

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN

**ESTADOS LIGADOS DE CAMPOS CLÁSSICOS
INTERAGENTES EM DOMÍNIOS FINITOS EM
DIMENSÃO $(1 + 1)$**

Jorge Abel Espichán Carrillo

Orientador: **Prof. Dr. Adolfo Maia Jr.**

Prof. Dr. Vladimir Mihaylovich Mostepanenko

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira

Prof. Dr. Márcio José Menon

Profa. Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato

Tese apresentada no Instituto de Física Gleb Wataghin,
como parte dos requisitos para a obtenção do título
de Doutor em Ciências.

Campinas

8 de Setembro de 1999

Dedico este trabajo a mis queridos Padres: Esther y Moisés y a mia familia, por el constante apoyo y estímulo, para la culminación de mis estudios.

Tía Angélica, infelizmente no habrá más, a quien decirle **Española**.

AGRADECIMENTOS

Ao final deste meu doutorado, gostaria de expressar o meu agradecimento ao Professor Adolfo Maia Jr. pela orientação, dedicação, amizade, compreensão, e paciência constante durante a realização deste trabalho, respeitando sempre meu modo de ser. E finalmente por ter me ensinado um pouco da física que sabe.

Também quero deixar meus sinceros agradecimentos:

Aos professores e colegas do Instituto pela sua amizade.

Aos professores Edmundo Capelas de Oliveira, Vladimir Mostepanenko e Andrei Grib pelas muitas sugestões ao longo deste trabalho.

À Fátima, secretária do Departamento de Matemática Aplicada do IMECC, pelas muitas ocasiões em que necessitamos de sua ajuda

Em especial, ao meu colega Antonio Maia, pela paciência em ler e corrigir o manuscrito da Tese.

Ao pessoal do IFGW, que me ajudou em vários problemas burocráticos ao longo de todo curso de meu doutorado.

Finalmente, ao CNPq e à FAPESP, pelo suporte financeiro dado para a execução deste trabalho.

A leitura de todo bom livro é como
uma conversação com os homens
que o escreverão, os mais dignos
das idades passadas, uma conversação
seleta é aquela que nos mostra seus
melhores pensamentos.

DESCARTES.

RESUMO

No presente trabalho, apresentamos primeiramente um breve resumo histórico sobre ondas solitárias (solitary waves) assim como definições do kink (Soliton) e estabilidade clássica. Também apresentamos o modelo de Dashen-Hasslacher-Neveu (DHN) [1], mostrando as contribuições para as correções radiativas da massa do kink.

Começamos então com o cálculo da solução geral estática para o potencial $V(\phi) = -\frac{1}{2}M^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4$, determinando duas famílias de soluções as quais denominamos Soluções Elípticas tipo sn e cn. Mostramos que a condição de fronteira Vácuo-Vácuo não pode ser satisfeita por nenhuma das Soluções Elípticas tipo sn num domínio limitado. No entanto as Soluções Elípticas tipo cn podem satisfazer esta condição. Além disso, impondo condições de fronteira tipo Dirichlet mostramos a existência de uma única solução clássica para as Soluções Elípticas tipo sn dentro do domínio. Definimos então grandezas físicas, as quais denominamos respectivamente de “carga topológica”, “energia total” (massa clássica) e “densidade de energia”, em domínios finitos para as Soluções Elípticas tipo sn e cn. Em seguida, calculamos os níveis de energia dos estados ligados de um campo escalar χ , o qual interage com outro campo escalar ϕ num domínio finito (caixa) em dimensão $(1 + 1)$. Estes cálculos são feitos para duas configurações clássicas do campo ϕ : primeiramente, para um caso particular das Soluções Elípticas tipo sn, a saber, o kink, e depois consideramos um caso mais geral com o campo ϕ dado pelas Soluções Elípticas tipo sn. No primeiro caso, mostra-se que quando a caixa é comprimida o nível de energia do estado fundamental do campo χ se divide, o que pode ser interpretado como uma instabilidade levando à produção de pares partícula-antipartícula sob pequenas perturbações num regime semi-clássico. Para o segundo caso, mostramos que existem comprimentos críticos da caixa unidimensional em que os autovalores de energia tornam-se complexos levando a instabilidades para as soluções do campo χ .

ABSTRACT

In this work, we present firstly a brief historical summary of solitary waves, as well as definitions of the kink and classical stability. We present the model of Dashen-Hasslacher-Neveu (DHN) [1], showing the contributions for radiative corrections of the kink's mass.

We start with the calculation of the general static solutions for the potential $V(\phi) = -\frac{1}{2}M^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4$, by finding two families of solutions named Elliptic Solutions of type sn and cn. We show that the vacuum-vacuum boundary conditions can not be satisfied by any Elliptic sn-type Solution in a finite domain. On the other hand the Elliptic cn-type Solutions can satisfy this condition. We prove the uniqueness for Elliptic sn-type Solutions satisfying Dirichlet boundary conditions in a finite domain. Also we define expressions for the “topological charge”, “total energy” (or classical mass) and “energy density” for Elliptic sn and cn-type Solutions in a finite domain. Next we calculate the energy levels of bound states of a scalar field χ interacting with another scalar field ϕ in a finite domain (box) in $(1+1)$ dimensions. We make these calculations for two classical configurations of the field ϕ : Firstly a particular case of the Elliptic sn-type Solutions is considered, namely, the kink solution and later we consider as classical configuration of the field ϕ , the Elliptic sn-type Solutions. For the first case, we show that when the box is squeezed the ground state level splits, which can be interpreted as an instability leading to a particle-antiparticle pair production under small perturbations in a semi-classical regime. For the second case, we show that there exist critical sizes of the box (one-dimensional) for which the energy eigenvalues become complex leading to instabilities for the solutions of the field χ .

Sumário

1	Introdução Geral	1
2	Aspectos Gerais	3
2.1	Ondas Solitárias e Sólitons Clássicos	3
2.1.1	Introdução Histórica	3
2.1.2	Conceitos Básicos	4
2.2	Conceito Físico: A Estabilidade Clássica de um Campo Escalar . . .	7
2.3	Modelo Semi-clássico de Dashen-Hasslacher e Neveu (DHN)	8
3	Soluções da Teoria $\lambda\phi^4$ dadas por Funções Elípticas de Jacobi num Domínio Finito	12
3.1	Soluções Gerais	13
3.2	Propriedades das Soluções Elípticas Numa Caixa Unidimensional	21
3.2.1	Soluções Elípticas do Tipo sn	21
3.2.2	Soluções Elípticas do Tipo cn	27
4	Níveis de Energia de Campos Clássicos Interagentes num Domínio Finito em Dimensão $(1 + 1)$: O Caso do kink	29
4.1	Cálculo das Soluções	30
4.2	Espectro Discreto	33
4.2.1	Condições de Fronteiras Tipo Dirichlet	33
4.2.2	Condições de Fronteira Periódicas	44
4.2.3	Condições de Fronteiras Anti-periódicas	47
4.3	Espectro Contínuo	50

5	Níveis de Energia de Campos Clássicos Interagentes num Domínio Finito em Dimensão $(1 + 1)$: Caso Geral	54
5.1	Autofunções e Autovalores Associados às Funções de Lamé	55
5.1.1	Autofunções e Autovalores do Campo ψ	59
5.2	Condições de Fronteira e Autovalores de Energia	63
5.2.1	Autovalores para as Condições de Fronteira Tipo Dirichlet	63
5.3	Deslocamentos de Níveis Induzidos pelo Tamanho da Caixa e Pontos de Instabilidade	68
5.4	Níveis Induzidos pelo Parâmetro Razão de Massa β e Pontos de Instabilidade	83
6	Conclusões e Perspectivas	88
A.1	Equação de Movimento Para a Primeira Correção Quântica de um Campo Clássico	93
A.2	Positividade da Hamiltoniana	95
A.3	Demonstração das Identidades (4.39) e (4.40)	96
A.4	Fluxograma da Tese	97

Figuras

3.1	Família das Soluções Elípticas tipo sn, para $c = 0.008, 0.049, 0.09, \dots, 0.418, 0.459, 0.5$. A solução para $c = 0.5$ é o kink [1]. Aqui e nas figuras posteriores deste capítulo definimos $\psi = \frac{M}{\sqrt{\lambda}}\phi$	17
3.2	Soluções dadas pela equação (3.13) para $c = \frac{1}{2}$. Neste caso as soluções do tipo kink e antikink são obtidas. Para as primeiras duas funções, ϕ' não é contínua em $x = 0$, assim não são aceitáveis.	19
3.3	Soluções dadas pela equação (3.13) para $c = 1$. Aqui se considera $x_0 = 0$. Para um comprimento arbitrário L existe só uma solução satisfazendo a condição de fronteira Vácuo-Vácuo em $\pm\frac{L}{2}$	20
3.4	Constante de integração versus o produto ML . O valor mínimo se encontra em $ML = 2\pi$	23
3.5	Densidade de energia para a família das Soluções Elípticas tipo sn, ($c = 0.008, 0.049, 0.09, \dots, 0.418, 0.459, 0.5$). A curva com $c = 0.5$ corresponde à densidade de energia do kink. Tomamos a variável Mx no gráfico acima, por ser adimensional.	25
4.1	Deslocamento dos estados ligados com o tamanho L da caixa. Neste caso $\beta = 1$. As linhas horizontais mostram os valores assintóticos do modelo do kink [1]. Aqui, bem como em figuras posteriores $2.82 = 2\sqrt{2}$	41
4.2	Dependência dos níveis de energia do estado fundamental do campo χ (ou ψ) com tamanho L da caixa, para diferentes valores de β . As linhas horizontais mostram os valores assintóticos do modelo semiclássico do kink [1]	42
4.3	O gap entre os níveis de energia ω_0 e ω_1 para um comprimento arbitrário L da caixa e $\beta = 1$	43

4.4	Discretização da parte contínua do espectro, mostrando a variação do gap entre níveis consecutivos, com o tamanho da caixa.	52
5.1	Autovalores de energia para $\beta = 0$	70
5.2	Autovalores de energia para $\beta = 1$	71
5.3	Autovalores de energia para $\beta = 2$	72
5.4	Autovalores de energia para $\beta = \frac{5}{2}$	73
5.5	Autovalores de energia para $\beta = 3$	74
5.6	Autovalores de energia para $\beta = 0$	76
5.7	Autovalores de energia para $\beta = 1$	77
5.8	Autovalores de energia para $\beta = 2$	78
5.9	Autovalores de energia para $\beta = 3$	79
5.10	Autovalores de energia para $\beta = 4$	80
5.11	Autovalores de energia para $\beta = 6$	81
5.12	Autovalores de energia para $\beta = 8$	82
5.13	Autovalores de energia dos estados ligados do campo χ vs. o parâmetro β	84
5.14	Autovalores de energia dos estados ligados do campo χ vs. o parâmetro β	85
5.15	Autovalores de energia dos estados ligados do campo χ vs. o parâmetro β	86

Capítulo 1

Introdução Geral

Na Teoria Quântica de Campos é bem conhecido que sistemas físicos podem modificar seus comportamentos quando são colocados dentro de cavidades. Um paradigma moderno é o Efeito Casimir. Veja, por exemplo, a referência [2], e mais recentemente a chamada Electrodinâmica Quântica de Cavidades [3]. De um ponto de vista matemático, este estudo pode ser traduzido como equações diferenciais lineares para campos sobre os quais são impostas condições de fronteira adequadas, daí obtendo-se as autofunções e autovalores de energia. Uma quantidade muito importante é a chamada Energia do Vácuo que é obtida como a soma dos autovalores da energia do campo confinado na cavidade. Em geral a soma é divergente necessitando de um processo de regularização e/ou renormalização para se obter um resultado fisicamente válido. Estes assuntos mencionados são essencialmente de natureza quântica. Contudo é bem conhecido que, para diferentes aplicações, os campos quânticos podem ser vistos como campos clássicos sobre os quais são adicionados correções quânticas [4]. Tal enfoque é conhecido na literatura como aproximação semi-clássica. Por outro lado, boa quantidade de informação pode ser conseguida do sistema mesmo em nível clássico.

Neste trabalho estudamos ainda em nível clássico (campos não quantizados) as consequências do confinamento de campos reais escalares interagentes em dimensão $(1 + 1)$. Nosso interesse maior é obter informações sobre estados ligados (bound levels). Para isto obtemos um par de equações não-lineares acopladas para dois campos, digamos ϕ e χ . Para um deles, χ , fazemos uma aproximação linear e estudamos seus estados ligados, para os quais ϕ entra como um potencial escalar.

No apêndice A.1, indicamos como fazer a aproximação semi-clássica e nas conclusões apresentamos perspectivas deste enfoque.

No capítulo 2 apresentamos um breve resumo histórico das ondas solitárias como também conceitos básicos acerca de ondas solitárias e sólitons clássicos. Definimos o conceito de estabilidade clássica necessário para análise dos resultados. Por último apresentamos um resumo do modelo de Dashen-Hasslacher-Neveu (DHN) [1], o qual foi a motivação inicial para a realização deste trabalho.

No capítulo 3 são apresentadas as soluções gerais estáticas para a equação de movimento de um campo escalar real clássico em dimensão $(1 + 1)$. Definimos algumas grandezas físicas de interesse, associadas a estas soluções, em domínios limitados.

No capítulo 4 são calculados os autovalores de energia dos estados ligados de um campo escalar real χ interagindo com outro campo escalar real ϕ , num domínio limitado (em dimensão $(1 + 1)$, temos um intervalo fechado). O campo ϕ aqui é um caso particular das soluções obtidas no capítulo 3, a saber, o kink.

No capítulo 5, calculamos os autovalores de energia dos estados ligados do campo escalar real χ interagindo com ϕ , num domínio limitado; porém, diferentemente do capítulo 4, este último é dado pela solução geral do tipo sn, determinada no capítulo 3.

No capítulo 6 são apresentadas as conclusões, discutindo-se os resultados obtidos em cada capítulo, assim como as perspectivas deste trabalho.

Capítulo 2

Aspectos Gerais

Este capítulo foi incluído por motivo de tornar este trabalho auto-suficiente para o leitor. Na seção 2.1 apresenta-se um breve resumo histórico e conceitos básicos das ondas solitárias e sólitons clássicos. Na seção 2.2 é introduzido o conceito físico da estabilidade clássica de um campo escalar. Finalmente na seção 2.3, apresentamos um resumo do modelo de Dashen-Hasslacher-Neveu (DHN) [1].

2.1 Ondas Solitárias e Sólitons Clássicos

Nesta seção fazemos uma breve descrição histórica e introduzimos o conceito de Ondas Solitárias e Sólitons.

2.1.1 Introdução Histórica

Em Agosto de 1834, John Scott Russell fez a primeira observação acerca da existência das “ondas solitárias”.

Ele esteve observando o movimento de um bote o qual se movimentava rapidamente ao longo de um canal estreito, quando o bote parou de repente, mas não a massa de água, que se encontrava em movimento ao redor da proa do bote, a qual continuou avançando com grande velocidade, tomando a forma de uma grande elevação solitária. Aparentemente, no entanto, continuava em movimento a sua forma não mudava, nem sua velocidade diminuía. Depois de uma perseguição de uma ou duas milhas, sua altura foi gradualmente diminuindo até que desapareceu no sinuoso canal [5] [6] [7].

J. Scott Russell então propôs que o objeto solitário representava uma classe geral de soluções da Hidrodinâmica, as quais denominou primeiro de “ondas de translação” e posteriormente “ondas solitárias”. Diferente da onda de choque, a qual é singular na frente de onda, a onda solitária é regular em todas partes, sem singularidades. A onda solitária é não dispersiva e estável; portanto, é diferente de qualquer pacote de onda formado de ondas planas [6].

Por outro lado, a questão era saber se tais soluções estáveis, não singulares e não dispersivas, poderiam existir em outros domínios da Física, fora da Hidrodinâmica [7]. Pelos meados da década de 60, a onda solitária já era considerada como um importante estado estável de alguns sistemas não lineares. Mais de 130 anos, depois da observação de J. Scott Russell, as ondas solitárias aparecem hoje em muitos campos da Matemática Aplicada e da Física, tais como Meteorologia, Física de Partículas Elementares, Física de Estado Sólido, Física de Plasmas e Laser [8] [9].

2.1.2 Conceitos Básicos

Existem algumas soluções das equações diferenciais parciais não lineares, que têm a propriedade de propagar-se sem dispersão, com velocidade uniforme e além disso existem soluções que podem interagir entre si e, depois da colisão, manter sua forma original, pelo menos assintoticamente no tempo. Tais soluções são freqüentemente chamadas de sólitons [5].

Para se estudar estas soluções, lembramos aqui algumas propriedades da equação de onda relativística mais simples (equação de D’Lambert),

$$\square\phi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi = 0, \quad (2.1)$$

onde ϕ é um campo escalar real em dimensão $(1+1)$. As propriedades desta equação são bem conhecidas. É uma equação linear com soluções não dispersivas. Como consequência suas soluções têm duas características:

(a) Para qualquer função $f(x)$, com derivadas contínuas até segunda ordem, $f(x \pm ct)$ é uma solução da equação (2.1). Em particular se escolhermos uma função localizada $f(x \pm ct)$, podemos construir um pacote de onda localizado, que se propagará com velocidade uniforme $\pm c$, e não sofrerá qualquer modificação na sua forma.

A propagação sem distorção do pacote de ondas $f(x \pm ct)$ com velocidade c está relacionado ao fato que todas suas componentes, as ondas planas, têm a mesma velocidade de fase $\frac{w}{k} = c$.

(b) Como a equação da onda é linear então, dados dois pacotes de ondas localizados, sua soma também será uma solução. Para $t \rightarrow -\infty$, a soma consiste de dois pacotes, os quais se encontravam separados e aproximando-se um ao outro. Para um tempo t finito eles colidem. Depois da colisão para $t \rightarrow +\infty$, eles se separam assintoticamente nos mesmos dois pacotes mantendo suas formas e velocidades originais. Estas duas características (a) e (b) da equação (2.1) como mencionado acima, são devidas ao fato que esta equação é linear e não dispersiva. Porém em muitos casos da física as equações de onda são mais complicadas, podendo incluir termos não lineares, termos dispersivos e/ou campos acoplados. A pergunta imediata é então se tais equações, mais complicadas comparadas com a equação (2.1), podem ter soluções com as características (a) e talvez (b).

Por outro lado, observa-se que o acréscimo de um termo mais simples (como uma constante) na equação (2.1) destroi as características (a) e (b). Por exemplo, consideremos a equação de Klein-Gordon em dimensão $(1 + 1)$,

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 c^2 \right) \phi(x, t) = 0. \quad (2.2)$$

Esta equação é ainda linear, mas agora $w^2 = k^2 c^2 + m^2 c^4$, i.e., diferentes comprimentos de ondas se propagam com diferentes velocidades $\frac{w(k)}{k}$, e portanto a equação (2.2) será dispersiva.

Desta maneira, a característica (a) é perdida assim como (b), pois se um só pacote não pode manter sua forma, menos ainda vários pacotes mantêm suas formas depois da colisão.

Mas é possível que para algumas equações onde existem termos dispersivos e não lineares, seus efeitos sejam equilibrados um ao outro de tal maneira que algumas soluções especiais satisfaçam a característica (a). Estas soluções são conhecidas como *ondas solitárias*, e um subconjunto destes casos que satisfazem a característica (b) são chamados *sólitons*.

Na literatura atual não existe uma definição geral das ondas solitárias e sólitons. Neste trabalho vamos usar uma definição em termos da densidade de energia. Isto

significa que estudaremos equações de campos que têm associada uma densidade de energia ε a qual é uma função do campo ϕ . Sua integral no espaço é a energia total conservada $E(\phi)$. Como os sistemas físicos têm um limite inferior de energia, pode-se, sem perda de generalidade, fixar o mínimo valor alcançado por E como igual a zero. Nós faremos uso do adjetivo “localizado” para as soluções das equações de campos, cuja densidade de energia ε se concentre, em qualquer tempo finito t , i.e., é finita em alguma região limitada do espaço e quando é integrada no espaço infinito ao longo da região de concentração, vai rapidamente para zero.

Portanto dada uma função localizada neste sentido de densidade de energia, definimos uma *onda solitária* como uma solução não singular localizada de qualquer equação de campo não linear (ou equações acopladas, quando vários campos estão presentes) cuja densidade de energia, também localizada, tem uma dependência espaço-tempo. Em outras palavras, a densidade de energia deve se mover sem distorção e com velocidade constante.

Existem ondas solitárias que têm uma característica a mais, a qual é uma generalização da característica (b). Estas ondas solitárias são chamadas de *sólitons*. Em outras palavras, os sólitons são ondas solitárias cujos perfis de densidade de energia são assintoticamente (em $t \rightarrow +\infty$) reestabelecidos à suas formas e velocidades originais, após uma colisão.

Todos os sólitons são ondas solitárias, mas o inverso não é verdadeiro. Eles existem para muito poucas equações e são muito difíceis de se encontrar. Para achar uma solução de onda solitária de uma equação não linear, precisamos procurar uma solução localizada cuja densidade de energia, também localizada, tenha uma dependência do espaço-tempo. Isto é, freqüentemente, bastante difícil de fazer, mas várias equações têm, como soluções, ondas solitárias. Em contraste, para assegurar que uma solução é um sóliton, deve-se achar não somente essa solução, mas também, muitas soluções dependentes do tempo, as quais consistem de um número arbitrário de sólitons, e que verificam a característica (b) [9].

Soluções das equações de campo do tipo Sóliton em dimensão $(1+1)$, para campos escalares dos modelos $\lambda\phi^4$ ou Sine-Gordon são chamados de kinks como veremos na seção 2.3. Outras soluções como Vórtices, Monopólos Magnéticos e Instantons, são

também soluções do tipo Sóliton que aparecem em Teoria dos Campos de Gauge [10].

2.2 Conceito Físico: A Estabilidade Clássica de um Campo Escalar

Nesta seção é discutido, brevemente, um conceito físico que será necessário para a interpretação de uma parte dos resultados obtidos no presente trabalho. Este conceito é a estabilidade clássica de um campo escalar ϕ . Este conceito pode ser discutido de duas maneiras diferentes [4]. Para isto, considera-se uma densidade Lagrangiana da forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi),$$

onde $V(\phi)$ é o potencial, que dependerá em geral de vários parâmetros numéricos (constantes de acoplamentos).

A equação de movimento para o caso estático em dimensão $(1 + 1)$ é dada por:

$$\phi'' - V'(\phi) = 0. \quad (2.3)$$

A energia do campo estático ϕ é dada por

$$E(\phi) = \int dx \left(\frac{1}{2} (\phi')^2 + V(\phi) \right). \quad (2.4)$$

Agora para estudar a estabilidade clássica vamos escrever uma solução dependente do tempo para a equação (2.3) da seguinte maneira:

$$\phi(x, t) = \phi_0(x) + \psi_k e^{i\omega_k t},$$

onde ϕ_0 é a solução independente do tempo e o outro termo é uma pequena perturbação dependente do tempo, denotado pelo parâmetro k . Tomando somente os termos lineares da pequena perturbação ψ_k , pode-se obter uma equação tipo Schrödinger para ψ_k , i.e.,

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V''(\phi_0) \right) \psi_k(x) = \omega_k^2 \psi_k(x). \quad (2.5)$$

Assim a estabilidade clássica estará assegurada quando os autovalores ω_k^2 são não negativos, de maneira que pequenas perturbações sobre ϕ_0 não cresçam exponencialmente no tempo.

Uma outra maneira de formular a estabilidade clássica é via o cálculo variacional. A equação (2.3) pode ser obtida impondo que o funcional da energia $E(\phi)$, dada pela equação (2.4), seja estacionária com respeito à variações de ϕ , ou seja

$$\frac{\delta E(\phi)}{\delta \phi(x)} = -\phi'' + V'(\phi) = 0. \quad (2.6)$$

Para assegurar a estabilidade é preciso que a segunda variação, ou seja,

$$\frac{\delta^2 E(\phi)}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V''(\phi) \right) \delta(x - y), \quad (2.7)$$

estimada na solução ϕ_0 , seja um operador diferencial não negativo. Claramente isto significa que todos os autovalores de (2.7) em $\phi = \phi_0$ devem ser não negativos, o que leva novamente ao estudo da equação (2.5). Assim a estabilidade clássica, para ambas formulações, exige que os autovalores da equação do tipo Schrödinger sejam não negativos. Por último devemos mencionar que a exigência da estabilidade clássica é motivada pelo requerimento que o correspondente estado quântico seja estável [4].

2.3 Modelo Semi-clássico de Dashen-Hasslacher e Neveu (DHN)

Esta seção é uma revisão do modelo semi-clássico do kink, primeiramente descrito por Dashen, Hasslacher e Neveu DHN [1]. Nela é mostrado, para os casos dos espectros discreto ($\omega^2 < 2M^2$) e contínuo ($\omega^2 \geq 2M^2$), as contribuições para as correções radiativas da massa do kink.

Considere a densidade Lagrangiana de um campo escalar real $\phi(x)$ em dimensão $(1 + 1)$, dada por:

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_x \phi) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 - V(\phi),$$

onde $V(\phi) = -\frac{1}{2} M^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4$, M é a massa do campo ϕ e o ponto $(\cdot)$ significa derivada com respeito a t .

Os mínimos do potencial $V(\phi)$ são dados por:

$$\phi = 0, \quad \phi_m = \pm \frac{M}{\sqrt{\lambda}} \quad (\text{os vácuos}). \quad (2.8)$$

A equação clássica de movimento (caso estático) da densidade Lagrangiana será dada por:

$$\partial_{xx}\phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (2.9)$$

As soluções para a equação (2.9), as quais satisfazem a condição de fronteira Vácuo-Vácuo em $(\pm\infty)$, são dadas por:

$$\phi_0(x) = \pm \frac{M}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left(\frac{M}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right). \quad (2.10)$$

Estas soluções são chamadas de kink (+) e Antikink (-). Claramente é possível observar que o comportamento assintótico de (2.10) quando $x \rightarrow \pm\infty$ com $(x_0 = 0)$, tem a configuração do Vácuo, isto é, $\pm \frac{M}{\sqrt{\lambda}}$.

A hamiltoniana e energia do kink são dadas respectivamente por:

$$H = \int dx \left(\frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 + V(\phi) \right),$$

e

$$E = \int dx \left(\frac{1}{2}(\partial_x \phi_0)^2 + V(\phi_0) \right).$$

Além disso, a massa do kink é definida como:

$$M_0 = E - E_{g.s.} = \int \left(\frac{1}{2}(\partial_x \phi_0)^2 + V(\phi_0) - V(\phi_m) \right) dx \equiv \int \varepsilon(x) dx,$$

onde, $E_{g.s.}$ é a energia do estado fundamental (ground state) e $\varepsilon(x)$ é a densidade de energia dada por:

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\phi_0'^2(x) - \frac{1}{2}M^2(\phi_0^2(x) - \frac{M^2}{\lambda}) + \frac{\lambda}{4}(\phi_0^4(x) - \frac{M^4}{\lambda^2}) = \frac{M^4}{2\lambda \cosh^4(\frac{Mx}{\sqrt{2}})}.$$

Portanto:

$$M_0 = \frac{2\sqrt{2}M^2}{3\lambda}, \quad \text{Massa clássica.}$$

Para estudar as correções quânticas, considera-se que o campo $\phi(x)$ é igual à solução clássica $\phi_0(x)$ mais uma perturbação quântica $\eta(x)$, i.e.,

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \eta(x),$$

onde $\eta(x)$ é uma nova variável quântica.

Por outro lado, a hamiltoniana usando $\phi(x)$ é dada por:

$$H = \int dx \left(\frac{1}{2} (\partial_x \phi_0 + \partial_x \eta)^2 + V(\phi_0 + \eta) \right).$$

Agora fazendo uma expansão, em $\eta(x)$, desta expressão, obtemos:

$$\begin{aligned} H = & \int dx \left(\frac{1}{2} (\partial_x \phi_0)^2 + V(\phi_0) \right) + \int dx ((\partial_x \phi_0)(\partial_x \eta) + V'(\phi_0) \eta) \\ & + \int dx \left(\frac{1}{2} (\partial_x \eta)^2 + \frac{1}{2} V''(\phi_0) \eta^2 \right) + \int dx \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} V^n(\phi_0) \eta^n. \end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito é a energia clássica da solução ϕ_0 . O segundo é um termo linear em η

$$\int dx (-\partial_x^2 \phi_0 + V'(\phi_0)) \eta,$$

o qual será nulo, pois $\phi_0(x)$ é uma solução clássica satisfazendo a equação de movimento $-\partial_x^2 \phi_0 + V'(\phi_0) = 0$. O termo seguinte é quadrático em η , e finalmente os termos superiores que representam as interações. Aqui se restringe somente a contribuições até segunda ordem em η . Portanto para calcular as correções radiativas da massa do kink, devemos diagonalizar o termo quadrático em η , o qual chamaremos de H_2 i.e.,

$$H_2 = \int dx \left(\frac{1}{2} \eta(x) (-\partial_x^2 + V''(\phi_0)) \eta(x) \right).$$

Observamos que o operador diferencial $-\partial_x^2 + V''(\phi_0)$, é semelhante ao operador de Schrödinger $-\partial_x^2 + U(x)$, com $U(x) = V''(\phi_0(x))$.

A tarefa será, então, determinar os autovalores da seguinte equação diferencial:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right) \psi(x) = \omega^2 \psi(x), \quad (2.11)$$

onde, $U(x) = V''(\phi_0(x))$ e $\psi(x)$ é a autofunção do operador $-\frac{d^2}{dx^2} + U(x)$.

Como $V(\phi) = -\frac{1}{2}M^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4$, então temos,

$$U(x) = -M^2 + 3\lambda\phi_0^2(x).$$

Agora, substituindo (2.10), na expressão anterior obtém-se:

$$U(x) = -M^2 + 3M^2 \tanh^2\left(\frac{M}{\sqrt{2}}x\right).$$

Substituindo esta expressão na equação (2.11), obtemos:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - M^2 + 3M^2 \tanh^2\left(\frac{M}{\sqrt{2}}x\right)\right) \psi(x) = \omega^2 \psi(x). \quad (2.12)$$

As soluções desta equação para o caso discreto ($\omega^2 < 2M^2$) são:

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{Mx}{\sqrt{2}}\right)}; \quad \text{para } \omega_0 = 0, \\ \psi_1(x) &= \frac{\sinh\left(\frac{Mx}{\sqrt{2}}\right)}{\cosh^2\left(\frac{Mx}{\sqrt{2}}\right)}; \quad \text{para } \omega_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}M. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Os resultados (2.13) (os autovalores ω_0 e ω_1) são as contribuições da parte discreta das correções radiativas do modelo DHN.

