

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN

MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO
EM TEORIA DE CAMPOS /
E γ -FLUIDOS

Jorge Abel Espichán Carrillo /

Orientador: Prof. Dr. Adolfo Maia Jr. ^{ok}

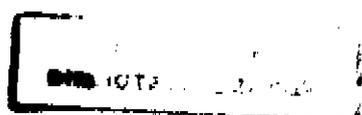
Tese apresentada no Instituto de Física Gleb Wataghin,
como parte dos requisitos para a obtenção do título
de Mestre em Física.

Campinas

13 de Julho de 1995

Este exemplar corresponde à redação
final da Tese de Mestrado defendida
pelo aluno Jorge Abel Espichán Carrillo
e aprovada pela Comissão Julgadora

10/08/1995



Adolfo Maia Jr.

C.m 00076557-9

UNIDADE	IFGW
N.º CIP	A:
	UNICAMP
	Es 65 m
	25463m
	433/95
C	[] [X]
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	14/09/95
N.º CPD	

7M/992/IFGW

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

Es65m

Espichãñ Carrillo, Jorge Abel.

Métodos de regularização em teoria de campos e gama-fluidos / Jorge Abel Espichãñ Carrillo. -- Campinas, SP : [s.n.], 1995.

Orientador: Adolfo Maia Jũnior.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1.*Regularização dimensional. 2.*Gama-fluidos. 3.*Divergência infravermelha. 4.*Vãcuo - Espectro. 5. Dinãmica de fluidos relativísticos. I.Maia Jũnior, Adolfo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.



INSTITUTO DE FÍSICA
GLEB WATAGHIN

PARECER DE APROVAÇÃO
DEFESA DE TESE DE MESTRADO DE
JORGE ABEL ESPICHAN CARRILLO

DATA: 13 / 07 / 95

BANCA EXAMINADORA:

- Prof. Dr. Adolfo Maia Júnior (Orientador)

- Profa. Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato

- Prof. Dr. Márcio José Menon

Dedico este
trabajo a la
memoria de mi
Abuelo Humberto.

AGRADECIMENTOS

Ao final deste curso de Mestrado, gostaria de expressar o meu agradecimento ao Professor Adolfo Maia Jr. pela orientação, dedicação e paciência constante durante a realização deste trabalho, respeitando sempre meu modo de ser. A ele devo o estímulo para o desenvolvimento da presente tese.

Aos professores Carola Dobrigkeit Chinellato e Márcio José Menon pelas muitas sugestões ao longo deste trabalho.

Aos professores e colegas do Instituto pela sua amizade.

Aos colegas Fernando e Augusto, pelas suas cooperações, quero também deixar meus mais sinceros agradecimentos.

Gostaria também de agradecer ao pessoal da CPG do IFGW que me deu a oportunidade de poder trabalhar aqui para o meu desenvolvimento profissional.

Ao CNPq, a minha gratidão pelo apoio financeiro dado para a execução deste trabalho.

Quanto mais se sabe,
mais hà que aprender.
Com o saber cresce ao
mesmo tempo o não
saber, ou, ainda melhor,
o saber do não saber.

SCHLEGEL.

RESUMO

Na primeira parte, após um breve resumo da quantização de campos, estudamos o problema das integrais divergentes na Eletrodinâmica Quântica (QED) onde consideramos como exemplo a polarização do vácuo. Apresentamos três métodos de regularização: Cut-Off, Pauli-Villars e Regularização Dimensional.

Na segunda parte, fazemos a dedução, com métodos da física estatística, do espectro de γ -fluidos ($0 \leq \gamma \leq 2$; $\gamma \neq 1$), os quais são importantes para a cosmologia.

Para $0 \leq \gamma < 1$, obtemos uma divergência infravermelha, a qual é regularizada utilizando o método de Cut-Off adaptado para a região infravermelha.

Como casos particulares obtemos o espectro de Planck ($\gamma = \frac{4}{3}$) e do vácuo ($\gamma = 0$). Estes resultados concordam com aqueles que são obtidos a partir dos princípios da termodinâmica.

ABSTRACT

In the first part, after a brief summary of the quantization of fields, we study the problem of the divergent integrals in the Quantum Electrodynamics (QED) where we consider as example the polarization of the vacuum. We present three methods of regularization: Cut-Off, Pauli-Villars and Dimensional Regularization.

In the second part, we derive, using statistical physics methods, the spectrum of γ -fluids ($0 \leq \gamma \leq 2; \gamma \neq 1$), which are important in cosmology.

For $0 \leq \gamma \leq 1$, we obtain an infrared divergence, which is regularized by the Cut-Off method adapted to an infrared region.

As particular cases we obtain the Planck spectrum ($\gamma = \frac{4}{3}$) and the spectrum of the vacuum ($\gamma = 0$). These results are in agreement with those obtained from thermodynamics.

Sumário

1	Introdução	1
2	Formulação Lagrangiana	3
2.1	Teorema de Noether	5
2.2	Aplicação do Teorema de Noether	7
2.2.1	Campo Escalar Complexo	7
2.2.2	Transformação de Gauge Local. O campo Eletromagnético como um campo de Gauge	9
3	Quantização Canônica do Campo Escalar de Klein-Gordon	14
3.1	Espaço das Soluções da equação de Klein-Gordon	15
3.2	Relações de Comutação e Espaço de Fock	17
3.3	Expansões de Fourier e Relações de Comutação	20
4	Quantização Canônica do Campo Eletromagnético	23
4.1	O Gauge de Radiação e de Lorentz	23
4.2	Quantização Canônica no Gauge de Radiação	24
4.3	Quantização Canônica no Gauge de Lorentz	28
5	Teoria de Perturbação	34
5.1	Representação de Schrödinger	34
5.2	Representação de Heisenberg	35
5.3	Representação de Interação	36
5.4	Operador de Evolução Temporal	37
5.5	Expansão de Perturbação	38
5.6	Hipótese Adiabática	42
5.7	Decomposição em Produtos Normais	42

6	Propagadores	47
6.1	Propagador do Campo Complexo de Klein-Gordon	47
6.2	Propagador do Campo de Dirac	54
6.3	Propagador do Campo Eletromagnético	58
7	Diagramas de Feynman	61
8	Elementos da Matriz S	78
8.1	Estudo das Amplitudes para Diferentes Processos	81
9	Regularização	85
9.1	Método de Cut-Off (corte)	86
9.1.1	Efeito Casimir (Método de cut-off)	89
9.2	Método de Regularização de Pauli-Villars	91
9.3	Regularização Dimensional	94
10	γ-Fluidos	97
10.1	Dinâmica de Fluidos	97
10.2	Estudo do Espectro de γ -Fluidos e do Vácuo	104
10.3	Divergência e Regularização da Equação de Estado	107
11	Conclusões	112
.1	Apêndice A1: Integrais e Fórmulas Uteis	113
.2	Apêndice A2	114

Figuras

6.1	Contorno \mathcal{C}^+	50
6.2	contorno \mathcal{C}^-	50
6.3	contorno \mathcal{C}_1	51
6.4	(a) $x_0 > x'_0$, (b) $x'_0 > x_0$	52
6.5	Contorno \mathcal{C}_F	53
6.6	53
6.7	(a) $x_0 > x'_0$, propagação do elétron de x' até x	58
6.8	60
7.1	Aniquilação de um fóton e de um par.	62
7.2	Aniquilação de um fóton e espalhamento de um pósitron.	62
7.3	Criação de um fóton e aniquilação de pares.	63
7.4	Aniquilação de um fóton e espalhamento de um pósitron.	63
7.5	Aniquilação de um fóton e espalhamento de um elétron.	63
7.6	Aniquilação de um fóton e criação de pares.	64
7.7	Aniquilação e criação de um elétron.	64
7.8	Criação de um fóton e um par.	64
7.9	Espalhamento Compton.	68
7.10	Espalhamento Compton para pósitrons.	69
7.11	Aniquilação de Pares.	69
7.12	Criação de Pares.	70
7.13	Espalhamento de Moller.	72
7.14	Espalhamento de Bhabha.	73
7.15	Espalhamento Pósitron-Pósitron.	74
7.16	Auto-energia do Elétron.	75
7.17	Polarização do Vácuo.	76

7.18	77
9.1	Gráfico de polarização do vácuo	86

Capítulo 1

Introdução

O objetivo principal do presente trabalho é determinar o espectro de γ -Fluidos, utilizando o método de regularização de Cut-Off. Apresentamos no presente trabalho cálculos feitos em diversos tópicos da teoria quântica de campos, nem sempre encontrados na literatura.

No Capítulo 2 apresentamos o formalismo Lagrangiano, determinamos a equação de Euler-Lagrange. Além disso, apresentamos o Teorema de Noether assim como a sua aplicação ao campo escalar complexo e à invariância da Ação sob transformações de Gauge Global e Local.

No Capítulo 3 estudamos a quantização do campo de Klein-Gordon. Desenvolvemos a teoria na forma covariante, assim como a definição do operador Número de partículas e os operadores de Criação e Aniquilação no espaço de Fock.

No Capítulo 4 discutimos a quantização canônica do campo eletromagnético em dois gauge. No primeiro Gauge, chamado gauge de Radiação, quantizamos os dois graus de liberdades físicos do campo eletromagnético, ou seja, os modos transversais. No segundo gauge, chamado Gauge de Lorentz, o qual é feito em forma covariante, consideram-se as quatro componentes do campo eletromagnético. Como consequência, o espaço de Fock fica com uma métrica indefinida. Um cancelamento entre fótons longitudinais e escalares restaura os graus de liberdade físicos (transversais) da teoria.

No Capítulo 5 apresentamos a Teoria de Perturbação para teoria quântica de

campos. Também apresentamos o Teorema de Wick.

No Capítulo 6 determinamos os propagadores para o campo complexo de Klein-Gordon, o campo de Dirac e o campo eletromagnético. No Capítulo 7 apresentamos os diagramas de Feynman para primeira e segunda ordem na expansão da matriz \mathcal{S} . No Capítulo 8 determinamos as amplitudes de transição ou elemento da matriz \mathcal{S} para diferentes processos na eletrodinâmica quântica.

No Capítulo 9 fazemos um estudo do problema da divergência ultravioleta para o caso da polarização do vácuo. Apresentamos três métodos de regularização: Cut-Off, Pauli-Villars e Regularização Dimensional. No primeiro método, além da polarização do vácuo, apresentamos o Efeito Casimir em dimensão 1, apenas para mostrar como a técnica de Regularização de Cut-Off pode ser aplicada a outro fenômeno físico.

No Capítulo 10 determinamos o espectro do γ -Fluidos, com métodos da física estatística. Para $0 \leq \gamma \leq 1$, obtemos uma divergência infravermelha, a qual é regularizada utilizando-se o método de Cut-Off adaptado para a região infravermelha. Como casos particulares obtemos o espectro de Planck ($\gamma = \frac{4}{3}$) e do vácuo ($\gamma = 0$). No Capítulo 11 apresentamos as conclusões.

Capítulo 2

Formulação Lagrangiana

Definimos o funcional ação (em notação relativística) como [3]:

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu) d^4 x. \quad (2.1)$$

Suponhamos, que ϕ está definido numa região R do espaço-tempo, com fronteira ∂R .

Vamos agora fazer variações nas coordenadas x^μ e no campo ϕ , variações estas que se anulam na fronteira ∂R , isto é $\delta\phi = 0$, $\delta x^\mu = 0$ sobre ∂R , isto é:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad (2.2)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x). \quad (2.3)$$

A Lagrangiana (2.1) depende explicitamente das coordenadas x^μ . Isto acontece quando o campo ϕ interage com uma fonte externa.

Definimos a variação total como [3]

$$\phi'(x') \equiv \phi(x) + \Delta\phi(x)$$

onde $\Delta\phi$, em primeira ordem em δx , é:

$$\Delta\phi(x) = \delta\phi(x) + (\partial_\mu \phi(x)) \delta x^\mu.$$

A variação da ação é dada por:

$$\delta\mathcal{S} = \int \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi', x'^\mu) d^4 x' - \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu) d^4 x$$

onde $d^4 x' = J(x', x) d^4 x$ e $J(x', x)$ é o Jacobiano da transformação $x \rightarrow x'$.

De (2.2) temos:

$$J(x', x) = \det \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \right) = 1 + \partial_{\mu}(\delta x^{\mu}).$$

Mantendo só termos até segunda ordem, temos:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \int \mathcal{L}(\phi', \partial_{\mu} \phi', x'^{\mu})(1 + \partial_{\mu}(\delta x^{\mu}))d^4 x' - \int \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu} \phi, x^{\mu})d^4 x = \\ & \int (\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_{\mu}(\delta x^{\mu}))d^4 x \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \delta (\partial_{\mu} \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} \delta x^{\mu} \quad (2.5)$$

da equação (2.3), temos

$$\delta (\partial_{\mu} \phi) = \partial_{\mu} \delta (\phi). \quad (2.6)$$

Substituindo as relações (2.5), (2.6) em (2.4) e colocando

$$\partial_{\mu}(\mathcal{L} \delta x^{\mu}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} \delta x^{\mu} + \mathcal{L} \partial_{\mu}(\delta x^{\mu})$$

obtemos o seguinte resultado:

$$\delta \mathcal{S} = \int_R \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \partial_{\mu}(\delta \phi) + \partial_{\mu}(\mathcal{L} \delta x^{\mu}) \right) d^4 x. \quad (2.7)$$

O terceiro termo é uma divergência total. O segundo termo pode ser escrito como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \partial_{\mu}(\delta \phi) = \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \delta \phi \right) - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \right) \delta \phi$$

onde o primeiro termo também é uma divergência total.

Podemos escrever as divergências totais como integrais sobre a fronteira ∂R (Teorema de Gauss). Portanto (2.7) se escreve como:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \int_R \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \right) \right\} \delta \phi d^4 x \\ &+ \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^{\mu} \right) d\sigma_{\mu}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Como, por hipótese $\delta \phi = 0$ e $\delta x^{\mu} = 0$ sobre ∂R , então o segundo termo em (2.8) se anula e a condição que a ação seja estacionária, $\delta \mathcal{S} = 0$ implica, então, nas equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \right) = 0. \quad (2.9)$$

2.1 Teorema de Noether

Se a ação é invariante sob algum grupo de transformações sobre x^μ e ϕ , então existe uma ou mais quantidades conservadas, isto é, combinações dos campos e suas derivadas que são invariantes sob as mesmas transformações [3].

Para começar, vamos reescrever o termo de superfície na variação da ação (2.8) como:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} = & \int_R \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \right\} \delta\phi d^4x + \\ & + \int_{\partial R} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} (\delta\phi + (\partial_\nu\phi)\delta x^\nu) - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta_\nu\phi - \delta_\nu^\mu\mathcal{L} \right) \delta x^\nu \right\} d\sigma_\mu \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde a variação total é dada por

$$\Delta\phi = \delta\phi + (\partial_\nu\phi)\delta x^\nu.$$

No segundo parêntesis temos o que é definido como

Tensor de Energia-Momento

$$\Theta_\nu^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta_\nu\phi - \delta_\nu^\mu\mathcal{L}. \quad (2.11)$$

Então, vamos supor que a ação \mathcal{S} é invariante sob a ação de um grupo de transformações sobre x^μ e ϕ . As transformações infinitesimais são da forma:

$$\delta x^\mu = X_\nu^\mu \delta\omega^\nu$$

$$\Delta\phi = \Phi_\mu \delta\omega^\mu. \quad (2.12)$$

O número de parâmetros infinitesimais depende da dimensão do grupo (na verdade depende da dimensão da Álgebra de Lie do grupo de transformações).

Se tivermos, além disso, um multipletto de campos ϕ_i , as transformações (2.12) generalizam-se para

$$\Delta\phi_i = \Phi_{ij} \delta\omega^j.$$

onde x_ν^μ e Φ_{ij} são, obviamente, matrizes.

Considerando as transformações (2.12) e assumindo que a ação é invariante sob elas (isto é, $\delta\mathcal{S} = 0$) e também que ϕ obedece as equações de Euler-Lagrange (2.9) obtemos de (2.10)

$$\int_{\partial R} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Phi_\nu - \Theta_k^\mu X_\nu^k \right) \delta\omega^\nu d\sigma_\mu = 0$$

onde trocamos $k \leftrightarrow \nu$, para por em evidência o fator comum $\delta\omega^\nu$.

Como $\delta\omega^\nu$ é uma perturbação arbitrária, obtemos:

$$\int_{\partial R} J_\nu^\mu d\sigma_\mu = 0 \quad (2.13)$$

onde

$$J_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Phi_\nu - \Theta_k^\mu X_\nu^k. \quad (2.14)$$

Logo, do teorema de Gauss em (2.13), temos

$$\int_{\partial R} J_\nu^\mu d\sigma_\mu = \int_R \partial_\mu J_\nu^\mu d^4x = 0. \quad (2.15)$$

Além disso, como R é arbitrário, obtemos que

$$\partial_\mu J_\nu^\mu = 0. \quad (2.16)$$

Vemos então que J_ν^μ é uma corrente conservada que aparece da invariância da ação \mathcal{S} sob um grupo de transformações (infinitesimais (2.12)), e para campos ϕ que satisfazem a equação de Euler-Lagrange.

A partir de J_ν^μ podemos definir uma carga conservada

$$Q_\nu \equiv \int_\sigma J_\nu^\mu d\sigma_\mu,$$

onde a integral é tomada sobre uma hipersuperfície σ tipo-espaço. Se tomarmos esta hipersuperfície como sendo $t = \text{constante}$, então:

$$Q_\nu = \int_V J_\nu^0 d^3\vec{x}$$

onde a integral é tomada no 3-volume V .

A conservação de Q_ν segue integrando-se (2.16) sobre V arbitrário:

$$\int_V \partial_0 J_\nu^0 d^3\vec{x} + \int_V \partial_i J_\nu^i d^3\vec{x} = 0. \quad (2.17)$$

A segunda integral pode ser transformada numa integral de superfície, pelo Teorema de Gauss:

$$\int_V \partial_i J_\nu^i d^3 \vec{x} = \int_{\partial V} J_\nu^i d\sigma^\nu. \quad (2.18)$$

Como J_ν^i é função do campo e de suas derivadas podemos fazer a hipótese extra de que os campos e suas derivadas se anulam no infinito. Com isto, como V é arbitrário, se tomarmos ∂V “muito grande” a contribuição da integral (2.18) será nula e (2.17) fica como:

$$\frac{d}{dt} Q_\nu \equiv \partial_0 \int_V J_\nu^0 d^3 \vec{x} = 0.$$

Esta equação nos mostra que a carga $Q_\nu \equiv \int_V J_\nu^0 d^3 \vec{x}$ é conservada, quando a ação é invariante sob um grupo de transformações sobre x^μ e ϕ . Este é o famoso Teorema de Noether. Na próxima seção veremos algumas aplicações deste teorema.

2.2 Aplicação do Teorema de Noether

Determinaremos agora a densidade Lagrangiana geral, de um campo escalar complexo ϕ .

2.2.1 Campo Escalar Complexo

Um campo escalar complexo ϕ [1] tem duas componentes reais, isto é, se ϕ_1 e ϕ_2 são dois campos escalares reais, podemos definir:

$$\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2),$$

$$\phi^* \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2).$$

Como a ação é real, a densidade Lagrangiana é então:

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \phi^*, \partial^\mu \phi^*) = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - \mu^2 \phi \phi^*. \quad (2.19)$$

Considerando ϕ e ϕ^* campos independentes, as equações de Euler-Lagrange nos dão duas equações de Klein-Gordon:

$$(\square + \mu^2)\phi = 0$$

$$(\square + \mu^2)\phi^* = 0.$$

Observe que a densidade Lagrangiana (2.19) é claramente invariante sob as transformações:

$$\phi \rightarrow \psi = e^{-i\Lambda}\phi$$

$$\phi^* \rightarrow \psi^* = e^{i\Lambda}\phi^*, \quad (2.20)$$

onde Λ é uma constante real. Esta transformação é conhecida como “Transformação de Gauge Global” ou de “Primeiro Tipo”. Na sua forma infinitesimal ela fica:

$$\delta\phi = -i\Lambda\phi$$

$$\delta\phi^* = i\Lambda\phi^*. \quad (2.21)$$

Portanto, a variação nas derivadas fica:

$$\delta(\partial_\mu\phi) = -i\Lambda\partial_\mu\phi$$

$$\delta(\partial^\mu\phi^*) = i\Lambda\partial^\mu\phi^*. \quad (2.22)$$

Como a transformação de gauge (2.20) não envolve dependência do espaço-tempo, na notação (2.12) temos que

$$\Phi_1 = -i\phi$$

$$\Phi_2^* = -i\phi^*$$

$$x = 0$$

(Λ é o parâmetro $\delta\omega$ em (2.12)).

As correntes conservadas, dadas pelo Teorema de Noether (equação (2.14)), são então

$$J_1^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(-i\phi)$$

$$J_2^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)}(-i\phi^*).$$

A corrente total conservada é então:

$$J^\mu = J_1^\mu + J_2^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(-i\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)}(-i\phi^*). \quad (2.23)$$

Substituindo (2.19) em (2.23) obtemos:

$$J^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*). \quad (2.24)$$

De (2.16) já sabemos que esta corrente é conservada, e a carga conservada é dada por:

$$Q = \int J^0 dV = i \int (\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t}) dV \quad (2.25)$$

Note que a substituição $\phi \leftrightarrow \phi^*$ muda o sinal da corrente (2.24) (e da carga (2.25)). Isto sugere que J^μ pode ser interpretada como uma densidade carga-corrente, a menos de uma constante, e se ϕ é um campo correspondente a uma partícula de carga e , então ϕ^* é um campo correspondente a uma partícula de carga $-e$.

É um importante aspecto da teoria de campos relativística que ela pode prontamente acomodar um par de partículas com a mesma massa mas com cargas opostas. No formalismo, entretanto, nada nos obriga a relacionar J^μ com a densidade de carga-corrente que aparece na eletrodinâmica. De fato, nosso formalismo pode acomodar qualquer atributo interno conservado, associado ao campo complexo ϕ .

2.2.2 Transformação de Gauge Local. O campo Eletromagnético como um campo de Gauge

Quando fazemos uma transformação de Gauge Global no espaço interno de ϕ , precisamos então fazer a mesma transformação (ou rotação) em todos os outros pontos ao mesmo tempo [2].

Isto seria relativisticamente impossível, visto que contradiz o Princípio da Relatividade: nenhum sinal (ou informação) pode ser instantâneo. O tempo mínimo entre um ponto e outro é o tempo que a luz viaja entre eles.

Uma maneira de contornar este problema é abandonar o requerimento de que Λ é uma constante e escrevemos Λ como uma função das coordenadas do espaço-tempo: $\Lambda \equiv \Lambda(x^\mu)$. Tais transformações são conhecidas como “Transformações de Gauge Locais” ou de “segundo tipo”.

Na forma infinitesimal ($\Lambda \ll 1$), temos:

$$\phi \rightarrow \phi - i\Lambda\phi$$

o que implica

$$\delta\phi = -i\Lambda\phi. \quad (2.26)$$

Além disso

$$\partial_\mu\phi \rightarrow \partial_\mu\phi - i(\partial_\mu\Lambda)\phi - i\Lambda(\partial_\mu\phi)$$

o que também implica

$$\delta(\partial_\mu\phi) = -i(\partial_\mu\Lambda)\phi - i\Lambda(\partial_\mu\phi). \quad (2.27)$$

Similarmente temos

$$\delta\phi^* = i\Lambda\phi^* \quad (2.28)$$

$$\delta(\partial^\mu\phi^*) = i\Lambda(\partial^\mu\phi^*) + i(\partial^\mu\Lambda)\phi^*. \quad (2.29)$$

Comparando estas transformações de gauge locais com as globais, equações (2.21) e (2.22) vemos que temos termos extras, $i(\partial_\mu\Lambda)\phi$ e $i(\partial^\mu\Lambda)\phi^*$ respectivamente. Por causa destes termos extras, por exemplo, comparando (2.26) e (2.27) nós dizemos que $\partial_\mu\phi$ não se transforma covariantemente, isto é, não se transforma como o próprio campo ϕ . Além disso, este termo faz com que a Ação não seja mais invariante (sob transformações de gauges locais). A razão disto é a seguinte.

A variação da densidade Lagrangiana é claramente:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}\delta\phi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)}\delta(\partial^\mu\phi^*). \quad (2.30)$$

Substituindo as equações (2.26),(2.27),(2.28) e (2.29) em (2.30) obtemos:

$$\delta\mathcal{L} = J^\mu(\partial_\mu\Lambda) \quad (2.31)$$

onde a corrente J^μ é dada por (2.24).

Então, comprovamos que a densidade lagrangiana não é invariante sob transformações de Gauge Locais. Para tornar a Ação invariante nós introduzimos um novo quadrivetor A_μ que se acopla diretamente com a corrente J^μ , dando um termo extra para a densidade Lagrangiana \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}_1 = -eJ^\mu A_\mu. \quad (2.32)$$

Ainda, nós impomos que sob transformações de Gauge Locais o campo A_μ se transforme como:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda \equiv A_\mu + \delta A_\mu. \quad (2.33)$$

De (2.32) e (2.33), temos

$$\delta\mathcal{L}_1 = -e(\delta J^\mu)A_\mu - J^\mu(\partial_\mu\Lambda). \quad (2.34)$$

O último termo da equação acima cancela $\delta\mathcal{L}$ na equação (2.31), mas agora precisamos cancelar o primeiro termo de (2.34).

Da definição da corrente (2.24) e usando as transformações ((2.26)-(2.29)), temos que:

$$\delta J^\mu = 2\phi\phi^*(\partial^\mu\Lambda). \quad (2.35)$$

De (2.34) e (2.35) temos então:

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 = -2e\phi\phi^*(\partial^\mu\Lambda)A_\mu. \quad (2.36)$$

Nós temos, portanto, que adicionar ainda um outro termo para cancelar (2.36). Este termo é dado por [2]

$$\mathcal{L}_2 = e^2 A_\mu A^\mu \phi\phi^*.$$

Novamente devemos calcular a variação de \mathcal{L}_2 , levando em conta a lei de transformação de A_μ , (2.33):

$$\delta\mathcal{L}_2 = 2eA_\mu(\partial^\mu\Lambda)\phi\phi^*. \quad (2.37)$$

Mas isto é o termo (2.36) com o sinal trocado. De (2.36) e (2.37) finalmente temos:

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 = 0.$$

Então a densidade Lagrangiana total $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ é agora invariante sob transformações de Gauge Locais.

Como introduzimos um campo A_μ que se acopla com a corrente J^μ (equação (2.32)), necessitamos ter uma densidade Lagrangiana que admita só o campo de Gauge A_μ e que, além disso, seja invariante de Gauge.

Para isto definimos o rotacional do campo A_μ como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.38)$$

Este objeto é invariante de gauge, pois por (2.33) temos

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$$

onde $F'_{\mu\nu}$ denota o campo transformado.

De (2.38) definimos a densidade Lagrangiana do campo A_μ como:

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (2.39)$$

o fator $-\frac{1}{4}$ é necessário para se obter as equações de Maxwell não-homogêneas das equações de Euler-Lagrange.

Somando todas as densidades Lagrangianas acima, obtemos a Lagrangiana total:

$$\mathcal{L}_t = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - \mu^2 \phi \phi^* - eJ^\mu A_\mu + e^2 A_\mu A^\mu \phi \phi^* - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

que podemos reescrever como

$$\mathcal{L}_t = (\partial_\mu \phi + ieA_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^* - ieA^\mu \phi^*) - \mu^2 \phi \phi^* - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (2.40)$$

Se observamos as equações (2.19) e (2.40) vemos que $\partial_\mu \phi$ é substituído por $\partial_\mu + ieA_\mu \phi$.

Definimos agora

$$D_\mu \phi \equiv \partial_\mu \phi + ieA_\mu \phi \quad (2.41)$$

$$D^\mu \phi^* \equiv \partial^\mu \phi^* - ieA^\mu \phi^*, \quad (2.42)$$

que é conhecido como o acoplamento mínimo ou Derivada Covariante dos campos ϕ e ϕ^* respectivamente. Diferentemente de $\partial_\mu \phi$ e $\partial^\mu \phi^*$, $D_\mu \phi$ e $D^\mu \phi^*$ se transformam de uma maneira covariante sob uma transformação de Gauge Local, pois,

$$\delta(D_\mu \phi) = -i\Lambda D_\mu \phi. \quad (2.43)$$

Com as definições (2.41) e (2.42) acima, a lagrangiana total (2.40) escreve-se, compactamente, como:

$$\mathcal{L}_t = D_\mu \phi D^\mu \phi^* - \mu^2 \phi \phi^* - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (2.44)$$

É fácil ver de (2.38) e (2.39) que $F^{\mu\nu}$ faz o papel do tensor campo eletromagnético, que é antissimétrico e portanto tem 6 componentes, sendo 3 elétricas e 3 magnéticas. O que fizemos acima, portanto, foi mostrar que o campo eletromagnético é um campo de gauge, isto é, ele aparece naturalmente por imposição de que a Ação seja invariante sob uma transformação de Gauge Locais. A_μ é denominado potencial de gauge e ele acopla linearmente com a corrente J_μ com constante de acoplamento e , que é a carga do campo ϕ .

