

Este exemplar corresponde à redação final
da Tese defendida pelo aluno Álvaro Favinha
Martini e aprovada pela Comissão Julgadora.

19/5/95



Impl.
Jun./95

**ESTUDO DO ESPALHAMENTO
ELÁSTICO PRÓTON-PRÓTON
A ALTAS ENERGIAS ATRAVÉS
DE MODELOS EICONAIS**

Álvaro Favinha Martini

Tese apresentada ao Instituto
de Física Gleb Wataghin como
parte dos requisitos para ob-
tenção do título de Mestre
em Física.

Área de concentração: Interações hadrônicas

Orientador:

Prof. Dr. Márcio José Menon (IFGW - UNICAMP)

Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia - IFGW - UNICAMP

1995

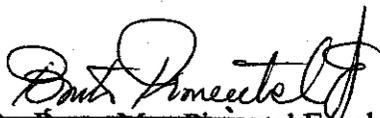
PARECER DE APROVAÇÃO
DEFESA DE TESE DE MESTRADO
ÁLVARO FAVINHA MARTINI

DATA: 20 / 04 / 95

BANCA EXAMINADORA:



- Prof. Dr. Márcio José Menon (Orientador)



- Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar



- Profa. Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato

Dedico este trabalho
a meus pais.

Agradecimentos

- A Deus por minha vida e minha família;
- A meus pais que lutaram para que eu tivesse condições de chegar até aqui e pelo seu amor;
- Ao meu irmão, companheiro desde o útero materno, mesmo distante ainda sinto sua presença;
- Ao Márcio e Maria de Lourdes pela orientação e amizade durante este trabalho;
- Ao prof. Bruto Max Pimentel Escobar pela orientação e conselhos durante a minha graduação e mestrado em física;
- Aos professores do Instituto que acompanharam o meu trabalho e ajudaram-me com conselhos e críticas, em particular à profa. Carola Dobrigkeit Chinellato e ao prof. Edison Hiroyuki Shibuya;
- Aos funcionários do Instituto pela cooperação, principalmente os do centro de computação, do departamento de raios cósmicos e da biblioteca;
- E aos meus amigos, dentro e fora do IFGW, que ajudaram-me a suportar os momentos difíceis da vida.

Sumário

Lista de tabelas	i
Lista de figuras	iii
Resumo	vi
Capítulo 1. INTRODUÇÃO	1
Capítulo 2. DADOS EXPERIMENTAIS	4
2.1 OBSERVÁVEIS FÍSICOS NO ESPALHAMENTO HÁDRON - HÁDRON	4
2.1.1 Espalhamentos elástico e inelástico	4
2.1.2 Definições	4
2.1.2.1 Seções de choque diferenciais	5
2.1.2.2 Seções de choque integradas e o teorema óptico	6
2.1.2.3 Inclinação B	6
2.1.2.4 Parâmetro ρ	7
2.1.2.5 Observáveis e a amplitude de espalhamento	7
2.1.3 Contribuições hadrônica e coulombiana	7
- Interação coulombiana	8
- Interação nuclear	8
- Soma das contribuições	8
2.1.4 Métodos de medida	10
2.2 DADOS EXPERIMENTAIS ANALISADOS	13
Capítulo 3. FORMALISMO TEÓRICO	17
3.1 INTRODUÇÃO	17
3.2 TÓPICOS DA TEORIA QUÂNTICA DO ESPALHAMENTO	18
3.2.1 Equação integral de espalhamento	19
3.2.2 Ondas parciais	20
3.3 ESPALHAMENTO A ALTAS ENERGIAS E A APROXIMAÇÃO EICONAL	22
3.3.1 Abordagem através da equação integral (potencial)	22
3.3.2 Abordagem através das ondas parciais (deslocamento de fase)	25
3.3.3 Exemplos	26
3.3.3.1 Esfera negra	26
3.3.3.2 Poço de potencial	28
3.4 FORMALISMO DA DIFRAÇÃO MÚLTIPLA	30
3.4.1 Espalhamento por uma partícula ligada	30
3.4.2 Espalhamento por um sistema de partículas ligadas	31
3.4.2.1 Hipóteses básicas	31
3.4.2.2 Funções de perfil	34
3.4.3 Espalhamento entre sistemas compostos	36
3.4.3.1 Tratamento geral	36
3.4.3.2 Expansão e termo de primeira ordem	38
3.4.4 Modelos de difração múltipla para o espalhamento elástico hádron-hádron	43
3.4.4.1 Resultados básicos	43
3.4.4.2 Modelo de Chou e Yang	44
3.4.4.3 Modelo de Glauber e Velasco	45
- Abordagem de Buenerd, Furget e Valin	49
3.4.4.4 Modelo de Saleem, Aleem e Azhar	52
3.4.4.5 Modelo de Hüfner e Povh	56

3.4.4.6	Interpretações do modelo de Bourrely, Soffer e Wu	57
3.4.4.7	Modelo de Menon e Pimentel	62
a)	Formulação básica	62
b)	Fatores de forma dependentes da energia	64
c)	Amplitude elementar dependente da energia	67
3.4.4.8	Considerações gerais	69
Capítulo 4.	MODELO COM AMPLITUDE ELEMENTAR COMPLEXA	71
4.1	INTRODUÇÃO	71
4.2	FÓRMULA DE MARTIN: HIPÓTESES E CRÍTICAS	71
4.3	HIPÓTESE FENOMENOLÓGICA PARA A AMPLITUDE ELEMENTAR	72
4.4	RESULTADOS PRÉVIOS	75
4.5	ESTRATÉGIA DA ANÁLISE	79
4.6	REANÁLISE DAS PARAMETRIZAÇÕES DO MODELO DIFRATIVO ORIGINAL NA RE- GIÃO DO ISR	80
4.6.1	Amplitude elementar dependente da energia ($f(s)$)	80
4.6.2	Fator de forma dependente da energia ($G(s)$)	82
4.7	TESTES DE PARAMETRIZAÇÕES PARA A RAZÃO ENTRE AS PARTES REAL E IMA- GINÁRIA DA AMPLITUDE ELEMENTAR	84
4.7.1	Ajustes visuais	84
4.7.2	Testes de χ^2 a partir de ajustes visuais (MINUIT)	86
4.7.3	Testes de relações funcionais	87
4.7.3.1	Regressão linear	87
4.7.3.2	Estabilidade dos parâmetros de $\lambda(s)$ através de χ^2 mínimo	91
4.7.3.3	Indicações do espalhamento $\bar{p}p$	93
4.7.3.4	Conclusões parciais	95
4.7.4	Previsões para as seções de choque (diferencial e integradas) e discussão	96
4.7.5	O problema da descrição do parâmetro ρ	100
4.7.5.1	Previsão com parametrização selecionada	100
4.7.5.2	Reanálise de $\lambda(s)$ e previsões	100
4.7.5.3	Tentativa de descrição conjunta	108
4.7.5.4	Discussão geral dos resultados	115
4.7.5.5	Discussão crítica dos modelos de difração múltipla	116
Capítulo 5.	CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES FINAIS	118
Apêndice 1.	Variáveis de Mandelstam	120
Apêndice 2.	Relação entre a amplitude de espalhamento e seção de choque diferencial	122
Apêndice 3.	Teorema óptico	124
Apêndice 4.	Equação integral de espalhamento e função de Green	127
Apêndice 5.	Validade da aproximação de ângulo pequeno	131
Apêndice 6.	Expansão das funções de perfil elementares	133

Lista de tabelas

Tabela 2.1 Valores estimados de $ t_{int} $ e o ângulo associado a ele para espalhamento elástico $p\bar{p}$ na região de interferência de Coulomb.	10
Tabela 2.2 Valores de $\sigma_t, \sigma_{el}, \sigma_{inel}$ e ρ	15
Tabela 2.3 Número de dados experimentais utilizados de $d\sigma/dt$ em cada uma das energias citadas no texto.	15
Tabela 3.1 Parâmetros do modelo de Chou e Yang. Os valores de K e m^2 foram obtidos por ajustes dos dados experimentais.	45
Tabela 3.2 Os valores de $b_1 = 0.18GeV^{-2}$ e $b_2 = -0.10GeV^{-4}$ foram obtidos apenas para pp ($\sqrt{s} = 23.5GeV$).	46
Tabela 3.3 Valores dos parâmetros da amplitude elementar entre constituintes para colisão pp e $\bar{p}p$	49
Tabela 3.4 Valores de K e α para pp e $\bar{p}p$ em colisões elásticas, a primeira linha corresponde a momento no sistema de laboratório, as outras à energia no sistema de centro de massa e na nossa notação p_l e \sqrt{s} têm unidade de GeV.	53
Tabela 3.5 Valores dos parâmetros obtidos por Hüfner e Povh e previsão para ρ . Os dados experimentais recentes para ρ estão no texto.	56
Tabela 3.6 Parâmetros para fator de forma dependente da energia.	64
Tabela 3.7 Parâmetros para espalhamento elástico com amplitude dependente da energia.	68
Tabela 4.1 Valores dos parâmetros livres C, α^2, β^2 e a^2 para $f(s)$	81
Tabela 4.2 Valores dos parâmetros livres C, α^2, β^2 e a^2 para $G(s)$	82
Tabela 4.3 Valores de $\lambda(s)$ para visual 1 e visual 2 no caso de amplitude dependente da energia.	85
Tabela 4.4 Valores de $\lambda(s)$ para visual 1 e visual 2 no caso de fator de forma dependente da energia.	85
Tabela 4.5 Resultados do MINUIT para $f(s)$	86
Tabela 4.6 Resultados do MINUIT para $G(s)$	86
Tabela 4.7 Valores obtidos por regressão linear com (4.13) para amplitude dependente da energia.	88
Tabela 4.8 Resultado da regressão linear com (4.13) para fator de forma dependente da energia.	88
Tabela 4.9 Valores de c.c. (coeficiente de correlação) obtidos por regressão linear para $f(s)$	91
Tabela 4.10 Coeficientes de correlação de regressão linear para $G(s)$	91
Tabela 4.11 Resultados finais do programa com subrotina MINUIT para λ_1 na abordagem $f(s)$	92
Tabela 4.12 Resultados finais do programa com subrotina MINUIT para λ_2 na abordagem $f(s)$	92
Tabela 4.13 Valores obtidos do programa com subrotina MINUIT para λ_1 na abordagem $G(s)$	92
Tabela 4.14 Valores obtidos do programa com subrotina MINUIT para λ_2 na abordagem $G(s)$	92
Tabela 4.15 Valores preliminares para $\lambda(s)$ obtidos da colisão elástica $\bar{p}p$	94

Tabela 4.16	Previsão de $\lambda(s)$ para conjunto “visual 1 e 2” na abordagem de amplitude dependente da energia ($\sqrt{s} = 546$ GeV), espalhamento pp.	95
Tabela 4.17	Previsão de $\lambda(s)$ para $\sqrt{s} = 546$ GeV na abordagem de fator de forma dependente da energia (“visual 1 e 2”), espalhamento pp.	95
Tabela 4.18	Resultados obtidos para $\lambda(s)$ que descrevem ρ pelo valor médio.	101
Tabela 4.19	Resultados obtidos para $\lambda(s)$ que descrevem ρ pelo valor médio ($\sqrt{s} = 23,5$ GeV) e mínimo ($\sqrt{s} = 30,7; 44,7; 52,8$ e $62,5$ GeV).	108
Tabela 4.20	Parâmetros livres dos modelos revisados na seção 3.4.4.	116

Lista de figuras

Figura 2.1 Esquema típico de uma experiência de colisões com alvo fixo.	4
Figura 2.2 Especificação da direção das partículas espalhadas no Sistema de Laboratório: ϕ_L (ângulo azimutal), θ_L (ângulo zenital).	5
Figura 2.3 Ajuste de $d\sigma/dt$ na região de espalhamento coulombiano para determinação de ρ	11
Figura 2.4 Dados experimentais de ρ para espalhamento pp e $\bar{p}p$	12
Figura 2.5 Dados experimentais de σ_t para espalhamento pp e $\bar{p}p$	12
Figura 2.6 Seção de choque diferencial de espalhamento elástico pp. Os valores de energia indicados são arredondamentos dos valores citados no texto.	14
Figura 2.7 Dados de σ_t , σ_{el} , σ_{inel} e ρ utilizados neste trabalho (vide tabela 2.2).	16
Figura 3.1 Ilustração da condição assintótica de espalhamento.	18
Figura 3.2 Espalhamento a pequeno ângulo.	23
Figura 3.3 Relação entre coordenadas.	24
Figura 3.4 Seção de choque diferencial para esfera negra.	27
Figura 3.5 Razão entre seção de choque total e área geométrica.	29
Figura 3.6 Esquema de colisão com N partículas-alvo ligadas.	31
Figura 3.7 Esquema de colisão entre dois sistemas compostos.	37
Figura 3.8 Seção de choque diferencial pp elástica em (a) $\sqrt{s} = 23,5$ GeV, onde linha sólida corresponde a $\rho = 0,04$ e (b) $\sqrt{s} = 546$ GeV.	45
Figura 3.9 Seção de choque diferencial baseada no fator de forma de Felst para colisão $\bar{p}p$, a energia no sistema de centro de momento é indicada no gráfico.	47
Figura 3.10 Seção de choque diferencial baseada no fator de forma de BSWW para colisão $\bar{p}p$, a energia no sistema de centro de momento é indicada no gráfico.	47
Figura 3.11 Seção de choque diferencial para colisão elástica pp, a energia no sistema de centro de massa é indicada no gráfico.	48
Figura 3.12 Descrição de σ_t , ρ obtida utilizando os parâmetros da tabela 3.3.	50
Figura 3.13.a) Seção de choque diferencial para espalhamento elástico $\bar{p}p$	50
Figura 3.13.b) Seção de choque diferencial para espalhamento elástico pp.	51
Figura 3.14 Espalhamento elástico pp para $p_t = 300$ GeV.	53
Figura 3.15 Seção de choque diferencial pp para $\sqrt{s} = 23,5; 30,7; 44,7; 52,8; 62,5$ GeV.	54
Figura 3.16 Espalhamento elástico $\bar{p}p$ para $\sqrt{s} = 546$ GeV.	54
Figura 3.17 Seção de choque diferencial $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 630$ GeV.	55
Figura 3.18 Espalhamento pp (linha cheia) e $\bar{p}p$ (linha tracejada) para $\sqrt{s} = 53$ GeV.	55
Figura 3.19.a) Previsão do modelo de Hüfner e Povh para $d\sigma/dt$ em interação pp.	57
Figura 3.19.b) Previsão do modelo de Hüfner e Povh para $d\sigma/dt$ em interação $\bar{p}p$	57
Figura 3.20 Seção de choque total para pp (pontos pretos) e $\bar{p}p$ (círculos).	59
Figura 3.21 Razão entre as partes real e imaginária da amplitude hadrônica para pp (pontos pretos) e $\bar{p}p$ (círculos).	59
Figura 3.22 Seção de choque diferencial para pp nas energias indicadas no gráfico. As linhas cheias referem-se a pp e a linha tracejada a $\bar{p}p$	60
Figura 3.23 Seção de choque diferencial para $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 550$ GeV e a previsão do modelo.	61
Figura 3.24 Seção de choque diferencial prevista pp (em cima) e $\bar{p}p$ (embaixo) com dados experimentais. Os valores numéricos à direita indicam as energias no sistema de centro de massa em unidades de GeV e as curvas e dados foram multiplicados por potências de 10.	65

Figura 3.25	Previsões em energias do Tevatron para $\bar{p}p$ com dados experimentais em 1.8 TeV.	66
Figura 3.26	Resultados obtidos para a seção de choque total.	66
Figura 3.27	Previsões para seção de choque elástica integrada.	67
Figura 3.28	Descrição para amplitude párton-pártion dependente da energia (pp).	68
Figura 3.29	Seção de choque diferencial para pp sem a parte real fornecida pela fórmula de Martin.	69
Figura 4.1	Previsões com amplitude elementar complexa ($\lambda = 0.055$) e com fórmula de Martin para espalhamento pp em $\sqrt{s} = 53\text{GeV}$.	76
Figura 4.2	Valores de $\lambda(s)$ e a parametrização utilizada.	77
Figura 4.3	Descrição para $d\sigma/dt$ com amplitude elementar dependente da energia e $\lambda(s)$ dado por (4.10).	78
Figura 4.4	Descrições da região do mínimo para $\lambda = 0,032$ e $\lambda = 0,036$ em 23 GeV.	79
Figura 4.5	Regressão linear para $C(s)$ e $a^2(s)$ em termos de $[\ln(s)]^2$.	81
Figura 4.6	Dependência de C e a^2 com a energia no centro de massa.	82
Figura 4.7	Parametrização original de C e α^2 por (3.72) e as duas novas parametrizações.	83
Figura 4.8	Dependência escolhida de C e α^2 com a energia no centro de massa.	83
Figura 4.9	Valores de $\lambda(s)$ para visual 1 (quadrado) e visual 2 (círculo) para as duas abordagens, $f(s)$ (à esquerda) e $G(s)$ (à direita).	85
Figura 4.10	Regressão linear para $g(s) = \sqrt{s}$, s , $\ln(s)$ e $[\ln(s)]^2$ com amplitude dependente da energia, visual 1 (linha cheia) e visual 2 (linha tracejada).	89
Figura 4.11	Regressão linear para $g(s) = \sqrt{s}$, s , $\ln(s)$ e $[\ln(s)]^2$ com fator de forma dependente da energia, visual 1 (linha cheia) e visual 2 (linha tracejada).	89
Figura 4.12	Regressão linear de visual 1 e 2 tomados conjuntamente. Os quatro primeiros gráficos são de fator de forma dependente da energia e os últimos 4 gráficos são de amplitude dependente da energia.	90
Figura 4.13	Seção de choque diferencial para colisão elástica $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 19,4, 53$ e 546 GeV. Os dados experimentais e as curvas teóricas foram multiplicados por potências de 10.	94
Figura 4.14	Descrição de $d\sigma/dt$ para energias do ISR com dependência energética na amplitude. O gráfico inferior é um detalhe da região para $ t \leq 0,5 \text{ GeV}^2$ e mostra que as curvas descrevem bem a inclinação de $d\sigma/dt$ nessa região.	97
Figura 4.15	Descrição de $d\sigma/dt$ para energias do ISR com dependência energética no fator de forma. Para o gráfico inferior vide legenda da figura 4.14.	98
Figura 4.16	Previsão de σ_t , σ_{el} e σ_{inel} para as duas abordagens, $f(s)$ (linha cheia) e $G(s)$ (linha tracejada).	99
Figura 4.17	Razão entre as partes real e imaginária da amplitude hadrônica e as previsões de ρ com as parametrizações para $\lambda(s)$ utilizando (4.14).	100
Figura 4.18	Descrição de $d\sigma/dt$ com amplitude dependente da energia. O gráfico inferior detalha a região para $ t \leq 0,5 \text{ GeV}^2$ onde as curvas descrevem bem a inclinação de $d\sigma/dt$. Aqui $\lambda(s)$ é parametrizado por (4.15).	102
Figura 4.19	Descrição de $d\sigma/dt$ com fator de forma dependente da energia. Aqui $\lambda(s)$ é parametrizado por (4.15). Para o gráfico inferior vide legenda da figura 4.18.	103
Figura 4.20	Descrição de $d\sigma/dt$ com amplitude dependente da energia. O gráfico inferior detalha a região para $ t \leq 0,5 \text{ GeV}^2$ onde as curvas descrevem bem a inclinação de $d\sigma/dt$. Aqui $\lambda(s)$ é parametrizado por (4.16).	104

Figura 4.21	Descrição de $d\sigma/dt$ com fator de forma dependente da energia. Aqui $\lambda(s)$ é parametrizado por (4.16). Para o gráfico inferior vide legenda da figura 4.20	105
Figura 4.22	Previsão de σ_t, σ_{el} e σ_{inel} para as duas abordagens, $f(s)$ com linha cheia e $G(s)$ com linha tracejada. A figura superior utiliza (4.15) e a inferior (4.16).	106
Figura 4.23	Razão entre partes real e imaginária da amplitude hadrônica e as descrições de ρ com (4.15) (figura superior) e (4.16) (figura inferior).	107
Figura 4.24	Descrição de $d\sigma/dt$ com amplitude dependente da energia. O gráfico inferior detalha a região para $ t \leq 0,5 GeV^2$ onde as curvas descrevem bem a inclinação de $d\sigma/dt$. O $\lambda(s)$ é parametrizado por (4.17).	109
Figura 4.25	Descrição de $d\sigma/dt$ com fator de forma dependente da energia. O $\lambda(s)$ é parametrizado por (4.17). Para o gráfico inferior vide legenda da figura 4.24.	110
Figura 4.26	Descrição de $d\sigma/dt$ com amplitude dependente da energia. O gráfico inferior detalha a região para $ t \leq 0,5 GeV^2$ onde as curvas descrevem bem a inclinação de $d\sigma/dt$. O $\lambda(s)$ é parametrizado por (4.18).	111
Figura 4.27	Descrição de $d\sigma/dt$ com fator de forma dependente da energia. O $\lambda(s)$ é parametrizado por (4.18). Para o gráfico inferior vide legenda da figura 4.26.	112
Figura 4.28	Previsão de σ_t, σ_{el} e σ_{inel} para as duas abordagens, $f(s)$ com linha cheia e $G(s)$ com linha tracejada, a figura superior utiliza (4.17) e a inferior (4.18).	113
Figura 4.29	Razão entre partes real e imaginária da amplitude hadrônica e as descrições de ρ com (4.17) (figura superior) e (4.18) (figura inferior).	114
Figura A.3.1	Coordenadas utilizadas.	124
Figura A.3.2	Coordenadas na direção frontal	124
Figura A.4.1	Esquema do espaço de integração.	129
Figura A.4.2	Contorno de integração.	130

Investiga-se o espalhamento elástico próton-próton na região de energia no centro de massa de 23 a 63 GeV através de um modelo de difração múltipla (eiconal). Como introdução ao assunto apresenta-se uma revisão detalhada dos fundamentos do Formalismo da Difração Múltipla (FDM) e uma descrição geral dos principais modelos de difração múltipla (geométricos). O objetivo desta pesquisa é reformular um desses modelos, o qual utiliza amplitude de espalhamento elementar (párton-párton) puramente imaginária e não pode prever o parâmetro ρ (razão entre as partes real e imaginária da amplitude hadrônica frontal). Introduzindo uma parte real para a amplitude elementar proporcional à parte imaginária obtém-se melhorias no formalismo. Mostra-se que essa nova abordagem reproduz todos os dados experimentais de seções de choque diferencial e integradas (total, elástica e inelástica), porém não o parâmetro ρ em função da energia. A seguir, partindo-se de ajustes desse parâmetro obtém-se uma reprodução global dos observáveis físicos, com exceção da região do “dip” (mínimo difrativo na seção de choque diferencial) em algumas energias. Através de um estudo crítico dos modelos de difração múltipla mostra-se que descrições globais também não são firmemente atingidas em todos esses modelos. Por último apresentam-se e discutem-se alternativas para aperfeiçoamentos desses resultados em pesquisas futuras.

Capítulo 1. INTRODUÇÃO

O estudo teórico do espalhamento elástico de hádrons a altas energias, na região de pequeno momento transferido, tem sido um dos tópicos mais difíceis na Física das Partículas Elementares. Apesar da importância dessa região (confinamento dos quarks) não existe ainda uma descrição teórica amplamente aceita. As dificuldades estão associadas a dois motivos principais. Por um lado o crescimento da constante de acoplamento para interação hadrônica com a diminuição do momento transferido impede o tratamento através de *Cromodinâmica Quântica* (CDQ) perturbativa, pois as séries divergem. Por outro lado, as teorias de calibre na rede (métodos não perturbativos) encontram dificuldades nas grandes dimensões da rede pois é necessário levar em conta todas as configurações possíveis e até agora só propriedades estáticas têm sido investigadas, não havendo resultados para propriedades dinâmicas (estados de espalhamento).

Uma forma de se abordar o problema é tentar obter resultados fenomenológicos estudando os dados experimentais através de modelos, buscando-se informações que possam ajudar na procura de esquemas apropriados de cálculo nas teorias não perturbativas de calibre, como cálculo na rede. As várias abordagens fenomenológicas são usualmente classificadas em canal-s ou formalismos ópticos, canal-t ou formalismos de troca (Regge) e formalismos de constituintes [1]. Desenvolvimentos posteriores levaram a modelos híbridos, isto é, modelos que utilizam mais de um dos formalismos caracterizados acima e também aspectos da CDQ e Teoria de Campos. A área de Espalhamento Elástico e Difrativo é bastante ampla tanto do ponto de vista teórico, fenomenológico, como experimental. Artigos de revisão cobrindo diversos aspectos do problema e as várias descrições dos dados experimentais podem ser encontrados nas referências [1-9] e o status atual bem como a evolução recente das idéias envolvidas, na referência [10]. Este trabalho é de caráter eminentemente fenomenológico e voltado para uma descrição dos dados experimentais do espalhamento de hádrons no canal-s com aspectos de constituintes genéricos. Assim não abordaremos os mecanismos de troca (Odderon, Pomeron, Reggeon) nem a estrutura hadrônica em termos de quarks. Visamos uma análise geométrica (parâmetro de impacto) considerando os hádrons com constituintes genéricos, que denominaremos pártons.

No formalismo óptico a aproximação eiconal forma a base do modelo original de Glauber para espalhamento núcleo-núcleo e hádron-núcleo, denominado *Formalismo da Difração Múltipla* (FDM). A aproximação eiconal é construída em analogia à teoria de difração de Fraunhofer e tem grande sucesso por facilitar a descrição do padrão difrativo da seção de choque diferencial em função do momento transferido e por obedecer automaticamente o princípio da unitariedade. A aproximação eiconal obtida no limite semi-clássico para altas energias foi utilizada por Glauber, para introduzir seu formalismo da difração múltipla, cujo primeiro trabalho apresentando em detalhe o FDM data do ano de 1959 [11]. Nos anos seguintes, vários aspectos básicos do formalismo foram publicados em conferências [12,13] e a aplicação do FDM em física nuclear cresceu. A aproximação eiconal também é utilizada em estudo do espalhamento hádron-hádron [14] para produzir amplitudes unitarizadas e aparece em modelos difrativos baseados em CDQ [15]. Mas modelos puramente geométricos também têm sido aplicados ao espalhamento hádron-hádron nas energias do Sp̄pS do CERN (Super Proton Synchrotron) e do Tevatron (Fermilab) [14,16-23].

Dentre os modelos baseados no FDM e que tratam do espalhamento elástico de hádrons

a altas energias, o modelo de Menon e Pimentel [21,22] (seção 3.4.4.7) faz uso de uma função eiconal puramente imaginária, implicando numa amplitude de espalhamento também puramente imaginária. Uma característica desse modelo é a utilização da Fórmula de Martin como estimativa da parte real da amplitude de espalhamento. Porém, como será explicado, tanto resultados teóricos como experimentais apresentam questionamentos à utilização dessa fórmula.

O objetivo central deste trabalho é o estudo de possíveis reformulações do modelo original de Menon e Pimentel de modo a não se fazer uso da fórmula de Martin. Para tanto, testa-se a introdução de uma amplitude elementar complexa para representar a interação entre constituintes dos hádrons. A hipótese básica é que as partes real e imaginária dessa amplitude têm mesma dependência em momento transferido, são proporcionais, porém com dependência energética (seção 4.3). Com isso é possível obter uma amplitude hadrônica complexa e daí os vários observáveis físicos do espalhamento de hádrons (seção 2.1), como seções de choque diferencial e integradas (total, inelástica e elástica), inclinação B (slope) e o parâmetro ρ (razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento frontal, isto é, para ângulo de espalhamento zero).

Como será mostrado, uma característica da grande maioria dos modelos baseados no FDM é a utilização do parâmetro ρ como “entrada” para ajustes e portanto ele não pode ser previsto. O único modelo geométrico que fornece uma boa descrição de ρ [19] utiliza um número de parâmetros livres bem acima da média usual nos demais modelos. Isso sugere que uma previsão adequada do comportamento do parâmetro ρ pode ser considerada uma questão difícil de ser tratada pelos modelos de difração múltipla puramente geométricos.

Neste trabalho, através de um número limitado de parâmetros livres, utilizamos nos ajustes somente dados de seção de choque diferencial, obtendo dependências energéticas para os parâmetros livres não constantes. A seguir testamos os resultados através das previsões para seções de choque diferencial e integradas. Nossos resultados mostram que com esse formalismo, uma boa descrição das seções de choque diferencial e integradas não implicam numa descrição do parâmetro ρ . Na sequência, através de novas parametrizações obtemos descrições de todas essas grandezas referidas, porém, de forma menos satisfatória. Por último indicamos possíveis caminhos que possam ser seguidos, de modo a se aprimorar a descrição conjunta dos observáveis físicos.

Como será também explicado, dadas as características dos dados experimentais de espalhamento elástico de hádrons, limitou-se essa primeira abordagem do problema ao espalhamento próton-próton na região de energia mais alta atingida até o momento para essa reação pelos aceleradores de partículas.

O texto está dividido em cinco capítulos. O capítulo 2 trata dos dados experimentais: discutem-se os métodos de obtenção dos observáveis físicos do espalhamento elástico de hádrons e apresenta-se uma compilação de todos os dados experimentais analisados. No capítulo 3 é feita uma revisão das bases do formalismo teórico utilizado bem como dos principais modelos geométricos. No capítulo 4 é introduzida a amplitude de espalhamento complexa e apresentam-se todos os testes e resultados obtidos. O capítulo 5 trata das conclusões e observações finais sobre a pesquisa realizada.

Neste trabalho utilizamos a convenção usual em Física de Altas Energias, $\hbar = 1$ e $c = 1$. Nessa região de energia a unidade conveniente é o GeV , $1GeV = 10^9 eV$ e com a convenção referida esta é também a unidade de momento p (GeV/c) e vetor de onda $k = p/\hbar$. As grandezas no Sistema de Laboratório (SL) serão representadas com um índice L e as grandezas no Sistema de Centro de Massa ($c.m.$), sem índice.

2.1 OBSERVÁVEIS FÍSICOS NO ESPALHAMENTO HÁDRON-HÁDRON

Os observáveis físicos importantes no espalhamento elástico de hádrons a altas energias são a seção de choque diferencial ($d\sigma/dt$), as seções de choque integradas total (σ_t), elástica (σ_{el}) e inelástica (σ_{inel}), a inclinação da seção de choque diferencial (B) e a razão entre as partes real e imaginária da amplitude hadrônica frontal (ρ). Nesta seção discutimos o significado físico de cada uma dessas grandezas e o modo como são experimentalmente determinadas.

2.1.1 Espalhamentos elástico e inelástico

Na figura 2.1 mostra-se um esquema geral de uma experiência de colisão entre um feixe de partículas e um alvo fixo. A altas energias podem ocorrer os seguintes processos:

- espalhamento elástico (não há mudança na estrutura interna das partículas);
- espalhamento inelástico com excitação;
- espalhamento inelástico com produção de partículas.

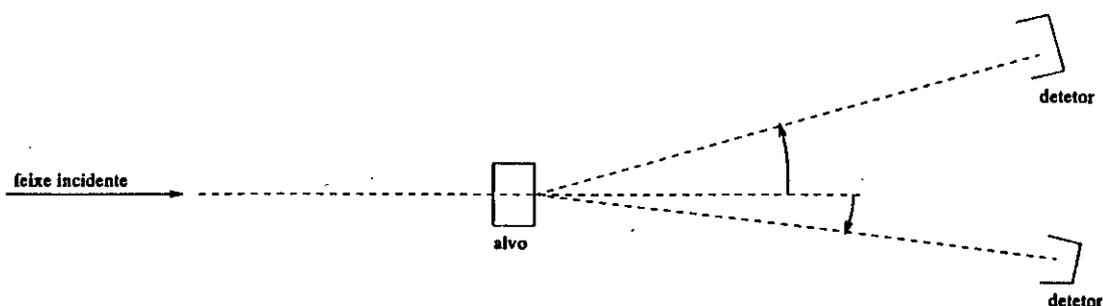


Figura 2.1 Esquema típico de uma experiência de colisões com alvo fixo.

No espalhamento inelástico com excitação as partículas colidentes sofrem mudança em seus estados quânticos internos enquanto no espalhamento com produção de partículas a colisão das duas partículas produz outras partículas diferentes. Em ambos os espalhamentos inelásticos pode haver divisões em mais canais dependendo da experiência e objetivos a serem alcançados [24].

2.1.2 Definições

A grandeza fundamental no espalhamento de partículas é a seção de choque diferencial. Como será mostrado, a partir dela as demais grandezas referidas acima podem ser obtidas.

2.1.2.1 Seções de choque diferenciais

Experimentalmente, mede-se o fluxo de partículas em função da direção, associando-se os resultados às seções de choque do espalhamento. Alguns parâmetros da colisão podem ser vistos na figura 2.2.

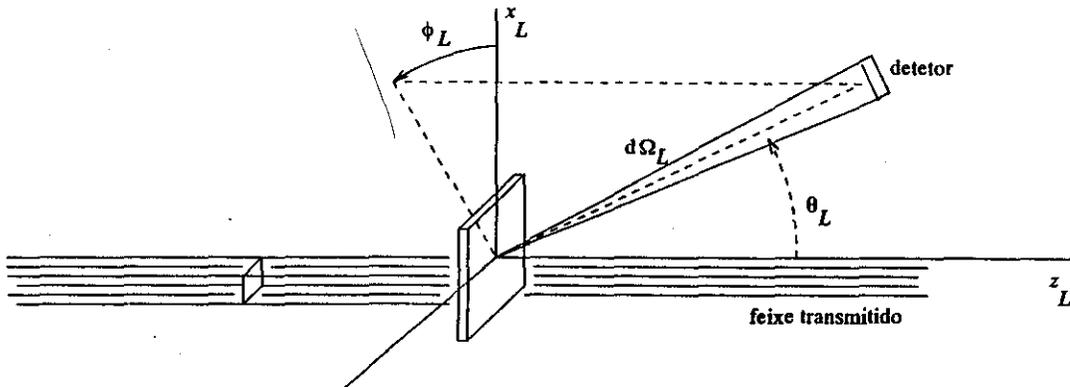


Figura 2.2 Especificação da direção das partículas espalhadas no Sistema de Laboratório: ϕ_L (ângulo azimutal), θ_L (ângulo zenital) [24].

Para colisão elástica no sistema de laboratório (θ_L, ϕ_L) o número de partículas espalhadas por unidade de tempo dentro do ângulo sólido $d\Omega_L$ na direção (θ_L, ϕ_L) é [24]

$$dN_{el} = \Phi n_{alvo} \sigma(\theta_L, \phi_L) d\Omega_L,$$

onde n_{alvo} é o número de alvos espalhadores, Φ é o fluxo relativo dos projéteis com respeito ao alvo e $\sigma(\theta_L, \phi_L) = (d\sigma/d\Omega_L)$ é a seção de choque diferencial elástica. No sistema de centro de massa (θ, ϕ) obtemos

$$dN_{el} = \Phi n_{alvo} \sigma(\theta, \phi) d\Omega$$

onde $\sigma(\theta, \phi) = (d\sigma/d\Omega)$. Comparando as duas expressões para dN_{el} obtemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{d\sigma}{d\Omega_L} d\Omega_L.$$

A seção de choque diferencial $d\sigma/d\Omega_L$ do espalhamento elástico é obtida experimentalmente com um detector na direção escolhida contando o número de eventos espalhados elasticamente.

O mesmo tipo de relação envolvendo Ω_L e Ω para o caso elástico, aplica-se a eventos selecionados experimentalmente como inelásticos, levando a

$$\frac{d\sigma_{inel}}{d\Omega} d\Omega = \frac{d\sigma_{inel}}{d\Omega_L} d\Omega_L.$$

Na prática é útil a introdução da variável de Mandelstam t , o quadrado do quadrimomento transferido, que é um invariante de Lorentz. Do apêndice 1,

$$t = -2k^2(1 - \cos\theta)$$

onde k é o vetor de onda associado ao trimomento no centro de massa e θ o ângulo de espalhamento no mesmo sistema. Como mostrado em detalhe no apêndice 1, para simetria azimutal pode-se expressar a seção de choque diferencial elástica por

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi}{k^2} \frac{d\sigma}{d\Omega}.$$

Embora a figura 2.2 mostre a colisão com um alvo fixo, ressaltamos que os dados a serem utilizados nesse trabalho provêm de um acelerador de anéis de colisão, por isso a vantagem de se utilizar as variáveis de Mandelstam que são invariantes de Lorentz.

Sendo a seção de choque diferencial elástica uma medida da probabilidade de se observar uma partícula numa dada direção (ou com um dado momento transferido na colisão para dada energia) a ela associamos uma *amplitude de espalhamento elástico*, cujo módulo ao quadrado dá a probabilidade. Como mostrado no capítulo 3 e apêndice 2, essa amplitude, que depende de t e da energia no sistema de centro de massa \sqrt{s} , tem a seguinte relação com a seção de choque diferencial elástica:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi}{k^2} |\mathcal{F}(t, s)|^2.$$

2.1.2.2 Seções de choque integradas e o teorema óptico

Em cada caso referido na seção anterior, a integração sobre todo o ângulo sólido fornece as seções de choque integradas para cada canal:

elástico

$$\sigma_{el} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega,$$

inelástico

$$\sigma_{inel} = \int \frac{d\sigma_{inel}}{d\Omega} d\Omega$$

e a soma dessas contribuições denomina-se seção de choque total

$$\sigma_t = \sigma_{el} + \sigma_{inel}.$$

A seção de choque total pode também ser expressa em termos da amplitude de espalhamento elástico, $\mathcal{F}(t, s)$, através do importante resultado demonstrado no capítulo 3 e apêndice 3 e denominado Teorema Óptico:

$$\sigma_t(s) = \frac{4\pi}{k} \text{Im}\{\mathcal{F}(0, s)\}.$$

Assim σ_t depende apenas da amplitude de espalhamento frontal ($\theta = 0$ ou $t = 0$).

2.1.2.3 Inclinação B

Como será visto a seguir, dadas as características dos dados experimentais da seção de choque diferencial (pico de difração em pequeno momento transferido) é conveniente definir a inclinação de $d\sigma/dt \times t$ através de uma função logarítmica, levando à definição da inclinação (slope):

$$B \equiv \frac{d}{dt} \ln \frac{d\sigma}{dt}.$$

2.1.2.4 Parâmetro ρ

É definido pela razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento frontal:

$$\rho(s) \equiv \frac{\text{Re}\{\mathcal{F}(0, s)\}}{\text{Im}\{\mathcal{F}(0, s)\}}.$$

Do Teorema Óptico vemos que, conhecendo-se $\text{Re}\{\mathcal{F}(0, s)\}$, pode-se obter uma relação entre σ_t e ρ .

2.1.2.5 Observáveis e a amplitude de espalhamento

Do exposto, a amplitude de espalhamento constitui uma grandeza fundamental no estudo de colisões, correspondendo ao elo de ligação entre teoria e experiência. Em resumo, havendo uma previsão teórica para $\mathcal{F}(t, s)$, o modelo pode ser testado verificando-se a reprodução dos dados experimentais por meio das relações :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi}{k^2} |\mathcal{F}(t, s)|^2,$$

$$B = \frac{d}{dt} \ln \frac{d\sigma}{dt},$$

$$\rho(s) = \frac{\text{Re}\{\mathcal{F}(0, s)\}}{\text{Im}\{\mathcal{F}(0, s)\}},$$

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k} \text{Im}\{\mathcal{F}(0, s)\},$$

$$\sigma_{el} = \int \frac{d\sigma}{dt} dt$$

e

$$\sigma_{inel} = \sigma_t - \sigma_{el}.$$

Como veremos, estas relações podem ser utilizadas em sentido inverso, isto é, fornecendo, a partir dos dados experimentais, informações para análise de modelos.

2.1.3 Contribuições hadrônica e coulombiana

A cada tipo de interação (eletromagnética, nuclear,...) temos uma seção de choque diferencial e portanto uma amplitude associadas. As interações envolvidas no espalhamento elástico de hádrons a altas energias são a coulombiana e a interação forte (ou hadrônica) e essas duas contribuem para a amplitude total que se associa com a seção de choque diferencial elástica completa ($d\sigma/dt$). Mostramos a seguir como se obtém essa grandeza.

- Interação Coulombiana

Na presença de um campo coulombiano a seção de choque diferencial para próton-próton (pp) é [5]

$$\frac{d\sigma_c}{dt} = \pi |G^2(t) \frac{2\alpha}{|t|}|^2, \quad (2.1)$$

onde $G(t)$ é o fator de forma eletromagnético do próton, α é a constante de estrutura fina e t o quadrado do quadrimomento transferido.

- Interação Nuclear

A seção de choque diferencial hadrônica na região de pequeno momento transferido (não considerando a presença da interação coulombiana) é dada pela relação empírica

$$\frac{d\sigma_h}{dt} = \frac{d\sigma_h}{dt} \Big|_{t=0} e^{Bt}, \quad (2.2)$$

isto é, um gráfico de $\ln[d\sigma_h/dt] \times t$ é uma reta de inclinação B . Como veremos, isso se aplica para a região de pequeno t .

Para

$$\mathcal{F} = \text{Re}\{\mathcal{F}\} + i\text{Im}\{\mathcal{F}\}$$

e da definição do parâmetro ρ (seção 2.1.2.4) e do teorema óptico (seção 2.1.2.2) obtemos

$$\frac{d\sigma_h}{dt} = \pi |(\rho + i) \frac{\sigma_t}{4\pi} e^{\frac{Bt}{2}}|^2. \quad (2.3)$$

Observemos que a equação (2.3) obtida da relação empírica (2.2) implica que a *razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento independe do momento transferido*. No capítulo 4 utilizaremos essa hipótese para a amplitude de espalhamento entre os constituintes dos hádrons.

Usando a notação da referência [5]

$$F_c = \frac{2\alpha G^2(t)\sqrt{\pi}}{|t|}, \quad F_h = \frac{(\rho + i)\sigma_t e^{\frac{Bt}{2}}}{4\sqrt{\pi}}, \quad (2.4)$$

escrevemos (2.1) e (2.3) na forma

$$\frac{d\sigma_c}{dt} = |F_c|^2, \quad \frac{d\sigma_h}{dt} = |F_h|^2. \quad (2.5)$$

- Soma das Contribuições

As equações em (2.5) consideram uma única interação de cada vez, mas a presença simultânea das interações coulombiana e hadrônica não permite a soma direta de $d\sigma_c/dt$ e $d\sigma_h/dt$ para obter a seção de choque diferencial completa. Para levar em consideração a distorção das amplitudes

“puras” F_c e F_h devida a essa presença simultânea, introduz-se um fator de fase $\alpha\varphi(t)$ na amplitude coulombiana [5]

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dt} &= \frac{d\sigma_c}{dt} + \frac{d\sigma_h}{dt} + \frac{d\sigma_{ch}}{dt} \\ &= |F_c e^{i\alpha\varphi(t)} + F_h|^2 \\ &= \pi |G^2(t)| \frac{2\alpha}{|t|} e^{i\alpha\varphi(t)} + (\rho + i) \frac{\sigma_t}{4\pi} e^{\frac{Bt}{2}}|^2,\end{aligned}\tag{2.6}$$

onde $d\sigma_{ch}/dt$ é a seção de choque diferencial para interferência entre as duas interações e, como referido, é assumido que a variação de ρ com o momento transferido é desprezível na região considerada. O fator de fase na interferência pode ser determinado tanto através de diagramas de Feynman, usando Eletrodinâmica Quântica, como através da aproximação eiconal. No primeiro caso West e Yennie fornecem [25]

$$\alpha\varphi(t) = \ln \frac{0,08 GeV^2/c^2}{|t|} - 0,577$$

e no segundo, Cahn obtém [26]

$$\varphi(t) = - \left[\gamma + \ln \left[\frac{B|t|}{2} \right] + \ln \left[1 + \frac{8}{B\Lambda^2} \right] + \left[\frac{4|t|}{\Lambda^2} \right] \ln \left[\frac{4|t|}{\Lambda^2} \right] + \frac{2|t|}{\Lambda^2} \right],$$

onde $\gamma = 0,577$ [constante de Euler], $\Lambda^2 = 0,71(GeV/c)^2$ e B é a inclinação (slope).

Da equação (2.6), o termo de interferência é mais significativo para [5]

$$|t_{int}| \approx \frac{8\pi\alpha}{\sigma_t} = \frac{0,071}{\sigma_t(mb)}.$$

Podemos assim dividir o intervalo de pequeno $|t|$ em 3 regiões:

1) domínio do espalhamento coulombiano

$$|t| \ll |t_{int}| \rightarrow \frac{d\sigma}{dt} \sim \frac{1}{t^2};$$

2) domínio do espalhamento nuclear

$$|t| \gg |t_{int}| \rightarrow \frac{d\sigma}{dt} \sim e^{Bt};$$

3) região de interferência coulomb-nuclear

$$|t| \approx |t_{int}|.$$

Da expressão de $|t_{int}|$, seu valor depende de σ_t e como a altas energias σ_t cresce com a energia (seção seguinte), $|t_{int}|$ diminui com a energia. Por exemplo, em $\sqrt{s} \simeq 23 GeV$, $|t_{int}| = 0,0017(GeV/c)^2$ e em $\sqrt{s} \simeq 2 TeV$, $|t_{int}| = 0,00073(GeV/c)^2$ (veja tabela 2.1). Assim, a medida que a energia cresce torna-se mais difícil o acesso à região de Coulomb.

\sqrt{s} (GeV)	Acelerador	$ t_{int} $ (GeV ²)	θ_{int} (mrad)
23,5	ISR	0,0017	3,6
30,7	ISR	0,0017	2,7
52,8	ISR	0,0016	1,5
62,5	ISR	0,0016	1,3
540	SPS	0,0010	0,12
2000	Tevatron	0,00073	0,027

Tabela 2.1 Valores estimados de $|t_{int}|$ e o ângulo associado a ele para espalhamento elástico $p\bar{p}$ na região de interferência de Coulomb [5].

2.1.4 Métodos de medida

Até agora falamos da seção de choque diferencial mas a quantidade diretamente medida não é $d\sigma/dt$ e sim a razão de contagem $\Delta N(t)$, o número de contagens por segundo por Δt (um pequeno intervalo ao redor de t), corrigida para problemas de ruído ou ineficiência dos detetores. A relação entre $\Delta N(t)$ e $d\sigma/dt$ é

$$\Delta N(t) = L \frac{d\sigma}{dt},$$

onde L é um fator de normalização com unidades de $[\text{área} \times \text{tempo}]^{-1}$ e no caso específico de feixes colidentes, L é a luminosidade. Uma forma de determinar o valor de L é usar o valor de $\Delta N(t)$ para $|t| < 0,001 \text{ GeV}^2$ (região onde a interação coulombiana predomina) e considerar $d\sigma/dt$ dada por $d\sigma_c/dt$ (equação 2.1). A região de interação coulombiana é importante para obter a luminosidade L que pode ser usada para a determinação da seção de choque total σ_t , além de $d\sigma/dt$. Para isso faz-se um gráfico de $\ln \Delta N(t) \times t$ para $|t| > 0,01 \text{ GeV}^2$ (região de domínio do espalhamento hadrônico) e extrapola-se uma linha reta para obter $\Delta N(0)$, que é a razão de contagem hadrônica. Usando as equações (2.4), (2.5) e

$$\Delta N(0) = L \left. \frac{d\sigma_h}{dt} \right|_{t=0}, \quad (2.7)$$

obtemos

$$\sigma_t (1 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{\pi} \left[\frac{\Delta N(0)}{L} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.8)$$

A equação (2.8) perm̃te calcular o valor de σ_t se ρ é conhecido. Para determinar ρ utiliza-se a região de interferência entre as duas interações e as parametrizações de $\varphi(t)$ convenientes (página anterior).

Outra maneira de obter σ_t de forma independente da luminosidade usa a razão de contagem total (N_t) devida a qualquer interação. A relação entre N_t e σ_t é

$$N_t = L\sigma_t. \quad (2.9)$$

Com (2.9), (2.7) e (2.8) obtemos

$$\sigma_t(1 + \rho^2) = \frac{16\pi\Delta N(0)}{N_t}$$

e novamente é possível calcular σ_t se ρ é conhecido. Como vemos desta equação e de (2.8) a seção de choque total, σ_t , e a razão ρ , aparecem juntas nos dois métodos. Para obter σ_t é preciso conhecer ρ e vice-versa, mas uma estimativa de ρ já é suficiente porque o erro percentual será da ordem de 2% em ambas as equações já que $\sigma_t \simeq 40mb$ e $\rho \simeq 0,1$ na região de 23 a 63 GeV (energia no sistema de centro de massa). Então uma estimativa de ρ leva a um valor de σ_t que pode ser utilizado para obter um valor melhor para ρ em um processo de realimentação de informações. Outro método utilizado é o ajuste de $d\sigma/dt$ na região de espalhamento coulombiano utilizando o método de minimizar o χ^2 (figura 2.3).

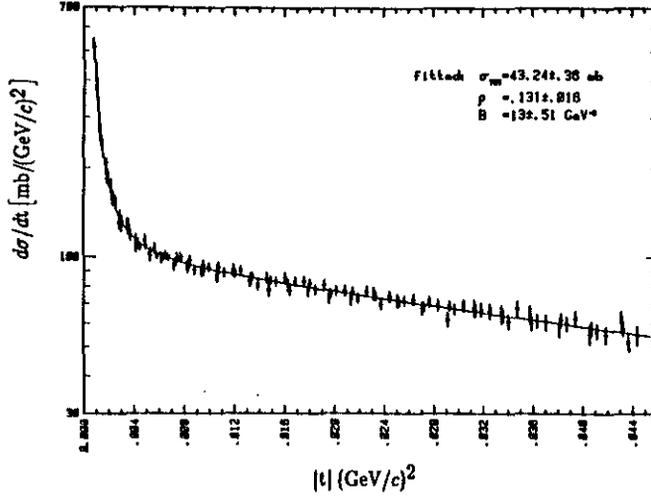


Figura 2.3 Ajuste de $d\sigma/dt$ na região de espalhamento coulombiano para determinação de ρ [5].

Para determinar B é necessário apenas fazer o gráfico $\ln\Delta N(t) \times t$ para $|t| > 0,01GeV^2$ e extrair a inclinação da linha reta obtida.

A seção de choque elástica σ_{el} é definida como

$$\sigma_{el} = \int_{-\infty}^0 \frac{d\sigma_h}{dt} dt. \quad (2.10)$$

Com a aproximação (2.2) e equação (2.3), a integração de (2.10) leva a

$$\sigma_{el} = \frac{1}{B} \frac{d\sigma_h}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\sigma_t^2(1 + \rho^2)}{16\pi B}. \quad (2.11)$$

Uma vez que a inclinação B , a razão ρ e a seção de choque total σ_t sejam conhecidas é possível obter σ_{el} pela equação (2.11). A seção de choque inelástica pode então ser obtida pela relação abaixo:

$$\sigma_{inel} = \sigma_t - \sigma_{el}. \quad (2.12)$$

As figuras 2.4 e 2.5 mostram os valores experimentais de σ_t e ρ para espalhamento pp e $\bar{p}p$ obtidos até o presente na região de altas energias. Maiores informações sobre os métodos de medida podem ser encontradas nas referências [2], [7] e [9].

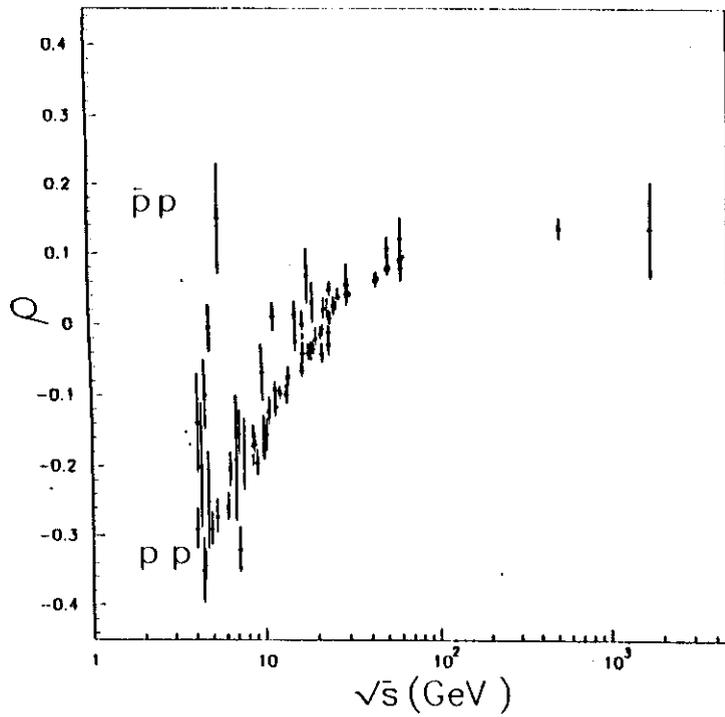


Figura 2.4 Dados experimentais de ρ para espalhamento pp e $\bar{p}p$.

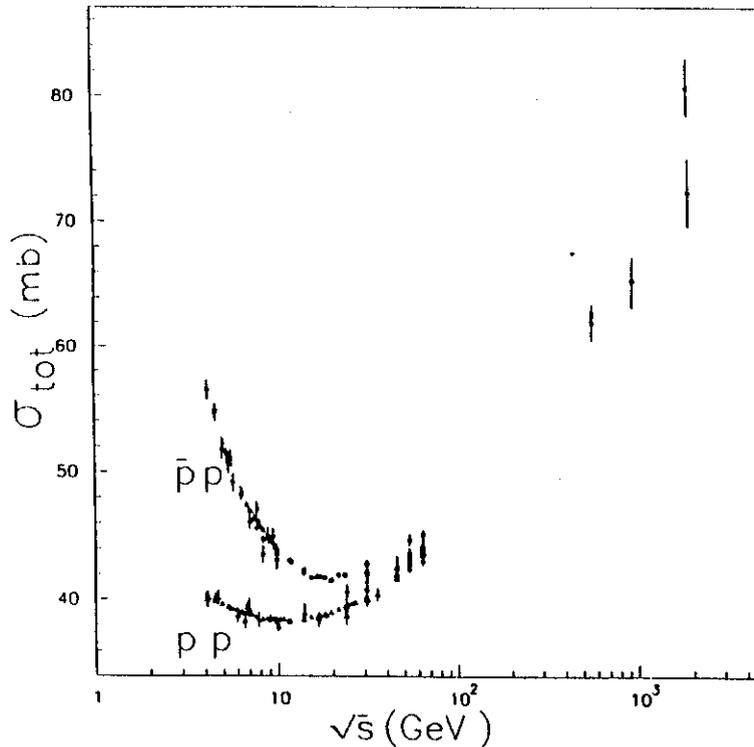


Figura 2.5 Dados experimentais de σ_t para espalhamento pp e $\bar{p}p$.

2.2 DADOS EXPERIMENTAIS ANALISADOS

Os dados experimentais que serão utilizados neste trabalho dizem respeito ao espalhamento elástico próton-próton na região de energia no centro de massa de 23.5 GeV a 62.5 GeV. Os dados foram obtidos no anel de colisão ISR (Intersecting Storage Ring) no CERN, Genebra, na década de 1970 e correspondem à região mais alta de energia no espalhamento próton-próton estudado experimentalmente até hoje em aceleradores. Essa reação somente será estudada novamente na próxima década, através do LHC (Large Hadron Collider) também no CERN e que deverá atingir a energia de 16 TeV no centro de massa.

Durante os anos 70 vários grupos obtiveram medidas de σ_t , ρ , B , $d\sigma/dt$ e σ_{el} . No final da década, U. Amaldi e K. R. Schubert realizaram uma análise crítica de todo o conjunto de dados coletados levando em conta a qualidade de cada experiência, fontes de erros sistemáticos e fatores de normalização, de modo a obter um conjunto coerente de informações experimentais [27]. O resultado dessa análise foi publicado em forma de tabelas [28]. Essa coerência estatística dos dados experimentais é a razão pela qual escolhemos esse conjunto como padrão de nossa análise. Não levaremos em conta a observação de Valin de que uns 6 pontos na energia de 23 GeV e 4 na energia de 62 GeV parecem violar limites de unitariedade [29]. A integração numérica da seção de choque diferencial obtém σ_{el} e, através de (2.12), σ_{inel} . Os dados de $d\sigma/dt$ usados correspondem às energias de 23,5, 30,7, 44,7, 52,8 e 62,5 GeV; estes dados cobrem os maiores intervalos de momento transferido e os valores de energia são os mais altos obtidos até agora.

