1}) = (a, \partial_h \underline{h}(I)) I^{-1} \\ &= \underline{h}(aI) I^{-1} = \det[h] h^*(a), \end{aligned}$$

onde usamos a eq.(2.33), o resultado do *exemplo 3.3* e as seguintes identidades que envolvem $(1, 1)$ -extensores: $\det[t]I = \underline{t}(I)$ e $t^{-1}(a) = \det^{-1}[t] \underline{t}^\dagger(aI) I^{-1}$, (lembre-se que $h^* = (h^\dagger)^{-1} = (h^{-1})^\dagger$).

CAPÍTULO 3

Cálculo multivetorial e extensorial em variedades

1. Espaço canônico

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade suave de dimensão finita^[56,48] (i.e., $\dim \mathcal{M} = n$, onde $n \in \mathbb{N}$).

Associado a um ponto $O \in \mathcal{M}$, escolhido arbitrariamente, existe certamente um sistema de coordenadas local $(\mathcal{U}, \phi)_O$, i.e., $\mathcal{U}$ é um conjunto aberto de $\mathcal{M}$ que contém O , e ϕ é uma correspondência biunívoca e contínua entre $\mathcal{U}$ e um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Todo ponto $p \in \mathcal{U}$ pode ser localizado por uma n -upla de números reais $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$, digamos $\phi(p) = (\xi^1(p), \dots, \xi^n(p))$. Como é usual, tanto $\mathcal{U} \ni p \mapsto \xi^\mu(p) \in \mathbb{R}$, a μ -ésima função coordenada, quanto $\xi^\mu(p)$, a μ -ésima coordenada, são identificadas notacionalmente por ξ^μ , com $\mu = 1, \dots, n$.

No ponto $p \in \mathcal{U}$, os vetores tangentes coordenados $\left. \frac{\partial}{\partial \xi^1} \right|_{(p)}, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial \xi^n} \right|_{(p)}$ são uma base natural do espaço tangente $\mathcal{T}_p \mathcal{M}$, e as 1-formas tangentes coordenadas $d\xi^1|_{(p)}, \dots, d\xi^n|_{(p)}$ são uma base natural do espaço tangente dual $\mathcal{T}_p^* \mathcal{M}$.

Introduzimos uma relação de equivalência no fibrado tangente $\bigcup_{p \in \mathcal{U}} \mathcal{T}_p \mathcal{M}$ (i.e., o conjunto união dos espaços tangentes sobre $\mathcal{U}$). Se $\mathbf{v}_p \in \mathcal{T}_p \mathcal{M}$ e $\mathbf{v}_q \in \mathcal{T}_q \mathcal{M}$ são dois vetores tangentes de $\bigcup_{p \in \mathcal{U}} \mathcal{T}_p \mathcal{M}$, então:

$\mathbf{v}_p \sim \mathbf{v}_q$ (leia-se $\mathbf{v}_p$ é equivalente a $\mathbf{v}_q$) se e somente se $\mathbf{v}_p \xi^\mu = \mathbf{v}_q \xi^\mu$, com $\mu = 1, \dots, n$.

Isto é, a μ -ésima componente de $\mathbf{v}_p$ na base natural $\left\langle \left. \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \right|_{(p)} \right\rangle$ de $\mathcal{T}_p \mathcal{M}$ coincide com a μ -ésima componente de $\mathbf{v}_q$ na base natural $\left\langle \left. \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \right|_{(q)} \right\rangle$ de $\mathcal{T}_q \mathcal{M}$.

Trata-se de uma relação de equivalência bem-definida e obviamente não vazia, pois os próprios vetores tangentes coordenados aos pontos p e q são equivalentes entre eles!

De fato, um cálculo direto fornece:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \right|_{(p)} \xi^\mu = \left. \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \xi^\alpha} \right|_{(p)} = \delta_\alpha^\mu = \left. \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \xi^\alpha} \right|_{(q)} = \left. \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \right|_{(q)} \xi^\mu, \text{ com } \mu, \alpha = 1, \dots, n.$$

E portanto, $\left. \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \right|_{(p)} \sim \left. \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \right|_{(q)}$.

Para o ponto $o \in \mathcal{U}$, a classe de equivalência de um vetor tangente $\mathbf{v}_o \in \mathcal{T}_o\mathcal{M}$ é dada por $[\mathbf{v}_o] = \{\mathbf{v}_p \sim \mathbf{v}_o / p \in \mathcal{U}\}$.

O conjunto das classes de equivalência^[40] de cada um dos vetores tangentes $\mathbf{v}_o \in \mathcal{T}_o\mathcal{M}$, i.e., $\mathbf{U} = \{[\mathbf{v}_o] / \mathbf{v}_o \in \mathcal{T}_o\mathcal{M}\}$, munido de uma soma de classes de equivalência e uma multiplicação de classes de equivalência por escalares reais, definidas por: $[\mathbf{v}_o] + [\mathbf{w}_o] = [\mathbf{v}_o + \mathbf{w}_o]$ e $\alpha[\mathbf{v}_o] = [\alpha\mathbf{v}_o]$, tem uma estrutura natural de espaço vetorial sobre R .

A classe de equivalência do vetor nulo $\mathbf{0}_o \in \mathcal{T}_o\mathcal{M}$, i.e., $\mathbf{0} \equiv [\mathbf{0}_o] \in \mathbf{U}$, o conjunto de todos os vetores nulos de cada um dos espaços tangentes sobre $\mathcal{U}$, é o *vetor nulo de $\mathbf{U}$* .

As classes de equivalência dos n -vetores tangentes coordenados $\left. \frac{\partial}{\partial \xi^1} \right|_{(o)}, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial \xi^n} \right|_{(o)} \in \mathcal{T}_o\mathcal{M}$, digamos $\mathbf{b}_1 \equiv \left[\left. \frac{\partial}{\partial \xi^1} \right|_{(o)} \right], \dots, \mathbf{b}_n \equiv \left[\left. \frac{\partial}{\partial \xi^n} \right|_{(o)} \right] \in \mathbf{U}$, são uma *base fundamental para $\mathbf{U}$* . Assim, $\dim \mathbf{U} = n$.

$\mathbf{U}$ é um espaço vetorial real obviamente associado ao sistema coordenado local $(\mathcal{U}, \phi)_o$, e será chamado de *espaço canônico*^[40].

Ele desempenha um papel fundamental na nossa teoria do cálculo multivetorial e extensorial em variedades.

De acordo com as notações introduzidas no capítulo um, o espaço dual de $\mathbf{U}$ será denotado U , o espaço das k -formas ($0 \leq k \leq n$) sobre $\mathbf{U}$, i.e., o espaço dos k -vetores sobre U , será denotado por $\Lambda^k(U)$. O espaço dos multivetores sobre U será denotado por $\Lambda(U)$.

A base dual da base fundamental $\langle \mathbf{b}_\mu \rangle$, certamente uma base fundamental para U , será denotada por $\langle \beta^\mu \rangle$, i.e., $\beta^\mu(\mathbf{b}_\nu) = \delta^\mu_\nu$. Às vezes, por conveniência notacional, escreveremos $\mathbf{b}^\mu = \mathbf{b}_\mu$ e $\beta_\mu = \beta^\mu$.

O produto escalar canônico dos multivetores será construído utilizando-se $\langle \mathbf{b}_\mu \rangle$, e portanto, a álgebra de Clifford canônica dos multivetores será relativa a essa mesma base fundamental.

1.1 Vetor de posição

A cada ponto $p \in \mathcal{U}$ correspondem exatamente n números reais $\xi^1, \dots, \xi^n$, as suas coordenadas de posição no sistema de coordenadas local $(\mathcal{U}, \phi)_o$; é possível definir então um vetor no

espaço vetorial U ,

$$x = \xi^\mu \beta_\mu, \quad (3.1)$$

associado ao ponto $p \in \mathcal{U}$.

O vetor $x \in U$ *localiza vetorialmente* o ponto $p \in \mathcal{U}$, portanto x é usualmente chamado de *vetor de posição*^[40] de p .

Note que nem todo vetor do espaço vetorial U é vetor de posição de algum ponto do conjunto aberto $\mathcal{U}$, já que as componentes desse vetor de U não têm porquê serem necessariamente as coordenadas de algum ponto de $\mathcal{U}$.

O conjunto dos vetores de posição de todos os pontos de $\mathcal{U}$ será denotado por U_0 . Esse subconjunto do espaço vetorial U não é necessariamente um subespaço vetorial de U .

1.2 Campos multivetoriais

Os campos multivetoriais^[40] sobre $\mathcal{M}$, quando restritos a $\mathcal{U}$, são representados por funções multivetoriais do vetor de posição, $U_0 \ni x \mapsto X(x) \in \Lambda(U)$.

Se X é C^∞ -diferenciável sobre U_0 , então o campo multivetorial será dito suave sobre $\mathcal{U}$.

1.3 Campos extensoriais

Os campos (p, q) -extensoriais^[41] sobre $\mathcal{M}$, quando restritos a $\mathcal{U}$, são representados por funções extensoriais do vetor de posição, $U_0 \ni x \mapsto t_{(x)} \in (p, q)\text{-ext}(U)$.

Se t é C^∞ -diferenciável¹⁵ sobre U_0 , então o campo (p, q) -extensorial será dito suave sobre $\mathcal{U}$.

2. Estrutura métrica

Um campo $(1, 1)$ -extensorial suave sobre $\mathcal{U}$, digamos g , simétrico (i.e., $g_{(x)} = g_{(x)}^\dagger$) para cada $x \in U_0$) e não-degenerado (i.e., $\det[g_{(x)}] \neq 0$ para cada $x \in U_0$), é chamado de *campo extensorial métrico sobre $\mathcal{U}$* .

A dupla $\langle \mathcal{M}, g \rangle$ onde $\mathcal{M}$ é uma variedade suave de dimensão finita e g é um campo extensorial

¹⁵A função (p, q) -extensorial t é dita C^∞ -diferenciável sobre U_0 se, e somente se, para toda função p -vetorial C^∞ -diferenciável sobre U_0 , digamos $x \mapsto X(x)$, a função q -vetorial $x \mapsto t_{(x)}(X(x))$ é C^∞ -diferenciável sobre U_0 .

métrico sobre $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, será dita uma *estrutura métrica*.

2.1 Operadores de Christoffel

Na estrutura métrica $\langle \mathcal{M}, g \rangle$ introduzimos dois operadores fundamentais^[40] que agem sobre a álgebra de Lie dos campos vetoriais suaves sobre $\mathcal{U}$.

► *O primeiro operador de Christoffel*¹⁶, $(a, b, c) \mapsto [a, b, c]$ tal que

$$\begin{aligned} [a, b, c] = & \frac{1}{2}(a \cdot \partial(g(b) \cdot c) + b \cdot \partial(g(c) \cdot a) - c \cdot \partial(g(a) \cdot b) \\ & + g(c) \cdot [a, b] + g(b) \cdot [c, a] - g(a) \cdot [b, c]), \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $[a, b]$ é o colchete de Lie¹⁷, dos campos vetoriais a e b .

Ele aplica uma tripla de campos vetoriais suaves num campo escalar suave.

► *O segundo operador de Christoffel*, $(a, b, c) \mapsto \left\{ \begin{smallmatrix} c \\ a, b \end{smallmatrix} \right\}$, é definido por

$$\left\{ \begin{smallmatrix} c \\ a, b \end{smallmatrix} \right\} = [a, b, g^{-1}(c)]. \quad (3.3)$$

Pelo fato dele estar definido a partir do primeiro operador, ele também aplica uma tripla de campos vetoriais suaves num campo escalar suave.

O primeiro operador de Christoffel tem três propriedades elementares muito notáveis.

Para todos os campos vetoriais suaves a, a', b, b', c, c' e o campo escalar suave f , temos que

$$[a + a', b, c] = [a, b, c] + [a', b, c].$$

$$[fa, b, c] = f[a, b, c].$$

$$[a, b + b', c] = [a, b, c] + [a, b', c].$$

$$[a, fb, c] = f[a, b, c] + (a \cdot \partial f)g(b) \cdot c.$$

$$[a, b, c + c'] = [a, b, c] + [a, b, c'].$$

¹⁶Note que $g(b)$ é a notação para o campo vetorial suave $U_0 \ni x \mapsto g(b)(x) = g_{(x)}(b(x)) \in \Lambda^1(U)$.

Por outro lado $[a, b, c] = \frac{1}{2}(a \cdot \partial(g(b) \cdot c) + \dots)$ é uma notação simplificada da expressão rigorosa $[a, b, c](x) = \frac{1}{2}(a(x) \cdot \partial_x(g_{(x)}(b(x)) \cdot c(x)) + \dots)$, com $x \in U_0$. Etc.

¹⁷O colchete de Lie de dois campos vetoriais suaves, digamos a e b , é o operador definido por $(a, b) \mapsto [a, b] = a \cdot \partial b - b \cdot \partial a$.

$$[a, b, fc] = f[a, b, c]. \quad (3.4)$$

Isto é, o primeiro operador de Christoffel é linear com relação ao primeiro argumento e terceiro argumento.

Outras propriedades relevantes do primeiro operador de Christoffel são: para todos os campos vetoriais suaves a, b e c , temos que

$$\begin{aligned} [a, b, c] + [b, a, c] &= a \cdot \partial(g(b) \cdot c) + b \cdot \partial(g(c) \cdot a) - c \cdot \partial(g(a) \cdot b) \\ &\quad + g(b) \cdot [c, a] - g(a) \cdot [b, c] \end{aligned} \quad (3.5a)$$

$$[a, b, c] - [b, a, c] = g(c) \cdot [a, b]. \quad (3.5b)$$

$$[a, b, c] + [a, c, b] = a \cdot \partial(g(b) \cdot c) \quad (3.5c)$$

$$\begin{aligned} [a, b, c] - [a, c, b] &= b \cdot \partial(g(c) \cdot a) - c \cdot \partial(g(a) \cdot b) + g(c) \cdot [a, b] \\ &\quad + g(b) \cdot [c, a] - g(a) \cdot [b, c]. \end{aligned} \quad (3.5d)$$

$$[a, b, c] + [c, b, a] = b \cdot \partial(g(c) \cdot a) + g(c) \cdot [a, b] - g(a) \cdot [b, c] \quad (3.5e)$$

$$[a, b, c] - [c, b, a] = a \cdot \partial(g(b) \cdot c) - c \cdot \partial(g(a) \cdot b) + g(b) \cdot [c, a]. \quad (3.5f)$$

2.2 Campo 2-extensorial de conexão de Levi-Civita

Na estrutura métrica $\langle \mathcal{M}, g \rangle$ podemos construir um campo 2-extensorial vetorial suave sobre $\mathcal{U}$, digamos $(a, b) \mapsto \lambda(a, b)$, definido por

$$\lambda(a, b) = \partial_c \left\{ \begin{smallmatrix} c \\ a, b \end{smallmatrix} \right\} - a \cdot \partial b, \quad (3.6)$$

para todos os campos vetoriais suaves¹⁸ a, b e c .

¹⁸Note que $\lambda(a, b)$, $\partial_c \left\{ \begin{smallmatrix} c \\ a, b \end{smallmatrix} \right\}$ e $a \cdot \partial b$ são notações abreviadas para $\lambda_{(x)}(a(x), b(x))$, $\partial_{c(x)} \left\{ \begin{smallmatrix} c \\ a, b \end{smallmatrix} \right\}(x)$ e $a(x) \cdot \partial_x b(x)$, com $x \in U_0$, respectivamente.

Ele será chamado de *campo 2-extensorial de conexão de Levi-Civita*.

3. Estrutura de paralelismo

Um campo 2-extensorial vetorial suave sobre $\mathcal{U}$, digamos $(a, b) \mapsto \gamma(a, b)$, será chamado de *campo 2-extensorial de conexão*.

Seja um vetor arbitrário $a \in \Lambda^1(U)$, o campo $(1, 1)$ -extensorial suave sobre $\mathcal{U}$, digamos $b \mapsto \gamma_a(b)$, definido por $\gamma_a|_{(x)}(b) = \gamma_{(x)}(a, b)$ para cada $x \in U_0$, será chamado simplesmente de *campo $(1, 1)$ -extensorial de conexão*.

O campo $(1, 2)$ -extensorial suave sobre $\mathcal{U}$, digamos $a \mapsto \omega(a)$, definido por $\omega_{(x)}(a) = \frac{1}{2} \text{biv}[\gamma_a|_{(x)}]$ para cada $x \in U_0$, será chamado de *campo gauge de rotação*.

A dupla $\langle \mathcal{M}, \gamma \rangle$ onde $\mathcal{M}$ é uma variedade suave de dimensão finita e γ é um campo 2-extensorial de conexão sobre $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, será dita uma *estrutura de paralelismo*^[40].

3.1 Derivação covariante de campos multivetoriais

Na estrutura de paralelismo $\langle \mathcal{M}, \gamma \rangle$ podemos introduzir dois operadores de derivação covariante^[40] associados a γ_a , digamos ∇_a e ∇_a^- , que agem no módulo dos campos multivetoriais suaves sobre $\mathcal{U}$.

Para todo campo multivetorial suave X ,

$$\nabla_a X = a \cdot \partial X + \Gamma_a(X), \quad (3.7a)$$

$$\nabla_a^- X = a \cdot \partial X - \Gamma_a^\dagger(X), \quad (3.7b)$$

onde Γ_a é o extensor generalizado¹⁹ de γ_a , e $\Gamma_a^\dagger$ é o extensor adjunto de Γ_a .

Note que $\nabla_a X = a \cdot \partial X + \Gamma_a(X)$ é uma notação simplificada da expressão mais rigorosa $\nabla_a X(x) = a \cdot \partial_x X(x) + \Gamma_a|_x(X(x))$, com $x \in U_0$. Essa observação vale também para $\nabla_a^- X$.