Capítulo 3

Quantização Canônica do Campo Escalar de Klein-Gordon

A quantização de um campo clássico ϕ implica imediatamente em considerá-lo como um operador. Aqui nós vamos seguir as regras de quantização de Heisenberg da mecânica quântica [4].

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$$

onde $(i, j = 1, 2, 3)$

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$$

onde \hat{p}_i é o momento canonicamente conjugado $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}$, x_i e p_i referem-se à posição e momento da partícula, medidos no mesmo instante de tempo.

A hamiltoniana é dada por:

$$H = \sum_j p_j \dot{x}_j - L.$$

Em analogia com a Mecânica Quântica, em teoria de campos, $\phi(x) \equiv \phi(\vec{x}, t)$ tem o mesmo papel que $\vec{x}(t)$ em mecânica de uma partícula, ou seja, é uma variável generalizada, e descreve um sistema, com um número infinito de graus de liberdade.

Portanto, o campo canonicamente conjugado (momento) ao campo ϕ é, em analogia com a mecânica quântica, dado por:

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi(x))}.$$

As relações de comutação, são neste caso

$$[\phi(x), \pi(x')]^\mp = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.1)$$

$$[\phi(x), \phi(x')]^\mp = [\pi(x), \pi(x')]^\mp = 0 \quad (3.2)$$

para tempos iguais, ou seja $t = t'$.

Os índices \mp indicam que temos comutadores para Bosons e anticomutadores para Fermions, respectivamente.

A Hamiltoniana é dada por:

$$H = \int \mathcal{H}(x) d^3\vec{x}$$

onde:

$$\mathcal{H}(x) = \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$$

é a densidade Hamiltoniana.

O processo de quantização acima descrito é também denominado “Segunda Quantização”.

3.1 Espaço das Soluções da equação de Klein-Gordon

Quando a equação de Klein-Gordon é interpretada como uma equação de movimento de uma partícula encontram-se as seguintes dificuldades [3]:

- (i) Existem soluções de energia negativa.
- (ii) A corrente j^μ não fornece uma densidade de probabilidade definida positiva ρ , como no caso da equação de Schrödinger.

No entanto, se a equação de Klein-Gordon for interpretada como uma equação de onda para um campo clássico $\phi(x)$, é possível mostrar que a energia total do campo dada por $H = \int \Theta^{00} d^3\vec{x}$ será positiva.

A equação de Klein-Gordon é dada por

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0$$

cuja densidade lagrangiana é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2(x).$$

O momento canonicamente conjugado é portanto

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x).$$

Agora que temos as variáveis de campo (operadores) $\phi(x)$ e $\pi(x)$ podemos impor as relações de comutação canônicas. Mas isto não parece levar a nada, inclusive porque nem sabemos ainda qual é o espaço vetorial em que os operadores $\phi(x)$ e $\pi(x)$ agem.

Observamos que ao mesmo tempo que $\phi(x)$ é um operador, ele também é uma solução da equação de Klein-Gordon. Agora como a equação de Klein-Gordon é linear, o espaço das suas soluções S é um espaço vetorial (de dimensão infinita). Escolhida uma base neste espaço, qualquer solução é uma combinação linear dos elementos da base. Portanto se $f_\alpha(x)$ é uma base para S (cada f_α é uma solução elementar de Klein-Gordon); então:

$$\phi(x) = \sum_{\alpha} A_{\alpha} f_{\alpha}(x).$$

Nesta expressão temos duas observações importantes:

(1) $\phi(x)$ é um operador. Portanto ou A_{α} ou $f_{\alpha}(x)$ devem ter um caráter operatorial.

A solução em teoria quântica de campo é que os coeficientes A_{α} devem carregar o caráter operatorial, enquanto que a base de soluções elementares $f_{\alpha}(x)$ são funções usuais.

(2) Numa teoria quântica precisamos definir o tamanho dos vetores. Isto é feito definindo-se um produto interno no espaço S . Para o produto interno ser completamente definido, basta defini-lo numa base. Em geral o produto interno depende da equação de campo considerada.

Para o caso da equação de Klein-Gordon o produto interno será dado por:

$$(f, g) = \int f^*(x) i \vec{\partial}_0 g(x) d^3 \vec{x}. \quad (3.3)$$

As funções $f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2w_{\vec{k}}}} e^{-ikx}$, $f_k^*(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2w_{\vec{k}}}} e^{ikx}$ formam um conjunto ortonormal completo para o espaço S , com o produto interno dado por (3.3), onde:

$$w_{\vec{k}} = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} = k_0.$$

As funções $f_k(x)$ e $f_k^*(x)$ são denominadas soluções elementares (ou modos normais) com frequência positiva e negativa respectivamente. O cálculo dos produtos internos dão:

$$(f_k(x), f_{k'}(x)) = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'),$$

$$(f_k(x), f_{k'}^*(x)) = 0,$$

$$(f_k^*(x), f_{k'}^*(x)) = -\delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (3.4)$$

Portanto, se $\phi(x)$ é solução da equação de Klein-Gordon, então podemos escrever

$$\phi(x) = \int (a(k)f_k(x) + a^\dagger(k)f_k^*(x))d^3\vec{k}$$

ou

$$\phi(x) = \int \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2w_{\vec{k}}}} \left(a(k)e^{-ikx} + a^\dagger(k)e^{ikx} \right) d^3\vec{k}. \quad (3.5)$$

Prova-se que as relações de ortogonalidades (3.4) são independentes do tempo.

Os operadores $a(k)$ e $a^\dagger(k)$ em (3.5) são os coeficientes de Fourier da expansão de $\phi(x)$ em soluções de ondas planas. Portanto elas são obtidas como:

$$a(k) = (f_k(x), \phi(x))$$

$$a^\dagger(k) = (\phi^*(x), f_k(x)). \quad (3.6)$$

3.2 Relações de Comutação e Espaço de Fock

Como vimos anteriormente, $\phi(x)$, bem como $\pi(x)$, $a(k)$ e $a^\dagger(k)$ são operadores. No entanto, ainda não definimos o espaço em que eles operam. Quando impomos as relações de comutação para tempos iguais e expandimos $\phi(x)$ em termos das soluções elementares $f_k(x)$ e $f_k^*(x)$, podemos construir explicitamente um espaço no qual os operadores agem. Tal espaço é denominado Espaço de Fock. Pela observação, podemos decompor o campo $\phi(x)$ em suas partes de frequência positiva e negativa, isto é:

$$\phi(x) = \phi^{(-)}(x) + \phi^{(+)}(x) = \int a^\dagger(k)f_k^*(x)d^3\vec{k} + \int a(k)f_k(x)d^3\vec{k}.$$

As relações de comutação dos operadores $a(k)$ e $a^\dagger(k)$ são dadas por:

$$[a(k), a^\dagger(k')] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$[a(k), a(k')] = [a^\dagger(k), a^\dagger(k')] = 0. \quad (3.7)$$

Estas são as relações de comutação, de um conjunto infinito (não enumerável) de osciladores harmônicos desacoplados, e é a versão contínua das relações de comutação:

$$[a, a^\dagger] = 1$$

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

para o oscilador harmônico. Vemos que cada modo k se comporta como um oscilador harmônico e portanto um campo físico (livre) pode ser visualizado como um “conjunto” de osciladores desacoplados (sem interação).

Vamos agora descrever o espaço onde os operadores agem. Este será o chamado Espaço de Fock [7].

Em mecânica quântica a função de onda $\psi(x)$ satisfaz a condição de normalização:

$$\int \psi(x)\psi^*(x)d^3\vec{x} = 1.$$

Mais geralmente, podemos dizer que as funções de onda pertencem a um espaço de funções $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$, isto é, as funções complexas em \mathbb{R}^3 cujo quadrado é integrável. Este espaço é um Espaço de Hilbert (espaço de estados do sistema) cuja métrica é dada por:

$$\langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} f^*(\vec{x})g(\vec{x})d^3\vec{x}.$$

Este esquema pode ser estendido à teoria quântica de campos, no caso de campos livres pelo menos. A construção do espaço de Fock segue da mecânica quântica.

Em primeiro lugar, nós postulamos que o espaço dos estados de uma partícula, como na mecânica quântica, é um espaço de Hilbert, $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$. A generalização para várias partículas vem do produto tensorial, ou seja:

$$\phi_n \in \mathcal{H}^{\otimes n}.$$

Agora, nós sabemos que partículas idênticas obedecem dois tipos de estatística: a de Bose ou a de Fermi. Para Bosons os estados do sistema de partículas precisa ser simétrico, isto é:

$$S_n^+ \phi_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \phi_n(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$$

e para Fermions antissimétricos:

$$S_n^- \phi_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} (-1)^{\pi} \phi_n(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}).$$

Os operadores S_n^{\pm} são operadores de projeção no espaço $\mathcal{H}^{\otimes n}$ das n-partículas, pois satisfazem:

$$(S_n^{\pm})^2 = S_n^{\pm}$$

$$(\phi_n, S_n^{\pm} \phi_n) = (S_n^{\pm} \phi_n, \phi_n).$$

Portanto, os estados físicos de n-partículas formam um espaço de Hilbert, dado por (+ para bosons, - para fermions):

$$\mathcal{H}_n^{\pm} = S_n^{\pm}(\mathcal{H}^{\otimes n}).$$

Para descrever todos os estados de multipartículas simultaneamente, definimos o chamado Espaço de Fock:

$$\mathcal{F}^{\pm} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^{\pm}$$

onde $\mathcal{H}_0 = \alpha\Omega$, com $\alpha \in \mathcal{C}$ é um espaço unidimensional definindo o vácuo (zero partículas). Veja que neste esquema o vácuo foi postulado junto com a definição do espaço de Fock. A existência, unicidade e a determinação explícita do vácuo depende da dinâmica da teoria, isto é, da Lagrangiana. Em verdade, podemos construir o espaço de Fock, aplicando o operador de criação a^{\dagger} no estado de vácuo ($\Omega \equiv |0\rangle$) várias vezes, criando estados com 1 partícula, 2 partículas, etc. Um elemento arbitrário de Fock é dado por:

$$|\Psi\rangle = (|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots) \in \mathcal{F},$$

onde

$$|n\rangle \in \mathcal{H}_n^{\pm}.$$

O que queremos, então, é achar um conjunto de operadores Hermitianos, tal que os estados de multipartículas sejam autoestados simultâneos dos operadores deste conjunto.

Para este fim definimos o operador:

$$N(\vec{k}) = a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}).$$

Na teoria dos espaços de Hilbert, os autoestados (autovetores) destes operadores formam uma base.

Seja $|n(\vec{k})\rangle \in \mathcal{F}$ um autoestado do operador $N(\vec{k})$ com autovalor $n(\vec{k})$. Temos então

$$N(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle = n(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle.$$

Além disso, tem-se

$$[N(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k})] = a^\dagger(\vec{k})$$

$$[N(\vec{k}), a(\vec{k})] = -a(\vec{k}).$$

Este operador $N(\vec{k})$ é chamado Operador Número de Partículas, o que se justifica em virtude dele satisfazer as equações:

$$N(\vec{k})a^\dagger(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle = (n(\vec{k}) + 1)a^\dagger(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle$$

$$N(\vec{k})a(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle = (n(\vec{k}) - 1)a(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle.$$

3.3 Expansões de Fourier e Relações de Comutação

A expansão de Fourier (3.5) pode ser escrita como

$$\phi(x) = \int (a(k)f_k(x) + a^\dagger(k)f_k^*(x))d^3\vec{k}. \quad (3.8)$$

Observe que ela não é relativisticamente invariante.

Para conseguir uma expansão de Fourier relativisticamente invariante expandimos $\phi(x)$ como:

$$\phi(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^4} M[a(k)e^{-ikx} + a^\dagger(k)e^{ikx}]d^4k. \quad (3.9)$$

A diferença com o caso anterior (3.8), é a presença da constante M , que é, em princípio, arbitrária. Para determiná-la univocamente impõe-se Invariância Relativística da medida da integral acima

$$d^4 k' = \frac{1}{(2\pi)^4} M d^4 k.$$

Para a equação de Klein-Gordon temos a condição de camada de massa do campo $\phi(x)$, isto é:

$$k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 = m^2.$$

Isto implica um fator $\delta(k^2 - m^2)$ na medida. Também impomos a condição de energia positiva para $\phi(x)$, isto é, $k_0 > 0$. Isto implica um fator $\theta(k_0)$. Também, por conveniência, tomamos um fator adicional (2π) . Então o fator M é formado de 3 fatores

$$M = 2\pi \delta(k^2 - m^2) \Theta(k_0).$$

A expansão (3.9) fica escrita como

$$\phi(x) = \int \frac{2\pi}{(2\pi)^4} \delta(k^2 - m^2) \Theta(k_0) (a(k) e^{-ikx} + a^\dagger(k) e^{ikx}) d^4 k.$$

Esta representação de Fourier em dimensão 4 pode ser escrita como uma representação de Fourier em dimensão 3, e que ainda é invariante de Lorentz, mas não é manifesta. Nesta representação teremos que a equação (3.9) fica como:

$$\phi(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} (a(\vec{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k}) e^{ikx}) d^3 \vec{k} \quad (3.10)$$

onde

$$a(\vec{k}) \equiv a(\omega_k, \vec{k})$$

$$a^\dagger(\vec{k}) \equiv a^\dagger(\omega_k, \vec{k}).$$

Vemos que o fator (2π) foi “necessário” para obter a medida da representação de Fourier tridimensional com o número correto de fatores $\frac{1}{(2\pi)}$, isto é, $\frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3}$.

Os operadores de Aniquilação e Criação ficam como

$$a(\vec{k}) = \int \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_{\vec{k}}^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) d^3 \vec{x}$$

$$a^\dagger(\vec{k}) = \int \sqrt{(2\pi)^3 2w_k} \phi(x) i \vec{\partial}_0 f_k(x) d^3\vec{x}.$$

Das expressões anteriores determinamos as relações de comutação de $a^\dagger(\vec{k})$ e $a(\vec{k})$, as quais são:

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2w_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 0.$$

Estas relações, por construção, são relativisticamente invariantes e a Hamiltoniana é dada por:

$$H = \int \frac{w_k}{4(2\pi)^3 w_k} \left(a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) \right) d^3\vec{k}.$$

Capítulo 4

Quantização Canônica do Campo Eletromagnético

4.1 O Gauge de Radiação e de Lorentz

Em geral, quantizar campos sem massa apresenta dificuldades, [3][5], como é o caso do campo eletromagnético, o qual tem duas componentes independentes, mas é descrito covariantemente por um 4-vetor A_μ . Quando escolhemos duas destas componentes (as físicas) e as quantizamos, perdemos a covariância requerida. Mas, se desejamos manter a covariância, teríamos duas componentes a mais. Consideraremos estes dois enfoques e veremos a importância da invariância de gauge.

Sabemos que o tensor de campo eletromagnético é dado por

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

As equações não-homogêneas de Maxwell no vácuo são escritas como

$$\square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0.$$

Estas equações obtém-se do princípio variacional da Lagrangiana (2.39).

Um campo eletromagnético dado, A_μ , não é único, e, além disso, a transformação de gauge (2.33) deixa $F_{\mu\nu}$ invariante. Se escolhemos que $\Lambda(x)$ satisfaz

$$\square\Lambda(x) = -\partial_\mu A^\mu,$$

obtemos que $\partial_\mu A^\mu = 0$. Retirando por simplicidade a “ ν ”, vamos considerar os potenciais A^μ que satisfazem

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{4.1}$$

Esta é a chamada condição de Lorentz. Dizemos então que A_μ está no gauge de Lorentz. A grande vantagem deste gauge é que ele é relativisticamente invariante. É claro que a equação (4.1) reduz o número de componentes independentes de A^μ de 4 para 3. Como o campo de radiação tem apenas 2 graus de liberdades que são verdadeiras variáveis dinâmicas, temos que eliminar mais uma variável. Como A_μ e A'_μ satisfazem a condição de Lorentz, então $\square\Lambda(x) = 0$. Portanto escolhemos um $\Lambda(x)$ que satisfaz:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial t} = -\phi$$

o que implica:

$$\phi' = A'_0 = A_0 + \partial_0\Lambda(x) = \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} = \phi - \phi = 0.$$

Portanto, escolhendo transformações de gauge apropriadas, podemos obter um 4-potencial A_μ que satisfaz:

$$\phi = 0, \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (4.2)$$

Neste caso dizemos que os potenciais encontram-se no gauge de Radiação (ou de Coulomb). É fácil ver de (4.2) que neste gauge o 4-potencial A_μ tem somente dois graus de liberdades independentes.

4.2 Quantização Canônica no Gauge de Radiação

No método de quantização canônica, as regras de comutação de Heisenberg são escritas com as variáveis dinâmicas da teoria. É fácil ver, pela equação (4.2), que A_0 pode ser eliminada das equações de movimento. As dificuldades da quantização canônica do campo eletromagnético originam-se justamente por se ter mais variáveis do que os graus de liberdade independentes. Vamos proceder abaixo em analogia à quantização de um campo escalar e vamos observar as dificuldades que aparecem [6][3].

Definimos os momentos canonicamente conjugados aos campos A_0 e A_i , para $i = 1, 2, 3$, como:

$$\Pi^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_0} = 0$$

$$\Pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = -\dot{A}^i + \partial^i A^0 = E^i.$$

Impomos as regras de comutação usuais

$$[A^i(\vec{x}, t), \Pi^j(\vec{x}', t)] = -[A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = i\delta_{ij}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (4.3)$$

Acontece que estas regras são inconsistentes com o gauge de radiação pois, tomando a divergência de ambos lados, chega se a:

$$[\nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}, t), E^i(\vec{x}', t)] = i\partial^i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

onde o primeiro lado é igual a zero, enquanto que o segundo é diferente de zero, portanto as relações de comutação (4.3) precisam ser modificadas.

A solução é substituir δ_{ij} por um tensor Δ_{ij} de segunda ordem, simétrico. Para isto escrevemos $\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$ na forma integral e reescrevemos (4.3) como:

$$[A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}')] = -i\delta_{ij} \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d^3 \vec{k}.$$

Agora colocando δ_{ij} dentro da integral e substituindo-o por Δ^{ij} , um tensor de segunda ordem, que depende de k , temos:

$$[A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}'), t] = -i \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Delta^{ij} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d^3 \vec{k}. \quad (4.4)$$

Tomando a divergência ficamos com

$$[\nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}'), t] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int (\sum_i k_i \Delta^{ij}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d^3 \vec{k}.$$

Como o lado esquerdo é nulo, o direito só se anula com a condição de transversalidade para Δ^{ij} , isto é:

$$\sum_{i=1}^3 k_i \Delta^{ij} = 0.$$

Para determinar Δ^{ij} observe que ele é um tensor e é função das componentes k_j . Por outro lado, temos que o tensor mais geral possível de segunda ordem, formado com as componentes de \vec{k} é do tipo:

$$\Delta^{ij} = A(\vec{k}^2)\delta^{ij} + B(\vec{k}^2)k^i k^j.$$

Agora impondo a condição de transversalidade e a condição de que Δ^{ij} tem que ser um tensor de projeção, obtemos unívocamente

$$\Delta^{ij} = \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2} \quad (4.5)$$

Substituindo (4.5) em (4.4), a relação de comutação fica como:

$$[A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = -i \frac{1}{(2\pi)^3} \int (\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d^3 \vec{k};$$

além disso, temos as regras de comutação usuais

$$[A^i(\vec{x}, t), A^j(\vec{x}', t)] = [E^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = 0.$$

Agora, como estamos no gauge de radiação, que é um subgauge do gauge de Lorentz, então pela condição de Lorentz temos que as equações de Maxwell tornam-se:

$$\square A^\mu = 0.$$

Como no gauge de radiação $\phi = A^0 = 0$, então:

$$\square \vec{A} = 0.$$

Esta é uma equação de Klein-Gordon sem massa. Podemos escrever suas soluções como uma combinação linear das soluções fundamentais e^{ikx} e e^{-ikx} . Os coeficientes devem ser vetores, chamados vetores de polarização que denotaremos como $\vec{\epsilon}^{(\lambda)}(k)$, onde λ é um índice de valor 1 e 2.

Escrevemos portanto

$$\vec{A}(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}^{(\lambda)}(k) \left(a^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} + a^{(\lambda)\dagger}(k) e^{ikx} \right) d^3 \vec{k}. \quad (4.6)$$

Como no gauge de radiação $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, então se tem

$$\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}^{(\lambda)}(k) = 0.$$

Portanto, para uma direção de propagação $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$, os vetores $\vec{\epsilon}^{(\lambda)}(k)$ são transversais. Eles podem ser escolhidos ortonormais

$$\vec{\epsilon}^{(\lambda)}(k) \cdot \vec{\epsilon}^{(\lambda')}(k) = \delta_{\lambda\lambda'}.$$

Como fizemos no caso de Klein-Gordon, definimos as funções de base (f_k, f_k^*) e achamos os coeficientes $a^{(\lambda)}$ e $a^{(\lambda)\dagger}$ em termos das funções $f_k(x)$. Escrevemos então (4.6) como

$$\vec{A}(x) = \int \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}} \sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}^{(\lambda)}(k) \left(a^{(\lambda)}(k) f_k(x) + a^{(\lambda)\dagger}(k) f_k^*(x) \right) d^3 \vec{k}. \quad (4.7)$$

Como (f_k, f_k^*) formam um conjunto completo ortonormal, podemos obter:

$$a^{(\lambda)}(k) = \int \sqrt{(2\pi)^3 2k_0} f_k^*(x) i \vec{\partial}_0 \vec{\epsilon}^{(\lambda)}(k) \cdot \vec{A}(x) d^3 \vec{x}$$

$$a^{(\lambda)\dagger}(k) = - \int \sqrt{(2\pi)^3 2k_0} f_k(x) i \vec{\partial}_0 \vec{\epsilon}^{(\lambda)}(k) \cdot \vec{A}(x) d^3 \vec{x}.$$

Após um cálculo direto, mas laborioso, conseguimos as seguintes relações de comutação:

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = 2k_0 (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')}(k')] = [a^{(\lambda)\dagger}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = 0.$$

Por último, calculamos a energia do campo, isto é:

$$H = \frac{1}{2} \int (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) d^3 \vec{x} = \frac{1}{2} \int (\dot{\vec{A}}^2 + (\nabla \times \vec{A})^2) d^3 \vec{x}$$

escrevendo $(\nabla \times \vec{A})^2$ como:

$$(\nabla \times \vec{A})^2 = -\vec{A} \cdot \nabla^2 \vec{A}$$

ficamos com

$$H = \frac{1}{2} \int (\dot{\vec{A}}^2 - \vec{A} \cdot \nabla^2 \vec{A}) d^3 \vec{x} \quad (4.8)$$

Substituindo a expansão (4.7) em (4.8) obtemos, após um longo, mas direto cálculo, que a hamiltoniana do campo eletromagnético é:

$$H = \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{k_0}{4(2\pi)^3 k_0} \left(a^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda)\dagger}(k) + a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k) \right) d^3 \vec{k}.$$

A fim de evitar a divergência da energia do vácuo fazemos um ordenamento normal dos operadores. A hamiltoniana acima reduz-se então a

$$: H := \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{k_0}{2(2\pi)^3 k_0} (a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k)) d^3 \vec{k}.$$

Esta é, portanto, a energia total do campo eletromagnético, com polarização transversais ($\lambda = 1, 2$), a qual é positiva definida.

4.3 Quantização Canônica no Gauge de Lorentz

Neste caso nós mantemos a covariância, então as quatro componentes de A_μ e Π_μ serão consideradas agora, e obedecerão às relações de comutação covariante [6][3]

$$[A_\mu(x), \Pi_\nu(x')] = ig_{\mu\nu}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (4.9)$$

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = [\Pi_\mu(x), \Pi_\nu(x')] = 0$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski .

Nós imediatamente encontramos um problema, devido à lagrangiana (2.39) pois temos

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0.$$

Assim, devido a A_0 é impossível satisfazer (4.9). Para fazer que Π^0 seja diferente de zero precisamos mudar a Lagrangiana. Mas a nova Lagrangiana deve fornecer as equações de Maxwell no gauge de Lorentz. No gauge de Lorentz as equações de Maxwell se resumem a $\square A_\mu = 0$. Procuramos então uma Lagrangiana que nos leve a esta equação de movimento. Uma Lagrangiana possível é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (4.10)$$

Para comprovar isto fazemos os cálculos respectivos e obtemos as seguintes relações:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu - g^{\mu\nu}(\partial_\alpha A^\alpha) \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0.$$

Substituindo na equação de Euler-Lagrange, obtemos

$$\square A^\nu = 0, \quad (4.12)$$

que é o que procurávamos. O termo extra $-\frac{1}{2}(\partial \cdot A)^2$ em (4.10) é chamado termo de “fixação de gauge”.

Agora usaremos (4.11) para determinar Π^0 , o que se obtém para μ e ν iguais a zero. Então:

$$\Pi^0 = -\partial_\alpha A^\alpha.$$

Mas esta equação não é adequada, porque no gauge de Lorentz, $\Pi^0 = 0$. A saída deste dilema é postular que a condição de Lorentz não pode ser considerada como uma identidade operatorial. Em vez disso, imporemos um requerimento mais fraco.

Para os estados físicos $|\Psi\rangle$, $\partial_\mu A^\mu$ tem valor esperado zero, isto é:

$$\langle \Psi | \partial_\mu A^\mu | \Psi \rangle = 0.$$

Por outro lado, a solução da equação (4.12) é dada por:

$$A_\mu(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \left(a^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} + a^{(\lambda)\dagger}(k) e^{ikx} \right) d^3\vec{k}. \quad (4.13)$$

Neste caso os quatro 4-vetores de polarização $\epsilon_\mu^{(0)}$, $\epsilon_\mu^{(1)}$, $\epsilon_\mu^{(2)}$ e $\epsilon_\mu^{(3)}$ têm a normalização invariante de Lorentz, $\epsilon^{(0)}$ é tipo-tempo e $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$ e $\epsilon^{(3)}$ é tipo-espaço, isto é:

$$\epsilon^{(\lambda)} \cdot \epsilon^{(\lambda')} = g^{\lambda\lambda'}$$

Agora suponhamos que o fóton se move ao longo do eixo-z, então temos $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ e

$$\epsilon^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

com

$$k \cdot \epsilon^{(1,2)} = 0. \quad (4.14)$$

Os fótons com polarização $\epsilon^{(0)}$ são chamados fótons “escalares”, com $\epsilon^{(3)}$ “longitudinal” e com $\epsilon^{(1)}$ e $\epsilon^{(2)}$ transversais.

Agora vamos determinar $[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda)\dagger}(k')]$.

Da equação (4.11) obtemos o momento canônico para $\mu = 0$

$$\Pi^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A_\nu)} = F^{\nu 0} - g^{\nu 0}(\partial_\alpha A^\alpha).$$

No entanto para $\nu = 0$ e $\nu = i$, tem-se:

$$\Pi^0 = -\dot{A}^0 + \nabla \cdot \vec{A}, \quad (4.15)$$

$$\Pi^i = \partial^i A^0 - \dot{A}^i. \quad (4.16)$$

Da relação de comutação (4.9) para $\nu = 0$ e usando (4.15) obtemos:

$$[A_\mu(\vec{x}, t), \Pi_0(\vec{x}', t)] = -[A_\mu(\vec{x}, t), \dot{A}^0(\vec{x}', t)] = ig_{\mu 0} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (4.17)$$

Para $\nu = i$, ($i = 1, 2, 3$), e usando (4.16), temos

$$[A_\mu(\vec{x}, t), \Pi_i(\vec{x}', t)] = -[A_\mu(\vec{x}, t), \dot{A}^i(\vec{x}', t)] = ig_{\mu i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (4.18)$$

Portanto de (4.17) e (4.18) podemos ter uma forma mais geral:

$$[\dot{A}_\mu(\vec{x}, t), A_\nu(\vec{x}', t)] = ig_{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}').$$

Por outro lado, como (f_k, f_k^*) formam um conjunto completo ortonormal, obtemos:

$$a^\lambda(k) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \sqrt{(2\pi)^3 2k_0} f_k^*(x) i \vec{\partial}_0 \epsilon^{(\lambda)\mu}(k) A_\mu(x) d^3 \vec{x}$$

$$a^{(\lambda)\dagger}(k) = - \sum_{\lambda=0}^3 \int \sqrt{(2\pi)^3 2k_0} f_k(x) i \vec{\partial}_0 \epsilon^{(\lambda)\mu}(k) A_\mu(x) d^3 \vec{x}.$$

As relações de comutação dos operadores $a^\lambda(k)$ e $a^{(\lambda)\dagger}(k)$ são dadas por:

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = -2(2\pi)^3 k_0 g^{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.19)$$

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')}(k')] = [a^{(\lambda)\dagger}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = 0.$$

Os operadores de aniquilação e criação $a(k)$ e $a^\dagger(k)$ para $\lambda = 1, 2, 3$, isto é, fótons longitudinais e transversais, não têm problemas e procedemos da maneira usual, mas a relação de comutação para fótons escalares fica

$$[a^{(0)}(k), a^{(0)\dagger}(k')] = -2(2\pi)^3 k_0 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (4.20)$$

Aqui temos problemas porque o sinal negativo no lado direito, faz com que a norma de um fóton escalar seja negativa.

