

---

**RELAÇÕES DE DISPERSÃO DERIVATIVAS  
E AMPLITUDES ELEMENTARES  
EM INTERAÇÕES HADRÔNICAS  
A ALTAS ENERGIAS**

*Manoel J. da Silva Neto*

---

RELAÇÕES DE DISPERSÃO DERIVATIVAS  
E AMPLITUDES ELEMENTARES  
EM INTERAÇÕES HADRÔNICAS  
A ALTAS ENERGIAS

*Manoel J. da Silva Neto*

Orientador: *Prof. Dr. Márcio José Menon*

Dissertação apresentada ao Instituto de Física *Gleb Wataghin*

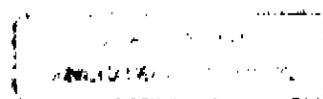
para obtenção do título de Mestre em Física

Área: Interações Hadrônicas

Campinas, UNICAMP, 1998.

Este exemplar corresponde à redação final  
da Tese de Mestrado defendida pelo aluno  
Manoel Januário da Silva Neto e aprovada  
pela comissão Julgadora.

4/11/98



9824025

UNIDADE	IFGW
N.º CHAMADA:	
V	Ex.
TOMBO BC/	36028
PROC.	325/98
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	16/12/28
N.º CPD	

/1154/IF

CM.0011956A-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

Si38r

**Silva Neto, Manoel J. da**

**Relações de dispersão derivativas e amplitudes elementares em interações hadrônicas a altas energias / Manoel J. da Silva Neto. - Campinas, SP : [s.n.], 1998.**

**Orientador: Márcio José Menon.**

**Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".**

- 1. Relação de dispersão. 2. Espalhamento elástico. 3. Espalhamento múltiplo. 4. Prótons. I. Menon, Márcio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.**



INSTITUTO DE FÍSICA  
GLEB WATAGHIN

**Instituto de Física "Gleb Wataghin"  
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE , MANOEL  
JANUÁRIO DA SILVA NETO, APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE  
FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM  
30 DE OUTUBRO DE 1998.**

**COMISSÃO JULGADORA:**

---

**Prof. Dr. Márcio José Menon  
(Orientador do Candidato) IFGW/UNICAMP**

---

**Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira  
IMECC/UNICAMP**

---

**Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar  
IFT/UNESP**

*Aos meus pais*

# Agradecimentos

. Ao Departamento de Física da Universidade Federal do Pará por ter me liberado para a realização deste trabalho.

. À Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.

. Ao *Márcio* pela orientação.

. Aos colegas do grupo *Álvaro, Adilson e Paulo*.

. Ao *Professor Edmundo* pelas sugestões e críticas.

. Aos amigos, dentro e fora do Instituto, em especial, *Antônio Oliveira, Armando, Allen, Rosa, Priscila, Pereira, Sandra, Teresa e Zola*.

*Amigo Tadeu, infelizmente não vamos mais pescar, obrigado por tudo.*

Este trabalho foi realizado com o apoio financeiro da CAPES, por meio do *programa de incentivo à docência - PICD*

# Resumo

O formalismo de difração múltipla de Glauber conecta a amplitude de espalhamento elástico hadrônica (interação hádron-hádron) com a amplitude de espalhamento *elementar* (constituente-constituente). O ponto central desta tese é apresentar um primeiro estudo sobre a utilização de relações de dispersão derivativas na determinação da parte real da *amplitude elementar*, a partir de parametrizações adequadas para sua parte imaginária. Com essa abordagem, no contexto de um modelo fenomenológico anteriormente desenvolvido, obtém-se uma descrição satisfatória das grandezas físicas que caracterizam o espalhamento elástico de hádrons : seção de choque diferencial, seção de choque total e parâmetro  $\rho$  (razão entre a parte real e imaginária da amplitude hadrônica frontal). Apresenta-se também uma discussão crítica do modelo anteriormente desenvolvido e, em certo detalhe, uma revisão do formalismo de difração múltipla e do estabelecimento das relações derivativas a partir das relações integrais, no regime de altas energias.

# Abstract

The Glauber multiple diffraction formalism connects the hadronic elastic scattering amplitude (hadron-hadron interactions) with the *elementary* scattering amplitude (constituent-constituent). In this thesis the central point is a first investigation on the applicability of the derivative dispersion relations in the determination of the real part of the *elementary amplitude*, from suitable parametrizations for its imaginary part. With this approach, in the context of a phenomenological model previously developed, a satisfactory description of the physical quantities that characterize the elastic hadron scattering is achieved, namely, the differential cross section, the total cross section and the  $\rho$  parameter (the ratio of the forward real and imaginary parts of the hadronic amplitude). It is also presented a critical discussion concerning the model previously developed and, in some detail, a review of the multiple diffraction formalism and how to deduce the derivative dispersion relations from the integral ones, in the high energy region.

# Índice

Lista de Tabelas . . . . .	4
Lista de Figuras . . . . .	5
<b>1 Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2 Informações e Dados Experimentais</b>	<b>11</b>
2.1 Colisões Elásticas - Grandezas Características . . . . .	11
2.1.1 Seção de Choque Diferencial . . . . .	12
2.1.2 Parâmetro $\rho$ . . . . .	14
2.1.3 Teorema Óptico e Seção de Choque Total . . . . .	14
2.1.4 Seções de Choque Integradas . . . . .	14
2.1.5 Métodos de Medida . . . . .	15
2.2 Dados Experimentais Utilizados . . . . .	19
<b>3 Formalismo da Difração Múltipla</b>	<b>26</b>
3.1 Aproximação Eiconal . . . . .	27
3.1.1 Espalhamento Elástico . . . . .	27
3.1.2 Equação Integral . . . . .	28
3.1.3 Aproximação Eiconal . . . . .	29

3.2	Espalhamento entre Sistemas Compostos . . . . .	34
3.3	Modelo Fenomenológico . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Relações de Dispersão Integrais</b>	<b>44</b>
4.1	Par de Transformadas de Hilbert . . . . .	44
4.2	Relações de Dispersão - Uma Singularidade no Eixo Real . . . . .	50
4.2.1	Relações de Simetria . . . . .	51
4.2.2	Regra de Subtração . . . . .	53
4.3	Relações de Dispersão - Um Corte de Ramos no Eixo Real . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Relações de Dispersão e o Espalhamento de Hádrons a Altas Energias</b>	<b>61</b>
5.1	Relações de Dispersão na Forma Integral . . . . .	62
5.1.1	Analiticidade . . . . .	62
5.1.2	Relações de Dispersão na Forma Integral . . . . .	64
5.2	Relações de Dispersão Derivativas . . . . .	68
5.2.1	Uma Subtração . . . . .	68
5.2.2	Número Arbitrário de Subtrações . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Aplicações das Relações de Dispersão Derivativas à Amplitudes Elementares</b>	<b>78</b>
6.1	Objetivos Gerais . . . . .	79
6.2	Modelo Prévio de Difração Múltipla . . . . .	79
6.2.1	Cálculo da Amplitude Hadrônica . . . . .	80

6.2.2	Ajuste aos Dados Experimentais . . . . .	82
6.2.3	Resultados . . . . .	83
6.2.4	Discussão Crítica . . . . .	88
6.3	Relações de Dispersão Derivativas e Amplitudes Elementares . . . . .	89
6.3.1	Relação Padrão . . . . .	90
6.3.2	Relação com Parâmetro Livre . . . . .	96
6.3.3	Comparação entre os Resultados e Discussão . . . . .	103
<b>7</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>105</b>
<b>Apêndices</b>		
Apêndice A		
A.1	Variáveis de Mandelstam . . . . .	107
A.2	Lei de Substituição e Simetria de Cruzamento . . . . .	109
Apêndice B - Conceitos Matemáticos . . . . .		111
Apêndice C - Integral de Contorno (Pólo no Eixo Real) . . . . .		113
Apêndice D - Dois Cortes de Ramos . . . . .		114
Apêndice E - Cálculo da Amplitude Hadrônica . . . . .		116
<b>Referências</b>		<b>118</b>

# Lista de Tabelas

Tabela 1 : Número de dados experimentais da seção de choque diferencial num espalhamento $pp$ . . . . .	20
Tabela 2 : Dados experimentais do parâmetro $\rho$ num espalhamento $pp$ . . . . .	22
Tabela 3 : Dados experimentais da seção de choque total $\sigma_t$ num espalhamento $pp$ . . . . .	23
Tabela 4 : Dados experimentais da seção de choque total para raios cósmicos . . . . .	24
Tabela 5 : Valores intermediários para as curvas $\sigma_{\nu-1}$ , $\sigma_{\nu-1,25}$ e $\sigma_{\lambda_{Paramet.}}$ . . . . .	100

# Lista de Figuras

Figura 2.1 Esquema do experimento da colisão de um fluxo de partículas com um alvo fixo . . . . .	12
Figura 2.2 Ajuste do parâmetro $\rho$ . . . . .	19
Figura 2.3 Dados experimentais da seção de choque diferencial para o espalhamento $pp$ . . . . .	21
Figura 2.4 Dados experimentais do parâmetro $\rho$ para o espalhamento $pp$ . . . . .	22
Figura 2.5 Dados experimentais de $\sigma_t$ para o espalhamento $pp$ e extrapolado para raios cósmicos . . . . .	25
Figura 3.1 Esquema do espalhamento de uma partícula numa região de potencial . . . . .	27
Figura 3.2 Vetor parâmetro de impacto $\mathbf{b}$ . . . . .	32
Figura 3.3 Ilustração do choque entre dois sistemas compostos . . . . .	34
Figura 4.1 Região definida pelo contorno $C$ . . . . .	45
Figura 4.2 Região definida pela semicircunferência $C_R$ e o eixo real . . . . .	45
Figura 4.3 Região definida pela semicircunferência $C_R$ , $C_r$ e o eixo real . . . . .	46
Figura 4.5 Região de corte definida pelas circunferências $C_R$ , $C_r$ e os contornos $L_1$ e $L_2$ . . . . .	57
Figura 5.1 Região definida para os dois cortes de ramos relativo aos espalhamentos $pp$ e $\bar{p}p$ . . . . .	63
Figura 5.2 Região de corte limitada pelas circunferências $C_R$ e $C_r$ . . . . .	64

Figura 5.3 Curvas das funções $F(y)$ e $f(y)$ . . . . .	71
Figura 6.1 Curva do parâmetro $C(s)$ . . . . .	84
Figura 6.2 Curva do parâmetro $\alpha^{-2}(s)$ . . . . .	85
Figura 6.3 Curva do parâmetro $\lambda(s)$ . . . . .	85
Figura 6.5 Seção de Choque Diferencial . . . . .	86
Figura 6.6 Seção de Choque Total com extrapolação para raios cósmicos . . . . .	87
Figura 6.4 Curva do parâmetro $\rho(s)$ . . . . .	87
Figura 6.7 Curvas de $\lambda(s)$ . . . . .	92
Figura 6.8 Seção de Choque Diferencial (RDD com $\nu = 1$ ) . . . . .	93
Figura 6.9 Seção de Choque Total usando RDD ( $\nu = 1$ ) e extrapolação para raios cósmicos . . . . .	94
Figura 6.10 Curva de $\rho(s)$ com RDD ( $\nu = 1$ ) . . . . .	95
Figura 6.11 Ilustração do procedimento para o ajuste de $\nu$ . . . . .	97
Figura 6.12 Curva do ajuste de $\nu$ . . . . .	98
Figura 6.13 Seção de choque diferencial com RDD ( $\nu = 1.25$ ) . . . . .	99
Figura 6.14 Seção de choque total com RDD ( $\nu = 1.25$ ) e energias de raios cósmicos . . . . .	101
Figura 6.15 Curva de $\rho(s)$ com RDD ( $\nu = 1.25$ ) . . . . .	102
Figura 6.16 Curva de $\lambda(s)$ com RDD ( $\nu = 1.25$ ) . . . . .	102
Figura 6.17 Comparação entre os resultados para o parâmetro $\rho(s)$ . . . . .	103

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo teórico das interações hadrônicas e do espalhamento de hádrons em particular, deve estar associado à teoria quântica de campos : a cromodinâmica quântica. Entretanto, como a interação não pode ser caracterizada por um potencial localizado e a constante de acoplamento da teoria cresce com a diminuição do momento transferido, os processos suaves, a pequenos momentos transferidos (elásticos), não podem ser abordados de maneira efetiva. Uma estratégia importante no estudo das interações hadrônicas relacionada a esses processos é a de abordagens através de modelos fenomenológicos e técnicas que permitem a utilização de princípios gerais da teoria com base em resultados experimentais [1,2,3]. Nesse sentido, as relações de dispersão têm um papel central pois decorrem do princípio de analiticidade (causalidade) e correlacionam as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento.

Utilizando-se modelos fenomenológicos para descrever o espalhamento de hádrons a

altas energias é possível obter a amplitude hadrônica como uma função complexa, cujo módulo e partes real e imaginária são associadas as grandezas físicas: seção de choque diferencial, seção de choque total e parâmetro  $\rho$  (razão entre as partes real e imaginária da amplitude frontal) [1,4]. Porém, alguns modelos não relacionam matematicamente as partes real e imaginária da amplitude hadrônica, e com isso surge a possibilidade de uma solução através das relações de dispersão.

Genericamente essas relações são integrais, envolvendo como variável a energia no intervalo de zero a infinito e portanto são relações não locais. Entretanto, para interações a altas energias (energias no centro de massa acima de  $10^{10} \text{ eV} = 10 \text{ GeV}$ ) é possível deduzir relações diferenciais, as quais, dentro das aproximações, são relações quase locais [5,6,7,8]. O objetivo deste trabalho é uma revisão sobre o estabelecimento das relações de dispersão diferenciais a partir das integrais e um estudo de sua aplicação no espalhamento elástico de hádrons através de um tipo específico de modelo fenomenológico, baseado no *Formalismo da Difração Múltipla* de Glauber.

Através desse formalismo pode-se conectar a amplitude de espalhamento (elástico) entre hádrons com a amplitude de espalhamento entre seus constituintes (amplitude elementar). Apesar de, desde meados da década de 70, várias publicações terem tratado da aplicação das relações derivativas à amplitude entre hádrons, neste trabalho, apresentamos um primeiro estudo de sua aplicabilidade à amplitude elementar (constituente-constituente).

No modelo de difração múltipla desenvolvido anteriormente, assumiu-se uma relação de proporcionalidade entre as partes real e imaginária da amplitude elementar. O fator de

proporcionalidade, denotado  $\lambda$ , foi expresso em termos da energia no centro de massa da colisão,  $\sqrt{s}$ , através de uma parametrização particular,  $\lambda(s)$ . Utilizando-se parametrizações apropriadas para a parte imaginária da amplitude elementar e para os fatores de forma hadrônicos obteve-se uma descrição satisfatória das grandezas físicas acima referidas. Apesar disso, nessa abordagem, não se tem uma justificativa teórica para a parametrização  $\lambda(s)$ , a qual corresponde a uma hipótese ad hoc.

No presente trabalho, através do uso da relação de dispersão derivativa, deduzimos explicitamente uma expressão analítica para  $\lambda(s)$ . Com isso obtivemos uma justificativa teórica, baseada no princípio de analiticidade (causalidade).

A relação de dispersão derivativa geral depende de um parâmetro livre, denotado neste trabalho por  $\nu$ . Inicialmente fizemos um teste com a relação padrão, usual na literatura, e caracterizada pelo valor  $\nu = 1$ ; em seguida obtivemos uma otimização dos resultados considerando esse parâmetro livre. Para um valor fixo  $\nu = 1.25$  obtivemos descrições satisfatórias dos dados e informações experimentais, levando a previsões para o parâmetro  $\rho(s)$  (hadrônico) na região de altas energias, principalmente seu comportamento assintótico.

Inicialmente no capítulo 2 faremos uma revisão das grandezas físicas de interesse e dos dados experimentais analisados. No capítulo 3 são apresentados os aspectos essenciais do formalismo de difração múltipla e do modelo fenomenológico utilizado.

No capítulo 4 faremos os primeiros estudos das relações de dispersão integrais no sentido geral, sem especificar o sistema físico a ser considerado. Neste caso, as relações de dispersão são introduzidas a partir do par de transformadas de Hilbert (sujeitas a con-

tas propriedades como causalidade, analiticidade e outras). No capítulo 5, com base em propriedades analíticas do espalhamento  $pp$  e  $p\bar{p}$  a altas energias e a partir das relações integrais, deduzimos as relações de dispersão derivativas [8]. No capítulo 6 utilizamos a relação de dispersão derivativa no contexto do modelo de difração múltipla [20], mais especificamente no tratamento da amplitude elementar (constituente-constituente). Finalmente no capítulo 7 apresentamos as conclusões e perspectivas deste trabalho.

Neste texto utilizamos a convenção usual em Física de Altas Energias,  $\hbar = 1$ ,  $c = 1$  e com unidades de energia  $GeV$  ( $10^9 eV$ ) e  $TeV$  ( $10^{12} eV$ ).

# Capítulo 2

## Informações e Dados Experimentais

Neste capítulo faremos uma apresentação das informações experimentais de interesse neste trabalho, assim como, dos dados experimentais utilizados.

### 2.1 Colisões Elásticas - Grandezas Características

Num processo de colisão de um fluxo de partículas com um determinado alvo fixo, podem ocorrer dois tipos de reações

- Espalhamento Elástico : *não existe mudança na estrutura interna das partículas*

- Espalhamento Inelástico  $\left\{ \begin{array}{l} \textit{com excitação} \\ \textit{produção de partículas} \end{array} \right.$

No caso deste trabalho só consideramos espalhamento elástico. As informações experimentais de interesse correspondem a três grandezas : seção de choque total, diferencial e parâmetro  $\rho$ . A seguir vamos estudar como essas grandezas são definidas e determinadas

experimentalmente.

### 2.1.1 Seção de Choque Diferencial

A seção de choque diferencial é um dado experimental de muita importância, pelo fato de outras grandezas serem determinadas a partir dela. Para defini-la vamos admitir o seguinte experimento (figura 2.1)

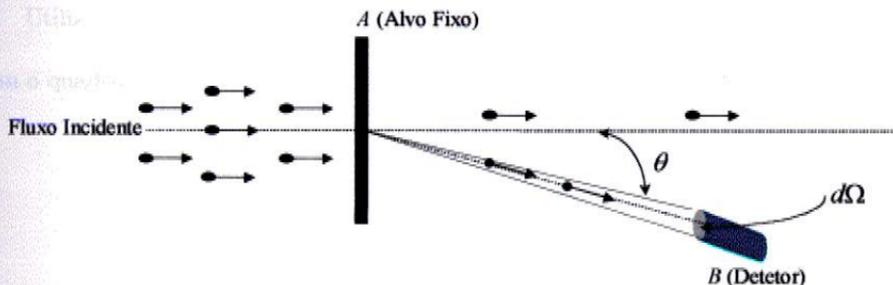


Figura 2.1

Um fluxo de partículas colide num alvo fixo  $A$  e parte das partículas espalhadas são detectadas em  $B$  [10]. No caso de um espalhamento elástico, o fluxo incidente é dado pelo número de partículas por unidade de volume  $n_i$ , movendo-se com uma velocidade  $v$  em relação ao alvo

$$\Phi = n_i v, \quad (2.1)$$

enquanto que o fluxo espalhado numa direção  $\theta$  é detectado em  $B$  num ângulo sólido  $d\Omega$ .

Com isso o número de partículas por unidade de tempo será

$$d\mathcal{N} = \Phi n_{\text{alv}} \Sigma(\theta) d\Omega , \quad (2.2)$$

onde  $n_{\text{alv}}$  é o número de alvos espalhadores e  $\Sigma(\theta)$  é a *seção de choque diferencial*, que também pode ser expressa como

$$\Sigma(\theta) = \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} . \quad (2.3)$$

Utilizando-se as variáveis de Mandelstam (apêndice A), o ângulo  $\theta$  pode ser relacionado com o quadrimomento transferido  $t$

$$t = -2k^2(1 - \cos \theta) . \quad (2.4)$$

Com isso a seção de choque diferencial elástica será

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi}{k^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} , \quad (2.5)$$

sendo  $k$  o momento no sistema de centro de massa.

A seção de choque é também expressa em termos de uma *amplitude de espalhamento elástico*  $F(s, t)$  em função da energia no centro de massa  $\sqrt{s}$  e do quadrimomento transferido  $t$  [4]

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi}{k^2} |F(s, t)|^2 . \quad (2.6)$$

### 2.1.2 Parâmetro $\rho$

Para um espalhamento frontal ( $t = 0$ ), o parâmetro  $\rho$  é definido como a razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento em função da energia

$$\rho(s) \equiv \frac{\text{Re } F(s, 0)}{\text{Im } F(s, 0)} . \quad (2.7)$$

### 2.1.3 Teorema Óptico e Seção de Choque Total

Da teoria do espalhamento, obtemos uma relação entre a seção de choque total e a parte imaginária da amplitude num espalhamento frontal

$$\sigma_{tot}(s) = 4\pi \text{Im } F(s, 0) , \quad (2.8)$$

relação esta denominada *teorema óptico*. Uma dedução formal do teorema óptico pode ser encontrada em [10].

### 2.1.4 Seções de Choque Integradas

A partir de parametrizações analíticas convenientes dos dados experimentais (seção seguinte) determina-se a seção de choque elástica através da integração da seção de choque diferencial

$$\sigma_{el} = \int \frac{d\sigma}{dt} dt . \quad (2.9)$$

A seção de choque total é obtida do teorema óptico, eq.(2.8), e a seção de choque

inelástica através da diferença

$$\sigma_{inel} = \sigma_{tot} - \sigma_{el} . \quad (2.10)$$

## 2.1.5 Métodos de Medida

Nesta seção discutiremos alguns métodos de medida relacionados às grandezas físicas de interesse: seção de choque diferencial, seção de choque total e parâmetro  $\rho$ . Maiores detalhes podem ser encontrados nos artigos de revisão de Matthiae [1] e de Block e Cahn [4].

### • Seção de Choque Diferencial

Mede-se a taxa de contagem  $\Delta N(t)$ , dada pelo *nº de contagens / seg /  $\Delta t$*  no intervalo  $\Delta t$  em torno de um dado valor  $t$  do momento transferido. A seção de choque diferencial é expressa por

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{L} \Delta N(t) , \quad (2.11)$$

onde  $L$  é a luminosidade (dimensões  $L^{-2} T^{-1}$ ), medida através do método de Van der Meer [1,4].

### • Seção de Choque Total

Vários métodos são utilizados e na prática podem funcionar como um processo de realimentação para se obter um valor final, envolvendo inclusive estimativas para o parâmetro  $\rho$ , como veremos.

(a) Um dos métodos corresponde à medida da taxa total de eventos inelásticos :

$$N_{el} + N_{in} = L\sigma_t . \quad (2.12)$$

(b) Um segundo método, parte de uma parametrização para a seção de choque diferencial, na região de pequeno momento transferido ( $t \lesssim 0.5 \text{ GeV}^2$ ). Como nessa região o decréscimo da seção de choque diferencial é exponencial, toma-se

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \Big|_{t=0} e^{-Bt} . \quad (2.13)$$

Expressando

$$\frac{d\sigma}{dt} = \pi |\text{Re } F(s, t) + i \text{Im } F(s, t)|^2 ,$$

e utilizando o teorema óptico, eq.(2.8), e a definição do parâmetro  $\rho$ , eq.(2.7), temos

$$\frac{d\sigma}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{(1 + \rho^2)\sigma_t^2}{16\pi} . \quad (2.14)$$

Com isso, da eq.(2.11) obtemos o valor experimental para a grandeza

$$\sigma_t(1 + \rho^2)^{1/2} = 4 \left[ \pi \frac{d\sigma}{dt} \Big|_{t=0} \right]^{1/2} = 4 \left[ \pi \frac{\Delta N(0)}{L} \right]^{1/2} . \quad (2.15)$$

Abaixo discute-se a determinação de  $\sigma_t$  .

(c) Um terceiro método, denominado independente da luminosidade, corresponde à

eliminação de  $L$  nas equações (2.11) e (2.15). Com isso obtém-se o valor experimental para a grandeza

$$\sigma_t(1 + \rho^2) = \frac{16\pi\Delta N(0)}{N_{tot}} . \quad (2.16)$$

Nos métodos (b) e (c) o valor de  $\sigma_t$  depende do valor de  $\rho$  . Porém como na faixa de energia de interesse (veja parágrafo seguinte)

$$|\rho| < 0.2 ,$$

o erro na determinação de  $\sigma_t$  é  $< 2 \%$  no método (b) e  $< 4 \%$  no método (c). Assim, uma estimativa do parâmetro  $\rho$  é suficiente para obtenção de  $\sigma_t$  .

#### • Parâmetro $\rho$

Na região de momento transferido suficientemente pequeno (grande parâmetro de impacto),  $t < 0.01 \text{ GeV}^2$  , além do espalhamento hadrônico temos a contribuição da interação coulombiana. Nesta região a seção de choque diferencial é dada pela soma da seção de choque hadrônica (nuclear) com a seção de choque coulombiana e com um termo correspondente à interferência coulomb - nuclear. Vamos denotar nesta região :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma_n}{dt} + \frac{d\sigma_c}{dt} + \frac{d\sigma_{cn}}{dt} . \quad (2.17)$$

Em termos das amplitudes de espalhamento essa grandeza é expressa por

$$\frac{d\sigma}{dt} = |F_c e^{i\alpha\varphi(t)} + F_n|^2 , \quad (2.18)$$

onde :

-  $F_n$  é a amplitude nuclear parametrizada na forma

$$F_n = \frac{(\rho + i)\sigma_t e^{Bt/2}}{4\sqrt{\pi}} . \quad (2.19)$$

-  $F_c$  é a amplitude coulombiana

$$F_c = \frac{2\alpha G^2(t)}{t} \sqrt{\pi} , \quad (2.20)$$

sendo  $G(t)$  o fator de forma eletromagnético e  $\alpha = 1/137$  a constante de estrutura.

-  $\varphi$  é o fator de fase, calculado através de várias abordagens [1,4]

$$\varphi(t) = \log(0.07/t) - 0.577 . \quad (2.21)$$

Com isso, a seção de choque diferencial total é expressa por

$$\frac{d\sigma}{dt} = \pi \left| G^2(t) \frac{2\alpha}{t} e^{i\alpha\varphi(t)} + (\rho + i) \frac{\sigma_t}{4\pi} e^{Bt/2} \right|^2 . \quad (2.22)$$

Com alguma estimativa (experimental) para  $\sigma_t$  o parâmetro  $\rho$  é determinado através de ajuste dessa expressão aos dados experimentais da seção de choque diferencial na região de interferência coulomb nuclear. A figura 2.2 mostra um exemplo de ajuste no caso de espalhamento  $\bar{p}p$  a 540 GeV [1].