Na figura 2.6 aparecem os dados de $d\sigma/dt$ e na tabela 2.2 os valores de σ_t , σ_{el} , σ_{inel} e ρ (veja figura 2.7). Como estamos interessados apenas nos dados dentro da região de interação hadrônica ($|t| \geq 0.01 \text{ GeV}^2$) não vamos utilizar todos os dados fornecidos em [28] para as energias citadas acima. O número de dados experimentais que usamos em cada energia está na tabela 2.3.

Uma comparação da figura 2.7 e tabela 2.2 com as figuras 2.4 e 2.5 mostra que o intervalo de dados analisados corresponde a uma região relativamente pequena se comparada ao conjunto de dados existentes. Entretanto o ponto central, como dissemos, é o caráter estatisticamente coerente dessa amostragem.

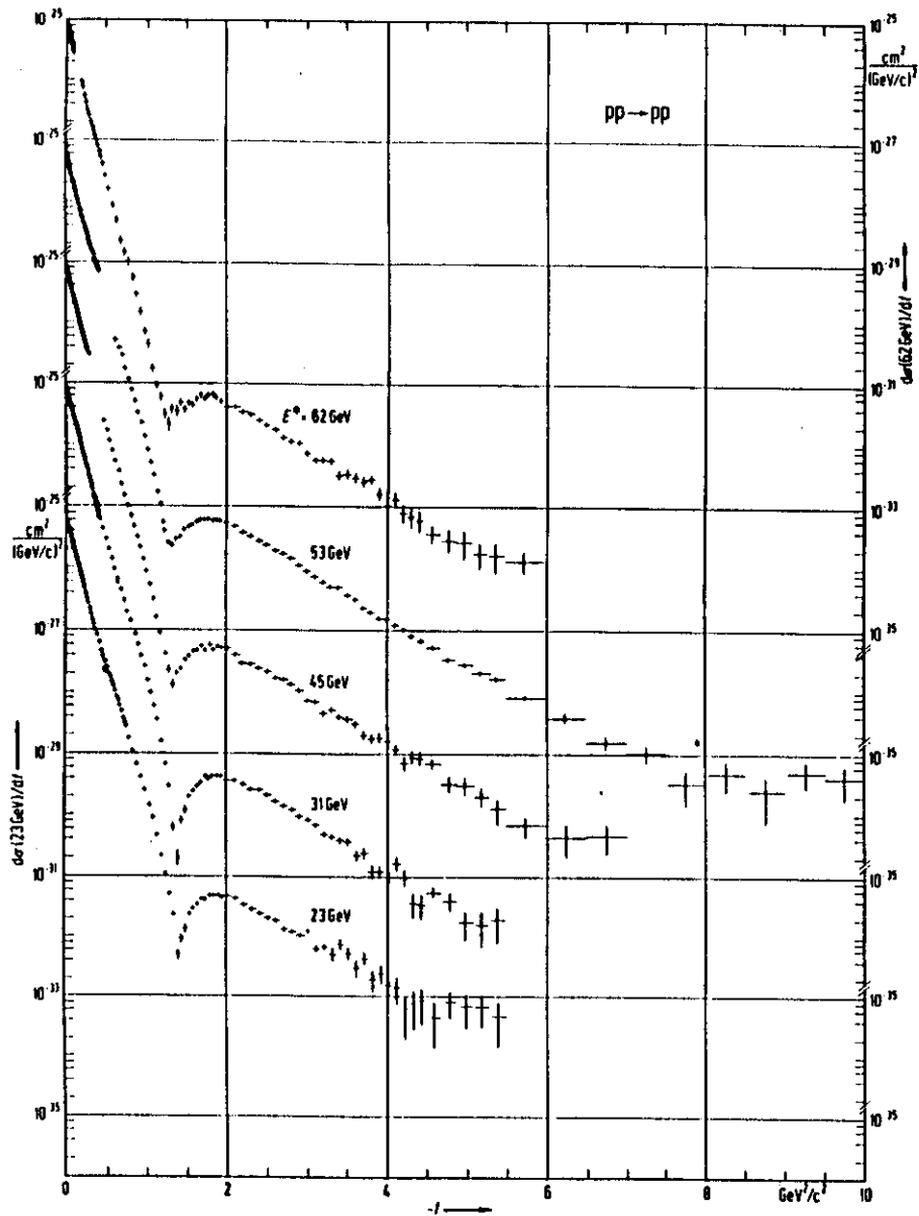


Figura 2.6 Seção de choque diferencial de espalhamento elástico pp. Os valores de energia indicados são arredondamentos dos valores citados no texto [28].

\sqrt{s} (GeV)	σ_t (mb)	σ_{el} (mb)	σ_{inel} (mb)	ρ
23,5	$38,94 \pm 0,17$	$6,73 \pm 0,08$	$32,21 \pm 0,14$	$0,02 \pm 0,05$
30,7	$40,14 \pm 0,17$	$7,16 \pm 0,09$	$32,98 \pm 0,14$	$0,042 \pm 0,011$
44,7	$41,79 \pm 0,16$	$7,17 \pm 0,09$	$34,62 \pm 0,14$	$0,062 \pm 0,011$
52,8	$42,67 \pm 0,19$	$7,45 \pm 0,09$	$35,22 \pm 0,16$	$0,078 \pm 0,010$
62,5	$43,32 \pm 0,23$	$7,66 \pm 0,11$	$35,66 \pm 0,21$	$0,095 \pm 0,011$

Tabela 2.2 Valores de σ_t , σ_{el} , σ_{inel} e ρ [27].

\sqrt{s} (GeV)	23,5	30,7	44,7	52,8	62,5
número de dados	134	173	208	206	125

Tabela 2.3 Número de dados experimentais utilizados de $d\sigma/dt$ em cada uma das energias citadas no texto.

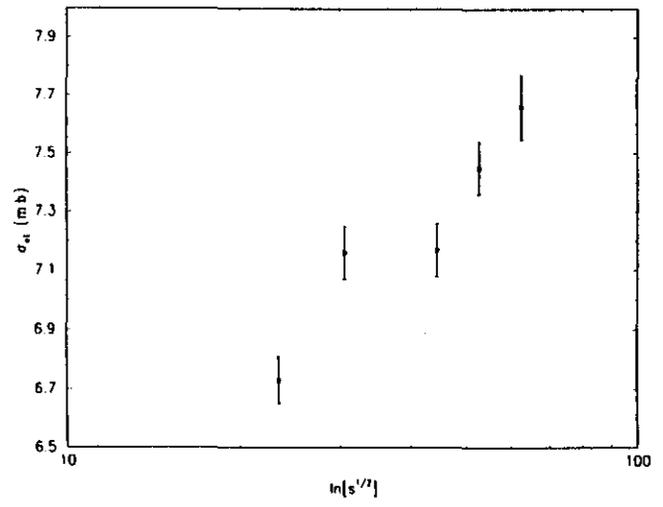
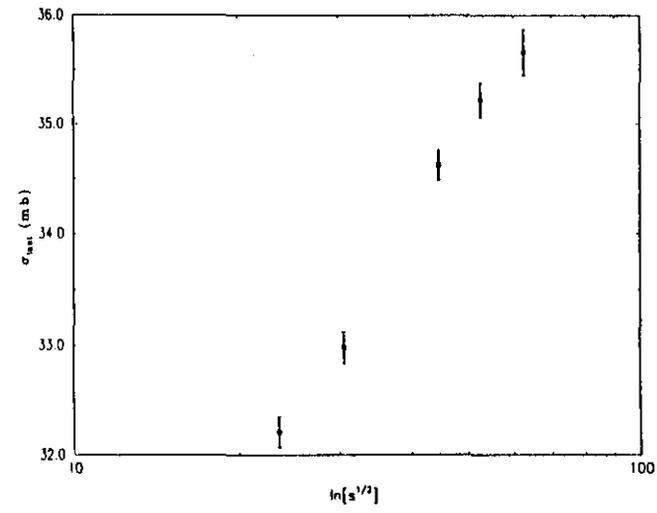
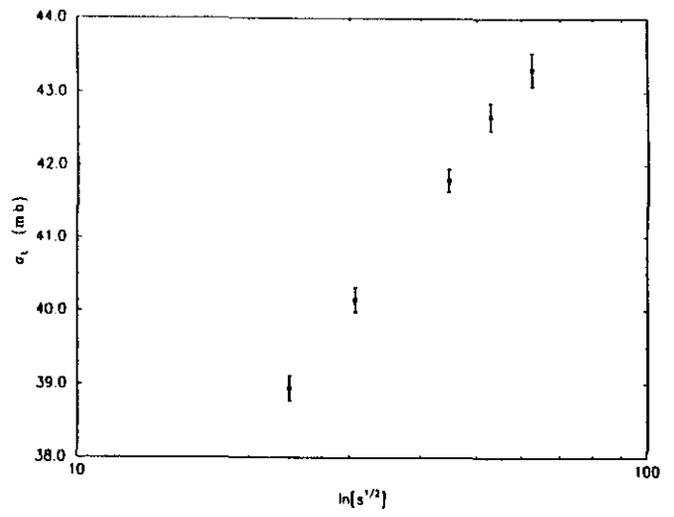
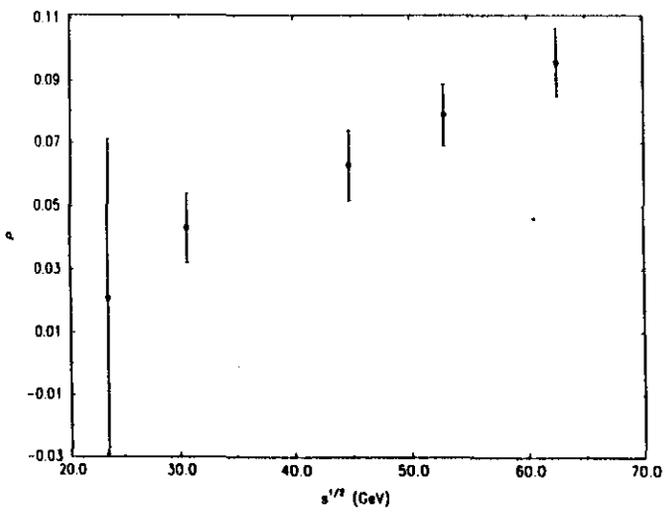


Figura 2.7 Dados de σ_t , σ_{el} , σ_{inel} e ρ utilizados neste trabalho (vide tabela 2.2),

Capítulo 3. FORMALISMO TEÓRICO

3.1 INTRODUÇÃO

Como comentado no capítulo 1, na falta de uma Teoria de Campos que trate do espalhamento elástico de hádrons na região de pequeno momento transferido, uma maneira de se abordar o problema é através de modelos fenomenológicos. Neste trabalho fazemos uso de formalismos ópticos (canal-s), considerando o limite de altas energias.

A abordagem teórica de nosso estudo é baseada em três tópicos essenciais:

- *Formalismo de Parâmetro de Impacto*

Através desse formalismo determina-se a transformada de Fourier da amplitude de espalhamento hadrônico (em termos do momento transferido) no espaço de parâmetro de impacto, a chamada Função de Perfil. Embora a dedução aqui apresentada seja feita sob a hipótese de altas energias e pequeno ângulo de espalhamento, pode-se mostrar que o formalismo é válido para qualquer valor da energia e do ângulo. Essa demonstração, baseada nas transformadas de Watson-Sommerfeld, foi feita pela primeira vez por M. M. Islam e pode ser encontrada na referência [30].

- *Aproximação Eiconal*

Construída em analogia à Teoria da Difração de Fraunhofer, uma condição básica é que a distância do ponto de observação ao centro espalhador seja muito maior que as dimensões do centro. Na dedução utilizaremos que a energia cinética da partícula incidente é muito maior que a intensidade do potencial e que o comprimento de onda associado a esta partícula é muito menor que as dimensões do centro espalhador (condição da óptica geométrica). Como resultado, obteremos uma relação entre a função de perfil e a função eiconal (imagem) no espaço de parâmetro de impacto.

- *Modelo da Difração Múltipla (de Glauber)*

Em termos de ondas parciais, a função eiconal é simplesmente a defasagem (“phase shift”) no limite de altas energias e pequenos ângulos. A hipótese central no modelo de Glauber é que a defasagem resultante no espalhamento de dois sistemas compostos é igual à soma algébrica das defasagens associadas aos espalhamentos entre constituintes. Em primeira ordem esse modelo fornece uma expressão da eiconal em termos do produto dos fatores de forma dos sistemas compostos pela amplitude de espalhamento média entre constituintes.

Desse modo, no caso de espalhamento próton-próton, os três tópicos acima fornecem uma relação entre a amplitude de espalhamento hadrônica e o produto dos fatores de forma hadrônicos pela amplitude de espalhamento média entre constituintes (espalhamento párton-pártion). Essa relação constitui a estrutura básica dos modelos de difração múltipla. Na literatura algumas vezes aparece a denominação de Modelos Geométricos pelo fato de fornecerem expressões em termos do parâmetro de impacto. Denominamos essa abordagem geral de *Formalismo da Difração Múltipla* (FDM).

Neste capítulo, a partir da equação de Schroedinger para o espalhamento, deduzimos a aproximação eiconal através de soluções em ondas parciais bem como através da equação integral de

espalhamento. O aspecto relativístico é levado em conta algebricamente tomando-se o limite de altas energias. A seguir apresentamos uma dedução detalhada do modelo da Difração Múltipla, desde espalhamento de sistemas pontuais até espalhamento entre sistemas compostos. Obtida a conexão referida no parágrafo anterior entre amplitude hadrônica e amplitude párton-pártion apresentamos uma revisão dos principais modelos geométricos utilizados atualmente na descrição do espalhamento de hádrons a altas energias. Um desses modelos, descrito em detalhes, será o assunto do capítulo 4 onde são apresentados os estudos de reformulações, que constituem o tópico central deste trabalho.

3.2 TÓPICOS DA TEORIA QUÂNTICA DO ESPALHAMENTO

O problema do espalhamento não relativístico é tratado pela equação de Schroedinger

$$[H_0 + V(\mathbf{r})]\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}), \quad (3.1)$$

onde $\Psi(\mathbf{r})$ é a solução estacionária do problema de espalhamento, m é a massa reduzida e

$$H_0 = -\frac{\nabla^2}{2m}, \quad E = \frac{k^2}{2m}.$$

A função de onda na região anterior ao potencial é uma onda plana mas após atingir o potencial haverá uma onda plana e uma onda esférica. Supondo que $V(\mathbf{r})$ em (3.1) decai mais rapidamente que $(1/r)$ quando r é muito grande, a solução da equação (3.1) é assintoticamente

$$\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \rightarrow A[\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \mathcal{F}(\theta, \phi) \frac{\exp(ikr)}{r}], \quad (r \rightarrow \infty), \quad (3.2)$$

onde A é uma constante de normalização e $\mathcal{F}(\theta, \phi)$ a amplitude de espalhamento. Geometricamente essa condição é representada na figura 3.1.

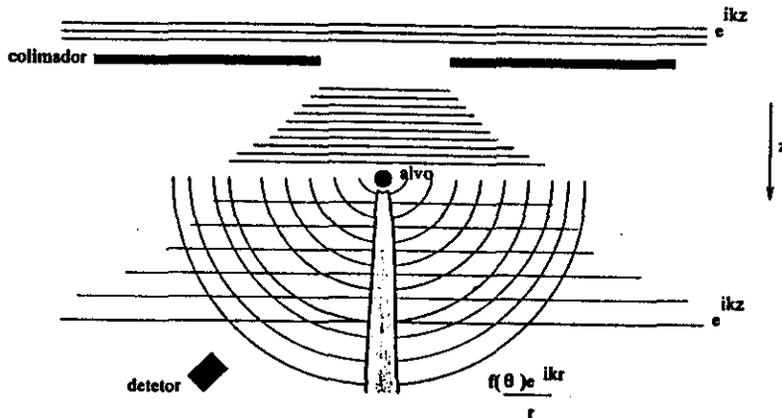


Figura 3.1 Ilustração da condição assintótica de espalhamento.

A função de onda estacionária na região distante do centro espalhador é uma soma da função de onda da partícula livre e uma função de onda esférica que decai com a distância. Como a função de onda fornece a probabilidade de encontrar a partícula no elemento de volume dr em torno da posição \mathbf{r} , a função de onda da partícula livre dá a probabilidade de encontrar o projétil na mesma

direção em que chegou ao centro espalhador (dentro de um ângulo sólido $d\Omega$) e a função de onda esférica fornece a probabilidade de encontrar a partícula espalhada em uma direção diferente. Devido à interferência das duas funções a probabilidade na direção de incidência é menor do que antes da colisão.

O problema do espalhamento pode ser tratado mais realisticamente com pacotes de onda [24] mas o significado físico do método aqui utilizado é suficiente e o método matemático mais simples. A amplitude de espalhamento $\mathcal{F}(\theta, \phi)$ é fornecida pela teoria e está relacionada com a seção de choque diferencial (apêndice 2) por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |\mathcal{F}(\Omega)|^2,$$

onde $\Omega = \Omega(\theta, \phi)$. A dependência angular do espalhamento está em $\mathcal{F}(\Omega)$ e como essa dependência está relacionada com o potencial, $\mathcal{F}(\Omega)$ deve ter relação com $V(\mathbf{r})$ a qual encontraremos na próxima seção.

Outra relação importante envolvendo a amplitude de espalhamento é o chamado teorema óptico. Como mostrado no apêndice 3 a seção de choque total pode ser expressa em termos da amplitude de espalhamento na direção frontal ($\theta = 0$) por:

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k} \text{Im}\{\mathcal{F}(\theta = 0)\}.$$

Nas duas seções seguintes discutiremos dois tipos de soluções da equação de Schroedinger, através das funções de Green (seção 3.2.1) e através das ondas parciais (seção 3.2.2). Esses formalismos serão utilizados na seção 3.3 no tratamento da aproximação eiconal.

3.2.1 Equação integral de espalhamento

Conforme mostrado em detalhe no apêndice 4, uma solução da equação de Schroedinger (3.1) com a condição assintótica exigida (3.2) é obtida através da função de Green correspondente $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ para a equação integral

$$\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \int d^3r' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}'), \quad (3.3)$$

onde g satisfaz

$$(\nabla^2 + k^2)g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 2m\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

e é dada por

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{m}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \{a \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) + b \exp(-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\}. \quad (3.4)$$

Para a condição requerida (3.2), fazemos $a = 1$, $b = 0$. Como o interesse está na região assintótica, podemos aproximar

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq r - \frac{1}{r} \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}, \quad (|\mathbf{r}| \rightarrow \infty)$$

e substituindo (3.4) em (3.3)

$$\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \sim \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \frac{m}{2\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \int d^3r' \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}'), \quad (3.5)$$

onde $\mathbf{k}' = k(\mathbf{r}/r)$ quando $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$. Comparando (3.5) com (3.2)

$$\mathcal{F}(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi} \int d^3r' \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}'). \quad (3.6)$$

Como havíamos mencionado anteriormente $\mathcal{F}(\theta, \phi)$ está relacionada claramente com $V(\mathbf{r})$, mas observamos que a amplitude de espalhamento depende também da função de onda dentro da região onde $V(\mathbf{r}) \neq 0$. Esse é o motivo porque há tanto interesse em estudar colisões; é possível obter informações sobre as interações nucleares e sobre os estados quânticos da matéria tentando construir modelos que reproduzam os dados experimentais de espalhamento.

3.2.2 Ondas parciais

Nesta seção voltamos ao problema de resolver a equação diferencial (3.1) agora pelo método de ondas parciais. A importância desse método aqui é sua analogia com o método que queremos estudar. Na seção 3.3.2 veremos como passar da expansão em série para uma integral no limite de altas energias. Um estudo mais detalhado de ondas parciais pode ser encontrado em [24].

Em muitos casos $\mathcal{F}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \mathcal{F}(\theta)$, então estudaremos a expansão de $\mathcal{F}(\theta)$ em polinômios de Legendre [24].

$$\mathcal{F}(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \mathcal{F}_l(k) P_l(\cos\theta). \quad (3.7)$$

A seção de choque elástica integrada é

$$\sigma_{el} = \int d\Omega |\mathcal{F}(\theta)|^2 = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |\mathcal{F}_l(k)|^2, \quad (3.8)$$

onde usamos

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

e

$$P_l^*(x) = P_l(x).$$

Quando o potencial é complexo há espalhamento inelástico e a parte real trata do espalhamento elástico. Para a seção de choque total temos

$$\sigma_t = \sigma_{el} + \sigma_{inel}.$$

O teorema óptico (apêndice 3) assegura que

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k} \text{Im} \{ \mathcal{F}(\theta = 0) \} = \frac{4\pi}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \text{Im} \{ \mathcal{F}_l(k) \}, \quad (3.9)$$

onde usamos $P_l(1) = 1$. Da relação $\sigma_t \geq \sigma_{el}$ que é válida para cada onda parcial e usando (3.8) e (3.9)

$$\frac{\text{Im} \{ \mathcal{F}_l(k) \}}{k} \geq |\mathcal{F}_l(k)|^2.$$

Esta condição é satisfeita por [24]

$$\mathcal{F}_l(k) = \frac{1}{2ik} (\exp(2i\delta_l(k)) - 1), \quad (3.10)$$

onde $\delta_l(k)$ é a fase complexa que depende do momento angular orbital l e do momento k . Se $\delta_l(k)$ é real a condição satisfeita é a igualdade, isto é, somente espalhamento puramente elástico ocorre. Para verificar isso seja $\sigma_x = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_x^l$. Substituindo (3.10) em (3.9) e (3.8)

$$\sigma_t^l = \frac{2\pi}{k^2} (2l+1) [1 - \text{Re}(\exp(2i\delta_l))], \quad (3.11)$$

$$\sigma_{el}^l = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) |\exp(2i\delta_l) - 1|^2. \quad (3.12)$$

Usando (3.12) e (3.11) em $\sigma_{inel}^l = \sigma_t^l - \sigma_{el}^l$

$$\sigma_{inel}^l = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) [1 - |\exp(2i\delta_l)|^2]. \quad (3.13)$$

Para $\delta_l(k)$ real $|\exp(2i\delta_l)| = 1$. Substituindo isto em (3.13)

$$\sigma_{inel}^l = 0, \quad \sigma_{el}^l = \sigma_t^l.$$

A máxima absorção ocorre para $\text{Im} \{ \delta_l \} \rightarrow \infty$ pois $\exp(2i\delta_l) \rightarrow 0$ e obtemos

$$\sigma_t^l = \frac{2\pi}{k^2} (2l+1), \quad \sigma_t^l = 2\sigma_{el}^l = 2\sigma_{inel}^l.$$

Quando a absorção é máxima as seções de choque para os espalhamentos elástico e inelástico igualam-se.

Um formalismo muito comum em espalhamento trata da matriz S e operador T mas para ondas parciais eles reduzem-se a números complexos dados por

$$S_l = \exp(2i\delta_l)$$

e

$$T_l = \frac{S_l - 1}{2i},$$

então (3.10) pode ser reescrita como

$$\mathcal{F}_l(k) = \frac{1}{2ik}(S_l - 1)$$

ou

$$\mathcal{F}_l(k) = \frac{T_l}{k}.$$

Mas a relação entre S_l e T_l pode ser diferente pois depende da convenção utilizada.

3.3 ESPALHAMENTO A ALTAS ENERGIAS E A APROXIMAÇÃO EICONAL

Até aqui discutimos as soluções para espalhamento da equação de Schroedinger não relativística. Discutiremos agora soluções obtidas através do limite de altas energias, método este conhecido como Aproximação Eiconal. Esta seção é o ponto de partida para a teoria difrativa usada por Glauber [11,12,13,31] por isso vamos apresentar o desenvolvimento da aproximação eiconal em dois caminhos diferentes, um relacionado com a seção 3.2.1 (Equação integral de espalhamento) e que pode ser encontrado em [32] e o outro relacionado com a seção 3.2.2 (Ondas parciais) e referência [33].

3.3.1 Abordagem através da equação integral (potencial)

Da equação (3.1) obtemos

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = 2mV(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}). \quad (3.14)$$

As condições impostas em altas energias são $E \gg V$ e $ka \gg 1$ onde a é o alcance do potencial e \mathbf{k} é o vetor de onda da partícula incidente. Assumimos que a onda incidente $\Psi_{inc}(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ dentro da região do potencial não é mais uma onda plana mas é escrita na forma

$$\Psi_{inc}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}). \quad (3.15)$$

Fazendo uso de $\nabla^2(\psi\phi) = \psi \nabla^2(\phi) + 2\nabla(\psi) \cdot \nabla(\phi) + \phi \nabla^2(\psi)$ e escolhendo a direção do eixo z tal que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kz$ substituímos (3.15) em (3.14) e temos

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) + 2ik\frac{d\varphi(\mathbf{r})}{dz} = 2mV(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}). \quad (3.16)$$

Exigimos que $\varphi(\mathbf{r})$ seja uma função bem comportada na região do potencial, isto é, $\varphi(\mathbf{r})$ não deve variar bruscamente naquela região e assintoticamente deve tender a 1 quando $z \rightarrow -\infty$, onde o eixo z foi fixado paralelo a \mathbf{k} . Nessas condições aproximamos (3.16) considerando

$$|\nabla^2\varphi(\mathbf{r})| \ll \left|2ik\frac{d\varphi(\mathbf{r})}{dz}\right|.$$

Assim

$$2ik\frac{d\varphi(\mathbf{r})}{dz} = 2mV(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})$$

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -i \frac{mV(\mathbf{r})}{k} dz, \quad (3.17)$$

com o limite $\varphi = 1$ para $z \rightarrow -\infty$. Integrando (3.17) temos

$$\ln\varphi = - \int_{-\infty}^z \frac{im}{k} V(x, y, z') dz',$$

então

$$\varphi(\mathbf{r}) = \exp\left(-\frac{i}{v} \int_{-\infty}^z V(x, y, z') dz'\right), \quad (3.18)$$

onde $(k/m) = v$ foi utilizado. A equação (3.15) pode ser escrita como

$$\Psi_{inc}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \exp(ikz - \frac{i}{v} \int_{-\infty}^z V(x, y, z') dz'). \quad (3.19)$$

Lembramos que (3.19) só é válida na região de potencial não nulo. Substituindo (3.19) em (3.5) e (3.6) no lugar de $\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}')$ chegamos em

$$\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \frac{m}{2\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \int d^3\mathbf{r}' \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \exp\left(-\frac{i}{v} \int_{-\infty}^{z'} V(x', y', z'') dz''\right)$$

e

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{m}{2\pi} \int d^3\mathbf{r}' \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \exp\left(-\frac{i}{v} \int_{-\infty}^{z'} V(x', y', z'') dz''\right). \quad (3.20)$$

Uma limitação sobre o ângulo de espalhamento θ é feita em espalhamento elástico. Consideramos que θ é pequeno em espalhamento elástico a altas energias de forma que $(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ é considerado perpendicular a \mathbf{z} (veja figura 3.2), então

$$|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|, \quad (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{z} = kz(1 - \cos\theta).$$

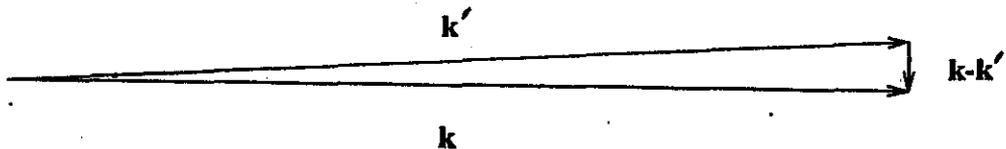


Figura 3.2 Espalhamento a pequeno ângulo.

Para ângulos pequenos $\cos\theta \approx (1 - (\theta^2/2))$ e $kz(1 - \cos\theta) \approx kz\theta^2/2$. Para aproximar a exponencial

$$\exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{z}')$$

pela unidade o erro em primeira ordem é da ordem de $(\theta^2 kd)$ onde d é a distância dentro da qual $V\varphi$ varia apreciavelmente. Considerando $\theta^2 kd \ll 1$ obtemos uma forma aproximada para (3.20)

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{m}{2\pi} \int d^3r' \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}) V(\mathbf{r}') \exp(-\frac{i}{v} \int_{-\infty}^{z'} V(x', y', z'') dz''),$$

onde $\mathbf{r}' = \mathbf{b} + \mathbf{z}'$. A figura 3.3 mostra alguns vetores que usamos.

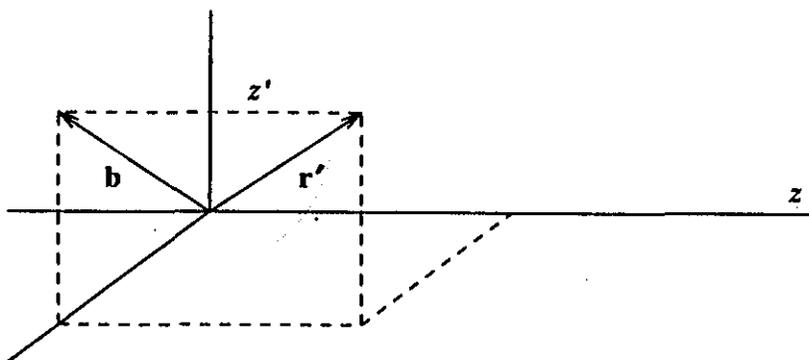


Figura 3.3 Relação entre coordenadas.

A amplitude de espalhamento $\mathcal{F}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ pode ser simplificada lembrando que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dz' V(\mathbf{b} + \mathbf{z}') \exp(-\frac{i}{v} \int_{-\infty}^{z'} V(x', y', z'') dz'') = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{d}{dz'} (\exp(-\frac{i}{v} \int_{-\infty}^{z'} V(x', y', z'') dz'')) (-\frac{v}{i}) = iv \{ \exp(-\frac{i}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\mathbf{b} + \mathbf{z}') dz') - 1 \}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Então

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{mvi}{2\pi} \int d^2b \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}) (\exp(-\frac{i}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\mathbf{b} + \mathbf{z}') dz') - 1).$$

Definindo a *Função Eiconal* através de

$$\chi(\mathbf{b}) \equiv -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\mathbf{b} + \mathbf{z}') dz'$$

colocamos $\mathcal{F}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ na forma

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{k}{2i\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} d^2b \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}) (\exp(i\chi(\mathbf{b})) - 1), \quad (3.22)$$

onde $d^2b = bdbd\phi$.

Este é o resultado essencial da *aproximação eiconal*: a amplitude de espalhamento é dada pela transformada de Fourier de $1 - \exp(i\chi(\mathbf{b}))$. Assim, em princípio pode-se determinar \mathcal{F} e $d\sigma/dt$ tendo um modelo para χ .

Quando o potencial não depende de ϕ , ou seja, tem simetria azimutal posicionamos o eixo x na direção e sentido do vetor $(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$. Então

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b} = 2kbsen\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\phi)$$

onde $|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| = 2ksen(\theta/2)$ e $\phi = \angle(\mathbf{b}, \mathbf{x})$. Utilizando

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\lambda\cos\phi)d\phi = J_0(\lambda),$$

simplicamos (3.22) pois $\chi(\mathbf{b}) = \chi(b)$ e obtemos

$$\mathcal{F}(\theta) = \frac{k}{i} \int_0^{+\infty} bdb(\exp(i\chi(b)) - 1)J_0(2kbsen\left(\frac{\theta}{2}\right)). \quad (3.23)$$

No apêndice 5 analisamos a validade da aproximação $\theta^2 kd \ll 1$.

3.3.2 Abordagem através das ondas parciais (deslocamento de fase)

O outro método de fazer a aproximação eiconal é através do limite de l muito grande na expansão de $\mathcal{F}(\theta)$ em ondas parciais (3.7). Em altas energias $ka \gg 1$ implica $\lambda \ll a$. Então muitas ondas parciais são necessárias em (3.7) e podemos considerar l como uma variável contínua. Através de um argumento semi-clássico igualamos o momento angular clássico (bp) ao momento angular quântico (l) (nas unidades $\hbar = 1$, $c = 1$) e conseguimos a relação $l = bk$. Com isso vemos que o maior valor de l que contribui para a expansão (3.7) é $l_m = ka$ e de $ka \gg 1$ vemos que $l_m \gg 1$. Fazemos a correspondência

$$\delta_l \rightarrow \chi(b)/2$$

e como θ é pequeno podemos aproximar

$$P_l(\cos\theta) \sim J_0(2l\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)).$$

Transformamos a soma $\sum_{l=0}^{l_m}$ em uma integral $\int dl = \int kdb$ e $(2l + 1) \sim 2l$. Com isso (3.7) fica

$$\mathcal{F}(\theta) = \int kdb 2kb \frac{1}{2ik} (\exp(i\chi(b)) - 1) J_0(2kbsen\left(\frac{\theta}{2}\right))$$

e por fim

$$\mathcal{F}(\theta) = \frac{k}{i} \int_0^{+\infty} bdb(\exp(i\chi(b)) - 1) J_0(2kbsen\left(\frac{\theta}{2}\right)),$$

que é o mesmo resultado de (3.23).

Vamos definir a *amplitude de espalhamento normalizada* F (invariante sob transformação de Lorentz [5]) como

$$F \equiv \frac{\mathcal{F}}{k}, \quad (3.24)$$

a qual será muito utilizada mais para frente.

Algumas observações devem ser feitas sobre essa aproximação: A primeira é que a aproximação de altas energias feita aqui está no limite semi-clássico ($\lambda \ll a$) e isso permite obter $l = kb$; em seguida observamos que estendemos o limite superior da integral para $+\infty$ porque $l_m \gg 1$. Para entender melhor porque existe l_m vamos voltar a falar do operador T e o resultado da seção (3.2.2):

$$\mathcal{F}_l(k) = \frac{T_l}{k}.$$

O operador T está relacionado ao operador $V(\mathbf{r})$ através da relação

$$V\Psi(\mathbf{r}) = T\phi(\mathbf{r})$$

onde $\phi(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$. No método de ondas parciais a expressão para T_l é

$$T_l(E) = \langle Elm|T|Elm \rangle$$

e podemos observar que se $l > ka$ então o potencial $V(\mathbf{r})$ será nulo por estarmos fora da região do potencial e conseqüentemente T_l também será zero e através de $\mathcal{F}_l(k) = T_l/k$ todos os termos com $l > ka$ na série (3.7) serão anulados.

3.3.3 Exemplos

Como ilustração, apresentamos nesta seção dois exemplos de aplicação da aproximação eiconal a partir de formas dadas para o potencial [11].

3.3.3.1 Esfera negra

O primeiro exemplo ilustrativo da equação (3.23) é a esfera negra com o potencial $V = -iV_0$ onde

$$\begin{aligned} V_0 &= +\infty, & r &\leq \sqrt{a^2 + z_0^2} \\ &= 0, & r &> \sqrt{a^2 + z_0^2}. \end{aligned}$$

A função eiconal é dada pela integral

$$\chi(\mathbf{b}) = -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} V dz' = \frac{i}{v} \int_{-z_0}^{+z_0} V_0 dz'.$$

Escrevendo $\chi(\mathbf{b}) = i\Omega(\mathbf{b})$, com Ω real, obtemos

$$\begin{aligned}\Omega(\mathbf{b}) &= (+\infty), & (b < a) \\ &= 0, & (b > a)\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\exp(i\chi(b)) &= \exp(-\Omega(b)) = 0, & (b < a) \\ &= 1, & (b > a).\end{aligned}\tag{3.25}$$

Usando (3.25) em (3.23) chegamos a

$$\mathcal{F}(\theta) = -\frac{k}{i} \int_0^a b db J_0(2kbsen(\frac{\theta}{2})),$$

e através de $\int_0^x z^{n+1} J_n(z) dz = x^{n+1} J_{n+1}(x)$ a

$$\mathcal{F}(\theta) = ia \frac{J_1(2kasen(\frac{\theta}{2}))}{2sen(\frac{\theta}{2})},$$

logo

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = |\mathcal{F}(\theta)|^2 = \frac{a^2 J_1^2(2kasen(\frac{\theta}{2}))}{4sen^2(\frac{\theta}{2})}.$$

A figura 3.4 mostra $|\mathcal{F}(\theta)|^2$ em função de θ . Repare que o gráfico apresenta a forma de um padrão de difração.

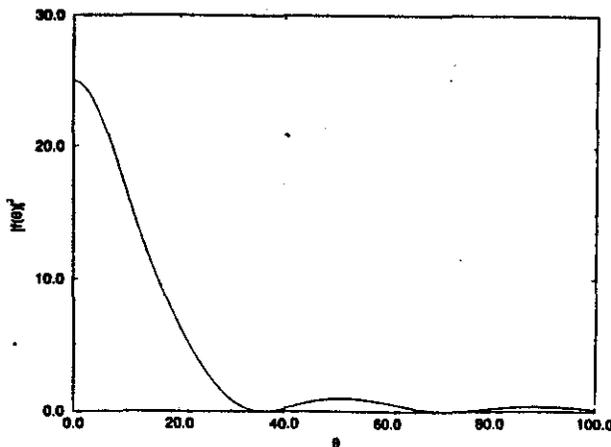


Figura 3.4 Seção de choque diferencial para esfera negra.

Aplicando o teorema óptico em (3.22)

$$\sigma_t = 2Im \left\{ -i \int d^2b (\exp(i\chi(\mathbf{b})) - 1) \right\} = 2 \int d^2b (1 - Re \{ \exp(i\chi(\mathbf{b})) \}),$$

e usando (3.25) para a integral obtemos

$$\sigma_t = 2\pi a^2.\tag{3.26}$$

Usando (3.8) e (3.22)

$$\sigma_{el} = \frac{k^2}{4\pi^2} \int d^2b (\exp(i\chi(\mathbf{b})) - 1) \int d^2b' (\exp(i\chi(\mathbf{b}')) - 1)^* \int d\Omega_{\mathbf{k}'} \exp(-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{b}' - \mathbf{b})).$$

O ângulo de espalhamento é considerado pequeno portanto a principal contribuição para a integral vem da região próxima a $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ e por isso trocamos a integral no ângulo sólido por uma integral no plano tangente ao ponto onde $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$. Então

$$d\Omega_{\mathbf{k}'} \approx \frac{d^2k'}{k^2}.$$

Fazendo essa substituição na expressão para σ_{el} e considerando que

$$\int d^2k' \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}')) = (2\pi)^2 \delta^2(\mathbf{b} - \mathbf{b}'),$$

chegamos a

$$\sigma_{el} = \int d^2b |\exp(i\chi(\mathbf{b})) - 1|^2. \quad (3.27)$$

Portanto

$$\sigma_{inel} = \sigma_t - \sigma_{el} = \int d^2b (1 - |\exp(i\chi(\mathbf{b}))|^2). \quad (3.28)$$

Resolvendo (3.27) e (3.28) para (3.25)

$$\sigma_{el} = \sigma_{inel} = \pi a^2. \quad (3.29)$$

Nos resultados (3.26) e (3.29) confirma-se o resultado da seção (3.2.2) (Ondas parciais) para máxima absorção. Veja que a seção de choque total é o dobro da seção de choque esperada classicamente, esse é o efeito não clássico devido à difração da onda mostrada na figura 3.4. Esta característica não é exclusividade do potencial esférico ou cilíndrico, basta que o alcance do potencial seja muito maior que o comprimento de onda ($a \gg \lambda$).

3.3.3.2 Poço de potencial

O exemplo anterior apresenta os cálculos mais simples; um outro exemplo que apresentamos abaixo já traz cálculos mais complexos embora o potencial seja simples: é o poço de potencial de raio a :

$$V(r) = V_0, \quad r < a \\ = 0, \quad r > a$$

A função eiconal é

$$\chi(\mathbf{b}) = -\frac{1}{v} \int_{-\sqrt{a^2-b^2}}^{+\sqrt{a^2-b^2}} V_0 dz',$$

resolvendo-a obtemos

$$\begin{aligned}\chi(\mathbf{b}) &= -\frac{2V_0}{v} \sqrt{a^2 - b^2}, \quad b < a \\ &= 0, \quad b > a.\end{aligned}$$

A integração no parâmetro de impacto b não é elementar e não a faremos aqui. Vamos aplicar o teorema óptico para encontrar a seção de choque total e adotamos o parâmetro α definido por $\alpha = (V_0 a/v)$

$$\sigma_t = 4\pi \int_0^a b db (1 - \cos(\frac{2V_0}{v} \sqrt{a^2 - b^2})).$$

Fazendo uma mudança de variável ($u = (2V_0/v)\sqrt{a^2 - b^2}$) e integração por partes

$$\frac{\sigma_t}{\pi a^2} = 2 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2\text{sen}(2\alpha)}{\alpha} - \frac{\cos(2\alpha)}{\alpha^2}. \quad (3.30)$$

O limite para (3.30) é

$$\frac{\sigma_t}{\pi a^2} = 2 \quad \text{para} \quad \alpha \rightarrow +\infty.$$

O limite tem dois tipos de causa; se o potencial é de longo alcance então o projétil penetra na esfera e sofre uma grande deflexão (relativamente falando, já que o ângulo é pequeno). Se, por outro lado, o potencial tende a infinito caímos no caso da esfera negra. Na figura 3.5 há um gráfico de (3.30).

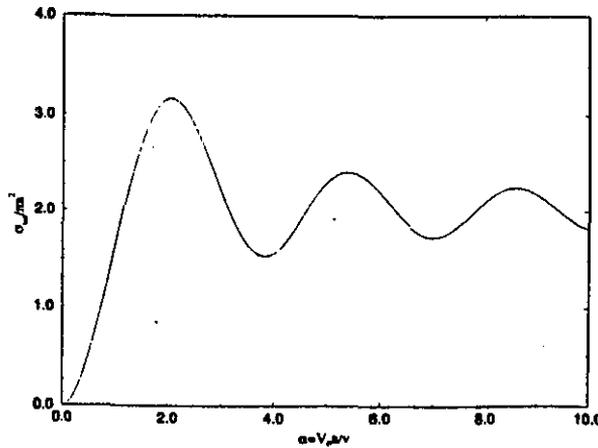


Figura 3.5 Razão entre seção de choque total e área geométrica.

Como comentado, através de modelos para a função eiconal podemos, utilizando (3.22), determinar a amplitude de espalhamento e daí os observáveis físicos (apêndice 2 e capítulo 2). A seguir introduzimos um dos formalismos que fazem uso da aproximação eiconal e que constituirá nossa abordagem do espalhamento pp.

3.4 FORMALISMO DA DIFRAÇÃO MÚLTIPLA

O estudo feito até aqui só considera uma partícula sendo espalhada por um potencial fixo. O objetivo original do formalismo da difração múltipla (FDM) foi o estudo do espalhamento de uma partícula por várias partículas ligadas, por exemplo, o espalhamento de um próton (considerado como partícula) pelos diversos prótons e nêutrons em estados ligados, constituindo um núcleo; mais tarde o FDM foi generalizado para ser utilizado no espalhamento entre dois sistemas compostos [34,35], que será nosso objetivo ao abordarmos o espalhamento próton-próton, considerando-os como um sistema de pártons.

Para generalizar o formalismo desenvolvido, discutiremos inicialmente o espalhamento de um projétil por uma partícula ligada por um potencial (seção 3.4.1), a seguir o espalhamento de uma partícula por um sistema composto (seção 3.4.2) e por fim o espalhamento entre dois sistemas compostos (seção 3.4.3). A nomenclatura um pouco diferente da referência [11] visa uma abordagem unificada dos 3 tipos de problemas de espalhamento.

3.4.1 Espalhamento por uma partícula ligada

Como primeiro passo consideremos o alvo constituído de uma partícula ligada, com coordenada \mathbf{r}_1 e no autoestado $u_i(\mathbf{r}_1)$, sua hamiltoniana é $H(\mathbf{r}_1)$ e autoenergia ε_i . O potencial de interação entre esta partícula-alvo e o projétil é $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ onde \mathbf{r} é a coordenada do projétil. Continuamos a considerar apenas o caso estacionário. Nossa função incidente será

$$\Psi_{\mathbf{k},inc}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})u_i(\mathbf{r}_1), \quad (3.31)$$

e a equação (3.18) torna-se

$$\varphi(\mathbf{r}) = \exp\left(-\frac{i}{v} \int_{-\infty}^z V(\mathbf{b} + \mathbf{z}' - \mathbf{r}_1) dz'\right). \quad (3.32)$$

Para a amplitude de espalhamento temos

$$\mathcal{F}_{fi}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{m}{2\pi} \int \exp(-\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}') u_f^*(\mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1) \Psi_{\mathbf{k},inc}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) d^3 r' d^3 r_1.$$

Substituindo (3.31) e (3.32) nesta expressão, lembrando a aproximação $(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} \approx (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}$ e usando (3.21) chegamos a

$$\mathcal{F}_{fi} = \frac{k}{2i\pi} \int \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}) u_f^*(\mathbf{r}_1) [\exp(i\chi(\mathbf{b} - \mathbf{s})) - 1] u_i(\mathbf{r}_1) d^2 b d^3 r_1. \quad (3.33)$$

onde $\mathbf{s} = \mathbf{r}_1 - \hat{\mathbf{z}}(\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{r}_1)$ é a parte de \mathbf{r}_1 perpendicular ao eixo- z e onde também usamos a definição da eiconal da seção 3.3.1

$$\chi(\mathbf{b} - \mathbf{s}) = -(i/v) \int_{-\infty}^{+\infty} V(\mathbf{b} - \mathbf{s} + \mathbf{z}') dz'.$$

Esta notação salienta que a função eiconal não depende da coordenada longitudinal de $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ porque foi feita uma integração sobre a variável z' . Esta integração representa fisicamente que

Esta é a característica básica que identifica o FDM: *o deslocamento de fase resultante é a soma dos deslocamentos elementares*. Também há modificação no elemento de volume:

$$d^3 r_1 \rightarrow \prod_{j=1}^N d^3 r_j.$$

A amplitude (3.33) torna-se

$$\mathcal{F}_{fi} = \frac{k}{2i\pi} \int \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}) d^2 b \cdot \int u_f^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \left\{ \exp\left(i \sum_{j=1}^N \chi_j(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j)\right) - 1 \right\} u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \prod_{j=1}^N d^3 r_j.$$

Uma outra hipótese do FDM é a consideração de um potencial óptico no caso de espalhamento elástico ($|f\rangle = |i\rangle$):

$$\mathcal{F}_{ii} = \frac{k}{2i\pi} \int \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}) d^2 b \int |u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 \left\{ \exp\left(i \sum_{j=1}^N \chi_j(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j)\right) - 1 \right\} \prod_{j=1}^N d^3 r_j. \quad (3.34)$$

A idéia se baseia na consideração de que, no caso elástico o núcleo tendo uma participação passiva na colisão, o efeito da colisão possa ser representado por um potencial médio (óptico) análogo ao caso de espalhamento por um único corpo:

$$\mathcal{F}_{opt}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{k}{2i\pi} \int \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}) \{ \exp(i\chi_{opt}) - 1 \} d^2 b. \quad (3.35)$$

Com essa hipótese, igualando-se (3.34) e (3.35) obtemos por analogia

$$\exp(i\chi_{opt}) - 1 = \int |u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 [\exp(i \sum_{j=1}^N \chi_j(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j)) - 1] \prod_{j=1}^N d^3 r_j,$$

e usando $\int |u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 \prod_{j=1}^N d^3 r_j = 1$ obtemos

$$\begin{aligned} \exp(i\chi_{opt}(\mathbf{b})) &= \int |u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 \exp\left(i \sum_{j=1}^N \chi_j(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j)\right) \prod_{j=1}^N d^3 r_j \\ &= \langle \exp(i\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N)) \rangle_i, \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde $\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N) = \sum_{j=1}^N \chi_j(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j)$ e o símbolo $\langle \ \rangle_i$ representa uma média sobre todas as configurações de nucleons no estado $|i\rangle$.

- Espalhamento Elástico Difractivo

Agora veremos que as colisões inelásticas fazem com que $|\exp(i\chi_{opt})|^2 \leq 1$. Como sabemos que $\exp(i\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N))$ é um operador unitário ($U^\dagger U = 1$) que atua sobre os estados nucleares $u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, podemos escrever:

$$\exp(i\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N))u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_j \alpha_j u_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$$

onde α_j são coeficientes. Agora

$$\begin{aligned} & \int \{ \exp(i\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N))u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \}^* \{ \exp(i\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N))u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \} \prod_k d^3 r_k = \\ & = \int u_i^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \exp(-i\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N)) \exp(i\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N))u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \prod_k d^3 r_k = \\ & = \int |u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 \prod_k d^3 r_k = 1. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} & \int \{ \exp(i\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N))u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \}^* \{ \exp(i\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N))u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \} \prod_k d^3 r_k = \\ & = \int \left\{ \sum_j \alpha_j u_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \right\}^* \left\{ \sum_l \alpha_l u_l(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \right\} \prod_k d^3 r_k = \\ & = \sum_{j,l} \alpha_j^* \alpha_l \int u_j^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) u_l(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \prod_k d^3 r_k = \sum_{j,l} \alpha_j^* \alpha_l \delta_{jl} = \sum_j |\alpha_j|^2 \end{aligned}$$

Portanto

$$\sum_j |\alpha_j|^2 = 1.$$

Como

$$\int u_f^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \exp(i\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N))u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \prod_k d^3 r_k = \alpha_f,$$

decorre que

$$\sum_f \left| \int u_f^* \exp(i\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N))u_i \prod_k d^3 r_k \right|^2 = \sum_f |\alpha_f|^2 = 1.$$

Podemos também escrever

$$\begin{aligned} \sum_f \left| \int u_f^* \exp(i\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N))u_i \prod_k d^3 r_k \right|^2 &= \left| \int u_i^* \exp(i\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N))u_i \prod_k d^3 r_k \right|^2 + \\ &+ \sum_{f \neq i} \left| \int u_f^* \exp(i\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N))u_i \prod_k d^3 r_k \right|^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 = |\exp(i\chi_{opt}(\mathbf{b}))|^2 + \sum_{f \neq i} \left| \int u_f^* \exp(i\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N)) u_i \prod_k d^3 r_k \right|^2$$

$$\Rightarrow |\exp(i\chi_{opt}(\mathbf{b}))|^2 \leq 1.$$

Para interações da partícula incidente com partículas-alvo os potenciais comumente utilizados são reais portanto $\chi_j(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j)$ e $\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N)$ serão reais também. Mas pelo visto acima $\chi_{opt}(\mathbf{b})$ é complexo quando há colisões inelásticas. O espalhamento elástico correspondente é denominado elástico difrativo (sombra do canal inelástico).

O modelo óptico substitui as interações da partícula incidente com os nucleons por um potencial efetivo complexo; o método difrativo representa a colisão por uma função eiconal óptica complexa χ_{opt} . Embora a função eiconal seja mais prática em cálculos os dois métodos equivalem-se dentro das aproximações adotadas.

É possível colocar o potencial óptico em função da eiconal, pelo menos em princípio,

$$\chi_{opt} = -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} V_{opt}(\mathbf{b} + \mathbf{z}') dz',$$

e se o potencial for esfericamente simétrico

$$\chi_{opt} = -\frac{2}{v} \int_b^{+\infty} \frac{V_{opt}(r)}{\sqrt{r^2 - b^2}} r dr.$$

Esta é uma equação integral de Abel quando V_{opt} é desconhecido e χ_{opt} é conhecido. Então

$$V_{opt} = \frac{v}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^{+\infty} \frac{\chi_{opt}(b)}{\sqrt{b^2 - r^2}} b db.$$

3.4.2.2 Funções de perfil

Vamos desenvolver aqui um dos aspectos mais importantes da FDM que é a conexão entre a amplitude de espalhamento hádron-núcleo e a amplitude de espalhamento hádron-nucleon. A importância dessa relação está no fato de que uma vez conhecida a amplitude hádron-hádron (nucleon) pode-se em princípio prever a amplitude hádron-núcleo. De uma maneira geral conhecendo-se a interação elementar, determina-se a interação com um sistema complexo.

Para tanto é matematicamente conveniente introduzir a chamada função de perfil, definida através da transformada de Fourier inversa da amplitude de espalhamento.

$$\Gamma(\mathbf{b}) = \frac{1}{2ik\pi} \int \exp(-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}) \mathcal{F}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) d^2 q, \quad \mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'.$$

Comparando com (3.35) vemos que

$$\Gamma(\mathbf{b}) = 1 - \exp(i\chi_{opt}(\mathbf{b})).$$

Assim para a interação hádron-nucleon

$$\gamma_j(\mathbf{b}) \equiv 1 - \exp(i\chi_j(\mathbf{b})),$$

$$\exp(i \sum_{j=1}^N \chi_j(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j)) = \prod_{j=1}^N (1 - \gamma_j(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j)). \quad (3.37)$$

Com (3.37) a amplitude (3.34) pode ser reescrita

$$\mathcal{F}_{ii} = \frac{k}{2i\pi} \int \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}) \left\{ \int |u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 \prod_j (1 - \gamma_j(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j)) d^3 r_j - 1 \right\} d^2 b.$$

Vamos desenvolver (3.37) para analisar os primeiros termos (apêndice 6):

$$\prod_{j=1}^N (1 - \gamma_j) = 1 - \sum_j \gamma_j + \sum_{j \neq l} \gamma_j \gamma_l - \dots + (-1)^N \prod_{j=1}^N \gamma_j.$$

Considerando a aproximação em primeira ordem obtemos

$$\mathcal{F}_{ii} \cong \frac{ik}{2\pi} \int \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}) d^2 b \left\{ \sum_j \int \gamma_j(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j) |u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 \prod_k d^3 r_k \right\}$$

e após uma mudança de variável $\mathbf{b}' = \mathbf{b} - \mathbf{s}_j$ chegamos a

$$\mathcal{F}_{ii} \cong \frac{ik}{2\pi} \sum_j \int \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}') \gamma_j(\mathbf{b}') d^2 b' \int \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{s}_j) |u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 \prod_k d^3 r_k$$

Se os nucleons estivessem isolados a amplitude normalizada (vide equação (3.24)) do j -ésimo nucleon seria

$$f_j(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{i}{2\pi} \int \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}') \gamma_j(\mathbf{b}') d^2 b',$$

então

$$\mathcal{F}_{ii} \cong \sum_j k f_j(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \int \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{s}_j) |u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 \prod_k d^3 r_k.$$

O termo que conservamos ($1 - \sum_j \gamma_j$) é a soma de espalhamentos singulares e os outros termos são as correções para espalhamento múltiplo e interferência; esses termos tornam-se importantes quando os nucleons fazem sombra uns aos outros. A expressão acima fornece em primeira ordem a conexão pretendida entre as amplitudes elementares f_j e a amplitude hádron-núcleo.

Para uma partícula incidente com alta energia é possível desprezar as correlações entre nucleons e utilizar o modelo da partícula independente para o núcleo, com isso assumimos que $|u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2$ fatoriza-se e pode ser escrito

$$|u_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 = \prod_j \rho_j(\mathbf{r}_j), \quad (3.38)$$

onde $\int \rho_j(\mathbf{r}_j) d^3 r_j = 1$. Substituindo (3.38) em (3.36) e com a definição (3.37) temos

$$\exp(i\chi_{opt}(\mathbf{b})) = \prod_{j=1}^N \left\{ 1 - \int \rho_j(\mathbf{r}_j) \gamma_j(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j) d^3 r_j \right\}.$$

3.4.3 Espalhamento entre sistemas compostos

Nesta seção discutimos inicialmente o tratamento geral no caso de dois sistemas ligados. A seguir, considerando expansões da eiconal, tomaremos o termo de primeira ordem que corresponde ao caso de colisões binárias entre constituintes dos dois sistemas e no qual se baseiam os modelos de difração múltipla. Seguiremos aqui alguns desenvolvimentos que podem ser encontrados em [34-36] e que utilizam uma notação mais atual.