Por exemplo para o estado de uma partícula

$$|1\rangle = \int \frac{1}{(2\pi)^3 2k_0} f(k) a^{(0)\dagger}(k) |0\rangle d^3 \vec{k}$$

temos que, usando (4.20) dá:

$$\langle 1 | 1 \rangle = - \int \frac{1}{(2\pi)^3 2k_0} |f(k)|^2 \langle 0 | 0 \rangle d^3 \vec{k}.$$

Também, se calculamos para dois fótons escalares, teremos:

$$\langle 2 | 2 \rangle = (-1)^2 \int \frac{1}{(2\pi)^3 2k_0} \frac{1}{(2\pi)^3 2k'_0} |f(k)|^2 |f(k')|^2 \langle 0 | 0 \rangle d^3 \vec{k} d^3 \vec{k}'.$$

Similarmente para o estado $|n_t\rangle$, com n_t fótons escalares obtém-se o sinal $(-1)^{n_t}$, ou seja, o Espaço de Hilbert dos estados da partícula (espaço de Fock) têm uma métrica indefinida. Portanto surgem problemas com a interpretação da mecânica quântica destes estados. Outra conseqüência é que o fóton escalar fornece uma contribuição negativa à energia, como veremos na continuação.

A hamiltoniana é definida como:

$$H = \int (\dot{A}_\mu(x) \Pi^\mu(x) - \mathcal{L}(x)) d^3 \vec{x}.$$

Substituindo as expressões dos A_μ , Π^μ e a Lagrangiana, têm-se que

$$H = -\frac{1}{2} \int (\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu + (\partial_k A_\nu)(\partial^k A^\nu)) d^3 \vec{x},$$

a partir da qual se obtém:

$$H = \int \frac{k_0}{2(2\pi)^3} \left(\sum_{\lambda=1}^3 a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k) - a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) \right) d^3 \vec{k}. \quad (4.21)$$

Vemos claramente que a contribuição dos fótons escalares é negativa. No entanto, se operador densidade do número de partículas fosse definido para estes fótons, como $-a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k)$ e não como $a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k)$ e exigirmos que $N |1\rangle = |1\rangle$, onde N é a integral do operador densidade de número de partículas e além disso introduzirmos um sinal menos, ficaremos com

$$N |1\rangle = - \int \frac{1}{(2\pi)^3 2k_0} a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) d^3 \vec{k} \int \frac{1}{(2\pi)^3 2q_0} f(q) a^{(0)\dagger}(q) d^3 \vec{q}$$

o qual nos dá

$$N | 1 \rangle = | 1 \rangle.$$

Devemos dizer que o ponto importante neste cálculo é o sinal negativo na definição do operador densidade de número de partículas o qual cancela o sinal menos da relação de comutação (4.19). Daqui é claro que o operador Hamiltoniano (4.21) não pode ter autovalores negativos. Pode, por outro lado ter valores esperados negativos. Por exemplo

$$\langle 1 | H | 1 \rangle = - \int \frac{k_0}{(2\pi)^3 2k_0} |f(k)|^2 \langle 0 | 0 \rangle d^3 \vec{k}$$

Uma maneira de evitar isto é empregando a condição de Lorentz (chamada condição secundária). Foi indicado que a condição $\partial_\mu A^\mu = 0$ não pode ser considerada como uma identidade operatorial, devido aos problemas com as relações de comutação (4.9). Relaxamos esta condição, então, impondo apenas que $\partial_\mu A^\mu | \Psi \rangle = 0$ somente para os estados físicos $| \Psi \rangle$. Escrevendo A^μ em termos de suas freqüências positivas e negativas, temos:

$$\partial_\mu A^\mu | \Psi \rangle = (\partial_\mu A^{(+)\mu} + \partial_\mu A^{(-)\mu}) | \Psi \rangle = 0. \quad (4.22)$$

Mas, como o operador de freqüência negativa possui operadores de criação, então nem o vácuo pode satisfazer esta identidade. Por outro lado, desde que $A^{(+)\mu}$ possui operadores de destruição, poderíamos ao menos exigir que:

$$\partial_\mu A^{(+)\mu} | \Psi \rangle = 0$$

que o vácuo satisfaz automaticamente. Então, de acordo com isto, o valor esperado de $\partial_\mu A^\mu$ no estado $| \Psi \rangle$ é zero; pois

$$\langle \Psi | \partial_\mu A^\mu | \Psi \rangle = \langle \Psi | \partial_\mu A^{(-)\mu} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \partial_\mu A^{(+)\mu} | \Psi \rangle^* = 0.$$

Esta condição, formulada primeiramente por Gupta e Bleuler, resolve o problema do valor esperado negativo para a energia do campo.

Substituindo (4.13) em (4.22), temos:

$$\sum_{\lambda=0}^3 k^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)} a^{(\lambda)}(k) | \Psi \rangle = 0$$

mas (4.14) implica

$$(k^\mu \epsilon_\mu^{(0)} a^{(0)}(k) + k^\mu \epsilon_\mu^{(3)} a^{(3)}(k)) | \Psi \rangle = 0$$

além disso temos $k^\mu \epsilon_\mu^{(0)} = -k^\mu \epsilon_\mu^{(3)}$, portanto:

$$(a^{(0)}(k) - a^{(3)}(k)) | \Psi \rangle = 0.$$

Esta equação nos mostra que nos estados físicos estão misturados fótons longitudinais e escalares. Eles não admitem a existência de um só fóton escalar. Obtemos então que

$$\langle \Psi | a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) | \Psi \rangle = \langle \Psi | a^{(3)\dagger}(k) a^{(3)}(k) | \Psi \rangle.$$

Portanto, as contribuições dos fótons longitudinal e escalar à Hamiltoniana (4.21) se cancelam, deixando só as contribuições dos estados transversais.

Capítulo 5

Teoria de Perturbação

Até agora só temos estudado a teoria quântica de campos livres. Porém, um estudo mais realista deve estar relacionado com campos que interagem. Neste caso as partículas podem ser espalhadas, criadas ou aniquiladas. Isto exige solucionar equações de campos não lineares.

Na eletrodinâmica quântica, por exemplo, é muito difícil a solução da equação de campo não homogênea, com uma densidade de corrente do tipo $\bar{\psi}(x)\gamma^\alpha\psi(x)$. No entanto uma solução aproximada pode ser obtida por intermédio da teoria de perturbação na representação de interação, onde, a hamiltoniana do sistema é dividida em duas partes, uma correspondente aos campos livres e outra a parte de interação. O termo de interação é considerado como uma perturbação, se a interação é suficientemente fraca.

5.1 Representação de Schrödinger

A evolução temporal de um sistema quântico na representação de Schrödinger é descrita pelos vetores estado $|a; t\rangle^S$ de acordo com a equação de Schrödinger:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|a; t\rangle^S = H^S|a; t\rangle^S \quad (5.1)$$

onde H^S é o operador hamiltoniano, independente do tempo.

Nesta representação, os operadores correspondentes aos observáveis físicos são independentes do tempo.

5.2 Representação de Heisenberg

Na representação de Heisenberg os vetores estado independem do tempo e a evolução temporal das variáveis dinâmicas do sistema são dadas pelos operadores de campo $\phi(x)$ e $\Pi(x)$, os quais são definidos como [4]

$$\begin{aligned}\phi^H(x) &= U^\dagger(t)\phi^S(\vec{x})U(t) \\ \Pi^H(x) &= U^\dagger(t)\Pi^S(\vec{x})U(t)\end{aligned}\quad (5.2)$$

onde $U(t) = e^{-iHt}$ é o operador de evolução temporal para uma hamiltoniana independente do tempo e $\phi^S(\vec{x})$, $\Pi^S(\vec{x})$ são os operadores de campo e campo conjugado respectivamente na representação de Schrödinger.

Para determinar a equação de movimento de $\phi^H(x)$, primeiro derivamos este campo com respeito ao tempo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi^H(x) = \left(\frac{\partial}{\partial t}U^\dagger(t)\right)\phi^S(\vec{x})U(t) + U^\dagger(t)\phi^H(\vec{x})\left(\frac{\partial}{\partial t}U(t)\right). \quad (5.3)$$

Derivando o operador $U(t)$ com respeito ao tempo, temos

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t) = HU(t).$$

A adjunta hermitiana é dada por:

$$-i\frac{\partial}{\partial t}U^\dagger(t) = U^\dagger(t)H$$

onde $H^\dagger = H$.

Substituindo as equações anteriores em (5.3), obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi^H(x) = i[U^\dagger(t)H^S U(t), \phi^H(x)]. \quad (5.4)$$

Se definirmos $H^H \equiv U^\dagger(t)H^S U(t)$ como a hamiltoniana na representação de Heisenberg, (5.4) fica da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi^H(x) = i[H^H, \phi^H(x)].$$

O mesmo pode ser obtido para o campo conjugado $\Pi(x)$, isto é:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Pi^H(x) = i[H^H, \Pi^H(x)].$$

Nas equações (5.2), observa-se que quando $t = 0$, obtemos:

$$\phi^S(\vec{x}) = \phi^H(\vec{x}, 0)$$

$$\Pi^S(\vec{x}) = \Pi^H(\vec{x}, 0).$$

5.3 Representação de Interação

Consideremos agora a representação de interação, que é “intermediária” entre as representações de Schrödinger e Heisenberg [4]. Nesta representação a hamiltoniana é dividida em duas partes: (na representação de Schrödinger)

$$H^S = H_0^S + H_I^S$$

onde H_0^S é a hamiltoniana do campo livre e H_I^S a hamiltoniana de interação.

Definem-se, na representação de interação os seguintes operadores de campo:

$$\phi^I(\vec{x}, t) = e^{iH_0^S t} \phi^S(\vec{x}) e^{-iH_0^S t}$$

$$\Pi^I(\vec{x}, t) = e^{iH_0^S t} \Pi^S(\vec{x}) e^{-iH_0^S t}$$

assim como os vetores estado

$$|a; t\rangle^I = e^{iH_0^S t} |a; t\rangle^S.$$

Além disso, podemos obter a relação de $\phi^I(\vec{x}, t)$ e $|a; t\rangle^I$ com os operadores de campo e vetores estado nas representações de Heisenberg e Schrödinger, isto é:

$$\phi^I(\vec{x}, t) = e^{iH_0^S t} e^{-iHt} \phi(x) e^{iHt} e^{-iH_0^S t}$$

$$\Pi^I(\vec{x}, t) = e^{iH_0^S t} e^{-iHt} \Pi(x) e^{iHt} e^{-iH_0^S t}$$

$$|a; t\rangle^I = e^{iH_0^S t} e^{-iHt} |a\rangle.$$

Das relações anteriores observamos que as representações de Schrödinger, Heisenberg e de Interação coincidem, para $t = 0$.

Para obter a equação de movimento de $|a; t\rangle^I$, derivamos este vetor estado, com respeito ao tempo e fazemos uso de (5.1), obtendo o seguinte resultado:

$$\frac{\partial}{\partial t}|a; t\rangle^I = -iH^I(t)|a; t\rangle^I \quad (5.5)$$

Desta relação observamos que a dependência temporal de $|a; t\rangle^I$ é determinada somente pela hamiltoniana de interação $H^I(t)$, na representação de interação.

Para determinar as equações de movimento para $\phi^I(x)$ e $\Pi^I(x)$, seguimos os mesmos passos feitos para o cálculo da equação de movimento de $|a; t\rangle^I$, obtendo os seguintes resultados:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi^I(x) = -i[\phi^I(x), H_0^I]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Pi^I(x) = -i[\Pi^I(x), H_0^I].$$

onde H_0^I independem do tempo.

5.4 Operador de Evolução Temporal

O operador de evolução temporal $U(t, t_0)$, aplicado ao estado $|a; t_0\rangle^I$ produz o estado $|a; t\rangle^I$, da seguinte maneira [4]:

$$|a; t\rangle^I = U(t, t_0)|a; t_0\rangle^I \quad (5.6)$$

onde, para $t = t_0$; $U(t_0, t_0) = 1$.

Além disso, o operador $U(t_1, t_0)$ satisfaz a propriedade de grupo multiplicativo

$$U(t_1, t)U(t, t_0) = U(t_1, t_0).$$

Para se ter a conservação de probabilidade, o operador $U(t, t_0)$ deve ser um operador unitário.

Para mostrar isto, consideramos as seguintes relações

$$|a; t\rangle^I = U(t, t_1)|a; t_1\rangle^I$$

$$|a; t_1\rangle^I = U(t_1, t_0)|a; t_0\rangle^I$$

destas equações obtemos:

$$|a; t\rangle^I = U(t, t_1)U(t_1, t_0)|a; t_0\rangle^I.$$

Comparando agora com (5.6), obtemos por consistência da propriedade de grupo multiplicativo

$$U(t_0, t) = U^{-1}(t, t_0). \quad (5.7)$$

Porém, isto ainda não garante que $U(t, t_0)$ seja unitário.

Então, de (5.6) em (5.5), obtém-se que

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = -iH_I(t)U(t, t_0) \quad (5.8)$$

e a adjunta desta equação

$$\frac{\partial}{\partial t}U^\dagger(t, t_0) = iU^\dagger(t, t_0)H_I(t). \quad (5.9)$$

Podemos multiplicar (5.8) à esquerda por $U^\dagger(t, t_0)$ e (5.9) à direita por $U(t, t_0)$ e somando o resultado, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) \right) = 0$$

portanto $U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0)$ é uma constante, e para $t = t_0$

$$U(t_0, t_0) = 1. \quad (5.10)$$

então

$$U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = 1. \quad (5.11)$$

Das equações (5.7) e (5.11) se garante que $U(t, t_0)$ é unitário.

5.5 Expansão de Perturbação

Nesta seção determinaremos a expansão de perturbação para $U(t, t_0)$ [4].

Da equação (5.8), fazendo $t = t_1$, integrando desde t_0 até t e usando a equação (5.10), obtemos:

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1)U(t_1, t_0).$$

Podemos solucionar esta equação, em forma iterativa, isto é:

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) \left(1 - i \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) U(t_2, t_0) \right).$$

Ainda mais

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^{t_1} dt_1 H_I(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) \times \\ \times \left(1 - i \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_I(t_3) U(t_3, t_0) \right).$$

Podemos continuar este processo iterativo, indefinidamente, obtendo-se a seguinte expressão:

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \dots \\ + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) + \dots \quad (5.12)$$

Para se obter uma forma mais conveniente, vamos estudar só a seguinte expressão:

$$I_2 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2)$$

onde fazemos $t_1 \rightarrow t_2$ e $t_2 \rightarrow t_1$, obtendo-se

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H_I(t_2) H_I(t_1).$$

Se definirmos

$$\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_1 \Theta(t_2 - t_1)$$

onde $\Theta(t_2 - t_1)$ é a função degrau, então, invertendo a ordem de integração obtemos a seguinte relação:

$$\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2$$

portanto I_2 pode ser escrito como

$$I_2 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_1) H_I(t_2) dt_2 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t H_I(t_2) H_I(t_1) dt_2$$

ou também

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_1)H_I(t_2)dt_2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_1)H_I(t_2)dt_2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t H_I(t_2)H_I(t_1)dt_2. \quad (5.13)$$

Esta expressão pode ser escrita de uma forma mais compacta. Para isto introduzimos o Produto-T ou Ordenador Temporal, o qual está definido para bosons e fermions como:

$$T\{\phi(x), \phi(x')\} = \begin{cases} \phi(x), \phi(x'), & \text{se, } x_0 > x'_0 \\ \phi(x'), \phi(x), & \text{se, } x'_0 > x_0 \end{cases} \quad (\text{bosons}),$$

$$T\{\phi(x), \phi(x')\} = \begin{cases} \phi(x), \phi(x'), & \text{se, } x_0 > x'_0 \\ -\phi(x'), \phi(x), & \text{se, } x'_0 > x_0 \end{cases} \quad (\text{fermions}).$$

Considerando a primeira integral em (5.13), do lado direito temos para $t_1 \geq t_2$

$$H_I(t_1)H_I(t_2) = T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\}.$$

No entanto, na segunda integral para $t_2 \geq t_1$, temos

$$H_I(t_2)H_I(t_1) = T\{H_I(t_2)H_I(t_1)\}.$$

Logo (5.13), fica da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2) = \\ & = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \left(\int_{t_0}^{t_1} T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\}dt_2 + \int_{t_1}^t T\{H_I(t_2)H_I(t_1)\}dt_2 \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Mas, é obvio para o caso de bosons que $T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\} = T\{H_I(t_2)H_I(t_1)\}$. O caso de fermions não apresenta problemas, porque as hamiltonianas $H_I(t)$ em geral têm sempre pares de fermions. Assim o intercâmbio nas posições de $H_I(t)$ sempre tem um número par de sinais negativos. Portanto, temos que (5.14), pode ser escrita como:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\}.$$

Esta fórmula pode ser generalizada para n fatores da hamiltoniana de interação,

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) \dots H_I(t_n) = \\ \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_n} dt_n T\{H_I(t_1) \dots H_I(t_n)\}.$$

onde $t_1 > t_2 > \dots > t_n$.

A prova desta expressão se faz por indução.

Usando os resultados anteriores, (5.12) pode ser escrita como

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 T\{H_I(t_1)\} + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\} + \dots \\ + \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_n} dt_n T\{H_I(t_1)H_I(t_2) \dots H_I(t_n)\} + \dots$$

ou podemos expressá-la da seguinte maneira:

$$U(t, t_0) = T \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_n} dt_n \{H_I(t_1)H_I(t_2) \dots H_I(t_n)\} \right) \quad (5.15)$$

ou, mais compactamente,

$$U(t, t_0) = T e^{-i \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1}. \quad (5.16)$$

Podemos ainda reescrever a forma de $U(t, t_0)$, em termos da densidade hamiltoniana de interação $\mathcal{H}_I(x)$, isto é:

$$H_I(t) = \int \mathcal{H}_I(x) d^3 \vec{x}$$

onde a integração é sobre todo o espaço.

Logo em (5.15), temos

$$U(t, t_0) = T \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_n} dt_n \left\{ \int \mathcal{H}_I(x_1) d^3 \vec{x}_1 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int \mathcal{H}_I(x_2) d^3 \vec{x}_2 \dots \int \mathcal{H}_I(x_n) d^3 \vec{x}_n \right\} \right)$$

ou

$$U(t, t_0) = T \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t d^4 x_1 \int_{t_0}^{t_1} d^4 x_2 \dots \int_{t_0}^{t_n} d^4 x_n \left\{ \mathcal{H}_I(x_1) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \mathcal{H}_I(x_2) \dots \mathcal{H}_I(x_n) \right\} \right) \quad (5.17)$$

onde $d^4 x = d^3 \vec{x} dt$.

Portanto (5.16) pode ser escrita como:

$$U(t, t_0) = T e^{-i \int_{t_0}^t \mathcal{H}_I(x) d^4 x}.$$

5.6 Hipótese Adiabática

O estudo da evolução temporal de um vetor estado $|a; t_1\rangle$ até outro estado $|a; t_2\rangle$ para qualquer ordem da teoria de perturbação, se faz mediante a fórmula [4]

$$|a; t\rangle = U(t, t_0)|a; t_0\rangle.$$

Assumimos que o estado inicial é fixado para $t_0 \rightarrow -\infty$ e o estado final para $t \rightarrow \infty$, por meio das funções de onda não perturbadas. Ou seja, a hamiltoniana de interação para $t \rightarrow \pm\infty$ será desligada adiabaticamente e os estados inicial e final serão representados por autoestados da hamiltoniana livre H_0 .

Sejam estes estados $|i\rangle$ e $|f\rangle$, então a amplitude de probabilidade para que o sistema faça uma transição do estado $|i\rangle$ em $t_0 \rightarrow -\infty$ ao estado $|f\rangle$ em $t \rightarrow \infty$ é dado por:

$$S_{if} = \langle f|U(\infty, -\infty)|i\rangle$$

que é chamada amplitude de dispersão ou elemento da matriz S, onde a matriz S é obtida de (5.17)

$$S = U(-\infty, \infty) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n T\{\mathcal{H}_I(x_1) \times \\ \times \mathcal{H}_I(x_2) \dots \mathcal{H}_I(x_n)\}. \quad (5.18)$$

Nesta equação podemos observar que, ao aplicar a hipótese adiabática, a matriz S contém o termo chamado de autoenergia correspondente ao primeiro termo 1, o qual está presente mesmo no caso de partículas não interagentes.

5.7 Decomposição em Produtos Normais

A equação (5.18) com produto temporal não é adequada para se fazer cálculos de espalhamento. Uma maneira descoberta por Wick é decompor os produtos temporalmente ordenados em produtos normalmente ordenados, no qual todos os operadores de destruição encontram-se à direita de todos os operadores de criação [4].

A identidade mais trivial é:

$$T\{\phi_A(x_1)\} =: \phi_A(x_1):$$

Para obter um produto de tempo ordenado de dois campos multiplicamos a expressão anterior pela direita por um operador de campo arbitrário $\phi_B(x_2)$, para $t_2 < t_1$, isto é:

$$\{T\phi_A(x_1)\}\phi_B(x_2) = T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} =: \phi_A(x_1) : \phi_B(x_2)$$

mas como qualquer campo $\phi(x)$ pode ser escrito como

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$$

então

$$\begin{aligned} T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} &= \phi_A^+(x_1)\phi_B^+(x_2) + \phi_A^-(x_1)\phi_B^+(x_2) + \\ &+ \phi_A^+(x_1)\phi_B^-(x_2) + \phi_A^-(x_1)\phi_B^-(x_2) \end{aligned} \quad (5.19)$$

todos os termos exceto $\phi_A^+(x_1)\phi_B^-(x_2)$ estão ordenados normalmente.

Este termo pode ser ordenado normalmente comutando (ou anticomutando) $\phi_B^-(x_2)$ com $\phi_A^+(x_1)$, usando as relações:

$$[\phi_A^+(x_1), \phi_B^-(x_2)]_- = \phi_A^+(x_1)\phi_B^-(x_2) - \phi_B^-(x_2)\phi_A^+(x_1),$$

$$[\phi_A^+(x_1), \phi_B^-(x_2)]_+ = \phi_A^+(x_1)\phi_B^-(x_2) + \phi_B^-(x_2)\phi_A^+(x_1),$$

ou

$$[\phi_A^+(x_1), \phi_B^-(x_2)]_{\pm} = \phi_A^+(x_1)\phi_B^-(x_2) \pm \phi_B^-(x_2)\phi_A^+(x_1). \quad (5.20)$$

O sinal (-) é usado para bosons e o sinal (+) para fermions.

Observemos que (5.20) é um c -número, porque pode ser expresso em termos do valor esperado do vácuo do ordenamento temporal dos campos $\phi_A(x_1)$ e $\phi_B(x_2)$, ou seja para $t_2 < t_1$ temos:

$$[\phi_A^+(x_1), \phi_B^-(x_2)]_{\pm} = \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle. \quad (5.21)$$

Substituindo (5.20) em (5.19), obtemos:

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} = \phi_A^+(x_1)\phi_B^+(x_2) + \phi_A^-(x_1)\phi_B^+(x_2) +$$

$$+[\phi_A^+(x_1), \phi_B^-(x_2)]_{\pm} \pm \phi_B^-(x_2)\phi_A^+(x_1) + \phi_A^-(x_1)\phi_B^-(x_2)$$

ou melhor ainda,

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} =: \phi_A(x_1)\phi_B(x_2) : + [\phi_A^+(x_1), \phi_B^-(x_2)]_{\pm}. \quad (5.22)$$

Levando (5.21) em (5.22), obtemos:

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} =: \phi_A(x_1)\phi_B(x_2) : + \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle, \quad (5.23)$$

para $t_2 < t_1$.

Na equação (5.23) podemos permutar $\phi_A(x_1)$ e $\phi_B(x_2)$, mas pela definição dos produtos ordenados normal e temporal esta equação é invariante sobre a permutação, portanto (5.23) é válida em geral.

Para obter a decomposição do produto-T, de $T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\}$ multiplicamos (5.23) pela direita por $\phi_C(x_3)$ e considerando $t_1 > t_2 > t_3$, obtemos a seguinte expressão:

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\} =: \phi_A(x_1)\phi_B(x_2) : \phi_C(x_3) + \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle\phi_C(x_3).$$

Decompondo $\phi_C(x_3)$ em suas partes de freqüências positivas e negativas, e substituindo no primeiro termo do lado direito da equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\} & =: \phi_A(x_1)\phi_B(x_2) : \phi_C^+(x_3) + \\ & + : \phi_A(x_1)\phi_B(x_2) : \phi_C^-(x_3) + \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle\phi_C(x_3). \end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito está ordenado normalmente, mas o segundo termo não. Para que seja ordenado normalmente, comutamos (ou anticomutamos) sucessivamente $\phi_C^-(x_3)$. Usando (5.21) obtemos:

$$\begin{aligned} T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\} & =: \phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3) : + \\ & + \phi_A(x_1)\langle 0|T\{\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\}|0\rangle \pm \phi_B(x_2)\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_C(x_3)\}|0\rangle + \\ & + \phi_C(x_3)\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle \end{aligned} \quad (5.24)$$

para $t_1 > t_2 > t_3$.

Introduzimos uma notação mais compacta, (chamada contração), da seguinte maneira:

$$\underbrace{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)} = \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle,$$

que se lê como a contração de $\phi_A(x_1)$ com $\phi_B(x_2)$.

Além disso, definimos o produto normal generalizado para mais de uma contração:

$$:\underbrace{ABCDEF\dots JKLM\dots} := \pm :CE\dots JL\dots : \underbrace{AK} \underbrace{BM} \underbrace{DF}\dots$$

onde o sinal (+) ou (-) é fixado de acordo com o número de permutações dos fatores de fermions necessário para ir do ordenamento $(ABCDEF\dots JKLM\dots)$ ao $(CE\dots JL\dots AKBMDF\dots)$, seja par ou ímpar.

Então, (5.23) e (5.24) ficam como:

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} =: \phi_A(x_1)\phi_B(x_2) : + : \underbrace{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)} : .$$

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\} =: \phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3) : + : \underbrace{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)} : +$$

$$+ : \underbrace{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)} : + : \underbrace{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)} : .$$

A fórmula de decomposição ordenada normal de $T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\}$ é obtida, seguindo os mesmos passos feitos na determinação de $T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}$ e $T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\}$. É fácil ver que

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\} =: \phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\phi_D(x_4) : +$$

$$+ : \underbrace{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)} : + : \underbrace{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)} : +$$

$$+ \text{ todos os outros produtos normais com uma contração } +$$

$$+ : \underbrace{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)} : + : \underbrace{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)} : +$$

$$+ \text{ todos os outros produtos normais com duas contrações.}$$

Se, continuamos desta maneira, até ter um produto de n fatores, teremos:

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\dots\phi_N(x_n)\} =: \phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\dots\phi_N(x_n) : + \quad (5.25)$$

+ todos os outros produtos normais com uma contração +
+ todos os outros produtos normais com duas contrações +
+ todos os outros produtos normais com três contrações +
+ todos os outros produtos normais com quatro contrações +
+

Ou seja, a soma do lado direito contém todos os possíveis conjuntos de contrações entre pares de operadores. Esta relação foi comprovada por Wick (1950), e é chamado o Teorema de Wick.