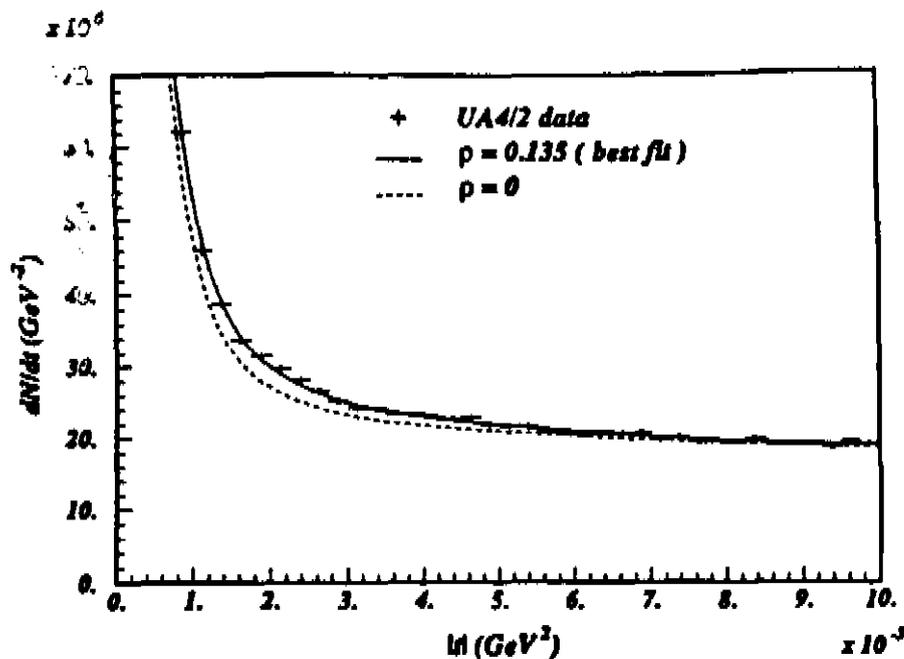


Figura 2.2

## 2.2 Dados Experimentais Utilizados

Neste trabalho investigamos inicialmente o espalhamento elástico  $pp$  na faixa de energia

$$13.7 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 62.5 \text{ GeV} .$$

Nessa região objetivamos a descrição das grandezas seção de choque diferencial, seção de choque total e parâmetro  $\rho$ . Os dados experimentais correspondentes foram obtidos no anel de colisão ISR (Intersecting Storage Ring) - CERN, e correspondem, atualmente, à faixa de energia mais alta atingida em aceleradores com feixes colidentes de prótons.

A tabela 1 e a fig. 2.3 mostram as informações experimentais sobre a seção de choque diferencial, a tabela 2 e a fig. 2.4 os valores correspondentes do parâmetro  $\rho$  e a tabela 3 os valores da seção de choque total.

Através do modelo fenomenológico, a ser descrito no capítulo 6, faremos também previsões para energias mais altas.

Na região

$$6 \text{ TeV} \leq \sqrt{s} \leq 24 \text{ TeV} ,$$

existem informações experimentais sobre seção de choque total obtidas em experiências de raios cósmicos. Nesse caso, a seção de choque  $pp$  é extraída da seção de choque  $p - ar$ , através de modelos nucleares e procedimentos específicos. Atualmente existe uma discrepância entre os dados obtidos através de dois tipos de análise e na mesma região de energia.

Uma nova análise dos dados obtidos pela colaboração Akeno, realizada por Nikolaev, levou a resultados distintos da publicação original : de acordo com Nikolaev os dados de Akeno para seções de choque  $pp$  foram subestimados em  $30 \text{ mb}$ . Os valores de  $\sigma_t$  publicados por Akeno e Nikolaev são apresentados na tab.4 . Esses dados, juntamente com os obtidos em aceleradores (tab. 3) são mostrados na figura 2.5 .

$\sqrt{s} \text{ (GeV)}$	13.8	19.4	23.5	30.7	44.7	52.8	62.5
Nº de Dados	100	124	134	173	205	206	125

Tab 1 : Número de dados experimentais da seção de choque diferencial para cada energia [14,15].

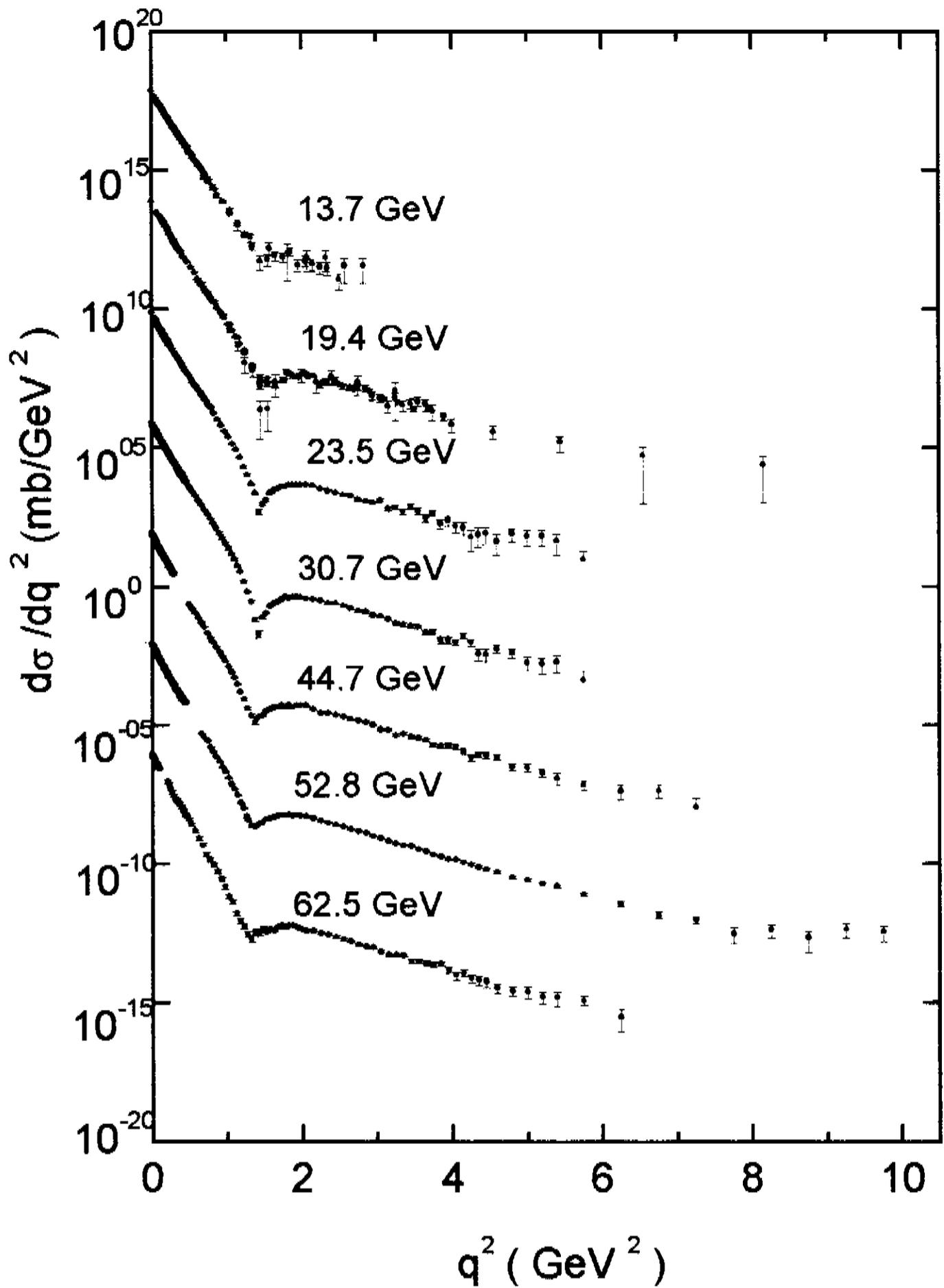


Figura 2.3 : Dados experimentais para a seção de choque diferencial num espalhamento  $pp$ . Dados para cada energia foram multiplicados por fatores  $10^{\pm 2}$ .

$\sqrt{s}$ (GeV)	$\rho \pm \Delta\rho$
13.8	-0.074 $\pm$ 0.018
19.4	0.019 $\pm$ 0.016
23.5	0.020 $\pm$ 0.050
30.7	0.042 $\pm$ 0.011
44.7	0.062 $\pm$ 0.011
52.8	0.078 $\pm$ 0.010
62.5	0.095 $\pm$ 0.011

Tab 2 : Dados experimentais de  $\rho(s)$ , num espalhamento  $pp$  [11,12].

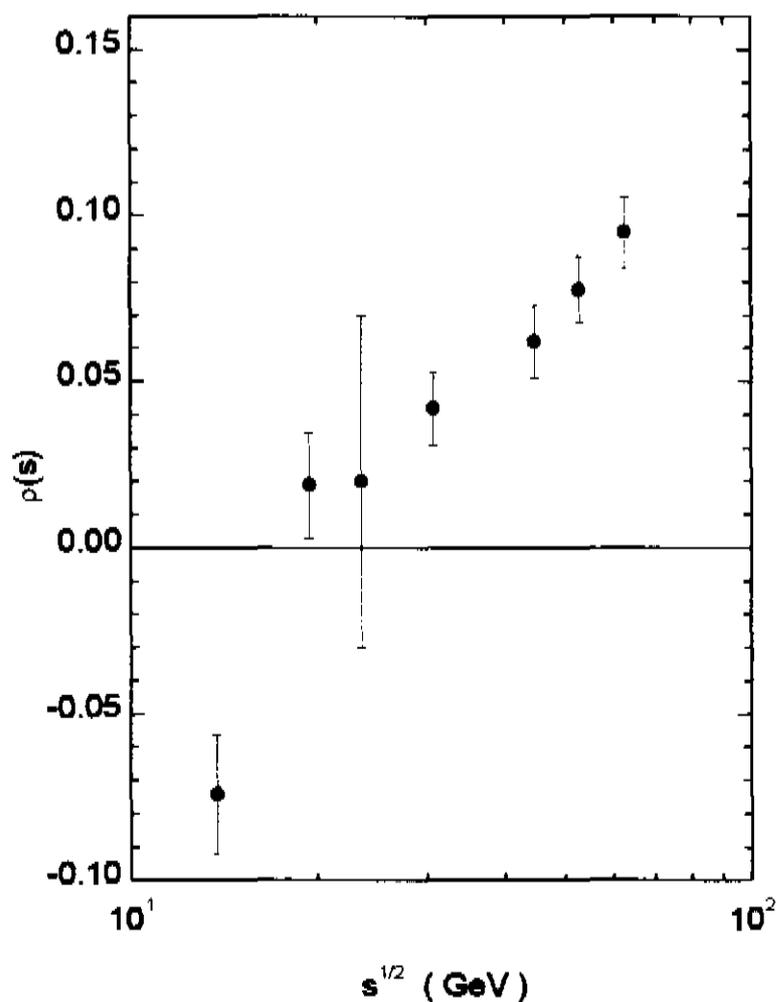


Figura 2.4 : Gráfico da tabela 2 do parâmetro  $\rho$  em função da energia.

$\sqrt{s}$ (GeV)	$\sigma_t \pm \Delta\sigma$ (mb)
13.8	38.46 $\pm$ 0.04
19.4	38.98 $\pm$ 0.04
23.5	38.94 $\pm$ 0.17
30.7	40.14 $\pm$ 0.17
30.7	40.22 $\pm$ 0.21
30.7	41.26 $\pm$ 0.20
44.7	41.79 $\pm$ 0.16
52.8	42.67 $\pm$ 0.19
52.8	42.01 $\pm$ 0.21
62.7	43.32 $\pm$ 0.23
62.7	43.82 $\pm$ 0.30
62.7	43.70 $\pm$ 0.30

Tab 3 : Dados experimentais de  $\sigma_t(s)$  para um espalhamento  $pp$  [11,12,13].

$\sqrt{s}$ (TeV)	$\sigma_t^{Akeno}$ (mb)	$\sigma_t^{Nikolaev}$ (mb)
6.0	$91 \pm 14$	$120 \pm 15$
7.9	$98 \pm 16$	$130 \pm 18$
10.5	$116 \pm 17$	$154 \pm 17$
13.8	$103 \pm 26$	$135 \pm 29$
18.2	$100 \pm 28$	$129 \pm 30$
24.0	$122 \pm 35$	$162 \pm 38$

Tab 4 : Dados experimentais para  $\sigma_t$  em raios cósmicos (Akeno [16] e Nikolaev [17]).

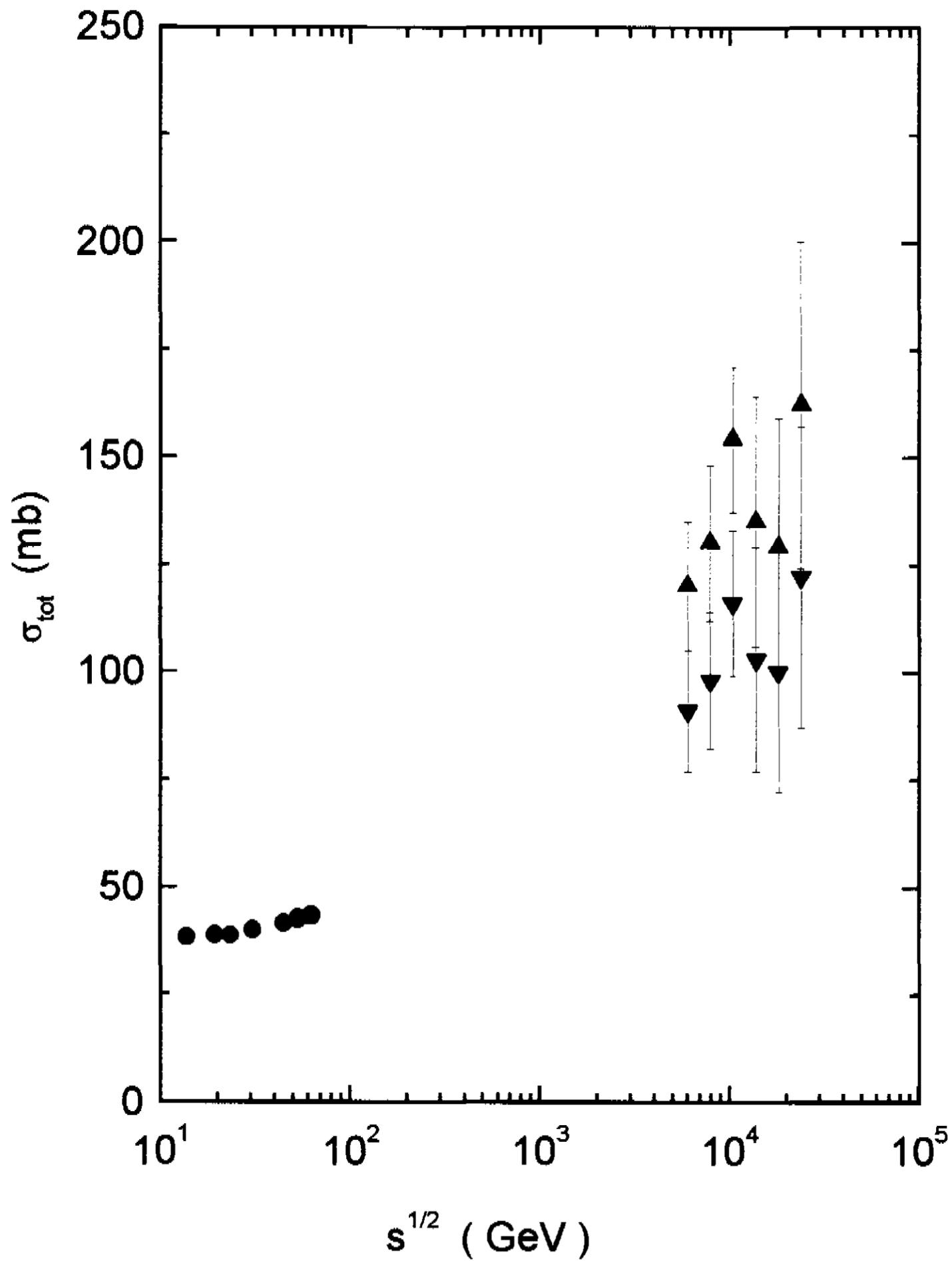


Figura 2.5 : Dados experimentais de  $\sigma_t$  de aceleradores (círculos pretos) e raios cósmicos (Nikolaev : triângulos pretos ; Akeno : triângulos brancos ) - Tab 3 e 4.

# Capítulo 3

## Formalismo da Difração Múltipla

O formalismo da difração múltipla (FDM) foi desenvolvido para o estudo de espalhamento entre dois sistemas compostos. Neste trabalho consideramos um espalhamento  $pp$ , onde cada próton é visto como um sistema de constituintes.

Inicialmente faremos uma apresentação do método de aproximação eiconal, em seguida, através do FDM, chegaremos numa expressão teórica para amplitude de espalhamento em função da eiconal no limite de altas energias. E por fim, faremos uma apresentação do modelo fenomenológico no cálculo da eiconal.

Apresentaremos aqui apenas uma revisão dos pontos essenciais, uma discussão detalhada pode ser encontrada em [12,18,19].

## 3.1 Aproximação Eiconal

A *aproximação eiconal* é um método, através do limite de altas energias, para a solução da equação de Schrödinger, num espalhamento elástico. Antes de apresentarmos este método faremos uma revisão sobre alguns aspectos do espalhamento elástico não relativístico.

### 3.1.1 Espalhamento Elástico

Consideremos o espalhamento não relativístico de uma partícula que sofre a ação de um potencial  $V(\mathbf{r})$  numa determinada região (figura 3.1)

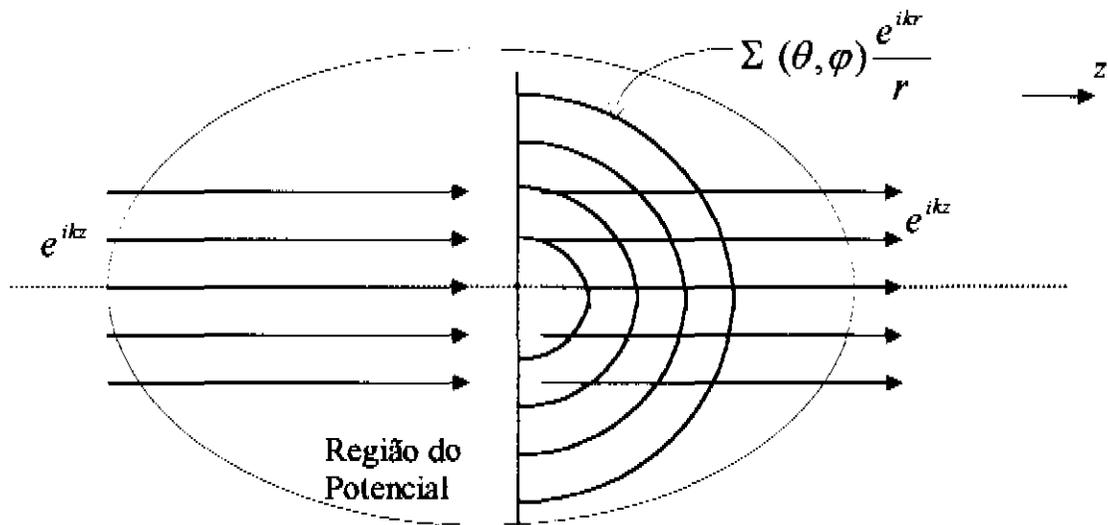


Figura 3.1

Nesse caso a equação de Schrödinger será

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi(\mathbf{r}) = 2mV(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) , \quad (3.1)$$

onde  $k^2 = 2mE$ ,  $m$  é a massa reduzida e  $E$  a energia da partícula incidente.

Nesse caso  $\Psi(\mathbf{r})$  após o espalhamento (para  $r$  grande comparado às dimensões do alvo), terá a seguinte forma assintótica

$$\Psi(\mathbf{r}) \sim e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \mathcal{F}(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

ou seja, a onda resultante (longe do potencial) é a soma da onda plana incidente com uma onda esférica de amplitude  $\mathcal{F}(\theta, \varphi)$  que depende do potencial.

### 3.1.2 Equação Integral

Usando a função de Green, como uma solução para a equação de Schrödinger, teremos

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (3.3)$$

onde

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{m}{2\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (3.4)$$

é a função de Green que satisfaz a equação

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 2m\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.5)$$

e considerando o comportamento assintótico ( $r \rightarrow \infty$ ), podemos aproximar o termo

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow r - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r}. \quad (3.6)$$

Substituindo (3.4) em (3.3)

$$\Psi(\mathbf{r}) \approx e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (3.7)$$

e pela aproximação de (3.6) teremos

$$\Psi(\mathbf{r}) \approx e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi} \frac{e^{iKr}}{r} \int e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (3.8)$$

onde

$$\mathbf{k}' = k \frac{\mathbf{r}}{r} = k\hat{r}.$$

Comparando (3.8) com (3.2) teremos uma amplitude em função dos vetores  $\mathbf{k}'$  e  $\mathbf{k}$ , ou seja, uma amplitude de espalhamento da direção  $\mathbf{k}$  para  $\mathbf{k}'$

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{m}{2\pi} \int e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (3.9)$$

### 3.1.3 Aproximação Eiconal

Nosso objetivo é achar uma solução para equação de Schrödinger levando em conta o limite para altas energias. Esse procedimento é conhecido como *aproximação eiconal*.

Da equação de Schrödinger tridimensional

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = 2mV(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) , \quad (3.10)$$

admitindo o limite para altas energias

$$E \gg V \quad \text{e} \quad ka \gg 1 \quad a \rightarrow \text{alcance do potencial} .$$

Nesse caso, para a região do potencial, a onda incidente pode ser escrita como

$$\Psi_{inc}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\Phi(\mathbf{r}) , \quad (3.11)$$

onde  $\Phi(\mathbf{r}) = 1$  para  $z \rightarrow -\infty$ .

Substituindo (3.11) em (3.10), e tomando a direção de propagação na direção do eixo  $z$ , ou seja,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kz$  temos

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) + 2ik\frac{d\Phi(\mathbf{r})}{dz} = 2mV(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}). \quad (3.12)$$

Admitindo que o potencial varie lentamente com  $\mathbf{r}$ , de forma que

$$|\nabla^2\Phi(\mathbf{r})| \ll \left| 2ik\frac{d\Phi(\mathbf{r})}{dz} \right| ,$$

então

$$\frac{d\Phi(\mathbf{r})}{dz} = -\frac{i}{v}V(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) , \quad (3.13)$$

onde  $v = \frac{k}{m}$  . Integrando no limite de  $\Phi$  ( $\Phi(\mathbf{r}) = 1$  para  $z \rightarrow -\infty$ ) teremos

$$\Phi(\mathbf{r}) = \exp\left(-\frac{i}{v}\int_{-\infty}^z V(x, y, z')dz'\right) . \quad (3.14)$$

Logo a onda incidente para a região do potencial é expressa por

$$\Psi_{inc}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \exp\left[ikz - \frac{i}{v}\int_{-\infty}^z V(x, y, z')dz'\right] , \quad (3.15)$$

e, portanto, a solução em (3.8) para a onda espalhada e em (3.9) para a amplitude de espalhamento será, respectivamente

$$\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d\mathbf{r}' e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \exp\left[ikz - \frac{i}{v}\int_{-\infty}^{z'} V(x, y, z'')dz''\right] , \quad (3.16)$$

e

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{m}{2\pi} \int d\mathbf{r}' e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \exp\left[-\frac{i}{v}\int_{-\infty}^{z'} V(x, y, z'')dz''\right] . \quad (3.17)$$

Representando por  $\mathbf{b}$  o parâmetro de impacto, podemos relacioná-lo aos vetores  $\mathbf{r}'$  e  $\mathbf{z}'$  através da figura 3.2

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}' - \mathbf{z}' .$$

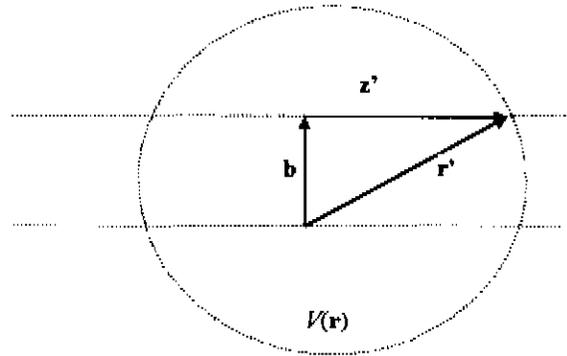


Figura 3.2

Voltando à eq.(3.17) e considerando  $(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  perpendicular a  $\mathbf{z}$  para pequenos ângulos no fator  $\exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}')$

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}' \cong (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b} , \quad (3.18)$$

e com algumas manipulações algébricas, teremos

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{k}{2i\pi} \int d^2b e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}} \exp \left( -\frac{i}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\mathbf{b} + \mathbf{z}') dz' - 1 \right) , \quad (3.19)$$

onde o termo

$$\chi(\mathbf{b}) \equiv -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\mathbf{b} + \mathbf{z}') dz' , \quad (3.20)$$

é definido como *função eiconal*. Com isso

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{k}{2i\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} d^2b e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}} \exp [i\chi(\mathbf{b}) - 1] , \quad (3.21)$$

que para pequenos ângulos resulta em

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b} = kb\theta \cos \phi . \quad (3.22)$$

Podemos ainda simplificar (3.21) para um potencial com simetria azimutal, utilizando

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\lambda \cos \phi)} d\phi = J_0(\lambda) , \quad (3.23)$$

logo a amplitude será expressa, com  $\chi(\mathbf{b}) = \chi(b)$ , na forma

$$\mathcal{F}(\theta) = \frac{k}{i} \int_0^{+\infty} b db J_0(kb\theta) [e^{i\chi(\mathbf{b})} - 1] . \quad (3.24)$$

Portanto temos que amplitude de espalhamento pode é descrita por uma transformada de Fourier-Bessel (ou Hankel).

Este resultado é de extrema importância para o nosso trabalho, na busca de um modelo analítico para as grandezas físicas experimentais, que estão em função da amplitude de espalhamento. Para isso, será necessário atribuímos um modelo para eiconal, conforme veremos no final do capítulo.

## 3.2 Espalhamento entre Sistemas Compostos

Consideremos o espalhamento entre dois sistemas  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , onde cada sistema é formado por constituintes<sup>1</sup> (figura 3.3) [9,18,19].

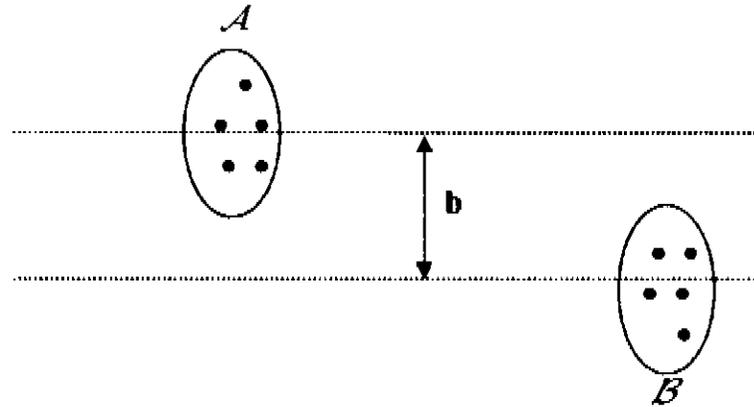


Figura 3.2

Admitimos que cada sistema tenha uma densidade  $\varrho_A$  e  $\varrho_B$ , e que a função de onda para cada sistema no estado fundamental seja expressa por

$$|\Psi_A|^2 = \varrho_A(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A), \quad (3.25)$$

$$|\Psi_B|^2 = \varrho_B(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_B), \quad (3.26)$$

onde  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A)$ ;  $(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_B)$  são coordenadas dos sistemas  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  respectivamente.

