

# INTERAÇÕES HADRÔNICAS: ANÁLISE DE C-JATOS

Felix René Arias Revollo ✓

Orientador: Edison Hiroyuki Shibuya

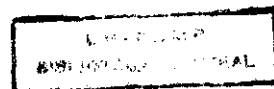
Tese apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia  
Universidade Estadual de Campinas - SP, 29 de janeiro de 1996

*Este exemplar corresponde à redação final da  
tese de doutorado defendida pelo aluno Felix René Arias  
Revollo e aprovada pela comissão julgadora.*

*Cidade Universitária "Zeferino Vaz", 21 de Maio de  
1999*

*[Handwritten signature]*







INSTITUTO DE FÍSICA  
GLEB WATAGHIN

**PARECER DE APROVAÇÃO**  
**DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DE**  
***FELIX RENE ARIAS REVOLLO***

DATA: 29 / 01 / 96

BANCA EXAMINADORA:

- Prof. Dr. Edison Hiroyuki Shibuya (Orientador)

- Prof. Dr. Yojiro Hama

- Prof. Dr. Carlos Enrique Navia Ojeda

- Prof. Dr. Márcio José Menon

- Prof. Dr. Armando Turtelli Júnior

A Maria Helena, Beatriz,  
Izabela  
e David Juliano

# Agradecimentos

Ao prof. Edison H. Shibuya, pela orientação e sugestão do tema da tese e pelos seus ensinamentos da "Física de Raios Cósmicos".

Aos membros da Colaboração Brasil-Japão de Raios Cósmicos; ao prof. Akinori Ohsawa e ao prof. Carlos Navia pelas discussões e sugestões durante o desenvolvimento da tese e pela sua amizade.

Aos amigos e colegas do IFGW e do Departamento de Raios Cósmicos. Ao Luiz Mundim e ao Sergio Barroso pela sua ajuda na parte computacional, que sem eles seria difícil o manuseio dos computadores.

Às técnicas do Grupo de Emulsões, Analzira, Rosângela e Divanilde; ao pessoal técnico do Departamento de Raios Cósmicos, a dona Sebastiana pela sua atenção durante a minha estadia.

Ao corpo docente do Departamento de Raios Cósmicos que fizeram mais amena a minha estadia nesse Instituto. E a todos que contribuíram direta ou indiretamente no desenvolvimento desse trabalho.

# Conteúdo

<b>RESUMO</b>	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>v</b>
<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1 MÉTODO EXPERIMENTAL</b>	<b>3</b>
1.1 CÂMARAS DE FOTOEMULSÕES . . . . .	3
1.2 CARACTERÍSTICAS DO MATERIAL FOTOSSENSÍVEL . . . . .	5
1.3 CASCATAS ELETROMAGNÉTICAS . . . . .	7
1.3.1 DETERMINAÇÃO DE ENERGIA . . . . .	7
1.4 CLASSIFICAÇÃO DE EVENTOS . . . . .	8
1.4.1 INFORMAÇÕES EXPERIMENTAIS . . . . .	10
1.5 ALTURA DE INTERAÇÃO . . . . .	11
<b>2 ANÁLISE DE EVENTOS C-JATOS ATRAVÉS DE <math>\gamma</math>'s</b>	<b>12</b>
2.1 MÉTODO DE ANÁLISE . . . . .	13
2.1.1 ANÁLISE DE EVENTOS 'SUPERPOSTOS' . . . . .	15
2.2 EVENTOS DO TIPO MIRIM E AÇÚ . . . . .	18
2.3 DISTRIBUIÇÃO ANGULAR . . . . .	20
2.3.1 DISTRIBUIÇÃO DE DULLER-WALKER . . . . .	24
2.4 DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA . . . . .	27
2.4.1 DISTRIBUIÇÃO INTEGRAL . . . . .	27
2.4.2 DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA EM FORMA FRA- CIONÁRIA . . . . .	29
2.5 DISTRIBUIÇÃO DE MOMENTO TRANSVERSAL . . . . .	30

<b>3</b>	<b>ANÁLISE DE EVENTOS C-JATOS ATRAVÉS DE <math>\pi^0</math>'s</b>	<b>34</b>
3.1	DISTRIBUIÇÃO ANGULAR . . . . .	35
3.2	DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA . . . . .	38
3.3	DISTRIBUIÇÃO DE MOMENTO TRANSVERSAL . . . . .	40
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>43</b>
<b>A</b>	<b>CÁLCULOS DOS ALGORITMOS</b>	<b>48</b>
A.1	CÁLCULO DE R . . . . .	49
A.2	CÁLCULO DE mDW . . . . .	51

# RESUMO

Através de algoritmos baseados na emissão isotrópica dos secundários numa interação nuclear entre hádrons, efetua-se a análise de interações (C-jatos) ocorridas num alvo constituído por material rico em carbono. Os algoritmos convenientemente combinados propiciam estudar possíveis superposições de interações e também verificar que as interações podem ser discriminadas em 2 tipos, Mirim e Açú, segundo a nomenclatura adotada pela Colaboração Brasil-Japão de Raios Cósmicos (CBJ). Verifica-se também que a análise efetuada é consistente com os resultados prévios da CBJ, interpretados como a ocorrência da Produção Múltipla de Píons, isotropicamente distribuídos, via formação de estados intermediários Mirim e Açú. Da análise apresentada nesta tese resultam características destes estados intermediários que não diferem significativamente das obtidas pela CBJ. A emissão isotrópica dos secundários é verificada através de um método aqui utilizado e também através do método denominado de Duller-Walker.



# ABSTRACT

Through algorithms based on isotropic decay produced secondaries in a hadronic nuclear interaction, an analysis of hadronic interactions in a target composed with carbon (C-jets) is done. The algorithms, properly combined, permits to study possible superposition of interactions and also to verify that the interactions could be discriminated in 2 types, Mirim and Açú, denomination from Brasil-Japan Collaboration on Cosmic Rays (BJC). It is also verified that the analysis done is consistent with a previous results of BJC, interpreted as an occurrence of Multiple Production of Pions, isotropically distributed, through formation of intermediate states, Mirim and Açú. From the analysis presented in this thesis it results characteristics of intermediate states that does not differ significantly from the obtained by BJC. The isotropic emission of secondary particles is verified through a method used here and also through a method known as Duller-Walker.

# INTRODUÇÃO

A Colaboração Brasil-Japão de Raios Cósmitos (CBJ) faz experiências, com o objetivo de estudar interações hadrônicas de alta energia ( $\geq 100$  TeV), expondo câmaras de fotoemulsões-chumbo no Monte Chacaltaya (a 5220 m acima do nível do mar), localizado a cerca de 20 km da cidade de La Paz (Bolivia).

Experiências efetuadas em Raios Cósmitos haviam mostrado a possibilidade de ocorrência de Produção Múltipla de Partículas em interações hadrônicas de alta energia[1]. A CBJ verifica que em interações hadrônicas de alta energia ( $E \geq 100$  TeV) ocorre a formação de estados intermediários (Mirim, Açú e Guaçú) entre a colisão e a Produção Múltipla de Partículas, apresentando decaimento isotrópico e grande valor de momento transversal[2].

Foram propostos vários modelos teóricos e/ou fenomenológicos [3][4][5] para explicar as colisões nucleon-nucleon de alta energia. Um deles é o modelo de bolas de fogo (estados intermediários) múltiplas de Hasegawa[6], que pressupõe a existência de uma unidade elementar, denominada de 'H-quantum', na produção múltipla de partículas secundárias. Este modelo considera que numa interação nuclear de alta energia são produzidos seqüencialmente, N estados intermediários (ou N estados de H-quantum), com fatores de Lorentz  $\Gamma_1 > \Gamma_2 > \dots > \Gamma_N$ .

No presente trabalho procura-se determinar as características desses estados intermediários em colisões ocorridas num alvo constituído de piche, material rico em carbono. Por serem interações com o alvo de piche e produzirem um conjunto associado de partículas, elas são denominadas C-jatos. Essas interações hadrônicas não têm energia tão elevada, já que os C-jatos anali-

sados estão na faixa de energia ( $17 \text{ TeV} \leq \Sigma E_\gamma \leq 125 \text{ TeV}$ ), correspondendo à energia  $E_0$  da partícula indutora da colisão, ( $100 \text{ TeV} \leq E_0 \leq 1 \text{ PeV}$ ). Assim os C-jatos carecem de eventos indicadores da formação do estado intermediário Guaçú, enquanto em colisões ocorridas na atmosfera terrestre acima do detetor (A-jatos) esse estado parece mostrar sua existência.

Utilizando o algoritmo  $R(\theta_i)$ , calculado no Apêndice, e que correlaciona a razão entre as grandezas  $\Sigma_i E_i \Sigma_i E_i \Theta_i^2$  e  $(\frac{4}{\pi} \Sigma_i E_i \Theta_i)^2$  com  $\Gamma \Theta_i$ , onde  $E_i$ ,  $\Theta_i$  e  $\Gamma$  são respectivamente, a energia do  $i$ -ésimo  $\gamma$ , o ângulo de emissão em relação à direção da partícula incidente e o fator de Lorentz do conjunto dos  $\gamma$ 's. Assim, após "limpeza" (retirada de  $\gamma$ 's que se desviam da curva analítica  $R(\theta_i) \times \Gamma \Theta$ ), os C-jatos foram classificados em 3 categorias:

i) até 10%

ii)  $\approx 20\%$

iii)  $\approx 40\%$

A classificação foi efetuada tomando-se o desvio relativo do  $\gamma$  mais discrepante em relação à curva analítica, imitando a sistemática dos métodos de Kolmogorov e Smirnov[7]. Estes são métodos de avaliação da qualidade de ajuste de uma distribuição aos dados experimentais.

Dessa análise obtém-se o fator de Lorentz  $\Gamma$  de cada C-jato, o qual é utilizado para elaborar a grandeza mDW, detalhado também no Apêndice. A grandeza mDW correlaciona a soma das grandezas devidamente normalizadas,  $\Sigma_i E_i$ ,  $\Sigma_i E_i (\Gamma \Theta_i)$ ,  $\Sigma_i E_i (\Gamma \Theta_i)^2$  e  $\Sigma_i E_i (\Gamma \Theta_i)^3$  com  $\Gamma \Theta_i$ . Como resultado da comparação do mDW, determinado a partir das medidas experimentais, com a curva analítica obteve-se a compatibilidade dos gráficos dos C-jatos com uma reta de coeficiente angular 2, coeficiente indicativo da emissão isotrópica de  $\gamma$ 's. Além desse resultado verifica-se que os C-jatos se distribuem em duas regiões, ocupadas por C-jatos do tipo Mirim e do tipo Açú.

A partir desses C-jatos separados nos dois tipos, são efetuadas as distribuições angular, de energia e de momento transversal dos  $\gamma$ 's. Em seguida foram efetuadas distribuições análogas para pares de  $\gamma$ 's provenientes de  $\pi^0$ 's. As distribuições angulares visando verificar a emissão isotrópica de partículas foram feitas pelo método tradicional de Duller e Walker[8] e pelo método mDW, tendo sido verificada a hipótese inicial utilizada nos cálculos explicitados no Apêndice.

# Capítulo 1

## MÉTODO EXPERIMENTAL

### 1.1 CÂMARAS DE FOTOEMULSÕES

A Colaboração Brasil-Japão de Raios Cósmicos (CBJ) expõe detetores denominados câmaras de fotoemulsões-chumbo à Radiação Cósmica incidente no Monte Chacaltaya (5220 m acima do nível do mar) - Bolívia. Dentre estas descreveremos as que são constituídas de uma câmara superior, de um alvo localizado (piche) e uma câmara inferior separada do alvo por um vão livre. A figura 1.1 representa a câmara nº 15 (exposição durante o período 06 de Outubro de 1969 a 30 de Julho de 1970), tipicamente constituída com as tres partes mencionadas. A parte superior desta câmara tem área de 44,2 m<sup>2</sup>, enquanto a parte inferior ocupa 33 m<sup>2</sup>.

A câmara superior detecta basicamente as componentes, eletromagnética e nuclear, originadas na maioria das interações hadrônicas ocorridas na atmosfera acima da câmara, A-jatos, e absorve a componente eletromagnética de forma que esta não atinja a câmara inferior. Entretanto, quando se observam interações de energia relativamente elevadas, há 'continuação' de partículas da componente eletromagnética até a câmara inferior. A câmara inferior detecta as partículas produzidas no alvo localizado abaixo da câmara superior, C-jatos, ou nas placas de chumbo, Pb-jatos, e as 'continuações' da superior, estas sendo, algumas vezes, Pb-jatos da câmara superior.

O alvo localizado, composto de uma camada de material com baixo

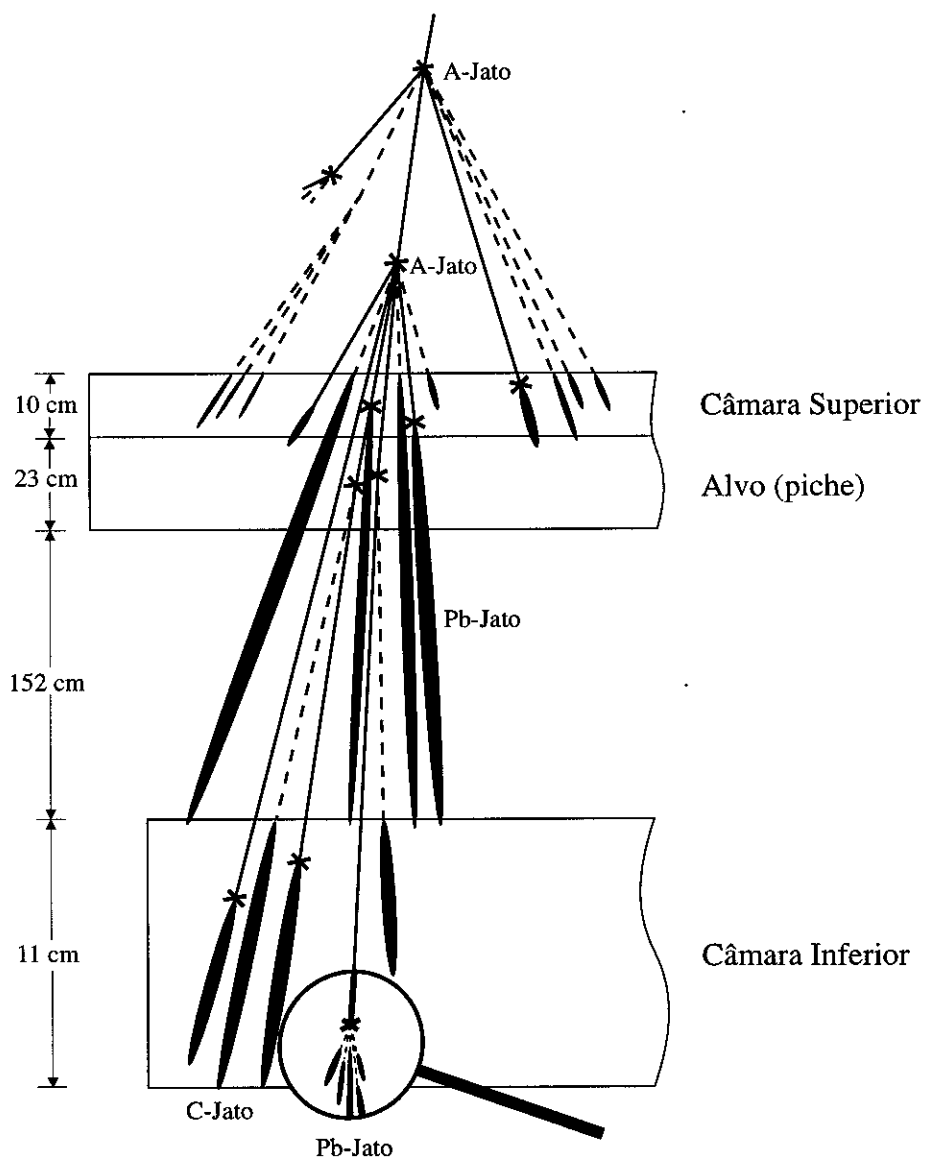


Figura 1.1: Câmara de fotoemulsões-chumbo nº 15

número atômico (píche ou atualmente blocos de plásticos), é escolhido por possibilitar interações hadrônicas nessa camada, inibir o desenvolvimento de cascatas eletromagnéticas dentro do alvo e observar na câmara inferior as partículas ali produzidas com uma boa localização do ponto de colisão. A escolha adequada da espessura do alvo ( $\sim 1/3$  do caminho livre médio de interação entre hádrons) diminuirá as 'contaminações' devidas à superposição de duas ou mais interações.