Capítulo 6

Propagadores

Neste capítulo, determinamos os propagadores para o campo complexo de Klein-Gordon, o campo de Dirac e o campo eletromagnético.

6.1 Propagador do Campo Complexo de Klein-Gordon

O campo complexo de Klein-Gordon, que descreve partículas carregadas é descrito pelos seguintes de campos [3]:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \{a(\vec{k})e^{-ikx} + b^\dagger(\vec{k})e^{ikx}\}$$

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \{b(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{ikx}\}$$

onde $a(\vec{k})$, $a^\dagger(\vec{k})$, $b(\vec{k})$ e $b^\dagger(\vec{k})$ são operadores de aniquilação e criação de partículas e antipartículas respectivamente.

Os campos $\phi(x)$ e $\phi^\dagger(x)$ podem ser decompostos em suas partes de frequências positivas e negativas, isto é:

$$\phi^+(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} a(\vec{k})e^{-ikx} \quad (6.1)$$

$$\phi^-(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} b^\dagger(\vec{k})e^{ikx} \quad (6.2)$$

$$\phi^{\dagger+}(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} b(\vec{k})e^{-ikx} \quad (6.3)$$

$$\phi^{\dagger-}(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} a^{\dagger}(\vec{k}) e^{ikx}. \quad (6.4)$$

Por outro lado, os operadores $a(\vec{k})$, $a^{\dagger}(\vec{k})$, $b(\vec{k})$ e $b^{\dagger}(\vec{k})$ satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[a(\vec{k}), a^{\dagger}(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b^{\dagger}(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (6.5)$$

$$[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [a^{\dagger}(\vec{k}), a^{\dagger}(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b(\vec{k}')] = [b^{\dagger}(\vec{k}), b^{\dagger}(\vec{k}')] = 0. \quad (6.6)$$

Usando as equações ((6.1)-(6.6)), podemos obter as relações de comutação seguintes:

$$[\phi^+(x), \phi^{\dagger-}(x')] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_k} e^{-i\omega_k(x_0-x'_0)} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} , \quad (6.7)$$

$$[\phi^-(x), \phi^{\dagger+}(x')] = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_k} e^{i\omega_k(x_0-x'_0)} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} , \quad (6.8)$$

$$[\phi^+(x), \phi^{\dagger+}(x')] = [\phi^-(x), \phi^{\dagger-}(x')] = 0.$$

Introduzindo as seguintes definições

$$\Delta^+(x - x') \equiv -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_k} e^{-i\omega_k(x_0-x'_0)} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} , \quad (6.9)$$

$$\Delta^-(x - x') \equiv \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_k} e^{i\omega_k(x_0-x'_0)} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} , \quad (6.10)$$

podemos expressar (6.7) e (6.8) como

$$[\phi^+(x), \phi^{\dagger-}(x')] = i\Delta^+(x - x') \quad (6.11)$$

$$[\phi^-(x), \phi^{\dagger+}(x')] = i\Delta^-(x - x'). \quad (6.12)$$

Além disso, fazendo uso das definições (6.9) e (6.10), podemos obter uma outra relação de comutação

$$[\phi(x), \phi^{\dagger}(x')] = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega_k} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \text{sen}(\omega_k(x_0 - x'_0)). \quad (6.13)$$

Se fazemos uso da seguinte definição:

$$\Delta(x - x') \equiv -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega_k} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \text{sen}(\omega_k(x_0 - x'_0)) \quad (6.14)$$

então, (6.13) fica como

$$[\phi(x), \phi^\dagger(x')] = i\Delta(x - x').$$

Observamos que $\Delta(x - x')$ é uma função ímpar, que satisfaz o requerimento da relação de comutação $[\phi(x), \phi(x')]$. Além disso $\Delta(x - x')$ é uma solução da equação de Klein-Gordon [1].

$$(\square + m^2)\Delta(x - x') = 0.$$

De (6.14), para tempos iguais ($x_0 = x'_0$), temos o seguinte resultado:

$$\Delta(x - x') = \Delta(\vec{x} - \vec{x}', 0) = 0 \quad (6.15)$$

Como $\Delta(x - x')$ é uma função invariante de Lorentz, pode-se verificar que a equação (6.15) vale para todo intervalo tipo-espaço isto é, para $(x - x')^2 < 0$ e indica que os dois campos, com este intervalo de separação tipo-espaço, comutam.

Então, se o campo é um observável físico, as medidas dos campos em dois pontos, com uma separação tipo-espaço não devem interferir; isto é conhecido como **princípio de microcausalidade**.

Voltando às equações (6.9) e (6.10), podemos expressar $\frac{e^{-i\omega_k(x_0-x'_0)}}{2\omega_k}$ como uma integral de contorno no plano complexo k_0 [4], por intermédio do teorema dos resíduos de Cauchy [17], isto é:

$$\frac{e^{-i\omega_k(x_0-x'_0)}}{2\omega_k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}^+} \frac{e^{-ik_0(x_0-x'_0)}}{(k_0 - \omega_k)(k_0 + \omega_k)} dk_0$$

onde o contorno \mathcal{C}^+ , é dado pela figura (6.1):

Além disso, temos

$$k_0^2 - \omega_k^2 = k^2 - m^2.$$

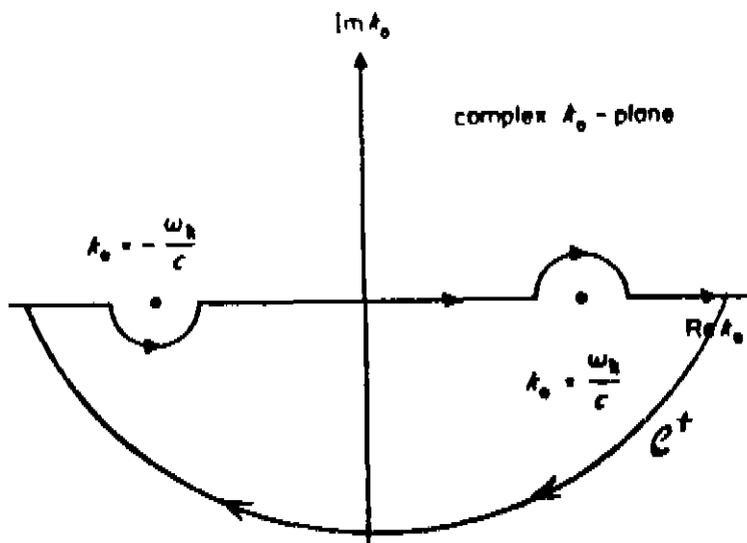


Figura 6.1: Contorno C^+

Portanto, $\Delta^+(x - x')$ fica como:

$$\Delta^+(x - x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^+} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2} d^4 k.$$

Para o caso de $\Delta^-(x - x')$, obtém-se a seguinte expressão:

$$\Delta^-(x - x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^-} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2} d^4 k$$

e neste caso o contorno C^- é dado abaixo:

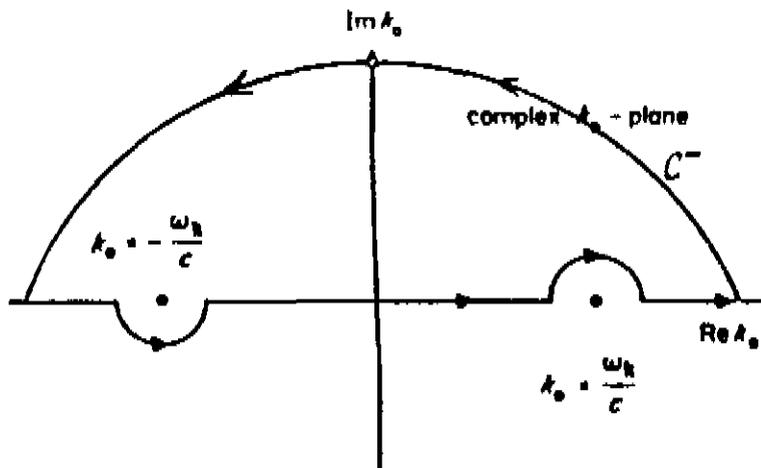


Figura 6.2: contorno C^-

Por outro lado, a função $\Delta(x - x')$ pode ser representada pela seguinte integral:

$$\Delta(x - x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_1} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2} d^4 k \quad (6.16)$$

onde, o contorno C_1 é dado abaixo

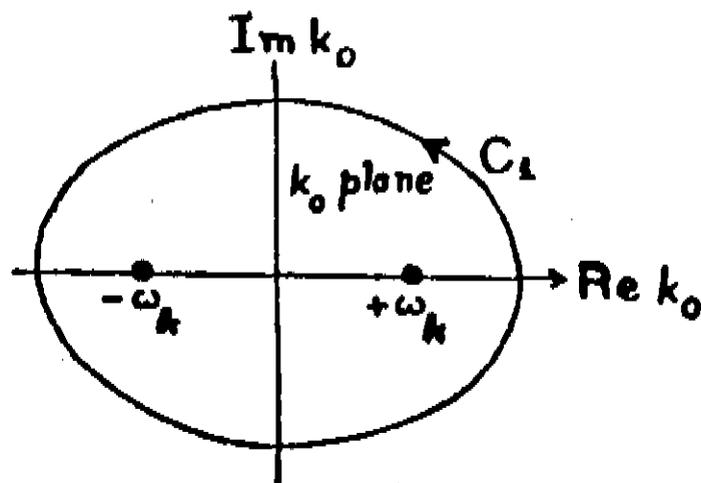


Figura 6.3: contorno C_1

É fácil mostrar que (6.16) é igual a (6.14).

Agora estudaremos a função (ou propagador) de Feynman, (Δ_F) , a qual é de grande importância na teoria quântica de campos, devido a sua utilidade no desenvolvimento da teoria de perturbação covariante.

Observemos de (6.11) que a função $\Delta^+(x - x')$ pode ser escrita como o valor esperado do vácuo de um produto de dois operadores de campo, isto é:

$$i\Delta^+(x - x') = \langle 0 | \phi(x)\phi^\dagger(x') | 0 \rangle. \quad (6.17)$$

Da mesma maneira, de (6.12) temos para $\Delta^-(x - x')$

$$i\Delta^-(x - x') = -\langle 0 | \phi^\dagger(x')\phi(x) | 0 \rangle. \quad (6.18)$$

Se definimos o Ordenador Temporal ou Produto-T como (para bosons)

$$T\{\phi(x)\phi^\dagger(x')\} = \begin{cases} \phi(x)\phi^\dagger(x'), & \text{se } x_0 > x'_0 \\ \phi^\dagger(x')\phi(x), & \text{se } x_0 < x'_0. \end{cases}$$

Esta definição implica que os operadores são colocados em ordem cronológica, com o tempo crescente da direita para a esquerda.

Também usando a função degrau

$$\Theta(x_0 - x'_0) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_0 > x'_0 \\ 0, & \text{se } x_0 < x'_0 \end{cases}$$

o Produto-T pode ser escrito como:

$$T\{\phi(x)\phi^\dagger(x')\} = \Theta(x_0 - x'_0)\phi(x)\phi^\dagger(x') + \Theta(x'_0 - x_0)\phi^\dagger(x')\phi(x). \quad (6.19)$$

Definimos a função de Feynman Δ_F como o valor esperado do vácuo do Produto-T

$$i\Delta_F(x - x') \equiv \langle 0 | T\{\phi(x)\phi^\dagger(x')\} | 0 \rangle. \quad (6.20)$$

Usando (6.17), (6.18), (6.19) em (6.20), obtemos

$$\Delta_F(x - x') = \begin{cases} \Delta^+(x - x'), & \text{se } x_0 > x'_0. \\ -\Delta^-(x - x'), & \text{se } x_0 < x'_0. \end{cases} \quad (6.21)$$

Significado de $\Delta_F(x - x')$.

Observamos na equação (6.20), para $x_0 > x'_0$, o valor esperado do vácuo torna-se $\langle 0 | \phi(x)\phi^\dagger(x') | 0 \rangle$. Podemos pensar que esta expressão representa uma partícula que foi criada em x' , propagando-se até x , onde é aniquilada. Da mesma maneira, para $x'_0 > x_0$, tem-se que o valor esperado do vácuo é dado por $\langle 0 | \phi^\dagger(x')\phi(x) | 0 \rangle$, que aceita uma interpretação semelhante, isto é, cria em x , uma antipartícula, propagando-se até x' onde é aniquilada.

Graficamente, esses eventos podem ser representados por:

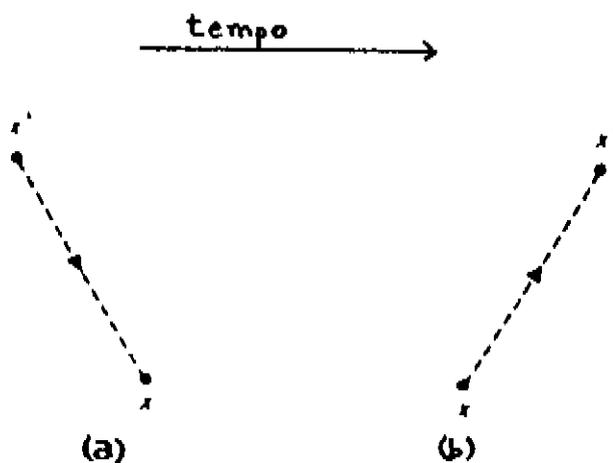


Figura 6.4: (a) $x_0 > x'_0$, (b) $x'_0 > x_0$

As linhas tracejadas representam a propagação da partícula na direção da flecha, isto é, de x' até x ou vice-versa. Daqui, $\Delta_F(x - x')$, ou o valor esperado do vácuo, pode ser referido como um propagador que é conhecido como o Propagador de Feynman [1] para as partículas do campo complexo de Klein-Gordon.

Por outro lado, também podemos representar $\Delta_F(x - x')$ em sua forma integral:

$$\Delta_F(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2} d^4k \quad (6.22)$$

onde o contorno \mathcal{C}_F é o seguinte:

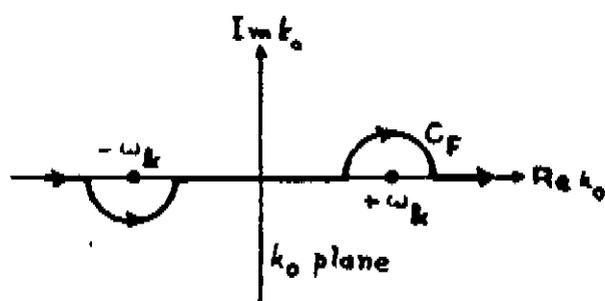


Figura 6.5: Contorno \mathcal{C}_F

Para verificar que (6.22) leva a (6.21), completamos no caso $x_0 > x'_0$ o contorno \mathcal{C}_F com o semiplano inferior e portanto vamos a obter que $\Delta_F(x - x') = \Delta^+(x - x')$. O mesmo acontece para o caso de $x'_0 > x_0$, no qual completamos o contorno \mathcal{C}_F com o semiplano superior, e obtemos que $\Delta_F(x - x') = \Delta^-(x - x')$.

Em lugar de deformar o contorno como na figura (6.5), podemos deslocar os polos uma distância infinitesimal η do eixo real e depois que a integração for realizada, toma-se $\eta \rightarrow 0$.

Portanto, temos

$$k^2 - m^2 = k_0^2 - \omega_0^2 - i\varepsilon$$

onde $\varepsilon = 2\omega_k\eta$ é uma quantidade infinitesimal.

A figura, neste caso, será:

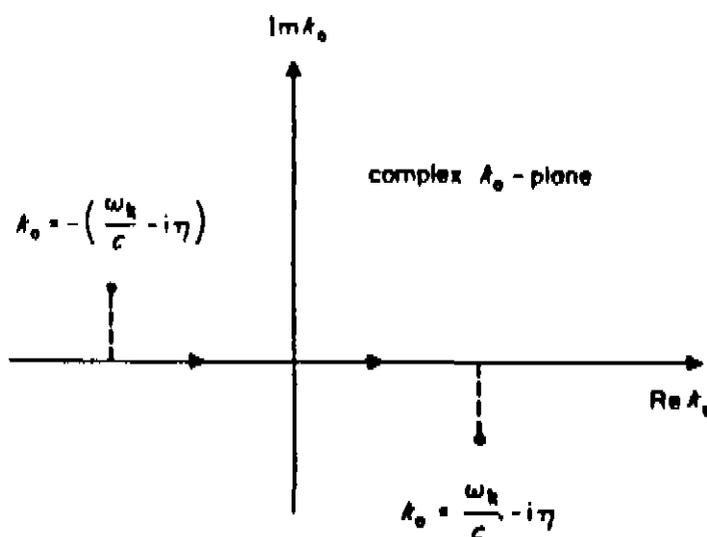


Figura 6.6:

De onde:

$$\Delta_F(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} d^4k.$$

Definindo

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \equiv \Delta_F(k) \quad (6.23)$$

encontramos que

$$\Delta_F(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} e^{-ik(x-x')} \Delta_F(k) d^4k. \quad (6.24)$$

A definição (6.23), é conhecida como o propagador de Feynman no espaço momento.

6.2 Propagador do Campo de Dirac

O campo de Dirac, que descreve partículas de spin $\frac{1}{2}$, é descrito pelos seguintes campos [3]:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1}^2 \left(b_{\alpha}(k) \mathcal{U}^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} + d_{\alpha}^{\dagger}(k) \mathcal{V}^{(\alpha)}(k) e^{ikx} \right),$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1}^2 \left(b_{\alpha}^{\dagger}(k) \bar{\mathcal{U}}^{(\alpha)}(k) e^{ikx} + d_{\alpha}(k) \bar{\mathcal{V}}^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} \right)$$

onde $\mathcal{U}^{(1,2)}$ e $\mathcal{V}^{(1,2)}$ são os espinores de Dirac de energia positiva e negativa.

Neste caso, também decomparamos os campos em suas partes de frequências positivas e negativas, isto é:

$$\psi^+(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1}^2 b_{\alpha}(k) \mathcal{U}^{(\alpha)}(k) e^{-ikx},$$

$$\psi^-(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1}^2 d_{\alpha}^{\dagger}(k) \mathcal{V}^{(\alpha)}(k) e^{ikx},$$

$$\bar{\psi}^+(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1}^2 d_{\alpha}(k) \bar{\mathcal{V}}^{(\alpha)}(k) e^{-ikx},$$

$$\bar{\psi}^-(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1}^2 b_{\alpha}^{\dagger}(k) \bar{\mathcal{U}}^{(\alpha)}(k) e^{ikx}.$$

Usando as seguintes relações de anticomutação:

$$\{b_\alpha(k), b_{\alpha'}^\dagger(k')\} = \{d_\alpha(k), d_{\alpha'}^\dagger(k')\} = (2\pi)^3 \frac{k_0}{m} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\alpha\alpha'},$$

$$\{b_\alpha(k), b_{\alpha'}(k')\} = \{d_\alpha(k), d_{\alpha'}(k')\} = \{b_\alpha^\dagger(k), b_{\alpha'}^\dagger(k')\} = \{d_\alpha^\dagger(k), d_{\alpha'}^\dagger(k')\} = 0,$$

calculamos os seguintes anticomutadores:

$$\{\psi_i^+(x), \bar{\psi}_j^-(x')\} = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \left(\sum_{\alpha=1}^2 \mathcal{U}_i^{(\alpha)}(k) \bar{\mathcal{U}}_j^{\alpha'}(k) \right) e^{-ik(x-x')}, \quad (6.25)$$

onde os spinores de Dirac, satisfazem

$$\sum_{\alpha=1}^2 \mathcal{U}_i^{(\alpha)}(k) \bar{\mathcal{U}}_j^{\alpha'}(k) = \left(\frac{\gamma \cdot k + m}{2m} \right)_{ij} \quad (6.26)$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 \mathcal{V}_i^{(\alpha)}(k) \bar{\mathcal{V}}_j^{\alpha'}(k) = \left(\frac{\gamma \cdot k - m}{2m} \right)_{ij}. \quad (6.27)$$

Assim, (6.25) fica como:

$$\{\psi_i^+(x), \bar{\psi}_j^-(x')\} = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{ij} \int \frac{d^3\vec{k}}{2(2\pi)^3 \omega_k} e^{-ik(x-x')}.$$

A integral da equação anterior, pode ser substituída pela definição (6.9), isto é:

$$\{\psi_i^+(x), \bar{\psi}_j^-(x')\} = i(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{ij} \Delta^+(x - x').$$

Omitindo os sufixos, i, j , obtemos

$$\{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(x')\} = i\mathcal{S}^+(x - x'), \quad (6.28)$$

onde

$$\mathcal{S}^+(x - x') = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta^+(x - x').$$

Da mesma maneira, usando (6.10), obtemos para $\psi^-(x)$ e $\bar{\psi}^+(x')$ o seguinte resultado:

$$\{\psi^-(x), \bar{\psi}^+(x')\} = i\mathcal{S}^-(x - x') \quad (6.29)$$

onde

$$\mathcal{S}^-(x - x') = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Delta^-(x - x'),$$

Além disso, também obtemos

$$\{\psi^-(x), \bar{\psi}^-(x')\} = \{\psi^+(x), \bar{\psi}^+(x')\} = 0. \quad (6.30)$$

Fazendo uso de (6.28), (6.29) e (6.30) obtemos também

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(x')\} = i\mathcal{S}(x - x'),$$

onde

$$\mathcal{S}(x - x') = \mathcal{S}^+(x - x') + \mathcal{S}^-(x - x').$$

Substituindo nesta equação as formas de $\mathcal{S}^+(x - x')$ e $\mathcal{S}^-(x - x')$, ela fica escrita como

$$\mathcal{S}(x - x') = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Delta(x - x').$$

As formas integrais de $\mathcal{S}^+(x - x')$ e $\mathcal{S}^-(x - x')$ são

$$\mathcal{S}^+(x - x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathcal{C}^+} d^4k \frac{(k + m)}{k^2 - m^2} e^{-ik(x-x')}$$

$$\mathcal{S}^-(x - x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathcal{C}^-} d^4k \frac{(k + m)}{k^2 - m^2} e^{-ik(x-x')},$$

onde os contornos \mathcal{C}^+ e \mathcal{C}^- são os mesmos casos anteriores.

Para $\mathcal{S}(x - x')$ tem-se

$$\mathcal{S}(x - x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathcal{C}_1} d^4k \frac{(k + m)}{k^2 - m^2} e^{-ik(x-x')}.$$

Novamente, aqui \mathcal{C}_1 é o mesmo do caso anterior.

Por outro lado, para o propagador Fermiônico de Feynman, definimos \mathcal{S}_F da seguinte maneira:

$$i\mathcal{S}_F(x - x') \equiv \langle 0 | T\{\psi(x)\bar{\psi}(x')\} | 0 \rangle. \quad (6.31)$$

Além disso, o Produto-T para o campo de Dirac é definido por:

$$T\{\psi(x)\bar{\psi}(x')\} = \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(x'), & \text{se } x_0 > x'_0 \\ -\bar{\psi}(x')\psi(x), & \text{se } x_0 < x'_0. \end{cases}$$

Fazendo uso da função degrau, temos

$$T\{\psi(x)\bar{\psi}(x')\} = \Theta(x_0 - x'_0)\psi(x)\bar{\psi}(x') - \Theta(x'_0 - x_0)\bar{\psi}(x')\psi(x). \quad (6.32)$$

Além disso, de (6.28) observamos que

$$i\mathcal{S}^+(x - x') = \langle 0 | \psi(x)\bar{\psi}(x') | 0 \rangle. \quad (6.33)$$

Da mesma maneira para $\mathcal{S}^-(x - x')$, de (6.29), tem se

$$\mathcal{S}^-(x - x') = -\langle 0 | \bar{\psi}(x')\psi(x) | 0 \rangle. \quad (6.34)$$

Usando (6.32), (6.33) e (6.34) em (6.31) obtemos

$$\mathcal{S}_F(x - x') = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Delta_F(x - x').$$

Sua correspondente forma integral é:

$$\mathcal{S}_F(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} d^4k \frac{(k + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik(x-x')}, \quad (6.35)$$

onde a integração é ao longo do eixo real: $-\infty < k_0 < +\infty$, como na figura (6.5).

A equação (6.35) é conhecida como o propagador do campo de Dirac.

Na figura (6.7) observamos o propagador do campo de Dirac em termos dos diagramas de Feynman.

Se $x_0 > x'_0$, então o propagador (6.31) converte-se em (6.33) que pode ser interpretado como a criação de um elétron em x' , propagando-se até x onde é aniquilado. Da mesma maneira, se $x'_0 > x_0$, então, o propagador (6.31) converte-se em (6.34), e pode ser interpretado como a emissão de um pósitron em x propagando-se até x' , onde é aniquilado.

Note-se, nestes diagramas, que a flecha sobre a linha do fermion está dirigida do ponto associado ao campo $\bar{\psi}$ em x' até o ponto associado a ψ em x , isto é, está na mesma direção do tempo para os elétrons e direção oposta para os pósitrons.

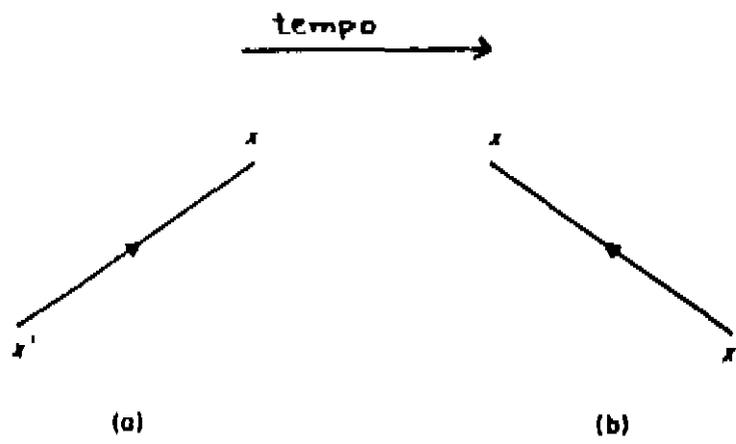


Figura 6.7: (a) $x_0 > x'_0$, propagação do elétron de x' até x .
 (b) $x'_0 > x_0$, propagação do pósitron de x até x' .

6.3 Propagador do Campo Eletromagnético

O campo eletromagnético, o qual descreve campos de radiação, é descrito pelo seguinte campo [3]:

$$A_\alpha(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\alpha^\lambda(k) \left(a^\lambda(k) e^{-ikx} + a^{\lambda\dagger}(k) e^{ikx} \right).$$

Suas partes de frequências positivas e negativas são:

$$A_\alpha^+(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\alpha^\lambda(k) a^\lambda(k) e^{-ikx} \quad (6.36)$$

$$A_\alpha^-(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\alpha^\lambda(k) a^{\lambda\dagger}(k) e^{ikx}. \quad (6.37)$$

Usando as seguintes relações de comutação (4.19) :

$$[a^\lambda(k), a^{\lambda'\dagger}(k')] = -2(2\pi)^3 k_0 g^{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'),$$

$$[a^\lambda(k), a^{\lambda'}(k')] = [a^{\lambda\dagger}(k), a^{\lambda'\dagger}(k')] = 0,$$

assim como as equações (6.36) e (6.37), temos

$$[A_\alpha^+(x), A_\beta^-(x')] = -g_{\alpha\beta} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-ik(x-x')},$$

$$[A_{\alpha}^{-}(x), A_{\beta}^{+}(x')] = g_{\alpha\beta} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{ik(x-x')},$$

$$[A_{\alpha}^{+}(x), A_{\beta}^{+}(x')] = [A_{\alpha}^{-}(x), A_{\beta}^{-}(x')] = 0.$$

Fazendo uso das relações anteriores, obtemos:

$$[A_{\alpha}(x), A_{\beta}(x')] = ig_{\alpha\beta} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 \omega_k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \text{sen}(\omega_k(x_0 - x'_0)). \quad (6.38)$$

Usando a equação (6.14), podemos expressar (6.38) como:

$$[A_{\alpha}(x), A_{\beta}(x')] = iD_{\alpha\beta}(x - x')$$

onde

$$D_{\alpha\beta}(x - x') = -g_{\alpha\beta} \Delta(x - x'). \quad (6.39)$$

Também sabemos que a representação integral de $\Delta(x - x')$ é (6.16), mas para o caso do campo eletromagnético, o fóton tem massa zero, portanto (6.39) fica como:

$$D_{\alpha\beta}(x - x') = \lim_{m \rightarrow 0} (-g_{\alpha\beta} \Delta(x - x')).$$

Como fizemos anteriormente, definimos o propagador de Feynman do fóton da seguinte maneira:

$$i\Delta_{F\alpha\beta}(x - x') \equiv \langle 0 | T \{ A_{\alpha}(x) A_{\beta}(x') \} | 0 \rangle.$$

Portanto, seguindo o mesmo procedimento para o cálculo do propagador de Feynman no caso do campo complexo de Klein-Gordon, tem-se:

$$D_{F\alpha\beta}(x - x') = \lim_{m \rightarrow 0} (-g_{\alpha\beta} \Delta_F(x - x')). \quad (6.40)$$

onde $\Delta_F(x - x')$ é dado pela equação (6.24), portanto $\Delta_{F\alpha\beta}(x - x')$ pode ser expressa por:

$$D_{F\alpha\beta}(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{-ik(x-x')} D_{F\alpha\beta}(k)$$

onde

$$D_{F\alpha\beta}(k) = \frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon}$$

é conhecido como o propagador do fóton no espaço de momento.

