UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN"

Tese de Mestrado:

Equações de movimento de partículas com reação à radiação

Aluno: Daniel Vogt - IFGW / UNICAMP

Orientador: Patricio Anibal Letelier Sotomayor – IMECC /

UNICAMP

Janeiro de 2002

Banca Examinadora:

- Dr. Patricio Anibal Letelier Sotomayor (orientador)

- Dr. George Emanuel Avraam Matsas, IFT / UNESP

– Dr. Márcio José Menon, IFGW / UNICAMP

Agradecimentos

Ao meu orientador, Dr. Patricio Anibal Letelier Sotomayor, por seus conselhos, críticas e sugestões. Feliz é o aluno que o tem como orientador.

Aos meus pais, Herbert Vogt e Valentine Vogt, por todo o apoio que recebi deles.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

Resumo

É dada uma visão geral do problema de reação à radiação na teoria clássica de campos. São discutidas a dedução e propriedades das equações de movimento de partículas com reação à radiação para campos de spin 0, spin 1 e spin 2. Em particular, é feito um estudo detalhado da equação de Lorentz-Dirac. Utilizando um método numérico conveniente, aplicou-se a equação de Lorentz-Dirac a alguns problemas físicos de interesse e obteve-se, na maioria dos casos, resultados satisfatórios. Discute-se ainda o problema de reação à radiação na teoria da Relatividade Geral.

Abstract

A general view of the problem of radiation reaction in classical field theory is given. The deduction and properties of the equations of motion of particles with radiation reaction for spin 0, spin 1 and spin 2 fields are discussed. In particular, a detailed study of the Lorentz-Dirac equation is done. Using an appropriate numerical method, the Lorentz-Dirac equation was applied to some physical problems of interest, and in most cases, the results were satisfactory. The problem of radiation reaction in General Relativity is also discussed.

Conteúdo

Introdução

1	For	ça de r	eação à radiação para campos vetoriais	12
	1.1	Equaç	ão de Lorentz-Dirac	12
	1.2	O prol	olema das soluções não-físicas	16
	1.3	O mét	odo de redução de ordem	19
	1.4	A supe	erfície crítica da equação de Lorentz-Dirac	21
	1.5	Anális	e de um exemplo sob vários pontos de vista	25
	1.6	Aplica	ções	35
		1.6.1	Movimento unidimensional com força externa depen-	
			dente do tempo	36
		1.6.2	Movimento unidimensional com força externa constante	39
		1.6.3	Movimento bidimensional com força externa constante	42
		1.6.4	Campo magnético constante	46
		1.6.5	Força Coulombiana unidimensional	55
		1.6.6	Força Coulombiana bidimensional	59
		1.6.7	Problema de Kepler diamagnético	65

8

	1.7	${ m Rea}$ ção à radiação em eletrodinâmica no contexto da mecânica	
		quântica	75
2	Rea	ção à radiação em Relatividade Geral	79
	2.1	Força de reação à radiação para campos escalares e tensoriais .	79
	2.2	Algumas propostas de forças de reação à radiação	84
Conclusão		90	
Bi	Bibliografia		

Lista de Figuras

1.1	Aceleração em função do tempo para o movimento do oscilador	
	harmônico não-relativístico com reação à radiação para difer-	
	entes velocidades iniciais	28
1.2	Aceleração em função do tempo para o movimento do oscilador	
	harmônico não-relativístico com reação à radiação para difer-	
	entes posições iniciais	29
1.3	Solução numérica para o movimento do oscilador harmônico	
	não-relativístico com reação à radiação para diferentes veloci-	
	dades iniciais	30
1.4	Solução numérica para o movimento do oscilador harmônico	
	não-relativístico com reação à radiação para diferentes posições	
	iniciais	32
1.5	Solução para o movimento do oscilador harmônico não-relativístico)
	com reação à radiação por meio do método de redução de ordem 3	33
1.6	Módulo da diferença entre as acelerações para várias condições	
	iniciais calculadas por meio do método de redução de ordem . S	34

1.7	Posição em função do tempo próprio para movimento com	
	força externa periódica dependente do tempo e reação à radiação	37
1.8	Velocidade própria em função do tempo próprio para movi-	
	mento com força externa periódica dependente do tempo e	
	reação à radiação	38
1.9	Aceleração própria em função do tempo próprio para movi-	
	mento com força externa periódica dependente do tempo e	
	reação à radiação	38
1.10	Trajetória bidimensional de um elétron com reação à radiação	
	num campo elétrico $ec{E} = \mathcal{E} \hat{x}$	43
1.11	Variação da energia em função do tempo próprio para o movi-	
	mento mostrado na figura 1.10	44
1.12	Aceleração na direção y em função do tempo próprio para o	
	movimento da figura 1.10	44
1.13	Energia em função da coordenada \boldsymbol{x} para movimento bidimen-	
	sional com reação à radiação num campo elétrico $ec{E}=\mathcal{E} \hat{x}$ e	
	várias condições iniciais	45
1.14	Trajetória de um elétron num campo magnético uniforme ${\cal B}=$	
	6×10^3 Gauss com reação à radiação $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	47
1.15	Energia em função da coordenada tempo t para a trajetória	
	mostrada na figura 1.14	48
1.16	Trajetória de um elétron num campo magnético uniforme ${\cal B}=$	
	$6\times 10^4~{\rm Gauss}$ com reação à radiação $\hfill \ldots \hfill \ldots \hfi$	49

1.17	Energia em função da coordenada tempo t para a trajetória	
	mostrada na figura 1.16	50
1.18	Coordenada x do centro em função da coordenada tempo t	
	para a trajetória mostrada na figura 1.14	50
1.19	Coordenada \boldsymbol{y} do centro em função da coordenada tempo \boldsymbol{t}	
	para a trajetória mostrada na figura 1.14	51
1.20	Comparação entre o raio calculado numericamente e analiti-	
	camente para movimento de elétron em campo magnético uni-	
	forme com reação à radiação	52
1.21	Comparação entre a trajetória calculada numericamente (1.14)	
	e a obtida pela solução analítica aproximada	53
1.22	Comparação entre a trajetória calculada numericamente (1.16)	
	e a obtida pela solução analítica aproximada	54
1.23	Posição de máxima aproximação e aceleração máxima num	
	potencial Coulombiano unidimensional repulsivo	56
1.24	Módulo da aceleração no potencial Coulombiano unidimen-	
	sional atrativo	57
1.25	Trajetória de um elétron num potencial de Coulomb atrativo	
	bidimensional com reação à radiação	60
1.26	Evolução temporal (coordenada $t)$ do semi-eixo maior para a	
	trajetória mostrada na figura 1.25.	61
1.27	Evolução temporal (coordenada $t)$ da excentricidade para a	
	trajetória mostrada na figura 1.25.	61

1.28	Ângulo de precessão do semi-eixo maior em função da coorde-	
	nada tempo t para a trajetória mostrada na figura 1.25	62
1.29	Diagrama da posição x, velocidade dx/dt e coordenada tempo	
	t para a trajetória mostrada na figura 1.25	62
1.30	Comparação entre o raio calculado numericamente e analiti-	
	camente para movimento inicialmente circular no potencial de	
	Coulomb com reação à radiação	64
1.31	Ampliação da figura 1.30 nos instantes finais do movimento. $% \left({{{\bf{n}}_{{\rm{m}}}}} \right)$.	65
1.32	Trajetória com $B=1,8\times10^5$ Gauss e condição inicial 1 da	
	tabela 1	68
1.33	Trajetória com $B = 6 \times 10^5$ Gauss e condição inicial 1 da	
	tabela 2	68
1.34	Energias em função do tempo com campo $B=1,8\times 10^5$ Gauss	
	e condições iniciais da tabela 1	69
1.35	Energias em função do tempo com campo $B = 6 \times 10^5$ Gauss	
	e condições iniciais da tabela 2	70
1.36	Momento angular K em função do tempo com campo B =	
	$1,8\times 10^5$ Gauss e condições iniciais da tabela 1 $\ .$	70
1.37	Momento angular K em função do tempo com campo B =	
	6×10^5 Gauss e condições iniciais da tabela 2	71
1.38	Trajetórias no plano xy sem e com reação à radiação com	
	campo $B = 6 \times 10^5$ Gauss e condições iniciais indicadas na	
	tabela 3	72

1.39	Energia em função da coordenada tempo t para movimento	
	de acordo com os parâmetros da tabela 3	73
1.40	Momento angular em função da coordenada tempo t para	
	movimento de acordo com os parâmetros da tabela 3 $\ .$	74
2.1	Raio em função do tempo próprio sem e com a inclusão de	
	uma possível força de reação à radiação gravitacional $\ .\ .\ .$	86
2.2	Energia relativística + potencial em função do tempo próprio	
	sem e com a inclusão de uma possível força de reação à ra-	
	diação gravitacional	87

Introdução

A teoria clássica que trata da interação entre partículas e campos envolve dificuldades conceituais e matemáticas. Entre elas, está o fato de que uma partícula acelerada emite um campo que altera o campo responsável pelo seu movimento, o que por sua vez afeta o movimento da partícula. Sob um ponto de vista equivalente, a radiação emitida por uma partícula carrega energia, momento e momento angular, e assim altera seu movimento. Este fenômeno é denominado reação à radiação.

Historicamente as primeiras tentativas de incluir reação à radiação surgiram na eletrodinâmica. Lorentz adotou uma pequena esfera carregada como um modelo para o elétron [1]. Ele calculou a força de reação à radiação considerando a ação de uma parte do elétron sobre a outra. O resultado pode ser expresso como uma expansão em série de potências tendo o raio do elétron como parâmetro. O primeiro termo da série é independente do raio e representa a força de reação à radiação sobre a partícula. Porém os termos de ordem mais alta dependem de suposições sobre a forma e a distribuição de carga da partícula. O modelo também não é estável e necessitaria de forças não-elétricas para manter o elétron coeso. Dirac [2] elaborou um método bem definido e relativisticamente invariante para o cálculo da força de reação. A força em questão é proporcional à diferença entre os campos retardado e avançado da partícula. Quando expressa em termos da velocidade da partícula e de suas derivadas, a força de reação, no limite não-relativístico, concorda com o primeiro termo da série obtida por Lorentz.

Apesar de estabelecida a partir de teorias clássicas bem conhecidas, a força de reação eletrodinâmica não teve aceitação geral, provavelmente devido a dois fatores. A equação de movimento com reação à radiação possui soluções nas quais a aceleração cresce exponencialmente com o tempo, mesmo na ausência de forças externas. Estas soluções são denominadas "autoaceleradas" ou "não físicas", e são claramente absurdas do ponto de vista físico. Em segundo lugar, Eliezer [3] afirma a inexistência de soluções físicas para três tipos particulares de campos de força: o campo de uma placa carregada e infinita, e os campos Coulombianos atrativo e repulsivo. Plass, no entanto, mostra que nos três casos há soluções físicas [4].

Em Relatividade Geral, o problema de reação à radiação, além de sua importância teórica, adquiriu relevância para a interpretação de resultados experimentais: as observações do pulsar binário PSR 1913+16 indicam que a energia da órbita do pulsar e de seu companheiro decresce devido à reação à radiação gravitacional. A análise dos futuros dados dos detectores de ondas gravitacionais (como LIGO e VIRGO) da radiação emitida durante o espiralamento de sistemas binários compactos (estrelas de nêutrons e buracos negros) depende da correta inclusão dos efeitos de reação à radiação nos modelos destes sistemas. No caso específico de sistemas binários, têm-se adotada a aproximação pós-Newtoniana [5]. Outras abordagens baseiam-se nas perturbações de um buraco negro por uma partícula-teste em órbita e as conseqüentes mudanças nos parâmetros orbitais, mas são bem sucedidas apenas para órbitas em torno de buracos negros de Schwarzschild ou órbitas no plano equatorial de buracos negros de Kerr [6]. A dificuldade em se conseguir uma descrição exata da reação à radiação gravitacional em situações gerais reside sem dúvida no caráter não-linear das equações de Einstein.

O trabalho está dividido da seguinte maneira: na seção 1.1 é apresentada uma dedução simples da equação de movimento com reação à radiação para partículas em campos de spin 1, em particular o campo eletromagnético (equação de Lorentz-Dirac). A presença de derivadas de ordem superior a dois na equação de movimento possibilita a existência de soluções absurdas do ponto de vista físico, o que é mostrado na seção 1.2. A seção 1.3 discute um método geral (redução de ordem) que elimina as soluções não-físicas e permite a solução numérica "limpa" das equações de movimento com reação à radiação. Na seção 1.4 é exposto um argumento apresentado recentemente que justifica a substituição da equação de Lorentz-Dirac por uma equação efetiva de segunda ordem. Na seção 1.5 a equação não-relativística do oscilador harmônico com reação à radiação é resolvido de maneiras distintas, que são comparadas entre si. Algumas aplicações do método de redução de ordem a situações físicas de interesse são mostradas na seção 1.6. Foram incluídos exemplos de movimento de um elétron submetido a força externa dependente do tempo, campos elétricos uniformes, campo magnético uniforme, campo de Coulomb e campo magnético combinado com campo de Coulomb. Na seção 1.6.2 apresenta-se uma discussão a respeito do problema da radiação de uma carga uniformemente acelerada. Na seção 1.7 é feito um breve comentário sobre a descrição quântica de reação à radiação eletromagnética, incluindo-se uma discussão sobre o efeito Fulling-Davies-Unruh. O capítulo 2 aborda o problema de reação à radiação em Relatividade Geral. Na teoria linearizada da gravitação o campo gravitacional pode ser representado por um campo escalar e um campo tensorial, por isto apresenta-se a dedução das equações de movimento com reação à radiação para estes dois tipos de campos. Algumas propostas de descrição da força de reação à radiação gravitacional em termos da Relatividade Restrita são examinadas e não se revelam adequadas.

Capítulo 1

Força de reação à radiação para campos vetoriais

1.1 Equação de Lorentz-Dirac

A maneira usual de derivar a equação de movimento covariante de partículas puntuais incluindo reação à radiação utiliza o tensor energia-momento do campo. Um procedimento alternativo e mais simples consiste no método de continuação analítica da equação de movimento proposto por Barut [7]. Para uma partícula com massa de repouso m e carga e num campo eletromagnético, a equação de movimento é dada por:

$$m\ddot{x}^{\mu}(s) = e \left[F_{ext.}^{\mu\nu}(x(s)) + F_{ret.}^{\mu\nu}(w, x(s)) \right] \dot{x}_{\nu}(s), \tag{1.1}$$

onde $F_{ext.}^{\mu\nu}$ é o tensor campo eletromagnético externo:

$$F_{ext.}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

,

 $F_{ret.}^{\mu\nu}(w, x(s))$ é o tensor campo eletromagnético que representa o campo retardado no ponto w produzido pela partícula no ponto x(s), sendo dado por:

$$F_{ret.}^{\mu\nu} = \frac{e}{R^2} \left[(w-x)^{\mu} \ddot{x}^{\nu} - \frac{Q}{R} (w-x)^{\mu} \dot{x}^{\nu} + \frac{1}{R} (w-x)^{\mu} \dot{x}^{\nu} - (w-x)^{\nu} \ddot{x}^{\mu} + \frac{Q}{R} (w-x)^{\nu} \dot{x}^{\mu} - \frac{1}{R} (w-x)^{\nu} \dot{x}^{\mu} \right],$$
(1.2)

com $R = (w-x)^{\sigma} \dot{x}_{\sigma}$ e $Q = (w-x)^{\sigma} \ddot{x}_{\sigma}$. A métrica é dada por $ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, a ordem das coordenadas é $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, e os pontos indicam derivadas em relação a s.