3.4.3.1 Tratamento geral

A expressão para a amplitude de espalhamento hadrônica *normalizada* (equação 3.24) entre dois sistemas compostos, um com A constituintes e outro com B constituintes, é o valor esperado do operador correspondente

$$F_{AB} = \langle \Psi_A \Psi_B | F(\mathbf{q}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_B) | \Psi_A \Psi_B \rangle, \quad (3.39)$$

onde $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A$ e $\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_B$ são as coordenadas dos constituintes dos objetos compostos \mathcal{A} e \mathcal{B} , respectivamente. Para colisão elástica consideram-se Ψ_A e Ψ_B as funções de onda do estado fundamental dos objetos \mathcal{A} e \mathcal{B} , as densidades de constituintes ρ_A, ρ_B são dadas por

$$|\Psi_A|^2 = \rho_A(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A), \quad |\Psi_B|^2 = \rho_B(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_B), \quad (3.40)$$

e são normalizadas a um.

Seguindo a aproximação eiconal (equação (3.35)) e com a normalização (3.24), o operador $F(\mathbf{q}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_B)$ é dado por

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B) = \frac{i}{2\pi} \int d^2 b \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) [1 - \exp(i\chi_{TOT}(\mathbf{b}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B))], \quad (3.41)$$

onde \mathbf{q} é o momento transferido ($\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$), \mathbf{b} o parâmetro de impacto (projeção da distância entre os centros de massa dos dois objetos no plano perpendicular ao vetor \mathbf{k}) e $\chi_{TOT}(\mathbf{b}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B)$ é a função eiconal total.

Com (3.39) e (3.41)

$$F_{AB} = \frac{i}{2\pi} \int d^2 b \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) \langle \Psi_A \Psi_B | 1 - \exp(i\chi_{TOT}(\mathbf{b}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B)) | \Psi_A \Psi_B \rangle, \quad (3.42)$$

correspondendo à generalização de (3.33) para dois sistemas compostos e colisão elástica.

Como estaremos interessados somente no espalhamento elástico próton-próton, não será levado em conta o termo de correção associado ao movimento de centro de massa.

Como generalização da hipótese do formalismo de difração múltipla (seção 3.4.2.1), considera-se que as interações entre constituintes dos objetos em colisão é do tipo de força de dois corpos, isso leva à propriedade característica do FDM: *a aditividade das funções eiconais para interação entre constituintes resulta na função eiconal total*

$$\chi_{TOT}(\mathbf{b}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B) = \sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^B \chi_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k), \quad (3.43)$$

onde \mathbf{s}_j , \mathbf{s}'_k são as projeções das coordenadas \mathbf{r}_j , \mathbf{r}'_k no plano do parâmetro de impacto e χ_{jk} a função eiconal (deslocamento de fase) associada à colisão do constituinte j do objeto A com o constituinte k do objeto B (vide figura 3.7).

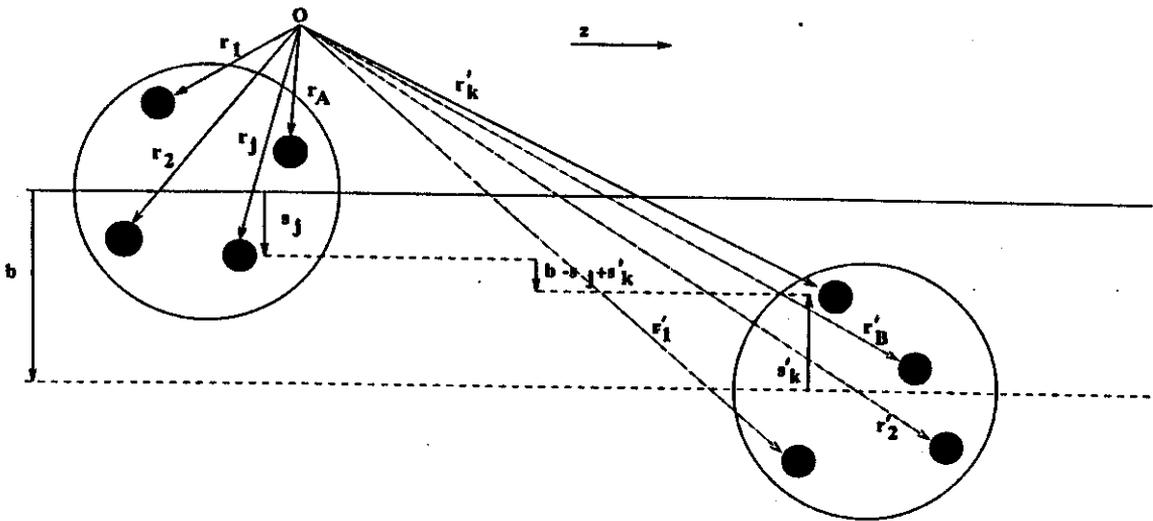


Figura 3.7 Esquema de colisão entre dois sistemas compostos.

A relação entre a função de perfil elementar γ_{jk} e a amplitude de espalhamento elementar (constituente-constituente) normalizada f_{jk} é feita por uma transformada de Fourier bidimensional

$$\gamma_{jk}(\mathbf{b}) = \frac{1}{2i\pi} \int d^2q \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) f_{jk}(\mathbf{q}). \quad (3.44)$$

A função γ_{jk} é relacionada com a função eiconal elementar χ_{jk} pela definição

$$\gamma_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k) \equiv [1 - \exp(i\chi_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k))]. \quad (3.45)$$

Da mesma forma

$$\Gamma_{TOT}(\mathbf{b}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B) \equiv [1 - \exp(i\chi_{TOT}(\mathbf{b}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B))]$$

$$F_{AB} = \frac{i}{2\pi} \int d^2b \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) \langle \Psi_A \Psi_B | \Gamma_{TOT}(\mathbf{b}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B) | \Psi_A \Psi_B \rangle.$$

Com isso vemos que a relação entre γ_{jk} e χ_{jk} e as equações (3.42) e (3.43) levam à conexão entre a amplitude de espalhamento F_{AB} de dois objetos compostos e a amplitude elementar dos constituintes f_{jk} , com a condição essencial de que exista a transformada de Fourier (3.44) [36].

Como Ψ_A, Ψ_B são normalizadas a um, temos [37]

$$\langle \Psi_A \Psi_B | \Psi_A \Psi_B \rangle = 1,$$

com isso e as equações (3.42) e (3.43)

$$F_{AB} = \frac{i}{2\pi} \int d^2b \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) \{ \langle \Psi_A \Psi_B | 1 - \prod_{j=1}^A \prod_{k=1}^B \exp(i\chi_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k)) | \Psi_A \Psi_B \rangle \}$$

$$\Rightarrow F_{AB} = \frac{i}{2\pi} \int d^2b \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) [1 - \langle \Psi_A \Psi_B | \prod_{j=1}^A \prod_{k=1}^B \exp(i\chi_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k)) | \Psi_A \Psi_B \rangle]. \quad (3.46)$$

Usando (3.45) em (3.46)

$$F_{AB} = \frac{i}{2\pi} \int d^2b \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) \{ 1 - \langle \Psi_A \Psi_B | \prod_{j=1}^A \prod_{k=1}^B [1 - \gamma_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k)] | \Psi_A \Psi_B \rangle \}. \quad (3.47)$$

Para obter a conexão entre F_{AB} e f_{jk} usamos (3.44) em (3.47)

$$F_{AB} = \frac{i}{2\pi} \int d^2b \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) \{ 1 - \langle \Psi_A \Psi_B | \prod_{j=1}^A \prod_{k=1}^B [1 - \frac{1}{2i\pi} \int d^2q \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) f_{jk}(\mathbf{q})] | \Psi_A \Psi_B \rangle \}.$$

3.4.3.2 Expansão e Termo de Primeira Ordem

Em analogia a (3.35) para a colisão entre dois objetos compostos escrevemos

$$F_{AB} = \frac{i}{2\pi} \int d^2b \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) \{ 1 - \exp(i\chi_{opt}) \}, \quad (3.48)$$

A equação (3.48) é fruto da consideração de que o espalhamento entre dois objetos compostos possa ser descrito pelo espalhamento de uma partícula (de massa igual à massa reduzida do sistema) por um potencial estático (óptico) que relaciona-se com χ_{opt} pela definição dada na seção 3.3.1. Comparando (3.48) com (3.47) obtemos

$$\exp(i\chi_{opt}) = \langle \Psi_A \Psi_B | \prod_{j=1}^A \prod_{k=1}^B [1 - \gamma_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k)] | \Psi_A \Psi_B \rangle$$

$$\Rightarrow i\chi_{opt} = \ln \langle \Psi_A \Psi_B | \prod_{j=1}^A \prod_{k=1}^B [1 - \gamma_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k)] | \Psi_A \Psi_B \rangle .$$

Definindo

$$H(\lambda) = \langle \Psi_A \Psi_B | \prod_{j=1}^A \prod_{k=1}^B [1 - \lambda \gamma_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k)] | \Psi_A \Psi_B \rangle ,$$

vemos que

$$i\chi_{opt} = \ln[H(\lambda)]_{\lambda=1} = i \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(\mathbf{b}),$$

com [35]

$$\begin{aligned} i\chi_1(\mathbf{b}) &= H^{(1)}, \\ i\chi_2(\mathbf{b}) &= \frac{1}{2!}(-H^{(1)2} + H^{(2)}), \\ i\chi_3(\mathbf{b}) &= \frac{1}{3!}(2H^{(1)3} - 3H^{(1)}H^{(2)} + H^{(3)}), \end{aligned}$$

e assim por diante com a notação

$$H^{(n)} \equiv \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} H(\lambda) |_{\lambda=0}$$

e onde

$$H^{(1)} = - \sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^B \langle \Psi_A \Psi_B | \gamma_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k) | \Psi_A \Psi_B \rangle .$$

Tomando apenas o termo de primeira ordem ($\partial H / \partial \lambda |_{\lambda=0}$)

$$i\chi_{opt} = - \sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^B \langle \Psi_A \Psi_B | \gamma_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k) | \Psi_A \Psi_B \rangle .$$

Os termos de ordem superior desprezados na expansão são relacionados a múltiplo espalhamento de cada constituinte de um sistema composto pelos constituintes do outro sistema. Isso é válido apenas na hipótese de altas energias com pequeno ângulo de espalhamento elástico.

Introduzindo a *função opacidade* Ω_{AB} pela relação

$$\Omega_{AB} = -i\chi_{opt}(\mathbf{b}), \quad (3.49)$$

obtemos

$$\Omega_{AB} = \sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^B \langle \Psi_A \Psi_B | \gamma_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k) | \Psi_A \Psi_B \rangle .$$

Podemos escrever esta equação no espaço de coordenadas usando o projetor [37]

$$\begin{aligned}
1 &= \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' |\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B \rangle \langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B| \\
&= \int d\mathbf{r} |\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A \rangle \langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A| \times \int d\mathbf{r}' |\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_B \rangle \langle \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_B|
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\langle \Psi_A \Psi_B | \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' |\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B \rangle \langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B| = \\
&= \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \langle \Psi_A | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A \rangle \langle \Psi_B | \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_B \rangle \langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B | \quad ,
\end{aligned}$$

onde $d\mathbf{r} \equiv d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_A$ e analogamente para $d\mathbf{r}'$.

Então

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^B \langle \Psi_A \Psi_B | \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' |\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B \rangle \langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B| \gamma_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k) \\
&\quad \cdot \int d\mathbf{r}''d\mathbf{r}''' |\mathbf{r}''_1, \dots, \mathbf{r}'''_B \rangle \langle \mathbf{r}''_1, \dots, \mathbf{r}'''_B| \Psi_A \Psi_B \rangle = \\
&= \sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^B \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \langle \Psi_A | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A \rangle \langle \Psi_B | \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_B \rangle [\langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B | \gamma_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k)] \\
&\quad \cdot \int d\mathbf{r}''d\mathbf{r}''' |\mathbf{r}''_1, \dots, \mathbf{r}'''_B \rangle \langle \mathbf{r}''_1, \dots, \mathbf{r}'''_B| \Psi_A \rangle \langle \mathbf{r}''_1, \dots, \mathbf{r}'''_B| \Psi_B \rangle
\end{aligned}$$

e com a *definição*

$$C_{AB} \bar{\gamma}(\mathbf{b} - \mathbf{s} + \mathbf{s}') \langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B | \equiv \sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^B \langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B | \gamma_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k),$$

onde C_{AB} depende apenas da energia \sqrt{s} e $\mathbf{s} = \sum_{j=1}^A \mathbf{s}_j$, $\mathbf{s}' = \sum_{k=1}^B \mathbf{s}'_k$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r}''d\mathbf{r}''' \langle \Psi_A | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A \rangle \langle \Psi_B | \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_B \rangle C_{AB} \bar{\gamma}(\mathbf{b} - \mathbf{s} + \mathbf{s}') \\
&\quad \cdot \langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B | \mathbf{r}''_1, \dots, \mathbf{r}'''_B \rangle \langle \mathbf{r}''_1, \dots, \mathbf{r}'''_B | \Psi_A \rangle \langle \mathbf{r}''_1, \dots, \mathbf{r}'''_B | \Psi_B \rangle
\end{aligned}$$

e lembrando a propriedade de estados ortogonais

$$\langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B | \mathbf{r}''_1, \dots, \mathbf{r}'''_B \rangle = \delta^3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}''_1) \dots \delta^3(\mathbf{r}'_B - \mathbf{r}'''_B),$$

obtemos

$$\Omega_{AB} = C_{AB} \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' |\Psi_A|^2 |\Psi_B|^2 \bar{\gamma}(\mathbf{b} - \mathbf{s} + \mathbf{s}').$$

Usando (3.40)

$$\Omega_{AB} = C_{AB} \int \rho_A(\mathbf{r}) \bar{\gamma}(\mathbf{b} - \mathbf{s} + \mathbf{s}') \rho_B(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \quad (3.50)$$

Neste trabalho não se leva em conta uma possível dependência de spin, por isso a função eiconal depende apenas na magnitude do parâmetro de impacto e com a simetria azimutal e a definição da função de Bessel de ordem zero

$$J_0(\lambda) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\lambda \cos \phi) d\phi, \quad (3.51)$$

obtemos para (3.48) e (3.49)

$$F_{AB}(q) = i \int b db J_0(qb) \{1 - \exp(-\Omega_{AB}(b))\}.$$

A função opacidade Ω_{AB} foi expressa em termos das densidades de constituintes $\rho_{A,B}$ e de $\bar{\gamma}$ em (3.50) mas também pode ser expressa em termos da amplitude elementar média f e dos fatores de forma $G_{A,B}$ definidos abaixo:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(\mathbf{b} - \mathbf{s} + \mathbf{s}') &= \frac{1}{2i\pi} \int d^2q \exp(-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{s} + \mathbf{s}')) f(\mathbf{q}), \\ G_{A,B}(\mathbf{q}) &= \int \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \rho_{A,B}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Usando (3.52) em (3.50)

$$\Omega_{AB}(b) = C_{AB} \int \frac{d^2q}{2i\pi} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) f(\mathbf{q}) \int d\mathbf{r} \rho_A(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{s}) \int d\mathbf{r}' \rho_B(\mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{s}'). \quad (3.53)$$

Como não consideramos dependência de spin, a densidade ρ utilizada depende apenas da magnitude de \mathbf{r} , isto é, $\rho(-\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$.

Assim

$$\int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}') = - \int d\mathbf{r}'' \rho(\mathbf{r}'') \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}''),$$

onde fizemos uma mudança de variável ($\mathbf{r}' = -\mathbf{r}''$) e onde os limites de integração na integral do lado direito foram invertidos, então, invertendo novamente estes limites,

$$\int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}') = \int d\mathbf{r}'' \rho(\mathbf{r}'') \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'') = G(\mathbf{q}). \quad (3.54)$$

Com a hipótese de pequeno ângulo de espalhamento (figura 3.2) devido à condição ($b \gg s' - s$) (distância entre os centros de massa dos objetos compostos muito maior que a distância entre constituintes colidindo) temos $\mathbf{q} \cdot \mathbf{z} \simeq 0$ e $\mathbf{q} \cdot \mathbf{s} \simeq \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}$.

Assim

$$\int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{s}) \simeq \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) = G(\mathbf{q}).$$

Com essa aproximação e utilizando (3.54), podemos escrever (3.53) na forma

$$\Omega_{AB}(b) = \frac{C_{AB}}{2i\pi} \int d^2q \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) f(\mathbf{q}) G_A(\mathbf{q}) G_B(\mathbf{q}) \quad (3.55)$$

e, lembrando que estamos negligenciando dependência de spin, podemos escrever $f(\mathbf{q}) = f(q)$, $G_A(\mathbf{q}) = G_A(q)$ e $G_B(\mathbf{q}) = G_B(q)$; com isso a equação (3.55) pode ser simplificada com o uso de (3.51), o resultado é

$$\Omega_{AB}(b) = \frac{C_{AB}}{i} \int q dq J_0(qb) G_A(q) G_B(q) f(q). \quad (3.56)$$

Usando a notação

$$\langle (\dots) \rangle \equiv \int b' db' J_0(q'b') (\dots), \quad (3.57)$$

podemos escrever (3.56) como

$$\Omega_{AB}(b) = \frac{C_{AB}}{i} \langle G_A(q) G_B(q) f(q) \rangle \quad (3.58)$$

e com [36]

$$f(q) = \langle iD_{AB}(b) \rangle, \quad G_{A,B}(q) = \langle D_{A,B}(b) \rangle,$$

chegamos a

$$\Omega_{AB}(b) = C_{AB} \langle \langle D_A(b) \rangle \langle D_B(b) \rangle \langle D_{AB}(b) \rangle \rangle .$$

Pelo teorema de convolução a transformada de Fourier inversa do produto de três transformadas de Fourier é o produto de convolução triplo das funções originais.

Assim

$$\Omega_{AB}(b) = C_{AB} D_A \otimes D_B \otimes D_{AB}.$$

Em um sistema linear em que a entrada é um impulso (função delta), a saída do sistema linear é a função de Green (resposta do impulso), para uma entrada de forma geral [36], a saída é o produto de convolução da função de Green com a entrada. No caso de espalhamento elástico a altas energias, a saída está expressa na função eiconal que se relaciona com a amplitude de espalhamento, e a função opacidade determina a eiconal através da relação (3.49), logo a resposta do sistema pode ser analisada na função Ω_{AB} . O caso de uma função delta (interação de contato) tem como resposta uma função de Green dada pelo produto de convolução duplo [36]

$$\mathcal{G} = C_{AB} D_A \otimes D_B$$

e, no caso de interação não de contato, a resposta é dada pelo produto de convolução da função de Green \mathcal{G} e a interação (entrada) expressa em D_{AB} :

$$\Omega_{AB} = \mathcal{G} \otimes D_{AB} = C_{AB} D_A \otimes D_B \otimes D_{AB}.$$

Mas, para o produto de convolução triplo existir, é necessário haver a transformada de Fourier inversa de $f(q)$, assim [36] “uma condição necessária para este resultado é a existência de uma transformada de Fourier bem definida para a amplitude elementar”.

3.4.4 Modelos de difração múltipla para o espalhamento elástico hádron-hádron

Nessa seção apresentamos uma revisão dos principais modelos atuais baseados no formalismo da difração múltipla, bem como uma comparação das previsões com os dados experimentais estudados em cada caso. Como trataremos somente espalhamento com simetria azimutal utilizaremos a nomenclatura (3.57) para as transformadas de Fourier bidimensionais (transformadas de Hankel) conectando os espaços de momento transferido e parâmetro de impacto:

$$h(q, s) = \int b db J_0(qb) g(b, s) \equiv \langle g(b, s) \rangle$$

e sua inversa (simétrica)

$$g(b, s) = \langle h(q, s) \rangle .$$

3.4.4.1 Resultados básicos

Como comentado na introdução deste capítulo os formalismos discutidos nas seções anteriores podem ser resumidos através das seguintes equações :

$$F_{AB}(q, s) = i \langle \Gamma_{AB}(b, s) \rangle, \quad (3.59)$$

$$\Gamma_{AB}(b, s) = 1 - \exp(-\Omega_{AB}(b, s)), \quad (3.60)$$

$$\Omega_{AB}(b, s) = \frac{C_{AB}}{i} \langle G_A G_B f \rangle . \quad (3.61)$$

A equação (3.59) caracteriza o formalismo de parâmetro de impacto, (3.60) a aproximação eiconal e (3.61) o termo de primeira ordem do formalismo da difração múltipla de Glauber.

Na literatura a função $\Omega_{AB}(b, s)$ é denominada opacidade e, como vimos, no limite óptico é relacionada com a eiconal $\chi_{AB}(b, s)$ através de

$$\chi_{AB}(b, s) = i\Omega_{AB}(b, s),$$

de modo que

$$\Gamma_{AB}(b, s) = 1 - \exp(i\chi_{AB}(b, s)).$$

Para Ω_{AB} real é comum interpretar-se a opacidade como a parte imaginária da eiconal. Entretanto, como veremos, no caso geral Ω é uma quantidade complexa, de modo que a eiconal também é complexa. Também na literatura a função $C_{AB} = C_{AB}(s)$ é denominada constante de absorção .

As equações (3.59), (3.60) e (3.61) constituem o ponto de partida para os modelos de difração múltipla. A diferença essencial entre esses modelos está na escolha de parametrizações para as grandezas C_{AB} , $G_{A,B}$ e f e no caráter real ou complexo a elas atribuído. Em cada caso as equações (3.59-61) fornecem a amplitude de espalhamento e daí os diversos observáveis físicos (seção 2.1):

$$\frac{d\sigma}{dt} = \pi |F_{AB}(t, s)|^2, \quad \sigma_t = 4\pi \text{Im}\{F_{AB}(0, s)\},$$

$$B = \frac{d}{dt} \ln \frac{d\sigma}{dt}, \quad \sigma_{el} = \int \frac{d\sigma}{dt} dt, \quad \rho = \frac{\text{Re}\{F(0, s)\}}{\text{Im}\{F(0, s)\}}.$$

A seguir revisaremos seis modelos e apresentamos as previsões obtidas em cada caso para o espalhamento elástico pp e $\bar{p}p$.

3.4.4.2 Modelo de Chou e Yang

Na sua formulação original [38], o modelo de Chou e Yang é baseado em conceitos ópticos. A estrutura dos objetos compostos é descrita por uma densidade de opacidade $\rho(x, y, z)$ e no sistema de centro de massa cada hádron “vê” o outro como uma distribuição de matéria bidimensional

$$D(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y, z) dz,$$

devido à contração provocada por efeitos de colisão relativísticos. O eixo z é perpendicular ao plano de parâmetro de impacto. Ainda segundo a analogia óptica, a opacidade é a sobreposição das distribuições de matéria [38,39]

$$\Omega_{AB}(b) = C_{AB} \int \int d^2 b' D_A(\mathbf{b} - \mathbf{b}') D_B(\mathbf{b}') = C_{AB} D_A \otimes D_B(b). \quad (3.62)$$

Se $G_{A,B}(q) = \langle D_{A,B}(b) \rangle$ então, pelo teorema da convolução

$$\Omega_{AB}(b) = C_{AB} \langle G_A(q) G_B(q) \rangle. \quad (3.63)$$

Comparação de (3.63) com (3.58) mostra que em termos de modelos de difração múltipla, no modelo original de Chou e Yang, $f(q) = i$. A função de perfil relacionada com a amplitude de espalhamento $f = i$ é a função delta (equação 3.52):

$$\bar{\gamma}(\mathbf{b} - \mathbf{s} + \mathbf{s}') = 2\pi \delta^2(\mathbf{b} - \mathbf{s} + \mathbf{s}') = \frac{1}{2\pi} \int d^2 q \exp[-iq \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{s} + \mathbf{s}')].$$

Então entende-se fisicamente que o modelo original de Chou e Yang trata de uma interação de contato (função delta) e uma hipótese importante do modelo é a sobreposição da distribuição de matéria (3.62).

Na formulação original os autores utilizaram fatores de forma proporcionais ao fator de forma de carga (eletromagnético) das partículas [38-40]. Mais recentemente, têm utilizado fatores de forma, do tipo dipolar, dependentes da energia [20]

$$G_p = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\left(1 + \frac{q^2}{m^2}\right)^2}, \quad m = m(s).$$

Com essas escolhas a opacidade é real e portanto a amplitude de espalhamento é imaginária. A parte real da amplitude é calculada através da chamada Fórmula de Martin, que será introduzida na seção 3.4.4.7 e discutida na seção 4.2. Os valores obtidos para a constante de absorção $C_{AB} = K$ e m^2 são mostrados na tabela 3.1 e a descrição dos dados para espalhamento pp em $\sqrt{s} = 23 \text{ GeV}$ e $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 546 \text{ GeV}$ pode ser visto na figura 3.8.

Nesse modelo os valores de σ_t e ρ são entradas e portanto não podem ser previstos. Observamos também que *não* há dependência algébrica para $m(s)$ no cálculo de $d\sigma/dt$ para $\sqrt{s} = 23,5 \text{ GeV}$ e 546 GeV .

\sqrt{s} (GeV)	$(2\pi)^{-2}K$ (GeV ⁻²)	m^2 (GeV ²)	ρ
23,5	10,01	0,774	0,04
546	17,80	0,573	0,24

Tabela 3.1 Parâmetros do modelo de Chou e Yang. Os valores de K e m^2 foram obtidos por ajustes dos dados experimentais [20].

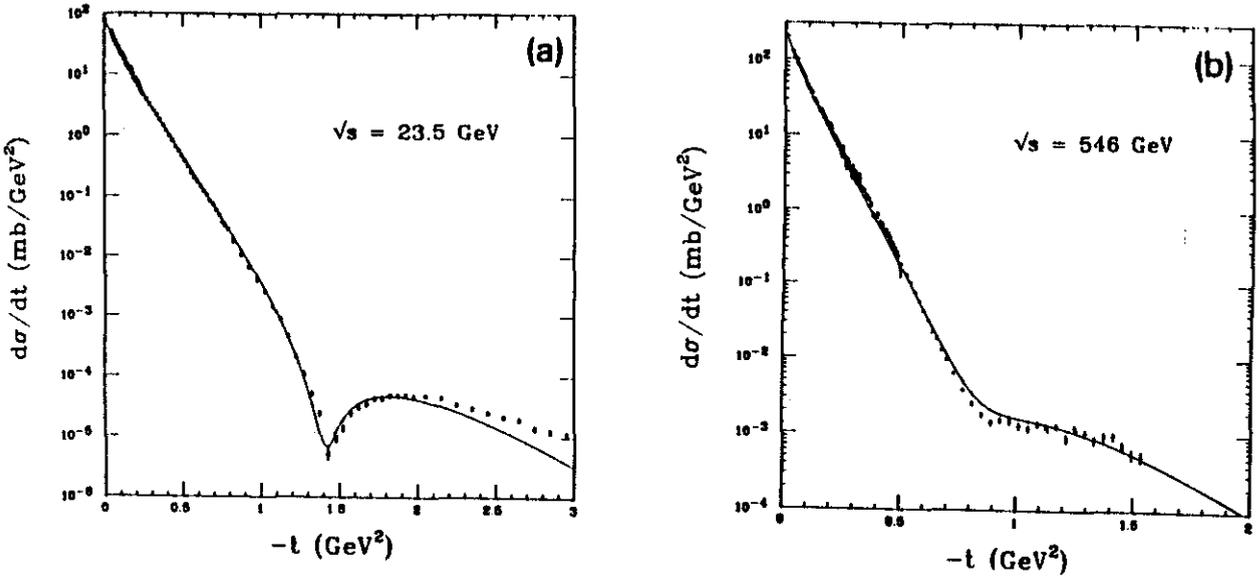


Figura 3.8 Seção de choque diferencial pp elástica em (a) $\sqrt{s} = 23,5 \text{ GeV}$, onde linha sólida corresponde a $\rho = 0,04$ e (b) $\sqrt{s} = 546 \text{ GeV}$ [20].

3.4.4.3 Modelo de Glauber e Velasco

Nesse modelo a opacidade (Ω) é expressa por [14]

$$\Omega = \frac{K}{4\pi} (1 - i\alpha) \int_0^\infty J_0(qb) G_A G_B f(q) q dq$$

e o modelo faz uso de parametrizações de Felst [41] e Borkowski, Simon, Walther e Wendling (BSWW) [42] dos fatores de forma eletromagnéticos, assim os fatores de forma não dependem na energia. A amplitude elementar assume duas formas:

- para espalhamento $\bar{p}p$ em energias do “Collider” é

$$f(q) = \frac{1}{(1 + \frac{q^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}};$$

- para espalhamento pp em energias do ISR

$$f(q) = \frac{\exp(i(b_1 q^2 + b_2 q^4))}{(1 + \frac{q^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}}.$$

De (3.52) a transformada de $f(q)$ para o módulo da amplitude ($\bar{p}p$) é [36]

$$\bar{\gamma} = a \frac{e^{-ab}}{ib},$$

que corresponde à expressão do potencial de Yukawa. Assim a interação entre constituintes no modelo de Glauber e Velasco não é de contato como a de Chou e Yang. O modelo introduz um fator complexo $K(1 - i\alpha)/4\pi$ onde K e α são parâmetros reais livres, cujos valores são mostrados na tabela 3.2. A descrição para $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 546$ GeV usa a parametrização de Felst [14,41]

$$G_E(q^2) = (1 + 3,04q^2 + 1,54q^4 + 0,068q^6)^{-1},$$

e também a parametrização BSWW, do tipo quadripolo [42],

$$G_E(q^2) = \frac{0,219 \times 3,53}{3,53 + q^2} + \frac{1,371 \times 15,02}{15,02 + q^2} + \frac{(-0,634) \times 44,08}{44,08 + q^2} + \frac{0,044 \times 154,20}{154,20 + q^2}.$$

As duas descrições para $\bar{p}p$ podem ser vistas nas figuras 3.9 e 3.10 enquanto a descrição para espalhamento próton-próton, que utiliza apenas a parametrização BSWW, está na figura 3.11.

\sqrt{s} (GeV)	K (mb)	α	$1/a^2$ (GeV ⁻²)	parametrização
23,5	50,4	0,025	0,14	BSWW
546	81,3	0,190	1,80	BSWW
546	83	0,18	2,0	Felst

Tabela 3.2 Os valores de $b_1 = 0,18$ GeV⁻² e $b_2 = -0,10$ GeV⁻⁴ foram obtidos apenas para pp ($\sqrt{s} = 23,5$ GeV) [14].

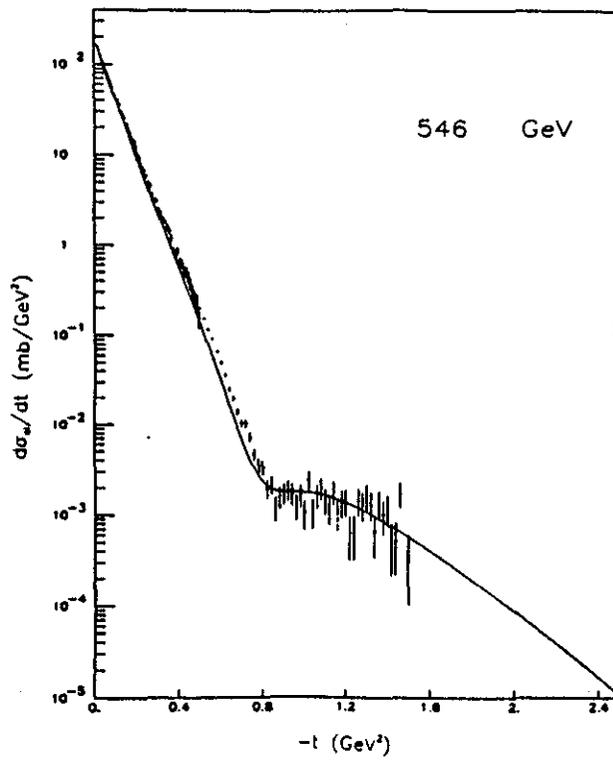


Figura 3.9 Seção de choque diferencial baseada no fator de forma de Felst para colisão $\bar{p}p$, a energia no sistema de centro de momento é indicada no gráfico [14].

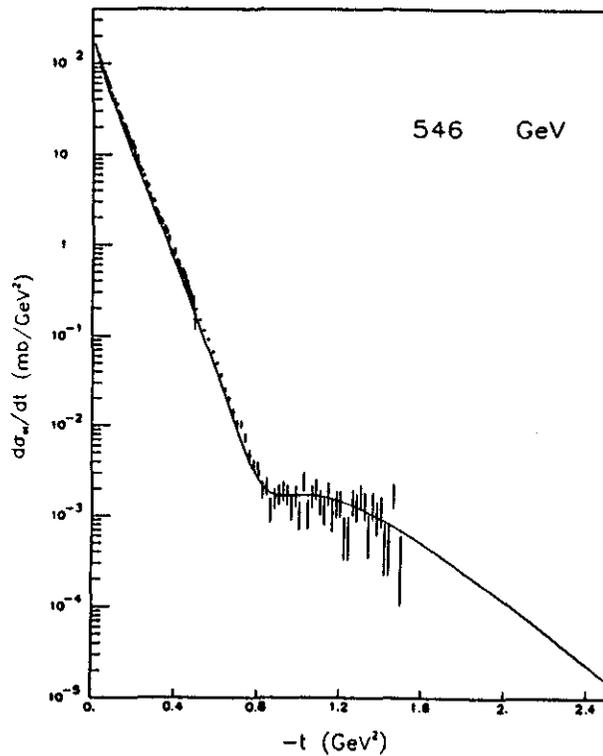


Figura 3.10 Seção de choque diferencial baseada no fator de forma de BSWW para colisão $\bar{p}p$, a energia no sistema de centro de momento é indicada no gráfico [14].

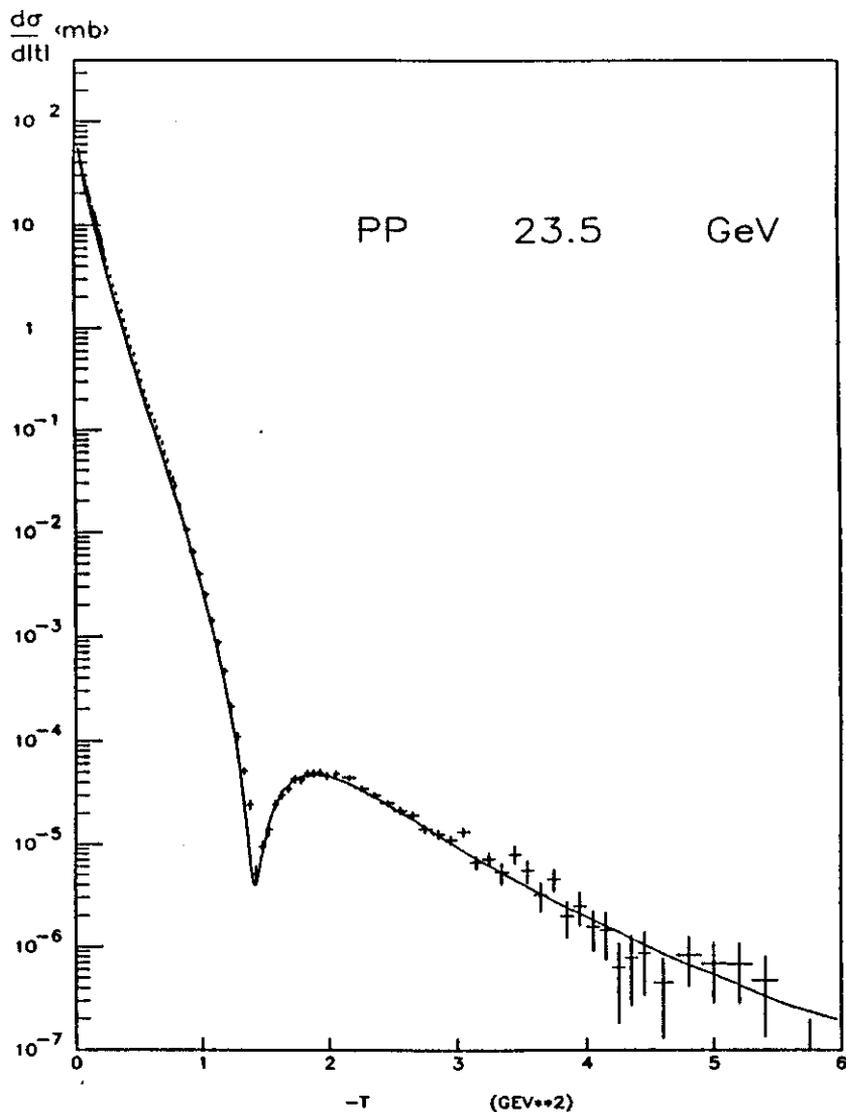


Figura 3.11 Seção de choque diferencial para colisão elástica pp, a energia no sistema de centro de massa é indicada no gráfico [14].

A parametrização BSWW utiliza 8 parâmetros ao todo [42] enquanto a parametrização de Felst [41] tem 7 parâmetros, além deles Glauber e Velasco têm 3 parâmetros para espalhamento antipróton-próton e cinco para pp.

Embora, devido ao fator complexo $K(1 - i\alpha)/4\pi$, esse modelo forneça partes real e imaginária para a amplitude de espalhamento hadrônica, Glauber e Velasco não têm discutido a dependência $\rho(s)$. Até onde conhecemos há apenas uma previsão para o espalhamento $\bar{p}p$ na energia de 546 GeV. De acordo com os autores [14], adicionando-se a contribuição coulombiana à amplitude hadrônica, um ajuste preliminar da seção de choque diferencial determina valores dos parâmetros K , α e a de modo a fornecer $\rho = 0,17 \pm 0,01$. Esse valor porém não é consistente com o resultado experimental recente, $\rho(541 GeV) = 0,135 \pm 0,015$ [43] e não é claro se reproduz a seção de choque diferencial.

Ajustes sistemáticos do Modelo de Glauber e Velasco aos dados experimentais de pp e $\bar{p}p$ foram obtidos em 1990 por Buenerd, Furget e Valin [19]. Utilizando para fator de forma eletromagnético a parametrização de BSWW e para amplitude elementar a forma usada por Glauber e Velasco para pp em $\sqrt{s} = 53 \text{ GeV}$, obtiveram descrições tanto da seção de choque diferencial como de $\sigma_t(s)$ e $\rho(s)$. Isso é obtido através de 13 parâmetros livres (na colisão pp): 8 independentes da energia e provenientes do fator de forma e 4 dependentes da energia (1 independente) provenientes da *amplitude elementar complexa* entre constituintes ij

$$f_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{4\pi} (i + \alpha_{ij}) \frac{1}{\sqrt{1 + a_{ij}q^2}} e^{i(b_1q^2 + b_2q^4)}.$$

Em termos de quarks os índices ij são distinguidos para o caso de interação quark-quark (como pp: uud \times uud) e quark-antiquark (como $\bar{p}p$: $\bar{u}\bar{u}\bar{d} \times$ uud). Na nomenclatura dos autores o primeiro caso é utilizado para qq' enquanto a fase da exponencial é nula para o caso $q\bar{q}$. Leva-se em conta diferentes pesos para a amplitude pp e $\bar{p}p$ associando-se os valores 9 e 4 respectivamente. Com os valores dos parâmetros livres dependentes da energia que aparecem na tabela 3.3 obtém-se uma boa descrição de σ_t , $\rho(s)$ e seções de choque diferenciais, como mostrado nas figuras 3.12, 3.13.a) e 3.13.b).

\sqrt{s} (GeV)	$\sigma_{qq'}$ (mb)	$\alpha_{qq'}$	$a_{qq'}$ (GeV ⁻²)	b_1 (GeV ⁻²)	b_2 (GeV ⁻⁴)	$\sigma_{q\bar{q}}$ (mb)	$\alpha_{q\bar{q}}$	$a_{q\bar{q}}$ (GeV ⁻²)
13,7	5,255	-0,1	0,06	0,18	-0,1	6,055	0,1	0,06
16,5	5,333	-0,06	0,08	0,18	-0,1	6,055	0,1	0,1
19,4	5,333	-0,025	0,1	0,18	-0,1	6,055	0,1	0,1
23,5	5,45	0,01	0,14	0,18	-0,1	6,05	0,1	0,2
30,7	5,511	0,035	0,23	0,18	-0,1			
44,7	5,778	0,085	0,27	0,18	-0,095			
52,8	5,856	0,1	0,28	0,18	-0,95	6,1	0,15	3
62,5	5,978	0,102	0,3	0,18	-0,1			
546,0	8,81	0,175	1,6	0	0	8,81	0,175	1,6

Tabela 3.3 Valores dos parâmetros da amplitude elementar entre constituintes para colisão pp e $\bar{p}p$ [19].

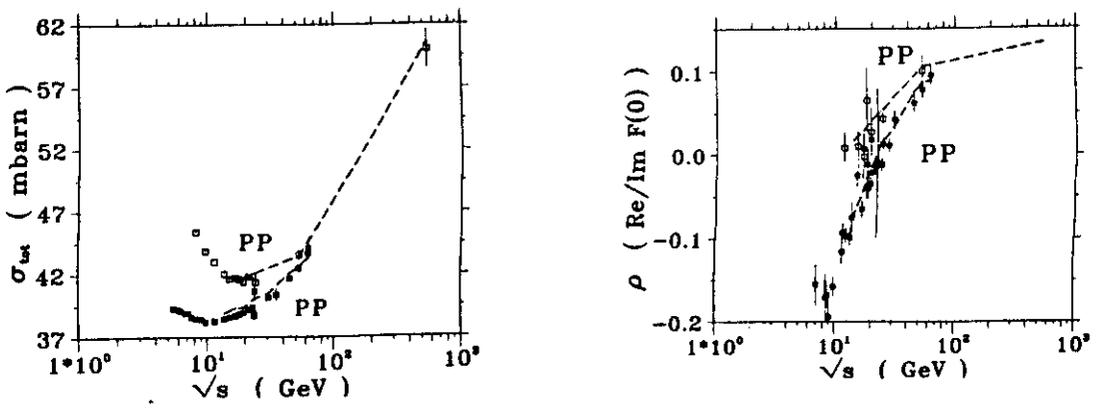


Figura 3.12 Descrição de σ_t , ρ obtida utilizando os parâmetros da tabela 3.3 [19].

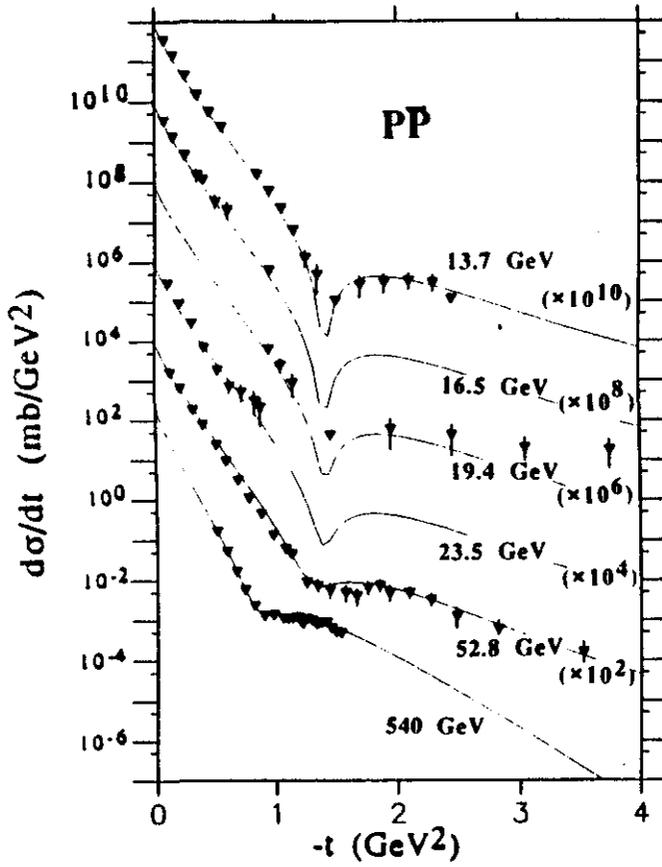


Figura 3.13.a) Seção de choque diferencial para espalhamento elástico $\bar{p}p$ [19].

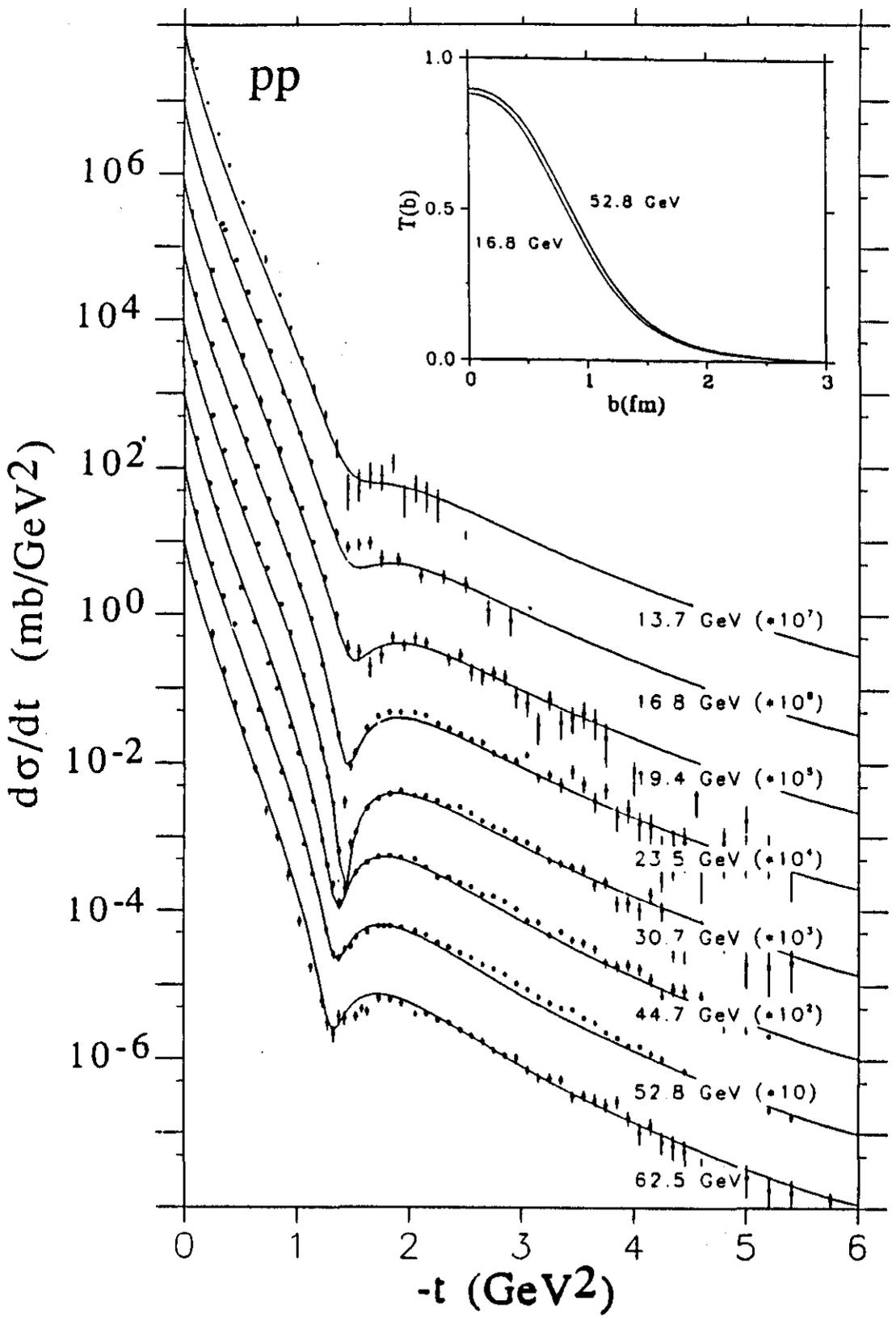


Figura 3.13.b) Seção de choque diferencial para espalhamento elástico pp [19].

3.4.4.4 Modelo de Saleem, Aleem e Azhar

Saleem, Aleem e Azhar descrevem em seu modelo [17] os dados de espalhamento elástico pp para o momento do próton incidente no sistema de laboratório $p_l = 300$ GeV e para as energias $\sqrt{s} = 23, 31, 45, 53$ e 62 GeV e $\bar{p}p$ para $\sqrt{s} = 53, 546$ e 630 GeV.

Para isso eles utilizam sua própria parametrização do fator de forma eletromagnético

$$G_p = 0,6405e^{-4q^2} + 0,33e^{-0,85q^2} + 0,028e^{-0,22q^2} + 0,0015e^{-0,05q^2}$$

e para a amplitude de espalhamento, a função

$$f = \frac{1 - \frac{q^2}{a^2}}{(1 + \frac{q^2}{a^2})^n}, \quad n = \frac{1}{3}, \quad a^2 = 3 \text{ GeV}^2. \quad (3.64)$$

Com isso a função opacidade fica expressa por

$$\Omega(b) = K(1 - i\alpha) \int_0^\infty J_0(qb) G_A G_B f(q) q dq.$$

Esse modelo obtém boa descrição dos dados mas a amplitude de espalhamento (3.64) não tem transformada de Fourier bem definida [36,44] porque é divergente. Pelo citado no fim da seção 3.4.3.2 e na referência [36], isso implica numa inconsistência com o próprio formalismo da difração múltipla. Como no modelo de Glauber e Velasco, temos um fator complexo, $K(1 - i\alpha)$. Os valores dos parâmetros são determinados através de ajustes da seção de choque total e do parâmetro ρ e são mostrados na tabela 3.4. Os dados experimentais com a descrição do modelo estão nas figuras 3.14 a 3.18.

Saleem, Aleem e Azhar fazem uso de oito parâmetros para fator de forma e mais quatro para C_{AB} e f . Na maioria das energias utilizadas, ρ e σ_t são entradas no modelo e não é possível prevê-los, mas em [23] é feita uma tentativa de previsão de ρ e σ_t para $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 546$ GeV. Os próprios autores, entretanto, afirmam que não obtiveram uma previsão satisfatória para ρ e, ao tentar descrevê-lo, não conseguem uma boa descrição de $d\sigma/dt$.

p_l/\sqrt{s} (GeV)	$K(pp)$ $(GeV)^{-2}$	$K(\bar{p}p)$ $(GeV)^{-2}$	$\alpha(pp)$	$\alpha(\bar{p}p)$
300	9,84		-0,020	
23	9,90		0,044	
31	10,08		0,050	
45	10,80		0,090	
53	10,90	11,3	0,100	0,135
62	11,20		0,125	
546		16,9		0,140
630		17,2		0,140

Tabela 3.4 Valores de K e α para pp e $\bar{p}p$ em colisões elásticas, a primeira linha corresponde a momento no sistema de laboratório, as outras à energia no sistema de centro de massa e na nossa notação p_l e \sqrt{s} têm unidade de GeV [17].

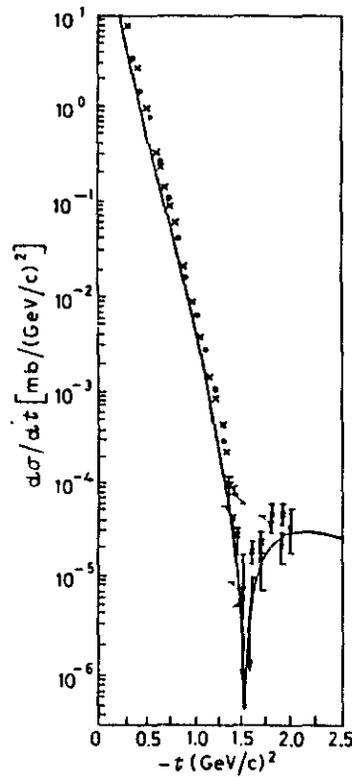


Figura 3.14 Espalhamento elástico pp para $p_l = 300$ GeV [17].

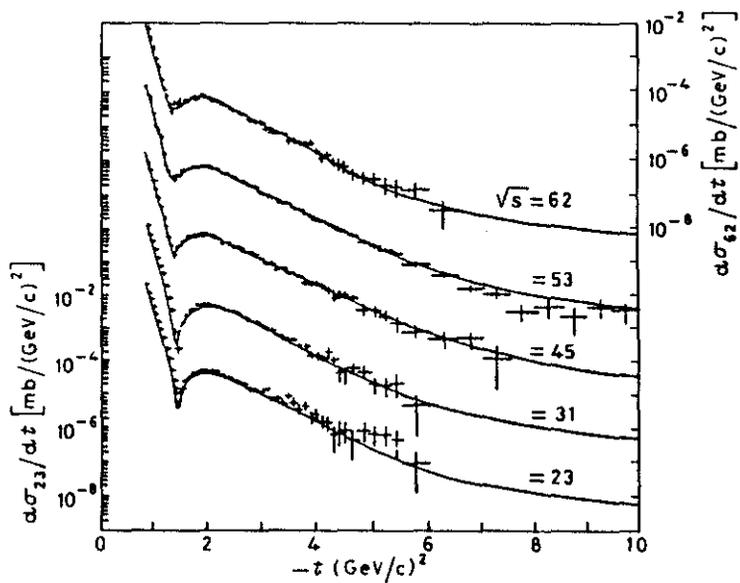


Figura 3.15 Seção de choque diferencial pp para $\sqrt{s} = 23, 5; 30, 7; 44, 7; 52, 8; 62, 5 \text{ GeV}$ [17].

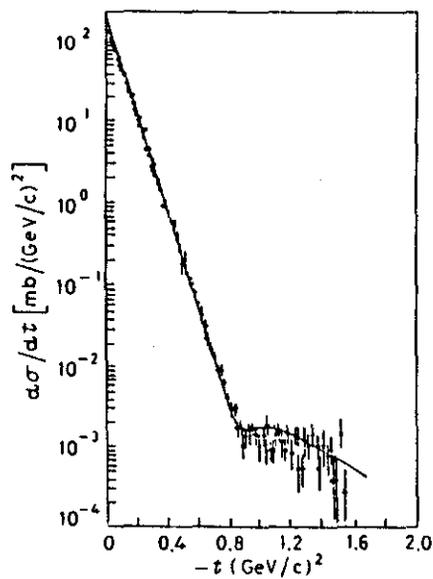


Figura 3.16 Espalhamento elástico $\bar{p}p$ para $\sqrt{s} = 546 \text{ GeV}$ [17].

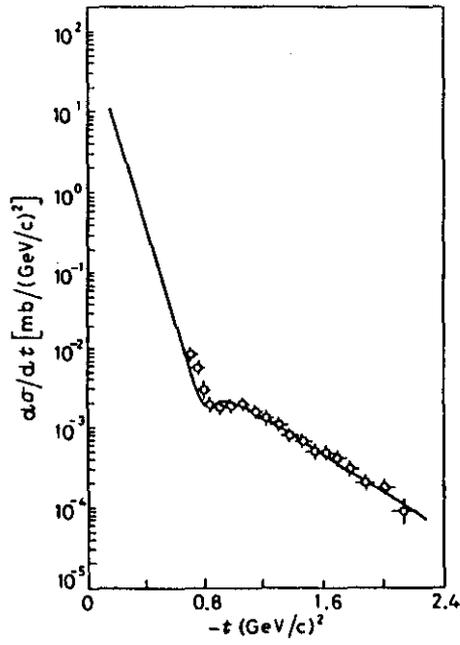


Figura 3.17 Seção de choque diferencial $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 630 \text{ GeV}$ [17].

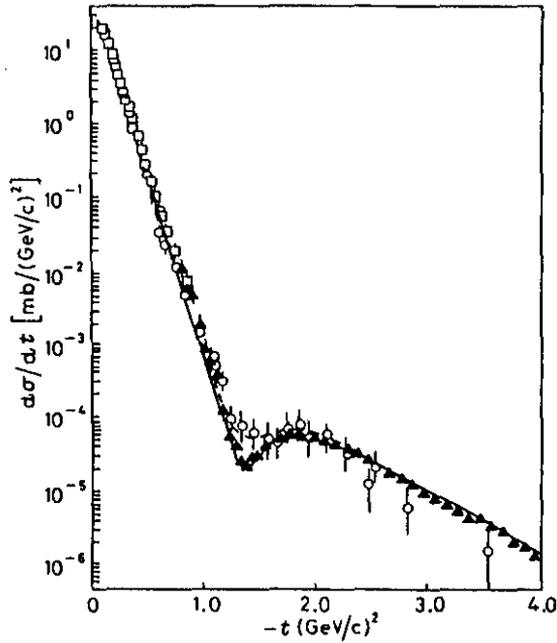


Figura 3.18 Espalhamento pp (linha cheia) e $\bar{p}p$ (linha tracejada) para $\sqrt{s} = 53 \text{ GeV}$ [17].