A interpretação física é similar ao caso complexo de Klein-Gordon e neste caso o propagador de fóton é representado graficamente por:



Figura 6.8:

Capítulo 7

Diagramas de Feynman

A aplicação do teorema de decomposição de Wick (5.25) à expansão de perturbação (5.18) produz o conjunto de todos os possíveis elementos $\langle f|S|i\rangle$ da matriz S , para uma hamiltoniana de interação $\mathcal{H}_I(x)$ dada.

Para cada produto normal, tem-se um elemento de matriz S que pode ser representado graficamente por intermédio dos diagramas de Feynman [1].

Por exemplo, na eletrodinâmica quântica a hamiltoniana de interação é dada por:

$$\mathcal{H}_I(x) = -e : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x) : .$$

De (5.18), consideramos a matriz S expandida como:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}^n$$

onde

$$\mathcal{S}^n = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n T\{\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)\dots\mathcal{H}_I(x_n)\}. \quad (7.1)$$

Para o caso $n = 1$, temos

$$\mathcal{S}^1 = \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 T\{\mathcal{H}_I(x_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 T\{-e : \bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu A_\mu(x_1)\psi(x_1) : \}.$$

O teorema de Wick nos dá que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 T\{-e : \bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu A_\mu(x_1)\psi(x_1) : \} = -e \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 : \bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu A_\mu(x_1)\psi(x_1) : .$$

Se colocamos cada campo em suas formas de frequências positivas e negativas, então obtemos:

$$\mathcal{S}^1 = -e \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \bar{\psi}^+(x_1)\gamma^\mu A_\mu^+(x_1)\psi^+(x_1) + e \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \psi^-(x_1)\gamma^\mu \bar{\psi}^+(x_1)A_\mu^+(x_1)$$

$$\begin{aligned}
& -e \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 A_{\mu}^{-}(x_1) \bar{\psi}^{+}(x_1) \gamma^{\mu} \psi^{+}(x_1) + e \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 A_{\mu}^{-}(x_1) \psi^{-}(x_1) \gamma^{\mu} \bar{\psi}^{+}(x_1) - \\
& -e \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \bar{\psi}^{-}(x_1) \gamma^{\mu} A_{\mu}^{+}(x_1) \psi^{+}(x_1) - e \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \bar{\psi}^{-}(x_1) \gamma^{\mu} \psi^{-}(x_1) A_{\mu}^{+}(x_1) - \\
& -e \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \bar{\psi}^{-}(x_1) A_{\mu}^{-}(x_1) \gamma^{\mu} \psi^{+}(x_1) - e \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \bar{\psi}^{-}(x_1) \gamma^{\mu} A_{\mu}^{-}(x_1) \psi^{-}(x_1).
\end{aligned}$$

A interpretação de cada uma destas integrais dá como resultado os chamados Diagramas de Feynman [1].

Primeira Integral: A interpretação desta integral indica que no ponto x_1 aniquila-se um pósitron, um elétron e um fóton,

O diagrama é o seguinte:



Figura 7.1: Aniquilação de um fóton e de um par.

Segunda Integral: A interpretação desta integral indica que no ponto x_1 aniquila-se um pósitron, um fóton e cria-se um pósitron.

O diagrama é o seguinte:

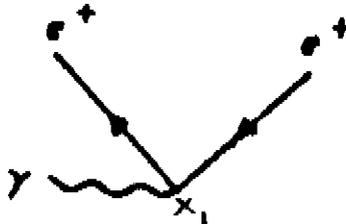


Figura 7.2: Aniquilação de um fóton e espalhamento de um pósitron.

Terceira Integral: A interpretação desta integral indica que no ponto x_1 aniquila-se um pósitron, um elétron e cria-se um fóton.

O diagrama é o seguinte:

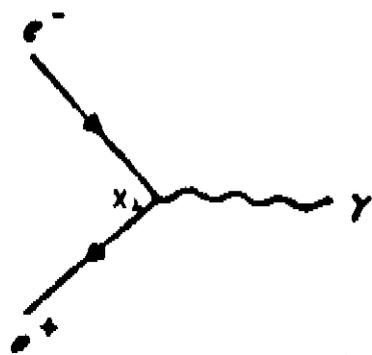


Figura 7.3: Criação de um fóton e aniquilação de pares.

Quarta Integral: A interpretação desta integral indica que no ponto x_1 aniquila-se um pósitron, cria-se um pósitron e um fóton.

O diagrama é o seguinte:

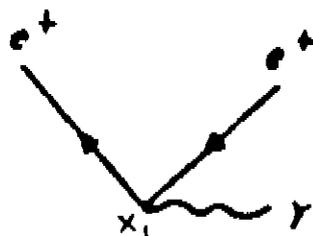


Figura 7.4: Aniquilação de um fóton e espalhamento de um pósitron.

Quinta Integral: A interpretação desta integral indica que no ponto x_1 aniquila-se um elétron, um fóton e cria-se um elétron.

O diagrama é o seguinte:



Figura 7.5: Aniquilação de um fóton e espalhamento de um elétron.

Sexta Integral: A interpretação desta integral indica que no ponto x_1 aniquila-se um fóton e cria-se um elétron e um pósitron.

O diagrama é o seguinte:

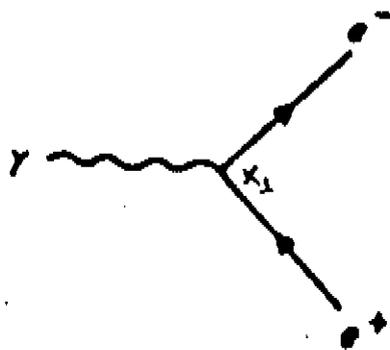


Figura 7.6: Aniquilação de um fóton e criação de pares.

Sétima Integral: A interpretação desta integral indica que no ponto x_1 aniquila-se um elétron e cria-se um elétron e um fóton.

O diagrama é o seguinte:

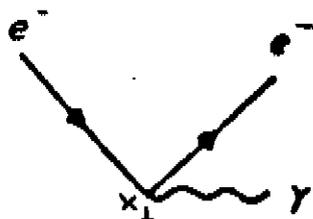


Figura 7.7: Aniquilação e criação de um elétron.

Oitava Integral: A interpretação desta integral indica que no ponto x_1 cria-se um pósitron, um elétron e um fóton.

O diagrama é o seguinte:



Figura 7.8: Criação de um fóton e um par.

Devemos dizer que todos os processos descritos acima não acontecem na realidade, porque nenhum deles conserva a energia e momento do processo físico real, na qual tem-se $k^2 = 0$ para fóton e $p^2 = m^2$ para fermions, portanto [1]:

$$\langle f | \mathcal{S}^1 | i \rangle = 0.$$

Para obter processos reais, devemos considerar o termo de segunda ordem na equação (7.1), isto é [1]:

$$\mathcal{S}^2 = \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 T \{ \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) \}.$$

Usando, o teorema de Wick, em $T \{ \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) \}$, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^2 = & -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2) : - \\ & -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \underbrace{\bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} : - \\ & -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \underbrace{\bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2)} \psi(x_2) : - \\ & -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \underbrace{\bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} : - \\ & -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \underbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2)} \psi(x_2) : - \\ & -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \underbrace{\bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} : - \\ & -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \underbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2)} \psi(x_2) : - \\ & -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \underbrace{\bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} : . \end{aligned} \quad (7.2)$$

Vamos, então, considerar todos os processos possíveis, para os seguintes estados iniciais:

$$|1_{e-}1_{e-}\rangle; |1_{e-}1_{e+}\rangle; |1_{e-}1_{\gamma}\rangle; |1_{e+}1_{\gamma}\rangle;$$

$$|1_{e+}1_{e+}\rangle; |1_{\gamma}1_{\gamma}\rangle; |1_{e-}\rangle; |1_{\gamma}\rangle; e |0\rangle.$$

Na equação (7.2), a primeira integral não representa nenhum processo físico real, e é igual aos processos descritos para $n = 1$, só que agora é em dois pontos independentes, x_1 e x_2 .

A segunda e terceira integral são termos idênticos, como podemos comprovar, se permutamos os operadores, isto é:

$$\underbrace{\bar{\psi}(x_1)\gamma^\alpha A_\alpha(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\beta A_\beta(x_2)\psi(x_2)} = \\ \bar{\psi}(x_2)\gamma^\beta A_\beta(x_2)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)\gamma^\alpha A_\alpha(x_1)\psi(x_1).$$

Quando se permutam os dois grupos $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x)$, se faz uma permutação par de operadores de fermions.

Fazendo $x_1 \leftrightarrow x_2$ na terceira integral e somando o resultado com a segunda integral obtemos:

$$S_A^2 = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 : \bar{\psi}(x_1)\gamma^\alpha A_\alpha(x_1)\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\beta A_\beta(x_2)\psi(x_2)} : . \quad (7.3)$$

A equação (7.3) tem uma contração de fermions, que é dada pela equação (6.35), que é o propagador de Feynman para o campo de Dirac e corresponde a um fermion virtual.

Para $t_2 < t_1$ podemos imaginar que um elétron virtual propaga-se de x_2 até x_1 .

Para $t_1 < t_2$ podemos imaginar que um pósitron virtual propaga-se de x_1 até x_2 .

Estes dois casos podem ser unidos e referem-se a um fermion virtual propagando-se de x_2 (associado a $\bar{\psi}$) até x_1 (associado a ψ). Além disso, (7.3) tem dois operadores de fermions e fótons não contraídos. Estes aniquilam ou criam partículas nos estados iniciais e finais e são chamados partículas externas.

Colocando os campos $\bar{\psi}(x)$, $\psi(x)$ e $A(x)$ em suas partes de frequências positivas e negativas, podemos obter do integrando de (7.3), a seguinte expressão:

$$: \bar{\psi}(x_1)\gamma^\alpha A_\alpha(x_1)\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\beta A_\beta(x_2)\psi(x_2)} :=$$

$$\begin{aligned}
& \bar{\psi}^+(x_1)\gamma^\alpha A_\alpha^+(x_1)\gamma^\beta A_\beta^+(x_2)\psi^+(x_2)iS_F(x_1-x_2)- \\
& -\psi^-(x_2)\bar{\psi}^+(x_1)\gamma^\alpha A_\alpha^+(x_1)\gamma^\beta A_\beta^+(x_2)iS_F(x_1-x_2)+ \\
& +\gamma^\beta A_\beta^-(x_2)\gamma^\alpha A_\alpha^+(x_1)\bar{\psi}^+(x_1)\psi^+(x_2)iS_F(x_1-x_2)- \\
& -\psi^-(x_2)\gamma^\beta A_\beta^-(x_2)\bar{\psi}^+(x_1)\gamma^\alpha A_\alpha^+(x_1)iS_F(x_1-x_2)+ \\
& +\gamma^\alpha A_\alpha^-(x_1)\gamma^\beta A_\beta^+(x_2)\bar{\psi}^+(x_1)\psi^+(x_2)iS_F(x_1-x_2)- \\
& -\psi^-(x_2)\gamma^\alpha A_\alpha^-(x_1)\bar{\psi}^+(x_1)\gamma^\beta A_\beta^+(x_2)iS_F(x_1-x_2)+ \\
& +\gamma^\alpha A_\alpha^-(x_1)\gamma^\beta A_\beta^-(x_2)\bar{\psi}^+(x_1)\psi^+(x_2)iS_F(x_1-x_2)- \\
& -\psi^-(x_2)\gamma^\alpha A_\alpha^-(x_1)\gamma^\beta A_\beta^-(x_2)\bar{\psi}^+(x_1)iS_F(x_1-x_2)+ \\
& +\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\alpha A_\alpha^+(x_1)\gamma^\beta A_\beta^+(x_2)\psi^+(x_2)iS_F(x_1-x_2)+ \\
& +\bar{\psi}^-(x_1)\psi^-(x_2)\gamma^\alpha A_\alpha^+(x_1)\gamma^\beta A_\beta^+(x_2)iS_F(x_1-x_2)+ \\
& +\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\beta A_\beta^-(x_2)\gamma^\alpha A_\alpha^+(x_1)\psi^+(x_2)iS_F(x_1-x_2)+ \\
& +\bar{\psi}^-(x_1)\psi^-(x_2)\gamma^\beta A_\beta^-(x_2)\gamma^\alpha A_\alpha^+(x_1)iS_F(x_1-x_2)+ \\
& +\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\alpha A_\alpha^-(x_1)\gamma^\beta A_\beta^+(x_2)\psi^+(x_2)iS_F(x_1-x_2)+ \\
& +\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\alpha A_\alpha^-(x_1)\psi^-(x_2)\gamma^\beta A_\beta^+(x_2)iS_F(x_1-x_2)+ \\
& +\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\alpha A_\alpha^-(x_1)\gamma^\beta A_\beta^-(x_2)\psi^+(x_2)iS_F(x_1-x_2)+ \\
& +\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\alpha A_\alpha^-(x_1)\gamma^\beta A_\beta^-(x_2)\psi^-(x_2)iS_F(x_1-x_2).
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Escolheremos de (7.4) só os termos que contribuem a processos físicos reais.

(a) **ESPALHAMENTO COMPTON** (estado inicial $|1_{e^-} 1_{\gamma}\rangle$).

Para este caso necessitamos da parte de frequência positiva de $\psi(x_2)$, que aniquila o elétron inicial e da parte de frequência negativa de $\psi(x_1)$, que cria o elétron final. Tem se o mesmo para $A_{\alpha}(x_1)$ e $A_{\beta}(x_2)$.

Então, os termos que contribuem a este processo são:

$$S_a = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^{\alpha} i S_F(x_1 - x_2) \gamma^{\beta} A_{\alpha}^-(x_1) A_{\beta}^+(x_2) \psi^+(x_2)$$

$$S_b = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^{\alpha} i S_F(x_1 - x_2) \gamma^{\beta} A_{\beta}^-(x_2) A_{\alpha}^+(x_1) \psi^+(x_2).$$

Além disso, temos:

$$S^2(\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-) = S_a + S_b. \quad (7.5)$$

Os correspondentes diagramas são:

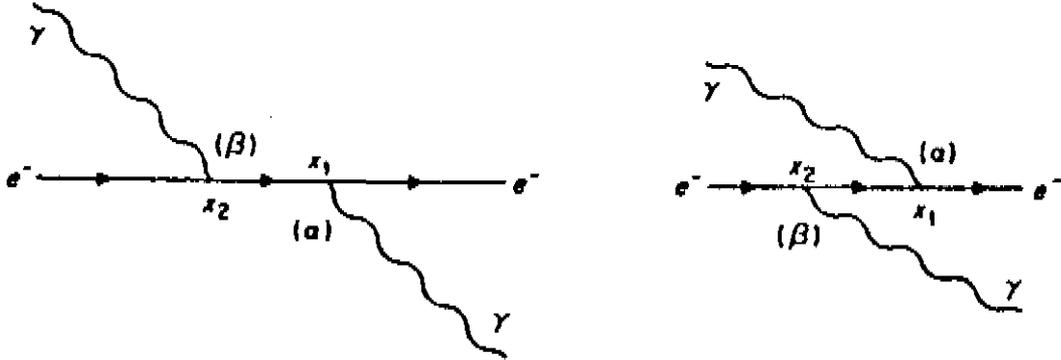


Figura 7.9: Espalhamento Compton.

(b) **ESPALHAMENTO COMPTON PARA PÓSITRONS** (estado inicial $|1_{e^+} 1_{\gamma}\rangle$)

Para este caso, os termos que contribuem são:

$$S_c = +e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \psi^-(x_1) \gamma^{\beta} i S_F(x_1 - x_2) \gamma^{\alpha} A_{\alpha}^-(x_1) A_{\beta}^+(x_2) \bar{\psi}^+(x_2)$$

$$S_d = +e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \psi^-(x_1) \gamma^{\beta} i S_F(x_1 - x_2) \gamma^{\alpha} A_{\beta}^-(x_2) A_{\alpha}^+(x_1) \bar{\psi}^+(x_2).$$

Os correspondentes diagramas são:

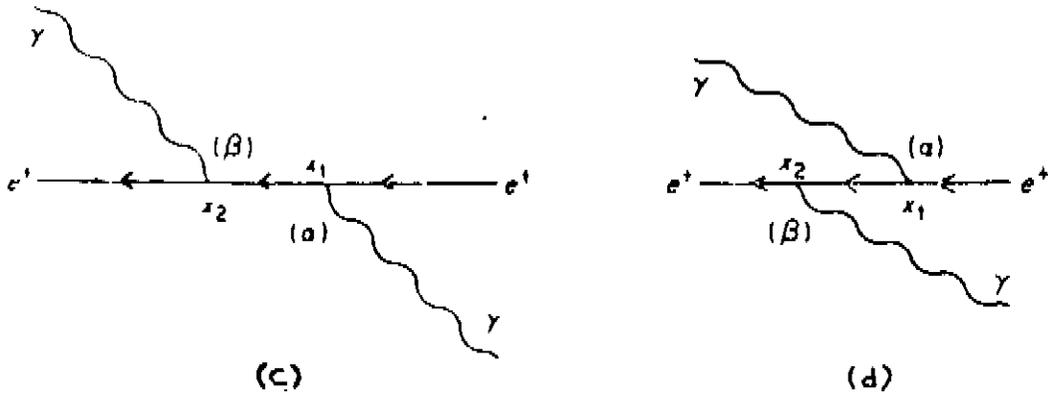


Figura 7.10: Espalhamento Compton para pósitrons.

(c) **ANILQUILAÇÃO DE PARES** (estado inicial $|1_{e^+} 1_{e^-}\rangle$)

O termo que contribui é:

$$S_e = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 A_{\alpha}^{-}(x_1) \gamma^{\alpha} i S_F(x_1 - x_2) \gamma^{\beta} A_{\beta}^{-}(x_2) \bar{\psi}^{+}(x_1) \bar{\psi}^{+}(x_2) \quad (7.6)$$

O correspondente diagrama é:

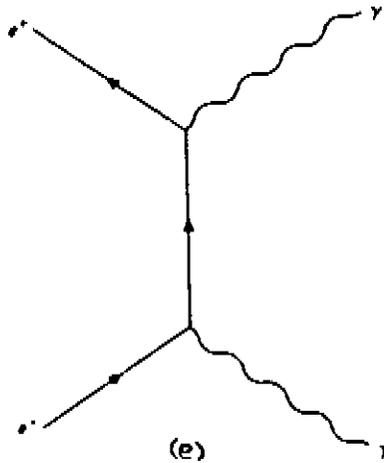


Figura 7.11: Aniquilação de Pares.

(c) **CRIAÇÃO DE PARES** (estado inicial $|1_{\gamma} 1_{\gamma}\rangle$)

O termo que contribui é:

$$S_f = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \bar{\psi}^{-}(x_1) \gamma^{\alpha} i S_F(x_1 - x_2) \gamma^{\beta} \psi^{-}(x_2) A_{\alpha}^{+}(x_1) A_{\beta}^{+}(x_2)$$

ou seja, a amplitude do processo é dada por:

$$S^2(\gamma\gamma \rightarrow e^{-}e^{+}) = S_f.$$

O correspondente diagrama é:

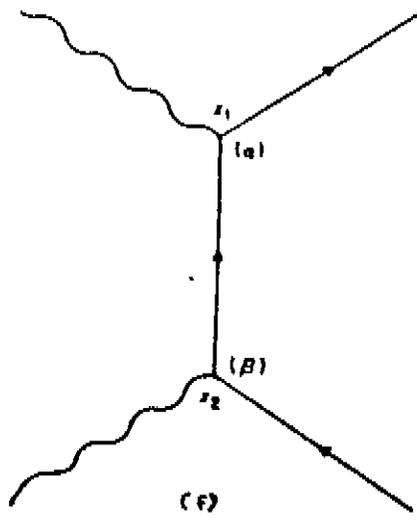


Figura 7.12: Criação de Pares.

Seguidamente, consideramos o quarto termo da equação (7.2), isto é:

$$S_B^2 = -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2) : . \quad (7.7)$$

Esta equação tem quatro operadores de fermion não contraídos, portanto o processo que descreve é o espalhamento fermion-fermion. O termo de contração fóton-fóton, descreve o propagador de fóton.

De (7.7), temos

$$\begin{aligned} & : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2) : = \\ & \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\alpha \psi^+(x_1) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) - \\ & - \psi^-(x_2) \gamma^\beta \bar{\psi}^+(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\alpha \psi^+(x_1) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) + \\ & + \bar{\psi}^-(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\alpha \psi^+(x_1) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) + \\ & + \bar{\psi}^-(x_2) \gamma^\beta \psi^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\alpha \psi^+(x_1) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) - \\ & - \psi^-(x_1) \gamma^\alpha \bar{\psi}^+(x_1) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) - \\ & - \psi^-(x_1) \gamma^\alpha \psi^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\beta \bar{\psi}^+(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) + \\ & + \bar{\psi}^-(x_2) \gamma^\alpha \psi^-(x_1) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\beta \psi^+(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\psi^-(x_1)\gamma^\alpha\bar{\psi}^-(x_2)\psi^-(x_2)\gamma^\beta\bar{\psi}^+(x_1)iD_{F\alpha\beta}(x_1-x_2)+ \\
& +\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\alpha\psi^+(x_1)\bar{\psi}^+(x_2)\gamma^\beta\psi^+(x_2)iD_{F\alpha\beta}(x_1-x_2)+ \\
& +\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\alpha\psi^-(x_2)\bar{\psi}^+(x_2)\gamma^\beta\psi^+(x_1)iD_{F\alpha\beta}(x_1-x_2)- \\
& -\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\alpha\bar{\psi}^-(x_2)\psi^+(x_1)\gamma^\beta\psi^+(x_2)iD_{F\alpha\beta}(x_1-x_2)+ \\
& +\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\alpha\bar{\psi}^-(x_2)\psi^-(x_2)\gamma^\beta\psi^+(x_1)iD_{F\alpha\beta}(x_1-x_2)+ \\
& +\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\alpha\psi^-(x_1)\bar{\psi}^+(x_2)\gamma^\beta\psi^+(x_2)iD_{F\alpha\beta}(x_1-x_2)- \\
& -\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\alpha\psi^-(x_1)\psi^-(x_2)\gamma^\beta\bar{\psi}^+(x_2)iD_{F\alpha\beta}(x_1-x_2)+ \\
& +\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\alpha\psi^-(x_1)\bar{\psi}^-(x_2)\gamma^\beta\psi^+(x_2)iD_{F\alpha\beta}(x_1-x_2)- \\
& -\psi^-(x_1)\gamma^\alpha\bar{\psi}^-(x_1)\bar{\psi}^-(x_2)\gamma^\beta\psi^-(x_2)iD_{F\alpha\beta}(x_1-x_2). \tag{7.8}
\end{aligned}$$

Da equação (7.8) escolheremos só os termos que contribuem a processos físicos reais.

(a) **ESPALHAMENTO DE MOLLER** (estado inicial $|1_e-1_{e-}\rangle$)

Neste caso o termo que contribui é:

$$S_a = \frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\alpha\bar{\psi}^-(x_2)\psi^+(x_1)\gamma^\beta\psi^+(x_2)iD_{F\alpha\beta}(x_1-x_2)d^4x_1d^4x_2.$$

Por causa da identidade dos eletrons, vamos identificar os eletrons iniciais e finais com 1, 2 e 1', 2' respectivamente, desta maneira da equação acima temos quatro contribuições ao processo, mas estas quatro contribuições constituem dois pares que são diferentes só pela troca das variáveis de integração $x_1 \leftrightarrow x_2$. Portanto, considerando só um destes pares e multiplicando o resultado pelo fator 2, temos que os termos que contribuem são:

$$S_a = +\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_{1'}(x_1) \gamma^\alpha \bar{\psi}_{2'}(x_2) \psi^+(x_1) \gamma^\beta \psi^+(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) d^4 x_1 d^4 x_2,$$

$$S_b = -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_{1'}(x_2) \gamma^\alpha \bar{\psi}_{2'}(x_1) \psi^+(x_1) \gamma^\beta \psi^+(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) d^4 x_1 d^4 x_2.$$

Onde, o sinal negativo é devido à estatística de Fermi, na qual os campos são antissimétricos, com o permutação dos elétrons finais.

Então:

$$S^2(e^-e^- \rightarrow e^-e^-) = S_a + S_b. \quad (7.9)$$

Os correspondentes diagramas são:

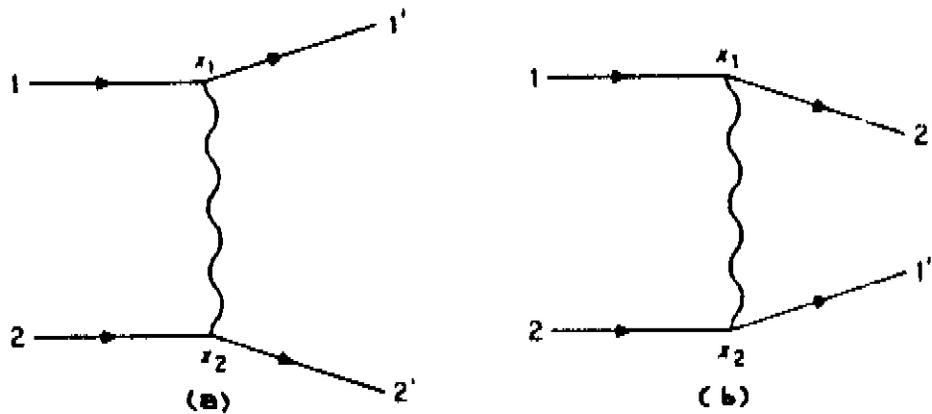


Figura 7.13: Espalhamento de Moller.

(b) **ESPALHAMENTO DE BHABHA** (estado inicial \$|1_{e^-} 1_{e^+}\rangle\$)

Neste caso os termos que contribuem são:

$$S_c = -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}^-(x_2) \gamma^\beta \psi^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\alpha \psi^+(x_1) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) d^4 x_1 d^4 x_2.$$

$$S_d = -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}^-(x_2) \gamma^\alpha \psi^-(x_1) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\beta \psi^+(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) d^4 x_1 d^4 x_2.$$

$$S_e = -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\alpha \psi^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_1) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) d^4 x_1 d^4 x_2.$$

$$S_f = -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\alpha \psi^-(x_1) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) d^4 x_1 d^4 x_2.$$

Observa-se que a segunda e terceira integral constituem um par que são diferentes só pela troca das variáveis de integração $x_1 \leftrightarrow x_2$, isto é, representam um mesmo diagrama; isto mesmo acontece com as outras duas integrais. Portanto consideramos só S_e e S_f , as quais serão multiplicadas pelo fator 2, obtendo-se:

$$S_{d'} = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\alpha \psi^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_1) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) d^4 x_1 d^4 x_2.$$

$$S_{e'} = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\alpha \psi^-(x_1) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) d^4 x_1 d^4 x_2.$$

Portanto:

$$S^2(e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-) = S_{d'} + S_{e'}. \quad (7.10)$$

Os correspondentes diagramas são:

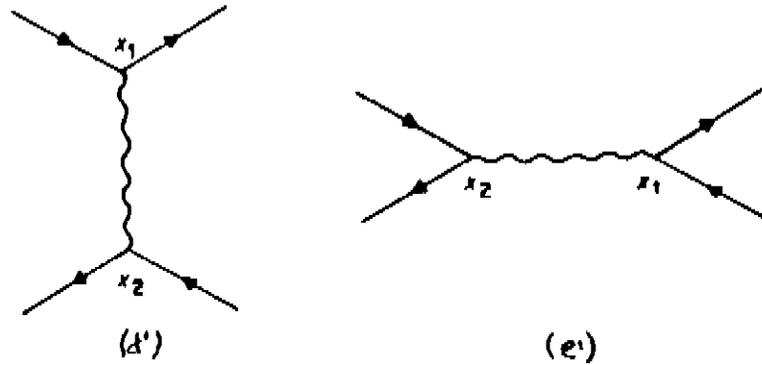


Figura 7.14: Espalhamento de Bhabha.