O método consiste em continuar a eq.(1.1) ao ponto não-físico w = x(s+u)mantendo x(s) fixo:

$$m\ddot{x}^{\mu}(s+u) = e\left[F_{ext.}^{\mu\nu}(x(s+u)) + F_{ret.}^{\mu\nu}(w=x(s+u),x(s))\right]\dot{x}_{\nu}(s+u).$$
(1.3)

Expandindo-se em série, tem-se as seguintes expressões, em $w=x(s+u){:}$

$$x^{\mu}(s+u) = x^{\mu} + u\dot{x}^{\mu} + \frac{1}{2}u^{2}\ddot{x}^{\mu} + \frac{1}{6}u^{3}\ddot{x}^{\mu} + \dots$$
(1.4)

$$\dot{x}^{\mu}(s+u) = \dot{x}^{\mu} + u\ddot{x}^{\mu} + \frac{1}{2}u^{2}\ddot{x}^{\mu} + \dots$$
(1.5)

$$\ddot{x}^{\mu}(s+u) = \ddot{x}^{\mu} + u\,\ddot{x}^{\,\mu} + \dots \tag{1.6}$$

$$R = u + \frac{1}{6} u^3 \dot{x}_\sigma \ddot{x}^\sigma + \dots$$
(1.7)

$$Q = \frac{1}{2}u^2 \ddot{x}_\sigma \ddot{x}^\sigma + \frac{1}{6}u^3 \ddot{x}_\sigma \ddot{x}^\sigma + \dots$$
(1.8)

Substituindo as eq.(1.4) - (1.8) na eq.(1.2), obtém-se:

$$F_{ret.}^{\mu\nu} = e \left[\frac{1}{2u} \left(\dot{x}^{\mu} \ddot{x}^{\nu} - \ddot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \right) + \frac{1}{6} \left(\ddot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} - \dot{x}^{\mu} \ddot{x}^{\nu} \right) + O(u) \right].$$
(1.9)

Com isto, a eq.(1.3) é escrita como:

$$m\ddot{x}^{\mu}(s+u) = eF_{ext.}^{\mu\nu}(x(s+u))\dot{x}_{\nu}(s+u) + + e^{2} \left[-\frac{1}{2u}\ddot{x}^{\mu} + \frac{1}{6} \left(\ddot{x}^{\mu} - \dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\nu}\ddot{x}^{\nu} \right) + \frac{1}{2}\dot{x}^{\mu}\ddot{x}^{\nu}\ddot{x}_{\nu} + O(u) \right].$$
(1.10)

Usando a relação $\ddot{x}^{\nu}\ddot{x}_{\nu} = -\dot{x}^{\nu}\ddot{x}_{\nu}$ e a expansão (1.6), o lado direito da eq.(1.10) pode ser reescrito como:

$$m\ddot{x}^{\mu}(s+u) = eF_{ext.}^{\mu\nu}(x(s+u))\dot{x}_{\nu}(s+u) + + e^{2}\left[-\frac{1}{2u}\ddot{x}^{\mu}(s+u) + \frac{2}{3}\left(\ddot{x}^{\mu} + \dot{x}^{\mu}\ddot{x}_{\nu}\ddot{x}^{\nu}\right) + O(u)\right],$$
(1.11)

ou:

$$\left(m + \frac{e^2}{2u}\right)\ddot{x}^{\mu}(s+u) = eF_{ext.}^{\mu\nu}(x(s+u))\dot{x}_{\nu}(s+u) + \frac{2e^2}{3}\left(\ddot{x}^{\mu} + \dot{x}^{\mu}\ddot{x}_{\nu}\ddot{x}^{\nu}\right) + O(u).$$
(1.12)

Renormalizando-se a massa e fazendo o limite $u \to 0$, obtém-se a equação de Lorentz-Dirac:

$$m_{exp}\ddot{x}^{\mu} = eF_{ext.}^{\mu\nu}\dot{x}_{\nu} + \frac{2e^2}{3}\left(\ddot{x}^{\mu} + \dot{x}^{\mu}\ddot{x}_{\nu}\ddot{x}^{\nu}\right).$$
(1.13)

É conveniente reescrever a equação de Lorentz-Dirac como:

$$\ddot{x}^{\mu} = \frac{eF^{\mu\nu}\dot{x}_{\nu}}{mc} + \frac{2e^2}{3mc^3}\left(\ddot{x}^{\mu} + \frac{\dot{x}^{\mu}}{c^2}\ddot{x}^{\nu}\ddot{x}_{\nu}\right),$$
(1.14)

onde a partir daqui os pontos indicam derivada em relação ao tempo próprio $\tau.$

O parâmetro $b = \frac{2e^2}{3mc^3}$ representa o tempo necessário para a luz percorrer uma distância igual a dois terços do raio clássico do elétron, e vale aproximadamente $6, 27 \times 10^{-24}$ segundos. Para intervalos de tempo longos comparados a b, os efeitos de reação não são importantes. Apenas quando a força externa é aplicada rapidamente e durante intervalos de tempo da ordem de b, os efeitos de reação modificam consideravelmente o movimento. Por esta razão, é lícito desprezar a reação à radiação na maioria dos problemas de eletrodinâmica. No entanto, os efeitos cumulativos podem alterar o movimento das partículas durante longos períodos de tempo. Estes efeitos podem ser calculados por meio de métodos analíticos aproximados.

Pode-se obter uma equação para a variação da energia a partir da componente $\mu = 0$ da eq.(1.14) e usando-se as relações $\dot{t} = \sqrt{1 + \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}, \ \ddot{t} = \frac{\dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}}}{c^2 \sqrt{1 + \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}}$

$$e\left(\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}\right)^{2} = \dot{\vec{x}}^{2}\ddot{\vec{x}}^{2} - \left(\dot{\vec{x}}\cdot\ddot{\vec{x}}\right)^{2}:$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[mc^{2}\sqrt{1+\frac{\dot{\vec{x}}^{2}}{c^{2}}} + V(x,y,z) - \frac{2e^{2}\dot{\vec{x}}\cdot\ddot{\vec{x}}}{3c^{3}\sqrt{1+\frac{\dot{\vec{x}}^{2}}{c^{2}}}}\right] = -\frac{2e^{2}}{3c^{3}\sqrt{1+\frac{\dot{\vec{x}}^{2}}{c^{2}}}}\times$$

$$\times\left[\ddot{\vec{x}}^{2} + \frac{\left(\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}\right)^{2}}{c^{2}}\right].$$
(1.15)

Os dois primeiros termos são, respectivamente, a energia relativística e a energia potencial associada às forças externas. O terceiro termo representa uma troca reversível de energia por radiação e é denominado energia de aceleração. O termo no lado direito da equação é sempre negativo e representa a perda irreversível de energia por radiação.

1.2 O problema das soluções não-físicas

Uma vez que a eq.(1.14) contém derivadas de terceira ordem, além da posição e da velocidade, a aceleração deve ser especificada como condição inicial. Consideremos o movimento unidimensional de uma partícula sob a ação de uma força $f(\tau)$ independente da velocidade [4]. Neste caso a eq.(1.14) se reduz a:

$$\ddot{x} - b\ddot{x} + b\frac{\dot{x}^2\ddot{x}^2}{c^2 + \dot{x}^2} = \frac{f(\tau)}{m}\sqrt{1 + \frac{\dot{x}^2}{c^2}}.$$
(1.16)

Definindo-se

$$\dot{x}(\tau) = c \sinh[w(\tau)/c], \qquad (1.17)$$

e substituindo-se na eq.(1.16), obtém-se:

$$m\dot{w} - mb\ddot{w} = f(\tau). \tag{1.18}$$

A solução exata da eq.(1.18) é

$$\dot{w}(\tau) = e^{\tau/b} \left[\dot{w}(0) - \int_0^\tau \frac{f(\tau')e^{-\tau'/b}}{mb} \mathrm{d}\tau' \right].$$
(1.19)

Observa-se que no limite não-relativístico, a grandeza $\dot{w}(\tau)$ se reduz à aceleração $\ddot{x}(t)$. Em geral, para um valor inicial qualquer $\dot{w}(0)$, $\dot{w}(\tau)$ cresce indefinidamente com o passar do tempo, mesmo no caso em que a força externa é nula. Estes tipos de soluções são fisicamente inaceitáveis. Para eliminá-las, escolhe-se $\dot{w}(0)$ de modo que quando o tempo tende a infinito, $\dot{w}(\tau)$ não cresça indefinidamente a menos que haja uma força correspondente. Matematicamente, isto é expresso como

$$\dot{w}(0) = \frac{1}{mb} \int_0^\infty e^{-\tau'/b} f(\tau') \mathrm{d}\tau' \ . \tag{1.20}$$

Substituindo a eq.(1.20) na eq.(1.19) obtém-se:

$$\dot{w}(\tau) = \frac{1}{mb} \int_{\tau}^{\infty} e^{(\tau - \tau')/b} f(\tau') \mathrm{d}\tau' . \qquad (1.21)$$

A eq.(1.21) permite a seguinte interpretação: quando os efeitos de reação à radiação são considerados, a aceleração da partícula num instante τ depende da força que age sobre ela num tempo futuro. Este fenômeno é denominado pré-aceleração e aparentemente viola a causalidade. A partir das eq.(1.17) e (1.21), obtém-se as expressões finais para a velocidade e aceleração:

$$\dot{x}(\tau) = c \sinh[T(\tau)] \tag{1.22}$$

$$m\ddot{x}(\tau) = \frac{1}{b} \int_{\tau}^{\infty} e^{-(\tau'-\tau)/b} f(\tau') \mathrm{d}\tau' \cosh[T(\tau)] \quad , \text{ com}$$
(1.23)

$$T(\tau) = \sinh^{-1} \left[\frac{\dot{x}(0)}{c} \right] + \frac{1}{mc} \int_{0}^{\tau} f(\tau') d\tau' + (1.24) + \frac{1}{mc} \int_{0}^{\infty} e^{-\tau'/b} \left[f(\tau + \tau') - f(\tau') \right] d\tau' .$$

Ibison e Puthoff [8] obtiveram uma generalização da eq.(1.23) para três dimensões:

$$m\ddot{x}_{\mu}(\tau) = \frac{1}{b} \int_{\tau}^{\infty} \mathrm{d}\tau' e^{(\tau-\tau')/b} \hat{R}_{\mu}{}^{\nu}(\tau) R_{\nu}{}^{\lambda}(\tau') f_{\lambda}(\tau') , \qquad (1.25)$$

onde $R_{\mu}{}^{\nu}$ é um fator integrante, dado por

$$R_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & u_0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & u_0 \end{pmatrix} = \left(\frac{c_{\mu}u^{\nu}}{c} - \frac{u_{\mu}c^{\nu}}{c} + u_0\delta_{\mu}^{\nu}\right), \quad (1.26)$$

com $c_{\mu}=(c,0,0,0),$ e $\hat{R}_{\mu}{}^{\nu}$ o inverso de ${R_{\mu}}^{\nu}$:

$$\hat{R}_{\mu}{}^{\nu} = \frac{1}{u_0 c^2} \begin{pmatrix} u_0^2 & -u_0 u_1 & -u_0 u_2 & -u_0 u_3 \\ -u_0 u_1 & c^2 + u_1^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ -u_0 u_2 & u_1 u_2 & c^2 + u_2^2 & u_2 u_3 \\ -u_0 u_3 & u_1 u_3 & u_2 u_3 & c^2 + u_3^2 \end{pmatrix}$$
$$= \left(\frac{1}{u_0 c^2} \left(c^2 \delta_{\mu}{}^{\nu} - u_{\mu} u^{\nu} - c_{\mu} c^{\nu}\right) + 2\frac{u_{\mu} c^{\nu}}{c^3}\right). \quad (1.27)$$

Diante do comportamento não usual da equação de Lorentz-Dirac, seria interessante testar experimentalmente sua validade. Não foi encontrado nenhum trabalho a este respeito. Comay [9] propõe um possível experimento: um elétron move-se em linha reta sob a ação de um campo eletrostático produzido por uma casca esférica uniformemente carregada com dois pequenos buracos. Se o movimento da carga obedece à equação de Lorentz-Dirac, a aceleração varia contínuamente quando a carga entra no interior da casca. Logo o elétron deve possuir uma aceleração não-nula no interior da casca, mesmo não havendo campo elétrico. Uma outra proposta [10] consiste na aceleração de um elétron por um pulso de laser ultra intenso ($\approx 10^{22}$ Wcm⁻²). Os efeitos de reação à radiação poderiam ser medidos pela radiação emitida pelo elétron.

Há poucas soluções exatas para a equação de Lorentz-Dirac, o que torna necessário o uso de métodos numéricos na maioria das situações. Entretanto, na integração numérica direta surgem problemas: mesmo que houvesse um modo de estabelecer a condição inicial apropriada para a aceleração, a solução numérica tende a ser "contaminada" pelas soluções não-físicas devido aos inevitáveis erros numéricos. Uma maneira de contornar esta dificuldade consiste em impor a condição assintótica $\lim_{\tau\to\infty} \ddot{x}^{\mu} = 0$ e integrar no sentido decrescente do tempo. Deste modo as soluções não-físicas são automaticamente amortecidas. Porém sua aplicabilidade é limitada pela dificuldade em conhecer o estado de movimento no limite $\tau \to \infty$ em situações gerais. Assim, deve-se procurar por uma abordagem alternativa.

1.3 O método de redução de ordem

Nesta abordagem [11], assume-se que a equação de movimento seja de segunda ordem:

$$\ddot{x}^{\mu} = \xi^{\mu}(\tau, x, \dot{x}, b), \tag{1.28}$$

onde ξ^{μ} satisfaz a equação de Lorentz-Dirac:

$$\xi^{\mu} = f^{\mu} + b \left(\frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \dot{x}^{\nu} + \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \dot{x}^{\nu}} \xi^{\nu} + \dot{x}^{\mu} \frac{\xi^{\nu} \xi_{\nu}}{c^2} \right), \qquad (1.29)$$

onde se usou $f^{\mu} = \frac{eF^{\mu\nu}\dot{x}_{\nu}}{mc}$. A fim de eliminar as soluções não-físicas, usa-se uma observação feita por Bhabha [12], de que esses tipos de solução tornam-se singulares no limite $b \to 0$. Assim, impondo-se a condição

$$\lim_{b \to 0} \xi^{\mu} = f^{\mu}, \tag{1.30}$$

as soluções não-físicas são eliminadas.

Pode-se construir a partir da eq.(1.29) uma série de aproximações sucessivas $\ddot{x}^{\mu} = \xi_n^{\mu}$, (n = 0, 1, ...) dada por:

$$\ddot{x}^{\mu} = \xi_0^{\mu} = f^{\mu} \tag{1.31}$$

$$\ddot{x}^{\mu} = \xi_1^{\mu} = f^{\mu} + b \left(\frac{\partial f^{\mu}}{\partial \tau} + \frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \dot{x}^{\nu} + \frac{\partial f^{\mu}}{\partial \dot{x}^{\nu}} f^{\nu} + \dot{x}^{\mu} \frac{f^{\nu} f_{\nu}}{c^2} \right)$$
(1.32)

$$\ddot{x}^{\mu} = \xi^{\mu}_{n+1} = f^{\mu} + b \left(\frac{\partial \xi^{\mu}_{n}}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi^{\mu}_{n}}{\partial x^{\nu}} \dot{x}^{\nu} + \frac{\partial \xi^{\mu}_{n}}{\partial \dot{x}^{\nu}} \xi^{\nu}_{n} + \dot{x}^{\mu} \frac{\xi^{\nu}_{n} \xi_{n\nu}}{c^{2}} \right)$$
(1.33)

O limite desta sucessão, se existir, satisfaz as condições (1.29) e (1.30). Na prática, usa-se uma das aproximações para n finito.