Neste trabalho estaremos interessados no comportamento de níveis de energia de estados ligados. Os níveis do modelo DHN nas equações (2.13) acima são importantes, porque eles serão utilizados como regime assintótico (condição de fronteira) para nossas soluções em domínios limitados.

No caso do espectro contínuo ($\omega^2 \geq 2M^2$) as soluções são dadas por:

$$\psi_q(x) = e^{iqx} \left(3 \tanh^2\left(\frac{Mx}{\sqrt{2}}\right) - 3iq \tanh^2\left(\frac{Mx}{\sqrt{2}}\right) - q^2 - 1 \right),$$

onde $\omega_q = \sqrt{q^2 + 2M^2}$ e q são os modos normais.

Portanto a primeira correção quântica para massa do kink é dada por

$$\Delta M_0 = \frac{\hbar}{2}\omega_0 + \frac{\hbar}{2}\omega_1 + \sum_q \sqrt{q^2 + 2M^2},$$

onde o último termo é a contribuição da parte contínua. Esta contribuição é divergente e necessita, portanto, de um processo de regularização. Após esta regularização a primeira correção quântica, daí denominada *massa renormalizada*, é dada por

$$(\Delta M_0)_R = \hbar \left(-\frac{3M}{\pi\sqrt{2}} + \frac{M}{2\sqrt{6}} \right).$$

Capítulo 3

Soluções da Teoria $\lambda\phi^4$ dadas por Funções Elípticas de Jacobi num Domínio Finito

Neste capítulo obtemos as soluções gerais estáticas da equação de movimento de um campo escalar real ϕ para o potencial $V(\phi) = -\frac{1}{2}M^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4$ num domínio finito em dimensão (1+1). Uma família de soluções reais é descrita em termos das Funções Elípticas de Jacobi. Mostramos que as condições de fronteira Vácuo-Vácuo, tal qual para o kink, podem ser satisfeitas por certas combinações algébricas de Funções Elípticas, as quais denominamos *soluções tipo cn*, mas agora num domínio finito. Por brevidade, algumas vezes denominaremos estas soluções simplesmente por Soluções Elípticas de Jacobi. Verificamos então a unicidade das Soluções Elípticas tipo sn satisfazendo as condições de fronteira tipo Dirichlet num intervalo finito (caixa), assim como a existência de uma massa mínima associadas a estas soluções.

Definimos várias grandezas físicas associadas a estas soluções num domínio finito. Chamamos estas expressões de “Carga Topológica”, “Energia Total” (ou massa clássica) e “Densidade de Energia” para as Soluções Elípticas tipo sn e cn num domínio finito. Para grandes comprimentos (tamanho) da caixa, a carga conservada, a massa clássica e a densidade de energia do kink são recuperadas [10]. Por outro lado, mostramos que para condições de fronteira periódicas, os resultados obtidos para o caso Dirichlet são válidas também aqui. Para o caso das condições de fronteira anti-periódicas todas as soluções elípticas tipo sn são permitidas, pois estas soluções são funções ímpares.

Na seção 3.1 determinamos as soluções gerais estáticas para o campo escalar real ϕ . Na seção 3.2 estudamos as propriedades das soluções elípticas numa caixa unidimensional.

3.1 Soluções Gerais

Nesta seção obtemos as soluções gerais estáticas para a equação de movimento de um campo escalar real $\phi(x)$ com um potencial $V(\phi)$ dado por, $V(\phi) = -\frac{1}{2}M^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4$. Diferentemente das condições de fronteira do modelo do kink impostas no infinito [1], consideramos condições de fronteira em um domínio finito.

No capítulo anterior mostramos soluções estáticas (equação (2.10)), as quais satisfazem as condições de fronteira Vácuo-Vácuo em $x = \pm\infty$ [1]. No entanto, soluções mais gerais não satisfazem esta condição de fronteira para o potencial acima num domínio finito.

Abaixo calculamos as soluções estáticas da equação clássica de movimento (2.9), sobre as quais impomos condições de fronteira em um domínio finito em uma dimensão espacial que, neste trabalho, tomamos, sem perda de generalidade, como o intervalo $\Omega \equiv (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}) \in \mathbf{R}$. Para se obter soluções bem definidas e limitadas, impõe-se que estas soluções sejam de classe $C^2(\Omega)$.

A solução prévia da equação diferencial de segunda ordem (2.9), depois de uma mudança de variável, é dada por:

$$x - x_0 = \pm \frac{1}{M} \int \frac{dz}{\sqrt{z^4 - z^2 + \frac{c}{2}}}, \quad (3.1)$$

onde $z = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}M}\phi$ é uma variável adimensional e x_0 e c são constantes de integração.

Para que a equação (3.1) tenha soluções reais, claramente devemos impor que $z^4 - z^2 + \frac{c}{2} > 0$.

Note que os pontos críticos da função $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z^4 - z^2 + \frac{c}{2}}}$, são dados pelos valores:

$$z = 0, \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por outro lado, para $c = 0$ e $c = \frac{1}{2}$, a integral na equação (3.1) não é definida nestes pontos críticos. Como consequência deste fato, dividimos nossa análise nos seguintes casos: 1) $c \leq 0$, 2) $0 < c < \frac{1}{2}$ e 3) $c \geq \frac{1}{2}$.

É importante enfatizar que o objetivo deste cálculo é obter soluções estáticas $\phi(x)$ que satisfaçam a condição de fronteira Vácuo-Vácuo, como no caso da solução (2.10), mas agora num domínio finito e daí estudar suas propriedades.

1) **CASO** $c \leq 0$

A desigualdade $(z^4 - z^2 + \frac{c}{2}) > 0$ é satisfeita para $|z| > \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-2c}}{2}}$. Daí a integral na equação (3.1) é dada por [11]

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^4 - z^2 + \frac{c}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1-2c}} F(\theta, r), \quad (3.2)$$

onde

$$F(\theta, r) = \int_0^\theta \frac{dt}{\sqrt{1 - r \sin^2 t}}$$

é a integral elíptica de primeira classe, e além disso

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{1 + \sqrt{1-2c}}}{\sqrt{2}z}\right) \quad \text{e} \quad r = \frac{-1 + \sqrt{1-2c}}{2\sqrt{1-2c}}.$$

Portanto, usando a equação (3.2), a integral da equação (3.1) pode ser reescrita como

$$F\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{1 + \sqrt{1-2c}}}{\sqrt{2}z}\right), \frac{-1 + \sqrt{1-2c}}{2\sqrt{1-2c}}\right) = \pm M \sqrt[4]{1-2c} (x - x_0). \quad (3.3)$$

As soluções da equação (3.3), i.e., a determinação de z são dadas por [12]:

$$z = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1-2c}}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\text{cn}\left(\pm \sqrt[4]{1-2c} M (x - x_0), \frac{-1 + \sqrt{1-2c}}{2\sqrt{1-2c}}\right)},$$

onde $\text{cn}(\pm \sqrt[4]{1-2c} M (x - x_0), \frac{-1 + \sqrt{1-2c}}{2\sqrt{1-2c}})$ são as Funções Elípticas de Jacobi cn .

Substituindo $z = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}M} \phi$, obtemos a solução para $\phi(x)$ (a qual denotaremos, de uma maneira geral, $\phi_c(x)$ para cada c fixado), isto é :

$$\phi_c(x) = \frac{M \sqrt{1 + \sqrt{1-2c}}}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\text{cn}\left(\pm \sqrt[4]{1-2c} M (x - x_0), \frac{-1 + \sqrt{1-2c}}{2\sqrt{1-2c}}\right)}. \quad (3.4)$$

Observamos que a solução (3.4) é uma função não limitada uma vez que a função elíptica cn tem zeros [12]. Além disso, observa-se que as amplitudes das funções $\text{cn}^{-1}(\pm \sqrt[4]{1-2c} M(x-x_0), \frac{-1+\sqrt{1-2c}}{2\sqrt{1-2c}})$ são maiores ou iguais a 1, e como também $\sqrt{1+\sqrt{1-2c}} \geq \sqrt{2}$, então, o valor de $|\phi_c(x)|$ é sempre maior que $\frac{M}{\sqrt{\lambda}}$. Portanto as soluções dadas por (3.4) não podem satisfazer as condições de fronteira Vácuo-Vácuo.

2) CASO $0 < c < \frac{1}{2}$

Aqui $(z^4 - z^2 + \frac{c}{2}) > 0$ é satisfeita para:

$$a) |z| > \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-2c}}{2}} \quad \text{ou} \quad b) |z| < \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-2c}}{2}}.$$

$$a) |z| > \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-2c}}{2}}$$

Neste primeiro caso, a integral na equação (3.1) é dada por [11] :

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^4 - z^2 + \frac{c}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}} \times F\left(\arcsen\left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}}{\sqrt{2}z}\right), \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2c}}{c}}\right). \quad (3.5)$$

Assim, fazendo uso de (3.5), a equação (3.1) pode ser reescrita como:

$$F\left(\arcsen\left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}}{\sqrt{2}z}\right), \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2c}}{c}}\right) = \mp M \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-2c}}{2}} (x-x_0). \quad (3.6)$$

Como no caso prévio, a solução da equação (3.6), é dada por:

$$z = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\text{sn}\left(\pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-2c}}{2}} M(x-x_0), \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2c}}{c}}\right)},$$

onde $\text{sn}(\pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-2c}}{2}} M(x-x_0), \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2c}}{c}})$ são as Funções Elípticas de Jacobi do tipo sn [12].

Substituindo $z = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2M}}\phi$, obtemos a solução para $\phi_c(x)$

$$\phi_c(x) = \frac{M\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\operatorname{sn}\left(\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-2c}}{2}}M(x-x_0), \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2c}}{c}}\right)}. \quad (3.7)$$

Como no primeiro caso ($c \leq 0$), é fácil ver que esta solução não é finita, pois sn tem zeros.

Além disso, é fácil ver também que a amplitude de $\phi_c(x)$ para $c \neq \frac{1}{2}$ é maior que $\frac{M}{\sqrt{\lambda}}$. Assim as soluções dadas pela equação (3.7) também não satisfazem a condição de fronteira Vácuo-Vácuo. Por outro lado, observamos que no limite $c \rightarrow \frac{1}{2}$, obtemos da equação (3.7) a solução,

$$\phi(x) = \pm \frac{M}{\sqrt{\lambda}} \coth\left(\frac{M}{\sqrt{2}}(x-x_0)\right).$$

Embora esta solução satisfaz a condição de fronteira Vácuo-Vácuo (em $\pm\infty$), ela tem uma descontinuidade em $x = x_0$, e portanto deve ser descartada.

b) $|z| < \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-2c}}{2}}$

Neste segundo caso, a integral (3.1) é dada por [11]:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^4 - z^2 + \frac{c}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}} \times F\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}z}{\sqrt{1-\sqrt{1-2c}}}\right), \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2c}}{c}}\right). \quad (3.8)$$

Substituindo (3.8) na equação (3.1), obtemos

$$F\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}z}{\sqrt{1-\sqrt{1-2c}}}\right), \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2c}}{c}}\right) = \pm \frac{M\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}}{\sqrt{2}}(x-x_0). \quad (3.9)$$

A solução desta equação (3.9), é dada por [12]:

$$z = \pm \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}} \operatorname{sn}\left(\frac{M\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}}{\sqrt{2}}(x-x_0), \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2c}}{c}}\right).$$

Como nos casos anteriores, substituindo $z = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2M}}\phi$, obtemos :

$$\phi_c(x) = \pm \frac{M}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 2c}}} \operatorname{sn} \left(\frac{M\sqrt{1 + \sqrt{1 - 2c}}}{\sqrt{2}}(x - x_0), \frac{1}{-1 + \frac{1 + \sqrt{1 - 2c}}{c}} \right) \quad (3.10)$$

É fácil ver que a solução acima descreve uma família de Funções Elípticas de Jacobi do tipo sn parametrizadas pela constante de integração c (Figura 3.1), as quais, para simplificar, denominamos coletivamente de *Soluções Elípticas tipo sn* . Observe que a solução kink (equação 2.10) é obtida como um caso limite da equação (3.10), quando $c \rightarrow \frac{1}{2}$.

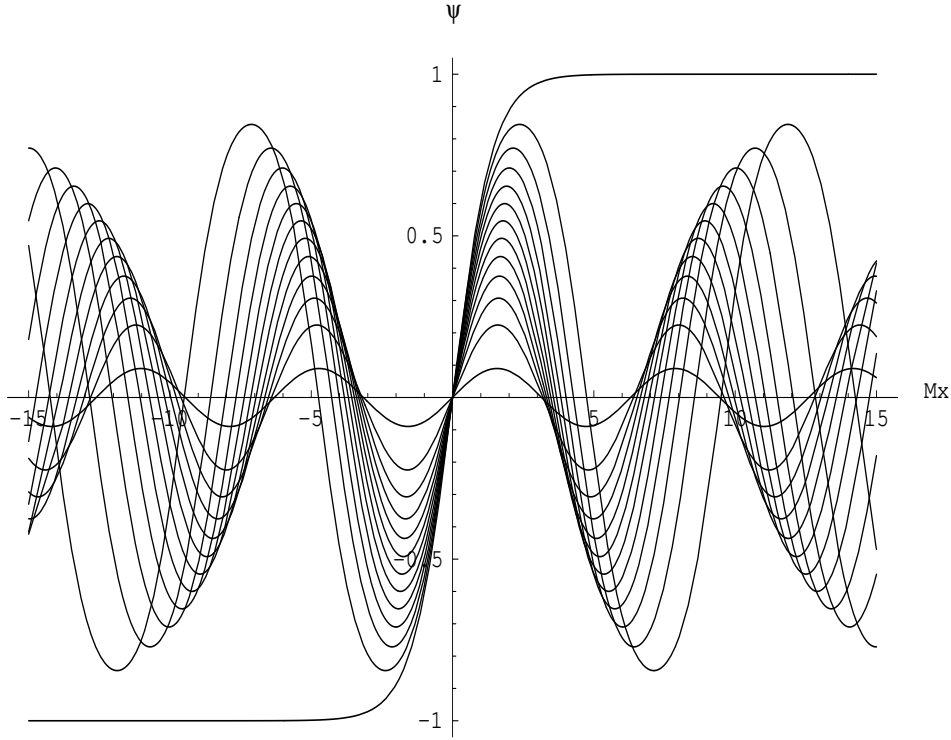


Figura 3.1: Família das Soluções Elípticas tipo sn , para $c = 0.008, 0.049, 0.09, \dots, 0.418, 0.459, 0.5$. A solução para $c = 0.5$ é o kink [1]. Aqui e nas figuras posteriores deste capítulo definimos $\psi = \frac{M}{\sqrt{\lambda}}\phi$.

Uma característica da família de funções (3.10) é que a condição de fronteira Vácuo-Vácuo não pode ser satisfeita exceto para $c = \frac{1}{2}$. O argumento é simples. Em geral as Funções Elípticas de Jacobi satisfazem $|\operatorname{sn}(u, m)| < 1$, e como também

$\sqrt{1 - \sqrt{1 - 2c}} < 1$, então $|\phi_c(x)| < \frac{M}{\sqrt{\lambda}}$. Portanto não existem soluções do tipo kink para $0 < c < \frac{1}{2}$. Somente a solução do kink ($c = \frac{1}{2}$) satisfaz a condição de fronteira Vácuo-Vácuo em $\pm\infty$.

3) CASO $c \geq \frac{1}{2}$

Neste caso $(z^4 - z^2 + \frac{c}{2}) > 0$ é satisfeita $\forall z \in \mathbf{R}$. Assim, temos de [11]

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^4 - z^2 + \frac{c}{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{c}} F \left(2 \arctan \left(\sqrt{\frac{2}{c}} z \right), \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}} \right) \right). \quad (3.11)$$

Substituindo (3.11) em (3.1) obtemos

$$F \left(2 \arctan \left(\sqrt{\frac{2}{c}} z \right), \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}} \right) \right) = \pm 2M \sqrt{\frac{c}{2}} (x - x_0). \quad (3.12)$$

A solução desta equação [12] (já feita a substituição $z = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2M}} \phi$), é dada por:

$$|\phi_c(x)| = \frac{M \sqrt[4]{2c}}{\sqrt{\lambda}} \times$$

$$\left| \frac{\operatorname{sn} \left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}} M(x - x_0), \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}} \right) \right) \operatorname{dn} \left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}} M(x - x_0), \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}} \right) \right)}{\operatorname{cn} \left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}} M(x - x_0), \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}} \right) \right)} \right|. \quad (3.13)$$

Devido à identidade [12]

$$\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} = \left(\frac{1 - \operatorname{cn} 2x}{1 + \operatorname{cn} 2x} \right)^{\frac{1}{2}},$$

denominaremos as soluções (3.13) como *Soluções Elípticas tipo cn*.

Como a solução da equação (3.13) é periódica, é fácil ver que $\phi_c(x)$ tem um número infinito de ramos. Para cada valor de c fixado e dentro de um período temos, por causa da função módulo, 4 possíveis soluções dadas por (3.13). Nas Figuras 3.2 e 3.3 mostramos, os casos $c = \frac{1}{2}$ e $c = 1$, respectivamente.

No caso $c = \frac{1}{2}$ (Figura 3.2) as soluções do tipo kink e antikink são obtidas, como pode ser visto nas Figuras 3.2.3 e 3.2.4 respectivamente. No entanto, para as soluções dadas pelas Figuras 3.2.1 e 3.2.2 a situação que se apresenta é diferente. Elas satisfazem a condição de fronteira Vácuo-Vácuo, mas para um mesmo Vácuo.

Além disso, estas soluções têm na primeira derivada uma descontinuidade em $x = 0$. Esta descontinuidade que aparece neste tipo de soluções esta presente para qualquer comprimento arbitrário L . Portanto, estas soluções não pertencem à classe $C^2(\Omega)$ que é o domínio das soluções da equação (2.9) ao qual nos restringimos. Portanto estas soluções não são válidas, dentro do nosso estudo.

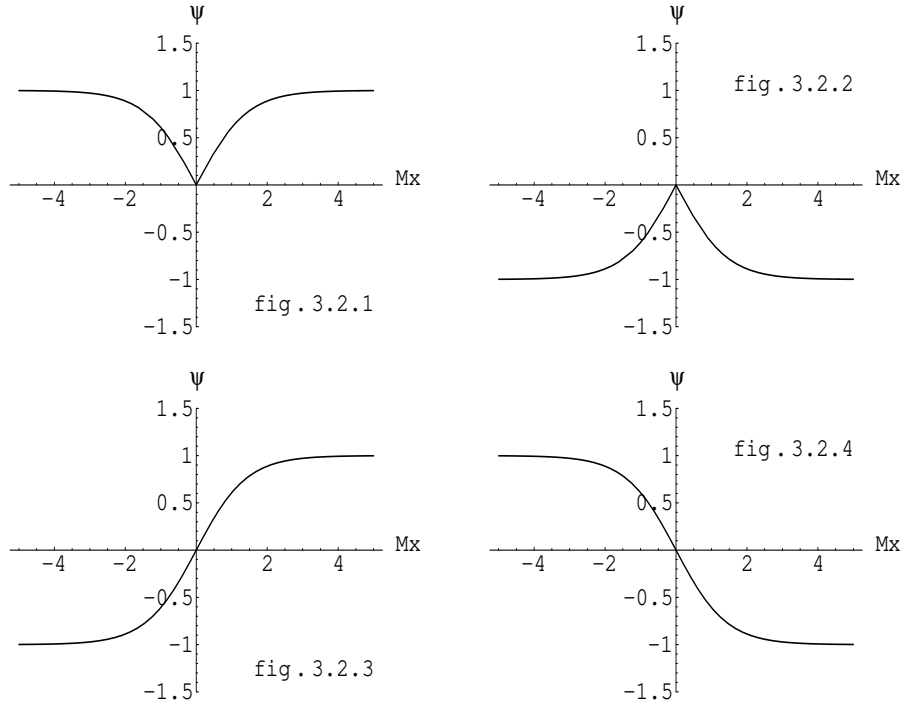


Figura 3.2: Soluções dadas pela equação (3.13) para $c = \frac{1}{2}$. Neste caso as soluções do tipo kink e antikink são obtidas. Para as primeiras duas funções, ϕ' não é contínua em $x = 0$, assim não são aceitáveis.

No caso $c = 1$ (Figura 3.3), observamos que existem quatro soluções possíveis para a equação (3.13). Como dito anteriormente, para cada período da função nós temos quatro casos diferentes. Quando se consideram todas as possibilidades para cada período obtemos um número infinito de ramos. Contudo, para nosso propósito, somente o comportamento da função dentro de um período é importante. Assim

nossas considerações serão restringidas ao intervalo $(-2K(l'), 2K(l'))$, onde

$$K(l') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - l' \sin^2 t}}$$

é a integral elíptica completa de primeira classe e

$$l' = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}} \right).$$

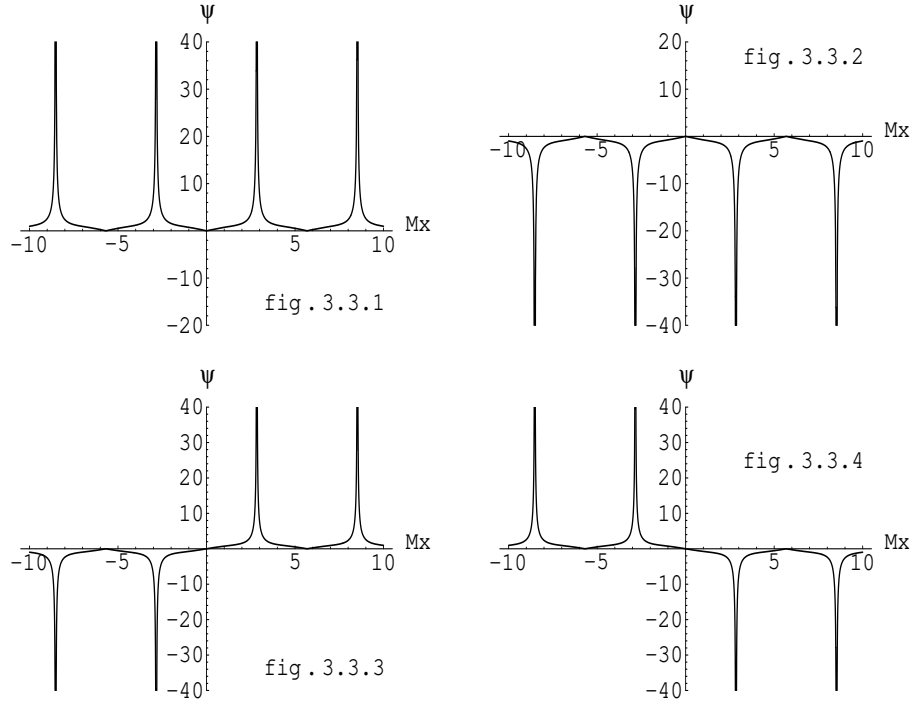


Figura 3.3: Soluções dadas pela equação (3.13) para $c = 1$. Aqui se considera $x_0 = 0$. Para um comprimento arbitrário L existe só uma solução satisfazendo a condição de fronteira Vácuo-Vácuo em $\pm \frac{L}{2}$.

Um caso interessante (ainda para $c = 1$) é aquele correspondente as figuras 3.3.3 e 3.3.4. Se para um comprimento arbitrário L da caixa, é imposta a condição de fronteira Vácuo-Vácuo, isto é, $\phi(\pm \frac{L}{2}) = \pm \frac{M}{\sqrt{\lambda}}$, então podemos obter, da equação (3.13), a seguinte relação:

$$\frac{\operatorname{sn}\left(\frac{ML}{2\sqrt[4]{2}}, 0.85\right) \operatorname{dn}\left(\frac{ML}{2\sqrt[4]{2}}, 0.85\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{ML}{2\sqrt[4]{2}}, 0.85\right)} = 0.84.$$

Este resultado pode ser generalizado para um c arbitrário, isto é,

$$\frac{\operatorname{sn}\left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}}\frac{ML}{2}, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)\right) \operatorname{dn}\left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}}\frac{ML}{2}, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)\right)}{\operatorname{cn}\left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}}\frac{ML}{2}, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)\right)} = \frac{1}{\sqrt[4]{2c}}. \quad (3.14)$$

Portanto, este caso (Figuras 3.3.3 e 3.3.4) mostra que as condições de fronteira Vácuo-Vácuo podem ser satisfeitas em um domínio finito.

Para o caso das Figuras 3.3.1 e 3.3.2, similarmente ao caso das figuras 3.2.1 e 3.2.2, a condição de fronteira Vácuo-Vácuo é satisfeita, mas para um mesmo Vácuo. Além disso, como no caso prévio ($c = \frac{1}{2}$) estas soluções têm uma descontinuidade na primeira derivada em $x = 0$. Daí, também estas soluções devem ser descartadas.

3.2 Propriedades das Soluções Elípticas Numa Caixa Unidimensional

Nesta seção estudamos as soluções finitas (de classe $C^2(\Omega)$) do tipo sn e cn . Começaremos com as soluções dadas pela equação (3.10) satisfazendo as condições de fronteira tipo Dirichlet. A seguir passaremos às soluções da equação (3.13) satisfazendo as condições de fronteira Vácuo-Vácuo num domínio finito ($c \neq \frac{1}{2}$).

3.2.1 Soluções Elípticas do Tipo sn

Primeiramente, é fácil ver que a invariância de translação, devido às condições de fronteira tipo Dirichlet em um domínio finito, não são mais válidas, i.e., uma solução transladada, em geral, não satisfaz as mesmas condições de fronteira (em nosso caso de Dirichlet) no mesmo intervalo. Somente o kink ($c = \frac{1}{2}$) tem esta propriedade no intervalo infinito $(-\infty, +\infty)$. O teorema abaixo garante que variando o comprimento da caixa encontramos uma família uniparamétrica de soluções.

Teorema : *No intervalo $[-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}]$ existe somente uma solução do tipo sn satisfazendo as condições de fronteira tipo Dirichlet em $x = \pm\frac{L}{2}$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos tomar $x_0 = 0$. Quantidades físicas tais como níveis de energia, massa clássica, carga topológica, etc. são independentes do parâmetro x_0 .

Impondo-se condições de fronteira tipo Dirichlet sobre uma solução da equação (3.10), ou seja, $\phi_c(\pm \frac{L}{2}) = 0$, obtemos a seguinte condição:

$$\operatorname{sn} \left(\frac{ML}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 2c}}, \frac{1}{-1 + \frac{1 + \sqrt{1 - 2c}}{c}} \right) = 0. \quad (3.15)$$

Por outro lado, temos da teoria das Funções Elípticas de Jacobi que

$$\frac{ML}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 2c}} = 2K_n(l), \quad (3.16)$$

onde

$$K_n(l) = \frac{K(l)}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{e} \quad l = \frac{1}{-1 + \frac{1 + \sqrt{1 - 2c}}{c}}.$$

Aqui $4K(l)$ é um período das Funções Elípticas de Jacobi sn [12].

Por outro lado, como nossas soluções são Funções Elípticas de Jacobi, elas precisam satisfazer a desigualdade $K_n(l) \geq \frac{\pi}{2}$. Isto é verdadeiro somente para $n = 1$. Assim, não existe solução do tipo sn com semiperíodo menor que $2K(l)$ (veja Figura 3.1, por exemplo).

Também note da equação (3.10) que

$$\lim_{c \rightarrow 0} |\phi_c(x)| = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}.$$

Agora, com $n = 1$ obtemos da equação (3.16) a seguinte relação:

$$ML = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 2c}}} K(l). \quad (3.17)$$

Considerando a derivada com respeito ao parâmetro c na equação (3.17), é fácil mostrar que $\frac{d(ML)}{dc} > 0$. Em outras palavras, “ ML ” é uma função crescente do parâmetro c e portanto existirá uma correspondência um a um entre ML e c (veja Figura 3.4). Assim, dado um comprimento arbitrário L , existirá somente um correspondente $c \in (0, \frac{1}{2})$ e desta maneira vai existir uma única solução clássica $\phi_L(x)$ satisfazendo as condições de fronteira tipo Dirichlet.

c.q.d.

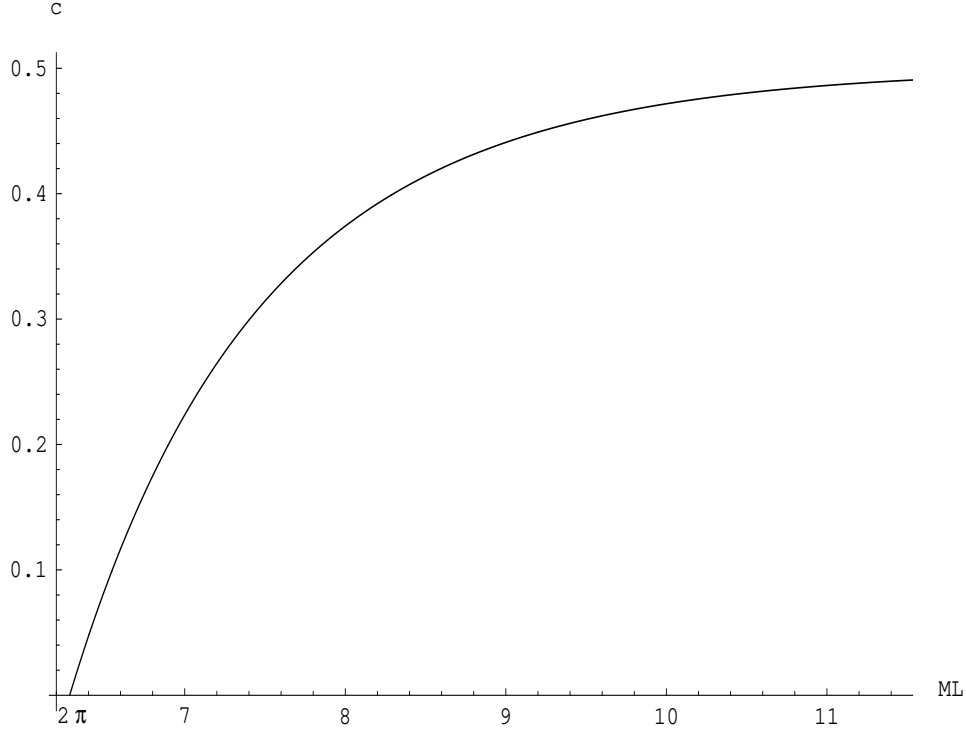


Figura 3.4: Constante de integração versus o produto ML . O valor mínimo se encontra em $ML = 2\pi$.

