

**Uma Análise Empírica do  
Espalhamento Elástico de  
Hádrons na Aproximação Eiconal**

**P. A. S. Carvalho**

# Uma Análise Empírica do Espalhamento Elástico de Hádrons na Aproximação Eiconal

**Paulo Alex da Silva Carvalho** ✓

Tese apresentada ao Instituto  
de Física "Gleb Wataghin"  
como parte dos requisitos para  
obtenção do título de Mestre  
em Física.

Área de Concentração: Interações Hadrônicas

Orientador: Márcio José Menon

Este exemplar corresponde à redação final da Tese  
de Mestrado defendida pelo aluno Paulo Alex da  
Silva Carvalho e aprovada pela Comissão Julgadora

26/8/98



**Instituto de Física "Gleb Wataghin" - UNICAMP**

**1998**

UNIDADE	IFGW	
N.º CHAMADA:		
V.	Ex.	
PREÇO UNIT.	35572	1148/IF
PREÇO	395/98	
	0	<input checked="" type="checkbox"/>
VALOR	R\$ 11,00	
DATA	23/10/98	
N.º CPD	6.402.67.983	3

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IFGW- UNICAMP**

**C253a**      **Carvalho, Paulo Alex da Silva**  
**Uma análise empírica do espalhamento elástico de hádrons na aproximação eiconal / Paulo Alex da Silva Carvalho. – Campinas, SP:[s.n.], 1998.**

**Orientador: Márcio José Menon.**  
**Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".**

- 1. Espalhamento elástico. 2. Espalhamento prótons.**  
**3. Hádrons. I. Menon, Márcio José. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.**

**Instituto de Física “Gleb Wataghin”**  
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

Secretaria de Pós-Graduação

CAIXA POSTAL 6165  
CEP 13083-970 – Campinas-SP - Brasil  
Tel: (019) 788-5305  
Fax: (019) 289-2424

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE PAULO ALEX DA SILVA CARVALHO APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 14/05/98.

**COMISSÃO JULGADORA:**



---

Prof. Dr. Márcio José Menon (Orientador do Candidato) -IFGW/UNICAMP



---

Prof. Dr. Yojiro Hama – IF/USP



---

Prof. Dr. Carlos Ourívio Escobar - IFGW/UNICAMP

Dedico este trabalho  
à minha mãe

# Agradecimentos

- À minha mãe por todo o apoio que me deu;
- Ao professor Márcio Menon pela orientação;
- Aos colegas de grupo: Adilson, Alvaro, Dario, Manoel, Paulo Beggio e Tadeu (in memoriam);
- Aos “irmãos” de República, Rodrigo Gribel e Ricardo Paupitz, pela amizade;
- Aos professores do Instituto, em particular ao professor Fernando Paixão por ter aberto as portas do “mundo quântico”;
- Aos funcionários do Instituto pela cooperação;
- À turma de 92 pelo “Rock”
- À toda população de Patos de Minas, refúgio nos momentos de stress (e feriados);
- À Fapesp pelo apoio financeiro, sem o qual nada disso seria possível.

## Sumário

Obtém-se informações empíricas, a partir de dados experimentais, a respeito das funções de perfil, eiconal (espaços de parâmetro de impacto e momento transferido) e de recobrimento inelástico para colisão pp entre  $13,8 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 62,5 \text{ GeV}$  e colisão  $\bar{p}p$  entre  $13,8 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 1800 \text{ GeV}$ . Como introdução ao assunto, apresenta-se uma revisão da aproximação eiconal através de três abordagens diferentes. A partir de uma parametrização analítica para a amplitude de espalhamento elástica obtém-se um ajuste para a seção de choque diferencial elástica nas energias acima. Realizando uma transformada de Fourier-Bessel obtemos as funções de perfil, eiconal e de recobrimento inelástico no espaço de parâmetro de impacto. Mostra-se as características óticas e geométricas dos hádrons nessa faixa de energia. A seguir obtemos, através de uma nova transformada de Fourier-Bessel, desta vez da eiconal, evidências estatísticas da existência de zeros na eiconal no espaço de momento transferido. Por último, no apêndice B, tem-se uma abordagem do formalismo de parâmetro de impacto (função de perfil) através de propriedades analíticas da amplitude de espalhamento.

## Abstract

We find empirical information, from experimental data, about profile, eikonal (impact parameter and momentum transfer spaces) and inelastic overlap functions of the elastic  $pp$  scattering between  $13.8 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 62.5 \text{ GeV}$  and elastic  $\bar{p}p$  scattering between  $13.8 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 1800 \text{ GeV}$ . As an introduction to the subject, a review of the eikonal approximation through three different approaches is presented. From an analytical parametrization for the elastic scattering amplitude we fit the differential cross section data of the above energies. Making a Fourier-Bessel transform we find the profile, eikonal and inelastic overlap functions in the impact parameter space. We show the optical features of hadrons in this energy region. Then, through a new Fourier-Bessel transform now of the eikonal, we find statistical evidence for the existence of zeros in the eikonal in the momentum transfer space. Finally, in appendix B, we present a approach to the impact parameter formalism (profile function) through analytical properties of the scattering amplitude.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Observáveis Físicos de Interesse no Espalhamento Elástico Hádron-Hádron</b>	<b>3</b>
2.1	Seção de Choque Diferencial Elástica . . . . .	3
2.2	Seções de Choque Integradas e o Teorema Ótico . . . . .	4
2.3	Parâmetro $\rho$ . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Aproximação Eiconal e Função de Perfil</b>	<b>6</b>
3.1	Método de Ondas Parciais . . . . .	6
3.1.1	Expansão da Amplitude de Espalhamento em Ondas Parciais . . . . .	6
3.1.2	Limite de Altas Energias e a Função Eiconal . . . . .	8
3.2	Analogia Ótica e Função de Perfil . . . . .	9
3.3	Método da Equação Integral . . . . .	11
3.4	Função de Perfil no Contexto da Primeira Aproximação de Born . . . . .	13
3.5	Seções de Choque Integradas e a Função de Recobrimento Inelástica . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Conjunto de Dados Experimentais</b>	<b>18</b>
4.1	Espalhamento Próton-Próton . . . . .	18
4.2	Espalhamento Antipróton-Próton . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Parametrização e Incertezas</b>	<b>21</b>
<b>6</b>	<b>Resultados</b>	<b>30</b>
6.1	Função de Perfil . . . . .	30
6.2	Eiconal . . . . .	32
6.2.1	Eiconal no Espaço de Parâmetro de Impacto . . . . .	32
6.2.2	Eiconal no Espaço de Momento transferido . . . . .	34
6.3	Função de Recobrimento Inelástico . . . . .	43
6.4	Análise da Validade da Primeira Aproximação de Born . . . . .	45
<b>7</b>	<b>Conclusões e Observações Finais</b>	<b>46</b>
<b>A</b>	<b>Variáveis de Mandelstam</b>	<b>47</b>
<b>B</b>	<b>Momento Angular Complexo e Transformada de Watson-Sommerfeld</b>	<b>49</b>
B.1	Propriedades de Convergência da Expansão em Ondas Parciais . . . . .	49
B.2	Continuação Analítica das Amplitudes de Ondas Parciais no Plano de Momento Angular Complexo . . . . .	51

B.3	Projeção de Froissart-Gribov e Amplitudes de Ondas Parciais Pares e Impares .	52
B.4	Transformada de Watson-Sommerfeld . . . . .	55
B.5	Função de Perfil via Transformada de Watson-Sommerfeld . . . . .	58

# Lista de Figuras

2.1	Feixe de partículas incidindo sobre o alvo fixo (região de potencial $V(r)$ ). . . . .	4
4.1	Conjunto de dados experimentais para espalhamento pp. <i>Ensemble A</i> à esquerda, <i>Ensemble B</i> à direita. Em cada energia os dados foram multiplicados por fatores de $10^{\pm 4}$ . . . . .	19
4.2	Conjunto de dados experimentais para espalhamento $\bar{p}p$ . Em cada energia os dados foram multiplicados por fatores de $10^{\pm 4}$ . . . . .	20
4.3	Comportamento real de dados de seção de choque diferencial. À esquerda: espalhamento pp em $\sqrt{s} = 19,5$ e $62,5$ GeV. À direita: espalhamento pp em $\sqrt{s} = 52,8$ GeV e espalhamento $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 53$ e $546$ GeV. . . . .	20
5.1	Limites superior e inferior para a seção de choque diferencial, $d\sigma/dt \pm \Delta(d\sigma/dt)$ , a partir do ajuste e propagação dos erros para a interação pp em $\sqrt{s} = 23,5$ GeV: <i>Ensembles A</i> (abaixo) e <i>B</i> (acima). O último foi deslocado por um fator de $10^4$ . . . . .	22
5.2	Ajustes para seção de choque diferencial da interação pp através das Eqs. (4.1) e (4.2). À esquerda <i>Ensemble A</i> , à direita <i>Ensemble B</i> . Dados e curvas foram deslocados por fatores de $10^{\pm 4}$ . . . . .	23
5.3	Ajustes para seção de choque diferencial da interação pp através das Eqs. (4.1) e (4.2); em detalhe a região de pequeno momento transferido. À esquerda <i>Ensemble A</i> , à direita <i>Ensemble B</i> . Dados e curvas foram deslocados por fatores de $10^{\pm 4}$ . . . . .	23
5.4	Ajustes para seção de choque diferencial através das Eqs. (5.2) e (5.2) para espalhamento $\bar{p}p$ . Dados e curvas foram deslocados por fatores de $10^{\pm 4}$ . . . . .	24
5.5	Contribuições das partes real e imaginária da amplitude de espalhamento à seção de choque diferencial para espalhamento pp no <i>Ensemble A</i> . À esquerda $\sqrt{s} = 30,7$ GeV, à direita $\sqrt{s} = 52,8$ GeV. . . . .	27
5.6	Contribuições das partes real e imaginária da amplitude de espalhamento à seção de choque diferencial para espalhamento pp no <i>Ensemble B</i> . À esquerda $\sqrt{s} = 30,7$ GeV, à direita $\sqrt{s} = 52,8$ GeV. . . . .	28
5.7	Contribuições das partes real e imaginária da amplitude de espalhamento à seção de choque diferencial para espalhamento $\bar{p}p$ . À esquerda $\sqrt{s} = 19,5$ GeV, à direita $\sqrt{s} = 53$ GeV. . . . .	28
5.8	Contribuições das partes real e imaginária da amplitude de espalhamento à seção de choque diferencial para espalhamento $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 546$ GeV. . . . .	29
6.1	Função de perfil para <i>Ensemble A</i> em $\sqrt{s} = 52,8$ GeV. À esquerda: partes real e imaginária. À direita: razão entre as partes real e imaginária. . . . .	31
6.2	Variação da função de perfil com a energia. . . . .	31

6.3	Eiconal para <i>Ensemble A</i> em $\sqrt{s} = 52,8$ GeV. À esquerda: partes real e imaginária. À direita: razão entre as partes real e imaginária. . . . .	33
6.4	Variação da eiconal com a energia. . . . .	34
6.5	Eiconal no espaço de momento transferido para espalhamento pp, <i>Ensemble A</i> , multiplicada pelo fator $q^8$ . À esquerda: método de ajuste. À direita: método numérico. . . . .	36
6.6	Eiconal no espaço de momento transferido, para espalhamento pp, <i>Ensemble B</i> , multiplicada pelo fator $q^8$ . À esquerda: método de ajuste. À direita: método numérico. . . . .	37
6.7	Eiconal no espaço de momento transferido, multiplicada pelo fator $q^8$ para o espalhamento $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 19,5$ GeV. À esquerda: método de ajuste. À direita: método numérico. . . . .	37
6.8	Eiconal no espaço de momento transferido, multiplicada pelo fator $q^8$ para o espalhamento $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 53$ GeV. À esquerda: método de ajuste. À direita: método numérico. . . . .	38
6.9	Eiconal no espaço de momento transferido, multiplicada pelo fator $q^8$ para o espalhamento $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 546$ GeV. À esquerda: método de ajuste. À direita: método numérico. . . . .	39
6.10	Variação dos zeros da eiconal com a energia para o espalhamento pp. À esquerda: <i>Ensemble A</i> . À direita: <i>Ensemble B</i> . . . . .	39
6.11	Variação da eiconal a momento transferido nulo com a energia. À esquerda: região do ISR. À direita: toda a faixa de energia estudada. . . . .	40
6.12	Variação de $G_{inel}(b, s)$ com a energia. . . . .	44
6.13	Variação de $G_{inel}(b, s)$ com a energia em quatro valores diferentes do parâmetro de impacto. . . . .	44
6.14	Razão $(\chi_I(b, s) - \Gamma_R(b, s))/\chi_I(b, s)$ . . . . .	45
B.1	Elipse de Lehmann: região de convergência da série (B.1) . . . . .	50
B.2	Região de convergência da série (B.1) quando $l$ é imaginário. . . . .	51
B.3	Singularidades de $F(s, t)$ no plano $s$ requeridas por unitariedade. . . . .	53
B.4	Singularidades de $F(s, t)$ no plano $t$ requeridas por unitariedade. . . . .	53
B.5	Caminhos de integração no plano $l$ . . . . .	57

# Lista de Tabelas

5.1	Resultados dos ajustes para interação pp e <i>Ensemble</i> A: valores dos parâmetros livres em $\text{GeV}^{-2}$ , valor experimental de $\rho$ , valor máximo do momento transferido com dados experimentais, em $\text{GeV}^2$ , numero de dados experimentais, N, e $\chi^2$ por grau de liberdade. . . . .	24
5.2	Resultados dos ajustes para interação pp e <i>Ensemble</i> A: valores dos parâmetros livres em $\text{GeV}^{-2}$ , valor experimental de $\rho$ , valor máximo do momento transferido com dados experimentais, em $\text{GeV}^2$ , numero de dados experimentais, N, e $\chi^2$ por grau de liberdade. . . . .	25
5.3	Resultados dos ajustes para interação pp e <i>Ensemble</i> B: o mesmo que a Tabela 5.1. . . . .	25
5.4	Resultados dos ajustes para interação pp e <i>Ensemble</i> B: o mesmo que a Tabela 5.1. . . . .	26
5.5	Resultados dos ajustes para espalhamento $\bar{p}p$ : o mesmo que a Tabela 5.1 . . . .	26
5.6	Resultados dos ajustes para espalhamento $\bar{p}p$ : o mesmo que a Tabela 5.1 . . . .	27
6.1	Posição dos zeros da eiconal (com erros), em $\text{GeV}^2$ , para o espalhamento pp, ambos os <i>Ensembles</i> , pelo método de ajuste, para cada uma das energias, em GeV, estudadas. . . . .	41
6.2	Posição dos zeros da eiconal, em $\text{GeV}^2$ , para o espalhamento pp, ambos os <i>Ensembles</i> , pelo método numérico, para cada uma das energias, em GeV, estudadas. . . . .	41
6.3	Posição dos zeros da eiconal (com erros), em $\text{GeV}^2$ , para o espalhamento $\bar{p}p$ , pelo método de ajuste, para as energias, em GeV, onde existem zeros. . . . .	41
6.4	Posição dos zeros da eiconal, em $\text{GeV}^2$ , para o espalhamento $\bar{p}p$ , pelo método numérico, para as energias, em GeV, onde existem zeros. . . . .	41
6.5	Eiconal a momento transferido nulo (com erros), em $\text{GeV}^{-2}$ , para o espalhamento pp, ambos os <i>Ensembles</i> , pelo método de ajuste, para cada uma das energias, em GeV, estudadas. . . . .	42
6.6	Eiconal a momento transferido nulo, em $\text{GeV}^{-2}$ , para o espalhamento pp, ambos os <i>Ensembles</i> , pelo método numérico, para cada uma das energias, em GeV, estudadas. . . . .	42
6.7	Eiconal a momento transferido nulo (com erros), em $\text{GeV}^{-2}$ , para o espalhamento $\bar{p}p$ , pelo método de ajuste, para cada uma das energias, em GeV, estudadas. . . . .	42
6.8	Eiconal a momento transferido nulo, em $\text{GeV}^{-2}$ , para o espalhamento $\bar{p}p$ , pelo método numérico, para cada uma das energias, em GeV, estudadas. . . . .	43

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo teórico do espalhamento elástico de hádrons a altas energias, na região de pequeno momento transferido, tem sido um dos tópicos mais difíceis na Física de Partículas Elementares. Apesar da importância dessa região (confinamento dos quarks) não existe ainda uma descrição teórica amplamente aceita. As dificuldades estão associadas a dois motivos principais. Por um lado o crescimento da constante de acoplamento para interações hadrônicas com a diminuição do momento transferido impede o tratamento através da Cromodinâmica Quântica (CDQ) perturbativa, pois as séries divergem. Por outro lado as teorias de calibre na rede (métodos não perturbativos) encontram dificuldades nas grandes dimensões da rede pois é necessário levar em conta todas as configurações possíveis.

Uma forma de se abordar o problema é através de modelos fenomenológicos que utilizam os chamados formalismo de parâmetro de impacto e aproximação eiconal. O formalismo de parâmetro de impacto corresponde essencialmente a uma transformada bidimensional de Fourier que conecta a amplitude hadrônica no espaço de momento transferido à chamada função de perfil no espaço de parâmetro de impacto. De um lado, associados à amplitude de espalhamento tem-se os observáveis físicos da colisão (seções de choque integradas e diferenciais, slope, parâmetro  $\rho$ ). De outro, associados à função de perfil tem-se os fatores de forma hadrônicos e amplitudes de espalhamento entre constituintes via aproximação eiconal e a função de recobrimento inelástica (probabilidade de colisão inelástica em função do parâmetro de impacto) via condição de unitariedade.

Assim, apesar do formalismo poder ser utilizado para a previsão de observáveis físicos a partir de resultados teóricos/fenomenológicos para as grandezas acima referidas, uma estratégia que acreditamos importante no momento é uma abordagem do problema inverso do espalhamento. Isto é, a partir dos dados experimentais e através do formalismo de parâmetro de impacto, procurar extrair o maior número de informações empíricas, estatisticamente consistentes, que possam contribuir com o teste de esquemas de cálculo nas abordagens não perturbativas e/ou na formulação de novos modelos fenomenológicos.

Na maioria das abordagens didáticas e de revisão, o formalismo de parâmetro de impacto é deduzido a partir das soluções da equação de Schrödinger em ondas parciais, considerando-se a aproximação semi-clássica e o limite de altas energias e pequenos ângulos. Pode-se também inferir esse formalismo por analogia direta à ótica no regime de difração de Fraunhofer e daí o nome de função de perfil. Apesar dessas aproximações, M. M. Islam demonstrou em 1976 que a amplitude de espalhamento elástico possui representação exata no espaço de parâmetro de impacto, válida para todas as energias físicas e ângulos de espalhamento. A demonstração formal é um pouco mais sofisticada do ponto de vista algébrico, envolvendo o estudo das

propriedades analíticas da amplitude em termos de momentos angulares complexos. O ponto central é a transformada de Watson-Sommerfeld, que expressa a amplitude como integral de contorno da continuação analítica da amplitude de ondas parciais (apêndice B).

A obtenção de informações a partir dos dados experimentais e via formalismo de parâmetro de impacto é feita por meio de ajustes dos dados através de funções convenientes. Na prática, devido à eficiência na descrição dos dados e à facilidade de tratamento analítico, é útil representar a amplitude de espalhamento por uma soma de gaussianas e ajustar os dados de seção de choque diferencial em função do momento transferido e da energia no centro de massa da colisão. Daí determina-se a função de perfil pela transformada de Fourier e as demais grandezas de interesse.

Com base na disponibilidade de dados experimentais em termos do momento transferido e energia no centro de massa da colisão, estudamos neste trabalho somente os espalhamentos elásticos próton-próton e antipróton-próton a altas energias (energia no centro de massa acima de  $10^{10}$  eV).

O texto está dividido em sete capítulos e dois apêndices. No Cap. 2 define-se os observáveis físicos utilizados nos ajustes. No Cap. 3 é feita uma revisão sobre o formalismo de parâmetro de impacto via ondas parciais e via analogia ótica. É feita também uma conexão entre a eiconal e o potencial fenomenológico da interação hadrônica, além da definição da função de recobrimento inelástico. No Cap. 4 apresentamos os dados experimentais utilizados. No Cap. 5 introduzimos a parametrização utilizada no ajuste. O Cap. 6 trata dos resultados obtidos e o Cap. 7 das conclusões e observações finais. O Apêndice A apresenta uma breve introdução às variáveis de Mandelstam e o Apêndice B trata das propriedades analíticas da amplitude hadrônica, a partir das quais é introduzida a Transformada de Watson-Sommerfeld e a demonstração da representação de parâmetro de impacto a partir desta.

Neste trabalho utilizamos a convenção usual em Física de Altas Energias,  $\hbar = c = 1$ . Nessa região de energia a unidade conveniente é o GeV,  $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$  e com a convenção referida esta é também a unidade de momento (GeV/c) e vetor de onda  $k = p/\hbar$ .

# Capítulo 2

## Observáveis Físicos de Interesse no Espalhamento Elástico Hádron-Hádron

Na Fig. (2.1) vê-se um esquema de colisão onde um feixe de partículas incide sobre um alvo fixo. O fenômeno observado pode ser muito complexo. Por exemplo, se as partículas envolvidas no processo forem compostas por outras partículas, mais elementares, estas podem se redistribuir entre duas ou mais partículas compostas, diferentes das partículas iniciais. Podem ainda absorver energia cinética da reação e passar a um estado de energia mais alta dentro das partículas compostas. Existe também a possibilidade relativística da criação de pares de partículas. Entretanto a possibilidade mais simples é a de espalhamento elástico, onde o estado final é composto pelas mesmas partículas do estado inicial e nenhuma destas muda seus estados energéticos internos durante a colisão. No presente trabalho os observáveis físicos utilizados para obtenção da Função de Perfil, Função de Recobrimento Inelástico e Eiconal foram a seção de choque diferencial elástica, a seção de choque total e a razão entre as partes real e imaginária da amplitude hadrônica frontal ( $\rho$ ).

### 2.1 Seção de Choque Diferencial Elástica

Seja  $+z$  o sentido das partículas incidentes de massa  $m$ . O alvo está localizado em torno da origem do sistema de coordenadas. Experimentalmente mede-se o número ( $dN_{el}$ ) de partículas por unidade de tempo espalhadas elasticamente em uma dada direção, dentro de um ângulo sólido  $d\Omega$ . Este fluxo  $dN_{el}$  é proporcional ao fluxo incidente,  $\phi$ , ao número de centros espalhadores<sup>1</sup>,  $n$ , e ao ângulo sólido,  $d\Omega$ . Logo

$$dN_{el} = \phi n \sigma(\theta, \varphi) d\Omega, \quad (2.1)$$

onde  $\theta$  é o ângulo zenital e  $\varphi$  o ângulo azimutal.  $\sigma(\theta, \varphi) = d\sigma/d\Omega$  é a constante de proporcionalidade, chamada seção de choque diferencial elástica e tem dimensão de área.

---

<sup>1</sup>Supondo-se que as funções de onda espalhadas por cada centro espalhador não interfiram coerentemente.

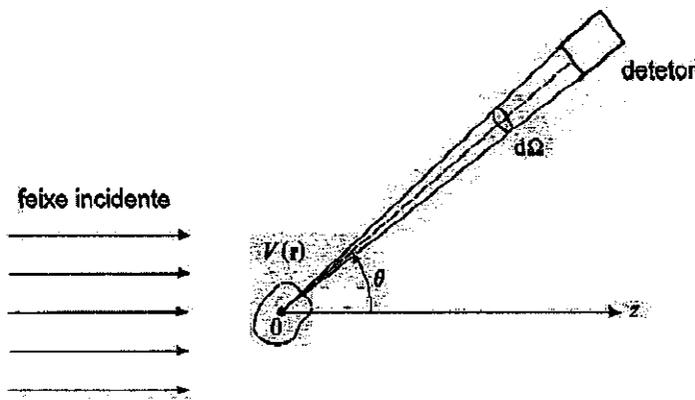


Figura 2.1: Feixe de partículas incidindo sobre o alvo fixo (região de potencial  $V(r)$ ).

É útil a introdução da variável de Mandelstam  $t$ , o quadrimomento transferido, que é um invariante de Lorentz, (apêndice A),

$$-q^2 = t = -2k^2(1 - \cos \theta), \quad (2.2)$$

onde  $k$  é o vetor de onda associado ao momento no centro de massa e  $\theta$  é o ângulo de espalhamento no mesmo sistema. Para simetria azimutal pode-se expressar a seção de choque diferencial elástica por, (apêndice A),

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi}{k^2} \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (2.3)$$

Da Eq.(2.1) vemos que a seção de choque diferencial elástica é uma probabilidade de observarmos uma partícula espalhada numa dada direção, logo podemos associar a esta uma amplitude de espalhamento elástico cujo módulo ao quadrado dá a probabilidade. Pode-se mostrar que essa amplitude, que depende de  $t$  e da energia no centro de massa ( $\sqrt{s}$ ), tem a seguinte relação com a seção de choque diferencial elástica (seção 3.5):

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi}{k^2} |f(s, t)|^2. \quad (2.4)$$

## 2.2 Seções de Choque Integradas e o Teorema Ótico

Analogamente ao caso elástico temos o fluxo ( $dN_{inel}$ ) de partículas espalhadas inelasticamente em uma dada direção<sup>2</sup>,

$$dN_{inel} = \phi n \sigma_{inel}(\theta, \varphi) d\Omega, \quad (2.5)$$

onde

$$\sigma_{inel}(\theta, \varphi) = \frac{d\sigma_{inel}}{d\Omega}. \quad (2.6)$$

Em cada um dos casos a integração sobre todo o ângulo sólido das seções de choque diferenciais fornece as seções de choque integradas para cada canal:

<sup>2</sup>supondo por simplicidade a existência de apenas um canal inelástico

- elástico

$$\sigma_{el} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega, \quad (2.7)$$

- inelástico

$$\sigma_{inel} = \int \frac{d\sigma_{inel}}{d\Omega} d\Omega. \quad (2.8)$$

A soma destas seções de choque integradas fornece a seção de choque total.

$$\sigma_t = \sigma_{el} + \sigma_{inel}. \quad (2.9)$$

Através do teorema ótico a seção de choque total pode ser expressa em termos da amplitude de espalhamento elástico,  $f(t, s)$ , (seção 3.5):

$$\sigma_t(s) = \frac{4\pi}{k} \text{Im}f(0, s). \quad (2.10)$$

Logo  $\sigma_t$  depende apenas da amplitude de espalhamento frontal ( $\theta=0$  ou  $t=0$ ).