Uma justificativa rigorosa para a eliminação das soluções não-físicas por meio da redução de ordem foi apresentada por Chicone *et al* [13]. O tratamento exato dos efeitos de retardo no movimento de partículas envolve equações de retardo. Quando os parâmetros de retardo são pequenos, assume-se a existência de um atrator para estes tipos de equação, e a restrição da equação no atrator equivale a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Este sistema corresponde ao modelo físico "correto". Por outro lado, a equação de retardo pode ser expandida em série de potências dos parâmetros de retardo, e truncando-se a série até ordem N, obtém-se um sistema de equações diferenciais de ordem N. Este sistema, por sua vez, equivale a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem que possui variedades estáveis e instáveis. As soluções físicas do sistema são assintoticamente atraídas para a variedade estável e as não-físicas são assintoticamente repelidas pela variedade instável. Num sistema de coordenadas apropriado, o sistema de equações diferenciais de primeira ordem obtido a partir do sistema de ordem N coincide até ordem N com o sistema de equações diferenciais de primeira ordem referente à equação de retardo, e, portanto, é uma aproximação do modelo físico "correto".

Dois comentários sobre as asserções acima são importantes: não foi dada ainda uma prova matemática rigorosa da validade das mesmas para equações de retardo gerais; e quando os parâmetros de retardo não são pequenos, podem surgir comportamentos dinâmicos não previsíveis por meio das equações obtidas a partir da redução de ordem.

1.4 A superfície crítica da equação de Lorentz-Dirac

Recentemente, Spohn [14] mostrou que o fluxo de soluções da equação de Lorentz-Dirac possui um comportamento semelhante ao fluxo de soluções do grupo de renormalização em fenômenos críticos. As soluções físicas pertencem a uma superfície crítica que contém pontos fixos atrativos cuja localização depende de $F^{\mu\nu}$. Fora da superfície crítica, a solução cresce exponencialmente. Como conseqüência, a variedade crítica é uma superfície no espaço de fases da forma $\ddot{x}^{\mu} = h^{\mu}(x^{\alpha}, \dot{x}^{\alpha})$. Assim, dadas as condições iniciais para a posição e velocidade, existe apenas uma solução na superfície crítica e esta satisfaz a condição assintótica $\lim_{\tau\to\infty} \ddot{x}^{\mu} = 0$. Além disso, o movimento na superfície crítica pode ser descrito por uma equação efetiva de segunda ordem.

O fato de, na equação de Lorentz-Dirac, o termo de derivada de ordem mais alta ser multiplicado por um termo pequeno, torna adequado seu estudo por meio da teoria de perturbação singular. Definindo-se:

$$y_{(1)}^{\mu} = x^{\mu}$$

 $y_{(2)}^{\mu} = \dot{x}^{\mu}$
 $y_{(3)}^{\mu} = \ddot{x}^{\mu},$

a equação de Lorentz-Dirac é expressa como um sistema de EDOs de primeira ordem:

$$\dot{y}_{(1)}^{\mu} = y_{(2)}^{\mu} \tag{1.34}$$

$$\dot{y}^{\mu}_{(2)} = y^{\mu}_{(3)} \tag{1.35}$$

$$\epsilon \dot{y}^{\mu}_{(3)} = m y^{\mu}_{(3)} - \frac{e F^{\mu\nu} y_{(2)\nu}}{c} - \epsilon \frac{y^{\mu}_{(2)}}{c^2} y^{\nu}_{(3)} y_{(3)\nu}, \qquad (1.36)$$

onde $\epsilon=\frac{2e^2}{3c^3}$ é uma grandeza pequena. Calculemos a divergência do fluxo do

sistema acima:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_{(1)}^{\mu}} \dot{y}_{(1)}^{\mu} + \frac{\partial}{\partial y_{(2)}^{\mu}} \dot{y}_{(2)}^{\mu} + \frac{\partial}{\partial y_{(3)}^{\mu}} \dot{y}_{(3)}^{\mu} &= \frac{m}{\epsilon} - \frac{y_{(2)}^{\mu}}{c^2} \frac{\partial}{\partial y_{(3)}^{\mu}} \left(y_{(3)}^{\nu} y_{(3)\nu} \right) \\ &= \frac{m}{\epsilon} - 2 \frac{y_{(2)}^{\mu} y_{(3)\mu}}{c^2} \\ &= \frac{m}{\epsilon} > 0 \end{aligned}$$

Como a divergência é sempre positiva, o fluxo de soluções diverge.

Introduzindo-se uma escala $\xi = \frac{\tau}{\epsilon}$, o sistema (1.34) – (1.36) pode ser reescrito como:

$$\frac{dy_{(1)}^{\mu}}{d\xi} = \epsilon y_{(2)}^{\mu} \tag{1.37}$$

$$\frac{dy_{(2)}^{\mu}}{d\xi} = \epsilon y_{(3)}^{\mu} \tag{1.38}$$

$$\frac{dy_{(3)}^{\mu}}{d\xi} = my_{(3)}^{\mu} - \frac{eF^{\mu\nu}y_{(2)\nu}}{c} - \epsilon \frac{y_{(2)}^{\mu}}{c^2}y_{(3)}^{\nu}y_{(3)\nu}.$$
 (1.39)

Tomando-se $\epsilon = 0$, as eq.(1.37) – (1.39) fornecem:

$$\frac{dy_{(1)}^{\mu}}{d\xi} = 0 \Rightarrow y_{(1)}^{\mu}(w) = y_{(10)}^{\mu}$$

$$\frac{dy_{(2)}^{\mu}}{d\xi} = 0 \Rightarrow y_{(2)}^{\mu}(w) = y_{(20)}^{\mu}$$

$$\frac{dy_{(3)}^{\mu}}{d\xi} = my_{(3)}^{\mu} - \frac{eF^{\mu\nu}y_{(20)\nu}}{c} = my_{(3)}^{\mu} - h^{\mu}(y_{(10)}^{\alpha}, y_{(20)}^{\alpha}). \quad (1.40)$$

Devido ao comportamento divergente do fluxo do sistema (1.34) - (1.36), a superfície $\ddot{x}^{\mu} = h^{\mu}(x^{\alpha}, \dot{x}^{\alpha})$ é formada exclusivamente por pontos fixos repulsivos. Se $\ddot{x}^{\mu}(0) \neq h^{\mu}(x^{\alpha}(0), \dot{x}^{\alpha}(0))$, a solução cresce exponencialmente. Neste sentido a superfície $\ddot{x}^{\mu} = h^{\mu}(x^{\alpha}, \dot{x}^{\alpha})$ é crítica. Por um resultado da teoria de perturbação singular, a superfície crítica ainda existe para $\epsilon \neq 0$ e possui a forma $\ddot{x}^{\mu} = h^{\mu}_{\epsilon}(x^{\alpha}, \dot{x}^{\alpha}).$

Para verificar que a condição assintótica para a aceleração determina $\ddot{x}^{\mu}(0)$, convém utilizar a equação do balanço de energia (1.15). Integrando ambos os lados da eq.(1.15) em relação ao tempo próprio, tem-se:

$$\begin{bmatrix} mc^2 \sqrt{1 + \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} + V(x, y, z) - \frac{2e^2 \dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}}}{3c^3 \sqrt{1 + \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} \end{bmatrix} \Big|_0^\infty =$$

$$= -\frac{2e^2}{3c^3} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} \left[\ddot{\vec{x}}^2 + \frac{\left(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}\right)^2}{c^2} \right] d\tau.$$
(1.41)

Como na superfície crítica a aceleração é limitada, o termo de energia de aceleração no lado esquerdo da eq.(1.41) também é limitado, donde se conclui que

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\dot{\vec{x}}^{2}}{c^{2}}}} \left[\ddot{\vec{x}}^{2} + \frac{\left(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}\right)^{2}}{c^{2}} \right] d\tau < \infty$$
(1.42)

na superfície crítica. Esta condição é satisfeita apenas se a condição assintótica $\lim_{\tau\to\infty} \ddot{x}^{\mu} = 0$ for válida. Fora da superfície crítica a aceleração diverge. Logo, dadas as condições iniciais $x^{\mu}(0)$ e $\dot{x}^{\mu}(0)$, a condição assintótica determina unicamente $\ddot{x}^{\mu}(0)$ na superfície crítica.

Resta ainda obter a equação efetiva de segunda ordem na superfície crítica. Adotando $\ddot{x}^{\mu} = h^{\mu}_{\epsilon}(x^{\alpha}, \dot{x}^{\alpha}) = h^{\mu}_{0} + \epsilon h^{\mu}_{1} + O(\epsilon^{2})$, substituindo na

equação de Lorentz-Dirac e igualando as mesmas potências de ϵ , tem-se:

$$mh_{0}^{\mu} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}\dot{x}_{\nu}, \qquad (1.43)$$

$$mh_{1}^{\mu} = \dot{h}_{0}^{\mu} + \frac{\dot{x}^{\mu}}{c^{2}}h_{0}^{\nu}h_{0\nu} = \frac{e}{mc}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\dot{x}^{\sigma}\dot{x}_{\nu} + \frac{e^{2}}{m^{2}c^{2}}\left(F^{\mu\nu}F_{\nu}{}^{\alpha}\dot{x}_{\alpha} + \frac{\dot{x}^{\mu}}{c^{2}}F^{\nu\alpha}F_{\nu}{}^{\sigma}\dot{x}_{\alpha}\dot{x}_{\sigma}\right). \qquad (1.44)$$

Assim, a equação efetiva de segunda ordem é dada por:

$$m\ddot{x}^{\mu} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}\dot{x}_{\nu} + \epsilon \left[\frac{e}{mc}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\dot{x}^{\sigma}\dot{x}_{\nu} + \frac{e^{2}}{m^{2}c^{2}}\left(F^{\mu\nu}F_{\nu}{}^{\alpha}\dot{x}_{\alpha} + \frac{\dot{x}^{\mu}}{c^{2}}F^{\nu\alpha}F_{\nu}{}^{\sigma}\dot{x}_{\alpha}\dot{x}_{\sigma}\right)\right]$$
(1.45)

É interessante notar que esta equação efetiva concorda com a obtida aplicandose o método de redução de ordem discutido na seção 1.3.

1.5 Análise de um exemplo sob vários pontos de vista

O problema do movimento do oscilador harmônico com reação à radiação no limite não-relativístico pode ser resolvido exatamente. Com esta solução, pode-se obter uma equação exata para a superfície crítica. Os resultados serão então comparados com os obtidos com o método de redução de ordem (seção 1.3).

O movimento com reação à radiação de uma partícula carregada cuja freqüência angular na ausência de amortecimento seja ω é descrito pela equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x + b\frac{d^3x}{dt^3}.$$
 (1.46)

com $b = \frac{2e^2}{3mc^3}$. A solução exata da eq.(1.46) é dada por:

$$x(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + e^{\alpha_{2r} t} \left(c_2 \cos(\alpha_{2i} t) + c_3 \sin(\alpha_{2i} t) \right), \qquad (1.47)$$

onde c_1,c_2,c_3 são constantes que dependem das condições iniciais, e

$$\alpha_1 = \frac{1}{3b} \left(1 + \beta^{1/3} + \beta^{-1/3} \right) \tag{1.48}$$

$$\alpha_{2r} = \frac{1}{3b} \left(1 - \frac{\gamma^{1/3}}{4} - \gamma^{-1/3} \right)$$
(1.49)

$$\alpha_{2i} = \frac{\sqrt{3}}{6b} \left(\beta^{1/3} - \beta^{-1/3} \right) \tag{1.50}$$

$$\beta = 1 + \frac{27}{2}\omega^2 b^2 + 3\sqrt{3}\omega b \sqrt{1 + \frac{27}{4}\omega^2 b^2}$$
(1.51)

$$\gamma = 8 + 108\omega^2 b^2 + 12\sqrt{3}\omega b\sqrt{4 + 27\omega^2 b^2}$$
(1.52)

A partir da solução (1.47), obtém-se imediatamente as expressões para a velocidade e aceleração:

$$\dot{x}(t) = \alpha_1 c_1 e^{\alpha_1 t} + (c_2 \alpha_{2r} + c_3 \alpha_{2i}) e^{\alpha_{2r} t} \cos(\alpha_{2i} t) + (c_3 \alpha_{2r} - c_2 \alpha_{2i}) e^{\alpha_{2r} t} \sin(\alpha_{2i} t)$$
(1.53)

$$\ddot{x}(t) = \alpha_1^2 c_1 e^{\alpha_1 t} + \left[c_2 (\alpha_{2r}^2 - \alpha_{2i}^2) + 2c_3 \alpha_{2r} \alpha_{2i} \right] e^{\alpha_{2r} t} \cos(\alpha_{2i} t) + \left[c_3 (\alpha_{2r}^2 - \alpha_{2i}^2) - 2c_2 \alpha_{2r} \alpha_{2i} \right] e^{\alpha_{2r} t} \sin(\alpha_{2i} t).$$

$$(1.54)$$

Em termos das condições iniciais $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$ e $\ddot{x}(0) = \ddot{x}_0$, as

constantes c_1, c_2, c_3 são dadas por:

$$c_{1} = \frac{x_{0} \left(\alpha_{2r}^{2} + \alpha_{2i}^{2}\right) + \ddot{x}_{0} - 2\alpha_{2r}\dot{x}_{0}}{\left(\alpha_{1} - \alpha_{2r}\right)^{2} + \alpha_{2i}^{2}}$$
(1.55)

$$c_{2} = \frac{x_{0}\alpha_{1} (\alpha_{1} - 2\alpha_{2r}) - \ddot{x}_{0} + 2\alpha_{2r}\dot{x}_{0}}{(\alpha_{1} - \alpha_{2r})^{2} + \alpha_{2r}^{2}}$$
(1.56)

$$c_{3} = \frac{-\left[x_{0}\alpha_{1}\left(\alpha_{1}\alpha_{2r} - \alpha_{2r}^{2} + \alpha_{2i}^{2}\right) + \ddot{x}_{0}\left(\alpha_{1} - \alpha_{2r}\right) + \dot{x}_{0}\left(\alpha_{2r}^{2} - \alpha_{1}^{2} - \alpha_{2i}^{2}\right)\right]}{\alpha_{2i}\left[\left(\alpha_{1} - \alpha_{2r}\right)^{2} + \alpha_{2i}^{2}\right]}$$
(1.57)

As eq.(1.47) e (1.53) formam um sistema linear em relação às funções $e^{\alpha_{2r}t}\cos(\alpha_{2i}t)$ e $e^{\alpha_{2r}t}\sin(\alpha_{2i}t)$. O determinante da matriz dos coeficientes $\Delta = \alpha_{2i}(c_2^2 + c_3^2)$ será diferente de zero a não ser que $c_2 = c_3 = 0$, mas este caso não possui interesse, uma vez que as soluções físicas seriam anuladas. Logo o sistema linear possui solução única. Substituindo-se a solução do sistema linear na eq.(1.54) e simplificando, obtém-se:

$$\ddot{x}(t) = c_1 \left[(\alpha_1 - \alpha_{2r})^2 + \alpha_{2i}^2 \right] e^{\alpha_1 t} + 2\alpha_{2r} \dot{x} - (\alpha_{2r}^2 + \alpha_{2i}^2) x.$$
(1.58)

Como $\alpha_1 > 0$, o termo $e^{\alpha_1 t}$ é responsável pelo crescimento exponencial da aceleração. Para satisfazer a condição assintótica $\lim_{t\to\infty} \ddot{x} = 0$ deve-se impor $c_1 = 0$. Neste caso a eq.(1.58) se reduz a

$$\ddot{x}(t) = 2\alpha_{2r}\dot{x} - (\alpha_{2r}^2 + \alpha_{2i}^2)x.$$
(1.59)

A eq.(1.59) determina a superfície crítica. Dados x(0) e $\dot{x}(0)$, a eq.(1.59) determina unicamente o valor da aceleração inicial na superfície crítica. A eq.(1.59) é uma EDO de segunda ordem; como $-(\alpha_{2r}^2 + \alpha_{2i}^2) < 0$ e $\alpha_{2r} < 0$, trata-se da equação de movimento de um oscilador harmônico amortecido.