A finalidade básica do espaço livre entre o alvo e a câmara inferior é a de propiciar a separação entre os secundários resultantes da interação nuclear no alvo, para que estes sejam observados e analisados individualmente. Existe a possibilidade de que secundários penetrem na câmara inferior através desse espaço livre. Neste caso, a determinação do ângulo de incidência zenital pode determinar se a interação ocorreu no alvo localizado.

As câmaras superior e inferior são igualmente formadas por pilhas semelhantes, constituídas de placas de chumbo alternadas com envelopes contendo material fotossensível listado na tabela 1.1. A diferença entre elas consiste na espessura e na composição do material fotossensível utilizado. Normalmente a câmara inferior é mais espessa e contém quantidade maior de chapas de Emulsão Nuclear. As placas de chumbo servem primordialmente como freadores de partícula, e para os  $\gamma$ 's elas funcionam também como indutoras das cascatas eletromagnéticas (c.e.m.).

## **1.2 CARACTERÍSTICAS DO MATERIAL FOTOSSENSÍVEL**

O material fotossensível utilizado nas câmaras de fotoemulsões-chumbo, consiste de chapas de Emulsão Nuclear e filmes de Raio-X acondicionados em envelopes plastificados e lacrados, para evitar danos por luz e umidade. Vários testes efetuados mostraram que o material fotossensível resiste a períodos de exposição de 2 anos. Características do material fotossensível utilizado estão detalhados na tabela 1.1.

Devido à sua granularidade, a vantagem das chapas de Emulsão Nuclear sobre os filmes de Raio-X é a alta resolução geométrica, permitindo observar a estrutura das c.e.m. através de microscópio óptico, individualizar e medir os traços de partículas ionizantes. Entretanto, a determinação de energia nos filmes de Raio-X é mais rápida do que nas chapas de Emulsão Nuclear. Outra vantagem dos filmes de Raio-X é a busca mais rápida dos secundários ionizantes nesse tipo de material.

Tipo	Fabricante	Diâmetro do Grão ( $\mu\text{m}$ )	Espessura		Material da Base	Densidade ( $\text{g}/\text{cm}^2$ )	Comprimento de Radiação (cm)
			Película Fotossensível*	Base			
			( $\mu\text{m}$ )				
N	Sakura	1,38	25+25	175	Polyester	$\simeq 3,70$	$\simeq 3,09$
100	Fuji	0,48	20+20	175	Polyester	$\simeq 3,70$	$\simeq 3,09$
E7B	Fuji	0,26	50	1500	Lucite	3,73	3,09

Tabela 1.1: Características dos filmes de Raio-X (N e 100) e das chapas de Emulsão Nuclear (E7B). Os filmes de Raio-X e chapas de Emulsão Nuclear medem 40 cm x 50 cm e têm espessura conforme a tabela. \* Os filmes de Raio-X têm película fotossensível em ambas as faces. As chapas de Emulsão Nuclear têm película fotossensível somente numa das faces.

A chapa de Emulsão Nuclear, sensível às partículas eletricamente carregadas ( $e^\pm$ ,  $\pi^\pm$ ,  $p$ , etc.) tem uma excelente resolução geométrica, já que distingue traços com espessura menor que  $1 \mu\text{m}$ , como se pode inferir da tabela 1.1. Depois de processada quimicamente[9] a chapa de Emulsão Nuclear apresenta aglomerados de traços, permitindo observar a estrutura das c.e.m. através de microscópio óptico, além de determinar a energia da c.e.m. por meio da densidade de traços, grandeza proporcional à energia. A observação mais detalhada da estrutura da c.e.m., a determinação mais precisa do ângulo de incidência e da energia da c.e.m. são as vantagens da chapa de Emulsão Nuclear em relação ao filme de Raio-X.

O filme de Raio-X, também sensível às partículas eletricamente carregadas, após o processamento químico apresenta pontos escuros que correspondem aos aglomerados de traços de  $e^\pm$ , aglomerados devido à granularidade maior do filme de Raio-X comparado com a chapa de Emulsão Nuclear. Desta maneira é usado para busca rápida das c.e.m. sem utilização de microscópio e para a determinação da energia pelo método de fotodensitometria, sendo

estas as suas grandes vantagens em relação à chapa de Emulsão Nuclear. A Colaboração Brasil-Japão de Raios Cósmicos utiliza dois tipos de filme de Raio-X, diferenciados por sua granularidade, conforme tabela 1.1.

## 1.3 CASCATAS ELETROMAGNÉTICAS

Os píons neutros,  $\pi^0$ 's, produzidos nas interações nucleares decaem imediatamente em 2  $\gamma$ 's (vida média de  $\sim 10^{-16}$ s no seu sistema de referência). Na presença de núcleos pesados o  $\gamma$  pode se materializar pela criação de um par elétron-pósitron. Esses elétrons e pósitrons podem emitir outros  $\gamma$ 's, devido a interação com o campo coulombiano dos núcleos (radiação de freamento) e/ou devido ao processo de aniquilação.

Destes processos que produzem uma avalanche de partículas ( $e^\pm$ ,  $\gamma$ ) resulta o que denominamos de cascata eletromagnética (c.e.m.)[10], sendo que o chumbo é um material apropriado para essa finalidade, apesar de outros materiais como ferro, ouro etc. também serem materiais indutores de c.e.m. Alguns dos  $\gamma$ 's produzidos na atmosfera acima do detetor podem se materializar já na atmosfera, produzindo c.e.m., probabilidade que aumenta quanto maior for a distância entre o detetor e o ponto de produção do  $\gamma$ .

Dessa forma o que se deteta num detetor do tipo utilizado pela Colaboração Brasil-Japão de Raios Cósmicos são sempre c.e.m. produzidas por  $\gamma$ 's provenientes principalmente de  $\pi^0$ 's, produzidos por sua vez por partículas hadrônicas primárias, secundárias etc., em interações hadrônicas da Radiação Cósmica incidente sobre a câmara de fotoemulsão-chumbo.

### 1.3.1 DETERMINAÇÃO DE ENERGIA

A determinação de energia das cascatas eletromagnéticas (c.e.m.) é feita pelo método de contagem dos traços de  $e^\pm$  nas chapas de Emulsão Nuclear, e pelo método de fotodensitometria nos filmes de Raio-X.

O método de contagem de traços consiste na contagem de traços de  $e^\pm$  nas chapas de Emulsão Nuclear dentro de um círculo com diâmetro de apro-



ximadamente  $50 \mu\text{m}$ . Observa-se que as c.e.m. ocupam área menor do que esse círculo. Feitas as medidas de densidade de traços nas várias camadas da câmara, determina-se a correlação da densidade com a profundidade. Pelo melhor ajuste destes pontos experimentais com as curvas de transição analíticas de Kamata e Nishimura [11][12], obtém-se a densidade máxima de  $e^\pm$ , quantidade que é proporcional à energia da c.e.m., e conseqüentemente à energia do  $\gamma$  que iniciou a c.e.m.

No método fotodensitométrico[13], a medida da energia é feita determinando-se a opacidade do filme de Raio-X na região da c.e.m. A opacidade, medida pelo grau de enegrecimento, é determinada nas várias profundidades da câmara, utilizando fotomultiplicadora acoplada a microscópio óptico. Pelo melhor ajuste dos pontos experimentais (que dão a correlação entre a opacidade e a profundidade) com as curvas de transição analíticas, obtém-se o valor máximo da opacidade que é proporcional à energia da c.e.m. A proporcionalidade é estabelecida para cada câmara, selecionando-se algumas c.e.m.'s, determinando-se a energia pelo método de contagem de traços e a opacidade máxima da c.e.m. correspondente, pelo método fotodensitométrico. Dessa maneira se obtém a curva de calibração, da qual se determina a energia das outras c.e.m., efetuando-se a leitura da energia correspondente à sua opacidade máxima.

Atualmente o Laboratório de Raios Cósmicos do IFGW-UNICAMP está automatizando esses métodos utilizando computador. As curvas de transição de Kamata e Nishimura foram simuladas e são corrigidas para a geometria da câmara, de forma que o ajuste dessas curvas aos pontos experimentais é feito com precisão, para medidas obtidas pelos dois métodos acima descritos[14].

## 1.4 CLASSIFICAÇÃO DE EVENTOS

Dependendo do alvo da interação, o conjunto de c.e.m.'s produzido é classificado como evento A-jato quando a interação hadrônica ocorre na atmosfera, como C-jato quando ocorre no alvo de piche e como Pb-jato quando acontece nas placas de chumbo da câmara.

A busca das c.e.m.'s componentes do evento é feita inicialmente nos filmes

de Raio-X e posteriormente nas chapas de Emulsão Nuclear correspondentes, para cada bloco e em todas as profundidades. A procura das c.e.m.'s nos filmes de Raio-X é feita sobre uma superfície de vidro fosco iluminado. Sobrepostos os dois filmes de Raio-X de uma mesma profundidade, os pontos escuros que aparecem coincidentes são considerados como provenientes de uma mesma c.e.m. Por outro lado, a identificação das c.e.m.'s nas chapas de Emulsão Nuclear é feita sobrepondo cada chapa com o filme de Raio-X da mesma profundidade. A busca detalhada de cada c.e.m., componente ou não de evento é feita na chapa de Emulsão Nuclear, utilizando microscópio óptico.

A energia limiar de observação da c.e.m. é de  $\simeq 1$  TeV nos filmes de Raio-X e de  $\simeq 0,5$  TeV nas chapas de Emulsão Nuclear. Esses valores são valores médios, pois o grau de enegrecimento no filme de Raio-X depende de diversos fatores, tais como tempo de processamento químico, concentração dos reagentes utilizados no processamento etc. Nas chapas de Emulsão Nuclear esses fatores tem reduzida influência, entretanto a acuidade visual do operador do microscópio é o fator que determina a energia limiar de observação.

Usando os filmes de Raio-X, de todas as camadas, é feito o mapa do bloco, que é a projeção das trajetórias dos c.e.m.'s num plano horizontal. O conjunto de c.e.m.'s que constituem evento C-jato é observado como uma única mancha, e portanto o mapa do C-jato só pode ser feito nas chapas de Emulsão Nuclear, enquanto a caracterização do A-jato pode ser feita com o mapa do bloco elaborado com os filmes de Raio-X, procurando-se as c.e.m.'s que apresentam ângulos zenital e azimutal iguais.

Através do mapa do bloco podemos determinar os ângulos de incidência das c.e.m.'s e conseqüentemente os ângulos zenital e azimutal do conjunto, pois os  $\gamma$ 's geradores das c.e.m.'s são emitidos praticamente paralelos, com os ângulos diferindo em torno de  $10^{-3}$  rad. Entretanto, determinações precisas do ângulo zenital são efetuadas através das medidas de comprimento dos traços de  $e^\pm$ , utilizando chapas de Emulsão Nuclear.

Para identificar se um conjunto de c.e.m.'s observado na câmara inferior pode constituir um evento C-jato, verifica-se o prolongamento das trajetórias. A não passagem das trajetórias pela câmara superior classifica o evento como A-jato. Também é necessária uma análise do evento ao microscópio, para ve-

rificar se ele não corresponde a um Pb-jato da câmara superior. Se, na placa de Emulsão Nuclear o evento se apresentar como um único núcleo, ou se ele for muito difuso, poderá corresponder à continuação de uma c.e.m. da câmara superior. Na maioria das vezes não é possível determinar se o evento é C-jato ou Pb-jato da superior, podendo-se elucidar com a informação complementar sobre o ponto onde ocorreu a interação.

Identificados os C-jatos desta forma constroeu-se o mapa de cada evento, através da observação detalhada das chapas de Emulsão Nuclear, obtendo-se assim as posições relativas entre as c.e.m. Sendo o mapa uma projeção das c.e.m.'s num plano horizontal, as posições relativas reais dependem da inclinação do evento e como os C-jatos podem ter quaisquer ângulos zenitais, para podermos compará-los efetua-se uma rotação do mapa, de tal forma que esta fique perpendicular à direção de incidência.

### 1.4.1 INFORMAÇÕES EXPERIMENTAIS

As informações que se obtém diretamente das experiências de interações nucleares são:

- i) as coordenadas (x, y, z) dos  $\gamma$ 's provenientes do decaimento dos  $\pi^0$ 's
- ii) a energia dos  $\gamma$ 's
- iii) o ângulo zenital e azimutal dos  $\gamma$ 's
- iv) estrutura singular ou plural das c.e.m.'s

As coordenadas são corrigidas para um plano perpendicular à direção de incidência, através de rotação correspondente ao ângulo zenital do conjunto de  $\gamma$ 's. A partir das coordenadas corrigidas e das energias é determinado o centro do conjunto, ponderando a coordenada pela energia. A altura de produção do  $\pi^0$  e conseqüentemente a altura da interação é obtida utilizando os princípios de conservação de energia e de momento linear para o decaimento  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ . Da altura média da interação e das distâncias ao centro ponderado de energia se obtém os ângulos de emissão dos  $\gamma$ 's em relação à direção de propagação do hádron incidente. O ângulo de emissão assim determinado é utilizado para a obtenção de outras grandezas, como por exemplo o momento transversal  $P_{t\gamma} = E_\gamma \text{sen}\theta_\gamma$ , sendo que  $P_{t\gamma} \simeq E_\gamma \theta_\gamma$ , já que os ângulos de emissão são da ordem de  $10^{-3}$  rad.

## 1.5 ALTURA DE INTERAÇÃO

Através das medidas de separação entre pares de  $\gamma$ 's, em várias camadas do bloco, pode-se determinar a altura em que ocorreu a interação. Esse método apelidado de método de triangulação, por razões óbvias, não é possível de se utilizar na maioria dos casos. A dificuldade vem do fato de que as separações entre os  $\gamma$ 's, em camadas sucessivas diferem muito pouco e portanto, na maioria das vezes a precisão de  $1 \mu\text{m}$  do microscópio não é suficiente para se efetuar a triangulação. Por esse motivo a determinação da altura é efetuada através do método de acoplamento cinemático de pares de  $\gamma$ 's, aplicando os princípios de conservação de energia e momento linear para o decaimento de um  $\pi^0$  em 2  $\gamma$ 's. No caso de C-jatos procura-se o maior número de pares de  $\gamma$ 's resultando em valores de altura  $H$  dentro dos 23 cm de espessura do alvo, enquanto que nos A-jatos temos, em princípio, qualquer altura possível desde o topo da atmosfera terrestre até o detetor. Os C-jatos tem essa vantagem de uma melhor precisão mas, em contrapartida, há uma quantidade maior de interações hadrônicas mais energéticas em A-jatos.

Para a determinação da altura a expressão utilizada é:

$$H = \frac{\sqrt{E_{\gamma_1} E_{\gamma_2}} r_{\gamma_1, \gamma_2}}{m_{\pi^0} c^2} \quad (1.1)$$

onde

- i)  $E_{\gamma_1}$  e  $E_{\gamma_2}$  são as energias dos  $\gamma$ 's provenientes do  $\pi^0$
- ii)  $r_{\gamma_1, \gamma_2}$  é a distância entre os mesmos
- iii)  $m_{\pi^0} c^2$  é a massa de repouso do  $\pi^0$

## Capítulo 2

# ANÁLISE DE EVENTOS C-JATOS ATRAVÉS DE $\gamma$ 's

As interações nucleares de hádrons da Radiação Cósmica com núcleos de carbono, constituintes do alvo localizado, são chamadas de C-jatos. Nessas colisões são produzidos píons, predominantemente. Destes, os píons neutros,  $\pi^0$ 's, decaem em 2  $\gamma$ 's que são detectados pela câmara inferior, em forma de chuviscos de  $e^\pm$ , produzidos pelos processos de freamento e criação de par  $e^\pm$ .

Neste trabalho foram analisados C-jatos com multiplicidade variando de 4 a 36  $\gamma$ 's. O limiar de detecção da energia, nas chapas de Emulsão Nuclear, é em torno de 0,5 TeV e o limiar no ângulo de emissão de  $10^{-3}$  rad, aproximadamente. Foram analisados 87 C-jatos observados nas câmaras 15 a 19.

