#### Análise de Eventos Centauro

Sérgio Luiz Carmelo Barroso

Orientador:Prof. Dr. Edison Hiroyuki Shibuya

Dissertação apresentada ao Instituto de Física 'Gleb Wataghin' como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia Universidade Estadual de Campinas - SP,

#### FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA

**BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP** 

	Barroso, Sérgio Luiz Carmelo
278a	Análise de eventos Centauro / Sérgio Luiz Carmelo
	Barroso Campinas, SP : [s.n.], 2001.
	Orientador: Edison Hiroyuki Shibuya.
	Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
	Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".
	1. Raios cósmicos. 2. Interações hadrônicas.
	I. Shibuya, Edison Hiroyuki. II. Universidade Estadual
	de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin".
	III. Título.

aos meus pais Valter e Rivanilde aos meus irmãos Marcos e Sandra

## Agradecimentos

Ao Edison, não só pela orientação paciente e responsável, mas, principalmente, pela sua amizade.

A Mirian, pelo incentivo e apoio que me ajudaram a vencer os momentos difíceis, e por compartilhar comigo os momentos felizes, tornando-os ainda melhores.

A todos os amigos que de uma forma ou de outra colaboraram comigo. São muitos, não é possível citar todos! Desculpem!

Aos Professores do departamento pelas discussões e ensinamentos. Em especial, aos Professores Anderson Campos Fauth e José Augusto Chinellato pelas sugestões feitas durante o exame de pré-requisito.

Aos Professores Carlos Enrique Navia Ojedra, da Universidade Federal Fluminense, Akinori Ohsawa, da Universidade de Tokyo e Masanobu Tamada, da Universidade de Kinki, também pelas discussões, sugestões e contribuições.

A Analzira, Maria Divanilde e a Rosângela, técnicas microscopistas do laboratório do Grupo de Emulsões.

A Sandra, a Teresa e a Monica, secretárias do departamento.

Ao Mario, técnico responsável pelo (bom!) funcionamento dos equipamentos de informática do departamento, sempre competente no exercício das suas funções.

Ao Professor Reinaldo Charnet, do Departamento de Estatística do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Unicamp pela valiosa ajuda no uso do teste estatístico Kolmogorov-Smirnov.

À Colaboração Brasil-Japão de Raios Cósmicos pela permissão de uso dos seus dados.

À CAPES, pela bolsa.

À FAPESP, FINEP e FAEP, pelos auxílios financeiros.

Este texto foi editorado eletronicamente usando o  $LAT_{F}X2\epsilon$ .

# Conteúdo

Resumo viii						
$\mathbf{Abst}$	ract	ix				
1 In	trodução 1	10				
1.	l Interações Hadrônicas	10				
1.	2 Colaboração Brasil-Japão de Raios Cósmicos 1	12				
2 D	escrição do Detector e da Experiência 1	8				
2.	l Detector	18				
2.	2 Detecção dos secundários	19				
2.	B Determinação da posição dos $\gamma$ 's	24				
2.	4 Busca dos $\gamma$ 's e construção dos mapas	24				
2.	5 Identificação das famílias	24				
2.	5 Determinação do ângulo zenital das famílias $( heta_f)$	25				
2.	7 Correção do plano de detecção	27				
2.	B Determinação da energia dos $\gamma$ 's	28				
	2.8.1 O método da contagem	28				
	2.8.2 O método da opacidade	29				
2.	Determinação do CPE - Centro Ponderado por Energia 3	30				
2.	10 Determinação da altura de interação $(H_I)$ e $ heta_\gamma$	33				
	2.10.1 Acoplamento (Cinemática do decaimento $\pi^0 \to \gamma + \gamma$ ).	34				
	2.10.2 C - Jatos	34				
	2.10.3 A - Jatos	36				
2.	11 A Relação ${\cal R}$	37				
2.	12 mDW, o método modificado de Duller-Walker	12				
2.	13 Identificação das partículas	15				