Figura 1.1: Aceleração em função do tempo com condições iniciais x(0) = 1unidade de comprimento, $\omega = \frac{2\pi}{7b}$ rad/(unidade de tempo), $v(0) = \dot{x}(0) = 0$ c (curva contínua) e $v(0) = \dot{x}(0) = \pm 1 \times 10^{-10}$ c (curvas tracejadas) (1 unidade de comprimento = 2,818 × 10⁻¹⁵ m, 1 unidade de tempo = 9,399 × 10⁻²⁴ s, 1 unidade de velocidade = velocidade da luz no vácuo).

Note-se que a equação efetiva de segunda ordem neste caso pode ser obtida exatamente.

A figura 1.1 mostra as curvas da aceleração em função do tempo com as condições iniciais x(0) = 1 unidade de comprimento e $\omega = \frac{2\pi}{7b}$ rad/(unidade de tempo) (1 unidade de comprimento = $2,818 \times 10^{-15}$ m, 1 unidade de tempo = $9,399 \times 10^{-24}$ s, 1 unidade de velocidade = velocidade da luz no vácuo). A curva contínua foi obtida com a eq.(1.59) e velocidade inicial $\dot{x}(0) = 0$ c, e as curvas tracejadas utilizando as eq.(1.54) e eq.(1.55) – (1.57) com as mesmas condições iniciais para posição e aceleração, mas com velocidades iniciais



Figura 1.2: Aceleração em função do tempo com condições iniciais $\dot{x}(0) = 0c$, $\omega = \frac{2\pi}{7b}$ rad/(unidade de tempo), x(0) = 1 unidade de comprimento (curva contínua) e $x(0) = (1 \pm 1 \times 10^{-10})$ unidades de comprimento (1 unidade de comprimento = 2,818 × 10⁻¹⁵ m, 1 unidade de tempo = 9,399 × 10⁻²⁴ s, 1 unidade de velocidade = velocidade da luz no vácuo).

 $\pm 1 \times 10^{-10}$ c. Para construir as curvas mostradas na figura 1.2 variou-se o valor da posição inicial x(0) = 1 unidade de comprimento, $x(0) = (1 \pm 1 \times 10^{-10})$ unidades de comprimento e manteve-se fixos os valores iniciais da velocidade. Em ambos os casos isto equivale a tomar um conjunto de condições iniciais ligeiramente fora da superfície crítica. Apesar desta pequena diferença, a aceleração nas duas situações diverge a partir de um certo instante de tempo. Este exemplo ilustra a instabilidade da superfície crítica, uma vez que é constituída por pontos fixos repulsivos.

As figuras 1.3 e 1.4 mostram as curvas de aceleração em função do tem-



Figura 1.3: Solução numérica da equação de movimento do oscilador harmônico com reação à radiação (1.46) com condições iniciais x(0) = 1unidade de comprimento, $\omega = \frac{2\pi}{7b}$ rad/(unidade de tempo), $v(0) = \dot{x}(0) = 0$ c (curva contínua) e $v(0) = \dot{x}(0) = \pm 1 \times 10^{-10}$ c (curvas tracejadas) (1 unidade de comprimento = 2,818 × 10⁻¹⁵ m, 1 unidade de tempo = 9,399 × 10⁻²⁴ s, 1 unidade de velocidade = velocidade da luz no vácuo).

po com as mesmas condições iniciais que as usadas nas figuras 1.1 e 1.2, respectivamente, mas calculadas por meio da solução numérica da eq.(1.46)utilizando-se o algoritmo de Runge-Kutta-Fehlberg de 4^a - 5^a ordem. Novamente observa-se um comportamento divergente da aceleração com condições iniciais fora da superfície crítica. Mesmo tomando-se o valor da aceleração inicial de acordo com a eq.(1.59) com dezesseis algarismos, as curvas contínuas das figuras 1.3 e 1.4 divergem a partir de aproximadamente 16 unidades de tempo ou 3,4 períodos do movimento não amortecido. Na integração direta da eq.(1.46), a contribuição das soluções não-físicas cresce rapidamente devido aos erros de arredondamento.

Finalmente resolveu-se a eq.(1.46) pelo método de redução de ordem. Neste caso as aproximações sucessivas consistem em EDOs de 2^{a} ordem [11]

$$\ddot{x} = -\gamma_n \dot{x} - \omega_n^2 x$$
, $n = 0, 1, ...$ (1.60)

cujos coeficientes são dados pelas relações de recorrência

$$\gamma_0 = 0$$

$$\omega_{n+1}^2 = \omega_0^2 - b\omega_n^2 \gamma_n \qquad (1.61)$$

$$\gamma_{n+1} = b \left(\omega_n^2 - \gamma_n^2\right)$$

A figura 1.5 mostra a solução exata (1.59) (curva contínua) e as aproximações sucessivas com n = 20 e n = 30 e condições iniciais x(0) = 1 unidade de comprimento, $\dot{x}(0) = 0$ c e $\omega_0 = \frac{2\pi}{7b}$ rad/(unidade de tempo). Neste caso a convergência é bastante lenta, mas em [11] é provado que as aproximações sucessivas convergem para a eq.(1.59) desde que $b\omega_0 < 0,95$.



Figura 1.4: Solução numérica da equação de movimento do oscilador harmônico com reação à radiação (1.46) com condições iniciais $\dot{x}(0) = 0c$, $\omega = \frac{2\pi}{7b}$ rad/(unidade de tempo), x(0) = 1 unidade de comprimento (curva contínua) e $x(0) = (1 \pm 1 \times 10^{-10})$ unidade de comprimento (curvas tracejadas) (1 unidade de comprimento = 2,818 × 10⁻¹⁵ m, 1 unidade de tempo = 9,399 × 10⁻²⁴ s, 1 unidade de velocidade = velocidade da luz no vácuo).


Figura 1.5: Solução da equação de movimento do oscilador harmônico com reação à radiação (1.46) pelo método de redução de ordem. Curva contínua: solução exata, curvas tracejadas: aproximações sucessivas com n = 20 e n = 30. Condições iniciais: x(0) = 1 unidade de comprimento, $\dot{x}(0) = 0$ c (1 unidade de comprimento $= 2,818 \times 10^{-15}$ m, 1 unidade de tempo = $9,399 \times 10^{-24}$ s, 1 unidade de velocidade = velocidade da luz no vácuo).



Figura 1.6: Módulo da diferença entre as acelerações com condições iniciais x(0) = 1 unidade de comprimento, $v(0) = \dot{x}(0) = \pm 1 \times 10^{-10}$ c e a aceleração com condições iniciais x(0) = 1 unidade de comprimento, $\dot{x}(0) = 0$ c. As soluções foram calculadas numericamente a partir da equação de movimento obtida pelo método de redução de ordem (1.60) com n = 30 (1 unidade de comprimento $= 2,818 \times 10^{-15}$ m, 1 unidade de tempo $= 9,399 \times 10^{-24}$ s, 1 unidade de velocidade = velocidade da luz no vácuo).

As equações de movimento (1.60) são estáveis em relação a pequenas variações nas condições iniciais e erros de arredondamento numérico. Resolveuse numericamente a eq.(1.60) com n = 30 e condições iniciais x(0) = 1 unidade de comprimento, $\dot{x}(0) = \pm 1 \times 10^{-10}$ c. Na figura 1.6 apresenta-se o módulo da diferença entre as acelerações com $\dot{x}(0) = \pm 1 \times 10^{-10}$ c e a aceleração com $\dot{x}(0) = 0$ c em função do tempo. Ao contrário das situações anteriores, as diferenças entre as acelerações sofrem um amortecimento com o aumento do tempo.

Em resumo, mesmo que se consiga determinar analíticamente a forma da superfície crítica (sem resolver as equações de movimento), e conseqüentemente a condição inicial para a aceleração, a solução numérica direta da equação de Lorentz-Dirac permanece inviável, uma vez que seria necessário o conhecimento das condições iniciais e processamento numérico com precisão infinita para evitar a contaminação da solução numérica pelas soluções nãofísicas. Por outro lado, a solução das equações de segunda ordem oriundas do método de redução de ordem não sofrem deste inconveniente, embora não haja garantias de que a redução de ordem convirja em todos os casos.

1.6 Aplicações

Utilizou-se o método de redução de ordem no estudo de alguns problemas simples envolvendo reação à radiação. Os termos da sucessão (1.31) - (1.33)foram calculados analiticamente em cada caso e as correspondentes equações diferenciais de segunda ordem foram resolvidas numericamente usando-se os algoritmos de Runge-Kutta e Bulirsch-Stoer [15]. As soluções das aproximações foram comparadas entre si a fim de verificar a convergência. As unidades de medida usadas foram as seguintes:

- unidade de carga: carga do elétron = $1,602 \times 10^{-19}$ C
- unidade de massa: massa de repouso do elétron = 9,109 $\times \, 10^{-31} \ \rm kg$
- unidade de comprimento: raio clássico do elétron = 2,818 \times 10^{-15} m
- unidade de tempo = $9,399 \times 10^{-24}$ s

Nestas unidades, a velocidade da luz é numericamente igual a 1.

1.6.1 Movimento unidimensional com força externa dependente do tempo

Seja um elétron submetido a uma força externa periódica dependente do tempo da forma $f(\tau) = f_o \sin(\omega \tau)$. O movimento na direção do eixo x é descrito pelas equações

$$\ddot{x} = \frac{f_o}{m}\sin(\omega\tau)\dot{t} + b\left[\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{c^2}\left(c^2\ddot{t}^2 - \ddot{x}^2\right)\right]$$
(1.62)

$$c\ddot{t} = \frac{f_o}{mc}\sin(\omega\tau)\dot{x} + b\left[\ddot{x} + \frac{\dot{t}}{c}\left(c^2\ddot{t}^2 - \ddot{x}^2\right)\right].$$
(1.63)

Neste caso a solução exata pode ser calculada por meio das eq.(1.22) e(1.23):

$$\dot{x}(\tau) = c \sinh[T(\tau)] \tag{1.64}$$

$$\ddot{x}(\tau) = \frac{f_o b}{m(1+b^2\omega^2)} \cosh[T(\tau)] \left[\sin(\omega\tau) + b\omega \,\cos(\omega\tau)\right] , \,\text{com}$$
(1.65)

$$T(\tau) = \sinh^{-1} \left[\frac{\dot{x}(0)}{c} \right] + \frac{f_o}{mc\omega(1+b^2\omega^2)} \left[1 - \cos(\omega\tau) + b\omega \sin(\omega\tau) \right].$$



Figura 1.7: Posição (x) em função do tempo próprio para uma partícula submetida a uma força externa $f = 0, 5\sin(\frac{2\pi}{15b}\tau)$ unidades de força com x(0) = 0 unidades de comprimento e $\dot{x}(0) = 0c$ (1 unidade de comprimento $= 2,818 \times 10^{-15}$ m, 1 unidade de tempo $= 9,399 \times 10^{-24}$ s, 1 unidade de velocidade = velocidade da luz no vácuo).

A solução numérica obtida com o método de redução de ordem pode ser comparada com a solução exata. As figuras 1.7 a 1.9 mostram, respectivamente, as curvas de posição, velocidade própria e aceleração própria em função do tempo próprio com $f = 0, 5\sin(\frac{2\pi}{15b}\tau)$ unidades de força, x(0) = 0unidades de comprimento e $\dot{x}(0) = 0c$. A solução calculada pelo método de redução de ordem corresponde à seqüência (1.31) – (1.33) com n = 2. Mesmo com esta ordem de aproximação, as figuras mostram que a solução obtida deste modo está muito próxima da solução exata. A solução correspondente a n = 3 não é distingüível da solução exata na escala dos gráficos



Figura 1.8: Velocidade própria em função do tempo próprio para o movimento mostrado na figura 1.7.



Figura 1.9: Aceleração própria em função do tempo próprio para o movimento mostrado na figura 1.7.

apresentados.

1.6.2 Movimento unidimensional com força externa constante

No caso de um campo elétrico constante $\vec{E} = \mathcal{E}\hat{x}$, os primeiros dois conjuntos de termos das aproximações sucessivas são:

$$c\ddot{t} = \xi_0^0 = \frac{e\mathcal{E}}{mc}\dot{x} \tag{1.66}$$

$$\ddot{x} = \xi_0^1 = \frac{e\mathcal{E}}{mc}c\dot{t} \tag{1.67}$$

$$c\ddot{t} = \xi_1^0 = \frac{e\mathcal{E}}{mc}\dot{x} + \frac{be^2\mathcal{E}^2}{m^2c^2} \left[c\dot{t} + \frac{c\dot{t}}{c^2}\left(\dot{x}^2 - c^2\dot{t}^2\right)\right]$$
(1.68)

$$\ddot{x} = \xi_1^1 = \frac{e\mathcal{E}}{mc}c\dot{t} + \frac{be^2\mathcal{E}^2}{m^2c^2} \left[\dot{x} + \frac{\dot{x}}{c^2}\left(\dot{x}^2 - c^2\dot{t}^2\right)\right]$$
(1.69)

Substituindo-se a relação $\dot{x}^2 - c^2 \dot{t}^2 = -c^2$ em (1.68) e (1.69) obtém-se novamente (1.66) e (1.67). Neste caso, as equações de movimento com e sem reação são as mesmas. À mesma conclusão chega-se a partir da condição (1.20).

Isto significa que uma carga uniformemente acelerada não irradia? Esta questão gerou controvérsias. Em 1909 Born [16] publicou um artigo sobre o movimento relativístico de uma carga uniformemente acelerada. Pauli, a partir deste artigo, concluiu que uma carga neste estado de movimento não emite radiação [17]. Schott [18], num trabalho independente do de Born, concluiu que há radiação. Bondi e Gold [19] modificaram o tratamento matemático feito por Born, e argumentaram que a modificação implicava em emissão de radiação. Fulton e Rohrlich [20] analisaram o problema em detalhe. Utilizando a eletrodinâmica clássica, invariância de Lorentz e admitindo a validade da equação de Lorentz-Dirac, mostraram que uma carga uniformemente acelerada irradia a uma taxa não nula constante e que a anulação da força de reação não implica necessariamente em ausência de radiação. A eq.(1.15) aplicada ao movimento uniformemente acelerado na direção xfornece:

$$T(\tau) - T(0) + V[x(\tau)] - V[x(0)] = \frac{2e^2}{3c^3} \left[\frac{\dot{x}(\tau)\ddot{x}}{\sqrt{1 + \frac{\dot{x}(\tau)^2}{c^2}}} - \frac{\dot{x}(0)\ddot{x}}{\sqrt{1 + \frac{\dot{x}(0)^2}{c^2}}} - \int_0^\tau \frac{\ddot{x}^2}{\sqrt{1 + \frac{\dot{x}(\tau')^2}{c^2}}} d\tau' \right],$$

$$(1.70)$$

onde se representou a energia relativística por T. O primeiro e segundo termos do lado direito da eq. (1.70) representam a energia de aceleração. Em geral, quando o movimento é periódico, estes termos se cancelam e a variação da energia cinética + potencial ocorre apenas devido ao último termo da eq.(1.70). Nestes casos, todo o trabalho realizado pela força de reação corresponde à energia emitida por radiação. Por outro lado, o movimento em questão não é periódico. A aceleração constante implica que o trabalho total realizado pela força de reação se anula. Pela eq. (1.70), a energia emitida por radiação deve se igualar à energia de aceleração para que isto ocorra. De alguma maneira, a energia de aceleração consiste numa "energia interna" da partícula carregada que é transformada em radiação, sem no entanto alterar a energia cinética + potencial. Esta interpretação pode não parecer satisfatória sob o ponto de vista físico, mas está baseada na equação de movimento (1.14). Se esta for rejeitada, então não é possível qualquer tipo de discussão a respeito da influência da emissão de energia sobre o movimento, uma vez que não há outra equação de movimento disponível.