Cada uma dessas derivadas covariantes está bem-definida já que satisfazem trivialmente a propriedade de linearidade com relação ao vetor de direção, isto é,

$$\nabla_{\alpha a + \beta b}^\pm X = \alpha \nabla_a^\pm X + \beta \nabla_b^\pm X, \quad (3.8)$$

¹⁹O extensor generalizado de $t \in (1, 1)\text{-ext}(U)$ é $T \in \text{ext}(U)$ definido por $T(X) = t(\varepsilon^j) \wedge (\varepsilon_j \lrcorner X)$ para todo $X \in \Lambda(U)$, onde $(\langle \varepsilon^j \rangle, \langle \varepsilon_j \rangle)$ é um par arbitrário de bases recíprocas para U .

onde $\alpha, \beta \in R$ e $a, b \in \Lambda^1(U)$.

Ademais são satisfeitas as propriedades fundamentais esperadas para uma derivada covariante bem-definida de campos multivetoriais suaves, por exemplo: $\nabla_a f = a \cdot \partial f$, $\nabla_a(X + Y) = \nabla_a X + \nabla_a Y$ e $\nabla_a(fX) = a \cdot \partial f + f \nabla_a X$, e analogamente para o outro operador diferencial ∇_a^- .

Utilizando a propriedade fundamental da generalização de $(1, 1)$ -extensor t , $T(\alpha) = 0$, com $\alpha \in R$, para um campo escalar suave f verifica-se que $\nabla_a f = a \cdot \partial f + \Gamma_a(f) = a \cdot \partial f$.

Tomemos dois campos multivetoriais suaves X e Y , e um campo escalar suave f . Utilizando as propriedades elementares do operador diferencial ordinário $a \cdot \partial$ e a propriedade de linearidade do campo extensorial suave Γ_a , temos que

$$\begin{aligned} \nabla_a(X + Y) &= a \cdot \partial(X + Y) + \Gamma_a(X + Y) \\ &= a \cdot \partial X + a \cdot \partial Y + \Gamma_a(X) + \Gamma_a(Y) \\ \nabla_a(X + Y) &= \nabla_a X + \nabla_a Y, \end{aligned} \tag{3.9}$$

e,

$$\begin{aligned} \nabla_a(fX) &= a \cdot \partial(fX) + \Gamma_a(fX) \\ &= (a \cdot \partial f)X + fa \cdot \partial X + f\Gamma_a(X) \\ \nabla_a(fX) &= (a \cdot \partial f)X + f\nabla_a X. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ainda podemos provar que cada uma dessas derivadas covariantes satisfaz a *regra de Leibnitz* quando estamos tratando com produto exterior de campos multivetoriais suaves. Assim, por exemplo, $\nabla_a(X \wedge Y) = (\nabla_a X) \wedge Y + X \wedge (\nabla_a Y)$, e analogamente com a outra derivada covariante.

Tomemos dois campos multivetoriais suaves X e Y . Utilizando a regra de Leibnitz do operador de derivada direcional $a \cdot \partial$ para o produto exterior de campos multivetoriais suaves e a propriedade fundamental da generalização de $(1, 1)$ -extensor t , $T(X \wedge Y) = T(X) \wedge Y + X \wedge T(Y)$, com $X, Y \in \Lambda(U)$, obtém-se que

$$\begin{aligned} \nabla_a(X \wedge Y) &= a \cdot \partial(X \wedge Y) + \Gamma_a(X \wedge Y) \\ &= (a \cdot \partial X) \wedge Y + X \wedge (a \cdot \partial Y) + \Gamma_a(X) \wedge Y + X \wedge \Gamma_a(Y) \end{aligned}$$

$$\nabla_a(X \wedge Y) = (\nabla_a X) \wedge Y + X \wedge (\nabla_a Y). \quad (3.11)$$

Por outro lado, o operador de derivada direcional ordinária $a \cdot \partial$ e os dois operadores de derivada covariante ∇_a e ∇_a^- estão relacionados por uma identidade notável, a saber $a \cdot \partial(X \cdot Y) = (\nabla_a X) \cdot Y + X \cdot (\nabla_a^- Y) = (\nabla_a^- X) \cdot Y + X \cdot (\nabla_a Y)$.

De fato, tomemos dois campos multivetoriais suaves X e Y . Utilizando a regra de Leibnitz do operador diferencial $a \cdot \partial$ para o produto exterior e a condição de produto escalar que envolve um extensor e o seu extensor adjunto, $T(X) \cdot Y = X \cdot T^\dagger(Y)$, com $X, Y \in \Lambda(U)$, chegamos a:

$$\begin{aligned} (\nabla_a X) \cdot Y + X \cdot (\nabla_a^- Y) &= (a \cdot \partial X) \cdot Y + \Gamma_a(X) \cdot Y + X \cdot (a \cdot \partial Y) - X \cdot \Gamma_a^\dagger(Y) \\ &= (a \cdot \partial X) \cdot Y + X \cdot (a \cdot \partial Y) \\ (\nabla_a X) \cdot Y + X \cdot (\nabla_a^- Y) &= a \cdot \partial(X \cdot Y). \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.2 Derivação covariante de campos extensoriais

Os operadores de derivação covariante ∇_a e ∇_a^- podem ser “extendidos” para agirem no módulo dos campos (p, q) -extensoriais suaves^[41] sobre $\mathcal{U}$.

Se t é um campo (p, q) -extensorial suave, então $\nabla_a t$ e $\nabla_a^- t$ são também campos (p, q) -extensorial suaves tais que

$$(\nabla_a t)(X) = \nabla_a t(X) - t(\nabla_a^- X), \quad (3.13a)$$

$$(\nabla_a^- t)(X) = \nabla_a^- t(X) - t(\nabla_a X), \quad (3.13b)$$

para qualquer que seja o campo p -vetorial suave X .

Observe que $\nabla_a t(X)$ denota a derivada covariante ∇_a do campo multivetorial suave $t(X)$, e $\nabla_a^- X$ é a derivada covariante ∇_a^- do campo multivetorial suave X .

Certamente essas definições de derivadas covariantes são consistentes com a propriedade de linearidade dos campos (p, q) -extensoriais suaves.

Por exemplo, tomemos dois campos p -vetoriais suaves X e Y , e um campo escalar suave f .

Então, temos que

$$\begin{aligned} (\nabla_a t)(X + Y) &= \nabla_a t(X + Y) - t(\nabla_a^-(X + Y)) = \nabla_a(t(X) + t(Y)) - t(\nabla_a^- X + \nabla_a^- Y) \\ &= \nabla_a t(X) + \nabla_a t(Y) - t(\nabla_a^- X) - t(\nabla_a^- Y) = (\nabla_a t)(X) + (\nabla_a t)(Y), \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} (\nabla_a t)(fX) &= \nabla_a t(fX) - t(\nabla_a^-(fX)) = \nabla_a(ft(X)) - t((a \cdot \partial f)X + f\nabla_a^- X) \\ &= (a \cdot \partial f)t(X) + f\nabla_a t(X) - (a \cdot \partial f)t(X) - ft(\nabla_a^- X) = f(\nabla_a t)(X). \end{aligned}$$

Nestas equações utilizamos as identidades (3.9) e (3.10) (e as identidades análogas para o operador diferencial ∇_a^-) e a propriedade de linearidade do campo (p, q) -extensorial suave.

Na mesma linha de raciocínio, pode-se provar a consistência da outra definição.

Cada uma das derivadas covariantes $t \mapsto \nabla_a t$ e $t \mapsto \nabla_a^- t$ possui a propriedade de linearidade com relação ao vetor de direção. Isto é, $\nabla_{\alpha a + \beta b}^\pm t = \alpha \nabla_a^\pm t + \beta \nabla_b^\pm t$, onde $\alpha, \beta \in R$ e $a, b \in \Lambda^1(U)$.

E ainda as derivadas covariantes $t \mapsto \nabla_a t$, e $t \mapsto \nabla_a^- t$ têm as seguintes propriedades fundamentais

$$\nabla_a^\pm(t + u) = \nabla_a^\pm t + \nabla_a^\pm u, \quad (3.14)$$

$$\nabla_a^\pm(ft) = (a \cdot \partial f)t + f\nabla_a^\pm t, \quad (3.15)$$

onde t e u são campos (p, q) -extensoriais suaves, e f é um campo escalar suave.

Vamos provar as identidades acima só para o caso do operador diferencial ∇_a .

Seja X um campo p -vetorial suave arbitrário, então

$$\begin{aligned} (\nabla_a(t + u))(X) &= \nabla_a(t + u)(X) - (t + u)(\nabla_a^- X) = \nabla_a(t(X) + u(X)) - t(\nabla_a^- X) - u(\nabla_a^- X) \\ &= \nabla_a t(X) + \nabla_a u(X) - t(\nabla_a^- X) - u(\nabla_a^- X) \\ &= (\nabla_a t)(X) + (\nabla_a u)(X) = (\nabla_a t + \nabla_a u)(X), \end{aligned}$$

isto é, $\nabla_a(t + u) = \nabla_a t + \nabla_a u$.

E, por outro lado

$$\begin{aligned}
(\nabla_a(ft))(X) &= \nabla_a(ft)(X) - ft(\nabla_a X) = \nabla_a ft(X) - ft(\nabla_a X) \\
&= (a \cdot \partial f)t(X) + f\nabla_a t(X) - ft(\nabla_a X) = (a \cdot \partial f)t(X) + f(\nabla_a t)(X),
\end{aligned}$$

isto é, $\nabla_a(ft) = (a \cdot \partial f)t + f(\nabla_a t)$.

Vemos assim que essas derivadas covariantes $t \mapsto \nabla_a t$ e $t \mapsto \nabla_a^- t$ satisfazem as propriedades esperadas de toda derivada covariante bem-definida de campos (p, q) -extensoriais suaves.

Encerrando esta seção apresentaremos duas identidades notáveis. Uma diz respeito do *elemento de matriz*²⁰ da derivada covariante $\nabla_a t$, e a outra trata da propriedade de comutação entre o operador diferencial ∇_a e o operador adjunto $\dagger$.

i. Sejam X um campo p -vetorial suave e Y um campo q -vetorial suave, então

$$(\nabla_a t)(X) \cdot Y = a \cdot \partial(t(X) \cdot Y) - t(\nabla_a^- X) \cdot Y - t(X) \cdot \nabla_a^- Y. \quad (3.16)$$

De fato, um cálculo direito fornece

$$\begin{aligned}
(\nabla_a t)(X) \cdot Y &= \nabla_a t(X) \cdot Y - t(\nabla_a^- X) \cdot Y \\
&= a \cdot \partial t(X) \cdot Y + \Gamma_a(t(X)) \cdot Y - t(\nabla_a^- X) \cdot Y \\
&= a \cdot \partial t(X) \cdot Y + t(X) \cdot \Gamma_a^\dagger(Y) - t(\nabla_a^- X) \cdot Y \\
&= a \cdot \partial t(X) \cdot Y + t(X) \cdot a \cdot \partial Y - t(X) \cdot a \cdot \partial Y + t(X) \cdot \Gamma_a^\dagger(Y) - t(\nabla_a^- X) \cdot Y \\
&= a \cdot \partial t(X) \cdot Y + t(X) \cdot a \cdot \partial Y - t(\nabla_a^- X) \cdot Y - t(X) \cdot (a \cdot \partial Y - \Gamma_a^\dagger(Y)) \\
&= a \cdot \partial(t(X) \cdot Y) - t(\nabla_a^- X) \cdot Y - t(X) \cdot \nabla_a^- Y.
\end{aligned}$$

ii. Para todo t , um campo (p, q) -extensorial suave, vale a regra de comutação

$$\nabla_a t^\dagger = (\nabla_a t)^\dagger. \quad (3.17)$$

Tomemos X , um campo p -vetorial suave e Y , um campo q -vetorial suave. Utilizando duas

²⁰Dado um (p, q) -extensor sobre U , digamos t , o produto escalar $t(A) \cdot B$ é dito elemento de matriz de t com relação aos $A \in \Lambda^p(U)$ e $B \in \Lambda^q(U)$.

vezes a identidade (i) e a condição de produto escalar que envolve um extensor e o seu extensor adjunto, temos que

$$\begin{aligned}
(\nabla_a t^\dagger)(Y) \cdot X &= a \cdot \partial(t^\dagger(Y) \cdot X) - t^\dagger(\nabla_a^- Y) \cdot X - t^\dagger(Y) \cdot \nabla_a^- X \\
&= a \cdot \partial(t(X) \cdot Y) - t(X) \cdot \nabla_a^- Y - t(\nabla_a^- X) \cdot Y \\
&= (\nabla_a t)(X) \cdot Y = X \cdot (\nabla_a t)^\dagger(Y),
\end{aligned}$$

isto implica $(\nabla_a t^\dagger)(Y) = (\nabla_a t)^\dagger(Y)$, i.e., $\nabla_a t^\dagger = (\nabla_a t)^\dagger$.

Para o outro operador de derivação covariante existem propriedades completamente análogas.

Para todos os campos p -vetoriais suaves X e q -vetoriais suaves Y , temos que

$$(\nabla_a^- t)(X) \cdot Y = a \cdot \partial(t(X) \cdot Y) - t(\nabla_a X) \cdot Y - t(X) \cdot \nabla_a Y. \quad (3.18)$$

E, para todo campo (p, q) -extensorial suave t , vale a regra de comutação

$$\nabla_a^- t^\dagger = (\nabla_a^- t)^\dagger. \quad (3.19)$$

3.3 Campo $(1, 2)$ -extensorial de torsão

Introduzimos um operador linear que age na álgebra de Lie dos campos vetoriais suaves sobre $\mathcal{U}$, que mede a *torsão da estrutura de paralelismo* $\langle \mathcal{M}, \gamma \rangle$. Esse é o *operador de torsão*, $(a, b) \mapsto \tau(a, b)$, definido por

$$\tau(a, b) = \nabla_a b - \nabla_b a - [a, b] = \gamma_a(b) - \gamma_b(a), \quad (3.20)$$

para todos os campos vetoriais suaves a e b .

O campo $(2, 1)$ -extensorial, $B \mapsto T(B)$ tal que

$$T(B) = \frac{1}{2} B \cdot (\partial_a \wedge \partial_b) \tau(a, b), \quad (3.21)$$

será chamado de *campo* $(2, 1)$ -*extensorial de torsão*^[40].

Note que se o operador de derivação covariante ∇_a é *simétrico* (i.e., $\nabla_a b - \nabla_b a = [a, b]$), para todos campos vetoriais suaves a e b), então $\tau(a, b) = 0$ e $T(B) = 0$; e reciprocamente.

3.4 Campo 4-extensorial de curvatura

Primeiramente, introduzimos um operador linear que age na álgebra de Lie dos campos vetoriais suaves sobre $\mathcal{U}$, $(a, b, c) \mapsto \rho(a, b, c)$ tal que

$$\rho(a, b, c) = [\nabla_a, \nabla_b]c - \nabla_{[a, b]}c. \quad (3.22)$$

Ele mede a *curvatura da estrutura de paralelismo* $\langle \mathcal{M}, \gamma \rangle$ e é chamado de *operador de curvatura*^[40].

O operador de curvatura tem duas propriedades fundamentais:

i. ρ é antisimétrico com relação às primeira e segunda variáveis, i.e.,

$$\rho(a, b, c) = -\rho(b, a, c). \quad (3.23a)$$

ii. Se a derivada covariante ∇_a é simétrica (i.e., $\nabla_a b - \nabla_b a = [a, b]$, ou equivalentemente $\gamma_a(b) = \gamma_b(a)$, com a e b campos vetoriais suaves), então ρ tem uma *propriedade cíclica*, i.e.,

$$\rho(a, b, c) + \rho(b, c, a) + \rho(c, a, b) = 0. \quad (3.23b)$$

O campo 4-extensorial escalar²¹, $(w, a, b, c) \mapsto R_1(w, a, b, c)$ tal que

$$R_1(w, a, b, c) = w \cdot \rho(b, c, a), \quad (3.24)$$

para todos os campos vetoriais suaves w, a, b e c , será chamado de *campo 4-extensorial de curvatura*^[40].

As propriedades fundamentais do campo 4-extensorial são:

²¹ Uma aplicação linear $t : \Lambda^1(U) \times \Lambda^1(U) \times \Lambda^1(U) \times \Lambda^1(U) \rightarrow R$ é chamada de 4-extensor escalar.

i. R_1 é antisimétrico com relação às terceira e quarta variáveis, i.e.,

$$R_1(w, a, b, c) = -R_1(w, a, c, b). \quad (3.25a)$$

ii. Se a derivada covariante ∇_a é simétrica, então R_1 tem uma propriedade cíclica, i.e.,

$$R_1(w, a, b, c) + R_1(w, b, c, a) + R_1(w, c, a, b) = 0. \quad (3.25b)$$

O campo 2-extensorial escalar, $(a, b) \mapsto R_2(a, b)$ tal que

$$R_2(a, b) = R_1(\partial_w, a, w, b), \quad (3.26)$$

para todos os campos vetoriais suaves a e b , é chamado de *campo 2-extensorial de Ricci*^[40].

Note que R_2 é uma *contração interna*²² de R_1 entre a primeira e a terceira variáveis.

O campo $(1, 1)$ -extensorial, $b \mapsto R(b)$ tal que

$$a \cdot R(b) = R_2(a, b), \quad (3.27)$$

para todos os campos vetoriais suaves a e b , será chamado de *campo $(1, 1)$ -extensorial de Ricci*^[40].

Note que $R(b)$ pode ser escrito explicitamente²³ como $R(b) = \partial_a R_2(a, b)$.

4. Estrutura geométrica

Seja a tripla $\langle \mathcal{M}, g, \gamma \rangle$ onde $\mathcal{M}$ é uma variedade de dimensão finita, g é um campo extensorial métrico sobre $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ e γ é um campo 2-extensorial de conexão sobre $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$.