## 2.3 Parâmetro $\rho$

É definido pela razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento frontal:

$$\rho(s) = \frac{\text{Re}f(0, s)}{\text{Im}f(0, s)} \quad (2.11)$$

Pode ser obtido “experimentalmente” através da interferência entre as contribuições hadrônicas e Coulombianas do espalhamento Hádron-Hádron [1].

# Capítulo 3

## Aproximação Eiconal e Função de Perfil

A partir da equação de Schrödinger e considerando o limite de altas energias e pequenos ângulos introduzimos neste capítulo a amplitude de espalhamento elástico e as funções eiconal, de perfil e de recobrimento.

Uma derivação da função de perfil a partir de propriedades analíticas da amplitude de espalhamento pode ser encontrada no apêndice B.

### 3.1 Método de Ondas Parciais

#### 3.1.1 Expansão da Amplitude de Espalhamento em Ondas Parciais

O espalhamento de duas partículas pode ser reduzido, no referencial do centro de massa, à um problema de espalhamento de uma partícula por um potencial  $V(\mathbf{r})$ . A equação de Schrödinger que descreve a evolução de uma partícula sujeita a um potencial  $V(\mathbf{r})$  é satisfeita por soluções associadas a uma energia bem definida  $E$ :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r})e^{-iEt}, \quad (3.1)$$

onde  $\Psi(\mathbf{r})$  é a solução da equação de autovalor:

$$H\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}), \quad (3.2)$$

e

$$H = -\frac{1}{2\mu}\nabla^2 + V(\mathbf{r}). \quad (3.3)$$

onde  $\mu$  é a massa reduzida das partículas,  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ . Estamos interessados nas soluções de (3.2) associadas a uma energia  $E$  igual à energia cinética da partícula incidente antes dela atingir a zona de influência do potencial. Definindo

$$E = \frac{k^2}{2\mu} \quad (3.4)$$

e

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu}U(\mathbf{r}), \quad (3.5)$$

podemos escrever (3.2) na forma

$$[\nabla^2 + k^2 - U(\mathbf{r})]\Psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.6)$$

Para cada valor de  $k$  (ou seja de  $E$ ) a Eq. (3.2) tem infinitas soluções (os autovalores de  $H$  são infinitamente degenerados). Devemos portanto escolher dentre essas infinitas soluções aquela que corresponde ao processo físico em estudo, ou seja, o processo de espalhamento elástico. Chamamos os autoestados do hamiltoniano que satisfazem essas condições de estados estacionários de espalhamento e designamos por  $\psi_k$  as funções de onda associadas.

Antes de atingir a região de influência de potencial a partícula incidente está livre e supomos que ela possui momento (e portanto energia) bem definido, sendo assim representada por uma onda plana ( $e^{ikz}$ ). Logo os autoestados estacionários de espalhamento associados à energia  $E = \hbar^2 k^2 / 2\mu$  podem ser obtidos pela superposição da onda plana  $e^{ikz}$  e de uma onda espalhada. A estrutura da onda espalhada depende do potencial  $V(\mathbf{r})$ , mas sua forma assintótica (válida bem longe da região de potencial) é bem simples. A função de onda total (incidente mais espalhada) é, portanto:

$$\psi_k(\mathbf{r}) \approx e^{ikz} + f_k(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (3.7)$$

onde  $f_k(\theta, \varphi)$  é a amplitude de espalhamento e depende de  $V(\mathbf{r})$ .

No caso especial de um potencial central  $V(r)$ , o momento angular orbital  $\mathbf{L}$  da partícula é uma constante de movimento. Portanto existem estados estacionários com momento angular bem definido, ou seja, autoestados comuns à  $H$ ,  $\mathbf{L}^2$  e  $L_z$ . As funções de onda associadas a esses autoestados são chamadas ondas parciais. Para qualquer potencial central  $V(r)$  as ondas parciais têm a seguinte forma [2]

$$\Psi_{k,l,m}(\mathbf{r}) = \frac{u_{k,l}(r)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (3.8)$$

onde  $u_{k,l}(r)$  é a solução da equação

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + U(r) \right] u_{k,l}(r) = k^2 u_{k,l}(r), \quad (3.9)$$

com  $u_{k,l}(0) = 0$  e  $k, l, m$  relacionados respectivamente aos autovalores de  $H$ ,  $\mathbf{L}^2$  e  $L_z$ . Obviamente  $u_{k,l}(r)$  e portanto  $\Psi_{k,l,m}(\mathbf{r})$  dependem do potencial  $V(r)$ , mas seu comportamento assintótico (longe da região de potencial) pode ser descrito como [2]

$$\Psi_{k,l,m}(\mathbf{r}) \approx -Y_l^m(\theta, \varphi) \frac{e^{-ikr} e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{ikr} e^{-\frac{i\pi}{2}} e^{2i\delta_{l,k}}}{2ikr}. \quad (3.10)$$

Note que  $\Psi_{k,l,m}(\mathbf{r})$  é a soma de uma onda esférica que converge para a região de potencial e uma onda espalhada que diverge da região de potencial. Entretanto a onda que diverge tem uma fase de  $2\delta_{l,k}$  em relação à que converge. O efeito do potencial está todo contido na fase  $2\delta_{l,k}$ ; se  $V(\mathbf{r}) = 0$  temos  $\delta_{l,k} = 0$ .

Portanto, devemos encontrar uma combinação linear de ondas parciais cujo comportamento assintótico seja igual ao do estado estacionário de espalhamento  $\psi_k(\mathbf{r})$ . Para o caso de um

potencial central,  $\psi_k$  é independente de  $\varphi$  e portanto a expansão envolve apenas ondas parciais para as quais  $m$  é zero. Pode-se mostrar que essa expansão é [2]

$$\psi_k(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \Psi_{k,l,0}(\mathbf{r}), \quad (3.11)$$

e disso temos

$$f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} e^{i\delta_{l,k}} \text{sen} \delta_{l,k} Y_l^0(\theta). \quad (3.12)$$

Como

$$Y_l^0(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta), \quad (3.13)$$

podemos escrever a equação (3.12) da seguinte forma:

$$f_k(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 - e^{2i\delta_{l,k}}] P_l(\cos \theta), \quad (3.14)$$

denominada expansão em ondas parciais. Apesar da Eq. (3.14) ser uma soma infinita, na prática o valor máximo de  $l$  ( $l_M$ ), para o qual  $\delta_{l,k} \neq 0$ , depende da energia ( $k$ ) e do alcance do potencial ( $a$ ) da seguinte forma [2]:

$$\sqrt{l_M(l_M+1)} \simeq ka \quad (3.15)$$

### 3.1.2 Limite de Altas Energias e a Função Eiconal

Para altas energias a expansão (3.14) requer um grande número de ondas parciais, ou seja,  $l$  atinge valores muito altos podendo portanto ser considerado um parâmetro contínuo. Podemos agora reescrever a expansão (3.14) numa forma integral [3]:

$$f_k(\theta) = \frac{i}{2k} \int_0^{\infty} dl [(2l+1)(1 - e^{i\chi_k(l)}) P_l(\cos \theta)], \quad (3.16)$$

onde  $\chi_k(l)$  é uma extensão contínua de  $2\delta_{l,k}$  e denominada *função eiconal* no contexto da ótica geométrica. Para pequenos ângulos e  $l \gg 1$  temos

$$P_l(\cos \theta) \approx J_0 \left( 2l \text{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right), \quad (3.17)$$

e desprezando o 1 em  $2l+1$  para  $l$  grande podemos reescrever (3.16) como

$$f_k(\theta) = \frac{i}{k} \int_0^{\infty} dl [J_0(2l \text{sen} \frac{\theta}{2})(1 - e^{i\chi_k(l)})]. \quad (3.18)$$

Classicamente podemos escrever o momento angular de uma partícula como  $|p|b$ , onde  $p$  é o momento linear e  $b$  o parâmetro de impacto. Semiclassicamente, se localizarmos uma partícula (devido ao seu pequeno comprimento de onda) em uma região pequena comparada à  $b$ , nós podemos igualar o momento angular quântico da partícula,  $l\hbar$ , a  $|p|b$ . Logo

$$l = \frac{|p|b}{\hbar} = kb, \quad (3.19)$$

e assim

$$f_k(\theta) = ik \int_0^\infty b db J_0(2kbsen\frac{\theta}{2})(1 - e^{ix_k(b)}). \quad (3.20)$$

Temos ainda (apêndice A)

$$\sqrt{-t} = q = 2kbsen\frac{\theta}{2}, \quad s = 4(m^2 + k^2) \quad (3.21)$$

e finalmente, definindo  $f(q, s) = f_k(\theta)$ :

$$f(q, s) = ik \int_0^\infty b db J_0(qb)(1 - e^{ix(k,b)}). \quad (3.22)$$

## 3.2 Analogia Ótica e Função de Perfil

Consideremos o espalhamento de uma onda plana de luz passando através e em volta de um disco [3]. Suponha que o disco tenha raio  $b_o$  e um coeficiente de absorção simétrico  $\Gamma(b)$ ,  $b$  sendo o raio.  $\Gamma(b)$  representa o coeficiente de absorção da amplitude da onda incidente, logo o coeficiente de transmissão é  $1 - \Gamma(b)$ . Portanto  $0 \leq \Gamma(b) \leq 1$  e para um disco totalmente absorvente (disco negro)  $\Gamma(b) = 1$ . A onda plana se move no sentido  $+z$  e o disco está no plano  $z=0$ . Da conhecida integral de Helmholtz-Kirchhoff [4] podemos expressar o campo no ponto  $\mathbf{r}$  como<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}) = & - \frac{ik}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{b_o} d\varphi' b' db' (1 + \cos\theta)(1 - \Gamma(b')) e^{ikz'} \frac{e^{ikR}}{R} - \\ & - \frac{ik}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{b_o}^\infty d\varphi' b' db' (1 + \cos\theta) e^{ikz'} \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{b}'$  e  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{r}$  e o eixo  $z$ . Note que  $\Gamma(b) = 0$  para  $b > b_o$ . Mas se queremos a onda *espalhada* em  $\mathbf{r}$ , devemos subtrair a onda incidente em  $\mathbf{r}$  dada por

$$\Psi_{inc}(\mathbf{r}) = \frac{-ik}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty d\varphi' b' db' (1 + \cos\theta) e^{ikz'} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (3.24)$$

logo temos

$$\Psi_{esp}(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty d\varphi' b' db' (1 + \cos\theta) \Gamma(b') e^{ikz'} \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (3.25)$$

Fazendo novamente uma aproximação de pequenos ângulos ( $\cos\theta \approx 1$ ) a Eq. (3.25) se torna

$$\Psi_{esp}(\mathbf{r}) = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty d\varphi' b' db' \Gamma(b') e^{ikz'} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (3.26)$$

lembrando que  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{b}'$  e tomando  $\mathbf{r} \gg \mathbf{b}'$  temos

<sup>1</sup>Apesar da luz sofrer difração vetorial estamos usando uma teoria de difração escalar, já que cada componente cartesiana dos campos vetoriais obedecem equações de onda escalares e não estamos interessados em nenhum tipo de característica vetorial como polarização.

$$R = |r - b'| \approx r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{b}'. \quad (3.27)$$

Podemos também fazer

$$e^{ikz} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}}, \quad (3.28)$$

onde  $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$ , logo

$$\Psi_{esp}(\mathbf{r}) \approx \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty d\varphi' b' db' \Gamma(b') e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}'}, \quad (3.29)$$

onde  $\mathbf{k}' = k\hat{\mathbf{r}}$ . Lembrando que, assintoticamente

$$\Psi_{esp}(\mathbf{r}) \approx f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (3.30)$$

temos

$$f(\theta) = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty d\varphi' b' db' \Gamma(b') e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}'}. \quad (3.31)$$

Para pequenos ângulos o momento transferido,  $\mathbf{q}$ , é praticamente perpendicular ao eixo  $z$ . Quando o potencial tem simetria azimutal, não depende de  $\varphi$ , podemos posicionar o eixo  $x$  na direção e sentido do vetor  $(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  sem perda de generalidade, logo, como

$$q = |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| = 2k \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (3.32)$$

temos

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}' = 2kb' \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\varphi. \quad (3.33)$$

Portanto usando a relação

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ia \cos\varphi} d\varphi = J_0(a), \quad (3.34)$$

temos

$$f(\theta) = ik \int_0^\infty b db \Gamma(b) J_0(2bk \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)), \quad (3.35)$$

análoga à Eq.(3.20) se fizermos

$$\Gamma(b) = 1 - e^{i\chi(b)}. \quad (3.36)$$

Como o coeficiente de absorção é  $\Gamma(b)$ , o coeficiente de transmissão  $(1 - \Gamma(b))$  é  $e^{i\chi(b)}$ . Para que  $\Gamma(b)$  seja real devemos ter  $\chi(b)$  puramente imaginário, então o coeficiente de transmissão será menor que 1 e teremos absorção e espalhamento elástico difrativo. Caso  $\chi(b)$  seja real o coeficiente de transmissão representará apenas uma mudança de fase e não teremos absorção, sendo o espalhamento puramente elástico não-difrativo.

### 3.3 Método da Equação Integral

Podemos obter a Eq. (3.22) a partir da equação de Schrödinger através de uma abordagem um pouco diferente da utilizada na seção (3.1). Partindo novamente da equação de Schrödinger

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}), \quad (3.37)$$

assumimos que a onda incidente uma vez dentro da região de potencial não é mais uma onda plana e sim escrita da forma

$$\Psi_{inc}(\mathbf{r}) = e^{ikz}\varphi(\mathbf{r}). \quad (3.38)$$

Usando a relação  $\nabla^2(uw) = u\nabla^2w + 2\nabla u \cdot \nabla w + w\nabla^2u$  temos

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) + 2ik\frac{d\varphi(\mathbf{r})}{dz} = U(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}). \quad (3.39)$$

Desprezando a derivada segunda, ou seja, assumindo

$$|\nabla^2\varphi(\mathbf{r})| \ll \left| 2ik\frac{d\varphi(\mathbf{r})}{dz} \right|, \quad (3.40)$$

temos

$$2ik\frac{d\varphi(\mathbf{r})}{dz} = U(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) \quad (3.41)$$

e

$$\varphi(\mathbf{r}) = \exp\left(\frac{-i}{2k} \int_{-\infty}^z U(\mathbf{b} + \mathbf{z}') dz'\right), \quad (3.42)$$

lembrando que

$$\varphi(\mathbf{r}) = 1 \quad p/ \quad \mathbf{r} \rightarrow -\infty, \quad (3.43)$$

pois em  $\mathbf{r} \rightarrow -\infty$  a onda incidente não chegou na região de potencial, sendo portanto plana.

Inserindo essa solução na Eq. (3.40) temos:

$$|U(\mathbf{r})| \gg \frac{1}{4k^2}|U(\mathbf{r})|^2 \quad |U(\mathbf{r})| \gg \frac{1}{2k} \left| \frac{dU(\mathbf{r})}{dz} \right|. \quad (3.44)$$

Como  $U(\mathbf{r}) = 2\mu V(\mathbf{r})$  temos

$$\frac{k^2}{2\mu} \gg \frac{1}{4}|U(\mathbf{r})| \quad |V(\mathbf{r})| \gg \frac{\lambda}{4\pi} \left| \frac{dV(\mathbf{r})}{dz} \right|. \quad (3.45)$$

Ou seja, ao assumirmos a desigualdade da Eq. (3.40) estamos trabalhando numa região onde a energia cinética ( $k^2/2\mu$ ) é muito maior que a energia potencial e o potencial é tal que sua variação dentro de um comprimento de onda é muito menor que ele proprio.

A função de onda é

$$\Psi(\mathbf{r}) = \exp\left(ikz - \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^z U(\mathbf{b} + \mathbf{z}') dz'\right), \quad (3.46)$$

mas sabemos que a função de onda na região assintótica deve ser do tipo da Eq. (3.7).

A equação de Schrödinger pode ser transformada numa equação integral através do uso das funções de Green [2, 5]

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{ikz} + \int d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}'), \quad (3.47)$$

onde  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  satisfaz

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.48)$$

e é dada por

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (Ae^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + Be^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}). \quad (3.49)$$

Entretanto como desejamos uma solução do tipo da Eq. (3.7) fazemos  $A=1$  e  $B=0$ .

Na região assintótica podemos aproximar

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}', \quad (3.50)$$

logo

$$\Psi(\mathbf{r}) \approx e^{ikz} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' e^{-ik'\cdot\mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}'), \quad (3.51)$$

onde  $\mathbf{k}' = k\hat{\mathbf{r}}$ .

Usando a Eq. (3.46) e comparando as Eqs. (3.7) e (3.51) temos

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') \exp\left(-\frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{z'} U(\mathbf{b}' + \mathbf{z}'') dz''\right), \quad (3.52)$$

onde  $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$ . Como já foi dito para pequenos ângulos  $(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  é praticamente perpendicular à  $z$  logo

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}' \approx (\mathbf{k} - \mathbf{k}')\cdot\mathbf{b}' = 2kb' \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\varphi', \quad (3.53)$$

onde  $\mathbf{r}' = \mathbf{b} + \mathbf{z}'$ . Logo

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \exp\left(i2kb' \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\varphi'\right) U(\mathbf{r}') \exp\left(-\frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{z'} U(\mathbf{b}' + \mathbf{z}'') dz''\right). \quad (3.54)$$

Note que ao realizarmos a aproximação

$$e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\cdot\mathbf{z}'} \approx 1 \quad (3.55)$$

estamos assumindo

$$\theta^2 kd \ll 1, \quad (3.56)$$

onde  $d$  é a distância na qual  $U\varphi$  varia apreciavelmente.

Lembrando que

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} dz' U(\mathbf{b} + \mathbf{z}') \exp\left(-\frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{z'} U(\mathbf{b}' + \mathbf{z}'') dz''\right) = \\
& = 2ik \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{d}{dz'} \left[ \exp\left(-\frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{z'} U(\mathbf{b}' + \mathbf{z}'') dz''\right) \right] \\
& = 2ik \left[ \exp\left(-\frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} U(\mathbf{b} + \mathbf{z}') dz'\right) - 1 \right],
\end{aligned} \tag{3.57}$$

temos

$$f(\theta) = -\frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi b db \exp\left(i2kbsen\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\varphi\right) \left[ \exp\left(-\frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} U(\mathbf{b} + \mathbf{z}') dz'\right) - 1 \right]. \tag{3.58}$$

Usando novamente a relação (3.34) temos

$$f(\theta) = -ik \int_{-\infty}^{\infty} b db J_0(2kbsen\left(\frac{\theta}{2}\right)) (e^{i\chi(\mathbf{b})} - 1), \tag{3.59}$$

onde definimos

$$\chi(\mathbf{b}) \equiv -\frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} U(\mathbf{b} + \mathbf{z}) dz, \tag{3.60}$$

supondo o potencial com simetria azimutal ( $\chi(\mathbf{b}) = \chi(b)$ ). Como  $q = 2ksen\left(\frac{\theta}{2}\right)$  temos

$$f(\theta) = ik \int_{-\infty}^{\infty} b db J_0(qb) (1 - e^{i\chi(b)}). \tag{3.61}$$

Assim chegamos novamente à Eq. (3.22), só que nesta abordagem conseguimos associar à função eiconal  $\chi(b)$  o potencial de espalhamento  $U(\mathbf{r})$  e pudemos também avaliar melhor as condições onde a aproximação eiconal é válida, ou seja, altas energias, Eq. (3.45), ( $U(\mathbf{r})/E \ll 1$ ,  $ka \gg 1$ , onde  $a$  é o alcance do potencial) e pequenos ângulos, Eq. (3.56), ( $\theta^2 kd \ll 1$ ). Na seção anterior vimos que para uma eiconal real não há absorção. Assim podemos associar a absorção à um potencial imaginário, que produz portanto um espalhamento elástico difrativo. A esta “absorção” associamos espalhamentos inelásticos como criação de partículas, excitações internas, etc. À parte real do potencial (parte real da eiconal) associamos espalhamento elástico não-difrativo.

### 3.4 Função de Perfil no Contexto da Primeira Aproximação de Born

Na analogia da seção (3.2) iniciamos a abordagem supondo um disco com coeficiente de absorção real  $\Gamma(b)$ . Sendo  $\Gamma(b)$  real, o coeficiente de transmissão,  $1 - \Gamma(b)$ , também é real e menor que 1. Logo  $\Gamma(b)$  realmente representava uma absorção da onda incidente. Entretanto ao final da seção fizemos a identificação da função de perfil,  $\Gamma(b)$ , com a eiconal,  $\chi(b)$ , introduzida na seção (3.1). Como a eiconal pode ser complexa,  $\Gamma(b)$  também pode,  $\Gamma(b) = 1 - e^{i\chi(b)}$ . Assim se a eiconal for, por exemplo, puramente real o coeficiente de transmissão será  $e^{i\chi_R(b)}$ , representando

apenas uma mudança de fase da onda incidente, ou seja, não há absorção apesar de  $\Gamma(b) \neq 0$ . Logo  $\Gamma(b)$  perdeu um pouco do sentido de coeficiente de absorção dado no início da seção (3.2), a eiconal,  $\chi(b)$ , passou a fazer esse papel. Isso se deve ao fato de que nas interações entre partículas existem espalhamentos elásticos não-difrativos, o que não existe no modelo ótico da seção (3.2). Entretanto nesta seção mostraremos que dentro do contexto da chamada primeira aproximação de Born a função de perfil pode ser aproximada pela eiconal e volta a ter o sentido de coeficiente de absorção. Partindo da equação integral obtida a partir da equação de Schrödinger, Eq. (3.51), a primeira aproximação de Born consiste em aproximar  $\Psi(\mathbf{r})$  pela própria onda incidente,  $e^{ikz}$ :

$$\Psi(\mathbf{r}) \approx e^{ikz} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}'} U(\mathbf{r}'), \quad (3.62)$$

ou seja, a função de onda espalhada é a transformada de Fourier do potencial. Fazendo novamente a aproximação de pequenos ângulos

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}' \approx (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}' \quad p/\theta \approx 0. \quad (3.63)$$

temos

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{ikz} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty d\varphi' b' db' e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{b}'} \int_{-\infty}^\infty dz' U(\mathbf{b} + \mathbf{z}') \quad (3.64)$$

Logo a onda espalhada é

$$\Psi_{esp}(\mathbf{r}) \approx -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty d\varphi' b' db' e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{b}'} U(\mathbf{b}'), \quad (3.65)$$

$$U(\mathbf{b}') = \int_{-\infty}^\infty dz' U(\mathbf{b}' + \mathbf{z}') \quad (3.66)$$

análoga à Eq. (3.29) se fizermos a associação

$$U(\mathbf{b}') \approx -2ik\Gamma(b'), \quad (3.67)$$

supondo o potencial com simetria azimutal. Assim a parte real da função de perfil está associada à parte imaginária do potencial (absorção e espalhamento elástico difrativo) e vice-versa (espalhamento elástico não difrativo). Como a eiconal se relaciona com o potencial através da Eq. (3.60)<sup>2</sup>

$$\Gamma(b) \approx -i\chi(b). \quad (3.68)$$

Assim na primeira aproximação de Born a função de perfil recupera o sentido de coeficiente de absorção.

A aproximação que fizemos foi considerar a função de onda total como sendo a própria função de onda incidente. Se agora numa nova aproximação considerarmos a função da Eq. (3.62) como a função de onda total teremos:

<sup>2</sup>Note que se expandirmos  $\Gamma(b) = 1 - e^{i\chi(b)}$  até primeira ordem obteremos a Eq. (3.68).

$$\Psi_2(\mathbf{r}) \approx e^{ikz} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') + \quad (3.69)$$

$$+ \frac{1}{8\pi^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int \int d^3r' d^3r'' e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{r}''} U(\mathbf{r}') U(\mathbf{r}'').$$

Note que a diferença entre essa equação e a Eq. (3.62) é o último termo, que é quadrático no potencial, ou seja, esta é uma expansão em segunda ordem no potencial (por isso o índice 2 em  $\Psi$ ). Pode-se repetir esse processo iterativo até a ordem que se queira. Entretanto se o potencial for fraco os termos de ordem mais alta são sempre menores que seus precedentes. Logo a primeira aproximação de Born, e portanto todos os resultados desta seção, são válidos apenas para potenciais suficientemente fracos.