Portanto no caso do espalhamento elástico entre dois sistemas compostos a amplitude

---

<sup>1</sup>Neste trabalho não discutiremos a natureza dos constituintes (do que são formados ou a que partículas estão associados). Apenas os consideramos como constituintes internos do sistema.

será descrita através da matriz

$$F_{AB} = \langle \Psi_A \Psi_B | F(\mathbf{q}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_B) | \Psi_A \Psi_B \rangle , \quad (3.27)$$

na qual o operador  $F$  é dado por

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_B) = \frac{i}{2\pi} \int d^2b \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) [1 - \exp(i\chi_{TOT}(\mathbf{b}, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_B))] , \quad (3.28)$$

onde  $\mathbf{q}$  é o momento transferido ( $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ ),  $\mathbf{b}$  o parâmetro de impacto e  $\chi_{TOT}$  a função eiconal total. Logo substituindo (3.28) em (3.27) obtemos

$$F_{AB} = \frac{i}{2\pi} \int d^2b \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) \langle \Psi_A \Psi_B | 1 - \exp(i\chi_{TOT}(\mathbf{b}, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_B)) | \Psi_A \Psi_B \rangle . \quad (3.29)$$

Desprezamos o termo associado ao centro de massa (pelo fato de considerarmos somente espalhamento  $pp$ ). Nesse formalismo assume-se que a função eiconal total, é o resultado da soma da eiconal associada ao espalhamento entre cada par de constituintes

$$\chi_{TOT}(\mathbf{b}, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_B) = \sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^B \chi_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k) , \quad (3.30)$$

onde  $\chi_{jk}$  é a eiconal da interação dos constituinte nos hádrons  $A, B$  e  $\mathbf{s}_j, \mathbf{s}'_k$  são as componentes das coordenadas  $\mathbf{r}_j, \mathbf{r}'_k$ . Essa é a hipótese central que caracteriza a abordagem de Glauber [9] para interação entre sistemas compostos.

Definindo  $\Gamma_{TOT}$  como a função de perfil total em função da eiconal

$$\Gamma_{TOT}(\mathbf{b}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_B) \equiv i[1 - \exp(i\chi_{TOT}(\mathbf{b}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_B))] , \quad (3.31)$$

e de forma semelhante para a interação entre constituintes, teremos a função de perfil elementar  $\gamma_{jk}$

$$\gamma_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k) \equiv i[1 - \exp(i\chi_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k))] . \quad (3.32)$$

Através da condição de normalização

$$\langle \Psi_A \Psi_B | \Psi_A \Psi_B \rangle = 1 , \quad (3.33)$$

a amplitude de espalhamento terá a seguinte forma

$$F_{AB} = \frac{i}{2\pi} \int d^2b \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) \left\{ 1 - \left\langle \Psi_A \Psi_B \left| \prod_{j=1}^A \prod_{k=1}^B [1 - \chi_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k)] \right| \Psi_A \Psi_B \right\rangle \right\} . \quad (3.34)$$

Estamos interessados numa expressão que relacione a amplitude de espalhamento  $F_{AB}$ , dos dois sistemas, com a amplitude individual  $f_{jk}$  de cada constituinte. Para tal, faremos a conexão através da função de perfil elementar que se relaciona a  $f_{jk}$  pela transformada de Fourier no espaço dos momentos  $\mathbf{q}$

$$\gamma_{jk}(\mathbf{b}) = \frac{i}{2\pi} \int d^2q \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) f_{jk}(\mathbf{q}) . \quad (3.35)$$

Voltando à eq.(3.34) e comparando com a amplitude de espalhamento de uma partícula, através da função eiconal  $\chi_{opt}$

$$F_{AB} = \frac{i}{2\pi} \int d^2b \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}) [1 - \exp(i\chi_{opt})] , \quad (3.36)$$

onde

$$i\chi_{opt} = \ln \left\langle \Psi_A \Psi_B \left| \prod_{j=1}^A \prod_{k=1}^B [1 - \chi_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k)] \right| \Psi_A \Psi_B \right\rangle . \quad (3.37)$$

Expressando o termo na forma de série

$$i\chi_{opt} = \ln H(\lambda)|_{\lambda=1} = i \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n , \quad (3.38)$$

onde

$$H(\lambda) = \left\langle \Psi_A \Psi_B \left| \prod_{j=1}^A \prod_{k=1}^B [1 - \lambda \chi_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k)] \right| \Psi_A \Psi_B \right\rangle . \quad (3.39)$$

Em primeira ordem

$$i\chi_1(b) = H^{(1)} \quad \text{onde} \quad H^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \lambda} H(\lambda) |_{\lambda=0} , \quad (3.40)$$

e considerando apenas o primeiro termo, a função eiconal terá a seguinte forma

$$i\chi_{opt} = - \left\langle \Psi_A \Psi_B \left| \sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^B \chi_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k) \right| \Psi_A \Psi_B \right\rangle . \quad (3.41)$$

Através da função opacidade  $\Omega_{AB}$

$$-\Omega_{AB} \equiv i\chi_{opt} , \quad (3.42)$$

teremos

$$\Omega_{AB} = \sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^B \langle \Psi_A \Psi_B | \chi_{jk}(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \mathbf{s}'_k) | \Psi_A \Psi_B \rangle , \quad (3.43)$$

ou usando o projetor

$$1 = \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_B \rangle \langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_B | , \quad (3.44)$$

para uma forma compacta de (3.43)

$$\Omega_{AB} = C_{AB} \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' |\Psi_A|^2 |\Psi_B|^2 \gamma(\mathbf{b} - \mathbf{s} + \mathbf{s}') , \quad (3.45)$$

onde  $C_{AB}$  é uma variável que depende da energia  $\sqrt{s}$  e é associada ao número de constituintes.

Logo, usando (3.25) e (3.26)

$$\Omega_{AB} = C_{AB} \int \rho_A(\mathbf{r}) \bar{\gamma}(\mathbf{b} - \mathbf{s} + \mathbf{s}') \rho_B(\mathbf{r}') d\mathbf{r}d\mathbf{r}' . \quad (3.46)$$

Usando a definição de amplitude elementar média  $f$  entre os constituintes e dos fatores de forma  $G_A$  e  $G_B$

$$\bar{\gamma}(\mathbf{b} - \mathbf{s} + \mathbf{s}') = \frac{1}{2\pi i} \int dq^2 \exp(-iq \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{s} + \mathbf{s}')) f(\mathbf{q}) , \quad (3.47)$$

e

$$\begin{cases} G_A(\mathbf{q}) = \int \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\rho_A(\mathbf{r})d\mathbf{r} , \\ G_B(\mathbf{q}) = \int \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\rho_B(\mathbf{r})d\mathbf{r} , \end{cases} \quad (3.48)$$

obtemos um outro formato para eq.(3.46)

$$\Omega_{AB}(b) = \frac{C_{AB}}{2\pi} \int d^2q \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})f(\mathbf{q})G_A(\mathbf{q})G_B(\mathbf{q}) . \quad (3.49)$$

Desprezando-se efeitos de spin, teremos  $f(\mathbf{q}) = f(q)$ ,  $G_A(\mathbf{q}) = G_A(q)$ ,  $G_B(\mathbf{q}) = G_B(q)$

e usando a representação integral para a função de Bessel, eq.(3.22), temos

$$\Omega_{AB}(b) = C_{AB} \int qdq J_0(qb)G_A(q)G_B(q)f(q) . \quad (3.50)$$

Em termos da amplitude de espalhamento

$$F_{AB}(q) = i \int bdb J_0(qb)[1 - \exp(-\Omega_{AB}(b))] , \quad (3.51)$$

e utilizando a notação

$$\langle(\dots)\rangle = \int bdb J_0(qb)(\dots) , \quad (3.52)$$

obtemos

$$F_{AB}(q) = i \langle 1 - e^{-\Omega_{AB}(b)} \rangle , \quad (3.53)$$

$$\Omega_{AB}(b) = C_{AB} \langle G_A(q)G_B(q)f(q) \rangle . \quad (3.54)$$

Portanto temos uma transformada de Fourier da função eiconal (ou da opacidade) que depende dos fatores de forma, da constante de absorção  $C_{AB}(s)$  e da amplitude elementar entre os constituintes.

## RESULTADOS BÁSICOS

Nesta seção consideramos um espalhamento entre dois sistemas compostos e através da aproximação eiconal e do FDM calculamos as seguintes grandezas :

Amplitude de espalhamento

$$F_{AB}(q) = i \int bdb J_0(qb) (1 - e^{-\Omega_{AB}(b)}) = i \langle 1 - e^{-\Omega_{AB}(b)} \rangle .$$

Função eiconal e opacidade

$$-\Omega_{AB} = i\chi_{AB} = \frac{-C_{AB}(s)}{i} \langle G_A(q)G_B(q)f(q) \rangle .$$

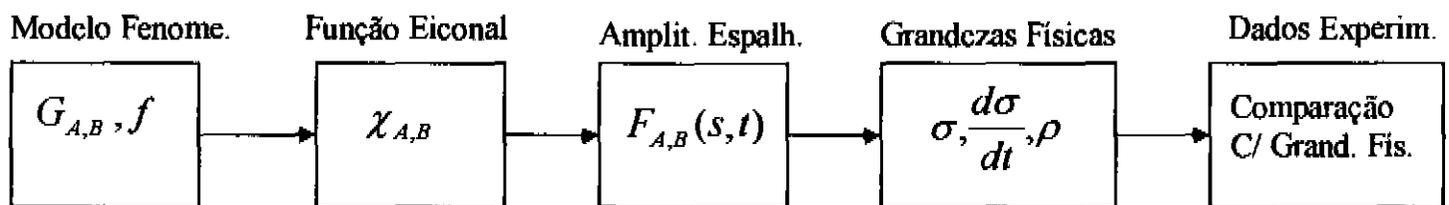
Conforme veremos na próxima seção (com o uso de modelos), as funções  $F_{AB}$  e  $\Omega_{AB}$  serão calculadas através de parametrizações das grandezas  $C_{AB}(s)$ ,  $G_{A,B}$  e  $f$ . E o formalismo será aplicado ao espalhamento  $pp$  considerando cada próton como um sistema de constituintes.

### 3.3 Modelo Fenomenológico

No capítulo 2, mostramos que através da amplitude hadrônica é possível calcular as grandezas físicas (seção de choque diferencial, total e parâmetro  $\rho$ ), enquanto que na seção 2.2 a amplitude é calculada analiticamente pela transformada de Fourier em função da eiconal (ou opacidade).

Portanto, calculando a eiconal teremos a amplitude. Para isso, considera-se a eiconal, expressa através de escolhas adequadas de parametrizações para os fatores de forma e amplitude elementar, como um *modelo fenomenológico*.

Para uma melhor compreensão da importância do modelo fenomenológico no cálculo da amplitude de espalhamento temos o seguinte esquema :



Dos vários tipos de modelos que existem, faremos uso de apenas um, o *modelo de difração múltipla* (MDM) conforme introduzido por Menon e Pimentel [19] e desenvolvido por Martini e Menon [20].

#### MODELO DE DIFRAÇÃO MÚLTIPLA

Foi visto que em geral, no contexto da teoria da difração múltipla, a função eiconal é dada por

$$\chi_{AB} = C_{AB}(s) \langle G_A(q) G_B(q) f(q) \rangle. \quad (3.55)$$

A teoria da difração múltipla apenas correlaciona essas quatro grandezas ( $C_{AB}$ ,  $G_A$ ,  $G_B$  e  $f$ ) com a amplitude hadrônica eqs. (3.53) e (3.54), e daí com as grandezas físicas  $d\sigma/dt$ ,  $\sigma_t$  e  $\rho$  através das eqs. (2.6), (2.7) e (2.8).

Os chamados modelos de difração múltipla são distinguidos por diferentes escolhas de parametrizações, para as quatro grandezas acima referidas, e/ou pelo método de ajuste a dados experimentais.

Em particular, no modelo desenvolvido por Menon e Pimentel, assume-se fatores de forma representados por pólos duplos:

$$G = (1 + q^2/\alpha^2)^{-1}(1 + q^2/\beta^2)^{-1} , \quad (3.56)$$

onde  $\alpha^2$  e  $\beta^2$  são parâmetros livres a serem determinados. Essa forma foi também mantida no desenvolvimento do modelo realizado por Martini e Menon [20], que será de nosso interesse. Nessa abordagem introduziu-se uma redefinição do fator  $C_{AB}$  e da amplitude  $f$ , como explicado a seguir.

Como mencionado na seção 3.2,  $C_{AB}$  depende da energia e está associado ao número de constituintes. Por essa razão e buscando uma forma compacta e útil no tratamento das partes real e imaginária, Martini e Menon introduziram uma redefinição da parte imaginária da amplitude elementar, associando

$$C_{AB}f \equiv \text{Im } f' , \quad (3.57)$$

$$\text{Im } f = C(s).h(q) , \quad (3.58)$$

onde

$$h(q) = \frac{1 + q^2/a^2}{1 + q^4/a^4} , \quad (3.59)$$

sendo  $C(s)$  e  $a^2$  parâmetros livres.

No capítulo 6, quando o modelo for aplicado ao espalhamento  $pp$ , faremos uma discussão mais detalhada quanto à dependência com a energia para esses parâmetros, assim como suas parametrizações.

# Capítulo 4

## Relações de Dispersão Integrais

Neste capítulo faremos inicialmente uma apresentação das *transformadas de Hilbert* [24,27]. Com isso estaremos aptos a discutir as relações de dispersão [23,28] nas seções 4.2 e 4.3.

### 4.1 Par de Transformadas de Hilbert

Consideremos o caso de uma singularidade  $z_0$  (pólo) no caminho de integração (figura 4.1). Nesse caso uma solução para o problema é uma deformação do contorno  $C$  de modo que o pólo  $z_0$  possa localizar-se dentro ou fora do contorno. Com isso para esses dois casos, poderemos utilizar o *teorema* ou a *integral de Cauchy* (apêndice B) respectivamente.

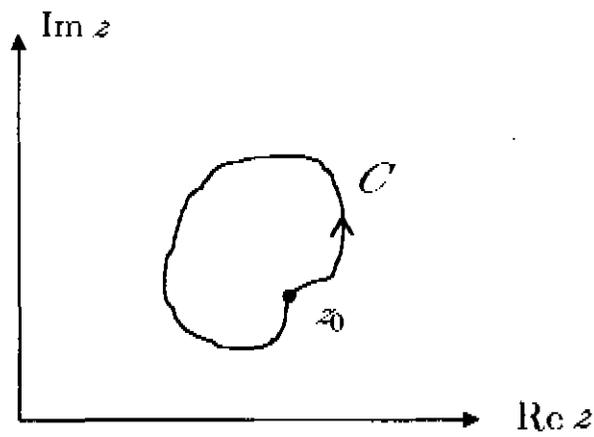


Figura 4.1

Primeiramente faremos as seguintes considerações. Seja uma função  $f(z)$  analítica no semiplano superior,  $\text{Im } z \geq 0$ , e consideremos uma semicircunferência  $C_R$  de raio  $R$  centrada na origem e um ponto  $x_0$  no eixo real (figura 4.2). Nesse caso, a função

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - x_0}, \quad (4.1)$$

possui um pólo em  $z = x_0$  (pólo simples).

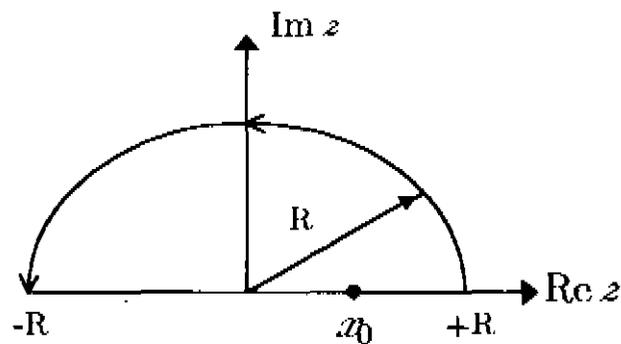


Figura 4.2

Suponhamos que  $|f(z)| \rightarrow 0$  quando  $|z| \rightarrow \infty$  e consideremos uma pequena deformação no eixo real através de uma semicircunferência de raio  $r$  com centro em  $x_0$  (figura 4.3). Seja  $C$  o caminho fechado e orientado pelas semicircunferências  $C_R$ ,  $C_r$  e o eixo real.

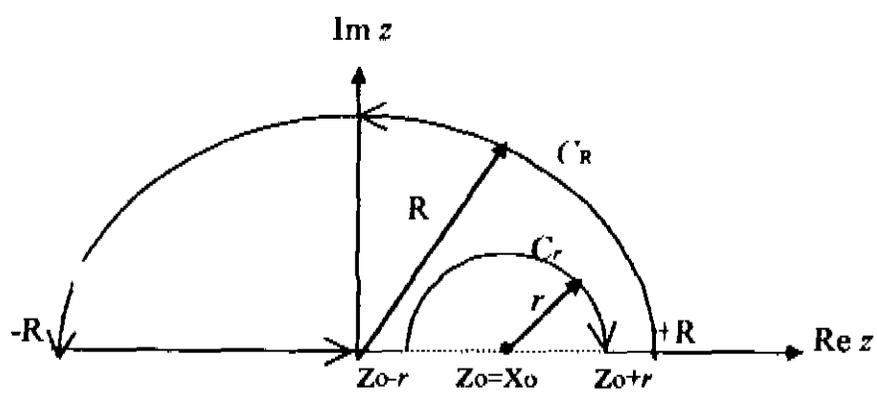


Figura 4.3

Com isso, aplicando o teorema de Cauchy, obtemos

$$\oint_C g(z) dz = 0. \tag{4.2}$$

Considerando cada parte do contorno  $C$ , teremos

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - x_0} dz = \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - x_0} dz + \int_{-R}^{x_0-r} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - x_0} dz + \int_{x_0+r}^{+R} \frac{f(x)}{x - x_0} dx = 0. \tag{4.3}$$

Vamos estudar cada termo dessa equação nos limites  $R \rightarrow \infty$  e  $r \rightarrow 0$  (semiplano superior).

Pela definição do *valor principal de Cauchy* [13,15]

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \int_{-R}^{x_0-r} \frac{f(x)}{x-x_0} dx + \int_{x_0+r}^{+R} \frac{f(x)}{x-x_0} dx \right] \right\} \equiv P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx . \quad (4.4)$$

Substituindo na eq.(4.3) termos, nos limites  $R \rightarrow \infty$  e  $r \rightarrow 0$ ,

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z-x_0} dz + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-x_0} dz = 0 . \quad (4.5)$$

Determinaremos agora os limites das integrais sobre  $C_R$  e  $C_r$ .

Para a integral sobre  $C_R$ , usando coordenadas polares

$$z = R e^{i\theta} \implies dz = R i e^{i\theta} d\theta , \quad (4.6)$$

teremos, tomando o módulo da integral:

$$\left| \int_{C_R} \frac{f(z)}{z-x_0} dz \right| = \left| R i \int_0^\pi \frac{f(R e^{i\theta})}{R e^{i\theta} - x_0} d\theta \right| \leq R \int_0^\pi \frac{|f(R e^{i\theta})|}{|R e^{i\theta} - x_0|} d\theta . \quad (4.7)$$

Como

$$|R e^{i\theta} - x_0| \geq |R - x_0| , \quad (4.8)$$

teremos

$$\left| \int_{C_R} \frac{f(z)}{z-x_0} dz \right| \leq \frac{R}{|R-x_0|} \int_0^\pi |f(R e^{i\theta})| d\theta . \quad (4.9)$$

Agora, pelas condições de interesse (limites assintóticos),

$$\left. \begin{array}{l} R \rightarrow \infty \\ |f(z)| \rightarrow 0 \end{array} \right\} \implies \frac{R}{|R - x_0|} \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})| d\theta \rightarrow 0 .$$

Portanto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - x_0} dz = 0 . \quad (4.10)$$

Assim, a eq.(4.5) terá a seguinte forma

$$I^p \int_{-R}^{+R} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + 0 + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - x_0} dz = 0 . \quad (4.11)$$

Consideremos agora o limite da integral sobre  $C_r$  quando  $r \rightarrow 0$ . Somando e subtraindo o termo  $f(x_0)$  nessa integral,

$$\int_{C_r} \frac{f(z) + f(x_0) - f(x_0)}{z - x_0} dz = f(x_0) \int_{C_r} \frac{dz}{z - x_0} + \int_{C_r} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} dz. \quad (4.12)$$

Agora, no limite  $r \rightarrow 0$ , a segunda integral tem um valor absoluto arbitrariamente pequeno, tornando-se nula (apêndice C). Para a primeira integral temos, sobre  $C_r$

$$f(x_0) \int_{C_r} \frac{dz}{z - x_0} = f(x_0) \int_\pi^0 \frac{ir e^{i\theta}}{r e^{i\theta}} d\theta , \quad (4.13)$$

onde, sobre  $C_r$ ,  $z - x_0 = r e^{i\theta}$  e  $dz = r i e^{i\theta} d\theta$ .

Os limites de  $\pi$  a 0 são devidos ao sentido horário de integração. Com isso,

$$f(x_0) \int_{c_r} \frac{dz}{z - x_0} = f(x_0) i \int_{\pi}^0 d\theta = -i\pi f(x_0). \quad (4.14)$$

Logo, substituindo (4.14) em (4.12) e em seguida em (4.11) obtemos finalmente

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx = i\pi f(x_0) ,$$

ou

$$f(x_0) = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx . \quad (4.15)$$

Sendo  $f(x)$  uma função complexa, no eixo real podemos explicitar suas partes real e imaginária

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x) ,$$

$$f(x_0) = \operatorname{Re} f(x_0) + i \operatorname{Im} f(x_0) . \quad (4.16)$$

Então, substituindo (4.16) em (4.15)

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x)}{x - x_0} \right] dx = i\pi (\operatorname{Re} f(x_0) + i \operatorname{Im} f(x_0)) , \quad (4.17)$$

e comparando os dois lados da eq.(4.17)

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x - x_0} dx , \quad (4.18)$$

$$\operatorname{Im} f(x_0) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} f(x)}{x - x_0} dx , \quad (4.19)$$

a estas equações denominamos par de *transformadas de Hilbert* [26].

Com isso temos um par de equações que podem ser aplicadas a um sistema físico, desde que suas variáveis sejam funções complexas e satisfaçam às condições assumidas:

- a)  $f(z)$  analítica no semiplano superior  $\operatorname{Im} z \geq 0$
- b)  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$

As equações (4.18) e (4.19) também são conhecidas como *fórmulas de Plemelj*.

## 4.2 Relações de Dispersão - Uma Singularidade no Eixo Real

Quando aplicamos um par de transformadas de Hilbert a um determinado sistema físico, as mesmas terão de obedecer a certas propriedades analíticas. Neste caso, como será visto, o par de transformadas passa a se denominar *relações de dispersão*.

Os primeiros trabalhos sobre relações de dispersão foram aplicados na ótica e raios-X, feitas por *Kronig* em 1926 e *Kramer* em 1955, assim como na teoria eletromagnética (relação entre as partes real e imaginária da permeabilidade magnética, por *Kronig* em 1936) e propagação do som em líquidos e gases por *Knaser* em 1938 [21,23].

As propriedades físicas às quais as relações de dispersão estão sujeitas são: analiticidade, simetria e causalidade. Pode-se mostrar que a condição de causalidade implica que  $f(z)$  é analítica no semiplano superior [21,23,26].

Nesta seção inicialmente utilizaremos a propriedade de simetria para deduzir as formas denominadas relações de dispersão e em seguida introduziremos a regra de subtração.

### 4.2.1 Relações de Simetria

Consideremos a transformada de Fourier de  $f(z)$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{izt} dt , \quad (4.20)$$

onde, sob a condição de realidade,  $F(t)$  é real. Isso implica que

$$f^*(z) = f(-z^*) , \quad (4.21)$$

e no eixo real ( $z \rightarrow x$ ) :

$$f^*(x) = f(-x^*) . \quad (4.22)$$

logo substituindo (4.22) em

$$f(x) = \text{Re } f(x) + i \text{Im } f(x) ,$$

obtemos

$$\begin{cases} \operatorname{Re} f(-x) = \operatorname{Re} f(x) , \\ \operatorname{Im} f(-x) = -\operatorname{Im} f(x) , \end{cases} \quad (4.23)$$

ou seja, a parte real de  $f(x)$  é uma função par, enquanto que sua imaginária é ímpar. Esse resultado é denominado *relação de simetria*.

A importância das relações de simetria está no fato que para determinados sistemas físicos (como por exemplo quando se trabalha com frequências, energias...) as integrais das transformadas de Hilbert, eqs. (4.18) e (4.19), devem ser simétricas, ou seja, seus limites de  $-\infty$  a  $+\infty$  são substituídos por limites positivos de 0 a  $+\infty$ , como mostraremos a seguir.

Nas aplicações físicas estaremos interessados na determinação da parte real em termos da imaginária. Partimos então da transformada de Hilbert (4.18), separando os extremos de integração :

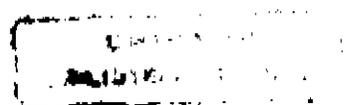
$$\operatorname{Re} f(x_0) = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x - x_0} dx = \frac{1}{\pi} \left[ P \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x - x_0} dx + P \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x - x_0} dx \right] . \quad (4.24)$$

Fazendo  $x \rightarrow -x$ , na primeira integral

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \frac{1}{\pi} \left[ -P \int_{+\infty}^0 \frac{\operatorname{Im} f(-x)}{-x - x_0} dx + P \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x - x_0} dx \right] ,$$

invertendo os limites de integração e de  $\operatorname{Im} f(-x) = -\operatorname{Im} f(x)$  :

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \frac{1}{\pi} \left[ P \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x + x_0} dx + P \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x - x_0} dx \right] ,$$



$$\operatorname{Re} f(x_0) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2 - x_0^2} \operatorname{Im} f(x) dx . \quad (4.25)$$

Expressões como essas, envolvendo somente valores positivos da variável  $x$ , são denominadas *relações de dispersão*.

## 4.2.2 Regra de Subtração

Conforme mostramos na seção 4.2, a função  $f(z)$ , que origina o par de transformada de Hilbert, tem as seguintes propriedades :

a)  $f(z)$  é analítica em  $\operatorname{Im} z \geq 0$

b)  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$

Porém, em muitos casos de interesse  $f(z)$  não satisfaz a condição (b). Consideremos aqui o caso

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| \Rightarrow \text{cte} , \quad (4.26)$$

seu limite assintótico tende para um valor constante (função limitada). Nesse caso, a solução seria a busca de uma “outra” função para a qual as condições (a) e (b) sejam satisfeitas.

Para tanto, consideremos a seguinte função :

$$\Phi(z) = \frac{f(z) - f(x_1)}{z - x_1} , \quad (4.27)$$

onde  $x_1$  é um ponto do eixo real distinto de  $x_0$ .



Estudemos (4.27) que satisfaça (a) e (b).

a) Como  $f(z)$  é analítica no semiplano superior

$$\lim_{z \rightarrow x_1} \frac{f(z) - f(x_1)}{z - x_1} = f'(x_1) \quad \text{existe.}$$

Então  $\Phi(z)$  é analítica no semi-plano  $\text{Im } z \geq 0$  e portanto satisfaz (a).

b) Temos,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |\Phi(z)| = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|f(z) - f(x_1)|}{|z - x_1|} \leq \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|f(z) - f(x_1)|}{|z| - |x_1|},$$

e separando os limites

$$= \left( \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{|z| - |x_1|} \right) \cdot \left( \lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z) - f(x_1)| \right) = 0 \cdot \text{cte},$$

portanto  $\Phi(z)$  satisfaz também a condição (b) :

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |\Phi(z)| = 0.$$

Com isso temos que  $\Phi(z)$  está de acordo com as propriedades das transformadas de

Hilbert para  $\text{Im } z \geq 0$ . Considerando os pontos  $x$  e  $x_0$  em analogia com (4.15),  $\Phi(z)$  será

$$\Phi(x_0) = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(x)}{x - x_0} dx, \quad (4.28)$$

em termos de  $f(x)$ , teremos da eq.(4.27),

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) - f(x_1)}{(x - x_1)(x - x_0)} dx. \quad (4.29)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas no integrando de (4.29),

$$\begin{aligned} f(x_0) - f(x_1) &= \frac{(x_0 - x_1)}{i\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_0)} dx - \\ &- \frac{f(x_1)}{i\pi} \left\{ P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x - x_0} - P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x - x_1} \right\}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x - x_0} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x - x_0} \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \ln \left| \frac{a - x_0}{a + x_0} \right| \right) = 0 = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x - x_1},$$

portanto

$$f(x_0) = f(x_1) + \frac{x_0 - x_1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_0)} dx, \quad (4.31)$$

temos assim uma nova função  $f(x_0)$  que sofreu uma subtração do termo  $f(x_1)$  para garantir a condição (b). A esse procedimento denominamos *regra de subtração*.