		2.13.1 Determinação do número de hádrons produzidos na In-						
		teração	. 46					
3	Anź	alise dos dados	49					
	3.1	O Fenômeno Centauro	. 49					
	3.2	Amostras de dados utilizadas	. 52					
	3.3	Seleção dos eventos	. 53					
	3.4	Multiplicidade e Energia Total Observada	. 54					
	3.5	Ângulo zenital médio dos chuveiros $\langle \theta_{\gamma} \rangle$	. 56					
	3.6	Momento Transversal Médio $\langle P_t \rangle_{\gamma}$	. 56					
	3.7	Isotropia	. 58					
		3.7.1 $dqm \in esfericidade \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	. 58					
		$3.7.2  relm  \ldots  \ldots  \ldots  \ldots  \ldots  \ldots  \ldots  \ldots  \ldots  $	. 60					
		3.7.3 Ângulo azimutal ( $\phi$ )	. 60					
	3.8	Seleção conjunta	. 63					
		3.8.1 <i>Redundância</i> da seleção conjunta	. 63					
		3.8.2 Nível de confiança da seleção conjunta	. 65					
	3.9	Distribuição de Energia $E_{\gamma}$	. 69					
4	Os	eventos selecionados	<b>74</b>					
<b>5</b>	Con	iclusões e Discussões	96					
$\mathbf{A}$	Ded	lução das expressões para $\sum \theta_{\gamma}^{n} E_{\gamma}$	103					
A.1 Cálculo de $\sum_{a=1}^{n} E(\theta)$								
	A.2	Cálculo de $\sum_{\theta_{i} < \theta} \theta E(\theta)$	. 105					
	A.3	Cálculo de $\sum_{a=1}^{a_{i}} \theta^{2} E(\theta)$	. 106					
	A.4	Cálculo de $\sum_{\theta_i < \theta}^{\sigma_i < \theta} \theta^3 E(\theta)$	. 108					
$\mathbf{B}$	O teste estatístico Kolmogorov-Smirnov 11							

# Resumo

Ao longo de sua existência, a Colaboração Brasil Japão para o Experimento com Câmara de Emulsões de Chacaltaya tem colhido resultados importantes nas áreas da Física de Raios Cósmicos, Altas Energias e de Partículas. Um destes resultados é a observação das famílias atmosféricas conhecidas como eventos do tipo Centauro. Sua característica principal é a predominância da componente hadrônica entre os secundários observados e é esta característica que permite sua identificação. A identificação da componente hadrônica de uma família é feita usando-se certos critérios baseados em características observáveis. Apesar de sua fundamentação teórica, estes critérios são, por vezes, considerados subjetivos, o que coloca em dúvida a existência de famílias do tipo Centauro. Apresentamos neste trabalho uma análise que comprova a singularidade das famílias do tipo Centauro já identificadas, análise esta que não utiliza os critérios acima citados.

## Abstract

Along its existence, the Brasil-Japan Collaboration for the Chacaltaya Emulsion Chamber Experiment has obtained important results in the fields of Cosmic Rays, High Energy and Particle Physics. One of these results is the observation of the atmospheric families known as Centauro type events. Its main characteristic is the predominance of the hadronic component among the observed secondaries and it is this characteristic that allows its identification. The identification of the hadronic component of a family is made using some criterions based on observable characteristics. In spite of its theoretical basis, these criterions are, sometimes, considered subjective, what places in doubt the existence of Centauro families. We will present an analysis that is able to corroborate the singular nature of the families identified as Centauro. We will also show that this alternative analysis is able to accomplish this without using the criterions above.

# Capítulo 1

# Introdução

#### 1.1 Interações Hadrônicas

A técnica de colidir partículas para estudar sua composição ou as interações que ocorrem entre elas é antiga. Já em 1911, Ernest Rutherford a utilizou em uma série de experimentos, para mostrar que a carga positiva dos átomos estava concentrada em uma pequena região dos mesmos, o núcleo. Nos experimentos de Rutherford, um feixe de partículas  $\alpha$  (núcleos de átomos de Hélio) era acelerado e colidia com uma fina placa de Ouro (o **alvo**). Hoje em dia, o experimento de Rutherford seria classificado como de **alvo fixo**, pois somente o feixe de partículas  $\alpha$  era acelerado. Felizmente, para Rutherford e para a Física, como a energia do feixe era muito baixa, as interações entre as partículas  $\alpha$  e os átomos de Ouro eram somente eletromagnéticas. Para que interações nucleares (ou Hadrônicas) ocorram, é necessário acelerar o feixe de partículas a energias maiores. Atualmente, aceleradores artificiais de partículas usam a técnica do **alvo móvel** para obter energia maiores. Nesta técnica, dois feixes são acelerados, um contra o outro. Para que o mesmo dispositivo acelerador (baseado em campos eletromagnéticos) possa ser utilizado simultaneamente nos dois feixes, acelera-se o feixe de uma dada partícula contra o feixe de sua antí-partícula. Desta forma, a definição de quem é o alvo perde um pouco o sentido.