### 3.5 Seções de Choque Integradas e a Função de Recobrimento Inelástica

É possível determinar as seções de choque integradas a partir da abordagem da seção (3.1) através da noção de corrente de probabilidade. Esta se baseia em associar à função de onda uma corrente  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ , dada pela expressão abaixo [2]:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu} \text{Im} [\Psi^*(\mathbf{r}) \nabla \Psi(\mathbf{r})] \quad (3.70)$$

Assim o fluxo de partículas incidentes,  $\phi$ , é proporcional à corrente de probabilidade da função de onda incidente ( $e^{ikz}$ ). O número de partículas espalhadas que atingem o detector por unidade de tempo é proporcional ao número de centros espalhadores e ao produto interno entre a corrente de probabilidade da função de onda espalhada ( $f(\theta)e^{ikr}/r$ ) e a superfície da abertura do detector. Logo, a partir da Eq. (3.70) a corrente de probabilidade da função de onda incidente e da função de onda espalhada são respectivamente:

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{r}) = \frac{k}{\mu} \hat{\mathbf{z}} \quad (3.71)$$

e

$$\mathbf{J}_e(\mathbf{r}) \approx \frac{k}{\mu} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad p/ \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.72)$$

Logo os fluxos incidente e espalhados são respectivamente:

$$\phi = C \frac{k}{\mu} \quad (3.73)$$

e

$$dN_{el} = Cn \frac{k}{\mu} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} dS = Cn \frac{k}{\mu} |f(\theta)|^2 d\Omega. \quad (3.74)$$

Da Eq. (2.1) temos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 \quad (3.75)$$

e da Eq. (2.7)

$$\sigma_{el} = \int d\Omega |f(\theta)|^2. \quad (3.76)$$

Mas como

$$f(\theta) = ik \int_0^\infty b db J_o(qb) \Gamma(b) \quad (3.77)$$

e  $d^2b = 2\pi b db$ , usando a relação

$$\int d\Omega J_o(qb) J_o(qb') = \frac{2\pi}{k^2 b} \delta(b - b') \quad (3.78)$$

temos

$$\sigma_{el} = \int d^2b |\Gamma(b)|^2. \quad (3.79)$$

Se não há absorção a integral de superfície da corrente de probabilidade associada à função de onda total, incidente mais espalhada, sobre uma superfície fechada qualquer é obviamente zero (não há fontes nem sorvedouros).

Se há absorção (espalhamento inelástico, produção de pares, etc) a probabilidade total não se conserva (há sorvedouros)<sup>3</sup>. Assim a seção de choque inelástica será a quantidade de probabilidade que “desaparece” por unidade de tempo normalizada pela corrente incidente. A quantidade de probabilidade que “desaparece” por unidade de tempo é a integral de superfície da corrente associada à função de onda total sobre uma superfície fechada qualquer. Escolheremos uma superfície esférica por simplicidade, logo devemos calcular a integral

$$\Delta P = - \int \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{r}} da = - \int J_r(\mathbf{r}) da, \quad (3.80)$$

onde  $\Delta P$  é a quantidade de probabilidade que “desaparece” por unidade de tempo e

$$J_r(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu} \text{Im} \left[ \Psi^*(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} \Psi(\mathbf{r}) \right]. \quad (3.81)$$

Calculando a corrente de probabilidade da Eq. (3.11) que representa a função de onda total expandida em ondas parciais, temos

$$\Delta P = - \sum_{l=0}^{\infty} \int J_r^{(l)} r^2 d\Omega \quad (3.82)$$

onde

$$J_r^{(l)}(\mathbf{r}) \approx - \frac{k}{m} \frac{\pi(2l+1)}{k^2 r^2} \left[ 1 - |e^{2i\delta_l}|^2 \right] |Y_l^0(\theta)|^2 \quad p/ \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.83)$$

Na Eq. (3.82) não temos um somatório duplo, em  $l$  e  $l'$ , por causa da ortogonalidade dos esféricos harmônicos, e, como estes são também ortonormais em  $d\Omega$ , temos

<sup>3</sup>Análogo a lei de Gauss do eletromagnetismo onde as cargas fazem o papel de fontes e sorvedouros.

$$\Delta P = \frac{k}{\mu} \frac{\pi}{k^2} \sum_0^{\infty} (2l+1) [1 - |e^{2i\delta_l}|^2]. \quad (3.84)$$

Normalizando a Eq. (3.84) pela corrente incidente

$$\sigma_{inel} = \frac{\Delta P}{|\mathbf{J}_i(\mathbf{r})|} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 - |e^{2i\delta_l}|^2]. \quad (3.85)$$

Fazendo agora as mesmas aproximações da seção (3.1.2)

$$\sigma_{inel} = \int d^2b [1 - |e^{i\chi(b)}|^2]. \quad (3.86)$$

Fazendo  $\chi(b) = \chi_R(b) + i\chi_I(b)$  temos ainda

$$\sigma_{inel} = \int d^2b [1 - e^{-2\chi_I(b)}]. \quad (3.87)$$

Novamente vemos que a absorção está relacionada à parte imaginária da eiconal.

Dos resultados acima a seção de choque total  $\sigma_t = \sigma_{el} + \sigma_{inel}$  pode ser expressa por<sup>4</sup>

$$\sigma_t = \int d^2b 2\Gamma_R(b), \quad (3.88)$$

onde  $\Gamma(b) = \Gamma_R(b) + i\Gamma_I(b)$ . Assim podemos associar a cada seção de choque integrada uma densidade de probabilidade por unidade de área, ou função de recobrimento:

$$\begin{aligned} G_{el}(b) &= |\Gamma(b)|^2 \\ G_{inel}(b) &= 1 - e^{-2\chi_I(b)} \\ G_t(b) &= 2\Gamma_R(b). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Essas funções representam a probabilidade de ocorrência de espalhamento elástico ( $G_{el}(b)$ ), colisão inelástica ( $G_{inel}(b)$ ), ou ambos ( $G_t(b) = G_{el}(b) + G_{inel}(b)$ ) no elemento de área  $d^2b$  à distância  $b$  do centro do disco. Note que  $G_{inel}(b)$  é particularmente útil devido ao fato de ser normalizado. Para um disco totalmente transparente  $G_{inel}(b) = 0$ , já para um disco totalmente absorvente (disco negro)  $G_{inel}(b) = 1$

<sup>4</sup>Note que, das Eqs. (3.88) e (3.22) temos  $\sigma_t = \frac{4\pi}{k} \text{Im}f(0)$ , o chamado teorema ótico, que relaciona a seção de choque total com a parte imaginária da amplitude de espalhamento em  $\theta = 0$ .

# Capítulo 4

## Conjunto de Dados Experimentais

### 4.1 Espalhamento Próton-Próton

Foram feitas as análises dos dados experimentais de seção de choque diferencial elástica, seção de choque total e parâmetro  $\rho$  para o espalhamento pp entre as energias no centro de massa de  $\sqrt{s}=13,8$  GeV e  $\sqrt{s}=62,5$  GeV. Nosso conjunto básico corresponde aos dados compilados e normalizados por Amaldi e Schubert nas energias  $\sqrt{s}= 23,5; 30,7; 44,7; 52,8$  e  $62,5$  GeV e momento transferido no intervalo  $0,01 \text{ GeV}^2 \leq q^2 \leq 9,8 \text{ GeV}^2$  e aos dados nas energias  $\sqrt{s} = 13,8$  e  $19,5$  GeV e momento transferido no intervalo  $0,037 \text{ GeV}^2 \leq q^2 \leq 8,15 \text{ GeV}^2$ .

Entretanto, baseados na evidência de que os dados de seção de choque diferencial elástica entre as energias  $20 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 60 \text{ GeV}$  não dependem da energia para momento transferido acima de  $q^2 \sim 3,0 \text{ GeV}^2$  [6, 7] utilizamos também dados na energia de  $\sqrt{s}=27,5$  GeV no intervalo de momento transferido  $5,5 \text{ GeV}^2 \leq q^2 \leq 14,2 \text{ GeV}^2$ .

Nossa estratégia para realizar um estudo sistemático dessas informações experimentais é considerar dois *Ensembles* diferentes de dados, caracterizados e denotados por:

- *Ensemble A*

Sete conjuntos originais de dados experimentais, sendo os cinco últimos compilados por Amaldi e Schubert, em  $\sqrt{s}= 13,8; 19,5; 23,5; 30,7; 44,7; 52,8$  e  $62,5$  GeV [8, 9, 10, 11, 12, 13].

- *Ensemble B*

Os seis últimos conjuntos do *Ensemble A* incluindo em cada energia os dados em  $\sqrt{s}= 27,5$  GeV [8].

Os resultados para ambos os *Ensembles* são praticamente os mesmos para as funções no espaço de parâmetro de impacto ( $\Gamma(b, s)$ ,  $\chi(b, s)$  e  $G_{inel}(b, s)$ ). As diferenças surgem na eiconal no espaço de momento transferido ( $\chi(q, s)$ ).

Na Fig. (4.1) mostramos os *Ensembles A* e B.

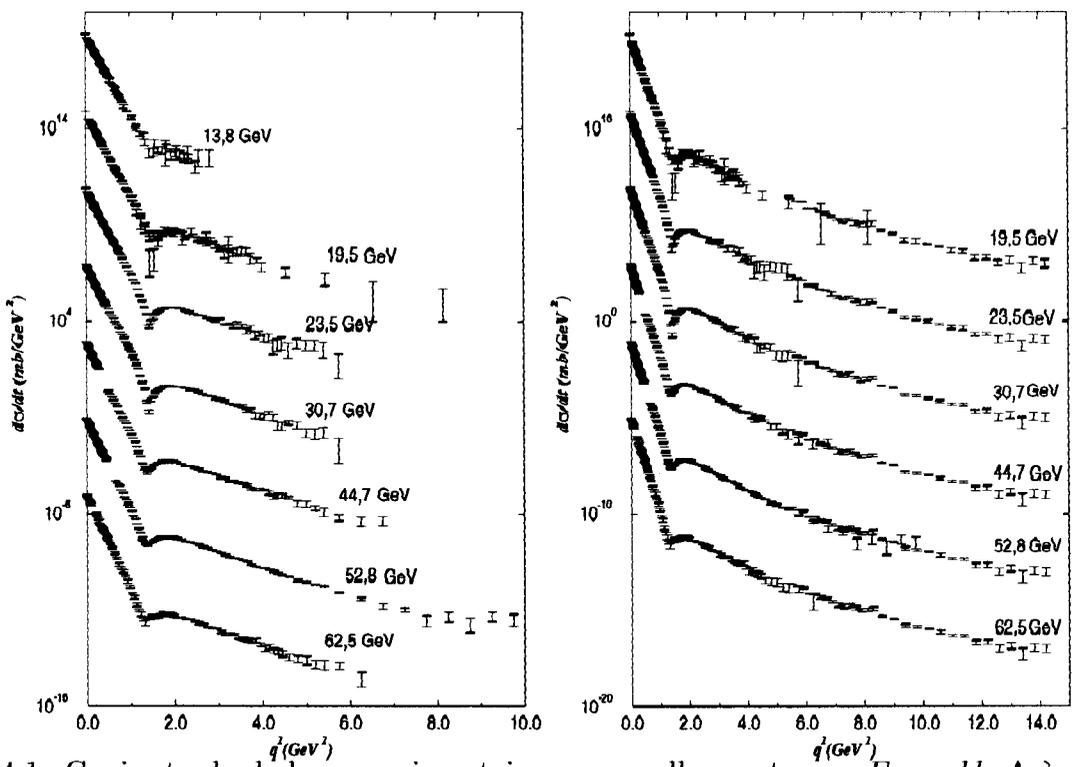


Figura 4.1: Conjunto de dados experimentais para espalhamento pp. *Ensemble A* à esquerda, *Ensemble B* à direita. Em cada energia os dados foram multiplicados por fatores de  $10^{\pm 4}$

## 4.2 Espalhamento Antipróton-Próton

Analogamente ao espalhamento pp foram feitas as análises dos dados de seção de choque diferencial elástica, seção de choque total e parâmetro  $\rho$  para o espalhamento  $\bar{p}p$  nas energias no centro de massa de  $\sqrt{s} = 13,8; 19,4; 31; 53; 62; 546$  e  $1800$  GeV e momento transferido no intervalo  $0,02 \text{ GeV}^2 \leq q^2 \leq 4,45 \text{ GeV}^2$  [10, 11, 12, 14, 15, 16, 17].

Na Fig. (4.2) mostramos os conjuntos de dados experimentais.

Na Fig. (4.3) mostramos o comportamento real, sem fatores de escala, de alguns conjuntos de dados, tanto para espalhamento pp e  $\bar{p}p$ .

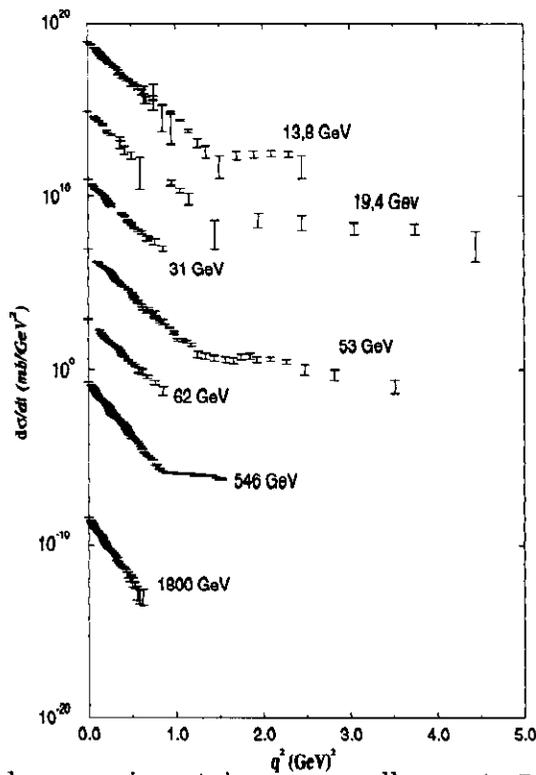


Figura 4.2: Conjunto de dados experimentais para espalhamento  $\bar{p}p$ . Em cada energia os dados foram multiplicados por fatores de  $10^{\pm 4}$

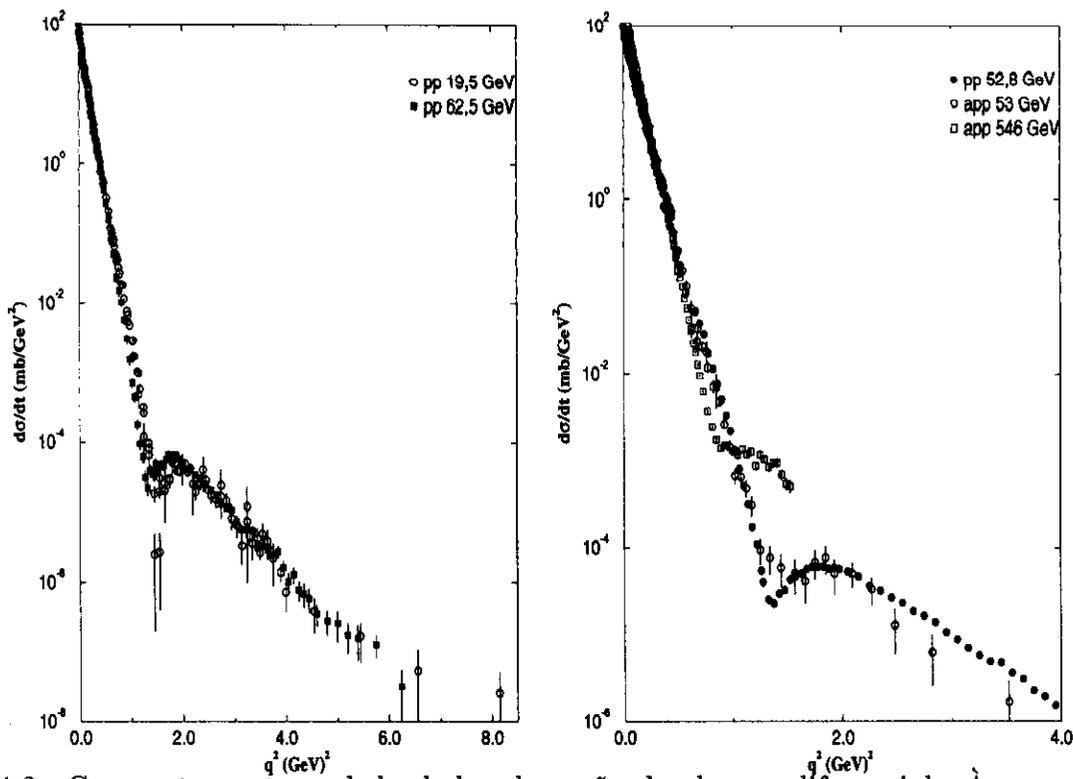


Figura 4.3: Comportamento real de dados de seção de choque diferencial. À esquerda: espalhamento  $pp$  em  $\sqrt{s} = 19,5$  e  $62,5$  GeV. À direita: espalhamento  $pp$  em  $\sqrt{s} = 52,8$  GeV e espalhamento  $\bar{p}p$  em  $\sqrt{s} = 53$  e  $546$  GeV.

# Capítulo 5

## Parametrização e Incertezas

A estratégia usada para obtenção da amplitude de espalhamento elástica foi, a partir de uma parametrização da mesma, procurar ajustar os dados experimentais de seção de choque diferencial elástica, parâmetro  $\rho$  e seção de choque total (a partir da qual foi obtida a seção de choque diferencial elástica em  $q=0$  através do teorema ótico).

Muitos autores têm investigado espalhamento de hádrons a altas energias no contexto do formalismo de parâmetro de impacto e/ou aproximação eiconal. Inspirados por algumas dessas abordagens [18, 19, 20, 21] a parametrização utilizada foi [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]:

$$F(q, s) = i \sum_{j=1}^n \alpha_j(s) e^{-\beta_j(s)q^2} - \mu \sum_{j=1}^2 \alpha_j(s) e^{-\beta_j(s)q^2} \quad (5.1)$$
$$\mu = -\frac{\rho(s)}{\alpha_1(s) + \alpha_2(s)} \sum_{j=1}^n \alpha_j(s),$$

onde  $\alpha_j(s), \beta_j(s), j=1,2,\dots,n$  são parâmetros reais de ajuste,  $n$  depende da energia ( $n = n(s)$ ),  $\rho(s)$  é o valor experimental do parâmetro  $\rho$  em cada energia e  $F(q, s)$  é a amplitude normalizada<sup>1</sup> ( $F(q, s) = f(q, s)/k$ ).

Como a seção de choque diferencial elástica pode ser expressa através da amplitude de espalhamento por

$$\frac{d\sigma}{dt} = \pi |F(q, s)|^2, \quad -t = q^2, \quad (5.2)$$

utilizamos o programa de minimização CERN-minuit [30] para realizarmos testes de  $\chi^2$  [31, 32] e encontrarmos os melhores valores dos parâmetros de ajuste, inclusive com as variâncias  $\sigma_{\alpha_j}^2$ ,  $\sigma_{\beta_j}^2$  e covariâncias  $\sigma_{\alpha_j \alpha_i}^2$ ,  $\sigma_{\beta_j \beta_i}^2$ ,  $\sigma_{\alpha_j \beta_i}^2$  nesses parâmetros. Num primeiro momento essas variâncias e covariâncias foram usadas na propagação de erros para a amplitude e para a seção de choque diferencial através das Eqs. (5.1) e (5.2) respectivamente. O efeito dessas incertezas na seção de choque diferencial é mostrado na Fig. (5.1) para espalhamento pp na energia  $\sqrt{s} = 23.5$  GeV (*Ensembles A e B*).

---

<sup>1</sup>Note que  $F(q, s)$  é invariante de Lorentz.

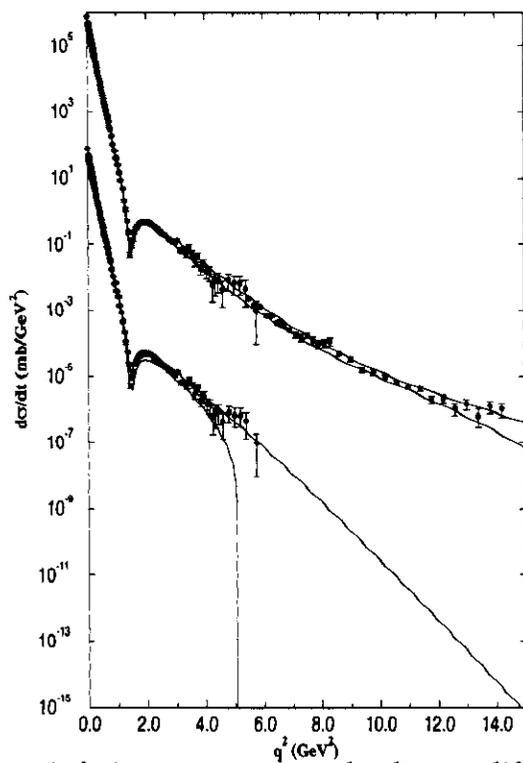


Figura 5.1: Limites superior e inferior para a seção de choque diferencial,  $d\sigma/dt \pm \Delta(d\sigma/dt)$ , a partir do ajuste e propagação dos erros para a interação pp em  $\sqrt{s} = 23,5$  GeV: *Ensembles* A (abaixo) e B (acima). O último foi deslocado por um fator de  $10^4$ .

Com isso, como expresso por R. Lombard [19], nós levamos em conta as curvas extrapoladas que não podem ser excluídas em análises estatísticas. Os resultados dos ajustes para todo o conjunto de dados experimentais analisados são mostrados nas Figs. (5.2), (5.3) e (5.4), os valores dos parâmetros são mostrados nas Tabelas (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.5) e (5.6).

Nas Figs. (5.5), (5.6), (5.7) e (5.8) mostramos a contribuição de cada parte da amplitude (partes real e imaginária) à seção de choque diferencial nas energias,  $\sqrt{s} = 30,7; 52,8$  GeV,  $\sqrt{s} = 30,7; 52,8$  GeV incluindo dados na energia  $\sqrt{s} = 27$  GeV para espalhamento pp e  $\sqrt{s} = 19,5; 53; 546$  GeV para espalhamento  $\bar{p}p$ .

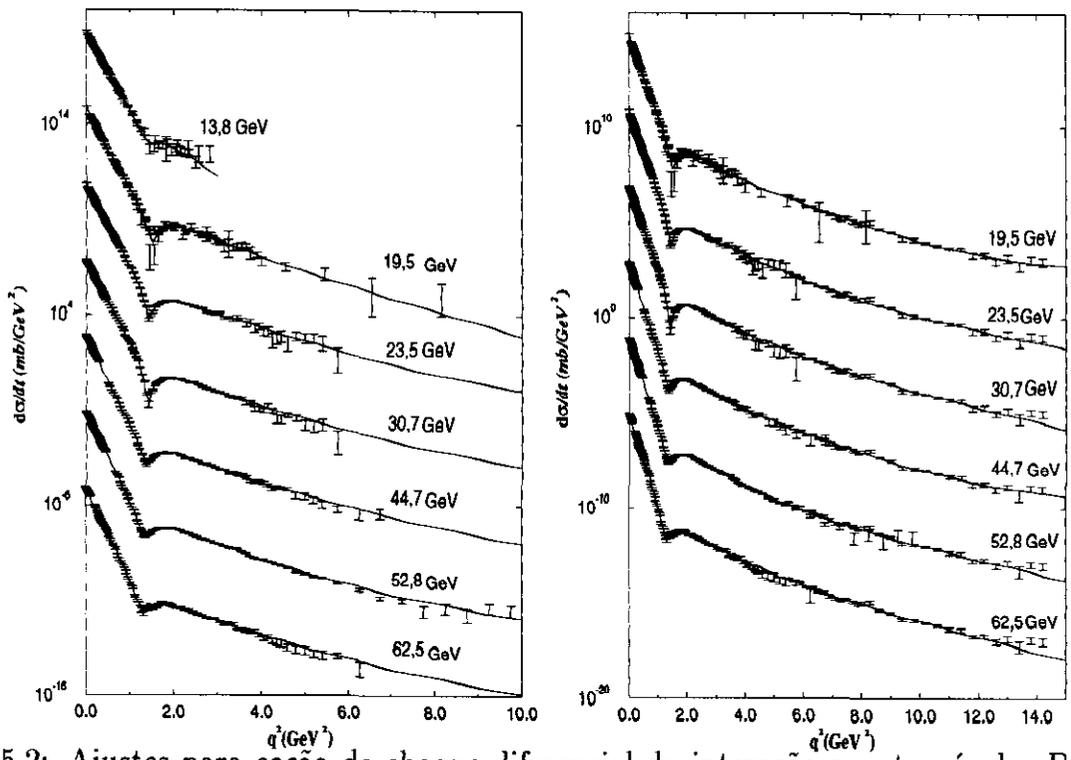


Figura 5.2: Ajustes para seção de choque diferencial da interação pp através das Eqs. (4.1) e (4.2). À esquerda *Ensemble A*, à direita *Ensemble B*. Dados e curvas foram deslocados por fatores de  $10^{\pm 4}$ .