Considerando  $f(x_0) = \text{Re } f(x_0) + i \text{Im } f(x_0)$  a eq.(4.31) terá o formato

$$\text{Re } f(x_0) = \text{Re } f(x_1) + \frac{x_0 - x_1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } f(x)}{(x - x_1)(x - x_0)} dx , \quad (4.32)$$

$$\text{Im } f(x_0) = \text{Im } f(x_1) - \frac{x_0 - x_1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re } f(x)}{(x - x_1)(x - x_0)} dx . \quad (4.33)$$

Caso a função  $\Phi(z)$  não satisfizesse a condição (b), outra subtração poderia ser necessária, dependendo da característica da convergência quando  $|z| \rightarrow \infty$ . Pelo fato da constante  $f(x_0)$  ter sido subtraída da função (4.31), o par de eqs.(4.32 e 4.33) passa a se denominar *relações de dispersão com uma subtração*.

No caso de trabalharmos com funções no intervalo de 0 a  $+\infty$ , conforme foi descrito na seção 4.2.1 através do uso da relação de simetria, teremos

$$\text{Re } f(x_0) = \text{Re } f(x_1) + \frac{2}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{x(x_0^2 - x_1^2)}{(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_0^2)} \text{Im } f(x) dx , \quad (4.34)$$

$$\text{Im } f(x_0) = \text{Im } f(x_1) - \frac{2}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{(x_0 - x_1)(x^2 - x_0 x_1)}{(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_0^2)} \text{Re } f(x) dx . \quad (4.35)$$

Em particular, fazendo  $x_1 = 0$ ,  $x_0 = s$  e  $x = s'$  em (4.34) temos

$$\text{Re } f(s) = \frac{2s^2}{\pi} P \int_0^{+\infty} ds' \frac{\text{Im } f(s')}{s'(s'^2 - s^2)} . \quad (4.36)$$

Conforme veremos em detalhes nos próximos capítulos, essa expressão será o ponto de partida para se chegar a uma forma derivativa para a relação de dispersão, no caso de

espalhamento elástico de hádrons (fisicamente  $s$  corresponderá ao quadrado da energia no centro de massa da colisão).

### 4.3 Relações de Dispersão - Um Corte de Ramos no Eixo Real

Vamos agora tratar de um caso importante para as relações de dispersão, no qual  $f(z)$  tem singularidades no eixo real do tipo corte de ramos, admitindo uma região de corte no eixo real (de  $a$  até  $+\infty$ ) [2]. Nesse caso, vamos supor que para  $f(z)$  :

- a)  $|f(z)| = 0$  quando  $|z| \rightarrow \infty$
- b) é analítica fora do corte.

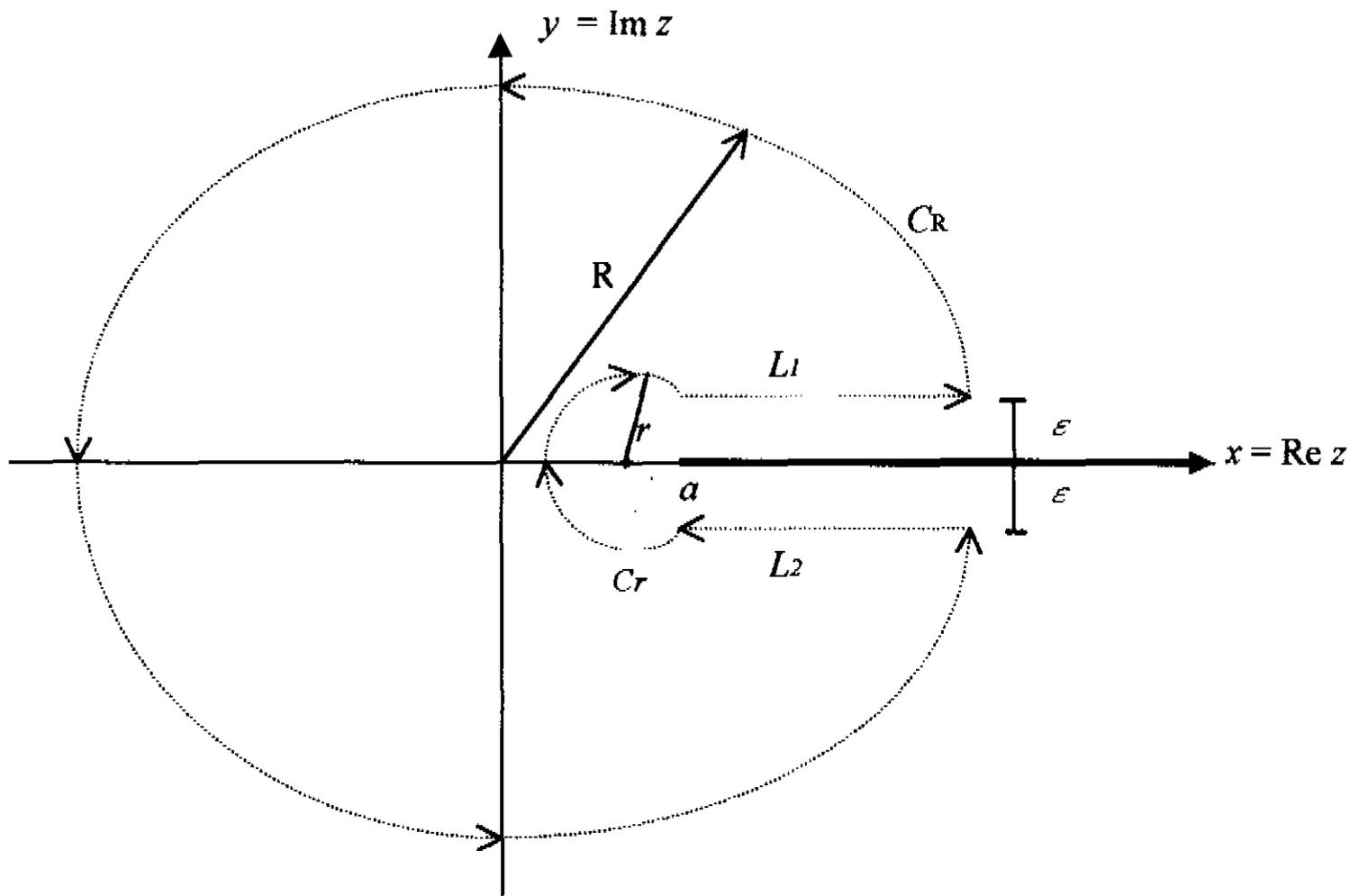


Figura 4.4

Utilizaremos um contorno  $C$  ( $C_R + L_1 + L_2 + C_r$ ) conforme mostra a figura 4.4 . Aplicando

o teorema de Cauchy para a função  $g(z')$

$$g(z') = \frac{f(z')}{z' - z}, \quad (4.37)$$

teremos  $f(z)$  no interior do contorno  $C$ , para qualquer  $z$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{z' - z} dz', \quad (4.38)$$

ou

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left[ \int_{C_R} \frac{f(z')}{z' - z} dz' + \int_{L_2} \frac{f(x' - iy')}{z' - z} dz' + \int_{C_r} \frac{f(z')}{z' - z} dz' + \int_{L_1} \frac{f(x' + iy')}{z' - z} dz' \right], \quad (4.39)$$

que pelas condições assintóticas  $z \rightarrow \infty \Rightarrow f(z) \rightarrow 0$  , a integral em  $C_R$  se anula (seção 4.2), assim como  $r \rightarrow 0$  , a integral em  $C_r$  também se anulará. Com isso os contornos  $L_1$  e  $L_2$  tenderão para o eixo real

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_a^{+\infty} \frac{f(x' + i\varepsilon)}{x' - z} dx' + \int_{+\infty}^a \frac{f(x' - i\varepsilon)}{x' - z} dx' \right], \quad (4.40)$$

que invertendo os limites da segunda integral

$$f(z) = \frac{P}{\pi} \int_a^{+\infty} \frac{\Gamma(x')}{x' - z} dx', \quad (4.41)$$

onde

$$\Gamma(x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i} [f(x' + i\varepsilon) - f(x' - i\varepsilon)] , \quad (4.42)$$

é uma descontinuidade ao longo do corte que permite o cálculo de  $f(z)$  em todos os pontos, inclusive no eixo real, com exceção dos valores de  $x$  no corte.

No caso, de interesse, em que  $f(z)$  é real em  $x \leq a$ , pelo princípio de reflexão Schwarz

$$f(z'^*) = f^*(z') , \quad (4.43)$$

e portanto

$$\operatorname{Re} f(x' - i\varepsilon) + i \operatorname{Im} f(x' - i\varepsilon) = \operatorname{Re} f(x' + i\varepsilon) - i \operatorname{Im} f(x' + i\varepsilon) ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} f(x' - i\varepsilon) = \operatorname{Re} f(x' + i\varepsilon) , \\ \operatorname{Im} f(x' - i\varepsilon) = -\operatorname{Im} f(x' + i\varepsilon) . \end{array} \right. \quad (4.44)$$

Substituindo em (4.42)

$$\Gamma(x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i} [\operatorname{Re} f(x' + i\varepsilon) + i \operatorname{Im} f(x' + i\varepsilon) - \operatorname{Re} f(x' + i\varepsilon) + i \operatorname{Im} f(x' + i\varepsilon)] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} f(x' + i\varepsilon) ,$$

$$\Gamma(x') = \operatorname{Im} f(x') . \quad (4.45)$$

Voltando à eq.(4.41), teremos

$$f(z) = \frac{P}{\pi} \int_a^{+\infty} \frac{\text{Im } f(x')}{x' - z} dx' . \quad (4.46)$$

Como assumimos  $f(z)$  real no eixo real, para  $z \rightarrow x$  (fora do corte) teremos  $f(z) =$

$\text{Re } f(z)$  e portanto

$$\text{Re } f(x) = \frac{1}{\pi} P \int_a^{+\infty} \frac{\text{Im } f(x')}{x' - x} dx' , \quad (4.47)$$

onde  $x < a$ . Temos então a transformada de Hilbert, análoga à eq.(4.18) para o caso de um corte de ramos a partir de  $x = a > 0$ .

O resultado acima é importante, conforme veremos no próximo capítulo, devido trabalharmos numa região bem definida quando utilizamos as relações de dispersão no limite de altas energias.

# Capítulo 5

## Relações de Dispersão e o Espalhamento de Hádrons a Altas Energias

Conforme visto no capítulo 4, as relações de dispersão foram descritas no sentido geral, sem especificar o sistema físico tratado. Faremos agora uma aplicação ao espalhamento clástico de hádrons (mais especificamente num espalhamento *próton-próton* e/ou *antipróton-próton*). Para tal, consideraremos a amplitude de espalhamento  $F(s, t)$ , cujas variáveis associadas são a energia no centro de massa,  $\sqrt{s}$ , e o quadrado do quadrimomento transferido  $t$ . Estas são duas das variáveis de Mandelstam, revisadas resumidamente no apêndice A.

Os primeiros trabalhos a esse respeito foram feitos por *Söding* em 1964 [29] e por

*Amaldi* e outros em 1977 [30], onde ambos usam a relação de dispersão na forma integral, limitando-se a descrever somente a seção de choque total,  $\sigma_{tot}$ , e o observável  $\rho$  (relação entre a parte real e imaginária da amplitude hadrônica em  $t = 0$ ).

Em nossa aplicação usaremos as relações de dispersão derivativa (RDD), ou seja, uma aproximação para a forma de operador diferencial feita por Bronzan, Kane e Sukhatme [5] e Gribov e Migdal [6]. Conforme mostraremos mais adiante, essa relação é bem definida no limite de altas energias.

## 5.1 Relações de Dispersão na Forma Integral

### 5.1.1 Analiticidade

Propriedades analíticas gerais das amplitudes de espalhamento (independentemente de modelo) podem ser extraídas de princípios gerais de teorias de campo. Esses aspectos foram discutidos nas referências [4],[31],[32] e [33]. Nesta seção e no apêndice A, apresentaremos alguns resultados gerais que serão de interesse nesse trabalho.

No apêndice A introduziremos as variáveis de Mandelstam  $s$ ,  $t$ ,  $u$ , os conceitos de canais  $s$  e  $u$  e a regra de substituição, através da qual considera-se que uma mesma amplitude  $\mathcal{F}(s, t, u)$  pode descrever diferentes processos, dependendo dos valores (regiões) das variáveis  $s$ ,  $t$ , e  $u$ .

No que segue, consideremos os espalhamentos elásticos  $pp$  e  $\bar{p}p$  na direção frontal ( $t = 0$ ). O princípio de unitariedade (teorema óptico :  $\sigma_t = 4\pi \text{Im } f(s, t = 0)$ ) conecta os canais

elástico e inelástico. Pode-se mostrar que considerando-se a amplitude de espalhamento elástico como função complexa da variável complexa (apêndice A)

$$\mathcal{K} = \frac{s - u}{4m}, \quad (5.1)$$

na região de altas energias, a estrutura de cortes no plano complexo é caracterizada por dois cortes de ramos : um no eixo real positivo (canal  $s$ ) e outro no eixo real negativo (canal  $t$ ), como mostra a figura 5.1 . As amplitudes físicas para os espalhamentos  $pp$  e  $\bar{p}p$  correspondem aos limites dessa amplitude (continuada analiticamente) quando se aproxima do eixo real a partir do 1ºquadrante (canal  $s : pp$ ) e do 3º quadrante (canal  $u : \bar{p}p$ ) :

$$f_{pp}(\mathcal{K}, t = 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}(\mathcal{K} + i\varepsilon, t = 0), \quad (5.2)$$

$$f_{\bar{p}p}(\mathcal{K}, t = 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}(-\mathcal{K} - i\varepsilon, t = 0). \quad (5.3)$$

Novamente a função  $\mathcal{F}$ , através de sua extensão analítica, será a mesma para as duas amplitudes com região de corte definida no eixo real (figura 5.1)

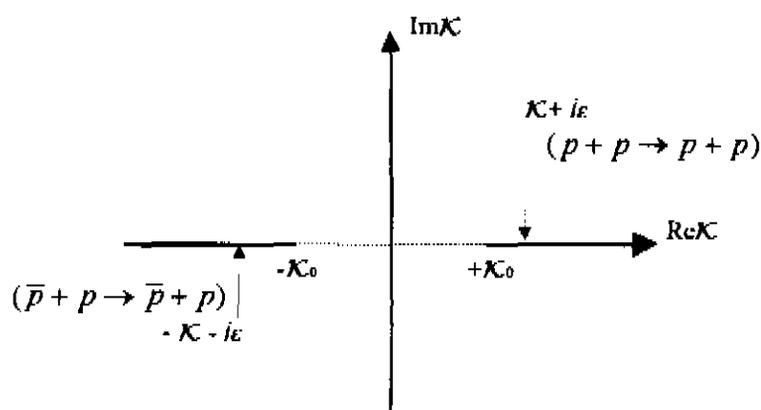


Figura 5.1

onde  $\mathcal{K}_0 \simeq m$ , ao mesmo tempo que  $\mathcal{F}$  é real no intervalo  $(-\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_0)$ .

Na obtenção das relações de dispersão será útil introduzir funções pares ( $\mathcal{F}_+$ ) e ímpares ( $\mathcal{F}_-$ ) sob a troca  $\mathcal{K} \rightarrow -\mathcal{K}$ . Em termos das amplitudes para espalhamento  $pp$  e  $\bar{p}p$  temos :

$$\mathcal{F}_{\pm}(\mathcal{K}, t) = \frac{1}{2} (\mathcal{F}_{\bar{p}p} \pm \mathcal{F}_{pp}) . \quad (5.4)$$

### 5.1.2 Relações de Dispersão na Forma Integral

Na seção anterior definimos uma região de analiticidade da amplitude de espalhamento  $\mathcal{F}$ , levando em conta as aproximações para altas energias. Baseando-se nisso vamos relacionar as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento, ou seja, aplicaremos o conceito de relação de dispersão.

Voltando à figura 5.1 e considerando um contorno  $C$  em torno da região de corte (figura 5.2)

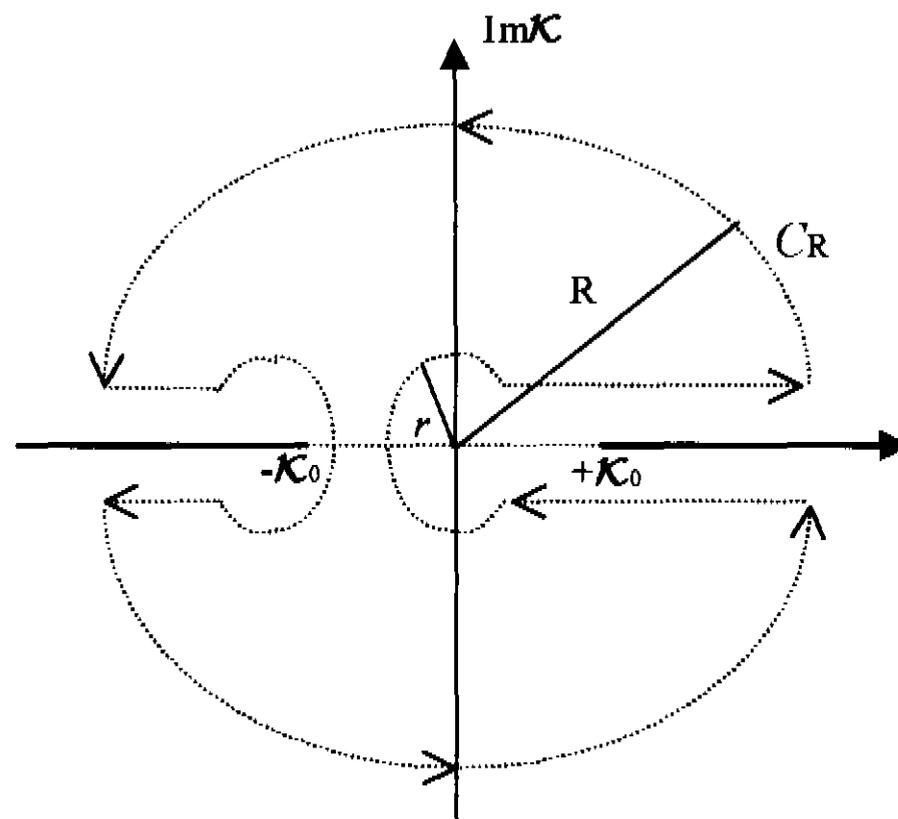


Figura 5.2

Conforme foi visto na seção 4.2.2 (eq. 4.27 com  $x_1 = 0$  e  $z = \mathcal{K}$ ), ao usarmos uma

função da forma

$$g(\mathcal{K}) = \frac{\mathcal{F}(\mathcal{K})}{\mathcal{K}}, \quad (5.5)$$

estamos garantindo sua convergência através de *uma subtração*. Portanto aplicando o teorema de Cauchy na função  $g(\mathcal{K})$ , através do contorno  $C$

$$g(\mathcal{K}) = \frac{\mathcal{F}(\mathcal{K})}{\mathcal{K}} = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{\mathcal{F}(\mathcal{K}')}{\mathcal{K}'(\mathcal{K}' - \mathcal{K})} d\mathcal{K}', \quad (5.6)$$

consequentemente, quando  $R \rightarrow \infty$ , a integral  $C_R$  tende a anular-se e  $r \rightarrow 0$ , havendo uma descontinuidade semelhante a (4.42), porém com duas regiões de corte  $(-\infty, -\mathcal{K}_0)$  e  $(+\mathcal{K}_0, +\infty)$

$$\mathcal{F}(\mathcal{K}) = \mathcal{F}(0) + \frac{\mathcal{K}}{\pi} \left[ \int_{+\mathcal{K}_0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\mathcal{K}')}{\mathcal{K}'(\mathcal{K}' - \mathcal{K})} d\mathcal{K}' + \int_{-\infty}^{-\mathcal{K}_0} \frac{\Gamma(\mathcal{K}')}{\mathcal{K}'(\mathcal{K}' - \mathcal{K})} d\mathcal{K}' \right], \quad (5.7)$$

onde

$$\Gamma(\mathcal{K}') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i} [\mathcal{F}(\mathcal{K}' + i\varepsilon) - \mathcal{F}(\mathcal{K}' - i\varepsilon)]. \quad (5.8)$$

Através da paridade da eq.(5.4) e do princípio de Schwarz, a eq.(5.7) terá a seguinte forma (apêndice D)

$$\mathcal{F}_{\pm}(\mathcal{K}) = \mathcal{F}_{\pm}(0) + \frac{\mathcal{K}}{\pi} \int_{+\mathcal{K}_0}^{+\infty} d\mathcal{K}' \frac{\text{Im } \mathcal{F}_{\pm}(\mathcal{K}')}{\mathcal{K}'} \left[ \frac{1}{(\mathcal{K}' - \mathcal{K})} \mp \frac{1}{(\mathcal{K}' + \mathcal{K})} \right], \quad (5.9)$$

ou ainda, com o valor principal de Cauchy para a parte real

$$\text{Re } \mathcal{F}_{\pm}(\mathcal{K}) = \text{Re } \mathcal{F}_{\pm}(0) + \frac{\mathcal{K}}{\pi} P \int_{+\mathcal{K}_0}^{+\infty} d\mathcal{K}' \frac{\text{Im } \mathcal{F}_{\pm}(\mathcal{K}')}{\mathcal{K}'} \left[ \frac{1}{(\mathcal{K}' - \mathcal{K})} \mp \frac{1}{(\mathcal{K}' + \mathcal{K})} \right], \quad (5.10)$$

portanto temos uma relação de dispersão em função da energia de laboratório  $\mathcal{K}$ . Porém estamos interessados em trabalhar com energia no centro de massa  $\sqrt{s}$  e o quadrimomento transferido  $t$  na região de  $s \gg m^2$  e  $|t| \leq m^2$ . Neste caso buscaremos uma relação entre essas variáveis através das equações (A.4 - apêndice A) e (5.1)

$$\mathcal{K} = \frac{s}{2m} + \frac{t}{4m} - m, \quad (5.11)$$

que aplicando as condições de regime vistas acima

$$\mathcal{K} \cong \frac{s}{2m}. \quad (5.12)$$

com isso

$$\mathcal{K} \rightarrow s \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_{\pm}(\mathcal{K}) \rightarrow f_{\pm}(s, t), \quad (5.13)$$

assim

$$\text{Re } f_{\pm}(s, t) = \text{Re } f_{\pm}(0, t) + \frac{s}{2m\pi} P \int_{+s_0}^{+\infty} \frac{ds'}{2m} \frac{\text{Im } f_{\pm}(s', t)}{\frac{s'}{2m}} \left[ \frac{1}{\frac{1}{2m}(s' - s)} \mp \frac{1}{\frac{1}{2m}(s' + s)} \right],$$

$$\text{Re } f_{\pm}(s, t) = \text{Re } f_{\pm}(0, t) + \frac{s}{\pi} P \int_{+s_0}^{+\infty} ds' \frac{\text{Im } f_{\pm}(s', t)}{s'} \left[ \frac{1}{s' - s} \mp \frac{1}{s' + s} \right],$$

onde

$$s_0 = 2m\mathcal{K}_0 . \quad (5.14)$$

Porém se a energia no centro de massa for nula, não haverá espalhamento, consequentemente podemos desprezar  $\text{Re}f_{\pm}(0, t)$

$$\text{Re} f_{\pm}(s, t) = \frac{s}{\pi} P \int_{|s_0}^{+\infty} ds' \frac{\text{Im} f_{\pm}(s', t)}{s'} \left[ \frac{1}{s' - s} \mp \frac{1}{s' + s} \right] . \quad (5.15)$$

Chegamos assim a uma relação de dispersão com *uma subtração*, que garante a convergência da integral, sob as condições assumidas.

## 5.2 Relações de Dispersão Derivativas

A eq. (5.15) nos dá uma relação *não local*, isto é, a parte real é calculada através da imaginária para todas energias. Nesta seção, baseando-se no artigo de Bronzan, Kane e Sukhatme [5] e seguindo a formulação desenvolvida por Menon, Motter e Pimentel [8] e Motter [34], calcularemos uma forma derivativa para (5.15), ou seja, uma aproximação da forma de integral para operador diferencial, considerando o limite de altas energias. Como veremos, isso nos leva a uma relação *quase local*. Efetuaremos inicialmente os cálculos em detalhe para uma amplitude par  $f_+(s, t)$  (o caso ímpar é análogo) e considerando uma subtração (seção 5.2.1). Em seguida, apresentamos os resultados para um número arbitrário de subtrações (seção 5.2.2).