Para a análise de C-jatos é elaborado, através de microscópio óptico, um diagrama de alvo, que é um mapa das posições relativas das c.e.m. Em seguida, realizamos uma rotação do plano de observação de um ângulo equivalente ao ângulo zenital de incidência, ficando desta forma perpendicular à direção de incidência. Esse procedimento é necessário para se poder comparar os diversos C-jatos que podem ter ângulos de incidência diferentes.

A partir das coordenadas dos  $\gamma$ 's, corrigidas desta maneira para incidência vertical, calcula-se o centro ponderado de energia (C.P.E.) de cada C-jato. Considerando a direção determinada pela posição do centro ponderado de energia e o ponto onde ocorreu a interação como a direção de movimento do

estado intermediário (conjunto de  $\gamma$ 's cogenéticos), conhecendo-se a distância de cada um dos  $\gamma$ 's até o C.P.E. e a altura média da interação, calculam-se os ângulos de emissão correspondentes. Desta forma as informações que se tem dos C-jatos são os ângulos de emissão dos  $\gamma$ 's resultantes do decaimento dos  $\pi^0$ 's, as energias correspondentes e também o conhecimento de quais camadas do detetor os mesmos foram visualizados.

## 2.1 MÉTODO DE ANÁLISE

Para a determinação da massa invariante de um conjunto composto por  $\gamma$ 's cogenéticos, ou seja composto pelos  $\gamma$ 's agrupados numa área de aproximadamente  $150 \times 150 \mu\text{m}^2$  (no caso de C-jatos) e, com os mesmos ângulos azimutal e zenital, utilizam-se as grandezas  $[(\sum_i E_i)(\sum_i E_i \theta_i^2)]^{1/2}$  e  $\frac{4}{\pi} \sum_i P_{i_i}$ , sendo que o fator  $\frac{4}{\pi}$  é decorrente de distribuição isotrópica dos  $\gamma$ 's.

Efetuando-se a correlação entre essas duas grandezas e determinando-se o ponto de intersecção entre a curva de correlação com um reta de 45 graus, pode-se determinar a massa invariante do conjunto de  $\gamma$ 's emitidos isotrópicamente, sendo que os pontos dessa curva são determinados fazendo os somatórios até um ângulo  $\theta_c$  para o conjunto previamente ordenado em ordem crescente de  $\theta_i$ , tal que  $\theta_i < \theta_c$ .

Entretanto, como não é sempre que todos os eventos se estendem até o ponto de intersecção, este método é limitado na maioria das vezes, podendo não separar secundários de diferentes origens, ou seja secundários de interações sucessivas e/ou de conjuntos superpostos.

No presente trabalho utilizou-se o algoritmo  $R(\theta_i)$ [15], definido como:

$$R(\theta_i) = \frac{(\sum_i E_i)(\sum_i E_i \theta_i^2)}{(\frac{4}{\pi} \sum_i P_{i_i})^2} \approx \frac{(\sum_i E_i)(\sum_i E_i \theta_i^2)}{(\frac{4}{\pi} \sum_i E_i \theta_i)^2} \quad (2.1)$$

onde  $E_i$  é a energia do  $i$ -ésimo  $\gamma$ ,  $\theta_i$  é o ângulo de emissão correspondente e o somatório é feito para ângulos  $\theta_i$  menores que um certo ângulo  $\theta_c$ .

As expressões analíticas para  $\sum_i E_i$ ,  $\sum_i E_i \theta_i$  e  $\sum_i E_i \theta_i^2$  utilizadas para obter o algoritmo  $R(\theta_i)$ , bem como a expressão do  $\sum_i E_i \theta_i^3$  utilizada para obtenção

do algoritmo  $mDW(\theta_i)$  estão esboçadas no Apêndice, resultando em:

$$\Sigma_i E_i = \Gamma M \left[ 1 - \frac{1}{(1 + \Gamma^2 \theta^2)^2} \right] \quad (2.2)$$

$$\Sigma_i E_i \theta_i = \frac{M}{2} \left[ \arctan(\Gamma \theta) - \frac{(1 - \Gamma^2 \theta^2) \Gamma \theta}{(1 + \Gamma^2 \theta^2)^2} \right] \quad (2.3)$$

$$\Sigma_i E_i \theta_i^2 = \frac{M}{\Gamma} \frac{\Gamma^4 \theta^4}{(1 + \Gamma^2 \theta^2)^2} \quad (2.4)$$

$$\Sigma_i E_i \theta_i^3 = \frac{M}{2\Gamma^2} \left[ 3 \operatorname{arctg}(\Gamma \theta) - \frac{3 + 5\Gamma^2 \theta^2}{(1 + \Gamma^2 \theta^2)^2} \Gamma \theta \right] \quad (2.5)$$

onde  $M$  é a massa invariante do conjunto e, para a determinação dessas expressões assumiu-se o decaimento isotrópico dos secundários. Essa hipótese foi testada posteriormente através do algoritmo  $mDW(\theta_i)$ .

Substituindo as três primeiras equações acima, a expressão analítica de  $R(\theta_i)$  é:

$$R(\theta_i) = \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{(\Gamma^2 \theta^2 + 2) \Gamma^6 \theta^6}{[(1 + \Gamma^2 \theta^2)^2 \arctan \Gamma \theta - (1 - \Gamma^2 \theta^2) \Gamma \theta]^2} \quad (2.6)$$

A análise individual dos C-jatos foi efetuada após o ordenamento dos ângulos de emissão e determinando-se o valor de  $R$  para o  $i$ -ésimo  $\gamma$ , sendo que esse  $R$  é resultado dos diversos somatórios dos  $i$   $\gamma$ 's. Do melhor ajuste, pelo método dos mínimos quadrados, dos pontos experimentais com a curva analítica obtém-se o fator de Lorentz  $\Gamma$ , velocidade do estado intermediário.

O fator de Lorentz assim determinado é utilizado para calcular o  $mDW(\theta_i)$ , definido como a soma das grandezas  $\Sigma_i E_i$ ,  $\Sigma_i E_i(\Gamma \theta_i)$ ,  $\Sigma_i E_i(\Gamma \theta_i)^2$  e  $\Sigma_i E_i(\Gamma \theta_i)^3$ , devidamente normalizadas pelos fatores de isotropia e que resulta em

$$mDW(\theta_i) = \frac{1}{4M\Gamma} \left[ \Sigma E_i + \frac{4}{\pi} \Sigma E_i(\Gamma \theta_i) + \Sigma E_i(\Gamma \theta_i)^2 + \frac{4}{3\pi} \Sigma E_i(\Gamma \theta_i)^3 \right] \quad (2.7)$$

sendo que sua expressão analítica é

$$mDW(\theta_i) = \frac{1}{M\Gamma} \left[ \frac{1}{(1 + \Gamma^2 \theta_i^2)^2} \left[ \frac{(\Gamma \theta_i)^4}{2} - \frac{(\Gamma \theta_i)^3}{3\pi} + \frac{(\Gamma \theta_i)^2}{2} - \frac{\Gamma \theta_i}{\pi} \right] + \frac{1}{\pi} \arctg(\Gamma \theta_i) \right] \quad (2.8)$$

### 2.1.1 ANÁLISE DE EVENTOS 'SUPERPOSTOS'

Experiências anteriores haviam verificado que algumas vezes a distribuição dos ângulos de emissão dos secundários apresentam concentrações em pequenos intervalos angulares. Interpreta-se cada um desses intervalos como devido à secundários emitidos por um único 'estado intermediário' entre a colisão de hádrons e a emissão de secundários. Entretanto o conjunto observado de  $\gamma$ 's, classificado como C-jato, pode ter resultado da superposição de mais de um estado intermediário. Também existe a possibilidade de que o conjunto observado seja devido à colisões múltiplas de um hádron, apesar da espessura do alvo ser somente 1/3 do caminho livre médio de interação, já que a probabilidade de colisão obedece à distribuição do tipo Poisson.

Na tentativa de discriminar um conjunto de  $\gamma$ 's de um C-jato, provenientes de um único estado intermediário e/ou de uma única interação, foi utilizado o algoritmo  $R(\theta_i)$ [15]. Quando um C-jato apresenta a correlação  $R(\theta_i) - \theta_i$  que se desvia significativamente da curva analítica, o C-jato foi submetido ao processo que denominamos "limpeza". Basicamente esse processo é a retirada de  $\gamma$ 's que fazem a correlação experimental diferir da calculada analiticamente, principalmente a supressão dos que apresentam  $R(\theta_i) > 1$ . Sendo o  $R(\theta_i)$  uma razão entre grandezas proporcionais à massa invariante do estado intermediário, ele deve tender assintoticamente para 1, para grandes valores de  $\theta$ .

Assim, quando o C-jato, através do algoritmo  $R(\theta_i)$ , apresenta grande desvio da curva analítica e, principalmente quando os  $\gamma$ 's de maior ângulo apresentarem  $R > 1$ , esse C-jato é submetido ao processo de "limpeza", ou seja alguns  $\gamma$ 's são retirados, um novo centro ponderado de energia é determinado e novamente é elaborado o gráfico de  $R(\theta_i)$  e assim sucessivamente até que o desvio dos pontos experimentais em relação à curva analítica não seja acentuado. Um dos critérios utilizados para a "limpeza" foi a retirada



de  $\gamma$ 's que apresentam ângulo de emissão bastante diferente dos demais e/ou que contribuem significativamente para que o R seja  $> 1$ . Na inexistência de critérios absolutos para a "limpeza" utilizamos esse critério e testamos a razoabilidade do processo por meio da determinação das distribuições de energia, e de momento transversal,  $P_T$ .

As figuras 2.1, 2.2 e 2.3 são exemplos de "limpeza". Elas apresentam a correlação  $R(\theta_\gamma) - \theta_\gamma$  dos dados originais e dos dados após o processo de retirada de  $\gamma$ 's. Estes estão indicados pela letra V. Nota-se que com a retirada desses  $\gamma$ 's selecionados segundo critério do tipo acima descrito, os pontos experimentais se aproximam da curva analítica. Nessas figuras também estão indicados os fatores de Lorentz, obtidos como o inverso de  $\theta_\gamma$  do C-jato que coincide com a abscissa  $\Gamma\theta = 1$ , da curva analítica.

Na análise individual de cada C-jato foram determinados os desvios relativos dos valores experimentais de R em relação à curva analítica, e os C-jatos foram classificados em três grupos. C-jatos com pontos experimentais dentro de uma margem de desvio relativo de i) 0 até 10%, ii)  $\approx 20\%$  e iii)  $\approx 40\%$ . A classificação dentro de um dos grupos é determinado pelo ponto mais discrepante do valor de R experimental em relação ao R determinado analiticamente.

Essas figuras 2.1, 2.2 e 2.3 são exemplos de um mesmo C-jato apresentando diferentes desvios relativos em relação à curva analítica, ou seja, para desvio de 10%, 20% e 40%, respectivamente. A figura 2.1 relaciona os pontos experimentais originais com os recalculados após a retirada de 4  $\gamma$ 's, a figura 2.2 quando foram retirados 3  $\gamma$ 's e a figura 2.3 sem 2  $\gamma$ 's. Na figura 2.4 foram superpostas as figuras anteriores para efeito de comparação.

Alguns dos C-jatos tiveram retirados 4 ou mais  $\gamma$ 's durante o processo de "limpeza", por exemplo o C-jato da figura 2.1. Para esses C-jatos foram feitas análises análogas, de forma que os C-jatos originais foram desmembrados em dois, supondo que o original se constitui de eventos superpostos devido à interações sucessivas e/ou produção de múltiplos estados intermediários. Os grupamentos de  $\gamma$ 's retirados foram analisados e classificados num dos três grupos acima mencionados, desde que o grupamento seja constituído de no mínimo 4  $\gamma$ 's.

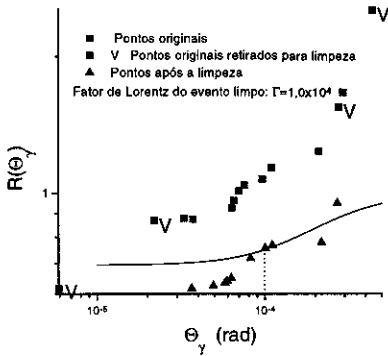


Figura 2.1: Exemplo de evento com desvio de 10%

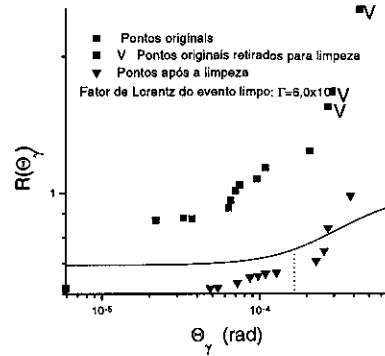


Figura 2.2: Exemplo de evento com desvio de 20%

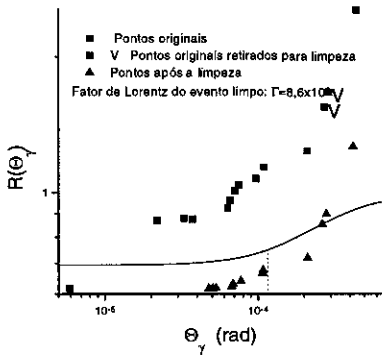


Figura 2.3: Exemplo de evento com desvio de 40%

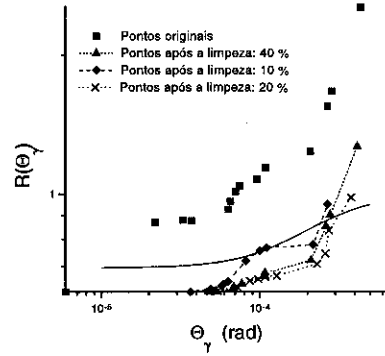


Figura 2.4: Superposição das 3 figuras anteriores

As figuras 2.5, 2.6 e 2.7 mostram o espectro de massas,  $M_\gamma$  dos conjuntos de  $\gamma$ 's classificados nos três grupos. Nas distribuições mostradas nas figuras 2.5 e 2.6 podemos identificar duas regiões; um grupo com  $M_\gamma$  distribuída em torno de 2,0 a 3,0 GeV/c<sup>2</sup> e um outro em torno de 5 GeV/c<sup>2</sup>. A distribuição correspondente aos C-jatos classificados no grupo de 40% apresenta uma única região em torno de 6 GeV/c<sup>2</sup>. Isto deve-se ao fato de termos poucos C-jatos classificados dentro deste grupo o que não nos permite tomar intervalos



de massa muito pequenos e conseqüentemente a identificação refinada de cada região fica prejudicada. Cada região foi ajustada à uma gaussiana pelo método de mínimos quadrados e a determinação da massa invariante  $M_\gamma$  foi feita utilizando a expressão,

$$M_\gamma \simeq [(\sum_i E_i)(\sum_i E_i \theta_i^2)]^{1/2} \quad (2.9)$$

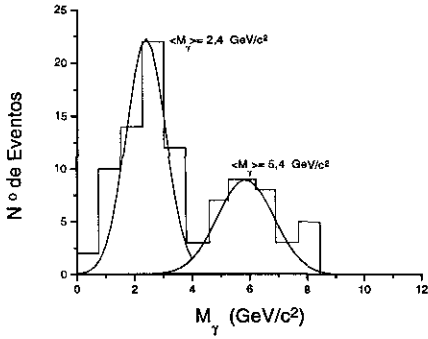


Figura 2.5: Massa invariante dos eventos com desvio de 10%

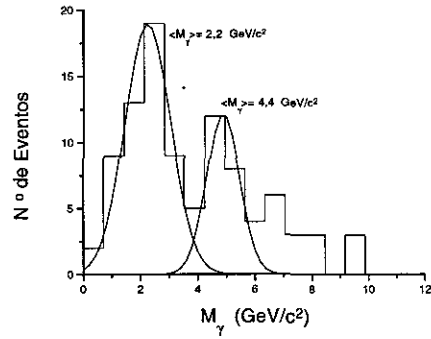
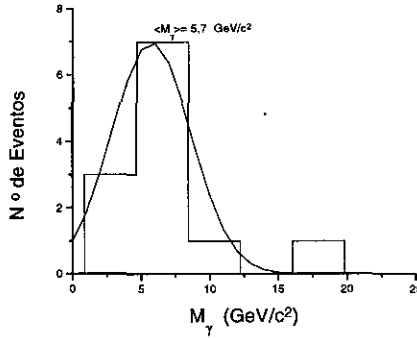


Figura 2.6: Massa invariante dos eventos com desvio de 20%

Figura 2.7: Massa invariante dos eventos com desvio de 40%



## 2.2 EVENTOS DO TIPO MIRIM E AÇÚ

Os espectros de massas,  $M_\gamma$ , mostram que os C-jatos analisados se distribuem em torno de dois valores médios. A nomenclatura utilizada pela CBJ

denomina-os eventos do tipo Mirim e Açú. A tabela 2.1 mostra os valores médios dessas massas, obtidos através das figuras 2.5, 2.6 e 2.7. O desvio especificado é o desvio padrão.