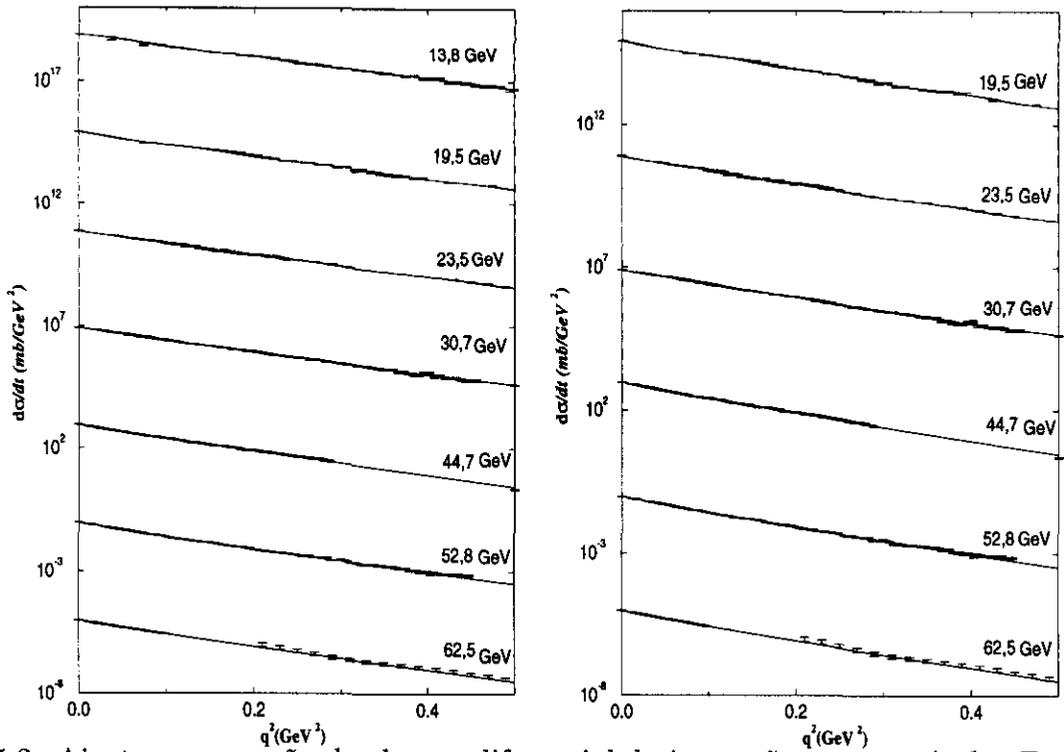


Figura 5.3: Ajustes para seção de choque diferencial da interação pp através das Eqs. (4.1) e (4.2); em detalhe a região de pequeno momento transferido. À esquerda *Ensemble A*, à direita *Ensemble B*. Dados e curvas foram deslocados por fatores de  $10^{\pm 4}$ .

	14,8	19,5	23,5	30,7
$\alpha_1$	$-0,5698 \times 10^{-3}$	$-0,14654 \times 10^{-1}$	$-0,23904$	$-0,41151 \times 10^{-1}$
$\alpha_2$	$0,87745 \times 10^{-3}$	0,31553	3,2669	3,5694
$\alpha_3$	5,9831	4,1802	0,22987	-
$\alpha_4$	-3,6702	-3,1058	-	-
$\alpha_5$	5,5142	6,5881	4,6569	4,6406
$\beta_1$	173,16	0,76008	1,1412	0,91213
$\beta_2$	3,7112	6,0847	8,5647	8,3034
$\beta_3$	2,7958	2,3408	1,2851	-
$\beta_4$	2,4246	2,1654	-	-
$\beta_5$	6,4277	6,0829	4,2787	4,2531
$\rho$	-0,074	0,019	0,02	0,042
$t_{max}$	2,82	8,15	5,75	5,75
N	100	124	134	173
$\chi^2/g.l.$	2,03	2,93	1,14	1,00

Tabela 5.1: Resultados dos ajustes para interação pp e *Ensemble A*: valores dos parâmetros livres em  $\text{GeV}^{-2}$ , valor experimental de  $\rho$ , valor máximo do momento transferido com dados experimentais, em  $\text{GeV}^2$ , numero de dados experimentais, N, e  $\chi^2$  por grau de liberdade.

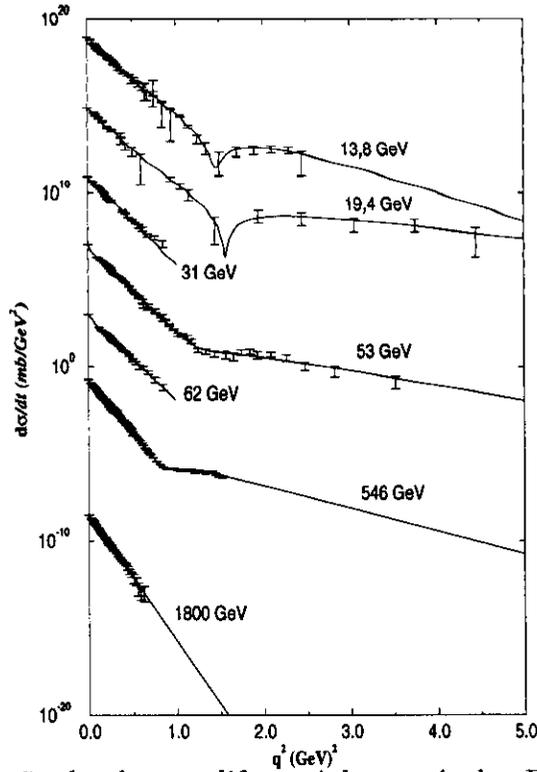


Figura 5.4: Ajustes para seção de choque diferencial através das Eqs. (5.2) e (5.2) para espalhamento  $\bar{p}p$ . Dados e curvas foram deslocados por fatores de  $10^{\pm 4}$ .

	44,7	52,8	62,5
$\alpha_1$	$-0,10906 \times 10^{-1}$	$-0,21232 \times 10^{-1}$	$-0,42807 \times 10^{-1}$
$\alpha_2$	0,62572	1,1471	2,3492
$\alpha_3$	3,6716	3,6616	0,18024
$\alpha_4$	-3,0618	-3,0702	-
$\alpha_5$	7,4322	7,0203	6,3259
$\beta_1$	0,69191	0,79827	0,94439
$\beta_2$	31,774	17,385	11,134
$\beta_3$	2,1715	2,2767	2,8318
$\beta_4$	2,0496	2,1654	-
$\beta_5$	6,0942	5,7394	5,1404
$\rho$	0,062	0,078	0,095
$t_{max}$	7,25	9,75	6,25
N	208	206	124
$\chi^2/g.l.$	2,14	1,65	1,17

Tabela 5.2: Resultados dos ajustes para interação pp e *Ensemble A*: valores dos parâmetros livres em  $\text{GeV}^{-2}$ , valor experimental de  $\rho$ , valor máximo do momento transferido com dados experimentais, em  $\text{GeV}^2$ , numero de dados experimentais, N, e  $\chi^2$  por grau de liberdade.

	19,5	23,5	30,7
$\alpha_1$	$-0,90120 \times 10^{-2}$	$-0,19349$	$-0,40438 \times 10^{-1}$
$\alpha_2$	0,23167	3,6191	3,4742
$\alpha_3$	4,1918	0,15379	-
$\alpha_4$	-3,1010	-	-
$\alpha_5$	6,6499	4,3257	4,7415
$\alpha_6$	$-0,15718 \times 10^{-4}$	$-0,91759 \times 10^{-3}$	$-0,19684 \times 10^{-2}$
$\beta_1$	0,61765	0,91118	0,97708
$\beta_2$	6,0549	8,1782	8,4240
$\beta_3$	2,3511	0,91229	-
$\beta_4$	2,1672	-	-
$\beta_5$	6,0940	4,1479	4,2748
$\beta_6$	$0,63229 \times 10^{-1}$	0,35583	0,42101
$\rho$	0,019	0,02	0,042
$t_{max}$	14,2	14,2	14,2
N	154	164	203
$\chi^2/g.l.$	2,78	1,20	1,28

Tabela 5.3: Resultados dos ajustes para interação pp e *Ensemble B*: o mesmo que a Tabela 5.1.

	44,7	52,8	62,5
$\alpha_1$	$-0,10135 \times 10^{-1}$	$-0,26831 \times 10^{-1}$	$-0,42382 \times 10^{-1}$
$\alpha_2$	0,60304	1,1976	2,0232
$\alpha_3$	3,6993	3,6524	0,34426
$\alpha_4$	-3,0393	-3,0784	$0,91094 \times 10^{-1}$
$\alpha_5$	7,4040	7,0020	6,4051
$\alpha_6$	$-0,12562 \times 10^{-3}$	$-0,16726 \times 10^{-2}$	$-0,32627 \times 10^{-2}$
$\beta_1$	0,66853	0,93688	1,0620
$\beta_2$	32,622	16,939	11,959
$\beta_3$	2,2274	2,2719	3,3522
$\beta_4$	2,0953	2,1693	3,3354
$\beta_5$	6,1354	5,7041	5,2897
$\beta_6$	0,21133	0,40614	0,46711
$\rho$	0,062	0,078	0,095
$t_{max}$	14,2	14,2	14,2
N	238	236	154
$\chi^2/g.l.$	2,14	2,07	1,50

Tabela 5.4: Resultados dos ajustes para interação pp e *Ensemble B*: o mesmo que a Tabela 5.1.

	14	19	31	52,8
$\alpha_1$	-1,4234	$-0,36273 \times 10^{-1}$	-	$-0,30380 \times 10^{-1}$
$\alpha_2$	7,2474	7,5254	-	0,91308
$\alpha_3$	2,7679	0,97947	-	3,4707
$\alpha_4$	-	-	-	-3,2138
$\alpha_5$	-	-	8,6010	7,7866
$\alpha_6$	-	-	-	-
$\beta_1$	2,0267	0,65016	-	0,98579
$\beta_2$	6,4293	6,3196	-	151,78
$\beta_3$	2,4874	2,7699	-	2,2371
$\beta_4$	-	-	-	2,2130
$\beta_5$	-	-	5,8449	5,9899
$\beta_6$	-	-	-	-
$\rho$	0,014	0,029	0,065	0,101
$t_{max}$	2,45	4,45	0,85	3,52
N	61	22	23	52
$\chi^2/g.l.$	1,00	0,57	1,53	1,85

Tabela 5.5: Resultados dos ajustes para espalhamento  $\bar{p}p$ : o mesmo que a Tabela 5.1

	62,5	546	1800
$\alpha_1$	-	-0,20380	-
$\alpha_2$	-	2,8536	-
$\alpha_3$	-	0,37053	-
$\alpha_4$	-	-	-
$\alpha_5$	7,3769	9,9527	16,602
$\alpha_6$	1,6591	-	-
$\beta_1$	-	1,5185	-
$\beta_2$	-	14,270	-
$\beta_3$	-	3,2347	-
$\beta_4$	-	-	-
$\beta_5$	5,4566	6,4702	8,3708
$\beta_6$	17,719	-	-
$\rho$	0,12	0,135	0,14
$t_{max}$	0,85	1,53	0,626
N	24	122	47
$\chi^2/g.l.$	0,72	1,02	0,92

Tabela 5.6: Resultados dos ajustes para espalhamento  $\bar{p}p$ : o mesmo que a Tabela 5.1

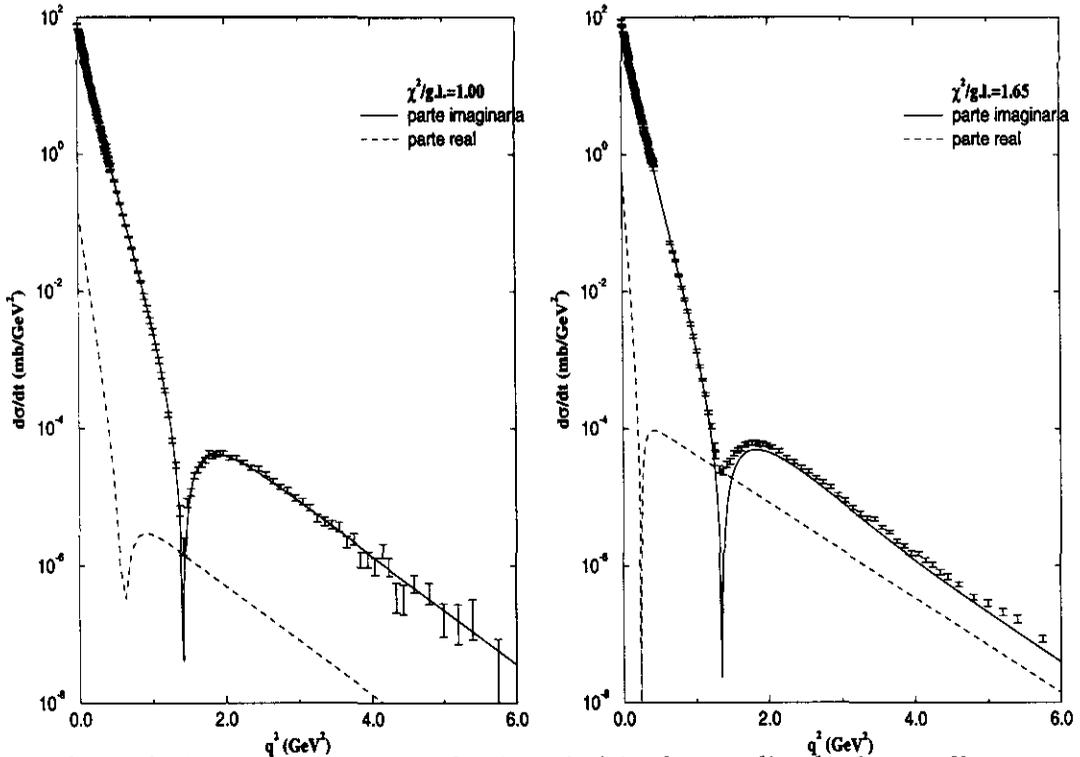


Figura 5.5: Contribuições das partes real e imaginária da amplitude de espalhamento à seção de choque diferencial para espalhamento  $pp$  no *Ensemble A*. À esquerda  $\sqrt{s} = 30,7$  GeV, à direita  $\sqrt{s} = 52,8$  GeV.

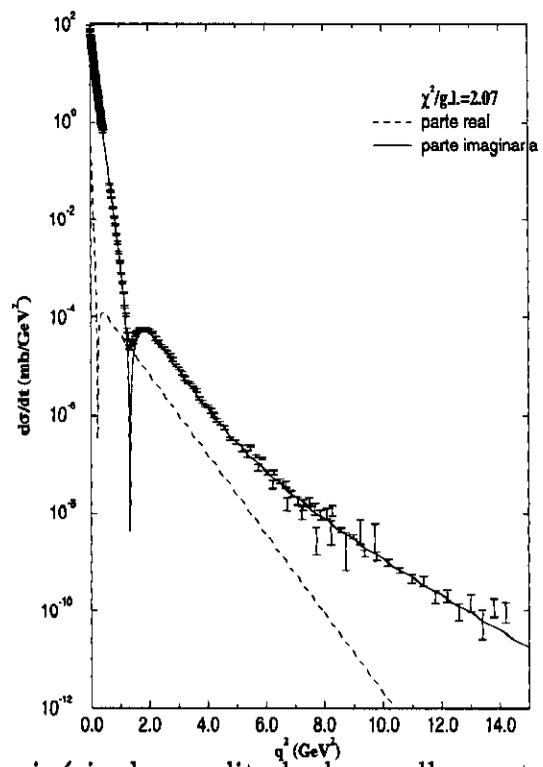
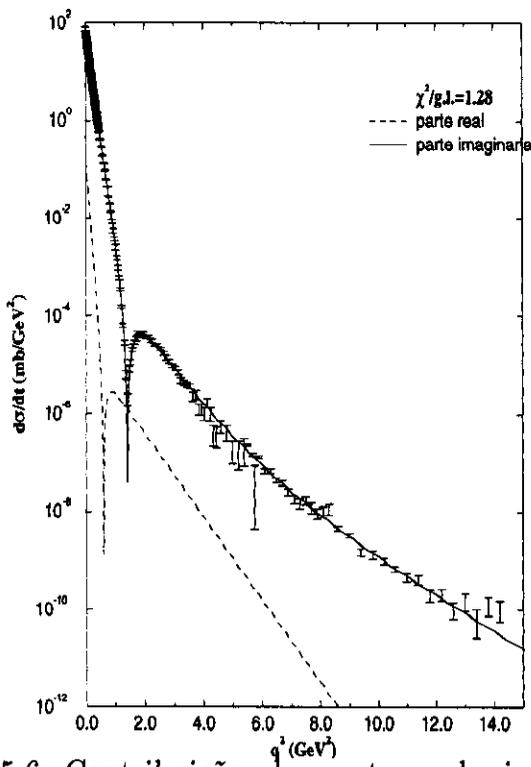


Figura 5.6: Contribuições das partes real e imaginária da amplitude de espalhamento à seção de choque diferencial para espalhamento pp no *Ensemble B*. À esquerda  $\sqrt{s} = 30,7$  GeV, à direita  $\sqrt{s} = 52,8$  GeV.

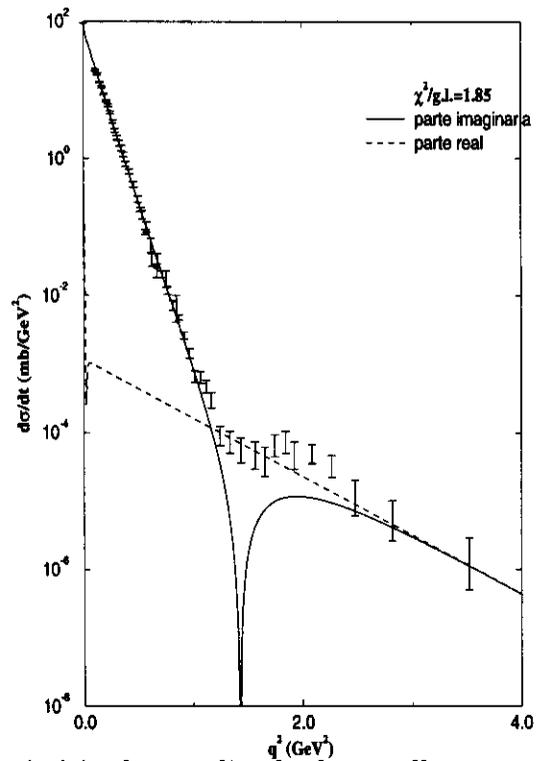
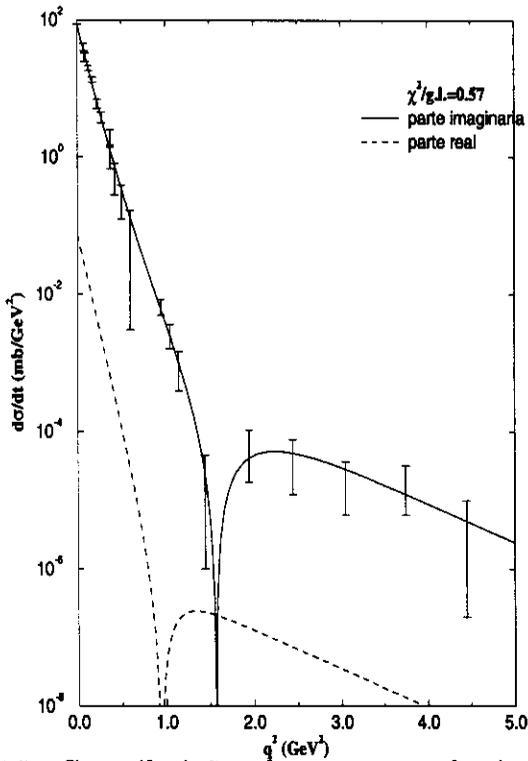


Figura 5.7: Contribuições das partes real e imaginária da amplitude de espalhamento à seção de choque diferencial para espalhamento  $\bar{p}p$ . À esquerda  $\sqrt{s} = 19,5$  GeV, à direita  $\sqrt{s} = 53$  GeV.

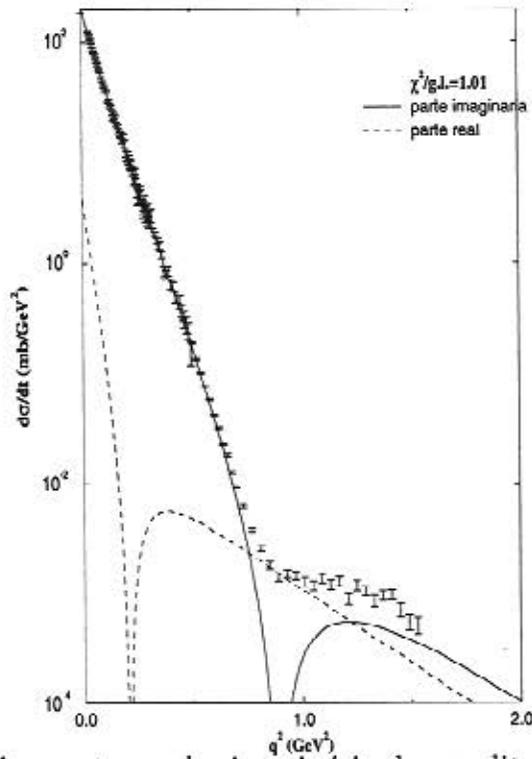


Figura 5.8: Contribuições das partes real e imaginária da amplitude de espalhamento à seção de choque diferencial para espalhamento  $\bar{p}p$  em  $\sqrt{s} = 546$  GeV.

# Capítulo 6

## Resultados

### 6.1 Função de Perfil

Através da Eq. (3.35) e da parametrização (5.2) para a amplitude, calculamos analiticamente a transformada de Fourier-Bessel inversa (simétrica), obtendo a função de Perfil em termos dos parâmetros de ajuste:

$$\Gamma(b, s) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j(s)}{\beta_j(s)} e^{-b^2/4\beta_j(s)} + \frac{i\mu}{2} \sum_{j=1}^2 \frac{\alpha_j(s)}{\beta_j(s)} e^{-b^2/4\beta_j(s)}. \quad (6.1)$$

As variâncias e covariâncias nos parâmetros nos permitiram propagar o erro até a função de Perfil. Como mostrado na Fig. (6.1) para a reação pp na energia  $\sqrt{s} = 52,8$  GeV, o módulo da parte imaginária da função de Perfil é muito menor que a parte real. Logo nos concentraremos na parte real.

Os resultados para a parte real nas energias de  $\sqrt{s} = 23,5$  e  $52,8$  GeV para espalhamento pp e  $\sqrt{s} = 53$  e  $546$  GeV para espalhamento  $\bar{p}p$  são mostrados na Fig. (6.2). Pode-se notar o crescimento da função de perfil com a energia tanto no espalhamento pp quanto no  $\bar{p}p$ . Os resultados para função de perfil podem ainda ser utilizados na comparação com modelos geométricos existentes [23].

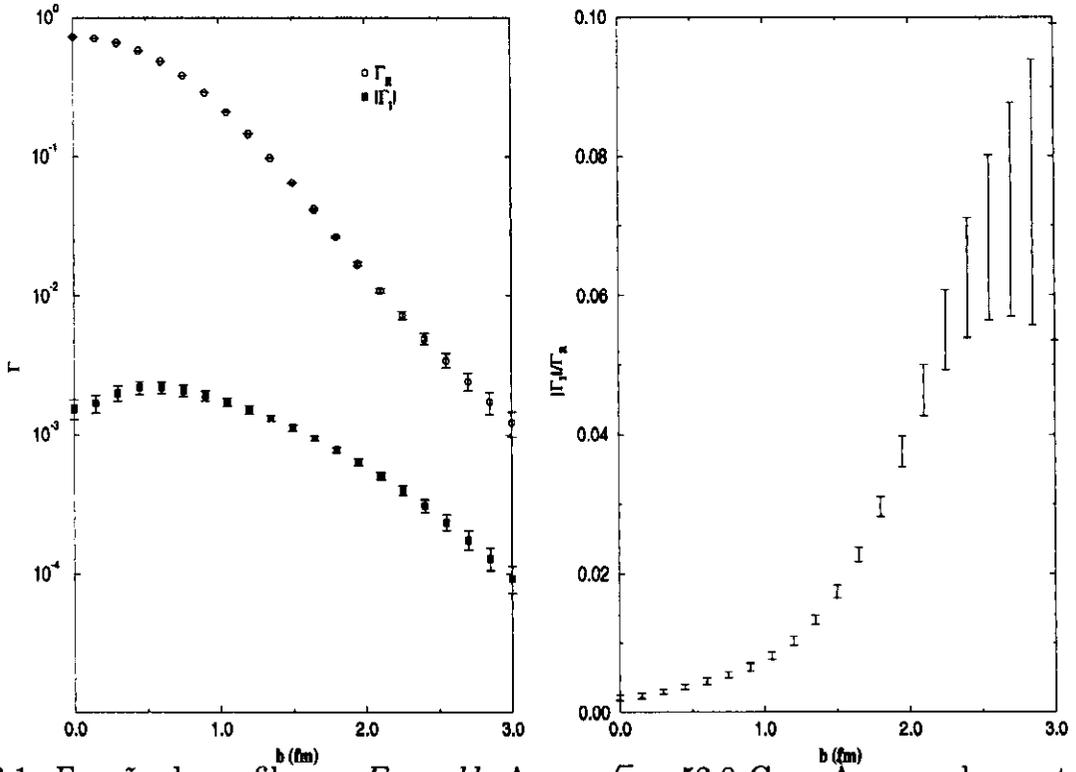


Figura 6.1: Função de perfil para *Ensemble A* em  $\sqrt{s} = 52,8$  GeV. À esquerda: partes real e imaginária. À direita: razão entre as partes real e imaginária.