### 5.2.1 Uma Subtração

Retornando à eq.(5.15)

$$\text{Re } f_+(s, t) = \frac{2s^2}{\pi} P \int_{s_0}^{+\infty} \frac{ds'}{s'(s'^2 - s^2)} \text{Im } f_+(s', t) , \quad (5.16)$$

para obter a primitiva na integração por partes, dividimos e multiplicamos o integrando por um fator  $s'^\nu$ , com  $\nu$  constante real :

$$\text{Re } f_+(s, t) = \frac{2s^2}{\pi} \int_{s_0}^{+\infty} \frac{ds'}{s'(s'^2 - s^2)} \text{Im } f_+(s', t) \quad \times \quad \frac{s'^\nu}{s'^\nu} . \quad (5.17)$$

Integrando (5.17) por partes

$$\operatorname{Re} f_+(s, t) = u.v \Big|_{s_0}^{+\infty} - \frac{2s^2}{\pi} \int_{s_0}^{+\infty} ds' \frac{1}{2s} \ln \left( \frac{s' - s}{s' + s} \right) s'^{(\nu-1)} \left( (\nu - 1) \frac{1}{s'} + \frac{d}{ds'} \right) \left( \frac{\operatorname{Im} f_+(s', t)}{s'^{\nu}} \right), \quad (5.18)$$

onde

$$\begin{cases} u = s'^{(\nu-1)} \operatorname{Im} f_+(s', t) / s'^{\nu}, \\ v = \frac{1}{2s} \ln \left( \frac{s' - s}{s' + s} \right). \end{cases}$$

Como consideraremos as energias suficientemente altas,  $s_0 \rightarrow 0$ , e o termo  $(u.v)$  de (5.18) torna-se nulo, enquanto que na integral da direita faremos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} s = e^{\xi}, \\ s' = e^{\xi'}. \end{cases} \quad (5.19)$$

Substituindo em (5.18) e considerando o limite  $s_0 \rightarrow 0 \Rightarrow \xi_0 = \ln s_0 \rightarrow -\infty$

$$\operatorname{Re} f_+(s, t) = \frac{s}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' s'^{(\nu-1)} \ln \left( \frac{e^{\xi'} - e^{\xi}}{e^{\xi'} + e^{\xi}} \right) \left( (\nu - 1) + \frac{d}{d\xi'} \right) (\operatorname{Im} f_+(s', t) / s'^{\nu}),$$

$$\operatorname{Re} f_+(s, t) = \frac{s}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' s'^{(\nu-1)} \ln \left( \coth \left( \frac{1}{2} |\xi - \xi'| \right) \right) \left( (\nu - 1) + \frac{d}{d\xi'} \right) (\operatorname{Im} f_+(s', t) / s'^{\nu}). \quad (5.20)$$

Expandindo  $\operatorname{Im} f_+(s', t) / s'^{\nu}$  em série de potências de  $(\xi - \xi')$

$$\operatorname{Im} f_+(s', t) / s'^{\nu} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^n}{d\xi'^n} \left( \operatorname{Im} f_+(s', t) / e^{\nu\xi'} \right) \Big|_{\xi' = \xi} \frac{(\xi' - \xi)^n}{n!},$$

$$\operatorname{Im} f_+(s', t)/s'^\nu = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^n}{d(\ln s)^n} (\operatorname{Im} f_+(s, t)/s^\nu) \frac{(\xi' - \xi)^n}{n!}, \quad (5.21)$$

a qual, substituída em (5.20) e assumindo-se convergência da série, fornece

$$\operatorname{Re} f_+(s, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d(\ln s)^n} (\operatorname{Im} f_+(s, t)/s^\nu) \frac{s^\nu}{\pi} I_n, \quad (5.22)$$

onde

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' e^{(\nu-1)(\xi'-\xi)} \ln \left( \coth \left( \frac{1}{2} |\xi - \xi'| \right) \right) \left( (\nu - 1) + \frac{d}{d\xi} \right) (\xi' - \xi)^n. \quad (5.23)$$

Fazendo  $y = \xi' - \xi$ ,

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{(\nu-1)y} \ln \left( \coth \left( \frac{|y|}{2} \right) \right) \left( (\nu - 1) + \frac{d}{dy} \right) y^n,$$

e integrando por partes,

$$I_n = A_n - B_n, \quad (5.24)$$

onde

$$A_n = \ln \left( \coth \left( \frac{|y|}{2} \right) \right) e^{(\nu-1)y} y^n \Big|_{-\infty}^{+\infty}, \quad (5.25)$$

$$B_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\nu-1)y} y^n d \left[ \ln \left( \coth \left( \frac{|y|}{2} \right) \right) \right]. \quad (5.26)$$

Passamos agora a estudar cada termo separadamente.

Termo  $A_n$

Expressando

$$A_n = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[ \ln F'(y) e^{(\nu-1)y} y^n \right]_{-u}^u, \quad (5.27)$$

onde

$$F'(y) = \ln \left( \coth \left( \frac{|y|}{2} \right) \right), \quad (5.28)$$

e comparando  $F(y)$  com a função

$$f(y) = 2e^{-|y|}, \quad (5.29)$$

mostradas na figura 5.3, vemos que quando  $y \rightarrow +\infty \Rightarrow F'(y) \rightarrow 0$ , assim como,

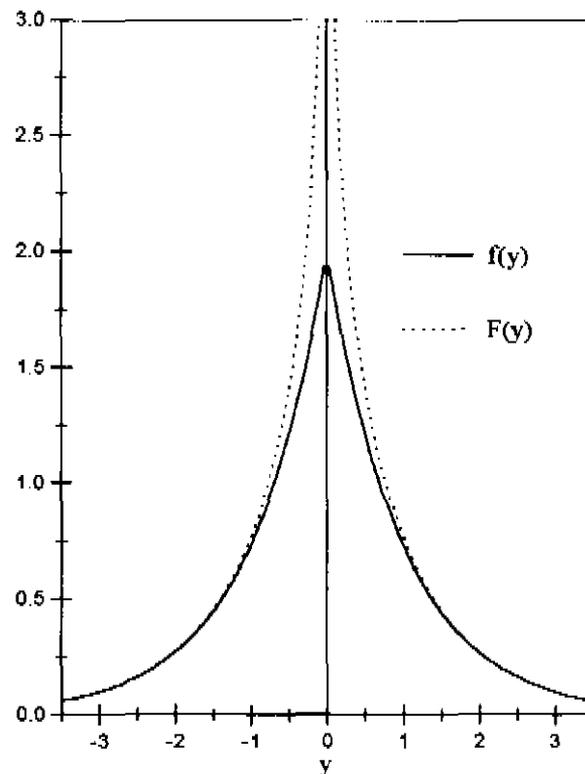


Figura 5.3

$f(y) = 2e^{-|y|} \rightarrow 0$ , ou seja, decrescem exponencialmente

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) \approx \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) . \quad (5.30)$$

Portanto para  $|y| = |\xi' - \xi|$  grande o suficiente

$$F(y) = \ln \left( \coth \left( \frac{|y|}{2} \right) \right) \approx 2e^{-|y|} , \quad (5.31)$$

a qual em (5.25) fornece

$$A_n = 2e^{-|y|} e^{(\nu-1)y} y^n \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{u \rightarrow \infty} (e^{-|y|} e^{(\nu-1)y} y^n) \Big|_{-u}^u = \lim_{u \rightarrow \infty} 2(e^{(\nu-2)u} u^n - e^{-\nu u} (-u)^n) , \quad (5.32)$$

$$= 2 \left[ \lim_{u \rightarrow \infty} (e^{(\nu-2)u} u^n) - \lim_{u \rightarrow \infty} (e^{-\nu u} (-u)^n) \right] . \quad (5.33)$$

O primeiro limite vai para zero quando  $\nu - 2 < 0$  e o segundo quando  $\nu > 0$ .

Logo

$$A_n = 0 \quad \text{para} \quad 0 < \nu < 2 , \quad (5.34)$$

$$A_n \Rightarrow \text{Diverge} \quad \text{para} \quad \nu \geq 2 , \nu \leq 0 . \quad (5.35)$$

*Termo  $B_n$*

Como

$$\frac{d}{dy} \left[ \ln \left( \coth \left( \frac{|y|}{2} \right) \right) \right] = -\frac{1}{\sinh(y)} , \quad (5.36)$$

esse termo é expresso por

$$B_n = - \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{e^{(\nu-1)y} y^n}{\sinh(y)} . \quad (5.37)$$

Com isso, para  $0 < \nu < 2$  a integral (5.23) resulta

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{e^{(\nu-1)y}}{\sinh(y)} y^n . \quad (5.38)$$

Voltando à eq.(5.22), para os dois primeiros termos da série, que serão de nosso interesse, teremos

$$\text{Re } f_+(s, t) = \frac{s^\nu}{\pi} (\text{Im } f_+(s, t)/s^\nu) I_0 + \frac{s^\nu}{\pi} \frac{d}{d \ln s} (\text{Im } f_+(s, t)/s^\nu) I_1 , \quad (5.39)$$

que através da ref [35]

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\nu-1)y}}{\sinh(y)} dy = \pi \tan \left( \frac{\pi}{2} (\nu - 1) \right) , \quad (5.40)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\nu-1)y}}{\sinh(y)} y dy = \frac{\pi^2}{2} \sec^2 \left( \frac{\pi}{2} (\nu - 1) \right) . \quad (5.41)$$

Com isso, para  $0 < \nu < 2$  os dois primeiros termos da série fornecem

---



---


$$\text{Re } f_+(s, t) = \tan \left( \frac{\pi}{2} (\nu - 1) \right) \text{Im } f_+(s, t) + \frac{\pi}{2} s^\nu \sec^2 \left( \frac{\pi}{2} (\nu - 1) \right) \frac{d}{d \ln s} (\text{Im } f_+(s, t)/s^\nu) . \quad (5.42)$$

De maneira semelhante para uma função ímpar  $f_-(s, t)$  pode-se obter

---



---


$$\text{Re } f_-(s, t) = \tan \left( \frac{\pi}{2} \nu \right) \text{Im } f_-(s, t) + \frac{\pi}{2} s^\nu \sec^2 \left( \frac{\pi}{2} \nu \right) \frac{d}{d \ln s} (\text{Im } f_-(s, t)/s^\nu) . \quad (5.43)$$

## 5.2.2 Número Arbitrário de Subtrações

Nas seções anteriores tratamos as relações de dispersão com apenas uma subtração, tanto na forma integral como derivativa. Porém, conforme mostraram Menon, Motter e Pimentel [8], para  $k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) subtrações a relação de dispersão integral será

$$\operatorname{Re} f_{\pm}(s, t) = -\frac{s^k}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{ds'^{(k-1)}} \left[ \frac{\operatorname{Re} f_{\pm}(s, t)}{s' - s} \right] \Big|_{s'_=0} + \frac{s^k}{\pi} P \int_{+s_0}^{+\infty} ds' \frac{\operatorname{Im} f_{\pm}(s', t)}{s'^k} \left[ \frac{1}{s' - s} \mp \frac{(\pm 1)^k}{s' + s} \right], \quad (5.44)$$

ou especificando para cada tipo de função, par e ímpar, e a menos das constantes de subtração :

$$\operatorname{Re} f_+(s, t) = \frac{s^N}{\pi} P \int_{+s_0}^{+\infty} ds' \frac{\operatorname{Im} f_+(s', t)}{s'^N} \left[ \frac{2s}{s'^2 - s^2} \right], \quad (5.45)$$

$$\operatorname{Re} f_-(s, t) = \frac{s^M}{\pi} P \int_{+s_0}^{+\infty} ds' \frac{\operatorname{Im} f_-(s', t)}{s'^M} \left[ \frac{2s^2}{s'(s'^2 - s^2)} \right], \quad (5.46)$$

onde  $M$  e  $N$  são números inteiros que estão relacionados com  $k$  através de

$$M = \begin{cases} k-1, & k \text{ Par} \\ k-2, & k \text{ Ímpar} \end{cases} \quad e \quad N = \begin{cases} k-2, & k \text{ Par} \\ k-1, & k \text{ Ímpar} \end{cases} \quad (5.47)$$

Para a forma derivativa de (5.45) e (5.46), até primeira ordem, temos

$$\operatorname{Re} f_+(s, q) = \tan\left(\frac{\pi}{2}(\nu-1)\right) \operatorname{Im} f_+(s, q) + \frac{\pi}{2} s^{\nu+N} \sec^2\left(\frac{\pi}{2}(\nu-1)\right) \frac{d}{d \ln s} \left( \frac{\operatorname{Im} f_+(s, q)}{s^{\nu+N}} \right), \quad (5.48)$$

$$\operatorname{Re} f_-(s, q) = \tan\left(\frac{\pi}{2}(\nu - 1)\right) \operatorname{Im} f_-(s, q) + \frac{\pi}{2} s^{\nu+M} \sec^2\left(\frac{\pi}{2}(\nu - 1)\right) \frac{d}{d \ln s} \left( \frac{\operatorname{Im} f_-(s, q)}{s^{\nu+M}} \right). \quad (5.49)$$

Voltando às condições (5.47), teremos os seguintes valores de  $M$  e  $N$  para as cinco primeiras subtrações (Tab 6)

$k$ (Subtra.)	$N$	$M$
1	0	-1
2	0	1
3	2	1
4	2	3
5	4	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 6

Portanto, para as duas primeiras subtrações, de uma função par, as RDD's são iguais ( $N = 0$ ), o que não ocorre para uma função ímpar. Com isso garantimos a convergência da amplitude elementar com até duas subtrações.

Explicitamente, temos os seguintes resultados para os dois primeiros termos da série (tangente) :

- Amplitude Par

- Uma e duas subtrações ( $k = 1$  e  $k = 2$ ,  $N = 0$ ) :

$$\frac{\operatorname{Re} f_+(s, q)}{s^\nu} = \tan\left(\frac{\pi}{2}(\nu - 1)\right) \frac{\operatorname{Im} f_+(s, q)}{s^\nu} + \frac{\pi}{2} \sec^2\left(\frac{\pi}{2}(\nu - 1)\right) \frac{d}{d \ln s} \left( \frac{\operatorname{Im} f_+(s, q)}{s^\nu} \right). \quad (5.50)$$

- Amplitude Ímpar

- Uma subtração ( $k = 1$ ,  $M = -1$ ) :

$$\frac{\operatorname{Re} f_-(s, q)}{s^{\nu-1}} = \tan\left(\frac{\pi}{2}(\nu - 1)\right) \frac{\operatorname{Im} f_-(s, q)}{s^{\nu-1}} + \frac{\pi}{2} \sec^2\left(\frac{\pi}{2}(\nu - 1)\right) \frac{d}{d \ln s} \left( \frac{\operatorname{Im} f_-(s, q)}{s^{\nu-1}} \right). \quad (5.51)$$

- Duas subtrações ( $k = 2$ ,  $M = 1$ ) :

$$\frac{\operatorname{Re} f_-(s, q)}{s^{\nu+1}} = \tan\left(\frac{\pi}{2}(\nu - 1)\right) \frac{\operatorname{Im} f_-(s, q)}{s^{\nu+1}} + \frac{\pi}{2} \sec^2\left(\frac{\pi}{2}(\nu - 1)\right) \frac{d}{d \ln s} \left( \frac{\operatorname{Im} f_-(s, q)}{s^{\nu+1}} \right). \quad (5.52)$$

Para  $\nu = 1$  obtemos as fórmulas que denominaremos “padrão”, pois são as que aparecem na literatura (cap 6), no caso de até duas subtrações :

- Par - uma e duas subtrações

$$\frac{\operatorname{Re} f_+(s, q)}{s} = \frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \left( \frac{\operatorname{Im} f_+(s, q)}{s} \right). \quad (5.53)$$

- Ímpar - uma subtração

$$\operatorname{Re} f_-(s, q) = \frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} (\operatorname{Im} f_-(s, q)). \quad (5.54)$$

- Ímpar - duas subtrações

$$\frac{\operatorname{Re} f_-(s, q)}{s^2} = \frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \left( \frac{\operatorname{Im} f_-(s, q)}{s^2} \right). \quad (5.55)$$

# Capítulo 6

## Aplicações das Relações de Dispersão

### Derivativas à Amplitudes

### Elementares

Este capítulo é o ponto central de nosso trabalho com respeito às aplicações das relações de dispersão derivativa. Começaremos apresentando o modelo utilizado (modelo de difração múltipla) para o espalhamento  $pp$ , conforme desenvolvido por Martini e Menon [20]. Em seguida, faremos a aplicação da relação de dispersão derivativa (RDD), no contexto do modelo, através de duas abordagens (relação padrão, com  $\nu = 1$  e ajuste do parâmetro  $\nu$ ), apresentando em cada caso as previsões para as grandezas físicas e comparações com os dados experimentais.

## 6.1 Objetivos Gerais

O objetivo deste capítulo é descrever as grandezas físicas (cap. 2) num espalhamento  $pp$ , com auxílio da amplitude de espalhamento hadrônica, vista no capítulo 3

$$F(s, q) = i \int_0^\infty b db [1 - e^{i\chi(s, b)}] J_0(qb) \equiv i \langle 1 - e^{i\chi(s, b)} \rangle, \quad (6.1)$$

onde, no formalismo (geral) de difração múltipla,  $\chi(s, b)$  é o termo de primeira ordem da função eiconal, eq. (3.55)

$$\chi(s, b) = C_{AB} \langle G_A G_B f \rangle. \quad (6.2)$$

Com a amplitude hadrônica, estudaremos as grandezas físicas através das expressões

$$\frac{d\sigma}{dt} = \pi |F(s, q)|^2, \quad (6.3)$$

$$\sigma_{tot}(s) = 4\pi \text{Im} F(s, q = 0), \quad (6.4)$$

$$\rho(s) = \frac{\text{Re} F(s, q = 0)}{\text{Im} F(s, q = 0)}. \quad (6.5)$$

## 6.2 Modelo Prévio de Difração Múltipla

Como referido na seção 3.3, no modelo de difração múltipla, desenvolvido recentemente por Martini e Menon [20] para o espalhamento  $pp$ , as parametrizações dos fatores de forma

são do tipo

$$G = G_A = G_B \equiv \left(1 + \frac{q^2}{\alpha^2}\right)^{-1} \left(1 + \frac{q^2}{\beta^2}\right)^{-1}, \quad (6.6)$$

enquanto que a parte imaginária da amplitude elementar é assumida na forma fatorada em termos da dependência com energia  $s$  e momento  $q$ ,

$$\text{Im } f = C(s)h(q), \quad (6.7)$$

onde

$$h(q) = \frac{1 - q^2/a^2}{1 + q^4/a^4}, \quad (6.8)$$

e  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$ ,  $a^2$  e  $C$  são parâmetros livres, cujas parametrizações serão apresentadas mais adiante. As justificativas físicas para essas parametrizações são discutidas por Menon nas referências [38] e [39].

### 6.2.1 Cálculo da Amplitude Hadrônica

A primeira característica desse modelo é, com base na eq. (6.1), associar à amplitude hadrônica complexa, uma *amplitude elementar complexa*

$$f(s, q) = \text{Re } f(s, q) + i \text{Im } f(s, q). \quad (6.9)$$

O ponto central na abordagem de Martini e Menon é a hipótese de proporcionalidade entre as partes real e imaginária de (6.9), tal que

$$\operatorname{Re} f(s, q) = \lambda \operatorname{Im} f(s, q) , \quad (6.10)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro livre e dependente da energia (essa hipótese foi assumida com base apenas em sua simplicidade). Substituindo (6.10) em (6.9)

$$f(s, q) = (\lambda + i) \operatorname{Im} f(s, q) , \quad (6.11)$$

teremos a amplitude elementar em função de sua parte imaginária, o que nos interessa, pelo fato da mesma ser descrita por (6.7). Substituindo (6.11) em (6.2) e considerando os fatores de forma iguais (espalhamento  $pp$ )

$$\chi(s, b) = \langle G^2 f \rangle = \langle G^2 (\lambda + i) \operatorname{Im} f(s, q) \rangle , \quad (6.12)$$

ou ainda

$$\chi(s, b) = (\lambda + i) \Omega(s, b) , \quad (6.13)$$

onde  $\Omega$  é a opacidade

$$\Omega(s, b) = \langle G^2 \operatorname{Im} f(s, q) \rangle . \quad (6.14)$$

Finalmente com a função eiconal, podemos calcular as partes real e imaginária da amplitude hadrônica (apêndice F)

$$\text{Re } F(s, q) = \langle e^{-\Omega(s,b)} \text{sen}(\lambda\Omega(s, b)) \rangle, \quad (6.15)$$

$$\text{Im } F(s, q) = \langle 1 - e^{-\Omega(s,b)} \cos(\lambda\Omega(s, b)) \rangle. \quad (6.16)$$

e daí segue as grandezas físicas (6.3), (6.4) e (6.5) .

Portanto, a amplitude de espalhamento dependerá dos fatores de forma, parte imaginária da amplitude elementar e do parâmetro  $\lambda$ . Vamos fazer em seguida uma revisão sobre a análise dos dados experimentais e a determinação das parametrizações para  $\alpha(s)$ ,  $C(s)$  e  $\lambda(s)$ .

### 6.2.2 Ajuste aos Dados Experimentais

Como discutido em [20] foram analisados sete conjuntos de dados experimentais de espalhamento  $pp$  para energias acima de 10  $GeV$ . O procedimento de ajuste consistiu de duas etapas :

(1) Tomando  $\lambda = 0$  a amplitude hadrônica, eqs. (6.15) e (6.16), é puramente imaginária.

Nesse caso, determinou-se os valores dos parâmetros  $C$ ,  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$  e  $a^2$  que reproduzem os dados da seção de choque diferencial em cada energia e de modo a apresentar um zero na posição de mínimo (dip).

(2) Com os valores desses 4 parâmetros calculou-se o valor de  $\lambda$  que reproduz o valor

experimental de  $\rho$  em cada energia.

Com esse procedimento obteve-se uma descrição satisfatória dos dados experimentais.

A fim de se obter um formalismo que permita previsões para outras energias, os valores dos parâmetros  $\alpha^2$  e  $C$  foram parametrizados através de funções dependentes da energia na forma de polinômios em  $\ln s$  (usual em espalhamentos clássicos e/ou suaves).

No caso do parâmetro  $\lambda$  a parametrização foi baseada no comportamento geral da grandeza  $\rho(s)$ , não havendo uma justificativa teórica para essa escolha.

### 6.2.3 Resultados

Os valores dos parâmetros livres e parametrizações obtidos através do procedimento descrito foram os seguintes<sup>1</sup>:

$$a^2 = 8.20 \text{ GeV}^2 \quad \text{e} \quad \beta^2 = 1.80 \text{ GeV}^2, \quad (6.17)$$

$$\frac{1}{\alpha^2(s)} = 2.57 - 0.217 \ln(s) + 0.0243 \ln^2(s) \quad (\text{GeV}^{-2}), \quad (6.18)$$

$$C(s) = 14.3 - 1.65 \ln(s) + 0.159 \ln^2(s) \quad (\text{GeV}^2). \quad (6.19)$$

$$\lambda(s) = \frac{A_1 \ln(s/s_0)}{1 + A_2 \ln(s/s_0) + A_3 \ln^2(s/s_0)}, \quad (6.20)$$

---

<sup>1</sup>Uma discussão mais aprofundada da obtenção desses ajuste pode ser encontrada em [20].

onde

$$A_1 = 6.95 \times 10^{-2}, \quad A_2 = 0.118, \quad A_3 = 1.50 \times 10^{-2}, \quad (6.21)$$

$$s_0 = 1 \text{ GeV}.$$

As parametrizações para  $C(s)$ ,  $\alpha^{-2}(s)$  e  $\lambda(s)$ , juntamente com os valores que descrevem os dados experimentais, conforme o procedimento descrito na seção 6.2.2, são mostradas nas figuras 6.1, 6.2 e 6.3 respectivamente

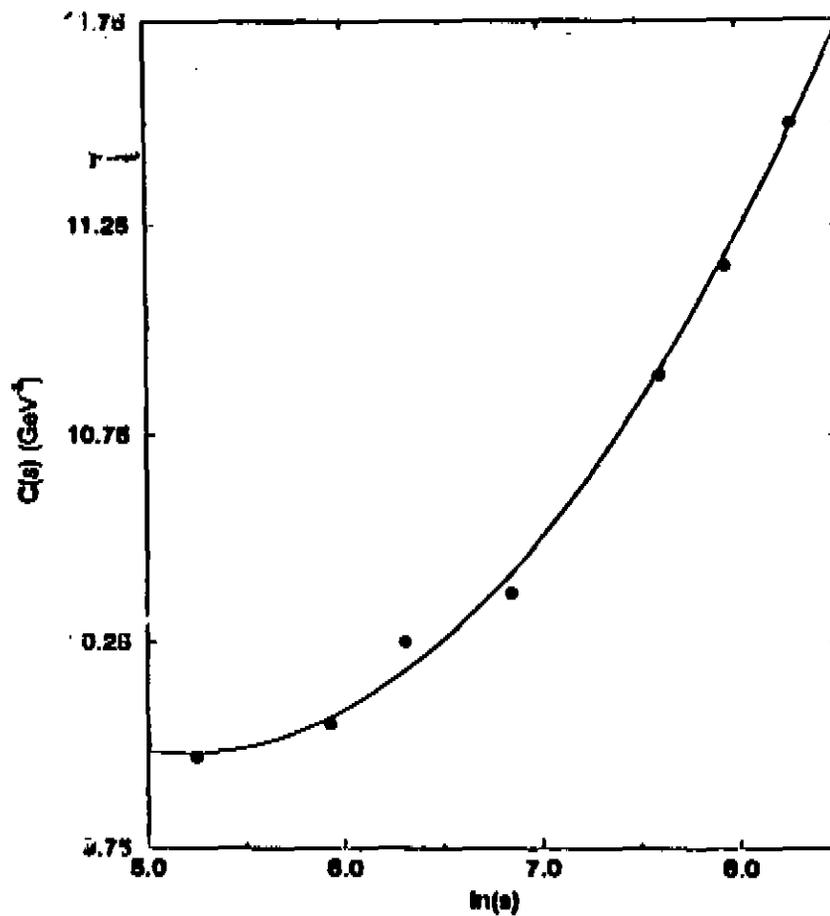


Figura 6.1 : Curva do parâmetro  $C(s)$  [20].

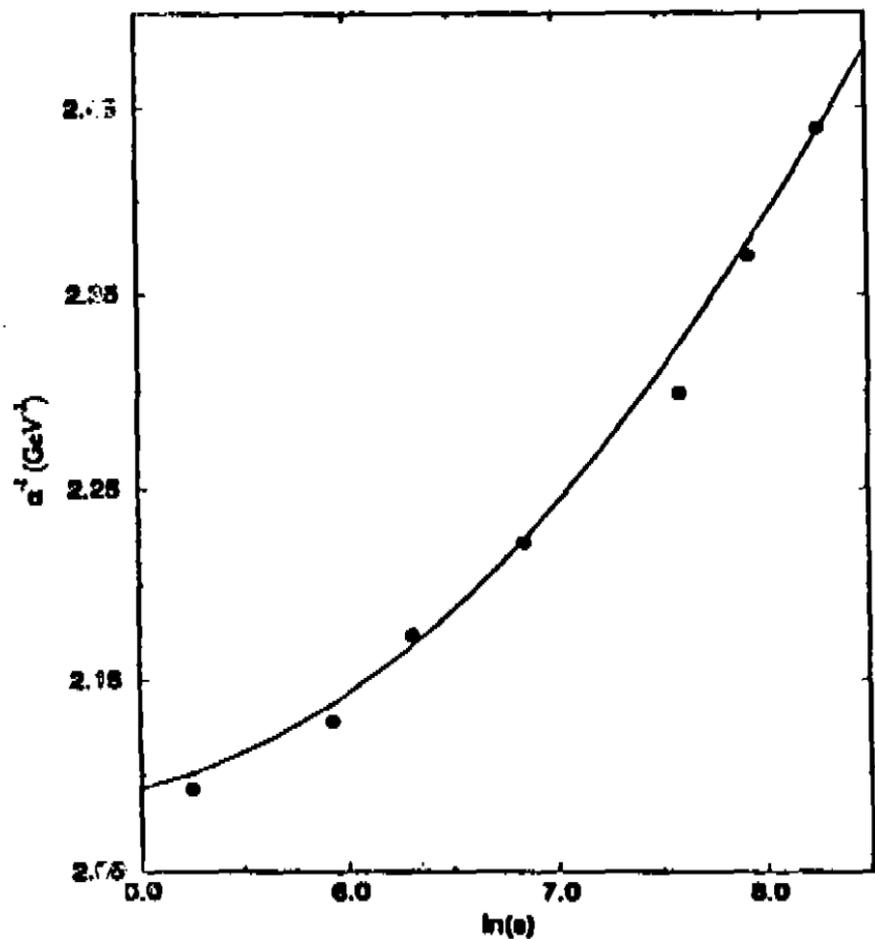


Figura 6.2 : Curva do parâmetro  $\alpha^{-2}(s)$  [20].