Uma outra forma de obter partículas aceleradas a altas energias (muito maiores do que as obtidas pelos aceleradores artificiais) é utilizar a **Radiação Cósmica**. As partículas da Radiação Cósmica (chamadas genericamente de *primários*) atingem a atmosfera da Terra com energias que cobrem uma ampla faixa de valores. Segundo medidas recentes[2, 3], tais energias podem atingir valores tão altos quanto  $10^{20} eV$  (algumas dezenas de Joules, ou a energia cinética de uma bola de tênis movendo-se a cerca de 100 Km/h). Estes primários podem interagir hadronicamente com os átomos da atmosfera terrestre (que fazem o papel do alvo, fixo neste caso), dando início aos *chuveiros atmosféricos*. Observando parte das partículas produzidas na(s) Interação(ões) Hadrônica(s)<sup>1</sup> (as partículas secundárias) de um primário é possível estudar as características das Interações Hadrônicas e este é o objetivo da **Colaboração Brasil-Japão de Raios Cósmicos** (CBJ).

As principais vantagens de se usar a Radiação Cósmica para o estudo das Interações Hadrônicas são:

- As altas energias dos primários (bem maiores que as atingidas pelos aceleradores de partículas).
- Como o alvo é fixo, é possível estudar os secundários emitidos "para frente" ou na "região de fragmentação", ou seja, os secundários emitidos quase que na direção de incidência do primário. Em aceleradores de partículas do tipo alvo móvel (os que atingem as maiores energias) isto é difícil, pois o feixe de partículas aceleradas poderia danificar ou saturar os detectores colocados na região de fragmentação (ver figura 1.2(a)).
- É possível estudar as Interações Hadrônicas quase que individualmente. Nos aceleradores, os feixes de partículas incidentes são compostos por várias partículas e, consequentemente, os secundários observados são resultantes de várias Interações Hadrônicas diferentes de pares de partículas primárias diferentes. Em Raios Cósmicos é quase sempre possível identificar o grupo de secundários resultantes das Interação(ões) Hadrônica(s) de um mesmo primário (um tal grupo é chamado de família).

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>O primário pode interagir sucessivas vezes.

## 1.2 Colaboração Brasil-Japão de Raios Cósmicos

Decaimentos de partículas da Radiação Cósmica  $(\pi^{+,-} \rightarrow \mu^{+,-} + \nu_{\mu})^2$ , observados em Placas de Emulsão Nuclear expostas por Cesar Lattes em 1946 no Monte Chacaltaya (5500 m de altura, 20 Km de La Paz, Bolívia), seriam a evidência final para a descoberta[1] da partícula prevista por H. Yukawa em 1935, o méson  $\pi$ .

Na década de 50, um grupo de físicos japoneses (Y. Fujimoto, K. Yokoi, S. Hasegawa, N. Yajima e J. Nishimura, entre outros), percebendo as possibilidades do uso de um detector baseado em Placas de Emulsão Nuclear e filmes de Raios-X no estudo de Interações Hadrônicas provocadas por partículas da Radiação Cósmica, desenvolveram um detector conhecido como Câmara de Emulsões Fotográficas-Chumbo (ou, simplesmente, Câmara de Emulsões). A princípio, o detector foi montado em Norikura (2800 m de altitude) no Japão, contudo o número de eventos observados era muito baixo. Era necessário montar o detector em algum lugar mais alto, e o grupo japonês entendia que o Monte Chacaltaya seria o lugar ideal<sup>3</sup>. Em 1959, Yukawa colocou o grupo japonês em contato Lattes, e assim foi possível montar o detector no Monte Chacaltaya. Algum tempo depois (em maio de 1962), surgiria assim a Colaboração Brasil-Japão de Raios Cósmicos (CBJ), com o objetivo de estudar Interações Hadrônicas de energia  $E \geq 10^{15}$  eV, produzidas por partículas da Radiação Cósmica, utilizando um detector do tipo Câmara de Emulsões.