	10%	20%	40%
	$\langle M_\gamma \rangle [GeV/c^2]$	$\langle M_\gamma \rangle [GeV/c^2]$	$\langle M_\gamma \rangle [GeV/c^2]$
<i>Mirim</i>	$2,4 \pm 1,1$	$2,2 \pm 0,9$	
<i>Açú</i>	$5,4 \pm 1,6$	$4,4 \pm 1,4$	$5,7 \pm 2,3$

Tabela 2.1:

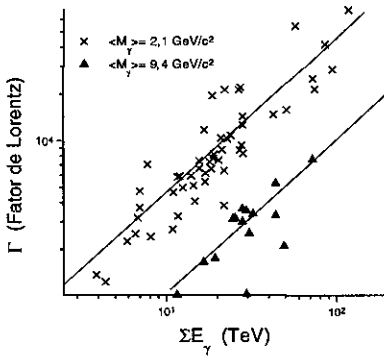


Figura 2.8: Correlação  $\Gamma$ - $\Sigma E_\gamma$  dos eventos com desvio de 10%

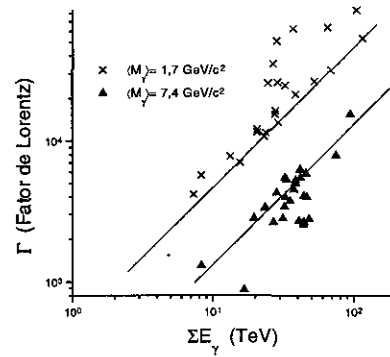
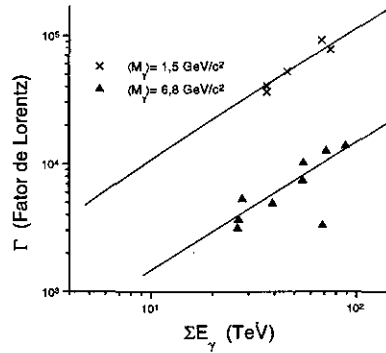


Figura 2.9: Correlação  $\Gamma$ - $\Sigma E_\gamma$  dos eventos com desvio de 20%

Figura 2.10: Correlação  $\Gamma$ - $\Sigma E_\gamma$  dos eventos com desvio de 40%



Outra forma de identificação dos eventos classificados como Mirim ou como Açú é através da correlação  $\Gamma - \Sigma E_\gamma$ . As figuras 2.8, 2.9 e 2.10 mostram que os C-jatos se distribuem em torno de duas retas, correspondentes

à eventos denominados Mirim e Açú, sendo que as massas invariantes assim determinadas, constam da tabela 2.2.

	10%	20%	40%
	$\langle M_\gamma \rangle [GeV/c^2]$	$\langle M_\gamma \rangle [GeV/c^2]$	$\langle M_\gamma \rangle [GeV/c^2]$
<i>Mirim</i>	$2,1 \pm 0,8$	$1,7 \pm 0,9$	$1,5 \pm 0,3$
<i>Açú</i>	$9,4 \pm 2,3$	$7,4 \pm 2,2$	$6,8 \pm 1,5$

Tabela 2.2:

## 2.3 DISTRIBUIÇÃO ANGULAR

Os ângulos de emissão dos  $\gamma$ 's que constituem um C-jato são utilizados primordialmente para determinar o fator de Lorentz. Um método largamente utilizado no passado foi o chamado 'ângulo-metade', isto é o método de determinação do ângulo que divide a distribuição angular em duas metades iguais. A observação da forma das duas metades da distribuição angular também pode sugerir quão isotrópico é o evento.

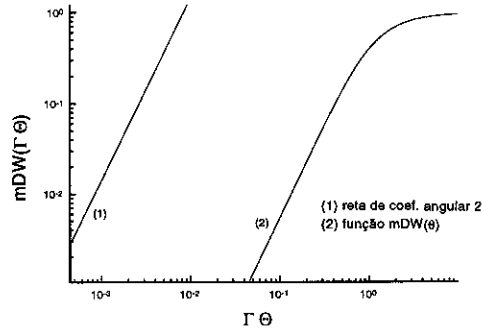
Uma maneira mais elaborada de determinar o fator de Lorentz e de testar a isotropia do C-jato, é o método denominado método de Duller-Walker, utilizado na sub-seção seguinte. Nesse método, bem como no método do ângulo-metade o efeito da energia limiar de detecção é considerado de uma forma indireta.

Utilizando a hipótese da produção de um único estado intermediário, decaindo isotropicamente em  $\gamma$ 's, foi elaborado o método mDW, alusão à modificação apropriada do método de Duller-Walker. A essência do método mDW( $\theta_i$ ) se refere à correlação entre a soma de momentos da forma  $\Sigma E_i (\Gamma \theta_i)^n$ , e o ângulo de emissão ( $\theta_i$ ), sendo que os 4 momentos ( $n = 0, 1, 2$  e  $3$ ) utilizados são devidamente normalizados pelos respectivos fatores de isotropia.

A expressão analítica obtida dessa forma mostra que a correlação é linear e o coeficiente angular é 2, para ângulos pequenos. Esse valor do coeficiente angular é característico da emissão isotrópica, A figura 2.11 ilustra essa

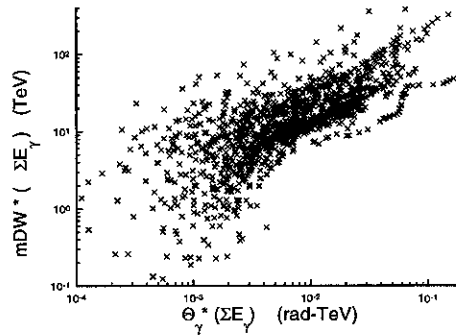
característica, a qual é observada também no método de Duller-Walker.

Figura 2.11: mDW analítico



Devido à essa característica, pode-se testar se a distribuição angular indica o caráter isotrópico dos secundários emitidos. No método de Duller-Walker pode-se testar da mesma maneira, entretanto há uma diferenciação entre os dois métodos, já que no método mDW não precisamos conhecer de antemão o número total de partículas emitidas pelo estado intermediário, ou seja, basta conhecer os ângulos, as energias e a multiplicidade observada.

Figura 2.12: mDW de todos os C-jatos originais



Efetuada a correlação de todos os C-jatos originais, sem nenhum tipo de "limpeza", obtém-se a figura 2.12 com todos os C-jatos superpostos e onde os ângulos de emissão estão multiplicados pela energia total observada do C-jato correspondente. Nesta figura os C-jatos não se apresentam separados em eventos do tipo Mirim e Açú. Exemplos de análises individualizados são apresentados nas figuras 2.13 e 2.14.

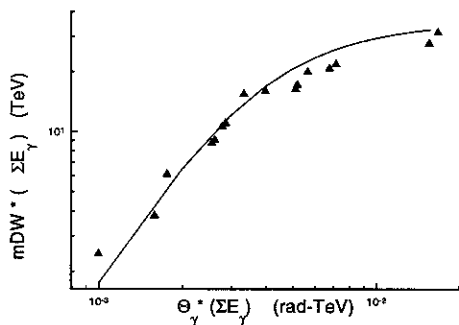


Figura 2.13: Exemplo de C-jato original, sem "limpeza"

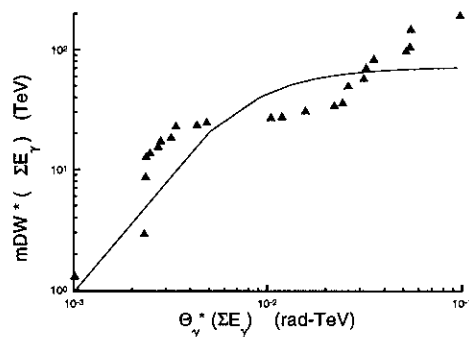


Figura 2.14: Exemplo de C-jato original aparentando duas interações

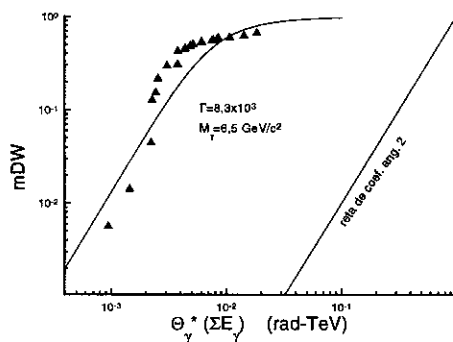


Figura 2.15: Exemplo de C-jato original, sem "limpeza"

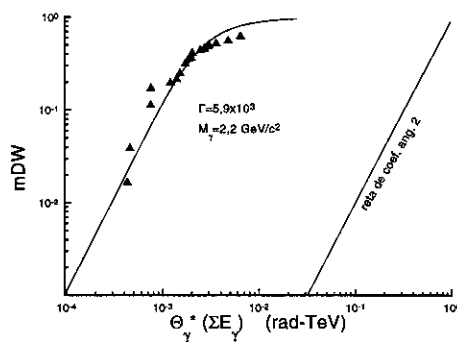


Figura 2.16: C-jato da figura anterior após "limpeza"

A maioria dos C-jatos originais apresentou o comportamento do tipo das figuras 2.14, 2.15 e 2.17, ou seja não se ajustam à curva analítica. Portanto, quase todos os 87 C-jatos sofreram o processo de "limpeza", por meio do algoritmo R. Desse total de 87 C-jatos originais, o processo de "limpeza" produziu 201 "eventos limpos", sendo 47% deles classificados no grupo com desvios de 10%, 46% no grupo de 20% e 6,5% classificados no grupo dos 40%. Foram refeitas as análises R e mDW desses "eventos limpos". Os dois

pares de figuras 2.15-2.16 e 2.17-2.18 são exemplos correspondentes à 2 C-jatos e mostram que o mDW desses C-jatos, se ajustam melhor com a curva analítica, após o processo de "limpeza".

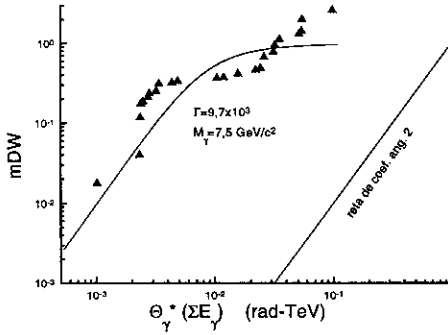


Figura 2.17: Exemplo de C-jato original, sem "limpeza"

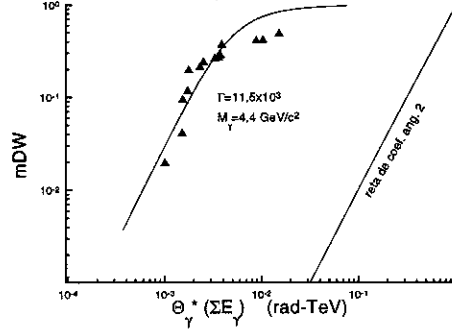


Figura 2.18: C-jato da figura anterior após "limpeza"

As figuras 2.19, 2.20 e 2.21 correlacionam os valores de mDW com os ângulos de emissão dos eventos "limpos", correspondendo aos grupos de 10%, 20% e 40%, respectivamente. Essas figuras mostram que os  $\gamma$ 's desses eventos "limpos" se concentram em duas regiões. Ajustando-se, pelo método dos mínimos quadrados, a expressão analítica do mDW aos  $\gamma$ 's de cada uma das regiões, foram determinados os valores médios do fator de Lorentz e da massa invariante. A tabela 2.3 condensa os valores obtidos.

	$\Gamma_{Mirim}$	$M_{Mirim\gamma} [GeV/c^2]$	$\Gamma_{A\check{C}u}$	$M_{A\check{C}u\gamma} [GeV/c^2]$
10%	$(6,9 \pm 0,8) \times 10^3$	$1,9 \pm 0,3$	$(2,7 \pm 0,5) \times 10^3$	$8,3 \pm 1,3$
20%	$(5,8 \pm 0,6) \times 10^3$	$1,2 \pm 0,3$	$(2,4 \pm 0,4) \times 10^3$	$8,4 \pm 1,3$
40%	$(5,2 \pm 1,1) \times 10^3$	$0,7 \pm 0,2$	$(3,5 \pm 0,6) \times 10^3$	$5,8 \pm 0,8$

Tabela 2.3:



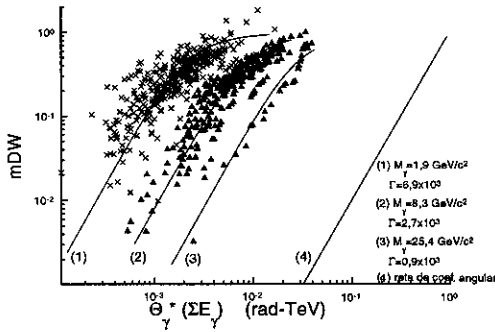


Figura 2.19: mDW dos eventos "limpos" com desvio de 10%

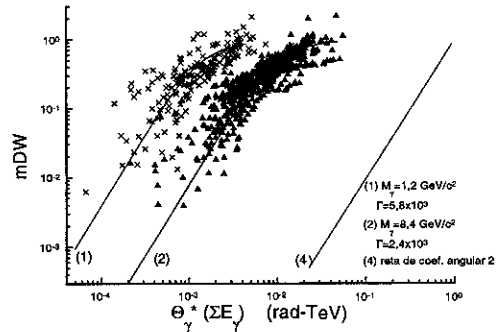
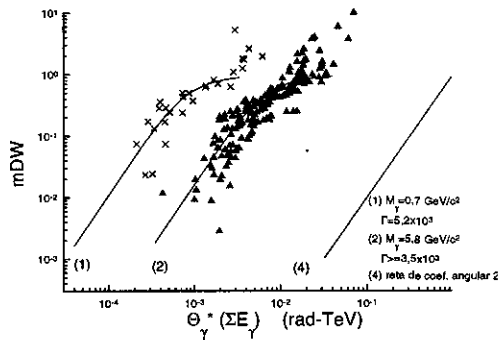


Figura 2.20: mDW dos eventos "limpos" com desvio de 20%

Figura 2.21: mDW dos eventos "limpos" com desvio de 40%



### 2.3.1 DISTRIBUIÇÃO DE DULLER-WALKER

N.M.Duller e W.D.Walker[8], analisando a distribuição angular das partículas secundárias emitidas em colisões nucleon-nucleon, utilizaram a relação abaixo, calculada sob a hipótese de emissão isotrópica das partículas, no sistema centro de massa (S.C.M.).

$$\frac{F(\theta)}{1 - F(\theta)} = (\Gamma \tan \theta)^2 \quad (2.10)$$

onde:

- a)  $F(\theta) = \frac{N(\leq\theta)}{N}$  é a fração de partículas emitidas num ângulo menor que  $\theta$ .  
 b)  $\Gamma$  é o fator de Lorentz.  
 c)  $\theta$  está relacionado com  $\theta^*$  (S.C.M.), através de  $\tan \theta \simeq \frac{1}{\Gamma} \tan \frac{\theta^*}{2}$ .

Os pares de figuras 2.22-2.23 e 2.24-2.25 são resultados de análise pelo método de Duller-Walker. Novamente se observa que os eventos, após o processo de "limpeza", se apresentam mais próximos da reta de coeficiente angular 2, indicativo de emissão isotrópica. O fator de Lorentz é determinado a partir do inverso do ângulo  $\theta_\gamma$ , correspondente ao ponto de ordenada  $\frac{F}{1-F} = 1$ , enquanto a massa invariante é calculada pela relação  $\Sigma E_\gamma = \Gamma M_\gamma$ .