Por outro lado, considerando o limite $c \rightarrow 0$, obtemos da equação (3.17)

$$ML = 2\pi. \quad (3.18)$$

Esta relação mostra que existe um valor mínimo de “ ML ” para a solução (3.10) satisfazendo as condições de fronteira tipo Dirichlet. Isto é um resultado muito interessante destas soluções, pois ele nos diz que se fixarmos o tamanho da caixa como sendo L , não pode existir nenhuma solução Elíptica tipo sn com massa maior que $\frac{2\pi}{L}$. Por outro lado, fixando a massa do campo ϕ como M , então não pode existir uma solução Elíptica tipo sn dentro de uma caixa de tamanho menor que $\frac{2\pi}{M}$. Naturalmente, se $L \rightarrow \infty$, então $M \rightarrow 0$ e neste caso todos os valores possíveis de massa positiva são permitidas e daí os kinks, em $(-\infty, +\infty)$, podem ter massa arbitrária [1].

Em analogia com o caso de soluções num espaço de Minkowski, podemos definir várias grandezas físicas associadas às soluções acima em um domínio finito. Por

exemplo, é conhecido da literatura que a carga topológica é definida como [10]:

$$Q = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx J^0,$$

onde

$$J^0 = \frac{\sqrt{\lambda}}{M} \varepsilon^{01} \frac{d\phi}{dx^1}, \quad \text{e} \quad \varepsilon^{ik} \quad \text{é o tensor antisimétrico com } \varepsilon^{01} = 1.$$

Analogamente, podemos definir a “carga topológica” no domínio finito $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$, como:

$$Q(L) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\sqrt{\lambda}}{M} d\phi = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\lambda}}{M} \left(\phi\left(\frac{L}{2}\right) - \phi\left(-\frac{L}{2}\right) \right).$$

Assim, usando a solução (3.10), na expressão anterior é fácil verificar que

$$Q(L) = \pm \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 2c}}} \operatorname{sn} \left(\frac{ML}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 2c}}, \frac{1}{-1 + \frac{1 + \sqrt{1 - 2c}}{c}} \right). \quad (3.19)$$

A equação (3.15) então implica que, quando as condições de fronteira tipo Dirichlet são usadas, as “cargas topológicas” são iguais a zero. Para grandes comprimentos ($L = \infty$ ou $c = \frac{1}{2}$) a carga conservada Q das soluções do kink e antikink [10] são reobtidas, isto é,

$$Q = \pm 1.$$

Nesse mesmo espírito, definimos uma expressão para a “energia total” (chamada *massa clássica* no caso do kink [10]), associada à solução (3.10), i.e.,

$$\mathcal{M}(L) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \epsilon_c(x), \quad (3.20)$$

onde $\epsilon_c(x)$ é a “densidade de energia” dada por:

$$\epsilon_c(x) = \frac{1}{2} (\partial_x \phi_c)^2 + V(\phi_c) - V(\phi_m),$$

e ϕ_m são os pontos de mínimo do potencial $V(\phi)$, dados pela equação (2.8).

Assim a “densidade de energia” $\epsilon_c(x)$ será dada por:

$$\epsilon_c(x) = \frac{M^4}{\lambda} \left(\frac{c}{2} \operatorname{cn}^2 \left(\frac{Mx}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 2c}}, \frac{1}{-1 + \frac{1 + \sqrt{1 - 2c}}{c}} \right) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{dn}^2\left(\frac{Mx}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}, \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2c}}{c}}\right) - \frac{c}{(1+\sqrt{1-2c})} \times \\
& \operatorname{sn}^2\left(\frac{Mx}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}, \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2c}}{c}}\right) + \frac{c^2}{(1+\sqrt{1-2c})^2} \times \\
& \operatorname{sn}^4\left(\frac{Mx}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}, \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2c}}{c}}\right) + \frac{1}{4} \Bigg). \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Esta “densidade de energia” é mostrada na Figura (3.5) para diferentes valores da constante de integração c .

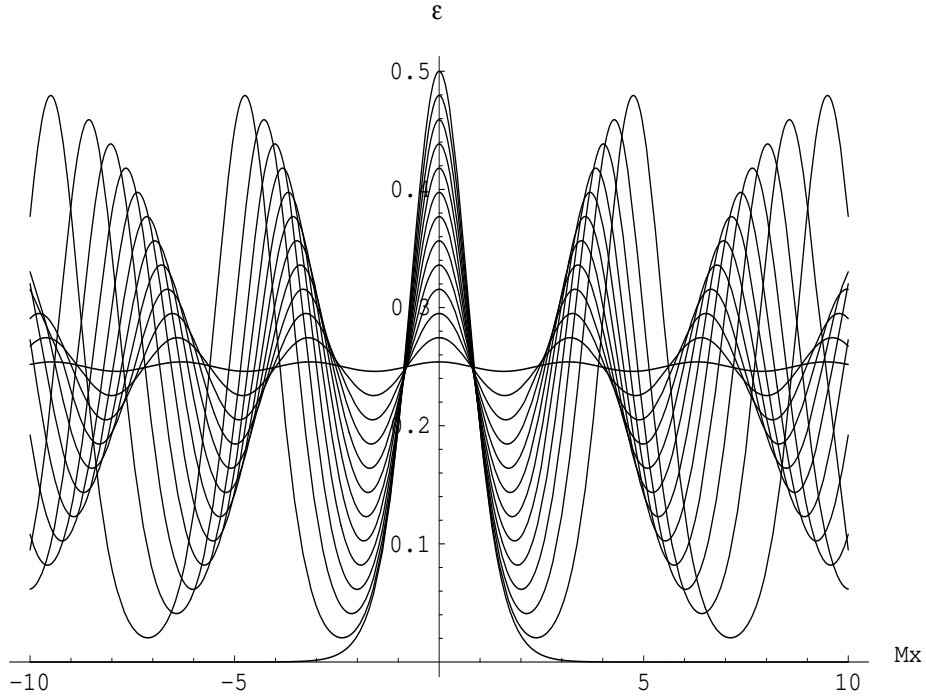


Figura 3.5: Densidade de energia para a família das Soluções Elípticas tipo sn, ($c = 0.008, 0.049, 0.09, \dots, 0.418, 0.459, 0.5$). A curva com $c = 0.5$ corresponde à densidade de energia do kink. Tomamos a variável Mx no gráfico acima, por ser adimensional.

Substituindo (3.21) em (3.20) obtemos a massa clássica:

$$\mathcal{M}(L) = \frac{M^3 \sqrt{2}}{\lambda \sqrt{1+\sqrt{1-2c}}} \left\{ \frac{(1+\sqrt{1-2c})}{3} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left[E \left(\operatorname{am} \left(\frac{ML\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2c}}{c}} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{1-2c+\sqrt{1-2c}}{1-c+\sqrt{1-2c}} \frac{ML\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}}{2\sqrt{2}} \right] + \frac{2c}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1+\sqrt{1-2c}-c}{(1+\sqrt{1-2c})^2} \right) \times \\
& \left[\operatorname{sn} \left(\frac{ML\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2c}}{c}} \right) \operatorname{cn} \left(\frac{ML\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2c}}{c}} \right) \times \right. \\
& \left. \operatorname{dn} \left(\frac{ML\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2c}}{c}} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{(1+\sqrt{1-2c}-c)}{(1+\sqrt{1-2c})} \times \\
& \left[\frac{ML\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}}{2\sqrt{2}} - E \left(\operatorname{am} \left(\frac{ML\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2c}}{c}} \right) \right) \right] + \\
& \left. \left(\frac{(1-2c+\sqrt{1-2c})c}{3(-c+1+\sqrt{1-2c})} - \frac{2c(1+\sqrt{1-2c}-c)}{3(1+\sqrt{1-2c})^2} + \frac{1}{2} \right) \frac{ML\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}}{2\sqrt{2}} \right\}, \quad (3.22)
\end{aligned}$$

onde $E(\gamma, \frac{1}{-1+\frac{1+\sqrt{1-2c}}{c}})$ é a integral elíptica de segunda classe e $\gamma = \operatorname{am}(\frac{ML\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}}{2\sqrt{2}})$ é a chamada *amplitude* desta integral [12]. Claramente a “energia total” (3.22) depende do tamanho da caixa L .

Por outro lado, é fácil mostrar que substituindo-se o valor limite $c = \frac{1}{2}$ na equação (3.21) é possível recuperar a densidade de energia do kink, i.e.,

$$\epsilon(x) = \frac{M^4}{2\lambda} \operatorname{sech}^4\left(\frac{Mx}{\sqrt{2}}\right). \quad (3.23)$$

Da mesma maneira, substituindo-se $c = \frac{1}{2}$ na equação (3.22) obtemos a massa clássica do kink, ou seja

$$\mathcal{M} = \frac{2\sqrt{2}M^3}{3\lambda}. \quad (3.24)$$

3.2.2 Soluções Elípticas do Tipo cn

Nesta seção consideraremos as soluções dadas por (3.13). Como na seção anterior, não consideraremos as soluções mostradas nas figuras 3.3.1 e 3.3.2 pois elas apresentam uma descontinuidade na derivada primeira. No entanto, as soluções mostradas nas Figuras 3.3.3 e 3.3.4 são permitidas, pois têm derivadas contínuas em todos os pontos do intervalo, inclusive $x = 0$. Neste caso a carga topológica será dada por:

$$Q(L) = \pm \sqrt[4]{2c} \frac{\operatorname{sn}\left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}} \frac{ML}{2}, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)\right) \operatorname{dn}\left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}} \frac{ML}{2}, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)\right)}{\operatorname{cn}\left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}} \frac{ML}{2}, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)\right)}.$$

Por outro lado, quando a condição de fronteira Vácuo-Vácuo da equação (3.14) num domínio finito é satisfeita, obtém-se

$$Q = \pm 1.$$

Em outras palavras, foi obtida a carga conservada Q das soluções kink e antikink [10], mas, neste caso, num domínio finito.

A “densidade de energia” é dada por uma expressão extensa:

$$\begin{aligned} \epsilon_c(x) = & \frac{M^4}{\lambda} \left[\frac{c}{2} \operatorname{dn}^4\left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}} Mx, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)\right) + \frac{c}{8} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)^2 \times \right. \\ & \operatorname{sn}^4\left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}} Mx, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)\right) + c \frac{\operatorname{sn}^4\left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}} Mx, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)\right) \operatorname{dn}^4\left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}} Mx, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)\right)}{\operatorname{cn}^4\left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}} Mx, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)\right)} \\ & - \frac{c}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right) \operatorname{sn}^2\left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}} Mx, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)\right) \operatorname{dn}^2\left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}} Mx, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)\right) + \\ & c \frac{\operatorname{sn}^2\left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}} Mx, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)\right) \operatorname{dn}^4\left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}} Mx, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)\right)}{\operatorname{cn}^2\left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}} Mx, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)\right)} - \\ & \left. \frac{c}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right) \frac{\operatorname{sn}^4\left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}} Mx, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)\right) \operatorname{dn}^2\left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}} Mx, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)\right)}{\operatorname{cn}^2\left(\sqrt[4]{\frac{c}{2}} Mx, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}\right)\right)} - \frac{\sqrt{2c}}{2} \times \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\operatorname{sn}^2(\sqrt[4]{\frac{c}{2}}Mx, \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}})) \operatorname{dn}^2(\sqrt[4]{\frac{c}{2}}Mx, \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}))}{\operatorname{cn}^2(\sqrt[4]{\frac{c}{2}}Mx, \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2c}}))} + \frac{1}{4} \Big].$$

É possível mostrar que para $c = \frac{1}{2}$, obtém-se, uma vez mais, a densidade de energia do kink (3.23). Do mesmo modo, não é difícil obter uma expressão para a “energia total” associada a estas soluções usando a relação prévia na equação (3.20) e, também neste caso, para $c = \frac{1}{2}$, a massa clássica do kink, i.e., (3.24), é recuperada.

Além disso, um cálculo similar pode ser feito para as condições de fronteira periódicas e anti-periódicas nas soluções (3.10). Por exemplo, impondo as condições de fronteira periódicas em $x = \pm \frac{L}{2}$, i.e.,

$$\phi_c(-\frac{L}{2}) = \phi_c(\frac{L}{2}),$$

obtemos (para as soluções de sinais positivo e negativo (3.10)), a mesma relação da equação (3.15). Assim, todos os resultados do caso Dirichlet são válidos para o caso periódico.

Por outro lado, quando consideramos as condições de fronteira anti-periódicas, i.e., $\phi_c(-\frac{L}{2}) = -\phi_c(\frac{L}{2})$, observamos que estas são satisfeitas automaticamente para $\forall c \in (0, \frac{1}{2}]$ e $\forall L \in (0, \infty)$, pois as soluções dadas por (3.10) são funções ímpares (consideramos $x_0 = 0$). No entanto, estas soluções não satisfazem a condição assintótica de convergir para um kink quando $L \rightarrow \infty$, pois elas são oscilatórias, com período $4K(l)$ no domínio $(-\infty, +\infty)$. Portanto também tais soluções devem ser descartadas.

Capítulo 4

Níveis de Energia de Campos Clássicos Interagentes num Domínio Finito em Dimensão $(1 + 1)$: O Caso do kink

Neste capítulo estudamos a influência das condições de fronteira sobre os níveis de energia dos estados ligados de um campo escalar real massivo χ que interage com outro campo escalar real massivo ϕ num domínio finito (caixa) em dimensão $(1 + 1)$. Serão discutidas algumas consequências obtidas quando o tamanho do domínio é mudado. Tomamos como modelo a Lagrangiana de interação $\mathcal{L}_{int} = \frac{3}{2} g \phi^2 \chi^2$.

Mostramos então que o gap entre os estados ligados muda com o tamanho da caixa numa maneira não trivial, isto é, alguns pontos críticos aparecem. Para o caso de massas iguais e para uma caixa de comprimento grande, os níveis de energia do modelo kink [1] são obtidos. Abaixo de um comprimento crítico L o nível do estado fundamental do campo χ se divide, o que pode ser interpretado como produção de partícula-antipartícula devido a pequenas perturbações. Também, para outros comprimentos críticos, o estado fundamental e o único estado excitado ligado do campo χ mergulham na parte contínua do espectro.

Na seção 4.1 determinamos as soluções do campo χ . Nas seções 4.2 e 4.3 calculamos os níveis de energia do espectro discreto e contínuo para o campo χ confinado a uma caixa em dimensão $(1 + 1)$, na qual imporemos condições de fronteira tipo Dirichlet, Periódicas e anti-periódicas.

4.1 Cálculo das Soluções

Consideremos um sistema formado por um campo escalar real χ o qual interage com outro campo escalar real ϕ , através da densidade Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}M_\phi^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 + \frac{1}{2}M_\chi^2 \chi^2 - \frac{3}{2}g\phi^2 \chi^2, \quad (4.1)$$

onde λ e g são constantes de interação.

Antes de continuar, queremos fazer uma observação importante. Em (4.1), a densidade Lagrangiana do campo χ , ou seja, $\mathcal{L}_\chi = \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 + \frac{1}{2}M_\chi^2 \chi^2$, não apresenta um estado de energia mínima pois, ao contrário do que usualmente se tem em teoria de campos, sua Hamiltoniana associada não é positiva definida. Isto, claramente, é devido ao sinal “errado” do termo de massa. Uma maneira de solucionar isto seria acrescentar um termo de auto-interação para o campo χ , como acontece em teorias com quebra espontânea de simetria. Também poderíamos manter o sinal negativo original do termo de massa. Neste trabalho, optamos por manter o sinal positivo no termo de massa e verificar se o termo de interação da Lagrangiana, dado por $-\frac{3}{2}g\phi^2 \chi^2$, poderia levar a uma Hamiltoniana limitada inferiormente. Este é realmente o caso, como mostramos no Apêndice A.2.

Da densidade Lagrangiana $\mathcal{L}$ (4.1) obtemos as equações de movimento para os dois campos, i.e.,

$$-\partial^\mu \partial_\mu \chi + M_\chi^2 \chi - 3g\phi^2 \chi = 0, \quad (4.2)$$

$$-\partial^\mu \partial_\mu \phi + M_\phi^2 \phi - \lambda\phi^3 = 0. \quad (4.3)$$

Na equação (4.3) foi desprezado o termo $3g\phi\chi^2$, o que como foi mencionado anteriormente, pode ser interpretado como “back-reaction” do campo χ sobre o termo de massa do campo ϕ . Isto também pode ser realizado se impomos que $|\chi| \ll \min\{\frac{M_\phi}{\sqrt{3}g}\}$. Naturalmente, outros regimes podem ser estudados da equação (4.3) para outras aproximações. Também a Lagrangiana foi escolhida para que o campo χ satisfaça uma equação linear. Isto possibilita o estudo de autovalores da energia de χ , etc.

As soluções estáticas gerais da equação de movimento (4.3) foram calculadas no capítulo 3. Para aplicação neste capítulo tomamos apenas o caso particular do kink e anti-kink ($c = \frac{1}{2}$) [1], i.e.,

$$\phi(x) = \pm \frac{M_\phi}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{2}}\right).$$

Além disso, vamos considerar aqui o caso em que o campo ϕ não é afetado pelas condições de fronteiras. Isto é, em nossa aproximação as condições de fronteiras são transparentes ao campo ϕ . No capítulo seguinte será estudado um caso mais geral.

Assim, substituindo estas soluções na equação (4.2) encontra-se,

$$-\partial^\mu \partial_\mu \chi + M_\chi^2 \chi - 3 \frac{g}{\lambda} M_\phi^2 \tanh^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{2}}\right) \chi = 0.$$

Com o objetivo de procurar soluções estacionárias, pode-se escrever $\chi(x, t) = e^{-i\omega t} \psi(x)$, onde ω são os autovalores de energia do campo χ . A equação anterior pode então ser escrita como

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \left(M_\chi^2 + \omega^2 - 3 \frac{g}{\lambda} M_\phi^2 \tanh^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{2}}\right) \right) \psi(x) = 0. \quad (4.4)$$

Esta equação é similar à do modelo da referência [1], o qual descreve kinks em dimensão $(1+1)$. Porém, aqui a equação (4.4), tem um termo a mais associado com a massa do campo χ , i.e., M_χ^2 .

Para encontrar uma solução da equação (4.4), fazemos as seguintes mudanças de variáveis $z = \frac{M_\phi x}{\sqrt{2}}$ e $\omega^2 = \frac{(\varepsilon-2)M_\phi^2}{2}$ na equação (4.4). Obtemos então:

$$\frac{d^2}{dz^2} \psi(z) + \left(2 \frac{M_\chi^2}{M_\phi^2} + \varepsilon - 2 - 6 \frac{g}{\lambda} \tanh^2 z \right) \psi(z) = 0. \quad (4.5)$$

Agora, fazemos uma nova mudança de variáveis na equação anterior, a saber, $E = 2\beta + \varepsilon - 2$, onde definimos β como o parâmetro *razão de massas*, i.e., $\beta \equiv \frac{M_\chi^2}{M_\phi^2}$. Com isto, equação (4.5) pode ser escrita como

$$\frac{d^2}{dz^2} \psi(z) + (E - 6 \frac{g}{\lambda} \tanh^2 z) \psi(z) = 0. \quad (4.6)$$

Para encontrar a solução correspondente da equação (4.6), fazemos ainda a seguinte transformação de variável dependente [13]:

$$\psi(z) = \text{sech}^k(z) Y(z), \quad (4.7)$$

onde o parâmetro $k \in \mathbf{R}$ será escolhido convenientemente.

Esta transformação permite escrever a equação (4.6) numa equação diferencial hipergeométrica, cujas soluções são conhecidas. Substituindo (4.7) em (4.6) obtemos uma equação para $Y(z)$, i.e.,

$$\frac{d^2 Y}{dz^2} - 2k \tanh(z) \frac{dY}{dz} + \left[\frac{k^2 + E - 6\frac{g}{\lambda}}{\operatorname{sech}^2(z)} + 6\frac{g}{\lambda} - k^2 - k \right] \operatorname{sech}^2(z) Y(z) = 0. \quad (4.8)$$

Neste capítulo será estudado o caso particular $g = \lambda$. O caso mais geral, incluindo um estudo para constantes de interação fracas, será feito no capítulo seguinte. Contudo a condição acima ($g = \lambda$) leva, por si só, a resultados já muito interessantes.

A equação diferencial (4.8) é muito próxima de uma equação diferencial hipergeométrica. Para transformá-la numa equação hipergeométrica damos os seguintes passos:

1.- Impomos que os termos dependentes da variável z , dentro do colchete, em (4.8) se anulem. Com isto, conseguimos uma relação entre k e E , i.e.,

$$k = \pm \sqrt{6 - E}. \quad (4.9)$$

2.- Fazemos ainda outra mudança de variável independente, a saber

$$\mu = \frac{1}{2}(1 - \tanh(z)). \quad (4.10)$$

Deste segundo passo, obtém-se

$$\operatorname{sech}^2(z) = 4\mu(1 - \mu), \quad \tanh(z) = 1 - 2\mu, \quad \frac{dY}{dz} = -\frac{1}{2}4\mu(1 - \mu) \frac{dY}{d\mu},$$

$$\text{e} \quad \frac{d^2 Y}{dz^2} = 4\mu^2(1 - \mu)^2 \frac{d^2 Y}{d\mu^2} + 4\mu(1 - \mu)(1 - 2\mu) \frac{dY}{d\mu}.$$

Substituindo todos estes resultados na equação diferencial (4.8), obtemos:

$$\mu(1 - \mu) \frac{d^2 Y}{d\mu^2} + (k + 1 - 2(k + 1)\mu) \frac{dY}{d\mu} - (k + 3)(k - 2)Y(\mu) = 0. \quad (4.11)$$

Esta é uma equação diferencial hipergeométrica com pontos singulares regulares em $\mu = 0$, $\mu = 1$ e $\mu = \infty$, parâmetros: $a = k + 3$, $b = k - 2$ e $d = k + 1$. As soluções linearmente independentes são dados por [11]:

$$Y_1(\mu) = {}_2F_1(k + 3, k - 2; k + 1; \mu), \quad (4.12)$$

$$Y_2(\mu) = \mu^{-k} {}_2F_1(-2, 3; 1 - k; \mu). \quad (4.13)$$

A solução da equação (4.11) será dada por $Y_1(\mu)$ se d é um inteiro positivo. Para d inteiro negativo, a solução será dada por $Y_2(\mu)$. De qualquer forma para d inteiro, o Teorema de Fuchs garante a existência de uma segunda solução linearmente independente a qual tem um termo logarítmico. Veja próxima seção. Se d for um número qualquer não inteiro, positivo ou negativo, as duas soluções $Y_1(\mu)$ e $Y_2(\mu)$ formam um sistema de soluções linearmente independentes [14]. Daqui para frente, para simplificar a notação, denotaremos a função hipergeométrica ${}_2F_1$ simplesmente como F .

4.2 Espectro Discreto

Nesta seção serão calculados os níveis de energia do campo χ , para o caso do espectro discreto, considerando-se as condições de fronteira tipo Dirichlet, Periódicas e anti-periódicas.

Para o caso do espectro discreto, ou seja, $0 \leq \omega^2 < 2M_\chi^2$, é fácil mostrar, usando as mudanças de variáveis $E = 2\beta + \varepsilon - 2$ e $\omega^2 = \frac{(\varepsilon-2)}{2}M_\phi^2$, que $2\beta \leq E < 6\beta$.

4.2.1 Condições de Fronteiras Tipo Dirichlet

Nesta seção faremos um estudo das soluções da equação (4.11), para os diferentes valores do parâmetro d , impondo condições de fronteira tipo Dirichlet.

CASO I: d Inteiro Positivo.

Neste caso, temos $d = k + 1 = n$, onde $n = 1, 2, 3, \dots$. Pelo teorema de Fuchs [14] a solução geral é dada por:

$$Y(\mu) = AY_1(\mu) + BY_1(\mu) \ln |\mu| + B \sum_{s=0}^{\infty} a_s(-k) \mu^{s-k},$$

onde A e B são constantes arbitrárias.

Claramente se $B \neq 0$ esta solução apresenta uma divergência no termo logarítmico em $\mu = 0$. Agora, se impusermos que para uma caixa grande ($L \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0$)

devemos obter a solução do kink (com seus níveis de energia do espectro discreto) [1], que é uma solução regular em $(-\infty, +\infty)$ então necessariamente $B = 0$. Daí a solução reduz-se a:

$$Y(\mu) = A F(n+2, n-3; n; \mu),$$

onde k foi substituído por $n-1$.

Usando agora as relações das equações (4.7) e (4.10), assim como a mudança de variável $z = \frac{M_\phi x}{\sqrt{2}}$ na expressão anterior, obtemos a solução:

$$\psi(x) = A \operatorname{sech}^{(n-1)}\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{2}}\right) F\left(n+2, n-3; n; \frac{1}{2}\left\{1 - \tanh\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{2}}\right)\right\}\right). \quad (4.14)$$

Daqui para frente, para simplificar a notação, denotaremos M_ϕ simplesmente por M .

Agora, impomos as condições de fronteira tipo Dirichlet, em $x = \pm \frac{L}{2}$ na solução (4.14), isto é:

$$\psi\left(-\frac{L}{2}\right) = A \operatorname{sech}^{(n-1)}\left(\frac{ML}{2\sqrt{2}}\right) F\left(n+2, n-3; n; \frac{1}{2}\left\{1 + \tanh\left(\frac{ML}{2\sqrt{2}}\right)\right\}\right) = 0,$$

$$\psi\left(\frac{L}{2}\right) = A \operatorname{sech}^{(n-1)}\left(\frac{ML}{2\sqrt{2}}\right) F\left(n+2, n-3; n; \frac{1}{2}\left\{1 - \tanh\left(\frac{ML}{2\sqrt{2}}\right)\right\}\right) = 0.$$

Destas duas relações obtém-se as equações,

$$F\left(n+2, n-3; n; \frac{1}{2}\left\{1 \pm \tanh\left(\frac{ML}{2\sqrt{2}}\right)\right\}\right) = 0. \quad (4.15)$$

Antes de continuar devemos fazer uma observação. Como $2\beta \leq E < 6\beta$, da equação (4.9), é possível mostrar que o parâmetro k satisfaz as desigualdades

$$\sqrt{6(1-\beta)} < k \leq \sqrt{6-2\beta},$$

ou

$$-\sqrt{6-2\beta} \leq k < -\sqrt{6(1-\beta)}.$$

Portanto, como $k \in \mathbf{R}$, então das relações acima tem-se que $\beta \leq 1$. Este resultado é válido para toda nossa análise posterior. Portanto a escolha feita em (4.9) tem uma consequência “natural”, a saber ela implica $\beta \leq 1$, ou seja $M_\chi \leq M_\phi$.

Assim, os possíveis valores do parâmetro k se encontram no intervalo $0 < k \leq \sqrt{6} \sim 2,44$ ou $-2,44 \sim -\sqrt{6} \leq k < 0$. Como neste caso c é inteiro positivo então devemos nos restringir ao intervalo $0 < k \leq \sqrt{6}$. É fácil ver que os correspondentes valores de E , com k neste intervalo, são dados por (usando a relação $k = n - 1$)

$$\begin{aligned} \text{para } n = 2, \quad k = 1 \quad \text{então } E = 5, \\ \text{para } n = 3, \quad k = 2 \quad \text{então } E = 2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Para os demais valores de n , os valores de k se encontram fora do intervalo $0 < k \leq \sqrt{6}$.

Substituindo estes valores permitidos na equação (4.15), obtemos

$$F(-1, 4; 2; \frac{1}{2}\{1 \pm \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = 0, \quad \text{para } n = 2,$$

e

$$F(0, 5; 3; \frac{1}{2}\{1 \pm \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = 0, \quad \text{para } n = 3.$$

No entanto $F(0, 5; 3; \frac{1}{2}\{1 \pm \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = 1$, e daí $n = 3$ não fornece uma solução consistente.

Para $n = 2$, temos da referência [12]

$$F(-1, 4; 2; \frac{1}{2}\{1 \pm \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = \frac{1!}{(2)_1} P_1^{(1,1)}\{\mp \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\},$$

onde $P_1^{(1,1)}(x)$ é um Polinômio de Jacobi [12].

Usando as propriedades dos Polinômios de Jacobi [12], é possível mostrar que:

$$F(-1, 4; 2; \frac{1}{2}\{1 \pm \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = \mp \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) = 0.$$

Estas igualdades são satisfeitas somente se $L = 0$. Como $L \neq 0$ o caso $n = 2$ também não fornece uma solução consistente.

Portanto, para d inteiro positivo, não existem soluções consistentes.

CASO II: d Inteiro Negativo.

Neste caso, podemos escrever $d = k + 1 = -n$, onde $n = 1, 2, 3, \dots$, e o intervalo de interesse é $-\sqrt{6} \leq k < 0$. A solução da equação hipergeométrica é dada por

$Y_2(\mu)$. Da mesma maneira ao caso anterior pelo teorema de Fuchs, tem-se que a solução geral é dado por:

$$Y(\mu) = AY_2(\mu) + BY_2(\mu) \ln |\mu| + B \sum_{s=0}^{\infty} a_s(-k) \mu^{s-k},$$

onde A e B são constantes arbitrárias.