Ao longo de seus quase 50 anos de existência, a CBJ tem obtido resultados importantes, alguns deles já confirmados por experimentos em aceleradores artificiais. Os primeiros resultados obtidos pela CBJ foram publicados em [4]. As figuras 1.1 e 1.2 ilustram um dos primeiros resultados importantes

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Na realidade, somente o  $\pi$  e o  $\mu$  são observados na Placa de Emulsão. Sabia-se que uma terceira partícula (que hoje se sabe ser o  $\nu_{\mu}$ ) era produzida no decaimento porque as duas partículas observadas não eram sufucientes para manter a conservação do momento linear.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>O Laboratório Nacional de Física Cósmica de San Andres, localizado no Monte Chacaltaya, é um local de características únicas. Apesar da altura elevada na qual está localizado, o acesso ao mesmo pode ser feito por uma estrada, o que permite que os materiais necessários a construção do detector possam ser transportados com relativa facilidade. Além disso, há espaço mais que suficiente para a construção do detector e há energia elétrica no local.

obtidos pela CBJ. Na figura 1.1, cada ponto corresponde a uma família.  $\langle P_t^{\gamma} \rangle$  é o momento linear transversal (componente na direção de incidência do primário) médio dos secundários da família.  $n_{\gamma}$  é a multiplicidade por intervalo de (pseudo)rapidez  $y^4$ , isto é, a multiplicidade da família divida pelo intervalo de rapidez ocupado pela mesma. Apesar dos pontos se espalharem pelo gráfico, é possível notar um grupo de pontos centrado em torno de  $n_{\gamma} \simeq 7$ e  $\langle P_t^{\gamma} \rangle \simeq 250 MeV/c$ , e outro (mais difuso) em torno de  $n_{\gamma} \simeq 3$  e  $\langle P_t^{\gamma} \rangle \simeq$ 150 MeV/c. Este efeito pode ser visto mais claramente na distribuição de  $P_t$ , figura 1.2. Nota-se claramente que os diferentes grupos tem distribuições de  $P_t$  diferentes. Este **correlação entre**  $P_t$  **e**  $n_{\gamma}$  (ou entre  $P_t$  e a multiplicidade), foi interpretada pela CBJ como consequência da formação de diferentes tipos de Estados Intermediários (bolas de fogo) entre a Interação Hadrônica e a formação dos secundários através da Produção Múltipla de Mésons (ver ítem c de [17]). Na figura 1.1, o grupo com  $n_{\gamma} \simeq 3$  e  $\langle P_t^{\gamma} \rangle \simeq 150 MeV/c$  é denominado Mirim, e o outro Acú. Na figura 1.2, além das famílias do tipo Mirim e Açu aparecem também dados de um terceiro tipo, Guaçú. Esta correlação entre  $P_t$  e  $n_{\gamma}$  implica na violação (quebra) da lei conhecida como scaling de Feynman[5].

Somente alguns anos depois é que os aceleradores artificiais atingiram energias suficientes para que este efeito (correlação entre  $P_t$  e  $n_{\gamma}$ ) fossem observados em seus dados. A figura 1.3 mostra a distribuição de  $P_t$  de dados do experimento UA1 do CERN  $Sp\bar{p}S$  collider[6]. Nota-se, como na figura 1.2, que os dados podem ser divididos em grupos, cada grupo com uma distribuição de  $P_t$  característica.

A figura 1.4 mostra como o  $\langle P_t^{\gamma} \rangle$  depende da multiplicidade por intervalo de rapidez. Os dados da figura são de vários experimentos diferentes (indicados na legenda)[6, 7]. Nota-se que nos dados do experimento de menor energia (o acelerador ISR do CERN), não é possível observar a correlação entre  $\langle P_t^{\gamma} \rangle$  e multiplicidade por intervalo de rapidez. É importante ressaltar que os dados de aceleradores referem-se a secundários carregados  $(N_c)$ , enquanto que os dados da CBJ referem-se basicamente aos píons neutros,  $\pi^0$  $(N_{\gamma})$ . Fazendo-se a correção  $N_{\gamma} \rightarrow N_c$  os dados da CBJ e dos aceleradores de maiores energias concordam entre si[8].