De acordo com Sciama *et al.* [21], a força de reação à radiação age, durante os períodos inicial e final de aceleração não-uniforme, de tal maneira a assegurar que o trabalho realizado pela força externa durante a aceleração constante seja igual à soma da variação da energia cinética da carga com a energia irradiada.

Há ainda uma outra discussão relacionada ao princípio da equivalência [20]. Uma vez que a equação de movimento de uma carga uniformemente acelerada não difere da de uma partícula neutra quando aceleradas por forças não-eletromagnéticas, ambas seguirão a mesma trajetória num campo gravitacional homogêneo. Uma partícula neutra em queda livre num campo gravitacional homogêneo se comporta para um observador também em queda livre como uma partícula em repouso num referencial inercial, de acordo com o princípio da equivalência. Mas se a partícula estiver carregada, o observador pode detectar a presença do campo gravitacional pela radiação da partícula: se houver radiação ele saberá que ambos estão em queda num campo gravitacional; caso contrário ele e a partícula se encontram numa região do espaço livre de forças.

Para Fulton e Rohrlich esta aparente contradição com o princípio da equivalência é resolvida quando se considera a medida de radiação. A radiação é definida pelo comportamento do campo a grandes distâncias da fonte. Assim, um observador que queira detectar a radiação emitida pela partícula carregada não pode fazê-lo nas proximidades da geodésica da partícula. Mas o princípio da equivalência somente tem validade local, enquanto a observação de radiação é um procedimento não-local. Logo o observador em queda livre junto à partícula não pode determinar se há de fato emissão de radiação.

Há ainda um outro critério para se determinar a existência de um campo de radiação: a radiação emitida por uma carga é observada quando existe aceleração relativa entre o observador e a carga. Segundo este critério, um observador num referencial co-acelerado em relação ao referencial da carga não observa radiação. No caso em que o observador e a carga estão em queda livre num mesmo campo gravitacional estático e homogêneo, não há aceleração relativa entre ambos, logo o observador não detecta radiação. Esta conclusão concorda com a análise feita por Boulware [22], de que toda a radiação emitida pela carga encontra-se numa região do espaço-tempo inacessível ao observador no referencial co-acelerado. A interpretação quântica da radiação emitida por uma carga uniformemente acelerada envolve o efeito Fulling-Davies-Unruh, e será abordada na seção 1.7.

1.6.3 Movimento bidimensional com força externa constante

Consideremos o movimento no plano xy de um elétron submetido a um campo elétrico constante $\vec{E} = \mathcal{E}\hat{x}$. As figuras 1.10 a 1.13 mostram os resultados usando-se os seguintes parâmetros: $\mathcal{E} = 0,01$ unidades de campo elétrico (1



Figura 1.10: Alteração da trajetória do elétron devido à reação à radiação num campo elétrico $\vec{E} = 0,01\hat{x}$ unidades de campo elétrico e condições iniciais x(0) = y(0) = 0 unidades de comprimento, $\dot{x}(0) = 0$ c, $\dot{y}(0) = 0,100503$ c (1 unidade de comprimento = 2,818 × 10⁻¹⁵ m, 1 unidade de tempo = 9,399 × 10⁻²⁴ s, 1 unidade de campo elétrico = 1,814 × 10²⁰ N/C).

unidade de campo elétrico = $1,814 \times 10^{20}$ N/C), x(0) = y(0) = 0 unidades de comprimento, $\dot{x}(0) = 0$ c, $\dot{y}(0) = 0,100503$ c e termos da sucessão (1.31) – (1.33) com n = 2.

Apesar de a trajetória do elétron ser aparentemente pouco modificada pela perda de radiação (figura 1.10), a energia $E = mc^2 \dot{t} - e\mathcal{E}x$ (figura 1.11) diminui bastante durante o percurso. A figura 1.12 mostra o componente y da aceleração em função do tempo próprio. Observa-se uma aceleração negativa (diminuição da velocidade) nesta direção, apesar de não haver força externa nesta direção.



Figura 1.11: Variação da energia em função do tempo próprio para o movimento mostrado na figura 1.10 (1 unidade de energia = $8,188 \times 10^{-14}$ J).



Figura 1.12: Aceleração na direção y em função do tempo próprio para o movimento da figura 1.10.



Figura 1.13: Energia em função da coordenada x para movimento com força externa constante e várias condições iniciais dos componentes da velocidade. Os ângulos referem-se ao ângulo polar do vetor velocidade em $\tau = 0$ (1 unidade de comprimento = 2,818 × 10⁻¹⁵ m, 1 unidade de energia = 8,188 × 10^{-14} J).

A figura 1.13 indica a variação da energia E com a posição para várias condições iniciais da velocidade: $\dot{x}(0) = (0, 100503 \cos \theta)$ c e $\dot{y}(0) = (0, 100503 \sin \theta)$ c, sendo θ o ângulo polar. Nota-se que quanto maior o ângulo formado entre a direção da velocidade inicial e a direção da força externa, maior é a quantidade de energia perdida por radiação.

1.6.4 Campo magnético constante

As equações de movimento de um elétron num campo magnético homogêneo e estático $\vec{B} = B\hat{z}$ são dadas por :

$$mc\ddot{t} = \frac{2e^2}{3c^2} \left[\ddot{t} + \frac{\dot{t}}{c} \left(c^2 \ddot{t}^2 - \ddot{x}^2 - \ddot{y}^2 \right) \right]$$
(1.71)

$$m\ddot{x} = -\frac{eB}{c}\dot{y} + \frac{2e^2}{3c^3} \left[\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{c^2} \left(c^2\ddot{t}^2 - \ddot{x}^2 - \ddot{y}^2 \right) \right]$$
(1.72)

$$m\ddot{y} = \frac{eB}{c}\dot{x} + \frac{2e^2}{3c^3} \left[\ddot{y} + \frac{\dot{y}}{c^2} \left(c^2\ddot{t}^2 - \ddot{x}^2 - \ddot{y}^2 \right) \right]$$
(1.73)

As soluções numéricas foram calculadas com os parâmetros:

- $B = 1 \times 10^{-12}$ unidades de campo magnético ($\approx 6, 0 \times 10^3$ Gauss), $\dot{x}(0) = 0, \, \dot{y}(0) = 1 \times 10^6$
- $B = 1 \times 10^{-11}$ unidades de campo magnético ($\approx 6, 0 \times 10^4$ Gauss), $\dot{x}(0) = 0, \, \dot{y}(0) = 2 \times 10^6$

Estas intensidades de campo magnético podem ser obtidas por meio de ímãs refrigerados a água. As figuras 1.14 e 1.15 mostram, respectivamente, a trajetória e a energia relativística do elétron para o primeiro conjunto de parâmetros, e as figuras 1.16 e 1.17 as mesmas grandezas para o segundo conjunto de parâmetros.

Observa-se que nestes dois casos os efeitos de reação à radiação alteram significativamente o movimento das partículas. A maior parte da energia é perdida durante os primeiros instantes do movimento. Outro fato notável é a mudança do centro da circunferência da trajetória com o tempo. As figuras 1.18 e 1.19 mostram este efeito para a trajetória da figura 1.14.



Figura 1.14: Alteração da trajetória do elétron devido à reação à radiação num campo magnético $B = 6 \times 10^3$ Gauss e condições iniciais $x(0) = 1 \times 10^{18}$ unidades de comprimento, y(0) = 0 unidades de comprimento, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1 \times 10^6$ (1 unidade de comprimento = 2,818 × 10⁻¹⁵ m, 1 unidade de tempo = 9,399 × 10⁻²⁴ s).



Figura 1.15: Energia em função da coordenada tempo t para a trajetória mostrada na figura 1.14 (1 unidade de energia = $8,188 \times 10^{-14}$ J).

No caso em que a perda de energia por ciclo for pequena, é possível obter uma expressão aproximada para o raio em função do tempo. A solução das equações (1.71) - (1.73) sem o termo de reação à radiação é :

$$x(\tau) = r\cos\left(\omega\tau\right) \tag{1.74}$$

$$y(\tau) = r\sin\left(\omega\tau\right) \tag{1.75}$$

$$\dot{t} = \sqrt{1 + \frac{r^2 \omega^2}{c^2}}$$
 (1.76)

onde $\omega = \frac{eB}{mc}$ e r é o raio da trajetória. Utilizando as eq.(1.74) e (1.75) na eq.(1.15) tem-se:

$$\frac{dE}{d\tau} = -\frac{2e^2r^2\omega^4}{3c^3}\sqrt{1+\frac{r^2\omega^2}{c^2}}$$
(1.77)

Fazendo a média da energia sobre um período do movimento, tem-se $E = mc^2 \sqrt{1 + \frac{r^2 \omega^2}{c^2}}$. A equação diferencial do raio em função do tempo é dada



Figura 1.16: Alteração da trajetória do elétron devido à reação à radiação num campo magnético $B = 6 \times 10^4$ Gauss e condições iniciais $x(0) = 2 \times 10^{17}$ unidades de comprimento, y(0) = 0 unidades de comprimento, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 2 \times 10^6$ (1 unidade de comprimento = 2,818 × 10⁻¹⁵ m, 1 unidade de tempo = 9,399 × 10⁻²⁴ s).



Figura 1.17: Energia em função da coordenada tempo t para a trajetória mostrada na figura 1.16 (1 unidade de energia = $8,188 \times 10^{-14}$ J).



Figura 1.18: Coordenada x do centro em função da coordenada tempo t para a trajetória mostrada na figura 1.14.



Figura 1.19: Coordenada y do centro em função da coordenada tempo t para a trajetória mostrada na figura 1.14.

por

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dE}\frac{dE}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = -\frac{2e^2r\omega^2}{3mc^3}\sqrt{1 + \frac{r^2\omega^2}{c^2}},\tag{1.78}$$

cuja solução com a condição inicial $r(t = 0) = r_0$ é:

$$r(t) = \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{1}{\tanh^2 W} - 1} , \text{ com } W = \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2}}}\right) + \frac{2e^2 \omega^2 t}{3mc^3}.$$
(1.79)

A comparação entre o raio previsto pela eq.(1.79) e o obtido pela solução numérica a partir da redução de ordem é mostrado na figura 1.20. Usou-se $B = 3 \times 10^4$ Gauss, $\dot{y}(0) = 1 \times 10^4$ (0,999999995c), durante um intervalo de tempo equivalente a 95 revoluções. Apesar da energia inicial elevada, a solução aproximada concorda bem com o resultado numérico, sendo que a diferença relativa no final do tempo considerado é da ordem de 0,03%.



Figura 1.20: Comparação entre o raio obtido pela solução numérica e o previsto pela solução analítica aproximada (1.79) com campo $B = 3 \times 10^4$ Gauss e condição inicial $\dot{y}(0) = 1 \times 10^4$ (1 unidade de comprimento = 2,818 × 10^{-15} m, 1 unidade de tempo = 9,399 × 10^{-24} s).



Figura 1.21: Comparação entre a trajetória calculada numericamente e a prevista pela solução analítica aproximada no limite ultra-relativístico eq.(1.80)
- (1.83). Os valores do campo magnético, condições iniciais e unidades são os indicados na figura 1.14.

A solução aproximada da eq.(1.14) no limite ultra-relativístico ($\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \gg 1$) foi obtida por Lieu [23]. As expressões das posições e velocidades são:

$$v_x(t) = -c \left[1 - (\alpha t + \beta)^2 / 2 \right] \sin \left[\omega t (\alpha t + 2\beta) / 2 \right]$$
(1.80)

$$v_y(t) = c \left[1 - (\alpha t + \beta)^2 / 2 \right] \cos \left[\omega t (\alpha t + 2\beta) / 2 \right]$$
 (1.81)

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t') dt'$$
(1.82)

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v_y(t') dt'$$
(1.83)

onde: $\alpha = \frac{2e^4B^2}{3m^3c^5}, \ \beta = \frac{1}{\gamma(t=0)} = \frac{1}{\gamma_0}.$

As figuras 1.21 e 1.22 reproduzem, respectivamente, os resultados das



Figura 1.22: Comparação entre a trajetória calculada numericamente e a prevista pela solução analítica aproximada no limite ultra-relativístico eq.(1.80)
- (1.83). Os valores do campo magnético, condições iniciais e unidades são os indicados na figura 1.16.

figuras 1.14 e 1.16 juntamente com as soluções (1.80) a (1.83). A diferença relativa entre as posições é da ordem de 1×10^{-7} para a figura 1.21 e da ordem de 1×10^{-8} para a figura 1.22.

1.6.5 Força Coulombiana unidimensional

Considere-se o movimento unidimensional (ao longo do eixo x > 0) de um elétron submetido a um campo Coulombiano produzido por uma partícula fixa na origem com mesma carga em módulo. As equações de movimento com reação à radiação são:

$$m\ddot{x} = \pm \frac{e^{2}\dot{t}}{x^{2}} + \frac{2e^{2}}{3c^{3}} \left[\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{c^{2}} \left(c^{2}\ddot{t}^{2} - \ddot{x}^{2} \right) \right]$$
(1.84)

$$mc\ddot{t} = \pm \frac{e^2 \dot{x}}{cx^2} + \frac{2e^2}{3c^2} \left[\frac{...}{t} + \frac{\dot{t}}{c} \left(c^2 \ddot{t}^2 - \ddot{x}^2 \right) \right], \qquad (1.85)$$

onde os sinais mais e menos referem-se, respectivamente, a força repulsiva e atrativa.

Usou-se novamente o método de redução de ordem na solução numérica das eq.(1.84) - (1.85). No caso repulsivo, adotou-se uma separação inicial de 1000 unidades de comprimento entre as partíulas com diferentes velocidades iniciais.

Conforme indica a figura 1.23, a posição de máxima aproximação x_{min} é maior quando os efeitos de reação à radiação são considerados, enquanto a aceleração máxima *acel._{max}* é menor. Os resultados são idênticos aos obtidos por Huschilt e Baylis [24], que utilizaram a condição assintótica para a acele-



Figura 1.23: Posição de máxima aproximação x_{min} e aceleração máxima $acel_{max}$ com e sem efeitos de reação à radiação em função da velocidade inicial do elétron (1 unidade de comprimento = 2,818 × 10⁻¹⁵ m, 1 unidade de tempo = 9,399 × 10⁻²⁴ s).



Figura 1.24: Módulo da aceleração em função da posição para o movimento unidimensional de um elétron no potencial Coulombiano atrativo. As diferentes curvas referem-se às sucessivas aproximações do método de redução de ordem (1 unidade de comprimento = $2,818 \times 10^{-15}$ m, 1 unidade de tempo = $9,399 \times 10^{-24}$ s).

ração e integração decrescente no tempo. No entanto, o método de redução de ordem deixou de convergir para velocidades iniciais maiores do que 0,89c, enquanto os autores citados obtiveram resultados até velocidades iniciais de 0,96c.

No caso atrativo, foram usadas as condições iniciais x(0) = 10 unidades de comprimento e $\dot{x}(0) = 0c$. A figura 1.24 indica o módulo da aceleração do elétron em função da posição para diferentes ordens de aproximações sucessivas do método de redução de ordem. Oberva-se claramente um comportamento divergente; o módulo da aceleração tende a infinito. O mesmo caso também foi examinado por Huschilt e Baylis [25]. Utilizando uma expansão assintótica para determinar um valor inicial da aceleração que minimizasse as soluções não-físicas, integraram diretamente a eq. de Lorentz-Dirac e obtiveram trajetórias fisicamente coerentes que, no entanto, eram rapidamente contaminadas por soluções não-físicas. Nestas trajetórias, à medida que o elétron se aproximava da origem, a aceleração atingia um valor máximo e decaía zero antes do elétron atingir a origem. Os autores mostram analíticamente que para um valor inicial finito da aceleração, o elétron atinge uma distância de aproximação máxima não-nula e então segue uma trajetória "runaway" para fora. Não existem neste caso soluções físicas para a equação de Lorentz-Dirac com valores iniciais de aceleração finitos.