Observe inicialmente, que o segundo termo comporta-se assintoticamente, para $\mu \rightarrow 0$, $\mu^{-k} \ln \mu \rightarrow 0$, pois k é negativo. O terceiro termo também tende a zero, pois $s - k > 0$ para $s = 0, 1, 2, \dots$. Daí não temos singularidades para $\mu \rightarrow 0$.

Por outro lado, a relação $\frac{Y(\mu)}{Y_2(\mu)}$, é divergente no limite assintótico, i.e.,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{Y(\mu)}{Y_2(\mu)} \rightarrow \infty.$$

Como nosso objetivo do ponto de vista de condições de fronteira, é que para $\mu \rightarrow 0$ ($L \rightarrow \infty$), $Y(\mu)$ reproduza as soluções da referência [1], podemos impor, naturalmente, a condição assintótica

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{Y(\mu)}{Y_2(\mu)} \rightarrow 1.$$

Com esta condição o coeficiente B se anula. Portanto a solução fica reduzida a:

$$Y(\mu) = \mu^{(n+1)} F(-2, 3; 2 + n; \mu),$$

onde k foi substituído por $-(n + 1)$.

Como antes, usando as relações das equações (4.7) e (4.10), assim como a mudança de variável $z = \frac{Mx}{\sqrt{2}}$, na expressão anterior obtemos a solução na variável original, i.e.,

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \operatorname{sech}^{-(n+1)}\left(\frac{Mx}{\sqrt{2}}\right) \frac{\{1 - \tanh(\frac{Mx}{\sqrt{2}})\}^{(n+1)}}{2^{(n+1)}} \times \\ & F(-2, 3; 2 + n; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{Mx}{\sqrt{2}})\}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Impondo-se as condições de fronteira tipo Dirichlet, em $x = \pm \frac{L}{2}$, na solução (4.17), obtemos:

$$\psi\left(-\frac{L}{2}\right) = \operatorname{sech}^{-(n+1)}\left(\frac{ML}{2\sqrt{2}}\right) \frac{\{1 + \tanh(\frac{ML}{\sqrt{2}})\}^{(n+1)}}{2^{(n+1)}} \times$$

$$F(-2, 3; 2 + n; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = 0,$$

e

$$\psi(\frac{L}{2}) = \operatorname{sech}^{-(n+1)}(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) \frac{\{1 - \tanh(\frac{ML}{\sqrt{2}})\}^{(n+1)}}{2^{(n+1)}} \times$$

$$F(-2, 3; 2 + n; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = 0.$$

E daí

$$F(-2, 3; 2 + n; \frac{1}{2}\{1 \pm \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = 0. \quad (4.18)$$

Novamente, do estudo dos valores inteiros de k no intervalo $-\sqrt{6} \leq k < 0$, e usando a relação $k = -(n + 1)$, obtemos os valores permitidos do parâmetro E :

$$\text{para } n = 0, \quad k = -1 \quad \text{então} \quad E = 5,$$

$$\text{para } n = 1, \quad k = -2 \quad \text{então} \quad E = 2. \quad (4.19)$$

Como no caso anterior, para os demais valores de n , os valores de k se encontram fora do intervalo $-\sqrt{6} \leq k < 0$. Substituindo estes valores de n acima na equação (4.18), obtemos

$$F(-2, 3; 2; \frac{1}{2}\{1 \pm \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = 0 \quad \text{para } n = 0.$$

e

$$F(-2, 3; 3; \frac{1}{2}\{1 \pm \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = 0, \quad \text{para } n = 1.$$

Usando uma relação da referência [12], podemos escrever o caso $n = 0$ em termos dos Polinômios de Jacobi.

$$F(-2, 3; 2; \frac{1}{2}\{1 \pm \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = \frac{2!}{(2)_2} P_2^{(1, -1)}\{\mp \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\} = 0.$$

Também, usando as propriedades dos Polinômios de Jacobi, é possível mostrar que:

$$F(-2, 3; 2; \frac{1}{2}\{1 \pm \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = \frac{1}{2} \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) (\tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) \mp 1) = 0.$$

Portanto, $n = 0$ será uma solução somente quando $L = \infty$ ou $L = 0$, os quais devem ser descartados, visto que as condições de Dirichlet são para um domínio finito ($L \neq 0, \infty$). O caso $L = \infty$ é considerado em [1] neste caso $n = 0$ é permitido.

Para $n = 1$, podemos escrever [12]:

$$F(-2, 3; 3; \frac{1}{2}\{1 \pm \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = \frac{2!}{(3)_2} P_2^{(2, -2)}\{\mp \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\} = 0.$$

Novamente usando as propriedades dos polinômios de Jacobi, obtemos:

$$F(-2, 3; 3; \frac{1}{2}\{1 \pm \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = \frac{1}{2}\{1 \mp \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\} = 0.$$

Aqui novamente, $n = 1$ fornece uma solução somente quando $L = \infty$.

Destes resultados pode-se concluir que para d inteiro negativo, existirá solução, (para $n = 0$ e $n = 1$), só quando $L = \infty$ (kink) ou $L = 0$.

CASO III: d Não Inteiro.

Quando d é um número qualquer não inteiro positivo ou negativo, as duas soluções $Y_1(\mu)$ e $Y_2(\mu)$, formam um sistema fundamental de soluções linearmente independentes. Portanto a solução geral da equação (4.11) é dada por:

$$Y(\mu) = A F(k+3, k-2; k+1; \mu) + B (\mu)^{-k} F(-2, 3; 1-k; \mu). \quad (4.20)$$

Como antes, repetindo-se os passos anteriores, i.e., usando-se novamente as relações das equações (4.7) e (4.10), assim como a mudança de variável $z = \frac{Mx}{\sqrt{2}}$, a expressão acima fica escrita como:

$$\begin{aligned} \psi(x) = \operatorname{sech}^k\left(\frac{Mx}{\sqrt{2}}\right) & \left(A F(k+3, k-2; k+1; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{Mx}{\sqrt{2}})\}) + \right. \\ & \left. B 2^k [1 - \tanh(\frac{Mx}{\sqrt{2}})]^{-k} F(-2, 3; 1-k; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{Mx}{\sqrt{2}})\}) \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Novamente impomos as condições de fronteira de Dirichlet, em $x = \pm \frac{L}{2}$, e daí determinamos os possíveis valores de k e E .

$$\psi(-\frac{L}{2}) = \operatorname{sech}^k(-\frac{ML}{2\sqrt{2}}) \left(A F(k+3, k-2; k+1; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) + \right.$$

$$B 2^k [1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})]^{-k} F(-2, 3; 1 - k; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = 0,$$

e

$$\psi(\frac{L}{2}) = \text{sech}^k(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) \left(A F(k + 3, k - 2; k + 1; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) + \right.$$

$$\left. B 2^k [1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})]^{-k} F(-2, 3; 1 - k; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) \right) = 0,$$

que se reduzem a

$$A F(k + 3, k - 2; k + 1; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) +$$

$$B 2^k [1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})]^{-k} F(-2, 3; 1 - k; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = 0,$$

e

$$A F(k + 3, k - 2; k + 1; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) +$$

$$B 2^k [1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})]^{-k} F(-2, 3; 1 - k; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = 0.$$

Estas relações formam um sistema de equações homogêneas, nas variáveis A e B, que tem uma solução não trivial, somente se o determinante do sistema é nulo, i.e.,

$$\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}^{-k} F(k + 3, k - 2; k + 1; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) \times$$

$$F(-2, 3; 1 - k; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) -$$

$$\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}^{-k} F(k + 3, k - 2; k + 1; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) \times$$

$$F(-2, 3; 1 - k; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = 0. \quad (4.22)$$

Agora, usando a seguinte relação entre as Funções Hipergeométricas [11]

$$F(a, b; c; z) = (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; c; z), \quad (4.23)$$

nas expressões $F(k + 3, k - 2; k + 1; \frac{1}{2}\{1 \pm \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\})$, assim como a seguinte relação entre as Funções Hipergeométricas e os Polinômios de Jacobi [12]:

$$F(-2, 3; 1 \mp k; \frac{1}{2}\{1 \pm \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = \frac{2!}{(1 \mp k)_2} P_2^{(\mp k, \pm k)} \{\mp \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}, \quad (4.24)$$

onde $(1 - k)_2$ é o símbolo de Pochhammer [12], definido como $(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$, o determinante em (4.22) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} & \{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}^{-2k} P_2^{(-k, k)} \{\tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\} P_2^{(-k, k)} \{\tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\} - \\ & \{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}^{-2k} P_2^{(k, -k)} \{\tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\} P_2^{(k, -k)} \{\tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\} = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Por outro lado, as expressões explícitas dos Polinômios de Jacobi são dadas por

$$\begin{aligned} P_2^{(-k, k)} \{\tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\} &= \frac{1}{2} \left(k^2 - 1 - 3k \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) \right), \\ P_2^{(k, -k)} \{\tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\} &= \frac{1}{2} \left(k^2 - 1 + 3k \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Substituindo estas duas expressões na equação (4.25), obtemos uma equação transcendente para o parâmetro k , i.e.,

$$\left(\frac{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})} \right)^k = \pm \left(\frac{k^2 - 1 + 3k \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{k^2 - 1 - 3k \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})} \right). \quad (4.27)$$

Observa-se que a equação (4.27) também é verificada, substituindo-se k por $-k$. Portanto suas soluções encontram-se nos intervalos $(0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \sqrt{6}) \subset \mathbf{R}$ e $(-\sqrt{6}, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 0) \subset \mathbf{R}$. Além disso, para o caso do sinal negativo ($k = -1$), é solução da equação (4.27), mas não é permitido desde que é considerado $k \notin \mathbf{Z}$. Uma solução analítica desta equação transcendente (4.27) não foi determinada, mas é possível obter soluções numéricas, as quais são apresentadas na Figura 4.1, para o caso $\beta = 1$.

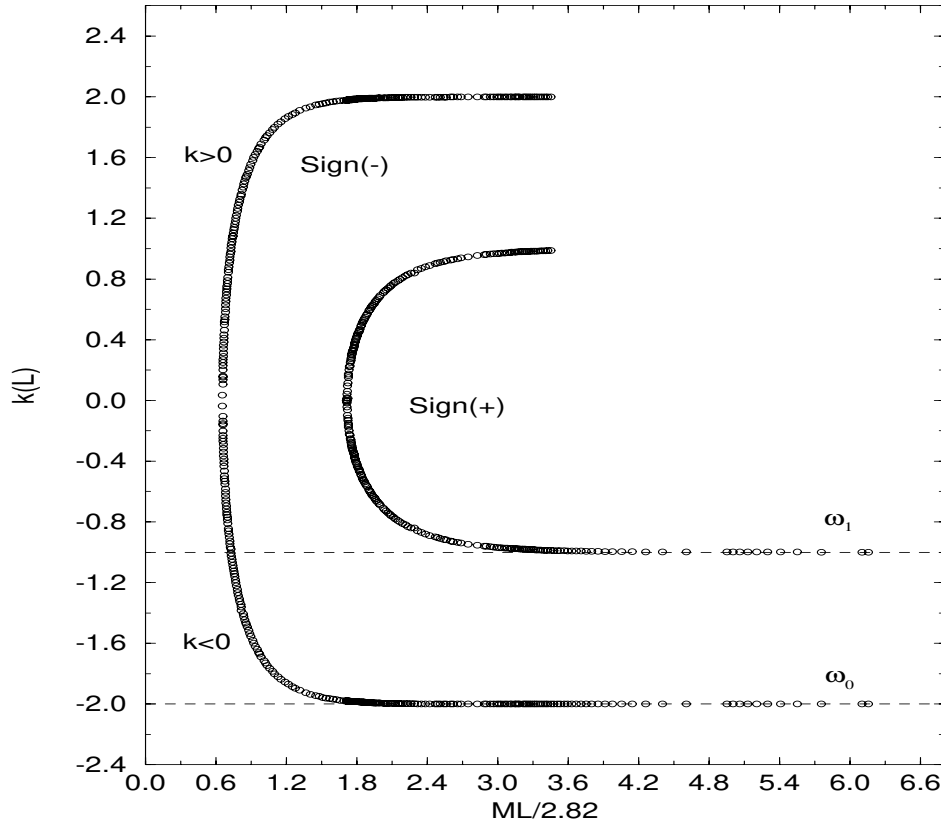


Figura 4.1: Deslocamento dos estados ligados com o tamanho L da caixa. Neste caso $\beta = 1$. As linhas horizontais mostram os valores assintóticos do modelo do kink [1]. Aqui, bem como em figuras posteriores $2.82 = 2\sqrt{2}$.

A Figura 4.1, mostra a relação entre o parâmetro k e o tamanho L da caixa. Observa-se que o estado fundamental e o estado excitado são deslocados quando o tamanho da caixa é modificado. Em relação ao tamanho da caixa, L , os valores de ω_0 crescem de $\omega_0 = 0$ ($k = -2$ e $L = \infty$) a $\omega_0 = \sqrt{2}M$ ($k = 0$, $\frac{ML}{2\sqrt{2}} \sim 0.6$), e ω_1 de $\omega_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}M$ ($k = -1$, e $L = \infty$) a $\omega_1 = \sqrt{2}M$ ($k = 0$, $\frac{ML}{2\sqrt{2}} \sim 1.71$). Nos valores críticos de $\frac{ML}{2\sqrt{2}}$, ~ 0.6 para ω_0 , e ~ 1.71 para ω_1 , estes estados discretos mergulham na parte contínua do espectro ($k = 0$). Por outro lado, para $L \rightarrow \infty$ os valores de ω_0 e ω_1 decrescem até alcançar seus valores mínimos $\omega_0 = 0$ e $\omega_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}M$ respectivamente, como no modelo do kink [1]. Este comportamento acontece para ambos casos de sinais positivos e negativos da equação (4.27) com k negativo. Para qualquer k positivo e tamanho da caixa L grande, a equação (4.27) não tem solução, o que pode ser verificado analiticamente (veja também o gráfico para k positivo na Figura 4.1). Portanto, os valores positivos de k devem ser descartados pois para

uma caixa suficientemente grande ($L \rightarrow \infty$) eles não levam aos níveis de energia do modelo semi-clássico do kink.

Por outro lado da equação (4.9) e da relação $\omega^2 = \frac{(\varepsilon-2)M^2}{2}$, obtemos uma relação entre ω e o comprimento da caixa L , a saber,

$$\frac{\omega}{M} = \pm \sqrt{3 - \beta - \frac{k^2(L)}{2}}. \quad (4.28)$$

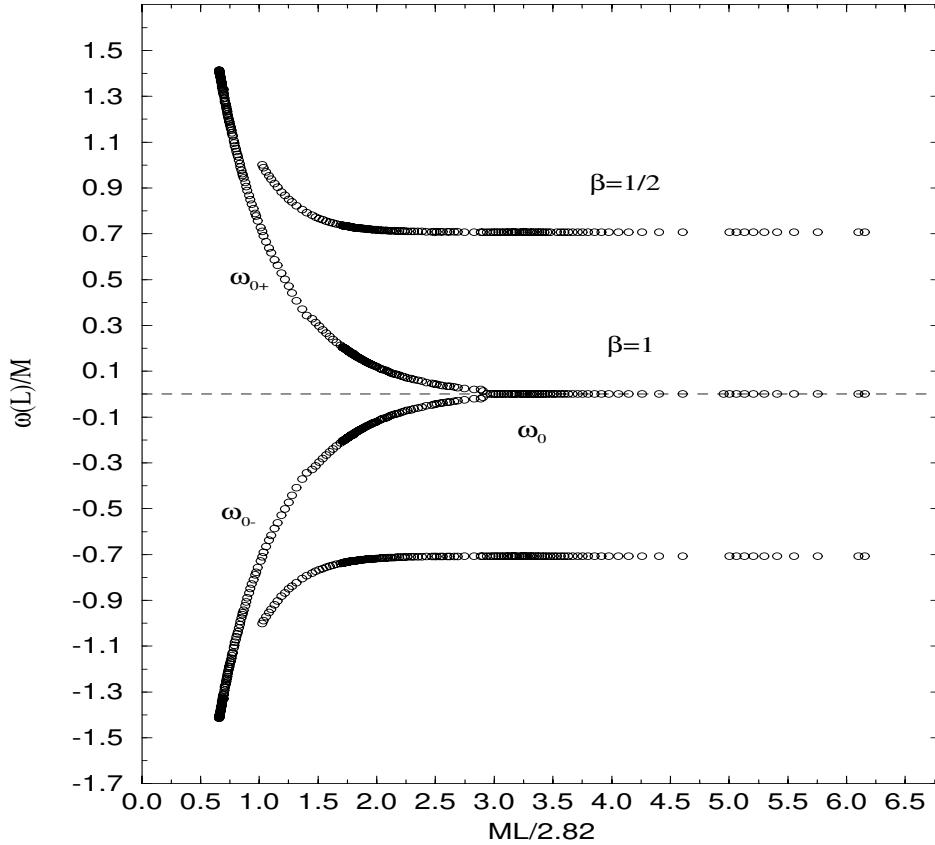


Figura 4.2: Dependência dos níveis de energia do estado fundamental do campo χ (ou ψ) com tamanho L da caixa, para diferentes valores de β . As linhas horizontais mostram os valores assintóticos do modelo semiclássico do kink [1] .

Na Figura 4.2 acima, apresentam-se dois casos para esta relação, a saber, $\beta = 1$ e $\beta = \frac{1}{2}$. Observe que para o caso $\beta = 1$, uma situação física interessante pode ser estudada. Se suposermos que para um comprimento grande ($L \rightarrow \infty$) da caixa o estado fundamental ω_0 está formado por um “condensado” de partícula-antipartícula, então, pode-se dizer que abaixo de um tamanho crítico ($\frac{ML}{2\sqrt{2}} \sim 2.93$)

qualquer perturbação do tamanho da caixa, induzirá uma formação de pares deste nível de energia. Isto poderia ser importante para produção de partículas na presença de campos fortes. Campos confinados poderiam ter uma produção de partículas induzidas pela compressão do domínio de confinamento. No entanto somente um cálculo semi-clássico pode levar à certeza do que é sugerido em nível clássico.

Outro comportamento interessante dos níveis de energia é mostrado na Figura 4.3 abaixo.

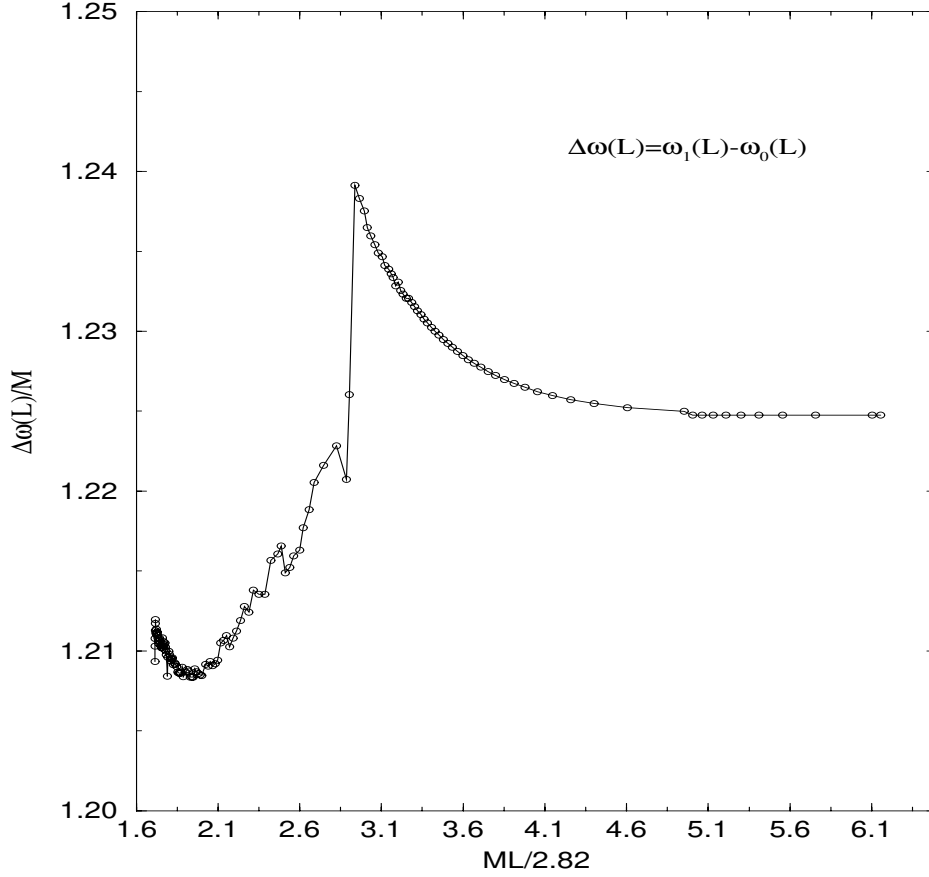


Figura 4.3: O gap entre os níveis de energia ω_0 e ω_1 para um comprimento arbitrário L da caixa e $\beta = 1$.

Ela mostra o gráfico da diferença $\Delta\omega$ entre os níveis de energia ω_0 e ω_1 , para um comprimento arbitrário L da caixa. O fato interessante é o pico ao redor do valor crítico $\frac{ML}{2\sqrt{2}} \sim 2.93$ e a parte crescente da curva (lado esquerdo) do pico mostra crescimento não monótono com vários máximos e mínimos secundários. Por outro lado acima do valor crítico, a curva tem um comportamento muito mais suave e

monótono. A parte mais densa de dados, próximo do ponto do mínimo (~ 1.8) mostra que para pequenos comprimentos as “flutuações” de $\Delta\omega$ tornam-se bastante frequentes. É interessante notar também que o valor crítico para a divisão dos níveis coincide com o valor da posição do pico. No entanto não temos uma explicação para este fato, até o presente momento, mas é possível que se tenha propagação de erros para comprimentos da caixa abaixo de $\frac{ML}{2\sqrt{2}} \sim 2.93$, de maneira que a curva se mostra com valores flutuantes ali.

4.2.2 Condições de Fronteira Periódicas

Nesta seção vamos calcular os níveis de energia para o campo χ , impondo condições de fronteira periódicas nas soluções obtidas para os diferentes casos do parâmetro d . Como os procedimentos são semelhantes aos da seção anterior, vamos apresentar os cálculos de uma maneira mais sucinta.

CASO I: d Inteiro Positivo

Como foi visto anteriormente, neste caso, a solução da equação hipergeométrica (4.11) é dada pela equação (4.14).

Impondo-se condições de fronteira periódicas na solução (4.14) em $x = \pm \frac{L}{2}$,

$$\psi(-\frac{L}{2}) = \psi(\frac{L}{2}),$$

obtemos a equação:

$$F(n+2, n-3; n; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) - F(n+2, n-3; n; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = 0, \quad (4.29)$$

onde $n = k+1$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Usando a seguinte relação para as Funções Hipergeométricas [12]:

$$\frac{(a - \frac{1}{2})(b - \frac{1}{2})}{(a + b - \frac{1}{2})} \frac{\Gamma(a + b + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a + \frac{1}{2})\Gamma(b + \frac{1}{2})} \sqrt{z} F(a, b; \frac{3}{2}; z) =$$

$$F(2a-1, 2b-1; a+b-\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{z}}{2}) - F(2a-1, 2b-1; a+b-\frac{1}{2}; \frac{1-\sqrt{z}}{2}),$$

(4.29) reduz-se a

$$\frac{(\frac{n}{2} + 1)(\frac{n}{2} - \frac{3}{2})}{n} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 2)\Gamma(\frac{n}{2} - \frac{1}{2})} \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) \times$$

$$F(\frac{n+3}{2}, \frac{n-2}{2}; \frac{3}{2}; \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})) = 0. \quad (4.30)$$

Claramente os valores inteiros permitidos de n são dados ainda pela equação (4.16).

Substituindo os valores de n na condição da equação (4.30), encontra-se que:

Para $n = 2$ (4.30) escreve-se como:

$$\tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) F(\frac{5}{2}, 0; \frac{3}{2}; \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})) = 0.$$

Como $L \neq 0$ e $F(\frac{5}{2}, 0; \frac{3}{2}; \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})) = 1$, então $n = 2$ não fornece uma solução consistente.

Para $n = 3$, tem-se

$$\frac{(\frac{5}{2})(0)}{3} \frac{\Gamma(4)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})\Gamma(1)} \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) F(3, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})) = 0.$$

Assim, $n = 3$ será solução para todo $L \neq 0$.

Portanto, concluímos que para d inteiro positivo existe uma solução para todo $L \neq 0$, com $n = 3$ e, como consequência, $\omega^2 = 0$.

CASO II: d Inteiro Negativo

Neste caso, a solução é dada pela equação (4.17). Impondo condições de fronteira periódicas em $x = \pm \frac{L}{2}$, obtemos

$$(1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}))^{(n+1)} F(3, -2; 2+n; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) -$$

$$(1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}))^{(n+1)} F(3, -2; 2+n; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = 0, \quad (4.31)$$

onde $n = -(k+1)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Os valores permitidos de n são dados pela equação (4.19). Substituindo estes valores em (4.31) encontramos:

a) Para $n = 0$

$$\tanh\left(\frac{ML}{2\sqrt{2}}\right) \left(\tanh^2\left(\frac{ML}{2\sqrt{2}}\right) - 1 \right) = 0.$$

Esta igualdade é satisfeita para $L = 0$ ou $L = \infty$. Como estamos considerando domínios finitos ($L \neq 0, \infty$), então $n = 0$ não fornece uma solução consistente.

b) Para $n = 1$, obtém-se a seguinte igualdade

$$(1 - \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}}))^2 - (1 - \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}}))^2 = 0,$$

o qual é satisfeita para todo $L \neq \infty$.

Assim, para o caso d inteiro negativo existe solução para todo $L \neq \infty$ com $n = 1$ e portanto também $\omega^2 = 0$.

CASO III: d Não Inteiro

Neste caso a solução é dada pela equação (4.21). Impondo-se as condições de fronteira periódicas em $x = \pm \frac{L}{2}$ obtemos:

$$\begin{aligned} & A F(k+3, k-2; k+1; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) + B 2^k (1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}))^{-k} \times \\ & F(-2, 3; 1-k; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = A F(k+3, k-2; k+1; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) \\ & + B 2^k (1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}))^{-k} F(-2, 3; 1-k; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}). \end{aligned}$$

Novamente, fazendo uso da relação (4.23) nas expressões $F(k+3, k-2; k+1; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\})$ obtém-se

$$\begin{aligned} & A 2^{-k} (1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}))^{-k} F(-2, 3; k+1; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) + \\ & B 2^{-k} (1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}))^{-k} F(-2, 3; 1-k; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) - \\ & A 2^k (1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}))^{-k} F(-2, 3; k+1; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) - \end{aligned}$$

$$B 2^k (1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}))^{-k} F(-2, 3; 1 - k; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = 0.$$

Por outro lado, usando as relações (4.24) e (4.26) a equação acima fica escrita como:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{A}{(k+1)_2} - \frac{B}{(1-k)_2} \right) \left((1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}))^{-k} \times \right. \\ & \left. (k^2 - 1 - 3k \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})) - \right. \\ & \left. (1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}))^{-k} (k^2 - 1 + 3k \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})) \right) = 0. \end{aligned}$$

No caso mais interessante, para $A \neq \frac{(k+1)_2}{(1-k)_2} B$, obtemos a seguinte equação transcendente para o parâmetro k :

$$\left(\frac{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})} \right)^k = \left(\frac{k^2 - 1 + 3 \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{k^2 - 1 - 3 \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})} \right). \quad (4.32)$$

Observe que esta equação é a mesma que (4.27) somente com o sinal positivo.

Portanto, para o caso de condições de fronteira periódicas obtemos a solução $\omega^2 = 0$ (estado fundamental do modelo semi-clássico do kink [1]) para todo $L \neq 0, \infty$.

4.2.3 Condições de Fronteiras Anti-periódicas

Nesta seção calculamos os níveis de energia para o campo χ , considerando agora condições de fronteira anti-periódicas.

CASO I: d Inteiro Positivo

Neste caso, impondo-se condições de fronteira anti-periódicas em $x = \pm \frac{L}{2}$, a saber

$$\psi(-\frac{L}{2}) = -\psi(\frac{L}{2}),$$

na solução (4.14) obtém-se

$$\begin{aligned} F(n+2, n-3; n; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) &= \\ - F(n+2, n-3; n; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}), \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde $n = k+1$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Como antes, substituindo-se os possíveis valores dados por (4.16) na equação acima temos:

a) Para $n = 2$,

$$F(4, -1; 2; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = - F(4, -1; 2; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}).$$

Usando novamente as propriedades das Funções Hipergeométricas, a equação acima reduz-se a $\tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) = 0$. Assim para $n = 2$ existe solução para todo $L \neq 0$. Para este caso $\omega^2 = \sqrt{\frac{3}{2}}M$, $\forall L > 0$.

b) Para $n = 3$, tem-se

$$F(5, 0; 3; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = - F(5, 0; 3; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}).$$

Por outro lado, sabe-se que $F(5, 0; 3; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = 1$. Assim a relação acima não fornece uma solução consistente.

Portanto, concluímos que para d inteiro positivo existe uma solução para todo $L \neq 0$, com $n = 2$ e $\omega^2 = \sqrt{\frac{3}{2}}M$.

CASO II: d Inteiro Negativo

Impondo-se condições de fronteira anti-periódicas em $x = \pm \frac{L}{2}$ obtemos da equação (4.17)

$$\begin{aligned} (1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}))^{(n+1)} F(3, -2; 2+n; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) &= - \\ (1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}))^{(n+1)} F(3, -2; 2+n; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Substituindo-se os valores possíveis $n = 0$ e $n = 1$ (equação (4.19)) a equação (4.34) reduz-se a:

a) Para $n = 0$

$$\tanh\left(\frac{ML}{2\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Esta igualdade é satisfeita somente para $L = 0$, e portanto deve ser descartada.

b) Para $n = 1$ obtemos de (4.34)

$$(1 - \tanh\left(\frac{ML}{2\sqrt{2}}\right))^2 = 0,$$

o qual é satisfeita para $L = \infty$.

Assim, concluímos que para d inteiro negativo não existe solução para $L \neq 0, \infty$.