3.4.4.5 Modelo de Hüfner e Povh

O formalismo tem a estrutura básica do modelo de Chou-Yang, caracterizado por uma interação de contato entre constituintes. A eiconal no espaço de momento transferido é expressa por [45]

$$\chi(q, s) = \frac{is}{4\pi} \lambda_0 \{R^A(s) G^2(q, R^2(s))\},$$

com fator de forma dipolar (para bárions),

$$G(q, R^2) = [1 + \frac{q^2 R^2}{12}]^{-2}$$

e

$$R^2(s) = \frac{3}{2} B(s) [1 - i\rho(s)]^{\frac{1}{2}},$$

onde $B(s)$ é a inclinação (slope) e $\rho(s)$ a razão entre as partes real e imaginária da amplitude hadrônica frontal.

A interpretação nova diz respeito ao raio complexo no fator de forma, o qual depende da energia. Os parâmetros livres são três para pp: λ_0 , $Re\{R(s)\}$ e $Im\{R(s)\}$, determinados através de ajustes da seção de choque diferencial. O modelo trata bárions e mésons (fator de forma de monopolo), porém, como ocorre em modelos que consideram interação de contato, a descrição a grande momento transferido não é satisfatória, como mostrado na figura 3.19.a para interação pp; na figura 3.19.b mostramos descrição de $\bar{p}p$ obtida por Hüfner e Povh com valores da tabela 3.5. O modelo permite calcular $\rho(s)$, σ_t e $B(s)$ e a tabela 3.5 apresenta previsões para ρ . Comparação com os dados experimentais indicados na mesma tabela e com os resultados experimentais recentes $\rho(541 GeV) = 0,135 \pm 0,015$ [43] e $\rho(1800 GeV) = 0,134 \pm 0,069$ [46] indica que, à exceção do espalhamento pp em $\sqrt{s} = 53 GeV$, as demais previsões concordam com os dados experimentais.

reação	\sqrt{s} (GeV)	λ_0 (GeV) ²	$Re\{R(s)\}$ (fm)	$Im\{R(s)\}/Re\{R(s)\}$	ρ (prev.)	ρ (exp.)
pp	23,5	0,52	0,77	0,005	0,02	$0,02 \pm 0,005$
pp	52,8	0,52	0,79	0,01	0,046	$0,078 \pm 0,01$
$\bar{p}p$	546,0	0,52	0,88	0,04	0,14	
$\bar{p}p$	1800	0,52	0,93	0,04	0,14	

Tabela 3.5 Valores dos parâmetros obtidos por Hüfner e Povh e previsão para ρ . Os dados experimentais recentes para ρ estão no texto [45].

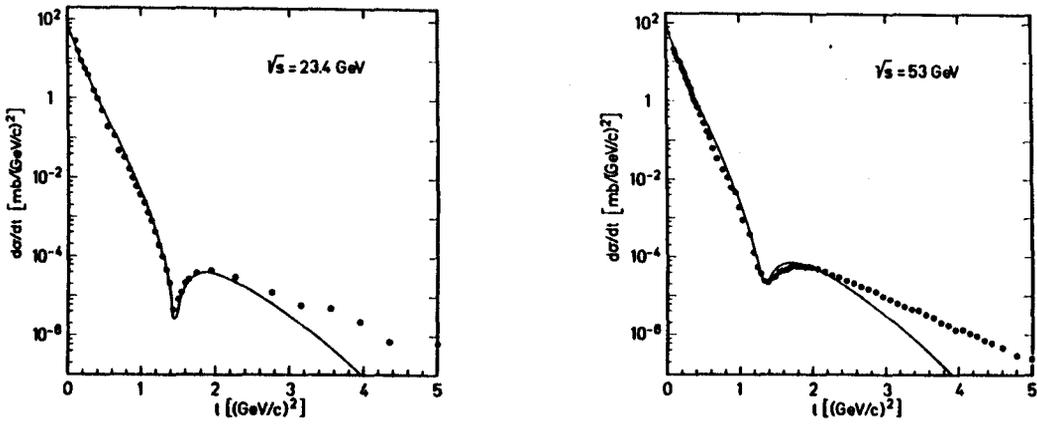


Figura 3.19.a) Previsão do modelo de Hüfner e Povh para $d\sigma/dt$ em interação pp [45].

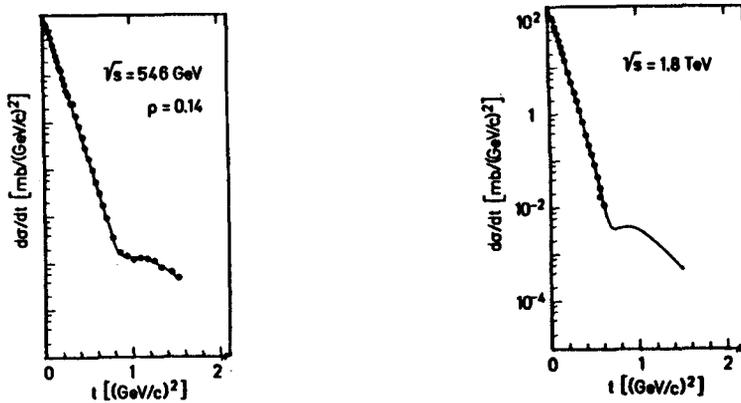


Figura 3.19.b) Previsão do modelo de Hüfner e Povh para $d\sigma/dt$ em interação $\bar{p}p$ [45].

3.4.4.6 Interpretações do modelo de Bourrely, Soffer e Wu

O modelo de Bourrely, Soffer e Wu (BSW) não é um modelo geométrico puro pois inclui aspectos do canal-t e de teoria de campos, porém algumas interpretações feitas atualmente sobre ele tornam interessante colocá-lo nessa análise. Os três autores supõem uma diferença entre a distribuição de carga e a distribuição de massa [47] dentro do hádron e essa diferença eles introduzem através de um fator (uma função variando lentamente com q^2) que multiplica a parametrização do fator de forma de pólo duplo

$$\left\{ \frac{1}{1 + \frac{q^2}{m_1^2}} \frac{1}{1 + \frac{q^2}{m_2^2}} \right\},$$

de forma que obtém-se

$$\left\{ \frac{1}{1 + \frac{q^2}{m_1^2}} \frac{1}{1 + \frac{q^2}{m_2^2}} \right\}^2 \left\{ \frac{1 - \frac{q^2}{a^2}}{1 + \frac{q^2}{a^2}} \right\}. \quad (3.65)$$

Segundo o modelo BSW a opacidade, no espaço de parâmetro de impacto, tem um termo de Regge ($R(s, b)$) e um associado com o Pomeron ($S(s)F(b^2)$); neste último, $F(b^2)$ é proporcional à transformada de (3.65) enquanto $S(s)$ é dado por

$$S(s) = \frac{s^c}{(\ln s)^{c'}} + \frac{u^c}{(\ln u)^{c'}}. \quad (3.66)$$

O produto $(S(s)F(b^2))$ fornece a parte difrativa do modelo enquanto o termo de Regge é necessário para a análise de dados de baixa energia e a diferença de σ_t para pp e $\bar{p}p$ [48,49].

A expressão para o termo de Regge é

$$R(s, b) = \langle [C_+ + C_- e^{-i\pi\alpha(t)}] s^{\alpha(t)} \rangle,$$

onde $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha't$ e utilizamos (3.57). A opacidade é então

$$\Omega_0(s, b) = S(s)F(b^2) + R(s, b).$$

A descrição dos dados experimentais de $d\sigma/dt$, σ_t e ρ foram obtidos com os seguintes valores dos parâmetros [47,49]:

$$\begin{aligned} c &= 0,167, & c' &= 0,748, & m_1 &= 0,586 \text{ GeV}, \\ m_2 &= 1,704 \text{ GeV}, & a &= 1,953 \text{ GeV}, & g &= 7,115 \text{ GeV}^2, \\ C_+ &\simeq -39, & C_- &\equiv 1.8, & \alpha(t) &= 0.352 + 0.694t. \end{aligned}$$

O parâmetro g é a constante de proporção entre (3.65) e a transformada de $F(b^2)$.

Os resultados obtidos para σ_t , ρ e $d\sigma/dt$ são mostrados nas figuras 3.20 a 3.23. O modelo de Bourrely, Soffer e Wu utiliza dez parâmetros e inclui aspectos dos modelos geométricos, teoria de campos e termos de Regge.

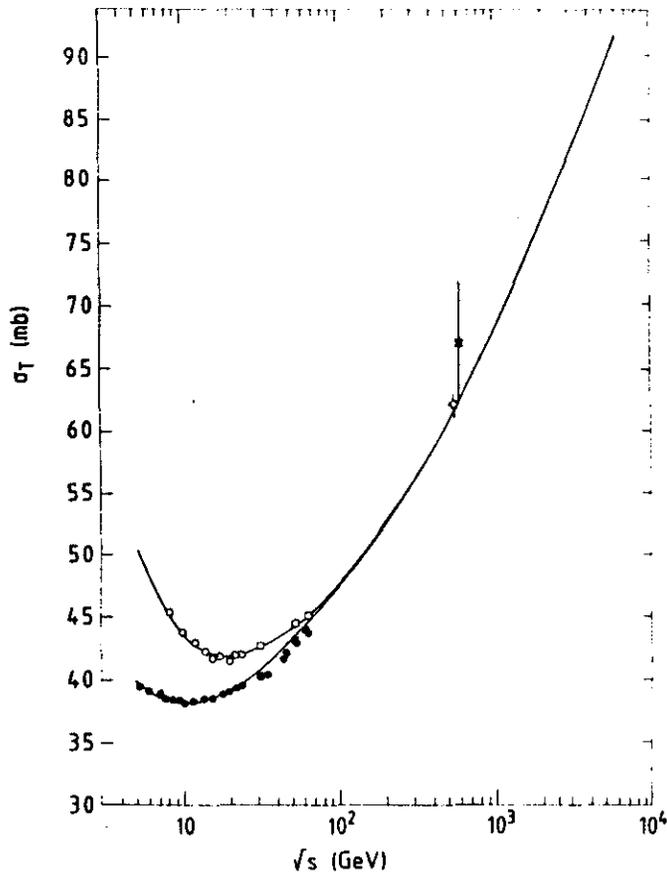


Figura 3.20 Seção de choque total para pp (pontos pretos) e $\bar{p}p$ (círculos) [49].

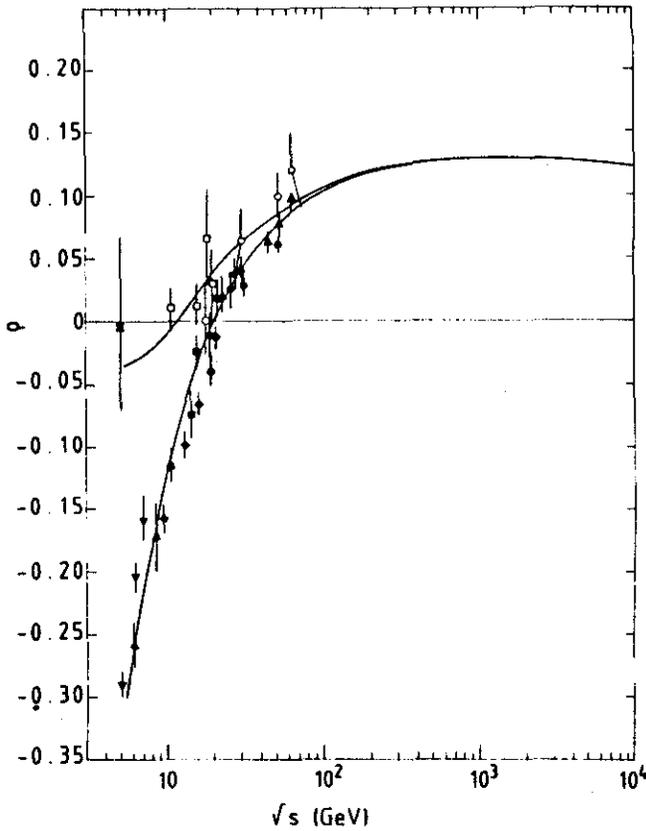


Figura 3.21 Razão entre as partes real e imaginária da amplitude hadrônica para pp (pontos pretos) e $\bar{p}p$ (círculos) [49].

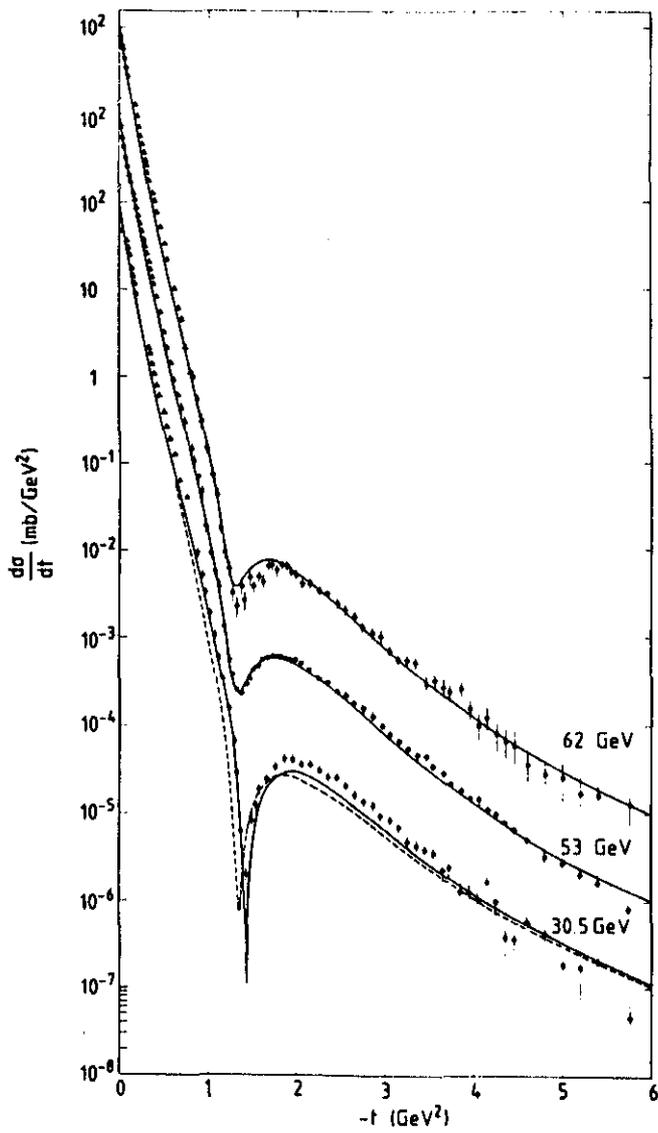


Figura 3.22 Seção de choque diferencial para pp nas energias indicadas no gráfico. As linhas cheias referem-se a pp e a linha tracejada a $\bar{p}p$ [49].

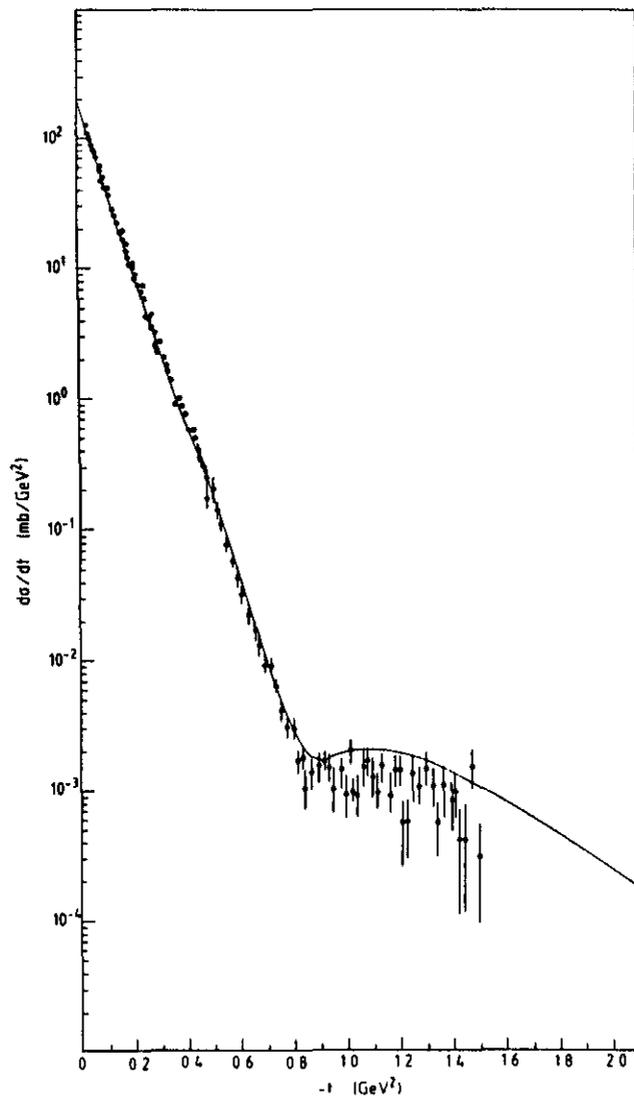


Figura 3.23 Seção de choque diferencial para $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 550$ GeV e a previsão do modelo [49].

Uma interpretação feita do segundo termo entre chaves de (3.65) é devida a Kamran e Qureshi [16], eles consideram

$$\frac{1 - \frac{q^2}{a^2}}{1 + \frac{q^2}{a^2}} \quad (3.67)$$

a amplitude elementar média f e utilizam-na com seus próprios fatores de forma parametrizados para descrever o espalhamento elástico pion-próton e kaon-próton. Outra interpretação é dada por Sanielevici e Valiñ [50] onde (3.67) é o fator de forma de matéria valon-valon reduzido; eles utilizam essa interpretação no estudo do espalhamento pp e πp .

3.4.4.7 Modelo de Menon e Pimentel

Este modelo constitui o ponto de partida para a análise central deste trabalho. Como comentado na introdução o objetivo desta pesquisa é um estudo sobre reformulações de certos aspectos do modelo, o que é apresentado no capítulo 4. Por isso faremos aqui uma revisão mais detalhada das origens e desenvolvimentos do modelo nos últimos anos.

Com o objetivo de utilizar uma nomenclatura que será útil na análise apresentada no capítulo 4, utilizaremos aqui uma nomenclatura um pouco distinta da que aparece nas referências que citaremos, porém plenamente equivalente.

a) Formulação básica

O primeiro passo na elaboração do modelo diz respeito à escolha das funções que determinam a opacidade. Com base em testes e análises de diversas possibilidades [51], tomou-se [48,52]

- Fatores de forma do tipo polo duplo:

$$G_i \equiv (1 + q^2/\alpha_i^2)^{-1}(1 + q^2/\beta_i^2)^{-1}, \quad i = A, B. \quad (3.68)$$

- Amplitude elementar *puramente imaginária* dependente de um parâmetro livre, correspondendo a uma modificação do fator do modelo BSW,

$$f \equiv i[1 - (q^2/a^2)]/[1 + (q^2/a^2)^2]. \quad (3.69)$$

- Constante de absorção real como parâmetro livre.

A escolha do pólo duplo para o fator de forma é útil por introduzir dois parâmetros livres (α^2 e β^2), não sendo portanto identificado a priori com o fator de forma eletromagnético. A modificação no fator de Bourrely, Soffer e Wu foi feita para garantir a existência da transformada de Fourier, condição necessária, como vimos, no formalismo de difração múltipla. Para não complicar a notação vamos utilizar os índices A, B daqui em diante apenas quando for conveniente.

Com essas escolhas a opacidade (3.56) pode ser determinada analiticamente, com resultado (para partículas idênticas)

$$\Omega = C \{A_1 K_0(\alpha b) + A_2 K_0(\beta b) + A_3 kei_0(\alpha b) + A_4 ker_0(\alpha b) + [A_5 K_1(\alpha b) + A_6 K_1(\beta b)]b\}, \quad (3.70)$$

onde K_0 e K_1 são as funções de Bessel, kei_0 e ker_0 as funções de Kelvin (Thomson) e

$$A_1 = \frac{\alpha^4 \beta^4 a^2}{(\beta^2 - \alpha^2)^2} \left[\frac{2A_\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{B_\alpha + \alpha^2 A_\alpha}{a^4 + \alpha^4} \right],$$

$$A_2 = \frac{\alpha^4 \beta^4 a^2}{(\beta^2 - \alpha^2)^2} \left[\frac{2A_\alpha}{\beta^2 - \alpha^2} + \frac{B_\beta + \beta^2 A_\beta}{a^4 + \beta^4} \right],$$

$$A_3 = \frac{\alpha^4 \beta^4}{(\beta^2 - \alpha^2)^2} \left[\frac{2(B_\beta - B_\alpha)}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{a^4 A_\alpha - \alpha^2 B_\alpha}{a^4 + \alpha^4} + \frac{a^4 A_\beta - \beta^2 B_\beta}{a^4 + \beta^4} \right],$$

$$A_4 = \frac{\alpha^4 \beta^4 a^2}{(\beta^2 - \alpha^2)^2} \left[\frac{2(A_\beta - A_\alpha)}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{B_\alpha + \alpha^2 A_\alpha}{a^4 + \alpha^4} - \frac{B_\beta + \beta^2 A_\beta}{a^4 + \beta^4} \right],$$

$$A_5 = \frac{\alpha^4 \beta^4 a^2}{(\beta^2 - \alpha^2)^2} \frac{A_\alpha}{2\alpha}, \quad A_6 = \frac{\alpha^4 \beta^4 a^2}{(\beta^2 - \alpha^2)^2} \frac{A_\beta}{2\beta},$$

$$A_j = \frac{a^2 + j^2}{a^4 + j^4}, \quad B_j = \frac{a^2 j^2 - a^4}{a^4 + j^4}, \quad j = \alpha, \beta.$$

Sendo a opacidade real, a amplitude de espalhamento é puramente imaginária, fórmulas (3.59), (3.60) e (3.61). Como estimativa da parte real, fez-se uso da fórmula de Martin (seção 4.2) [53], através da qual,

$$Re\{F\} = \rho \frac{d}{dt}(tIm\{F\}),$$

de modo que a seção de choque diferencial é expressa por

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\sigma_T^2}{16\pi} \{ \phi(t, s) + \rho^2 \left[\frac{d}{dt} [t\phi(t, s)] \right]^2 \}, \quad (3.71)$$

onde ρ é a razão entre as partes real e imaginária da amplitude para frente ($\theta = 0$) e

$$\phi(t, s) = \frac{F(t, s)}{F(0, s)}.$$

Voltaremos a discutir o uso desta fórmula no capítulo 4.

Para valores de entrada dos parâmetros livres em (3.70), a parte imaginária da amplitude é determinada por integração numérica (fórmulas (3.59), (3.60), (3.61)) e daí a seção de choque diferencial através da fórmula de Martin (3.71), onde utiliza-se como entrada o valor experimental de ρ em cada energia.

Para interação partícula-partícula tem-se 4 parâmetros livres: α^2 , β^2 , a^2 e C , que são determinados através de ajustes aos dados experimentais.

A formulação acima constitui a estrutura básica do modelo. O ponto seguinte foi a determinação das dependências energéticas dos parâmetros livres, de modo a se obter uma reprodução dos dados experimentais.

Uma análise detalhada da influência de cada parâmetro livre na forma da seção de choque diferencial (em termos do momento transferido) mostrou que dados experimentais de espalhamento elástico pp podem ser descritos com apenas dois parâmetros dependentes da energia [48], um deles é a constante de absorção e para o segundo descobriu-se duas possibilidades:

$$\alpha^2(s) \quad \text{ou} \quad a^2(s).$$

O primeiro caso implica em fator de forma dependente da energia (equação 3.68) e o segundo em amplitude elementar dependente da energia (equação 3.69). Passamos a seguir a discutir os resultados obtidos em cada caso.

b) Fatores de forma dependentes da energia

Neste caso obteve-se uma descrição satisfatória dos dados experimentais tanto do espalhamento pp como $\bar{p}p$ a altas energias com os seguintes resultados de parametrizações [21,48,54]

$$\begin{aligned}
 a_{pp}^2 &= a_{\bar{p}p}^2 = 8,2 \text{ GeV}^2 \\
 \beta_{pp}^2 &= 1,80 \text{ GeV}^2 \quad , \quad \beta_{\bar{p}p}^2 = 1,55 \text{ GeV}^2 \\
 \alpha^2 &= \xi_1 [\ln s]^{\xi_2}, C = \xi_3 \exp\{\xi_4 [\ln s]^2\}.
 \end{aligned}
 \tag{3.72}$$

Os valores dos parâmetros ξ_j , $j = 1, 2, 3, 4$ são apresentados na tabela 3.6 e as previsões do modelo, comparadas com os dados experimentais, nas figuras 3.24 a 3.27.

	ξ_1 (GeV^2)	ξ_2	ξ_3 (GeV^{-2})	ξ_4	a^2 (GeV^2)	β^2 (GeV^2)
pp	0,846	-0,339	9,01	0,00323	8,2	1,80
$\bar{p}p$	0,621	-0,206	9,10	0,00401	8,2	1,55

Tabela 3.6 Parâmetros para fator de forma dependente da energia [54].

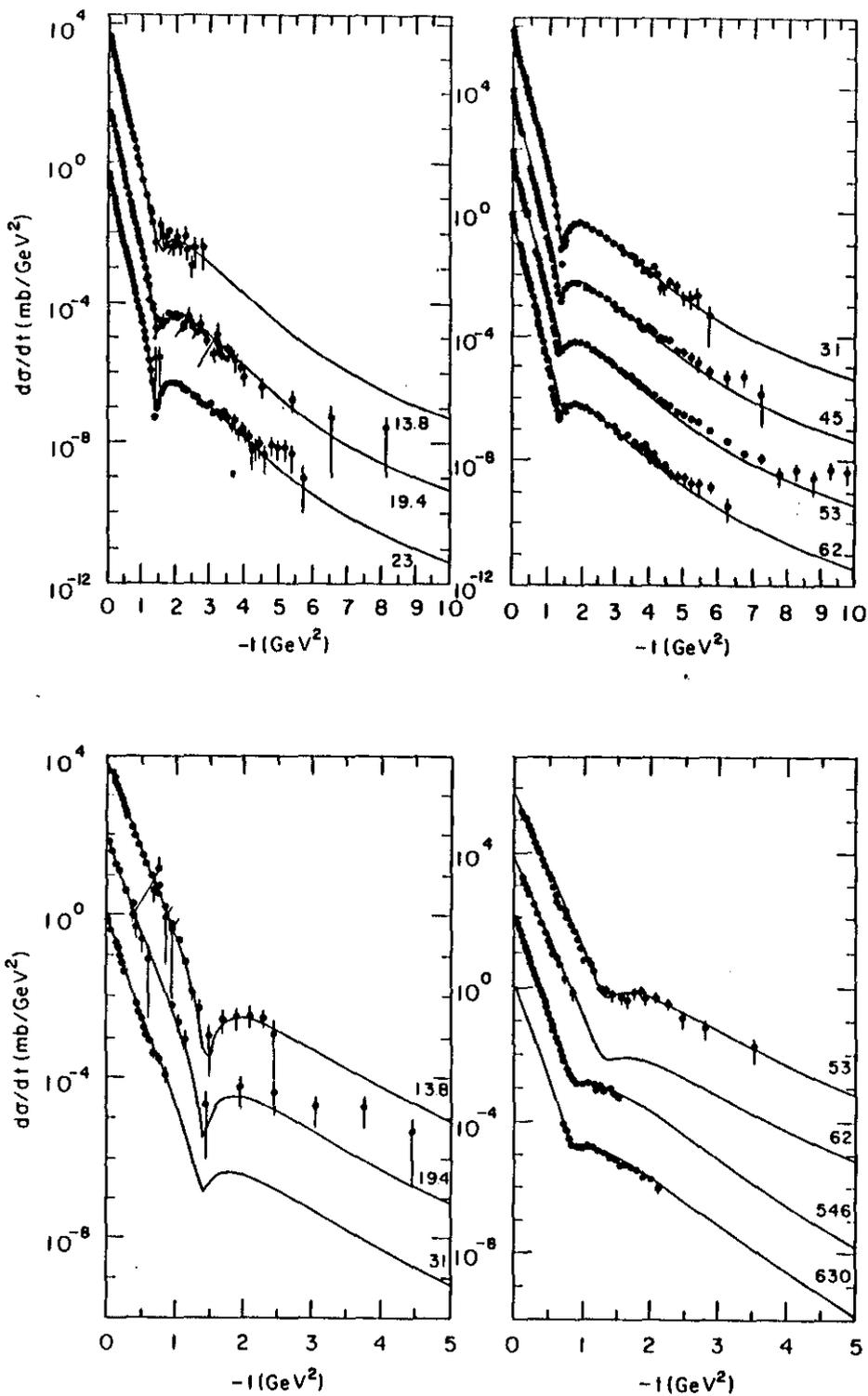


Figura 3.24 Seção de choque diferencial prevista pp (em cima) e $\bar{p}p$ (embaixo) com dados experimentais. Os valores numéricos à direita indicam as energias no sistema de centro de massa em unidades de GeV e as curvas e dados foram multiplicados por potências de 10 [22,54].

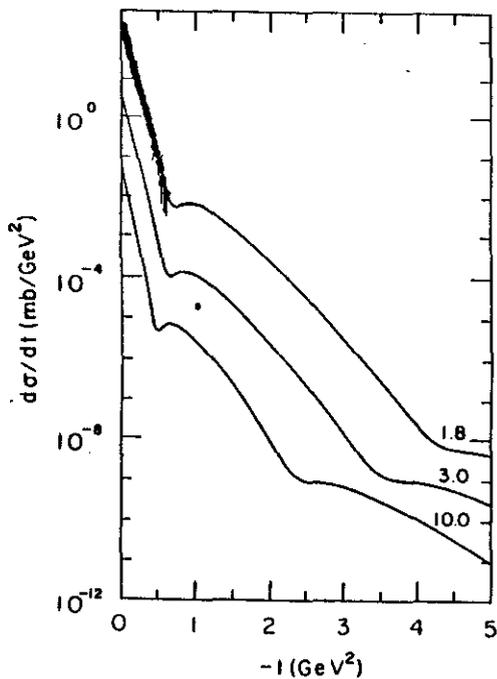


Figura 3.25 Previsões em energias do Tevatron para $\bar{p}p$ com dados experimentais em 1.8 TeV [22].

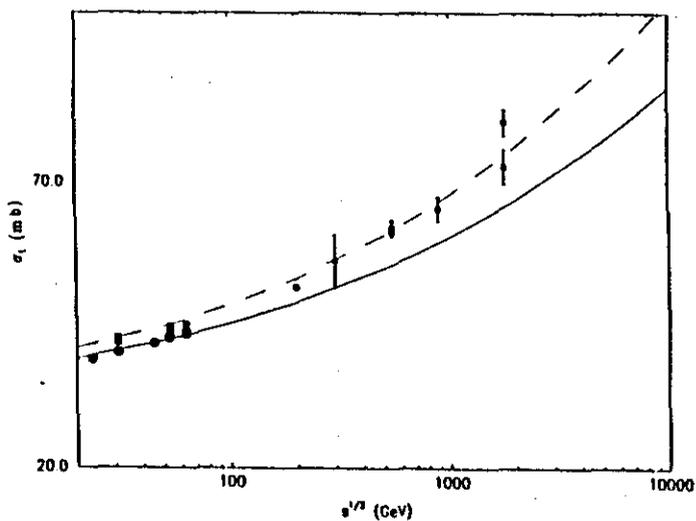


Figura 3.26 Resultados obtidos para a seção de choque total [55].

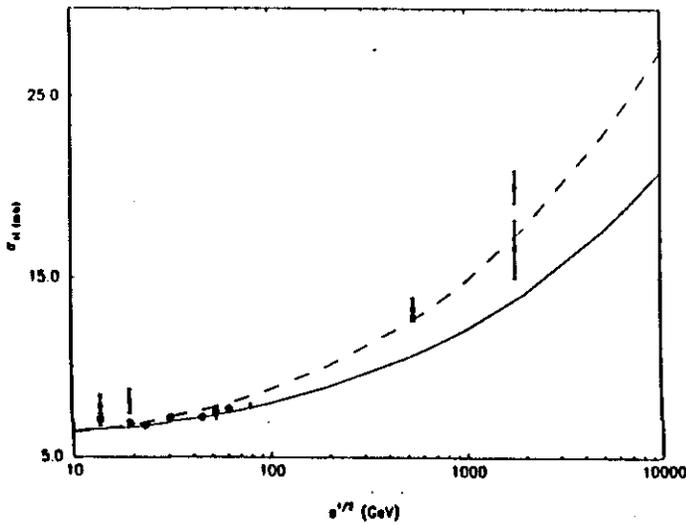


Figura 3.27 Previsões para seção de choque elástica integrada [55].

Foram também obtidas diversas interpretações geométricas a partir de regularidades observadas na dependência dos parâmetros C_{AB} e $\alpha_{A,B}^2$ em termos da seção de choque total e que podem ser encontradas na referência [21]. Outras discussões, previsões e interpretações desse modelo são discutidas na referência [56].

c) Amplitude elementar dependente da energia

A partir dos primeiros resultados sobre a possibilidade de dependência energética do parâmetro a^2 [48], Menon abordou o problema do espalhamento elástico pp, determinando parametrizações de $a^2(s)$, $C(s)$ de modo a obter uma descrição dos dados experimentais da seção de choque diferencial, na região do ISR [57]. Com as expressões

$$a^2 = \eta_1 + \eta_2 [\ln s]^2, \quad C = \eta_3 + \eta_4 [\ln s]^2 \quad (3.73)$$

e os valores dos parâmetros livres da tabela 3.7, as previsões estão de acordo com os dados experimentais, como é mostrado na figura 3.28. O efeito da parte real introduzida através da fórmula de Martin foi também estudada neste caso por Martini e Menon [58]. Na figura 3.29 mostram-se as previsões utilizando-se somente a parte imaginária da amplitude hadrônica. Vê-se que o efeito da prescrição de Martin é essencialmente o preenchimento do mínimo de difração (“dip”).

η_1 (GeV ²)	η_2 (GeV ²)	η_3 (GeV ⁻²)	η_4 (GeV ⁻²)	α^2 (GeV ²)	β^2 (GeV ²)
0,483	0,124	7,814	0,0518	0,419	1,80

Tabela 3.7 Parâmetros para espalhamento elástico com amplitude dependente da energia [57].

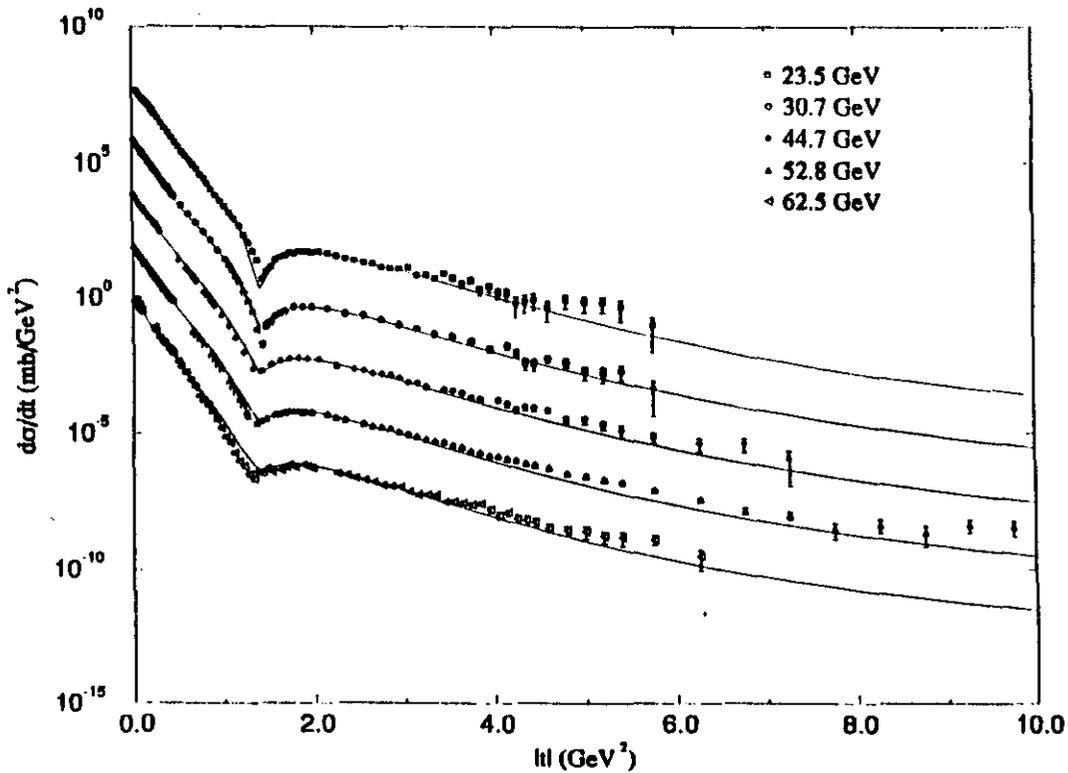


Figura 3.28 Descrição para amplitude pártion-pártion dependente da energia (pp) [57].

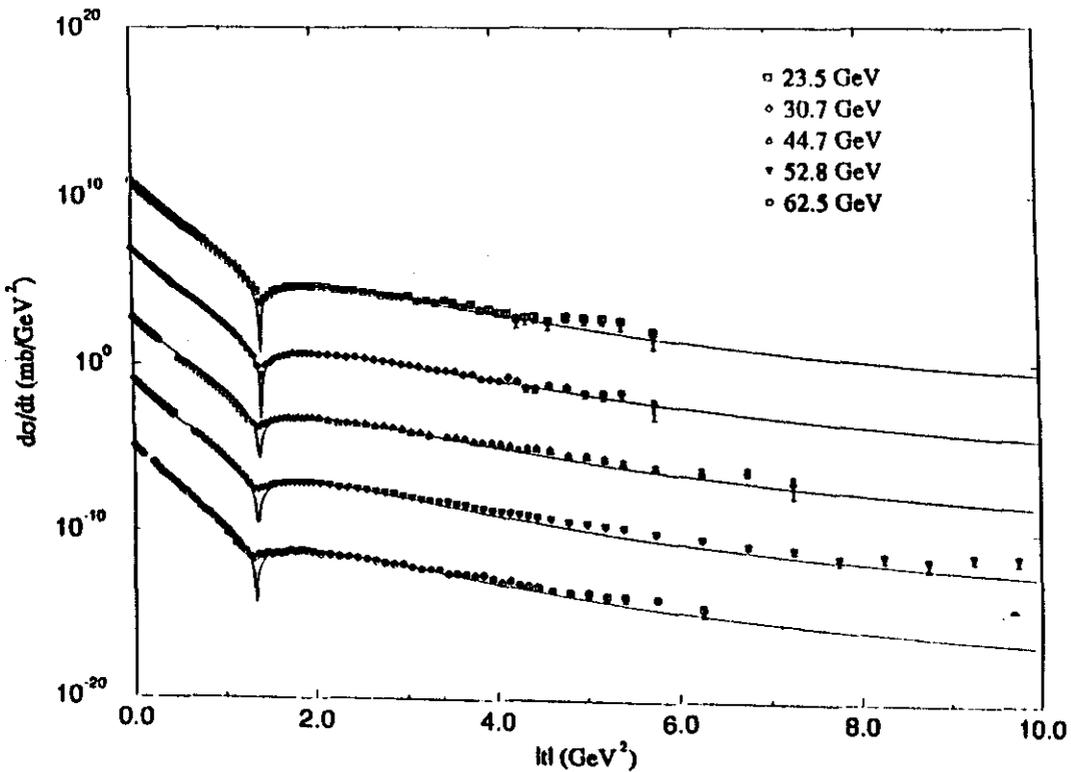


Figura 3.29 Seção de choque diferencial para pp sem a parte real fornecida pela fórmula de Martin [58].

No próximo capítulo trataremos do objetivo central deste trabalho que é um primeiro estudo sobre a possibilidade de se reformular este modelo de modo a obter diretamente partes real e imaginária da amplitude hadrônica, isto é, não utilizar a fórmula de Martin. Por isso no que segue denominaremos o formalismo apresentado nesta seção de *Modelo Difrativo Original* (MDO).

3.4.4.8 Considerações gerais

Com base na revisão apresentada dos modelos de difração múltipla vemos que, no geral, diferentes escolhas de fatores de forma e/ou amplitudes elementares descrevem de forma satisfatória os dados experimentais de seção de choque diferencial. O mesmo ocorre com modelos recentes que apresentam algumas variantes das idéias essenciais discutidas, como Pumplin [59], que utiliza discos negros e gaussianas como funções de perfil e Kawasaki e outros [60] com abordagens através de funções de Bessel.

Sobre a descrição conjunta de todos os dados experimentais, incluindo o parâmetro ρ , queremos destacar o fato dos modelos de difração múltipla não apresentarem, no geral, descrições plenamente satisfatórias. Encontramos apenas dois trabalhos com modelos geométricos que enfrentam claramente o problema da descrição de $\rho(s)$: o de Hüfner e Povh que utiliza poucos parâmetros livres e consegue uma boa descrição dele mas encontra problemas em descrever a seção de choque diferencial para além do mínimo difrativo e o de Buenerd, Furget e Valin que descreve ρ e também $d\sigma/dt$ mas faz uso de muitos parâmetros livres, além de apresentar algumas inconsistências que serão discutidas na seção 4.7.5.5; os outros ou utilizam ρ como dado de entrada do problema ou não mostram claramente as previsões obtidas para ele.

Uma particularidade que distingue o MDO em relação aos demais modelos é a obtenção de dependências energéticas para os parâmetros livres (equações 3.72 e 3.73). Com isso o número de parâmetros livres eleva-se para 12, o que está dentro dos limites dos demais modelos que consideram parametrizações do fator de forma eletromagnético. Entretanto, com essas dependências, é possível prever seções de choque total e elástica (figuras 3.26 e 3.27) o que não ocorre com alguns dos modelos referidos. Devido ao uso da fórmula de Martin, o importante parâmetro ρ é entrada em cada energia, não podendo ser previsto, como também ocorre na abordagem mais recente de Chou e Yang [20] ou nos modelos que utilizam ρ e σ_t como valores de ajuste (Saleem, Aleem e Alzhar).

Além do aspecto acima referido, uma particularidade da formulação de 1988 [21,48] está no fato de ter levado à primeira descrição ampla dos dados experimentais de espalhamento pp e $\bar{p}p$ a altas energias com fatores de forma dependentes da energia. Posteriormente, abordagens semelhantes foram desenvolvidas em 1990 através de modelos geométricos por Chou e Yang [20], em 1991 através de modelos híbridos por Covolan, Jenkovszky e Predazzi [61] e em 1992 no modelo de Hüfner e Povh [45].

Capítulo 4. MODELO COM AMPLITUDE ELEMENTAR COMPLEXA

4.1 INTRODUÇÃO

Nesse trabalho nos propomos a estudar a descrição do espalhamento elástico próton-próton com uma abordagem baseada no modelo difrativo original (MDO) (seção 3.4.4.7), mas a parte real não será fornecida pela fórmula de Martin. Como será visto nas próximas seções as críticas ao uso e validade da fórmula de Martin nos fizeram optar por uma amplitude elementar média f complexa que substituísse a contribuição da parte real, anteriormente dada pela prescrição de Martin (equação 3.71). Para tanto este capítulo é dividido em 7 seções. Na seção 4.2 apresentamos as hipóteses básicas utilizadas na dedução da fórmula de Martin, bem como as críticas a ela associadas. Na seção 4.3 introduzimos nossa hipótese de trabalho, definindo a amplitude elementar complexa e na seção 4.4 apresentamos previsões preliminares e comparações com as obtidas através da fórmula de Martin. Na seção 4.5 explicitamos as estratégias, objetivos e métodos envolvidos nos testes e análises de nossa hipótese e na seção 4.6 estabelecemos novas parametrizações do MDO. A essência do trabalho encontra-se na seção 4.7 onde inicialmente apresentamos em detalhe os testes de parametrização em função da energia para a amplitude elementar complexa, mostrando que é possível obter boa descrição dos dados experimentais das seções de choque diferencial e integradas. Em seguida tratamos do problema da descrição do parâmetro ρ , mostrando que uma descrição satisfatória das seções de choque, através de nosso formalismo, não implica numa descrição de ρ . Com base nesses resultados, realizamos novas parametrizações de modo a, embora de forma menos satisfatória, obter descrições de todas essas grandezas na região estudada. Por último apresentamos uma discussão crítica sobre os modelos de difração múltipla no que diz respeito a número de parâmetros livres e à descrição global dos observáveis físicos.

4.2 FÓRMULA DE MARTIN: HIPÓTESES E CRÍTICAS

A fórmula de Martin [53] é deduzida sob a hipótese de que assintoticamente

$$\sigma_t(s) \propto (\log(s))^2$$

e de que, nesse regime, a amplitude de espalhamento pode ser expressa em termos de apenas uma variável, $\tau = -t(\log(s))^2$, assim

$$\frac{F(s, t)}{F(s, 0)} = \phi(\tau).$$

Com isso, através de relações de dispersão e considerando que a contribuição ímpar da amplitude é desprezível a altas energias, a parte real da amplitude pode ser estimada através de

$$Re\{F\} = \rho \frac{d}{dt}(tIm\{F\}),$$

onde ρ é a razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento em $t = 0$.

Apesar de, como comentado na seção 3.4.4.7, a utilização dessa prescrição levar a uma boa descrição dos dados experimentais, três tipos de críticas são comumente apresentadas:

- 1) A propriedade de invariância da função $\phi(\tau)$ está associada à hipótese de Invariância de Escala Geométrica de Dias de Deus [62]. Implicando em

$$\sigma_{el}(s) \simeq (\log(s))^2,$$

a previsão é de que

$$\frac{\sigma_{el}}{\sigma_t} \simeq \text{constante}.$$

Embora essa propriedade seja aproximadamente válida na região do ISR, dados experimentais de espalhamento elástico $\bar{p}p$ na região do SPS ($\sqrt{s} = 550 - 600 \text{ GeV}$) [63] mostram um crescimento dessa razão e portanto uma violação da Invariância de Escala Geométrica. Segundo Henzi e Valin [64] isso significa que a invariância de escala associada à fórmula de Martin descreve o crescimento do raio do próton, mas não consegue descrever o escurecimento dele. Vários aspectos sobre a validade da fórmula de Martin podem ser encontradas na referência [64].

- 2) Na dedução utiliza-se a hipótese de que a altas energias a contribuição ímpar da amplitude é desprezível. Entretanto, Gauron, Nicolescu e Leader, através da hipótese de Odderon vêm mostrando que a consideração de contribuição ímpar na amplitude leva também a descrições satisfatórias dos dados experimentais [65].
- 3) Sendo o parâmetro ρ usado como entrada na fórmula de Martin, em cada energia, ele não pode ser previsto pelos modelos que utilizam essa prescrição .

Um aspecto interessante é o fato de que, apesar de a crítica (1) ser proveniente de dados experimentais, os modelos que utilizam a fórmula de Martin (Chou e Yang, MDO) obtêm boas descrições dos dados experimentais mesmo na região do SPS e Tevatron, onde é inquestionável a violação da Invariância de Escala Geométrica. Os mesmos modelos preveem também tanto escurecimento como aumento do raio, em contraste à crítica de Henzi e Valin. Até onde sabemos não existe na literatura uma explicação para esse fato.

De qualquer modo, as críticas acima apresentadas nos levaram a buscar uma descrição dos dados experimentais do espalhamento pp através do MDO, porém sem o uso da fórmula de Martin. Passamos agora a discutir essa nova abordagem.

4.3 HIPÓTESE FENOMENOLÓGICA PARA A AMPLITUDE ELEMENTAR

Na formulação do MDO a opacidade é uma função real da energia e do parâmetro de impacto e por isso a amplitude hadrônica correspondente é puramente imaginária (3.59-61). Isso é devido à escolha de funções reais para representar a constante de absorção e os fatores de forma e à amplitude elementar puramente imaginária (equações 3.68 e 3.69). Nossa hipótese se baseia no fato de que é possível obter uma amplitude hadrônica complexa se considerarmos complexa qualquer das grandezas acima.

Por analogia à hipótese usualmente considerada para a amplitude hadrônica, de que a razão entre as partes real e imaginária independe do momento transferido na região do pico de difração

(seção 2.1.2), fizemos a mesma hipótese para a amplitude elementar. Assim, introduzimos um parâmetro $\lambda(s)$ definido pela razão

$$\lambda(s) \equiv \frac{Re\{f(q, s)\}}{Im\{f(q, s)\}} \quad (4.1)$$

e de (3.69) tomamos

$$Im\{f(q, s)\} = \frac{1 - \frac{q^2}{a^2}}{1 + \frac{q^4}{a^4}}, \quad (4.2)$$

de modo que

$$Re\{f(q, s)\} = \lambda(s) \frac{1 - \frac{q^2}{a^2}}{1 + \frac{q^4}{a^4}}.$$

A razão para (4.2) é o fato do MDO descrever os dados fora da região do mínimo (“dip”) quando a fórmula de Martin não é utilizada (figura 3.29), além de ser consistente com análise independente de modelo [36]. Com isso vemos que o parâmetro $\lambda(s)$ tem para a amplitude elementar papel análogo a $\rho(s)$ para a amplitude hadrônica.

Utilizando (3.58) com os fatores de forma do MDO (3.68) e nossa hipótese para $f(q, s)$ (4.1 e 4.2) obtemos uma opacidade complexa

$$\Omega_{comp}(b, s) = C(1 - i\lambda) < [(1 + q^2/\alpha^2)(1 + q^2/\beta^2)]^{-2} [1 - (q^2/a^2)][1 + (q^2/a^2)^2]^{-1} >. \quad (4.3)$$

No modelo difrativo original,

$$\Omega(b, s) = C < [(1 + q^2/\alpha^2)(1 + q^2/\beta^2)]^{-2} [1 - (q^2/a^2)][1 + (q^2/a^2)^2]^{-1} >$$

tem resultado analítico fornecido em (3.70) e relaciona-se com $\Omega_{comp}(b, s)$ por

$$\Omega_{comp} = (1 - i\lambda)\Omega. \quad (4.4)$$

Através de (3.59) e (3.60) obtemos

$$F(q, s) = i < 1 - e^{-\Omega_{comp}(b, s)} >, \quad (4.5)$$

de modo que em termos da opacidade real do MDO (3.70) obtemos agora

$$Re\{F\} = < e^{-\Omega} \text{sen}(\lambda\Omega) >, \quad Im\{F\} = < 1 - e^{-\Omega} \text{cos}(\lambda\Omega) >. \quad (4.6)$$

Vemos que para $\lambda = 0$ caímos na amplitude do MDO.

A seção de choque diferencial fica em termos de

$$\frac{d\sigma}{dt} = \pi \{ [Re\{F\}]^2 + [Im\{F\}]^2 \}. \quad (4.7)$$

As grandezas integradas podem ser calculadas através da Relação de Unitaridade [27,66]

$$2\text{Re}\{\Gamma(s, b)\} = |\Gamma(s, b)|^2 + G_{in}(s, b),$$

onde $\Gamma(s, b)$ é a função de perfil hadrônica e $G_{in}(s, b)$ a função de recobrimento inelástica. Através do teorema óptico (apêndice 3) e do formalismo de parâmetro de impacto (seção 3.4.4.1) obtém-se

$$\sigma_t = 4\pi \int_0^{+\infty} \text{Re}\{\Gamma(s, b)\}bdb, \quad \sigma_{inel} = 2\pi \int_0^{+\infty} G_{in}(s, b)bdb, \quad \sigma_{el} = 2\pi \int_0^{+\infty} |\Gamma(s, b)|^2bdb,$$

onde $\Gamma(s, b) = 1 - e^{-(1-i\lambda)\Omega}$. Com isso podemos calcular a seção de choque total, elástica e inelástica a partir de λ e da opacidade do MDO:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= 4\pi \int_0^{+\infty} [1 - e^{-\Omega} \cos(\lambda\Omega)]bdb, \\ \sigma_{el} &= 2\pi \int_0^{+\infty} [1 - 2e^{-\Omega} \cos(\lambda\Omega) + e^{-2\Omega}]bdb, \\ \sigma_{inel} &= 2\pi \int_0^{+\infty} [1 - e^{-2\Omega}]bdb. \end{aligned} \tag{4.8}$$

E, para calcular a razão entre parte real e imaginária da amplitude hadrônica (ρ), temos

$$\rho = \frac{\text{Re}\{F(t=0)\}}{\text{Im}\{F(t=0)\}}. \tag{4.9}$$

Com isso, para interação pp o formalismo tem 5 parâmetros livres

$$C, \alpha^2, \beta^2, a^2, \lambda.$$

Através do MDO temos informações sobre os valores e dependência energética dos quatro primeiros. O ponto central agora é determinar $\lambda(s)$ de modo a descrever os dados experimentais.

Observemos que, embora a equação obtida (4.3) seja análoga ao modelo de Glauber e Velasco e de Saleem, Aleem e Alzhar, não é claro nessas publicações se a mesma hipótese foi utilizada pelos autores ou se, por exemplo, eles consideram uma constante de absorção complexa. Notemos também que com 4.1 e 4.2 o produto da constante de absorção pela amplitude elementar,

$$Cf(q, s) = C(\lambda + i) \frac{1 - \frac{q^2}{a^2}}{1 + \frac{q^4}{a^4}}$$

tem a mesma estrutura da amplitude complexa utilizada por Buenerd, Furget e Valin (seção 3.4.3.3).

4.4 RESULTADOS PRÉVIOS

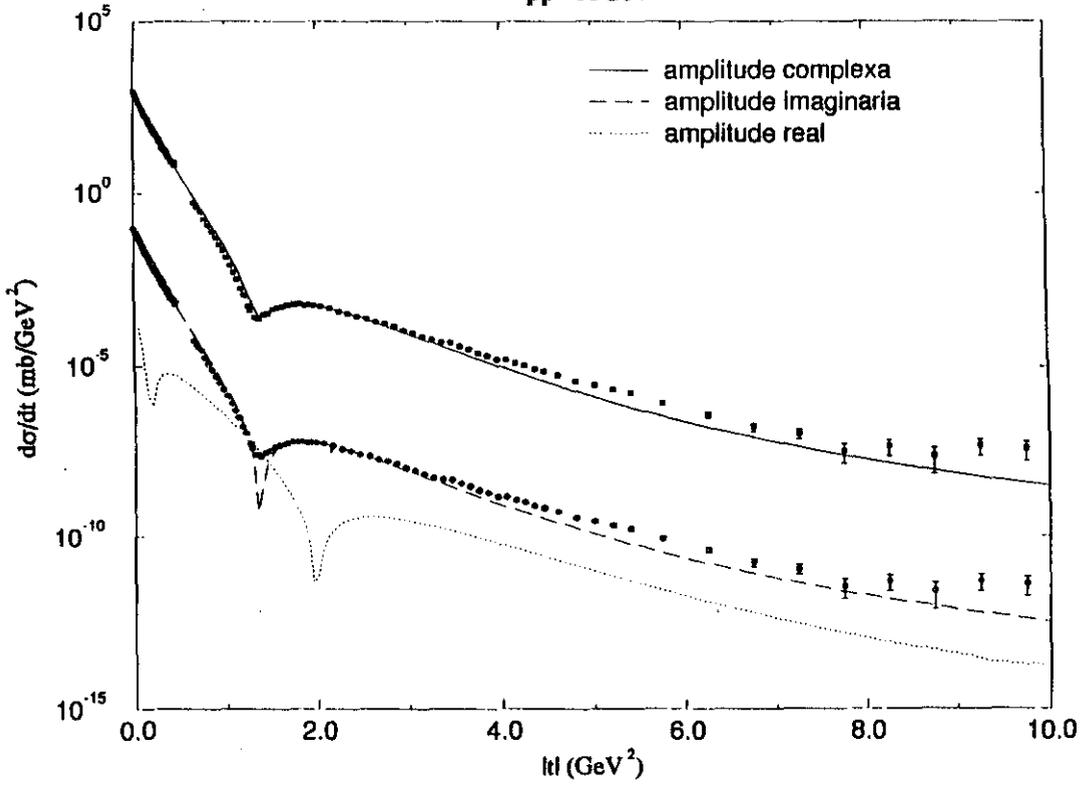
Como primeira verificação da hipótese feita, realizamos um teste preliminar, utilizando parametrizações obtidas através do MDO para C , α^2 , β^2 e a^2 e buscando indicações do comportamento de λ em cada energia que reproduzisse os dados experimentais.