A descoberta da existência de uma correlação entre  $P_t$  e multiplicidade

 $<sup>{}^{4}</sup>y$ é a rapidez. A pseudorapidez  $\eta$ é definida como  $\eta = -\ln \tan(\theta/2)$ , onde  $\theta$ é o ângulo entre a direção do secundário e a do primário (ângulo zenital). Se  $\theta$ é suficientemente pequeno (como no caso do experimento da CBJ, que trabalha na região para fragmentação) vale a aproximação  $y \simeq \eta$ 

não é o único resultado importante obtido pela CBJ. Um outro resultado muito importante foi a observação do fenômeno batizado como *Centauro*. Detalhes sobre este fenômeno serão dados nos próximos capítulos, mas ele se caracteriza pela observação de famílias com componente hadrônica muito maior do que o normal. Desde a primeira vez em que o fenômeno foi observado (1970), muitas tentativas foram feitas para explicar o fenômeno e também para observá-lo em experimentos com aceleradores. A lista de referências é extensa[9]. Todas estas tentativas (sejam elas para explicar o fenômeno ou para observá-lo em outros experimentos), baseiam na característica (acima citada) mais marcante dos Centauros, qual seja o tamanho da componente hadrônica em relação a eletromagnética. Por isto, é plenamente justificável analisar as famílias do tipo Centauro de uma nova maneira, evitando, na medida do possível, usar qualquer informação que dependa da identificação da componente hadrônica das famílias. Esta é a proposta deste trabalho.



Figura 1.1:  $\langle P_t^{\gamma} \rangle \times n_{\gamma}$  por família, dados da CBJ.



(a) Representação simplificada de um acelerador artificial (alvo móvel).



(b) Representação simplificada de experimento de Raios Cósmicos utilizando o detector da CBJ (alvo fixo).



Figura 1.2: Distribuições de momento transversal de secundários medidos pela CBJ.  $n_{\gamma}$  é a multiplicidade por intervalo de rapidez. Quanto maior  $n_{\gamma}$ , maior a multiplicidade da família. Como a multiplicidade aumenta com a energia da Interação Hadrônica, o gráfico mostra que a distribuição de  $P_t$  depende da energia, violando o scaling de Feynman.



Figura 1.3: Distribuição de momento transversal de dados medidos pelo experimento UA1[6], do CERN  $Sp\bar{p}S$  (colisor proton antí-proton). A energia  $\sqrt{s}$  das Interações Hadrônicas (no centro de massa) é 540 GeV.



Figura 1.4: Dados de  $\langle P_t^{\gamma} \rangle \times n_{\gamma,c} = N_{\gamma,c}/\Delta y$  de varios experimentos em aceleradores e da CBJ ("C-Jatos"). As energias dos experimentos em aceleradores são: ISR  $\sqrt{s} = 63$  GeV,  $Sp\bar{p}S \sqrt{s} = 540 GeV$ , Tevatron  $\sqrt{s} = 1.8$  TeV ( $\sqrt{s}$  é a energia da Interação Hadrônica no centro de massa dos primários).  $N_{\gamma}$  é o número de chuveiros do tipo 1 ( $\gamma$ 's) e  $N_c$  é o número de hádrons carregados.

# Capítulo 2

# Descrição do Detector e da Experiência

Neste capítulo apresenta-se uma descrição do detector utilizado pela CBJ bem como uma descrição da maneira pela qual ele permite o estudo das Interações Hadrônicas, usando a Radiação Cósmica como fonte de hádrons. Também são apresentadas as técnicas de análise usadas na determinação das grandezas e características observáveis, como energia, tipo da partícula, etc.

#### 2.1 Detector

O detector[10] utilizado pela CBJ é montado no Monte Chacaltaya (5220 m de altitude), à cerca de 20 Km de La Paz - Bolívia.

É composto de uma ou duas unidades semelhantes, unidade esta denominada *câmara*. Quando são superpostas duas destas, uma é chamada de *câmara superior* e a outra de *câmara inferior*. A câmara superior está localizada sobre a inferior, estando separadas por uma placa de material rico em carbono (piche, por exemplo) e por um vão livre de cerca de 1,7 m. A câmara superior tem área maior que a inferior e ambas estão dispostas de maneira a garantir que a maioria das partículas observadas na câmara inferior tenham passado pela superior e pelo alvo de carbono (figuras 2.1 e 2.2). Cada câmara é composta por um arranjo (tipo matriz) de blocos, e cada bloco é formado por uma pilha de envelopes contendo material fotossensível, envelopes estes separados entre si por placas de chumbo. Cada envelope contém geralmente dois filmes de Raio-X e uma placa de Emulsão Nuclear (figura 2.3).