CASO III: d Não Inteiro

Novamente impondo-se condições de fronteira anti-periódicas na equação (4.21), obtemos:

$$\begin{aligned} & A F(k+3, k-2; k+1; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) + \\ & B 2^k (1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}))^{-k} F(-2, 3; 1-k; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = \\ & -A F(k+3, k-2; +1; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) - \\ & B 2^k (1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}))^{-k} F(-2, 3; 1-k; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}). \end{aligned}$$

Agora, fazendo uso das relações (4.23), (4.24) e (4.26), a equação acima escreve-se como:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{A}{(k+1)_2} - \frac{B}{(1-k)_2} \right) \left((1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}))^{-k} \times \right. \\ & \left. (k^2 - 1 - 3k \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})) + \right. \\ & \left. (1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}))^{-k} (k^2 - 1 + 3k \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})) \right) = 0. \end{aligned}$$

Então para o caso mais geral $A \neq -\frac{(k+1)_2}{(1-k)_2}B$, obtemos a equação transcendente para o parâmetro k :

$$\left(\frac{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}\right)^k = - \left(\frac{k^2 - 1 + 3 \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{k^2 - 1 - 3 \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}\right). \quad (4.35)$$

Observe que esta equação é a mesma que a equação(4.27) somente com o sinal negativo.

Assim, para o caso de condições de fronteiras anti-periódicas obtemos a solução $\omega^2 = \sqrt{\frac{3}{2}}M$ (estado excitado do modelo semiclássico do kink [1]) para $L \neq 0$.

4.3 Espectro Contínuo

Finalmente, nesta seção calculamos os níveis de energia para o campo χ , no caso do espectro contínuo.*

Neste caso, $\omega^2 \geq 2M_\chi^2$ e em conseqüência, usando as mudanças de variáveis $E = 2\beta + \varepsilon - 2$ e $\omega^2 = \frac{(\varepsilon-2)}{2}M_\phi^2$, $E \geq 6\beta$. Como $\beta \leq 1$, então o parâmetro k na equação (4.9) será uma quantidade imaginária. Assim, definindo

$$k' = \sqrt{E - 6}, \quad (4.36)$$

tem-se que a equação (4.9) pode ser escrita como:

$$k = \pm ik'.$$

Portanto, a solução geral da equação Hipergeométrica (4.11) é dada por

$$\begin{aligned} \psi(x) = \text{sech}^{ik'}\left(\frac{Mx}{\sqrt{2}}\right) & \left(A F(ik' + 3, ik' - 2; ik' + 1; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{Mx}{\sqrt{2}})\}) + \right. \\ & \left. B 2^{ik'} [1 - \tanh(\frac{Mx}{\sqrt{2}})]^{-k} F(-2, 3; 1 - ik'; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{Mx}{\sqrt{2}})\}) \right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Agora, impondo-se as condições de fronteiras tipo Dirichlet em $x = \pm \frac{L}{2}$ para a solução acima, obtém-se

$$A F(ik' + 3, ik' - 2; ik' + 1; \frac{1}{2}\{1 \pm \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) +$$

*Esta seção foi incluída para tornar completo este capítulo.

$$B 2^{ik'} [1 \pm \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})]^{-ik'} F(-2, 3; 1 - ik'; \frac{1}{2}\{1 \pm \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = 0.$$

Como antes, este sistema de equações homogêneas tem somente uma solução não trivial, se o determinante do sistema é zero, i.e.,

$$\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}^{-ik'} F(ik' + 3, ik' - 2; ik' + 1; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) \times$$

$$F(-2, 3; 1 - ik'; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) -$$

$$\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}^{-ik'} F(ik' + 3, ik' - 2; ik' + 1; \frac{1}{2}\{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) \times$$

$$F(-2, 3; 1 - ik'; \frac{1}{2}\{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})\}) = 0.$$

Usando as relações (4.23), (4.24) e (4.26), encontra-se

$$\left(\frac{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})} \right)^{ik'} = \pm \left(\frac{-k'^2 - 1 + 3 ik' \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{-k^2 - 1 - 3 ik' \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})} \right). \quad (4.38)$$

Por outro lado, é possível mostrar as seguintes identidades (veja apêndice A.3):

$$\left(\frac{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})} \right)^{ik'} = \cos \left(k' \ln \left(\frac{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})} \right) \right) +$$

$$i \sin \left(k' \ln \left(\frac{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})} \right) \right), \quad (4.39)$$

$$\left(\frac{-k'^2 - 1 + 3 ik' \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{-k^2 - 1 - 3 ik' \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})} \right) = \cos(\theta) + i \sin(\theta), \quad (4.40)$$

onde

$$\theta = \arctan \left(\frac{6 \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) k' (3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) - k'^2 - 1)}{k'^4 + 2 k'^2 - 15 k'^2 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) - 6 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 9 \tanh^4(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 1} \right).$$

Assim, substituindo-se (4.39) e (4.40) em (4.38), obtemos uma equação transcendente para o parâmetro k' , ou seja,

$$\tan \left(k' \ln \left(\frac{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})} \right) \right) = \frac{6 \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) k' (3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) - k'^2 - 1)}{k'^4 + 2 k'^2 - 15 k'^2 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) - 6 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 9 \tanh^4(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 1} \quad (4.41)$$

Observamos que a equação (4.41) é válida desde que $\tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) \neq 1$. Analogamente à equação (4.27), neste caso é possível obter uma solução numérica para a equação transcendente acima. A Figura 4.4 mostra que os níveis de energia estão aparentemente igualmente espaçados numa torre para cada valor de L do comprimento da caixa. Também é possível ver como o gap entre os estados discretizados do espectro contínuo mudam com o tamanho da caixa. Observe também que o gap entre os níveis de energia decresce com $L \rightarrow \infty$ tendendo para um contínuo de autovalores, como esperado, de energia.

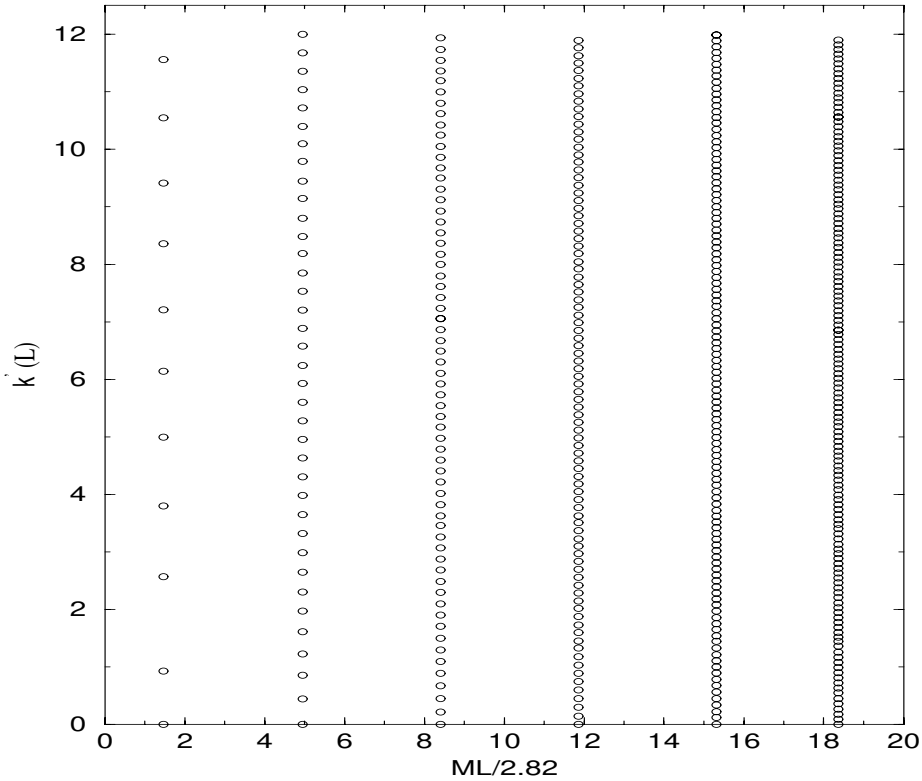


Figura 4.4: Discretização da parte contínua do espectro, mostrando a variação do gap entre níveis consecutivos, com o tamanho da caixa.

Finalmente, considerando as condições de fronteiras periódicas (anti-periódicas) na equação (4.37), é possível mostrar a seguintes relações

$$\left(\frac{A}{(1+ik')_2} \mp \frac{B}{(1-ik')_2} \right) \left(\left(\frac{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})} \right)^{ik'} \mp \left(\frac{k'^2 - 1 + 3k' \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{k'^2 - 1 - 3k' \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})} \right) \right) = 0. \quad (4.42)$$

onde, os sinais $\mp$ referem-se às condições de fronteiras periódicas (anti-periódicas) respectivamente.

Assim, para $A \neq \pm \frac{(1+ik')_2}{(1-ik')_2} B$, obtemos a equação transcendente para o parâmetro k' :

$$\left(\frac{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})} \right)^{ik'} = \pm \left(\frac{-k'^2 - 1 + 3ik' \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{-k'^2 - 1 - 3ik' \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})} \right).$$

Observamos, que esta relação é a mesma que a equação (4.38). Portanto, a equação (4.41) será obtida novamente e assim todos os resultados do caso de condições de fronteira de Dirichlet serão válidos também aqui.

Capítulo 5

Níveis de Energia de Campos Clássicos Interagentes num Domínio Finito em Dimensão $(1 + 1)$: Caso Geral

Neste capítulo estende-se o estudo da influência das condições de fronteira sobre os níveis de energia dos estados ligados de um campo escalar real χ , que interage com outro campo escalar real ϕ numa caixa unidimensional. Para isto, consideramos o caso geral em que o campo ϕ vem dado pelas Soluções Elípticas tipo sn (capítulo 3) e além disso, diferente do capítulo anterior, satisfaz as mesmas condições de fronteira do campo χ . A densidade Lagrangiana total tem autointeração $\frac{\lambda}{4}\phi^4$ e um termo de interação dado por $g\phi^2\chi^2$. São calculadas as autofunções e seus correspondentes autovalores de energia, e estudamos sua dependência com o tamanho L da caixa, assim como dos parâmetros livres da Lagrangiana, a saber: razão de massa $\beta \equiv \frac{M_\chi^2}{M_\phi^2}$ e constantes de acoplamentos λ e g . Mostramos também que, para algumas configurações dos parâmetros da Lagrangiana, existe um tamanho crítico da caixa para o qual os autovalores de energia do campo χ tornam-se imaginários, efeito que é interpretado como instabilidade do campo clássico χ .

Na seção 5.1 calculam-se as primeiras autofunções e autovalores da equação de movimento de χ , a qual se reduz a uma equação diferencial de Lamé. Na seção 5.2 calculamos os autovalores de energia impondo-se condições de fronteira do tipo Dirichlet. Nas seções 5.3 e 5.4 calculamos os deslocamentos dos autovalores de

energia induzidas pela modificação do tamanho da caixa e pelo parâmetro β .

5.1 Autofunções e Autovalores Associados às Funções de Lamé

Como no capítulo anterior, vamos considerar um sistema formado por um campo escalar real χ o qual interage com outro campo escalar real ϕ , através da densidade Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}M_\phi^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 + \frac{1}{2}M_\chi^2 \chi^2 - g\phi^2 \chi^2, \quad (5.1)$$

onde λ e g são as constantes de acoplamento.

Estudamos aqui somente o caso mais simples de campos ϕ e χ dentro de uma caixa finita (intervalo) em dimensão $(1+1)$. Naturalmente, toda esta discussão pode ser generalizada para dimensões superiores com um número maior de equações e condições de fronteira mais complicadas e dependentes da geometria da caixa.

A equação de movimento para os dois campos são dadas por

$$-\partial^\mu \partial_\mu \chi + M_\chi^2 \chi - 2g\phi^2 \chi = 0, \quad (5.2)$$

$$-\partial^\mu \partial_\mu \phi + M_\phi^2 \phi - \lambda\phi^3 = 0. \quad (5.3)$$

Como no capítulo anterior, aqui também foi desprezado, na equação (5.3), o termo $2g\phi\chi^2$, o qual pode ser interpretado com um back-reaction do campo χ sobre o termo de massa do campo ϕ . Isto pode ser obtido se, neste caso, impoermos que $|\chi| \ll \min\{\frac{M_\phi}{\sqrt{2}g}\}$. Naturalmente outros regimes podem ser estudados para a equação (5.3) com outras aproximações.

No capítulo anterior foi estudado o caso no qual o campo $\phi(x)$, diferentemente do campo $\chi(x)$, não é influenciado pelas condições de fronteira da caixa. Nesse caso o campo $\phi(x)$ é a solução kink da equação (5.3) em $(-\infty, +\infty)$ [1]. Ainda foi mostrado que instabilidades do campo χ podem ser induzidas quando a caixa é comprimida abaixo de um tamanho crítico. No presente capítulo consideramos as mesmas condições de fronteira para ambos os campos ϕ e χ . Este é um caso em que o campo χ pode ser pensado como estando na presença de um potencial (como função

de ϕ) dependente das condições de fronteira. Isto leva a novos comportamentos dos níveis de energia do campo χ em relação aos parâmetros L, β, λ e g . Naturalmente, o tamanho da caixa, L , é um parâmetro externo da teoria que, a priori, está sob o controle do observador.

Por outro lado, no capítulo 3 foi mostrado que as soluções gerais estáticas da equação de movimento do campo $\phi(x)$ são dadas pelas Soluções Elípticas tipo sn, a saber,

$$\phi_c(x) = \pm \frac{M_\phi \sqrt{2c}}{\sqrt{\lambda} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 2c}}} \operatorname{sn} \left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 2c}}, l \right), \quad (5.4)$$

onde c é um parâmetro que pertence ao intervalo $(0, \frac{1}{2}]$ e

$$l = \frac{1}{-1 + \frac{1 + \sqrt{1 - 2c}}{c}}. \quad (5.5)$$

Claramente, de (5.5), temos que $l \in (0, 1]$. Existe outra família de soluções denominadas Soluções Elípticas tipo cn (3.13) porém, neste trabalho, escolhemos estudar os autovalores de energia do campo χ com a família de soluções (5.4) pois, como vamos impor condições de fronteira do tipo Dirichlet, vimos no capítulo 3, que somente estas satisfazem condições de fronteiras deste tipo.

Assim, a equação de movimento para o campo χ dada pela equação (5.2) pode ser escrita como

$$\left(-\partial^\mu \partial_\mu + M_\chi^2 - \frac{4g M_\phi^2 c}{\lambda(1 + \sqrt{1 - 2c})} \operatorname{sn}^2 \left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 2c}}, l \right) \right) \chi = 0.$$

Como estamos interessados em obter soluções estacionárias, pode-se escrever $\chi(x, t) = e^{-i\omega t} \psi(x)$, onde ω são os autovalores de energia do campo χ . Com isto, a equação anterior pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \left(M_\chi^2 + \omega^2 - \frac{4g M_\phi^2 c}{\lambda(1 + \sqrt{1 - 2c})} \times \right. \\ \left. \operatorname{sn}^2 \left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 2c}}, l \right) \right) \psi(x) = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Para encontrar uma solução da equação acima, iniciamos fazendo as seguintes mudanças de variáveis,

$$\alpha = \frac{M_\phi x}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 2c}} \quad \text{e} \quad \omega^2 = \frac{(E - 2)}{2} M_\phi^2.$$

A equação (5.6), pode então ser reescrita como:

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\psi(\alpha) = \left(\frac{8gc}{\lambda(1+\sqrt{1-2c})^2} \operatorname{sn}^2(\alpha, l) - 2\frac{(M_\chi^2 - M_\phi^2)}{M_\phi^2\sqrt{1+\sqrt{1-2c}}} - \frac{E}{(1+\sqrt{1-2c})} \right) \psi(\alpha). \quad (5.7)$$

Por outro lado, de (5.5) tem-se que:

$$c = \frac{2l}{(l+1)^2}. \quad (5.8)$$

Substituindo a equação (5.8) na equação (5.7) obtemos:

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\psi(\alpha) = \left(4\frac{g}{\lambda}l \operatorname{sn}^2(\alpha, l) - \frac{(M_\chi^2 - M_\phi^2)}{M_\phi^2}(1+l) - \frac{E(1+l)}{2} \right) \psi(\alpha). \quad (5.9)$$

Esta equação diferencial tem algumas propriedades importantes, entre as quais está o fato de que se $4\frac{g}{\lambda}$ tem a forma $n(n+1)$, onde n é um número real positivo, então ela possui soluções finitas na forma de Funções Elípticas $\operatorname{sn}(\alpha, l)$, $\operatorname{cn}(\alpha, l)$ e $\operatorname{dn}(\alpha, l)$ [15]. Conseqüentemente, como g e λ são positivos, pode-se escrever, sem perda de generalidade

$$4\frac{g}{\lambda} \equiv n(n+1). \quad (5.10)$$

Assim a equação acima pode ser reescrita como

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\psi(\alpha) = \left(n(n+1)l \operatorname{sn}^2(\alpha, l) - \frac{(M_\chi^2 - M_\phi^2)}{M_\phi^2}(1+l) - \frac{E(1+l)}{2} \right) \psi(\alpha). \quad (5.11)$$

Esta é uma equação diferencial de Lamé. Na literatura encontramos a forma geral deste tipo de equação dada por [16]*

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\Lambda(\alpha) = \left(n(n+1)k \operatorname{sn}^2(\alpha, k) + C \right) \Lambda(\alpha), \quad (5.12)$$

onde n é um número real positivo, k é o parâmetro da Função Elíptica de Jacobi sn e C é uma constante arbitrária.

*Em nossa notação tomamos o parâmetro da Função Elíptica de Jacobi como k (com $k > 0$) em lugar de k^2 como na referência [16].

É bem conhecido que a equação diferencial de Lamé e, mais geralmente, a equação de Hill apresentam bandas de estabilidade e instabilidade no plano dos parâmetros (k, C) na notação da equação (5.12). Neste caso, a estabilidade está relacionada à dependência espacial da solução. Por outro lado, nós estamos interessados na estabilidade da solução em relação à dependência temporal. Usando a Teoria de Floquet para equações diferenciais com potenciais periódicos, a solução (que no nosso caso, é estacionária) pode ser escrita como [16]

$$\chi(x, t) = e^{-i\omega t} e^{irx} p(x),$$

onde $p(x)$ é uma função periódica. Em nosso estudo, mostraremos que embora os autovalores da equação de Lamé descrevam soluções de estabilidades para a parte espacial ($r^2 > 0$), podemos ter soluções com instabilidades na parte temporal, isto é, com $\omega^2 < 0$ o que implica um crescimento exponencial da solução como função do tempo.

Comparando (5.11) e (5.12), obtemos

$$C = -(\beta - 1)(1 + l) - \frac{E(1 + l)}{2}.$$

Neste trabalho, será considerado somente o caso em que n é um inteiro positivo. O caso com n real, embora mais interessante, leva a autovalores, os quais são difíceis de calcular exatamente e acreditamos que um estudo numérico é a única maneira de se obter os autovalores que estamos interessados. Para n inteiro, a equação (5.11) ou (5.12) é conhecida simplesmente como equação diferencial de Lamé e pode ser solucionada analiticamente. Assim estes resultados podem ser usados como uma prova da efetividade dos métodos numéricos para o caso em que não se tem soluções exatas.

Quando n é um inteiro positivo, a solução geral da equação (5.11) é dada por

$$\psi(\alpha) = A E_n^m(\alpha) + B F_n^m(\alpha),$$

onde A e B são constantes arbitrárias e $E_n^m(\alpha)$ e $F_n^m(\alpha)$ são as funções de Lamé de primeiro e segundo tipo respectivamente [16]. Os valores do parâmetro m são dados por, $-n, -n + 1, \dots, n - 1, n$.

Também da referência [16] temos que

$$F_n^m(\alpha) = (2n + 1)E_n^m(\alpha) \int_0^\alpha \frac{dt}{(E_n^m(t))^2}. \quad (5.13)$$

Além disso, quando n é um inteiro positivo, se uma das soluções da equação de Lamé é um polinômio, então a outra solução é, necessariamente, uma série infinita. As soluções polinomiais são dadas pelas funções $E_n^m(\alpha)$ e as soluções em série, pelas $F_n^m(\alpha)$ [16].

Neste trabalho vamos nos restringir apenas a soluções polinomiais. Em outras palavras, queremos funções cujo crescimento no infinito seja, no máximo, polinomial. Daí nossas soluções serão dadas apenas por:

$$\psi(\alpha) = A E_n^m(\alpha). \quad (5.14)$$

Por outro lado, como o objetivo é obter unicamente os autovalores de energia ω , podemos colocar a constante arbitrária $A = 1$.

A seguir listamos as primeiras autofunções ($n = 1, 2, 3$) da equação (5.11), os quais são dadas pelas funções de Lamé. Observe que o caso $n = 0$, em princípio, pode ser considerado. Mas de (5.10), temos que para $n = 0$, $g = 0$ e daí o termo de interação, $g\phi^2\chi^2$ da densidade Lagrangiana (5.1) desaparece, e como consequência sua Hamiltoniana associada não será mais positiva definida. Portanto o caso $n = 0$ será descartado. Naturalmente, da equação (5.10) temos um valor mínimo positivo para a constante de acoplamento, a saber, $g = \frac{\lambda}{2}$ (para $n = 1$). Como uma consequência disto, para acoplamentos fracos ($g \ll \frac{\lambda}{2}$) n não é inteiro e este caso não será estudado aqui. Por outro lado, o caso de acoplamentos fortes ($n \rightarrow \infty$) levam a funções de Lamé mais complicadas. Optamos então neste trabalho por analisar somente o caso para valores de n pequeno, ou seja, para constantes de acoplamento não muito fortes (da ordem de λ). Como será visto, ainda nestes poucos casos obtemos resultados muito interessantes para os autovalores de energia ligados do campo χ .

5.1.1 Autofunções e Autovalores do Campo ψ

Usando os resultados da referência [16], as autofunções $\psi(\alpha) = E_n^m(\alpha)$ e seus autovalores H_n^m para a equação (5.11) são listados abaixo

CASO I: $n = 1$ ($g = \frac{\lambda}{2}$)

$$1) \quad \psi_1(x, l) = \operatorname{sn}\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right),$$

$$H_1^{-1}(l) = -1 - \frac{1}{l}. \quad (5.15)$$

$$2) \quad \psi_2(x, l) = \sqrt{\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) - 1},$$

$$H_1^0(l) = -\frac{1}{l}. \quad (5.16)$$

$$3) \quad \psi_3(x, l) = \sqrt{\frac{l \operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) - 1}{l}},$$

$$H_1^1(l) = -1. \quad (5.17)$$

CASO II: $n = 2$ ($g = \frac{3}{2}\lambda$)

$$1) \quad \psi_1(x, l) = \operatorname{sn}\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) \sqrt{\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) - 1},$$

$$H_2^{-1}(l) = -\frac{1}{l}(4+l). \quad (5.18)$$

$$2) \quad \psi_2(x, l) = \operatorname{sn}\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) \sqrt{\frac{l \operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) - 1}{l}},$$

$$H_2^0(l) = -\frac{1}{l}(4l+1). \quad (5.19)$$

$$3) \quad \psi_3(x, l) = \sqrt{\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) - 1} \sqrt{\frac{l \operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) - 1}{l}},$$

$$H_2^1(l) = -\frac{1}{l}(l+1). \quad (5.20)$$

$$4) \quad \psi_4(x, l) = \operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) - \frac{1}{1+l+\sqrt{l^2-l+1}},$$

$$H_2^2(l) = -\frac{2}{l}(1+l+\sqrt{l^2-l+1}). \quad (5.21)$$

$$5) \quad \psi_5(x, l) = \operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) - \frac{1}{1+l-\sqrt{l^2-l+1}},$$

$$H_2^{-2}(l) = -\frac{2}{l}(1+l-\sqrt{l^2-l+1}). \quad (5.22)$$

CASO III: $n = 3$ ($g = 3\lambda$)

$$1) \quad \psi_1(x, l) = \sqrt{\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) - 1} \left(\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) + \frac{1}{-\sqrt{l^2-l+4}-l-2} \right),$$

$$H_3^{-2} = -\frac{2l+5}{l} - \frac{2}{l}\sqrt{l^2-l+4}. \quad (5.23)$$

$$2) \quad \psi_2(x, l) = \sqrt{\frac{l \operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) - 1}{l}} \left(\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) + \frac{1}{-\sqrt{4l^2-l+1}-2l-1} \right),$$

$$H_3^{-1} = -\frac{5l+2}{l} - \frac{2}{l}\sqrt{4l^2-l+1}. \quad (5.24)$$

$$3) \quad \psi_3(x, l) = \operatorname{sn}\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) \sqrt{\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) - 1} \sqrt{\frac{l \operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) - 1}{l}},$$

$$H_3^0(l) = -\frac{4}{l}(1+l). \quad (5.25)$$

$$4) \quad \psi_4(x, l) = \operatorname{sn}\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) \left(\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) + \frac{3}{\sqrt{4(l-1)^2 + l - 2l - 2}} \right)$$

$$H_3^1 = -\frac{5}{l}(l+1) + \frac{2}{l}\sqrt{4(l-1)^2 + l}. \quad (5.26)$$

$$5) \quad \psi_5(x, l) = \sqrt{\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) - 1} \left(\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) + \frac{1}{\sqrt{l^2 - l + 4 - l - 2}} \right),$$

$$H_3^2 = -\frac{2l+5}{l} + \frac{2}{l}\sqrt{l^2 - l + 4}. \quad (5.27)$$

$$6) \quad \psi_6(x, l) = \sqrt{\frac{l \operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) - 1}{l}} \left(\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) + \frac{1}{\sqrt{4l^2 - l + 1 - 2l - 1}} \right),$$

$$H_3^3 = -\frac{5l+2}{l} + \frac{2}{l}\sqrt{4l^2 - l + 1}. \quad (5.28)$$

$$7) \quad \psi_7(x, l) = \operatorname{sn}\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) \left(\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}, l\right) + \frac{3}{-\sqrt{4(l-1)^2 + l - 2l - 2}} \right)$$

$$H_3^{-3} = -\frac{5}{l}(l+1) - \frac{2}{l}\sqrt{4(l-1)^2 + l}. \quad (5.29)$$

Em todos os casos fizemos a substituição $\alpha = \frac{M_\phi x}{\sqrt{1+l}}$, usando (5.8) e a definição de α dada nesta seção.

Na próxima seção serão calculados os autovalores de energia da equação (5.11) assim como sua dependência com os parâmetros da teoria, a saber, g , λ , $\beta = \frac{M_\chi^2}{M_\phi^2}$, l . Para simplificar $\omega \equiv \omega(\lambda, g, \beta; l)$, onde o ponto e vírgula significa que l é um parâmetro externo da teoria.

5.2 Condições de Fronteira e Autovalores de Energia

Nesta seção determinamos os autovalores de energia dos estados ligados do campo ψ o qual interage com o campo ϕ , ambos confinados numa caixa (em nosso caso um intervalo) de tamanho L .

No capítulo 3 foi mostrado que impondo condições de fronteira tipo Dirichlet sobre o campo ϕ , confinado numa caixa unidimensional de tamanho L , é possível obter a seguinte condição:

$$M_\phi L = 4\sqrt{1+l} K(l), \quad (5.30)$$

onde $4K(l)$ é um período das Funções Elípticas de Jacobi $\text{sn}(u, l)$ [12].

Como as mesmas condições de fronteira são impostas também para o campo χ (mesmo tipo de confinamento), isto implica que o mesmo $l = l(L)$ obtido da equação (5.30) deve ser usado na condição de fronteira do campo χ , para se obter seus autovalores de energia.

Naturalmente diferentes condições de fronteiras podem ser impostas para os campos ϕ e χ . Por exemplo, no capítulo anterior, foi estudado o caso extremo, onde as fronteiras da caixa são transparentes ao campo ϕ , mas χ satisfaz condições de fronteira do tipo Dirichlet.

5.2.1 Autovalores para as Condições de Fronteira Tipo Dirichlet

Impondo-se condições de fronteira tipo Dirichlet em $x = \pm \frac{L}{2}$ sobre as soluções ψ , obtemos as relações para $l \equiv l(L)$.

Antes de continuarmos os nossos cálculos, a seguinte observação torna-se importante. No capítulo 3 foi determinado um valor mínimo para a relação $M_\phi L$, quando $l \rightarrow 0$, a saber, 2π . Usando (5.30) ou (5.35), este resultado pode ser facilmente verificado. Deste modo, observe, da equação (5.8), que se $l \rightarrow 0$ então $c \rightarrow 0$ e conseqüentemente da equação (5.4) temos que $\phi \rightarrow 0$. Assim, abaixo do valor mínimo $M_\phi L = 2\pi$ o campo ϕ desaparece. Portanto, nestes cálculos os únicos autovalores

de energia consistentes serão aqueles que satisfazam a condição $M_\phi L \geq 2\pi$, isto é, onde o campo ϕ está presente.

Agora voltamos ao nossos cálculos dos autovalores de energia ω^2 para as autofunções ψ_i ($i = 2, 3, 4, 5$). Impondo-se, em cada caso, as condições de fronteira tipo Dirichlet, obtemos os seguintes autovalores de energia.

Usamos, em cada caso, a forma definida na referência [16], a saber

$$H = \frac{1}{l}C,$$

onde H genericamente denota os autovalores correspondentes das autofunções de Lamé, calculadas na seção anterior. Fazendo-se a mudança de variável $\omega^2 = \frac{(E-2)}{2}M_\phi^2$, é possível se obter os autovalores de energia ω^2 . Abaixo listamos ω^2 para os casos $n = 1, 2, 3$.