Se a métrica e o paralelismo são *compatíveis*, i.e., $\nabla_a^- g = 0$ (∇_a^- é um dos operadores de derivação covariante associados a γ), então $\langle \mathcal{M}, g, \gamma \rangle$ será dita uma *estrutura geométrica*^[41].

► *Teorema de existência de um campo g -gauge de rotação numa estrutura geométrica.*

²²Seja um par de *referenciais recíprocos sobre $\mathcal{U}$* , $(\langle \varepsilon^\mu \rangle, \langle \varepsilon_\mu \rangle)$. Isto é, $(\langle \varepsilon^\mu(x) \rangle, \langle \varepsilon_\mu(x) \rangle)$, para cada $x \in U_0$, é um par de bases recíprocas para U , i.e., $\varepsilon^\mu(x) \cdot \varepsilon_\nu(x) = \delta_\nu^\mu$. Introduzimos a seguinte definição: $R_1(\partial_w, a, w, b) = R_1(\varepsilon^\mu, a, \varepsilon_\mu, b) = R_1(\varepsilon_\mu, a, \varepsilon^\mu, b)$, com μ somado de 0 até 3.

²³Recorde-se que $\partial_a R_2(a, b) \equiv \varepsilon^\mu(\varepsilon_\mu \cdot \partial_a R_2(a, b))$, i.e., $\partial_a R_2(a, b) = \varepsilon^\mu R_2(\varepsilon_\mu, b)$, utilizando-se a linearidade de R_2 com relação à primeira variável. Ademais a notação simplificada $\varepsilon^\mu R_2(\varepsilon_\mu, b)$ representa a expressão rigorosa $\varepsilon^\mu(x) R_{2(x)}(\varepsilon_\mu(x), b(x))$, com $x \in U_0$.

Numa estrutura geométrica $\langle \mathcal{M}, g, \gamma \rangle$ existe um campo $(1, 2)$ -extensorial sobre $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, $\omega(a) = \frac{1}{2} \overset{g^{-1}}{biv} [\gamma_a]$, tal que

$$\gamma_a(b) = \frac{1}{2} g^{-1}(a \cdot \partial g)(b) + \omega(a) \underset{g^{-1}}{\times} b, \quad (3.28)$$

para todos os campos vetoriais a e b . $\omega(a)$ é chamado de *campo g -gauge de rotação*.

► *Teorema de extensão de uma estrutura métrica a uma estrutura geométrica.*

Sejam $a \mapsto g(a)$ um campo extensorial métrico sobre $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ e $a \mapsto \omega(a)$ um campo $(1, 2)$ -extensorial sobre $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Definamos um campo 2-extensorial de conexão sobre $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, digamos $(a, b) \mapsto \gamma_a(b)$, por

$$\gamma_a(b) = \frac{1}{2} g^{-1}(a \cdot \partial g)(b) + \omega(a) \underset{g^{-1}}{\times} b, \quad (3.29)$$

para todos os campos vetoriais a e b .

A tripla $\langle \mathcal{M}, g, \gamma \rangle$ resulta ser uma *estrutura geométrica*, i.e., $\nabla_a^- g = 0$ (∇_a^- é um dos operadores de derivação covariante associados a γ).

Na estrutura geométrica $\langle \mathcal{M}, g, \gamma \rangle$, os operadores de derivação covariante ∇_a e ∇_a^- associados ao campo de conexão γ têm as seguintes propriedades fundamentais:

i. O teorema de Ricci,

$$a \cdot \partial(g(b) \cdot c) = g(\nabla_a b) \cdot c + g(b) \cdot \nabla_a c, \quad (3.30a)$$

para todos os campos vetoriais suaves b e c .

Ele pode ser generalizado para campos multivetoriais suaves X e Y , i.e.,

$$a \cdot \partial(\underline{g}(X) \cdot Y) = \underline{g}(\nabla_a X) \cdot Y + \underline{g}(X) \cdot \nabla_a Y.$$

ii. A regra de Leibnitz para o produto escalar métrico (i.e., $X \cdot_g Y \equiv \underline{g}^{-1}(X) \cdot Y$),

$$a \cdot \partial(\underset{g}{X} \cdot Y) = (\nabla_a^- \underset{g}{X}) \cdot Y + \underset{g}{X} \cdot (\nabla_a^- Y), \quad (3.30b)$$

para todos os campos multivetoriais suaves X e Y .

iii. Para todo campo multivetorial suave X ,

$$\nabla_a^- X = \underline{g}(\nabla_a \underline{g}^{-1}(X)). \quad (3.30c)$$

iv. Os operadores de derivação ∇_a e ∇_a^- , quando agem sobre campos extensoriais suaves, permitem escrever a compatibilidade entre a métrica e o paralelismo nas duas formas equivalentes

$$\nabla_a^- g = 0, \quad (3.30d)$$

$$\nabla_a g^{-1} = 0. \quad (3.30e)$$

4.1 Campo 4-extensorial de Riemann

O campo 4-extensorial escalar suave sobre $\mathcal{U}$, $(a, b, c, w) \mapsto R_3(a, b, c, w)$ tal que

$$R_3(a, b, c, w) = -\rho(a, b, c) \cdot g(w), \quad (3.31)$$

para todos os campos vetoriais suaves a, b, c e w , é chamado de *campo 4-extensorial de Riemann*^[41].

O campo 4-extensorial de Riemann tem as seguintes propriedades fundamentais:

i. Na estrutura de paralelismo $\langle \mathcal{M}, \gamma \rangle$, R_3 é antisimétrico com relação às primeira e segunda variáveis, i.e.,

$$R_3(a, b, c, w) = -R_3(b, a, c, w). \quad (3.32a)$$

ii. Na estrutura de paralelismo $\langle \mathcal{M}, \gamma \rangle$, se a derivada covariante ∇_a é simétrica (i.e., $\nabla_a b - \nabla_b a = [a, b]$), então R_3 tem uma propriedade cíclica, i.e.,

$$R_3(a, b, c, w) + R_3(b, c, a, w) + R_3(c, a, b, w) = 0. \quad (3.32b)$$

iii. Na estrutura geométrica $\langle \mathcal{M}, g, \gamma \rangle$, R_3 é antisimétrico com relação às terceira e quarta

variáveis, i.e.,

$$R_3(a, b, c, w) = -R_3(a, b, w, c). \quad (3.32c)$$

iv. Na estrutura geométrica $\langle \mathcal{M}, g, \gamma \rangle$, se a derivada covariante ∇_a é simétrica (i.e., $\nabla_a b - \nabla_b a = [a, b]$), então R_3 tem uma propriedade de simetria com relação à troca entre o primeiro e o segundo par de variáveis, i.e.,

$$R_3(a, b, c, w) = R_3(c, w, a, b). \quad (3.32d)$$

É importante notar que a única estrutura geométrica $\langle \mathcal{M}, g, \gamma \rangle$ na qual a derivada covariante ∇_a é simétrica, é aquela cujo campo 2-extensorial de conexão γ é precisamente o campo 2-extensorial de conexão de Levi-Civita λ . Neste trabalho, essa estrutura geométrica $\langle \mathcal{M}, g, \lambda \rangle$ será chamada de *espaço de Riemann-Einstein*^[41].

As derivadas covariantes associadas a λ são precisamente as derivadas covariantes de Levi-Civita D_a e D_a^- .

O campo escalar $R = R_2(g^{-1}(\partial_a), a)$, i.e., uma g^{-1} -contração entre a primeira e a segunda variáveis de R_2 , é chamado de *campo escalar de Ricci*^[41].

► *Teorema de existência do campo (2,2)-extensorial de Riemann numa estrutura geométrica $\langle \mathcal{M}, g, \gamma \rangle$.*

Existe um único campo (2,2)-extensorial, digamos $B \mapsto R(B)$, tal que

$$R_3(a, b, c, w) = R(a \wedge b) \cdot (c \wedge w). \quad (3.33)$$

Este $B \mapsto R(B)$ será chamado de *campo (2,2)-extensorial de Riemann*^[41].

Note na eq.(3.33), a consistência das propriedades de antisimetria (3.32a) e (3.32c) de R_3 (no lado esquerdo) com as propriedades de antisimetria dos produtos exteriores (no lado direito).

A eq.(3.33) pode ser interpretada como um *teorema de fatoração de R_3* .

O campo (1,1)-extensorial de Ricci $b \mapsto R(b)$ e o campo escalar de Ricci R podem ser escritos como g^{-1} -divergentes do campo (2,2)-extensorial de Riemann $B \mapsto R(B)$, a saber

$$R(b) = g^{-1}(\partial_a) \lrcorner R(a \wedge b), \quad (3.34)$$

$$R = g^{-1}(\partial_b) \cdot R(b) = \underline{g}^{-1}(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot R(a \wedge b). \quad (3.35)$$

Prova:

Uma simples manipulação algébrica das definições.(3.24) e (3.31) fornece a identidade extensorial

$$R_1(w, a, b, c) = R_3(c, b, a, g^{-1}(w)). \quad (i)$$

Agora, de acordo com as definições.(3.26) e (3.27), levando em conta a eq.(i), temos que

$$\begin{aligned} a \cdot R(b) &= R_2(a, b) \\ &= R_1(\varepsilon^\mu, a, \varepsilon_\mu, b), \text{ } (\mu \text{ somado de } 0 \text{ até } 3) \\ &= R_3(b, \varepsilon_\mu, a, g^{-1}(\varepsilon^\mu)), \end{aligned}$$

e utilizando o teorema de fatoração (3.33),

$$\begin{aligned} a \cdot R(b) &= R(b \wedge \varepsilon_\mu) \cdot (a \wedge g^{-1}(\varepsilon^\mu)) = (g^{-1}(\varepsilon^\mu) \wedge a) \cdot R(\varepsilon_\mu \wedge b) \\ &= a \cdot (g^{-1}(\varepsilon^\mu) \lrcorner R(\varepsilon_\mu \wedge b)), \end{aligned}$$

i.e., $R(b) = g^{-1}(\varepsilon^\mu) \lrcorner R(\varepsilon_\mu \wedge b) = g^{-1}(\partial_a) \lrcorner R(a \wedge b)$. ■

O campo $(1, 1)$ -extensorial, $a \mapsto G(a)$, definido por

$$G(a) = R(a) - \frac{1}{2}g(a)R, \quad (3.36)$$

será chamado de *campo $(1, 1)$ -extensorial de Einstein*^[41].

5. Espaço de Riemann-Einstein

Uma tripla $\langle \mathcal{M}, g, \lambda \rangle$, onde $\mathcal{M}$ é uma variedade suave de dimensão finita, g é um campo métrico sobre $\mathcal{U}$ e λ é o campo de conexão de Levi-Civita sobre $\mathcal{U}$, será chamada de *espaço-de Riemann-Einstein*^[41].

Trata-se de uma estrutura geométrica $\langle \mathcal{M}, g, \lambda \rangle$ na qual o campo 2-extensorial de conexão

λ é precisamente o induzido pelo campo extensorial métrico g .

5.1 Derivada covariante de Levi-Civita

Os operadores de derivação covariante associados ao campo 2-extensorial de conexão λ serão denotados por D_a e D_a^- .

Eles são definidos naturalmente por

$$D_a X = a \cdot \partial X + \Lambda_a(X), \quad (3.37a)$$

$$D_a^- X = a \cdot \partial X - \Lambda_a^\dagger(X), \quad (3.37b)$$

para todo campo multivetorial suave X , e chamados de *operadores de derivação covariante de Levi-Civita*^[40,41].

Note que Λ_a é o extensor generalizado de λ_a (lembre-se que λ_a é para cada $a \in \Lambda^1(U)$ o campo $(1,1)$ -extensorial suave *parcial* $b \mapsto \lambda_a(b) = \lambda(a, b)$) e $\Lambda_a^\dagger$ é o extensor adjunto de Λ_a .

A seguir, desenvolveremos algumas propriedades muito importantes das derivadas covariantes de Levi-Civita. Por razões de simplicidade trabalharemos só com campos vetoriais suaves.

Existe uma identidade fundamental que relaciona D_a com o segundo operador de Christoffel.

Para todos os campos vetoriais suaves a, b e c , temos que

$$(D_a b) \cdot c = \left\{ \begin{matrix} c \\ a, b \end{matrix} \right\}. \quad (3.38)$$

De fato, pelas definições (3.37a) e (3.6) temos que

$$D_a b = a \cdot \partial b + \lambda_a(b) = a \cdot \partial b + \partial_c \left\{ \begin{matrix} c \\ a, b \end{matrix} \right\} - a \cdot \partial b = \partial_c \left\{ \begin{matrix} c \\ a, b \end{matrix} \right\}.$$

Agora utilizando as fórmulas de derivação vetorial: $c \cdot \partial_n \phi(n) = c \cdot (\partial_n \phi(n))$, com ϕ uma função escalar de variável vetorial, e $c \cdot \partial_n f(n) = f(c)$, com f uma função multivetorial linear de variável vetorial. Levando em conta a linearidade do segundo operador de Christoffel com

relação ao argumento superior, obtemos finalmente que

$$(D_a b) \cdot c = c \cdot (\partial_n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ a, b \end{smallmatrix} \right\}) = c \cdot \partial_n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ a, b \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} c \\ a, b \end{smallmatrix} \right\}.$$

Essa identidade é válida (e faz sentido) só para campos vetoriais suaves.

Demonstraremos em detalhe o *teorema de Ricci* para a derivada covariante de Levi-Civita D_a , i.e.,

$$a \cdot \partial(g(b) \cdot c) = g(D_a b) \cdot c + g(b) \cdot D_a c, \quad (3.39)$$

onde a, b e c são campos vetoriais suaves.

Utilizando a identidade (3.38), a definição (3.3) e a identidade (3.5c), temos que

$$\begin{aligned} g(D_a b) \cdot c + g(b) \cdot D_a c &= (D_a b) \cdot g(c) + D_a c \cdot g(b) \\ &= \left\{ \begin{smallmatrix} g(c) \\ a, b \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} g(b) \\ a, c \end{smallmatrix} \right\} \\ &= [a, b, g^{-1}(g(c))] + [a, c, g^{-1}(g(b))] \\ &= [a, b, c] + [a, c, b] = a \cdot \partial(g(b) \cdot c). \end{aligned}$$

Esse teorema é ainda válido para campos multivetoriais suaves, a saber

$$a \cdot \partial(X \cdot Y) = \underline{g}(D_a X) \cdot Y + \underline{g}(X) \cdot D_a Y, \quad (3.40)$$

onde a é um campo vetorial suave, e X e Y são campos multivetoriais suaves. $\underline{g}$ é, como sabemos, o extensor extendido de g (veja as definições (1.33a) e (1.33b)).

Provaremos que a derivada covariante de Levi-Civita D_a é *simétrica*, isto é,

$$D_a b - D_b a = [a, b], \quad (3.41)$$

para todos os campos vetoriais suaves a e b .

Tomemos três campos vetoriais suaves a, b e c . Utilizando a identidade (3.38), a definição (3.3) e a identidade (3.5b), podemos escrever

$$(D_a b) \cdot c - (D_b a) \cdot c = \left\{ \begin{smallmatrix} c \\ a, b \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} c \\ b, a \end{smallmatrix} \right\} = [a, b, g^{-1}(c)] - [b, a, g^{-1}(c)]$$

$$= g(g^{-1}(c)) \cdot [a, b] = [a, b] \cdot c,$$

isto é, pela não-degenerescência do produto escalar,

$$D_a b - D_b a = [a, b].$$

Provaremos, finalmente, que a derivada covariante de Levi-Civita D_a^- é *g-compatível*, isto é,

$$D_a^- g = 0. \quad (3.42)$$

Tomemos novamente três campos vetoriais suaves a, b e c . Utilizando a propriedade (3.18) e o teorema de Ricci (3.39), temos que

$$\begin{aligned} (D_a^- g)(b) \cdot c &= a \cdot \partial(g(b) \cdot c) - g(D_a b) \cdot c - g(b) \cdot D_a c, \\ &= 0, \end{aligned}$$

isto implica que $(D_a^- g)(b) = 0$, i.e., $D_a^- g = 0$.

Encerrando esta seção, diremos que as propriedades de simetria e *g-compatibilidade* caracterizam de modo unívoco a derivada covariante de Levi-Civita. Isto é, existe um único par de operadores de derivação covariante ∇_a e ∇_a^- tal que: ∇_a é simétrico (i.e., $\nabla_a b - \nabla_b a = [a, b]$) e $\nabla_a^- g = 0$ (i.e., ∇_a^- é *g-compatível*). Esses ∇_a e ∇_a^- são precisamente D_a e D_a^- .

No espaço de Riemann-Einstein $\langle \mathcal{M}, g, \lambda \rangle$, uma estrutura geométrica particular na qual as derivadas covariantes associadas ao campo de conexão λ são as derivadas covariantes de Levi-Civita D_a e D_a^- , o campo extensorial de Riemann $B \mapsto R(B)$ e o campo extensorial de Ricci $b \mapsto R(b)$ ganham propriedades especiais, a saber:

i. $R(B)$ é simétrico adjunto, i.e.,

$$R(B) = R^\dagger(B). \quad (3.43)$$

ii. $R(b)$ é simétrico adjunto, i.e.,

$$R(b) = R^\dagger(b). \quad (3.44)$$

iii. O *elemento de matriz* do campo extensorial de Ricci está dado pela fórmula notável

$$R(b) \cdot c = \partial_a \cdot \rho(a, b, c), \quad (3.45)$$

i.e., o divergente do operador curvatura com relação à primeira variável.

5.2 Operadores covariantes de Levi-Civita

No espaço de Riemann-Einstein podemos introduzir três *operadores diferenciais*^[41] que agem no módulo dos campos multivetoriais suaves: o operador *gradiente* D_g , o operador *divergente* $D_{\lrcorner}$ e o operador *rotacional* $D \wedge$.