Para tanto escolhemos os resultados mais recentes obtidos com o MDO e discutidos na seção 3.4.4.7.c. As figuras 3.28 e 3.29 dessa seção mostram a comparação das previsões do modelo com os dados experimentais, com e sem o uso da fórmula de Martin, respectivamente. A abordagem corresponde à amplitude elementar dependente da energia e nesse caso as dependências energéticas dos parâmetros $C(s)$ e $a^2(s)$ são dadas pela equação (3.73) e os valores dos outros parâmetros são os da tabela 3.7, $\alpha^2 = 0,419 \text{ GeV}^2$ e $\beta^2 = 1,80 \text{ GeV}^2$.

Iniciamos a análise com a energia de 53 GeV. Com os valores acima referidos dos parâmetros livres e através das equações (4.3) a (4.7), determinamos o valor de λ que reproduz os dados experimentais da seção de choque diferencial, de forma semelhante à obtida com a fórmula de Martin. Utilizando um critério visual (não estatístico) na região do mínimo obtivemos $\lambda = 0.055$. O resultado é mostrado na figura 4.1 e comparado com o obtido com a fórmula de Martin através do MDO [67].

Formula de Martin

pp - 53GeV



Amplitude complexa parton-parton

pp 53 GeV

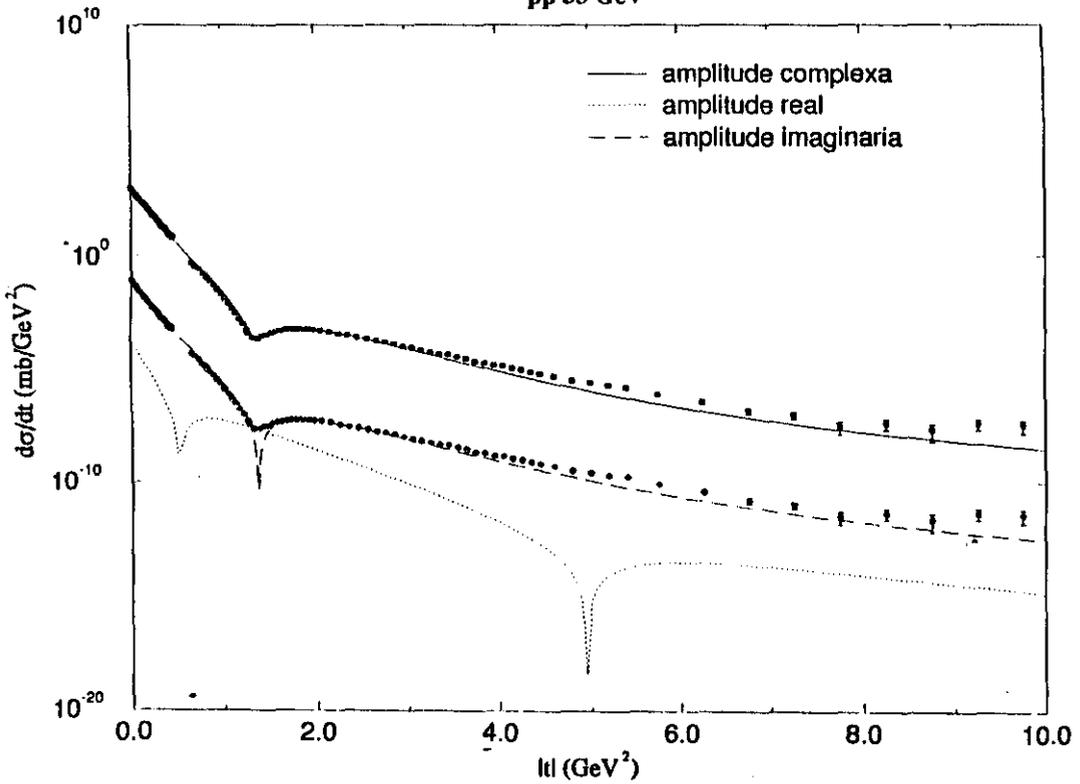


Figura 4.1 Previsões com amplitude elementar complexa ($\lambda = 0,055$) e com fórmula de Martin para espalhamento pp em $\sqrt{s} = 53$ GeV [67].

Da figura acima podemos ver como ocorre o preenchimento do mínimo (parte real) através da fórmula de Martin e através de nossa hipótese para a amplitude elementar complexa. Observamos que com a fórmula de Martin o primeiro mínimo da parte real ocorre em $|t| \simeq 0,20 GeV^2$ enquanto que com a amplitude elementar complexa, em $|t| \simeq 0,45 GeV^2$. O valor com a fórmula de Martin é consistente com análises baseadas em relações de dispersão [27]. No modelo de Bourrely, Soffer e Wu esse mínimo ocorre em $|t| \simeq 0,35 GeV^2$ [49,64], estando portanto mais próximo de nossa previsão.

Com o mesmo critério utilizado em $\sqrt{s} = 53 GeV$ determinamos o valor de λ que reproduzisse a região do mínimo para as demais energias e de forma equivalente aos resultados obtidos com a fórmula de Martin. Notando que a "profundidade" do mínimo é determinada pelo valor de λ e que os dados experimentais indicam uma diminuição nessa profundidade quando a energia aumenta buscamos, nos ajustes visuais, *valores de λ crescentes com a energia*. No que segue retornaremos a este ponto. A figura 4.2 mostra os valores obtidos para λ em cada energia juntamente com uma regressão linear que fornece a parametrização [67]

$$\lambda(s) = -0,04829 + 0,01262 \ln(s). \quad (4.10)$$

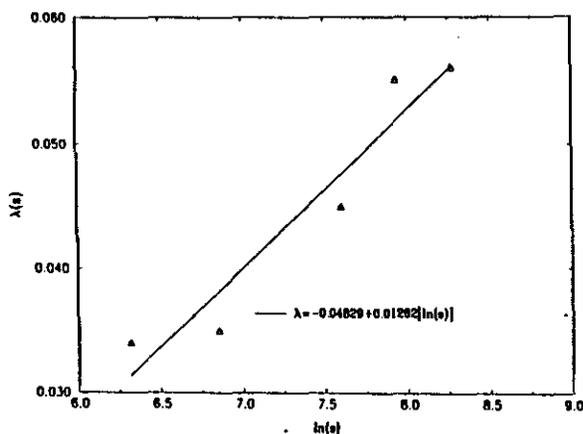


Figura 4.2 Valores de $\lambda(s)$ e a parametrização utilizada.

Com as parametrizações de $\alpha^2(s)$, $C(s)$, β^2 e α^2 do MDO podemos prever a seção de choque diferencial em cada energia. A figura 4.3 mostra os resultados das previsões, comparados com os dados experimentais.

Da figura acima podemos ver como ocorre o preenchimento do mínimo (parte real) através da fórmula de Martin e através de nossa hipótese para a amplitude elementar complexa. Observamos que com a fórmula de Martin o primeiro mínimo da parte real ocorre em $|t| \simeq 0,20 GeV^2$ enquanto que com a amplitude elementar complexa, em $|t| \simeq 0,45 GeV^2$. O valor com a fórmula de Martin é consistente com análises baseadas em relações de dispersão [27]. No modelo de Bourely, Soffer e Wu esse mínimo ocorre em $|t| \simeq 0,35 GeV^2$ [49,64], estando portanto mais próximo de nossa previsão .

Com o mesmo critério utilizado em $\sqrt{s} = 53 GeV$ determinamos o valor de λ que reproduzisse a região do mínimo para as demais energias e de forma equivalente aos resultados obtidos com a fórmula de Martin. Notando que a “profundidade” do mínimo é determinada pelo valor de λ e que os dados experimentais indicam uma diminuição nessa profundidade quando a energia aumenta buscamos, nos ajustes visuais, *valores de λ crescentes com a energia*. No que segue retornaremos a este ponto. A figura 4.2 mostra os valores obtidos para λ em cada energia juntamente com uma regressão linear que fornece a parametrização [67]

$$\lambda(s) = -0,04829 + 0,01262 \ln(s). \quad (4.10)$$

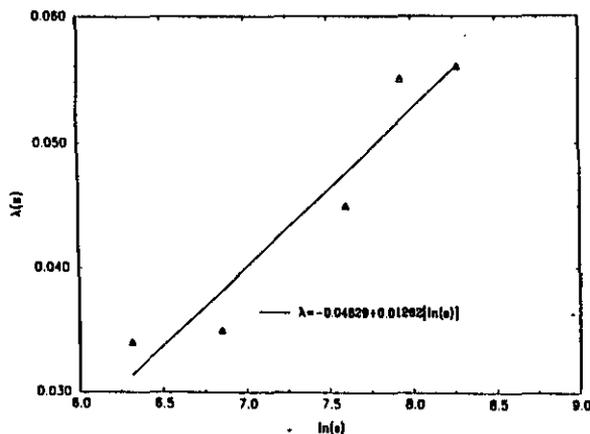


Figura 4.2 Valores de $\lambda(s)$ e a parametrização utilizada.

Com as parametrizações de $a^2(s)$, $C(s)$, β^2 e α^2 do MDO podemos prever a seção de choque diferencial em cada energia. A figura 4.3 mostra os resultados das previsões, comparados com os dados experimentais.

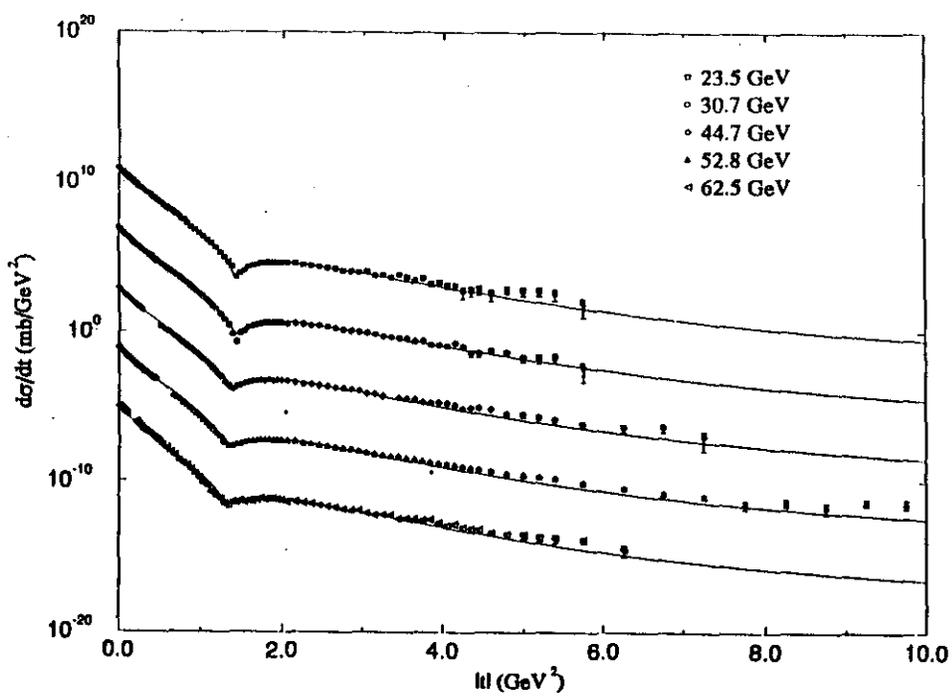


Figura 4.3 Descrição para $d\sigma/dt$ com amplitude elementar dependente da energia e $\lambda(s)$ dado por (4.10) [67].

Esses resultados qualitativos sugerem que a hipótese formulada é uma boa candidata para a elaboração de um novo formalismo. Entretanto um problema central é a determinação precisa do comportamento de $\lambda(s)$, o qual, como vimos é sensível somente na região do mínimo. Na prática a determinação não é simples, devido aos erros experimentais na posição do mínimo em $|t|$ e principalmente na profundidade do mínimo em $d\sigma/dt$. Na figura 4.4 exemplificamos esse aspecto para a energia de 23 GeV onde vemos que $\lambda = 0,032$ e $\lambda = 0,036$ são consistentes com os dados experimentais próximos do mínimo.

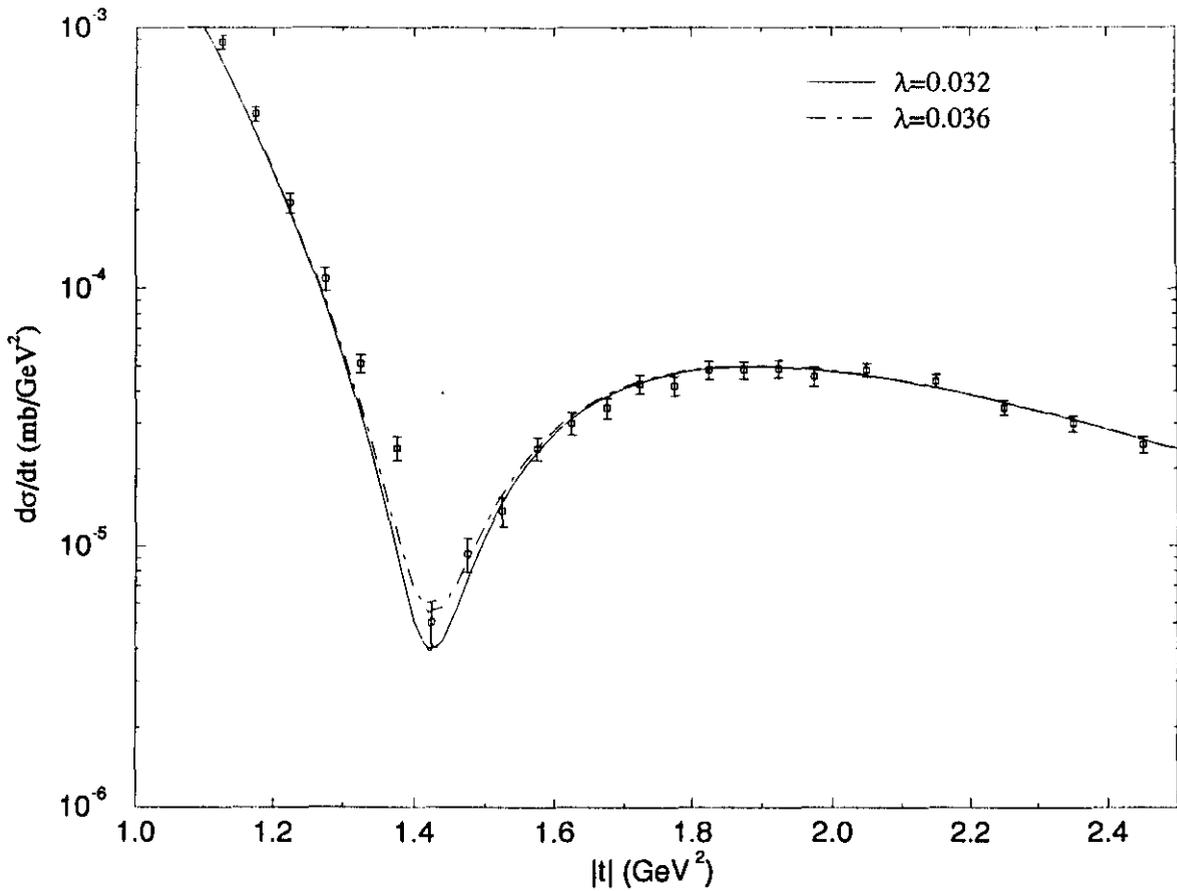


Figura 4.4 Descrições da região do mínimo para $\lambda = 0,032$ e $\lambda = 0,036$ em 23 GeV.

O restante de nossa análise aborda essencialmente esse problema da determinação de $\lambda(s)$. A seguir, apresentamos a estratégia e métodos que serão adotados.

4.5 ESTRATÉGIA DA ANÁLISE

Utilizando o MDO vamos realizar um primeiro estudo sobre a possibilidade de utilização de amplitude elementar complexa com partes real e imaginária proporcionais, em substituição à fórmula de Martin.

Um aspecto essencial de nossa abordagem é que utilizaremos para os parâmetros C , α^2 , β^2 e a^2 os valores *que ajustam os dados experimentais* (independentes de parametrizações) *obtidos originalmente com o uso da fórmula de Martin* [48]. Temos duas razões para isso:

- 1) Como mostrado na figura 4.1, a influência da parte real, é importante somente na região do mínimo, tanto com fórmula de Martin como com amplitude elementar complexa. Portanto, os resultados de $d\sigma/dt$ para pequeno e grande momento transferido não são afetados pelo uso de uma ou outra escolha para a parte real da amplitude.
- 2) Como comentado na seção 3.4.4.7.b, os valores de C e α^2 do MDO que ajustam os dados experimentais apresentam forte regularidade para as reações conjuntas pp e $\bar{p}p$ quando expressas em termos das seções de choque correspondentes [21,22].

Assim, assumindo esses valores como dados iniciais faremos a análise visando:

- a) estudar a eficiência da substituição da fórmula de Martin pela amplitude elementar com partes real e imaginária proporcionais;
- b) um estudo das limitações na utilização dessa amplitude complexa junto com as parametrizações originais (obtidas com fórmula de Martin);
- c) identificar as causas das limitações e propor reanálises que possam ampliar a aplicabilidade do formalismo.

A metodologia usada nas próximas seções consiste em ajustar dados da seção de choque diferencial e verificar a consistência através de previsões das seções de choque integradas σ_t , σ_{inel} e σ_{el} , em seguida investigar a reprodução do parâmetro ρ .

De acordo com o exposto na seção 3.4.4.7 sobre o MDO, vamos atacar o problema da descrição do espalhamento com duas abordagens diferentes:

- fator de forma dependente da energia ($G(s)$);
- amplitude elementar dependente da energia ($f(s)$).

Na primeira abordagem a dependência está no parâmetro $\alpha^2 = \alpha^2(s)$ enquanto no segundo caso no parâmetro $a^2 = a^2(s)$. Em ambas as abordagens ($G(s)$ e $f(s)$) o parâmetro C depende da energia, porém, como veremos, as parametrizações de $C(s)$ são diferentes em cada abordagem.

Antes de iniciar o estudo de $\lambda(s)$ vamos, a partir dos valores de entrada de C , α^2 e a^2 , determinar novas parametrizações em função da energia na região restrita de nossa análise.

4.6 REANÁLISE DAS PARAMETRIZAÇÕES DO MODELO DIFRATIVO ORIGINAL NA REGIÃO DO ISR

Conforme explicado no início da seção 2.2 estamos interessados na faixa de energia de 23 a 63 GeV. Pelo fato do MDO incluir na análise dados experimentais de espalhamento pp de energia inferior a 23 GeV (9,78 GeV, 13,8 GeV e 19,4 GeV) iniciamos o trabalho determinando novas parametrizações para a dependência energética dos parâmetros livres, considerando somente a região de interesse. Também, considerações sobre o número de significativos associados a cada valor de energia foram levados em conta nas parametrizações, bem como procedimentos padrões para as duas abordagens, $G(s)$ e $f(s)$.

4.6.1 Amplitude elementar dependente da energia ($f(s)$)

Na tabela 4.1 encontramos os valores dos parâmetros C , α^2 , β^2 e a^2 que serão utilizados nesta abordagem. Eles foram retirados da referência [48] e correspondem aos valores dos parâmetros que ajustam os dados experimentais (com fórmula de Martin).

$\alpha^2 = 0,42\text{GeV}^2 \quad \beta^2 = 1,8\text{GeV}^2$		
$\sqrt{s}(\text{GeV})$	$C(s) (\text{GeV}^{-2})$	$a^2(s) (\text{GeV}^2)$
23,5	9,857	5,30
30,7	10,260	6,50
44,7	10,805	7,60
52,8	11,100	8,20
62,5	11,325	9,00

Tabela 4.1 Valores dos parâmetros livres C , α^2 , β^2 e a^2 para $f(s)$ [48].

Com os valores da tabela 4.1 obtivemos parametrizações para C e a^2 em termos de $[\ln(s)]^2$ (veja figura 4.5)

$$C(s) = 7,810 + 0,05182[\ln(s)]^2, \quad a^2(s) = 0,475 + 0,124[\ln(s)]^2. \quad (4.11)$$

A pequena diferença em relação aos resultados originais da equação (3.73) e tabela 3.5 é associada ao número de significantes e ao procedimento padrão ao qual nos referimos. A figura 4.6 mostra o comportamento em termos de \sqrt{s} , que será utilizado nesta abordagem.

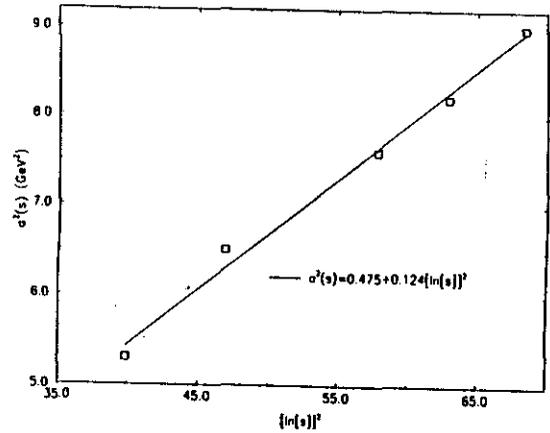
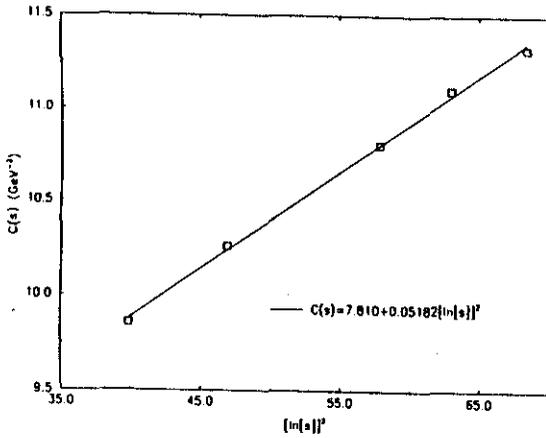


Figura 4.5 Regressão linear para $C(s)$ e $a^2(s)$ em termos de $[\ln(s)]^2$.

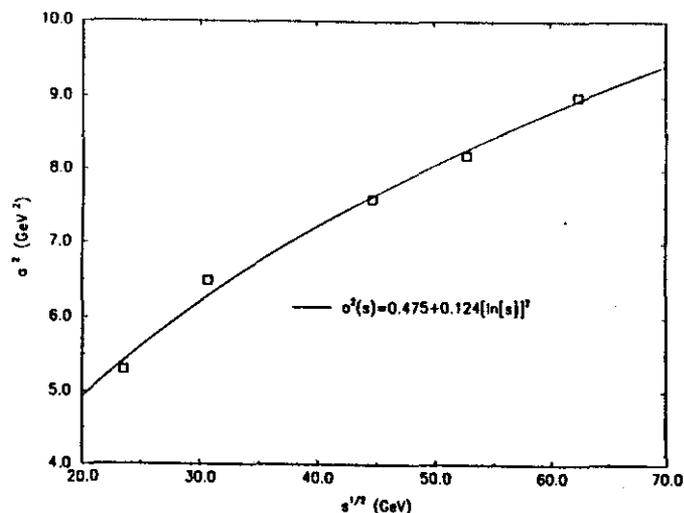
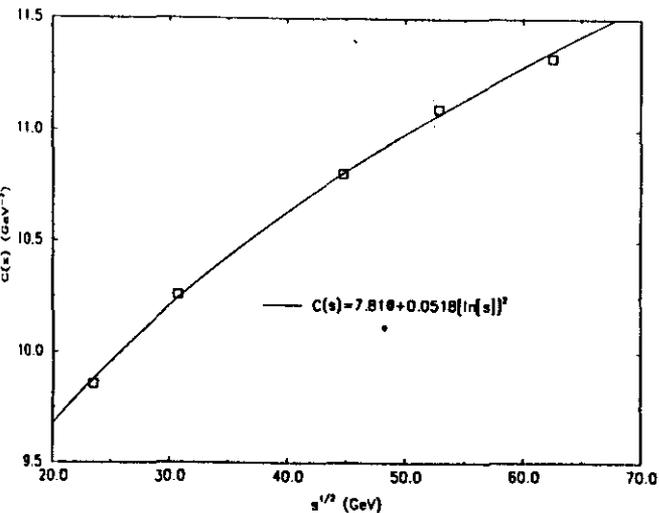


Figura 4.6 Dependência de C e α^2 com a energia no centro de massa.

4.6.2 Fator de forma dependente da energia ($G(s)$)

Os valores utilizados neste trabalho para C , α^2 , β^2 e a^2 também foram retirados da referência [48] e podem ser vistos na tabela 4.2.

$\beta^2 = 1,8 GeV^2 \quad a^2 = 8,20 GeV^2$		
$\sqrt{s}(GeV)$	$C(s) (GeV^{-2})$	$\alpha^2(s) (GeV^2)$
23,5	10,065	0,460
30,7	10,360	0,438
44,7	10,863	0,430
52,8	11,100	0,420
62,5	11,260	0,410

Tabela 4.2 Valores dos parâmetros livres C , α^2 , β^2 e a^2 para $G(s)$ [48].

Neste caso realizamos duas regressões lineares novas para $C(s)$ e $\alpha^2(s)$, uma em termos de $[\ln(s)]^2$ e outra com a potência de $\ln(s)$, obtendo

$$C = 8,352 + 0,04309[\ln(s)]^2, \quad c.c. = 0,9983$$

$$\alpha^2 = 0,05195 - 0,001593[\ln(s)]^2, \quad c.c. = -0,9758$$

$$\begin{aligned} & \cdot C = 4,608[\ln(s)]^{0,4235}, \quad c.c. = 0,9987 \\ & \alpha^2 = 0,925[\ln(s)]^{-0,383}, \quad c.c. = -0,9758 \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde $c.c.$ indica o coeficiente de correlação. No MDO a parametrização utilizada é dada pela equação (3.72). Na figura 4.7 apresentamos para comparação esses três resultados juntamente com os valores da tabela 4.2.

Dos gráficos das parametrizações novas e dos coeficientes de correlação associados vemos que as duas possibilidades são praticamente equivalentes. Escolhemos como resultado a fornecida pela equação (4.12) e na figura 4.8 mostramos o comportamento de C e α^2 em termos de \sqrt{s} .

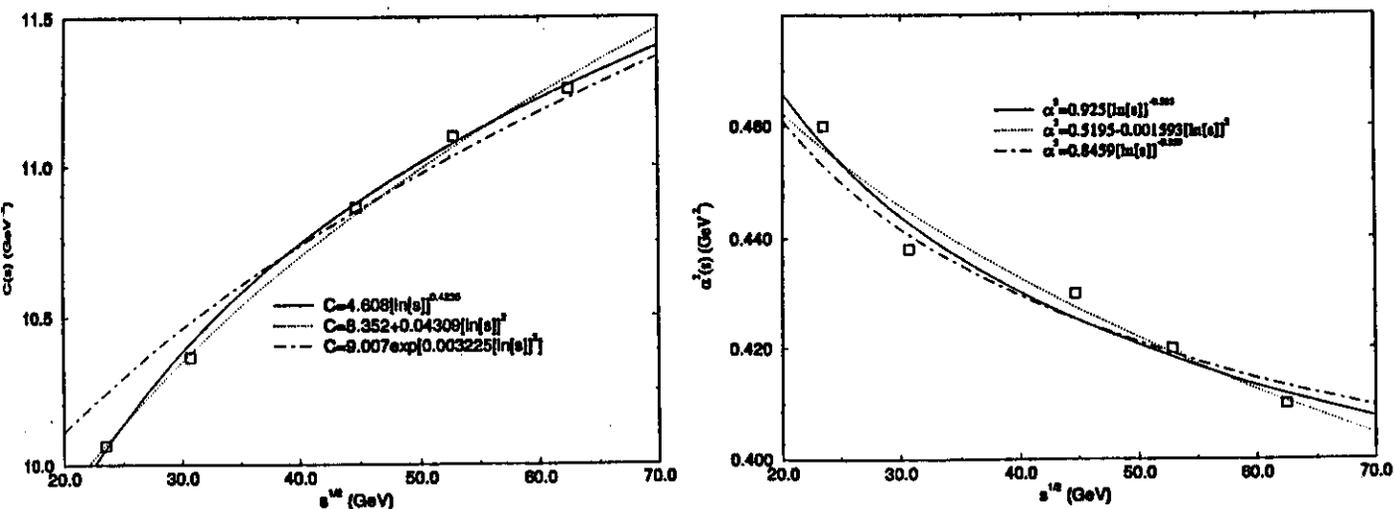


Figura 4.7 Parametrização original de C e α^2 por (3.72) e as duas novas parametrizações.

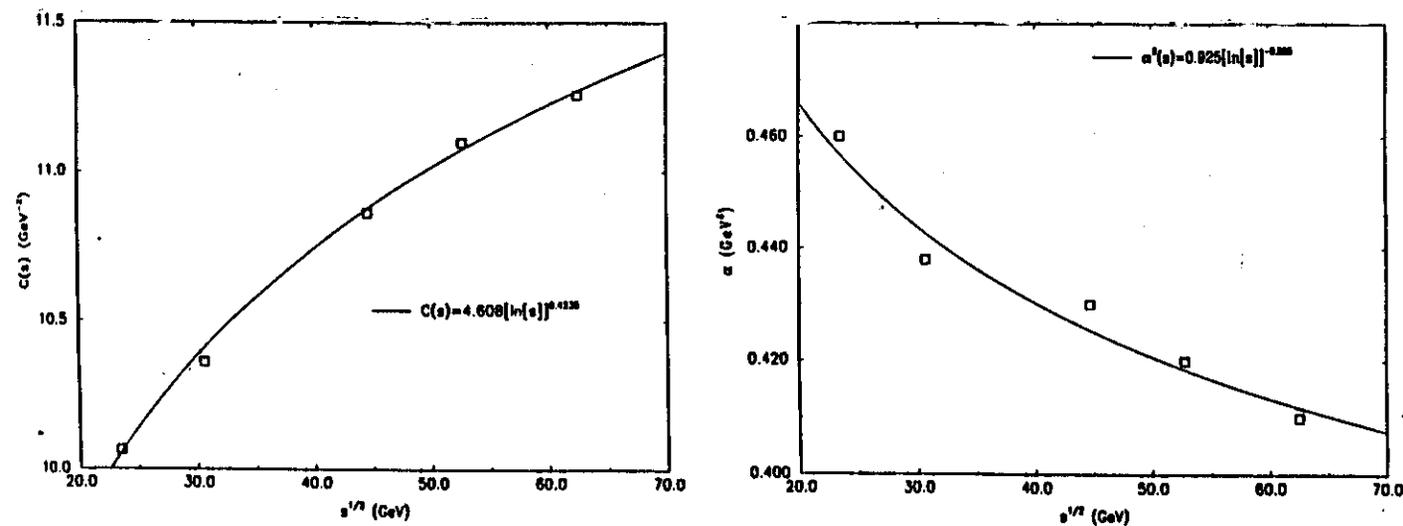


Figura 4.8 Dependência escolhida de C e α^2 com a energia no centro de massa.

As equações (4.11) e (4.12) com os valores dos demais parâmetros constantes fornecidos nas tabelas 4.1 e 4.2 representam nossos resultados para as duas abordagens, $f(s)$ e $G(s)$ respectivamente. A seguir passamos a estudar $\lambda(s)$ para cada uma dessas duas abordagens.

4.7 TESTES DE PARAMETRIZAÇÕES PARA A RAZÃO ENTRE AS PARTES REAL E IMAGINÁRIA DA AMPLITUDE ELEMENTAR

Nosso objetivo nessa seção é procurar determinar uma função $\lambda(s)$ que melhor descreva os dados experimentais da seção de choque diferencial, através do modelo difrativo com as parametrizações e valores dos parâmetros constantes da seção 4.6.1 para a abordagem $f(s)$ e da seção 4.6.2 para a abordagem $G(s)$.

Um tratamento estatístico do problema pode ser feito através de programas de ajuste de mínimos quadrados, determinando-se o fator χ^2 por grau de liberdade ($\chi^2/g.l.$), onde o número de graus de liberdade é igual ao número de pontos experimentais menos o número de parâmetros livres no ajuste. Para tanto utilizaremos a subrotina MINUIT do CERN [68] e ajustes somente dos dados experimentais da seção de choque diferencial. A minimização do χ^2 é feita através do método da métrica variável a partir de valores iniciais dados do parâmetro a ser determinado. Dessa forma, como não é possível saber se o mínimo obtido é relativo ou global (absoluto), é necessário ter já uma idéia do valor do parâmetro antes de aplicar o método.

Por essa razão iniciaremos a análise buscando valores de $\lambda(s)$ que reproduzam visualmente os dados experimentais de seção de choque diferencial em cada energia, de modo a obter valores iniciais para o programa que utiliza o MINUIT. Denominaremos os ajustes assim obtidos de *ajustes visuais*.

A seguir mostraremos que a aplicação desse método no contexto das nossas abordagens não fornece informação suficiente para o estabelecimento de uma relação funcional explícita $\lambda(s)$. Com base nas indicações dos resultados prévios obtidos passamos a testar 4 tipos de relações funcionais

$$\lambda(s) = \lambda_1 + \lambda_2 g(s),$$

para $g(s) = \sqrt{s}$, s , $\ln(s)$ e $[\ln(s)]^2$. Através de três métodos (regressão linear, estabilidade dos parâmetros λ_1 e λ_2 em testes de χ^2 e indicações do espalhamento $\bar{p}p$) concluiremos que a dependência com $g(s) = [\ln(s)]^2$ é a favorecida. Com isso mostraremos que os resultados permitem uma boa descrição das seções de choque diferencial e integradas, porém não do parâmetro $\rho(s)$. Por último estabelecemos uma nova parametrização visando a descrição global dos dados, porém de forma menos satisfatória.

4.7.1 Ajustes visuais

Em ambas as abordagens buscamos valores de $\lambda(s)$ que descrevam visualmente os dados de $d\sigma/dt$ para $\sqrt{s} = 23,5; 30,7; 44,7; 52,8$ e $62,5$ GeV. Para obter um resultado que não dependa fortemente do observador foram feitas duas determinações de λ , uma denominada visual 1 e outra visual 2. Os conjuntos obtidos para amplitude dependente da energia estão na tabela 4.3 e os de fator de forma dependente da energia na tabela 4.4.

$\sqrt{s}(\text{GeV})$	$\lambda(s)$ para $f(s)$	
	visual 1	visual 2
23,5	0,038	0,030
30,7	0,022	0,025
44,7	0,048	0,044
52,8	0,060	0,055
62,5	0,054	0,054

Tabela 4.3 Valores de $\lambda(s)$ para visual 1 e visual 2 no caso de amplitude dependente da energia.

$\sqrt{s}(\text{GeV})$	$\lambda(s)$ para $G(s)$	
	visual 1	visual 2
23,5	0,030	0,027
30,7	0,020	0,023
44,7	0,045	0,045
52,8	0,060	0,055
62,5	0,056	0,056

Tabela 4.4 Valores de $\lambda(s)$ para visual 1 e visual 2 no caso de fator de forma dependente da energia.

Os dois conjuntos para as duas abordagens aparecem também na figura 4.9.

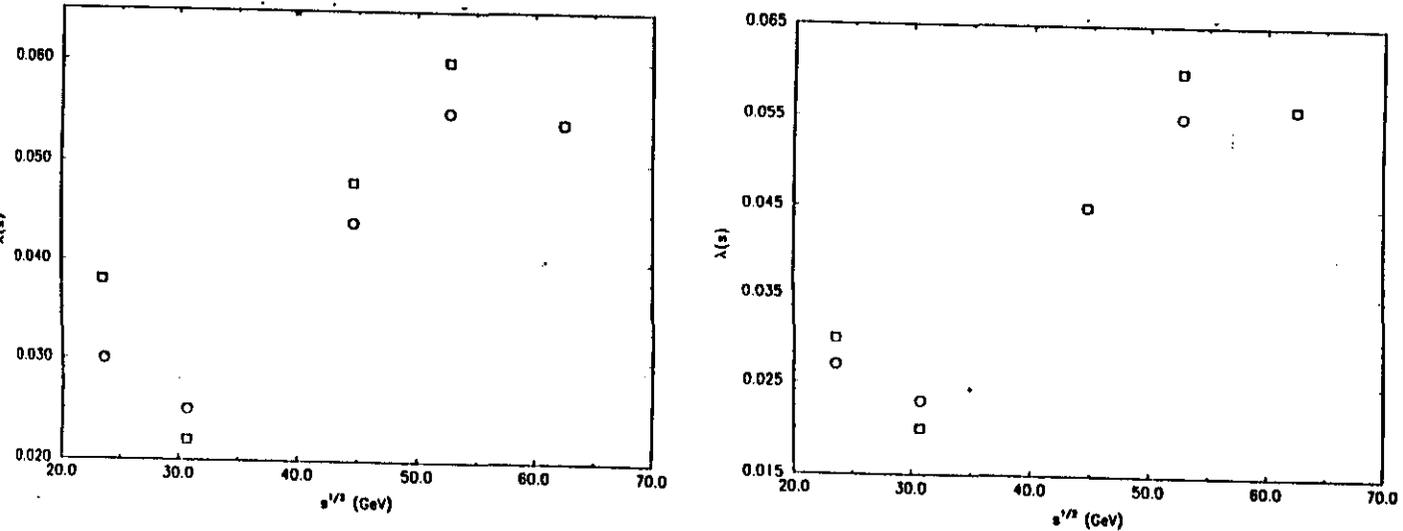


Figura 4.9 Valores de $\lambda(s)$ para visual 1 (quadrado) e visual 2 (círculo) para as duas abordagens, $f(s)$ (à esquerda) e $G(s)$ (à direita).

Como comentado na seção 4.4, fenomenologicamente, esperamos um crescimento de λ com a energia e isso foi levado em conta quando obtivemos os resultados prévios da figura 4.2, mas não

na análise presente. Apesar disso podemos identificar na figura 4.9 uma tendência de crescimento de λ com \sqrt{s} . Entretanto, observamos em todos os casos uma dispersão relativamente grande dos pontos. Por exemplo, de 23 para 31 GeV o valor de λ diminui e o mesmo é sugerido de 53 para 63 GeV. O problema central de nossa análise diz respeito a esse resultado. No que segue buscaremos uma dependência analítica de λ com \sqrt{s} , através de funções monotonicamente crescentes.

4.7.2 Testes de χ^2 a partir de ajustes visuais (MINUIT)

Os resultados obtidos para $\lambda(s)$ nas tabelas 4.3 e 4.4 foram utilizados como valores iniciais em um programa de ajuste à seção de choque diferencial, que calcula o χ^2 e tenta minimizá-lo com uma rotina do CERN (MINUIT). Os valores assim determinados de λ estão nas tabelas 4.5 (f(s)) e 4.6 (G(s)) junto com os valores de $\chi_i^2/g.l.$ (inicial) e $\chi_f^2/g.l.$ (final) onde *g.l.* significa grau de liberdade.

$\sqrt{s}(\text{GeV})$	MINUIT - visual 1			MINUIT - visual 2		
	λ_f	$\chi_f^2/g.l.$	$\chi_i^2/g.l.$	λ_f	$\chi_f^2/g.l.$	$\chi_i^2/g.l.$
23,5	0,046	12,0	12,1	0,046	12,0	12,3
30,7	0,021	14,1	14,1	0,021	14,1	14,1
44,7	$9,6 \times 10^{-7}$	30,4	31,9	$1,23 \times 10^{-7}$	30,4	31,6
52,8	0,033	13,8	15,1	0,033	13,8	14,6
62,5	$6,7 \times 10^{-5}$	6,7	7,7	$6,7 \times 10^{-5}$	6,7	7,7

Tabela 4.5 Resultados do MINUIT para f(s).

$\sqrt{s}(\text{GeV})$	MINUIT - visual 1			MINUIT - visual 2		
	λ_f	$\chi_f^2/g.l.$	$\chi_i^2/g.l.$	λ_f	$\chi_f^2/g.l.$	$\chi_i^2/g.l.$
23,5	0,014	6,00	6,27	0,014	6,00	6,10
30,7	$2,1 \times 10^{-5}$	6,64	6,91	$7,5 \times 10^{-6}$	6,70	7,10
44,7	$7,7 \times 10^{-8}$	34,7	36,7	$7,7 \times 10^{-8}$	34,7	36,7
52,8	0,034	13,3	14,4	0,034	13,3	14,0
62,5	0,038	8,9	9,2	0,038	8,9	9,2

Tabela 4.6 Resultados do MINUIT para G(s).

Como podemos ver das tabelas 4.5 e 4.6, não houve uma mudança significativa no valor do $\chi^2/g.l.$ (do inicial para o final) e os seus valores são altos. Notamos em alguns casos valores extremamente baixos de λ ($10^{-5} - 10^{-8}$) se comparados com os valores visuais $\sim 10^{-2}$. Desse modo, este resultado não permite estabelecer uma relação funcional entre λ e \sqrt{s} , que seja satisfatória.

Uma possível explicação para esses valores extremamente pequenos de λ pode ser a seguinte. O programa de ajuste busca valores do parâmetro livre que forneçam curvas as mais próximas possíveis dos dados experimentais (valor médio e erro). A maior parte dos pontos experimentais encontram-se no pico de difração e na região de grande momento transferido e somente um

número muito pequeno na região do mínimo. Ao utilizarmos os valores de λ das tabelas 4.3 e 4.4 preenchemos o mínimo difrativo mas a curva teórica passa acima de alguns dados, na região próxima ao mínimo, para alguns valores de \sqrt{s} em ambas as abordagens ($f(s)$ e $G(s)$); por isso o MINUIT deve buscar um valor muito pequeno de λ que aproxime a curva daqueles pontos, mas, ao fazer isso, o resultado já não preenche o mínimo difrativo e como se trata de um número pequeno de dados nesta região, o valor do $\chi^2/g.l.$ muda muito pouco. É claro que esse comportamento depende da forma funcional (analítica ou numérica) que temos para a curva, no caso a seção de choque diferencial.

Com base nestas considerações e para a forma funcional que estamos utilizando, os resultados não são satisfatórios e por isso o programa MINUIT não será utilizado na forma descrita. Porém voltaremos a utilizá-lo em outro tipo de análise que discutimos no que segue.

4.7.3 Testes de relações funcionais

Com base nos resultados da seção anterior, passamos a testes diretos de relações funcionais para $\lambda(s)$ com os conjuntos visual 1 e visual 2. Para isso limitamos a busca a quatro formas, \sqrt{s} , s , $\ln(s)$ e $[\ln(s)]^2$, pois são parametrizações fenomenologicamente comuns em modelos difrativos. Faremos essa análise através de três abordagens: regressão linear, estudo de estabilidade de parâmetros (discutida no que segue) e estudo de indicações do espalhamento $\bar{p}p$.

4.7.3.1 Regressão linear

Inicialmente buscamos indicações qualitativas (gráficos) e quantitativas (coeficientes de correlação) através de testes de regressão linear. Com esse fim, fizemos regressão linear para os valores de $\lambda(s)$ das tabelas 4.3 e 4.4, em termos de \sqrt{s} , s , $\ln(s)$ e $[\ln(s)]^2$. Expressando $\lambda(s)$ na forma

$$\lambda(s) = \lambda_1 + \lambda_2 g(s), \quad (4.13)$$

com $g(s) = \sqrt{s}$, s , $\ln(s)$ e $[\ln(s)]^2$ obtivemos os valores de λ_1 e λ_2 que aparecem nas tabelas 4.7 e 4.8.

Para obter um valor numérico que pudesse ser utilizado para comparar as relações funcionais fizemos uma regressão linear onde os dois conjuntos (visual 1 e visual 2) foram considerados conjuntamente para cada uma das relações funcionais (os resultados estão na coluna visual 1 e 2). Tentamos obter indicações da melhor função para $g(s)$ examinando os gráficos de regressão linear para os visuais 1 e 2, e procurando aqueles que tiveram mais concordância entre as duas regressões (uma para visual 1 e outra para visual 2) através de paralelismo e proximidade das curvas. Além disso verificamos também o coeficiente de correlação (c.c.) para cada regressão buscando junto com os gráficos encontrar indicações da melhor função $g(s)$. Os gráficos estão nas figuras 4.10, 4.11 e 4.12 e os coeficientes de correlação nas tabelas 4.9 e 4.10.

Concluimos desse teste que os gráficos da figura 4.10 ($f(s)$) não permitem escolher entre as diferentes parametrizações porque o comportamento é basicamente o mesmo para os 4 casos. A tabela 4.9 no entanto sugere que as parametrizações favorecidas poderiam ser \sqrt{s} (1ª coluna), \sqrt{s} ou $[\ln(s)]^2$ (segunda coluna) e \sqrt{s} ou $[\ln(s)]^2$ (visual 1 e 2). Para fator de forma dependente da

energia, um exame da figura 4.11 ($G(s)$) e da tabela 4.10 indica que as parametrizações em termos de \sqrt{s} , s ou $[\ln(s)]^2$ poderiam ser favorecidas.

$g(s)$	λ_1			λ_2		
	visual 1	visual 2	visual 1 e 2	visual 1	visual 2	visual 1 e 2
\sqrt{s}	0,0128	0,0074	0,0101	$7,38 \times 10^{-4}$	$7,99 \times 10^{-4}$	$7,69 \times 10^{-4}$
s	0,0271	0,0229	0,0250	$8,51 \times 10^{-6}$	$9,19 \times 10^{-6}$	$8,85 \times 10^{-6}$
$\ln(s)$	-0,0614	-0,0742	-0,0678	0,0143	0,0156	0,0150
$[\ln(s)]^2$	-0,0104	-0,0181	-0,0142	$9,93 \times 10^{-4}$	0,00108	0,00104

Tabela 4.7 Valores obtidos por regressão linear com (4.13) para amplitude dependente da energia.

$g(s)$	λ_1			λ_2		
	visual 1	visual 2	visual 1 e 2	visual 1	visual 2	visual 1 e 2
\sqrt{s}	0,0015	0,0017	0,0016	$9,49 \times 10^{-4}$	$9,21 \times 10^{-4}$	$9,35 \times 10^{-4}$
s	0,0200	0,0197	0,0198	$1,09 \times 10^{-5}$	$1,06 \times 10^{-5}$	$1,07 \times 10^{-5}$
$\ln(s)$	-0,0949	-0,0927	-0,0938	0,0185	0,0181	0,0183
$[\ln(s)]^2$	-0,0285	-0,0278	-0,0282	0,00128	0,00125	0,00127

Tabela 4.8 Resultado da regressão linear com (4.13) para fator de forma dependente da energia.

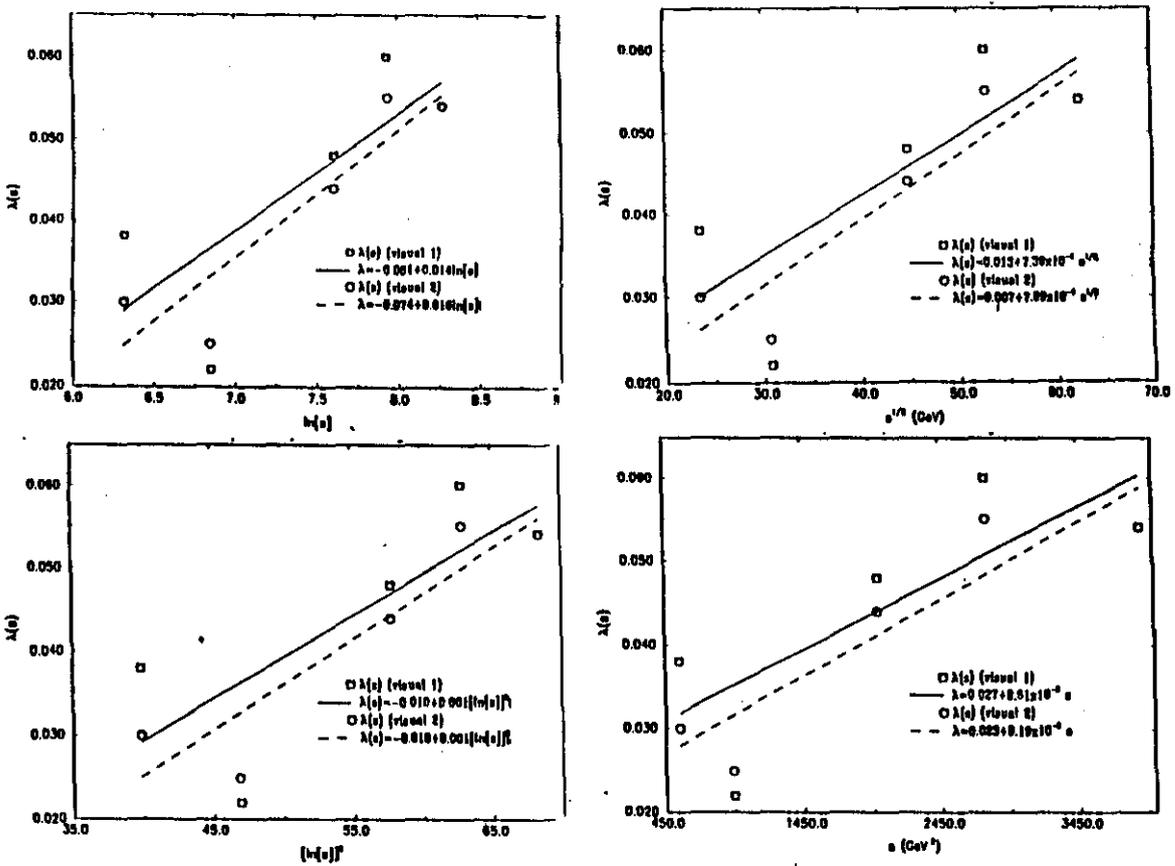


Figura 4.10 Regressão linear para $g(s) = \sqrt{s}$, s , $\ln(s)$ e $[\ln(s)]^2$ com amplitude dependente da energia, visual 1 (linha cheia) e visual 2 (linha tracejada).

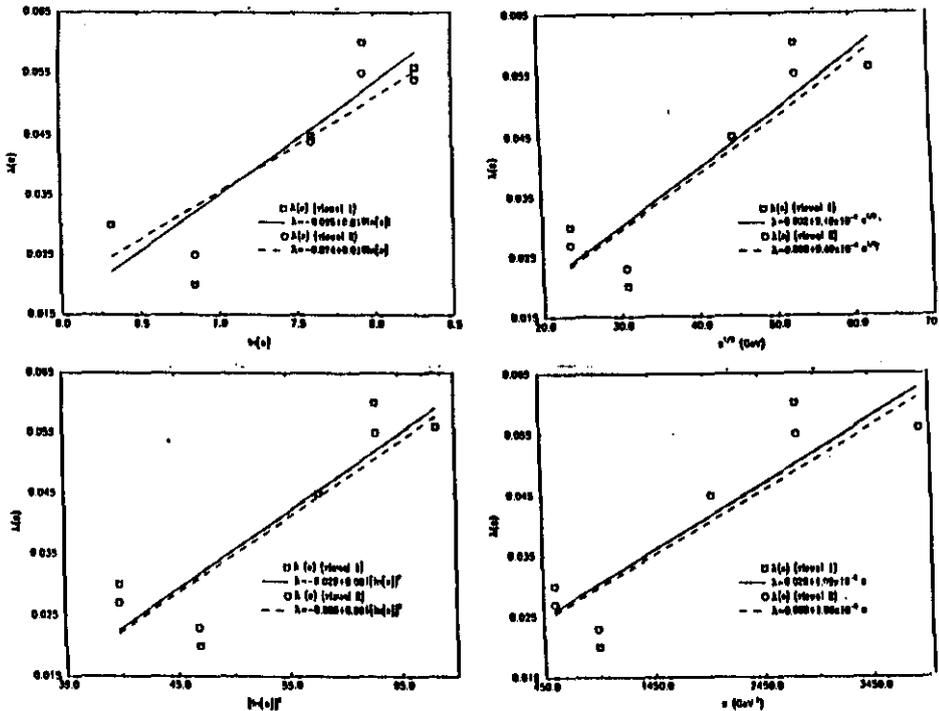


Figura 4.11 Regressão linear para $g(s) = \sqrt{s}$, s , $\ln(s)$ e $[\ln(s)]^2$ com fator de forma dependente da energia, visual 1 (linha cheia) e visual 2 (linha tracejada).

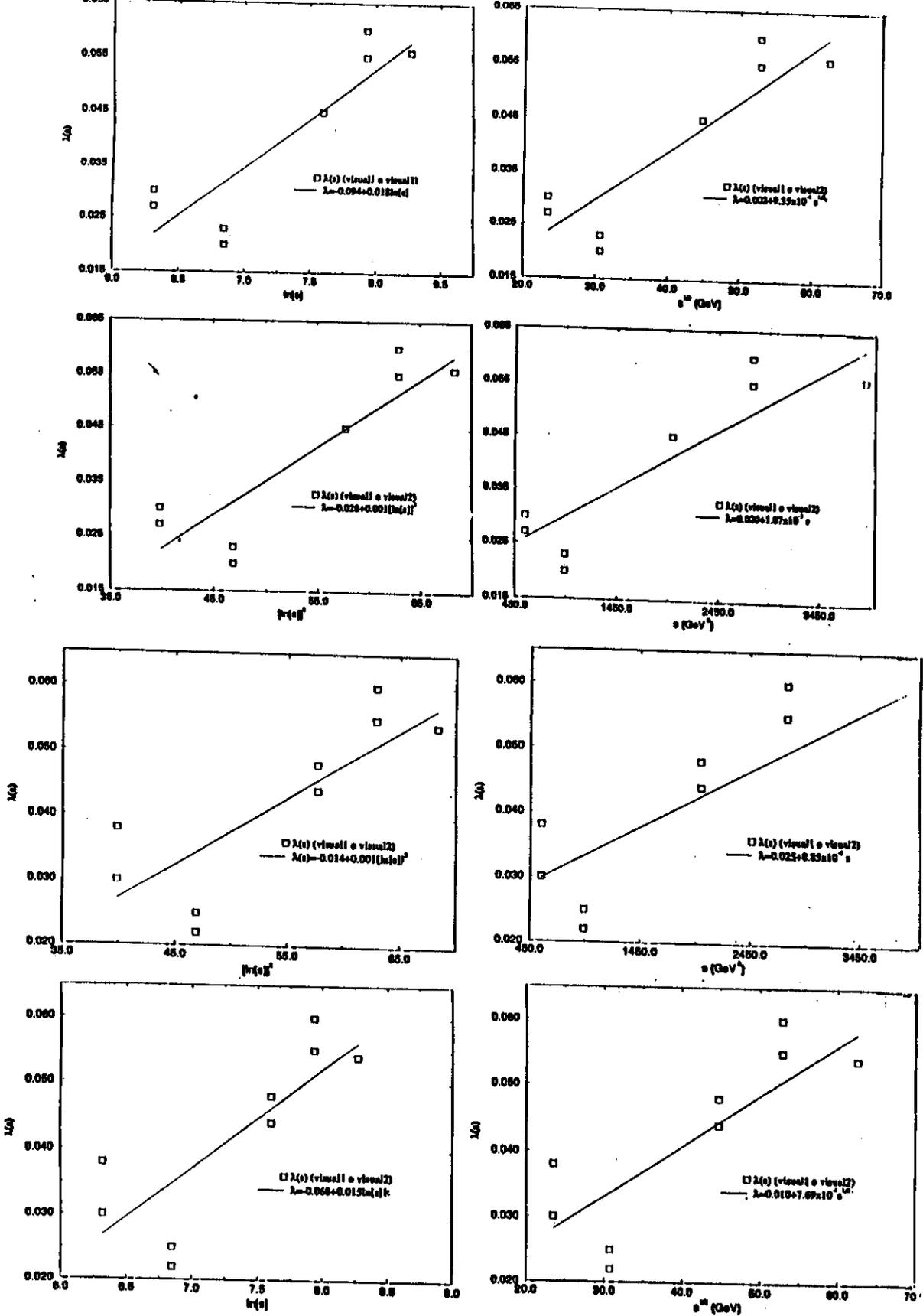


Figura 4.12 Regressão linear de visual 1 e 2 tomados conjuntamente. Os quatro primeiros gráficos são de fator de forma dependente da energia e os últimos 4 gráficos são de amplitude dependente da energia.