CASO I: $n = 1$ ($g = \frac{\lambda}{2}$)

$$1) \quad \omega_1^2(\beta) = (1 - \beta)M_\phi^2. \quad (5.31)$$

Observe que, neste caso, o autovalor de energia ω_1^2 não depende do parâmetro l e portanto não depende de L . Autovalores independentes do parâmetro L são todos permitidos.

$$2) \quad \omega_2^2(l, \beta) = \left(\frac{1}{1+l} - \beta\right)M_\phi^2,$$

onde l satisfaz

$$M_\phi L = 2\sqrt{1+l}K(l).$$

Note que os $l \equiv l(L)$ obtidos desta relação, não são os mesmos da equação (5.30). Por outro lado, como foi mencionado anteriormente, o objetivo aqui é obter autovalores de energia do campo χ com os mesmos $l = l(L)$ usados para o campo ϕ . Em consequência, os autovalores de energia ω_2^2 devem ser descartados para o caso $n = 1$.

$$3) \quad \omega_3^2(l, \beta) = \left(\frac{l}{1+l} - \beta\right)M_\phi^2, \quad (5.32)$$

onde l satisfaz

$$\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi L}{2\sqrt{1+l}}, l\right) = \frac{1}{l}. \quad (5.33)$$

Como $\operatorname{sn}^2(\frac{M_\phi L}{2\sqrt{1+l}}, l) \leq 1$, é possível mostrar desta relação, que $l \geq 1$. Porém, como $l \in (0, 1]$ então somente $l = 1$ ($L = \infty$) será solução da equação (5.33). Como estamos tratando do caso $L \neq 0, \infty$, estes autovalores também não serão considerados para nossa análise.

CASO II: $n = 2$ ($g = \frac{3}{2}\lambda$)

$$1) \quad \omega_1^2(l, \beta) = \left(\frac{4+l}{1+l} - \beta\right) M_\phi^2, \quad (5.34)$$

onde l satisfaz

$$M_\phi L = 4\sqrt{1+l}K(l) \quad (5.35)$$

ou

$$M_\phi L = 2\sqrt{1+l}K(l). \quad (5.36)$$

Note que neste caso somente a equação (5.35) coincide com (5.30) conduzindo ao mesmo valor do parâmetro $l = l(L)$. De acordo com isto, a condição (5.36) deve ser descartada em todo o nosso estudo dos autovalores de energia do campo χ . Assim, ω_1^2 é um autovalor permitido com l dado por (5.35).

$$2) \quad \omega_2^2(l, \beta) = \left(\frac{4l+1}{1+l} - \beta\right) M_\phi^2, \quad (5.37)$$

com l satisfazendo a condição (5.35), ou também

$$\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi L}{2\sqrt{l+1}}, l\right) = \frac{1}{l}. \quad (5.38)$$

Aqui como no caso da equação (5.33), somente $l = 1$ ($L = \infty$) será solução desta equação. Daí para $L \neq \infty$, somente a condição (5.35) determina o autovalor ω_2^2 .

$$3) \quad \omega_3^2(\beta) = (1 - \beta) M_\phi^2. \quad (5.39)$$

Observe que o autovalor de energia ω_3^2 é independente do parâmetro l e portanto de L .

$$4) \quad \omega_4^2(l, \beta) = \left(\frac{(2 - \beta)(1 + l) + 2\sqrt{l^2 - l + 1}}{1 + l} \right) M_\phi^2, \quad (5.40)$$

onde l satisfaz

$$\text{sn}^2\left(\frac{M_\phi L}{2\sqrt{l+1}}, l\right) = \frac{1}{1 + l + \sqrt{l^2 - l + 1}}. \quad (5.41)$$

Um análise numérico da equação (5.41), mostra que para $l \in (0, 1]$, os valores de $M_\phi L$ pertencem ao intervalo $\sim (1.57, 1.86)$. Assim, o autovalor de energia ω_4^2 não será considerado como uma solução consistente, pois, neste caso, $M_\phi L < 2\pi$, o que viola a condição descrita acima.

$$5) \quad \omega_5^2(l, \beta) = \left(\frac{(2 - \beta)(1 + l) - 2\sqrt{l^2 - l + 1}}{1 + l} \right) M_\phi^2, \quad (5.42)$$

onde l satisfaz

$$\text{sn}^2\left(\frac{M_\phi L}{2\sqrt{l+1}}, l\right) = \frac{1}{1 + l - \sqrt{l^2 - l + 1}}. \quad (5.43)$$

Como no caso da equação (5.38), esta relação tem somente uma única solução, a saber, $l = 1$ ($L = \infty$). Daí como $L \neq \infty$, então ω_5^2 deve ser descartado.

CASO III: $n = 3$ ($g = 3\lambda$)

$$1) \quad \omega_1^2(l, \beta) = \left(\frac{2l + 5 + 2\sqrt{l^2 - l + 4}}{1 + l} - \beta \right) M_\phi^2, \quad (5.44)$$

com l satisfazendo a condição (5.36) ou

$$\text{sn}^2\left(\frac{M_\phi L}{2\sqrt{l+1}}, l\right) = \frac{1}{l + 2 + \sqrt{l^2 - l + 4}}. \quad (5.45)$$

Um análise numérico desta equação (5.45) mostra que $M_\phi L$ pertence ao intervalo $(1.04, 1.36)$. Logo o autovalor de energia ω_1^2 não será considerado como uma solução consistente, pois $M_\phi L < 2\pi$.

$$2) \quad \omega_2^2(l, \beta) = \left(\frac{5l + 2 + 2\sqrt{4l^2 - l + 1}}{1 + l} - \beta \right) M_\phi^2, \quad (5.46)$$

com l satisfazendo

$$\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi L}{2\sqrt{l+1}}, l\right) = \frac{1}{l}$$

ou

$$\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi L}{2\sqrt{l+1}}, l\right) = \frac{2}{5l+1+2\sqrt{4l^2-l+1}}. \quad (5.47)$$

Observamos que a primeira equação é satisfeita somente para $l = 1$ ($L = \infty$), e da segunda condição é possível mostrar que $M_\phi L$ pertence ao intervalo (1.36, 1.57), isto é $M_\phi L < 2\pi$. Assim ω_2^2 deve ser descartado.

$$3) \quad \omega_3^2(l, \beta) = (4 - \beta)M_\phi^2, \quad (5.48)$$

neste caso o autovalor de energia ω_3^2 é independente do parâmetro l e portanto de L . Logo é ω_3^2 permitido.

$$4) \quad \omega_4^2(l, \beta) = \left(\frac{(5 - \beta)(l + 1) - 2\sqrt{4(l - 1)^2 + l}}{1 + l}\right)M_\phi^2, \quad (5.49)$$

com l satisfazendo (5.35) ou

$$\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi L}{2\sqrt{l+1}}, l\right) = \frac{3}{2l+2-\sqrt{4(l-1)^2+l}}. \quad (5.50)$$

Neste caso, também é possível mostrar que esta igualdade é satisfeita somente para $l = 1$ ($L = \infty$). Logo ω_4^2 é um autovalor permitido com l dado por (5.35).

$$5) \quad \omega_5^2(l, \beta) = \left(\frac{2l + 5 - 2\sqrt{l^2 - l + 4}}{1 + l} - \beta\right)M_\phi^2, \quad (5.51)$$

com l satisfazendo (5.36) ou

$$\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi L}{2\sqrt{l+1}}, l\right) = \frac{1}{l+2-\sqrt{l^2-l+4}}. \quad (5.52)$$

Como no caso anterior, é possível mostrar que somente $l = 1$ ($L = \infty$) satisfaz a igualdade. Logo ω_5^2 deve ser descartado.

$$6) \quad \omega_6^2(l, \beta) = \left(\frac{5l + 2 - 2\sqrt{4l^2 - l + 1}}{1 + l} - \beta\right)M_\phi^2, \quad (5.53)$$

com l satisfazendo

$$\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi L}{2\sqrt{l+1}}, l\right) = \frac{1}{l},$$

ou

$$\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi L}{2\sqrt{l+1}}, l\right) = \frac{2}{5l+1-2\sqrt{4l^2-l+1}}. \quad (5.54)$$

Observa-se que estas igualdades são satisfeitas somente para $l = 1$ ($L = \infty$). Como $L \neq \infty$, então ω_6^2 deve ser descartado.

$$7) \quad \omega_7^2(l, \beta) = \left(\frac{(5-\beta)(l+1) + 2\sqrt{4(l-1)^2+l}}{1+l}\right)M_\phi^2, \quad (5.55)$$

com l satisfazendo (5.35) ou

$$\operatorname{sn}^2\left(\frac{M_\phi L}{2\sqrt{l+1}}, l\right) = \frac{3}{2l+2+\sqrt{4(l-1)^2+l}}. \quad (5.56)$$

Um análise numérico de (5.56) mostra que $M_\phi L$ pertence ao intervalo $(2.04, 2.92)$, daí $M_\phi L < 2\pi$, o que implica que somente (5.35) determina ω_7^2 .

Portanto, a análise acima mostra que somente os autovalores ω_1^2 e ω_2^2 são permitidos para $n = 2$, e ω_4^2 e ω_7^2 são para $n = 3$. Também existe uma solução trivial, a saber, ω_1^2 para $n = 1$ o qual coincide com ω_3^2 para $n = 2$.

Note que os autovalores de energia dependem do parâmetro β , assim como do parâmetro $l \equiv l(L)$. Na próxima seção, será estudado o comportamento dos ω^2 , fixando-se β e mudando continuamente o parâmetro externo da teoria, $l \equiv l(L)$.

5.3 Deslocamentos de Níveis Induzidos pelo Tamanho da Caixa e Pontos de Instabilidade

Dos resultados anteriores acima obtidos, temos que o caso $n = 1$ deve ser descartado. Para os casos $n = 2$ e $n = 3$ calculamos e discutimos abaixo os resultados não triviais. Em todos os casos são fixados diferentes valores para o parâmetro β . Também é exigida a estabilidade clássica das autofunções ψ_i ($i = 1, 2, 3$). A estabilidade clássica é assegurada quando os autovalores de energia ω_i^2 são não negativos, como foi visto no capítulo 2.

A) CASO $n = 2$ ($g = \frac{3}{2}\lambda$)

Antes de continuar, estudam-se os diferentes valores do parâmetro β . Considerando somente autovalores de energia $\omega_i^2 \geq 0$ nas equações (5.34), (5.37) e (5.39), obtemos as seguintes desigualdades:

- (a) $\beta \leq \frac{4+l}{1+l}$ para ω_1^2 ,
- (b) $\beta \leq \frac{4l+1}{1+l}$ para ω_2^2 ,
- (c) $\beta \leq 1$ para ω_3^2 .

Claramente, como $l \in (0, 1]$, então o parâmetro β encontra-se nos intervalos abaixo listados:

- (a) Para ω_1^2 , quando $l \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 4$ e quando $l = 1$, $\beta = \frac{5}{2}$. Assim, $\beta \in [\frac{5}{2}, 4)$.
- (b) Para ω_2^2 , quando $l \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 1$ e quando $l = 1$, $\beta = \frac{5}{2}$. Assim, $\beta \in (1, \frac{5}{2}]$.
- (c) Para ω_3^2 , $\beta \in [0, 1]$.

Agora, volta-se ao estudo do comportamento dos autovalores de energia ω_i^2 com a mudança do parâmetro externo da teoria L , fixando para isto alguns valores particulares do parâmetro β .

(1) $\beta = 0$ (Fig. 5.1)

Das equações (5.34), (5.37) e (5.39) obtemos:

- (a) $\omega_1^2 = (\frac{4+l}{1+l})M_\phi^2$,
- (b) $\omega_2^2 = (\frac{4l+1}{1+l})M_\phi^2$,
- (c) $\omega_3^2 = M_\phi^2$, satisfeita para todo $L > 0$.

Estes resultados são graficados na Figura 5.1, onde podemos ver que para comprimentos grandes ($l = 1$ ou $L = \infty$), os autovalores ω_1 e ω_2 convergem assintoticamente para o valor $\omega^2 = \frac{5}{2}M_\phi^2$.

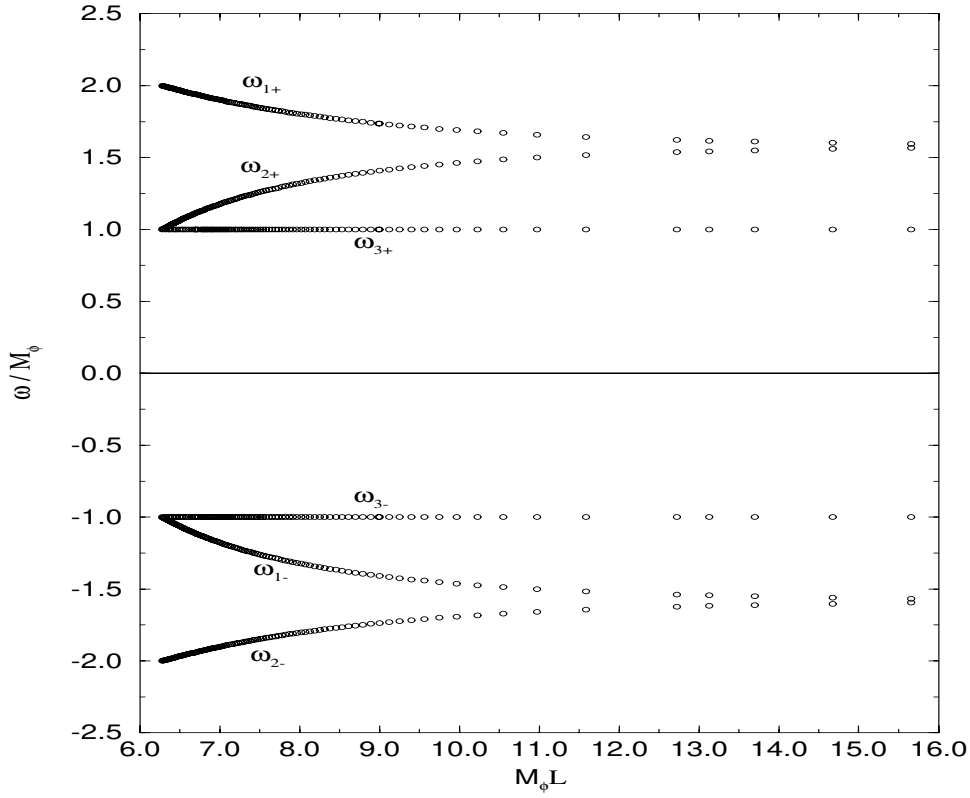


Figura 5.1: Autovalores de energia para $\beta = 0$.

(2) $\beta = 1$ (**Fig. 5.2**)

Como antes, das relações (5.34), (5.37) e (5.39) obtemos

- (a) $\omega_1^2 = (\frac{3}{1+l})M_\phi^2$,
- (b) $\omega_2^2 = (\frac{3l}{1+l})M_\phi^2$,
- (c) $\omega_3^2 = 0$, satisfeita para todo $L > 0$.

É interessante observar que para $l = 1$ ($L = \infty$) (veja Figura 5.2), ω_1 e ω_2 convergem assintoticamente para $\sqrt{\frac{3}{2}}M_\phi$, i.e., para comprimentos grandes ($L = \infty$) o primeiro estado excitado (espectro discreto) do modelo semi-clássico de Dashen-Hasslacher-Neveu (DHN) [1] é recuperado. Do mesmo modo o estado fundamental do modelo (DHN) é recuperado, ou seja, $\omega_3 = 0$ para $L = \infty$. Isto pode ser provado diretamente da equação (5.6) tomando $l = 1$. Contudo a equação (5.6) ou sua equação equivalente (5.11) tem uma liberdade adicional, que consiste em mudar o parâmetro β .

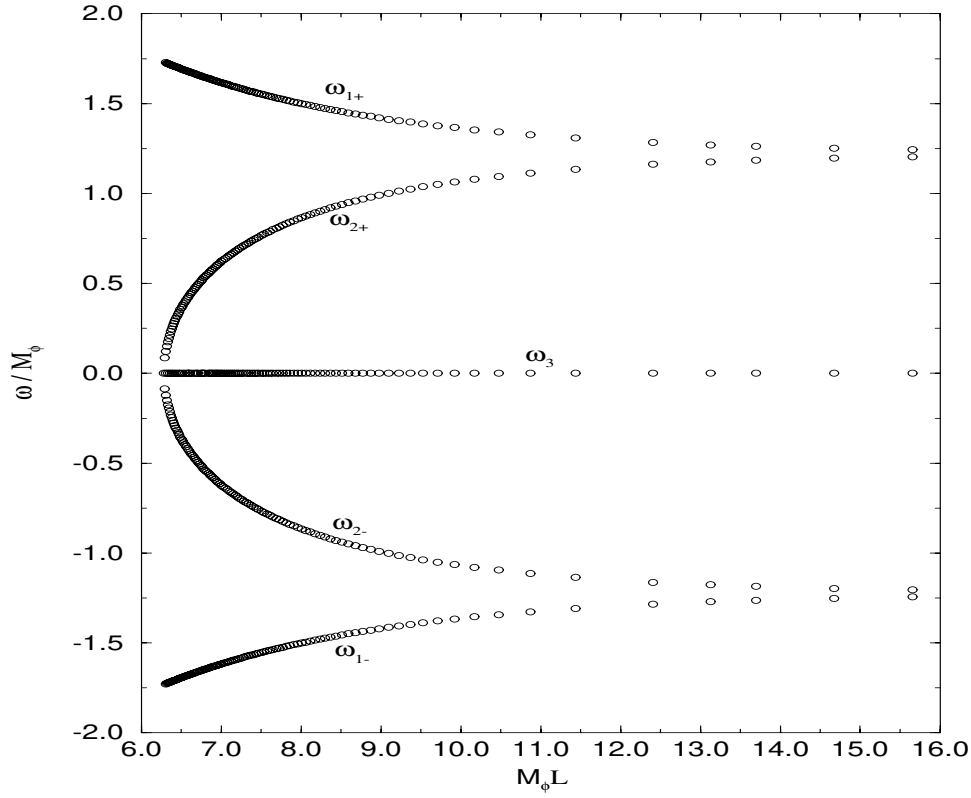


Figura 5.2: Autovalores de energia para $\beta = 1$.

A Figura 5.2 mostra que para $l \rightarrow 0$, os autovalores de energia ω_{2+} e ω_{2-} decrescem em módulo até alcançar seu valor mínimo em $\omega_2 = 0$ para um tamanho crítico da caixa, a saber $L = \frac{2\pi}{M_\phi}$. Isto pode sugerir que se tem um ponto de instabilidade do campo χ , quando o parâmetro externo L (tamanho da caixa) atinge o valor crítico $\frac{2\pi}{M_\phi}$. Porém este não é o caso porque para $l \rightarrow 0$, as equações (5.4) e (5.5) mostram que $\phi \equiv 0$ quando L atinge o valor crítico $\frac{2\pi}{M_\phi}$ e daí a Lagrangiana de interação se anula.

(3) $\beta = 2$ (Fig. 5.3)

Neste caso, das relações (5.34), (5.37) e (5.39) temos

(a) $\omega_1^2 = \left(\frac{2-l}{1+l}\right)M_\phi^2,$

(b) $\omega_2^2 = \left(\frac{2l-1}{1+l}\right)M_\phi^2,$

(c) $\omega_3^2 = -M_\phi^2,$ satisfeita para todo $L > 0$.

Observe que ω_3^2 é negativo, e daí a configuração clássica do campo associada a este autovalor é instável (veja capítulo 2). No intervalo $l \in (0, \frac{1}{2})$ ω_2^2 é negativo, e daí a configuração clássica associada é instável neste intervalo. Para $l = 1$ ($M_\phi L = \infty$), ω_1 e ω_2 convergem assintoticamente para o valor ~ 0.7 (Figura 5.3).

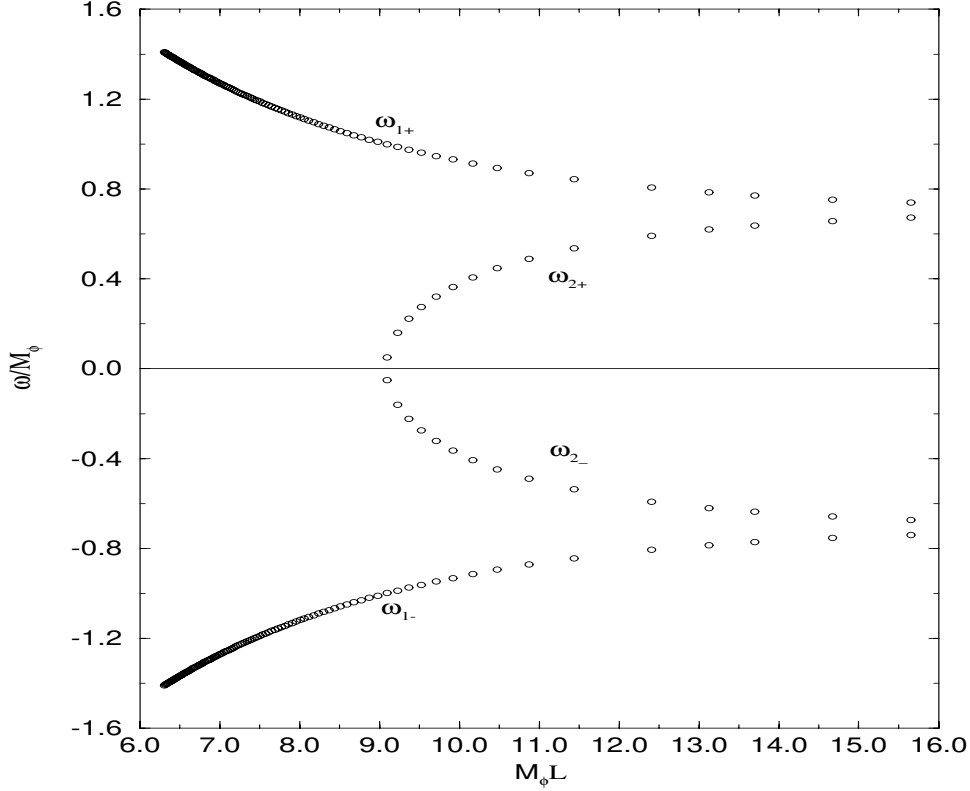


Figura 5.3: Autovalores de energia para $\beta = 2$.

Observe também que, agora, o ponto de instabilidade aparece para um tamanho maior que o comprimento crítico da caixa. Aqui se pode perguntar se este tipo de instabilidade pode levar a um “condensado” no regime quântico. Uma prova disto claramente requer uma segunda quantização pelo menos para o campo χ numa aproximação semi-clássica [4]. Também é bem conhecido que a inclusão de um termo não linear para a Lagrangiana total leva a condensados quânticos [17]. Isto não é o propósito aqui, pois o interesse é estudar o comportamento dos autovalores de energia para campos **clássicos** confinados numa caixa, ainda para uma geometria muito simples como um intervalo em dimensão $(1 + 1)$.

(3) $\beta = \frac{5}{2}$ (**Fig. 5.4**)

Neste caso, das relações (5.34), (5.37) e (5.39) obtemos

(a) $\omega_1^2 = \frac{3}{2}(\frac{1-l}{1+l})M_\phi^2,$

(b) $\omega_2^2 = \frac{3}{2}(\frac{l-1}{1+l})M_\phi^2,$

(c) $\omega_3^2 = -\frac{3}{2}M_\phi^2,$ satisfeita para todo L .

Como nos casos prévios, aqui também ω_3^2 é negativo. Além disso para $l \in (0, 1)$, $\omega_2^2 < 0$. Conseqüentemente as configurações clássicas associadas aos autovalores ω_2 e ω_3 são instáveis. Observe que para $l = 1$ ($L = \infty$), $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 0$.

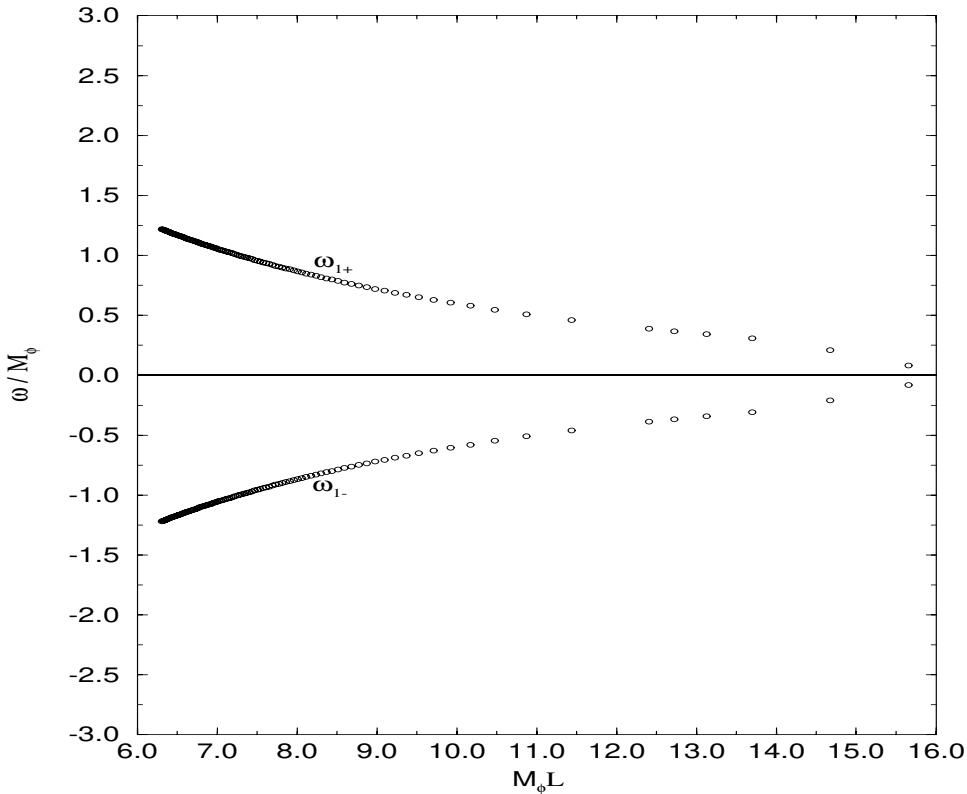


Figura 5.4: Autovalores de energia para $\beta = \frac{5}{2}$.

Na Figura 5.4 temos um caso interessante. Se supusermos que para um comprimento grande ($L \rightarrow \infty$) da caixa o estado do autovalor de energia ω_1^2 é formado por um “condensado” de partícula-antipartícula, então, pode-se dizer que qualquer perturbação do tamanho da caixa, induzirá uma formação de pares deste nível de energia. Isto é, o condensado é instável contra compressões da caixa em que os

campos estão confinados. No entanto somente numa aproximação semi-clássica é que podemos calcular o número de partículas formadas e se este é realmente o caso.

(4) $\beta = 3$ (**Fig. 5.5**)

Neste caso, das relações (5.34), (5.37) e (5.39) obtemos

(a) $\omega_1^2 = (\frac{1-2l}{1+l})M_\phi^2,$

(b) $\omega_2^2 = (\frac{l-2}{1+l})M_\phi^2,$

(c) $\omega_3^2 = -2M_\phi^2,$ satisfeita para todo L .

Neste caso ω_2^2 e ω_3^2 são negativos para todo $l \in (0, 1]$, e assim suas configurações clássicas associadas são instáveis. Da mesma maneira, no intervalo $l \in (\frac{1}{2}, 1]$ temos que $\omega_1^2 < 0$, e assim sua configuração clássica associada também é instável.

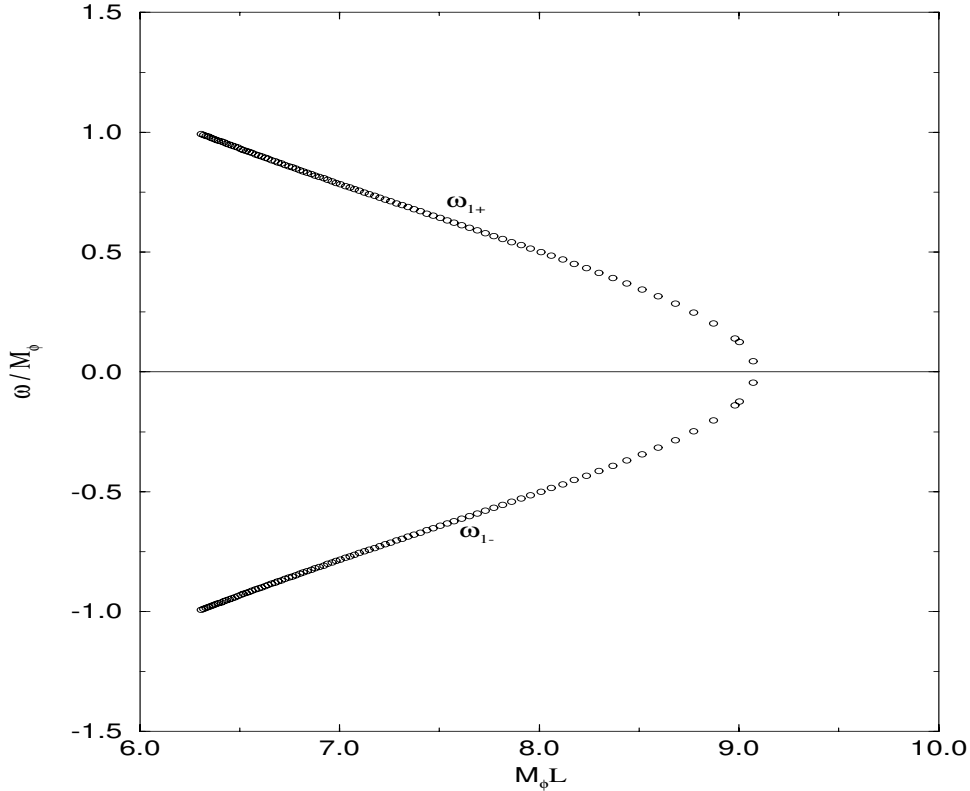


Figura 5.5: Autovalores de energia para $\beta = 3$.

A Figura 5.5, mostra que o aumento do valor do parâmetro de massa β desloca o ponto de instabilidade para cada vez mais perto do tamanho crítico da caixa, a saber, $L = \frac{2\pi}{M_\phi}$.

(5) $\beta = 4$

Das relações (5.34), (5.37) e (5.39) obtemos:

$$(a) \quad \omega_1^2 = -\left(\frac{3l}{1+l}\right)M_\phi^2,$$

$$(b) \quad \omega_2^2 = -\frac{3}{1+l}M_\phi^2,$$

$$(c) \quad \omega_3^2 = -3M_\phi^2.$$

Pode-se ver destas relações que todos os autovalores de energia são negativos (para $l \neq 0$) e portanto suas configurações clássicas associadas são instáveis.