O *gradiente de um campo multivetorial* suave X é definido por

$$D_g X = \partial_a (D_a^- X), \quad (3.46)$$

i.e., $D_g X = \varepsilon^\mu (D_{\varepsilon_\mu}^- X) = \varepsilon_\mu (D_{\varepsilon^\mu}^- X)$, onde $(\langle \varepsilon^\mu \rangle, \langle \varepsilon_\mu \rangle)$ é um par de referenciais recíprocos sobre $\mathcal{U}$ (veja-se a nota de rodapé 22, pag. 59).

O *divergente de um campo multivetorial* suave X é definido por

$$D_{\lrcorner} X = \partial_a (D_a^- X). \quad (3.47)$$

O *rotacional de um campo multivetorial* suave X é definido por

$$D \wedge X = \partial_a \wedge (D_a^- X). \quad (3.48)$$

As propriedades fundamentais desses operadores diferenciais são:

i. Para todo campo multivetorial X ,

$$D_g X = D_{\lrcorner} X + D \wedge X, \quad (3.39)$$

i.e., $D_g = D_{\lrcorner} + D \wedge$.

ii. Para todo campo multivetorial X ,

$$D \lrcorner_g X = \frac{1}{\sqrt{|\det[g]|}} \underline{g}(\partial \lrcorner \sqrt{|\det[g]|} \underline{g}^{-1}(X)), \quad (3.40)$$

$$D \wedge X = \partial \wedge X. \quad (3.41)$$

CAPÍTULO 4

Espaço-tempo de Minkowski-Einstein

1. Métrica de Minkowski

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade suave de dimensão 4. Consideremos os espaços canônicos $\mathbf{U}$ e U associados a um sistema de coordenadas local $(\mathcal{U}, \phi)_o$, e tenhamos em conta as bases canônicas $\langle \mathbf{b}_\mu \rangle$ e $\langle \beta^\mu \rangle$ para os $\mathbf{U}$ e U , com a condição de dualidade $\beta^\mu(\mathbf{b}_\nu) = \delta^\mu_\nu$.

O campo $(1,1)$ -extensorial sobre $\mathcal{U}$, digamos η , definido por $\eta_{(x)}(a) = \beta^0 a \beta^0$, para cada $x \in U_0$, é um campo extensorial métrico sobre $\mathcal{U}$ (i.e., η é simétrico e não-degenerado) bem-definido, η será chamado de *métrica de Minkowski*^[29,30].

As propriedades fundamentais da métrica de Minkowski são as seguintes:

- i. η é um campo $(1,1)$ -extensorial constante, i.e., $a \cdot \partial \eta = 0$.
- ii. Os vetores da base canônica $\langle \beta^\mu \rangle$ são autovetores ortonormais de η (i.e., $\beta^\mu \cdot \beta^\nu = \delta^{\mu\nu}$); β^0 é um autovetor de η com autovalor 1, i.e., $\eta(\beta^0) = \beta^0$, e β^k ($k = 1, 2, 3$) são autovetores de η com autovalores -1 , i.e., $\eta(\beta^k) = -\beta^k$.

Portanto, η tem *assinatura* $(1, 3)$.

- iii. $\text{tr}[\eta] = -2$ e $\det[\eta] = -1$.

- iv. O extendido de η tem o mesmo formador de η , i.e., $\underline{\eta}_{(x)}(X) = \beta^0 X \beta^0$, para cada $x \in U_0$.

- v. η é ortogonal canônico, i.e., $\eta = \eta^*$ (recorde-se que $\eta^* = (\eta^\dagger)^{-1} = (\eta^{-1})^\dagger$). Portanto, $\eta^2 = i_d$.

2. Métrica de Einstein

Um campo extensorial métrico sobre $\mathcal{U}$, digamos g , com a mesma assinatura da métrica de Minkowski, i.e., $\text{sgn}(g) = \text{sgn}(\eta) = (1, 3)$, será dito uma *métrica de Einstein*.

► *Teorema de decomposição da métrica de Einstein.*

Para toda métrica de Einstein g existe um campo $(1,1)$ -extensorial inversível h sobre $\mathcal{U}$,

(não-único), tal que

$$g = h^\dagger \eta h, \quad (4.1)$$

onde η é a métrica de Minkowski.

O campo $(1, 1)$ -extensorial h (fundamental) é dado (em notação simplificada) pela fórmula

$$h(a) = \sum_{\mu=0}^3 \sqrt{|\lambda^\mu|} (a \cdot v^\mu) \beta^\mu, \quad (4.2)$$

onde λ^μ são os *campos autovalores* de g (i.e., $\lambda^\mu(x) \in R$ são os autovalores de $g_{(x)}$, para cada $x \in U_0$) e v^μ são os *campos autovetoriais ortonormais*²⁴ de g (i.e., $v^\mu(x) \in \Lambda^1(U)$ são os autovetores de $g_{(x)}$, para cada $x \in U_0$) associados.

Prova:

A fórmula (4.2) significa rigorosamente que para cada $x \in U_0$,

$$h_{(x)}(a) = \sum_{\mu=0}^3 \sqrt{|\lambda^\mu(x)|} (a \cdot v^\mu(x)) \beta^\mu, \quad (i)$$

onde os $\lambda^\mu(x) \in R$ e $v^\mu(x) \in \Lambda^1(U)$ satisfazem a *equação de autovalores*

$$\begin{aligned} g_{(x)}(v^0(x)) &= \lambda^0(x) v^0(x), \\ g_{(x)}(v^k(x)) &= \lambda^k(x) v^k(x), \text{ com } k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (ii)$$

Ademais, devido à assinatura de $g_{(x)}$, é $\lambda^0(x) > 0$ e $\lambda^k(x) < 0$ ($k = 1, 2, 3$).

Ainda, temos que para cada $x \in U_0$, os $v^0(x), \dots, v^3(x) \in \Lambda^1(U)$, são ortonormais, i.e.,

$$v^\mu(x) \cdot v^\nu(x) = \delta^{\mu\nu}. \quad (iii)$$

Devemos provar que $h_{(x)}$ da eq.(i) satisfaz a equação de composição de extensores $h_{(x)}^\dagger \eta h_{(x)} = g_{(x)}$, para cada $x \in U_0$. (Para simplificar as expressões omitimos x)

Primeiramente, precisamos calcular o adjunto de $h_{(x)}$. Tomemos dois vetores arbitrários a

²⁴Os campos autovetoriais $\langle v^\mu \rangle$ determinam um *referencial ortonormal sobre $\mathcal{U}$* (i.e., $\langle v^\mu \rangle$ tal que $v^\mu(x) \cdot v^\nu(x) = \delta^{\mu\nu}$, para cada $x \in U_0$).

e b , utilizando a propriedade (1.29) e a eq.(i), temos

$$\begin{aligned}
h^\dagger(a) \cdot b &= a \cdot h(b) \\
&= a \cdot \left(\sum_{\mu=0}^3 \sqrt{|\lambda^\mu|} (b \cdot v^\mu) \beta^\mu \right) \\
&= \left(\sum_{\mu=0}^3 \sqrt{|\lambda^\mu|} (a \cdot \beta^\mu) v^\mu \right) \cdot b,
\end{aligned}$$

i.e., pela não-degenerescência do produto escalar,

$$h^\dagger(a) = \sum_{\mu=0}^3 \sqrt{|\lambda^\mu|} (a \cdot \beta^\mu) v^\mu. \quad (iv)$$

Agora, seja um vetor arbitrário a . Um cálculo direto utilizando as eqs.(i) e (iv), fornece

$$\begin{aligned}
h^\dagger \eta h(a) &= \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \sqrt{|\lambda^\mu \lambda^\nu|} \eta(\beta^\mu) \cdot \beta^\nu (a \cdot v^\mu) v^\nu \\
&= \sqrt{|\lambda^0|^2} \eta(\beta^0) \cdot \beta^0 (a \cdot v^0) v^0 + \sum_{j=1}^3 \sqrt{|\lambda^j \lambda^0|} \eta(\beta^j) \cdot \beta^0 (a \cdot v^j) v^0 \\
&\quad \sum_{k=1}^3 \sqrt{|\lambda^0 \lambda^k|} \eta(\beta^0) \cdot \beta^k (a \cdot v^0) v^k + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sqrt{|\lambda^j \lambda^k|} \eta(\beta^j) \cdot \beta^k (a \cdot v^j) v^k,
\end{aligned}$$

então, levando em conta que $\eta(\beta^0) = \beta^0$ e $\eta(\beta^k) = -\beta^k$ ($k = 1, 2, 3$), e $\beta^\mu \cdot \beta^\nu = \delta^{\mu\nu}$, obtemos

$$\begin{aligned}
h^\dagger \eta h(a) &= |\lambda^0| (a \cdot v^0) v^0 - \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sqrt{|\lambda^j \lambda^k|} \delta^{jk} (a \cdot v^j) v^k \\
h^\dagger \eta h(a) &= |\lambda^0| (a \cdot v^0) v^0 - \sum_{j=1}^3 |\lambda^j| (a \cdot v^j) v^j. \quad (v)
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando as eqs.(ii) e (iii) na eq.(v), temos

$$\begin{aligned}
h^\dagger \eta h(a) &= (a \cdot v^0) g(v^0) + \sum_{j=1}^3 (a \cdot v^j) g(v^j) \\
&= \sum_{\mu=0}^3 (a \cdot v^\mu) g(v^\mu) = g \left(\sum_{\mu=0}^3 (a \cdot v^\mu) v^\mu \right)
\end{aligned}$$

$$h^\dagger \eta h(a) = g(a). \blacksquare$$

O campo $(1, 1)$ -extensorial h dado por (4.2) é de fato inversível,

$$\begin{aligned} h^\dagger \eta h = g &\Rightarrow \det[h^\dagger] \det[\eta] \det[h] = \det[g] \\ &\Rightarrow (\det[h])^2 (-1) = \det[g], \end{aligned}$$

isto implica que $\det[h] \neq 0$ i.e., h é não-degenerado, e portanto, inversível.

Por outro lado, um campo $(1, 1)$ -extensorial h que satisfaça a eq.(4.1) não é certamente único.

Seja o campo $(1, 1)$ -extensorial $h' \equiv lh$, onde l é um campo $(1, 1)$ -extensorial η -ortogonal²⁵ (i.e., $l = l^{*(\eta)}$, ou equivalentemente, $l^\dagger \eta l = \eta$), e h é qualquer campo $(1, 1)$ -extensorial que satisfaz a eq.(4.1) (por exemplo, o h dado por (4.2)), então

$$(h')^\dagger \eta h' = (lh)^\dagger \eta lh = h^\dagger l^\dagger \eta lh = h^\dagger \eta h = g.$$

i.e., h' satisfaz também a eq.(4.1).

No nosso trabalho, h será chamado *campo de gauge de distorção sobre $\mathcal{U}$* .

O resultado enunciado acima significa que o campo métrico de Einstein pode ser interpretado como uma *distorção*^[2,30,58] do campo métrico de Minkowski.

► *Teorema de construção de uma métrica de Einstein.*

Seja um campo $(1, 1)$ -extensorial h sobre $\mathcal{U}$, definido por

$$h(a) = \sum_{\mu=0}^3 \rho^\mu \Lambda(a) \cdot \beta^\mu \beta^\mu, \quad (4.3)$$

onde ρ^μ são campos escalares positivos (i.e., $\rho^\mu(x) > 0$, para cada $x \in U_0$) e Λ é um campo $(1, 1)$ -extensorial ortogonal (i.e., $\Lambda_{(x)} = \Lambda_{(x)}^*$, para cada $x \in U_0$); então o campo $(1, 1)$ -extensorial g sobre $\mathcal{U}$, definido por

$$g = h^\dagger \eta h, \quad (4.4)$$

²⁵Isto é, uma *transformação de Lorentz local* (i.e., $l_{(x)}(a) \cdot l_{(x)}(b) = a \cdot_\eta b$, para cada $x \in U_0$, e $a, b \in \Lambda^1(U)$).

é uma métrica de Einstein (i.e, $sgn(g) = (1, 3)$).

Os campos escalares não-nulos $(\rho^0)^2$ e $-(\rho^1)^2, -(\rho^2)^2, -(\rho^3)^2$ são os campos autovalores de g , e os campos vetoriais não-nulos $\Lambda^\dagger(\beta^0)$ e $\Lambda^\dagger(\beta^1), \Lambda^\dagger(\beta^2), \Lambda^\dagger(\beta^3)$ são os campos autovetoriais de g associados.

3. Estruturas geométricas quadridimensionais

3.1 Estrutura geométrica de Minkowski-Cartan

A estrutura geométrica $\langle \mathcal{M}^4, \eta, \mu \rangle$, na qual a variedade suave de dimensão finita é $\mathcal{M}^4$ (quadridimensional), e o campo extensorial métrico sobre $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}^4$ é a métrica de Minkowski η , será dita uma *estrutura geométrica de Minkowski-Cartan*, μ denota o campo extensorial de conexão que é compatível com η .

A compatibilidade entre a métrica η e a conexão μ pode ser escrita como $\mathcal{D}_a^- \eta = 0$, onde $\mathcal{D}_a^-$ é um dos operadores de derivação covariantes associados a μ .

Ainda, segundo o teorema fundamental (3.28) deve existir um *campo η -gauge*^[58,30] de rotação Ω tal que

$$\mu_a(b) = \Omega(a) \underset{\eta^{-1}}{\times} b = \Omega(a) \times \eta(b). \quad (4.5)$$

Todavia, de acordo com a definição geral (3.7a), a derivada covariante $\mathcal{D}_a$ quando age sobre campos vetoriais suaves, é

$$\mathcal{D}_a b = a \cdot \partial b + \Omega(a) \underset{\eta^{-1}}{\times} b. \quad (4.6)$$

3.2 Estrutura geométrica de Einstein-Cartan

A estrutura geométrica $\langle \mathcal{M}^4, g, \gamma \rangle$, na qual $\mathcal{M}^4$ é uma variedade suave quadridimensional, e g é a métrica de Einstein, será dita uma *estrutura geométrica de Einstein-Cartan*, γ denota o campo extensorial de conexão que é compatível com g .

A compatibilidade entre g e γ pode ser escrita como $\nabla_a^- g = 0$, onde ∇_a^- é um dos operadores de derivação covariante associados a γ .

O teorema fundamental (3.28) envolve a existência de um campo g -gauge de rotação ω tal

que

$$\gamma_a(b) = \frac{1}{2}g^{-1}(a \cdot \partial g)(b) + \omega(a) \underset{g^{-1}}{\times} b = \frac{1}{2}g^{-1}(a \cdot \partial g)(b) + \omega(a) \times g(b). \quad (4.7)$$

De acordo com a definição geral (3.7a), a derivada covariante ∇_a , quando age sobre campos vetoriais suaves, é

$$\nabla_a b = a \cdot \partial b + \frac{1}{2}g^{-1}(a \cdot \partial g)(b) + \omega(a) \underset{g^{-1}}{\times} b. \quad (4.8)$$

► *Teorema dos operadores ∇_a e ∇_a^- como distorções dos operadores $\mathcal{D}_a$ e $\mathcal{D}_a^-$.*

Os operadores ∇_a e ∇_a^- (da estrutura geométrica de Einstein-Cartan) estão relacionados com os operadores $\mathcal{D}_a$ e $\mathcal{D}_a^-$ (da estrutura geométrica de Minkowski-Cartan) pelas seguintes equações

$$\nabla_a b = h^{-1}(\mathcal{D}_a h(b)), \quad (4.9a)$$

$$\nabla_a^- b = h^\dagger(\mathcal{D}_a^- h^*(b)), \quad (4.9b)$$

onde h é o campo de gauge de distorção tal que $g = h^\dagger \eta h$.

Prova:

Primeiramente, demonstraremos dois *lemas gerais* sobre a derivação covariante.

► *Lema 1:* Sejam $\overset{1}{\nabla}_a$ e $\overset{1}{\nabla}_a^-$ um par de operadores de derivação associados (i.e., $\overset{1}{\nabla}_a$ e $\overset{1}{\nabla}_a^-$ satisfazem a propriedade (3.12), $a \cdot \partial(b \cdot c) = (\overset{1}{\nabla}_a b) \cdot c + b \cdot \overset{1}{\nabla}_a^- c$), então dois operadores diferenciais $\overset{2}{\nabla}_a$ e $\overset{2}{\nabla}_a^-$, definidos por

$$\overset{2}{\nabla}_a b = h^{-1}(\overset{1}{\nabla}_a h(b)) \quad (i)$$

$$\overset{2}{\nabla}_a^- b = h^\dagger(\overset{1}{\nabla}_a^- h^*(b)), \quad (ii)$$

onde h é um campo (1,1)-extensorial suave inversível, é também um par de operadores de derivação associados (i.e., $\overset{2}{\nabla}_a$ e $\overset{2}{\nabla}_a^-$ satisfazem a propriedade (3.12), $a \cdot \partial(b \cdot c) = (\overset{2}{\nabla}_a b) \cdot c + b \cdot \overset{2}{\nabla}_a^- c$).

Por serem derivadas covariantes bem-definidas $\overset{1}{\nabla}_a$ e $\overset{1}{\nabla}_a^-$ satisfazem as eqs.(3.8), (3.9) e (3.10), então uma simples manipulação algébrica mostra que $\overset{2}{\nabla}_a$ e $\overset{2}{\nabla}_a^-$ também satisfazem essas mesmas equações. Portanto, $\overset{2}{\nabla}_a$ e $\overset{2}{\nabla}_a^-$ são também derivadas covariantes bem-definidas!