A inexistência de soluções físicas para o problema de potencial Coulombiano atrativo unidimensional não pode ser usado como argumento contra a validade da equação de Lorentz- Dirac. Este é um problema artificial, uma vez que não se pode projetar uma partícula exatamente na direção do centro de força, e a lei de Coulomb deixa de ser válida quando a distância entre as partículas interagentes torna-se menor do que um certo valor.

1.6.6 Força Coulombiana bidimensional

A extensão das eq.(1.84) - (1.85) para o movimento de um elétron no plano xy submetido a um campo Coulombiano atrativo é dada por:

$$mc\ddot{t} = -\frac{e^2(x\dot{x} + y\dot{y})}{c(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{2e^2}{3c^2} \left[\ddot{t} + \frac{\dot{t}}{c} \left(c^2\ddot{t}^2 - \ddot{x}^2 - \ddot{y}^2 \right) \right]$$
(1.86)

$$m\ddot{x} = -\frac{e^2 x \dot{t}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{2e^2}{3c^3} \left[\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{c^2} \left(c^2 \ddot{t}^2 - \ddot{x}^2 - \ddot{y}^2 \right) \right]$$
(1.87)

$$m\ddot{y} = -\frac{e^2 y\dot{t}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{2e^2}{3c^3} \left[\ddot{y} + \frac{\dot{y}}{c^2} \left(c^2 \ddot{t}^2 - \ddot{x}^2 - \ddot{y}^2 \right) \right]$$
(1.88)

Utilizando novamente as aproximações sucessivas (1.31) - (1.33) aplicadas às eq.(1.86) - (1.88), obteve-se a solução numérica para uma órbita fechada com as condições iniciais x(0) = 50 unidades de comprimento, y(0) = 0unidades de comprimento, $\dot{x}(0) = 0$ c, $\dot{y}(0) = 0, 16$ c.

Alguns resultados de interesse são mostrados nas figuras 1.25 a 1.28. A órbita inicialmente elíptica torna-se circularizada com o passar do tempo, conforme indica a figura 1.27, paralelamente à diminuição do semi-eixo maior (figura 1.26). A taxa de precessão do semi-eixo maior aumenta com o tempo (figura 1.28). O ângulo de precessão por revolução é aproximadamente dado por:

$$\Delta \varphi = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{e^2}{ma(1 - e^2)c^2}}} - 1 \right),$$
(1.89)

sendo \mathbf{e} a excentricidade e *a* o semi-eixo maior. A eq.(1.89) indica um aumento do ângulo de precessão por revolução à medida que *a* e \mathbf{e} diminuem.

Na figura 1.29 representou-se um diagrama da posição x, velocidade dx/dte tempo t da trajetória representada na figura 1.25. Neste diagrama nota-



Figura 1.25: Trajetória do elétron num potencial de Coulomb com reação à radiação calculada numericamente com condições iniciais x(0) = 50 unidades de comprimento, y(0) = 0 unidades de comprimento, $\dot{x}(0) = 0$ c, $\dot{y}(0) = 0$, 16c (1 unidade de comprimento = 2,818 × 10⁻¹⁵ m, 1 unidade de tempo = 9,399 × 10⁻²⁴ s).



Figura 1.26: Evolução temporal (coordenada t) do semi-eixo maior para a trajetória mostrada na figura 1.25.



Figura 1.27: Evolução temporal (coordenada t) da excentricidade para a trajetória mostrada na figura 1.25.



Figura 1.28: Ângulo de precessão do semi-eixo maior em função da coordenada tempo t para a trajetória mostrada na figura 1.25.



Figura 1.29: Diagrama da posição x, velocidade dx/dt e coordenada tempo t para a trajetória mostrada na figura 1.25.

se um aumento da velocidade do elétron principalmente na etapa final do movimento. O diagrama $y \times dy/dt \times t$ apresenta o mesmo comportamento.

No caso de movimento circular no qual a perda de energia por revolução for pequena, pode-se obter uma expressão aproximada para o raio em função do tempo. A solução das eq.(1.86) - (1.88) sem o termo de reação à radiação é dada por:

$$x(\tau) = r\cos\left(\Omega\tau\right) \tag{1.90}$$

$$y(\tau) = r\sin\left(\Omega\tau\right) \tag{1.91}$$

$$\dot{t} = \sqrt{1 + \frac{r^2 \Omega^2}{c^2}} \tag{1.92}$$

$$\Omega^2 = \frac{e^4}{2m^2c^2r^4} + \frac{e^2}{mr^3}\sqrt{1 + \frac{e^4}{4m^2c^4r^2}}$$
(1.93)

Substituindo-se as eq.(1.90) – (1.93) na eq.(1.15) e mantendo apenas os termos até ordem $\frac{e^2}{mrc^2}$, tem-se:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} \approx -\frac{2e^6}{3c^3m^2r^4}\left(1 + \frac{e^2}{mrc^2}\right).$$
(1.94)

Por outro lado,

$$E \approx mc^{2} - \frac{e^{2}}{2r} + \frac{e^{4}}{8mr^{2}c^{2}} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{e^{2}}{2r^{2}} \left(1 - \frac{e^{2}}{2mrc^{2}}\right) \frac{dr}{dt}.$$
 (1.95)

Igualando as eq.(1.94) e eq.(1.95), obtém-se a equação diferencial

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4e^4}{3m^2r^2c^3}\left(1 + \frac{3e^2}{2mrc^2}\right),\tag{1.96}$$

cuja solução é dada por:

$$\frac{r^3 - r_0^3}{3} - \frac{3e^2(r^2 - r_0^2)}{4mc^2} = -\frac{4e^4t}{3m^2c^3}.$$
(1.97)



Figura 1.30: Comparação entre o raio obtido pela solução numérica e o previsto pela solução analítica aproximada (1.97) para movimento inicialmente circular no potencial de Coulomb. Condições iniciais: x(0) = 50 unidades de comprimento, y(0) = 0 unidades de comprimento, $\dot{x}(0) = 0$ c e $\dot{y}(0) = 0,142c$ (1 unidade de comprimento = $2,818 \times 10^{-15}$ m, 1 unidade de tempo = $9,399 \times 10^{-24}$ s).



Figura 1.31: Ampliação da figura 1.30 nos instantes finais do movimento.

As figuras 1.30 e 1.31 comparam os resultados numéricos do raio em função do tempo com a solução aproximada (1.97) com condições iniciais x(0) = 50 unidades de comprimento, y(0) = 0 unidades de comprimento, $\dot{x}(0) = 0$ c e $\dot{y}(0) = 0,142$ c. Apenas nos instantes finais de tempo quando o raio da órbita do elétron se aproxima de zero, a discordância entre as duas abordagens é acentuada (figura 1.31).

1.6.7 Problema de Kepler diamagnético

O sistema em questão se refere ao movimento de um elétron submetido a um potencial coulombiano e a um campo magnético constante e estático $\vec{B} = B\hat{z}$ [26]. Usando-se a aproximação não-relativística da eq.(1.14) tem-se (nestas equações os pontos indicam derivadas em relação ao tempo t):

$$\ddot{x} = -\frac{e^2 x}{mr^3} - \frac{eB\dot{y}}{mc} + \frac{2e^2}{3mc^3}\ddot{x}$$
(1.98)

$$\ddot{y} = -\frac{e^2 y}{mr^3} + \frac{eB\dot{x}}{mc} + \frac{2e^2}{3mc^3}\ddot{y}$$
(1.99)

$$\ddot{z} = -\frac{e^2 z}{mr^3} + \frac{2e^2}{3mc^3}\ddot{z}$$
(1.100)

Na ausência de força de reação há duas constantes de movimento: a energia $E = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{e^2}{r}$ e uma grandeza com dimensão de momento angular $K = m(x\dot{y} - \dot{x}y) - \frac{eB}{2c}(x^2 + y^2)$. A partir das eq.(1.98) – (1.100) deduzem-se as seguintes expressões:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{e^2}{r} - \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \right) = -\frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}^2 \qquad (1.101)$$
$$\frac{d}{dt} \left[m(x\dot{y} - \dot{x}y) - \frac{eB}{2c} \left(x^2 + y^2 \right) - \frac{2e^2}{3c^3} (x\ddot{y} - \ddot{x}y) \right] = -\frac{2e^2}{3c^3} (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}) \qquad (1.102)$$

O lado direito da eq.(1.101) é sempre negativo (perda de energia); no caso da eq.(1.102) nada se pode afirmar *a priori*.

As eq. (1.98)–(1.100) foram resolvidas numericamente com as condições iniciais dadas nas tabelas 1 e 2. As condições iniciais nas duas tabelas foram calculadas para energia inicial $E = -1,0000608 \times 10^{-7}$ unidades de energia (1 unidade de energia = 8,188 × 10⁻¹⁴ J) e momento angular inicial K = -1250unidades de momento angular (1 unidade de momento angular = 7,696 × 10^{-37} Kgm²s⁻¹).

As figuras 1.32 e 1.33 mostram, respectivamente, as trajetórias do elétron com as condições iniciais 1 da tabela 1 e 1 da tabela 2. Observa-se uma maior irregularidade na segunda trajetória em relação à primeira.

	x	<i>x</i>	ý	ż
cond. 1	$9,128709 \times 10^{6}$	0c	0c	$1,381190 \times 10^{-4} c$
cond. 2	$4,189302 \times 10^{6}$	0c	$-2,355395 \times 10^{-4} c$	$-4,710790 \times 10^{-4} c$
cond. 3	$1,757778 \times 10^{6}$	0c	$-6,847582 \times 10^{-4} c$	$-6,847582 \times 10^{-4} c$
cond. 4	$8,384251 \times 10^5$	0c	$-1,478314 \times 10^{-3} c$	0c

Tabela 1.1: condições iniciais com y(0) = z(0) = 0 unidades de comprimento e campo magnético $B = 1, 8 \times 10^5$ Gauss (1 unidade de comprimento = $2,818 \times 10^{-15}$ m, 1 unidade de tempo = $9,399 \times 10^{-24}$ s).

	x	<i>x</i>	ý	ż
cond. 1	5×10^6	0c	0c	$4,472\times10^{-4}\mathrm{c}$
cond. 2	$2,693549 \times 10^{6}$	0c	$-3,293941 \times 10^{-4} c$	$-6,587882 \times 10^{-4} c$
cond. 3	$1,518173 \times 10^{6}$	0c	$-7,474491 \times 10^{-4} c$	$-7,474491 \times 10^{-4} c$
cond. 4	$8,061524 \times 10^5$	0c	$-1,510267 \times 10^{-3} c$	0c

Tabela 1.2: condições iniciais com y(0) = z(0) = 0 unidades de comprimento e campo magnético $B = 6 \times 10^5$ Gauss (1 unidade de comprimento = 2,818 × 10^{-15} m, 1 unidade de tempo = 9,399 × 10^{-24} s).



Figura 1.32: Trajetória com $B = 1, 8 \times 10^5$ Gauss e condição inicial 1 da tabela 1.



Figura 1.33: Trajetória com $B=6\times 10^5$ Gauss e condição inicial 1 da tabela 2.


Figura 1.34: Energias em função do tempo com campo $B = 1,8 \times 10^5$ Gauss e condições iniciais da tabela 1 (1 unidade de energia = $8,188 \times 10^{-14}$ J).

Nas figuras 1.34 e 1.35 representou-se, respectivamente, a energia E como função do tempo para as condições iniciais das tabelas 1 e 2; nas figuras 1.36 e 1.37 o mesmo para a grandeza K.

Nota-se que as maiores variações de energia e momento angular K ocorrem quando o movimento se dá no plano xy (condição inicial 4 da tabela 1 e condição inicial 4 da tabela 2).

Um outro conjunto de soluções numéricas foi obtido restringindo-se o movimento ao plano xy mas utilizando-se a equação de movimento relativística. As condições iniciais usadas para três intensidades de campo magnético são apresentadas na tabela 3, onde a energia e momento angular iniciais são os mesmos para todas as condições iniciais.

A figura 1.38 mostra a trajetória do elétron com a condição inicial re-



Figura 1.35: Energias em função do tempo com campo $B = 6 \times 10^5$ Gauss e condições iniciais da tabela 2 (1 unidade de energia = 8,188 × 10⁻¹⁴ J).



Figura 1.36: Momento angular K em função do tempo com campo $B = 1,8 \times 10^5$ Gauss e condições iniciais da tabela 1 (1 unidade de momento angular = 7,696 × 10⁻³⁷ Kgm²s⁻¹).



Figura 1.37: Momento angular K em função do tempo com campo $B = 6 \times 10^5$ Gauss e condições iniciais da tabela 2 (1 unidade de momento angular $= 7,696 \times 10^{-37} \text{ Kgm}^2 \text{s}^{-1}$).

	$B = 6 \times 10^5 \text{ G}$	$B = 3 \times 10^5 \text{ G}$	$B = 6 \times 10^4 \text{ G}$
x	$7,36 imes 10^6$	$1,0116998 \times 10^{7}$	$1,4601534 \times 10^{7}$
y	0	0	0
$\frac{dx}{d\tau}$	0c	0c	0c
$\frac{dy}{d\tau}$	$3,75 \times 10^{-4} \mathrm{c}$	$2,5801737 \times 10^{-4} \mathrm{c}$	$7,6536068 \times 10^{-5} c$

Tabela 1.3: condições iniciais para movimento relativístico no plano xy com diferentes valores de campo magnético (1 unidade de comprimento = $2,818 \times 10^{-15}$ m, 1 unidade de tempo = $9,399 \times 10^{-24}$ s).



Figura 1.38: Trajetórias no plano xy sem e com reação à radiação com campo $B = 6 \times 10^5$ Gauss e condições iniciais indicadas na tabela 3.

ferente ao campo $B = 6 \times 10^5$ Gauss na tabela 3. Embora o movimento não seja simples, observa-se que os efeitos de reação tendem a diminuir a distância do elétron ao centro de força coulombiano.

As variações de energia e momento angular do elétron para os parâmetros da tabela 3 são mostradas, respectivamente, nas figuras 1.39 e 1.40. Como se observa nas figuras, para este conjunto de condições iniciais, as perdas são maiores na presença de campos magnéticos mais intensos.



Figura 1.39: Energia em função da coordenada tempo t
 para movimento de acordo com os parâmetros da tabela 3 (1 unidade de energia
 = 8, 188 $\times 10^{-14}$ J).



Figura 1.40: Momento angular em função da coordenada tempo t para movimento de acordo com os parâmetros da tabela 3 (1 unidade de momento angular = 7,696 × 10^{-37} Kgm²s⁻¹).

1.7 Reação à radiação em eletrodinâmica no contexto da mecânica quântica

O formalismo apresentado até agora está baseado na teoria clássica de campos. A rigor, deveria ser usada uma formulação quântica de reação à radiação do campo eletromagnético.