É interessante observar que para $\beta \in [2, 3]$ o autovalor ω_2 desaparece para $\beta \rightarrow \frac{5}{2}$ e para $\frac{5}{2} < \beta < 3$ somente ω_1 existe e é fácil ver da Figura 5.5 acima que seu comportamento é oposto ao do autovalor ω_2 .

Concluindo, então neste caso ($n = 2$), existe um ponto de instabilidade (comprimentos críticos da caixa) dos autovalores de energia ω_1 e ω_2 para $\beta \in (1, 4)$, quando a caixa é comprimida.

B) CASO $n = 3$ ($g = 3\lambda$)

Da mesma maneira como no caso prévio, estudamos primeiramente os diferentes valores do parâmetro β . Assim, considerando os autovalores de energia $\omega_i^2 \geq 0$ nas equações (5.48), (5.49) e (5.55) obtêm-se as seguintes relações:

$$(a) \quad \beta \leq 4 \quad \text{para} \quad \omega_3^2,$$

$$(b) \quad \beta \leq 5 - \frac{2\sqrt{4(l-1)^2+l}}{1+l} \quad \text{para} \quad \omega_4^2,$$

$$(c) \quad \beta \leq 5 + \frac{2\sqrt{4(l-1)^2+l}}{1+l} \quad \text{para} \quad \omega_7^2.$$

Neste caso, o parâmetro β encontra-se nos intervalos listados abaixo:

$$(a) \quad \text{Para } \omega_3^2, \beta \in [0, 4],$$

$$(b) \quad \text{Para } \omega_4^2, \beta \in (1, 4],$$

$$(c) \quad \text{Para } \omega_7^2, \beta \in [6, 9).$$

Abaixo estudamos então os autovalores de energia ω_i^2 , contra o tamanho da caixa

L para alguns valores fixados do parâmetro β .

(1) $\beta = 0$ (**Fig. 5.6**)

Das relações (5.48), (5.49) e (5.55), obtemos:

$$(a) \quad \omega_3^2 = 4M_\phi^2,$$

$$(b) \quad \omega_4^2 = \left(\frac{5(l+1)-2\sqrt{4(l-1)^2+l}}{l+1} \right) M_\phi^2,$$

$$(c) \quad \omega_7^2 = \left(\frac{5(l+1)+2\sqrt{4(l-1)^2+l}}{l+1} \right) M_\phi^2.$$

Da Figura 5.6, pode-se ver que para comprimentos grandes $l = 1$ ($L = \infty$), os autovalores ω_3 e ω_4 convergem assintoticamente em $\omega = 2M_\phi$.

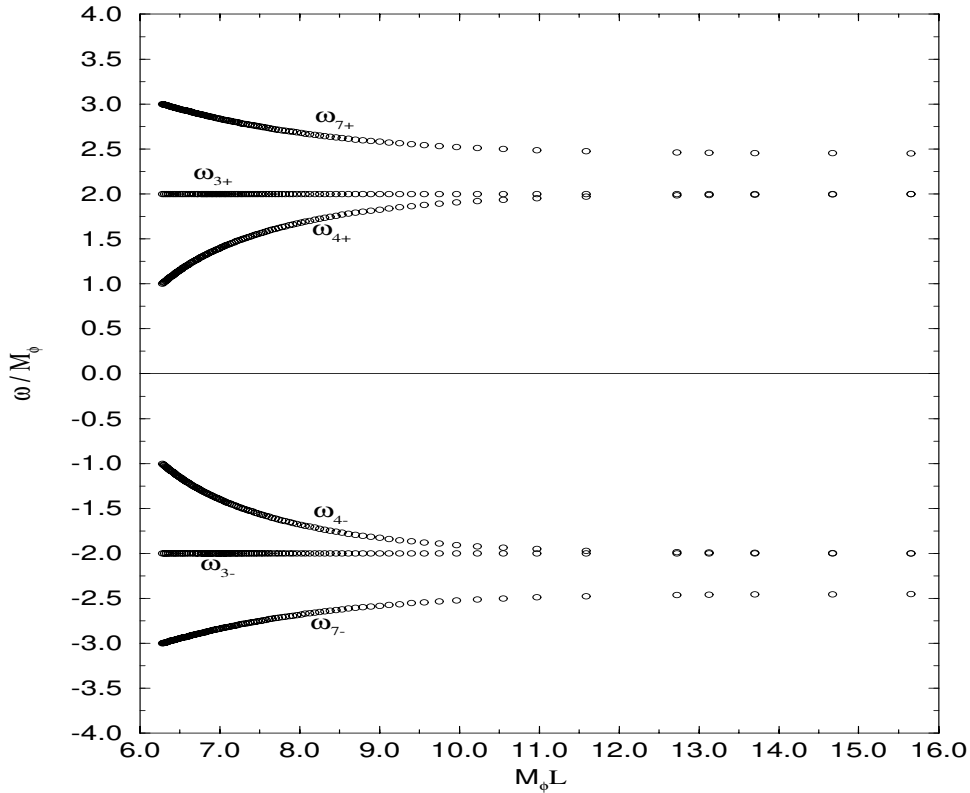


Figura 5.6: Autovalores de energia para $\beta = 0$.

(2) $\beta = 1$ (**Fig. 5.7**)

Das relações (5.48), (5.49) e (5.55) obtemos:

(a) $\omega_3^2 = 3M_\phi^2,$

(b) $\omega_4^2 = \left(\frac{4(l+1)-2\sqrt{4(l-1)^2+l}}{l+1}\right)M_\phi^2,$

(c) $\omega_7^2 = \left(\frac{4(l+1)+2\sqrt{4(l-1)^2+l}}{l+1}\right)M_\phi^2.$

A Figura 5.7 mostra que para $l \rightarrow 0$ ($M_\phi L \rightarrow 2\pi$) como mostrado no capítulo 3, os autovalores de energia ω_{4+} e ω_{4-} decrescem até atingir seu valor mínimo em $\omega_4 = 0$ exatamente para o tamanho crítico da caixa, a saber, $L = \frac{2\pi}{M_\phi}$. Como no caso anterior ($n = 2$), isto poderia sugerir um ponto de instabilidade para o campo χ .

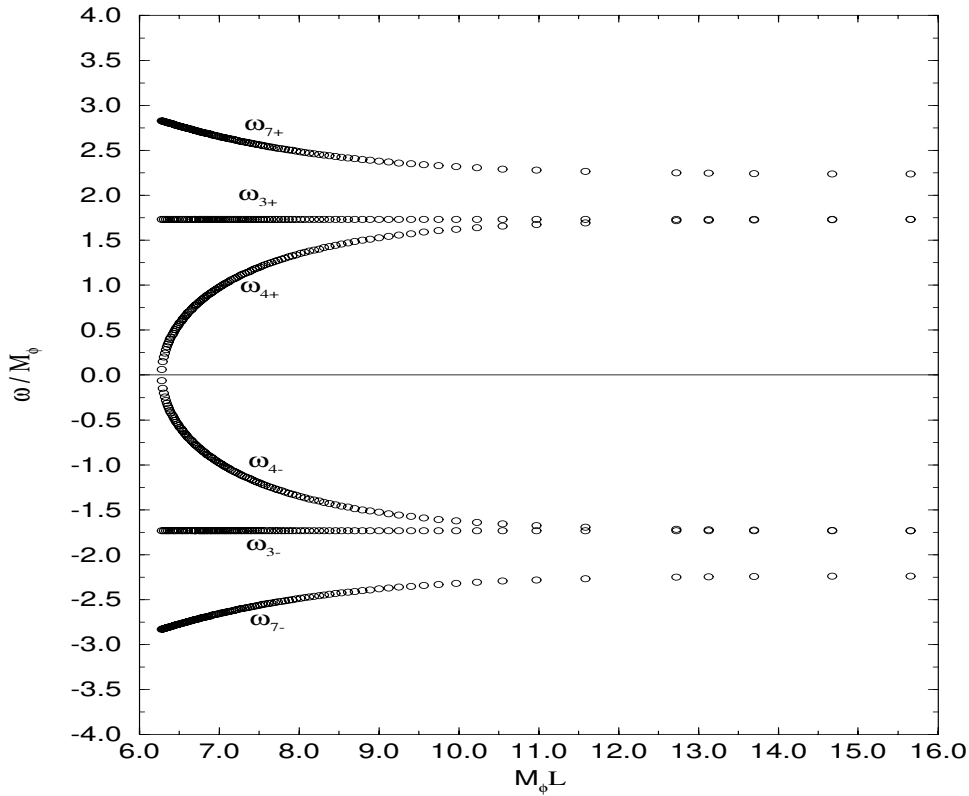


Figura 5.7: Autovalores de energia para $\beta = 1$.

(3) $\beta = 2$ (**Fig. 5.8**)

Das relações (5.48), (5.49) and (5.55), temos:

(a) $\omega_3^2 = 2M_\phi^2,$

(b) $\omega_4^2 = \left(\frac{3(l+1)-2\sqrt{4(l-1)^2+l}}{l+1}\right)M_\phi^2,$

(c) $\omega_7^2 = \left(\frac{3(l+1)+2\sqrt{4(l-1)^2+l}}{l+1}\right)M_\phi^2.$

No intervalo $l \in (0, 0.16)$ ω_4^2 é negativo, assim sua configuração clássica é instável neste intervalo. Por outro lado, a Figura 5.8 mostra que, neste caso, o ponto de instabilidade ocorre aproximadamente em $l \sim 0.16$, ou seja, para o valor $\beta = 2$ temos um ponto de instabilidade ocorrendo para uma caixa de tamanho acima do crítico, isto é, para $L > \frac{2\pi}{M_\phi}$.

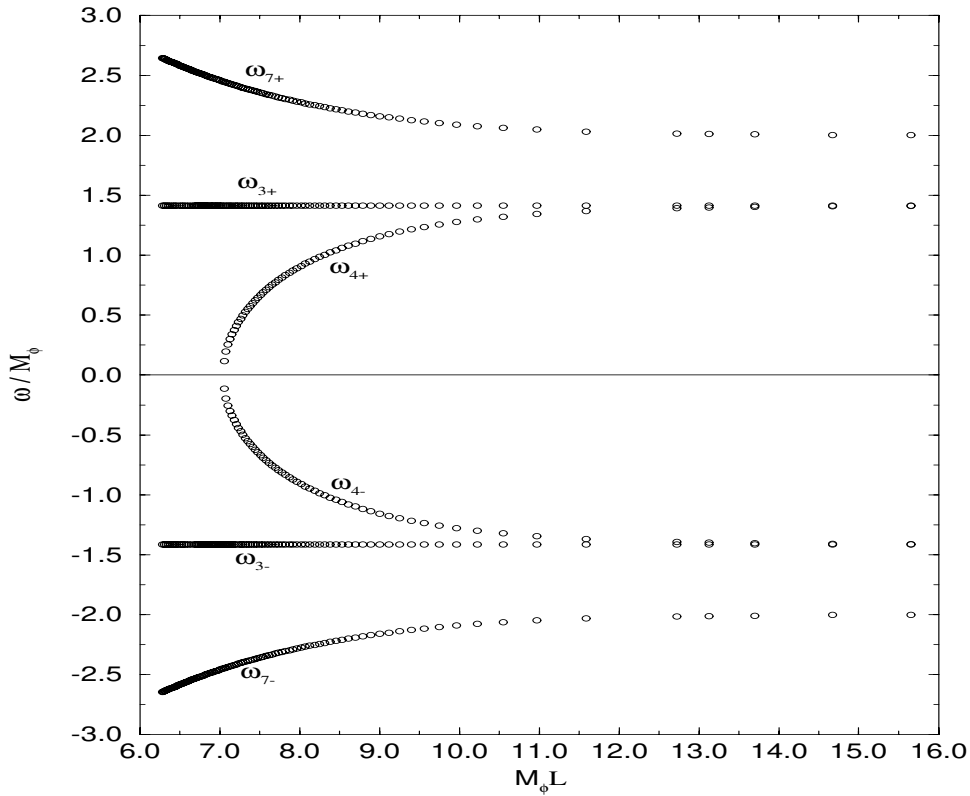


Figura 5.8: Autovalores de energia para $\beta = 2$.

(4) $\beta = 3$ (**Fig. 5.9**)

Das relações (5.48), (5.49) e (5.55) obtemos:

(a) $\omega_3^2 = M_\phi^2,$

(b) $\omega_4^2 = \left(\frac{2(l+1)-2\sqrt{4(l-1)^2+l}}{l+1}\right)M_\phi^2,$

(c) $\omega_7^2 = \left(\frac{2(l+1)+2\sqrt{4(l-1)^2+l}}{l+1}\right)M_\phi^2.$

Para $l \in (0, 0.38)$, $\omega_4^2 < 0$, em consequência sua configuração clássica é instável.

Da Figura 5.9, pode-se ver que quando $M_\phi L \sim 8.4$, os valores de ω_{4+} e ω_{4-} , convergem para o valor zero, em um ponto de instabilidade, agora mais afastado do valor crítico $L = \frac{2\pi}{M_\phi}$. Daqui é possível concluir que para β crescente o ponto de instabilidade se afasta para o infinito.

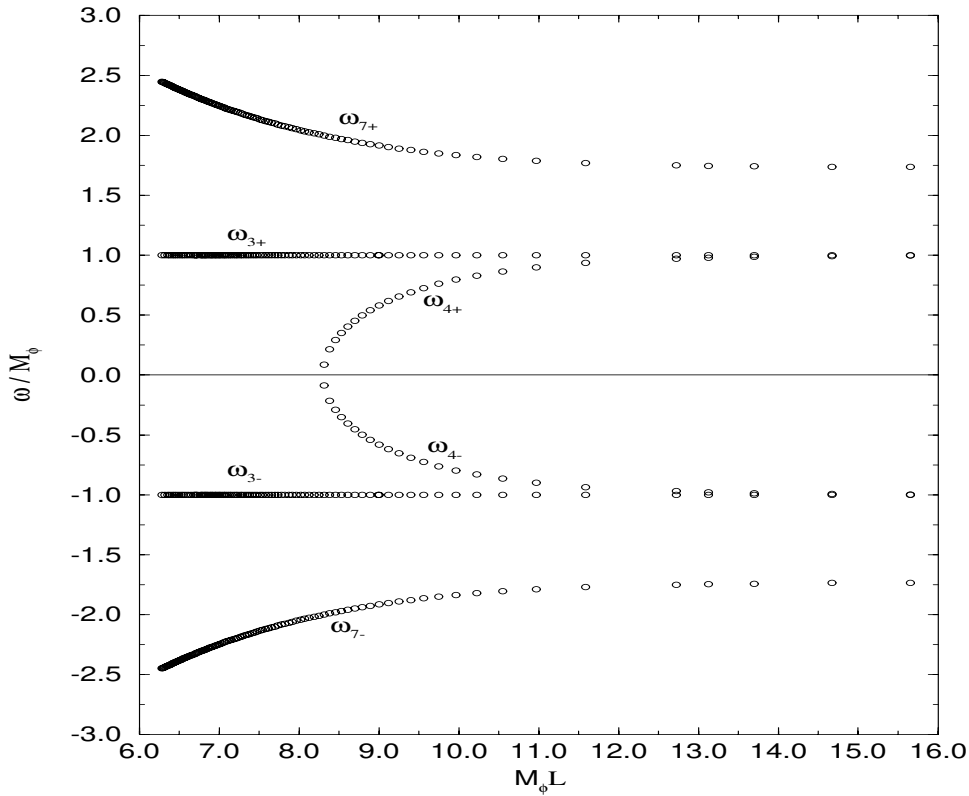


Figura 5.9: Autovalores de energia para $\beta = 3$.

(5) $\beta = 4$ (**Fig. 5.10**)

Das relações (5.48), (5.49) e (5.55) obtemos:

(a) $\omega_3^2 = 0$,

(b) $\omega_4^2 = \left(\frac{(l+1)-2\sqrt{4(l-1)^2+l}}{l+1} \right) M_\phi^2$,

(c) $\omega_7^2 = \left(\frac{(l+1)+2\sqrt{4(l-1)^2+l}}{l+1} \right) M_\phi^2$.

Neste caso, para $l \in (0, 1)$, $\omega_4^2 < 0$, então, neste intervalo sua configuração clássica é instável. No entanto se $l = 1$ ($L = \infty$), $\omega_4^2 = \omega_3^2 = 0$, ou seja, os níveis são degenerados e daí, neste caso, não há pontos de instabilidade. Isto pode ser traduzido como que a solução associada a ω_4^2 tem uma configuração para todos valores de L no intervalo $(\frac{2\pi}{M_\phi}, \infty)$. Daí ω_4 não aparece no gráfico da Figura 5.10. Também da Figura 5.10, pode-se ver que neste caso não existem pontos de instabilidade.

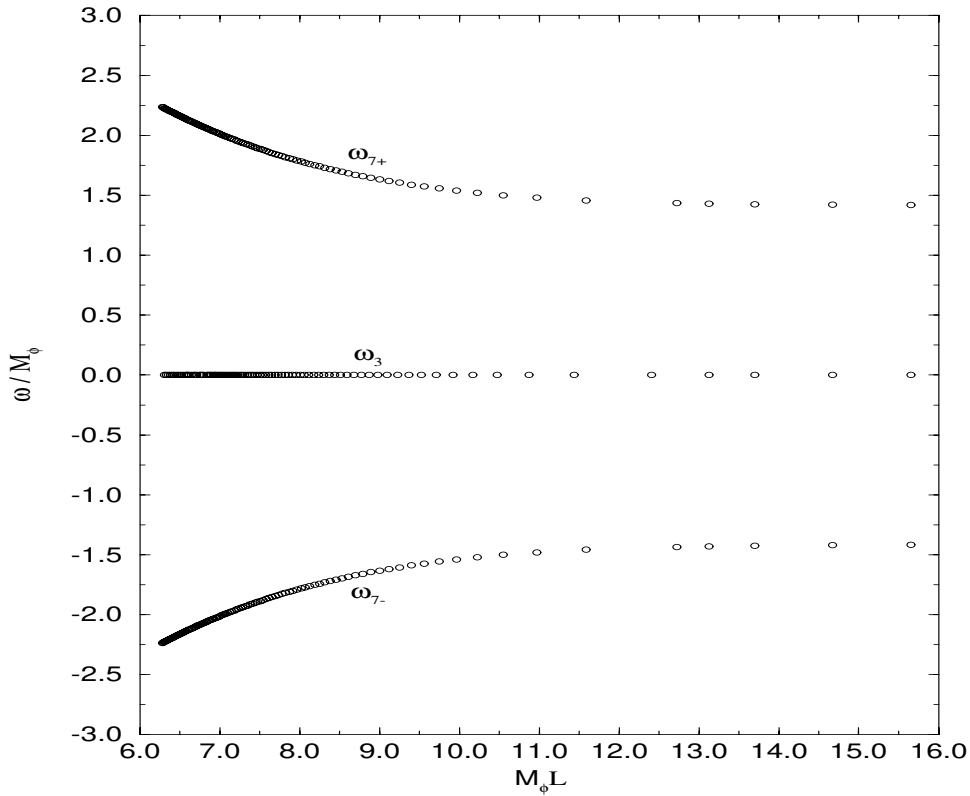


Figura 5.10: Autovalores de energia para $\beta = 4$.

(6) $\beta = 6$ (**Fig. 5.11**)

Das relações (5.48), (5.49) e (5.55) obtemos:

(a) $\omega_3^2 = -2M_\phi^2,$

(b) $\omega_4^2 = -\left(\frac{(l+1)+2\sqrt{4(l-1)^2+l}}{l+1}\right)M_\phi^2,$

(c) $\omega_7^2 = \left(\frac{-(l+1)+2\sqrt{4(l-1)^2+l}}{l+1}\right)M_\phi^2.$

Neste caso, $\omega_3^2 < 0$, além disso para $l \in (0, 1]$, $\omega_4^2 < 0$, então suas configurações clássicas são instáveis. Por outro lado, a Figura 5.11, mostra uma situação similar, encontrada para o caso $n = 2$, quando $\beta = \frac{5}{2}$. Ou seja, se supomos que temos um “condensado” de partículas-antipartículas para $l = 1$ (ou $L = \infty$) no estado correspondente do autovalor ω_7 então qualquer perturbação do tamanho da caixa induzirá uma formação de pares deste nível de energia. Observe que neste caso ($n = 3$) o valor do parâmetro β é maior que para o caso $n = 2$.

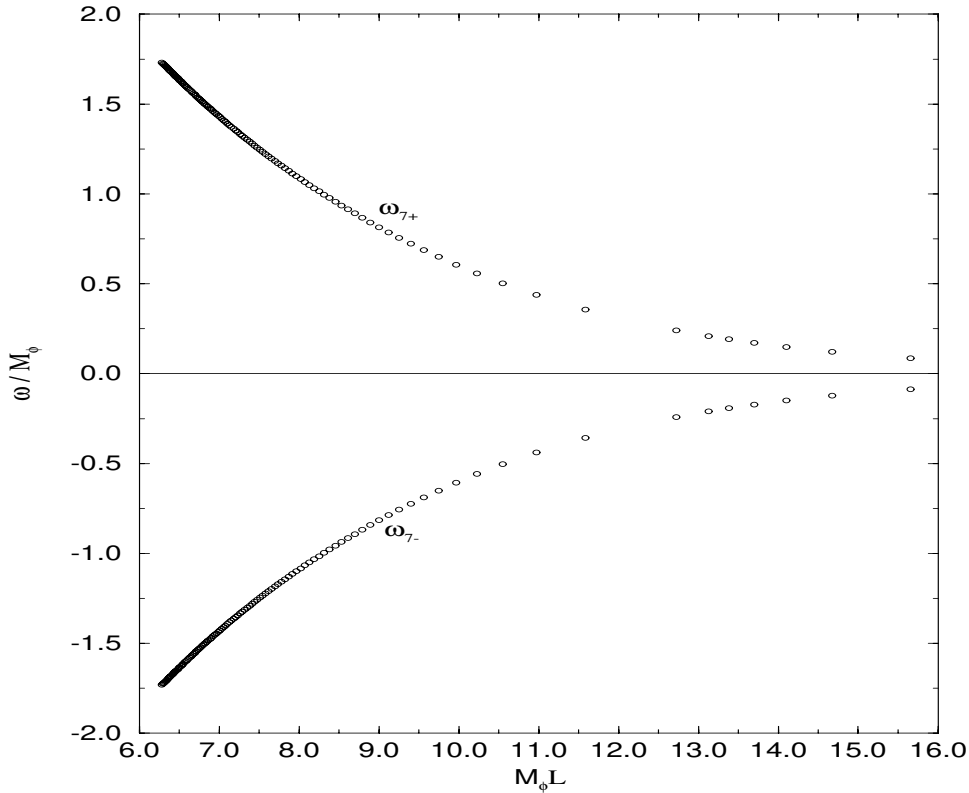


Figura 5.11: Autovalores de energia para $\beta = 6$.

(7) $\beta = 8$ (**Fig. 5.12**)

Das relações (5.48), (5.49) e (5.55) obtemos:

(a) $\omega_3^2 = -4M_\phi^2,$

(b) $\omega_4^2 = -\left(\frac{3(1+l)+2\sqrt{4(l-1)^2+l}}{l+1}\right)M_\phi^2,$

(c) $\omega_7^2 = \left(\frac{-3(1+l)+2\sqrt{4(l-1)^2+l}}{l+1}\right)M_\phi^2.$

A Figura 5.12, abaixo, mostra que o parâmetro de massa β leva agora a localização do ponto de instabilidade cada vez mais perto do tamanho crítico da caixa, a saber, $L = \frac{2\pi}{M_\phi}$.

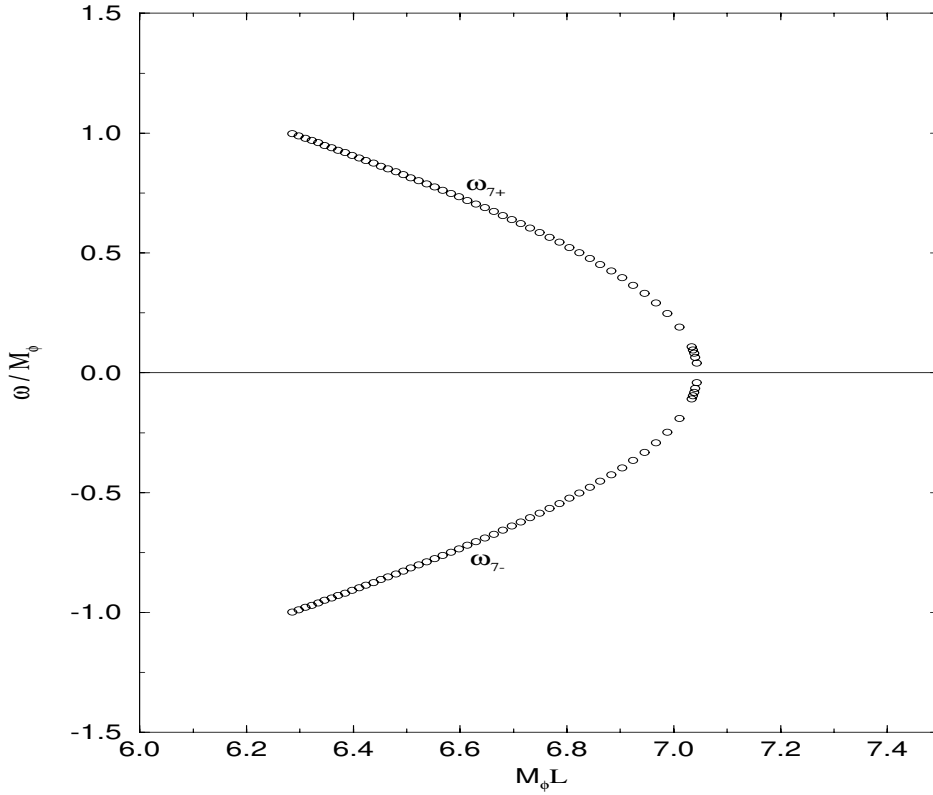


Figura 5.12: Autovalores de energia para $\beta = 8$.

(8) $\beta = 9$

Das relações (5.48), (5.49) e (5.55) obtemos:

(a) $\omega_3^2 = -5M_\phi^2,$

$$(b) \quad \omega_4^2 = -\left(\frac{4(1+l)+2\sqrt{4(l-1)^2+l}}{l+1}\right)M_\phi^2,$$

$$(c) \quad \omega_7^2 = \left(\frac{-4(1+l)+2\sqrt{4(l-1)^2+l}}{l+1}\right)M_\phi^2.$$

Observe agora que, para $l \neq 0$, todos os autovalores de energia são negativos e portanto suas configurações clássicas associadas são instáveis.

Para o caso $n = 3$, conclui-se que a existência dos pontos de instabilidade para os autovalores de energia ω_4 e ω_7 ocorrem para β pertencendo aos intervalos $(1, 4)$ e $(6, 9)$ respectivamente. Diferentemente do caso $n = 2$, aqui existe um intervalo, a saber, $[4, 6]$ onde os pontos de instabilidades não ocorrem.

No capítulo 3 foi mostrado que para condições de fronteira periódicas em $x = \pm \frac{L}{2}$ impostas ao campo ϕ , a relação (5.30) é novamente obtida. Assim todos os resultados obtidos para o caso de Dirichlet são válidos também para as condições de fronteiras periódicas. Além disso impondo-se condições de fronteiras periódicas em $x = \pm \frac{L}{2}$ sobre os campos ψ , é possível mostrar que para o caso $n = 2$, as autofunções dadas pelas equações (5.19) e (5.20) levam à mesma relação para $l \equiv l(L)$ dada pela equação (5.30). Da mesma maneira, para o caso $n = 3$, as autofunções dadas pelas equações (5.26) e (5.29) também levam à equação (5.30). Portanto todos os resultados obtidos para o caso Dirichlet neste capítulo são válidos também para as condições de fronteiras periódicas.

5.4 Níveis Induzidos pelo Parâmetro Razão de Massa β e Pontos de Instabilidade

Nesta seção, estudamos o comportamento dos autovalores de energia ω^2 , em relação ao parâmetro β . Diferentemente da seção anterior onde, para estudar os autovalores de energia ω^2 , são fixados os valores do parâmetro β , aqui vamos fixar o parâmetro $l \equiv l(L)$ e variar continuamente o parâmetro β . É preciso enfatizar que para cada valor fixado do parâmetro β , uma massa para o campo χ é definida e em consequência uma nova “teoria” é obtida para esse campo. Para sermos específicos escolhemos o caso particular $l = 1$ ($L = \infty$). Também é exigida aqui a estabilidade

clássica das autofunções ψ .

A) CASO $n = 1$ ($g = \frac{\lambda}{2}$)

Os autovalores de energia ω^2 associados a $n = 1$, para $l = 1$ ($L = \infty$), são obtidos usando as equações (5.31) e (5.32), ou seja:

(a) $\omega_1^2(\beta) = (1 - \beta)M_\phi^2$,

(b) $\omega_3^2(\beta) = (\frac{1}{2} - \beta)M_\phi^2$.

Destas relações temos que para $\beta > 1$, os autovalores ω_i^2 , $i = 1, 3$, são negativos, i.e., suas configurações clássicas são instáveis e têm-se pontos de instabilidade. A Figura 5.13, mostra os autovalores de energia dos estados ligados do campo χ para diferentes valores de β .