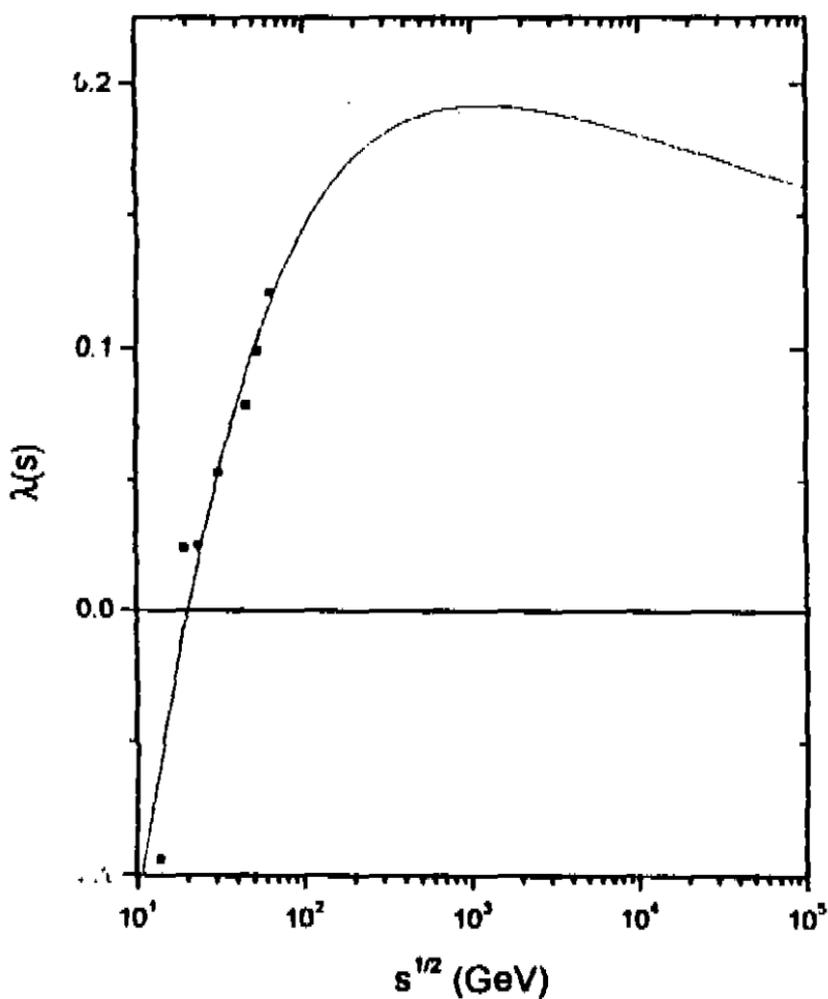


Figura 6.3 : Curva do parâmetro  $\lambda(s)$ [20].

Com esse formalismo pode-se prever o comportamento das grandezas (6.3), (6.4) e (6.5) em termos da energia. Os resultados são mostrados nas figuras 6.4, 6.5 e 6.6 respectivamente e comparados com os resultados experimentais.

No caso de interação  $pp$  os dados experimentais de  $d\sigma/dt$ ,  $\sigma_t$  e  $\rho$  na faixa mais alta de energia investigada em aceleradores de partículas, correspondem à região  $13,8 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 62,5 \text{ GeV}$ . Nessa região a comparação das previsões do modelo com os dados experimentais serve como um teste das parametrizações utilizadas, eqs. (6.17) a (6.21).

No caso de  $\sigma_t$ , como referido no cap. 2, existem informações experimentais provenientes de dados de raios cósmicos na faixa de energia 6 - 24  $\text{TeV}$ , havendo as discrepâncias referidas na seção 2.2. Como mostrado na figura 6.5 as previsões do modelo favorecem os resultados de Nikolaev.

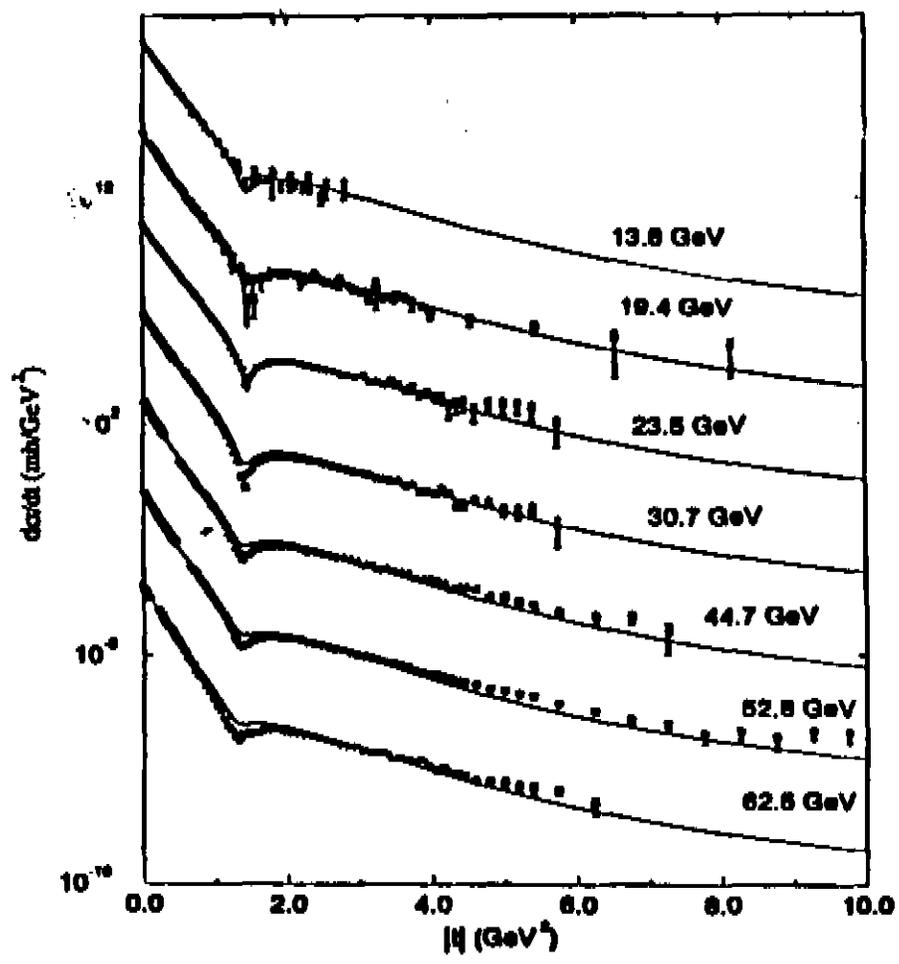


Figura 6.4 : Seção de Choque Diferencial [20].

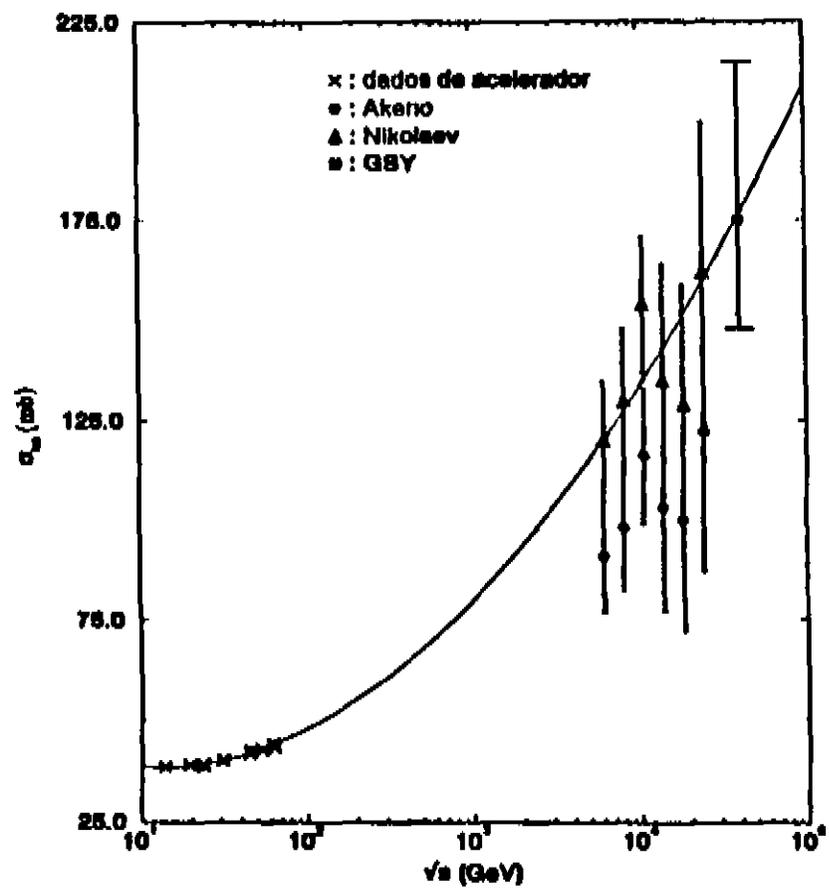


Figura 6.5 : Seção de Choque Total com extrapolação para raios cósmicos [20].

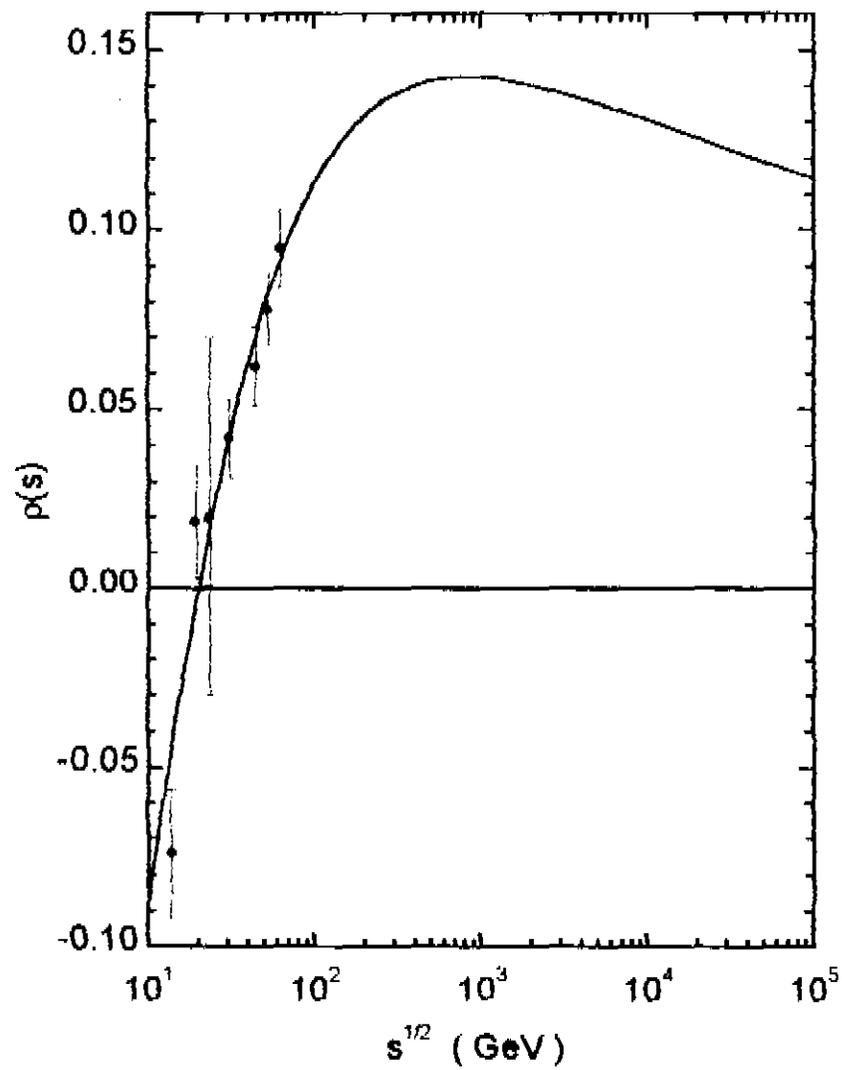


Figura 6.6 : Curva do parâmetro  $\rho(s)$  com dados da Tab1 [20].

## 6.2.4 Discussão Crítica

Um ponto crítico nesse modelo é que será reformulado na seção 6.3, diz respeito à escolha da parametrização para  $\lambda(s)$ , eqs. (6.20) e (6.21). Como explicado na ref [20], a análise dos dados experimentais mostrou que os parâmetros  $\lambda(s)$  e  $\rho(s)$  têm, no formalismo de difração múltipla, comportamentos similares em termos da energia :

$$\lambda = 0 \implies \rho = 0$$

$$\lambda > 0 \implies \rho > 0$$

$$\lambda < 0 \implies \rho < 0$$

$$\lambda_{Crescente} \implies \rho_{Crescente}$$

$$\lambda_{Decrescente} \implies \rho_{Decrescente}$$

Isso levou os autores a testar para os valores de  $\lambda(s)$  em cada energia (fig. 6.3) uma parametrização capaz de reproduzir, de forma global, as informações experimentais disponíveis sobre  $\rho(s)$ , incluindo dados de interação  $\bar{p}p$  a 546 GeV e 1.8 TeV. Essa foi a origem da fórmula geral 6.20 e o ajuste aos pontos da fig. 6.3 determinou os valores dos parâmetros, eq. 6.21 .

Embora tenha-se obtido a reprodução dos dados experimentais, figuras 6.4 a 6.6 e previsões para energias mais altas, deve-se ressaltar que essa escolha não tem razão teórica, tratando-se de uma hipótese ad hoc.

Na próxima seção estudaremos as conexões entre as partes real e imaginária da ampli-

tudo elementar (parâmetro  $\lambda$ ), através das relações de dispersão derivativas.

## 6.3 Relações de Dispersão Derivativas e Amplitudes Elementares

O objetivo central deste trabalho é uma reformulação no modelo discutido na seção anterior no que diz respeito à determinação da parte real da amplitude elementar. Como discutido, na formulação original, não há justificativa teórica para a parametrização de  $\lambda(s)$ , eqs. (6.20) e (6.21). Por essa razão investigamos a aplicabilidade das relações de dispersão derivativas, eqs. (5.48) e (5.49) diretamente nas amplitudes elementares. Observamos que essas relações foram sempre aplicadas a amplitudes hadrônicas, sendo este o primeiro trabalho de aplicação ao nível elementar.

Partindo das eqs. (5.48) e (5.49) o estudo será feito em duas etapas

$\nu = 1$  (Relação Padrão)

$\nu \rightarrow$  Parâmetro Livre .

### 6.3.1 Relação Padrão

Consideremos a RDD para amplitude par no caso de uma ou duas subtrações (eq. 5.50)

$$\frac{\text{Re } f_+(s, q)}{s^\nu} = \tan\left(\frac{\pi}{2}(\nu - 1)\right) \frac{\text{Im } f_+(s, q)}{s^\nu} + \frac{\pi}{2} \sec^2\left(\frac{\pi}{2}(\nu - 1)\right) \frac{d}{d \ln s} \left( \frac{\text{Im } f_+(s, q)}{s^\nu} \right). \quad (6.22)$$

Como demonstrado na seção 5.2, eq. (5.34), o parâmetro  $\nu$  deve satisfazer  $0 < \nu < 2$ .

Entretanto em todas as aplicações das relações derivativas toma-se  $\nu = 1$ . Nesse caso temos

$$\frac{\text{Re } f_+(s, q)}{s} = \frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \left( \frac{\text{Im } f_+(s, q)}{s} \right). \quad (6.23)$$

Vamos agora utilizar essa relação no contexto do modelo prévio discutido na seção 6.2.

Para tanto, seguindo a normalização de Bronzan, Kane e Sukhtme [5], os quais consideram

$s\sigma_T^\dagger = \text{Im } f_+$ , definimos [36]

$$\frac{\text{Im } f_+(s, q)}{s} \equiv \text{Im } f(s, q) \quad (6.24)$$

onde, do modelo (eq. 6.7),

$$\text{Im } f(s, q) = C(s)h(q).$$

Com isso

$$\begin{aligned} \text{Re } f(s, q) &= \frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \{C(s)h(q)\}, \\ \text{Re } f(s, q) &= \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{1}{C(s)} \frac{dC(s)}{d \ln s} \right\} \text{Im } f(s, q), \end{aligned} \quad (6.25)$$

e, comparando com a hipótese de proporcionalidade do modelo, eq.(6.10),

$$\text{Re } f(s, q) = \lambda \text{Im } f(s, q) ,$$

vemos que o parâmetro  $\lambda$ , anteriormente livre e determinado por ajuste, pode ser analiticamente definido através de uma parametrização para  $C(s)$ .

$$\lambda(s) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{C(s)} \frac{dC(s)}{d \ln s} . \quad (6.26)$$

Essa é a vantagem central associada ao uso da relação derivativa : substitui-se a parametrização sem justificativa teórica, eq. (6.20) e (6.21), por um operador diferencial deduzido a partir de propriedades analíticas assumidas para a amplitude elementar.

Com a parametrização original para  $C(s)$ , eq. (6.19), tem-se

$$\lambda(s) = \frac{\text{Re } f(s, q)}{\text{Im } f(s, q)} = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{(0.318 \ln(s) - 1.65)}{14.3 - 1.65 \ln(s) + 0.159 \ln^2(s)} \right] . \quad (6.27)$$

A comparação deste novo resultado para  $\lambda(s)$  com a parametrização anterior (eqs. 6.20 e 6.21) é mostrado na figura 6.7.

É importante ressaltar que a parametrização anterior (6.20) foi escolhida com base no comportamento experimental do parâmetro  $\rho(s)$ , incluindo dados de espalhamento  $\bar{p}p$  em energias mais altas (546 GeV e 1.8 TeV). Isso sugere um máximo em torno de  $10^3$  GeV e limite assintótico a zero por valores positivos. Por essa razão escolheu-se a forma específica

da eq. 6.20 tratando-se portanto de uma escolha ad hoc.

Por outro lado, a eq. (6.27) reproduz exatamente esse resultado global (máximo em torno de  $10^3 \text{ GeV}$  e limite assintótico a zero por valores positivos), sem que nada tenha sido assumido, à exceção da própria relação de dispersão (e, é claro a parametrização original para  $C(s)$ ).

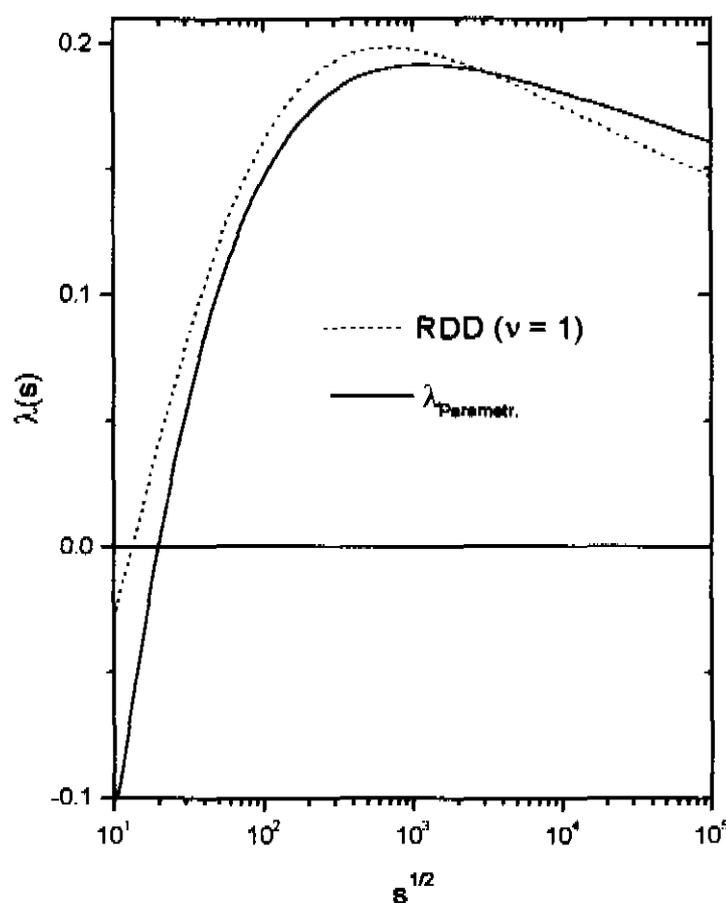


Figura 6.7 : Curvas de  $\lambda(s)$ .

Novamente, utilizando  $\lambda(s)$  (6.27) nas eqs. (6.15) e (6.16), juntamente com as demais parametrizações e valores de parâmetros livres do modelo anterior, tem-se as previsões para as grandezas físicas :

## • Seção de Choque Diferencial

Resultado análogo ao de  $\lambda_{Paramet.}$ . Embora certas diferenças se façam presentes na região de dip (curva um pouco acima dos dados), enquanto que na energia de 13 GeV o mínimo seja pronunciado indicando pequena contribuição da  $Re F(s, q)$  ( figura 6.8).

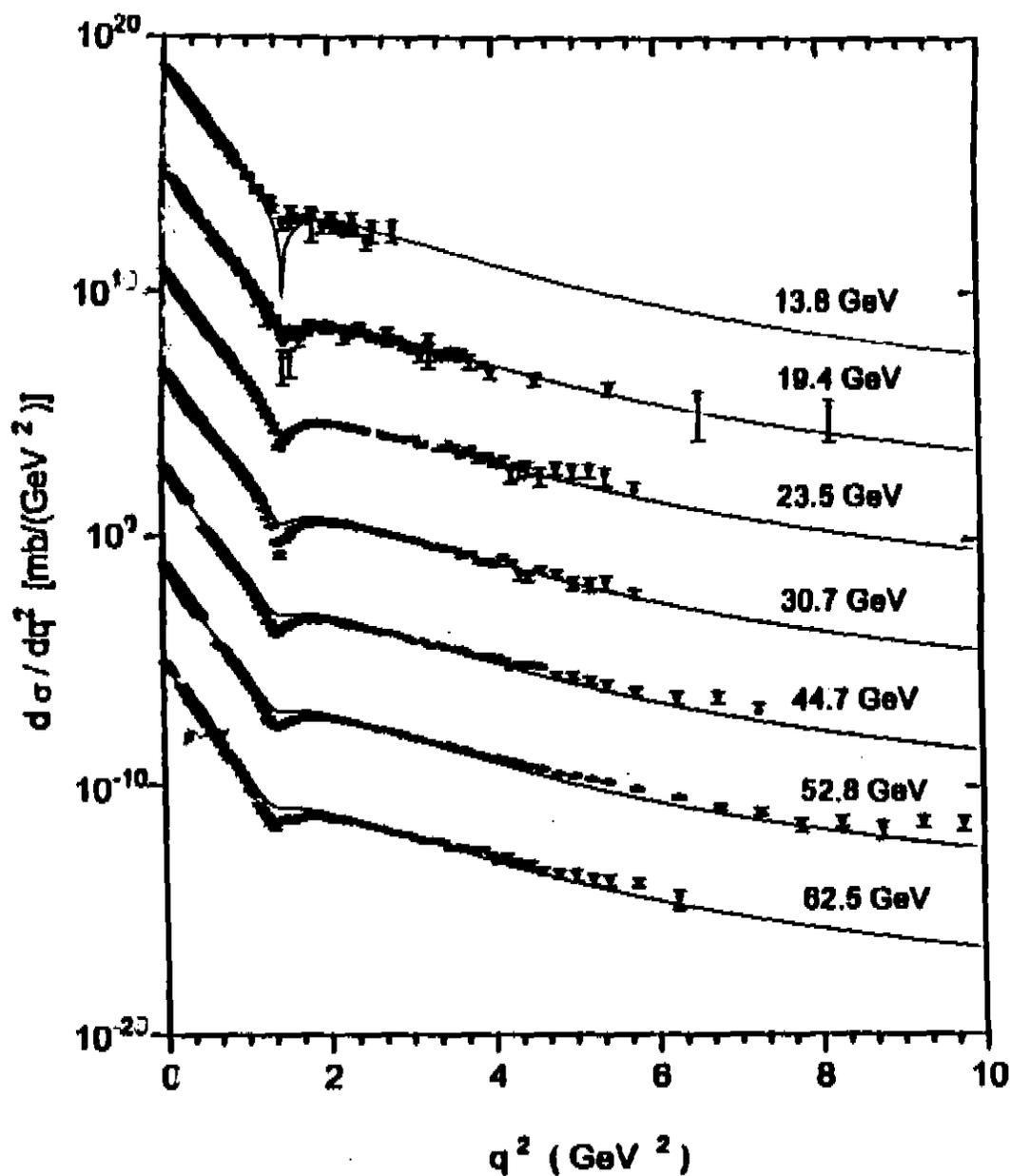


Figura 6.8 : Seção de Choque Diferencial (RDD com  $\nu = 1$ )

na região 14 ~ 63 GeV.

## • Seção de Choque Total

Praticamente não houve mudanças em relação a  $\lambda_{Paramet}$ . Com curvas coincidentes, os dados de raios cósmicos são confirmados para os resultados obtido por Nikolaev (figura 6.9).

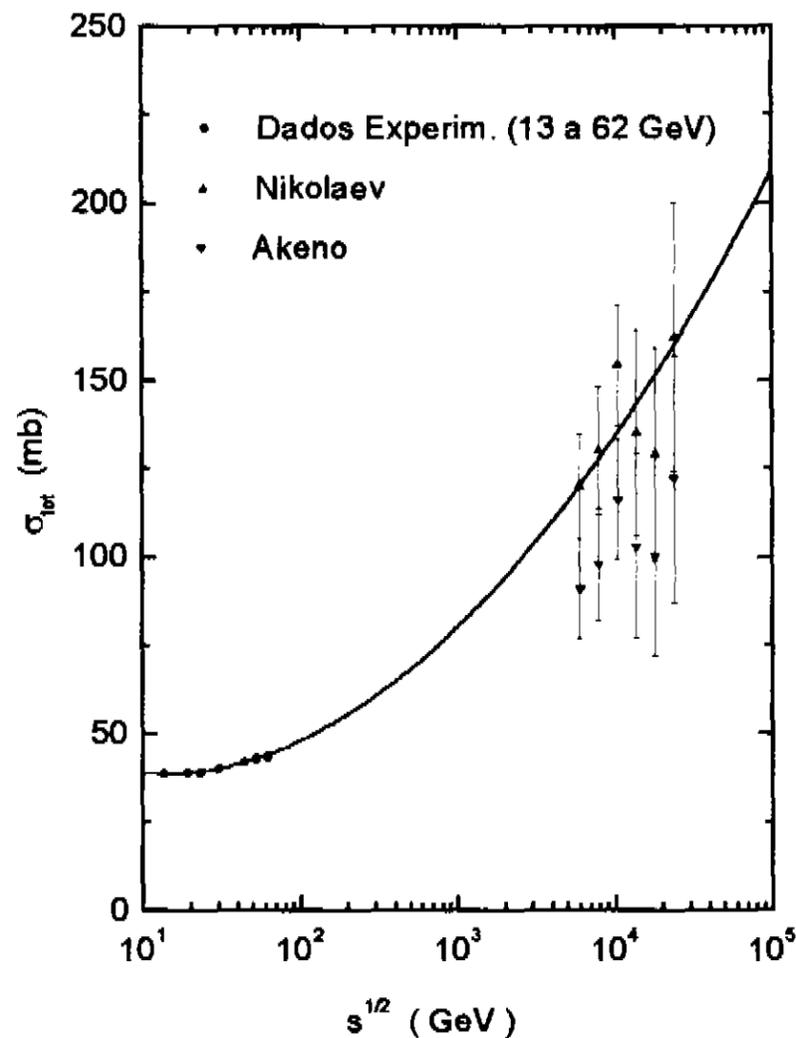


Figura 6.9 : Seção de Choque Total usando RDD ( $\nu = 1$ ) e extrapolação para raios cósmicos. Dados experimentais da tab 2 e 4.

## • Parâmetro $\rho$

Conforme se vê na figura 6.10, a previsão teórica ficou acima dos dados e embora a parte inferior da curva esteja fora de alcance da energia de 13 GeV a superior tem seu máximo em torno de 500 GeV, igual ao de  $\lambda$  parametrizado (fig. 6.6).