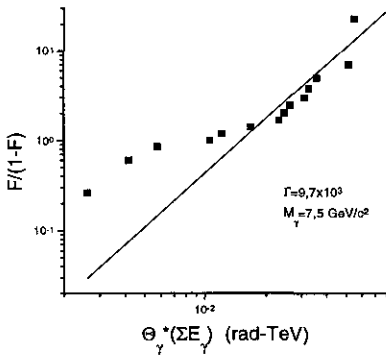


Figura 2.22: DW de C-jato antes da "limpeza"

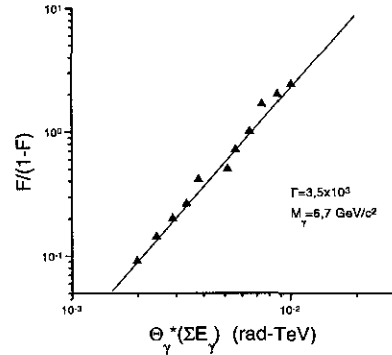


Figura 2.23: DW de C-jato após "limpeza"

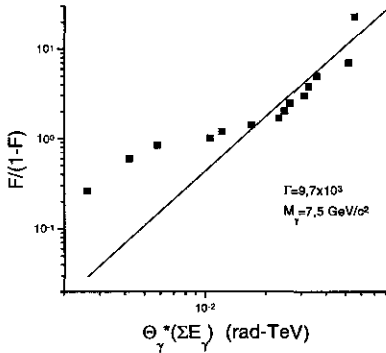


Figura 2.24: DW de C-jato antes da "limpeza"

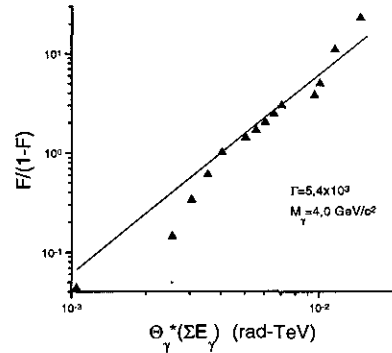


Figura 2.25: DW de C-jato após "limpeza"

Superpondo os gráficos das análises Duller-Walker, com os ângulos de emissão devidamente multiplicados pela energia total do evento correspondente, foram obtidas as figuras 2.26, 2.27 e 2.28, respectivamente para as amostras de 10%, 20% e 40%. A tabela 2.4 resume os valores médios obtidos dessas análises.

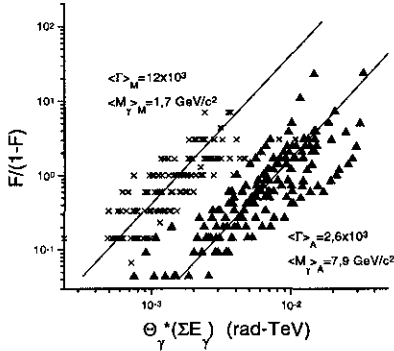


Figura 2.26: DW dos eventos "limpos" com desvio de 10%

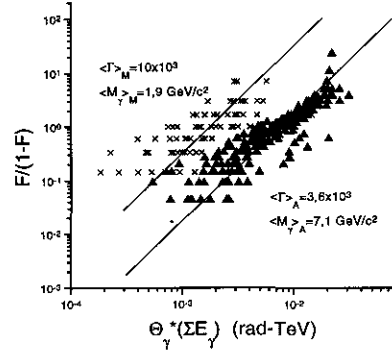
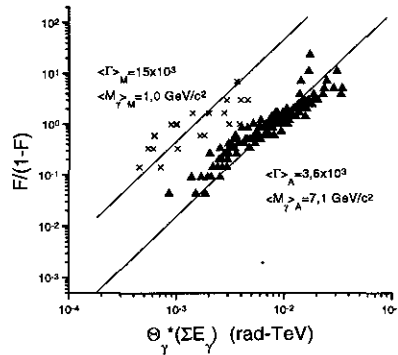


Figura 2.27: DW dos eventos "limpos" com desvio de 20%

Figura 2.28: DW dos eventos "limpos" com desvio de 40%



	$\Gamma_{Mirim}$	$M_{Mirim\gamma} [GeV/c^2]$	$\Gamma_{A\acute{c}u}$	$M_{A\acute{c}u\gamma} [GeV/c^2]$
10%	$(1,2 \pm 0,1) \times 10^4$	$1,7 \pm 0,2$	$(2,6 \pm 0,2) \times 10^3$	$7,9 \pm 1,3$
20%	$(1,0 \pm 0,1) \times 10^4$	$1,9 \pm 0,2$	$(3,6 \pm 0,6) \times 10^3$	$7,1 \pm 1,5$
40%	$(1,5 \pm 0,3) \times 10^4$	$1,0 \pm 0,2$	$(3,6 \pm 0,5) \times 10^3$	$7,1 \pm 1,4$

Tabela 2.4: Da análise Duller-Walker

Na determinação das massas invariantes  $M_\gamma$ , através dos histogramas de  $M_\gamma$  e através da correlação  $\sum E_\gamma \times \Gamma$  cada ponto das distribuições corresponde a um grupamento de  $\gamma$ 's, ou seja cada ponto corresponde à um C-jato, enquanto nas distribuições através de mDW e através do método de Duller-Walker a análise é realizada tomando individualmente os  $\gamma$ 's de cada evento. Portanto, a confiabilidade dessas análises deve ser maior. Na determinação das massas invariantes através do algoritmo mDW consideram-se todos os  $\gamma$ 's, enquanto no método de Duller-Walker não se pode considerar o  $\gamma$  de maior ângulo pois assim procedendo  $F=1$  e a razão  $\frac{F}{1-F} \rightarrow \infty$ . Então a análise através do algoritmo mDW pode ser melhor, já que nenhum  $\gamma$  é excluído, utilizando-se todos os  $\gamma$ 's observados.

## 2.4 DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA

### 2.4.1 DISTRIBUIÇÃO INTEGRAL

A energia é uma das grandezas diretamente mensuráveis, pelo método de contagem de traços e/ou pelo método de fotodensitometria. Para os  $\gamma$ 's individualizados de C-jatos o método de fotodensitometria não é aplicável devido à proximidade entre eles (da ordem de dezenas de micra). Portanto para os C-jatos foi utilizado o método de contagem de traços para a determinação da energia de cada um dos  $\gamma$ 's de todos os C-jatos. A distribuição integral de energia de todos os  $\gamma$ 's, normalizados por C-jato, após a classificação em eventos Mirim e Açú, são mostrados nas figuras 2.29, 2.30 e 2.31. Nelas foram ajustadas retas do tipo

$$N(> E_\gamma) \propto E_\gamma^{-\beta} \quad (2.11)$$

resultando para  $\beta$  os valores mostrados na tabela 2.5. Os valores tabelados aparentam resultados razoáveis, entretanto observando as figuras verifica-se que os ajustes não podem ser considerados, pois as retas passam por poucos pontos.

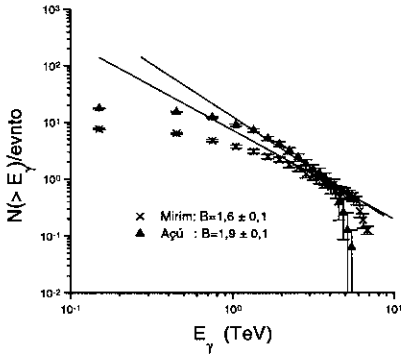


Figura 2.29: Distribuição integral de energia dos eventos "limpos" com desvio de 10%

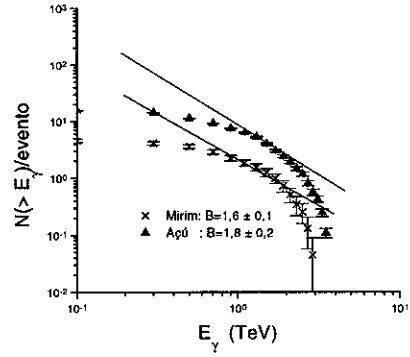
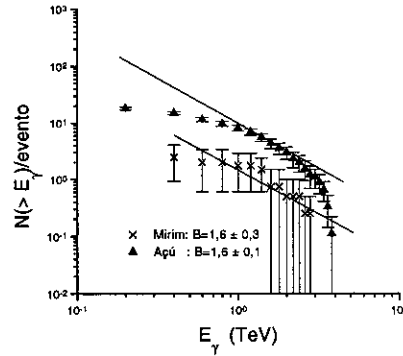


Figura 2.30: Distribuição integral de energia dos eventos "limpos" com desvio de 20%

Figura 2.31: Distribuição integral de energia dos eventos "limpos" com desvio de 40%



	<i>Mirim</i>	<i>Açú</i>
10%	$1,6 \pm 0,1$	$1,9 \pm 0,1$
20%	$1,6 \pm 0,1$	$1,8 \pm 0,2$
40%	$1,6 \pm 0,3$	$1,6 \pm 0,1$

Tabela 2.5: Expoente  $\beta$

## 2.4.2 DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA EM FORMA FRAACIONÁRIA

Das figuras anteriores resultou que o ajuste por função do tipo potência não é conveniente. Nas figuras 2.32, 2.33 e 2.34 foram testados ajustes com função do tipo exponencial para a distribuição integral da energia em forma fracionária, ou seja foram determinadas distribuições integrais para a grandeza  $f_\gamma$ . Essa grandeza é definida como a razão entre a energia do  $\gamma$  e a soma de energia de todos os  $\gamma$ 's do C-jato ao qual pertence o  $\gamma$  sob análise. A expressão analítica utilizada é:

$$F(> f_\gamma) = N_\gamma \exp(-f_\gamma/f_0) \quad (2.12)$$

sendo

- 1)  $N_\gamma$  a multiplicidade do C-jato
- 2)  $f_\gamma = E_\gamma / \Sigma E_\gamma$
- 3)  $f_0 = 1/N_\gamma$  onde  $f_0$  é obtido através do coeficiente angular

Utilizando essa expressão verifica-se que o ajuste é melhor e as multiplicidades obtidas, seja pela extrapolação da reta até  $f_\gamma = 0$ , seja pelo valor médio,  $f_0$  constam na tabela 2.6.

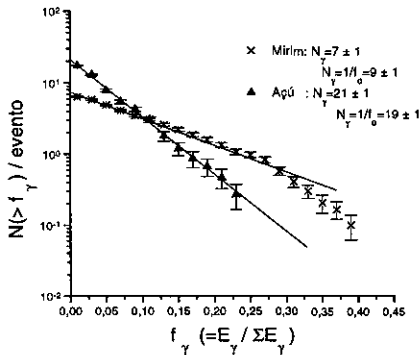


Figura 2.32: Distribuição integral de energia, em forma fracionária, dos eventos "limpos" com desvio de 10%

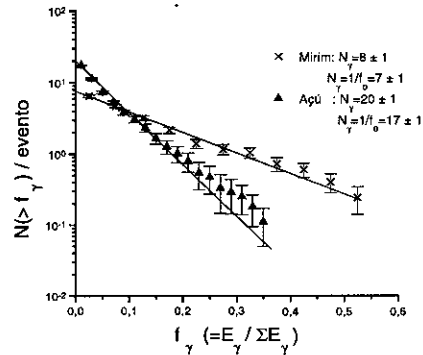
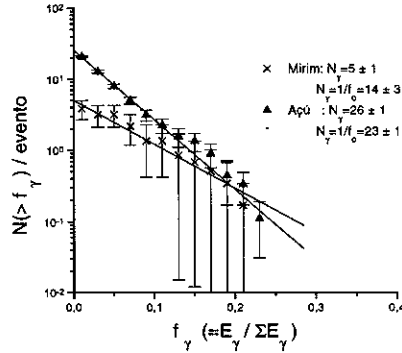


Figura 2.33: Distribuição integral de energia, em forma fracionária, dos eventos "limpos" com desvio de 20%

Figura 2.34: Distribuição integral de energia, em forma fracionária, dos eventos "limpos" com desvio de 40%



	$N_\gamma/\text{evento}$	$N_\gamma/\text{evento}$	$f_0$	$f_0$	$N_\gamma = 1/f_0$	$N_\gamma = 1/f_0$
	Mirim	Açú	Mirim	Açú	Mirim	Açú
10%	$7 \pm 1$	$21 \pm 1$	$0,12 \pm 0,02$	$0,05 \pm 0,01$	$9 \pm 1$	$19 \pm 1$
20%	$8 \pm 1$	$20 \pm 1$	$0,146 \pm 0,004$	$0,055 \pm 0,002$	$7 \pm 1$	$17 \pm 1$
40%	$5 \pm 1$	$26 \pm 1$	$0,07 \pm 0,06$	$0,047 \pm 0,001$	$14 \pm 3$	$23 \pm 1$

Tabela 2.6:

## 2.5 DISTRIBUIÇÃO DE MOMENTO TRANSVERSAL

Uma importante grandeza composta pela energia e ângulo de emissão é o momento transversal. Determina-se o momento transversal dos  $\gamma$ 's através da relação  $P_{t\gamma} = E_\gamma \text{sen}\theta_\gamma \simeq E_\gamma \theta_\gamma$ , pois o ângulo de emissão é pequeno. Sendo o momento transversal um invariante de Lorentz, através dessa grandeza procura-se caracterizar a interação.

As figuras 2.35, 2.36 e 2.37 mostram a distribuição integral de momento transversal dos  $\gamma$ 's para os C-jatos 'limpos' classificados nos 3 grupos, anteriormente mencionados. As curvas foram traçadas fazendo-se o melhor ajuste de uma curva do tipo exponencial:

$$F(> P_{t\gamma}) = N_\gamma \exp(-P_{t\gamma} / \langle P_{t\gamma} \rangle) \quad (2.13)$$

Nas figuras estão explicitadas a multiplicidade extrapolada e o momento trasversal médio, enquanto as tabelas 2.7 e 2.8 mostram esses resultados

obtidos pelo método de mínimos quadrados e pelo método de máxima verossimilhança, respectivamente.