$g(s)$	visual 1	visual 2	visual 1 e 2
\sqrt{s}	0,787	0,928	0,848
s	0,779	0,917	0,839
$\ln(s)$	0,768	0,911	0,833
$[\ln(s)]^2$	0,776	0,922	0,840

Tabela 4.9 Valores de c.c. (coeficiente de correlação) obtidos por regressão linear para $f(s)$.

$g(s)$	visual 1	visual 2	visual 1 e 2
\sqrt{s}	0,887	0,947	0,914
s	0,887	0,943	0,902
$\ln(s)$	0,873	0,916	0,902
$[\ln(s)]^2$	0,880	0,943	0,908

Tabela 4.10 Coeficientes de correlação de regressão linear para $G(s)$.

Como podemos observar é difícil decidir por uma parametrização baseado apenas nesse teste porque os gráficos são muito semelhantes e os coeficientes de correlação muito próximos dentro de cada coluna nas tabelas 4.9 e 4.10. Podemos apenas indicar como favorecidos os resultados para $g(s) = \sqrt{s}$, $[\ln(s)]^2$ e s .

É importante, então, realizar outros testes para decidir a parametrização a ser utilizada para $\lambda(s)$. Na próxima seção tratamos do teste de estabilidade dos parâmetros λ_1 e λ_2 em (4.13) e depois veremos as indicações de mais alta energia.

4.7.3.2 Estabilidade dos parâmetros de $\lambda(s)$ através de χ^2 mínimo

Para esse teste utilizamos agora os valores de λ_1 e λ_2 das tabelas 4.7 e 4.8 como dados iniciais para um programa de minimização do χ^2 com rotina do CERN (MINUIT). O parâmetro λ é dado por (4.13) e estamos interessados no comportamento de λ_1 e λ_2 nos três conjuntos (visual 1, visual 2 e visual 1 e 2), para isso as tabelas 4.11 a 4.14 apresentam uma coluna com o desvio relativo $\Delta\lambda / \langle \lambda \rangle$ onde

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\lambda(\text{visual 1}) + \lambda(\text{visual 2}) + \lambda(\text{visual 1 e 2})}{3}$$

$$\Delta\lambda = \left[\frac{\lambda^2(\text{visual 1}) + \lambda^2(\text{visual 2}) + \lambda^2(\text{visual 1 e 2}) - 3 \langle \lambda \rangle^2}{2} \right]^{1/2}.$$

$g(s)$	visual 1	visual 2	visual 1 e 2	$\Delta\lambda / \langle \lambda \rangle$
\sqrt{s}	0,013	0,007	0,010	0,30
s	0,027	0,023	0,025	0,08
$\ln(s)$	-0,061	-0,074	-0,068	0,10
$[\ln(s)]^2$	-0,010	-0,018	-0,014	0,29

Tabela 4.11 Resultados finais do programa com subrotina MINUIT para λ_1 na abordagem $f(s)$.

$g(s)$	visual 1	visual 2	visual 1 e 2	$\Delta\lambda / \langle \lambda \rangle$
\sqrt{s}	$7,4 \times 10^{-4}$	$8,0 \times 10^{-4}$	$7,7 \times 10^{-4}$	0,04
s	$8,5 \times 10^{-6}$	$9,2 \times 10^{-6}$	$8,9 \times 10^{-6}$	0,04
$\ln(s)$	0,014	0,016	0,015	0,07
$[\ln(s)]^2$	0,001	0,001	0,001	0,00

Tabela 4.12 Resultados finais do programa com subrotina MINUIT para λ_2 na abordagem $f(s)$.

$g(s)$	visual 1	visual 2	visual 1 e 2	$\Delta\lambda / \langle \lambda \rangle$
\sqrt{s}	0,002	0,002	0,002	0,00
s	0,020	0,020	0,002	0,74
$\ln(s)$	-0,095	-0,074	-0,094	0,14
$[\ln(s)]^2$	-0,029	-0,028	-0,028	0,02

Tabela 4.13 Valores obtidos do programa com subrotina MINUIT para λ_1 na abordagem $G(s)$.

$g(s)$	visual 1	visual 2	visual 1 e 2	$\Delta\lambda / \langle \lambda \rangle$
\sqrt{s}	$9,5 \times 10^{-4}$	$9,5 \times 10^{-4}$	$9,4 \times 10^{-4}$	0,01
s	$1,1 \times 10^{-5}$	$1,1 \times 10^{-5}$	$1,1 \times 10^{-5}$	0,00
$\ln(s)$	0,019	0,016	0,018	0,09
$[\ln(s)]^2$	0,001	0,001	0,001	0,00

Tabela 4.14 Valores obtidos do programa com subrotina MINUIT para λ_2 na abordagem $G(s)$.

Analisando a estabilidade (desvio relativo) dos parâmetros λ_1 e λ_2 através da última coluna nas tabelas 4.11 e 4.12 observamos que $g(s) = s$ é favorecida para λ_1 e que $g(s) = [\ln(s)]^2$ é indicada para λ_2 . Portanto não podemos concluir qual a melhor parametrização na abordagem de amplitude dependente da energia usando esse teste. Já para as tabelas 4.13 e 4.14 as relações funcionais com $g(s) = \sqrt{s}$ e $g(s) = [\ln(s)]^2$ são mais indicadas; o parâmetro λ_2 também indica s como uma boa relação mas, para λ_1 , $g(s) = s$ foi a parametrização mais instável, por isso não

se pode afirmar que ela é uma boa escolha por esse teste. Podemos assim dizer que uma análise global deste teste indica como favorecidos os casos $g(s) = \sqrt{s}$ e $[\ln(s)]^2$.

Para procurar mais indicações vamos fazer mais um teste levando em conta que as quatro “pretendentes” têm comportamentos diferentes em energias mais altas.

4.7.3.3 Indicações do espalhamento $\bar{p}p$

Como foi mencionado acima as funções \sqrt{s} , s , $\ln(s)$, e $[\ln(s)]^2$ comportam-se de forma diferente para energias maiores, \sqrt{s} e s crescem rapidamente enquanto $\ln(s)$ e $[\ln(s)]^2$ são de crescimento muito mais lento. O estudo do crescimento de acordo com os dados experimentais poderia ajudar a decidir a parametrização mas há um problema: ainda não há dados de espalhamento próton-próton, obtidos de aceleradores com anéis de colisão, em energias mais altas (por exemplo em $\sqrt{s} \simeq 500 \text{ GeV}$). Uma solução é tentar descrever os dados para $\bar{p}p$ que atingem 546 GeV (e energias maiores) de energia no sistema de centro de massa e mostram a estrutura difrativa, com presença de um mínimo local ou um “ombro” (shoulder) próximo de $|t| = 0,8 \text{ GeV}^2$. Esse caminho é válido porque a hipótese da parte real feita na seção 4.3 visa substituir a fórmula de Martin que foi utilizada para descrever o espalhamento elástico pp e $\bar{p}p$ até 1.8 TeV ($\bar{p}p$) [48]. Embora os dados de antipróton-próton não tenham a mesma análise feita por Amaldi e Schubert [27] e uma descrição detalhada e precisa deles com o atual modelo devesse levar em conta esse fato, é possível obter indicações da ordem de grandeza do parâmetro $\lambda(s)$ em uma análise preliminar do espalhamento $\bar{p}p$.

No entanto o estudo feito com a fórmula de Martin para $\bar{p}p$ [48] abordou apenas fatores de forma dependentes da energia. Por isso utilizamos as parametrizações obtidas em [48] para C e a^2 (equação 3.72) e os valores de a^2 e β^2 para $\bar{p}p$ (vide eq. 3.72) ao substituirmos a fórmula de Martin pela amplitude complexa.

Na figura 4.13 mostramos três energias para espalhamento elástico $\bar{p}p$ com a descrição preliminar do modelo. Os valores de λ estão na tabela 4.15 mas ressaltamos que eles servem apenas como indicação de ordem de grandeza do valor esperado pois a análise feita não é detalhada como já foi citado acima. Podemos concluir que $\lambda \sim 10^{-2}$ na região do ISR e $\lambda \sim 10^{-1}$ na região do Collider.

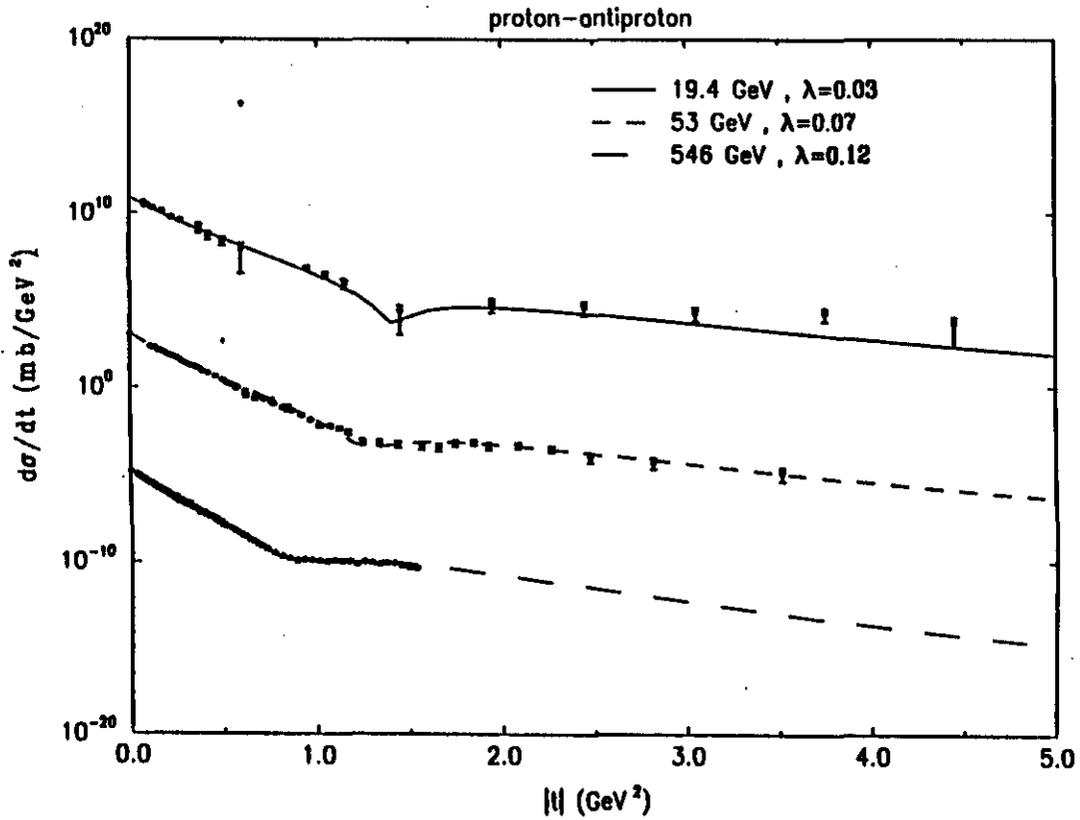


Figura 4.13 Seção de choque diferencial para colisão elástica $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 19,4, 53$ e 546 GeV. Os dados experimentais e as curvas teóricas foram multiplicados por 10^9 (19,4 GeV), 10 (53 GeV) e 10^{-7} (546 GeV).

\sqrt{s} (GeV)	19,4	53,0	546,0
$\lambda(s)$	0,03	0,07	0,12

Tabela 4.15 Valores preliminares para $\lambda(s)$ obtidos da colisão elástica $\bar{p}p$.

Os valores calculados para λ consideram o espalhamento elástico pp na energia de 546 GeV e utilizando (4.13) estão nas tabelas 4.16 e 4.17. Para simplificar, aplicamos apenas as parametrizações do conjunto “visual 1 e 2” das tabelas 4.7 e 4.8.

$g(s)$	\sqrt{s}	s	$\ln(s)$	$[\ln(s)]^2$
$\lambda(s)$	0,430	2,663	0,121	0,151

Tabela 4.16 Previsão de $\lambda(s)$ para conjunto “visual 1 e 2” na abordagem de amplitude dependente da energia ($\sqrt{s} = 546$ GeV), espalhamento pp.

$g(s)$	\sqrt{s}	s	$\ln(s)$	$[\ln(s)]^2$
$\lambda(s)$	0,512	3,209	0,137	0,174

Tabela 4.17 Previsão de $\lambda(s)$ para $\sqrt{s} = 546$ GeV na abordagem de fator de forma dependente da energia (“visual 1 e 2”), espalhamento pp.

Como pode ser visto das tabelas 4.16 e 4.17 as parametrizações de \sqrt{s} e s obtêm valores muito maiores do que o valor de $\bar{p}p$ ($\lambda = 0,12$) e portanto concluímos que as parametrizações de $g(s) = \ln(s)$ e $g(s) = [\ln(s)]^2$ são mais indicadas por esse teste.

Vamos agora buscar conclusões a respeito dos testes investigados até o momento e com isso escolher as parametrizações de $\lambda(s)$ (para $f(s)$ e $G(s)$).

4.7.3.4 Conclusões parciais

Nos dois primeiros testes vimos que a análise feita com amplitude dependente da energia apresentou mais dificuldades para decidir sobre a parametrização de $\lambda(s)$ mas conseguimos uma indicação de \sqrt{s} , s e $[\ln(s)]^2$ como relações funcionais favorecidas; com fator de forma dependente da energia as funções com \sqrt{s} e $[\ln(s)]^2$ foram mais indicadas nos dois primeiros testes mas no terceiro teste (c)) as parametrizações para $\ln(s)$ e $[\ln(s)]^2$ obtiveram melhor indicação. Levando em conta essas tendências optamos por aquela que *aparece em todos os casos*, isto é, por uma parametrização com $g(s) = [\ln(s)]^2$ e decidimos utilizar

$$\begin{aligned}\lambda(s) &= -0,0142 + 0,00104[\ln(s)]^2 \quad (\text{para } f(s)), \\ \lambda(s) &= -0,0282 + 0,00127[\ln(s)]^2 \quad (\text{para } G(s)).\end{aligned}\tag{4.14}$$

As equações em (4.14) vieram do conjunto “visual 1 e 2” (que representa uma média dos outros dois conjuntos) das tabelas 4.7 e 4.8 e escolhemos três algarismos significativos para obter melhor descrição dos valores de λ das tabelas 4.3 e 4.4.

4.7.4 Previsões para as seções de choque (diferencial e integradas) e discussão

Com (4.14), (4.11) e (4.12) e os valores de α^2 , β^2 da seção 4.6.1 e β^2 , a^2 da seção 4.6.2 aplicados em (4.3) obtemos a seção de choque diferencial $d\sigma/dt$ (equação 4.7) e as seções de choque integradas σ_t , σ_{el} e σ_{inel} (equações 4.8), conforme descrito na seção 4.3. O resultado para $d\sigma/dt$ aparece nas figuras 4.14 e 4.15 onde as curvas e os dados foram multiplicados por potências de 10 para poder colocá-las em um único gráfico e visualizá-las separadamente; na figura 4.16 mostramos as previsões para σ_t , σ_{el} e σ_{inel} de $f(s)$ e $G(s)$ juntas.

Analisando as figuras 4.14 e 4.15 para $d\sigma/dt$ vemos que as descrições são similares, à exceção da energia de 23 GeV, na qual a posição do mínimo na abordagem com fator de forma dependente está à direita dos dados experimentais. Esse efeito é devido aos valores de C e α^2 usados como entrada (tabela 4.2) e às parametrizações que selecionamos, equação 4.12. Especificamente, $C(23,5 \text{ GeV}) = 10,065 \text{ GeV}^{-2}$ não reproduz corretamente a posição do mínimo. No MDO esse efeito não ocorre porque, devido à inclusão na análise de energias inferiores a 23 GeV, a parametrização para $C(s)$, equação 3.72, superestima o valor de C nessa energia como se pode ver claramente na figura 4.7 e também na figura 4.23 da referência [48]. Essa diferença entretanto não altera as regularidades referidas em termos de seções de choque integradas (seção 4.5), devido ao erro experimental dessas grandezas. Do exposto esse efeito pode ser corrigido através de novos ajustes e/ou inclusão de outras energias e portanto não constitui uma limitação do formalismo em si. Da figura 4.16 para σ_t , σ_{el} e σ_{inel} a descrição com fator de forma dependente da energia mantém-se mais próxima dos dados de σ_{el} e σ_{inel} . Isso nos permite concluir que há uma tendência de descrição melhor com fatores de forma dependentes de s .

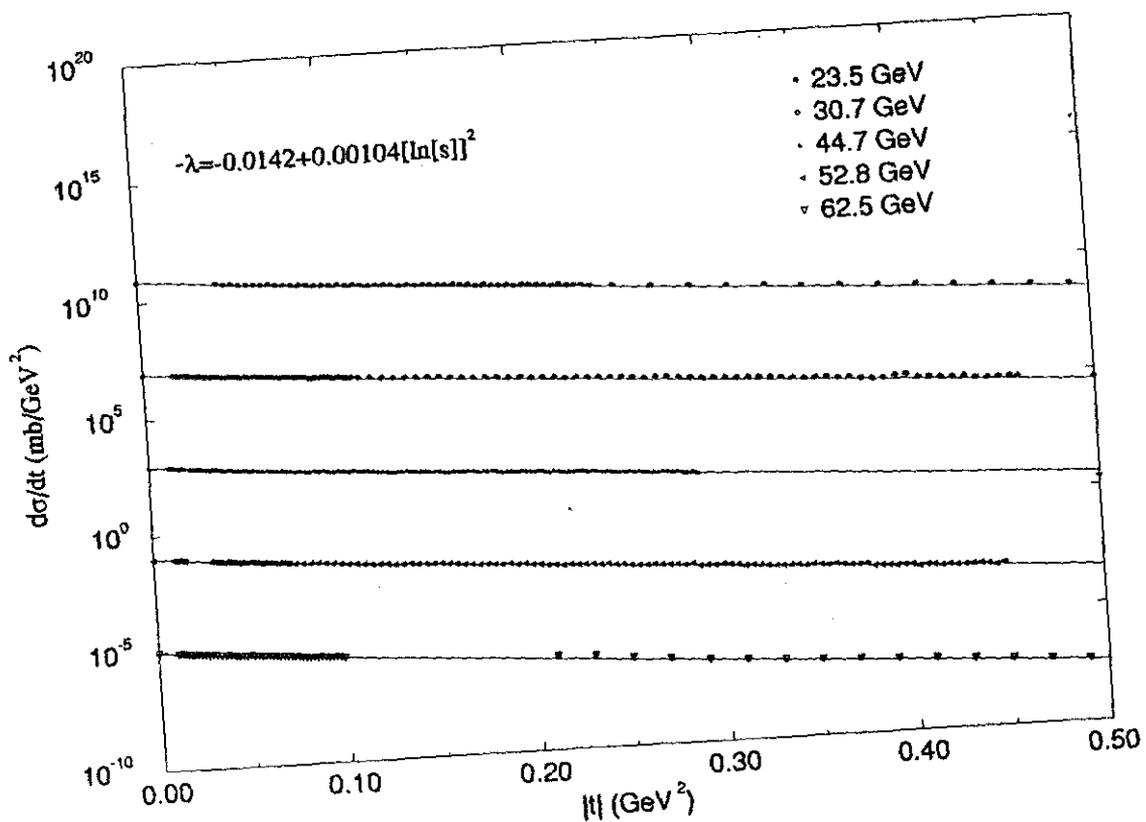
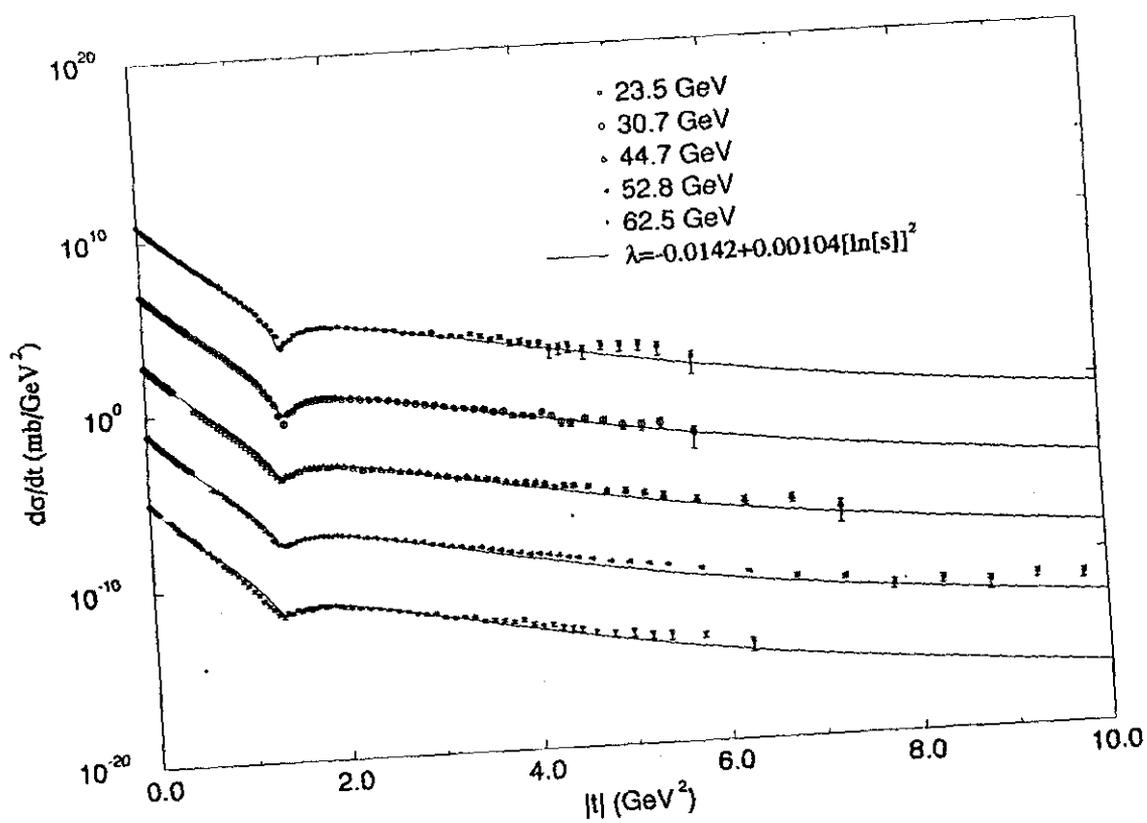


Figura 4.14 Descrição de $d\sigma/dt$ para energias do ISR com dependência energética na amplitude. O gráfico inferior é um detalhe da região para $|t| \leq 0,5 \text{ GeV}^2$ e mostra que as curvas descrevem bem a inclinação de $d\sigma/dt$ nessa região.

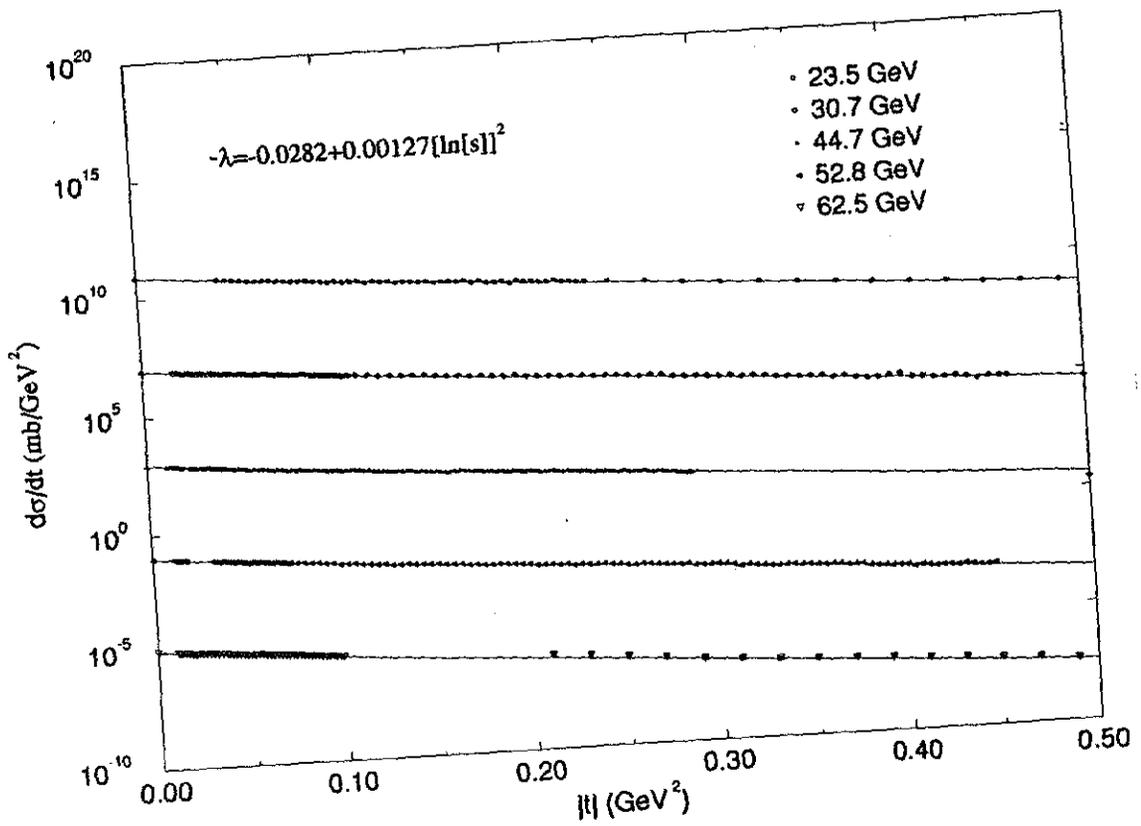
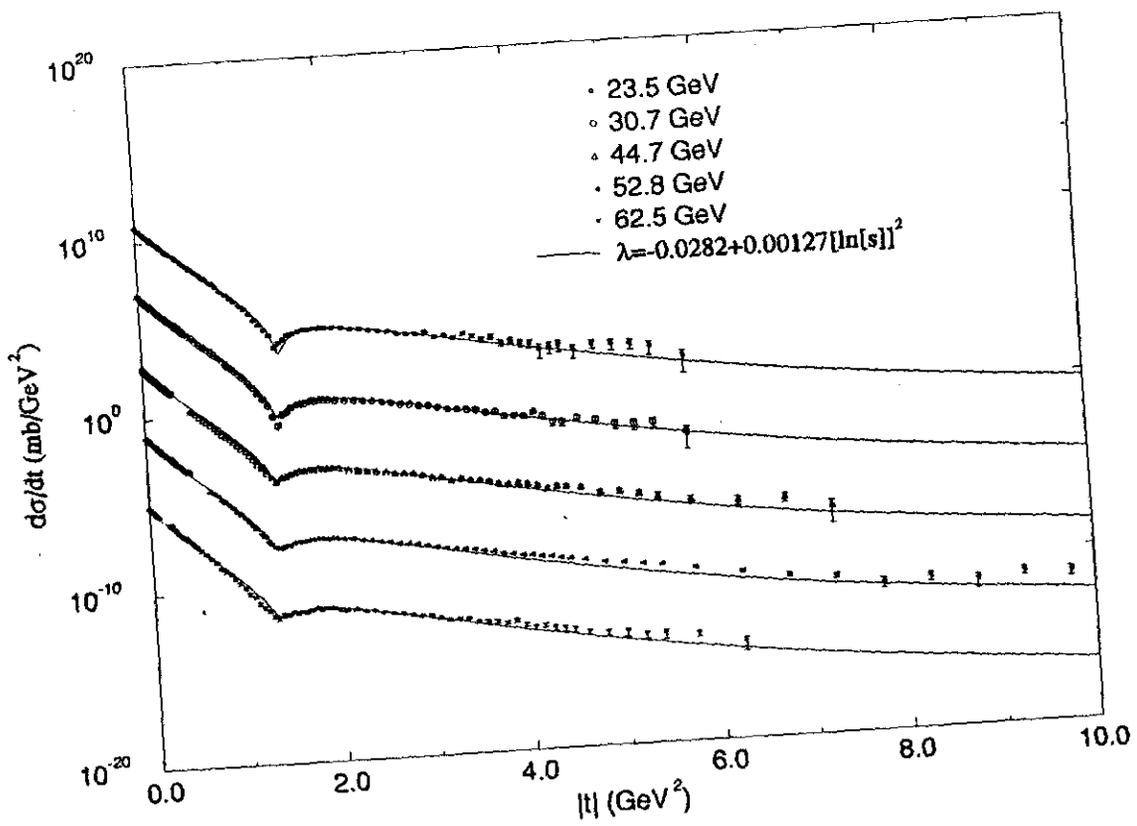


Figura 4.15 Descrição de $d\sigma/dt$ para energias do ISR com dependência energética no fator de forma. Para o gráfico inferior vide legenda da figura 4.14.

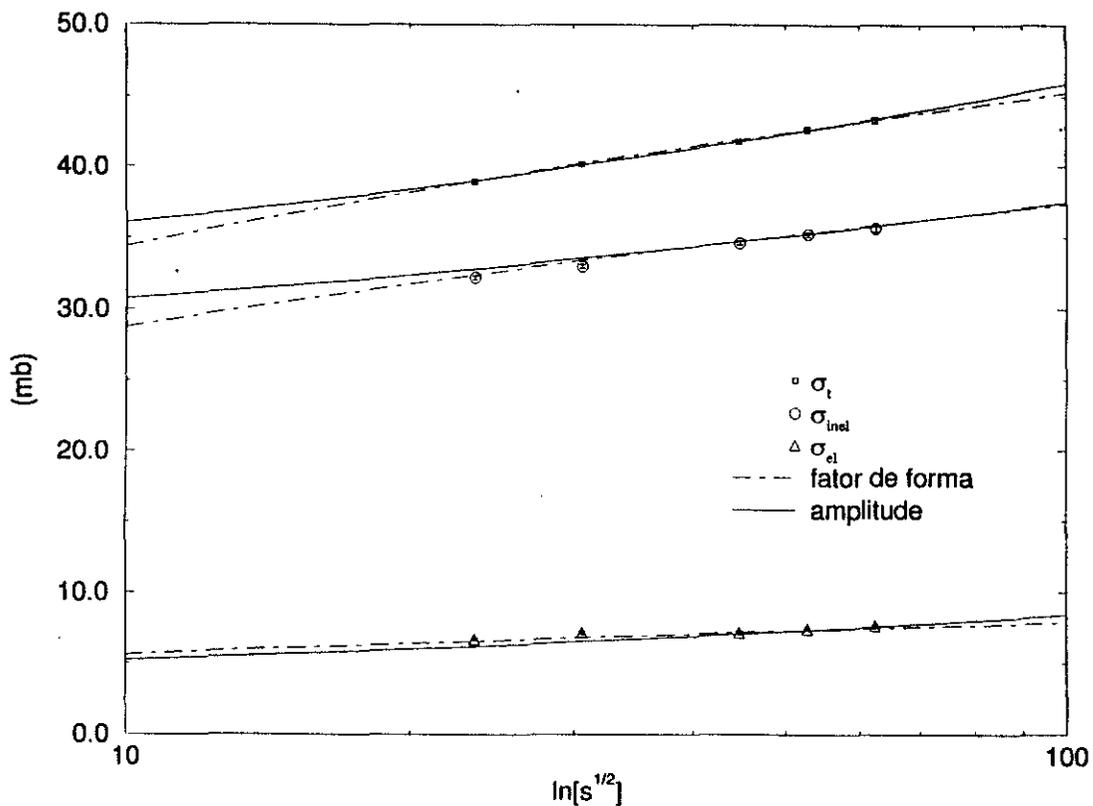


Figura 4.16 Previsão de σ_t , σ_{el} e σ_{inel} para as duas abordagens, $f(s)$ (linha cheia) e $G(s)$ (linha tracejada).

Com isso obtivemos uma boa descrição dos dados experimentais na região do ISR a nível de modelo geométrico.

Agora vamos investigar a possibilidade de descrição de ρ (razão entre parte real e imaginária da amplitude hadrônica).

4.7.5 O problema da descrição do parâmetro ρ

Agora faremos a previsão para ρ (equação 4.9) mas lembramos que o modelo original com fórmula de Martin (MDO) não podia fazer essa previsão porque os valores experimentais de ρ já eram dados de entrada do modelo. Além disso, como será discutido, dos outros modelos apresentados na seção 3.4.4 apenas os de Hüfner e Povh [45] e de Buenerd, Furget e Valin [19] tratam deste problema sendo que o primeiro deles não descreve bem o ρ porque utiliza poucos parâmetros e o outro descreve-o porque tem muitos parâmetros.

4.7.5.1 Previsão com parametrização selecionada

Na figura 4.17 temos os dados experimentais de ρ (tabela 2.2) e as previsões nos casos de dependência energética na amplitude e no fator de forma, como podemos ver as previsões não descrevem o crescimento de ρ na região do ISR.

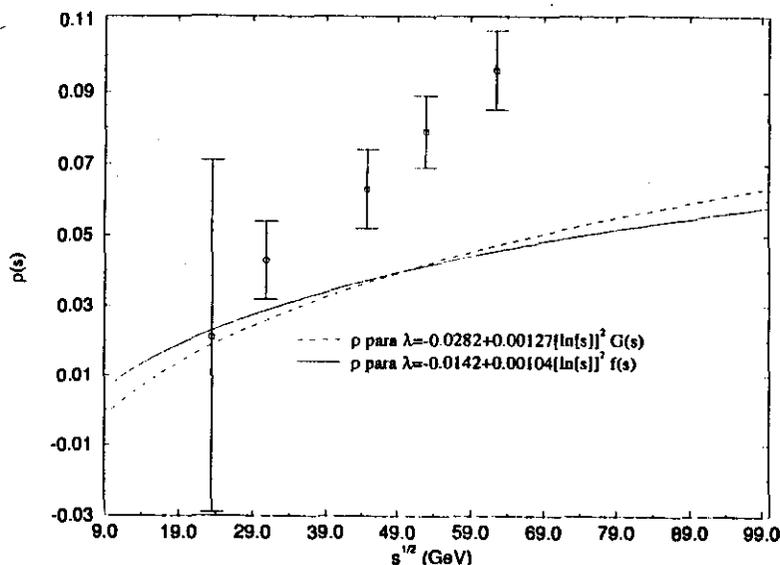


Figura 4.17 Razão entre as partes real e imaginária da amplitude hadrônica e as previsões de ρ com as parametrizações para $\lambda(s)$ utilizando (4.14).

Com base nestes resultados, passamos a estudar os valores de $\lambda(s)$ necessários para descrever ρ e depois verificar os efeitos na descrição de $d\sigma/dt$, σ_t , σ_{el} e σ_{inel} .

4.7.5.2 Reanálise de $\lambda(s)$ e previsões

Inicialmente, utilizando (4.11) e (4.12) determinamos os valores de $\lambda(s)$ que fornecem o valor médio de ρ . Os resultados obtidos estão na tabela 4.18. Agora faremos duas parametrizações diferentes, uma com $[\ln(s)]^2$ e outra com $\ln(s)$. Essa escolha de fazer a parametrização em $\ln(s)$, além de $[\ln(s)]^2$, está relacionada com o teste de espalhamento $\bar{p}p$ feito na seção 4.7.3.c. Naquele teste as parametrizações $\ln(s)$ e $[\ln(s)]^2$ eram favorecidas mas acabamos decidindo por $[\ln(s)]^2$ pois ela era sugerida nos outros testes (4.7.3.a e b). Entretanto, como pode ser verificado na tabela 4.18 em comparação com as tabelas 4.3 e 4.4, os novos valores de λ são maiores para $\sqrt{s} \geq 30.7 \text{ GeV}$ e

por isso tomamos inicialmente $[\ln(s)]^2$ mas também $\ln(s)$ que cresce mais lentamente para energias acima de 63 GeV.

$\sqrt{s}(\text{GeV})$	$\lambda(s)$ para $f(s)$	$\lambda(s)$ para $G(s)$
23,5	0,025	0,025
30,7	0,052	0,053
44,7	0,078	0,079
52,8	0,099	0,099
62,5	0,122	0,121

Tabela 4.18 Resultados obtidos para $\lambda(s)$ que descrevem ρ pelo valor médio.

As parametrizações obtidas para $\lambda(s)$ são

$$\begin{aligned}\lambda(s) &= -0,1043 + 0,00325[\ln(s)]^2 \quad (\text{para } f(s)), \\ \lambda(s) &= -0,1021 + 0,00322[\ln(s)]^2 \quad (\text{para } G(s))\end{aligned}\tag{4.15}$$

e

$$\begin{aligned}\lambda(s) &= -0,2744 + 0,04729\ln(s) \quad (\text{para } f(s)), \\ \lambda(s) &= -0,2707 + 0,04682\ln(s) \quad (\text{para } G(s)).\end{aligned}\tag{4.16}$$

Novamente, combinando as equações (4.15) e (4.16) com (4.11), (4.12), α^2 , β^2 da tabela 4.1 e β^2 , α^2 da tabela 4.2 obtemos $d\sigma/dt$ (figuras 4.18 a 4.21) e as seções de choque integradas (figura 4.22). Na figura 4.23 mostramos a previsão para ρ com as parametrizações de (4.15) e (4.16).

Como podemos observar das figuras 4.18 a 4.22, a descrição das seções de choque integradas e do pico de $d\sigma/dt$ ($|t| \leq 0,5 \text{ GeV}^2$) não foram afetadas pela mudança na parametrização do $\lambda(s)$ mas na região do mínimo local em $d\sigma/dt$ ($|t| \sim 1,4 \text{ GeV}^2$) houve um preenchimento excessivo do mínimo para 44,7, 52,8 e 62,5 GeV para ambas as parametrizações (em termos de $\ln(s)$ e $[\ln(s)]^2$) e não há, aparentemente, diferenças entre as descrições de ambas as parametrizações.

Concluimos que uma boa descrição de ρ afetou significativamente a descrição de $d\sigma/dt$ na região do mínimo, enquanto na seção anterior uma boa descrição de $d\sigma/dt$ não conseguiu prever adequadamente o crescimento de ρ . Vamos a seguir testar uma descrição conjunta de ρ e $d\sigma/dt$.

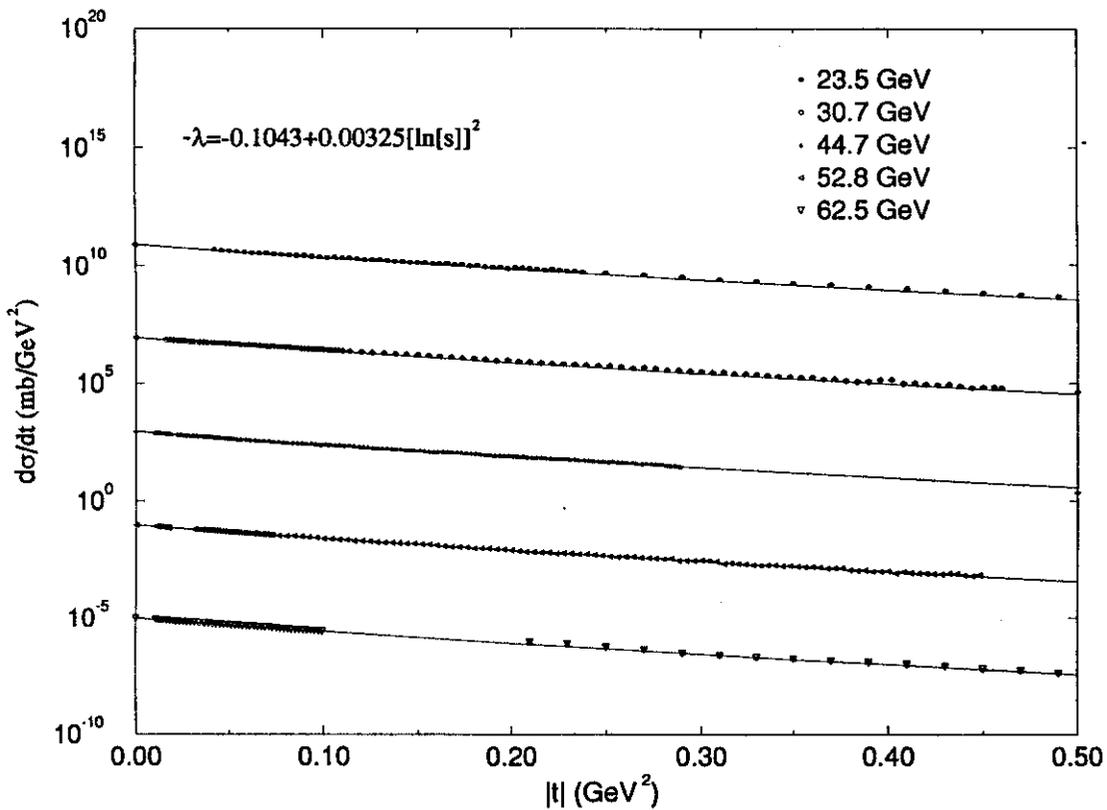
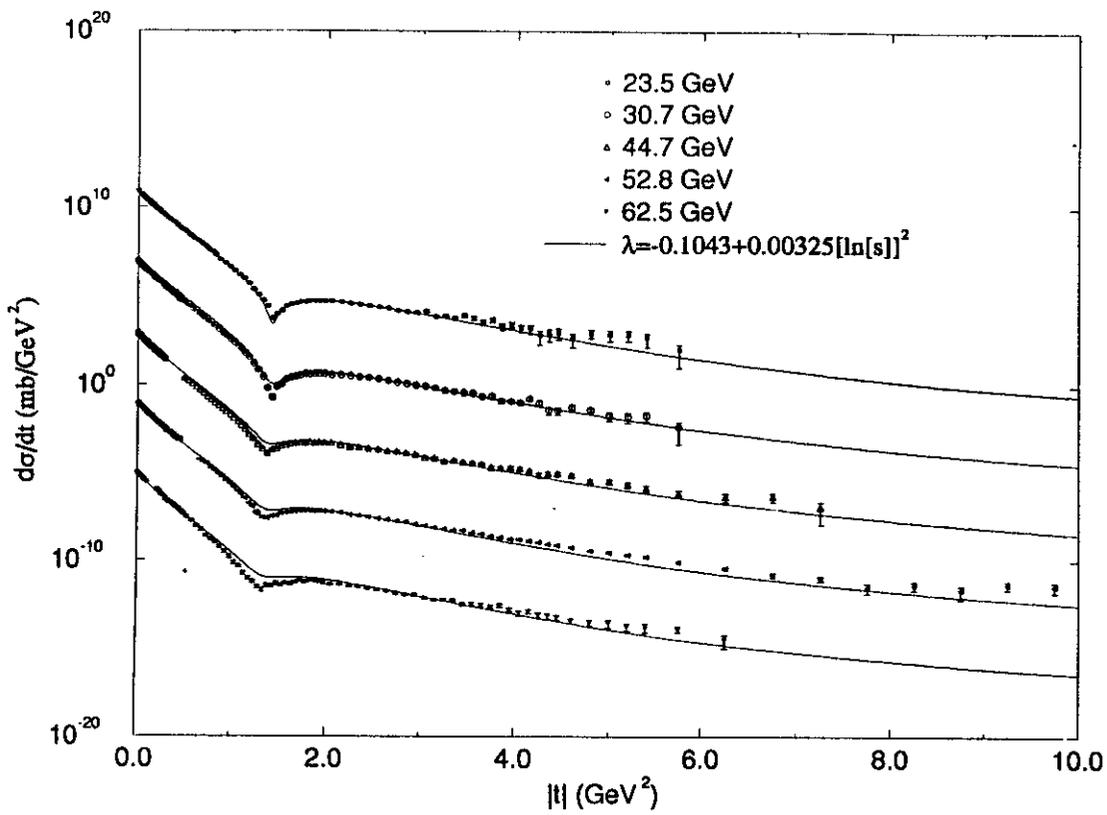


Figura 4.18 Descrição de $d\sigma/dt$ com amplitude dependente da energia. O gráfico inferior detalha a região para $|t| \leq 0,5 \text{ GeV}^2$ onde as curvas descrevem bem a inclinação de $d\sigma/dt$. Aqui $\lambda(s)$ é parametrizado por (4.15).

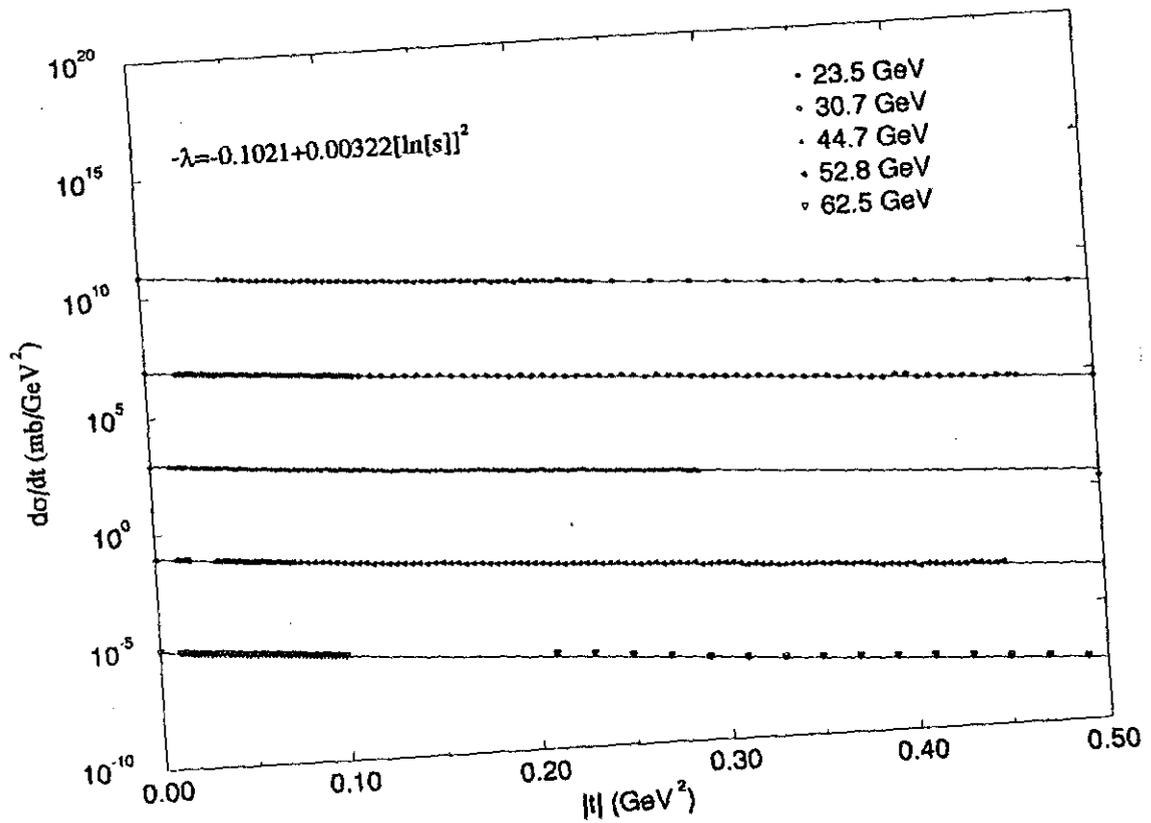
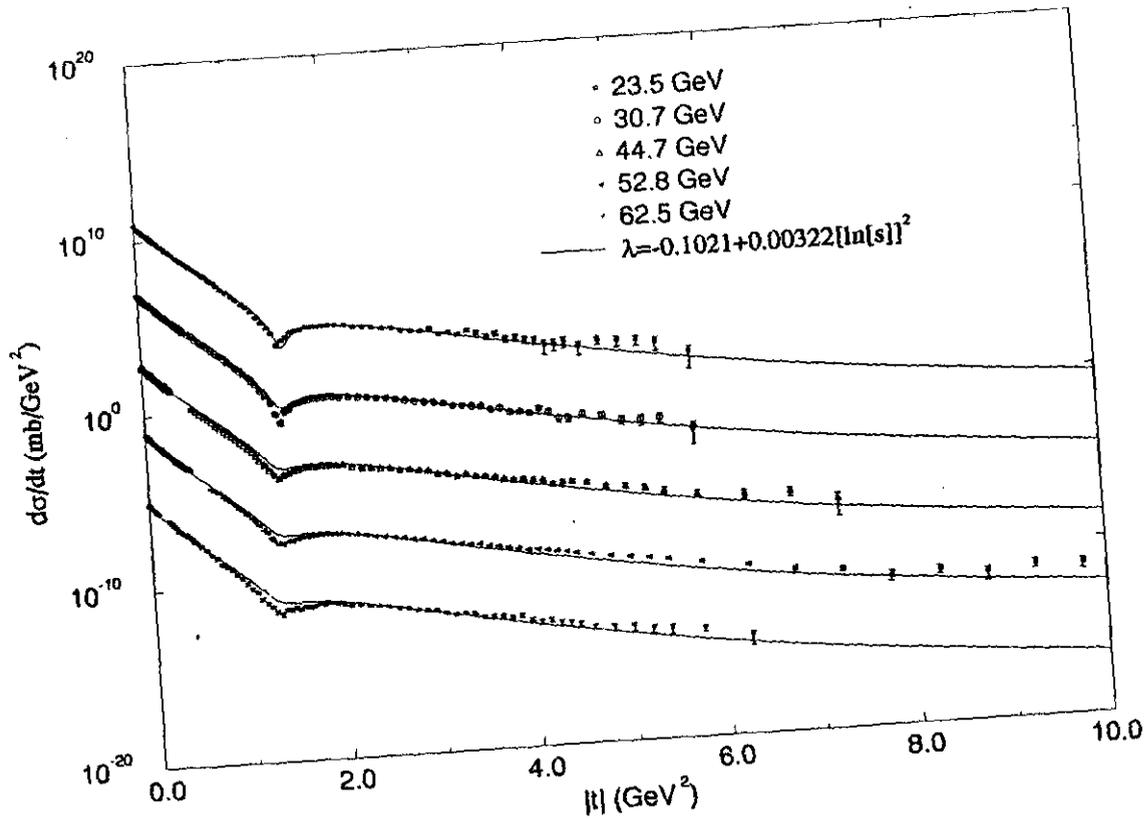


Figura 4.19 Descrição de $d\sigma/dt$ com fator de forma dependente da energia. Aqui $\lambda(s)$ é parametrizado por (4.15). Para o gráfico inferior vide legenda da figura 4.18.

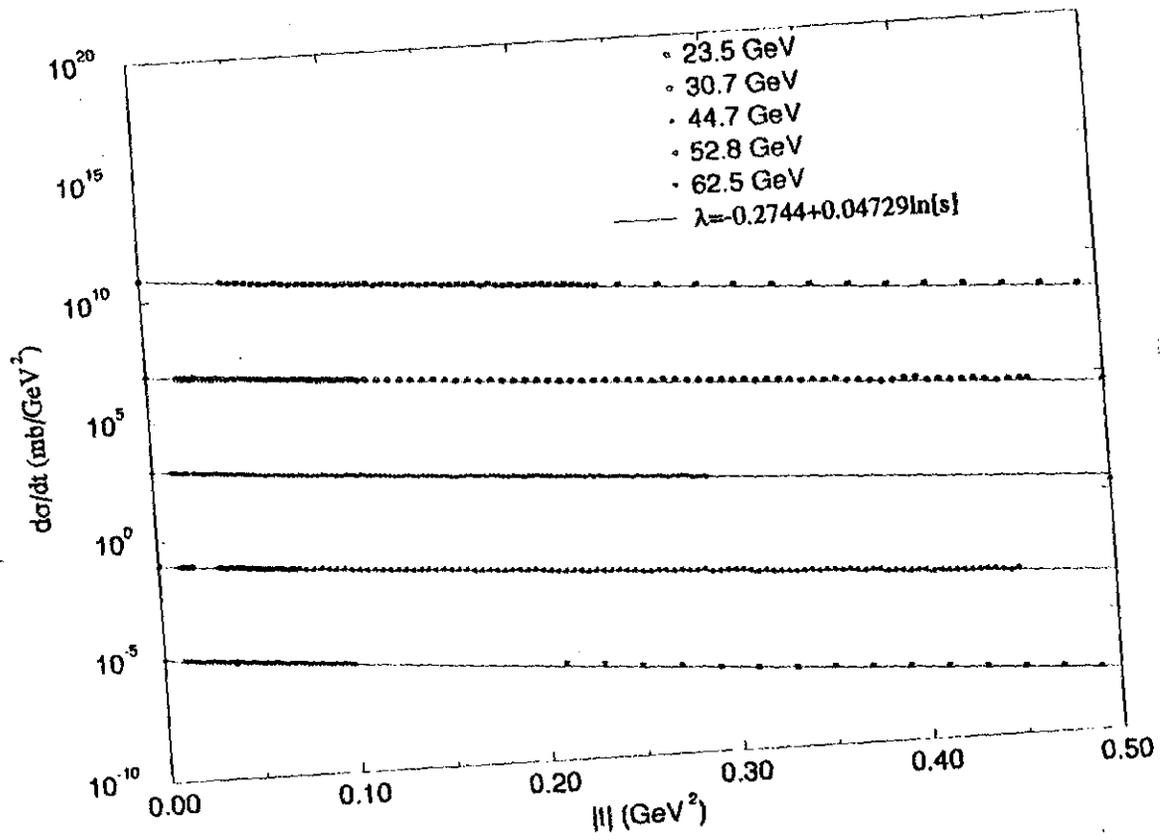
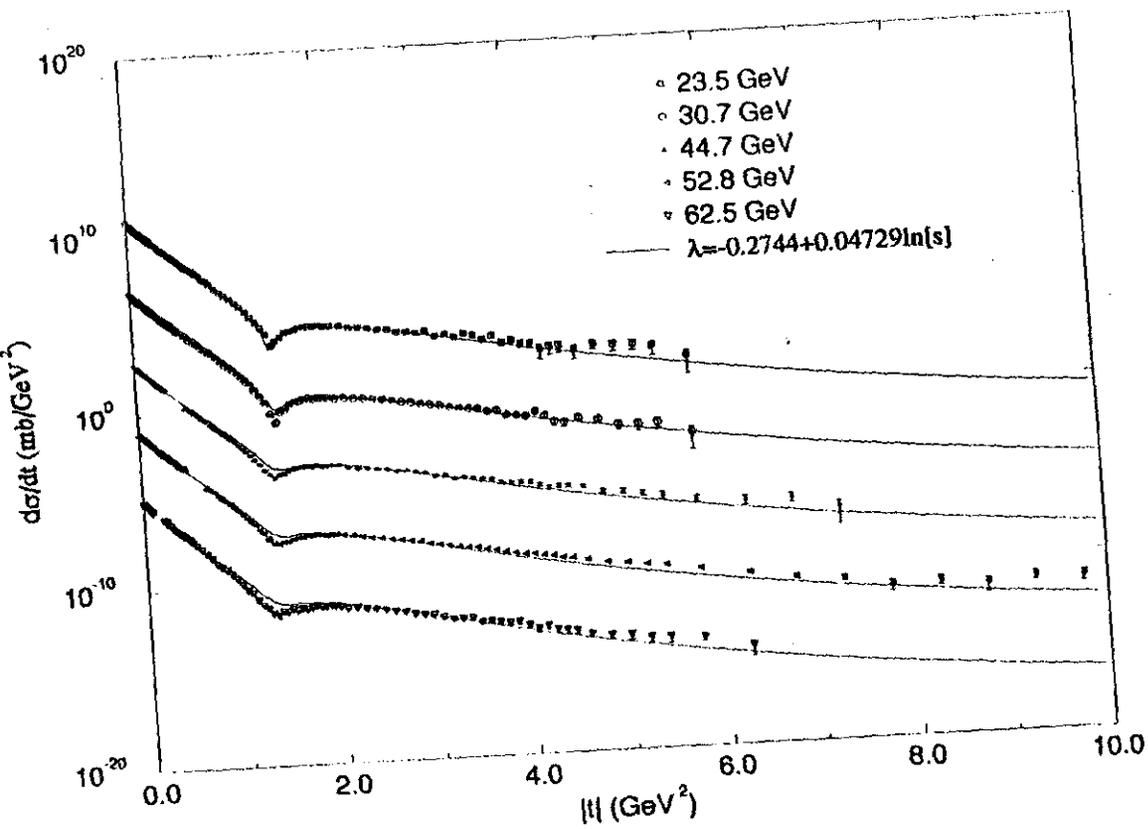


Figura 4.20 Descrição de $d\sigma/dt$ com amplitude dependente da energia. O gráfico inferior detalha a região para $|t| \leq 0,5 \text{ GeV}^2$ onde as curvas descrevem bem a inclinação de $d\sigma/dt$. Aqui $\lambda(s)$ é parametrizado por (4.16).