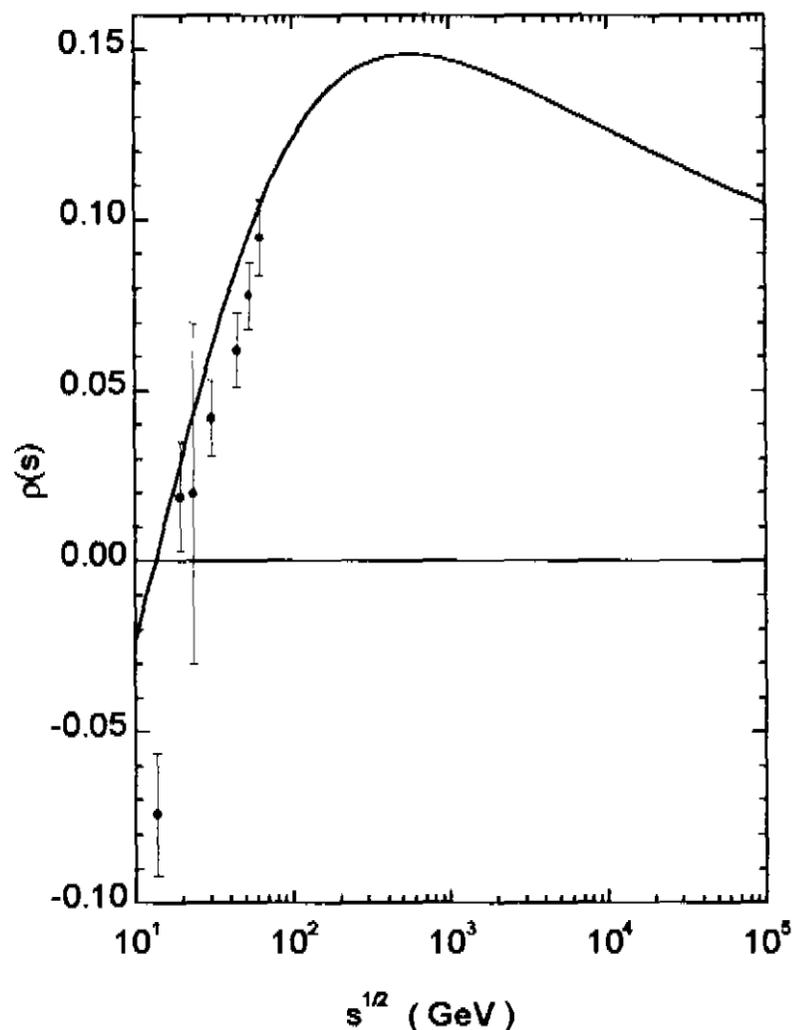


Figura 6.10 : Curva de  $\rho(s)$  com RDD ( $\nu = 1$ ) usando dados experimentais da tab1.

Com base nos resultados obtidos, principalmente quanto à descrição do parâmetro  $\rho(s)$  decidimos testar uma relação mais geral, sem tomar  $\nu = 1$ , porém considerando-o como parâmetro livre. Até onde conhecemos esta “otimização” da relação de dispersão nunca foi realizada na literatura. Observamos também que Kólar e Fischer realizaram extensivos estudos sobre relações de dispersão derivativas [40,41] e de acordo com os autores “ a escolha de um  $\nu$  diferente de 1 não tem vantagem prática ” [41].

### 6.3.2 Relação com Parâmetro Livre

Partimos agora da expressão geral(5.50) para amplitude par (uma e duas subtrações)

[37]

$$\frac{\operatorname{Re} f_+(s, q)}{s^\nu} = \tan\left(\frac{\pi}{2}(\nu - 1)\right) \frac{\operatorname{Im} f_+(s, q)}{s^\nu} + \frac{\pi}{2} \sec^2\left(\frac{\pi}{2}(\nu - 1)\right) \frac{d}{d \ln s} \left( \frac{\operatorname{Im} f_+(s, q)}{s^\nu} \right). \quad (6.28)$$

Seguindo mais uma vez a normalização referida na seção anterior, identificamos

$$\frac{\operatorname{Im} f_+(s, q)}{s} = \operatorname{Im} f(s, q) = C(s)h(q).$$

Com isso,

$$\frac{d}{d \ln s} \left( \frac{\operatorname{Im} f_+(s, q)}{s^\nu} \right) = \frac{d}{d \ln s} \left( \frac{C(s)h(q)}{s^{\nu-1}} \right) = \left[ \frac{1}{C(s)} \frac{dC(s)}{d \ln s} + 1 - \nu \right] \frac{\operatorname{Im} f_+(s, q)}{s^\nu}$$

e da eq. (6.28) temos uma “generalização” para  $\lambda(s)$  em termos do parâmetro  $\nu$  :

$$\lambda(s) = \frac{\operatorname{Re} f(s, q)}{\operatorname{Im} f(s, q)} = \tan\left(\frac{\pi}{2}(\nu - 1)\right) + \frac{\pi}{2} \sec^2\left(\frac{\pi}{2}(\nu - 1)\right) \left[ \frac{1}{C(s)} \frac{dC(s)}{d \ln s} + 1 - \nu \right]. \quad (6.29)$$

Portanto, com a parametrização da eq. (6.19) para  $C(s)$  temos uma expressão geral para

$\lambda(s)$  que pode ser ajustada através de  $\nu$ .

## Determinação do Parâmetro $\nu$

No estudo do espalhamento elástico  $pp$ , teremos que achar um valor de  $\nu$  que melhor descreve os dados experimentais. Nesse caso estudamos somente os dados experimentais do parâmetro  $\rho$  visando otimizar a descrição anteriormente obtida. Com o valor de  $\nu$  limitado no intervalo  $0 < \nu < 2$  (seção 5.2), passamos a efetuar o seguinte procedimento estatístico, tendo somente  $\nu$  como parâmetro livre no modelo :

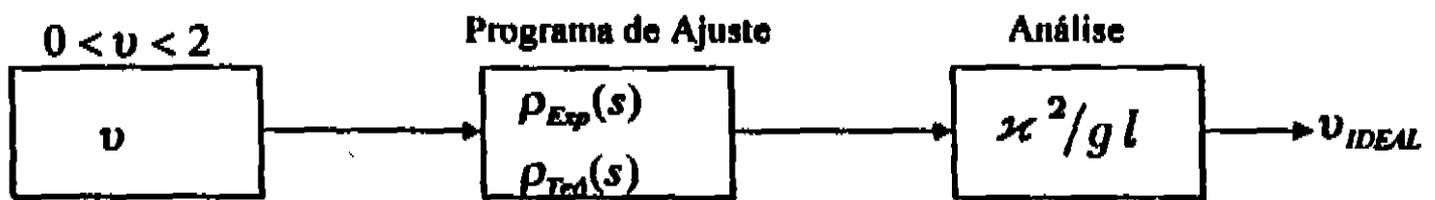


Figura 6.11

O ajuste dos dados experimentais através do programa CERN MINUIT [42] fornece a distribuição indicada na figura 6.12 .

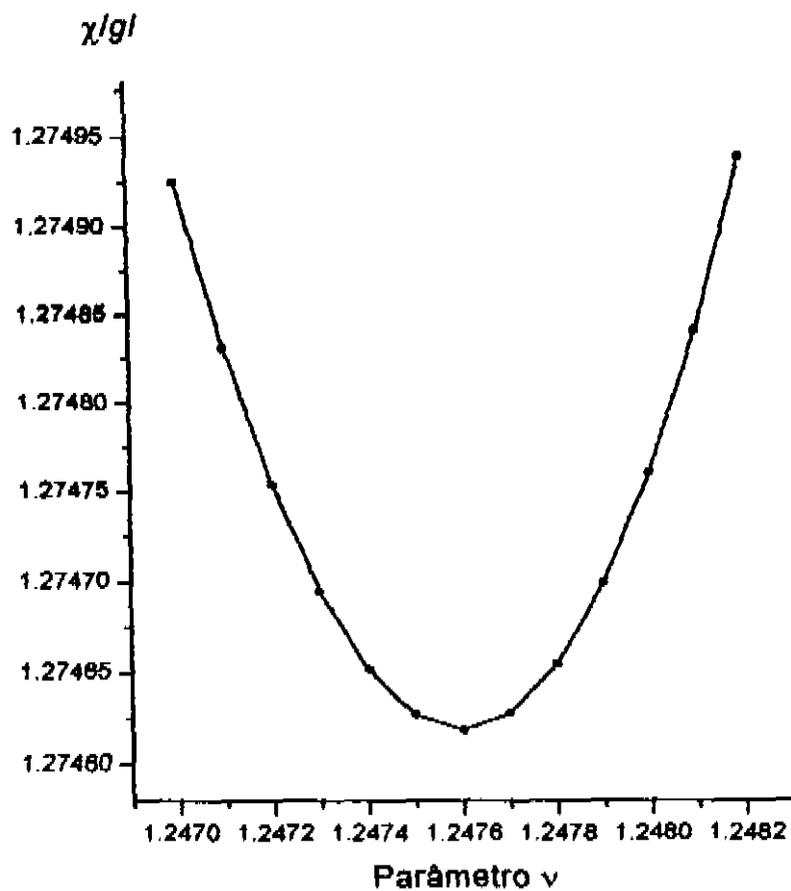


Figura 6.12

Desse resultado extraímos

$$\nu = 1.25 \pm 0.01. \quad (6.30)$$

com  $\chi^2/gl = 7.62/6 = 1.29$ . Logo com o valor acima de  $\nu$  ( $\nu = 1.25$ ) na eq. (6.29), teremos um novo resultado para as grandezas estudadas :

### • Seção de Choque Diferencial

A seção de choque diferencial não sofreu grandes mudanças, embora na energia de 13 GeV o mínimo pronunciado tenha desaparecido e um leve deslocamento na região de dip

ainda se faça presente (figura 6.13).

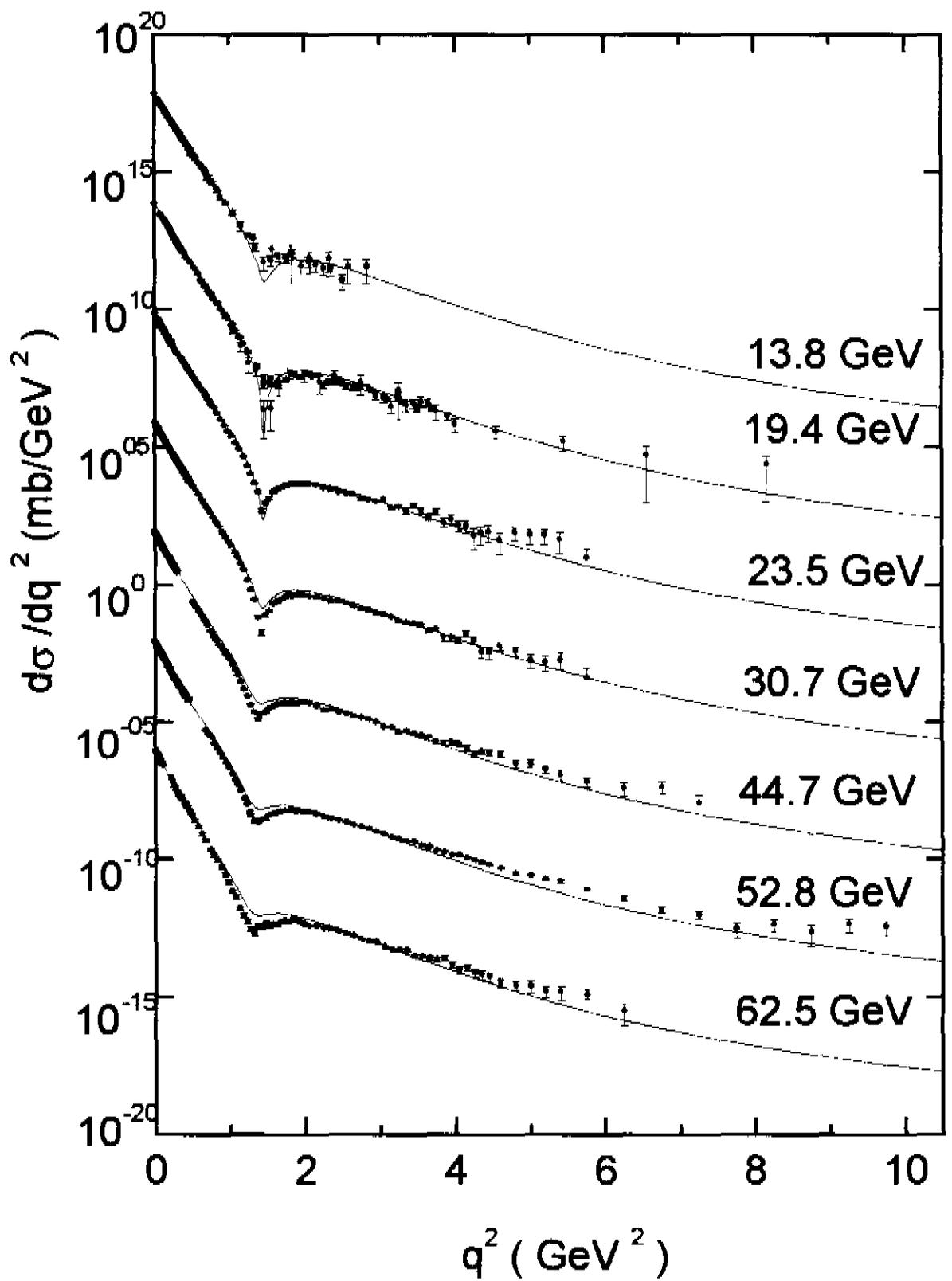


Figura 6.13 : Seção de choque diferencial com RDD ( $\nu = 1.25$ ).

• Seção de Choque Total

Comparando graficamente os resultados anteriores ( $\nu = 1$ ,  $\nu = 1.25$  e  $\lambda_{Paramet}$ ) não vamos perceber nenhuma diferença. Porém se compararmos alguns pontos intermediários das três curvas de  $\sigma_t$  (tabelas 5 e 6), podemos melhor avaliar o crescimento da seção de choque, mesmo que pequena, como mostra a Tab 5.

Nºde Pontos	$\sqrt{s}$ (GeV)	$\sigma_{\nu=1}$ (mb)	$\sigma_{\nu=1.25}$ (mb)	$\sigma_{\lambda_{Paramet.}}$ (mb)
1	10	38.628	38.594	38.667
9	16.4	38.585	38.584	38.587
10	18.1	38.7102	38.7105	38.7108
502	25*	160.98	161.14	160.23
1001	100*	208.60	208.81	208.97

\* Valores da energia em  $TeV$  ( $10^3 GeV$ )

Tabela 5

Para energias até  $16 GeV$ , a seção de choque com  $RDD|_{\nu=1.25}$  decresce em relação a  $RDD|_{\nu=1}$ , enquanto que a partir da energia de  $18 GeV$ , a mesma cresce lentamente até uma taxa de  $\approx 0.02\%$  no final ( $\sqrt{s} = 100 TeV$ ).

Portanto, na faixa dos dados experimentais ( $13$  a  $62 GeV$ ) a seção de choque cresce para um ajuste de  $\nu$ , com exceção da energia de  $13 GeV$  (figura 6.11). Assim como, para

energias de raios cósmicos novamente são confirmados os dados de Nikolaev.

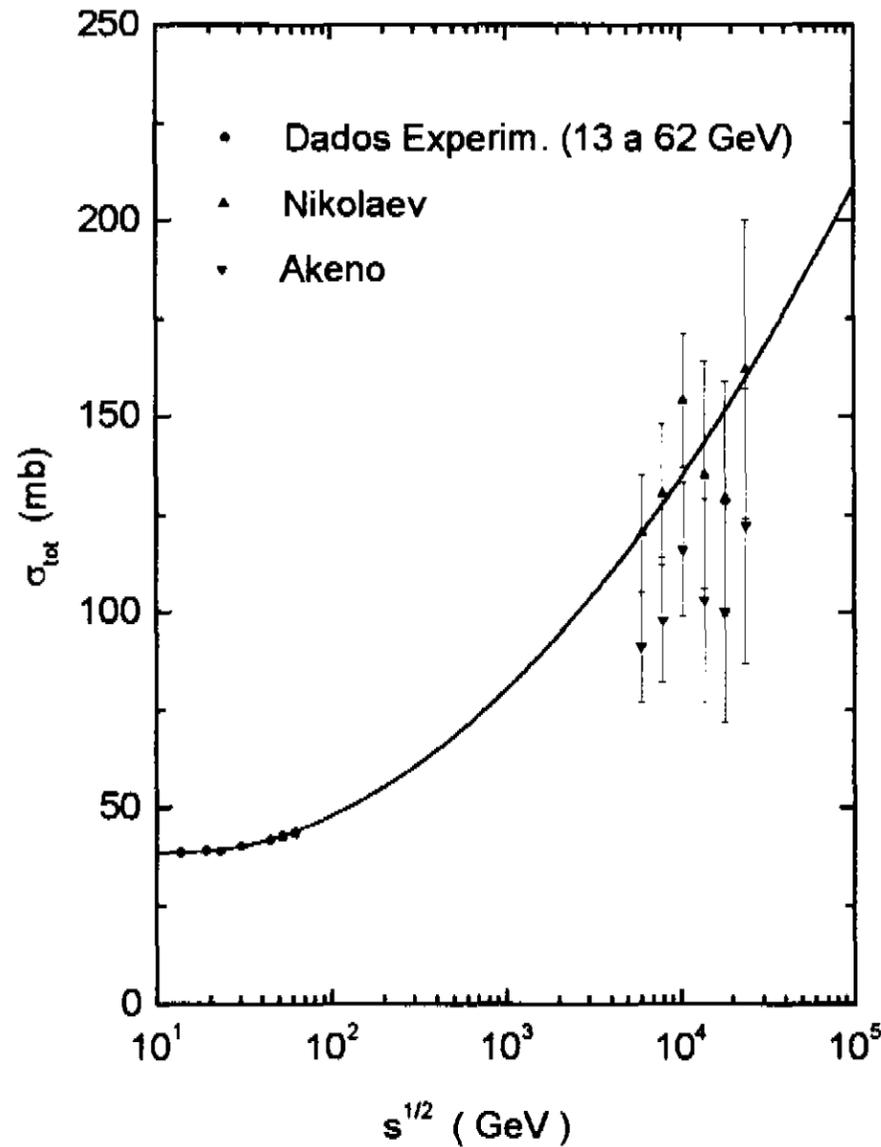


Figura 6.14 : Seção de choque total com RDD ( $\nu = 1.25$ ) e energias de raios cósmicos.

### • Parâmetro $\rho$

Houve uma melhora significativa em relação a  $\nu = 1$ , com o deslocamento da curva, embora a energia de  $13 \text{ GeV}$  esteja um pouco fora de alcance.

Quanto ao ponto máximo, os dados permanecem quase que os mesmos, em relação a  $\nu = 1$  ( $\rho_{max} = 0.14$  para  $\sqrt{s} = 580 \text{ GeV}$ ) e  $\rho = 0.11$  para  $\sqrt{s} = 16 \text{ TeV}$  (LHC). Porém quanto ao decréscimo, a curva cairá mais rápido para zero (figura 6.15). Mesmo resultados são válidos para  $\lambda(s)$  (figura 6.16).

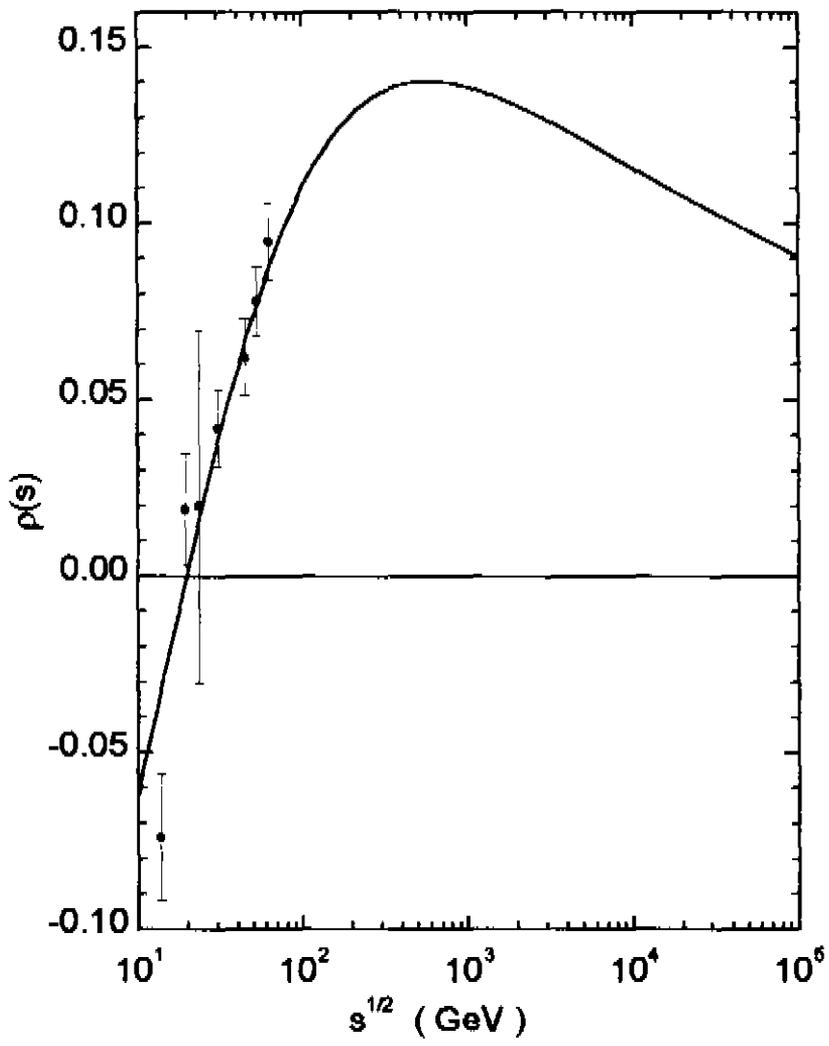


Figura 6.15 : Curva de  $\rho(s)$  com RDD ( $\nu = 1.25$ ) .

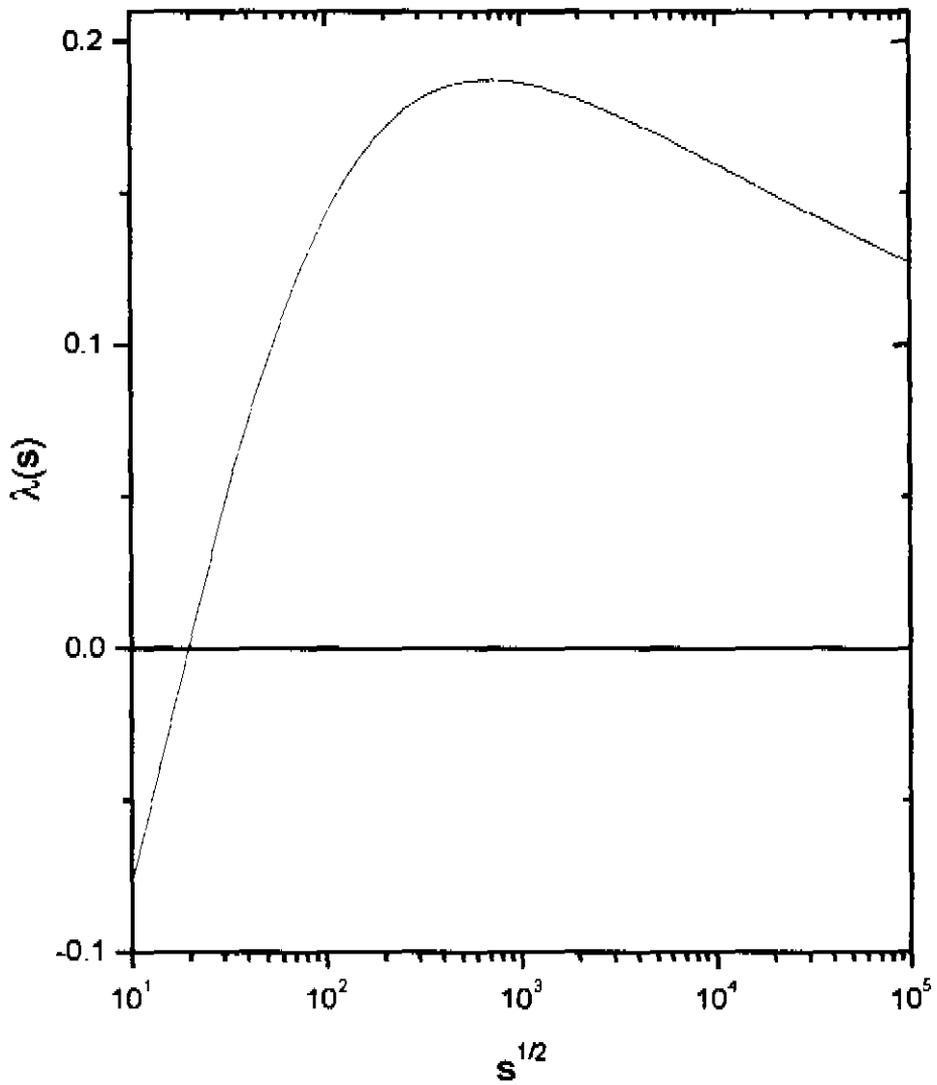


Figura 6.16 : Curva de  $\lambda(s)$  com RDD ( $\nu = 1.25$ ) .

### 6.3.3 Comparação entre os Resultados e Discussão

Para uma melhor avaliação de como o uso da RDD é justificável no modelo de difração múltipla, faremos a comparação entre as previsões de  $\rho(s)$ , para os três casos estudados (figura 6.17) .

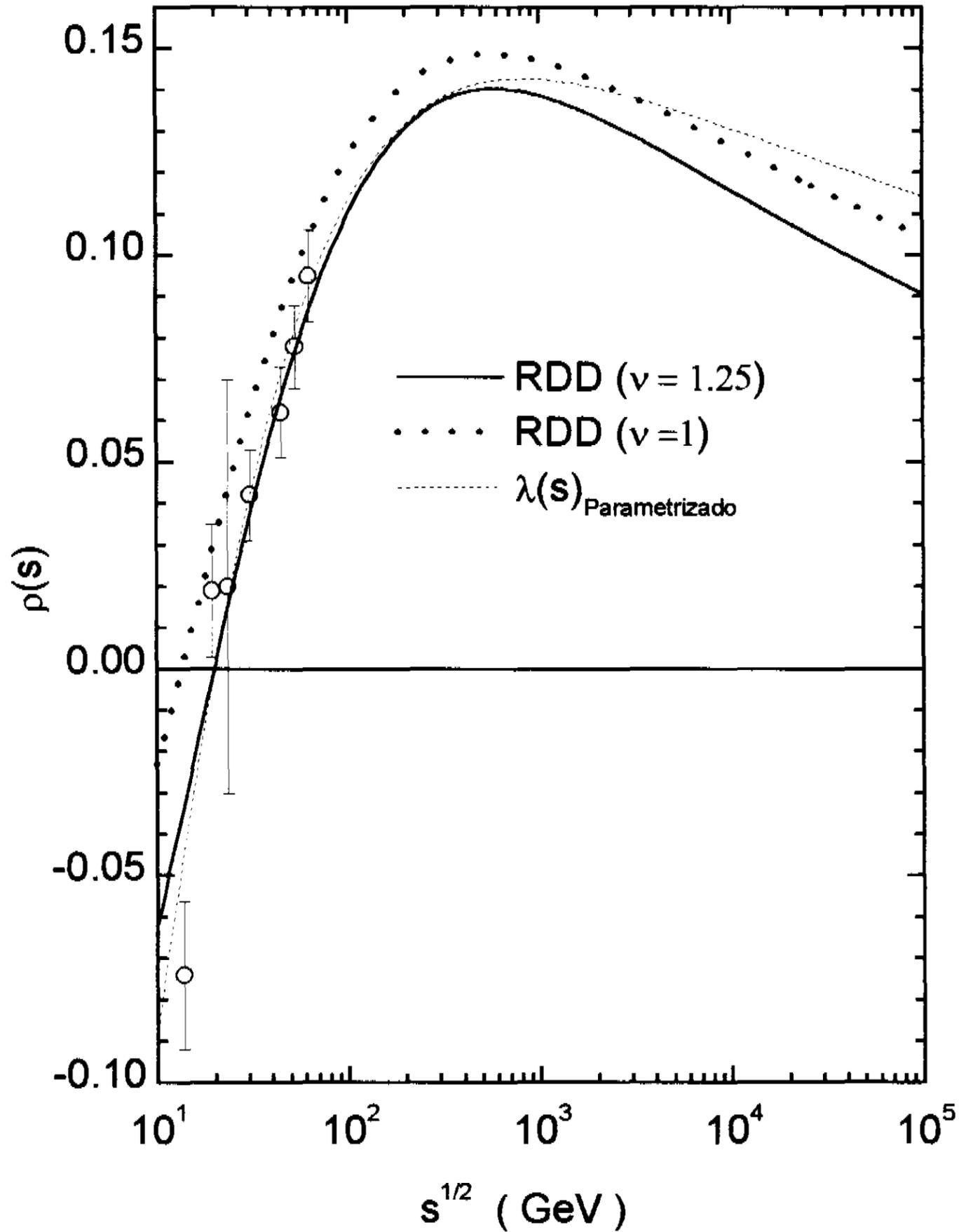


Figura 6.17 : Comparação entre os resultados para o parâmetro  $\rho(s)$  .