Por outro lado, utilizando a eq.(3.12) temos que

$$\overset{1}{\nabla}_a h(b) \cdot h^*(c) + h(b) \cdot \overset{1}{\nabla}_a h^*(c) = a \cdot \partial(h(b) \cdot h^*(c)),$$

isto é, depois de algumas manipulações algébricas, utilizando as eqs.(i) e (ii),

$$\begin{aligned} h^{-1}(\overset{1}{\nabla}_a h(b)) \cdot c + b \cdot h^\dagger(\overset{1}{\nabla}_a h^*(c)) &= a \cdot \partial(h^{-1}h(b) \cdot c) \\ (\overset{2}{\nabla}_a b) \cdot c + b \cdot \overset{2}{\nabla}_a c &= a \cdot \partial(b \cdot c). \end{aligned}$$

Vemos assim que $\overset{2}{\nabla}_a$ e $\overset{1}{\nabla}_a^-$ satisfazem também a eq.(3.12), i.e., $\overset{2}{\nabla}_a$ e $\overset{1}{\nabla}_a^-$ é um par de operadores de derivação covariante associados.

▷ *Lema 2:* Sejam h o campo de gauge de distorção tal que $g = h^\dagger \eta h$, e $\overset{1}{\nabla}_a^-$ e $\overset{2}{\nabla}_a^-$ os operadores de derivação covariante agindo no módulo dos campos (p, q) -extensoriais suaves, então

$$\overset{2}{\nabla}_a^- g = h^\dagger(\overset{1}{\nabla}_a^- \eta)h. \quad (iii)$$

De fato, de acordo com a definição (3.13b), utilizando as eqs.(i) e (ii) e levando em conta o teorema (4.1), temos que

$$\begin{aligned} (\overset{2}{\nabla}_a^- g)(b) &= \overset{2}{\nabla}_a^- g(b) - g(\overset{2}{\nabla}_a b) = h^\dagger \overset{1}{\nabla}_a^- h^* h^\dagger \eta h(b) - h^\dagger \eta h h^{-1} \overset{1}{\nabla}_a h(b) \\ &= h^\dagger(\overset{1}{\nabla}_a^- \eta h(b)) - \eta \overset{1}{\nabla}_a h(b) = h^\dagger(\overset{1}{\nabla}_a^- \eta)h(b), \end{aligned}$$

$$\text{i.e., } \overset{2}{\nabla}_a^- g = h^\dagger(\overset{1}{\nabla}_a^- \eta)h.$$

A eq.(iii) mostra que $\overset{1}{\nabla}_a^-$ é η -compatível (i.e., $\overset{1}{\nabla}_a^- \eta = 0$) se, e somente se, $\overset{2}{\nabla}_a^-$ é g -compatível (i.e., $\overset{2}{\nabla}_a^- g = 0$).

Ou ainda, colocado de outro modo, $\overset{1}{\nabla}_a$ e $\overset{1}{\nabla}_a^-$ são operadores de derivação na estrutura geométrica de Minkowski-Cartan se, e somente se, $\overset{2}{\nabla}_a$ e $\overset{2}{\nabla}_a^-$ são operadores de derivação na estrutura geométrica de Einstein-Cartan.

O teorema segue trivialmente se considerarmos as notações apropriadas: $\mathcal{D}_a \equiv \overset{1}{\nabla}_a$ e $\mathcal{D}_a^- \equiv \overset{1}{\nabla}_a^-$ e $\nabla_a \equiv \overset{2}{\nabla}_a$ e $\nabla_a^- \equiv \overset{2}{\nabla}_a^-$. ■

► *Teorema de existência de um campo 2-extensorial de acoplamento entre as estruturas*

geométricas de Minkowski e Einstein.

Existe um campo 2-extensorial suave sobre $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}^4$, $(a, b) \mapsto f_a(b)$, do tipo antisimétrico η -adjunto²⁶ (i.e., $f_a = -f_a^{\dagger(\eta)}$) tal que

$$\underline{h}\omega(a) = \Omega(a) + \frac{1}{2} \overset{\eta}{biv} [f_a]. \quad (4.10)$$

Tal campo 2-extensorial é dado pela fórmula

$$f_a(b) = (a \cdot \partial h) h^{-1}(b) - \frac{1}{2} \eta h^*(a \cdot \partial g) h^{-1}(b). \quad (4.10a)$$

3.3 Campos de gauge de Riemann e Ricci

Sejam $(a, b, c) \mapsto \overset{\eta}{\rho}(a, b, c)$ e $(a, b, c) \mapsto \overset{g}{\rho}(a, b, c)$ os operadores de curvatura das estruturas geométricas $\langle \mathcal{M}^4, \eta, \mu \rangle$ e $\langle \mathcal{M}^4, g, \gamma \rangle$; e $(a, b, c, w) \mapsto \overset{\eta}{R}_3(a, b, c, w)$ e $(a, b, c, w) \mapsto \overset{g}{R}_3(a, b, c, w)$ os campos 4-extensoriais de Riemann correspondentes.

Sejam $B \mapsto \overset{\eta}{R}(B)$ e $B \mapsto \overset{g}{R}(B)$ os campos 2-extensoriais de Riemann de $\langle \mathcal{M}^4, \eta, \mu \rangle$ e $\langle \mathcal{M}^4, g, \gamma \rangle$.

Relacionamos $\overset{\eta}{\rho}(a, b, c)$ com $\overset{g}{\rho}(a, b, c)$, utilizando a eq.(4.9a)

$$\begin{aligned} \overset{g}{\rho}(a, b, c) &= [\nabla_a, \nabla_b]c - \nabla_{[a, b]}c \\ &= h^{-1}([\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b]h(c) - \mathcal{D}_{[a, b]}h(c)) \\ \overset{g}{\rho}(a, b, c) &= h^{-1}(\overset{\eta}{\rho}(a, b, h(c))). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Relacionamos $\overset{\eta}{R}_3(a, b, c, w)$ com $\overset{g}{R}_3(a, b, c, w)$, utilizando a eq.(4.11)

$$\begin{aligned} \overset{g}{R}_3(a, b, c, w) &= -\overset{g}{\rho}(a, b, c) \cdot g(w) \\ &= -h^{-1}(\overset{\eta}{\rho}(a, b, h(c))) \cdot h^\dagger \eta h(w) \\ &= -\overset{\eta}{\rho}(a, b, h(c)) \cdot \eta h(w) \end{aligned}$$

²⁶O g -adjunto (ou o adjunto métrico) de um $(1, 1)$ -extensor t é $t^{\dagger(g)} \equiv g t^\dagger g^{-1}$.

$$\overset{g}{R}_3(a, b, c, w) = \overset{\eta}{R}_3(a, b, h(c), h(w)). \quad (4.12)$$

Relacionamos $\overset{\eta}{R}(B)$ com $\overset{g}{R}(B)$, utilizando o *teorema de fatoração de R_3* , eq.(3.33), e a eq.(4.12)

$$\begin{aligned} \overset{g}{R}(a \wedge b) \cdot (c \wedge w) &= \overset{g}{R}_3(a, b, c, w) \\ &= \overset{\eta}{R}_3(a, b, h(c), h(w)) \\ &= \overset{\eta}{R}(a \wedge b) \cdot (h(c) \wedge h(w)) \\ &= \underline{h}^\dagger \overset{\eta}{R}(a \wedge b) \cdot (c \wedge w), \end{aligned}$$

isto implica que

$$\overset{g}{R}(a \wedge b) = \underline{h}^\dagger \overset{\eta}{R}(a \wedge b),$$

isto é,

$$\overset{g}{R}(B) = \underline{h}^\dagger \overset{\eta}{R}(B). \quad (4.13)$$

Obtemos $\overset{\eta}{\rho}(a, b, c)$ e $\overset{\eta}{R}(a \wedge b)$ em termos do campo η -gauge de rotação Ω (da estrutura geométrica de Minkowski-Cartan).

Para $\overset{\eta}{\rho}(a, b, c)$ temos que

$$\begin{aligned} \overset{\eta}{\rho}(a, b, c) &= [\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_a]c - \mathcal{D}_{[a, b]}c \\ &= (a \cdot \partial \Omega(b) - b \cdot \partial \Omega(a) - \Omega([a, b]) + \Omega(a) \underset{\eta^{-1}}{\times} \Omega(b)) \underset{\eta^{-1}}{\times} c \\ \overset{\eta}{\rho}(a, b, c) &= ((a \cdot \partial \Omega)(b) - (b \cdot \partial \Omega)(a) + \Omega(a) \underset{\eta^{-1}}{\times} \Omega(b)) \underset{\eta^{-1}}{\times} c \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para $\overset{\eta}{R}(a \wedge b)$, utilizando o teorema de fatoração de R_3 , eq.(3.33), a eq.(4.14) e as identidades multivetoriais $B \underset{g}{\times} b = B \underset{g}{\lrcorner} b$ e $(B \underset{g}{\lrcorner} b) \underset{g}{\cdot} a = B \underset{g}{\cdot} (a \wedge b)$, com $B \in \Lambda^2(U)$ e $a, b \in \Lambda^1(U)$, temos que

$$\begin{aligned} \overset{\eta}{R}(a \wedge b) \cdot (c \wedge w) &= \overset{\eta}{R}_3(a, b, c, w) \\ &= - \overset{\eta}{\rho}(a, b, c) \underset{\eta^{-1}}{\cdot} w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -((a \cdot \partial\Omega(b) - b \cdot \partial\Omega(a) - \Omega([a, b]) + \Omega(a) \underset{\eta^{-1}}{\times} \Omega(b)) \underset{\eta^{-1}}{\times} c) \underset{\eta^{-1}}{\cdot} w \\
&= (a \cdot \partial\Omega(b) - b \cdot \partial\Omega(a) - \Omega([a, b]) + \Omega(a) \underset{\eta^{-1}}{\times} \Omega(b)) \cdot \underline{\eta}(c \wedge w),
\end{aligned}$$

renomeando $c \rightarrow \eta(c)$ e $w \rightarrow \eta(w)$, e recordando que $\eta^2 = i_d$,

$$\underline{\eta} \overset{\eta}{R}(a \wedge b) \cdot \underline{\eta}(c \wedge w) = (a \cdot \partial\Omega(b) - b \cdot \partial\Omega(a) - \Omega([a, b]) + \Omega(a) \underset{\eta^{-1}}{\times} \Omega(b)) \cdot (c \wedge w),$$

isto implica que

$$\underline{\eta} \overset{\eta}{R}(a \wedge b) = a \cdot \partial\Omega(b) - b \cdot \partial\Omega(a) - \Omega([a, b]) + \Omega(a) \underset{\eta^{-1}}{\times} \Omega(b). \quad (4.15)$$

Introduzimos quatro campos extensoriais suaves sobre $\mathcal{U}$ associados à estrutura geométrica de Einstein-Cartan.

(i) O campo $(2, 2)$ -extensorial, $B \mapsto \mathcal{R}(B)$, definido por

$$\mathcal{R}(B) = \underline{\eta} \overset{\eta}{R}(B), \quad (4.16)$$

que chamaremos *campo de gauge de Riemann*.

(ii) O campo $(1, 1)$ -extensorial, $b \mapsto \mathcal{R}(b)$, definido por

$$\mathcal{R}(b) = h^*(\partial_a) \lrcorner \mathcal{R}(a \wedge b), \quad (4.17)$$

que chamaremos *campo de gauge de Ricci*.

(iii) O campo escalar $\mathcal{R}$, definido por

$$\mathcal{R} = h^*(\partial_b) \cdot \mathcal{R}(b) = \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot \mathcal{R}(a \wedge b). \quad (4.18)$$

(iv) O campo $(1, 1)$ -extensorial, $a \mapsto \mathcal{G}(a)$, definido por

$$\mathcal{G}(a) = \mathcal{R}(a) - \frac{1}{2}h(a)\mathcal{R}, \quad (4.19)$$

que chamaremos *campo de gauge de Einstein*.

O campo de gauge de Riemann tem a propriedade fundamental

$$\mathcal{R}(a \wedge b) = a \cdot \partial \Omega(b) - b \cdot \partial \Omega(a) - \Omega([a, b]) + \Omega(a) \underset{\eta^{-1}}{\times} \Omega(b) \quad (4.20)$$

Prova:

A propriedade (4.20) é consequência imediata da definição (4.16) e da propriedade (4.15). ■

O campo escalar de Ricci $\overset{g}{R}$ (associado a $\langle \mathcal{M}^4, g, \gamma \rangle$) coincide com $\mathcal{R}$, i.e.,

$$\overset{g}{R} = \mathcal{R}. \quad (4.21)$$

Prova:

A propriedade (4.21) pode ser obtida por simples manipulação algébrica da eq.(3.35), utilizando o teorema (4.1), a eq.(4.13) e a definição (4.16), obtemos que

$$\begin{aligned} \overset{g}{R} &= \underline{g}^{-1}(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot \overset{g}{R}(a \wedge b) = \underline{h}^{-1} \underline{\eta} \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot \underline{h}^\dagger \overset{\eta}{R}(a \wedge b) \\ &= \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot \underline{\eta} \overset{\eta}{R}(a \wedge b) = \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot \mathcal{R}(a \wedge b), \end{aligned}$$

i.e., pela definição (4.18), $\overset{g}{R} = \mathcal{R}$. ■

Os campos (1,1)-extensoriais de Ricci, $b \mapsto \overset{g}{R}(b)$, e Einstein, $a \mapsto \overset{g}{G}(a)$, associados à estrutura geométrica de Einstein estão relacionados com os campos de gauge $b \mapsto \mathcal{R}(b)$ e $a \mapsto \mathcal{G}(a)$ por equações análogas, i.e.,

$$\overset{g}{R}(b) = h^\dagger \eta \mathcal{R}(b), \quad (4.22)$$

$$\overset{g}{G}(a) = h^\dagger \eta \mathcal{G}(a). \quad (4.23)$$

Prova:

Por simples manipulação algébrica da eq.(3.34), utilizando a eq.(4.13), a definição (4.16), a propriedade (1.40) e o teorema (4.1), obtemos que

$$\begin{aligned} \overset{g}{R}(b) &= g^{-1}(\partial_a) \lrcorner \overset{g}{R}(a \wedge b) = g^{-1}(\partial_a) \lrcorner \underline{h}^\dagger \overset{\eta}{R}(a \wedge b) \\ &= g^{-1}(\partial_a) \lrcorner \underline{h}^\dagger \underline{\eta} \mathcal{R}(a \wedge b) = h^\dagger \eta (\eta h h^{-1} \eta h^*(\partial_a) \lrcorner \mathcal{R}(a \wedge b)) \end{aligned}$$

$$= h^\dagger \eta(h^*(\partial_a) \lrcorner \mathcal{R}(a \wedge b)),$$

i.e., pela definição (4.17), $\overset{g}{R}(b) = h^\dagger \eta \mathcal{R}(b)$.

Agora, introduzindo as eqs.(4.22) e (4.21) na definição (3.36) e utilizando o teorema (4.1), obtemos que

$$\begin{aligned} \overset{g}{G}(a) &= \overset{g}{R}(a) - \frac{1}{2}g(a) \overset{g}{R} = h^\dagger \eta \mathcal{R}(a) - \frac{1}{2}g(a) \mathcal{R} \\ &= h^\dagger \eta \mathcal{R}(a) - \frac{1}{2}h^\dagger \eta h(a) \mathcal{R} = h^\dagger \eta (\mathcal{R}(a) - \frac{1}{2}h(a) \mathcal{R}), \end{aligned}$$

i.e., pela definição (4.19), $\overset{g}{G}(a) = h^\dagger \eta \mathcal{G}(a)$. ■

Os resultados obtidos acima podem ser interpretados como uma *desmontagem* de uma estrutura geométrica de Einstein-Cartan em termos de uma estrutura geométrica de Minkowski-Cartan:

▷ O campo de gauge de distorção h gera a métrica de Einstein g e o campo η -gauge de rotação Ω (na estrutura geométrica de Minkowski-Cartan) e *intervém portanto fundamentalmente* na forma geral do campo 2-extensorial de conexão da estrutura geométrica de Einstein-Cartan.

▷ O campo de gauge de Riemann $\mathcal{R}(B)$ *codifica toda a informação* contida no campo $(1, 1)$ -extensorial de Ricci $\overset{g}{R}(a)$, no campo escalar de Ricci $\overset{g}{R}$ e no campo $(1, 1)$ -extensorial de Einstein $\overset{g}{G}(a)$, da estrutura geométrica de Einstein-Cartan.

Vejamos um *resultado fundamental* numa estrutura geométrica de Einstein-Cartan:

O campo escalar de Ricci $\mathcal{R} (= \overset{g}{R})$ é um h^* -divergente escalar do campo de gauge de Riemann $\mathcal{R}(B)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot \mathcal{R}(a \wedge b) \\ &= \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot (a \cdot \partial \Omega(b) - b \cdot \partial \Omega(a) - \Omega([a, b]) + \Omega(a) \underset{\eta^{-1}}{\times} \Omega(b)) \\ \mathcal{R} &= \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot ((a \cdot \partial \Omega)(b) - (b \cdot \partial \Omega)(a) + \Omega(a) \underset{\eta^{-1}}{\times} \Omega(b)). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Observamos que $\mathcal{R}$ pode ser interpretado como um campo funcional escalar do campo de gauge de distorção h e do campo η -gauge de rotação Ω (e das suas derivadas direcionais $\cdot \partial \Omega$).

Trata-se do produto escalar de um campo funcional bivetorial de h por um campo funcional bivetorial de Ω e $\cdot\partial\Omega$.

Essa última conclusão será muito importante mais adiante quando postularmos Lagrangianas do tipo Hilbert-Einstein, para possíveis teorias de gravitação.

4. Espaço-tempo de Minkowski-Einstein

A tripla $\langle \mathcal{M}^4, g, \lambda \rangle$, onde $\mathcal{M}^4$ é uma variedade suave de dimensão 4, g é a métrica de Einstein sobre $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}^4$ e λ é o campo 2-extensorial de conexão de Levi-Civita sobre $\mathcal{U}$, será dita um *espaço-tempo de Minkowski-Einstein*.