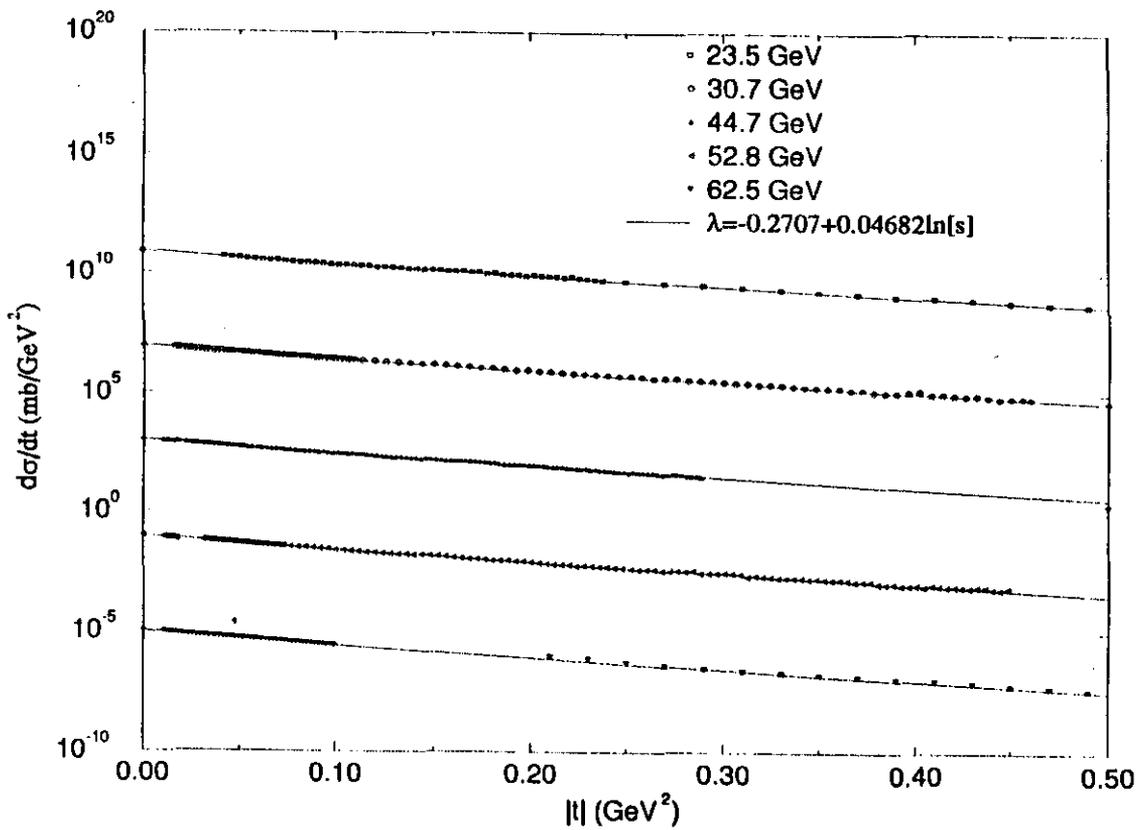
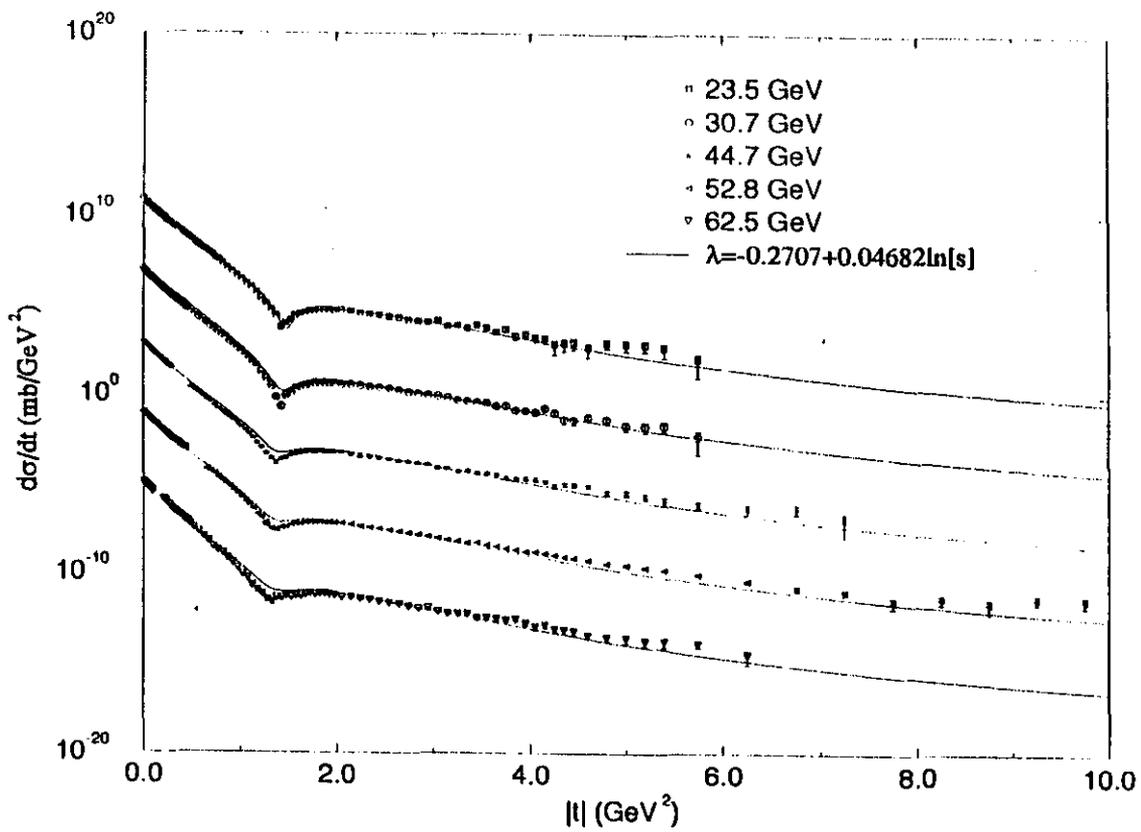


Figura 4.21 Descrição de $d\sigma/dt$ com fator de forma dependente da energia. Aqui $\lambda(s)$ é parametrizado por (4.16). Para o gráfico inferior vide legenda da figura 4.20.

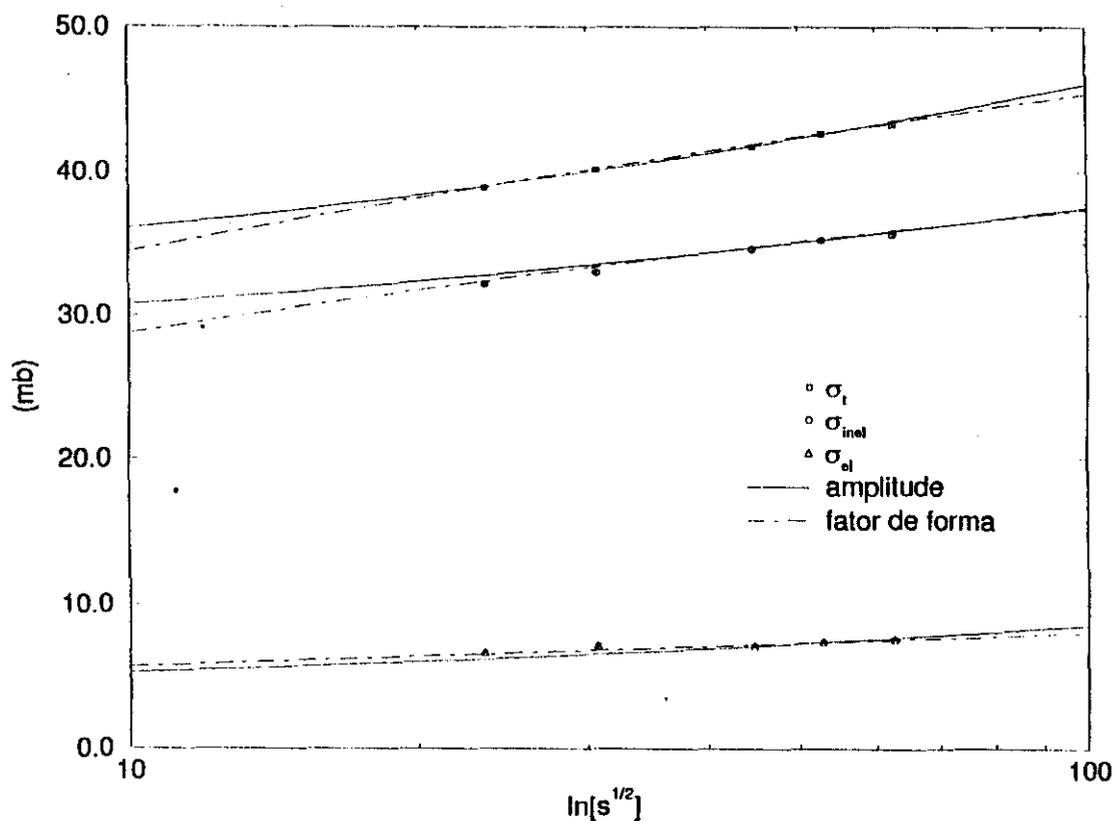
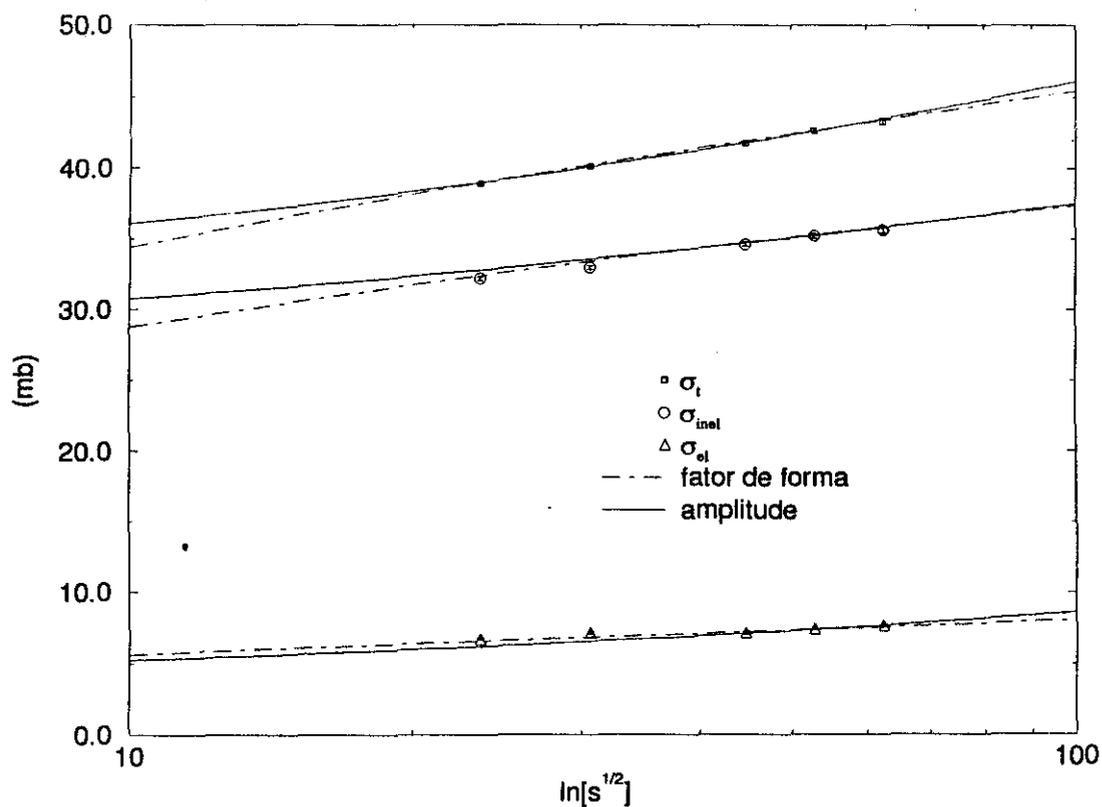


Figura 4.22 Previsão de σ_t , σ_{el} e σ_{inel} para as duas abordagens, $f(s)$ com linha cheia e $G(s)$ com linha tracejada. A figura superior utiliza (4.15) e a inferior (4.16).

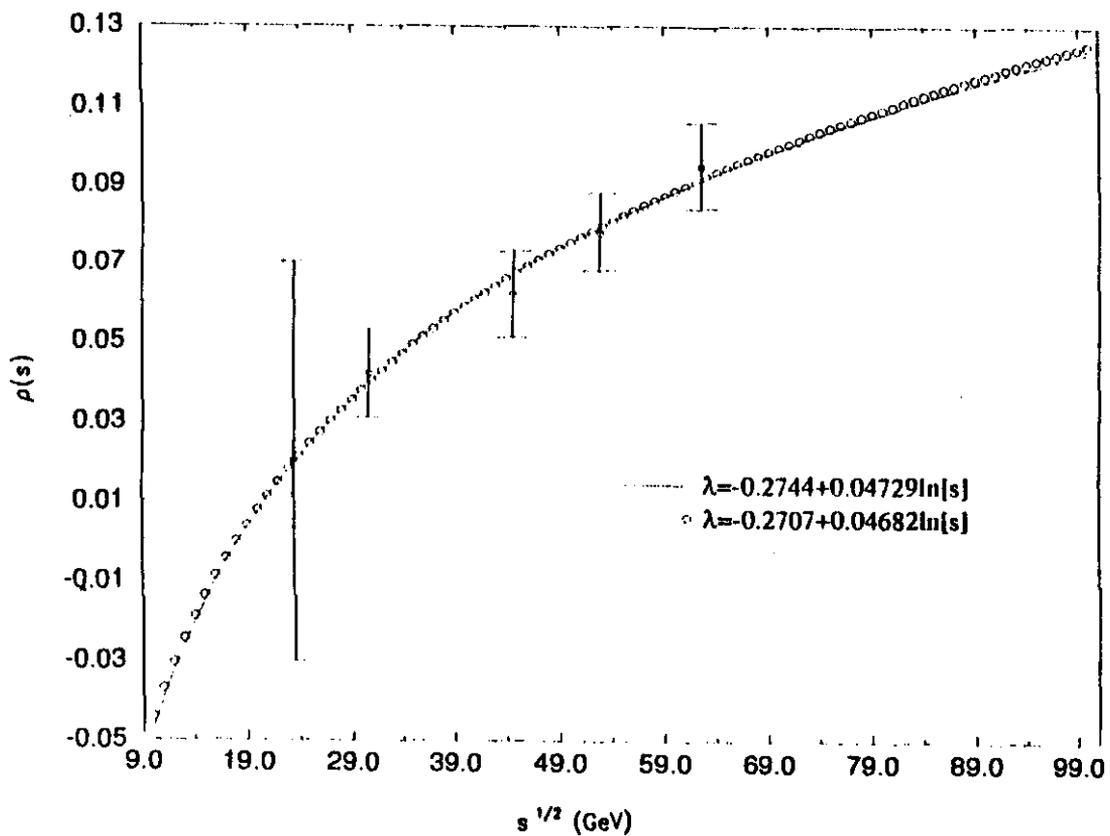
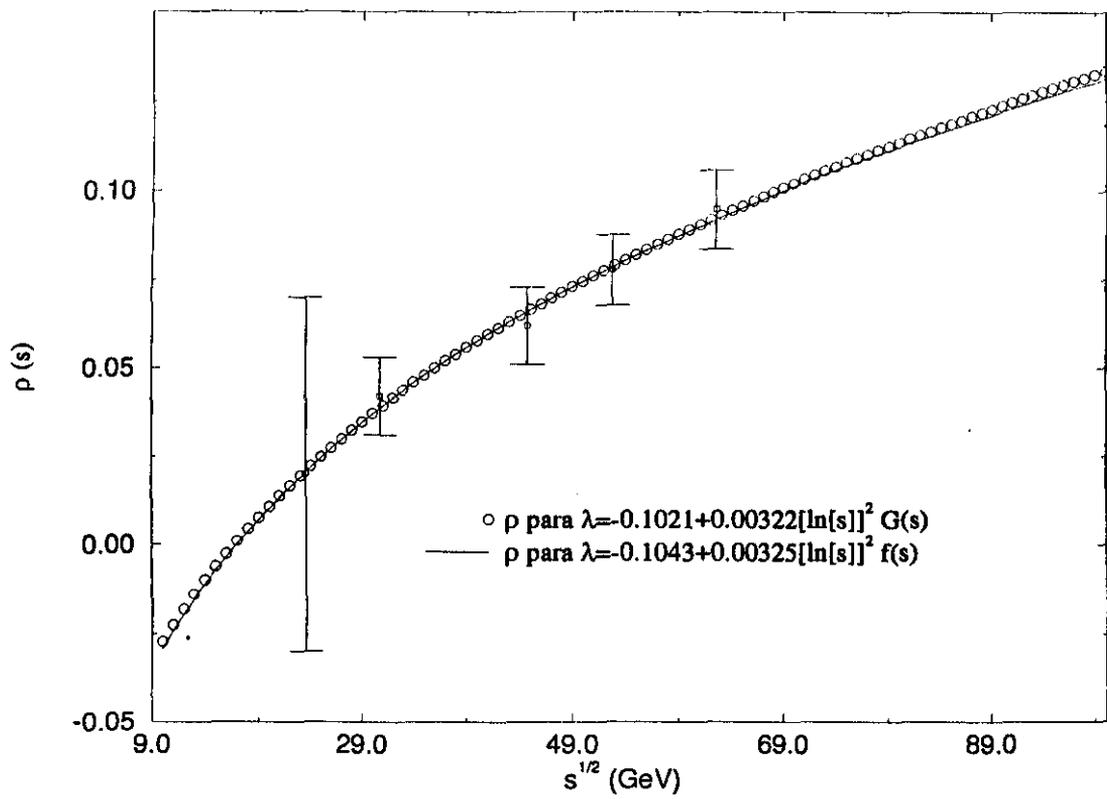


Figura 4.23 Razão entre partes real e imaginária da amplitude hadrônica e as descrições de ρ com (4.15) (figura superior) e (4.16) (figura inferior).

4.7.5.3 Tentativa de descrição conjunta

Na seção anterior vimos que os valores de $\lambda(s)$ que descrevem ρ pelo valor médio (tabela 4.18) são muito altos e o mínimo de difração acaba preenchido demasiadamente para algumas energias. Para tentar minimizar conjuntamente estes 2 efeitos, procuramos os valores de λ que permitem a descrição de ρ pelo valor médio para $\sqrt{s} = 23,5 \text{ GeV}$ e pelo valor mínimo dentro do erro experimental, para as outras energias. O resultado está na tabela 4.19.

$\sqrt{s}(\text{GeV})$	$\lambda(s)$ para $f(s)$	$\lambda(s)$ para $G(s)$
23,5	0,025	0,025
30,7	0,039	0,039
44,7	0,064	0,065
52,8	0,086	0,085
62,5	0,108	0,107

Tabela 4.19 Resultados obtidos para $\lambda(s)$ que descrevem ρ pelo valor médio ($\sqrt{s} = 23,5 \text{ GeV}$) e mínimo ($\sqrt{s} = 30,7; 44,7; 52,8$ e $62,5 \text{ GeV}$).

Com a tabela 4.19 fizemos duas parametrizações diferentes, uma com $[\ln(s)]^2$ e outra com $\ln(s)$ pelo mesmo motivo já explicado na seção anterior.

As parametrizações obtidas para λ são

$$\begin{aligned}\lambda(s) &= -0,0933 + 0,00286[\ln(s)]^2 \quad (\text{para } f(s)), \\ \lambda(s) &= -0,0916 + 0,00282[\ln(s)]^2 \quad (\text{para } G(s))\end{aligned}\tag{4.17}$$

e

$$\begin{aligned}\lambda(s) &= -0,242 + 0,0414\ln(s) \quad (\text{para } f(s)), \\ \lambda(s) &= -0,238 + 0,0409\ln(s) \quad (\text{para } G(s)).\end{aligned}\tag{4.18}$$

Os resultados para $d\sigma/dt$ e seções de choque integradas estão nas figuras 4.24 a 4.28 enquanto a descrição de ρ está na figura 4.29. Verificamos que a descrição das seções de choque integradas e do pico de difração de $d\sigma/dt$ ($|t| \leq 0,5 \text{ GeV}^2$) não sofre alteração significativa, já a região do mínimo tem uma pequena modificação. Ela continua preenchida em demasia mas em menor quantidade do que no caso anterior (figuras 4.18 a 4.20). Além disso, como vemos na figura 4.28, ainda conseguimos uma descrição de $\rho(s)$ à exceção de $\sqrt{s} = 62,5 \text{ GeV}$.

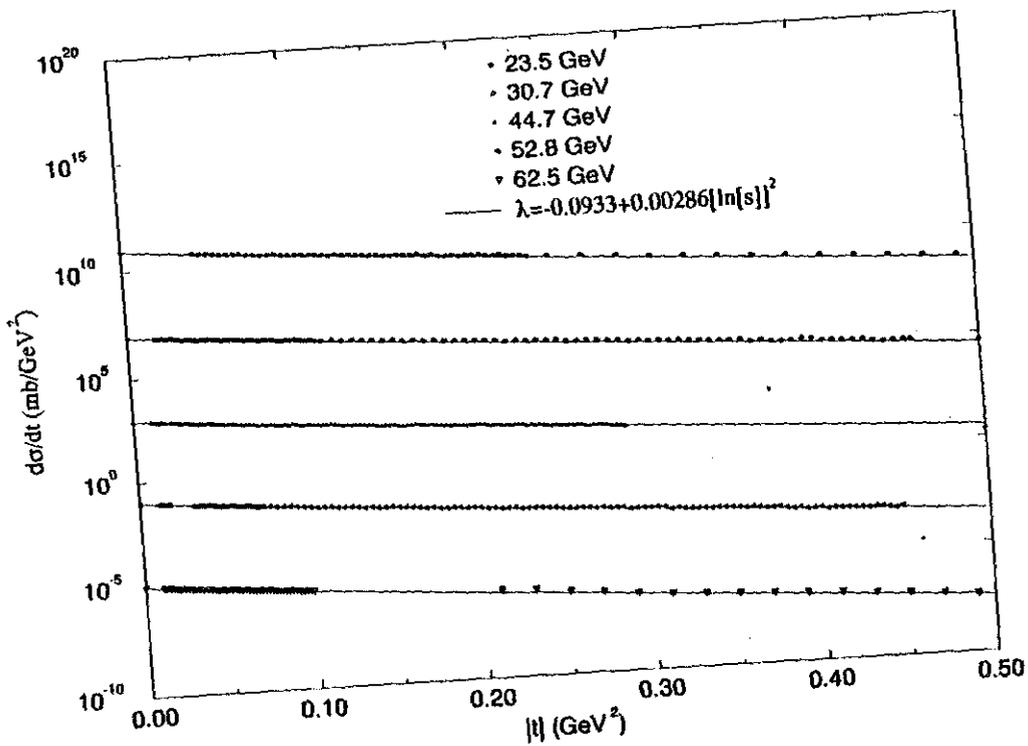
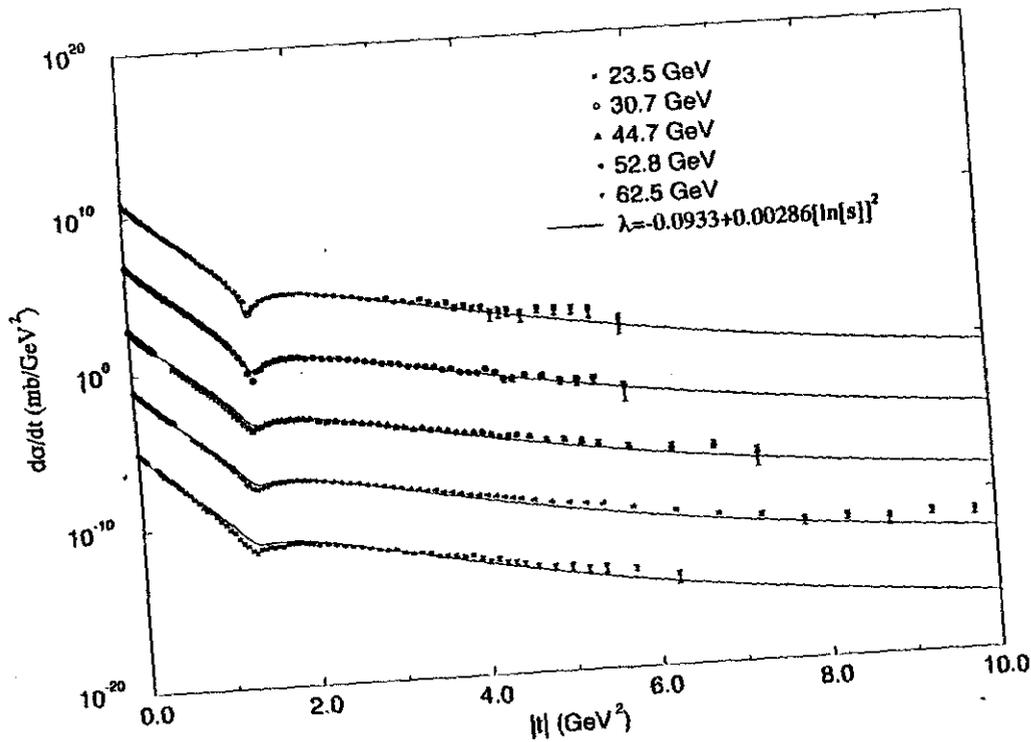


Figura 4.24 Descrição de $d\sigma/dt$ com amplitude dependente da energia. O gráfico inferior detalha a região para $|t| \leq 0,5 \text{ GeV}^2$ onde as curvas descrevem bem a inclinação de $d\sigma/dt$. $\lambda(s)$ é parametrizado por (4.17).

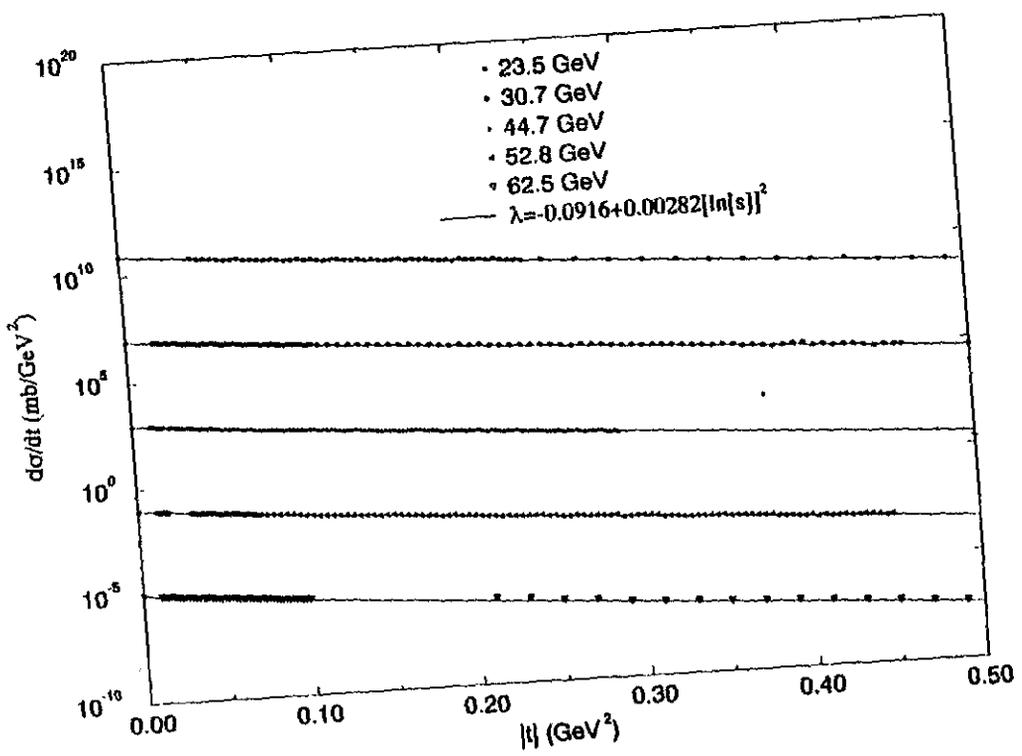
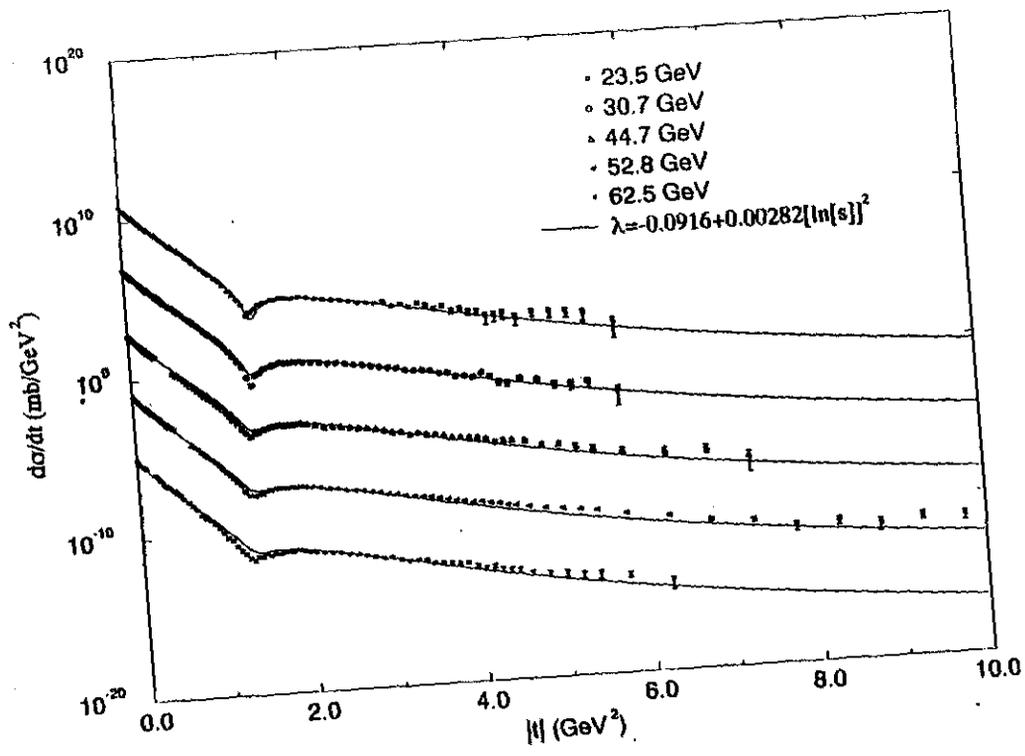


Figura 4.25 Descrição de $d\sigma/dt$ com fator de forma dependente da energia. O $\lambda(s)$ é parametrizado por (4.17). Para o gráfico inferior vide legenda da figura 4.24.

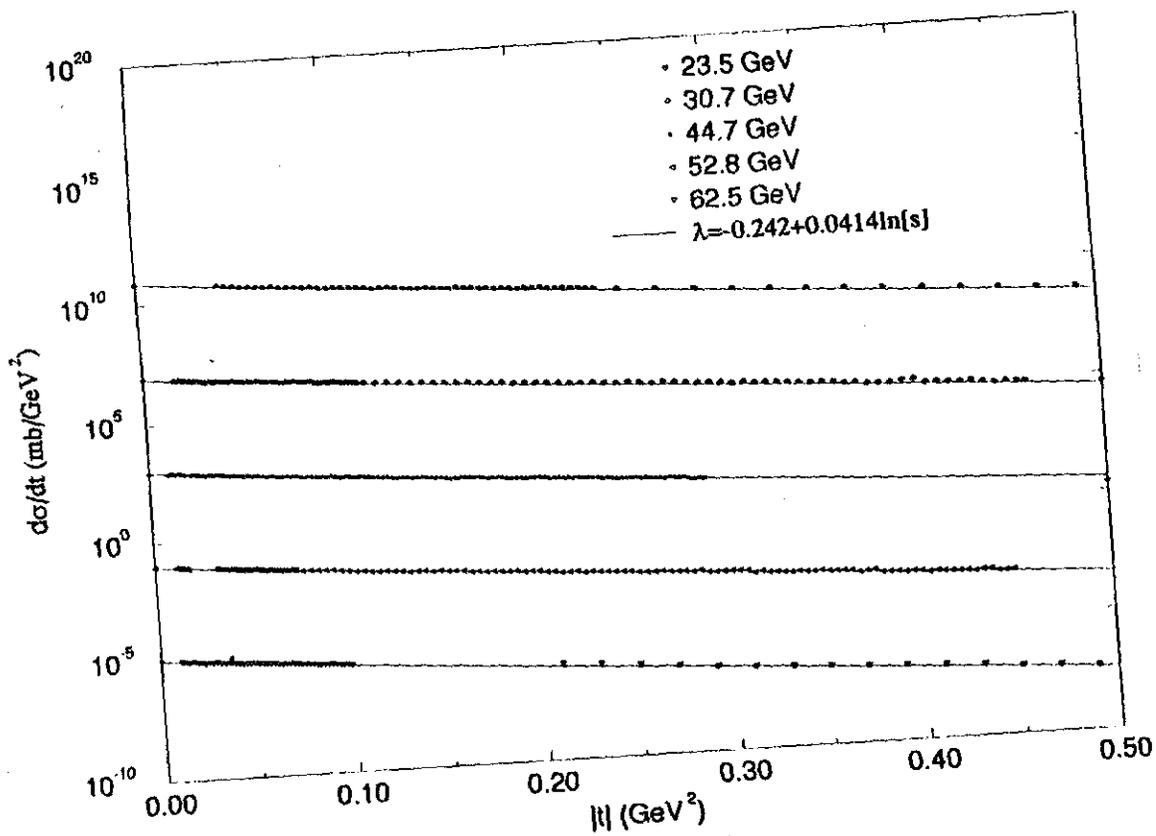
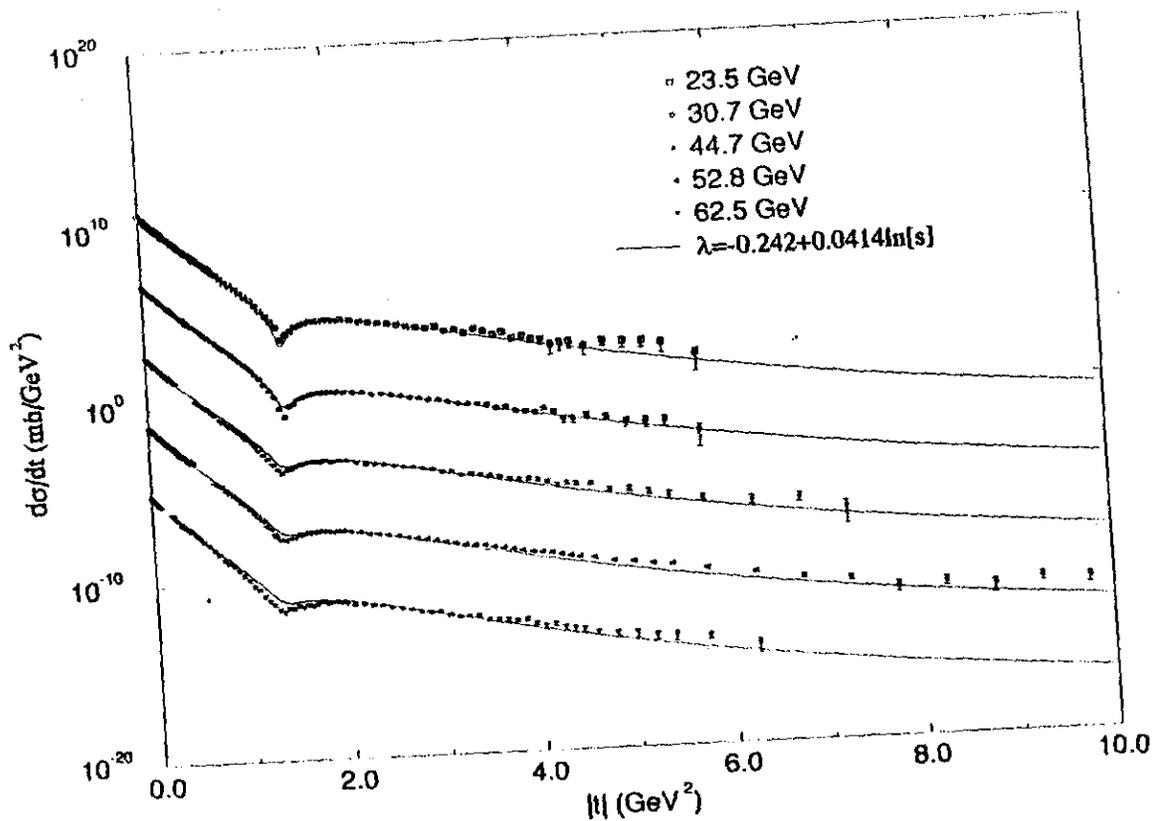


Figura 4.26 Descrição de $d\sigma/dt$ com amplitude dependente da energia. O gráfico inferior detalha a região para $|t| \leq 0,5 \text{ GeV}^2$ onde as curvas descrevem bem a inclinação de $d\sigma/dt$. O $\lambda(s)$ é parametrizado por (4.18).

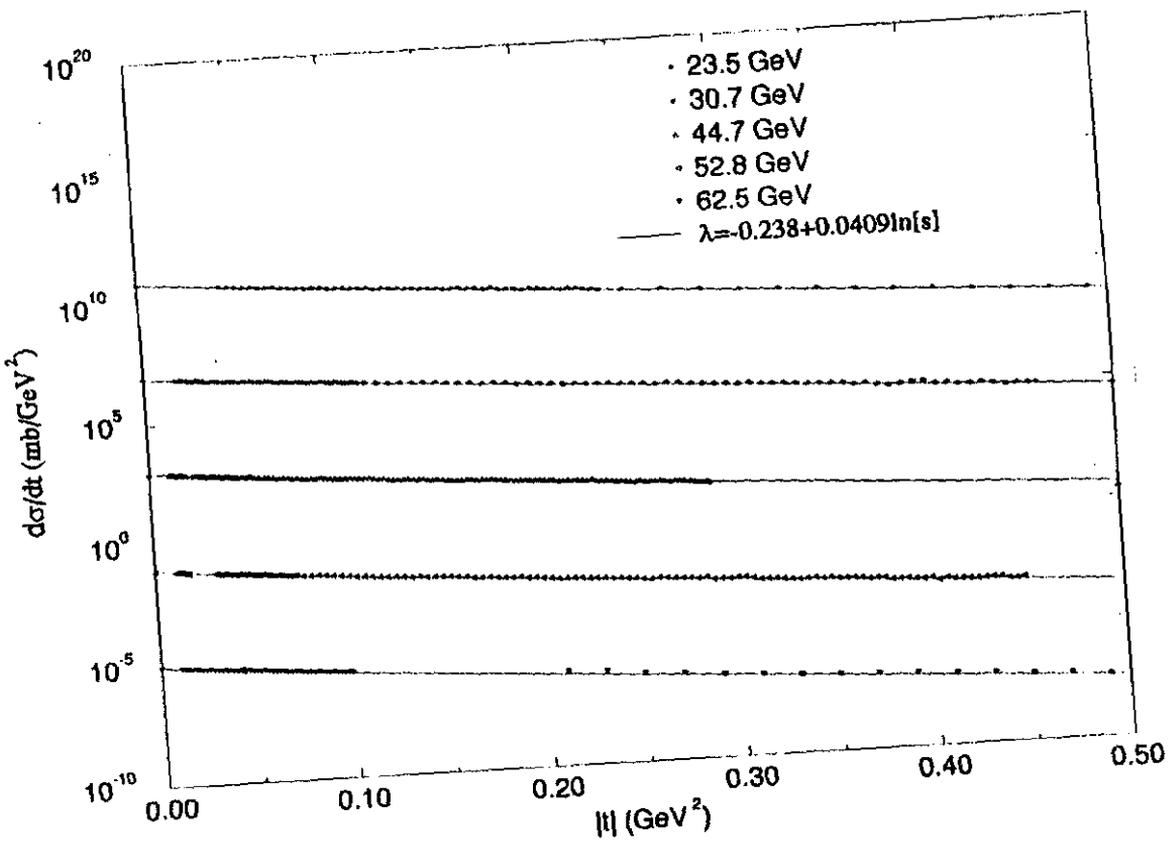
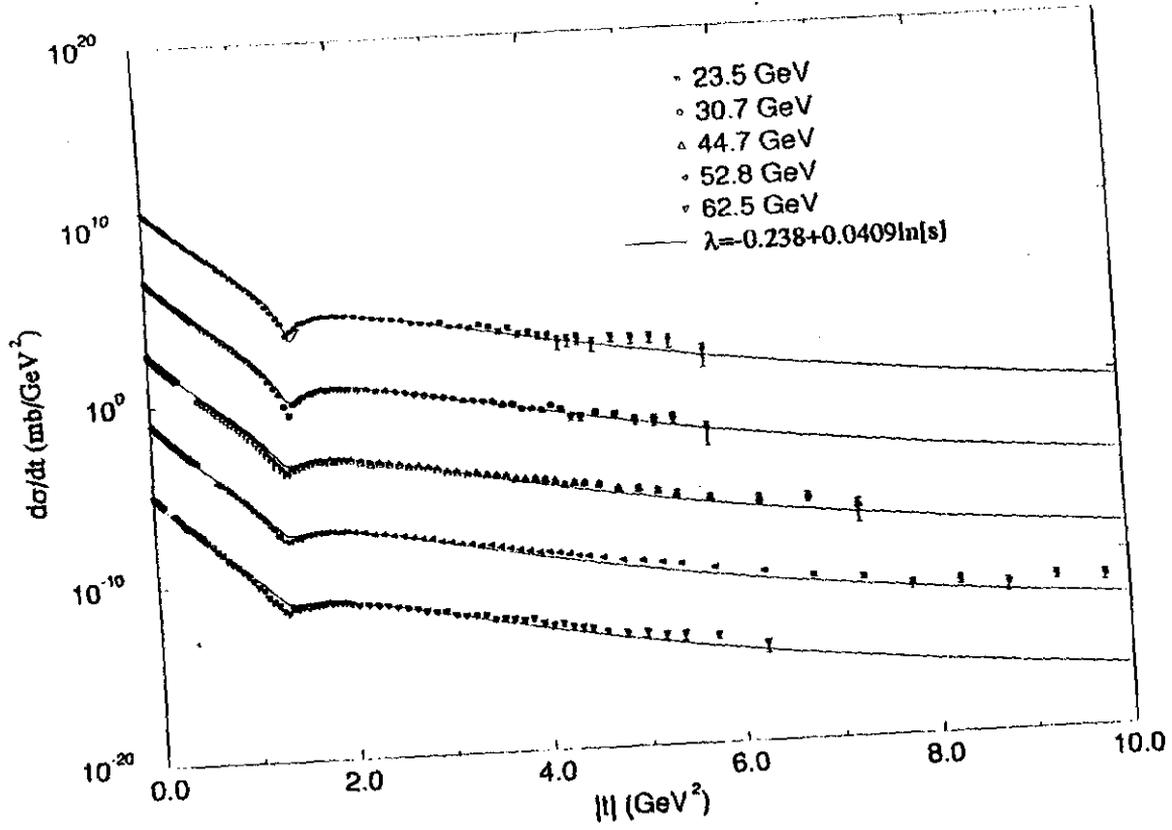


Figura 4.27 Descrição de $d\sigma/dt$ com fator de forma dependente da energia. O $\lambda(s)$ é parametrizado por (4.18). Para o gráfico inferior vide legenda da figura 4.26.

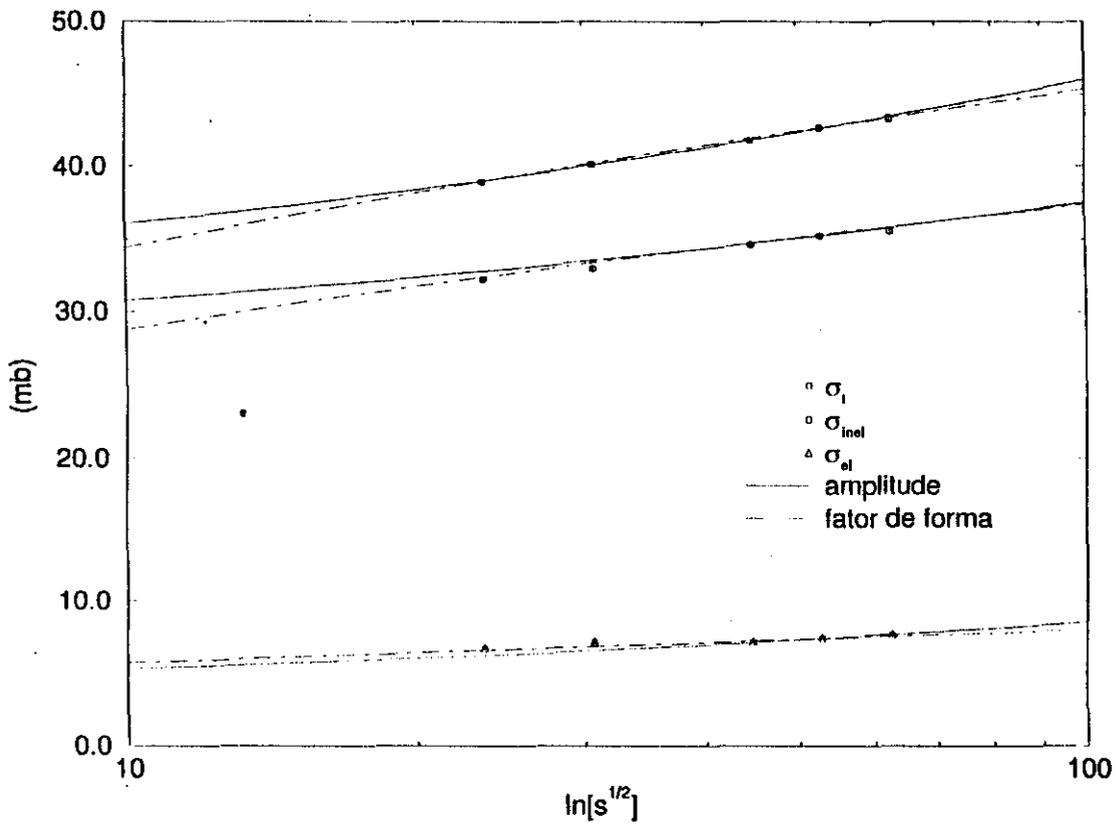
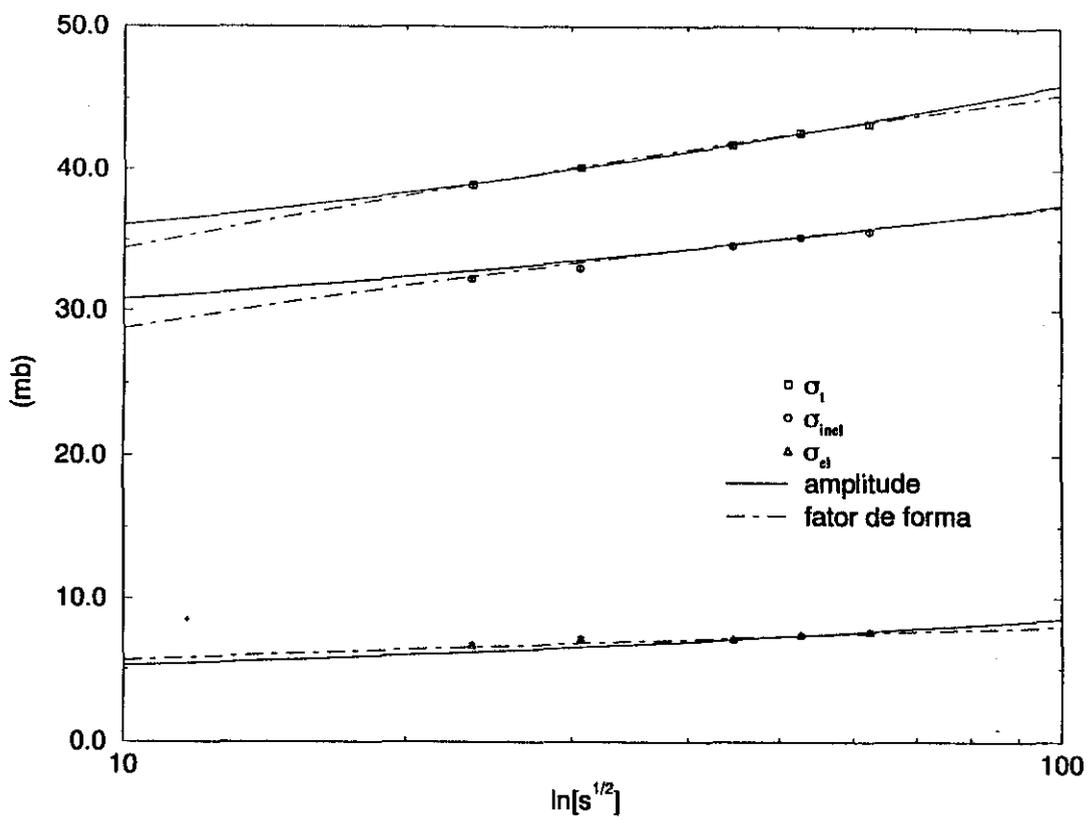


Figura 4.28 Previsão de σ_t , σ_{el} e σ_{inel} para as duas abordagens, $f(s)$ com linha cheia e $G(s)$ com linha tracejada, a figura superior utiliza (4.17) e a inferior (4.18).

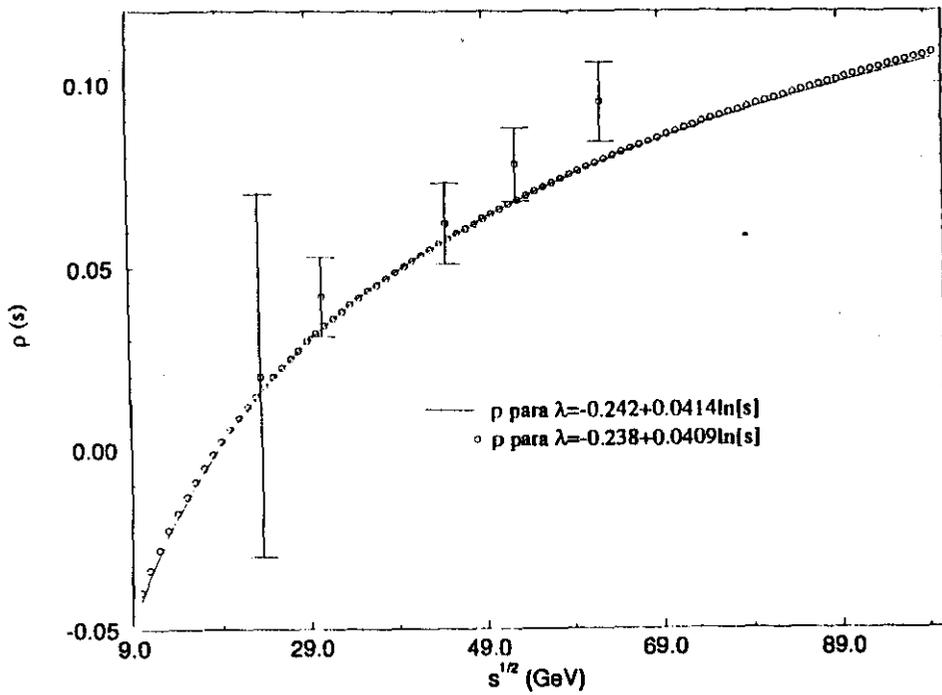
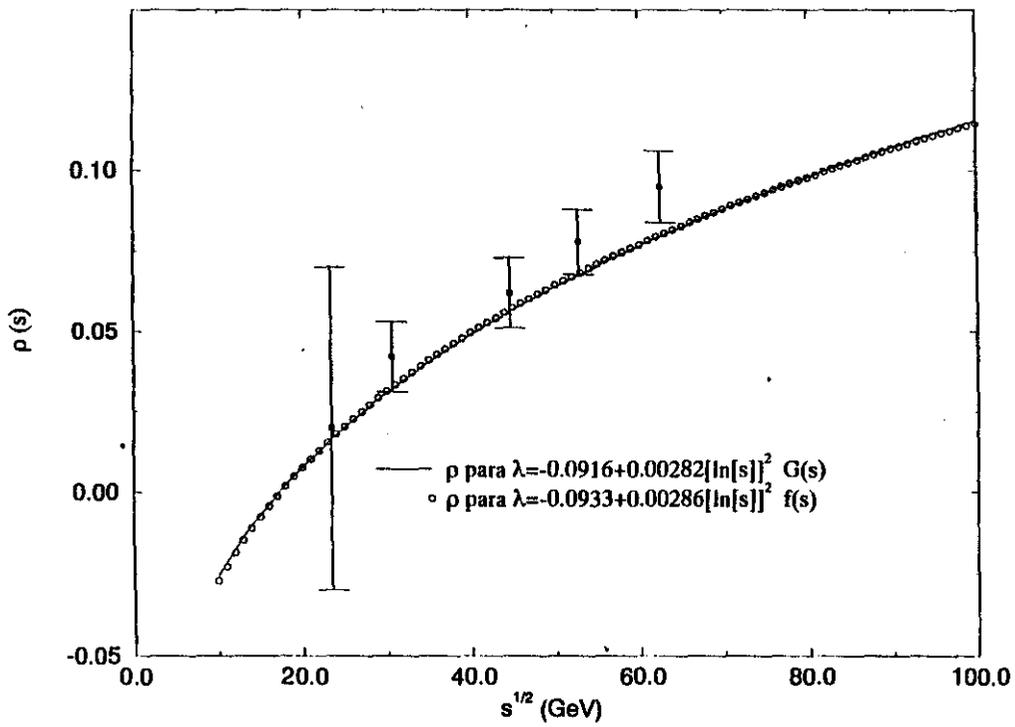


Figura 4.29 Razão entre partes real e imaginária da amplitude hadrônica e as descrições de ρ com (4.17) (figura superior) e (4.18) (figura inferior).

4.7.5.4 Discussão geral dos resultados

Com base no formalismo desenvolvido e nas parametrizações utilizadas concluímos que os resultados da seção 4.7.5.2 correspondem à melhor *descrição conjunta* que pudemos obter de todos os dados experimentais na região estudada: descreve ρ pelo valor médio (figura 4.23), seções de choque integradas (figuras 4.22), regiões de pequeno e grande momento transferido e apenas na região do mínimo as previsões não são plenamente satisfatórias (figuras 4.18-21).

Das duas seções anteriores, um aspecto que surge da análise dos resultados com parametrizações em $\ln(s)$ e $[\ln(s)]^2$ é que as descrições são similares, o que era de se esperar pois as equações (4.15) e (4.16) descrevem os valores da tabela 4.18 enquanto (4.17) e (4.18) os da tabela 4.19 e por isso as diferenças só devem aparecer para energias mais altas ($\sqrt{s} \geq 63 GeV$), onde os comportamentos de $\ln(s)$ e $[\ln(s)]^2$ diferenciam-se.

Observando as previsões de seções de choque integradas (figuras 4.16, 4.22 e 4.28) e considerando que a posição do mínimo difrativo, em $\sqrt{s} = 23,5 GeV$, é afetada pelo valor de C na abordagem de fator de forma, como comentado no início da seção 4.7.4, chegamos à conclusão que a abordagem de fator de forma dependente da energia é mais satisfatória neste trabalho.