Um ponto importante deste trabalho é a verificação de que, no contexto do modelo de difração múltipla, resultados através de RDD descrevem melhor os dados para  $\nu = 1.25$ . Com isso temos uma justificativa teórica para a razão entre as partes real e imaginária da amplitude elementar, cf. (6.29)

$$\lambda(s) = \tan\left(\frac{\pi}{2}(\nu - 1)\right) + \frac{\pi}{2} \sec^2\left(\frac{\pi}{2}(\nu - 1)\right) \left[ \frac{1}{C(s)} \frac{dC(s)}{d \ln s} + 1 - \nu \right].$$

Em termos de limite assintótico, a parametrização utilizada para  $C(s)$  através de polinômio de 2º grau em  $\ln s$ , eq. (6.19), implica em

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{C(s)} \frac{dC(s)}{d \ln s} = 0 ,$$

e portanto

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda(s, \nu) = \tan\left(\frac{\pi}{2}(\nu - 1)\right) + \frac{\pi}{2} \sec^2\left(\frac{\pi}{2}(\nu - 1)\right) [1 - \nu] .$$

Vemos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda(s, \nu = 1) = 0 ,$$

e

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda(s, \nu = 1.25) \simeq -0.05 .$$

Nesse contexto, como o comportamento de  $\rho(s)$  é similar ao de  $\lambda(s)$ , preve-se um cruzamento do eixo  $\rho = 0$  para energias suficientemente altas.

# Capítulo 7

## Conclusões e Perspectivas

O resultado original e essencial neste trabalho foi a utilização de relações de dispersão derivativas (uma ou duas subtrações) na determinação da parte real da *amplitude elementar* em interações hadrônicas, bem como uma otimização de sua aplicabilidade através do ajuste de um parâmetro livre.

Com isso obteve-se uma justificativa teórica para a razão entre as partes real e imaginária da amplitude elementar, o que corresponde a um aperfeiçoamento do modelo de difração múltipla desenvolvido recentemente por Martini e Menon.

Apresentamos com detalhe, uma revisão sobre as propriedades analíticas das amplitudes de espalhamento e os cálculos relativos às relações de dispersão derivativas. Foram também apresentados com certo detalhe, o modelo de difração múltipla e as modificações introduzidas neste trabalho.

Como decorrência deste estudo pode-se estender a análise a outros espalhamentos como

$\bar{p}p$ ,  $\pi^+p$ ,  $\pi^-p$ ,  $k^+p$ ,  $k^-p$  e também testar as relações em outros modelos que prevêm a parte imaginária da amplitude elementar. Em particular, no contexto da Cromodinâmica Quântica (CDQ), as amplitudes elementares vêm sendo estudadas por Martini, Menon e Thober, através do modelo do vácuo estocástico e de correlatores determinados na rede (CDQ não perturbativa) [43]. Tratando-se apenas da parte imaginária das amplitudes, as relações derivativas aqui desenvolvidas poderão trazer novas informações e estabelecer novas conexões entre CDQ e dados experimentais de espalhamento elástico de hádrons.

Seria também interessante testar diretamente na amplitude hadrônica, considerando a possibilidade de  $\nu$  como parâmetro livre.

# Apêndice A

---

## VARIÁVEIS DE MANDELSTAM, SIMETRIA DE CRUZAMENTO, LEI DE SUBSTITUIÇÃO

### A.1 VARIÁVEIS DE MANDELSTAM

Consideremos um espalhamento elástico entre duas partículas (massas iguais) no estado inicial  $p_1$  e  $p_2$  e final  $p_3$  e  $p_4$  (figura A)

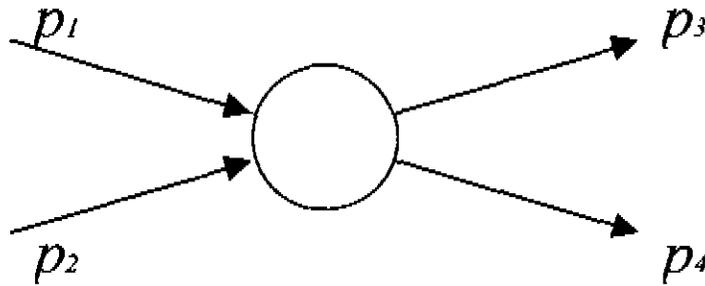


Figura A

onde  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) são seus quadrimomentos.

Neste caso as variáveis de Mandelstam são [4]: a energia no centro de massa

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 4(k^2 + m^2) , \quad (\text{A.1})$$

o quadrimomento transferido

$$t = (p_1 - p_3)^2 = -2k^2(1 - \cos \theta) , \quad (\text{A.2})$$

onde  $k$  é o momento no centro de massa e  $\theta$  o ângulo de espalhamento. É a terceira variável

$$u = (p_1 - p_4)^2 = -2k^2(1 + \cos \theta) , \quad (\text{A.3})$$

portanto temos

$$s + t + u = 4m^2 , \quad (\text{A.4})$$

com

$$p_i^2 = m^2 .$$

Das definições, temos os seguintes intervalos

$$s \geq 4m^2 \quad \text{e} \quad -4m^2 \leq t \leq 0 . \quad (\text{A.5})$$

Em termos da energia de laboratório  $\mathcal{K}$

$$s = 2m(m + \mathcal{K}) , \quad (\text{A.6})$$

que substituindo em (A.4) para  $t = 0$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{4m}(s - u) . \quad (\text{A.7})$$

## A.2 LEI DE SUBSTITUIÇÃO E SIMETRIA DE CRUZAMENTO

Denotaremos por  $\mathcal{F}(s, t, u)$  a amplitude invariante associada a um processo de colisão (figura A)

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \quad (\text{A.8})$$

De acordo com a lei de substituição [31] pode-se, a partir dessa amplitude, determinar a amplitude de processos correlacionados através da substituição de partículas por antipartículas. Por exemplo, vamos considerar os mesmos quadrimomentos  $p_2$  e  $p_4$ , mas efetuar a substituição

$$p_1 \rightarrow -\bar{p}_1 ,$$

$$p_3 \rightarrow -\bar{p}_3 .$$

Com isso,

$$s \rightarrow s' = (\bar{p}_1 - p_2)^2 ,$$

$$t \rightarrow t' = (\bar{p}_1 - \bar{p}_3)^2 ,$$

$$u \rightarrow u' = (\bar{p}_3 + p_2)^2 ,$$

$$\mathcal{F}(s, t, u) \rightarrow \mathcal{F}' = \mathcal{F}(s', t', u') ,$$

e  $\mathcal{F}'$  descreve o processo

$$\bar{3} + 2 \rightarrow \bar{1} + 4, \quad (\text{A.9})$$

onde  $\bar{1}$  e  $\bar{3}$  são as antipartículas de 1 e 3, respectivamente e  $\mathcal{F}'$  correspondente à mesma amplitude  $\mathcal{F}$ , só que determinada numa região diferente do espaço  $(s, t, u)$ .

Vemos que em (A.9) a variável  $u$  faz o papel da variável  $s$  no processo (A.8). Por essa razão denomina-se um processo como (A.8) de *canal-s* e o correspondente processo (A.9) de *canal-u*. A substituição  $p_1 \rightarrow -\bar{p}_1, p_3 \rightarrow -\bar{p}_3$  é chamada *cruzamento* (crossing) ou *cruzamento s-u*.

# Apêndice B

---

## CONCEITOS MATEMÁTICOS

Neste apêndice enunciamos alguns resultados matemáticos básicos utilizados neste trabalho [24 - 25].

### ANALITICIDADE

Seja uma função complexa  $f(z)$  definida num ponto  $z_0$ . Dizemos que  $f(z)$  é analítica em  $z_0$  se, para um  $\varepsilon > 0$ , a derivada de  $f(z)$  existe em  $|z - z_0| < \varepsilon$ , isto é, numa vizinhança de  $z_0$ . Com isso a função complexa  $f(z)$  será analítica em determinada região do plano complexo desde que seja analítica em todos os pontos da região.

Um ponto onde a função não é analítica é denominada *singularidade* da função. Um ponto  $z_0$  é uma *singularidade isolada* se existe uma vizinhança de  $z_0$  que não contém nenhuma singularidade diferente de  $z_0$ . Sendo  $z_0$  uma singularidade isolada de  $f(z)$ , então,

- se  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  existe, a singularidade é denominada *removível*
- se  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  a singularidade é denominada um *pólo* de  $f(z)$
- se  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  não existe, a singularidade é denominada *essencial*.

### TEOREMA DE CAUCHY

Se  $f(z)$  é uma função complexa, analítica numa região  $\mathfrak{R}$  do plano complexo  $z$  e  $C$  é qualquer caminho fechado no interior da região (figura B.1), então:

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (\text{B.1})$$

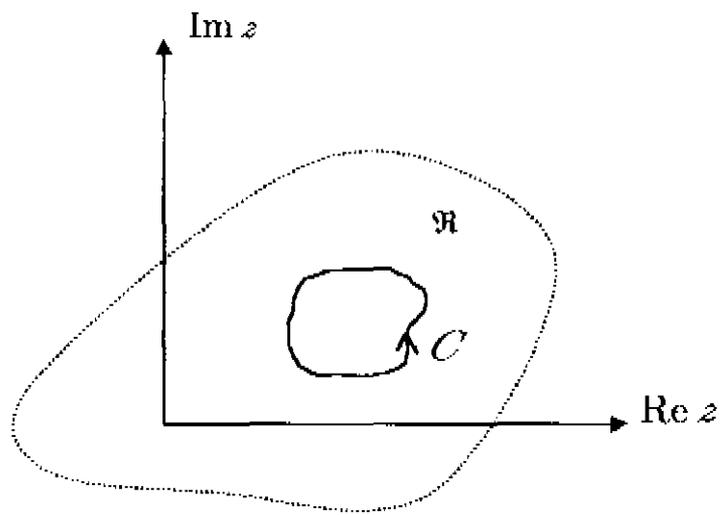


Figura B.1

## INTEGRAL DE CAUCHY

Seja  $f(z)$  uma função analítica sobre um caminho fechado  $C$  e em todos seus pontos interiores. Sendo  $z_0$  um ponto no interior de  $C$  (figura B.2), então :

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad (\text{B.2})$$

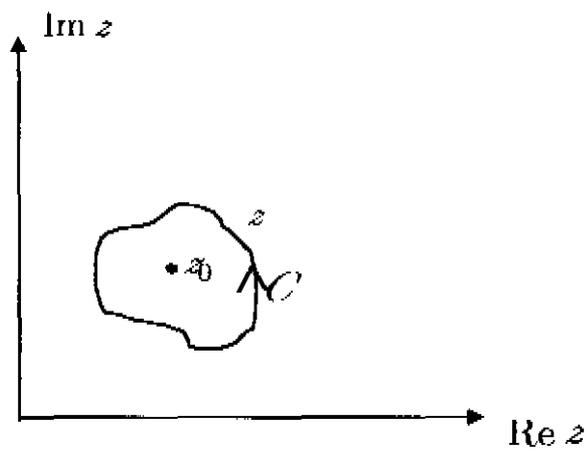


Figura B.2

# Apêndice C

---

## INTEGRAL DE CONTORNO - PÓLO NO EIXO REAL

Nosso objetivo é provar que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - z_0} dz = 0, \quad (\text{C.1})$$

sob as condições de  $f(z)$  ser analítica no semi plano superior.

Sendo  $f(z)$  contínua em  $z = x_0$ , para cada  $\varepsilon$  positivo, existe um  $\delta$  positivo, tal que

$$|f(z) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad |z - x_0| \leq \delta, \quad (\text{C.2})$$

tomando  $r = \delta$ , temos que,

$$\left| \int_{C_r} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} dz \right| \leq \int_{C_r} \frac{|f(z) - f(x_0)|}{|z - x_0|} |dz| < \int_{\pi}^0 \frac{\varepsilon}{r} (-r d\theta) = \pi\varepsilon. \quad (\text{C.3})$$

No limite  $r \rightarrow 0$ , teremos  $\varepsilon \rightarrow 0$  e portanto

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - z_0} dz = 0 \quad (\text{C.4})$$

# Apêndice D

## DOIS CORTES DE RAMOS - INTEGRAL

Queremos provar a eq.(5.7) a partir da eq.(5.9), através do princípio de Schwarz e da paridade da função  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_+$  (mesmo raciocínio é válido para a função ímpar  $\mathcal{F}_-(\mathcal{K}')$  )

$$\text{Princ. de Schw.} \Rightarrow \mathcal{F}_+(\mathcal{K}' - i\varepsilon) = \overline{\mathcal{F}_+(\mathcal{K}' + i\varepsilon)}, \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{cases} \text{Re } \mathcal{F}_+(\mathcal{K}' + i\varepsilon) = \text{Re } \mathcal{F}_+(\mathcal{K}' - i\varepsilon), \\ \text{Im } \mathcal{F}_+(\mathcal{K}' + i\varepsilon) = -\text{Im } \mathcal{F}_+(\mathcal{K}' - i\varepsilon). \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Na integral da eq.(5.7) temos

$$I = I_1 + I_2, \quad (\text{D.3})$$

onde

$$I_1 = \frac{\mathcal{K}}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i} \left[ \int_{+\mathcal{K}_0}^{+\infty} \frac{\mathcal{F}_+(\mathcal{K}' + i\varepsilon) - \mathcal{F}_+(\mathcal{K}' - i\varepsilon)}{\mathcal{K}'(\mathcal{K}' - \mathcal{K})} d\mathcal{K}' \right], \quad (\text{D.4})$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{K}}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i} \left[ \int_{-\infty}^{-\mathcal{K}_0} \frac{\mathcal{F}_+(\mathcal{K}' + i\varepsilon) - \mathcal{F}_+(\mathcal{K}' - i\varepsilon)}{\mathcal{K}'(\mathcal{K}' - \mathcal{K})} d\mathcal{K}' \right]. \quad (\text{D.5})$$

Fazendo  $\mathcal{K}' = -\mathcal{K}$  em (D.5) e invertendo o limite de integração

$$I_2 = \frac{\mathcal{K}}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i} \left[ \int_{+\mathcal{K}_0}^{+\infty} \frac{\mathcal{F}_+(-\mathcal{K}' + i\varepsilon) - \mathcal{F}_+(-\mathcal{K}' - i\varepsilon)}{\mathcal{K}'(\mathcal{K}' + \mathcal{K})} d\mathcal{K}' \right]. \quad (\text{D.6})$$

De (D.4) e (D.6)

$$I_1 = \frac{\mathcal{K}}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i} \int_{+\mathcal{K}_0}^{+\infty} \frac{d\mathcal{K}'}{\mathcal{K}'(\mathcal{K}' - \mathcal{K})} [\operatorname{Re} \mathcal{F}_+(\mathcal{K}' + i\varepsilon) + i \operatorname{Im} \mathcal{F}_+(\mathcal{K}' + i\varepsilon) - \operatorname{Re} \mathcal{F}_+(-\mathcal{K}' - i\varepsilon) - i \operatorname{Im} \mathcal{F}_+(-\mathcal{K}' - i\varepsilon)] ,$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{K}}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i} \int_{+\mathcal{K}_0}^{+\infty} \frac{d\mathcal{K}'}{\mathcal{K}'(\mathcal{K}' + \mathcal{K})} [\operatorname{Re} \mathcal{F}_+(-\mathcal{K}' + i\varepsilon) + i \operatorname{Im} \mathcal{F}_+(-\mathcal{K}' + i\varepsilon) - \operatorname{Re} \mathcal{F}_+(-\mathcal{K}' - i\varepsilon) - i \operatorname{Im} \mathcal{F}_+(-\mathcal{K}' - i\varepsilon)] .$$

Substituindo (D.1) em (D.4) e (D.6) (com  $\mathcal{K}' = -\mathcal{K}$ )

$$I_1 = \frac{\mathcal{K}}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i} \int_{\mathcal{K}_0}^{+\infty} \frac{d\mathcal{K}'}{\mathcal{K}'(\mathcal{K}' - \mathcal{K})} [2i \operatorname{Im} \mathcal{F}_+(\mathcal{K}' + i\varepsilon)] ,$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{K}}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i} \int_{\mathcal{K}_0}^{+\infty} \frac{d\mathcal{K}'}{\mathcal{K}'(\mathcal{K}' + \mathcal{K})} [2i \operatorname{Im} \mathcal{F}_+(-\mathcal{K}' + i\varepsilon)] ,$$

ou ainda

$$I_1 = \frac{\mathcal{K}}{\pi} \int_{\mathcal{K}_0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \mathcal{F}_+(\mathcal{K}')}{\mathcal{K}'(\mathcal{K}' - \mathcal{K})} d\mathcal{K}' , \quad (\text{D.7})$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{K}}{\pi} \int_{\mathcal{K}_0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \mathcal{F}_+(-\mathcal{K}')}{\mathcal{K}'(\mathcal{K}' + \mathcal{K})} d\mathcal{K}' , \quad (\text{D.8})$$

onde  $\operatorname{Im} \mathcal{F}_+(-\mathcal{K}') = -\operatorname{Im} \mathcal{F}_+(\mathcal{K}')$ , portanto de (D.3)

$$I = \frac{\mathcal{K}}{\pi} \int_{\mathcal{K}_0}^{+\infty} d\mathcal{K}' \frac{\operatorname{Im} \mathcal{F}_+(\mathcal{K}')}{\mathcal{K}'} \left[ \frac{1}{(\mathcal{K}' - \mathcal{K})} - \frac{1}{(\mathcal{K}' + \mathcal{K})} \right] .$$

# Apêndice E

---

## CÁLCULO DA AMPLITUDE HADRÔNICA

A partir da eq. (6.13), queremos calcular as componentes da amplitude hadrônica eq's. (6.15 e 6.16). Foi visto no capítulo 3 que a função de perfil em função da eiconal é

$$\Gamma(s, b) = 1 - e^{i\chi(s, b)}, \quad (\text{E.1})$$

onde

$$\chi(s, b) = (\lambda + i)\Omega(s, b). \quad (\text{E.2})$$

Logo, usando a equação de Euler

$$e^{i\lambda\Omega} = \cos(\lambda\Omega) + i\text{sen}(\lambda\Omega), \quad (\text{E.3})$$

teremos

$$\Gamma(s, b) = 1 - e^{-\Omega}[\cos(\lambda\Omega) + i\text{sen}(\lambda\Omega)],$$

$$\Gamma(s, b) = 1 - e^{-\Omega} \cos(\lambda\Omega) - ie^{-\Omega} \text{sen}(\lambda\Omega), \quad (\text{E.5})$$

ou

$$\text{Re } \Gamma(s, b) = 1 - e^{-\Omega} \cos(\lambda\Omega), \quad (\text{E.6})$$

$$\text{Im } \Gamma(s, b) = -e^{-\Omega} \text{sen}(\lambda\Omega). \quad (\text{E.7})$$

Através da eq. (6.1), temos

$$F(s, q) = i \int bdb J_0(qb)(1 - e^{i\chi(s,b)}) = i \int bdb J_0(qb)\Gamma(s, b) = i \langle \text{Re } \Gamma(s, b) + i \text{Im } \Gamma(s, b) \rangle ,$$

substituindo (E.6) e (E.7)

$$F(s, q) = \langle e^{-\Omega} \text{sen}(\lambda\Omega) \rangle + i \langle 1 - e^{-\Omega} \cos(\lambda\Omega) \rangle , \quad (\text{E.8})$$

portanto

$$\text{Re } F(s, q) = \langle e^{-\Omega(s,b)} \text{sen}(\lambda\Omega(s, b)) \rangle , \quad (\text{E.9})$$

$$\text{Im } F(s, q) = \langle 1 - e^{-\Omega(s,b)} \cos(\lambda\Omega(s, b)) \rangle . \quad (\text{E.10})$$

# Referências

- [1] G. Matthiae, *Rep. Prog. Phys.* **57**, 743 (1994).
- [2] P. Roman, “Advanced Quantum Mechanics” (Addison-Wesley, Palo Alto, 1965).
- [3] M. J. Menon *Phys. Rev.* **D48**, 2007 (1993); **D51** (1995) 1427.
- [4] M. M. Block and R. N. Cahn, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 563 (1985).
- [5] J. B. Bronzan, G. L. Kane and U. P. Sukhatme, *Phys. Lett.* **49B**, 3 (1974) 272.
- [6] N. V. Gribov and A. A. Migdal, *Sov. J. Nucl. Phys.* **8** (1969) 583.
- [7] P. Kroll, *Nucl. Phys.* **B82** (1974) 510-526.
- [8] M. J. Menon, A. E. Motter and B. M. Pimentel, “Differential Dispersion Relations. I. Formulation”, *1997-XVIII Brazilian National Meeting on Particles and Fields*, (Sociedade Brasileira de Física, São Paulo, 1998) p. 548.
- [9] R. J. Glauber, in *Lectures in Theoretical Physics*, (Interscience, NY, 1959), Vol I, p. 315; *High Energy Physics Hadronic* (Plenum, NY, 1970), p. 207.
- [10] C. J. Joachain, “Quantum Collision Theory” (North-Holland, NY, 1993); F. Scheck, “Leptons, Hadrons and Nuclei” (North-Holland, NY, 1993).
- [11] Dados experimentais do parâmetro  $\rho$  e seção de choque total entre 13.8 e 19.4 GeV: L. A. Fajardo *et al*, *Phys. Rev.* **D 24**, 46 (1981).
- [12] Dados experimentais do parâmetro  $\rho$  e seção de choque total entre 23.5 e 62.5 GeV: U. Amaldi and Schubert, *Nucl. Phys.* **B 166**, 301 (1980).
- [13] A. S. Carrol *et al*, *Phys. Lett.* **B 61**, 303 (1976); A. S. Carrol *et al*, *ibid.* **80**, 423 (1979).

- [14] Dados de seção de choque diferencial nas energias  $\sqrt{s} = 13.8$  e  $19.4$  GeV : D. S. Ayres *et al*, Phys. Rev. **D 15**, 3105 (1977); C. W. Akerlof *et al*, *ibid* **14**, 2864 (1976).
- [15] Dados de seção de choque diferencial nas energias entre  $23.5$  e  $62.5$  GeV : K. R. Schubert , in *Tables on nucleon-nucleon scattering*, Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology, New Series, Vol. I/9a (Springer - Verlag , Berlim,1979).
- [16] M. Honda *et al*, Phys. Rev.Lett.**70**, 525 (1993).
- [17] N.N. Nikolaev, Phys. Rev. **D 48**, R1904 (1993).
- [18] A. F. Martini, “ Estudo do Espalhamento Elástico Próton-Próton a Altas Energias Através de Modelos Eiconais”, Dissertação de Mestrado IFGW - UNICAMP (1995).
- [19] M. J. Menon and B. M. Pimentel, *Hadronic J.* **16**, 137 (1993).
- [20] A. F. Martini and M. J. Menon, Phys. Rev. **D56**, 4338 (1997).
- [21] H. M. Nussenzveig, “Causality and Dispersion Relations”, (Academic Press, NY, 1972).
- [22] Hugh Burkhardt, “Dispersion Relation Dynamics”, (John Wiley & Sons, inc. NY, 1969).
- [23] M. J. Menon e R. P. B. Santos, Rev. Bras. Ensino de Física, **20** (1998) 38.
- [24] Ruel V. Churchill, “Variáveis Complexas e suas Aplicações”, (McGraw-Hill, 1975).
- [25] Butkov, “Física Matemática”, (Edit. Guanabara, RJ, 1988).
- [26] F. W. Byron and R. W. Fuller “Mathematics of Classical and Quantum Physics”

(Dover, NY, 1992).

- [27] George Arfken “Mathematical Methods for Physicists”. ( Academic Press , San Diego, 1985).
- [28] M. J. Menon - “ Notas de Aula ”- FI217 Tópicos de Física Moderna, IFGW - UNICAMP , 1ºSemestre - 1997.
- [29] P. Söding, Phys. Lett. **8**, 285 (1964).
- [30] U. Amaldi e outros, Phys. Lett. **B66**, 390 (1977).
- [31] J. D. Jackson, Proc. 14th Scottish Universities Summer School in Physics (Academic Press, 1974).
- [32] R. J. Eden, “High Energy Collisions of Elementary Particles” (Cambridge, 1967); Rev. Mod. Phys. **43**, 15 (1971).
- [33] P. D. B. Collins, “ An Introduction to Regge Theory High Energy Physics ” (Cambridge, 1977).
- [34] A. E. Motter, “Relações de Dispersão Derivativas em Espalhamentos Hadrônicos a Altas Energias: Revisão Crítica e Extensões”, Monografia - Exame de Qualificação de Doutorado, IFGW - UNICAMP (1998).
- [35] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, “ Table of Integrals, Series and Products ” (Academic, New York, 1980).
- [36] A. F. Martini, M. J. Menon, J. T. S. Paes, M. J. Silva Neto, in “ 1996 - XVIII Brazilian National Meeting on Particles and Fields ” (Sociedade Brasileira de Física, São Paulo, 1996) p. 343.

- [37] M. J. Menon, J. T. S. Paes, M. J. Silva Neto, 1997-XVIII *Brazilian National Meeting on Particles and Fields* (Socied. Bras. de Física, São Paulo, 1998) p. 553.
- [38] M. J. Menon, in *Proceedings of the Fourth International Conference on Elastic and Diffractive Scattering*, La Biodola, Elba, Italy, 1991- Nucl. Phys. B (Proc Suppl. ) **25B**, 94 (1992).
- [39] M. J. Menon, Can. J. Phys. **74**, 594 (1996).
- [40] J. Fischer e P. Kolár, Phys. Lett. **64B** (1976) 45 ; Phys. Rev. **D17** (1978) 2168 ; Czech. J. Phys. **B37** (1987) 297.
- [41] P. Kolár e J. Fischer , J. Math. Phys. **25** (1984) 2538.
- [42] MINUIT - Reference Manual, version 92.1, CERN Program Library Long Write-up D506 (1992).
- [43] A. F. Martini, M. J. Menon, D. S. Thober, Phys. Rev. **D57** (1998) 3026.