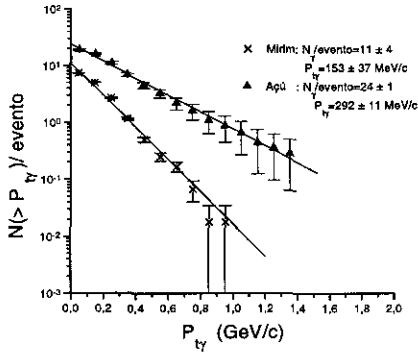


Figura 2.35: Distribuição integral de momento transversal dos eventos "limpos" com desvio de 10%

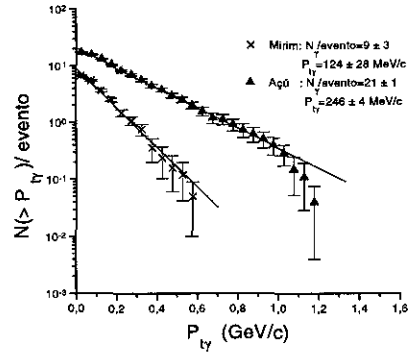
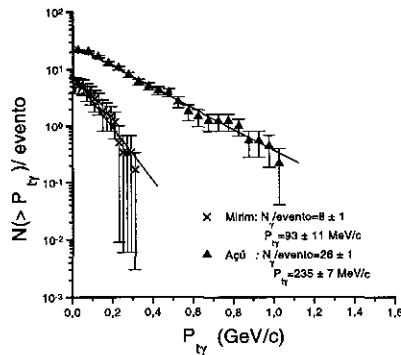


Figura 2.36: Distribuição integral de momento transversal dos eventos "limpos" com desvio de 20%

Figura 2.37: Distribuição integral de momento transversal dos eventos "limpos" com desvio de 40%





a) Pelo método de mínimos quadrados:

<i>Grupo</i>	$N_\gamma/\text{evento}$	$N_\gamma/\text{evento}$	$\langle Pt_\gamma \rangle \text{ MeV}/c$	$\langle Pt_\gamma \rangle \text{ MeV}/c$
	<i>Mirim</i>	<i>Açú</i>	<i>Mirim</i>	<i>Açú</i>
10%	$10 \pm 1$	$21 \pm 1$	$138 \pm 26$	$304 \pm 64$
20%	$11 \pm 1$	$20 \pm 2$	$141 \pm 30$	$257 \pm 62$
40%	$8 \pm 2$	$25 \pm 2$	$127 \pm 14$	$241 \pm 76$

Tabela 2.7:

b) Pelo método de máxima verossimilhança:

<i>Grupo</i>	$N_\gamma/\text{evento}$	$N_\gamma/\text{evento}$	$\langle Pt_\gamma \rangle \text{ MeV}/c$	$\langle Pt_\gamma \rangle \text{ MeV}/c$
	<i>Mirim</i>	<i>Açú</i>	<i>Mirim</i>	<i>Açú</i>
10%	$11 \pm 4$	$24 \pm 1$	$153 \pm 37$	$292 \pm 11$
20%	$9 \pm 3$	$21 \pm 1$	$124 \pm 28$	$246 \pm 4$
40%	$8 \pm 1$	$26 \pm 1$	$93 \pm 11$	$235 \pm 7$

Tabela 2.8:

As distribuições diferenciais dos momentos transversais,  $P_{t_\gamma}$ , são apresentadas nas figuras 2.38, 2.39 e 2.40, onde as curvas foram traçadas pelo método de mínimos quadrados, utilizando a expressão:

$$\frac{dF}{dP_{t_\gamma}} = \frac{N}{\langle P_{t_\gamma} \rangle} \exp(-P_{t_\gamma} / \langle P_{t_\gamma} \rangle) \quad (2.14)$$

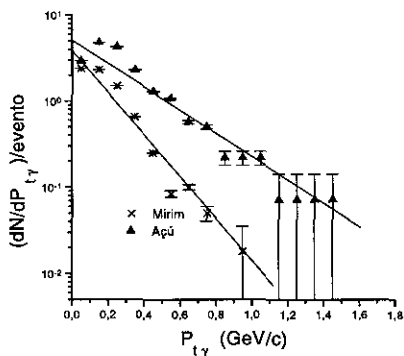


Figura 2.38: Distribuição diferencial de momento transversal dos eventos "limpos" com desvio de 10%

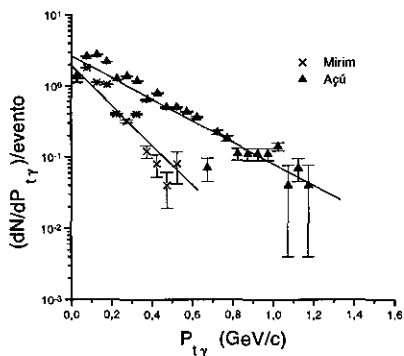
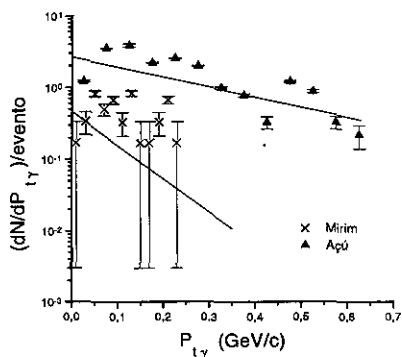


Figura 2.39: Distribuição diferencial de momento transversal dos eventos "limpos" com desvio de 20%

Figura 2.40: Distribuição diferencial de momento transversal dos eventos "limpos" com desvio de 40%



## Capítulo 3

# ANÁLISE DE EVENTOS C-JATOS ATRAVÉS DE $\pi^0$ 'S

Os  $\gamma$ 's observados pelas câmaras de fotoemulsões, através de suas respectivas cascatas eletromagnéticas, são provenientes de  $\pi^0$ 's, na sua maioria. Ao se utilizar a relação anteriormente mencionada,

$$H = \frac{\sqrt{E_{\gamma_1} E_{\gamma_2} r_{\gamma_1, \gamma_2}}}{m_{\pi^0} c^2} \quad (3.1)$$

se obtém não só a altura onde ocorreu a interação, bem como também a identificação do par de  $\gamma$ 's do decaimento do  $\pi^0$ , ou seja a identificação do próprio  $\pi^0$ . Portanto, as coordenadas de posição do  $\pi^0$  são determinadas pela expressão:

$$r_{\pi^0} = \frac{E_{\gamma_1} r_{\gamma_1} + E_{\gamma_2} r_{\gamma_2}}{E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2}} \quad (3.2)$$

onde os  $E_{\gamma_i}$  e os  $r_{\gamma_i}$  são, respectivamente, as energias e as coordenadas de posição dos 2  $\gamma$ 's que constituem o  $\pi^0$  de energia  $E_{\pi^0} = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2}$ .

Na determinação da altura da interação, ordenamos os  $\gamma$ 's em ordem decrescente de energia, da mesma forma que foi utilizada para efetuar a distribuição angular. Apesar do procedimento utilizado na determinação da altura não ser crucial como nas distribuições que envolvem ângulos, esse modus operandi facilita a sua estimativa porque é mais provável a observação

dos dois parceiros provenientes de um mesmo  $\pi^0$  quanto maior a energia, já que os dois últimos  $\gamma$ 's do ordenamento por energia decrescente geralmente tem energia próxima ao limiar de detecção. Como foi mencionado anteriormente, as interações em alvo localizado tem a condição de limitação da altura dentro do alvo e assim o par que resulta fora do intervalo de  $\pm 20\%$  do alvo pode ser descartado com falso e deve-se procurar outros parceiros. O valor adotado para o intervalo de altura está relacionado com o desvio estimado na determinação de energia, que é da ordem de 20%.

Para analisar os C-jatos através dos  $\pi^0$ 's foram elaboradas distribuições angulares, de energia e de momento transversal, utilizando a mesma sistemática adotada para os  $\gamma$ 's. Certamente os resultados obtidos através dos  $\pi^0$ 's podem ter viés, já que eles são obtidos com pares de  $\gamma$ 's o que limita a multiplicidade de  $\pi^0$ 's em no máximo metade dos pontos experimentais de  $\gamma$ 's. Em especial, a análise dos eventos Mirim fica mais prejudicada pois é em torno de 8 a multiplicidade média de  $\gamma$ 's desse tipo de evento. Além disso pode haver dúvidas quanto a identificação dos  $\pi^0$ 's, oriundos do acoplamento de 2  $\gamma$ 's, sob a condição de que o acoplamento deve resultar numa altura compatível com o alvo. Portanto os resultados obtidos nesse capítulo devem ser encarados como subsídios adicionais aos resultados obtidos através da análise de  $\gamma$ 's.

### 3.1 DISTRIBUIÇÃO ANGULAR

Além dos senões acima apontados, as análises da distribuição angular, seja pelo método do mDW, seja pelo método tradicional de Duller-Walker tem a ressalva de que as expressões analíticas utilizam as transformações de Lorentz para energia e momento que contém a massa da partícula sob exame. No caso dos  $\gamma$ 's a massa da partícula é zero enquanto para os  $\pi^0$ 's o termo correspondente à massa deve ser considerado. Mas por outro lado a massa de repouso é da ordem de  $10^8$  eV, muito menor que as energias envolvidas, da ordem de  $10^{12}$  eV a  $10^{13}$  eV para um único  $\gamma$ , o que nos permite fazer uma aproximação desprezando a contribuição da energia de repouso do  $\pi^0$  nas expressões das transformações de Lorentz correspondentes.

Assim, a distribuição angular dos  $\pi^0$ 's através do algoritmo mDW foi

realizada com as expressões análogas aos utilizados na análise por intermédio de  $\gamma$ 's, ou seja:

$$mDW(\theta_i) = \frac{1}{4M\Gamma} [\Sigma E_i + \frac{4}{\pi} \Sigma E_i(\Gamma\theta_i) + \Sigma E_i(\Gamma\theta_i)^2 + \frac{4}{3\pi} \Sigma E_i(\Gamma\theta_i)^3] \quad (3.3)$$

e a expressão analítica correspondente é também análoga ao dos  $\gamma$ 's. Nessas duas equações são utilizadas as energias e os ângulos dos  $\pi^0$ 's enquanto a massa invariante M e o fator de Lorentz  $\Gamma$ , obtidos por meio dessas expressões, deve resultar em valores próximos aos obtidos através da análise por  $\gamma$ 's.

$$mDW(\theta_i) = \frac{1}{M\Gamma} \left[ \frac{1}{(1 + \Gamma^2\theta^2)^2} \left[ \frac{(\Gamma\theta)^4}{2} - \frac{(\Gamma\theta)^3}{3\pi} + \frac{(\Gamma\theta)^2}{2} - \frac{\Gamma\theta}{\pi} \right] + \frac{1}{\pi} \arctg(\Gamma\theta) \right] \quad (3.4)$$

As figuras 3.1, 3.2 e 3.3 mostram os resultados das análises para as distribuições angulares dos eventos correspondentes aos 3 grupos de amostras, anteriormente classificadas. A reta de inclinação 2 serve para efeito de comparação com as curvas analíticas, as quais apresentam este comportamento característico de emissão isotrópica, para ângulos pequenos. Fazendo-se o ajuste das curvas analíticas aos pontos experimentais, novamente pelo método de mínimos quadrados, foram obtidos os valores médios constantes nas figuras e na tabela 3.1. As figuras 3.2 e 3.3 apresentam 2 curvas experimentais, enquanto na figura 3.1, correspondente ao grupo dos 10%, estão traçadas 3 curvas, indicando um possível estado intermediário Guaçú. Devido à essa aparente existência somente nessa figura, omitimos esse resultado da tabela e das conclusões gerais deste trabalho.

Os valores médios aqui obtidos são concordantes com os anteriormente obtidos, através da análise de  $\gamma$ 's, principalmente com o uso do algoritmo mDW, o que serve para justificar o processo adotado na identificação de  $\pi^0$ 's. O caráter isotrópico de emissão de partículas observado no estado intermediário Açú também corrobora essa justificativa. Para o estado intermediário Mirim o caráter isotrópico é inconclusivo, já que esse estado decai em poucos  $\pi^0$ 's, o que impede o uso confiável do método de ajuste de mínimos quadrados, método baseado em estatística de muitos pontos. Pelo menos nas figuras 3.1 e 3.2 poder-se-ia tentar método do tipo máxima verossimilhança, adequado para estatística de poucos pontos. Entretanto como a figura 3.3

apresenta pontos bastante discrepantes em relação à curva prevista, a análise para o estado intermediário Mirim não poderia ser feita para as 3 categorias e assim restringiu-se a análise de isotropia somente para a efetuada através de  $\gamma$ 's.

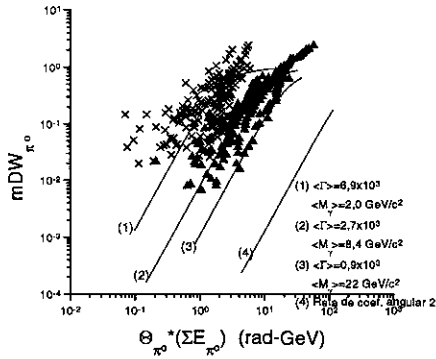


Figura 3.1: mDW dos eventos "limpos" com desvio de 10%

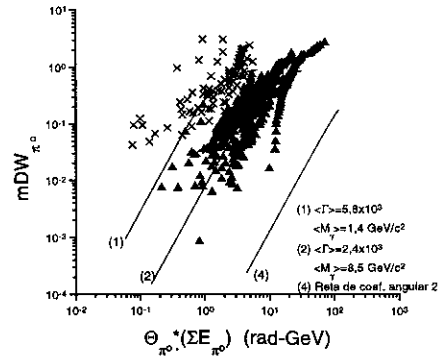
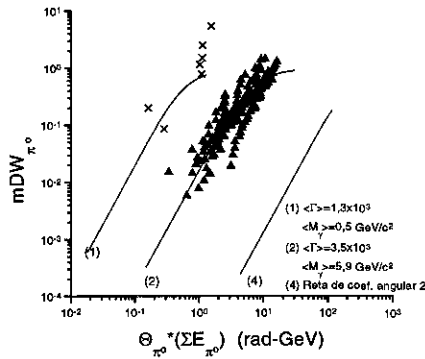


Figura 3.2: mDW dos eventos "limpos" com desvio de 20%

Figura 3.3: mDW dos eventos "limpos" com desvio de 40%



	$\Gamma$	$M_\gamma(\text{GeV}/c^2)$	$\Gamma$	$M_\gamma(\text{GeV}/c^2)$
	<i>Mirim</i>	<i>Mirim</i>	<i>Açú</i>	<i>Açú</i>
10%	$(6,9 \pm 0,6) \times 10^3$	$2,0 \pm 0,3$	$(2,7 \pm 0,4) \times 10^3$	$8,4 \pm 1,5$
20%	$(5,8 \pm 1,1) \times 10^3$	$1,4 \pm 0,2$	$(2,4 \pm 0,5) \times 10^3$	$8,5 \pm 1,1$
40%	$(1,3 \pm 0,3) \times 10^3$	$0,5 \pm 0,1$	$(3,5 \pm 0,7) \times 10^3$	$5,9 \pm 0,9$

Tabela 3.1:

## 3.2 DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA

As distribuições integrais de energia fracionária são apresentadas nas figuras 3.4, 3.5 e 3.6, correspondentes ao grupo dos 10%, 20% e 40%, enquanto as distribuições diferenciais para os mesmos grupos constam nas figuras 3.7, 3.8 e 3.9, respectivamente. O ajuste foi efetuado utilizando função do tipo

$$F(> f_{\pi^0}) = N_{\pi^0} \exp(-f_{\pi^0}/f_{0\pi^0}) \quad (3.5)$$

onde  $f_{\pi^0} = E_{\pi^0}/\Sigma E_\gamma$  e  $f_{0\pi^0} = 1/N_{0\pi^0}$ , obtendo-se os valores da multiplicidade média de  $\pi^0$ 's indicados nas figuras 3.4, 3.5, 3.6 e condensados na tabela 3.2.

	$N_{\pi^0}/\text{evento}$	$N_{\pi^0}/\text{evento}$
	<i>Mirim</i>	<i>Açú</i>
10%	$4 \pm 1$	$14 \pm 1$
20%	$4 \pm 1$	$11 \pm 1$
40%	$2 \pm 1$	$17 \pm 1$

Tabela 3.2:

Observa-se que as multiplicidades médias de  $\pi^0$ 's são compatíveis com as de  $\gamma$ 's e que o ajuste da curva empírica às distribuições integrais é melhor para o estado intermediário Açú, enquanto nas distribuições diferenciais é difícil imaginar um ajuste minimamente razoável. A indeterminação das curvas empíricas nessas distribuições é decorrência da baixa estatística, com as conseqüentes flutuações, flutuações bastante minoradas quando da determinação das distribuições integrais, como se pode visualizar nas figuras correspondentes.