(c) ESPALHAMENTO PÓSITRON-PÓSITRON (estado inicial $|1_{e^+} 1_{e^-}\rangle$)

Neste caso o termo que contribui é:

$$S_f = -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^-(x_1) \gamma^\alpha \psi^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\beta \bar{\psi}^+(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) d^4 x_1 d^4 x_2.$$

Este caso é similar ao caso do espalhamento de Moller, portanto os termos que contribuem são:

$$S_f = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{1'}^-(x_1) \gamma^\alpha \psi_{2'}^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\beta \bar{\psi}^+(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) d^4 x_1 d^4 x_2.$$

$$S_g = +e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{2'}^-(x_1) \gamma^\alpha \psi_{1'}^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\beta \bar{\psi}^+(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) d^4 x_1 d^4 x_2.$$

Os correspondentes diagramas são:

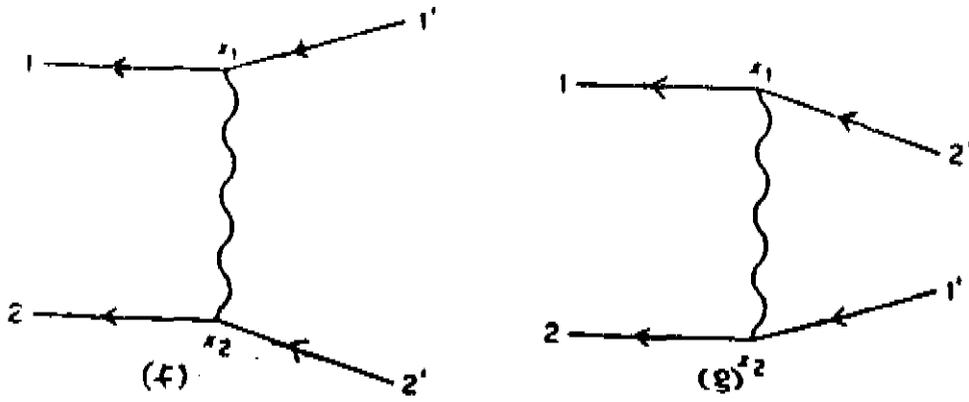


Figura 7.15: Espalhamento Póstron-Póstron.

Consideraremos agora o quinto e sexto termos da equação (7.2). Este caso é similar ao caso do segundo e terceiro termos, portanto temos o seguinte resultado:

$$S_C^2 = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2) : . \quad (7.11)$$

A equação (7.11) tem dois operadores de fermion não contraídos, pelo qual se tem dois processos, isto é, um fermion no estado inicial e final, que pode ser um elétron ou um póstron.

Do integrando de (7.11), temos

$$\begin{aligned} & : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2) : = \\ & \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\alpha i S_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) - \\ & - \psi^-(x_2) \gamma^\alpha i S_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \bar{\psi}^+(x_1) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) + \\ & + \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\alpha i S_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) + \\ & + \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\alpha i S_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \psi^-(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (7.12)$$

De (7.12) escolhemos o termo que contribui ao seguinte processo:

AUTO-ENERGIA DO ELÉTRON (estado inicial $|1_{e^-}\rangle$)

De (7.12), temos

$$S^2(c^- \rightarrow e^-) = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\alpha iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) \times iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2). \quad (7.13)$$

A equação anterior representa a modificação das propriedades de um elétron nu devido a sua interação com o campo eletromagnético. É um processo que converte um elétron nu em um elétron físico. Esta interação muda a energia do sistema, isto é, a massa do elétron físico quando comparada com aquela do elétron nu.

O diagrama correspondente é:



Figura 7.16: Auto-energia do Elétron.

Considerando agora o sétimo termo da equação (7.2), temos

$$S_D^2 = -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 : \underbrace{\bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} : . \quad (7.14)$$

De (7.14), temos:

$$\begin{aligned} & : \underbrace{\bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} : = \\ & -iS_F(x_2 - x_1) \gamma^\alpha iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) A_\alpha^+(x_1) - \\ & -iS_F(x_2 - x_1) \gamma^\alpha iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) A_\alpha^+(x_1) - \\ & -iS_F(x_2 - x_1) \gamma^\alpha iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\alpha^-(x_1) A_\beta^+(x_2) - \end{aligned}$$

$$-iS_F(x_2 - x_1)\gamma^\alpha iS_F(x_1 - x_2)\gamma^\beta A_\alpha^-(x_1)A_\beta^-(x_2). \quad (7.15)$$

De (7.15) escolhemos o termo que contribui ao seguinte processo:

AUTO-ENERGIA DO FÓTON OU POLARIZAÇÃO DO VÁCUO (estado inicial $|1_\gamma\rangle$)

De (7.15), temos que os termos segundo e terceiro contribuem a este processo, mas estes termos são diferentes só pela troca das variáveis de integração $x_1 \leftrightarrow x_2$, isto é, representam o mesmo diagrama. Portanto, considerando só um deles e multiplicando pelo fator 2, obtemos:

$$S^2(\gamma \rightarrow \gamma) = e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 iS_F(x_2 - x_1)\gamma^\alpha iS_F(x_1 - x_2)\gamma^\beta \times \\ \times A_\alpha^-(x_1)A_\beta^+(x_2). \quad (7.16)$$

Na equação (7.16), o fóton pode criar um par virtual elétron-pósitron, que posteriormente é aniquilado, devido à interação entre o campo eletromagnético e o campo elétron-pósitron. Um campo eletromagnético externo modificará a distribuição destes pares virtuais elétron-pósitron, isto é, “polarizará o vácuo” da mesma maneira que a polarização de um dielétrico. Por esta razão, os diagramas de auto-energia do fóton são chamados de polarização do vácuo.

O correspondente diagrama é:

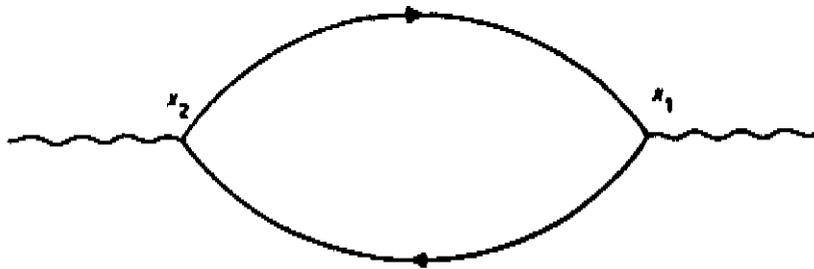


Figura 7.17: Polarização do Vácuo.

Por último, consideramos o oitavo termo da equação (7.2)

$$S_E^2 = -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 : \underbrace{\bar{\psi}(x_1)\gamma^\alpha A_\alpha(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\beta A_\beta(x_2)\psi(x_2)} : \quad (7.17)$$

Este termo não tem linhas externas e, como consequência, não causa nenhuma transição. Para este caso, o estado inicial é $|0\rangle$.

A correspondente contribuição é:

$$S_E^2 = -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 iS_F(x_2 - x_1) \gamma^\alpha iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \gamma^\beta iS_F(x_1 - x_2) \quad (7.18)$$

O diagrama correspondente é:

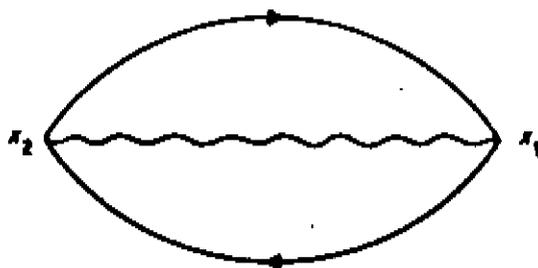


Figura 7.18:

Capítulo 8

Elementos da Matriz S

A matriz S gera uma amplitude de transição ($|i\rangle \rightarrow |f\rangle$) particular para cada ordem dada na teoria de perturbação. Os estados $|i\rangle$ e $|f\rangle$ são especificados pelos momentos e spins da partícula, além das propriedades de polarização presentes nos estados inicial e final.

O cálculo dos elementos da matriz S , com $|i\rangle$ e $|f\rangle$ especificando os autoestados de momento das partículas presentes, correspondem à transformada de Fourier dos campos no espaço de momentos [1].

Para os propagadores, estas transformadas de Fourier são dadas pelas seguintes equações:

$$\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)} = iS_F(x_1 - x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p iS_F(p) e^{-ip(x_1 - x_2)},$$

$$\underbrace{A^\alpha(x_1)A^\beta(x_2)} = iD_F^{\alpha\beta}(x_1 - x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k iD_F^{\alpha\beta}(k) e^{-ik(x_1 - x_2)}$$

onde

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon},$$

$$D_F^{\alpha\beta}(k) = \frac{-g^{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon}.$$

As expansões de Fourier para os campos não contraídos são:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\nu=1,2} \left(b_\nu(k) \mathcal{U}^\nu(k) e^{-ikx} + d_\nu^\dagger(k) \mathcal{V}^\nu(k) e^{ikx} \right)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\nu=1,2} \left(b_\nu^\dagger(k) \bar{\mathcal{U}}^\nu(k) e^{ikx} + d_\nu(k) \bar{\mathcal{V}}^\nu(k) e^{-ikx} \right)$$

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \left(a^\lambda(k) e^{-ikx} + a^{\lambda\dagger}(k) e^{ikx} \right)$$

de onde as partes de frequências positivas e negativas dos campos são dadas por:

$$\psi^+(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\nu=1,2} b_\nu(k) \mathcal{U}^\nu(k) e^{-ikx},$$

$$\psi^-(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\nu=1,2} d_\nu^\dagger(k) \mathcal{V}^\nu(k) e^{ikx},$$

$$\bar{\psi}^+(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\nu=1,2} d_\nu(k) \bar{\mathcal{V}}^\nu(k) e^{-ikx},$$

$$\bar{\psi}^-(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\nu=1,2} b_\nu^\dagger(k) \bar{\mathcal{U}}^\nu(k) e^{ikx},$$

$$A_\mu^+(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) a^\lambda(k) e^{-ikx},$$

$$A_\mu^-(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) a^{\lambda\dagger}(k) e^{ikx}.$$

Quando os operadores $\psi^+(x)$, $\bar{\psi}^+(x)$ e $A^+(x)$ são aplicados sobre $|i\rangle$, se obtém o vácuo $|0\rangle$. Vamos supor que os estados iniciais são os seguintes [1]:

$$|e^{-\vec{k}\nu}\rangle = b_\nu^\dagger(k)|0\rangle,$$

$$|e^+ \vec{k} \nu\rangle = d_\nu^\dagger(k)|0\rangle,$$

$$|\gamma \vec{k} \lambda\rangle = a^{\lambda\dagger}(k)|0\rangle,$$

para $\nu = 1, 2$ e $\lambda = 0, 1, 2, 3$.

As expressões da direita indicam como os estados podem ser obtidos.

Então temos que

$$\psi^+(x)|e^- \vec{k} \nu\rangle = \frac{m}{(2\pi)^3 k_0} b_\nu(k) \mathcal{U}^\nu(k) e^{-ikx} |e^- \vec{k} \nu\rangle,$$

onde $\psi^+(x)$ tem esta forma, porque consideramos que o momento inicial e spin são conhecidos.

O resultado da equação anterior é

$$\psi^+(x)|e^- \vec{k} \nu\rangle = \frac{m}{(2\pi)^3 k_0} \mathcal{U}^\nu(k) e^{-ikx} |0\rangle.$$

Da mesma maneira temos para:

$$\bar{\psi}^+(x)|e^+ \vec{k} \nu\rangle = \frac{m}{(2\pi)^3 k_0} \bar{\mathcal{V}}^\nu(k) e^{-ikx} |0\rangle,$$

$$A_\mu^+(x)|\gamma \vec{k} \lambda\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3 2k_0} \varepsilon_\mu^\lambda(k) e^{-ikx} |0\rangle.$$

Por outro lado, quando os operadores $\bar{\psi}^-(x)$, $\psi^-(x)$ e $A_\mu^-(x)$ são aplicados sobre $|0\rangle$, se obtém o estado final $|f\rangle$.

Neste caso temos:

$$\psi^-(x)|0\rangle = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\nu=1,2} \mathcal{V}^\nu(k) e^{ikx} |e^+ \vec{k} \nu\rangle,$$

$$\bar{\psi}^-(x)|0\rangle = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\nu=1,2} \bar{\mathcal{U}}^\nu(k) e^{ikx} |e^- \vec{k} \nu\rangle,$$

$$A_\mu^-(x)|0\rangle = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu^\lambda(k) e^{ikx} |\gamma \vec{k} \lambda\rangle,$$

onde as somatórias são tomadas porque o momento final e o spin não estão definidos.

8.1 Estudo das Amplitudes para Diferentes Processos

(1) **ESPALHAMENTO COMPTON** ($\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$) Neste caso, temos que:

O estado inicial : $|i\rangle = |\gamma \vec{k} \lambda\rangle \otimes |e^- \vec{p} \nu\rangle$

O estado final : $|f\rangle = |\gamma \vec{k}' \lambda'\rangle \otimes |e^- \vec{p}' \nu'\rangle,$

e usando a equação (7.5) obtemos:

$$\langle f|S^2(\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-)|i\rangle = \langle f|S_a|i\rangle + \langle f|S_b|i\rangle.$$

O cálculo do primeiro termo do lado direito da equação anterior, é:

$$\langle f|S_a|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - k - p) \frac{m}{(2\pi)^6 2k_0 p_0} \sum_{\nu, \nu'=1,2} \sum_{\lambda, \lambda'=0, \dots, 3} \mathcal{M}_a$$

onde

$$\mathcal{M}_a = -e^2 \bar{U}^{\nu'}(p') \not{\epsilon}^{\lambda'}(k') i S_F(p' + k') \not{\epsilon}^{\lambda}(k) U^{\nu}(p).$$

Para o segundo termo do lado direito, temos:

$$\langle f|S_b|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - k - p) \frac{m}{(2\pi)^6 2k_0 p_0} \sum_{\nu, \nu'=1,2} \sum_{\lambda, \lambda'=0, \dots, 3} \mathcal{M}_b$$

onde

$$\mathcal{M}_b = -e^2 \bar{U}^{\nu'}(p') \not{\epsilon}^{\lambda}(k) i S_F(p' - k) \not{\epsilon}^{\lambda'}(k') U^{\nu}(p).$$

O resultado final é:

$$\begin{aligned} \langle f|S^2(\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-)|i\rangle &= (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - k - p) \frac{m}{(2\pi)^6 2k_0 p_0} \\ &\times \sum_{\nu, \nu'=1,2} \sum_{\lambda, \lambda'=0, \dots, 3} (\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b). \end{aligned} \quad (8.1)$$

(2) **ANIQUILAÇÃO DE PARES** ($e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$) Neste caso, tem-se:

O estado inicial : $|i\rangle = |e^- \vec{p} \nu\rangle \otimes |e^+ \vec{p}' \nu'\rangle$

O estado final : $|f\rangle = |\gamma \vec{k} \lambda\rangle \otimes |\gamma \vec{k}' \lambda'\rangle$,

e usando a equação (7.6) obtemos:

$$\langle f|S^2(e^-e^+ \rightarrow \gamma\gamma)|i\rangle = \langle f|S_e|i\rangle$$

O cálculo deste termo é:

$$\langle f|S_e|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k + k' - p - p') \frac{m^2}{(2\pi)^6 2p'_0 p_0} \sum_{\lambda, \lambda'=0, \dots, 3} \mathcal{M} \quad (8.2)$$

onde

$$\mathcal{M} = -e^2 \bar{V}^{\nu'}(p') \not{\epsilon}^\lambda(k) i S_F(p - k') \not{\epsilon}^{\lambda'}(k') \mathcal{U}^\nu(p).$$

(3) **ESPALHAMENTO ELÉTRON-ELÉTRON** ($e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$) Neste caso, temos:

O estado inicial : $|i\rangle = |e^- \vec{p}_1 \nu\rangle \otimes |e^- \vec{p}_2 \lambda\rangle$

O estado final : $|f\rangle = |e^- \vec{p}'_1 \nu'\rangle \otimes |e^- \vec{p}'_2 \lambda'\rangle$,

e usando a equação (7.9), obtemos:

$$\langle f|S^2(e^-e^- \rightarrow e^-e^-)|i\rangle = \langle f|S_a|i\rangle + \langle f|S_b|i\rangle.$$

O cálculo do primeiro termo é:

$$\langle f|S_a|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \frac{m^2}{(2\pi)^6 2(p_0)_1 (p_0)_2} \sum_{\lambda', \nu'=1, 2} \mathcal{M}_a$$

onde

$$\mathcal{M}_a = e^2 \bar{U}^{\nu'}(p'_1) \gamma^\alpha \mathcal{U}^\nu(p_1) i D_{F\alpha\beta}(p_2 - p'_2) \bar{U}^{\lambda'}(p'_2) \gamma^\beta \mathcal{U}^\lambda(p_2).$$

O cálculo do segundo termo é:

$$\langle f|S_b|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p'_2 - p'_1 - p_1 - p_2) \frac{m^2}{(2\pi)^6 2(p_0)_1 (p_0)_2} \sum_{\lambda', \nu'=1, 2} \mathcal{M}_b$$

onde

$$\mathcal{M}_b = -e^2 \bar{U}^{\lambda'}(p'_2) \gamma^\alpha \mathcal{U}^\nu(p_1) i D_{F\alpha\beta}(p_2 - p'_1) \bar{U}^{\nu'}(p'_1) \gamma^\beta \mathcal{U}^\lambda(p_2).$$

O resultado final é:

$$\begin{aligned} \langle f|S^2(e^-e^- \rightarrow e^-e^-)|i\rangle &= (2\pi)^4\delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2)\frac{m^2}{(2\pi)^6 2(p_0)_1(p_0)_2} \\ &\times \sum_{\lambda',\nu'=1,2} (\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b). \end{aligned} \quad (8.3)$$

(4) **ESPALHAMENTO ELÉTRON-PÓSITRON**($e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$) Neste caso, temos:

O estado inicial : $|i\rangle = |e^- \vec{p}_1 \nu\rangle \otimes |e^+ \vec{p}_2 \lambda\rangle$

O estado final : $|f\rangle = |e^- \vec{p}'_1 \nu'\rangle \otimes |e^+ \vec{p}'_2 \lambda'\rangle$,

e usando a equação (7.10), obtemos:

$$\langle f|S^2(e^-e^- \rightarrow e^-e^-)|i\rangle = \langle f|S_{d'}|i\rangle + \langle f|S_{e'}|i\rangle.$$

O cálculo do primeiro termo é:

$$\langle f|S_{d'}|i\rangle = (2\pi)^4\delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2)\frac{m^2}{(2\pi)^6 2(p_0)_1(p_0)_2} \sum_{\lambda',\nu'=1,2} \mathcal{M}_{d'}$$

onde

$$\mathcal{M}_{d'} = e^2 \bar{U}^{\nu'}(p'_1) \gamma^\alpha U^\nu(p_1) i D_{F\alpha\beta}(p_1 + p_2) \bar{V}^\lambda(p_2) \gamma^\beta V^{\lambda'}(p'_2).$$

O cálculo do segundo termo é:

$$\langle f|S_{e'}|i\rangle = (2\pi)^4\delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2)\frac{m^2}{(2\pi)^6 2(p_0)_1(p_0)_2} \sum_{\lambda',\nu'=1,2} \mathcal{M}_{e'}$$

onde

$$\mathcal{M}_{e'} = -e^2 \bar{U}^{\nu'}(p'_1) \gamma^\alpha V^{\lambda'}(p'_2) i D_{F\alpha\beta}(p_2 - p'_2) \bar{V}^\lambda(p_2) \gamma^\beta U^\nu(p_1).$$

O resultado final é:

$$\begin{aligned} \langle f|S^2(e^-e^+ \rightarrow e^-e^+)|i\rangle &= (2\pi)^4\delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2)\frac{m^2}{(2\pi)^6 2(p_0)_1(p_0)_2} \\ &\times \sum_{\lambda',\nu'=1,2} (\mathcal{M}_{d'} + \mathcal{M}_{e'}). \end{aligned} \quad (8.4)$$

(5) **AUTO-ENERGIA DO ELÉTRON** ($e^- \rightarrow e^-$) Neste caso, temos:

O estado inicial : $|i\rangle = |e^- \vec{p}_1 \nu\rangle$

O estado final : $|f\rangle = |e^- \vec{p}_2 \nu'\rangle$,

e usando a equação (7.13), obtemos:

$$\langle f|S^2(e^- \rightarrow e^-)|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_1) \frac{m}{(2\pi)^3 (p_0)_1} \sum_{\nu'=1,2} \mathcal{M} \quad (8.5)$$

onde

$$\mathcal{M} = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k i D_{F\alpha\beta}(k) \bar{U}^{\nu'}(p_2) \gamma^\alpha i S_F(p_1 - k) \gamma^\beta U^\nu(p_1).$$

(6) **POLARIZAÇÃO DO VÁCUO** ($\gamma \rightarrow \gamma$) Neste caso, temos:

O estado inicial é : $|i\rangle = |\gamma \vec{k}_1 \lambda\rangle$

O estado final é : $|f\rangle = |\gamma \vec{k}_2 \lambda'\rangle$,

e usando a equação (7.16), temos que:

$$\langle f|S^2(\gamma \rightarrow \gamma)|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k_1 - k_2) \frac{1}{(2\pi)^3 2(k_0)_1} \sum_{\lambda'=0}^3 \mathcal{M} \quad (8.6)$$

onde

$$\mathcal{M} = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \varepsilon_\alpha^{\lambda'}(k_2) \int d^4 p i S_F(p) \gamma^\alpha i S_F(p - k_1) \gamma^\beta \varepsilon_\beta^\lambda(k_1).$$

(7) **PARA O VÁCUO** Neste caso, temos:

O estado inicial : $|i\rangle = |0\rangle$

O estado final : $|f\rangle = |0\rangle$,

e usando a equação (7.18), obtemos:

$$\langle f|S_E^2|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2) \mathcal{M} \quad (8.7)$$

onde

$$\mathcal{M} = -\frac{e^2}{(2\pi)^8 2!} \int d^4 p d^4 q i S_F(p) \gamma^\alpha i D_{F\alpha\beta}(p - q) \gamma^\beta i S_F(q).$$

As formas explícitas de $S_F(p)$ e $D_{F\alpha\beta}$ substituídas nas equações (8.1), (8.2), (8.3), (8.4), (8.5), (8.6) e (8.7), mostram que as amplitudes calculadas acima têm polos, para $p \rightarrow \infty$. No próximo capítulo estudaremos a maneira de solucionar este problema.

Capítulo 9

Regularização

No cálculo das amplitudes de Feynman em Eletrodinâmica Quântica (QED) encontra-se que os propagadores [1]:

$$S_F(p) = \frac{p + m}{p^2 + m^2 + i\varepsilon},$$

$$D_{F\alpha\beta}(k) = \frac{-g^{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon},$$

levam a que as amplitudes não sejam bem definidas. Em outras palavras, vamos ter integrais divergentes.

Para fazer com que, de algum modo, estas integrais divergentes sejam finitas introduz-se um parâmetro de convergência adequado, o qual geralmente é conhecido como parâmetro de regularização. Este procedimento matemático não é único, ou seja, existe uma variedade de esquemas de regularização, e as integrais regularizadas dependem do formalismo utilizado [8]. No entanto, no limite quando a teoria original é restabelecida, os resultados físicos finais serão independentes do método de regularização utilizado, ou seja, diferentes métodos de regularização devem levar aos mesmos resultados.

As teorias baseadas nas integrais regularizadas muitas vezes violam alguns dos requerimentos físicos, como a invariância de Lorentz, invariâncias de gauge, invariância rotacional, etc. Como conseqüência, é comum tomar como critério de escolha de uma boa regularização, aquela que preserva tantas simetrias físicas quantas possíveis.

Neste trabalho vamos estudar três métodos de regularização : Método de Cut-Off(corte), Método de Pauli-Villars e Regularização Dimensional. Para não

nos estendermos a toda QED, vamos mostrar como funcionam estes métodos num exemplo específico: a polarização do vácuo, na aproximação de um loop.

9.1 Método de Cut-Off (corte)

O método de cut-off(corte) [8] é o procedimento de regularização mais antigo e simples, no qual a região de grandes momentos (que é a fonte da divergência) é isolada nas integrais divergentes. Por outro lado, é fácil ver que a invariância de translação é quebrada e portanto a mudança do momento na integral, em geral, muda o resultado. Em outras palavras, o assim chamado termo de superfície deve ser cuidadosamente calculado. Além disso, a invariância de gauge não é mantida neste procedimento de regularização. Um exemplo típico é a parte da polarização do vácuo a um loop na QED, que viola a invariância de gauge quando é calculada pelo método de cut-off. Portanto, o método de cut-off não é adequado para a regularização de teorias de gauge.

Como exemplo, estudaremos a polarização do vácuo, cujo gráfico é [1]:

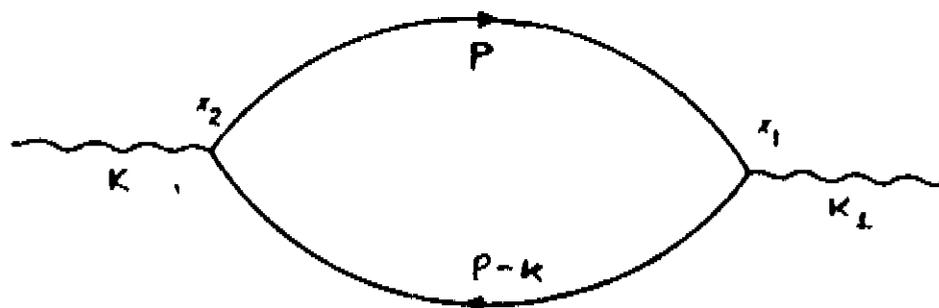


Figura 9.1: Gráfico de polarização do vácuo

A amplitude deste processo é dada por

$$\langle f|S^2(\gamma \rightarrow \gamma)|i\rangle = (2\pi)^4 \delta(k - k_1) \frac{1}{(2\pi)^3(2k_0)} \sum_{\lambda=0}^3 \mathcal{M}$$

onde

$$\mathcal{M} = \epsilon_{\alpha}^{\lambda}(k_1) \left[\frac{-e^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\text{Tr}[(\not{p} + m)\gamma^{\alpha}(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^{\beta}]}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\epsilon)} \right] \epsilon_{\beta}^{\lambda}(k) \quad (9.1)$$

é a chamada amplitude de Feynman para o processo representado pela figura (9.1).

A integral (9.1) é quadraticamente divergente quando $p \rightarrow \infty$, porque a integral pode ser expressa aproximadamente como

$$\int \frac{p^2 d^4 p}{p^4} \approx \lim_{p \rightarrow \infty} p^2$$

Uma maneira de regularizar esta integral é multiplicá-la pelo fator de convergência [1]

$$f(p^2, \Lambda^2) = \left(\frac{-\Lambda^2}{p^2 - \Lambda^2} \right)^2, \quad (9.2)$$

onde Λ é o parâmetro de cut-off (corte). Para valores grandes mas finitos de Λ a integral (9.1) se comporta aproximadamente como $\int \frac{d^4 p}{p^6}$ e para p grande é bem definida e convergente, porque a integral pode ser expressa como:

$$\int \frac{d^4 p}{p^6} \approx \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p^2}.$$

Definindo

$$R^{\alpha\beta}(k^2) = \int d^4 p \frac{\text{Tr}[(\not{p} + m)\gamma^\alpha(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\beta]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon)}, \quad (9.3)$$

podemos escrever (9.1) como

$$\mathcal{M} = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \epsilon_\alpha^\lambda(k_1) R^{\alpha\beta}(k^2) \epsilon_\beta^\lambda(k).$$

Vamos definir também, por conveniência, a expressão

$$N^{\alpha\beta} = \text{Tr}[(\not{p} + m)\gamma^\alpha(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\beta],$$

a qual pode ser escrita, depois de um pouco de álgebra de matrizes γ , como

$$N^{\alpha\beta} = 4(p^\alpha(p^\beta - k^\beta) - g^{\alpha\beta}p \cdot (p - k) + p^\beta(p^\alpha - k^\alpha) + m^2 g^{\alpha\beta}). \quad (9.4)$$

Usando (9.2) e (9.4) definimos a expressão regularizada de $R^{\alpha\beta}(k^2)$ em (9.3) como

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = \int d^4 p \frac{N^{\alpha\beta}}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon)} \left(\frac{-\Lambda^2}{p^2 - \Lambda^2} \right)^2.$$

Agora usando a relação dada por (A.1) do Apêndice (A1) e tomando: $a_0 = ((p - k)^2 - m^2)$, $a_1 = (p^2 - m^2)$, $a_2 = (p^2 - \Lambda^2)$ e $a_3 = (p^2 - \Lambda^2)$ tem-se que

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = \Lambda^4 \Gamma(4) \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \int d^4 p$$

$$\times \frac{N^{\alpha\beta}}{(p^2 - 2pk(1-x) - k^2x + k^2 - m^2 + (m^2 - \Lambda^2)y)^4}. \quad (9.5)$$

Consideremos agora a seguinte mudança de variável [10]

$$p' = p - k(1-x).$$

Devido à isotropia e homogeneidade do processo no espaço-tempo, não há direção preferencial para o quadrivetor p , e temos então a relação

$$p'^{\alpha} p'^{\beta} = \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} (p')^2.$$

Substituindo estas duas últimas expressões em (9.4) temos

$$N^{\alpha\beta} = 4\left(-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}p'^2 - 2k^{\beta}k^{\alpha}x(1-x) + g^{\alpha\beta}x(1-x)k^2 + m^2g^{\alpha\beta}\right),$$

e, portanto, podemos escrever (9.5) como:

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = 4\Lambda^4\Gamma(4) \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \int d^4p' \\ \times \frac{\left(-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}p'^2 - 2k^{\beta}k^{\alpha}x(1-x) + g^{\alpha\beta}x(1-x)k^2 + m^2g^{\alpha\beta}\right)}{(p'^2 + k^2x(1-x) + m^2 - (m^2 - \Lambda^2)y)^4}, \quad (9.6)$$

onde, devido à simetria da integração, as potências ímpares de p' em $R_r^{\alpha\beta}(k^2)$ não contribuem. Portanto elas já foram descartadas na expressão de $N^{\alpha\beta}$ acima.