Examinando as figuras 4.18-21 e 4.24-27 vemos que na região próxima ao mínimo de difração a curva teórica passa acima dos dados experimentais para as energias em que houve preenchimento excessivo do mínimo. Esse aspecto das curvas não é causado apenas pelo valor alto de $\lambda(s)$ já que também aparece em alguns casos das figuras 4.14 e 4.15. Ele também é consequência da própria estrutura do formalismo, dos valores utilizados para C , α^2 , β^2 e a^2 (tabelas 4.1 e 4.2) e das parametrizações selecionadas. Queremos ressaltar que a busca de melhores valores para os parâmetros C , α^2 , β^2 , a^2 e λ não é tarefa trivial mesmo com a utilização de subrotinas para minimização do χ^2 (MINUIT). Isso porque esse e outros programas de minimização do mesmo tipo procuram um mínimo local e não há como saber se o mínimo encontrado é o mínimo global (absoluto) principalmente em um problema de minimização de uma função não linear. Além disso não é possível saber se o ponto de partida (os valores iniciais dos parâmetros a serem minimizados) está próximo de um ponto que levará ao mínimo global ou não. O único procedimento para se testar se o mínimo é global é tentar a minimização de vários pontos diferentes e isso demanda um certo tempo de testes, em suma, não parece haver um método geral que procure um mínimo global.

No nosso modelo que envolve o cálculo de integrais numéricas, com funções especiais no integrando (K_0 , K_1 , kei_0 e ker_0), o trabalho de minimização complica-se e talvez seja necessário investigar métodos que permitam uma busca mais abrangente de mínimos. Por exemplo uma sugestão dos autores do MINUIT [68] para a busca de mínimos locais a partir de um já encontrado, ou tentar outros programas de minimização como o "method of simulated annealing" [69].

No MDO a escolha feita dos fatores de forma e $Im\{f\}$ fornece boas descrições da região fora do mínimo difrativo e das seções de choque integradas. Nesse sentido a hipótese de $Re\{f\} = \lambda(s)Im\{f\}$ pode não ser a mais indicada e uma possibilidade é o teste de outra expressão para $Re\{f\}$, por exemplo, através de relações de dispersão, para tentar descrever melhor a região do "dip".

4.7.5.5 Discussão crítica dos modelos de difração múltipla

Neste último item vamos tecer alguns comentários sobre os modelos de difração múltipla, revisados na seção 3.4.4, no que diz respeito principalmente ao número de parâmetros livres e à descrição do parâmetro ρ .

Na tabela 4.20 apresentamos um levantamento do número de parâmetros livres em cada modelo citado. As iniciais correspondem aos nomes dos autores (seção 3.4.4) e incluímos o modelo (não puramente geométrico) de Bourrely, Soffer e Wu. Por parâmetros de *ajustes* nos referimos aos parâmetros cujos valores devem ser determinados em cada energia e por parâmetros de *previsões* ao número total de parâmetros que entram em dependências energéticas, isto é, em parametrizações analíticas de parâmetros livres. Especificamos na tabela as origens desses parâmetros como fator de forma (FF), amplitude elementar (AE) e outros casos como constante de absorção, termos de Regge e parâmetro ρ na fórmula de Martin; colocamos também duas colunas onde vemos o número de parâmetros dependentes da energia (dep. energia) e da reação (dep. reação).

modelo	ajuste						previsões
	FF	AE	outros	total	dep. energia	dep. reação	n° total
CY	1	0	2	3	2	3	2
GV	8	3	2	13	≥ 3	3	0
BFV	8	5	0	13	4	5	0
SAA	8	4	0	12	2	2	0
HP	2	0	1	3	2	2	0
BSW	3	0	7	10	0	0	10
MP	2	1	2	5	3	3	12

Tabela 4.20 Parâmetros livres dos modelos revisados na seção 3.4.4.

Vemos que os casos com menor número de parâmetros livres correspondem aos modelos de Chou e Yang (CY) e de Hüfner e Povh (HP). Entretanto, como discutido e mostrado na seção 3.4.4, a interação de contato que caracteriza esses modelos leva a uma descrição bastante insatisfatória dos dados experimentais da seção de choque diferencial. Além disso os modelos não levam em conta as diferenças entre reações pp e $\bar{p}p$ (experimentalmente verificadas). No caso de HP, o ajuste de $d\sigma/dt$ até $|t| \sim 1,5 \text{ GeV}^2$ para pp em 53 GeV prevê um valor de $\rho = 0,046$, que está bem abaixo de $\rho_{exp} = 0,078 \pm 0,01$ (tabela 3.5). No modelo de CY ρ não é previsto pois eles fazem uso da fórmula de Martin (amplitude puramente imaginária).

O modelo de Glauber e Velasco (GV) e a abordagem de Buenerd, Furget e Valin (BFV) utilizam um número de parâmetros livres (de ajuste) muito superior ao dos demais modelos geométricos e superior ao do próprio modelo de Bourrely, Soffer e Wu (BSW), que inclui termos de Regge e Teoria de Campos (de previsões). Um ponto crucial em relação a esses modelos é o fato de a amplitude elementar utilizada não ser consistente com resultados obtidos através de ajustes independentes de modelo (geométrico). Essa análise feita pelos próprios autores Buenerd, Furget e Valin [19], prevê um zero na amplitude elementar, o que não ocorre nas funções por eles utilizadas (seção 3.4.4.3). Nessa análise de ajuste independente de modelo foram utilizados

fatores de forma do tipo de pólo duplo e também a parametrização de Felst e em ambos os casos a amplitude tem um zero em um valor definido de t . É portanto interessante que o modelo adotado de f possua um zero para valor bem definido de t . O modelo de GV apresenta um problema neste sentido porque a amplitude elementar f_{GV} não se anula para valor finito de t , além disso, BFV colocam dúvidas sobre a necessidade da fase complexa quando se considera os termos de reespalhamento [19]. Também, no caso de GV o ajuste de $d\sigma/dt$ na energia de 546 GeV é obtido com os valores dos parâmetros indicados na tabela 3.2, porém ρ é previsto com valores diferentes, $K = 85,3 \text{ mb}$, $\alpha = 0,24$ e $a^{-2} = 1,6 \text{ GeV}^{-2}$ [14], os quais fornecem $\rho = 0,17 \pm 0,01$, ou seja, fora do valor esperado de recentes experiências [43] (como foi citado em 3.4.4.3) e não é mostrada a descrição de $d\sigma/dt$ com esses novos valores dos parâmetros K , α e a .

No caso do modelo de Saleem, Aleem e Azhar (SAA) e interpretações do modelo BSW, o ponto crucial está na indeterminação da transformada de Fourier da amplitude elementar [44], o que é inconsistente com a própria estrutura do Formalismo da Difração Múltipla (FDM) [36].

Dessa discussão podemos concluir que a descrição das seções de choque (diferencial e integradas) juntamente com uma descrição satisfatória do parâmetro ρ é um problema em aberto nos modelos geométricos referidos. Lembremos que a única abordagem que atinge esse objetivo (BFV) não é consistente com o zero previsto para a amplitude elementar, além de possuir um número relativamente grande de parâmetros livres de ajuste.

Nesse ponto consideramos interessante ressaltar que ρ é uma grandeza crítica em espalhamento, mesmo do ponto de vista experimental. A recente medida em $\sqrt{s} = 541 \text{ GeV}$ ($\rho = 0,135 \pm 0,015$) [43] contrapõe-se ao valor experimental obtido na década passada ($\rho = 0,24 \pm 0,04$) [14] para $\sqrt{s} = 546 \text{ GeV}$. Também, como comentado na seção 2.1.3, a região de interferência coulomb-nuclear torna-se de difícil acesso à medida que a energia cresce e isso contribue para um aumento na imprecisão de ρ pois é necessário utilizar dados dessa região para determiná-lo experimentalmente.

Do exposto vemos que o MDO é bastante econômico em termos de número de parâmetros livres, além de ser consistente com a estrutura do FDM, bem como com análise independente de modelo que prevê um zero na amplitude elementar.

Neste trabalho substituímos a fórmula de Martin (a qual impedia previsões de ρ no MDO) através da hipótese de amplitude elementar complexa (seção 4.3). Nesse novo formalismo temos 5 parâmetros livres e 8 no caso de abordagem preditiva (o que não ocorre nos modelos de GV, BFV, SAA e HP), os quais utilizamos para estudar o espalhamento elástico próton-próton. Como ocorre com os demais modelos geométricos a descrição simultânea das seções de choque e de ρ não é plenamente satisfatória.

Capítulo 5. CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES FINAIS

O objetivo geral desta pesquisa foi um estudo do espalhamento elástico pp na região do ISR ($\sqrt{s} = 23 - 63 \text{ GeV}$) através de um formalismo eiconal (canal-s).

Uma primeira característica do trabalho foi uma revisão detalhada dos fundamentos do FDM (seções 3.4.1 a 3.4.3) e dos principais modelos baseados nesse formalismo (puramente geométricos), apresentando-se as hipóteses essenciais, bem como os resultados de análises e comparação entre previsões e dados experimentais (seção 3.4.4).

Em seguida realizamos uma reformulação do modelo de difração múltipla de Menon e Pimentel, introduzindo um novo parâmetro livre, $\lambda(s)$, através de uma amplitude elementar complexa e, desse modo, substituindo a fórmula de Martin (seção 4.3). Um ponto central neste trabalho foi o estudo da determinação de uma dependência energética para $\lambda(s)$ (seções 4.7.1 a 4.7.3). Com isso obtivemos descrições satisfatórias dos dados experimentais através de duas abordagens: fator de forma dependente da energia e amplitude elementar dependente da energia (seção 4.7.4). Uma primeira conclusão deste trabalho é que, na região estudada, nossos resultados mostram que os dados experimentais de seções de choque (diferencial e integradas) podem ser tão bem descritos como com a fórmula de Martin. Concluimos também que a abordagem com fator de forma dependente da energia apresenta melhores resultados (seção 4.7.4).

Após isso passamos ao problema da descrição de ρ . Uma segunda conclusão deste trabalho é que, na região do ISR e com o modelo reformulado, a descrição global de todas as grandezas conjuntamente tem caráter limitado (seção 4.7.5). Apesar disso um estudo comparativo com os demais modelos geométricos leva à conclusão que nosso formalismo pode ser considerado eficiente na descrição global dos dados analisados (seção 4.7.5.5). Entendemos como um dos resultados originais do trabalho o próprio estudo das limitações dessas descrições globais através de modelos puramente geométricos.

Em relação às estratégias e objetivos específicos da pesquisa (seção 4.5) podemos tecer os seguintes comentários:

Com as hipóteses (4.1) e (4.2) para a amplitude elementar, o modelo descreveu muito bem a seção de choque diferencial $d\sigma/dt$ e as seções de choque integradas (figuras 4.14 a 4.16) com uma descrição ligeiramente melhor utilizando dependência energética no fator de forma. Isso está de acordo com o item (a) da seção 4.5 (estratégia da pesquisa): a hipótese substitui a fórmula de Martin com bons resultados.

Ao tentarmos descrever ρ com as parametrizações em (4.14) percebemos que o crescimento do ρ teórico era insuficiente para acompanhar o ρ experimental (figura 4.17) e por isso modificamos as parametrizações de $\lambda(s)$ de forma a descrever ρ (figuras 4.23 e 4.29) mas mantendo os valores de C , α^2 , β^2 e a^2 do modelo original (MDO) (tabelas 4.1 e 4.2). O resultado afetou a descrição do mínimo difrativo de $d\sigma/dt$ (figuras 4.18 a 4.21 e 4.24 a 4.27) assim essa descrição não é plenamente satisfatória. Essa análise está de acordo com o item (b) da seção 4.5.

A seguir (seção 4.7.5.4) indicamos possíveis causas das limitações citadas acima bem como propostas de reanálise dos parâmetros livres (sujeitas ao problema do mínimo global) e diferente hipótese para $Re\{f\}$, de acordo com o item (c) da seção 4.5.

De todos estas possibilidades a mais atraente no momento é a procura por novos valores dos

parâmetros C , α^2 , β^2 e a^2 , mantendo a mesma hipótese (4.1) para λ (lembrando a ressalva da seção 4.7.5.4 ao problema do mínimo local) pois obtivemos bons resultados com ela, em particular com a abordagem de fator de forma dependente da energia.

Neste trabalho limitamos nosso estudo ao conjunto de dados experimentais considerado o mais coerente do ponto de vista estatístico (pp entre 23 e 63 GeV analisados por Amaldi e Schubert). Assim, as tendências obtidas para o comportamento dos parâmetros livres podem ser consideradas essenciais. Entretanto, para uma compreensão profunda do assunto, é importante um estudo conjunto das reações pp e $\bar{p}p$; para esta última existem hoje dados experimentais até a energia de 1,8 TeV e também a inclusão de energias abaixo de 23 GeV para o espalhamento pp. Esse é nosso objetivo na sequência da pesquisa e acreditamos que os resultados aqui obtidos serão fundamentais para fornecer subsídios ao trabalho futuro.

Apêndice 1. Variáveis de Mandelstam

Para colisões envolvendo 2 partículas no estado inicial (1 e 2) e duas no estado final (3 e 4), as variáveis de Mandelstam são três, o quadrado da energia no centro de massa,

$$s = (P_1 + P_2)^2,$$

o quadrado do quadrimomento transferido

$$t = (P_1 - P_3)^2,$$

e a terceira variável definida através de

$$u = (P_1 - P_4)^2,$$

onde P_1, P_2, P_3 e P_4 são quadrimomentos das partículas que sofrem colisão, P_1 e P_2 são os quadrimomentos iniciais e P_3 e P_4 são os finais. A vantagem em utilizar as variáveis de Mandelstam é a invariância destas e para ver que \sqrt{s} é a energia do centro de massa utilizaremos esta propriedade, partindo de $s = (P_1 + P_2)^2$ onde $P_{1,2} = (E_{1,2}, \mathbf{p}_{1,2})$ e $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$. Aqui estamos usando a notação definida na introdução na qual as grandezas no sistema de centro de massa não têm índice. Com isso,

$$s = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (E_1 + E_2)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{s} = E_1 + E_2.$$

Agora estudemos t :

$$t = (P_1 - P_3)^2 = (P_1)^2 + (P_3)^2 - 2P_1 \cdot P_3,$$

onde $P_{1,3} = (E_{1,3}, \mathbf{p}_{1,3})$. Temos a relação relativística

$$P_{1,3}^2 = (E_{1,3})^2 - (\mathbf{p}_{1,3})^2 = m_{1,3}^2$$

e pela conservação de momento $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_3|$ que representaremos aqui simplesmente por p . Sendo $m_1 = m_3$ para uma colisão elástica

$$t = 2m_1^2 - 2E_1E_3 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3,$$

ou

$$t = 2m_1^2 - 2E_1E_3 + 2p^2 \cos\theta,$$

onde θ é o ângulo entre \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_3 . Devido à conservação de momento

$$E_1^2 = (\mathbf{p}_1)^2 + m_1^2 = (\mathbf{p}_3)^2 + m_3^2 = E_3^2.$$

Logo

$$t = 2(m_1^2 - E_1^2 + p^2 \cos\theta) = -2[(\mathbf{p}_1)^2 - p^2 \cos\theta],$$

e

$$t = -2p^2(1 - \cos\theta), \quad (\text{A.1.1})$$

ou de $p = \hbar k$ ($\hbar = 1$),

$$t = -2k^2(1 - \cos\theta),$$

de modo que

$$dt = -2k^2 \text{sen}\theta d\theta \Rightarrow \text{sen}\theta d\theta = -\frac{dt}{2k^2}.$$

Como θ é o ângulo de espalhamento no centro de momento

$$d\Omega' = \text{sen}\theta d\theta d\phi = -\frac{dt}{2k^2} d\phi.$$

Definindo para o caso de simetria azimutal

$$d\Omega = \int_0^{2\pi} d\Omega' = -\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2k^2} d\phi = -\pi \frac{dt}{k^2},$$

e usando a regra da cadeia para a seção de choque

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{d\Omega}{dt}, & d\Omega &= \frac{d\Omega}{dt} dt. \\ \Rightarrow \frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{\pi}{k^2} \frac{d\sigma}{d\Omega}. \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

Da equação (A.1.1), devido à métrica utilizada, t é uma grandeza negativa, de modo que a variável independente na derivada

$$\frac{d\sigma}{d(-t)} = \frac{\pi}{k^2} \frac{d\sigma}{d\Omega},$$

é uma grandeza positiva. Em alguns textos expressa-se também como $d\sigma/d|t|$ ou $d\sigma/dq^2$, onde $q^2 \equiv -t$ é o quadrado do momento transferido. Pode-se também desprezar o sinal negativo [32] expressando-se a equação (A.1.2), com abuso de linguagem, como

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi}{k^2} \frac{d\sigma}{d\Omega}.$$

Então chegamos à relação entre a seção de choque diferencial em função do quadrimomento transferido, $d\sigma/dt$, e a seção de choque diferencial $d\sigma/d\Omega$, que independe do ângulo azimutal. A decisão em utilizar $d\sigma/dt$ ou $d\sigma/d\Omega$ depende da experiência e conveniência.

Apêndice 2. Relação entre a amplitude de espalhamento e seção de choque diferencial

Para obter $d\sigma/d\Omega = |\mathcal{F}(\Omega)|^2$ vamos partir da corrente de probabilidade

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2im}(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) = \frac{1}{m} \text{Im}\{\Psi^* \nabla \Psi\}.$$

Na função de onda

$$\Psi(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \mathcal{F}(\Omega) \frac{\exp(ikr)}{r},$$

o primeiro termo é a função de onda incidente fora da região de potencial. Aplicando $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ em \mathbf{j}_{inc} obtemos

$$\mathbf{j}_{\text{inc}} = \frac{\mathbf{k}}{m} = \mathbf{v}.$$

O segundo termo é $\mathcal{F}(\Omega) \exp(ikr)/r$ e corresponde às partículas espalhadas do feixe. Aplicando-a na corrente \mathbf{j}_{esp} obtem-se

$$|\mathbf{j}_{\text{esp}}| = \frac{|\mathbf{v}|}{r^2} |\mathcal{F}(\Omega)|^2 \quad (r \rightarrow +\infty).$$

Seja dn o número de partículas que atingem o detector num ângulo sólido $d\Omega$ por unidade de tempo. Então, em termos do feixe incidente, dn é proporcional ao fluxo incidente F_{inc} e ao ângulo sólido $d\Omega$

$$dn \propto F_{\text{inc}} = \alpha |\mathbf{j}_{\text{inc}}|, \quad dn \propto d\Omega.$$

Assim

$$dn = \alpha |\mathbf{j}_{\text{inc}}| \sigma(\theta, \phi) d\Omega$$

onde $d\sigma/d\Omega = \sigma(\theta, \phi)$.

Em relação ao feixe espalhado dn é proporcional ao fluxo espalhado $F_{\text{esp}} = \mathbf{j}_{\text{esp}} \cdot d\mathbf{s}$ e consideramos que a constante de proporcão também é α :

$$dn = \alpha \mathbf{j}_{\text{esp}} \cdot d\mathbf{s} = \alpha |\mathbf{j}_{\text{esp}}| r^2 d\Omega.$$

Portanto

$$|\mathbf{j}_{\text{inc}}| \sigma(\theta, \phi) d\Omega = |\mathbf{j}_{\text{esp}}| r^2 d\Omega$$

$$\Rightarrow \sigma(\theta, \phi) = |\mathcal{F}(\Omega)|^2,$$

ou

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |\mathcal{F}(\Omega)|^2.$$

Do apêndice 1

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi}{k^2} \frac{d\sigma}{d\Omega}.$$

Expressando Ω em termos de t através de θ , equação A.1.1, e levando em conta a dependência da amplitude com a energia no centro de massa, obtemos

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi}{k^2} |\mathcal{F}(t, s)|^2.$$

Apêndice 3. Teorema óptico

Com base no desenvolvimento do apêndice anterior, para o Teorema Óptico, substituímos $\Psi(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \mathcal{F}(\Omega) \exp(ikr)/r$ na equação de corrente de probabilidade e encontramos três termos: \mathbf{j}_{inc} , \mathbf{j}_{esp} , \mathbf{j}_{int} . Os dois primeiros já calculamos e são

$$\mathbf{j}_{inc} = \frac{\mathbf{k}}{m} \quad e \quad |\mathbf{j}_{esp}| = \frac{|\mathbf{k}|}{mr^2} |\mathcal{F}(\Omega)|^2 \quad (r \rightarrow +\infty).$$

O terceiro termo dado pela interferência entre a onda espalhada e a onda plana é, em sua parte radial, expresso por

$$\mathbf{j}_{int} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = Re \left\{ \frac{1}{mi} \left[\exp(-ikr \cos\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\mathcal{F}(\Omega) \frac{\exp(ikr)}{r} \right) + \mathcal{F}^*(\Omega) \frac{\exp(-ikr)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \exp(ikr \cos\theta) \right] \right\},$$

onde $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos\theta$. Na figura abaixo há uma ilustração das coordenadas usadas no texto.

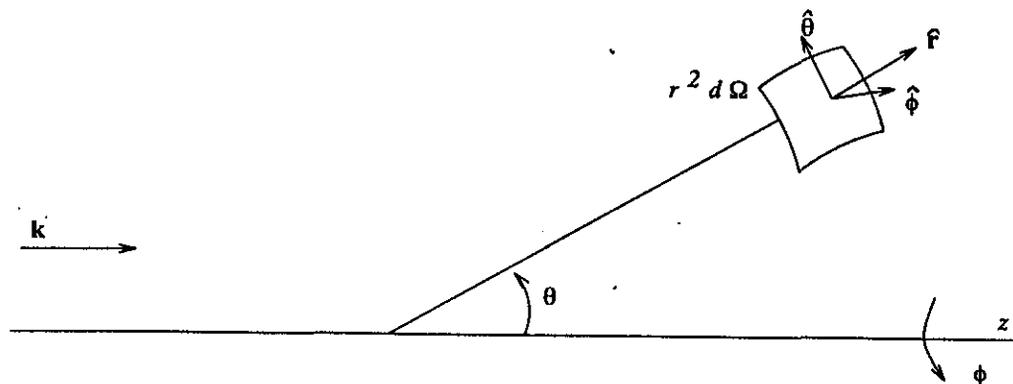


Figura A.3.1 Coordenadas utilizadas [24].

Vamos nos preocupar com a região próxima a $\theta = 0$ e verificar quanto contribui $\mathbf{j}_{int} \cdot \mathbf{r}$ para a seção de choque. A ilustração passa a ter a seguinte forma indicada na figura (A.3.2).

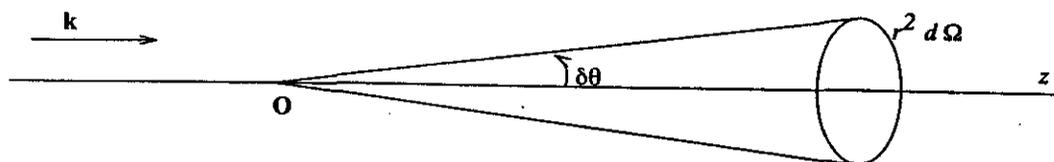


Figura A.3.2 Coordenadas na direção frontal [24].

A integral sobre $r^2 d\Omega$ para $\mathbf{j}_{int} \cdot \mathbf{r}$ é

$$\int_{\delta\Omega} r^2 d\Omega \mathbf{j}_{\text{int}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Como $\delta\theta$ é pequeno vamos aproximar $\mathcal{F}(\Omega)$ por $f(\theta = 0)$ e considerar que a amplitude de espalhamento independe de ϕ na direção z . Também vamos considerar em $\mathbf{j}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{r}/r$ apenas o termo de ordem de $(1/r)$ pois faremos $r \rightarrow +\infty$ para a superfície de integração como foi feito com \mathbf{j}_{esp} . Assim

$$\mathbf{j}_{\text{int}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \text{Re} \left\{ \frac{1}{mi} \left[ik\mathcal{F}(\Omega) \frac{1}{r} \exp(ikr(1 - \cos\theta)) + ik\cos(\theta)\mathcal{F}^*(\Omega) \frac{1}{r} \exp(-ikr(1 - \cos\theta)) \right] \right\} + o\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

A integral fica então aproximada por

$$r^2 \int_{\delta\Omega} d\Omega \text{Re} \left\{ \frac{1}{m} \left[\frac{k}{r} \mathcal{F}(\theta = 0) \exp(ikr(1 - \cos\theta)) + \frac{k}{r} \cos(\theta) \mathcal{F}^*(\theta = 0) \exp(-ikr(1 - \cos\theta)) \right] \right\}.$$

Usando

$$\begin{aligned} \int_{\cos\delta\theta}^1 d(\cos\theta) \exp(ikr(1 - \cos\theta)) &= -\frac{\exp(ikr)}{ikr} [\exp(-ikr) - \exp(-ikr\cos\delta\theta)] \\ &= \frac{i}{kr} + \frac{\exp(kr(1 - \cos\delta\theta))}{ikr} \end{aligned}$$

e

$$\int_{\cos\delta\theta}^1 d(\cos\theta) \cos\theta \exp(-ikr(1 - \cos\theta)) = \frac{1}{ikr} \left\{ \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) - \exp(-ikr(1 - \cos\delta\theta)) \left(\cos\delta\theta - \frac{1}{ikr}\right) \right\},$$

obtemos

$$r^2 \int_{\delta\Omega} d\Omega \mathbf{j}_{\text{int}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = r^2 \int d\phi \text{Re} \left\{ \frac{1}{mi} \left[-\frac{\mathcal{F}(\theta = 0)}{r^2} + \frac{\mathcal{F}^*(\theta = 0)}{r^2} \right] + o\left(\frac{1}{r^3}\right) + osc \right\},$$

onde *osc* é um termo envolvendo funções oscilantes. O termo de ordem $(1/r^3)$ será desprezado pois $r \rightarrow +\infty$. Os termos oscilantes envolvem exponenciais complexas $\exp((+/-)ikr(1 - \cos\delta\theta))$. Mas a onda incidente não é exatamente uma onda plana pois as interferências e a imprecisão dos equipamentos fazem com que o vetor de onda incidente esteja num intervalo $\Delta\mathbf{k}$ ao redor de \mathbf{k} pois a onda incidente é uma superposição de ondas com vetores de onda contidos em $[\mathbf{k}, \mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}]$, isto é, a função de onda incidente é mais realisticamente um pacote de onda. Se considerarmos isso e integrarmos de \mathbf{k} até $\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}$ teremos

$$\int_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k}} \exp((+/-)ikr(1 - \cos\delta\theta)) d\mathbf{k} = \frac{(+/-)1}{ir(1 - \cos\delta\theta)} [\exp((+/-)ikr(1 - \cos\delta\theta))]_{\mathbf{k}}^{\Delta\mathbf{k}}$$

e quando $r \rightarrow +\infty$ este termo não será relevante dentro da integral pois será de ordem $(1/r^3)$, por isso vamos negligenciá-lo. Assim

$$r^2 \int_{\delta\Omega} d\Omega \mathbf{j}_{\text{int}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \int d\phi \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{m} (\mathcal{F}(\theta = 0) - \mathcal{F}^*(\theta = 0)) \right\} = -\frac{1}{m} 2 \operatorname{Im} \{ \mathcal{F}(\theta = 0) \} \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\Rightarrow r^2 \int_{\delta\Omega} d\Omega \mathbf{j}_{\text{inc}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{4\pi}{m} \operatorname{Im} \{ \mathcal{F}(\theta = 0) \}.$$

Agora a equação de continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0$$

é reduzida a $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ quando o caso é estacionário. Integrando-a sobre uma esfera ao redor da origem chegamos a

$$r^2 \int d\Omega \mathbf{j} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = 0.$$

Como $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{inc}} + \mathbf{j}_{\text{esp}} + \mathbf{j}_{\text{int}}$, obtemos

$$r^2 \int d\Omega [\mathbf{j}_{\text{inc}} + \mathbf{j}_{\text{esp}} + \mathbf{j}_{\text{int}}] \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = 0.$$

Em $\mathbf{j}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{r}$ temos $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos(\theta)$, então nesse caso temos

$$\int_{-1}^{+1} d(\cos(\theta)) \cos(\theta) = 0 \Rightarrow \int d\Omega \mathbf{j}_{\text{inc}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = 0$$

e assim

$$r^2 \int d\Omega \mathbf{j}_{\text{esp}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = - \int r^2 d\Omega \mathbf{j}_{\text{int}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r},$$

logo

$$\int d\Omega \frac{|\mathbf{k}|}{m} |\mathcal{F}(\Omega)|^2 = \frac{4\pi}{m} \operatorname{Im} \{ \mathcal{F}(\theta = 0) \}.$$

Como $\int d\Omega |\mathcal{F}(\Omega)|^2 = \int d\Omega (d\sigma/d\Omega) = \sigma_t$ obtemos

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} \{ \mathcal{F}(\theta = 0) \}.$$

Este é o resultado conhecido como teorema óptico.

Apêndice 4. Equação integral de espalhamento e função de Green

Seguindo a abordagem da referência [24] vamos escrever a equação de Schroedinger na forma

$$\{E - H_0\}\Psi(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}).$$

A solução da equação homogênea associada a esta equação é $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{r})$, então

$$\{E - H_0\}\phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0.$$

A função $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ tem as propriedades

$$\int d^3 r \phi^*(\mathbf{k}', \mathbf{r})\phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$$

e

$$\int d^3 k \phi^*(\mathbf{k}, \mathbf{r}')\phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}).$$

Podemos expandir a função $\Psi(\mathbf{r})$ em termos das soluções da partícula livre:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int a(\mathbf{k}')\phi(\mathbf{k}', \mathbf{r})d^3 k'.$$

Agora

$$(E - H_0)\phi(\mathbf{k}', \mathbf{r}) = (E - E')\phi(\mathbf{k}', \mathbf{r})$$

onde $E' = k'^2/2m$. Então

$$\{E - H_0\}\Psi(\mathbf{r}) = \int d^3 k'' a(\mathbf{k}'')(E - H_0)\phi(\mathbf{k}'', \mathbf{r}) = \int d^3 k'' a(\mathbf{k}'')(E - E'')\phi(\mathbf{k}'', \mathbf{r})$$

e assim

$$\int d^3 k'' a(\mathbf{k}'')(E - E'')\phi(\mathbf{k}'', \mathbf{r}) = V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}).$$

Multiplicando esta equação por $\phi^*(\mathbf{k}', \mathbf{r})$, integrando em \mathbf{r} e lembrando as propriedades das funções de onda plana

$$\int d^3 k'' a(\mathbf{k}'')(E - E'')(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}'' - \mathbf{k}') = \int d^3 r \phi^*(\mathbf{k}', \mathbf{r})V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})$$

$$\Rightarrow (2\pi)^3 a(\mathbf{k}')(E - E') = \int d^3 r \phi^*(\mathbf{k}', \mathbf{r})V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}),$$

trocando \mathbf{r} por \mathbf{r}' na integral

$$a(\mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3(E - E')} \int d^3 r' \phi^*(\mathbf{k}', \mathbf{r}')V(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}').$$

Substituindo $a(\mathbf{k}')$ na expansão de $\Psi(\mathbf{r})$ temos

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k' \int d^3 r' \frac{\phi^*(\mathbf{k}', \mathbf{r}') \phi(\mathbf{k}', \mathbf{r})}{E - E'} V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}').$$

Definindo

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k' \frac{\phi^*(\mathbf{k}', \mathbf{r}') \phi(\mathbf{k}', \mathbf{r})}{E - E'}$$

e lembrando que a solução total é a soma da solução homogênea e não homogênea

$$\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) + \int d^3 r' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}')$$

onde $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, para a condição de onda plana incidente. Para $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ a expressão é

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{2m}{(2\pi)^3} \int d^3 k' \frac{\exp(i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}{k'^2 - k^2}$$

ou

$$\frac{g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{2m} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k' \frac{\exp(i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}{k'^2 - k^2}.$$

Vamos calcular o lado direito desta equação com integração no plano complexo k' [24]. Seja $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ e escolhemos as coordenadas esféricas orientadas de forma que o eixo z coincide com o vetor \mathbf{R} (figura A.4.1). Assim

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow g(R),$$

e a integral torna-se

$$\begin{aligned} \frac{g(R)}{2m} &= -\frac{1}{2m} \int_0^{+\infty} k'^2 dk' \int_0^\pi d\theta' \text{sen}\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\exp(ik'R \cos\theta')}{k'^2 - k^2} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2 R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k' \text{sen}(k'R)}{k'^2 - k^2} dk', \end{aligned}$$

onde o limite inferior de integração foi estendido a $-\infty$ porque o integrando é função par. Aqui k' não é visto como o módulo de \mathbf{k}' mas como uma variável de integração, por isso pode ter valores negativos.

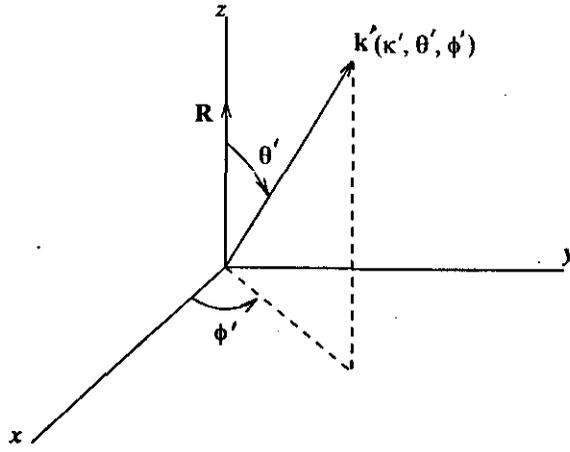


Figura A.4.1 Esquema do espaço de integração [24].

A integral pode ser reescrita como

$$\frac{g(R)}{2m} = -\frac{1}{16\pi^2 Ri} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \exp(ik'R) \left[\frac{1}{k' - k} + \frac{1}{k' + k} \right] - \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \exp(-ik'R) \left[\frac{1}{k' - k} + \frac{1}{k' + k} \right] \right\}.$$

Seja

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \exp(ik'R) \left[\frac{1}{k' - k} + \frac{1}{k' + k} \right].$$

Vamos mudar

$$k' \rightarrow \text{Re}\{k'\} + i\text{Im}\{k'\}, \quad I_1 \rightarrow I_1^c$$

onde $\exp(ik'R) \rightarrow \exp(i\text{Re}\{k'\}R) \exp(-\text{Im}\{k'\}R)$; vamos calcular

$$I_1^c = \oint_C d^2k' \exp(ik'R) \left[\frac{1}{k' - k} + \frac{1}{k' + k} \right],$$

onde o contorno está na metade superior do plano k' ($\text{Im}\{k'\} > 0$) (figura A.4.2).

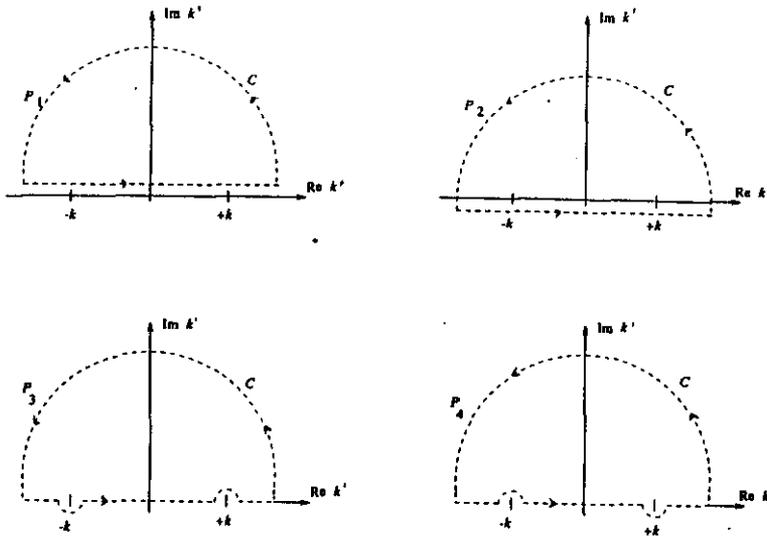


Figura A.4.2 Contorno de integração [24].

A integral sobre o semi-círculo vai a zero quando a estendemos para $k' \rightarrow +\infty$. Assim $I_1^c = I_1$ para $k' \rightarrow +\infty$. Usando o teorema de Cauchy e integrando I_1 :

obtemos para $P_1 \rightarrow 0$

obtemos para $P_2 \rightarrow 2i\pi(\exp(ikR) + \exp(-ikR))$

obtemos para $P_3 \rightarrow 2i\pi \exp(-ikR)$

obtemos para $P_4 \rightarrow 2i\pi \exp(ikR)$.

Análogo para

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \exp(-ik'R) \left[\frac{1}{k' - k} + \frac{1}{k' + k} \right]$$

só que o contorno C está na metade inferior do plano k' ($Im\{k'\} < 0$). Para I_2 encontra-se:

calculado em $P_1 \rightarrow -2i\pi(\exp(ikR) + \exp(-ikR))$

calculado em $P_2 \rightarrow 0$

calculado em $P_3 \rightarrow -2i\pi \exp(-ikR)$

calculado em $P_4 \rightarrow -2i\pi \exp(ikR)$

e

$$\frac{g(R)}{2m} = -\frac{1}{16\pi^2 Ri} [I_1 - I_2].$$

Assim $g(R)$ depende do caminho de integração. Uma forma de reescrevê-lo é

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{m}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \{ a \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) + b \exp(-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \}$$

onde $a = 1$ e $b = 0$ significa que escolhemos o caminho P_4 , $a = 0$ e $b = 1$ é o caminho P_3 e $a = b = 1/2$ é para os caminhos P_1 e P_2 .

Apêndice 5. Validade da aproximação de ângulo pequeno

No capítulo 3 fizemos a hipótese $\theta^2 kd \ll 1$ onde d é a distância na qual $V\varphi$ varia apreciavelmente. Vamos verificar o que d é aproximadamente [11] e para isso começamos por

$$\varphi(x, y, z) = \exp\left(-\frac{i}{v} \int_{-\infty}^z V(x, y, z') dz'\right).$$

Consideramos a distância v/V aquela na qual $\varphi(x, y, z)$ varia apreciavelmente (V é um valor médio). O potencial tem alcance a e portanto a distância d é, em ordem de magnitude, a menor destas duas distâncias. Para $Va/v < 1$ a menor distância é a , logo $d \sim a$; para $Va/v > 1$ a menor distância é v/V , então $d \sim v/V$. Em ambas as situações impomos $ka \gg 1$ e $V/E \ll 1$ (espalhamento a altas energias). Para $Va/v < 1$ queremos

$$\theta^2 kd \cong \theta^2 ka \ll 1.$$

Portanto é necessário que

$$\theta \ll \frac{1}{\sqrt{ka}}.$$

Para $Va/v > 1$ queremos

$$\theta^2 kd \cong \theta^2 \frac{kv}{V} \ll 1.$$

Mas kv é da ordem de E então queremos

$$\theta^2 \frac{E}{V} \ll 1 \rightarrow \theta \ll \sqrt{\frac{V}{E}}.$$

Baseado em nossas hipóteses de altas energias ($(1/ka) \ll 1$ e $V/E \ll 1$) vemos que θ é um ângulo pequeno como esperávamos.

Agora vamos ver a ordem de magnitude de θ .

Para a aproximação de limite clássico ($Va/v \gg 1$) o ângulo de espalhamento θ é

$$\theta \sim \frac{\Delta p}{p}$$

onde Δp é a variação no momento e p é o momento da partícula incidente, então

$$\Delta p \sim \int F dt$$

onde F é a força agindo na partícula durante o tempo em que ela está na região do potencial. A intensidade média dessa força é V/a ; o tempo para atravessar a região do potencial é aproximadamente

$$t = \int dt \sim \frac{a}{v}.$$

Então

$$\Delta p \sim \frac{V}{v}$$

e $pv \sim E$, logo

$$\theta \sim \frac{V}{E} < \sqrt{\frac{V}{E}}$$

para $Va/v \gg 1$. Para $Va/v < 1$ usamos a relação de incerteza; quando a partícula passa por uma região de dimensão a sua componente transversa do momento p é considerada incerta dentro do intervalo $\delta p \sim (1/a)$. O ângulo de espalhamento terá uma incerteza dada em primeira ordem por

$$\delta\theta \sim \frac{\delta p}{p} \cong \frac{\hbar}{ap} = \frac{1}{ka}.$$

Em Mecânica Quântica o erro na medida é grande e podemos ter $\delta\theta/\theta \sim 1$ para ângulos pequenos. Assim

$$\theta \sim \frac{1}{ka} < \frac{1}{\sqrt{ka}}$$

para $Va/v < 1$.

Pelo que vimos o ângulo de espalhamento θ satisfaz razoavelmente a condição $\theta^2 kd \ll 1$ considerando as hipóteses de espalhamento a altas energias.

Apêndice 6. Expansão das funções de perfil elementares

Demonstramos neste apêndice a expansão de $\prod_{j=1}^N (1 - \gamma_j)$ que aparece na seção 3.4.2.2

$$\prod_{j=1}^N (1 - \gamma_j) = 1 - \sum_{j=1}^N \gamma_j + \sum_{j \neq l}^{N(N-1)/2!} \gamma_j \gamma_l - \dots + (-1)^N \prod_{j=1}^N \gamma_j.$$

Para $N = 2$ temos

$$(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2) = 1 - \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2.$$

Para $N = 3$ temos

$$(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)(1 - \gamma_3) = 1 - \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2 \gamma_3 - \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3.$$

Considerando válido para N vamos provar para $N + 1$:

$$\prod_{j=1}^{N+1} (1 - \gamma_j) = \prod_{j=1}^N (1 - \gamma_j)(1 - \gamma_{N+1}) =$$

$$= 1 - \sum_{j=1}^N \gamma_j + \sum_{j \neq l}^{N(N-1)/2!} \gamma_j \gamma_l - \dots + (-1)^N \prod_{j=1}^N \gamma_j - \gamma_{N+1} + \sum_{j=1}^N \gamma_j \gamma_{N+1} - \dots - (-1)^N \prod_{j=1}^N \gamma_j \gamma_{N+1}.$$

Unindo termos

$$\prod_{j=1}^{N+1} (1 - \gamma_j) = 1 - \sum_{j=1}^{N+1} \gamma_j + \sum_{j \neq l}^{N(N-1)/2!} \gamma_j \gamma_l + \sum_{j=1}^N \gamma_j \gamma_{N+1} + \dots + (-1)^{N+1} \prod_{j=1}^{N+1} \gamma_j.$$

A série $\sum_{j \neq l}^{N(N-1)/2} \gamma_j \gamma_l$ tem $N(N-1)/2!$ termos enquanto $\sum_{j=1}^N \gamma_j \gamma_{N+1}$ tem N termos logo a soma das duas tem $N(N+1)/2!$ termos. Então

$$\prod_{j=1}^{N+1} (1 - \gamma_j) = 1 - \sum_{j=1}^{N+1} \gamma_j + \sum_{j \neq l}^{(N+1)N/2!} \gamma_j \gamma_l - \dots + (-1)^{N+1} \prod_{j=1}^{N+1} \gamma_j,$$

e este é o termo de $N + 1$ na fórmula para $\prod_{j=1}^N (1 - \gamma_j)$, então provamos por indução que

$$\prod_{j=1}^N (1 - \gamma_j) = 1 - \sum_{j=1}^N \gamma_j + \sum_{j \neq l}^{N(N-1)/2!} \gamma_j \gamma_l - \dots + (-1)^N \prod_{j=1}^N \gamma_j.$$

Bibliografia

- [1] G. Alberi, G. Goggi, Phys. Rep. **74** (1981) 1.
- [2] G. Matthiae, Rep. Prog. Phys. **57** (1994) 743.
- [3] L.L. Jenkovszky, Rivista del Nuovo Cimento, Vol. 10, **12** (1987) 1.
- [4] S.Y. Lo, "Geometrical Pictures in Hadrons Collisions - A Reprint Volume", (World Scientific, Singapore, 1987).
- [5] M.M. Block, R.N. Cahn, Rev. Mod. Phys. **57** (1985) 563.
- [6] R. Castaldi, G. Sanguinetti, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **35** (1985) 351.
- [7] M. Kamran, Phys. Rep. **108** (1984) 275.
- [8] U. Amaldi, M. Jacob, G. Matthiae, Ann. Rev. Nucl. Sci. **26** (1976) 385.
- [9] G. Giacomelli, Phys. Rep., Vol. 23, **2** (1976) 123.
- [10] *Proceedings of the First International Conference on Elastic and Diffractive Scattering*, Blois, 1985, editado por B. Nicolescu (Editions Frontières, Gif-sur-Yvette, 1986); *Proceedings of the Second International Conference on Elastic and Diffractive Scattering*, Rockefeller University, New York, 1987, editado por K. Goulios (Editions Frontières, Gif-sur-Yvette, 1988); *Proceedings of the Third International Conference on Elastic and Diffractive Scattering*, Northwestern University, Evanston, 1989, editado por M.M. Block e A. White [Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **12** (1990)]; *Proceedings of the Fourth International Conference on Elastic and Diffractive Scattering*, Elba, Italy, 1991, editado por F. Cervelli e S. Zucchelli [Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **25** (1992)]; *Proceedings of the Fifth International Conference on Elastic and Diffractive Scattering* editado por H.M. Fried, K. Kang e C.-I. Tan (World Scientific, Singapore, 1994).
- [11] R.J. Glauber, "High-energy collision theory", in Lectures in Theoretical Physics, Vol. 1, editado por W.E. Britten (Interscience, New York, 1959) 315; reprint em "Geometrical Pictures in Hadron Collisions - A Reprint Volume", editado por S.Y. Lo (World Scientific, Singapore, 1987) 83.
- [12] R.J. Glauber, "Multiple diffraction theory of high-energy collisions", in High Energy Physics and Nuclear Structure, editado por G. Alexander (North-Holland Publishing, Amsterdam, 1967) 311.
- [13] R.J. Glauber, "Theory of high energy hadron-nucleus collisions", em High Energy Physics and Hadron Structure, editado por S. Devons e outros. (Plenum, New York, 1970) 209.

Bibliografia

- [1] G. Alberi, G. Goggi, Phys. Rep. **74** (1981) 1.
- [2] G. Matthiae, Rep. Prog. Phys. **57** (1994) 743.
- [3] L.L. Jenkovszky, Rivista del Nuovo Cimento, Vol. 10, **12** (1987) 1.
- [4] S.Y. Lo, "Geometrical Pictures in Hadrons Collisions - A Reprint Volume", (World Scientific, Singapore, 1987).
- [5] M.M. Block, R.N. Cahn, Rev. Mod. Phys. **57** (1985) 563.
- [6] R. Castaldi, G. Sanguinetti, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **35** (1985) 351.
- [7] M. Kamran, Phys. Rep. **108** (1984) 275.
- [8] U. Amaldi, M. Jacob, G. Matthiae, Ann. Rev. Nucl. Sci. **26** (1976) 385.
- [9] G. Giacomelli, Phys. Rep., Vol. 23, **2** (1976) 123.
- [10] *Proceedings of the First International Conference on Elastic and Diffractive Scattering*, Blois, 1985, editado por B. Nicolescu (Editions Frontières, Gif-sur-Yvette, 1986); *Proceedings of the Second International Conference on Elastic and Diffractive Scattering*, Rockefeller University, New York, 1987, editado por K. Goulianos (Editions Frontières, Gif-sur-Yvette, 1988); *Proceedings of the Third International Conference on Elastic and Diffractive Scattering*, Northwestern University, Evanston, 1989, editado por M.M. Block e A. White [Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **12** (1990)]; *Proceedings of the Fourth International Conference on Elastic and Diffractive Scattering*, Elba, Italy, 1991, editado por F. Cervelli e S. Zucchelli [Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **25** (1992)]; *Proceedings of the Fifth International Conference on Elastic and Diffractive Scattering* editado por H.M. Fried, K. Kang e C.-I. Tan (World Scientific, Singapore, 1994).
- [11] R.J. Glauber, "High-energy collision theory", in Lectures in Theoretical Physics, Vol. 1, editado por W.E. Britten (Interscience, New York, 1959) 315; reprint em "Geometrical Pictures in Hadron Collisions - A Reprint Volume", editado por S.Y. Lo (World Scientific, Singapore, 1987) 83.
- [12] R.J. Glauber, "Multiple diffraction theory of high-energy collisions", in High Energy Physics and Nuclear Structure, editado por G. Alexander (North-Holland Publishing, Amsterdam, 1967) 311.
- [13] R.J. Glauber, "Theory of high energy hadron-nucleus collisions", em High Energy Physics and Hadron Structure, editado por S. Devons e outros. (Plenum, New York, 1970) 209.

- [14] R.J. Glauber, J. Velasco, Phys. Lett. **B147** (1984) 380; *Proceedings of the Second International Conference on Elastic and Diffractive Scattering*, Rockefeller University, New York, 1987, editado por K. Goulianos (Editions Frontières, Gif-sur-Yvette, 1987) 219.
- [15] Y. Afek, C. Leroy, B. Margolis and P. Valin Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 85; P. L'Heureux, B. Margolis and P. Valin, Phys. Rev. **D32** (1985) 1681; B. Margolis, P. Valin, M.M. Block, F. Halzen and R.S. Fletcher, Phys. Lett. **B213** (1988) 221; L. Durand and H. Pi, Phys. Rev. **D40** (1989) 1436; Phys. Rev. **D43** (1991) 2125; A. Capella, J. Tran Thanh Van and J. Kwiecinski, Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 2051; J. Dias de Deus and J. Kwiecinski, Phys. Lett. **B196** (1987) 537.
- [16] M. Kamran, I.E. Qureshi, *Proceedings of the Second International Conference on Elastic and Diffractive Scattering*, Rockefeller University, New York, 1987, editado por K. Goulianos (Editions Frontières, Gif-sur-Yvette, 1987) 289; Hadronic J. **12** (1989) 25; Hadronic J. **12** (1989) 173.
- [17] M. Saleem, F. Aleem and I.A. Azhar, Europhys. Lett. **6** (1988) 201.
- [18] F. Aleem, M. Saleem and G.B. Yodh, J. Phys. **G16** (1990) L269.
- [19] C. Furget, M. Buenerd and P. Valin, Z. Phys. C – Particles and Fields **47** (1990) 377; C. Furget, Tese de Doutorado, Universidade Joseph Fourier - Grenoble (1989).
- [20] T.T. Chou, C.N. Yang, Phys. Lett. **B244** (1990) 113.
- [21] M.J. Menon, B.M. Pimentel, Hadronic J. **13** (1990) 325 (preprint IFT-P.36/88); Hadronic J. Suppl. **5** (1990) 189 (preprint IFT-P.06/90); Instituto de Física Teórica – UNESP, São Paulo, preprints IFT-P.31/90 (não publicado), IFT-P.39/90 (não publicado).
- [22] M. J. Menon, em *Proceedings of the Fourth International Conference on Elastic and Diffractive Scattering*, Elba, Italy, 1991, editado por F. Cervelli and S. Zuccheli [Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **25** (1992) 94].
- [23] F. Aleem, M. Saleem, G. B. Yodh, Phys. Rev. **D44** (1991) 81.
- [24] C.J. Joachain, “Quantum Collision Theory” (North-Holland, NY, 1983); F. Scheck, “Leptons, Hadrons and Nuclei” (North-Holland, 1983).
- [25] G.B. West, D. Yennie, Phys. Rev. **172** (1968) 1413.
- [26] R.N. Cahn, Z. Phys. C – Particles and Fields **15** (1982) 253.
- [27] U. Amaldi, K.R. Schubert, Nucl. Phys. **B166** (1980) 301.

- [28] K.R. Schubert, "Tables on nucleon-nucleon scattering" em Landolt-Börnstein, Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology, New Series, Vol. I/9a, (1979).
- [29] P. Valin, Nucl. Phys. **B218** (1983) 215; Phys. Rep. **203** (1991) 233.
- [30] M.M. Islam, Nucl. Phys. **B104** (1976) 511.
- [31] R.J. Glauber, G. Matthiae, Nucl. Phys. **B21** (1970) 135.
- [32] M.L. Perl, "High Energy Hadron Physics" (Wiley, NY, 1974).
- [33] J.J. Sakurai, "Modern Quantum Mechanics" (Addison-Wesley, NY, 1985).
- [34] W. Czyż and L. C. Maximon, Annals of Phys. **52** (1969) 59.
- [35] V. Franco and G. K. Varma, Phys. Rev. **C18** (1978) 349.
- [36] M.J. Menon, Phys. Rev. **D48** (1993) 2007.
- [37] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, "Quantum Mechanics" (John Wiley & Sons, NY, 1977), Vol.1, 153.
- [38] T. T. Chou and C. N. Yang, em *High Energy Physics and Nuclear Structure*, editado por G. Alexander (North Holland, Amsterdam, 1967) 348; Phys. Rev. **170** (1968) 1591; Phys. Rev. Lett. **20** (1968) 1213.
- [39] T. T. Chou and C. N. Yang, Phys. Rev. **175** (1968) 1832.
- [40] T. T. Chou, Found. Phys. **8** (1978) 319.
- [41] R. Felst, DESY report 73/56 (Novembro, 1973), não publicado.
- [42] F. Borkowski, G.G. Simon, V.H. Walther, R.D. Wendling, Nucl. Phys. **B93** (1975) 461.
- [43] C. Augier e outros (Colaboração UA 4/2), Phys. Lett. **B316** (1993) 448.
- [44] M.J. Menon, D.S. Thober, Atas do XV Encontro Nacional de Partículas e Campos (Sociedade Brasileira de Física, São Paulo, 1995) (a ser publicado).
- [45] J. Hüfner e B. Povh, Phys. Rev. **D46** (1992) 990.
- [46] N.A. Amos e outros (Colaboração E710), *Proceedings of the Fifth International Conference on Elastic and Diffractive Scattering* (World Scientific, Singapore, 1994) 59.
- [47] C. Bourrely, J. Soffer and T. T. Wu, Phys. Rev. **D19** (1979) 3249.

- [48] M. J. Menon, Tese de Doutorado, I.F.G.W.–Universidade Estadual de Campinas (1988).
- [49] C. Bourrely, J. Soffer and T. T. Wu, Nucl. Phys. **B247** (1984) 15.
- [50] S. Sanielevici and P. Valin, Phys. Rev. **D29** (1984) 52.
- [51] J. Bellandi Fo. e outros, Hadronic J. **9** (1986) 311; **10** (1987) 95; **10** (1987) 149.
- [52] J. Bellandi Fo., R. J. M. Covolán, M. J. Menon and B. M. Pimentel, Hadronic J. **11** (1988) 17.
- [53] A. Martin, Lett. Nuovo Cimento **7** (1973) 811.
- [54] M.J. Menon, B.M. Pimentel, Hadronic J. **16** (1993) 137.
- [55] M.J. Menon, Hadronic J. **16** (1993) 47.
- [56] M.J. Menon, B.M. Pimentel, em “Proceedings of the X Brazilian Meeting on Particles and Fields” (Sociedade Brasileira de Física, São Paulo, 1989) 302; Hadronic J. Suppl. **5** (1990) 189; “Proceedings of the XI Brazilian Meeting on Particles and Fields” (Sociedade Brasileira de Física, São Paulo, 1990) 242.
- [57] M.J. Menon, *Proceedings of the Fifth International Conference on Elastic and Diffractive Scattering* (World Scientific, Singapore, 1994) 188.
- [58] A.F. Martini, M.J. Menon, Anais da 46^a Reunião Anual da SBPC (1994) 648 (resumo).
- [59] J. Pumplin, Phys. Lett. **B289** (1992) 44.
- [60] M. Kawasaki e outros, Phys. Rev. **D50** (1994) 4423.
- [61] R.J.M. Covolán, L.L. Jenkovszky, E. Predazzi, Z. Phys. C – Particles and Fields **51** (1991) 459.
- [62] J. Dias de Deus, Nucl. Phys. **B59** (1973) 231; A.J. Buras w J. Dias de Deus, Nucl. Phys. **B71** (1974) 481; J. Dias de Deus e P. Kroll, Acta Phys. Pol. **B9** (1978) 159.
- [63] M. Bozzo e outros, Phys. Lett **B147** (1984) 392.
- [64] R. Henzi, P. Valin, Phys. Lett. **B149** (1984) 239.
- [65] P. Gauron, B. Nicolescu, E. Leader, Nucl. Phys. **B299** (1988) 640; D. Bernard, P. Gauron, B. Nicolescu, Phys. Lett. **B199** (1987) 125.
- [66] T. Fearnley, CERN - preprint EP/85-137.

- [67] A.F. Martini, M.J. Menon, Atas do XV Encontro Nacional de Partículas e Campos (Sociedade Brasileira de Física, São Paulo, 1995) (a ser publicado).
- [68] MINUIT - Reference Manual, version 92.1, CERN Program Library Long Write-up D506 (1992).
- [69] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, "Numerical Recipes in Fortran" (Cambridge, NY, 1992) 2^a edição .