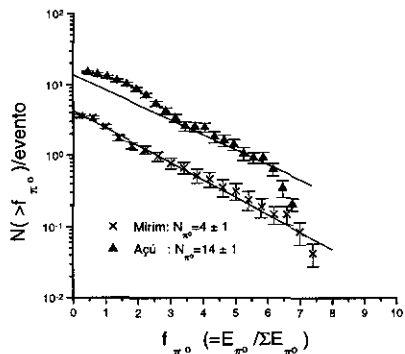


Figura 3.4: Distribuição integral de energia, em forma fracionária, dos eventos "limpos" com desvio de 10%

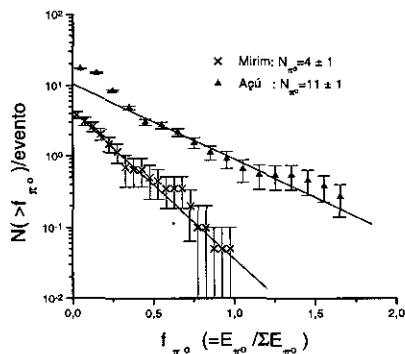
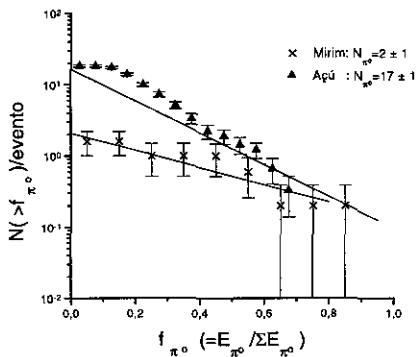


Figura 3.5: Distribuição integral de energia, em forma fracionária, dos eventos "limpos" com desvio de 20%

Figura 3.6: Distribuição integral de energia, em forma fracionária, dos eventos "limpos" com desvio de 40%





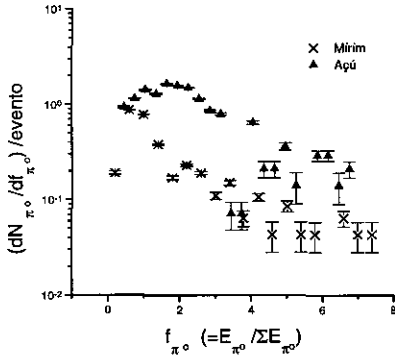


Figura 3.7: Distribuição diferencial de energia dos eventos "limpos" com desvio de 10%

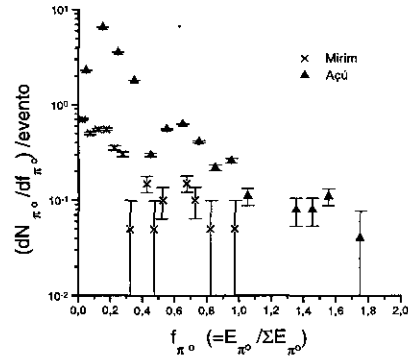
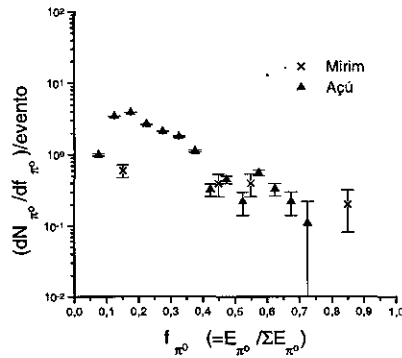


Figura 3.8: Distribuição diferencial de energia dos eventos "limpos" com desvio de 20%

Figura 3.9: Distribuição diferencial de energia dos eventos "limpos" com desvio de 40%



### 3.3 DISTRIBUIÇÃO DE MOMENTO TRANSVERSAL

Os  $\pi^0$ 's também apresentam pequenos ângulos de emissão de maneira semelhante aos  $\gamma$ 's, o que nos permite calcular o seu momento transversal utilizando a expressão  $P_{t_{\pi^0}} \simeq E_{\pi^0} \theta_{\pi^0}$ . Entretanto, essa grandeza aplicada aos  $\pi^0$ 's deve ser analisada com o devido cuidado quando da comparação com a equivalente dos  $\gamma$ 's. Isso porque na determinação do momento de cada um dos  $\pi^0$ 's pode existir um viés devido à incorreta identificação dos mesmos além dos desvios experimentais de medida.

As distribuições integrais dos momentos transversais, para os C-jatos classificados nos 3 grupos, constam nas figuras 3.10, 3.11 e 3.12. As correspondentes distribuições diferenciais são apresentadas nas figuras 3.13, 3.14 e 3.15, sendo que os valores médios para os dois estados intermediários estão explicitados tanto nas figuras 3.10, 3.11 e 3.12, bem como na tabela 3.3.

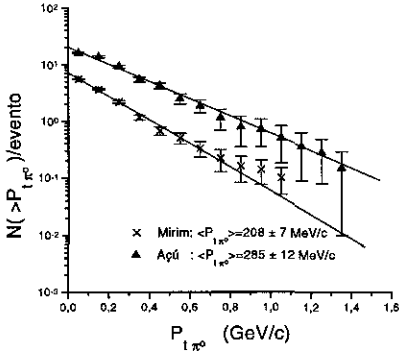


Figura 3.10: Distribuição integral de momento transversal dos eventos "limpos" com desvio de 10%

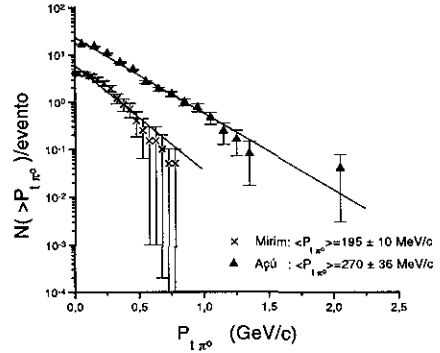
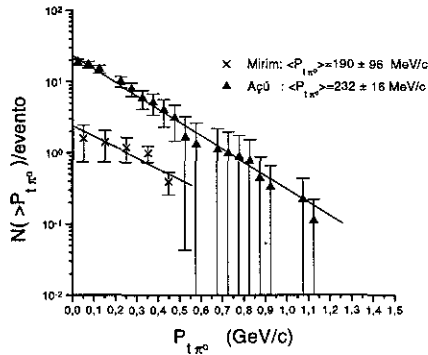


Figura 3.11: Distribuição integral de momento transversal dos eventos "limpos" com desvio de 20%

Figura 3.12: Distribuição integral de momento transversal dos eventos "limpos" com desvio de 40%



Os valores médios foram obtidos ajustando-se um função do tipo exponencial, notando-se um bom ajuste aos pontos experimentais para os dois estados intermediários apesar da escassez de pontos para o estado Mirim.

$$N_{\pi^0}(> P_{t\pi^0}) = N_0 \exp(-P_{t\pi^0} / \langle P_{t\pi^0} \rangle) \quad (3.6)$$

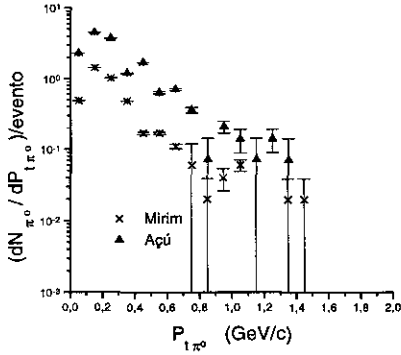


Figura 3.13: Distribuição diferencial de momento transversal dos eventos "limpos" com desvio de 10%

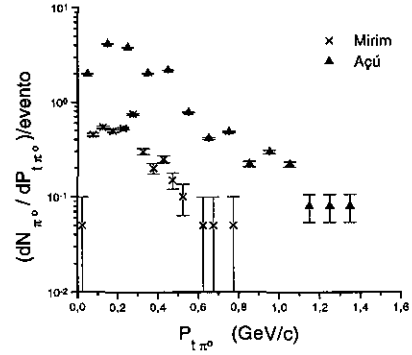
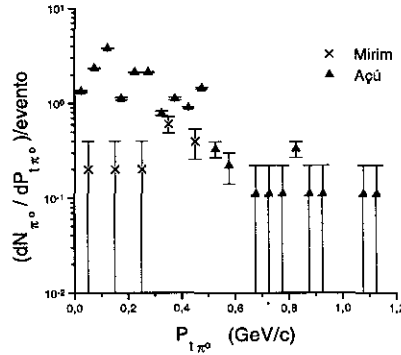


Figura 3.14: Distribuição diferencial de momento transversal dos eventos "limpos" com desvio de 20%

Figura 3.15: Distribuição diferencial de momento transversal dos eventos "limpos" com desvio de 40%



	$\langle P_{t\pi^0} \rangle \text{ MeV}/c$	$\langle P_{t\pi^0} \rangle \text{ MeV}/c$
	<i>Mirim</i>	<i>Açú</i>
10%	$206 \pm 44$	$289 \pm 58$
20%	$153 \pm 25$	$283 \pm 58$
40%	$190 \pm 38$	$249 \pm 41$

Tabela 3.3:

# Capítulo 4

## CONCLUSÕES

A tabela 4.1 abaixo resume os resultados obtidos com os 87 C-jatos submetidos ao processo de "limpeza" e classificados nos 3 grupos. Como todos esses

Grupo/origem	MIRIM			AÇÚ		
	10%	20%	40%	10%	20%	40%
<i>Massa invariante - <math>M_\gamma</math> (GeV/c<sup>2</sup>)</i>						
Tabela 2.1	2,4 ± 1,1	2,2 ± 0,9		5,4 ± 1,6	4,4 ± 1,4	5,7 ± 2,3
Tabela 2.2	2,1 ± 0,8	1,7 ± 0,9	1,5 ± 0,3	9,4 ± 2,3	7,4 ± 2,2	6,8 ± 1,5
Tabela 2.3	1,9 ± 0,3	1,2 ± 0,3	0,7 ± 0,2	8,3 ± 1,3	8,4 ± 1,3	5,8 ± 0,8
Tabela 2.4	1,7 ± 0,2	1,9 ± 0,2	1,0 ± 0,2	7,9 ± 1,3	7,1 ± 1,5	7,1 ± 1,4
Tabela 3.1	2,0 ± 0,3	1,4 ± 0,2	0,5 ± 0,1	8,4 ± 1,5	8,5 ± 1,1	5,9 ± 0,9
<i>Fator de Lorentz - <math>\Gamma</math> (×10<sup>3</sup>)</i>						
Tabela 2.3	6,9 ± 0,8	5,8 ± 0,6	5,2 ± 1,1	2,7 ± 0,5	2,4 ± 0,4	3,5 ± 0,6
Tabela 2.4	12 ± 1	10 ± 1	15 ± 3	2,6 ± 0,2	3,6 ± 0,6	3,6 ± 0,5
Tabela 3.1	6,9 ± 0,6	5,8 ± 1,1	1,3 ± 0,3	2,7 ± 0,4	2,4 ± 0,5	3,5 ± 0,7
<i>Multiplicidade de <math>\gamma</math>'s - <math>N_\gamma</math></i>						
Tabela 2.6	7 ± 1	8 ± 1	5 ± 1	21 ± 1	20 ± 1	26 ± 1
Tabela 2.6	9 ± 1	7 ± 1	14 ± 3	19 ± 1	17 ± 1	23 ± 1
Tabela 2.7	10 ± 1	11 ± 1	8 ± 2	21 ± 1	20 ± 2	25 ± 2
Tabela 2.8	11 ± 4	9 ± 3	8 ± 1	24 ± 1	21 ± 1	26 ± 1
<i>Multiplicidade em <math>\pi^0</math> - <math>N_{\pi^0}</math></i>						
Tabela 3.2	4 ± 1	4 ± 1	2 ± 1	14 ± 1	11 ± 1	17 ± 1
<i>Momento transversal de <math>\gamma</math>'s - <math>P_{t_\gamma}</math> (MeV/c)</i>						
Tabela 2.7	138 ± 26	141 ± 30	127 ± 14	304 ± 64	257 ± 62	241 ± 76
Tabela 2.8	153 ± 37	124 ± 28	93 ± 11	292 ± 11	246 ± 4	235 ± 7
<i>Momento transversal de <math>\pi^0</math> - <math>P_{t_{\pi^0}}</math> (MeV/c)</i>						
Tabela 3.3	206 ± 44	153 ± 25	190 ± 38	289 ± 58	283 ± 58	249 ± 41
Figuras 3.10,3.11e3.12	208 ± 7	195 ± 10	190 ± 96	285 ± 12	270 ± 36	232 ± 16

Tabela 4.1: Resumo dos resultados obtidos nas diversas análises

resultados são consequência de análises com parâmetros diversos e interdependentes, a análise estatística para a obtenção dos melhores valores e seus respectivos desvios não é trivial.

As massas invariantes resultantes das análises, seja através de  $\gamma$ 's, seja através de  $\pi^0$ 's estão nos intervalos (0,5 - 2,4) GeV/c<sup>2</sup> e (4,4 - 9,4) GeV/c<sup>2</sup> para os C-jatos Mirim e Açú, respectivamente. Os resultados obtidos pelas análises de  $\gamma$ 's e de  $\pi^0$ 's deveriam ser semelhantes pois os  $\gamma$ 's são provenientes do decaimento  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ , preponderantemente. A multiplicidade em  $\gamma$ 's resultou em intervalos (5 - 14)  $\gamma$ 's/evento e (17 - 26)  $\gamma$ 's/evento correspondendo, nesta ordem, aos C-jatos Mirim e Açú, enquanto a multiplicidade em  $\pi^0$ 's está entre (2 - 4)  $\pi^0$ 's/evento e (11 - 17)  $\pi^0$ 's/evento. O momento transversal médio dos  $\gamma$ 's foi estimado em (93 - 153) MeV/c e (235 - 304) MeV/c para os C-jatos Mirim e Açú, respectivamente. A análise dos C-jatos através de  $\pi^0$ 's, resultou em (153 - 208) MeV/c e (232 - 289) MeV/c, respectivamente para os C-jatos Mirim e Açú.

Nas tabelas 4.2 e 4.3 seguintes utilizamos os valores extremos obtidos, especificando-os em forma de intervalo. É interessante notar que tomando os valores 'centrais' dos intervalos de multiplicidade e de momento transversal de  $\gamma$ 's e estimarmos a massa invariante (isotrópica) através da expressão

$$M_\gamma = \frac{4}{\pi} N_\gamma P_{t_\gamma} \quad (4.1)$$

encontramos para  $M_\gamma$  de C-jatos Mirim e Açú os valores 1,5 GeV/c<sup>2</sup> e 7,4 GeV/c<sup>2</sup>, comparáveis com os valores 'centrais' do intervalo de massa invariante, 1,6 GeV/c<sup>2</sup> e 6,9 GeV/c<sup>2</sup>. Dos valores 'centrais' obtidos somente pelas análises de multiplicidade e de momento transversal de  $\pi^0$ 's obtemos os valores 1,2 GeV/c<sup>2</sup> e 7,1 GeV/c<sup>2</sup> respectivamente para C-jatos Mirim e Açú. Esses valores foram obtidos utilizando uma expressão semelhante, acrescido da massa de repouso do  $\pi^0$ , ou seja adicionando  $M_{\pi^0} = 140$  MeV/c<sup>2</sup> na expressão

$$M_\gamma = \frac{4}{\pi} N_{\pi^0} [P_{t_{\pi^0}} + M_{\pi^0}] \quad (4.2)$$

e também são consistentes com os valores obtidos com os valores 'centrais' do intervalo de massas invariantes, 1,3 GeV/c<sup>2</sup> e 7,2 GeV/c<sup>2</sup>. Portanto as massas

invariantes 'isotrópicas' resultam em torno de  $1,4 \text{ GeV}/c^2$  e  $7,3 \text{ GeV}/c^2$ .

	$M_\gamma(\text{GeV}/c^2)$	$N_\gamma$	$P_{t_\gamma}(\text{MeV}/c)$	$N_{\pi^0}$	$P_{t_{\pi^0}}(\text{MeV}/c)$
<i>tese</i>	0,5 – 2,4	5 – 14	93 – 153	2 – 4	153 – 208
[15]	$1,5 \pm 0,7$	7 – 8	154 – 162		
[2]	$1,3 \pm 0,4$	$8 \pm 1$	$120 \pm 7$		
[17]	1,3	$(2 - 3)^*$	140	$\simeq 6$	
[18]	$1,4 \pm 0,1$	8	$172 \pm 12$		262
[19]	$1,3 \pm 0,4$	$8 \pm 1$	$148 \pm 4$		$200 \pm 17$

Tabela 4.2: Comparação dos resultados para C-jatos Mirim com os de outros autores

	$M_\gamma(\text{GeV}/c^2)$	$N_\gamma$	$P_{t_\gamma}(\text{MeV}/c)$	$N_{\pi^0}$	$P_{t_{\pi^0}}(\text{MeV}/c)$
<i>tese</i>	4,4 – 9,4	17 – 26	235 – 304	11 – 17	232 – 289
[15]	$5,3 \pm 0,9$	21	186 – 218		
[2]	$8 \pm 2$	$30 \pm 8$	$280 \pm 18$		
[17]	5 – 10	$(6 - 8)^*$	220		
[18]	6	20	$253 \pm 27$		392
[19]	7,7	20	$303 \pm 20$		

Tabela 4.3: Comparação dos resultados para C-jatos Açú com os de outros autores

Os resultados obtidos na tese são provenientes da mesma amostra de C-jatos analisados anteriormente nas referências [15] e [17]. As diferenças entre a tese e a referência [15] são de que nesta não foram feitas a classificação nas 3 categorias, a análise via método mDW, a "limpeza" dos eventos foi feita segundo as preferências pessoais e nem tampouco foi feita a análise através de  $\pi^0$ 's. Com relação à referência [17] o uso do processo de "limpeza" na tese é o diferenciador das duas análises. Quanto à multiplicidade em  $\gamma$ 's desta referência [17] os valores tabelados e destacados (\*) são as densidades por intervalo de rapidez, ou seja

$$N_\gamma = \frac{N_{\gamma_{obs}} - 1}{|\ln \theta_2 - \ln \theta_{max}|} \quad (4.3)$$

sendo  $N_{\gamma_{obs}}$  a multiplicidade experimentalmente observada,  $\theta_2$  o segundo menor ângulo de emissão do  $\gamma$  significando a supressão do  $\gamma$  de menor ângulo. O procedimento adotado visa a diminuição da flutuação decorrente do método de determinação do ângulo, pois esse  $\gamma$  tem grande influência na determinação do centro dos momentos. Os intervalos (2 - 3) e (6 - 8) da densidade por intervalo de rapidez, estimadas das análises efetuadas nessa referência [17] para C-jatos Mirim e Açú respectivamente, são compatíveis com as multiplicidades  $\simeq 10$  e  $\simeq 27$ . Apesar das análises efetuadas nas outras referências [2], [18] e [19] terem sido feitas com amostra de C-jatos significativamente menor, o que se verifica é que todos os resultados obtidos na tese são compatíveis com os de todas as referências citadas, independente do tamanho da amostra, do uso ou não uso de critérios de "limpeza", critérios que poderiam ser considerados subjetivos apesar de serem critérios razoáveis. Em resumo, a "limpeza" não adulterou os resultados finais.