Podemos observar em (9.6) que a integral em p' tem duas singularidades no plano complexo de p'_0 . Para evitar esta dificuldade, fazemos uma rotação de 90° ao redor da origem do plano complexo de p'_0 , que é conhecida como rotação de Wick. Isto significa fazer as seguintes mudanças

$$p'_0 = ip'_0,$$

$$d^4p' = id^4p',$$

$$p'^2 = -p'^2.$$

Além disso, usamos as relações (A.2), (A.3) e (A.4) do Apêndice (A1) obtemos que a expressão regularizada escreve-se como:

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = \frac{8\pi^2 i (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2)}{\left(\frac{m^2}{\Lambda^2} - 1\right)^2} \int_0^1 x(1-x) \ln\left(1 - \frac{k^2 x(1-x)}{m^2}\right) dx$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{8\pi^2 i (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2)}{(\frac{m^2}{\Lambda^2} - 1)^2} \int_0^1 x(1-x) \ell n \left[1 - \frac{k^2}{m^2} x(1-x) - \left(1 - \frac{\Lambda^2}{m^2}\right) x \right] dx \\
& - \frac{4\pi^2 i}{(\frac{m^2}{\Lambda^4} - \frac{1}{\Lambda^2})} \int_0^1 dx \left[\frac{g^{\alpha\beta} (k^2 x(1-x) + (m^2 - \Lambda^2)x)}{-k^2 x(1-x) + m^2 - (m^2 - \Lambda^2)x} \right. \\
& \quad \left. + \frac{x^2(1-x)(g^{\alpha\beta} k^2 - 2k^\alpha k^\beta)}{-k^2 x(1-x) + m^2 - (m^2 - \Lambda^2)x} \right] \tag{9.7}
\end{aligned}$$

O fator $(k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2)$ que aparece nos termos $R_r^{\alpha\beta}(k^2)$ nos garante que o termo \mathcal{M} é invariante de Lorentz.

Observe que para Λ finito as integrais acima são convergentes, mas quando $\Lambda \rightarrow \infty$, o segundo e o terceiro termo de (9.7) divergem. Estes termos divergentes vão ser absorvidos no processo de Renormalização, neste caso na renormalização da carga.

Vamos apresentar abaixo um outro exemplo, conhecido como Efeito Casimir [9] em dimensão 1, para mostrar como a técnica de regularização de Cut-Off pode ser aplicada a outro fenômeno físico.

9.1.1 Efeito Casimir (Método de cut-off)

Em 1948, Casimir fez uma observação. No vácuo o campo eletromagnético realmente não desaparece, mas possui flutuações quânticas [13], como pode se observar na quantização do campo eletromagnético, na qual encontramos um conjunto infinito de osciladores independentes, com diferentes frequências. Cada oscilador ou modo normal contribui com $\frac{1}{2}\omega$ (aqui fazemos $\hbar = 1$ e $c = 1$) para a energia de ponto zero e como existe um número infinito de modos, essa energia é infinita.

Então vamos estudar o problema da energia de ponto zero entre duas placas idealmente condutoras. Este é o chamado Efeito Casimir, que fisicamente se manifesta como a força de atração entre duas placas condutoras paralelas descarregadas.

Consideremos o caso de um campo escalar numa caixa unidimensional de comprimento L . Impondo condições de contorno de que o campo se anule nos extremos (condições de Dirichlet), as auto-frequências são então dadas por:

$$\omega_n = \frac{\pi}{L} n, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{9.8}$$

Neste caso, cada modo de vibração contribui com $\frac{1}{2}\omega_n$ para a energia de ponto zero, que é então dada por

$$E_0 = \frac{\pi}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} n. \quad (9.9)$$

De (9.9) observamos que esta energia é infinita. Para obtermos uma energia finita devemos regularizá-la. Introduzimos, então, um fator de corte exponencial nas altas frequências, ou seja

$$E_0 = \frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n e^{-\alpha \omega_n},$$

que pode ser escrita como

$$E_0 = -\frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \omega_n} \right). \quad (9.10)$$

Substituindo (9.8) em (9.10) e efetuando a derivada em α temos:

$$E_0 = \frac{\pi}{2L} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\frac{\alpha \pi}{L}}}{(e^{\frac{\alpha \pi}{L}} - 1)^2} \right). \quad (9.11)$$

Fazemos agora uma expansão de Taylor de $e^{\frac{\alpha \pi}{L}}$, e usamos a representação da função

$$\frac{y}{(e^y - 1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_{\nu}}{\nu!} y^{\nu}$$

onde B_{ν} são os números de Bernoulli. Tomando $y = \frac{\pi \alpha}{L}$ em (9.11), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{e^{\frac{\alpha \pi}{L}}}{(e^{\frac{\alpha \pi}{L}} - 1)^2} &= \left(1 + \frac{\pi \alpha}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \alpha^2 + \dots \right) \frac{L^2}{(\pi \alpha)^2} \\ &\times (B_0 + B_1 \frac{\pi \alpha}{L} + B_2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \alpha^2 + \dots) (B_0 + B_1 \frac{\pi \alpha}{L} + B_2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \alpha^2 + \dots). \end{aligned} \quad (9.12)$$

Substituindo (9.12) em (9.11) e, além disso, usando os números de Bernoulli $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, \dots , ficamos com:

$$E_0 = \frac{\pi}{2L} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\frac{L^2}{(\pi \alpha)^2} - \frac{1}{12} + \dots \right).$$

É fácil ver nesta equação que temos um polo de segunda ordem. Este polo é a contribuição da densidade de energia infinita do espaço total de Minkowski (sem

condições de contorno). Mas esta densidade de energia é normalmente eliminada calculando-se a diferença entre a densidade de energia da caixa e a do espaço livre.

Portanto, a energia de ponto zero da caixa unidimensional, já regularizada, é:

$$E_0^r = -\frac{\pi B_2}{4L} = -\frac{\pi}{24L}.$$

Vemos então que a técnica de cut-off isolou a divergência da energia de ponto zero, a saber, a energia correspondente ao espaço total de Minkowski. Como somente diferenças de energia são mensuráveis, uma subtração desta energia nos fornece um resultado finito e fisicamente aceitável.

9.2 Método de Regularização de Pauli-Villars

Neste método [8] o integrando da integral que aparece na amplitude de Feynman, ou seja, o propagador $\frac{1}{(p^2 - m^2)}$ é substituído por

$$\frac{1}{(p^2 - m^2)} - \frac{1}{(p^2 - M^2)} = \frac{(m^2 - M^2)}{(p^2 - m^2)(p^2 - M^2)}.$$

É fácil ver que este propagador modificado volta ao original quando $M \rightarrow \infty$. Para M finito, o comportamento para grandes momentos é do tipo $(\frac{1}{p^4})$. Assim, esta modificação é usada para regularização. O termo adicional na equação é chamado Regulador de Pauli-Villars.

Os seguintes fatos podem ser encontrados espalhados pela literatura, os quais não provaremos, porque fogem do escopo deste trabalho.

Este método mantém as invariâncias de translação e de Lorentz e portanto é um bom candidato para uma regularização consistente. Além disso, a invariância de gauge da QED é preservada por este método de regularização. Conseqüentemente, a QED é tratada de uma maneira perfeitamente consistente por este método. O método também é aplicado à teoria de Yang-Mills sem massa, tal como QCD. No caso da teoria de Yang-Mills massiva, como a teoria eletrofraca de Weinberg-Salam, a regularização de Pauli-Villars não conserva a invariância de gauge.

Voltemos agora ao exemplo anterior da polarização do vácuo.

$$R^{\alpha\beta}(k^2) = \int d^4p \frac{Tr[(\not{p} + m)\gamma^\alpha(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\beta]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon)} \quad (9.13)$$

$$N^{\alpha\beta} = 4(p^\alpha(p^\beta - k^\beta) - g^{\alpha\beta}p \cdot (p - k) + p^\beta(p^\alpha - k^\alpha) + m^2g^{\alpha\beta}).$$

Regularizar pelo método de Pauli-Villars significa regularizar os loops de fermions e propagadores de fótons independentemente. O propagador do fóton é substituído numa maneira padrão por uma superposição de propagadores livres dos campos reguladores. Os loops de fermions, no entanto, são tratados como um todo, onde cada loop é substituído pelo loop original subtraído por idênticas expressões correspondentes a fermions de massas arbitrariamente grandes[13].

Nesse caso, o loop de fermion, equação (9.13), é substituído pela expressão:

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = \int d^4p \left[\frac{\text{Tr}[(\not{p} + m)\gamma^\alpha(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\beta]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon)} - \sum_{s=1}^2 C_s \frac{\text{Tr}[(\not{p} + \Lambda_s)\gamma^\alpha(\not{p} - \not{k} + \Lambda_s)\gamma^\beta]}{(p^2 - \Lambda_s^2 + i\varepsilon)((p - k)^2 - \Lambda_s^2 + i\varepsilon)} \right]. \quad (9.14)$$

onde os Λ_s são as correspondentes massas dos novos fermions considerados. Além disso, devem satisfazer o sistema linear

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$C_1\Lambda_1^2 + C_2\Lambda_2^2 = m^2. \quad (9.15)$$

É necessário introduzirmos duas constantes, porque fica assegurado que o integrando de (9.14) pode ser expresso como $\frac{1}{p^6}$, o que leva a

$$\int \frac{d^4p}{p^6} \approx \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p^2}.$$

Agora, como os termos da equação (9.14) têm a mesma estrutura, então trabalharemos com o seguinte termo:

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = \int d^4p \frac{N^{\alpha\beta}}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon)}. \quad (9.16)$$

Fazendo uso da fórmula (A.5) do Apêndice (A1), temos que a equação (9.16) pode ser escrita como:

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = \int_0^1 dx \int d^4p \frac{N^{\alpha\beta}}{(p^2 - 2pkx + k^2x - m^2)^2}.$$

Agora fazemos uma translação da origem introduzindo uma nova variável

$$p' = p - kx.$$

Novamente, como no caso do método de Cut-Off, devido à isotropia e homogeneidade do processo no espaço-tempo, substituímos

$$p'^{\alpha} p'^{\beta} = \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} (p')^2,$$

obtendo as expressões

$$N'^{\alpha\beta} = 4\left(-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}p'^2 - 2k^{\beta}k^{\alpha}x(1-x) + g^{\alpha\beta}x(1-x)k^2 + m^2g^{\alpha\beta}\right).$$

e

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = \int_0^1 dx \int d^4 p' \frac{N'^{\alpha\beta}}{(p'^2 + k^2x(1-x) - m^2)^2}.$$

Também devido à simetria da integração, as potências ímpares de p' em $R_1^{\alpha\beta}(k^2)$ não contribuem.

Agora fazemos a seguinte seqüência de operações. Fazemos uma rotação de Wick. Depois usamos as coordenadas esféricas no espaço euclidiano quadri-dimensional, ou seja

$$\int d^4 p' = 2\pi^2 \int_0^{\infty} p'^3 dp'.$$

Usando as integrais reais dadas por (A.6) e (A.7) do Apêndice (A1), obtemos que $R_1^{\alpha\beta}(k^2)$ pode ser expressa como

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} [8\pi^2 i \int_0^1 dx [-(k^{\alpha}k^{\beta} - g^{\alpha\beta}k^2)x(1-x) \ell n \frac{\theta^2}{(m^2 - k^2x(1-x))} \\ + \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{3}{2}g^{\alpha\beta}k^2x(1-x) - \frac{1}{2}m^2g^{\alpha\beta} + 2x(1-x)k^{\alpha}k^{\beta}]]$$

Agora substituímos a equação anterior em (9.14), assim como para os termos adicionados, obtendo-se a seguinte expressão:

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} [8\pi^2 i (k^{\alpha}k^{\beta} - g^{\alpha\beta}k^2) \int_0^1 x(1-x) dx [\ell n \frac{\theta^2}{m^2 - k^2x(1-x)} \\ - C_1 \ell n \frac{\theta^2}{\Lambda_1^2 - k^2x(1-x)} - C_2 \ell n \frac{\theta^2}{\Lambda_2^2 - k^2x(1-x)}]]$$

Fazendo uso da condição (9.15), tem-se

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = \frac{4\pi^2 i}{3} (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) \left[-6 \int_0^1 x(1-x) dx \ln \frac{m^2}{m^2 - k^2 x(1-x)} \right. \\ \left. + C_1 \ln \frac{\Lambda_1^2}{m^2} + C_2 \ln \frac{\Lambda_2^2}{m^2} \right],$$

A equação anterior pode ser resumida como

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = \frac{4\pi^2 i}{3} (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) \left[\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 6 \int_0^1 x(1-x) dx \ln \left(1 - \frac{k^2 x(1-x)}{m^2} \right) \right]$$

onde $\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} = C_1 \ln \frac{\Lambda_1^2}{m^2} + C_2 \ln \frac{\Lambda_2^2}{m^2}$.

Observe que o fator $(k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2)$ aparece automaticamente, o que garante que \mathcal{M} é uma invariante de Lorentz.

Por outro lado o termo divergente logarítmico, $\ln \frac{\Lambda^2}{m^2}$, será absorvido pelos chamados contra-termos no processo de Renormalização das constantes físicas [13].

9.3 Regularização Dimensional

Uma integral múltipla, mantendo-se o integrando inalterado, pode ser feita convergente reduzindo se o número de integrais [8]. Por exemplo, as integrais quadri-dimensionais linearmente divergentes podem ser feitas finitas, se o espaço-tempo for de dimensão 2. Este fato é a idéia básica da chamada Regularização Dimensional. Nesta regularização a dimensão do espaço-tempo D é fixada em $D < 4$ e substitui-se a integral quadri-dimensional divergente por uma integral D -dimensional convergente. Daí, fazendo as integrações do momento explicitamente, obtém-se uma expressão analítica de uma função do parâmetro regularizador que é a dimensão D . A divergência original é então exibida como um polo em $D = 4$ na expressão analítica [8].

Uma vez que a Regularização Dimensional não viola nada exceto que o espaço-tempo não é quadri-dimensional, todas as exigências físicas são conservadas. Daí, esta teoria de regularização é invariante de Lorentz, de gauge, unitária, etc. Neste sentido a Regularização Dimensional é a mais apropriada para Teorias de Gauge [8].

Continuando com o mesmo exemplo da polarização do vácuo, temos novamente [1]

$$R^{\alpha\beta}(k^2) = \int d^4 p \frac{\text{Tr}[(\not{p} + m)\gamma^\alpha(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\beta]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon)}$$

e

$$N^{\alpha\beta} = 4(p^\alpha(p^\beta - k^\beta) - g^{\alpha\beta}p \cdot (p - k) + p^\beta(p^\alpha - k^\alpha) + m^2 g^{\alpha\beta}).$$

Neste caso, para regularizar consideramos a seguinte integral:

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = \int d^D p \frac{\text{Tr}[(\not{p} + m)\gamma^\alpha(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\beta]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon)} \quad (9.17)$$

com $D < 4$. Usando a fórmula dada por (A.5) do Apêndice (A1), a equação (9.17) pode ser escrita como:

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = \int_0^1 dx \int d^D p \frac{N^{\alpha\beta}}{(p^2 - 2pkx + k^2x - m^2)^2}.$$

Fazendo agora a mudança de variável

$$p' = p - kx$$

e

$$p'^\alpha p'^\beta = \frac{1}{D} g^{\alpha\beta} (p')^2$$

por causa da isotropia, como discutido anteriormente, obtemos a seguinte expressão:

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = 4 \int_0^1 \left[\left(\frac{2g^{\alpha\beta}}{D} - g^{\alpha\beta} \right) \int \frac{p'^2 d^D p'}{[p'^2 + k^2x(1-x) - m^2]^2} + (-x(1-x)(2k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta}k^2) + m^2 g^{\alpha\beta}) \int p'^2 \frac{d^D p'}{[p'^2 + k^2x(1-x) - m^2]^2} \right]. \quad (9.18)$$

Usando as relações dadas por (A.8) e (A.9) do Apêndice (A1) em (9.18) temos como resultado que $R_1^{\alpha\beta}(k^2)$ pode ser escrito como

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = -\frac{4i\pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta}k^2) \int_0^1 \frac{2x(1-x)dx}{[-k^2x(1-x) + m^2]^{2 - \frac{D}{2}}}. \quad (9.19)$$

A expressão é finita para $D < 4$, e diverge como $\frac{1}{(D-4)}$ para $D \rightarrow 4$ o que corresponde a uma divergência logarítmica em $D = 4$. Então, para obter $R_1^{\alpha\beta}(k^2)$

regularizado, $R_r^{\alpha\beta}(k^2)$, subtraímos do integrando da equação (9.19) o termo com $k = 0$, ou seja [10]:

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = -\frac{4i\pi^{\frac{D}{2}}\Gamma(2-\frac{D}{2})}{\Gamma(2)}(k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta}k^2) \times \int_0^1 2x(1-x)dx \left(\frac{1}{(-k^2x(1-x) + m^2)^{2-\frac{D}{2}}} - \frac{1}{(m^2)^{2-\frac{D}{2}}} \right). \quad (9.20)$$

A razão para isto ser feito assim é mostrada no Apêndice (A2) [18].

Por outro lado, usando a expansão da série de potência dada por (A.10) do Apêndice (A1) em (9.20), temos que a expressão entre parêntese na equação anterior pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(-k^2x(1-x) + m^2)^{2-\frac{D}{2}}} - \frac{1}{(m^2)^{2-\frac{D}{2}}} = 1 + \left(\frac{D}{2} - 2\right)\ln(m^2 - k^2x(1-x)) + \\ & \frac{1}{2!} \left(\left(\frac{D}{2} - 2\right)\ln(m^2 - k^2x(1-x))\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\left(\frac{D}{2} - 2\right)\ln(m^2 - k^2x(1-x))\right)^3 + \dots - \\ & -1 - \left(\frac{D}{2} - 2\right)\ln(m^2) - \frac{1}{2!} \left(\left(\frac{D}{2} - 2\right)\ln(m^2)\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\left(\frac{D}{2} - 2\right)\ln(m^2)\right)^3 - \dots \end{aligned}$$

Substituindo a relação anterior em (9.20), temos:

$$\begin{aligned} R_r^{\alpha\beta}(k^2) &= \lim_{D \rightarrow 4} \frac{4i\pi^{\frac{D}{2}}\Gamma(3-\frac{D}{2})}{\Gamma(2)}(k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta}k^2) \int_0^1 2x(1-x) \times \\ & \times \ln\left(\frac{-k^2x(1-x) + m^2}{m^2}\right) \left\{ 1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{D}{2} - 2\right) \left(\ln(m^2(-k^2x(1-x) + m^2))\right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3!} \left(\frac{D}{2} - 2\right)^2 \left(\ln^2(m^2 - k^2x(1-x)) + \ln(m^2(m^2 - k^2x(1-x))) + \ln^2(m^2)\right) + \right. \\ & \left. + \dots \right\} dx. \end{aligned}$$

Portanto, fazendo $D = 4$, obtemos

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = 8i\pi^2(k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta}k^2) \int_0^1 x(1-x)\ln\left(1 - \frac{k^2x(1-x)}{m^2}\right)dx$$

Observa-se que este é o mesmo resultado obtido com o método de Pauli-Villars. Mas agora obtivemos uma expressão sem outro termo adicional que seja divergente como nos dois casos anteriores. Podemos, portanto, dizer que o método de Regularização Dimensional é o mais apropriado para a regularização da divergência ultravioleta no caso da polarização do vácuo.

Capítulo 10

γ -Fluidos

10.1 Dinâmica de Fluidos

Como os fenômenos associados com fluidos dinâmicos são macroscópicos, um fluido é considerado como um meio contínuo. Isto significa que em qualquer volume pequeno do fluido sempre se tem um grande número de moléculas. Por conseguinte, quando falamos de elementos de volume infinitamente pequenos, sempre significará que “fisicamente” são infinitamente pequenos, ou seja, muito pequenos comparados com o volume do corpo em consideração, mas grandes comparados com as distâncias entre as moléculas. As expressões de partículas do fluido e ponto num fluido são entendidas no mesmo sentido [11].

A descrição matemática do estado de um fluido em movimento é efetuada por meio de funções que dão a distribuição da velocidade do fluido $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ e de quaisquer duas quantidades termodinâmicas relativas ao fluido, por exemplo, a pressão $P(x, y, z, t)$ e a densidade de energia $\rho(x, y, z, t)$. Todas as quantidades termodinâmicas são determinadas pelos valores de quaisquer duas delas, junto com a Equação de Estado; Portanto, com cinco quantidades, como as três componentes da velocidade \vec{v} , a pressão P e a densidade ρ , o estado do movimento do fluido é completamente determinado [11].

Todas as quantidades são, em geral, funções das coordenadas x, y, z e do tempo t . $\vec{v}(x, y, z, t)$ é a velocidade do fluido num ponto dado (x, y, z) no espaço e num tempo t , ou seja, refere-se a pontos fixos no espaço e não a partículas fixas do fluido. O mesmo pode ser aplicado para ρ e P [11].

Em hidrodinâmica clássica um fluido perfeito é definido como um sistema contínuo que não possui tensão de cisalhamento e para o qual vale a lei de Pascal [16].

Por outro lado, muitos sistemas físicos macroscópicos, inclusive o próprio universo, podem ser considerados aproximadamente como formados de fluidos perfeitos. Também podemos definir um fluido perfeito como aquele que tem em cada ponto uma velocidade \vec{v} , tal que um observador movendo-se com esta velocidade vê o fluido que está ao redor dele como isotrópico. Isto seria o caso se o livre caminho médio entre as colisões é pequeno comparado com a escala de comprimento usada pelo observador [12].

Como exemplo, temos uma onda de som propagando-se no ar com um comprimento de onda grande comparado com o livre caminho médio, mas para comprimentos de onda muito curtos a viscosidade torna-se importante e o ar comporta-se como um fluido imperfeito.

O estabelecimento das equações relativísticas do movimento de um fluido é muito importante. A necessidade de se considerar os efeitos relativísticos pode não ser somente para grandes velocidades (comparáveis com a da luz) de movimento dos corpos macroscópicos, mas também para grandes velocidades do movimento microscópico da partículas do fluido [11].

Então nós usaremos estes critérios para construir o tensor de energia-momento para um fluido perfeito em relatividade especial.

O momento do fluxo através de um elemento $d\vec{S}$ da superfície de um corpo é devido somente à força sobre esse elemento. Assim, $T_{ij}dS^j$ é a componente i da força na superfície do elemento.

Voltando à lei de Pascal, ela pode ser enunciada como: A pressão exercida em uma parte do fluido é a mesma em todas as direções e perpendicular à área na qual age. Vamos considerar um elemento de volume no fluido, e usamos um sistema de referência no qual este elemento está em repouso (o sistema “comóvel”). Podemos portanto escrever $T_{ij}dS^j = PdS_i$, onde P é a pressão medida no sistema comóvel, ou seja,

$$T_{ij} = P\delta_{ij}.$$

As componentes T_{0i} fornecem a densidade do momento e se anulam para um elemento de volume dado em seu sistema comóvel. A componente T_{00} é a densidade de energia interna própria do fluido. Denotamos $T_{00} = \rho$.

Desta maneira, o tensor de energia-momento para um elemento de volume do

fluido é, no seu sistema próprio:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

ou

$$T^{ij} = P\delta_{ij}$$

$$T^{i0} = T^{0i} = 0$$

$$T^{00} = \rho. \quad (10.1)$$

Agora vamos achar a expressão para o tensor energia-momento em qualquer sistema. Para fazer isto, nós introduzimos a quadri-velocidade v_α do fluido. No sistema comóvel do elemento considerado, as componentes da quadri-velocidade são $v_i = 0$ e $v_0 = 1$.

A relação entre as coordenadas do referencial comóvel x'^β e as coordenadas x^α (o qual poderia ser um sistema em repouso no laboratório) é:

$$x^\alpha = \Lambda_\alpha^\beta(v)x'^\beta$$

onde $\Lambda_\alpha^\beta(v)$ é definido por:

$$\Lambda_0^0 = \gamma$$

$$\Lambda_i^0 = \gamma v_i$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\Lambda_i^j = \delta_{ij} + v_i v_j \frac{(\gamma - 1)}{v^2}$$

$$\Lambda_0^j = \gamma v_j.$$

Como $T^{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem, então no sistema de laboratório temos:

$$T^{\mu\nu} = \Lambda_\gamma^\mu(v)\Lambda_\delta^\nu(v)T'^{\gamma\delta}$$

ou explicitamente:

$$T^{ij} = P\delta_{ij} + (P + \rho)\frac{v_i v_j}{(1 - v^2)}$$

$$T^{i0} = (P + \rho)\frac{v_i}{(1 - v^2)}$$

$$T^{00} = \frac{(\rho + Pv^2)}{(1 - v^2)}.$$

Estas equações podem ser expressas por uma única equação:

$$T^{\mu\nu} = (P + \rho)U^\mu U^\nu - P\eta^{\mu\nu} \quad (10.2)$$

onde U^μ é o quadri-vetor velocidade,

$$\vec{U} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$U^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}},$$

$\eta^{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski e a expressão $(P + \rho)$ é a densidade de entalpia do fluido.

Por outro lado as equações de movimento são governadas pela seguinte equação:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (10.3)$$

Esta equação expressa as leis de conservação de energia e momento para o sistema físico ao qual o tensor $T^{\mu\nu}$ pertence. Usando a equação (10.2) para $T^{\mu\nu}$, obtemos as equações de movimento do fluido.

Além da energia e momento, um fluido tem, em geral, outras quantidades conservadas, tais como a carga, o número de barions menos o número de antibarions, ou, a temperatura normal, o número de átomos. Aqui vamos considerar que a quantidade que se conserva é o número de partículas, o qual não está contido na equação (10.3). Vamos, então, deduzir a Equação de Continuidade, que expressa a conservação do número de partículas do fluido.