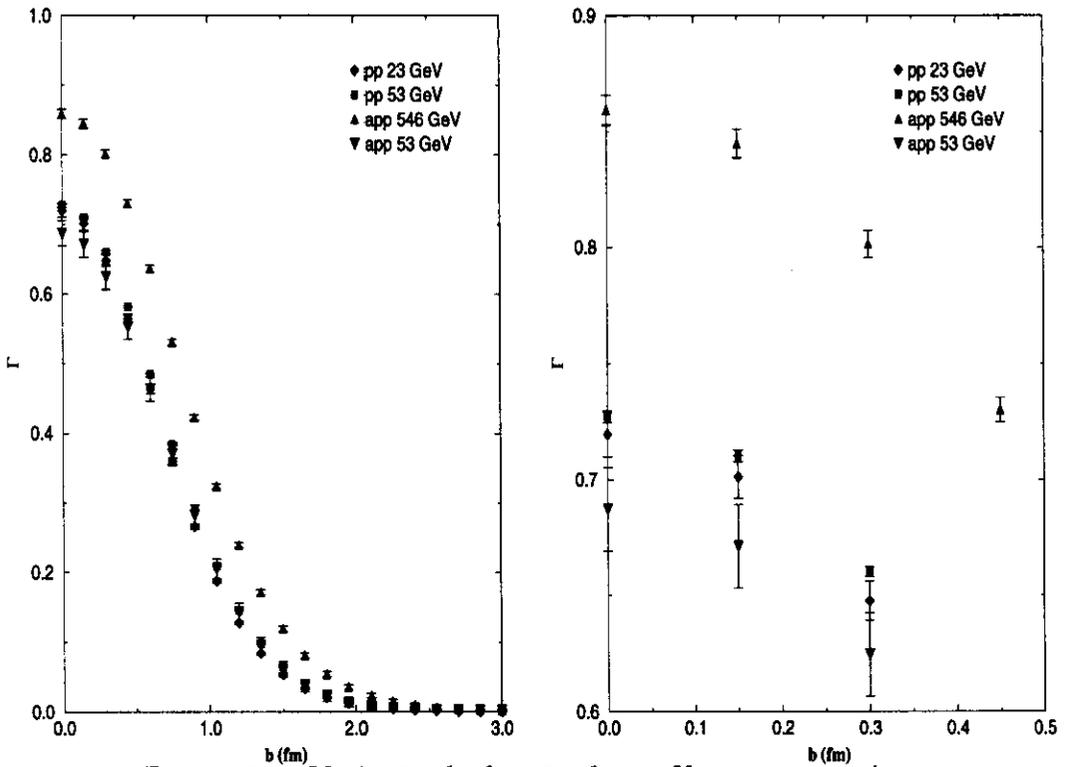


Figura 6.2: Variação da função de perfil com a energia.

## 6.2 Eiconal

### 6.2.1 Eiconal no Espaço de Parâmetro de Impacto

A eiconal complexa no espaço de parâmetro de impacto,  $\chi(b,s)$ , está conectada com a amplitude de espalhamento, Eq. (5.2), através das Eqs. (3.35) e (3.36). Da Eq. (3.36) temos

$$\chi(b,s) = -i \ln(1 - \Gamma(b,s)), \quad (6.2)$$

ou

$$\chi_R(b,s) = \arctan\left(-\frac{\Gamma_I(b,s)}{1 - \Gamma_R(b,s)}\right), \quad (6.3)$$

$$\chi_I(b,s) = -\frac{1}{2} \ln\left[(1 - \Gamma_R(b,s))^2 + \Gamma_I^2(b,s)\right].$$

Como já havíamos calculado a função de perfil através da parametrização (5.2), pudemos também calcular a eiconal, inclusive com a propagação dos erros da função de perfil. Entretanto, como mostrado na Fig. (6.3) para espalhamento pp em  $\sqrt{s} = 52,8$  GeV,  $\chi_R(b,s) \ll \chi_I(b,s)$ , logo o espalhamento elástico nessa faixa de energia é predominantemente difrativo e temos:

$$\chi_I(b,s) \approx \ln\left(\frac{1}{1 - \Gamma_R(b,s)}\right). \quad (6.4)$$

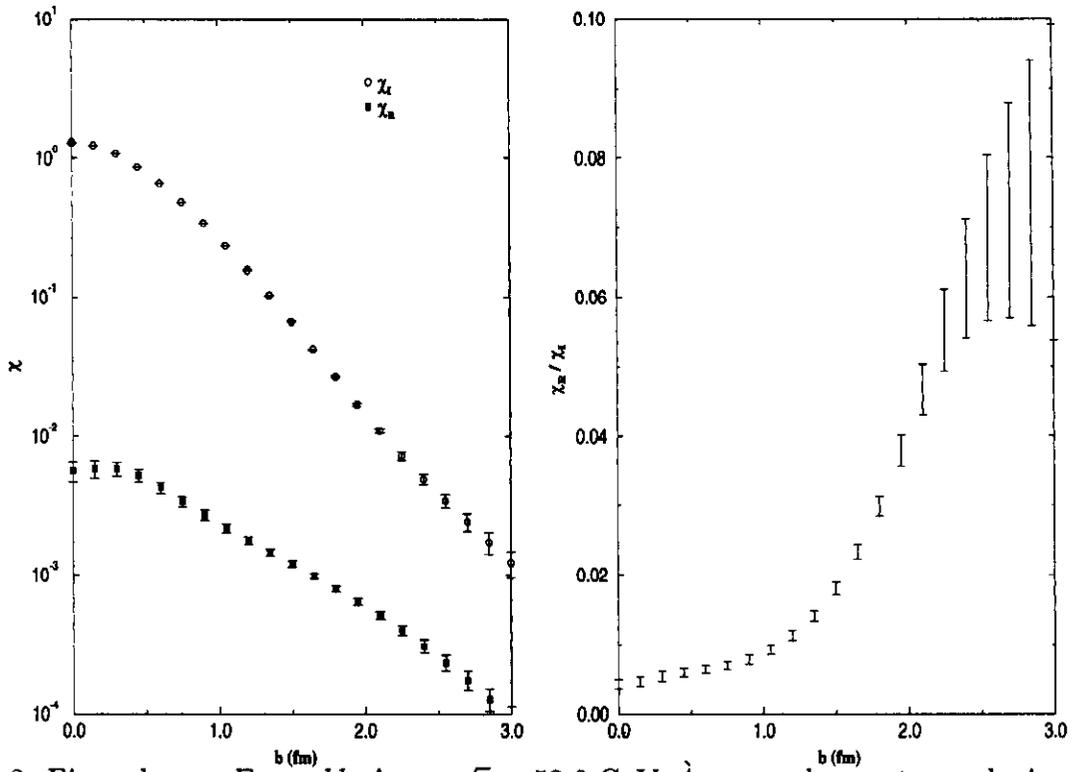


Figura 6.3: Eiconal para *Ensemble A* em  $\sqrt{s} = 52,8$  GeV. À esquerda: partes real e imaginária. À direita: razão entre as partes real e imaginária.

Os resultados de  $\chi_I(b, s)$  para as energias de  $\sqrt{s} = 23,5$  e  $52,8$  GeV para espalhamento pp e  $\sqrt{s} = 53$  e  $546$  GeV para o espalhamento  $\bar{p}p$  são mostrados na Fig. (6.4).

Da relação entre  $\chi_i(b, s)$  e  $\Gamma_R(b, s)$ , Eq. (6.4), vemos que a parte imaginária da eiconal tem o mesmo comportamento da parte real da função de perfil, já discutida anteriormente.

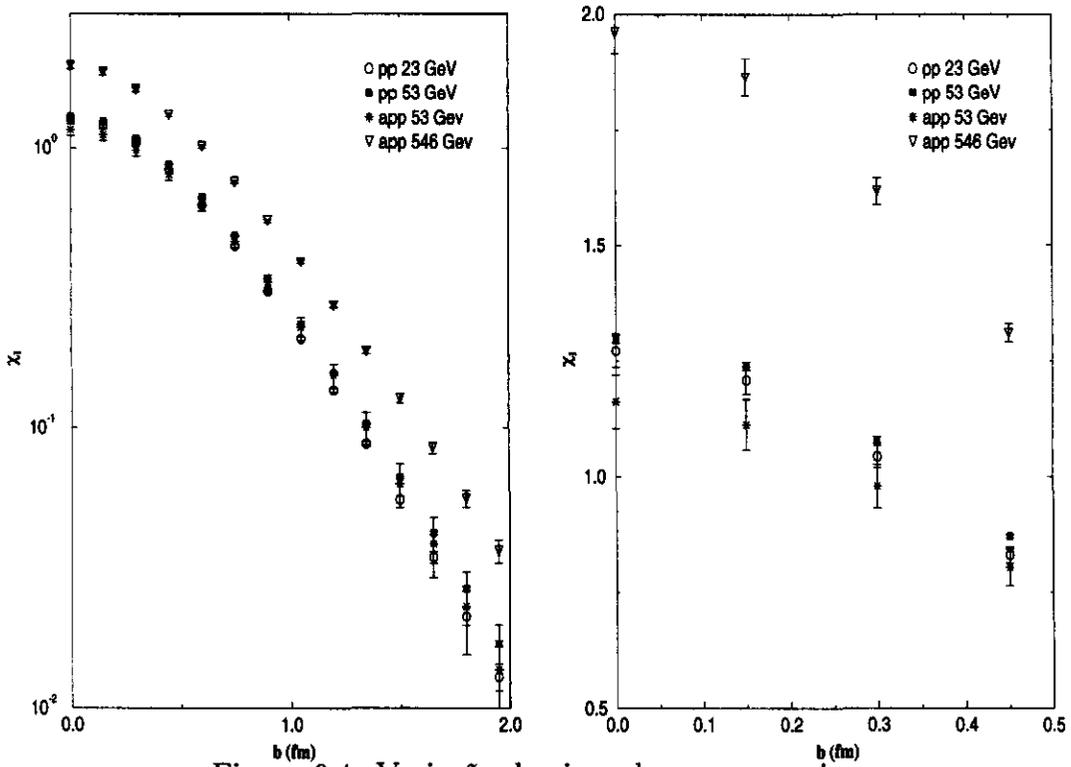


Figura 6.4: Variação da eiconal com a energia.

## 6.2.2 Eiconal no Espaço de Momento transferido

Dentro do Formalismo de Difração Múltipla a eiconal no espaço de momento transferido pode ser relacionada aos fatores de forma hadrônicos ( $G(q, s)$ ) e às amplitudes de espalhamento entre os constituintes hadrônicos da seguinte forma [33, 34, 35, 36].

$$\chi(q, s) = G_A(q, s)G_B(q, s) \sum_i^{N_A} \sum_j^{N_B} F_{ij}^{cc}(q, s), \quad (6.5)$$

onde A e B se referem aos hádrons envolvidos no espalhamento,  $N_A$ ,  $N_B$  são o número de constituintes de cada hádron,  $F_{ij}^{cc}(q, s)$  é a amplitude de espalhamento entre os constituintes  $i$  e  $j$  normalizada ( $F_{ij}^{cc}(q, s) = f_{ij}^{cc}(q, s)/k$ ) e

$$G_{A,B}(q, s) = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho_{A,B}(\mathbf{r}, s) d^3r. \quad (6.6)$$

Por isso informações empíricas da eiconal no espaço de momento transferido podem fornecer dados importantes para a seleção de parametrizações de fatores de forma e/ou amplitudes elementares.

A eiconal no espaço de momento transferido é a transformada de Fourier-Bessel da eiconal no espaço de parâmetro de impacto,

$$\chi(q, s) = \langle \chi(b, s) \rangle = \int b db J_0(qb) \chi(b, s), \quad (6.7)$$

onde o símbolo  $\langle \rangle$  denota uma transformada de Fourier-Bessel. Nesta seção estamos interessados apenas na parte imaginária da eiconal,  $\chi_I$ , que no espaço de parâmetro de impacto é dada pela Eq. (6.4).

Devemos portanto calcular a parte imaginária da eiconal no espaço de momento transferido,  $\chi_I(q, s)$ , Eq. (6.7), e os erros,  $\Delta\chi_I(q, s)$ . Entretanto devido a estrutura de nossa parametrização (5.2), a transformada (6.7) não pode ser feita analiticamente e portanto os erros não podem ser estimados como feito nos passos anteriores.

No interesse de avaliar os erros  $\Delta\chi_I(q, s)$  introduzimos a seguinte abordagem, a qual nos referiremos como “método de ajuste”. Genericamente pode-se expandir Eq. (6.4) colocando-a na forma [24, 26]

$$\chi_I(b, s) = \Gamma_R(b, s) + D(b, s), \quad (6.8)$$

onde  $D(b, s)$  corresponde ao restante da série. Realizando a transformada de Fourier-Bessel obtemos:

$$\chi_I(q, s) = F_I(q, s) + D(q, s). \quad (6.9)$$

Já que a amplitude  $F_I(q, s)$  e os erros  $\Delta F_I(q, s)$  são diretamente dados pelos ajustes, nosso desafio consiste no cálculo de

$$D(q, s) = \langle D(b, s) \rangle, \quad (6.10)$$

com os correspondentes erros,  $\Delta D(b, s)$ , e este é o ponto central do método.

Primeiramente, das Eqs. (6.4) e (6.8), a quantidade  $D(b, s)$  pode ser calculada

$$D(b, s) = \ln \frac{1}{1 - \Gamma_R(b, s)} - \Gamma_R(b, s), \quad (6.11)$$

juntamente com os erros,  $\Delta D(b, s)$ , através da propagação de erros de  $\Delta\Gamma_R(b, s)$ . Então, fazendo uso do programa CERN-minuit [30], este conjunto de pontos com erros,  $D(b, s) \pm \Delta D(b, s)$ , foi ajustado por uma soma de Gaussianas,

$$D(b, s) = \sum_{j=1}^{12} A_j(s) e^{-B_j(s)b^2}. \quad (6.12)$$

Com esta parametrização,  $D(q, s)$ , na Eq. (6.10), pode ser analiticamente calculado e também os erros,  $\Delta D(q, s)$ , podem ser estimados através da propagação das variâncias e covariâncias em  $A_j(s)$  e  $B_j(s)$  [31, 32], fornecidas pelo programa. Por último a Eq. (6.9) fornece  $\chi_I(q, s)$  e a propagação de erros fornece  $\Delta\chi_I(q, s)$ .

Este método foi usado por C. Furget para determinar a eiconal  $\chi_I(q, s)$  [37]. Um novo aspecto de nossa abordagem é usá-lo na estimação dos erros.

No interesse de comparar alguns resultados preditos pelo “método de ajuste” com outros obtidos por outro tipo de abordagem, nós realizamos também a integração numérica da Eq. (6.4) através da rotina NAG [38]. Neste caso, entretanto, nós não levamos em conta a propagação de erros.

Supondo-se que os fatores de forma, Eq. (6.6), não possuam zeros, os zeros da eiconal, caso existam, só podem provir de zeros na amplitude de espalhamento. Portanto os zeros aqui obtidos empiricamente são importantes fontes para comparações com modelos baseados em CDQ-não perturbativa [39] e calculos na rede [40, 41], comparação esta que foi feita por Martini, Menon e Thober [42].

Como estamos interessados em investigar a existência de zeros em  $\chi_I(q, s)$ , para maior clareza calculamos a quantidade  $\chi_I(q, s)$  multiplicada por  $q^8$ ,  $q^2 = -t$ . Os resultados são

mostrados nas Figs. (6.5) e (6.6) para o espalhamento pp (*Ensembles* A e B respectivamente) e nas Figs. (6.7), (6.8) e (6.9) para espalhamento  $\bar{p}p$  em  $\sqrt{s} = 19,5; 53$  e  $546$  GeV, respectivamente.

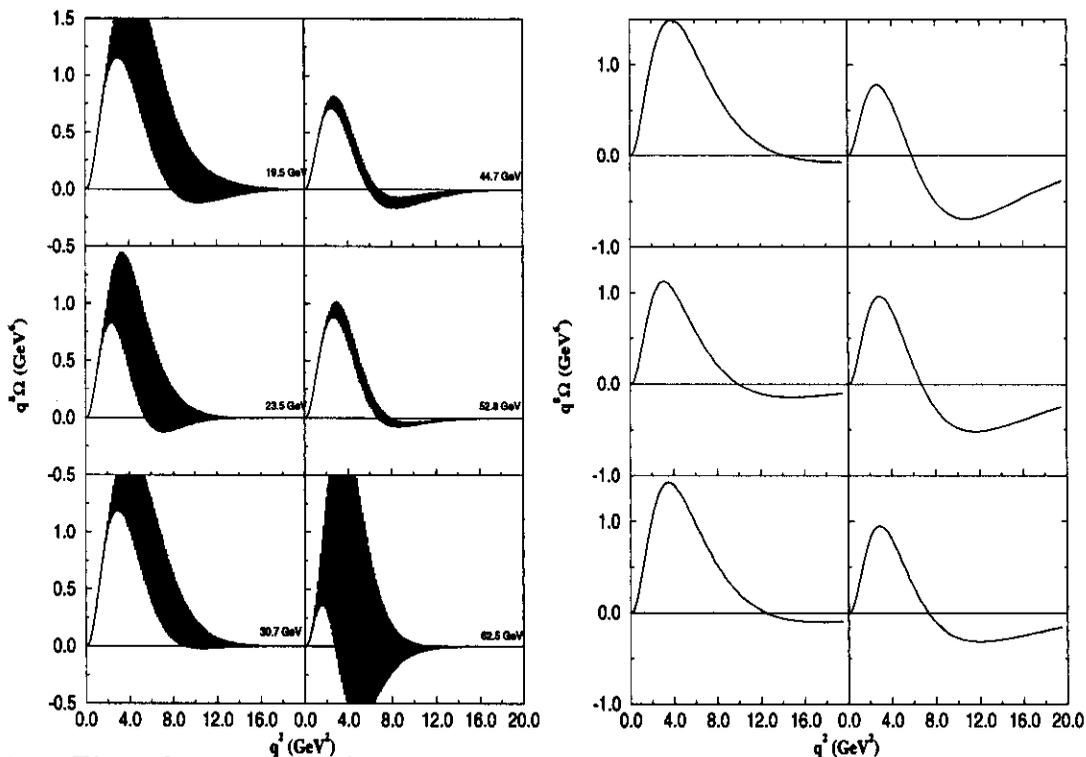


Figura 6.5: Eiconal no espaço de momento transferido para espalhamento pp, *Ensemble* A, multiplicada pelo fator  $q^8$ . À esquerda: método de ajuste. À direita: método numérico.

Note que para o *Ensemble* A, no método de ajuste, apenas as energias  $\sqrt{s} = 44,7$  e  $52,8$  GeV apresentam, estatisticamente, um zero na eiconal. A energia  $\sqrt{s} = 62,5$  GeV, por exemplo, apresenta um zero, entretanto, como as barras de erro cruzam o eixo das energias, este zero pode não existir. Já o *Ensemble* B apresenta zeros, com certeza, em todas as energias. Isto nos diz que, se a seção de choque diferencial elástica realmente se comporta como os dados em  $\sqrt{s} = 27,5$  GeV, então a eiconal no espaço de momento transferido, na faixa de energia  $19,5 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 62,5 \text{ GeV}$ , possui zeros.

Agora no método de integração numérica aparecem zeros em todas as energias, em ambos os *Ensembles* (entretanto no *Ensemble* B a eiconal tem um mínimo mais pronunciado). Essa diferença entre os métodos para grande momento transferido se deve ao fato de  $D(b,s)$  ter erros maiores em pequeno parâmetro de impacto. Ou seja, no ajuste o programa de minimização dá menos importância aos pontos de  $D(b,s)$  na região de pequeno  $b$ , ajustando melhor os pontos em grande  $b$ . Como numa transformada de Fourier-Bessel a região de grande  $q$  é mais sensível à de pequeno  $b$  temos uma estimativa pior para  $\chi_I(q,s)$  em grande  $q$  pelo método de ajuste. O método de integração numérica é portanto mais preciso, entretanto este não fornece nenhuma estimativa do erro. Note que para o *Ensemble* B a diferença entre os métodos de ajuste e numérico é um erro sistemático. Isso acontece porque como no *Ensemble* B a seção de choque diferencial a grande  $q$  é a mesma para todas as energias, a função de perfil a pequeno  $b$  será também, praticamente, a mesma para todas as energias. Portanto a contribuição da região de pequeno  $b$  à região do zero de  $\Omega(q,s)$  é a mesma para todas as energias. Como a diferença entre os métodos está na região de pequeno  $b$ , esta será a mesma para todas as energias.

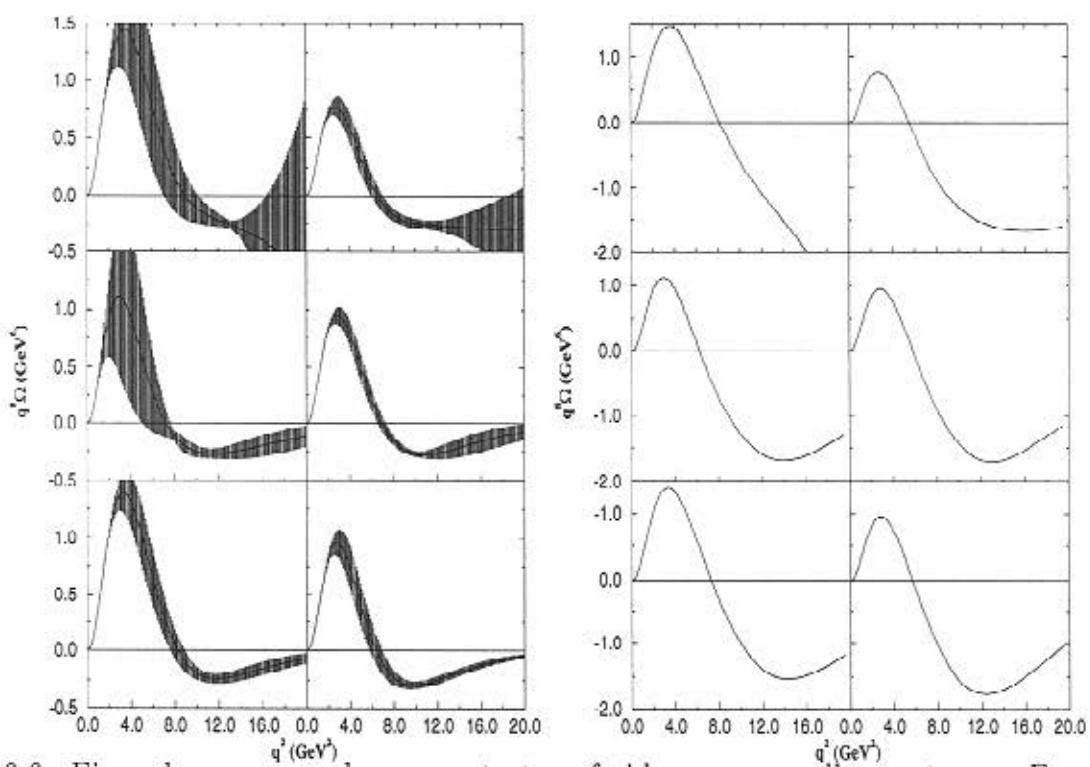


Figura 6.6: Eiconal no espaço de momento transferido, para espalhamento  $pp$ , *Ensemble B*, multiplicada pelo fator  $q^8$ . À esquerda: método de ajuste. À direita: método numérico.

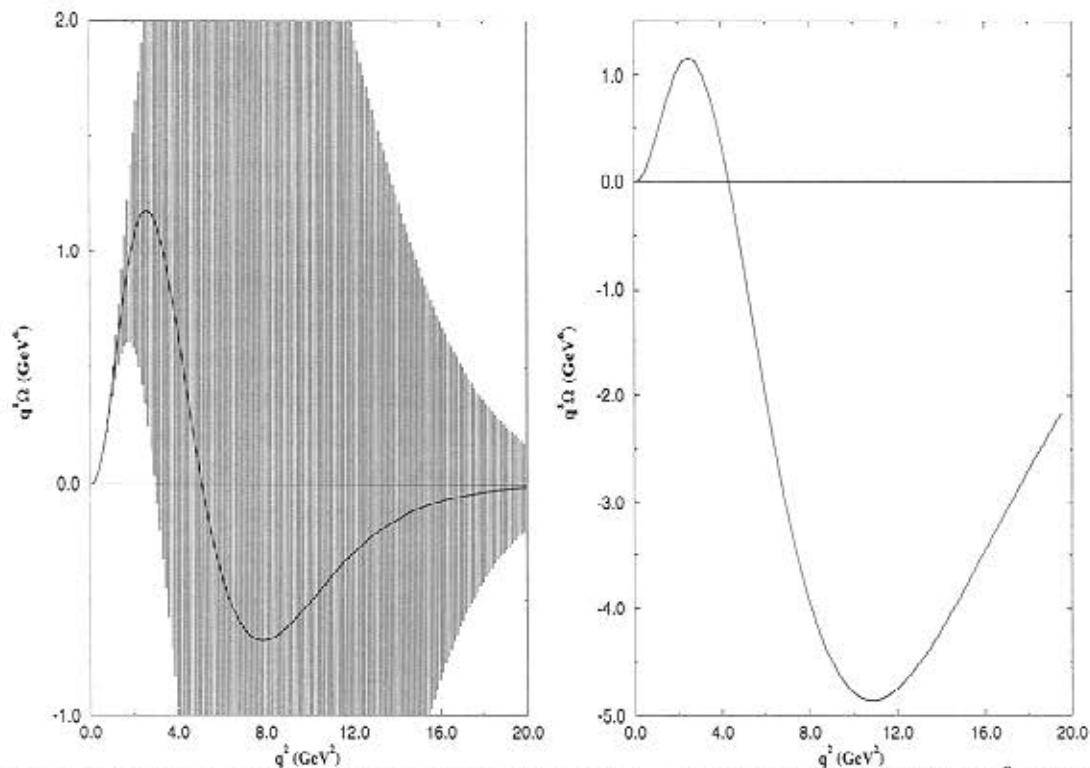


Figura 6.7: Eiconal no espaço de momento transferido, multiplicada pelo fator  $q^8$  para o espalhamento  $\bar{p}p$  em  $\sqrt{s} = 19,5$  GeV. À esquerda: método de ajuste. À direita: método numérico.