O espaço-tempo de Minkowski-Einstein é um espaço de Riemann-Einstein no qual a variedade suave de dimensão finita é $\mathcal{M}^4$ (quadridimensional) e o campo extensorial métrico é precisamente a métrica de Einstein g .

Ainda, o espaço-tempo de Minkowski-Einstein é uma estrutura geométrica de Einstein-Cartan na qual o campo 2-extensorial de conexão é λ (o campo 2-extensorial de conexão de Levi-Civita).

Quando *desmontamos* o espaço-tempo de Minkowski-Einstein em termos de uma estrutura geométrica de Minkowski-Cartan, temos os seguintes resultados fundamentais:

▷ O campo η -gauge de rotação da estrutura geométrica de Minkowski-Cartan, digamos $\overset{0}{\Omega}$, é dado pela fórmula

$$\overset{0}{\Omega}(a) = -\frac{1}{2}\underline{\eta}^{-1}(\partial_b \wedge \partial_c)[a, h^{-1}(b), h^{-1}(c)], \quad (4.25)$$

onde $[x, y, z]$ é o primeiro operador de Christoffel (associado à métrica de Einstein g).

▷ O campo g -gauge de rotação do espaço-tempo de Minkowski-Einstein (como a estrutura geométrica de Einstein-Cartan), digamos $\overset{0}{\omega}$, é dado pela fórmula

$$\overset{0}{\omega}(a) = -\frac{1}{2}\underline{g}^{-1}(\partial_b \wedge \partial_c)A(a, b, c), \quad (4.26)$$

onde $A(a, b, c) \equiv \frac{1}{2}a \cdot (b \cdot \partial g(c) - c \cdot \partial g(b) - g([b, c])) = \frac{1}{2}a \cdot ((b \cdot \partial g)(c) - (c \cdot \partial g)(b))$, é notadamente um campo 3-extensorial escalar (obviamente antisimétrico com relação às segunda e terceira variáveis).

Observamos que o campo bivetorial $\overset{0}{\Omega}(a)$ pode ser interpretado como um campo funcional

bivetorial do campo de gauge de distorção h , das suas derivadas direcionais primeiras $\cdot\partial h$ e das suas derivadas direcionais segundas $\cdot\partial \cdot\partial h$.

Portanto o campo escalar de Ricci na teoria de Einstein (i.e., do espaço-tempo de Minkowski-Einstein), digamos $\overset{0}{\mathcal{R}}$, passa a ser um campo funcional escalar de h , $\cdot\partial h$ e $\cdot\partial \cdot\partial h$.

5. Lagrangiana de Hilbert-Einstein no espaço-tempo de Minkowski-Einstein

O campo de gauge de distorção h (mais precisamente h^*) é postulado como variável dinâmica numa Lagrangiana de Hilbert-Einstein,

$$[h^*, \cdot\partial h^*, \cdot\partial \cdot\partial h^*] \mapsto \overset{0}{\mathcal{L}} [h^*, \cdot\partial h^*, \cdot\partial \cdot\partial h^*] = \overset{0}{\mathcal{R}} \det[h]. \quad (4.27)$$

$\overset{0}{\mathcal{R}}$ deve ser expresso como um campo funcional escalar de h^* , $\cdot\partial h^*$ e $\cdot\partial \cdot\partial h^*$, i.e.,

$$\begin{aligned} \overset{0}{\mathcal{R}} &= \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot \overset{0}{\mathcal{R}}(a \wedge b) \\ &= \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot (a \cdot \partial \overset{0}{\Omega}(b) - b \cdot \partial \overset{0}{\Omega}(a) - \overset{0}{\Omega}([a, b]) + \overset{0}{\Omega}(a) \times_{\eta^{-1}} \overset{0}{\Omega}(b)), \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde o campo bivetorial $\overset{0}{\Omega}(a)$ é expresso como um campo funcional escalar de h^* , $\cdot\partial h^*$ e $\cdot\partial \cdot\partial h^*$.

$\det[h]$ deve ser expresso como um campo funcional escalar de h^* , i.e.,

$$\det[h] = \frac{1}{\det[h^*]}. \quad (4.29)$$

De acordo com o formalismo Lagrangiano para campos extensoriais sobre uma estrutura geométrica^[29,31,45], a ação do campo de gauge de distorção h^* sobre $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}^4$, é o escalar real

$$\begin{aligned} \overset{0}{S} &= \int_{\mathcal{U}} \overset{0}{\mathcal{L}} [h^*, \cdot\partial h^*, \cdot\partial \cdot\partial h^*] d^4\xi \\ &= \int_{\mathcal{U}} \overset{0}{\mathcal{R}} \det[h] d^4\xi. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Supõe-se que a variável dinâmica h^* deve satisfazer o *princípio de ação estacionária*, i.e.,

$$\int_{\mathcal{U}} \delta_{h^*}^w \overset{0}{\mathcal{L}} [h^*, \cdot\partial h^*, \cdot\partial \cdot\partial h^*] d^4\xi = 0, \quad (4.31)$$

para todo campo $(1,1)$ -extensorial suave w , tal que $w|_{\partial\mathcal{U}} = 0$ e $\partial w|_{\partial\mathcal{U}} = 0$.

δ_h^w é o *operador variacional* para uma *variação com relação a h^* na direção de w* .

O princípio variacional implica numa *equação diferencial funcional* (equação de Euler-Lagrange) para a variável dinâmica h^* , chamada de *equação de campo*.

Assim, temos que resolver para o campo de gauge de distorção h (atraves de h^*) o *problema de contorno*

$$\int_{\mathcal{U}} \delta_h^w (\overset{0}{\mathcal{R}} \det[h]) d^4\xi = 0, \quad (4.32)$$

para todo w tal que $w|_{\partial\mathcal{U}} = 0$ e $\partial w|_{\partial\mathcal{U}} = 0$.

Como sabemos, a solução desse tipo de problema de contorno pode ser obtida seguindo os métodos usuais do formalismo Lagrangiano^[29,31,45] que envolvem: fórmulas variacionais, o teorema de Gauss-Stokes i.e.,

$$\int_{\mathcal{U}} \partial \cdot a d^4\xi = \oint_{\partial\mathcal{U}} \beta^\mu \cdot a d^3S_\mu, \quad (4.33)$$

onde a é um campo vetorial suave, e um lema fundamental²⁷ da teoria de integração.

Calcularemos a variação da Lagrangiana de Hilbert-Einstein (4.27) com relação a h^* na direção de w , e depois determinaremos a equação de campo para a variável dinâmica h^* . O cálculo que segue é não trivial e será apontado em detalhes.

Utilizando as regras de Leibnitz do operador variacional δ_t^w , $\delta_t^w(\Phi[t]\Psi[t]) = (\delta_t^w\Phi[t])\Psi[t] + \Phi[t](\delta_t^w\Psi[t])$ e $\delta_t^w(\mathcal{F}[t] \cdot \mathcal{G}[t]) = (\delta_t^w\mathcal{F}[t]) \cdot \mathcal{G}[t] + \mathcal{F}[t] \cdot (\delta_t^w\mathcal{G}[t])$, onde $\Phi[t]$ e $\Psi[t]$ são campos funcionais escalares, e $\mathcal{F}[t]$ e $\mathcal{G}[t]$ são campos funcionais multivetoriais; na eq.(4.27), levando em conta a eq.(4.28), temos que

$$\begin{aligned} \delta_h^w(\underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot \overset{0}{\mathcal{R}}(a \wedge b) \det[h]) &= (\delta_h^w \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b)) \cdot \overset{0}{\mathcal{R}}(a \wedge b) \det[h] + \\ &\quad \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot (\delta_h^w \overset{0}{\mathcal{R}}(a \wedge b)) \det[h] + \\ &\quad \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot \overset{0}{\mathcal{R}}(a \wedge b) (\delta_h^w \det[h]). \end{aligned} \quad (i)$$

²⁷Se $\int_{\mathcal{U}} A \cdot X d^4\xi = 0$ para todo campo multivetorial A , então $X = 0$ (X é um campo multivetorial identicamente nulo).

Obtemos uma identidade funcional para o produto escalar no primeiro termo da eq.(i),

$$\begin{aligned}
(\delta_h^w \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b)) \cdot \overset{0}{\mathcal{R}}(a \wedge b) &= (\delta_h^w h^*(\partial_a) \wedge h^*(\partial_b) + h^*(\partial_a) \wedge \delta_h^w h^*(\partial_b)) \cdot \overset{0}{\mathcal{R}}(a \wedge b) \\
&= (w(\partial_a) \wedge h^*(\partial_b) + h^*(\partial_a) \wedge w(\partial_b)) \cdot \overset{0}{\mathcal{R}}(a \wedge b) \\
&= (w(\partial_a) \wedge h^*(\partial_b)) \cdot \overset{0}{\mathcal{R}}(a \wedge b) + (h^*(\partial_a) \wedge w(\partial_b)) \cdot \overset{0}{\mathcal{R}}(a \wedge b) \\
&= (h^*(\partial_b) \wedge w(\partial_a)) \cdot \overset{0}{\mathcal{R}}(b \wedge a) + (h^*(\partial_b) \wedge w(\partial_a)) \cdot \overset{0}{\mathcal{R}}(b \wedge a) \\
&= 2(h^*(\partial_b) \wedge w(\partial_a)) \cdot \overset{0}{\mathcal{R}}(b \wedge a) \\
&= 2w(\partial_a) \cdot (h^*(\partial_b) \lrcorner \overset{0}{\mathcal{R}}(b \wedge a)) \\
(\delta_h^w \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b)) \cdot \overset{0}{\mathcal{R}}(a \wedge b) &= 2w(\partial_a) \cdot \overset{0}{\mathcal{R}}(a). \tag{ii}
\end{aligned}$$

Aqui utilizamos uma regra de Leibnitz de δ_t^w , $\delta_t^w(\mathcal{F}[t] \wedge \mathcal{G}[t]) = (\delta_t^w \mathcal{F}[t]) \wedge \mathcal{G}[t] + \mathcal{F}[t] \wedge (\delta_t^w \mathcal{G}[t])$, onde $\mathcal{F}[t]$ e $\mathcal{G}[t]$ são campos funcionais multivetoriais; uma propriedade de δ_t^w , $\delta_t^w t(a) = w(a)$ e a definição (4.17) do campo de gauge de Ricci.

Obtemos uma identidade funcional para o produto escalar no segundo termo da eq.(i),

$$\begin{aligned}
\underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot \delta_h^w \overset{0}{\mathcal{R}}(a \wedge b) &= \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot \delta_h^w \overset{0}{\mathcal{R}}(\beta_\mu \wedge \beta_\nu) \\
&= \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot \delta_h^w (\beta_\mu \cdot \partial \overset{0}{\Omega}(\beta_\nu) - \beta_\nu \cdot \partial \overset{0}{\Omega}(\beta_\mu) + \\
&\quad \overset{0}{\Omega}(\beta_\mu) \times_{\eta^{-1}} \overset{0}{\Omega}(\beta_\nu)) \\
&= \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot (\beta_\mu \cdot \partial \delta_h^w \overset{0}{\Omega}(\beta_\nu) - \beta_\nu \cdot \partial \delta_h^w \overset{0}{\Omega}(\beta_\mu) + \\
&\quad \delta_h^w \overset{0}{\Omega}(\beta_\mu) \times_{\eta^{-1}} \overset{0}{\Omega}(\beta_\nu) + \overset{0}{\Omega}(\beta_\mu) \times_{\eta^{-1}} \delta_h^w \overset{0}{\Omega}(\beta_\nu)) \\
&= \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot (\overset{0}{\mathcal{D}}_{\beta_\mu} \delta_h^w \overset{0}{\Omega}(\beta_\nu) - \overset{0}{\mathcal{D}}_{\beta_\nu} \delta_h^w \overset{0}{\Omega}(\beta_\mu)) \\
&= 2\underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot \overset{0}{\mathcal{D}}_{\beta_\mu} \delta_h^w \overset{0}{\Omega}(\beta_\nu) \\
&= 2h^*(\beta^\nu) \cdot (h^*(\beta^\mu) \lrcorner \overset{0}{\mathcal{D}}_{\beta_\mu} \delta_h^w \overset{0}{\Omega}(\beta_\nu)) \\
\underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot \delta_h^w \overset{0}{\mathcal{R}}(a \wedge b) &= 2h^*(\beta^\nu) \cdot \overset{0}{\mathcal{D}} \lrcorner \delta_h^w \overset{0}{\Omega}(\beta_\nu). \tag{iii}
\end{aligned}$$

Nestas equações utilizamos essencialmente a propriedade de comutação entre δ_t^w e o operador de derivada direcional $a \cdot \partial$, $\delta_t^w(a \cdot \partial \mathcal{F}[t]) = a \cdot \partial(\delta_t^w \mathcal{F}[t])$, uma regra de Leibnitz de δ_t^w , $\delta_t^w(\mathcal{F}[t] \times_{\eta^{-1}} \mathcal{G}[t]) = (\delta_t^w \mathcal{F}[t]) \times_{\eta^{-1}} \mathcal{G}[t] + \mathcal{F}[t] \times_{\eta^{-1}} (\delta_t^w \mathcal{G}[t])$ ($\times_{\eta^{-1}}$ é o produto comutador na álgebra métrica

η^{-1}), onde $\mathcal{F}[t]$ e $\mathcal{G}[t]$ são campos funcionais multivetoriais; e a definição de *divergente gauge*²⁸ $\overset{0}{\mathcal{D}} \lrcorner X = h^*(\partial_a) \lrcorner \overset{0}{\mathcal{D}}_a X$.

Ainda, podemos escrever o lado direito da eq.(iii), um produto escalar, como um divergente escalar de um campo vetorial. Utilizaremos uma identidade do cálculo multivetorial, $\overset{0}{\mathcal{D}} \lrcorner X = \frac{1}{\det[h]} \underline{h}(\partial \lrcorner \det[h] \underline{h}^{-1}(X))$, onde X é um campo multivetorial suave.

$$\begin{aligned}
h^*(\beta^\nu) \cdot \overset{0}{\mathcal{D}} \lrcorner \delta_{h^*}^w \overset{0}{\Omega}(\beta_\nu) &= h^*(\beta^\nu) \cdot \frac{1}{\det[h]} h(\partial \lrcorner \det[h] \underline{h}^{-1}(\delta_{h^*}^w \overset{0}{\Omega}(\beta_\nu))) \\
&= \frac{1}{\det[h]} \beta^\nu \cdot \partial \lrcorner (\det[h] \underline{h}^{-1}(\delta_{h^*}^w \overset{0}{\Omega}(\beta_\nu))) \\
&= \frac{1}{\det[h]} \beta^\nu \cdot (\beta^\mu \lrcorner \beta_\mu \cdot \partial(\det[h] \underline{h}^{-1}(\delta_{h^*}^w \overset{0}{\Omega}(\beta_\nu)))) \\
&= \frac{1}{\det[h]} (\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot \beta_\mu \cdot \partial(\det[h] \underline{h}^{-1}(\delta_{h^*}^w \overset{0}{\Omega}(\beta_\nu))) \\
&= -\frac{1}{\det[h]} (\beta^\nu \wedge \beta^\mu) \cdot \beta_\mu \cdot \partial(\det[h] \underline{h}^{-1}(\delta_{h^*}^w \overset{0}{\Omega}(\beta_\nu))) \\
&= -\frac{1}{\det[h]} \beta^\mu \cdot (\beta^\nu \lrcorner \beta_\mu \cdot \partial(\det[h] \underline{h}^{-1}(\delta_{h^*}^w \overset{0}{\Omega}(\beta_\nu)))) \\
&= -\frac{1}{\det[h]} \beta^\mu \cdot \beta_\mu \cdot \partial(\beta^\nu \lrcorner \det[h] \underline{h}^{-1}(\delta_{h^*}^w \overset{0}{\Omega}(\beta_\nu))) \\
&= -\frac{1}{\det[h]} \partial \cdot (\det[h] \beta^\nu \lrcorner \underline{h}^{-1}(\delta_{h^*}^w \overset{0}{\Omega}(\beta_\nu))).
\end{aligned}$$

i.e.,

$$h^*(\beta^\nu) \cdot \overset{0}{\mathcal{D}} \lrcorner \delta_{h^*}^w \overset{0}{\Omega}(\beta_\nu) = -\frac{1}{\det[h]} \partial \cdot (\det[h] \partial_a \lrcorner \underline{h}^{-1}(\delta_{h^*}^w \overset{0}{\Omega}(a))). \quad (iv)$$

Agora, introduzindo a eq.(iv) na eq.(iii) obtemos a chamada *identidade de Palatini*^[53],

$$\underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot \delta_{h^*}^w \overset{0}{\mathcal{R}}(a \wedge b) = -2 \frac{1}{\det[h]} \partial \cdot (\det[h] \partial_a \lrcorner \underline{h}^{-1}(\delta_{h^*}^w \overset{0}{\Omega}(a))). \quad (v)$$

Calculemos finalmente a variação de $\det[h]$ com relação a h^* na direção de w .