Se n é a densidade do número de partículas num sistema de Lorentz que se movimenta com o fluido num ponto do espaço-tempo, então neste sistema o quadri-vetor corrente de partículas é dado por

$$N^i = 0$$

$$N'^0 = n. \quad (10.4)$$

Em qualquer outro sistema de Lorentz, no qual o fluido neste ponto move-se com a quadri-velocidade v_α , a corrente de partículas está relacionada à equação (10.4) por

$$N^\mu = \Lambda^\mu_\beta(v) N'^\beta$$

ou

$$\begin{aligned} N^i &= \Lambda^i_\beta(v) N'^\beta = \frac{v^i n}{\sqrt{1-v^2}} \\ N^0 &= \Lambda^0_\beta(v) N'^\beta = \frac{n}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

A equações (10.5) podem ser resumidas em

$$N^\alpha = nU^\alpha. \quad (10.6)$$

A Equação de Continuidade é então, dada por

$$\frac{\partial N^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (10.7)$$

Agora, substituímos (10.2) em (10.3), e multiplicamos esta equação por U_μ , ou seja, projetamos na direção da quadri-velocidade. Além disso, usamos as equações (10.6) e (10.7) e teremos:

$$nU^\nu \left(\frac{\partial \left(\frac{P+\rho}{n} \right)}{\partial x^\nu} - \frac{1}{n} \frac{\partial P}{\partial x^\nu} \right) = 0. \quad (10.8)$$

Por outro lado, a segunda lei da Termodinâmica diz que a pressão P , a densidade de energia ρ e o volume por partícula $\frac{1}{n}$ podem ser expressas como funções da temperatura T e da entropia por partícula σk (onde k é a constante de Boltzmann para fazer σ adimensional), ou seja

$$kT d\sigma = PdV + d\varepsilon.$$

No caso acima temos $V = \frac{1}{n}$ e $\varepsilon = \frac{\rho}{n}$, e portanto

$$kT d\sigma = Pd \left(\frac{1}{n} \right) + d \left(\frac{\rho}{n} \right). \quad (10.9)$$

Usando as equações (10.8) e (10.9) teremos

$$kTU^\nu \frac{\partial \sigma}{\partial x^\nu} = 0. \quad (10.10)$$

É fácil ver, calculando no sistema comóvel, que a entropia específica σ é constante no tempo em qualquer ponto que se move junto com o fluido.

Podemos obter ainda outra equação para o qual fazemos os seguintes passos: substituindo a equação (10.2) em (10.3) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} ((P + \rho)U^\mu U^\nu) - \frac{\partial P}{\partial x^\nu} \eta^{\mu\nu} = 0.$$

Da equação anterior podemos obter duas equações, para $\mu = i$ e $\mu = 0$, com $U^i = v^i U^0$

$$(P + \rho)\gamma U^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} v^i + v^i \frac{\partial}{\partial x^\nu} ((P + \rho)\gamma U^\nu) + \frac{\partial P}{\partial x^i} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} ((P + \rho)\gamma U^\nu) - \frac{\partial P}{\partial x^0} = 0$$

substituindo agora a segunda equação na primeira obtemos o seguinte resultado:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{(1 - v^2)}{(P + \rho)} \left(\nabla P + \vec{v} \frac{\partial P}{\partial t} \right). \quad (10.11)$$

Portanto as equações fundamentais da hidrodinâmica relativística são a “equação de continuidade” (10.7), a “equação de Euler” (10.11) e a “equação de energia” (10.10), que juntas com as equações de estado (10.3), dão P e ρ em termos de n e σ .

Para entender as possíveis equações de estados, podemos considerar um fluido composto de partículas pontuais que interagem somente em colisões localizadas espacialmente. Neste caso o tensor de energia-momento é dado por [12]:

$$T^{\alpha\beta} = \sum_n \frac{P_n^\alpha P_n^\beta}{E_n} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n).$$

Num sistema de Lorentz próprio, $T^{\mu\nu}$ tem a forma isotrópica das equações (10.1). Daí a pressão e densidade de energia serão dadas neste sistema por:

$$P = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 T^{ii} = \frac{1}{3} \sum_n \frac{P_n^2}{E_n} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n)$$

$$\rho = T^{00} = \sum_n E_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n). \quad (10.12)$$

Por outro lado a densidade do número de partículas é:

$$n = \sum_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n)$$

e resulta que, em geral, se tem : $0 \leq P \leq \frac{\rho}{3}$.

No caso de um gás não relativístico frio, podemos ter aproximadamente que:

$$E_n \approx m + \frac{\vec{P}_n^2}{2m}$$

Substituindo na equação (10.12) teremos que:

$$\rho \approx mn + \frac{3}{2}P. \quad (10.13)$$

E para um gás quente, extremamente relativístico, temos:

$$E_n \approx |\vec{P}_n| \gg m$$

e substituindo novamente em (10.12) teremos:

$$\rho \approx 3P \gg mn. \quad (10.14)$$

As equações (10.13) e (10.14) podem ser resumidas numa única equação:

$$P \approx (\gamma - 1)(\rho - mn) \quad (10.15)$$

onde

$$\gamma = \begin{cases} \frac{5}{3}, & \text{não relativístico.} \\ \frac{4}{3}, & \text{extremamente relativístico.} \end{cases}$$

Substituindo as equações (10.13) e (10.15) na equação (10.9) obtemos

$$kT d\sigma = \frac{n^{\gamma-1}}{(\gamma-1)} d\left(\frac{P}{n^\gamma}\right),$$

e a equação (10.10) fica escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{n^\gamma}\right) + (\vec{v} \cdot \nabla) \frac{P}{n^\gamma} = 0. \quad (10.16)$$

A proporcionalidade expressa na equação (10.15) entre a energia interna e a pressão em verdade é correta para vários valores de γ , para um amplo tipo de

fluidos e não só para um gás simples como o discutido aqui. Para tais fluidos, a equação de energia pode ser colocada na forma (10.16).

Para fluidos, cujas partículas constituintes têm massa zero, a equação (10.15) reduz se a

$$P = (\gamma - 1)\rho.$$

Esta é a chamada Equação de Estado para γ -fluidos, muito usada em cosmologia relativística. Em cosmologia o parâmetro γ varia no intervalo $0 \leq \gamma \leq 2$.

Para $\gamma = \frac{4}{3}$, obtemos $P = \frac{1}{3}\rho$, que é a equação de estado da radiação eletromagnética.

Para $\gamma = 0$, obtemos a equação $P = -\rho$ que descreve o vácuo e $\gamma = 2$ descreve a, ainda hipotética, stiff-matter cuja equação de estado fica $P = \rho$.

Prova-se (veja a referência [12]) que a velocidade do som num fluido é dada por

$$v_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\sigma=cte} = \gamma - 1.$$

Daí vemos que $v_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$ para a radiação eletromagnética. Observe que $v_s < 1$, o que mostra que a velocidade do som é menor que a da luz, como esperado. Para o vácuo, não temos propagação de perturbações no fluido. No caso de stiff-matter $v_s = 1$ e daí o som (perturbações de densidade) se propaga neste tipo de matéria com a velocidade da luz. Stiff-matter nunca foi detectada no Universo, mas por enquanto é somente uma possibilidade teórica.

10.2 Estudo do Espectro de γ -Fluidos e do Vácuo

Nesta secção, estudaremos o espectro do vácuo, visto como um caso particular de um γ -fluido, equação (10.19). Consideremos inicialmente um fluido quântico em contacto com um reservatório térmico e de massa (partículas). Em equilíbrio, o estado termodinâmico está caracterizado pelas variáveis (T, V, μ) . Então trabalharemos com o ensemble Grand-Canônico.

A função de gran partição Q é dada pelo traço no espaço de Fock:

$$Q = Tr \left(e^{-\beta(H - \mu N)} \right) = Tr \left(\exp \left[-\beta \sum_{\vec{k}} (\epsilon_k - \mu) a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \right] \right)$$

onde:

$$N = \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}}$$

e

$$H = \sum_{\vec{k}} \varepsilon_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}}.$$

Usando a seguinte relação:

$$Tr \left(\exp[\lambda a^{\dagger} a] \right) = \sum_n \langle n | \exp(\lambda a^{\dagger} a) | n \rangle$$

onde $|n\rangle$ são os autoestados dos operadores de aniquilação e criação, então teremos que:

$$Q = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \exp(-\beta(\varepsilon_k - \mu))} \right).$$

O potencial termodinâmico grand-canônico é definido como

$$\Omega = \ln Q = - \sum_k \ln (1 - \exp(-\beta(\varepsilon_k - \mu))).$$

Mas no limite contínuo ($\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon(\omega) = \hbar\omega$), a soma sobre k é substituída pela seguinte integral:

$$\ln Q = -V \int_0^{\infty} \ln (1 - \exp(-\beta(\hbar\omega - \mu))) \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3}. \quad (10.17)$$

Aqui $\frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3}$ é o número de estados no espaço de momento \vec{k} e está relacionada com a frequência ω , do seguinte modo

$$\frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \rightarrow f(\omega) d\omega$$

onde $f(\omega)$ é a densidade de estado por unidade de energia. Portanto podemos escrever (10.17) como:

$$\ln Q = -V \int_0^{\infty} \ln (1 - \exp(-\beta(\hbar\omega - \mu))) f(\omega) d\omega.$$

Aqui vamos trabalhar com o caso $\mu = 0$ (potencial químico nulo). Portanto a equação anterior fica

$$\ln Q = -V \int_0^{\infty} \ln (1 - \exp(-\beta\hbar\omega)) f(\omega) d\omega. \quad (10.18)$$

Além disso nós vamos ainda considerar fluidos sem massa e que satisfazem a seguinte equação de estado, (γ -fluidos).

$$P = (\gamma - 1)\rho, \quad (10.19)$$

onde $0 \leq \gamma \leq 2$.

Esta classe de fluidos perfeitos descreve, como vimos anteriormente, radiação eletromagnética ($\gamma = \frac{4}{3}$), vácuo ($\gamma = 0$), e a chamada stiff-matter ($\gamma = 2$).

Para calcular P e ρ usamos as seguintes fórmulas termodinâmicas:

$$P = kT \left(\frac{\partial \ln Q}{\partial V} \right)_T$$

e

$$\rho = \frac{kT^2}{V} \left(\frac{\partial \ln Q}{\partial T} \right)_V. \quad (10.20)$$

Substituindo (10.18) em (10.20) e daí levando os resultados na equação (10.19), obtemos

$$-kT \int_0^\infty \ln \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \right) f(\omega) d\omega = (\gamma - 1)\hbar \int_0^\infty \frac{\omega f(\omega)}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} d\omega. \quad (10.21)$$

Nosso objetivo é encontrar a densidade de estados $f(\omega)$ para a relação anterior, o que nos permitirá calcular o espectro dos γ -fluidos em geral.

Integrando por partes o lado esquerdo da equação (10.21) temos:

$$-kT \ln \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \right) F(\omega) \Big|_0^\infty + \hbar \int_0^\infty \frac{F'(\omega)}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} d\omega, \quad (10.22)$$

onde $F(\omega)$ satisfaz

$$F'(\omega) = f(\omega). \quad (10.23)$$

Para continuar com os cálculos vamos supor, temporariamente, que o primeiro termo do lado direito da equação (10.22), que é um termo de fronteira, se anula nos limites superior e inferior. Portanto (10.21) reduz-se à equação

$$\hbar \int_0^\infty \frac{F(\omega)}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} d\omega = (\gamma - 1)\hbar \int_0^\infty \frac{\omega f(\omega)}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} d\omega.$$

É fácil ver que esta equação tem uma solução, desde que $f(\omega)$ e $F(\omega)$ satisfaçam a equação

$$F(\omega) = (\gamma - 1)\omega f(\omega). \quad (10.24)$$

Derivando esta equação e usando (10.23) obtemos a equação diferencial para $f(\omega)$

$$\frac{f'(\omega)}{f(\omega)} = \left(\frac{2-\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{1}{\omega}$$

cuja solução é dada por

$$f(\omega) = A\omega^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}} \quad (10.25)$$

onde A é uma constante arbitrária.

Integrando $f(\omega)$ obtemos

$$F(\omega) = B\omega^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (10.26)$$

onde B também é uma constante arbitrária.

Das equações (10.25) e (10.26) observamos que só podemos considerar fluidos com $\gamma \neq 1$, pois $\gamma = 1$ nos dá uma singularidade da função densidade de estados $f(\omega)$.

10.3 Divergência e Regularização da Equação de Estado

Para obtermos a função densidade de estado (10.25) nós assumimos que o primeiro termo da equação (10.22) se anulava. Vamos abaixo determinar quando isto realmente ocorre e, quando não ocorre, como podemos modificar (regularizar) a Equação de Estado. Vamos então analisar o primeiro termo da equação (10.22) (que é o termo de fronteira).

Análise do primeiro termo da equação (10.22):

Substituímos $F(\omega)$ dada por (10.26) no primeiro termo da equação (10.22) e definimos $\frac{1}{\gamma-1} = \theta$. Além disso sabemos que $\gamma \in [0, 2]$, então θ pode ser > 0 ou < 0 .

1.- Limite superior ($\omega \rightarrow \infty$)

(i) $\theta > 0$.

Aplicando a Regra de L'Hospital é fácil ver que:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \ln \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \right) \omega^\theta = 0.$$

(ii) $\theta < 0$.

Neste caso também se obtém que o limite vai a zero. Portanto temos que para θ arbitrário:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \ln \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \right) \omega^\theta = 0.$$

2.- Limite inferior ($\omega \rightarrow 0$)

(i) $\theta > 0$.

Neste caso também se obtém, pela aplicação da Regra de *L'Hospital*,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \ln \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \right) \omega^\theta = 0$$

(ii) $\theta < 0$.

Para este caso é fácil ver que o limite para $\omega \rightarrow 0$ diverge. Portanto é necessário um processo de regularização de maneira que este termo seja cancelado ou se anule, como nos casos anteriores.

Assim, fazendo uma analogia com o caso do Efeito Casimir onde se utilizou uma função de corte, $e^{-\alpha\omega}$, para o caso de divergência ultravioleta, vamos, aqui, usar uma função de corte para divergência infravermelha, do seguinte tipo

$$g_\alpha(\omega) = \exp\left(-\frac{\alpha}{\omega}\right).$$

A função $F(\omega)$ que obtemos em (10.26) pode ser então regularizada usando a função de corte acima, ou seja definimos a função

$$F_\alpha(\omega) = F(\omega)g_\alpha(\omega) = F(\omega) \exp\left(-\frac{\alpha}{\omega}\right). \quad (10.27)$$

Agora fazemos a prescrição $F(\omega) \rightarrow F_\alpha(\omega)$, ou seja, trocamos a função original por sua contraparte regularizada.

Análise do primeiro termo da equação (10.22) com o cut-off $\exp(-\frac{\alpha}{\omega})$

1.- Limite superior ($\omega \rightarrow \infty$)

Neste caso o limite a calcular é o seguinte:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \ln \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \right) \omega^\theta \exp\left(-\frac{\alpha}{\omega}\right).$$

Mediante a aplicação da Regra *L'Hospital* obtém-se novamente que para θ arbitrário

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \ln \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \right) \omega^\theta \exp\left(-\frac{\alpha}{\omega}\right) = 0.$$

2.- Limite inferior ($\omega \rightarrow 0$)

(i) $\theta > 0$

Novamente a Regra de L'Hospital nos dá

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \ln \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \right) \omega^\theta \exp\left(-\frac{\alpha}{\omega}\right) = 0.$$

(ii) $\theta < 0$

Para fazer neste caso os cálculos, fazemos uma mudança de variável $\omega = \frac{1}{x}$, a qual novamente pela Regra de L'Hospital nos dá que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar}{kTx}\right) \right) \exp(-\alpha x)}{x^\theta} = 0$$

Portanto para o limite inferior e θ arbitrário, temos o resultado desejado

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \ln \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \right) \omega^\theta \exp\left(-\frac{\alpha}{\omega}\right) = 0.$$

A análise acima nos mostra que a função de corte $\exp(-\frac{\alpha}{\omega})$, é um regulador adequado e faz com que o primeiro termo da equação (10.22) se anule como esperado, para $0 \leq \gamma \leq 2$ uma vez que ele é originalmente nulo somente para $1 < \gamma < 2$.

Nós agora fazemos a seguinte prescrição: Voltamos à equação original (10.21) e fazemos a substituição de $f(\omega)$ pela sua contraparte regularizada $f_\alpha(\omega)$, ou seja vamos ter a seguinte expressão regularizada:

$$-kT \int_0^\infty \ln \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \right) f_\alpha(\omega) d\omega = (\gamma - 1)\hbar \int_0^\infty \frac{\omega f_\alpha(\omega)}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} d\omega. \quad (10.28)$$

Nosso objetivo agora é encontrar a forma de $f_\alpha(\omega)$.

Integrando por partes, o lado esquerdo de (10.28), encontramos para a pressão

$$-kT \ln \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \right) F_\alpha(\omega) \Big|_0^\infty + \hbar \int_0^\infty \frac{F'_\alpha(\omega)}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} d\omega. \quad (10.29)$$

onde $F_\alpha(\omega)$ claramente deve satisfazer

$$F'_\alpha(\omega) = f_\alpha(\omega). \quad (10.30)$$

O ponto crucial consiste em tomarmos $F_\alpha(\omega)$ como sendo do tipo dado por (10.27) e (10.26).

$$F'_\alpha(\omega) = F(\omega) \exp\left(-\frac{\alpha}{\omega}\right) = B\omega^{\frac{1}{\gamma-1}} \exp\left(-\frac{\alpha}{\omega}\right) \quad (10.31)$$

Derivando a equação (10.31) e usando (10.30), obtemos

$$f_{\alpha}(\omega) = \frac{B}{(\gamma - 1)} \left(1 + \frac{(\gamma - 1)\alpha}{\omega}\right) \omega^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}} \exp\left(-\frac{\alpha}{\omega}\right).$$

Podemos observar que, se $\alpha \rightarrow 0$, então $f_{\alpha}(\omega) \rightarrow f(\omega)$.

Portanto obtivemos uma função densidade de estado regularizada $f_{\alpha}(\omega)$ que faz com que o termo de fronteira (divergente), na expressão (10.29), se anule. Portanto a equação de estado regularizada de um γ -fluido fica

$$\hbar \int_0^{\infty} \frac{F_{\alpha}(\omega)}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} d\omega = (\gamma - 1)\hbar \int_0^{\infty} \frac{\omega f_{\alpha}(\omega)}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} d\omega,$$

ou seja, obtemos a equação de estado para γ -Fluidos regularizada

$$P_{\alpha} = (\gamma - 1)\rho_{\alpha}$$

onde

$$P_{\alpha} = \hbar \int_0^{\infty} \frac{F_{\alpha}(\omega)}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} d\omega$$

e

$$\rho_{\alpha} = \hbar \int_0^{\infty} \frac{\omega f_{\alpha}(\omega)}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} d\omega.$$

Observe que o fator exponencial, $\exp(-\frac{\alpha}{\omega})$, torna estas integrais finitas, conservando a equação de estado. Obviamente, obtivemos apenas uma regularização. O polo ainda é manifesto quando $\alpha \rightarrow 0$. No entanto, em analogia ao Efeito Casimir para o qual as altas frequências (razão de se tomar o corte $\exp(-\alpha\omega)$) são irrelevantes pois, fisicamente, as placas de Casimir são transparentes a elas, aqui também o corte $\exp(-\frac{\alpha}{\omega})$ nos indica que baixas frequências são irrelevantes para o cálculo da pressão e energia de um γ -fluido no espaço de Minkowski.

No Efeito Casimir um resultado finito e independente do parâmetro de regularização é obtido fazendo-se uma subtração adequada de duas configurações do campo (com placas e sem placas, por exemplo). Aqui acreditamos que tal prescrição possa ser implementada, mas isto foge ao escopo do presente trabalho.

Podemos então, obter o espectro regularizado para γ -fluidos, o qual tem a seguinte forma

$$\rho_{\alpha}(T, \omega) = \frac{\hbar\omega f_{\alpha}(\omega)}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} = \frac{\hbar B}{(\gamma - 1)} \frac{\left(1 + \frac{(\gamma-1)\alpha}{\omega}\right) \omega^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}.$$

No limite $\alpha \rightarrow 0$, obtemos

$$\rho(T, \omega) = \frac{B\hbar\omega^{\frac{1}{\gamma-1}}}{(\gamma-1)(\exp(\frac{\hbar\omega}{kT}) - 1)}.$$

Para o caso $\gamma = \frac{4}{3}$

$$\rho(T, \omega) = \frac{3hB\omega^3}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT}) - 1},$$

o qual é o espectro de Planck. Para $\gamma = 0$

$$\rho(T, \omega) = \frac{-hB\omega^{-1}}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT}) - 1},$$

que corresponde ao espectro do vácuo.

Este mesmo espectro foi deduzido por considerações termodinâmicas por Lima e Maia,[14]-[15].

Capítulo 11

Conclusões

Estudamos, neste trabalho, três métodos de regularização para integrais divergentes: Cut-Off, Regularização de Pauli-Villars e Regularização Dimensional. Tomamos a polarização do vácuo como exemplo e regularizamos sua integral divergente pelos três métodos acima mencionados. Isto possibilitou uma comparação entre os três métodos, o que não se encontra explicitamente na literatura. Nós nos concentramos no método de Cut-Off e o aplicamos no cálculo da energia Casimir em dimensão 1, no qual temos que regularizar uma divergência ultravioleta relacionada à energia de ponto zero. O Cut-Off adequado é do tipo $e^{-\alpha\omega}$, com $\alpha > 0$.

Por fim fazemos um estudo de γ -Fluidos e determinamos seu espectro utilizando métodos da física estatística. Aparece, então, nestes cálculos uma divergência infravermelha. Adaptando o método de Cut-Off para a região infravermelha, obtivemos a equação de estado regularizada para γ -Fluidos. Neste caso o Cut-Off usado foi do tipo $e^{-\frac{\alpha}{\omega}}$. Uma das dificuldades encontradas na determinação do espectro foi o fato de que tínhamos uma divergência num termo de fronteira. O Cut-Off $e^{-\frac{\alpha}{\omega}}$ foi fundamental para a solução deste problema.

Cumpramos observar que obtivemos uma equação de estado regularizada, porém não renormalizada, uma vez que a densidade de energia e a pressão regularizada ainda dependem do parâmetro regularizador α . Esperamos, no futuro, conseguir a equação de γ -Fluidos renormalizada, via, por exemplo, subtração das quantidades divergentes entre duas configurações diferentes do γ -Fluidos.

.1 Apêndice A1: Integrais e Fórmulas Úteis

$$\frac{1}{a_0 a_1 a_2 a_3} = \Gamma(4) \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz$$

$$\times \frac{1}{[a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)y + (a_3 - a_2)z]^4} \quad (\text{A.1})$$

$$\int \frac{d^4 p}{(p^2 + 2pq + t + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(t - q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 3 \quad (\text{A.2})$$

$$\int \frac{d^4 p p^\mu}{(p^2 + 2pq + t + i\varepsilon)^n} = -i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{q^\mu}{(t - q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 3 \quad (\text{A.3})$$

$$\int \frac{d^4 p p^\mu p^\nu}{(p^2 + 2pq + t + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-3)}{2\Gamma(n)} \frac{2(n-3)q^\mu q^\nu + (t - q^2)g^{\mu\nu}}{(t - q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 4 \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{1}{[b + (a-b)x]^2} dx \quad (\text{A.5})$$

$$\int_0^\theta \frac{q^2 dq}{[q + c^2]^2} = \theta^2 - 2c^2 \ell n \frac{\theta^2}{c^2} + c^2 \quad (\text{A.6})$$

$$\int_0^\theta \frac{q dq}{[q + c^2]^2} = \ell n \frac{\theta^2}{c^2} - 1 \quad (\text{A.7})$$

$$\int \frac{d^D q q^2}{(q^2 - A)^\alpha} = i(-1)^{\alpha-1} \pi^{\frac{D}{2}} A^{\frac{D}{2}+1-\alpha} \frac{D \Gamma(\alpha - \frac{D}{2} - 1)}{2 \Gamma(\alpha)} \quad (\text{A.8})$$

$$\int \frac{d^D q}{(q^2 - A)^\alpha} = i(-1)^\alpha \pi^{\frac{D}{2}} A^{\frac{D}{2}-\alpha} \frac{D \Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{2 \Gamma(\alpha)} \quad (\text{A.9})$$

$$a^x = 1 + x \ell n a + \frac{(x \ell n a)^2}{2!} + \frac{(x \ell n a)^3}{3!} + \dots \quad (\text{A.10})$$

.2 Apêndice A2

Vamos estudar neste Apêndice, as propriedades de invariância relativística e de gauge $R_1^{\alpha\beta}(k^2)$, que é dado por:

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = \int d^D p \frac{\text{Tr}[(\not{p} + m)\gamma^\alpha(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\beta]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon)}. \quad (\text{A.11})$$

Observemos que $R_1^{\alpha\beta}(k^2)$ é um tensor de segunda ordem e depende somente do quadrivetor k , portanto podemos escrever

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = C(k^2)k^\alpha k^\beta + D(k^2)g^{\alpha\beta}. \quad (\text{A.12})$$

Por outro lado, sabemos que a invariância de gauge implica:

$$k_\alpha R_1^{\alpha\beta}(k^2) = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2)k_\beta = 0. \quad (\text{A.14})$$

Substituindo (A.13) em (A.12), obtemos

$$k^2 C(k^2) + D(k^2) = 0. \quad (\text{A.15})$$

Assumindo agora que $C(k^2)$ é uma função regular de k^2 , isto é, não tem polos em k^2 , temos

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = (k^\alpha k^\beta - k^2 g^{\alpha\beta})C(k^2). \quad (\text{A.16})$$

Portanto, devemos achar $C(k^2)$, para a qual é suficiente avaliar $R_{1\alpha}^\alpha(k^2)$, isto é,

$$R_{1\alpha}^\alpha(k^2) = -3k^2 C(k^2). \quad (\text{A.17})$$

Além disso, de (A.12) e (A.11), temos

$$R_{1\alpha}^\alpha(k^2) = k^2 C(k^2) + 4D(k^2) = -8 \int d^D p \frac{(p^2 - 2m^2 - p \cdot k)}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon)}. \quad (\text{A.18})$$

Porém, de (A.17) e da suposição de que $C(k^2)$ é regular em $k^2 = 0$, devemos ter

$$R_{1\alpha}^\alpha(0) = 0. \quad (\text{A.19})$$

Também de (A.15), $D(k^2)$ deveria se anular em $k^2 = 0$. Mas esta relação não é satisfeita, pois de (A.18) temos

$$R_{1\alpha}^\alpha(0) = 4D(0) = -8 \int d^D p \frac{(p^2 - 2m^2)}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)^2}. \quad (\text{A.20})$$

Observemos, que a equação (A.20) é quadraticamente divergente, em $D = 4$ para $p \rightarrow \infty$. Portanto, ou a suposição de $C(k^2)$ ser uma função regular de k^2 está incorreta ou a polarização do vácuo não é invariante pelas transformações de gauge.

Mas sabemos que a invariância por transformações de gauge é importante na teoria e não deve ser perdida. Portanto devemos exigir que $D(0)$ na equação (A.20) seja zero. Isto significa reescrever $C(k^2)$ em (A.18) de tal forma que (A.19) seja válida, ou seja,

$$C(k^2) = -\frac{8}{3k^2} \int d^D p \left\{ \frac{(p^2 - 2m^2 - p \cdot k)}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon)} - \frac{(p^2 - 2m^2)}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)^2} \right\}. \quad (\text{A.21})$$

Observe que agora $C(k^2)$ não é regular em $k^2 = 0$. É fácil comprovar que substituindo (A.21) em (A.17), obtemos que (A.19) é satisfeita.

Referências

- [1] F. Mandl and G. Shaw. *Quantum Field Theory*. John Wiley & Sons (1984)
- [2] R. Delbourgo. *How to Deal with Infinite Integrals in Quantum Field Theory*. Rep. Prog. Phys. (1976) 39 345-399
- [3] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press (1985)
- [4] David Lurié. *Particles and Fields*. John Wiley & Sons (1968)
- [5] Otto Nachtmann. *Elementary Particle Physics*. Springer-Verlag (1990)
- [6] G. Källén. *Quantum Eletrodynamics*. Springer-Verlag (1972)
- [7] G. Sharff. *Finite Quantum Fletrodynamics*. Springer-Verlag (1989)
- [8] Taizo Muta. *Foundation of Quantum Chromodynamics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1987)
- [9] J.R.Ruggiero, A.H.Zimerman. *Application of Analytic Regularization to the Casimir Forces*. Revista Brasileira de Física, Vol. 7, N°3, (1977)
- [10] S.J.Chang. *Introduction to Quantum Field Theory*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1990)
- [11] L.Landau e E.M.Lifschitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press (1975)
- [12] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc. (1972)
- [13] Claude Itzykson and Jean-Bernard Zuber. *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill Inc.(1980)

- [14] J.A.S.Lima and A.Maia Jr. *On the Thermodynamic Properties of the Quantum Vacuum.*(Accito para publicação no Int. J. Theor. Phys. 1995)
- [15] J.A.S.Lima and A.Maia Jr. *Thermodynamic Properties of γ -Fluids and the Quantum Vacuum.* (Submetido a publicação no Phys. Rev. D)
- [16] James L. Anderson. *Principles of Relativity Physics.* Academic Press Inc. (1987)
- [17] Eugene Butkov. *Mathematical Physics.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1968)
- [18] J.M. Jauch and F. Rohrlich. *The Theory of Photons and Eletrons.* Springer-Verlag (1976)