Para o espalhamento  $\bar{p}p$  só encontramos zeros, tanto pelo método de ajuste quanto pelo numérico, nas energias  $\sqrt{s} = 19,5$  e  $53$  GeV. Entretanto não podemos garantir a existência de nenhum desses dois zeros, já que as barras de erro cruzam o eixo das energias.

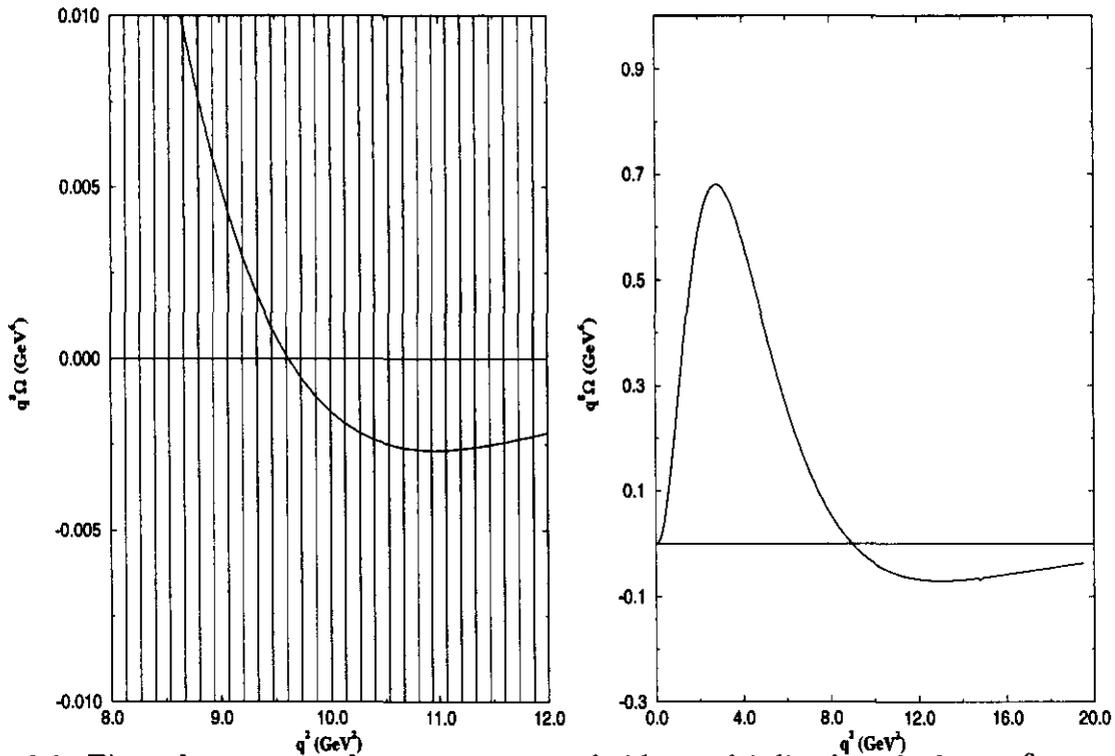


Figura 6.8: Eiconal no espaço de momento transferido, multiplicada pelo fator  $q^8$  para o espalhamento  $\bar{p}p$  em  $\sqrt{s} = 53$  GeV. À esquerda: método de ajuste. À direita: método numérico.

Note que as energias nas quais encontramos zeros, tanto para espalhamento  $\bar{p}p$  quanto para espalhamento  $pp$  no *Ensemble A*, são exatamente aquelas em que os dados de seção de choque diferencial elástica vão mais longe em momento transferido. Isso confirma que o comportamento a grande  $q$  da seção de choque diferencial elástica influencia bastante a eiconal a grande  $q$  e, portanto, a existência, ou não, de zeros na mesma.

No caso do espalhamento  $pp$ , a partir das Figs. (6.5) e (6.6) podemos determinar as posições dos zeros em função da energia, levando-se em conta os erros no caso do método de ajuste. Os resultados são mostrados na Fig. (6.10). Sendo o *Ensemble B* o mais significativo do ponto de vista estatístico, a Fig. (6.10) (à direita) sugere uma diminuição na posição do zero com o aumento da energia, na região estudada [26].

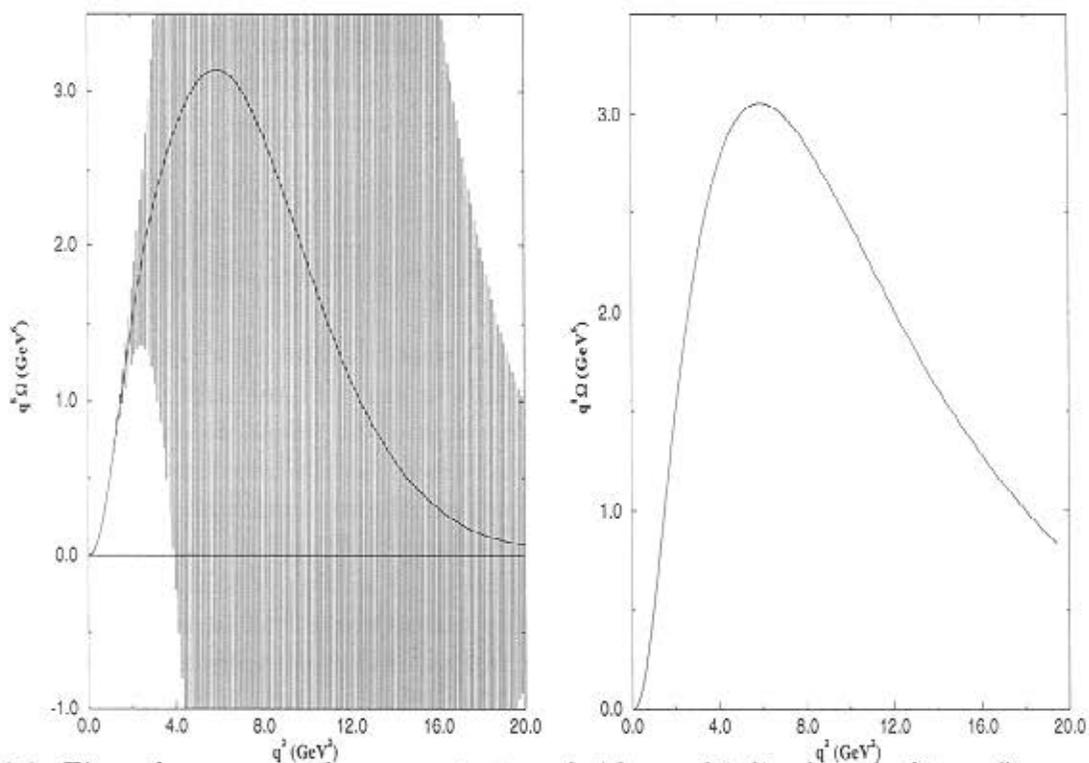


Figura 6.9: Eiconal no espaço de momento transferido, multiplicada pelo fator  $q^8$  para o espalhamento  $\bar{p}p$  em  $\sqrt{s} = 546 \text{ GeV}$ . À esquerda: método de ajuste. À direita: método numérico.

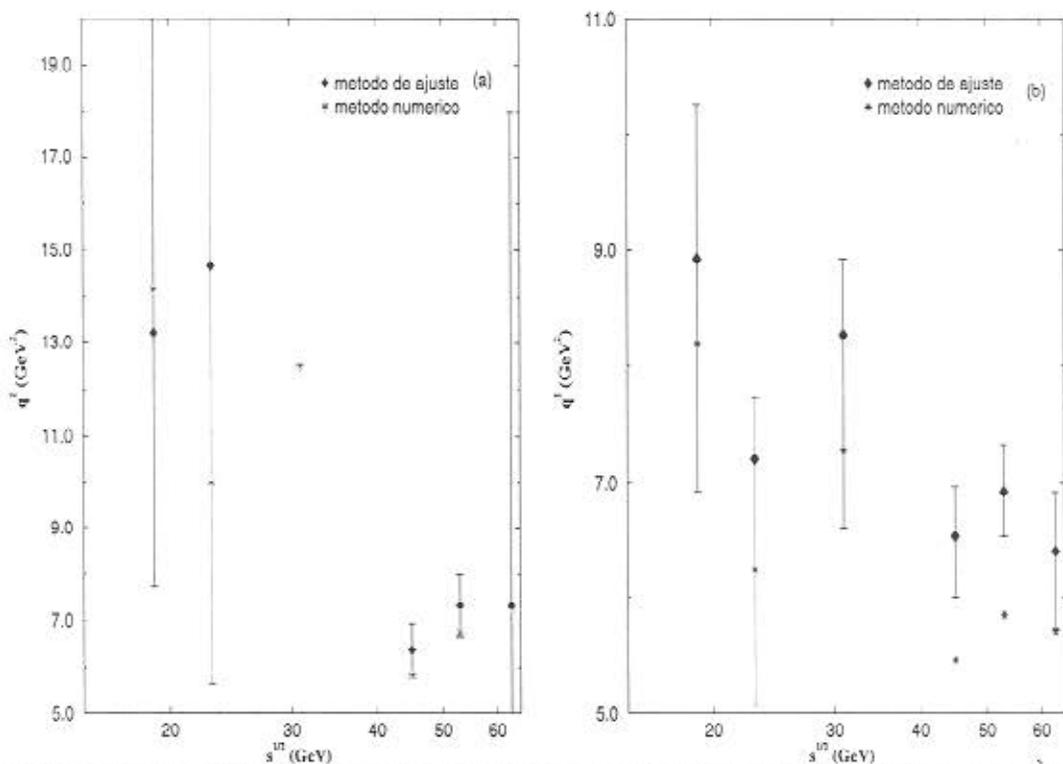


Figura 6.10: Variação dos zeros da eiconal com a energia para o espalhamento  $pp$ . À esquerda: *Ensemble A*. À direita: *Ensemble B*

A eiconal em  $q = 0$  é importante porque, através do teorema ótico, podemos conectá-la à seção de choque total constituinte-constituente. Como os fatores de forma são normalizados,  $G_{A,B}(0, s) = 1$  e supondo-se a mesma amplitude para todos os constituintes,

$$\sigma_t^{cc} = \frac{4\pi\chi_I(0, s)}{N_A N_B}. \quad (6.13)$$

Na Fig. (6.11) mostramos a variação da eiconal, em momento transferido nulo,  $\chi_I(0, s)$ , com a energia.

Usando os princípios de analiticidade da amplitude (apêndice B), unitaridade e cruzamento [48, 49], Carvalho, Martini, Menon e Motter utilizaram os dados da Fig. (6.11) obtendo parametrizações para as seções de choque entre constituintes em função da energia [28]. Essas informações estão sendo utilizadas na extensão de um modelo de difração múltipla, modelo de Martini-Menon [43], do espalhamento pp para o espalhamento  $\bar{p}p$ .

Além disso, através da Eq. (6.5) pode-se utilizar diferentes parametrizações para os fatores de forma e a informação empírica da eiconal de modo a se determinar quantitativamente as amplitudes elementares. Extrações dessas amplitudes para o espalhamento pp em  $\sqrt{s} = 23,5$  e  $62,5$  GeV foram recentemente realizadas por Carvalho, Martini e Menon [29].

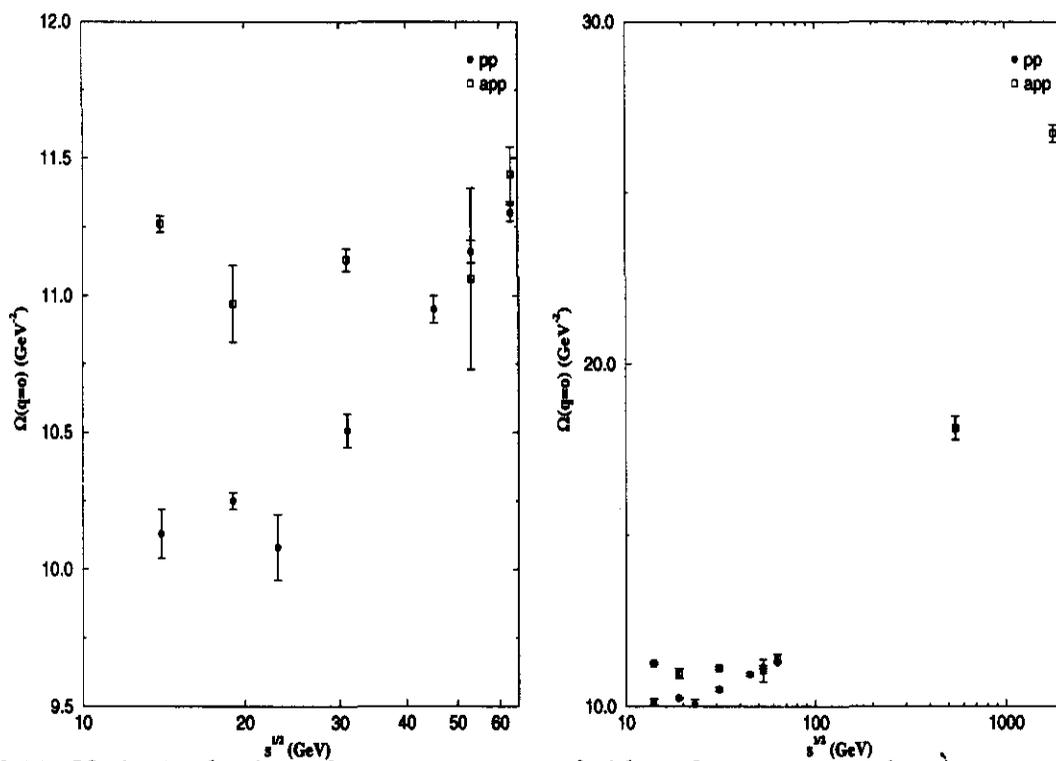


Figura 6.11: Variação da eiconal a momento transferido nulo com a energia. À esquerda: região do ISR. À direita: toda a faixa de energia estudada.

Os principais resultados quantitativos desta seção são apresentados nas Tabelas (6.1), (6.2), (6.3), (6.4), (6.5), (6.6), (6.7) e (6.8).

$\sqrt{s}$	<i>Ensemble A</i>	<i>Ensemble B</i>
13,8	não tem	-
19,5	$13,20^{+\infty}_{-5,47}$	$8,93^{+1,34}_{-2,00}$
23,5	$14,67^{+\infty}_{-9,00}$	$7,20^{+0,53}_{-2,13}$
30,7	não tem	$8,27^{+0,66}_{-1,67}$
44,7	$6,40 \pm 0,53$	$6,53^{+0,44}_{-0,53}$
52,8	$7,33 \pm 0,67$	$6,93 \pm 0,40$
62,5	$7,33^{+10,7}_{-4,4}$	$6,40^{+0,53}_{-0,69}$

Tabela 6.1: Posição dos zeros da eiconal (com erros), em  $\text{GeV}^2$ , para o espalhamento pp, ambos os *Ensembles*, pelo método de ajuste, para cada uma das energias, em GeV, estudadas.

$\sqrt{s}$	<i>Ensemble A</i>	<i>Ensemble B</i>
13,8	não tem	-
19,5	14,17	8,19
23,5	10,01	6,24
30,7	12,48	7,28
44,7	5,85	5,46
52,8	6,76	5,85
62,5	7,28	5,72

Tabela 6.2: Posição dos zeros da eiconal, em  $\text{GeV}^2$ , para o espalhamento pp, ambos os *Ensembles*, pelo método numérico, para cada uma das energias, em GeV, estudadas.

$\sqrt{s}$
19,5
53

Tabela 6.3: Posição dos zeros da eiconal (com erros), em  $\text{GeV}^2$ , para o espalhamento  $\bar{p}p$ , pelo método de ajuste, para as energias, em GeV, onde existem zeros.

$\sqrt{s}$
19,5
53

Tabela 6.4: Posição dos zeros da eiconal, em  $\text{GeV}^2$ , para o espalhamento  $\bar{p}p$ , pelo método numérico, para as energias, em GeV, onde existem zeros.

$\sqrt{s}$	<i>Ensemble A</i>	<i>Ensemble B</i>
13,8	$10,13 \pm 0,09$	-
19,5	$10,25 \pm 0,03$	$10,25 \pm 0,03$
23,5	$10,08 \pm 0,12$	$10,07 \pm 0,22$
30,7	$10,51 \pm 0,06$	$10,51 \pm 0,01$
44,7	$10,95 \pm 0,05$	$10,94 \pm 0,05$
52,8	$11,16 \pm 0,04$	$11,16 \pm 0,03$
62,5	$11,29 \pm 0,12$	$11,30 \pm 0,03$

Tabela 6.5: Eiconal a momento transferido nulo (com erros), em  $\text{GeV}^{-2}$ , para o espalhamento pp, ambos os *Ensembles*, pelo método de ajuste, para cada uma das energias, em GeV, estudadas.

$\sqrt{s}$	<i>Ensemble A</i>	<i>Ensemble B</i>
13,8	10,13	-
19,5	10,25	10,25
23,5	10,08	10,07
30,7	10,51	10,51
44,7	10,94	10,94
52,8	11,16	11,16
62,5	11,29	11,30

Tabela 6.6: Eiconal a momento transferido nulo, em  $\text{GeV}^{-2}$ , para o espalhamento pp, ambos os *Ensembles*, pelo método numérico, para cada uma das energias, em GeV, estudadas.

$\sqrt{s}$	
13,8	$11,26 \pm 0,03$
19,5	$10,97 \pm 0,14$
31	$11,13 \pm 0,04$
53	$11,06 \pm 0,33$
62	$11,01 \pm 0,48$
546	$18,12 \pm 0,34$
1800	$26,73 \pm 0,25$

Tabela 6.7: Eiconal a momento transferido nulo (com erros), em  $\text{GeV}^{-2}$ , para o espalhamento  $\bar{p}p$ , pelo método de ajuste, para cada uma das energias, em GeV, estudadas.

$\sqrt{s}$	
13,8	11,26
19,5	10,97
23,5	11,13
30,7	11,05
44,7	11,44
52,8	18,13
62,5	26,73

Tabela 6.8: Eiconal a momento transferido nulo, em  $\text{GeV}^{-2}$ , para o espalhamento  $\bar{p}p$ , pelo método numérico, para cada uma das energias, em GeV, estudadas.

### 6.3 Função de Recobrimento Inelástico

Por ser a função de recobrimento inelástico ( $G_{inel}(b, s)$ ) normalizada esta possui, talvez, uma análise física, na analogia ótica, mais direta que a parte imaginária da eiconal (seção 3.5). De sua relação com a parte imaginária da eiconal, Eq. (3.90), podemos calculá-la, inclusive com os erros devido à propagação dos erros da parte imaginária da eiconal, ou ainda podemos calculá-la a partir da função de perfil, através da relação:

$$G_{inel}(b, s) = 2\Gamma_R(b, s) - |\Gamma(b, s)|^2 \quad (6.14)$$

Os resultados nas energias  $\sqrt{s} = 23, 53 \text{ GeV}$  para espalhamento  $pp$  e  $\sqrt{s} = 53, 546 \text{ GeV}$  para espalhamento  $\bar{p}p$  são mostrados na Fig. (6.12). Já na Fig. (6.13) mostramos a variação com a energia de  $G_{inel}(b, s)$  em quatro diferentes valores de parâmetro de impacto.

$G_{inel}(b, s)$ ,  $\chi_I(b, s)$  e  $\Gamma_R(b, s)$  são funções conectadas através das Eqs. (3.90) e (3.36), portanto  $G_{inel}(b, s)$  tem o mesmo comportamento de  $\Gamma_R(b, s)$ . Note que enquanto a opacidade central ( $G_{inel}(0, s)$ ) parece ser constante para espalhamento  $pp$  entre  $20 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 60 \text{ GeV}$ , esta parece decrescer para espalhamento  $\bar{p}p$  na mesma faixa de energia, voltando a crescer em  $\sqrt{s} = 546 \text{ GeV}$ . Já periféricamente a opacidade parece permanecer constante, ou crescer muito lentamente, para o espalhamento  $\bar{p}p$ , entre  $20 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 60 \text{ GeV}$ , voltando a crescer em  $\sqrt{s} = 546 \text{ GeV}$ , enquanto para o espalhamento  $pp$  ela parece crescer bem mais rapidamente.

Resumindo, a Fig. (6.13) sugere que, dentro da analogia ótica:

- Espalhamento  $\bar{p}p$

O disco “clareia” centralmente e permanece com “raio” constante entre  $20 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 60 \text{ GeV}$  e depois começa a “escurecer” centralmente e crescer periféricamente (aumentar o raio) até atingir a energia  $\sqrt{s} = 546 \text{ GeV}$ ,

- Espalhamento  $pp$

O disco conserva a opacidade central e cresce periféricamente entre  $20 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 60 \text{ GeV}$ .

Caso  $G_{inel}(b, s)$  para os espalhamentos  $pp$  e  $\bar{p}p$  se igualarem assintoticamente, então as seções de choque total também deverão se igualar assintoticamente, caso contrário estas poderão se cruzar.

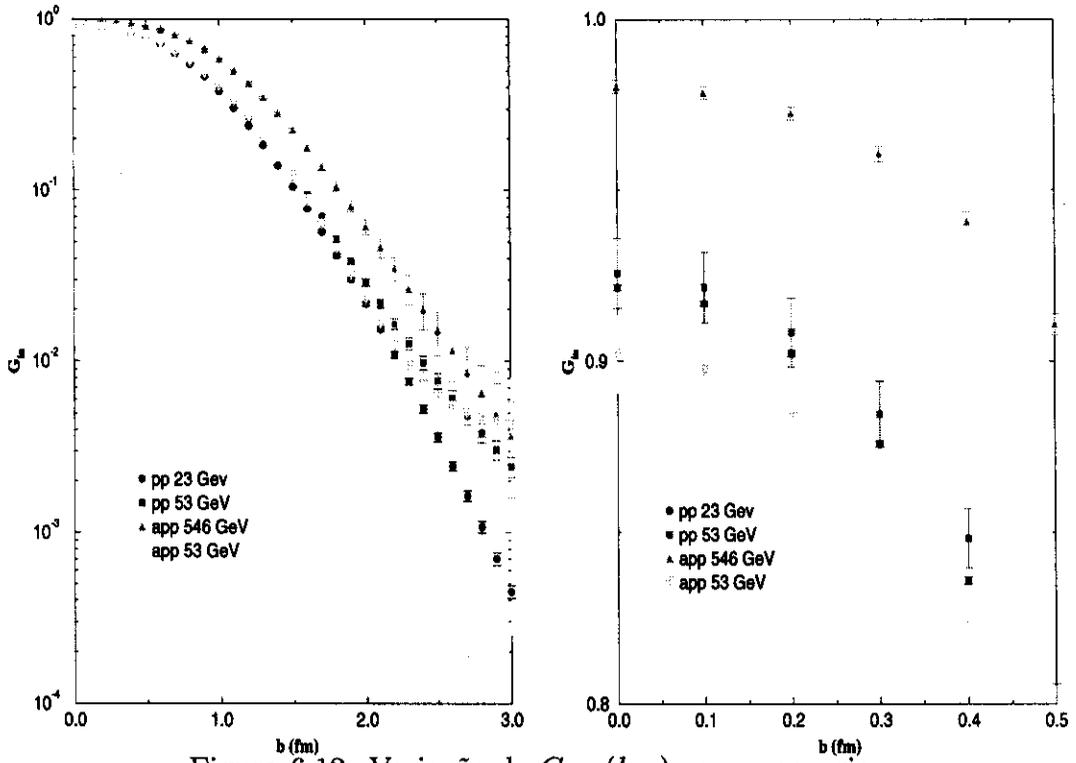


Figura 6.12: Variação de  $G_{inel}(b, s)$  com a energia.