Utilizaremos uma regra da cadeia de δ_t^w , $\delta_t^w \varphi(\Phi[t]) = \varphi'(\Phi[t])(\delta_t^w \Phi[t])$, onde $\Phi[t]$ é um campo funcional escalar e φ é uma função real ordinária; e a fórmula variacional $\delta_t^w \det[t] =$

²⁸ $\overset{0}{\mathcal{D}}_a$ é o operador derivação covariante na estrutura geométrica de Minkowski associada com o espaço-tempo de Minkowski-Einstein. i.e., $\overset{0}{\mathcal{D}}_a X = a \cdot \partial X + \overset{0}{\Omega}(a) \times_{\eta^{-1}} X$.

$$w(\partial_a) \cdot t^*(a) \det[t].$$

$$\begin{aligned}
\delta_{h^*}^w \det[h] &= \delta_{h^*}^w \frac{1}{\det[h^*]} \\
&= -\frac{1}{(\det[h^*])^2} \delta_{h^*}^w \det[h^*] \\
&= -\frac{1}{(\det[h^*])^2} w(\partial_a) \cdot h(a) \det[h^*] \\
&= -\frac{1}{\det[h^*]} w(\partial_a) \cdot h(a) \\
\delta_{h^*}^w \det[h] &= -w(\partial_a) \cdot h(a) \det[h]. \tag{vi}
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo a eqs.(ii), (v) e (vi) na eq.(i), obtemos a variação da Lagrangiana de Hilbert-Einstein com relação a h^* na direção de w

$$\begin{aligned}
\delta_{h^*}^w (\overset{0}{\mathcal{R}} \det[h]) &= 2w(\partial_a) \cdot \overset{0}{\mathcal{R}}(a) \det[h] + \\
&\quad -2 \frac{1}{\det[h]} \partial \cdot (\det[h] \partial_a \lrcorner \underline{h}^{-1} (\delta_{h^*}^w \overset{0}{\Omega}(a))) \det[h] - \\
&\quad \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot \overset{0}{\mathcal{R}}(a \wedge b) (w(\partial_a) \cdot h(a) \det[h]) \\
&= 2w(\partial_a) \cdot (\overset{0}{\mathcal{R}}(a) - \frac{1}{2} h(a) \overset{0}{\mathcal{R}}) \det[h] - 2\partial \cdot (\det[h] \partial_a \lrcorner \underline{h}^{-1} (\delta_{h^*}^w \overset{0}{\Omega}(a))) \\
\delta_{h^*}^w (\overset{0}{\mathcal{G}} \det[h]) &= 2w(\partial_a) \cdot \overset{0}{\mathcal{G}}(a) \det[h] - 2\partial \cdot (\det[h] \partial_a \lrcorner \underline{h}^{-1} (\delta_{h^*}^w \overset{0}{\Omega}(a))). \tag{4.34}
\end{aligned}$$

No último passo recordamos a definição (4.19) do campo de gauge de Einstein $\overset{0}{\mathcal{G}}$ (no caso particular do espaço-tempo de Minkowski-Einstein).

Levando em conta a eq.(4.34), o problema de contorno para a variável dinâmica h^* , pode ser colocado como

$$\int_{\mathcal{U}} w(\partial_a) \cdot \overset{0}{\mathcal{G}}(a) \det[h] d^4\xi - \int_{\mathcal{U}} \partial \cdot (\det[h] \partial_a \lrcorner \underline{h}^{-1} (\delta_{h^*}^w \overset{0}{\Omega}(a))) d^4\xi = 0, \tag{4.35}$$

para todo w tal que $w|_{\partial\mathcal{U}} = 0$ e $a \cdot \partial w|_{\partial\mathcal{U}} = 0$.

Utilizando o teorema de Gauss-Stokes com as condições de fronteira $w|_{\partial\mathcal{U}} = 0$ e $a \cdot \partial w|_{\partial\mathcal{U}} = 0$, o segundo termo da eq.(4.35) pode ser integrado,

$$\int_{\mathcal{U}} \partial \cdot (\det[h] \partial_a \lrcorner \underline{h}^{-1} (\delta_{h^*}^w \overset{0}{\Omega}(a))) d^4\xi = \oint_{\partial\mathcal{U}} \det[h] \beta^\mu \cdot (\partial_a \lrcorner \underline{h}^{-1} (\delta_{h^*}^w \overset{0}{\Omega}(a))) d^3S_\mu$$

$$\int_{\mathcal{U}} \partial \cdot (\det[h] \partial_a \lrcorner \underline{h}^{-1} (\delta_{h*}^w \overset{0}{\Omega}(a))) d^4\xi = 0, \quad (4.36)$$

já que $\delta_{h*}^w \overset{0}{\Omega}(a) = 0$ sob as condições de fronteira $w|_{\partial\mathcal{U}} = 0$ e $a \cdot \partial w|_{\partial\mathcal{U}} = 0$.

Portanto, substituindo a eq.(4.36) na eq.(4.35) temos que

$$\int_{\mathcal{U}} w(\partial_a) \cdot \overset{0}{\mathcal{G}}(a) \det[h] d^4\xi = 0, \quad (4.37)$$

para todo w .

Agora, devido à arbitrariedade de w , e recordando o lema fundamental (mencionado na pag.(83)), obtemos finalmente que

$$\overset{0}{\mathcal{G}}(a) \det[h] = 0, \quad (4.38)$$

i.e.,

$$\overset{0}{\mathcal{G}}(a) = 0. \quad (4.39)$$

Essa é a *equação de campo para o campo de gauge de distorção h* .

Todavia, recordando a relação entre o campo $(1, 1)$ -extensorial de Einstein, $a \mapsto \overset{0}{G}(a)$, e o campo de gauge de Einstein, $a \mapsto \overset{0}{\mathcal{G}}(a)$, (i.e., $\overset{0}{G}(a) = h^\dagger \eta \overset{0}{\mathcal{G}}(a)$), é

$$\overset{0}{G}(a) = 0. \quad (4.40)$$

Essa é a *equação de campo para a métrica de Einstein!*

6. Lagrangiana de Hilbert-Einstein na estrutura geométrica de Einstein-Cartan

O campo de gauge de distorção h (mais precisamente h^*) e o campo η -gauge de rotação Ω são postulados como variáveis dinâmicas numa Lagrangiana de Hilbert-Einstein,

$$[h^*, \Omega, \cdot \partial \Omega] \mapsto \mathcal{L}[h^*, \Omega, \cdot \partial \Omega] = \mathcal{R} \det[h]. \quad (4.41)$$

$\mathcal{R}$ é expresso como um campo funcional escalar de h^* , Ω e $\cdot\partial\Omega$, i.e.,

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot \mathcal{R}(a \wedge b) \\ &= \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot (a \cdot \partial\Omega(b) - b \cdot \partial\Omega(a) - \Omega([a, b]) + \Omega(a) \underset{\eta^{-1}}{\times} \Omega(b)).\end{aligned}\quad (4.42)$$

$\det[h]$, como na seção 4.5, é expresso como um campo funcional escalar de h^* , i.e.,

$$\det[h] = \frac{1}{\det[h^*]}. \quad (4.43)$$

O formalismo Lagrangiano^[29,45,31] para campos extensoriais sobre uma estrutura geométrica implica numa ação dos campos de gauge h^* e Ω sobre $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}^4$, dada pelo escalar real

$$S = \int_{\mathcal{U}} \mathcal{L}[h^*, \Omega, \cdot\partial\Omega] d^4\xi = \int_{\mathcal{U}} \mathcal{R} \det[h] d^4\xi. \quad (4.44)$$

De acordo com o princípio de ação estacionária, cada uma das variáveis dinâmicas deve satisfazer um problema de contorno, a saber:

Para a variável dinâmica h^* ,

$$\int_{\mathcal{U}} \delta_{h^*}^w \mathcal{L}[h^*, \Omega, \cdot\partial\Omega] d^4\xi = 0, \quad (4.45)$$

para todo campo $(1,1)$ -extensorial suave w .

Para a variável dinâmica Ω ,

$$\int_{\mathcal{U}} \delta_{\Omega}^B \mathcal{L}[h^*, \Omega, \cdot\partial\Omega] d^4\xi = 0, \quad (4.46)$$

para todo campo $(1,2)$ -extensorial suave B , tal que $B|_{\partial\mathcal{U}} = 0$.

O princípio variacional quando aplicado nas variáveis dinâmicas h^* e Ω implica em duas *equações diferenciais extensoriais* (as chamadas de equações de Euler-Lagrange) *acopladas*.

A solução de ambos os problemas de contorno (4.45) e (4.46) é obtida seguindo os métodos usuais do formalismo Lagrangiano, i.e., fórmulas variacionais, o teorema de Gauss-Stokes e o lema fundamental da teoria de integração. Os cálculos que seguem serão apontados em detalhes.

Primeiramente, calculamos a variação da Lagrangiana de Hilbert-Einstein (4.41) com relação

a h^* na direção de w , e depois determinamos a equação de campo para a variável dinâmica h^* .

$$\begin{aligned} \delta_{h^*}^w(\underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot \mathcal{R}(a \wedge b) \det[h]) &= (\delta_{h^*}^w \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b)) \cdot \mathcal{R}(a \wedge b) \det[h] + \\ &\quad \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot \mathcal{R}(a \wedge b) (\delta_{h^*}^w \det[h]). \end{aligned} \quad (i)$$

Para o produto escalar no primeiro termo da eq.(i), uma manipulação algébrica análoga à já utilizada para obter a eq.(ii) na seção 4.5 fornece,

$$(\delta_{h^*}^w \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b)) \cdot \mathcal{R}(a \wedge b) = 2w(\partial_a) \cdot \mathcal{R}(a), \quad (ii)$$

onde $\mathcal{R}(a)$ é o campo de gauge de Ricci (na estrutura geométrica de Einstein-Cartan).

O cálculo de $\delta_{h^*}^w \det[h]$, já feito na seção 4.5 (veja-se eq.(iv)), fornece

$$\delta_{h^*}^w \det[h] = -w(\partial_a) \cdot h(a) \det[h]. \quad (iii)$$

Colocando as eqs.(ii) e (iii) na eq.(i), e recordando a definição (4.19) do campo de gauge de Einstein $\mathcal{G}$, obtemos que

$$\begin{aligned} \delta_{h^*}^w(\mathcal{R} \det[h]) &= 2w(\partial_a) \cdot \mathcal{R}(a) \det[h] - \mathcal{R}w(\partial_a) \cdot h(a) \det[h] \\ &= 2w(\partial_a) \cdot (\mathcal{R}(a) - \frac{1}{2}h(a)\mathcal{R}) \det[h] \\ \delta_{h^*}^w(\mathcal{R} \det[h]) &= 2w(\partial_a) \cdot \mathcal{G}(a) \det[h]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Introduzindo a eq.(4.47) na eq.(4.45), o problema de contorno para a variável dinâmica h^* fica

$$\int_{\mathcal{U}} w(\partial_a) \cdot \mathcal{G}(a) \det[h] d^4\xi = 0, \quad (4.48)$$

para todo w .

De onde, pela arbitrariedade de w , recordando o lema fundamental (mencionado na pag.(83)), obtemos que

$$\mathcal{G}(a) = 0. \quad (4.49)$$

Essa é a equação de campo para o campo de gauge de distorção h (na estrutura geométrica

de Einstein-Cartan). Trata-se da mesma equação já obtida na seção 4.5 (no espaço-tempo de Minkowski-Einstein), porém, ela não é uma equação diferencial para o campo de gauge de distorção h .

Primeiramente, notemos que a eq.(4.49) é equivalente à equação $\mathcal{R}(a) = 0$.

De fato, tomando o h^* -divergente escalar de $\mathcal{G}(a)$, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(a) = 0 &\Rightarrow \mathcal{R}(a) - \frac{1}{2}h(a)\mathcal{R} = 0 \\ &\Rightarrow h^*(\partial_a) \cdot \mathcal{R}(a) - \frac{1}{2}h^*(\partial_a) \cdot h(a)\mathcal{R} = 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{R} - \frac{1}{2}4\mathcal{R} = 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{R} = 0,\end{aligned}$$

isto implica que

$$\mathcal{R}(a) = 0. \quad (4.49a)$$

A prova de que a eq.(4.49a) implica na eq.(4.49) também não oferece dificuldade.

Expressemos a eq.(4.49a) em termos dos *vetores canônicos de h* (i.e., $h(\beta^0), \dots, h(\beta^3)$) e dos *bivetores canônicos de Ω* (i.e., $\Omega(\beta_0), \dots, \Omega(\beta_3)$),

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(a) = 0 &\Leftrightarrow \mathcal{R}(\beta_\nu) = 0 \\ &\Leftrightarrow h^*(\beta^\mu) \lrcorner \mathcal{R}(\beta_\mu \wedge \beta_\nu) = 0,\end{aligned}$$

i.e.,

$$h^*(\beta^\mu) \lrcorner (\beta_\mu \cdot \partial \Omega(\beta_\nu) - \beta_\nu \cdot \partial \Omega(\beta_\mu) + \Omega(\beta_\mu) \times_{\eta^{-1}} \Omega(\beta_\nu)) = 0. \quad (4.49b)$$

Trata-se de quatro equações multivetoriais acopladas, *algébricas* nos vetores canônicos de h e *diferenciais* nos bivetores canônicos de Ω .

Agora, calcularemos a variação da Lagrangiana de Hilbert-Einstein (4.41) com relação a Ω na direção de B , e depois determinaremos a equação de campo para a variável dinâmica Ω .

$$\delta_\Omega^B(\underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot \mathcal{R}(a \wedge b) \det[h]) = \underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot (\delta_\Omega^B \mathcal{R}(a \wedge b)) \det[h]. \quad (iv)$$

Para o produto escalar no lado direito da eq.(iv), utilizando a propr. de comutação entre δ_Ω^B e $a \cdot \partial$, a propr. $\delta_\Omega^B \Omega(a) = B(a)$ e a definição do operador de derivação covariante $\mathcal{D}_a$ (na estrutura geométrica de Minkowski associada com a estrutura geométrica de Einstein-Cartan), i.e., $\mathcal{D}_a X = a \cdot \partial X + \Omega(a) \underset{\eta^{-1}}{\times} X$, temos que

$$\begin{aligned}
\underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot (\delta_\Omega^B \mathcal{R}(a \wedge b)) &= \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot (\delta_\Omega^B \mathcal{R}(\beta_\mu \wedge \beta_\nu)) \\
&= \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot (\beta_\mu \cdot \partial B(\beta_\nu) - \beta_\nu \cdot \partial B(\beta_\mu) + \\
&\quad B(\beta_\mu) \underset{\eta^{-1}}{\times} \Omega(\beta_\nu) + \Omega(\beta_\mu) \underset{\eta^{-1}}{\times} B(\beta_\nu)) \\
&= 2\underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot \mathcal{D}_{\beta_\mu} B(\beta_\nu). \tag{v}
\end{aligned}$$

Depois de algumas manipulações algébricas, o lado direito da eq.(v) pode ser escrito

$$\begin{aligned}
\underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot \mathcal{D}_{\beta_\mu} B(\beta_\nu) &= \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot \beta_\mu \cdot \partial B(\beta_\nu) + \beta_\mu \cdot \partial \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot B(\beta_\nu) + \\
&\quad \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot (\Omega(\beta_\mu) \underset{\eta^{-1}}{\times} B(\beta_\nu)) - \beta_\mu \cdot \partial \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot B(\beta_\nu) \\
&= \beta_\mu \cdot \partial (\underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot B(\beta_\nu)) - (\beta_\mu \cdot \partial \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) + \\
&\quad \underline{\eta}(\Omega(\beta_\mu) \underset{\eta^{-1}}{\times} \underline{\eta} \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu))) \cdot B(\beta_\nu) \\
&= \beta_\mu \cdot \partial (\underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot B(\beta_\nu)) - \underline{\eta}(\beta_\mu \cdot \partial \underline{\eta} \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) + \\
&\quad \Omega(\beta_\mu) \underset{\eta^{-1}}{\times} \underline{\eta} \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu)) \cdot B(\beta_\nu),
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
\underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot \mathcal{D}_{\beta_\mu} B(\beta_\nu) &= \beta_\mu \cdot \partial (\underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot B(\beta_\nu)) \\
&\quad - \underline{\eta} \mathcal{D}_{\beta_\mu} \underline{\eta} \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot B(\beta_\nu). \tag{vi}
\end{aligned}$$

Ainda, o primeiro termo no lado direito da eq.(vi) pode ser escrito como um divergente escalar de um campo vetorial, i.e.,

$$\beta_\mu \cdot \partial (\underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot B(\beta_\nu)) = \partial \cdot (\beta_\mu \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot B(\beta_\nu)), \tag{vii}$$

onde utilizamos a fórmula do cálculo multivetorial: $\partial \cdot (\beta_\mu \phi) = \beta_\mu \cdot \partial \phi$, com ϕ um campo escalar.

Depois de colocar a eq.(vii) na eq.(vi) e o resultado assim obtido na eq.(v), a eq.(iv) fornece finalmente a fórmula variacional,

$$\begin{aligned} \delta_{\Omega}^B(\underline{h}^*(\partial_a \wedge \partial_b) \cdot \mathcal{R}(a \wedge b) \det[h]) &= -2(\underline{\eta} \mathcal{D}_{\beta_{\mu}} \underline{\eta} \underline{h}^*(\beta^{\mu} \wedge \beta^{\nu}) \cdot B(\beta_{\nu}) \\ &\quad - \partial \cdot (\beta_{\mu} \underline{h}^*(\beta^{\mu} \wedge \beta^{\nu}) \cdot B(\beta_{\nu}))) \det[h]. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Introduzindo a eq.(4.50) na eq.(4.46), o problema de contorno para a variável dinâmica Ω , fica

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{U}} \underline{\eta} \mathcal{D}_{\beta_{\mu}} \underline{\eta} \underline{h}^*(\beta^{\mu} \wedge \beta^{\nu}) \cdot B(\beta_{\nu}) \det[h] d^4\xi \\ &- \int_{\mathcal{U}} \partial \cdot (\beta_{\mu} \underline{h}^*(\beta^{\mu} \wedge \beta^{\nu}) \cdot B(\beta_{\nu})) \det[h] d^4\xi = 0, \end{aligned} \quad (4.51)$$

para todo B tal que $B|_{\partial\mathcal{U}} = 0$.