A distribuição angular dos C-jatos originais (figura 2.12), realizada através do algoritmo mDW mostra uma dependência linear, mas não com coeficiente angular 2. Efetuando-se a análise individual desses C-jatos verificou-se que alguns deles são compatíveis com emissão isotrópica (figura 2.13). Outros (figuras 2.16 e 2.18) apresentam consistência com emissão isotrópica, após sofrerem o processo de "limpeza". Sendo que muitos dos C-jatos originais apresentam valores acima de 1 na análise da correlação  $R(\theta_\gamma) - \theta_\gamma$  (figuras 2.1, 2.2 e 2.3), pelo menos estes devem ser limpos, pois é razoável imaginá-los como resultado de superposição de múltiplas interações e/ou 'bolas de fogo'. Chamando de C-jatos 'isotrópicos' todos esses C-jatos, quer sejam os originais, quer sejam aqueles que sofreram processo de "limpeza", foram obtidas as figuras 2.19, 2.20 e 2.21 interpretados como a existência de 2 tipos de C-jatos, Mirim e Açú com as características apresentadas nas 3 tabelas deste capítulo. Observa-se que a análise da distribuição angular realizada no presente trabalho, através do algoritmo mDW, apresenta a vantagem de não precisar do conhecimento prévio da multiplicidade dos eventos analisados, enquanto que a distribuição angular pelo método tradicional de Duller-Walker além de precisar desse conhecimento não permite testar as duas grandezas  $\theta$  e  $E$ , simultaneamente.

A conclusão geral desse trabalho é de que a consistência dos resultados obtidos com os de outros autores parece indicar que o processo de "lim-

peza”, derivado da hipótese de isotropia na distribuição dos secundários provenientes do decaimento, não resultou em resultados incompatíveis e que a auto consistência dos resultados das várias distribuições, angular, de energia, de momento transversal e de mDW dos C-jatos ‘isotrópicos’ legitimam o processo de análise adotado. Também se conclui, observando os pontos da correlação  $mDW(\theta_i) - \theta_i$ , que os pontos correspondentes aos C-jatos Açú estão mais concentrados do que os pontos dos C-jatos Mirim, indicando a possível formação desses 2 estados intermediários com as características aqui determinadas.



# Apêndice A

## CÁLCULOS DOS ALGORITMOS

Visando a determinação de  $\Gamma$  = fator de Lorentz e  $M_\gamma$  = massa invariante do conjunto de  $\gamma$ 's secundários de colisões hadrônicas induzidas por partículas da Radiação Cósmica, T.Shibata [16], [2] elaborou dois algoritmos,  $\Sigma E_\gamma$  e  $\Sigma P_{t_\gamma}$  em função do ângulo de emissão dos  $\gamma$ 's. Utilizando a mesma sistemática de cálculo [20] foram determinados outros 2 momentos, ou seja  $\Sigma E_\gamma \text{sen}^2 \theta_\gamma$  e  $\Sigma E_\gamma \text{sen}^3 \theta_\gamma$ . Todos os momentos foram calculados utilizando uma função densidade de probabilidade, no S.C.M.(sistema centro de massa), do tipo

$$dN = \frac{1}{4\pi} g(E^*) dE^* d\Omega^* \quad (\text{A.1})$$

Utilizando a hipótese da emissão isotrópica dos secundários esta se transforma na expressão

$$dN = -\frac{1}{2} g(E^*) dE^* d(\cos \theta^*) \quad (\text{A.2})$$

no S.C.M., e a distribuição energética  $g(E^*)$  deve satisfazer as condições

$$\int_0^\infty g(E^*) dE^* = N_\gamma \quad (\text{A.3})$$

$$\int_0^\infty E^* g(E^*) dE^* = M_\gamma \quad (\text{A.4})$$

No S.L.(sistema laboratório) a expressão acima fica da forma,

$$dN = -\frac{1}{2}h(E, \theta)dEd(\cos \theta) \quad (\text{A.5})$$

sendo  $(E, \theta)$  a distribuição conjunta de energia e de ângulo, os quais estão relacionados com as correspondentes grandezas no S.C.M. através de

$$E = \Gamma E^*(1 + \beta \cos \theta^*) \simeq \Gamma E^*(1 + \cos \theta^*) \quad (\text{A.6})$$

$$\tan \theta = \frac{P^* \text{sen} \theta^*}{\Gamma(P^* \cos \theta^* + \beta E^*)} \simeq \frac{1}{\Gamma} \tan \frac{\theta^*}{2} \quad (\text{A.7})$$

onde as aproximações de  $\beta = 1$  e  $P^* = E^*$  são válidas, quando utilizamos essas transformações para  $\gamma$ 's.

Assim o n-ésimo momento  $\Sigma_i E_i \text{sen}^n \theta_i \simeq \Sigma_i E_i \theta_i^n$  tem a expressão geral

$$\Sigma_i E_i \theta_i^n \simeq \frac{M}{2\Gamma^{(n-1)}} \int_0^{\frac{1-\Gamma^2\theta^2}{1+\Gamma^2\theta^2}} \frac{\text{sen}^{(n+1)}}{(1 + \cos \theta^*)^{(n-1)}} d\theta^* \quad (\text{A.8})$$

e os 4 primeiros momenta resultam em:

$$\Sigma_i E_i = \Gamma M \left[ 1 - \frac{1}{(1 + \Gamma^2 \theta^2)^2} \right] \quad (\text{A.9})$$

$$\Sigma_i E_i \theta_i = \frac{M}{2} \left[ \arctan(\Gamma \theta) - \frac{(1 - \Gamma^2 \theta^2) \Gamma \theta}{(1 + \Gamma^2 \theta^2)^2} \right] \quad (\text{A.10})$$

$$\Sigma_i E_i \theta_i^2 = \frac{M}{\Gamma} \frac{\Gamma^4 \theta^4}{(1 + \Gamma^2 \theta^2)^2} \quad (\text{A.11})$$

$$\Sigma_i E_i \theta_i^3 = \frac{M}{2\Gamma^2} \left[ 3 \text{arctg}(\Gamma \theta) - \frac{3 + 5\Gamma^2 \theta^2}{(1 + \Gamma^2 \theta^2)^2} \Gamma \theta \right] \quad (\text{A.12})$$

## A.1 CÁLCULO DE R

Sendo a expressão relativista para uma partícula com energia E, momento linear P e massa invariante M, do tipo

$$E^2 = P^2 + M^2 \quad (\text{A.13})$$

determinamos que a massa invariante do conjunto de  $i$  partículas tem a forma

$$M^2 \simeq (\Sigma_i E_i)(\Sigma_i E_i \theta_i^2) \quad (\text{A.14})$$

e por conseguinte a multiplicação do momento 0 ( $n = 0$ ) com o momento 2, deve resultar numa grandeza proporcional à massa invariante do conjunto

$$\lim_{\Gamma\theta \rightarrow \infty} (\Sigma_i E_i)(\Sigma_i E_i \theta_i^2) = \lim_{\Gamma\theta \rightarrow \infty} M^2 \frac{(2 + \Gamma^2 \theta^2) \Gamma^6 \theta^6}{(1 + \Gamma^2 \theta^2)^4} = M^2$$

E como o momento 1 também é proporcional à massa invariante  $M$ , pois

$$\lim_{\Gamma\theta \rightarrow \infty} \Sigma_i E_i \theta_i = \lim_{\Gamma\theta \rightarrow \infty} \frac{M}{2} \left[ \arctan(\Gamma\theta) - \frac{(1 - \Gamma^2 \theta^2) \Gamma \theta}{(1 + \Gamma^2 \theta^2)^2} \right] = \frac{\pi M}{4}$$

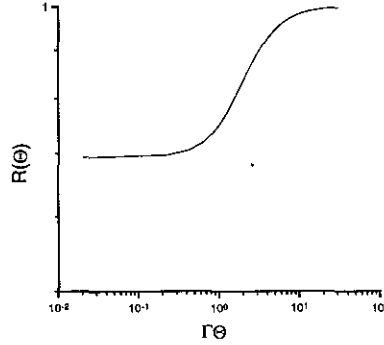
a razão  $R$  definida como

$$R(\theta_i) = \frac{(\Sigma_i E_i)(\Sigma_i E_i \theta_i^2)}{(\frac{4}{\pi} \Sigma_i P_{ti})^2} \approx \frac{(\Sigma_i E_i)(\Sigma_i E_i \theta_i^2)}{(\frac{4}{\pi} \Sigma_i E_i \theta_i)^2} \quad (\text{A.15})$$

tem como sua expressão analítica que tende a 1 para  $\Gamma\theta \rightarrow \infty$  (figura 53),

$$R(\theta_i) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{(\Gamma^2 \theta^2 + 2) \Gamma^6 \theta^6}{[(1 + \Gamma^2 \theta^2)^2 \arctan \Gamma\theta - (1 - \Gamma^2 \theta^2) \Gamma \theta]^2} \quad (\text{A.16})$$

Figura A.1: Correlação  $R - \Gamma\theta$



## A.2 CÁLCULO DE mDW

Todos os 4 momentos calculados tendem assintoticamente a um valor constante para  $\Gamma\theta \rightarrow \infty$ . Assim,

$$\lim_{\Gamma\theta \rightarrow \infty} \Sigma_i E_i = \lim_{\Gamma\theta \rightarrow \infty} \Gamma M \left[ 1 - \frac{1}{(1 + \Gamma^2 \theta^2)^2} \right] = \Gamma M$$

$$\lim_{\Gamma\theta \rightarrow \infty} \Sigma_i E_i \theta_i = \lim_{\Gamma\theta \rightarrow \infty} \frac{M}{2} \left[ \arctan(\Gamma\theta) - \frac{(1 - \Gamma^2 \theta^2) \Gamma\theta}{(1 + \Gamma^2 \theta^2)^2} \right] = \frac{\pi M}{4}$$

$$\lim_{\Gamma\theta \rightarrow \infty} \Sigma_i E_i \theta_i^2 = \lim_{\Gamma\theta \rightarrow \infty} \frac{M}{\Gamma} \frac{\Gamma^4 \theta^4}{(1 + \Gamma^2 \theta^2)^2} = \frac{M}{\Gamma}$$

$$\lim_{\Gamma\theta \rightarrow \infty} \Sigma_i E_i \theta_i^3 = \lim_{\Gamma\theta \rightarrow \infty} \frac{M}{2\Gamma^2} \left[ 3 \operatorname{arctg}(\Gamma\theta) - \frac{3 + 5\Gamma^2 \theta^2}{(1 + \Gamma^2 \theta^2)^2} \Gamma\theta \right] = \frac{3\pi M}{4\Gamma^2}$$

Portanto uma série, na qual o termo genérico devidamente normalizado por  $A_n$  é o n-ésimo momento, resulta numa relação linear com  $\Gamma\theta$ ,

$$\Sigma_{(n+1)} [\Sigma_i E_i \Gamma\theta_i^n] = \frac{1}{(n+1)M\Gamma} \Sigma_n A_n [\Sigma_i E_i (\Gamma\theta_i)^n] \quad (\text{A.17})$$

onde  $(n+1) = 1, 2, \dots$  é o número de termos da série.

No caso de termos 4 termos somados a expressão resultante é

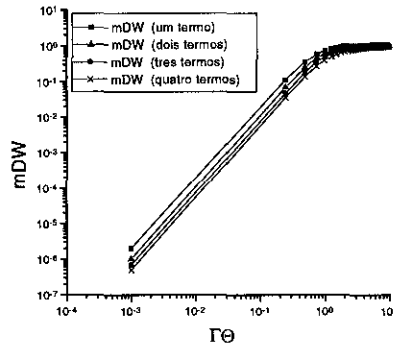
$$mDW(\theta_i) = \frac{1}{4M\Gamma} \left[ \Sigma_i E_i + \frac{4}{\pi} \Sigma_i E_i (\Gamma\theta_i) + \Sigma_i E_i (\Gamma\theta_i)^2 + \frac{4}{3\pi} \Sigma_i E_i (\Gamma\theta_i)^3 \right] \quad (\text{A.18})$$

sendo que sua expressão analítica é

$$mDW(\theta_i) = \frac{1}{M\Gamma} \left[ \frac{1}{(1 + \Gamma^2 \theta_i^2)^2} \left[ \frac{(\Gamma\theta_i)^4}{2} - \frac{(\Gamma\theta_i)^3}{3\pi} + \frac{(\Gamma\theta_i)^2}{2} - \frac{\Gamma\theta_i}{\pi} \right] + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\Gamma\theta_i) \right] \quad (\text{A.19})$$

Na figura 54 estão graficadas as curvas desde 1 até 4 termos e as denominamos de mDW. Nela verifica-se que a relação linear se estende para  $\Gamma\theta$  maiores quanto maior o número de termos.

Figura A.2: Correlação R -  $\Gamma\theta$



# Bibliografia

- [1] G.Wataghin, Phys.Rev.Lett.57,61 (1940)
- [2] Chacaltaya Emulsion Chamber Experiment, Prog.Theor.Phys.Supp. 47,1 (1971)
- [3] E.L.Feinberg, Phys.Rep.5,237 (1972)
- [4] V.I.Gol'danskii, Yu.P.Nikitin e I.L.Rozental, Kinematic Methods in High-Energy Physics, tradução de M.V.Tsaplina, Harwood Academic Publishers GmbH, England, 1989
- [5] Yu.P.Nikitin e I.L.Rozental, High Energy Physics with Nuclei, tradução de N.M.Queen, Harwood Academic Publishers GmbH, England, 1986
- [6] S.Hasegawa, Prog.Theor.Phys.26,150 (1961)  
S.Hasegawa, Prog.Theor.Phys.29,128 (1963)
- [7] W.J.Conover, Practical Nonparametric Statistics, J.Wiley & Sons, N.York, 1980
- [8] N.M.Duller e W.D.Walker, Phys.Rev.93,215 (1954)
- [9] M.Akashi e outros, Prog.Theor.Phys.Supp.32,1 (1964)
- [10] S.Hayakawa, Cosmic Ray Physics, J.Wiley & Sons, N.York, 1969
- [11] K.Kamata e J.Nishimura, Prog.Theor.Phys.Supp.6,93 (1958)
- [12] J.Nishimura, Prog.Theor.Phys.Supp.32,72 (1964)  
J.Nishimura, Handbuch der Physik XLV/2, Springer Verlag, Heidelberg, 1967

- [13] I.Ohta, Prog.Theor.Phys.Supp.47,271 (1971)
- [14] T.Fujinaga e outros, Nucl.Instrum. & Methods A276,317 (1989)
- [15] M.J.Menon, Tese de Mestrado, IFGW-UNICAMP, 1982
- [16] T.Shibata, Tese de Doutorado, Waseda University, 1969
- [17] C.M.G.Lattes e outros, Phys.Rep.65,1 (1980)
- [18] A.Turtelli Jr., Tese de Doutorado, Unicamp, 1974
- [19] M.S.M.Mantovani, Tese de Doutorado, Unicamp, 1971
- [20] E.H.Shibuya, 1977. Parte das aplicações desses cálculos constaram na tese de M.J.Menon [15], sendo que um artigo com toda a metodologia está sendo elaborado para uma futura submissão.