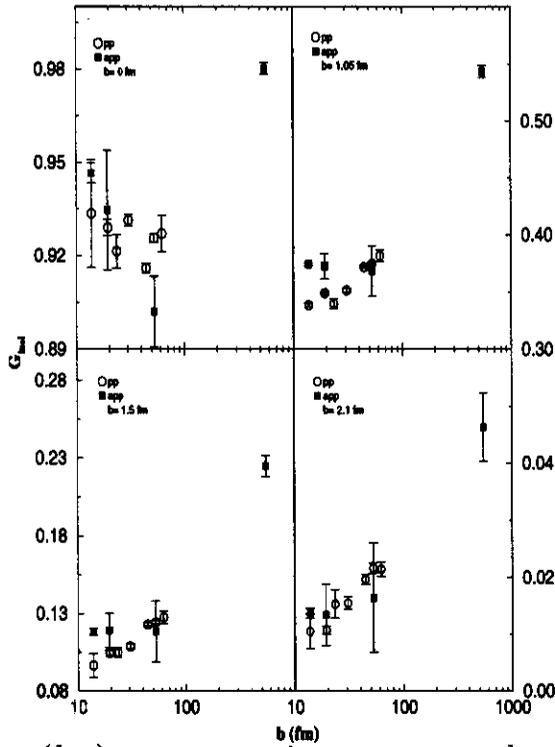


Figura 6.13: Variação de  $G_{inel}(b, s)$  com a energia em quatro valores diferentes do parâmetro de impacto.

## 6.4 Análise da Validade da Primeira Aproximação de Born

Na seção 3.4 mostramos que se o potencial for suficientemente fraco

$$\Gamma(b) \approx -i\chi(b) \quad (6.15)$$

ou

$$\Gamma_R(b) \approx \chi_I(b) \quad (6.16)$$

. Mas na seção 6.2.2 fizemos

$$\chi_I(b, s) = \Gamma_R(b, s) + D(b, s). \quad (6.17)$$

Assim podemos avaliar a primeira aproximação de Born calculando  $D(b, s)/\chi_I(b, s)$ . Na Fig. (6.14) mostramos essa razão para o espalhamento pp na energia  $\sqrt{s} = 52,8$  GeV e para o espalhamento  $\bar{p}p$  na energia  $\sqrt{s} = 546$  GeV.

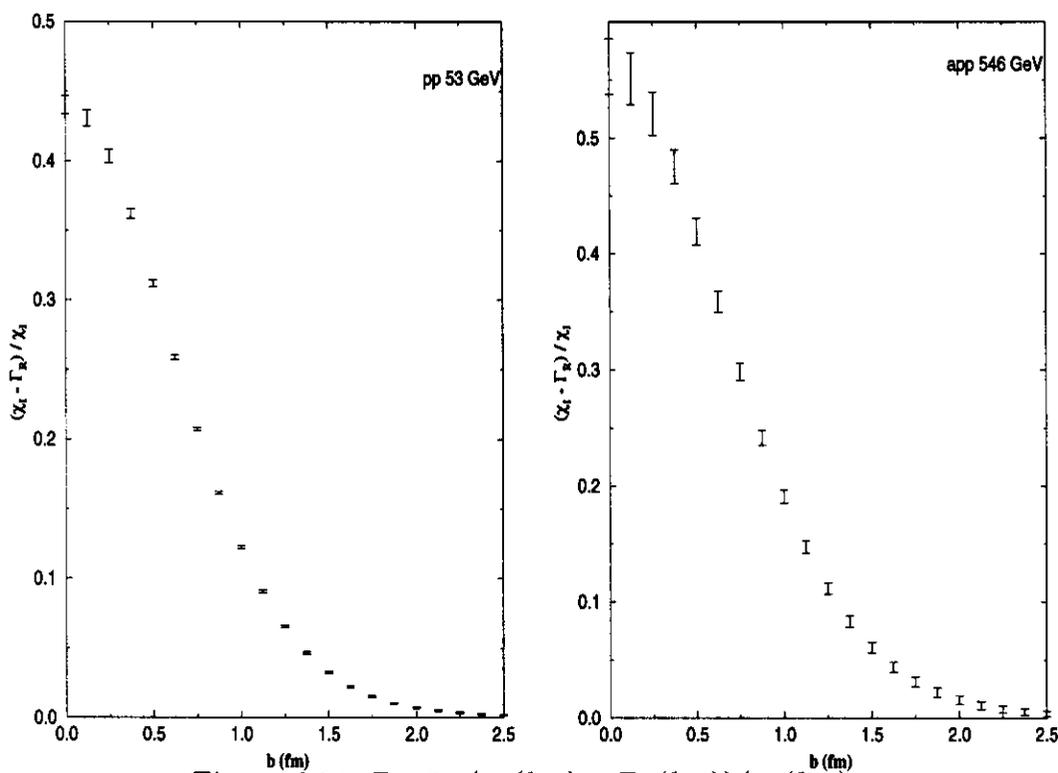


Figura 6.14: Razão  $(\chi_I(b, s) - \Gamma_R(b, s))/\chi_I(b, s)$ .

Notamos que a razão  $D(b, s)/\chi_I(b, s)$  não é desprezível, ao contrário, ela representa 44 % da eiconal em  $b=0$  para o espalhamento pp a  $\sqrt{s} = 52,8$  GeV e 56 % para o espalhamento  $\bar{p}p$  a  $\sqrt{s} = 546$  GeV. Logo a primeira aproximação de Born é *grosseira* neste caso. Como discutido na seção 3.4 a primeira aproximação de Born é válida para potenciais fracos. Do resultado aqui mostrado concluímos que a interação hadrônica, ou interação *forte*, como o próprio nome diz *não é fraca*.

Entretanto como o potencial é de curto alcance, ele é *fraco* a grandes distâncias, portanto a razão  $D(b, s)/\chi_I(b, s)$  vai a zero para grande  $b$ , como podemos ver na Fig. (6.14).

# Capítulo 7

## Conclusões e Observações Finais

O objetivo geral desse projeto foi o estudo de características das interações hadrônicas a altas energias num contexto puramente fenomenológico, a partir do formalismo de parâmetro de impacto e aproximação eiconal. Mais especificamente realizar a análise teórica das diferentes abordagens que levam ao estabelecimento do formalismo de parâmetro de impacto e, a partir desse, obter informações empíricas (a partir de dados experimentais) que forneçam subsídios para a elaboração e/ou testes de modelos fenomenológicos e para a busca de conexões com abordagens não perturbativas da CDQ.

Consideramos como resultados centrais deste trabalho:

-Extração da eiconal no espaço de momento transferido levando-se em conta as incertezas devidas aos erros nos parâmetros de ajuste.

-Obtenção de evidências estatísticas para a existência de zeros na eiconal no espaço de momento transferido. Na região de energia estudada para o espalhamento pp ( $19,5 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 62,5 \text{ GeV}$ ) os resultados sugerem uma diminuição da posição do zero com o aumento da energia.

A possibilidade mais atraente no momento é continuar a utilização dos resultados aqui expostos na busca por conexões com CDQ e com modelos fenomenológicos.

# Apêndice A

## Variáveis de Mandelstam

Definimos o quadrivetor momento-energia como

$$\hat{\mathbf{P}} = (E/c, \mathbf{p}). \quad (\text{A.1})$$

Entretanto como  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$  e  $\hbar = c = 1$  (unidades naturais) temos

$$\hat{\mathbf{P}} = (E, \mathbf{k}). \quad (\text{A.2})$$

O quadrivetor momento-energia (ou quadrimomento) é uma entidade definida no espaço de Minkowsky, portanto

$$\hat{\mathbf{P}}^2 = \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{P}} = E^2 - k^2. \quad (\text{A.3})$$

Como  $\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{P}}$  é um escalar de Lorentz (invariante sobre mudança de referencial inercial) e como no referencial de repouso da partícula  $k = 0$  e  $E = m$ , temos

$$E^2 - k^2 = m^2 \quad \Rightarrow \quad E = \sqrt{m^2 + k^2}. \quad (\text{A.4})$$

Definindo as variáveis de Mandelstam como escalares de Lorentz

$$s = (\hat{\mathbf{P}}_1 + \hat{\mathbf{P}}_2)^2, \quad (\text{A.5})$$

$$t = (\hat{\mathbf{P}}_1 - \hat{\mathbf{P}}_3)^2, \quad (\text{A.6})$$

$$u = (\hat{\mathbf{P}}_1 - \hat{\mathbf{P}}_4)^2, \quad (\text{A.7})$$

$$(\text{A.8})$$

onde,  $\hat{\mathbf{P}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{P}}_2$ ,  $\hat{\mathbf{P}}_3$  e  $\hat{\mathbf{P}}_4$  são os quadrimomentos das partículas que sofrem colisão.  $\hat{\mathbf{P}}_1$  e  $\hat{\mathbf{P}}_2$  os quadrimomentos iniciais e  $\hat{\mathbf{P}}_3$  e  $\hat{\mathbf{P}}_4$  os quadrimomentos finais.

No referencial do centro de massa temos, para partículas de mesma massa e espalhamento elástico:

$$\hat{\mathbf{P}}_1 = (\sqrt{m^2 + k^2}, \mathbf{k}) \quad \hat{\mathbf{P}}_2 = (\sqrt{m^2 + k^2}, -\mathbf{k}), \quad (\text{A.9})$$

logo

$$s = 4(m^2 + k^2). \quad (\text{A.10})$$

Temos ainda

$$\hat{\mathbf{P}}_3 = (\sqrt{m^2 + k^2}, \mathbf{k}') \quad \hat{\mathbf{P}}_4 = (\sqrt{m^2 + k^2}, -\mathbf{k}'), \quad (\text{A.11})$$

onde  $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| = k$  e

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' = k^2 \cos \theta, \quad (\text{A.12})$$

onde  $\theta$  é o ângulo de espalhamento no referencial do centro de massa, assim

$$t = -(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 = -2k^2(1 - \cos \theta). \quad (\text{A.13})$$

Analogamente

$$u = -2k^2(1 + \cos \theta). \quad (\text{A.14})$$

Note que

$$s + t + u = 4m^2, \quad (\text{A.15})$$

ou seja  $s, t$  e  $u$  não são variáveis independentes.

Temos ainda

$$dt = -2k^2 \sin \theta d\theta, \quad (\text{A.16})$$

logo

$$d\Omega = -\frac{dt}{2k^2} d\varphi, \quad (\text{A.17})$$

e assim

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{d\varphi}{2k^2} \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (\text{A.18})$$

Entretanto redefinindo  $d\sigma/dt$  como

$$\frac{d\sigma}{dt} \longrightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{dt} d\varphi, \quad (\text{A.19})$$

temos

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{1}{2k^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\varphi. \quad (\text{A.20})$$

Para simetria azimutal

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\pi}{k^2} \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (\text{A.21})$$

Como  $t$  é sempre negativo (no canal  $s$ ), por abuso de linguagem temos

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi}{k^2} \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (\text{A.22})$$

# Apêndice B

## Momento Angular Complexo e Transformada de Watson-Sommerfeld

### B.1 Propriedades de Convergência da Expansão em Ondas Parciais

Da Eq. (3.14) temos

$$F(s, t) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(s) P_l(\cos \theta), \quad (\text{B.1})$$

onde  $f_l(s) = 1 - e^{2i\delta_{l,k}}$  e  $F(s, t) = f_k(\theta)$  (colocamos  $t$  e  $s$  em lugar de  $k$  e  $\theta$  por aqueles serem invariantes de Lorentz). Para o canal  $s$  ( $s \geq 4m^2$ ,  $4m^2 - s \leq t \leq 0$ ), onde  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$  a série acima converge. Entretanto seria desejável que a série também convergisse para  $s$ ,  $t$  e  $u$  complexos englobando também os canais  $t$  e  $u$  [44].

Lembrando que para  $l$  real e  $z = \cos \theta$  complexo ( $\theta = \theta_1 + i\theta_2$  e  $z = x + iy$ ) temos

$$P_l(\cos \theta) \sim e^{l|\theta_2|} \quad p/l \rightarrow \infty. \quad (\text{B.2})$$

Portanto a série só converge se:

$$f_l(s) \sim e^{-l\alpha(s)} \quad p/l \rightarrow \infty, \quad (\text{B.3})$$

com

$$|\theta_2| \leq \alpha(s). \quad (\text{B.4})$$

Fazendo  $\chi = \cosh \alpha(s)$ , que é sempre maior que 1, a região de convergência da série é

$$\frac{x^2}{\chi^2} + \frac{y^2}{\chi^2 - 1} = 1, \quad (\text{B.5})$$

que é uma elipse de focos  $\pm 1$  conhecida como elipse de Lehmann, Fig. (B.1).

Logo apesar da série convergir para um domínio maior que o domínio físico  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$  (ao qual a elipse se reduz para  $\alpha(s) \rightarrow 0$ ) este ainda é finito em  $z = \cos \theta$ . Ou seja para um  $s$  fixo a série converge num domínio finito das variáveis  $u$  e  $t$ . Obviamente isto é suficiente para o canal  $s$ , mas nos canais  $t$  e  $u$  onde  $t$  ou  $u$  são o quadrado da energia no C.M. e podem ser arbitrariamente grandes a série não fornece a amplitude.

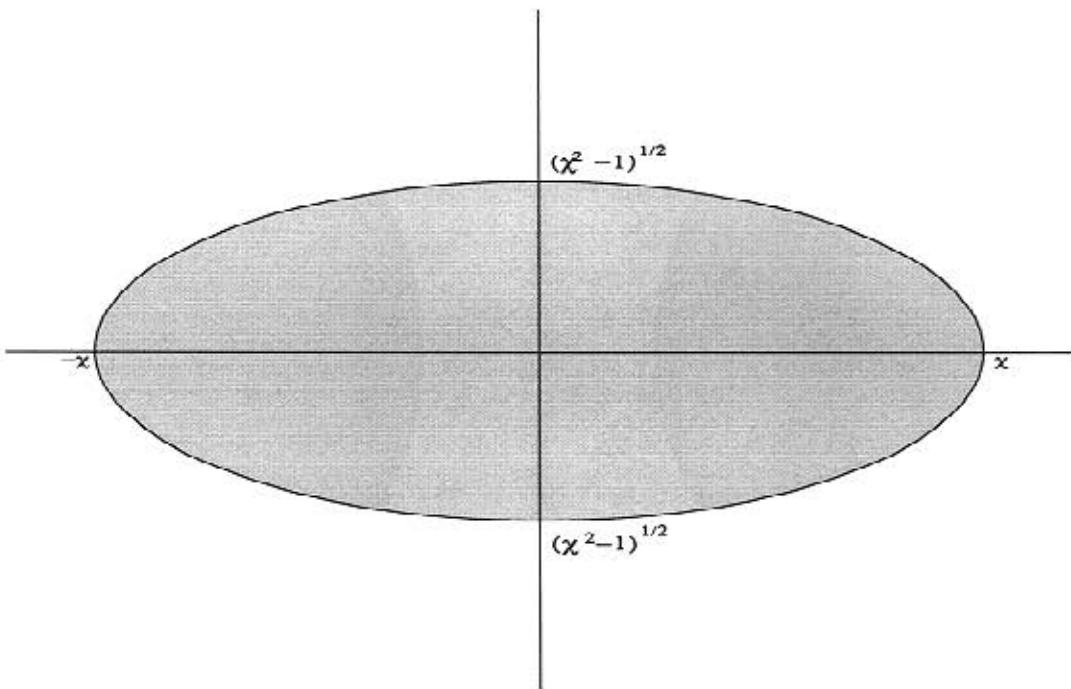


Figura B.1: Elipse de Lehmann: região de convergência da série (B.1)

Se supormos que a série não seja sobre valores reais, e sim sobre valores imaginários de  $l$  teremos para  $z = \cos \theta$  complexo ( $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ ):

$$P_l(\cos \theta) \sim e^{l|\theta_1|} \quad p/l \rightarrow \infty, \quad (\text{B.6})$$

portanto a série só converge se

$$f_{|l|}(s) \sim e^{-l|\beta(s)|} \quad p/l \rightarrow \infty, \quad (\text{B.7})$$

com

$$|\theta_1| \leq \beta(s). \quad (\text{B.8})$$

Fazendo  $\cos \beta(s) = Y$  (que é sempre menor que 1) a região de convergência da série é:

$$\frac{x^2}{Y^2} - \frac{y^2}{1 - Y^2} = 1, \quad (\text{B.9})$$

que é uma hipérbole, ou seja, um domínio aberto, de focos  $\pm 1$ , Fig. (B.2). A série converge na região hachurada que se superpõe em parte com a elipse de Lehmann. Logo se pudermos continuar a série para valores imaginários de  $l$ , ou de forma mais geral complexos, esta representará a mesma função analítica mas que converge num domínio onde  $t$  e  $u$  podem ser arbitrariamente grandes.

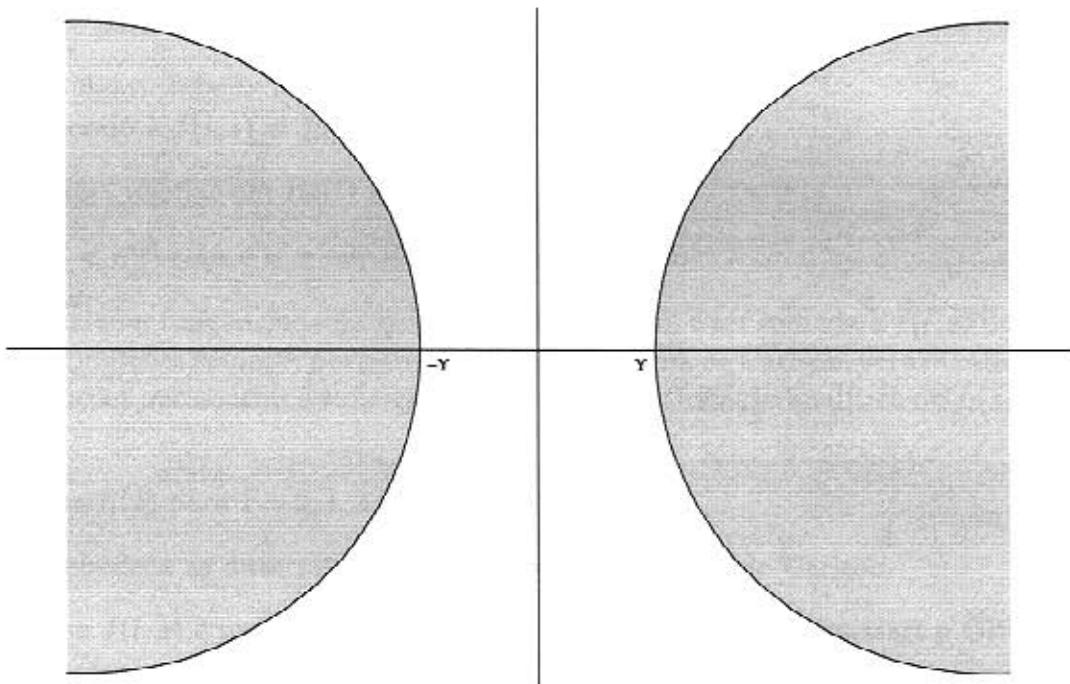


Figura B.2: Região de convergência da série (B.1) quando  $l$  é imaginário.

O problema então é como continuar analiticamente a amplitude parcial  $f_l(s)$  para valores complexos de  $l$ .

## B.2 Continuação Analítica das Amplitudes de Ondas Parciais no Plano de Momento Angular Complexo

Queremos portanto encontrar uma continuação analítica de  $f_l(s)$  para uma função  $f(l, s)$  onde  $l$  agora pode ser complexo tal que

$$f(l, s) = f_l(s) \quad p/ \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.10})$$

A amplitude de onda parcial na teoria de potencial satisfaz uma equação diferencial explícita envolvendo  $l$  como um parâmetro, logo suas propriedades podem ser estudadas diretamente quando  $l$  é complexo. Este método foi usado por Regge [45]. Alternativamente se a representação de Mandelstan é assumida, pode-se definir  $f(l, s)$  por uma integral sobre a função espectral dupla. Este método foi utilizado por Froissart [47] e Gribov [46]. Ambos os métodos necessitam que  $f(l, s)$  seja definida univocamente. Entretanto a relação  $f(l, s) = f_l(s)$  para  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$  não determina  $f(l, s)$  univocamente. Podemos, por exemplo, somar à  $f(l, s)$  a função  $g(s) \text{sen} l\pi$  e a relação acima continuará válida. Usaremos o teorema de Carlson abaixo para impor à função  $f(l, s)$  as condições necessárias e suficientes para que esta seja unívoca.

**Teorema de Carlson:** Dada uma função  $f(z)$  que satisfaz as condições

- $f(z)$  é regular em  $\text{Re}(z) > A$ ;
- $f(z) < e^{a|z|}$  para  $a < \pi$  em  $\text{Re}(z) > A$

- $f(z) = 0$  para uma sequência infinita  $z = N + 1, N + 2, N + 3, \dots$

então  $f(z)$  é identicamente nula.

Logo impondo à  $f(l, s) = f_l(s)$  que:

- $f(l, s)$  seja regular em  $Re(l) > l_0$  e
- $|f(l, s)| < e^{a|l|}$  com  $a < \pi$  em  $Re(l) > l_0$  para  $l \rightarrow \infty$

temos que qualquer função que seja zero em  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$  a ser somada à  $f(l, s)$  deverá também obedecer às condições acima e, portanto, devido ao teorema de Carlson, será identicamente nula. Logo as condições necessárias e suficientes para que a continuação analítica de  $f_l(s)$  seja unívoca são que

- $f(l, s) = f_l(s)$  para  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$
- $f(l, s)$  obedeça as duas primeiras condições do teorema de Carlson.

Garantido que  $f(l, s)$  é unívoca partimos agora para o método de Froissart e Gribov de determinação de  $f(l, s)$ .

### B.3 Projeção de Froissart-Gribov e Amplitudes de Ondas Parciais Pares e Impares

**Postulado de máxima analiticidade:** As amplitudes de espalhamento são funções analíticas dos invariantes  $s, t, u$ , tomados como variáveis complexas, com apenas as singularidades requeridas pelas equações de unitaridade [48, 49].

Portanto, apesar de apenas os valores reais de  $s, t, u$  terem sentido físico, nós os tomaremos como variáveis complexas, supondo que as amplitudes são funções analíticas de  $s, t, u$ , de modo que podemos obter a amplitude de espalhamento física tomando o limite  $s, t, u \rightarrow \text{real}$ .

As equações de unitaridade exigem que  $F(s, t, u)$  tenha polos em  $s = t = u = m^2$  e cortes de ramo a partir de  $s = t = u = 4m^2$  [48, 49]. Como  $s + t + u = 4m^2$ ,  $F(s, t, u)$  é função apenas de duas variáveis independentes, que escolheremos  $s$  e  $t$ . Logo:

$$F(s, t, u) = F(s, t) \tag{B.11}$$

e as singularidades nos planos  $s$  e  $t$  são mostradas nas Figs. (B.3) e (B.4)

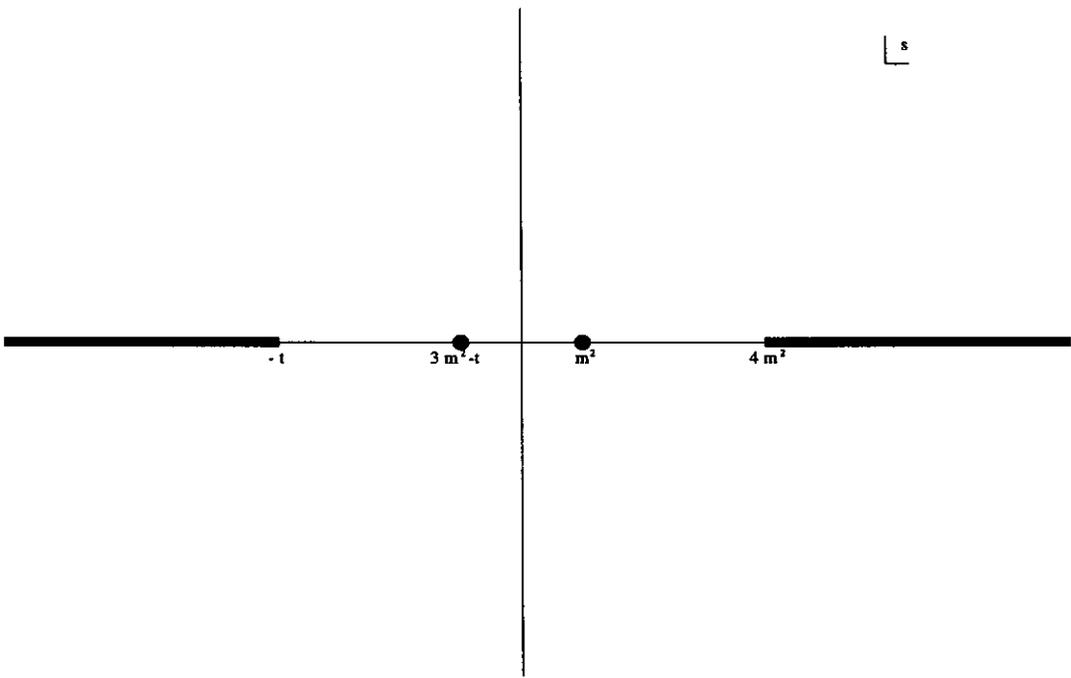


Figura B.3: Singularidades de  $F(s, t)$  no plano  $s$  requeridas por unitariedade.