Todavia, o segundo termo da eq.(4.51) pode ser transformado facilmente de modo que apareça a integral de um divergente escalar de um campo vetorial. Utilizamos a fórmula do cálculo multivetorial: $\partial \cdot (a\phi) = a \cdot \partial\phi + (\partial \cdot a)\phi$, onde a é um campo vetorial e ϕ é um campo escalar.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{U}} \partial \cdot (\beta_{\mu} \underline{h}^*(\beta^{\mu} \wedge \beta^{\nu}) \cdot B(\beta_{\nu})) \det[h] d^4\xi &= \int_{\mathcal{U}} \partial \cdot (\beta_{\mu} \underline{h}^*(\beta^{\mu} \wedge \beta^{\nu}) \cdot B(\beta_{\nu})) \det[h] d^4\xi \\ &\quad - \int_{\mathcal{U}} \underline{h}^*(\beta^{\mu} \wedge \beta^{\nu}) \cdot B(\beta_{\nu}) \beta_{\mu} \cdot \partial \det[h] d^4\xi. \end{aligned} \quad (viii)$$

Introduzindo a eq.(viii) na eq.(4.51), obtemos que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{U}} (\underline{\eta} \mathcal{D}_{\beta_{\mu}} \underline{\eta} \underline{h}^*(\beta^{\mu} \wedge \beta^{\nu}) \det[h] + \underline{h}^*(\beta^{\mu} \wedge \beta^{\nu}) \beta_{\mu} \cdot \partial \det[h]) \cdot B(\beta_{\nu}) d^4\xi - \\ &\int_{\mathcal{U}} \partial \cdot (\beta_{\mu} \underline{h}^*(\beta^{\mu} \wedge \beta^{\nu}) \cdot B(\beta_{\nu})) \det[h] d^4\xi = 0, \end{aligned} \quad (4.52)$$

para todo B tal que $B|_{\partial\mathcal{U}} = 0$.

Utilizando o teorema de Gauss-Stokes com a condição de fronteira $B|_{\partial\mathcal{U}} = 0$, o segundo

termo da eq.(4.52) pode ser integrado

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{U}} \partial \cdot (\beta_\mu \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot B(\beta_\nu)) \det[h] \, d^4\xi &= \oint_{\partial\mathcal{U}} \beta^\rho \cdot \beta_\mu \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot B(\beta_\nu) \det[h] \, d^3S_\rho \\
&= \oint_{\partial\mathcal{U}} \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \cdot B(\beta_\nu) \det[h] \, d^3S_\mu \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Portanto, introduzindo a eq.(4.53) na eq.(4.52), temos que

$$\int_{\mathcal{U}} (\eta \mathcal{D}_{\beta_\mu} \eta \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \det[h] + \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \beta_\mu \cdot \partial \det[h]) \cdot B(\beta_\nu) \, d^4\xi = 0, \tag{4.54}$$

para todo B .

Agora, pela arbitrariedade de B , o lema fundamental fornece finalmente

$$\eta \mathcal{D}_{\beta_\mu} \eta \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \det[h] + \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) \beta_\mu \cdot \partial \det[h] = 0,$$

isto é,

$$\mathcal{D}_{\beta_\mu} \eta \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) = -(\beta_\mu \cdot \partial \ln |\det[h]|) \eta \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu), \tag{4.55}$$

ou ainda,

$$(\beta_\mu \cdot \partial \ln |\det[h]|) \eta \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) + \beta_\mu \cdot \partial \eta \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) + \Omega(\beta_\mu) \underset{\eta^{-1}}{\times} \eta \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) = 0 \tag{4.56}$$

Essa é a equação de campo para o campo η -gauge de rotação Ω .

Trata-se de quatro equações multivetoriais acopladas: *diferenciais nos vetores canônicos* de h^* (i.e., $h^*(\beta^0), \dots, h^*(\beta^3)$) e *algébricas nos bivectores canônicos* de Ω (i.e., $\Omega(\beta_0), \dots, \Omega(\beta_3)$).

Encerramos esta seção, escrevendo mais uma vez as equações de Euler-Lagrange para os campos extensoriais h e Ω , em termos dos respectivos vetores e bivectores canônicos,

$$\begin{aligned}
h^*(\beta^\mu) \lrcorner (\beta_\mu \cdot \partial \Omega(\beta_\nu) - \beta_\nu \cdot \partial \Omega(\beta_\mu) + \Omega(\beta_\mu) \underset{\eta^{-1}}{\times} \Omega(\beta_\nu)) &= 0 \\
(\beta_\mu \cdot \partial \ln |\det[h]|) \eta \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) + \beta_\mu \cdot \partial \eta \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) + \Omega(\beta_\mu) \underset{\eta^{-1}}{\times} \eta \underline{h}^*(\beta^\mu \wedge \beta^\nu) &= 0.
\end{aligned}$$

Conclusões

Neste trabalho colocamos as bases algébricas de um cálculo em variedades suaves, completamente novo, chamado de cálculo multivetorial e extensorial, baseado na álgebra de Clifford canônica dos multivetores associada a um sistema de coordenadas local sobre a variedade suave.

Mostramos principalmente que o cálculo multivetorial e extensorial revela-se como a “linguagem natural” na formulação Lagrangiana da Teoria da Relatividade Geral (*TRG*) de Einstein.

Formulamos três modelos de espaço-tempo: *a estrutura geométrica de Minkowski-Cartan*, *o espaço-tempo de Minkowski-Einstein* e *a estrutura geométrica de Einstein-Cartan*, baseados na noção de estrutura de espaço-geométrico sobre uma variedade suave $(\langle \mathcal{M}, g, \gamma \rangle)$, onde a métrica g é compatível com a conexão γ , i.e., $\nabla_a^- g = 0$).

Introduzimos dois campos $(1, 1)$ -extensoriais métricos, i.e., simétricos e não-degenerados: a métrica de Minkowski η , um campo extensorial constante, *aparentado* com o tensor métrico de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ (mas que não envolve as coordenadas Minkowskianas ct, x, y, z), e a métrica de Einstein g , um campo extensorial *aparentado* com o tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

Provamos a existência de dois tipos de campos extensoriais fundamentais numa estrutura geométrica de Einstein-Cartan:

▷ O *campo de gauge de distorção* h , um campo $(1, 1)$ -extensorial que codifica toda a informação contida na métrica de Einstein g , eqs.(4.1) e (4.2).

▷ O *campo g -gauge de rotação* ω , um campo $(1, 2)$ -extensorial que codifica a informação contida na parte antisimétrica da conexão γ_a (um campo $(1, 1)$ -extensorial *aparentado* com a conexão linear da teoria clássica de derivação covariante), eqs.(3.28) e (4.7).

Também neste espaço-tempo de Einstein-Cartan existe um campo $(2, 2)$ -extensorial $\mathcal{R}(B)$, chamado *campo de gauge de Riemann*, que codifica toda a informação sobre a curvatura Riemanniana, eq.(4.16).

Demonstramos que a estrutura geométrica de Einstein-Cartan pode ser *desmontada* numa estrutura de Minkowski-Cartan, no sentido seguinte:

▷ A métrica g é uma *distorção* (pelo extensor h) da métrica η , eq.(4.1).

▷ A derivada covariante no espaço-tempo de Einstein-Cartan é uma *distorção* (pelo extensor h) da derivada covariante na estrutura geométrica de Minkowski-Cartan, eqs.(4.9a) e (4.9b).

Na desmontagem do espaço-tempo de Minkowski-Einstein (um caso particular de estrutura geométrica de Einstein-Cartan) numa estrutura geométrica de Minkowski-Cartan, obtivemos os seguintes resultados dignos de nota:

▷ O extensor η -gauge de rotação $\overset{\circ}{\Omega}$ (do extensor de conexão da estrutura geométrica de Minkowski-Cartan) está acoplado com o extensor de gauge de *distorção* h , eq.(4.25).

▷ O extensor g -gauge de rotação $\overset{\circ}{\omega}$ (do extensor de conexão de Levi-Civita no espaço-tempo de Minkowski-Einstein) está acoplado com o extensor de gauge de *distorção* h , eq.(4.26).

Formulamos uma Lagrangiana do tipo Hilbert-Einstein, na teoria da gravitação de Einstein, na qual o *extensor de distorção* h (e não, o extensor métrico g) é postulado como a variável dinâmica. Obtivemos a equação de campo para h , e mostramos que ela é completamente equivalente à equação de campo para g , eqs.(4.39) e (4.40).

Formulamos uma Lagrangiana do tipo Hilbert-Einstein para uma estrutura métrica de Einstein-Cartan, postulando os extensores de *distorção* h e rotação Ω como variáveis dinâmicas. Obtivemos as equações de campo acopladas para ambas as variáveis dinâmicas h e Ω , eqs.(4.49b) e (4.56).

Referências bibliográficas

1. C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1970.
2. W. A. Rodrigues Jr. and Q. A. G. de Souza, The Clifford Bundle and the Nature of the Gravitational Field, *Found. Phys.* **23**, 1456-1490, (1993).
3. Q. A. G. de Souza, *Operador de Dirac, Espaços de Riemann-Cartan-Weyl e a Natureza do Campo Gravitacional*, tese de doutorado, IFGW-UNICAMP, Julho 1992.
4. R. K. Sachs and H. Wu, *General Relativity for Mathematicians*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
5. W. A. Rodrigues Jr. and M. A. F. Rosa, The Meaning of Time in Relativity and Einstein's Later View of the Twin Paradox, *Found. Phys.* **19**, 705-724, (1989).
6. A. Einstein, Zur Allgemeinen Relativitätstheorie. Part a, *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber* **47**, 778-789, (1915).
7. A. Einstein, Zur Allgemeinen Relativitätstheorie. Part b, *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber* **47**, 799-801, (1915).
8. A. Einstein, Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der Allgemeinen Relativitätstheorie, *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber* **47**, 83-839, (1915).
9. A. Einstein, Die Feldgleichungen der Gravitation, *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber* **47**, 83-839, (1915).
10. A. Einstein, Hamiltonsches Prinzip und Allgemeinen Relativitätstheorie, *Preuss. Akad. Wiss.*, Berlin, Sitzber, 1111-1116, (1916)
11. D. Hilbert, Die Grundlagen der Physik, *Kongl. Gesell.d. Wiss. Göttingen, Nachr., Math.-Phys., Kl.*, 395-407, (1915).
12. A.S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, Chelsea Publ. Co., New York (third edition), 1975, (first publ. by Cambridge Univ. Press, 1923).
13. I. Porteous, *Topological Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.

14. A. L. T. de Carvalho, *Estrutura Matemática das Teorias de Calibre*, dissertação de mestrado, IMECC-UNICAMP, 1993.
15. M. Perdigão do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, 1979.
16. C. T. J. Dodson and T. Post, *Tensor Geometry* (second edition), Springer-Verlag, Berlin, 1990.
17. N. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Inst. of Phys. Publ., Bristol and Philadelphia, 1990.
18. A. A. Logunov and M. A. Mestvirishvili, *The Relativistic Theory of Gravitation*, Mir Publ., Moscow, 1989.
19. Y. Bozkohov and W. A. Rodrigues Jr., Mass and Energy in General Relativity, *Gen. Rel. Grav.* **2**, 813-819, (1995).
20. L. P. Grishchuk, A. N. Petrova and A. D. Popova, Exact Theory of (Einstein) Gravitational Field in an Arbitrary Background Spacetime, *Comm. Math. Phys.* **94**, 379-396, (1986).
21. S. V. Babak and L. P. Grishchuk, The Energy-Momentum Tensor for the Gravitational Field, *Phys. Rev D*, **6102**, 4038-4050, (2000).
22. . R. P. Feynman, F. B. Morinigo and W. G. Wagner (edited by B. Hatfield, with a foreward by J. Preskill and K.S. Thorne), *Feynman Lectures on Gravitation*, A.Wesley Publ. Co., Reading, MA 1995.
23. J. Schwinger, *Particles, Sources and Fields*, vols. **1** and **2**, A. Wesley Publ. Co., Reading, MA, 1970.
24. S. Weinberg, Photons and Gravitons in Perturbation Theory: Derivations of Maxwell and Einstein's Equations, *Phys. Rev. B* **138**, 988-1002, (1965).
25. S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, J. Wiley & Sons, New York, 1972.
26. N. Rosen, General Relativity on Flat Space, *Phys. Rev.* **57**, 147-150, (1940).
27. H. Poincaré, Sur la Dynamique de l 'Electron, *Rend. C. Matt. Pal.* **XXL**, 129-175, (1906).
28. D. Hestenes and G. Sobczyk, *Clifford Algebra to Geometrical Calculus*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1987.
29. A. M. Moya, *Formalismo Lagrangiano para Campos Multivetoriais no Espaço-tempo*,

30. V. V. Fernández, A. M. Moya and W. A. Rodrigues Jr, Covariant Derivatives on Minkowski Manifolds, in R. Ablamowicz and B. Fauser (eds.), *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, vol. 1: *Algebra and Physics*, pp. 367-391, Birkhäuser, Boston, 2000.
31. A. M. Moya, V. V. Fernández and W. A. Rodrigues Jr. Lagrangian Formalism for Multiforms Fields on Minkowski Spacetime., em publ. no *Int. J. Theor. Phys.* **40**(1), (2001).
32. A. M. Moya, V. V. Fernández and W. A. Rodrigues Jr. Linear Algebra I-Canonical Clifford Algebra of c -Multivectors, submetido a publ., (2000).
33. A. M. Moya, V. V. Fernández and W. A. Rodrigues Jr. Linear Algebra II-Extensors I, submetido a publ., (2000).
34. A. M. Moya, V. V. Fernández and W. A. Rodrigues Jr. Linear Algebra III-Metric Clifford Algebra of c -Multivectors, submetido a publ., (2000).
35. A. M. Moya, V. V. Fernández and W. A. Rodrigues Jr. Linear Algebra IV-Extensors II, submetido a publ., (2000).
36. A. M. Moya, V. V. Fernández and W. A. Rodrigues Jr. Linear Algebra V-Extensors III, submetido a publ., (2000).
37. A. M. Moya, V. V. Fernández and W. A. Rodrigues Jr. Multivector Functions and Functionals I-Multivector Function I, submetido a publ., (2000).
38. A. M. Moya, V. V. Fernández and W. A. Rodrigues Jr. Multivector Functions and Functionals II-Multivector Function II, submetido a publ., (2000).
39. A. M. Moya, V. V. Fernández and W. A. Rodrigues Jr. Multivector Functions and Functionals III-Multivector Functionals, em preparação, (2000).
40. V. V. Fernández, A. M. Moya and W. A. Rodrigues Jr, Multivector and Extensor Calculus on Manifolds I-Covariant Derivative of Multivector Fields, em preparação, (2000).
41. V. V. Fernández, A. M. Moya and W. A. Rodrigues Jr, Multivector and Extensor Calculus on Manifolds II-Covariant Derivative of Extensor Fields, em preparação, (2000).
42. V. V. Fernández, A. M. Moya and W. A. Rodrigues Jr, Multivector and Extensor Calculus on Manifolds III-Lie Derivative, em preparação, (2000).
43. V. V. Fernández, A. M. Moya and W. A. Rodrigues Jr, Multivector and Extensor Calculus

on Manifolds IV-Exterior Derivative, em preparação, (2000).

44. A. M. Moya, V. V. Fernández and W. A. Rodrigues Jr., Lagrangian Formalism for Multivector Fields, em preparação, (2000).

45. A. M. Moya, V. V. Fernández and W. A. Rodrigues Jr., Lagrangian Formalism for Extensor Fields, em preparação, (2000).

46. V. V. Fernández, A. M. Moya and W. A. Rodrigues Jr, Multivector and Extensor Calculus Approach to Relativistic Theory of Gravitation, em preparação, (2000).

47. V. V. Fernández, A. M. Moya and W. A. Rodrigues Jr, Gauge Distortion and Rotation Extensor Fields in Einstein-Cartan Spacetimes, em preparação, (2000).

48. S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Int. Publ. (a division of J. Wiley & Sons), New York, 1963.

49. F. W. Hehl, P. von der Heyde and G. Kerlick, General Relativity with Spin and Torsion: Foundations and Prospects, *Rev. Mod. Phys.* **48**, 393-416, (1976).

50. V. C. Andrade and J. G. Pereira, Gravitational Energy-Momentum Density in Teleparallel Gravity, *Phys. Rev. Letter.* **84**, 4533-4536, (2000).

51. A. Lasenby, C. Doran and S. Gull, Gravity, Gauge Theories and Geometric Algebra, R. Soc. Lond. Phil. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **358**, 487-582, (1998).

52. V. V. Fernández, A. M. Moya and W. A. Rodrigues Jr, A Comment on a Gauge Theory of the Gravitational Field, preprint CPTec-UNISAL (2000), <http://www.cptec.br/stm>, a ser subm. a publ.

53. J. L. Anderson, *Principles of Relativistic Physics*, Academic Press, New York, 1967.

54. Q. A. G. Souza, *Formalismo Lagrangiano e Leis de Conservação*, dissertação de mestrado, IFGW-UNICAMP, 1990.

55. B. O. Neill, *Elementary Differential Geometry*, Acad. Press, New York, 1966.

56. Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette and M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics*, revised edition, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1982.

57. P. Lounesto, Clifford Algebras, Relativity and Quantum Mechanics, in *Gravitation: The Spacetime Structure*, P. Letelier and W. A. Rodrigues, Jr. (eds.), World Scientific, Singapore, 1994.

58. A. Lasenby, C. Doran and S. Gull, Gravity I - Introduction, in *Clifford (Geometric)*

Algebras, with Applications to Physics, Mathematics and Engineering, William E. Baylis (ed.), Birkhäuser, Boston, 1996.

59. A. Lasenby, C. Doran and S. Gull, Gravity II - Field Equations, in *Clifford (Geometric) Algebras, with Applications to Physics, Mathematics and Engineering*, William E. Baylis (ed.), Birkhäuser, Boston, 1996.

60. D. Hestenes, *Space-time Algebra*, Gordon & Breach, New York, 1966.