Moniz e Sharp [27] partiram do Hamiltoniano que descreve a interação entre um elétron puntual não-relativístico com o campo eletromagnético; utilizando a descrição de Heisenberg obtiveram uma equação de movimento que se reduz à equação de Abraham-Lorentz (a aproximação não-relativística da eq. de Lorentz-Dirac) no limite $h \rightarrow 0$:

$$m_0 \frac{d^2 \vec{R}(t)}{dt^2} = \vec{F}(t) - \frac{2e^2}{3c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A_n}{n! c^n} \frac{d^{n+2}}{dt^{n+2}} \vec{R}(t) , \qquad (1.103)$$

onde:

$$A_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{(n-1)}{2}} \frac{2n(4n+5)(2n-1)!!}{3(n+1)(n+2)} \lambda^{n-1} & \text{se } n \text{ for impar} \\ 0 & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

 $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$ é o comprimento de Compton, $\vec{R}(t)$ e $\vec{F}(t)$ são, respectivamente, os operadores de posição e de força externa, e m_0 a massa não-renormalizada do elétron. Os autores mostram que as soluções da eq.(1.103) fornecem as soluções da equação de Abraham-Lorentz sem a presença de soluções nãofísicas no limite segundo o princípio da correspondência, desde que a força aplicada mude lentamente durante o intervalo de tempo necessário para a luz percorrer um comprimento de onda Compton do elétron. De acordo com a visão dos autores, a descrição de uma partícula puntual em termos da eletrodinâmica clássica está fadada a produzir uma teoria com soluções nãofísicas. Uma descrição clássica consistente de um elétron puntual surgiria no limite do tratamento quântico de um elétron puntual, e não no limite puntual de uma carga extensa clássica. Por outro lado, Low [28] mostra por meio de um exemplo que o procedimento de renormalização de massa introduz soluções não-físicas mesmo utilizando o formalismo da teoria quântica nãorelativística.

Os trabalhos de Senitzky [29] e de Milonni *et al.* [30] sugerem que há uma relação entre reação à radiação e flutuações de ponto-zero do campo eletromagnético. O deslocamento e a largura das linhas de emissão em sistemas atômicos provêm dos efeitos combinados da ação do auto-campo do elétron sobre ele próprio (reação à radiação) e de flutuações de energia do vácuo, sendo que neste exemplo particular, estes efeitos não podem ser claramente separados.

Neste ponto é interessante fazer uma rápida discussão sobre efeitos quânticos em referenciais acelerados e sua relação com a questão da radiação de uma carga uniformemente acelerada (abordada na seção 1.6.2). O efeito Fulling-Davies-Unruh consiste no fato de que a resposta de um detector sujeito à aceleração uniforme no espaço-tempo de Minkowski a um campo não-massivo é a mesma que ele teria num banho térmico com temperatura $T = \frac{\hbar a}{2\pi ck}$, onde a é a aceleração do detector, c a velocidade da luz e k a constante de Boltzmann. Para se compreender a causa deste efeito, considera-se um modelo de detector [21]: um átomo inicialmente no estado fundamental e fracamente acoplado ao campo quântico sob consideração. A detecção de radiação corresponde a uma transição entre níveis de energia do átomo. O estado do detector pode ser visto como resultado da competição entre dois processos: a emissão espontânea devido à flutuações do momento de dipolo do detector e absorção (ou emissão estimulada) provocada pelas flutuações do vácuo do campo ambiente. Quando o detector está no estado fundamental não há emissão estimulada, e a emissão espontânea devido à flutuações de ponto-zero do detector é compensada pela absorção das flutuações de ponto-zero do campo ambiente. Nestas condições o detector no estado fundamental permanece neste estado. Quando o detector acelera, este balanço é quebrado. As correlações nas flutuações de ponto-zero do campo ab flutuações de ponto-zero do próprio detector, e o mesmo conseqüentemente é excitado. O excesso possui um espectro térmico e as flutuações no sinal correspondem às de equilíbrio térmico à temperatura T.

Higuchi *et al.* [31] utilizaram uma abordagem quântica ao problema da radiação de uma carga uniformemente acelerada. No referencial co-acelerado, a carga estática encontra-se imersa num banho térmico de Unruh no espaçotempo de Rindler (no espaço-tempo de Rindler uma carga estática equivale a uma carga uniformemente acelerada no espaço-tempo de Minkowski). A interação entre a carga estática e o banho térmico de Unruh resulta na absorção e na emissão estimulada de fótons com energia de Rindler nula, que não são detectáveis por um observador co-acelerado. Em termos mais precisos, a emissão de uma partícula com energia finita e momento transversal de uma fonte uniformemente acelerada no vácuo de Minkowski de acordo com observadores inerciais corresponde a, ou emissão, ou absorção de uma partícula com energia de Rindler nula com o mesmo momento transversal de ou para um banho térmico de Unruh de acordo com observadores uniformemente acelerados. Esta conclusão concorda com os argumentos clássicos de que o observador no referencial co-acelerado não detecta radiação, e o observador num referencial inercial observa radiação emitida pela carga.

Capítulo 2

Reação à radiação em Relatividade Geral

2.1 Força de reação à radiação para campos escalares e tensoriais

No contexto da Relatividade Geral, não se obteve até o presente uma equação de movimento exata e suficientemente simples que descrevesse os efeitos da perda de energia por emissão de radiação gravitacional. Como alternativa, pode-se procurar por uma descrição baseada na Relatividade Restrita.

O método de continuação analítica usado anteriormente no caso de campo vetorial pode ser estendido para equações de movimento de partículas em campos escalares e tensoriais [32]. A equação de movimento de uma partícula puntual com massa m num campo escalar ϕ é da forma:

$$m\ddot{x}_{\mu} + g\phi\ddot{x}_{\mu} + g\phi_{,\nu}\dot{x}^{\nu}\dot{x}_{\mu} = g\phi_{,\mu}, \qquad (2.1)$$

onde g é a constante de acoplamento. O campo retardado no ponto w produzido pela partícula no ponto x(s) vale:

$$\phi(w, x(s)) = -\frac{g}{R} , \text{ com } R = (w - x)^{\sigma} \dot{x}_{\sigma}.$$

$$(2.2)$$

Expressando a eq.(2.1) no ponto não-físico w = x(s + u) e mantendo x(s) fixo, tem- se:

$$m\ddot{x}_{\mu}(s+u) + g\phi(w = x(s+u), x(s))\ddot{x}_{\mu}(s+u) + g\phi_{,\nu}(w = x(s+u), x(s))$$
$$\dot{x}^{\nu}(s+u)\dot{x}_{\mu}(s+u) = g\phi_{,\mu}(w = x(s+u), x(s)).$$
(2.3)

A derivação da eq.(2.2) em relação a x^{ν} fornece:

$$\phi_{,\nu} = \frac{g}{R^2} \left[\dot{x}_{\nu} + \frac{(w-x)_{\nu} \left((w-x)^{\sigma} \ddot{x}_{\sigma} - 1 \right)}{R} \right].$$
(2.4)

Usando as expansões (1.4) - (1.7) nas eq.(2.2) e eq.(2.4) e substituindo estas na eq.(2.3) obtém-se:

$$\begin{split} m\ddot{x}_{\mu}(s+u) - \ddot{x}_{\mu}(s+u) \left(\frac{g^{2}}{u} + O(u)\right) - \dot{x}^{\nu}(s+u)\dot{x}_{\mu}(s+u) \\ \left(\frac{g^{2}}{2u}\ddot{x}_{\nu} + \frac{g^{2}}{6}\dddot{x}_{\nu} - \frac{g^{2}}{3}\dot{x}_{\nu}\ddot{x}_{\sigma}\ddot{x}^{\sigma} + O(u)\right) = -\frac{g^{2}}{2u}\ddot{x}_{\mu} - \frac{g^{2}}{6}\dddot{x}_{\mu} + \frac{g^{2}}{3}\dot{x}_{\mu}\ddot{x}_{\sigma}\ddot{x}^{\sigma} + O(u). \end{split}$$

$$(2.5)$$

Substituindo $\ddot{x}_{\mu} = \ddot{x}_{\mu}(s+u) - u\ddot{x}_{\mu} + O(u^2)$ no lado direito da eq.(2.6), rearranjando e simplificando tem-se:

$$\ddot{x}_{\mu}(s+u)\left(m-\frac{g^{2}}{2u}\right) = \frac{g^{2}}{3}\left(\ddot{x}_{\mu}+\dot{x}_{\mu}\ddot{x}_{\sigma}\ddot{x}^{\sigma}\right) + O(u).$$
(2.6)

Renormalizando-se a massa, a eq.(2.6) fornece no limite $u \to 0$:

$$m_{exp.}\ddot{x}_{\mu} = \frac{g^2}{3} \left(\ddot{x}_{\mu} + \dot{x}_{\mu}\ddot{x}_{\sigma}\ddot{x}^{\sigma} \right).$$
(2.7)

A equação de movimento de uma partícula puntual num campo tensorial $\psi_{\mu\nu}$ é dada por:

$$m\ddot{x}_{\mu} = g \left[\left(\psi_{\mu\nu} + \psi_{\nu\mu} \right) \ddot{x}^{\nu} + \left(\psi_{\mu\nu,\lambda} + \psi_{\nu\mu,\lambda} \right) \dot{x}^{\nu} \dot{x}^{\lambda} - \psi_{\sigma\rho,\lambda} \dot{x}^{\sigma} \dot{x}^{\rho} \dot{x}^{\lambda} \dot{x}_{\mu} - \psi_{\sigma\rho,\lambda} \dot{x}^{\sigma} \dot{x}^{\rho} \dot{x}_{\mu} + \dot{x}^{\sigma} \ddot{x}^{\rho} \dot{x}_{\mu} + \dot{x}^{\sigma} \dot{x}^{\rho} \ddot{x}_{\mu} \right) - \psi_{\sigma\rho,\mu} \dot{x}^{\rho} \dot{x}^{\sigma} \right].$$

$$(2.8)$$

O campo retardado, neste caso, é expresso como

$$\psi_{\mu\nu}(w,x(s)) = \frac{g\dot{x}_{\mu}\dot{x}_{\nu}}{R},\qquad(2.9)$$

e sua derivada em relação a x^{λ} vale:

$$\psi_{\mu\nu,\lambda} = \frac{g}{R^2} \left[-\dot{x}_{\mu} \dot{x}_{\nu} \dot{x}_{\lambda} + (w-x)_{\lambda} \left(\ddot{x}_{\mu} \dot{x}_{\nu} + \dot{x}_{\mu} \ddot{x}_{\nu} - \frac{\dot{x}_{\mu} \dot{x}_{\nu}}{R} \left(\ddot{x}_{\alpha} (w-x)^{\alpha} - 1 \right) \right) \right].$$
(2.10)

Escrevendo a eq.(2.8) no ponto não-físico w = x(s+u) e mantendo x(s) fixo, tem- se:

$$\begin{split} m\ddot{x}_{\mu}(s+u) &= g\left[(\psi_{\mu\nu}(w=x(s+u),x(s)) + \psi_{\nu\mu}(w=x(s+u),x(s)))\right.\\ \ddot{x}^{\nu}(s+u) + (\psi_{\mu\nu,\lambda}(w=x(s+u),x(s)) + \psi_{\nu\mu,\lambda}(w=x(s+u),x(s)))\\ \dot{x}^{\nu}(s+u)\dot{x}^{\lambda}(s+u) - \psi_{\sigma\rho,\lambda}(w=x(s+u),x(s))\dot{x}^{\sigma}(s+u)\dot{x}^{\rho}(s+u)\\ \dot{x}^{\lambda}(s+u)\dot{x}_{\mu}(s+u) - \psi_{\sigma\rho}(w=x(s+u),x(s))\left(\ddot{x}^{\sigma}(s+u)\dot{x}^{\rho}(s+u)\right.\\ \dot{x}_{\mu}(s+u) + \dot{x}^{\sigma}(s+u)\ddot{x}^{\rho}(s+u)\dot{x}_{\mu}(s+u) + \dot{x}^{\sigma}(s+u)\dot{x}^{\rho}(s+u)\right]\\ - \psi_{\sigma\rho,\mu}(w=x(s+u),x(s))\dot{x}^{\rho}(s+u)\dot{x}^{\sigma}(s+u)]\,. \end{split}$$
(2.11)

Usando novamente as expansões (1.4) - (1.7) nas eq.(2.9) e eq.(2.10), substituindo estas na eq.(2.11) e após algumas simplificações obtém-se:

$$\ddot{x}_{\mu}(s+u)\left(m-\frac{g^{2}}{2u}\right) = -\frac{5g^{2}}{3}\left(\ddot{x}_{\mu}+\dot{x}_{\mu}\ddot{x}_{\sigma}\ddot{x}^{\sigma}\right) + O(u).$$
(2.12)

Renormalizando-se a massa, a eq.(2.12) fornece no limite $u \to 0$:

$$m_{exp.}\ddot{x}_{\mu} = -\frac{5g^2}{3} \left(\ddot{x}_{\mu} + \dot{x}_{\mu}\ddot{x}_{\sigma}\ddot{x}^{\sigma} \right).$$
(2.13)

As equações (1.14), (2.7) e (2.13) mostram que a forma para as forças de reação é a mesma, exceto quanto ao valor do fator numérico que multiplica a força: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3} e -\frac{5}{3}$ para campos escalares, vetoriais e tensoriais, respectivamente. Na teoria linearizada da gravitação, o campo gravitacional é equivalente a um campo tensorial e um campo escalar. A expressão para o campo retardado possui a forma $(2\dot{x}_{\mu}\dot{x}_{\nu} - g_{\mu\nu})R^{-1}$. O termo $-g_{\mu\nu}R^{-1}$ fornece o mesmo fator numérico do campo escalar com o sinal trocado. O fator numérico total é igual a $2\left(-\frac{5}{3}\right) - \frac{1}{3}$, ou seja, $-\frac{11}{3}$. O sinal negativo indica um ganho de energia, e no caso de movimento circular num potencial newtoniano, a equação para a variação de energia é análoga à eq.(1.94) com o sinal trocado. Isto está em desacordo com a previsão a partir da fórmula do quadrupolo.

Havas e Goldberg [33], usando um método de aproximações sucessivas das equações de Einstein, obtiveram equações de movimento aproximadas para um sistema de partículas, nas quais os termos explícitos de reação à radiação têm a mesma forma da eq.(2.13) com coeficiente $-\frac{11}{3}$. Havas e Smith [34] aplicaram essas equações ao problema de dois corpos, e utilizando um tratamento internamente consistente, mostraram que há um ganho de energia nos casos de movimento circular e elíptico. Os autores acreditam que este resultado inesperado deva-se ao grau de aproximação usado, e que a inclusão de termos de reação de ordem mais alta possa resultar em perda de energia, mas o cálculo destes termos envolve dificuldades matemáticas consideráveis. Deve-se notar ainda que a eq.(2.13) prevê emissão de radiação dipolar, mas o menor modo no qual há emissão de radiação gravitacional é o quadrupolar. Nas equações de movimento obtidas por Havas e Goldberg, termos de mesma ordem que os termos explícitos de reação à radiação surgem implicitamente devido aos efeitos de retardo na métrica; eles aparecem com sinal contrário e cancelam parte da contribuição dos termos explícitos, garantindo desta maneira que em baixas velocidades a radiação tenha caráter predominantemente quadrupolar. Num sistema de duas partículas, a aproximação de considerar uma das partículas como fixa suprime os efeitos de retardo citados e conseqüentemente inibe o cancelamento de parte dos termos explícitos de reação. Na aproximação de baixas velocidades, isto corresponde ao surgimento indesejado de termos de radiação dipolar. Tal situação é uma particularidade da teoria gravitacional e não encontra análogo na eletrodinâmica. A eq.(2.13) não fornece um bom modelo para a força de reação à radiação gravitacional.