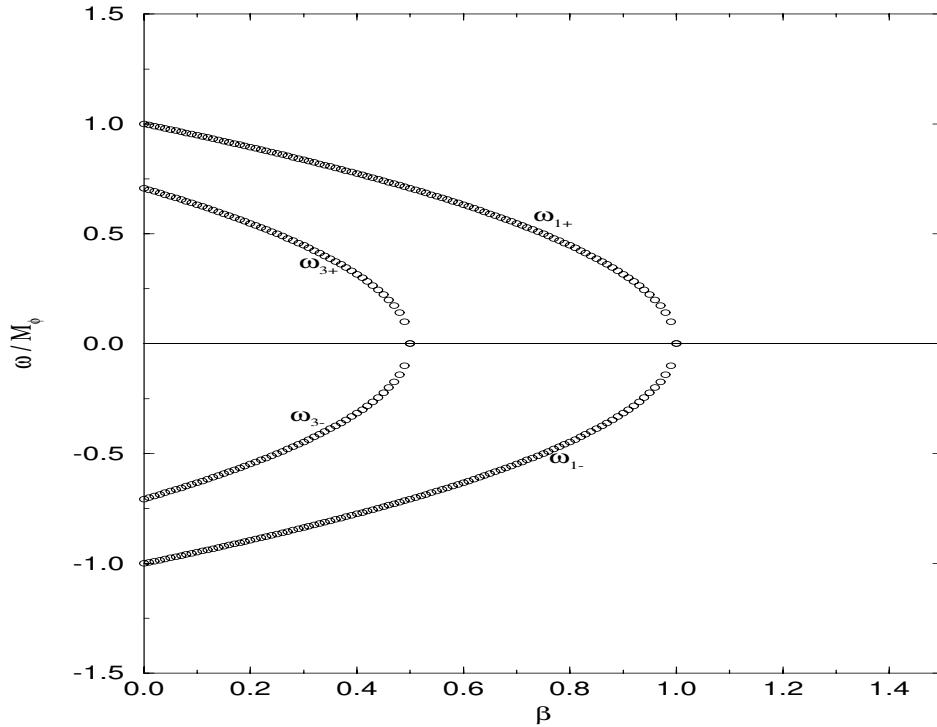


Figura 5.13: Autovalores de energia dos estados ligados do campo χ vs. o parâmetro β .

Observe que para cada valor de $\beta \leq 1$ fixado o número de níveis pode ser 2 ou 4 (contando sua contraparte negativa). Também observe que para o valor fixo $\beta = \frac{1}{2}$, os autovalores de energia $\omega_{3+} = \omega_{3-} = 0$, daí neste caso temos 3 níveis. Também

para o valor fixo $\beta = 1$, $\omega_{1+} = \omega_{1-} = 0$, e daí temos somente um nível.

B) CASO $n = 2$ ($g = \frac{3}{2}\lambda$)

Para $n = 2$, das equações (5.34), (5.37), (5.39) e (5.42), com $l = 1$ obtemos:

(a) $\omega_1^2(\beta) = (\frac{5}{2} - \beta)M_\phi^2$,

(b) $\omega_2^2(\beta) = (\frac{5}{2} - \beta)M_\phi^2$,

(c) $\omega_3^2(\beta) = (1 - \beta)M_\phi^2$,

(d) $\omega_5^2(\beta) = (1 - \beta)M_\phi^2$.

Neste caso, para $\beta > \frac{5}{2}$, os autovalores de energia ω_i^2 , $i = 1, 2, 3$ e 5 , são negativos, i.e., suas configurações clássicas são instáveis.

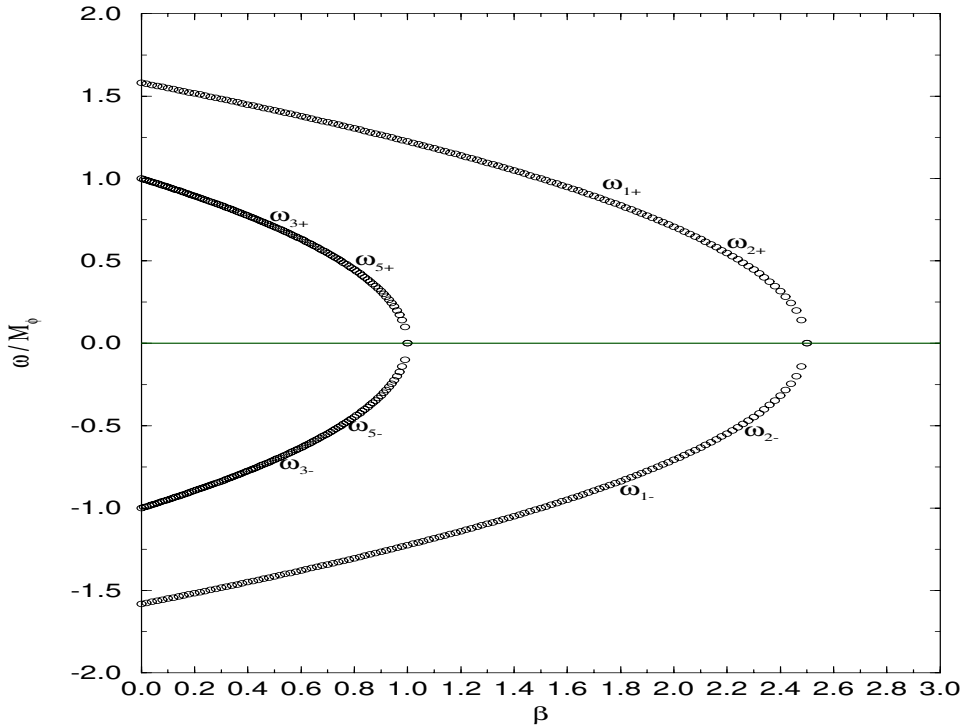


Figura 5.14: Autovalores de energia dos estados ligados do campo χ vs. o parâmetro β .

A Figura 5.14 mostra pontos de instabilidade diferentes (agora no parâmetro β) para os vários autovalores possíveis. Observe que neste caso o número máximo de níveis (4) acontece para $\beta \leq 1$. Também observe que para os valores fixos de $\beta = 1$

e $\frac{5}{2}$, os pares de autovalores de energia $(\omega_{3+}, \omega_{3-}) \equiv (\omega_{5+}, \omega_{5-})$, $(\omega_{1+}, \omega_{1-}) \equiv (\omega_{2+}, \omega_{2-})$ atingem seus pontos de instabilidade.

C) CASO $n = 3$ ($g = 3\lambda$)

No caso de $n = 3$ das equações (5.46), (5.48), (5.49), (5.51), (5.53) e (5.55), para $l = 1$, obtemos as relações:

- (a) $\omega_2^2(\beta) = (\frac{11}{2} - \beta)M_\phi^2$,
- (b) $\omega_3^2(\beta) = (4 - \beta)M_\phi^2$,
- (c) $\omega_4^2(\beta) = (4 - \beta)M_\phi^2$,
- (d) $\omega_5^2(\beta) = (\frac{3}{2} - \beta)M_\phi^2$,
- (e) $\omega_6^2(\beta) = (\frac{3}{2} - \beta)M_\phi^2$,
- (f) $\omega_7^2(\beta) = (6 - \beta)M_\phi^2$.

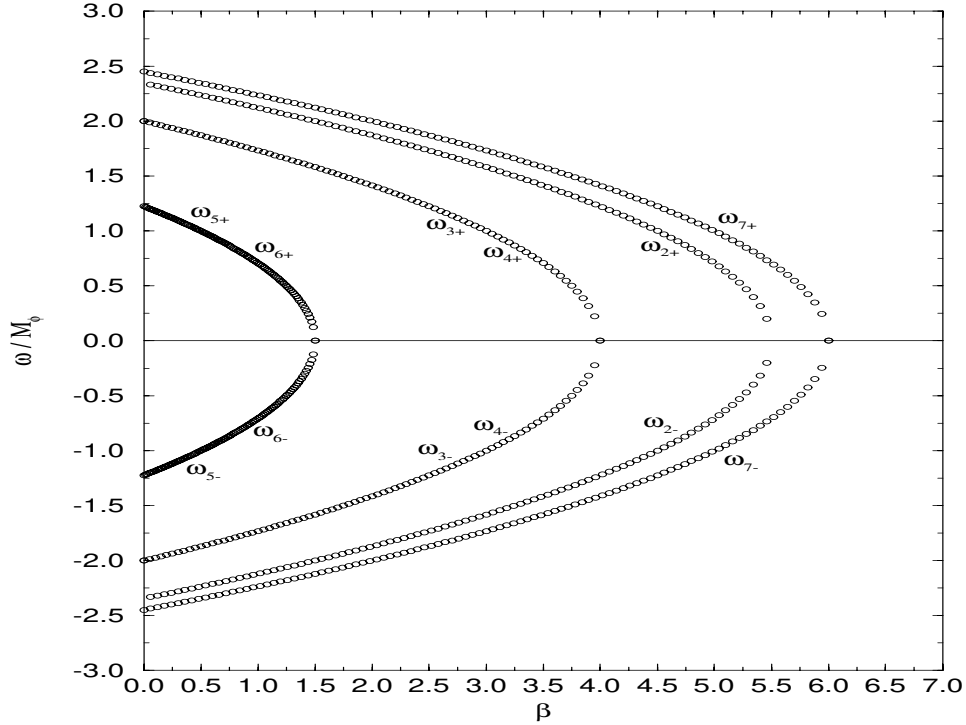


Figura 5.15: Autovalores de energia dos estados ligados do campo χ vs. o parâmetro β .

Neste caso podemos observar da Figura 5.15 o mesmo comportamento dos casos

prévios ($n = 1, 2$). O número máximo de níveis, acontece para $\beta < \frac{3}{2}$, onde temos 8 níveis contando suas respectivas contrapartes negativas.

Das Figuras (5.13), (5.14) e (5.15) podemos ver que fixado n , ou equivalentemente a constante de acoplamento g (como também fixado o parâmetro λ), quanto maior o parâmetro β menos estados classicamente estáveis teremos. Por outro lado fixado β , o número de níveis cresce com n ou equivalentemente com a constante de autointeração λ . Observe que, um ponto de vista mais gráfico, o conhecimento dos número de níveis (“espectros cópia do campo χ ”) limita o range dos possíveis valores de β . Por exemplo, se tivermos 4 níveis, da Figura 5.15 então $\beta \in [\frac{3}{2}, 4]$.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

No capítulo 3 foram determinadas as soluções gerais estáticas da equação de movimento de um campo escalar real ϕ , para o potencial $V(\phi) = -\frac{1}{2}M^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4$ num domínio finito em dimensão $(1+1)$. Estas soluções são dadas pelas Funções Elípticas de Jacobi sn e cn [12]. Foi então mostrado que as Soluções Elípticas do tipo sn , dadas pela equação (3.10), não podem satisfazer a condição de fronteira Vácuo-Vácuo num domínio finito. Por outro lado, as Soluções Elípticas tipo cn , dadas pela equação (3.13), esta condição num domínio finito, isto é, para um $L \neq 0$ fixo, existe uma solução para cada $c > \frac{1}{2}$ que satisfaz esta condição na fronteira do domínio. As soluções kink e Anti-kink são obtidas para $c = \frac{1}{2}$. Este resultado é muito interessante, pois na literatura são conhecidas somente soluções que satisfazem a condição Vácuo-Vácuo em domínios infinitos.

Também foi mostrado analiticamente que existe uma correspondência um a um entre o comprimento L e o parâmetro c , que indexa a família das Soluções Elípticas tipo sn , isto é, dado um L arbitrário existe somente um correspondente $c \in (0, \frac{1}{2}]$. Outro resultado importante da nossa análise é a existência de um valor mínimo igual a 2π para o produto ML , onde M é a massa do campo clássico. Este é um resultado muito interessante, pois se existir uma Solução Elíptica tipo sn numa caixa de tamanho L , sua massa deverá ser maior que $\frac{2\pi}{L}$. Por outro lado, fixando-se M , então não pode existir uma Solução Elíptica tipo sn dentro de uma caixa de tamanho menor que $\frac{2\pi}{M}$. Naturalmente, se $L \rightarrow \infty$ então $M \rightarrow 0$ e, neste caso, todos os valores de massa positiva são permitidos, e como consequência, os kinks, podem ter massa arbitrária [1] em $(-\infty, +\infty)$.

Foram também definidas várias grandezas associadas a estas soluções num domínio finito. A primeira destas definições chamamos “carga topológica”. Assim determinamos o valor desta “carga”, a qual é dada pela equação (3.19), em um intervalo (caixa) de comprimento arbitrário L para as soluções elípticas tipo sn. Para $L = \infty$, nós reobtemos a carga conservada $Q = \pm 1$ das soluções kink (Anti-kink).

Nesse mesmo espírito, definimos a “densidade de energia” e a “energia total” da solução (chamada massa clássica no caso do kink) em um domínio finito, as quais são dadas pelas equações (3.21) e (3.22), respectivamente, e mostramos que para $c = \frac{1}{2}$ a densidade de energia e a massa clássica do kink são recuperadas.

Por outro lado, considerando condições de fronteira periódicas é possível mostrar que a equação (3.15) é novamente obtida. Assim todos os resultados obtidos para o caso de Dirichlet são válidos também aqui. É interessante notar que as condições de fronteira anti-periódicas, isto é, $\phi_c(-\frac{L}{2}) = -\phi_c(\frac{L}{2})$ são satisfeitas para todas as soluções ϕ_c com $c \in (0, \frac{1}{2}]$, pois as soluções da equação (3.10) são ímpares. No entanto, estas soluções não satisfazem a condição assintótica de convergir para um kink quando $L = \infty$. Daí que tais soluções foram descartadas.

No capítulo 4 foi estudado o comportamento dos autovalores de energia ω^2 do campo escalar clássico χ em dimensão $(1 + 1)$, o qual interage com outro campo escalar real ϕ através da Lagrangiana $\mathcal{L}_{int} = \frac{3}{2} g \phi^2 \chi^2$, num domínio finito (caixa de tamanho L). Neste capítulo foi considerada a aproximação que o campo ϕ é transparente às condições de fronteira (Dirichlet). Assim impondo condições de fronteira tipo Dirichlet para o campo χ , encontramos os níveis de energia dos estados ligados para as soluções não triviais, obtidas como raízes de uma equação transcendental envolvendo L e k . Uma solução analítica para esta equação transcendente não foi determinada, mas foram obtidas soluções numéricas (Figura 4.1).

O estado fundamental ω_0 e o primeiro estado excitado ω_1 deslocam-se com a mudança do tamanho da caixa (L) (Figura 4.1), para ambos casos de sinais positivos e negativos. Quando o parâmetro L da caixa decresce, ω_0 cresce no intervalo $[0, \sqrt{2}M]$, e ω_1 em $[\sqrt{\frac{3}{2}}M, \sqrt{2}M]$. Próximo ao valor crítico ~ 0.6 para ω_0 , e ~ 1.71 para ω_1 , os estados ligados mergulham na parte contínua do espectro. Para $L = \infty$ reobtemos os níveis de energia do modelo semiclássico do kink. A variação do parâmetro L

induz deslocamento nos níveis dos estados ligados. Assim próximos ao tamanho crítico $\frac{ML}{2\sqrt{2}} \sim 2.93$ temos um condensado fracamente ligado (“just barely bound”) [13] que pode decair (desestabilizar) quando uma pequena perturbação sobre o sistema é aplicada. Tal desestabilização pode levar à criação de pares de partículas (Figura 4.2). No entanto somente um cálculo semi-clássico pode levar à certeza do que é sugerido em nível clássico.

Um fato interessante é que o gap entre os estados ligados apresenta um pico em $\frac{ML}{2\sqrt{2}} \sim 2.93$ e mostra um comportamento caótico (não suave). É interessante que o valor crítico para a divisão dos níveis coincida com o valor da posição do pico. No entanto não temos uma explicação para este fato até o presente momento. No caso do espectro contínuo, o gap entre os níveis de energia decresce com L (Figura 4.4).

Foi mostrado que condições de fronteiras periódicas ou anti-Periódicas levam aos mesmos resultados (com condições de fronteiras tipo Dirichlet) em ambos os casos dos espectros discreto e contínuo.

No capítulo 5, generalizamos o estudo feito no capítulo 4. Considerando a Lagrangiana de interação $\mathcal{L}_{int} = g\phi^2\chi^2$, e além disso considerando que ambos os campos ϕ e χ satisfazem as mesmas condições de fronteira, mostramos que os autovalores de energia dependem de quatro parâmetros, a saber, β (parâmetro razão de massa), constantes de autointeração λ e de acoplamento g , e l (o qual está relacionado ao tamanho da caixa L). Fixando g pela equação (5.10), para um λ arbitrário, estudamos os casos $n = 1, 2, 3$, os quais correspondem a uma constante de acoplamento g da ordem de λ . A seguir, discutimos o comportamento dos autovalores de energia ω^2 , fixando-se o parâmetro β , e variando o parâmetro externo da teoria $l \equiv l(L)$ continuamente.

No caso $n = 2$ ($g = \frac{3}{2}\lambda$), mostramos que os pontos de instabilidade para os autovalores de energia ω_1 e ω_2 , ocorrem para $\beta \in (1, 4)$. Estes pontos de instabilidade são obtidos como consequência de se comprimir a caixa. Também observa-se das Figuras 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5 que variando o parâmetro β , enquanto ω_1 apresenta seu ponto de instabilidade cada vez mais próximo do tamanho mínimo da caixa, a saber, $L = \frac{2\pi}{M_\phi}$, ω_2 tem o seu cada vez mais afastado deste valor.

Para o caso $n = 3$ ($g = 3\lambda$), temos três autovalores de energia que satisfazem

as condições de fronteira tipo Dirichlet os quais levam à equação (5.30). Seu comportamento é semelhante ao caso $n = 2$, porém os pontos de instabilidade existem para $\beta \in (1, 4]$ ou $\beta \in [6, 9)$. Assim o conjunto dos possíveis valores do parâmetro β é desconexo. Para as condições de fronteira periódicas todos os resultados obtidos, com as condições de fronteira tipo Dirichlet são válidos também aqui.

Por último foi feito um estudo do comportamento dos autovalores de energia ω^2 , quando o parâmetro externo da teoria $l \equiv l(L)$ é fixado e o parâmetro β varia. Encontramos que com o aumento do valor da constante de interação g , o número de níveis também aumenta.

Do material desta tese foram escritos três trabalhos (veja referências [18][19][20]). Além disso, apresentamos partes desta tese em alguns encontros científicos (veja referências [21][22][23]).

As perspectivas para o desenvolvimento e generalizações do presente modelo são bastantes promissoras. Dentre várias possibilidades interessantes para a continuidade deste trabalho, destacamos as seguintes:

1.- Como foi mencionado na introdução, sistemas de campos confinados em cavidades apresentam novos comportamentos e, algumas vezes, até inesperados. Também, embora nossa aproximação seja para campos clássicos, sugerimos que numa aproximação semi-clássica, o confinamento de campos interagentes levaria à produção de pares a partir de um “condensado”, como uma consequência de se comprimir a região de confinamento.

2.- No capítulo 3, foi mostrada a existência das Soluções Elípticas tipo cn para o campo ϕ . Pretende-se então explorar, ainda em dimensão $(1 + 1)$, as consequências para os estados ligados do campo χ na presença destas novas soluções, que têm a interessante propriedade de atingir condições de fronteira Vácuo-Vácuo (semelhante a um kink) mas em um domínio limitado.

3.- A generalização destes resultados para dimensão 3 leva a equações mais complexas, sem mencionar que existe, neste caso, uma enorme variedade de geometrias para a forma do domínio. Contudo estes tipos de cálculos com simetria esférica poderiam ser muito interessantes como uma maneira de se estudar, por exemplo, o comportamento da matéria em estrelas compactas ou ainda o estudo de estados

ligados de campos escalares no Universo primitivo na geometria de FRW.

4.- Estudar os acoplamentos dos campos ϕ e/ou χ com os férmions, inicialmente para dimensão $(1+1)$ e posteriormente em dimensão superior e com simetria esférica.

A.1 Equação de Movimento Para a Primeira Correção Quântica de um Campo Clássico

Mostramos abaixo que, se o campo clássico χ estudado no capítulo 5 é considerado como um campo quântico (em primeira ordem), ele irá satisfazer uma equação de movimento que tem a mesma forma do caso clássico.

Para provar isto, vamos tomar a mesma densidade Lagrangiana do Cap. 5, a saber:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}M_\phi^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2}M_\eta^2 \eta^2 - g\phi^2 \eta^2, \quad (1)$$

onde os campos ϕ e η são considerados inicialmente como clássicos. Usaremos aqui a letra η e não χ para o campo clássico reservando a letra χ para a sua correção quântica.

As equações clássicas de movimento para ambos os campos, são dadas por:

$$-\partial^\mu \partial_\mu \eta + M_\eta^2 \eta - 2g\phi^2 \eta = 0, \quad (2)$$

$$-\partial^\mu \partial_\mu \phi + M_\phi^2 \phi - \lambda\phi^3 = 0. \quad (3)$$

Da mesma maneira como foi feito no capítulo 5, aqui também desprezamos o termo $2g\phi\eta^2$ na equação (3), de modo que não exista um back-reaction do campo η sobre o termo da massa do campo ϕ .

Numa aproximação semi-clássica, podemos escrever η como

$$\eta = \eta_0 + \chi, \quad (4)$$

onde η_0 é um campo clássico satisfazendo a equação de movimento (2) e χ é uma pequena correção quântica adicionada ao campo clássico η_0 .

Substituindo a relação (4) na densidade Lagrangiana $\mathcal{L}$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}M_\phi^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta_0)^2 + (\partial_\mu \eta_0)(\partial^\mu \chi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 + \frac{1}{2}M_\eta^2 \eta_0^2 + \\ & M_\eta \eta_0 \chi + \frac{1}{2}M_\eta \chi^2 - g\phi^2 \eta_0^2 - 2g\phi^2 \eta_0 \chi - g\phi^2 \chi^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Agora da densidade Lagrangiana (5), temos que as equações de movimento para os campos ϕ , η_0 e χ , são dadas por:

1) Para ϕ ,

$$-\partial^\mu \partial_\mu \phi + M_\phi^2 \phi - 2g\phi\eta_0^2 - 4g\phi\eta_0\chi - 2g\phi\chi^2 - \lambda\phi^3 = 0. \quad (6)$$

Aqui vamos impor a condição que não existe back-reaction do campo η sobre o campo ϕ . Com isto a equação (6) resume-se a:

$$-\partial^\mu \partial_\mu \phi + M_\phi^2 \phi - \lambda\phi^3 = 0. \quad (7)$$

Esta equação é igual à equação (3), a qual foi discutida no capítulo 3. Suas soluções são dadas pelas equações (3.10) ou (3.13).

2) Para η_0 ,

$$-\partial^\mu \partial_\mu \eta_0 + M_\eta^2 \eta_0 - 2g\phi^2\eta_0 - \partial^\mu \partial_\mu \chi + M_\eta^2 \chi - 2g\phi^2\chi = 0. \quad (8)$$

3) Para χ ,

$$-\partial^\mu \partial_\mu \eta_0 + M_\eta^2 \eta_0 - 2g\phi^2\eta_0 - \partial^\mu \partial_\mu \chi + M_\eta^2 \chi - 2g\phi^2\chi = 0. \quad (9)$$

Como o campo clássico η_0 satisfaz a equação de movimento (2), a equação (8) (ou (9)) fornece a equação de movimento para a correção quântica χ , i.e.,

$$-\partial^\mu \partial_\mu \chi + M_\eta^2 \chi - 2g\phi^2\chi = 0. \quad (10)$$

A menos do termo de massa M_η^2 esta equação de movimento (10) tem a mesma forma que a equação de movimento do campo clássico (5.2).

Assim mostramos que para a forma da Lagrangiana e para as aproximações acima descritas, um campo escalar χ , bem como sua correção quântica, satisfazem, em geral, o mesmo tipo de equação de movimento.

A.2 Positividade da Hamiltoniana

Deduzimos abaixo uma condição suficiente para que a Hamiltoniana associada a Lagrangiana (5.1) seja positiva definida.

Considerando o potencial para o campo χ , dado por:

$$V(\chi) = -\frac{1}{2}M_\chi^2\chi^2 + g\phi^2\chi^2,$$

temos

$$V'(\chi) = -M_\chi^2\chi + 2g\phi^2\chi = 0 \Rightarrow \chi = 0 \text{ (ponto crítico)}.$$

A segunda derivada do potencial $V(\chi)$ é dada por:

$$V''(\chi) = -M_\chi^2 + 2g\phi^2.$$

Para que $V''(\chi) > 0$ devemos impor que:

$$\phi^2 > \frac{M_\chi^2}{2g}. \quad (1)$$

Assim a condição acima leva a existência de um estado de mínima energia (vácuo) do campo χ .

Por outro lado, a Hamiltoniana para o campo χ é dada por:

$$H = \dot{\chi}^2 - \mathcal{L}_\chi = \dot{\chi}^2 - \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{1}{2}M_\chi^2\chi^2 + g\phi^2\chi^2,$$

daí temos que:

$$H = \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2\chi}{dx^2} + (g\phi^2 - \frac{1}{2}M_\chi^2)\chi^2,$$

a qual será positiva definida, se a condição (1) é satisfeita.

A.3 Demonstração das Identidades (4.39) e (4.40)

A identidade (4.39) é rapidamente provada se expressamos:

$$\left(\frac{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})} \right)^{ik'} = e^{ik' \ln\left(\frac{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}\right)} = \cos\left(k' \ln\left(\frac{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}\right)\right) + i \sin\left(k' \ln\left(\frac{1 + \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{1 - \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}\right)\right). \quad (1)$$

Por outro lado, para provar a identidade (4.40) primeiramente definimos:

$$a \equiv -k'^2 - 1 + 3 \tanh^2\left(\frac{ML}{2\sqrt{2}}\right)$$

e

$$b \equiv 3 k' \tanh\left(\frac{ML}{2\sqrt{2}}\right).$$

Usando a identidade

$$\frac{a + i b}{a - i b} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + i \frac{2ab}{a^2 + b^2},$$

é fácil ver que

$$\left(\frac{-k'^2 - 1 + 3 i k' \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})}{-k'^2 - 1 - 3 i k' \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}})} \right) = \cos(\theta) + i \sin(\theta), \quad (2)$$

onde

$$\theta = \arctan\left(\frac{2ab}{a^2 - b^2}\right).$$

Assim substituindo as definições a e b na expressão acima para θ , obtemos:

$$\theta = \arctan\left(\frac{6 \tanh(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) k' (3 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) - k'^2 - 1)}{k'^4 + 2 k'^2 - 15 k'^2 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) - 6 \tanh^2(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 9 \tanh^4(\frac{ML}{2\sqrt{2}}) + 1}\right).$$

A.4 Fluxograma da Tese

Teoria $\lambda\phi^4$ Unidimensional

	Domínio	Domínio	
	Finito	Infinito	Kink
			DHN
Soluções Tipo		Soluções Tipo	
cn		sn	
1. Carga Topológica		C.F.	
2. Densidade de energia		Dirichlet e Periódicas	
(?)		1. Unicidade	
		2. Comp. Crítico $L = \frac{2\pi}{M}$	
		3. Carga Topológica	
		4. Densidade de Energia	
Interações com campo			
escalar χ			
(Estados Ligados)		Interação com χ	
		(Estados Ligados)	
Caso do Kink ($g = \lambda, \beta \leq 1$)		Caso “Geral” ($\frac{g}{\lambda} = \frac{n(n+1)}{4}, \beta \geq 0$)	
(Eq. Hipergeométrica)		(Eq. de Lamé)	
1. “Produção” de Partículas		1. Pontos de Instabilidade	
2. $\omega \equiv \omega(\beta, L)$		2. $\omega \equiv \omega(\beta, L)$	
Autovalores de energia		3. Quantização (?)	
3. Pontos de Instabilidade (?)		4. Soluções para $n \in \mathbf{R}$ (?)	

Referências

- [1] R. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, *Phys. Rev.* **D10**, 4131 (1974).
- [2] G. Plunien, B. Müller and W. Greiner, *Phys. Rep.* **134** 87 (1986).
- [3] S. Haroche and D. Kleppner, *Phys. Today* **42** 24 (1989).
- [4] R. Jackiw, *Rev. Mod. Phys.* **49**, 681 (1974).
- [5] R. K. Bullough and P. J. Caudrey, *Topics in Currents Physics, Solitons* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1980).
- [6] T. D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Harwood Academic Publishers, OPA Amsterdam, B. V. (1988).
- [7] R. K. Dodd, J. D. Eilbek, J. D. Gibbon and H. C. Morris, *Solitons and Non-linear Wave Equation*, Academic Press, London NW1 (1982).
- [8] G. E. Eilenberger, *Solitons: Mathematical Methods for Physicists*, Springer-Verlag, New York (1993).
- [9] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North Holland, Amsterdam, (1982).
- [10] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1988).
- [11] I. S. Gradshteyn and I.H. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York (1980).
- [12] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, INC., New York, (1972).

- [13] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill New York, (1953).
- [14] E. Butkov, *Mathematical Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, (1968).
- [15] F. M. Arscott, *Periodic Differential Equations: An Introduction to Mathieu, Lamé and Allied Functions*, The MacMillan Company, New York, (1964).
- [16] Z. X. Wang and D. R. Guo, *Special Functions*, World Scientific, Singapore, (1989).
- [17] A. A. Grib, S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko, *Vacuum Quantum Effects in Strong Fields*, Friedmann Laboratory Publishing, St. Petersburg, (1994).
- [18] J. A. Espichán Carrillo, A. Maia Jr. and V. M. Mostepanenko, *Jacobi Elliptic Solutions of $\lambda\phi^4$ Theory in a Finite Domain*, Aceito para Publicação na Int. J. Modern. Phys. A, hep-th/9905151.
- [19] J. A. Espichán Carrillo and A. Maia Jr., *Energy Levels of Interacting Fields in a Box*, Int. J. Theor. Phys., Vol. 38 N^0 8, 2183, hep-th/9905158.
- [20] J. A. Espichán Carrillo and A. Maia Jr., *Energy Levels of Classical Interacting Fields in a Finite Domain in 1 + 1 Dimension*, hep-th/9905171.
- [21] J. A. Espichán Carrillo e A. Maia Jr., “Correções Radiativas do kink em um Domínio Finito”, 194-197. XVIII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, Caxambu - Minas Gerais, 1997.
- [22] J. A. Espichán Carrillo, A. Maia Jr. e V. M. Mostepanenko, “Jacobi Elliptic Solutions of $\lambda\phi^4$ Theory in a Finite Domain”. XIX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, Caxambu - Minas Gerais, 1998. Será colocado no site da Sociedade Brasileira de Física.
- [23] J. A. Espichán Carrillo, A. Maia Jr. e V. M. Mostepanenko “Jacobi Elliptic Solutions of $\lambda\phi^4$ Model in a Finite Domain”. VIII Escola Mexicana de Partículas e Campos, Oaxaca de Juárez - México, 1998.