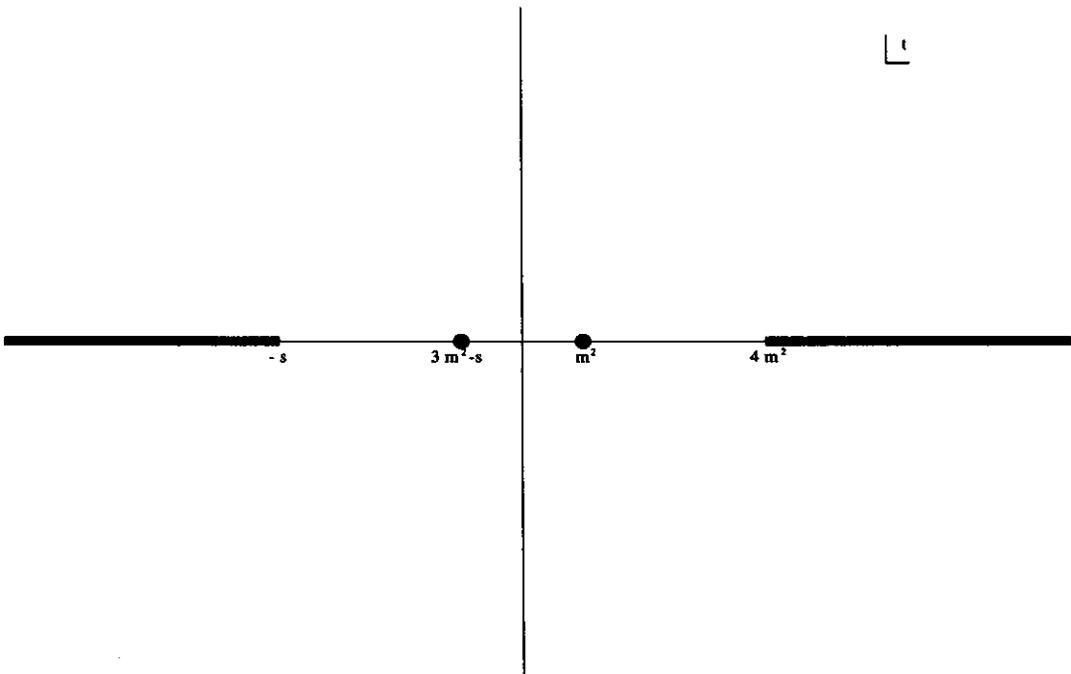


Figura B.4: Singularidades de  $F(s, t)$  no plano  $t$  requeridas por unitariedade.

Da fórmula integral de Cauchy [50]

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint dz' \frac{F(z')}{z' - z}, \quad (\text{B.12})$$

desprezando os polos e supondo que

$$|F(s, t)| \rightarrow |t|^{-\epsilon} \quad p/ \quad t \rightarrow \infty \quad e \quad \epsilon > 0, \quad (\text{B.13})$$

temos no plano-t

$$\begin{aligned} F(s, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-s} dt' \frac{F_2(s, t')}{t' - t} + \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} dt' \frac{F_2(s, t')}{t' - t} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} du' \frac{F_3(s, u')}{u' - u} + \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} dt' \frac{F_2(s, t')}{t' - t}, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

onde

$$\begin{aligned} F_2(s, t) &= \frac{1}{2i} [F(s, t + i\epsilon) - F(s, t - i\epsilon)] \\ F_3(s, u) &= \frac{1}{2i} [F(s, u + i\epsilon) - F(s, u - i\epsilon)]. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Fazendo a troca de variáveis

$$z = \cos \theta = 1 + \frac{2t}{s - 4m^2} = -1 - \frac{2u}{s - 4m^2}, \quad (\text{B.16})$$

$$t' - t = \frac{s - 4m^2}{2} (z' - z) \quad u' - u = \frac{4m^2 - s}{2} (z' - z), \quad (\text{B.17})$$

temos

$$F(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} dz' \frac{F_2(s, z'(s, t'))}{z' - z} + \frac{1}{\pi} \int_{-z_0}^{-\infty} dz' \frac{F_3(s, z'(s, u'))}{z' - z}. \quad (\text{B.18})$$

Supondo agora que  $|F(s, t)| < |t|^{N-\epsilon}$  quando  $|t| \rightarrow \infty$  é necessário introduzir N subtrações em t [49]. Logo

$$F(s, t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + \frac{z^N}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} dz' \frac{F_2(s, z'(s, t'))}{z'^N (z' - z)} + \frac{z^N}{\pi} \int_{-z_0}^{-\infty} dz' \frac{F_3(s, z'(s, u'))}{z'^N (z' - z)}. \quad (\text{B.19})$$

Usando a ortogonalidade dos polinômios de Legendre

$$\int_{-1}^1 P_l(z) P_{l'}(z) dz = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \quad (\text{B.20})$$

na Eq. (B.1), temos

$$f_l(s) = -ik \int_{-1}^1 dz P_l(z) F(s, t(z, s)). \quad (\text{B.21})$$

Substituindo F(s,t) obtido a partir da relação de dispersão, Eq. (B.19), na equação acima e usando a relação

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz P_l(z) \frac{z^N}{z'^N (z' - z)} = Q_l(z') \quad p/l \geq N, \quad (\text{B.22})$$

onde  $Q_l(z)$  são as chamadas funções de Legendre de segunda espécie, obtemos

$$f_l(s) = -2ik \int_{z_0}^{\infty} dz' Q_l(z') F_2(s, z'(s, t')) - 2ik \int_{-z_0}^{-\infty} dz' Q_l(z') F_3(s, z'(s, u')), \quad (\text{B.23})$$

que é conhecida como projeção de Froissart-Gribov.

O Polinômio não dá contribuição para  $l \geq N$  e a integral converge já que assumimos  $l \geq N$  ( $N$  é função de  $s$ ,  $N=N(s)$ ) e

$$|F_2(s, z)| < |z|^N, \quad (\text{B.24})$$

enquanto

$$Q_l(z) \sim \frac{1}{z^{l+1}} \quad p/z \rightarrow \infty. \quad (\text{B.25})$$

Entretanto:

$$Q_l(z') \sim l^{-1/2} e^{-(l+1/2) \ln(z' + (z'^2 - 1)^{1/2})} \quad p/l \rightarrow \infty, \quad (\text{B.26})$$

logo na segunda integral, onde  $z'$  toma valores negativos temos

$$\ln(z' + (z'^2 - 1)^{1/2}) = \ln(|z' + (z'^2 - 1)^{1/2}|) + i\pi. \quad (\text{B.27})$$

Portanto

$$Q_l(z') \sim e^{-(l+1/2) \ln(|z' + (z'^2 - 1)^{1/2}|)} e^{-i\pi l} \quad p/l \rightarrow \infty. \quad (\text{B.28})$$

Isto não satisfaz as condições do teorema de Carlson devido ao termo  $e^{-i\pi l}$  que provoca também a divergência da segunda integral para  $\text{Im}(l) \rightarrow \infty$ .

Para contornar esta dificuldade fazemos uma troca de variáveis na segunda integral,  $z' = -z'$ , lembrando que  $Q_l(-z) = (-1)^{l+1} Q_l(z')$  temos

$$f^+(l, s) = -2ik \int_{z_0}^{\infty} dz' Q_l(z') (F_2(s, z') + F_3(s, -z')), \quad (\text{B.29})$$

$$f^-(l, s) = -2ik \int_{z_0}^{\infty} dz' Q_l(z') (F_2(s, z') - F_3(s, -z')), \quad (\text{B.30})$$

e

$$f_l(s) = f^+(l, s) \quad p/ \quad l = 0, 2, 4, 6, \dots \quad (\text{B.31})$$

$$f_l(s) = f^-(l, s) \quad p/ \quad l = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (\text{B.32})$$

## B.4 Transformada de Watson-Sommerfeld

A equação

$$f^{\pm}(l, s) = -2ik \int_{z_0}^{\infty} dz' Q_l(z') (F_2(s, z') \pm F_3(s, z')) \quad (\text{B.33})$$

converge apenas em  $\text{Re}(l) \geq N(s)$  já que

$$Q_l(z) \sim \frac{1}{z^{l+1}} \quad p/z \rightarrow \infty \quad (\text{B.34})$$

e supõe-se

$$F_{2(3)}(s, z) \sim z^{N(s)} \quad p/z \rightarrow \infty. \quad (\text{B.35})$$

As únicas singularidades de  $Q_l(z)$  são polos em  $l = -1, -2, -3, \dots$ , logo  $f^\pm(l, s)$  é holomórfica para  $\text{Re}(l) > \max\{N(s), -1\}$ .

Para continuar  $f^\pm(l, s)$  para a região  $\text{Re}(l) < \max\{N(s), -1\}$  é necessário a hipótese crucial de que  $f^\pm(l, s)$  é uma função analítica no plano de momento angular complexo com apenas singularidades isoladas. Logo são apenas estas singularidades isoladas que causam os problemas de divergência da integral acima.

Vamos supor que  $F_2(s, t)$  e  $F_3(s, t)$  tenham o seguinte comportamento assintótico:

$$F_{2(3)}(s, t) \sim t^{\alpha(s)} + \text{termos de ordem inferior} \quad p/ \quad t \rightarrow \infty \quad (\text{B.36})$$

logo  $N(s) = \alpha(s)$ . Então a região de grande  $t$  fornece:

$$f^\pm(l, s) \sim \int_{t_1}^{\infty} dt t^{-l-1} t^{\alpha(s)} = -\frac{e^{(\alpha(s)-l)\ln t_1}}{\alpha(s)-l} \quad p/ \quad l \geq \alpha(t) \quad (\text{B.37})$$

Logo  $f^\pm(l, s)$  tem um polo em  $\alpha(s) = l$ . Por hipótese essa é a singularidade mais a direita no plano  $l$  e é esta singularidade que não permite a continuação para  $\text{Re}(l) < \alpha(t)$ . Entretanto uma vez isolado este polo podemos continuar a função até que encontremos a próxima singularidade devido aos termos de ordem menor na expansão (B.36). Portanto a série

$$F(s, t) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (4l+1) f_{2l}(s) P_{2l}(\cos \theta) + \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (4l+3) f_{2l+1}(s) P_{2l+1}(\cos \theta) \quad (\text{B.38})$$

pode ser reescrita como

$$F(s, t) = -\frac{1}{8k} \oint_{C_1} dl \frac{(2l+1) f^+(l, s) P_l(z) e^{-\frac{i\pi l}{2}}}{\text{sen}(\frac{\pi l}{2})} - \frac{1}{8k} \oint_{C_1} dl \frac{(2l+1) f^-(l, s) P_l(z) e^{-\frac{i\pi(l-1)}{2}}}{\text{sen}(\frac{\pi(l-1)}{2})}, \quad (\text{B.39})$$

já que

$$\text{Res} \frac{1}{\text{sen}(\frac{\pi l}{2})} = \frac{2(-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi} \quad p/n \quad \text{par} \quad (\text{B.40})$$

e

$$\text{Res} \frac{1}{\text{sen}(\frac{\pi(l-1)}{2})} = \frac{2(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi} \quad p/n \quad \text{impar}, \quad (\text{B.41})$$

onde  $C_1$  é o contorno mostrado na Fig. (B.5). Mas já que  $f^\pm(l, s)$  não têm singularidades em  $\text{Re}(l) \geq N(s)$  podemos distorcer o caminho  $C_1$  no caminho  $C_2$  desde que a linha vertical de  $C_2$  corte o eixo real num ponto maior que  $N(s)$  e  $f_\pm(l, s) \rightarrow 0 \quad p/ \quad l \rightarrow \infty$ . Agora se distorcermos o caminho  $C_2$  para o  $C_3$  teremos que incluir os polos de  $f^\pm(l, s)$  na Eq. (B.39). Supondo, por simplicidade, que haja apenas um polo em  $f^+(l, s)$  e outro em  $f^-(l, s)$ , a Eq. (B.39) se torna

$$\begin{aligned}
F(s, t) = & - \frac{1}{8k} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \frac{dl(2l+1)f^+(l, s)P_l\left(1 + \frac{2t}{s-4m^2}\right) e^{-\frac{i\pi l}{2}}}{\text{sen}\left(\frac{\pi l}{2}\right)} \\
& - \frac{1}{8k} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \frac{dl(2l+1)f^-(l, s)P_l\left(1 + \frac{2t}{s-4m^2}\right) e^{-\frac{i\pi(l-1)}{2}}}{\text{sen}\left(\frac{\pi(l-1)}{2}\right)} \\
& - \frac{i}{4k} \frac{(2\alpha^+(s)+1)\beta^+(s)P_{\alpha^+(s)}\left(1 + \frac{2t}{s-4m^2}\right) e^{-\frac{i\pi\alpha^+(s)}{2}}}{\text{sen}\left(\frac{\pi\alpha^+(s)}{2}\right)} \\
& - \frac{i}{4k} \frac{(2\alpha^-(s)+1)\beta^-(s)P_{\alpha^-(s)}\left(1 + \frac{2t}{s-4m^2}\right) e^{-\frac{i\pi(\alpha^-(s)-1)}{2}}}{\text{sen}\left(\frac{\pi(\alpha^-(s)-1)}{2}\right)}
\end{aligned} \tag{B.42}$$

onde  $\alpha^\pm(s)$  são os pontos no plano- $l$  onde há polos de  $f^\pm(l, s)$  com resíduos  $\beta^\pm(l, s)$ . A integral acima é sobre valores imaginários de  $l$ , logo possui um domínio de convergência aberto no plano- $z$ , assim a transformada de Watson-Sommerfeld, Eq. (B.43) é válida para o todo dos planos  $s, t$ , complexos.

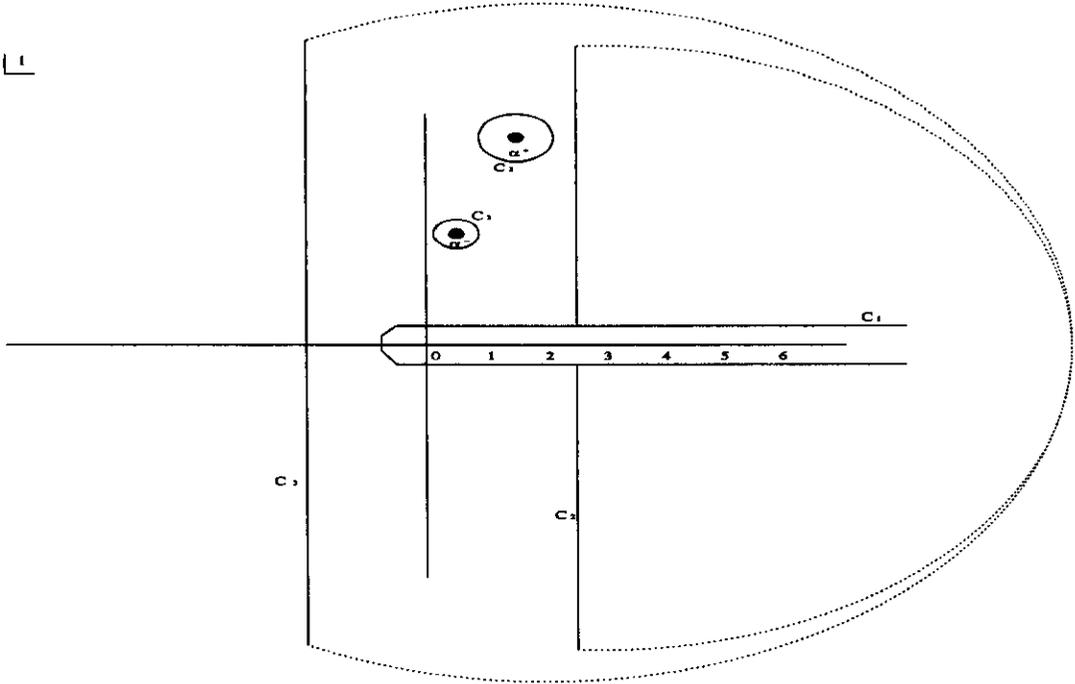


Figura B.5: Caminhos de integração no plano  $l$ .

## B.5 Função de Perfil via Transformada de Watson-Sommerfeld

Por simplicidade não incluiremos a propriedade de assinatura da amplitude de onda parcial analiticamente continuada. Desse modo a TWS se torna [51]:

$$F(s, y) = -\frac{1}{4\pi k} \int_C dl \frac{f(l, s)(2l+1)P_l(2y^2-1)\pi}{\text{sen}\pi l} \quad (\text{B.43})$$

onde:

$$y = \text{sen} \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1-z}{2}} \quad (\text{B.44})$$

a região física é  $0 \leq y \leq 1$ . O contorno  $C_1$  engloba o eixo real no sentido horário envolvendo todos os polos nos valores inteiros de  $l$  ( $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ ), Fig. (B.5).

Fazendo o contorno colapsar sobre o eixo real temos

$$F(s, y) = -\frac{1}{4\pi k} \int_{l_0}^{\infty} dl f(l, s)(2l+1)P_l(2y^2-1) \left( \frac{\pi}{\text{sen}\pi l_+} - \frac{\pi}{\text{sen}\pi l_-} \right), \quad (\text{B.45})$$

onde

$$l_{\pm} = l \pm i\epsilon \quad e \quad 0 > l_0 > -1. \quad (\text{B.46})$$

Na região física ( $y < 1$ ) a distribuição

$$D(l, y) = -(2l+1)P_l(2y^2-1) \left( \frac{\pi}{\text{sen}\pi l_+} - \frac{\pi}{\text{sen}\pi l_-} \right) \quad (\text{B.47})$$

pode ser expressa como uma transformada de Fourier-Bessel

$$D(l, y) = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)P_n(1-2y^2)\delta(l-n) = \quad (\text{B.48})$$

$$= 2\pi i \int_0^{\infty} \beta d\beta J_0(\beta y) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{J_{2n+1}(\beta)}{\beta} \delta(l-n) (l > -1). \quad (\text{B.49})$$

Para obter a última expressão nós usamos a relação

$$\int_0^{\infty} d\beta J_0(\beta y) J_{2n+1}(\beta) = P_n(1-2y^2)\theta(1-y), \quad (\text{B.50})$$

onde  $\theta(x)$  é a função degrau. Inserindo a expressão acima na TWS temos para  $0 \leq y < 1$ :

$$F(s, y) = \frac{i}{4k} \int_0^{\infty} \beta d\beta J_0(\beta y) \Gamma(s, \beta), \quad (\text{B.51})$$

onde

$$\Gamma(s, \beta) = 2 \int_{l_0}^{\infty} dl f(l, s) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{J_{2n+1}(\beta)}{\beta} \delta(l-n) = \quad (\text{B.52})$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{J_{2n+1}(\beta)}{\beta} f_n(s). \quad (\text{B.53})$$

A variável  $\beta$  deve ser identificada como  $\beta = 2pb$  onde  $p$  é o momento no centro de massa e  $b$  o parâmetro de impacto. Como  $p = \hbar k$  e em unidades naturais  $\hbar = 1$  temos das Eqs. (B.51) e (3.21):

$$F(q, s) = ik \int_0^\infty b db J_0(qb) \Gamma(s, b) \quad (\text{B.54})$$

análoga à Eq. (3.22). Entretanto note que nessa abordagem através da transformada de Watson-Sommerfeld não realizamos nenhuma aproximação do tipo altas energias ou pequenos ângulos. A expressão obtida é válida em qualquer energia e qualquer momento transferido. Note também através da Eq.(B.53) que a função de Perfil é uma soma discreta infinita sobre todas as ondas parciais.

# Bibliografia

- [1] M. M. Block, R. N. Cahn, *Rev. Mod. Phys.* **57**, (1985) 563.
- [2] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, “Quantum Mechanics”, (John Wiley & Sons, NY, 1977), Vol. 2.
- [3] M. L. Perl, “High Energy Hadron Physics”, (Wiley, NY, 1974).
- [4] M. A. Heald, J. B. Marion, “Classical Eletromagnetic Radiation”, (Saunders College Publishing, NY, 1995).
- [5] C. J. Joachain, “Quantum Collision Theory”, (North-Holland, NY,1983).
- [6] A. Donnachie and P. V. Landshoff, *Z. Phys. C - Particles and Fields*, **2**, 55 (1979); preprint - University of Cambridge - DAMTP 96/66.
- [7] W. Faissler *et al.*, *Phys. Rev. D***23**, (1981) 33; E. Nagy *et al.*, *Nucl. Phys. B***150**, (1982) 221.
- [8] K. R. Schubert, “Tables on Nucleon-Nucleon Scattering”, in Landolt-Börnstein, Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology, New Series, Vol.I/9a (1979).
- [9] U. Amaldi and K. R. Schubert, *Nucl. Phys. B***160**, (1980) 301.
- [10] D. S. Ayres *et. al.*, *Phys. Rev. D***15**, (1977) 3105.
- [11] C. W. Akerlof *et. al.*, *Phys. Rev. D***14**, (1976) 2864.
- [12] R. Rubinstein, *Phys. Rev. D***30**, (1984) 1413.
- [13] G. Fidecaro, *Phys. Lett.* 105B, (1981) 309.
- [14] A. Breakstone *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.* 54, (1985) 2180; *Nucl. Phys. B*248, (1984) 253.
- [15] M. Bozzo *et. al.*, *Phys. Lett.* 147B, (1984) 385; CERN/EP85-31.
- [16] R. Battiston *et. al.*, *Phys. Lett.* 127B, (1983) 472.
- [17] P. Bernard *et. al.*, CERN/EP86-21; *Phys.Lett.* 171B, (1986) 142.
- [18] H. M. França and Y. Hama, *Phys. Rev. D***19**, (1979) 3261.

- [19] R. Lombard, in *Proceedings of the First International Workshop on Elastic and Diffractive Scattering*, edited by B. Nicolescu and J. Tran Thanh Van (Editions Frontieres, Gif-Sur-Yvette, 1986) p. 231.
- [20] V. Franco, *Phys. Rev. D***11**, (1975) 1837.
- [21] S. Sanielevici and P. Valin, *Phys. Rev. D***29**, (1984) 52
- [22] P. A. S. Carvalho and M. J. Menon, in 1995-XVI Brazilian National Meeting on Particles and Fields, ed. G. A. Alves et al (SBF, São Paulo, 1996) 301.
- [23] P. A. S. Carvalho, A. F. Martini, M. J. Menon, in 1996-V Hadron Physics, ed. E. Ferreira et al (World Scientific, Singapura, 1997) 342.
- [24] P. A. S. Carvalho, M. J. Menon, Relatório da VIII Reunião de Trabalho sobre Interações Hadrônicas, CBPF, (IF-USP, 1997) 12.
- [25] P. C. Beggio, P. A. S. Carvalho, A. F. Martini, M. J. Menon, J. T. S. Paes, in Relatório da VI Reunião de Trabalho sobre Interações Hadrônicas, CBPF, (IF-USP, 1996) 11.
- [26] P. A. S. Carvalho, M. J. Menon, *Phys. Rev. D***56** (1997) 7321.
- [27] P. A. S. Carvalho, M. J. Menon, in 1996-XVII Brazilian National Meeting on Particles and Fields, ed. A. J. da Silva et al (SBF, São Paulo, 1996) 215.
- [28] P. A. S. Carvalho, A. F. Martini, M. J. Menon, A. E. Motter, “Analyticity and crossing at the elementary level in elastic hadron scattering”, in 1998-VI Hadron Physics (a ser publicado).
- [29] P. A. S. Carvalho, A. F. Martini, M. J. Menon, “Semiempirical extraction of elementary amplitudes from experimental data on elastic scattering”, in 1998-VI Hadron Physics (a ser publicado).
- [30] F. James and M. Roos, *Minuit-Function Minimization and Error Analysis*, CERN D506 (CERN, Geneva, 1992).
- [31] P. R. Bevington and D. K. Robinson, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences* (McGraw-Hill, 1992).
- [32] J. H. Vuolo “Fundamentos da Teoria de Erros”, (Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1992).
- [33] A. F. Martini, Tese de Mestrado, IFGW-UNICAMP, 1995.
- [34] M. J. Menon, *Phys. Rev. D***48**, (1993) 2007; *D***51**, (1995) 1427.
- [35] R. J. Glauber, in *Lectures in Theoretical Physics*, ed. W. J. E. Britten et al (Interscience, NY, 1959), Vol. I, 315; *High Energy Physics and Hadron Structure*, ed. S. Devens et al (Plenum, NUY, 1970) 207.
- [36] R. J. Glauber and G. Matthiae, *Nucl. Phys. B***21**, (1970) 135.
- [37] C. Furget, Ph. D. thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1989.

- [38] NAG Fortran Library Manual, Mark 16 (1993).
- [39] A. Krämer and H. G. Dosch, *Phys. Lett.* **B252**, (1990) 669.
- [40] A. Di Giacomo and H. Panagopoulos, *Phys. Lett.* **B285**, (1992) 133.
- [41] A. Di Giacomo, E. Meggiolaro and H. Panagopoulos, *Nucl. Phys.* **B483**, (1997) 371.
- [42] A. F. Martini, M. J. Menon and D. S. Thober, *Phys. Rev.* **D57**, (1998) 3026.
- [43] A. F. Martini, M. J. Menon, *Phys. Rev.* **D56**, (1997) 4338.
- [44] E. Predazzi, "Perspectives in High Energy Physics", (Proceedings of 3rd G. Wathaghin School, Campinas, 1994).
- [45] T. Regge, *Nuovo Cimento* **14** (1959) 951 e **18** (1959) 947.
- [46] V. N. Gribov, *Soviet Physics JETP*, **15** (1962) 873.
- [47] M. Froissart, (Proceedings of La Jolla conference).
- [48] P. D. B. Collins, "An Introduction to Regge Theory & High Energy Physics", (Cambridge University Press, NY, 1977).
- [49] R. J. Eden, "High Energy Collisions on Elementary Particles" (Cambridge University Press, NY, 1967).
- [50] G. Arfken "Mathematical Methods for Physicists", (Academic Press, NY, 1985).
- [51] M. M. Islam, *Nucl. Phys.* **B104**, (1976) 511.