2.2 Algumas propostas de forças de reação à radiação

No âmbito da Relatividade Restrita ainda há outro caminho a explorar. A partir da relação $\dot{x}_{\alpha}\ddot{x}^{\alpha} = 0$ é possível construir um conjunto interessante de quadriforças [35]. Por exemplo:

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{x}_{\alpha}\ddot{x}^{\alpha}) = 0 \Rightarrow \ddot{x}_{\alpha}\ddot{x}^{\alpha} + \dot{x}_{\alpha}\ddot{x}^{\alpha} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\dot{x}_{\alpha}\dot{x}^{\alpha}}{c^{2}}\ddot{x}_{\beta}\ddot{x}^{\beta} + \dot{x}_{\alpha}\ddot{x}^{\alpha} = 0$$
$$\Rightarrow \dot{x}_{\alpha}\left(\ddot{x}^{\alpha} + \frac{\dot{x}^{\alpha}}{c^{2}}\ddot{x}_{\beta}\ddot{x}^{\beta}\right) = 0$$
$$\Rightarrow f_{1}^{\alpha} = \ddot{x}^{\alpha} + \frac{\dot{x}^{\alpha}}{c^{2}}\ddot{x}_{\beta}\ddot{x}^{\beta}$$

Nota-se que f_1^{α} possui a mesma forma da força de reação que aparece nas equações (1.14), (2.7) e (2.13). A quadriforça f_2^{α} é obtida de maneira análoga derivando-se duas vezes $\dot{x}_{\alpha}\ddot{x}^{\alpha} = 0$. Obtém-se:

$$f_2^{\alpha} = \ddot{x}^{\alpha} + \frac{3\dot{x}^{\alpha}}{c^2} \ddot{x}_{\beta} \ddot{x}^{\beta}$$
(2.14)

As quadriforças obtidas deste modo possuem algumas características em comum: contêm apenas derivadas de x^{α} ; satisfazem a condição $f^{\alpha}\dot{x}_{\alpha} = 0$; $\ddot{x}^{\alpha} = 0$ implica em $f^{\alpha} = 0$; não podem ser deduzidas a partir de um princípio variacional local.

Pode a eq.(2.14) representar uma força de reação devido à emissão de radiação gravitacional quadrupolar? A equação de movimento com f_2^{α} seria:

$$\ddot{x}^{\alpha} = \frac{f_{ext.}^{\alpha}}{m} + \frac{nG^2m^2}{c^6} \left(\ddot{x}^{\alpha} + \frac{3\dot{x}^{\alpha}}{c^2} \ddot{x}_{\beta} \ddot{x}^{\beta} \right), \qquad (2.15)$$

onde G é a constante da gravitação, $f_{ext.}^{\alpha}$ representa uma força externa e $n = -\frac{253}{172}$ [36]. A força f_2^{α} é simétrica sob inversão temporal e, portanto, não possui caráter dissipativo. Como verificação, resolveu-se numericamente a eq.(2.15) utilizando-se o método de redução de ordem para o caso de uma força externa $f_{ext.}^{\alpha} = \left(\frac{\vec{f} \cdot \vec{x}}{c}, \vec{f} t\right)$. Com $\vec{f} = -\vec{\nabla} \left(\frac{-GM}{r-r_s}\right)$, $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ tem-se um potencial pseudo-newtoniano que representa aproximadamente o campo gravitacional produzido por um buraco negro de Schwarzschild com massa M. As unidades adotadas foram: 1 unidade de comprimento = 1484 m, 1 unidade de tempo = 4,950 × 10⁻⁶ s e 1 unidade de massa = 2,0 × 10³⁰ Kg (massa do Sol). Deste modo, a velocidade da luz e a constante da gravitação são numericamente iguais a 1. Como valores, tomou-se $M = 3M_{SOL}$, m =0, $1M_{SOL}$, $r_s = 6$ unidades de comprimento, r = 30 unidades de comprimento, e velocidade inicial de modo a obter movimento circular.

As figuras 2.1 e 2.2 mostram, respectivamente, o raio e a energia da partícula em função do tempo próprio. A força f_2^{α} introduz uma oscilação nos valores do raio e energia sem causar decréscimo. O mesmo comportamento se obteve com o potencial newtoniano. Assim, a força de reação proposta não é conveniente.

O próximo membro da família de forças é dado por:

$$f_3^{\alpha} = \frac{d^5 x^{\alpha}}{d\tau^5} + \frac{\dot{x}^{\alpha}}{c^2} (3\ddot{x}_{\beta} \ddot{x}^{\beta} + 4\ddot{x}_{\beta} \ddot{x}^{\beta})$$
(2.16)

A correspondente equação de movimento é:

$$\ddot{x}^{\alpha} = \frac{f_{ext.}^{\alpha}}{m} + \frac{nG^3m^3}{c^9} \left[\frac{d^5x^{\alpha}}{d\tau^5} + \frac{\dot{x}^{\alpha}}{c^2} (3\ddot{x}_{\beta}\ddot{x}^{\beta} + 4\ddot{x}_{\beta}\ddot{x}^{\beta}) \right].$$
 (2.17)



Figura 2.1: Raio em função do tempo próprio sem (linha tracejada) e com (linha contínua) a inclusão de uma possível força de reação à radiação gravitacional (2.14) (1 unidade de comprimento = 1484 m, 1 unidade de tempo = $4,950 \times 10^{-6}$ s).



Figura 2.2: Energia relativística + potencial em função do tempo próprio sem (linha tracejada) e com (linha contínua) a inclusão de uma possível força de reação à radiação gravitacional (2.14) (1 unidade de tempo = $4,950 \times 10^{-6}$ s, 1 unidade de energia = $1,79 \times 10^{47}$ J).

No limite não-relativístico a eq.(2.17) se reduz a:

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{f}_{ext.} + \frac{nG^3m^4}{c^9} \frac{d^5\vec{x}}{dt^5},$$
(2.18)

a partir da qual deduz-se uma expressão para a média da perda de energia:

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{nG^3m^4}{c^9} \overrightarrow{\boldsymbol{x}}^2.$$
(2.19)

Observa-se que a constante n deve ser negativa para haver perda de energia. No caso de movimento circular num potencial newtoniano, a eq.(2.19) fornece a seguinte expressão para o decaimento do raio da órbita:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2nG^5M^2m^3}{c^9r^5}.$$
(2.20)

Esta expressão difere bastante daquela prevista pela fórmula do quadrupolo [37]

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{64G^3M^2m}{5c^5r^3},\tag{2.21}$$

logo a força f_3^α também não é uma boa representação para a reação à radiação gravitacional.

A força de reação derivada a partir da fórmula quadrupolar possui a forma [37]

$$f_i = -\frac{2Gm}{15c^5} \frac{d^5 Q_{ij}}{dt^5} x_j, \qquad (2.22)$$

onde Q_{ij} é o momento de quadrupolo do sistema. Vale ressaltar que a eq.(2.22) é válida apenas no regime de campos gravitacionais não muito intensos e velocidades baixas em relação à velocidade da luz.

Uma força manifestamente covariante satisfazendo $f^{\alpha}\dot{x}_{\alpha} = 0$ que se reduzisse à eq.(2.22) no limite de baixas velocidades deve conter termos sem derivadas em relação ao tempo próprio. No entanto, isto traz problemas. Um exemplo seria:

$$f^{\alpha} = \frac{nGm^2}{c^5} \left(\ddot{x}^{\alpha} + \frac{3\dot{x}^{\alpha}}{c^2} \ddot{x}_{\beta} \ddot{x}^{\beta} \right) x^{\gamma} \dot{x}_{\gamma}.$$
(2.23)

Tem-se $x^{\gamma} \dot{x}_{\gamma} = c^2 t \sqrt{1 + \frac{\dot{x}^2}{c^2}} - \vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}$. No limite não relativístico o tempo aparece explicitamente na expressão, o que não é conveniente. Assim, parece não haver meio simples de se obter uma equação para a força de reação com as propriedades desejadas.

Conclusão

Neste trabalho procurou-se mostrar uma visão geral do problema de reação à radiação dentro da teoria clássica de campos, especialmente em relação a campos de spin 1 (como o campo eletromagnético) e de spin 2 (como o campo gravitacional). Em geral, as equações de movimento de partículas com reação à radiação contêm termos com derivadas de ordem superior a dois, e esta característica lhes confere propriedades não usuais, como a existência de soluções não aceitáveis do ponto de vista físico. Estes tipos de solução geram dificuldades na resolução numérica direta destas equações. O método de redução de ordem permite contornar estas dificuldades. Aplicou-se esta metodologia a várias situações físicas envolvendo a equação de movimento covariante com reação à radiação eletromagnética (equação de Lorentz-Dirac) e comprovou-se sua eficiência na maioria dos casos. Quando possível, as soluções numéricas calculadas pelo método de redução de ordem foram comparadas com soluções analíticas aproximadas. Em geral, quando os efeitos de reação à radiação são pequenos, as técnicas analíticas aproximadas fornecem uma boa descrição do movimento. Deve-se lembrar, no entanto, de duas desvantagens do método de redução de ordem: como se trata de um procedimento iterativo, não há garantias de convergência em todos os casos (como por exemplo, no movimento coulombiano unidimensional atrativo estudado na seção 1.6.5); e quando os efeitos de reação à radiação tornam-se suficientemente grandes, podem surgir comportamentos no movimento não previsíveis por meio do método de redução de ordem.

Discutiu-se ainda o problema de reação à radiação no âmbito da Relatividade Geral. Devido à não-linearidade da teoria, uma descrição geral da força de reação à radiação gravitacional torna-se muito mais difícil, e apenas formulações aproximadas foram feitas até o presente. A aproximação pós-Newtoniana têm sido usada para incluir os efeitos de reação à radiação no movimento de sistemas binários de objetos compactos, um problema de grande importância para a futura astronomia de ondas gravitacionais. Termos de correção nas equações de movimento até ordem $(v/c)^4$ já foram calculados [38]–[39], e o cálculo de correções de ordem $(v/c)^6$ (3PN) está em progresso. Entretanto, este formalismo depende de cálculos longos e elaborados.

Como tentativa de se conseguir uma descrição simples de uma força de reação à radiação gravitacional em termos da Relatividade Restrita, foram examinados alguns membros de uma família de quadriforças não-lagrangianas. Pelo que nos consta, não há trabalhos na literatura nesta linha. Estas quadriforças, no entanto, não se revelaram adequadas. Uma possível generalização para altas velocidades da força de reação à radiação obtida a partir da fórmula do quadrupolo também não se mostrou promissora, devido à presença de termos sem derivadas nos quais o tempo aparece explícitamente.

Num recente artigo, Detweiler [40] apresentou uma abordagem simplifi-

cada da aplicação do método de perturbação no cálculo de reação à radiação gravitacional. Uma partícula sem estrutura interna cria uma perturbação h^{μ} na métrica g^0 . A perturbação pode ser decomposta em duas partes: h^S , que representa a fonte do campo de perturbação, e uma parte h^R . Fornece-se uma expressão analítica para h^S e mostra-se que, sob influência da força de reação, a partícula descreve uma geodésica de $g^0 + h^R$ como correção de primeira ordem. A perturbação h^{μ} é obtida a partir do método de perturbação usual, e usando-se a expressão analítica para h^S , obtém-se a correção h^R . Acreditamos que trabalhos nesta direção possam resultar numa descrição da reação à radiação gravitacional que seja ao mesmo tempo precisa e relativamente simples.

Nos aspectos experimentais, seria interessante uma verificação experimental da validade da equação de Lorentz-Dirac, embora a pequenez dos efeitos de reação à radiação eletromagnética durante intervalos de tempo curtos torne difícil sua medida. Em contrapartida, a detecção de ondas gravitacionais emitidas por sistemas binários de objetos compactos promete fornecer informações detalhadas sobre reação à radiação gravitacional, uma vez que neste caso há a possibilidade de se acompanhar a evolução dos sistemas durante longos períodos de tempo.

Bibliografia

- H. A. Lorentz, *The Theory of Electrons*, 2nd. ed., (Teubner, Leipzig, 1908), reimpresso por Dover, New York (1952)
- [2] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London), A167, 148 (1938)
- [3] C. J. Eliezer, Rev. Mod. Phys., 19, 147 (1947)
- [4] G. N. Plass, Rev. Mod. Phys., **33**:(1), 37 (1961)
- [5] C. M. Will, Prog. Theor. Phys. Supp., **136**, 158 (1999)
- [6] Y. Mino, M. Sasaki, M. Shibata, H. Tagoshi, T. Tanaka, Prog. Theor. Phys. Supp., 128, 1 (1997)
- [7] A. O. Barut, *Phys. Rev. D*, **10**:(10), 3335 (1974)
- [8] Ibison M., Puthoff H. E., J. Phys. A: Math. Gen., 34, 3421 (2001)
- [9] E. Comay, *Phys. Rev. A*, **46**:(8), 5208 (1992)
- [10] C. H. Keitel, C. Szymanowski, P. L. Knight, A. Maquet, J. Phys. B, 31, L75 (1998)

- [11] J. M. Aguirregabiria, J. Phys. A: Math. Gen., 30, 2391 (1997)
- [12] H. J. Bhabba, *Phys. Rev.*, **70**, 759 (1946)
- [13] C. Chicone, S. M. Kopeikin, B. Mashhoon, D. G. Retzloff, *Phys. Lett.* A, 285:(1-2), 17 (2001)
- [14] H. Spohn, Europhys. Lett., **50**:(3), 287 (2000)
- [15] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, Numerical Recipes, (Cambridge University Press, 1986), Cap. 15
- [16] M. Born, Ann. Phys., **30**, 1 (1909)
- [17] W. Pauli, in *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, (Teubner, Leipzig, 1921), vol. 5, p. 539
- [18] G. A. Schott, *Phil. Mag.*, **29**, 49 (1915)
- [19] M. Bondi, T. Gold, Proc. Roy. Soc., A229, 416 (1955)
- [20] T. Fulton, F. Rohrlich, Ann. Phys., 9, 499 (1960)
- [21] D. W. Sciama, P. Candelas, D. Deutsch, Adv. Phys., **30**:(3), 327 (1981)
- [22] D. G. Boulware, Ann. Phys., **124**, 169 (1980)
- [23] R. Lieu, J. Phys. A: Math. Gen., 20, 2405 (1987)
- [24] J. Huschilt, W. E. Baylis, *Phys. Rev. D*, **13** (12), 3256 (1976)
- [25] J. Huschilt, W. E. Baylis, *Phys. Rev. D*, **13** (12), 3262 (1976)

- [26] H. Friedrich, D. Wintgen, *Phys. Rep.*, **183** (2), 37 (1989)
- [27] E. J. Moniz, D. H. Sharp, *Phys. Rev. D*, **15**, 2850 (1977)
- [28] F. E. Low, Ann. Phys., **266**:(1), 274 (1998)
- [29] I. R. Senitzky, *Phys. Rev. Lett.*, **31**:(15), 955 (1973)
- [30] P. W. Milonni, J. R. Ackerhalt, W. A. Smith, *Phys. Rev. Lett.*, **31**:(15), 958 (1973)
- [31] A. Higuchi, G. E. A. Matsas, D. Sudarsky, *Phys. Rev. D*, 45, R3308 (1992); A. Higuchi, G. E. A. Matsas, D. Sudarsky, *Phys. Rev. D*, 46, 3450 (1992)
- [32] A. O. Barut, D. Villarroel, J. Phys. A: Math. Gen., 8:(2), 156 (1975)
- [33] P. Havas, J. N. Goldberg, *Phys. Rev.*, **128**:(1), 398 (1962)
- [34] P. Havas, S. F. Smith, *Phys. Rev.*, **138**:(2B), 495 (1965)
- [35] P. S. Letelier, *Phys. Lett. A*, **143**:(3), 103 (1990)
- [36] A. Kühnel, Ann. Phys., 28, 116 (1964)
- [37] L.D. Landau; E.M. Lifshitz, The Classical Theory of Fields, (Butterworth - Heinemann, Oxford, 1975), p. 356-357
- [38] C. M. Will, A. G. Wiseman, *Phys. Rev. D* 54, 4813 (1996)
- [39] L. Blanchet, T. Darmour, B. R. Iyer, *Phys. Rev. D* 51, 5360 (1995)

[40] S. Detweiler, Phys. Rev. Lett., 86:(10), 1931 (2001)