Figura 2.1: Desenho do galpão onde é montado o detector juntamente com vista parcial do mesmo.



Figura 2.2: Desenho do detector. Notar a diferença de área entre a câmara superior e a inferior.

Os filmes de Raio-X e as placas de Emulsão Nuclear apresentam características diferentes (ver tabela 2.1). Isto faz com que as partículas sejam observadas com aspectos diferentes em cada um dos tipos de material fotossensível, conforme será descrito na próxima seção e no próximo capítulo.

#### 2.2 Detecção dos secundários

Uma Interação Hadrônica é uma interação entre dois ou mais hádrons, como sugere o nome, envolvendo a força forte. Tais interações podem ser estudadas através da observação das partículas produzidas pela interação e/ou sobreviventes (estas partículas são chamadas geralmente de secundários). Em experiências de raios cósmicos que tem por finalidade estudar estas interações, observam-se os secundários de interações de hádrons da Radiação Cósmica com outros hádrons. No caso específico da CBJ, dentre a miríade de

#### CAPÍTULO 2. DESCRIÇÃO DO DETECTOR E DA EXPERIÊNCIA 20



Figura 2.3: Foto dos blocos de uma câmara inferior. Notar o arranjo tipo "pilha"de placas de Pb e envelopes (contendo material fotossensível) que é usado para formar um bloco. Ao fundo pode ser vista parte da estrutura metálica usada para sustentar o alvo de carbono e a câmara superior, que não aparecem na foto.

partículas que podem ser produzidas na interação, o detector utilizado permite observar os  $\gamma$ 's, através das cascatas eletromagnéticas localizadas que estes  $\gamma$ 's induzem dentro do detector. Os hádrons da Radiação Cósmica (os primários) podem interagir com hádrons da atmosfera, do alvo de carbono ou das placas de chumbo. No primeiro caso, os secundários produzidos são chamados de A - Jatos, no segundo de C - Jatos e no terceiro de Pb - Jatos.

A produção dos secundários de primeira geração (os primeiros a serem produzidos pela Interação Hadrônica) ocorre geralmente através do fenômeno conhecido como Produção Múltipla de Mésons. Os mésons gerados em maior quantidade são os píons, que, pelo princípio da simetria de carga, são produzidos nos três tipos existentes ( $\pi^0$ ,  $\pi^+ e \pi^-$ ) com multiplicidades médias iguais. Outros mésons podem ser produzidos também (o  $\eta$ , por exemplo), porém em menor quantidade. Em geral os mésons podem (direta ou indiretamente, e com razão de produção variando muito) produzir  $\gamma$ 's. Estes  $\gamma$ 's, ao

Tipo	Fabricante	Diâmetro	Espessura	$(\mu m)$	Material	Densidade	Comprimento
		do	Película	Base	da	$(g/cm^2)$	de
		Grão	Fotossensível*		Base		Radiação
		$(\mu m)$					(cm)
Ν	Sakura	1,38	25	175	Polyester	$\simeq 3,70$	$\simeq 3,09$
100	Fuji	0,48	20	175	Polyester	$\simeq 3,70$	$\simeq$ 3,09
ET7B	Fuji	0,26	50	1500	Lucite	$^{3,73}$	$^{3,09}$

Tabela 2.1: Características dos filmes de Raio-X (N e 100) e das placas de Emulsão Nuclear (ET7B). Os filmes de Raio-X e placas de Emulsão Nuclear medem 40 cm x 50 cm e têm espessura conforme a tabela. \* Os filmes de Raio-X têm película fotossensível em ambas as faces, enquanto que as placas de Emulsão Nuclear têm película fotossensível somente numa das faces.

interagirem eletromagneticamente com o meio por onde passam darão início a cascatas eletromagnéticas, principalmente através dos efeitos de criação de par e por radiação de freamento.

E importante ressaltar que o detector da CBJ, como todo detector de partículas ionizantes, só é capaz de detectar partículas carregadas. Uma partícula carregada deixará um traço no material fotossensível ao atravessá-lo. Assim sendo, após a revelação do material fotossensível, é possível observar uma miríade de traços, em todas as direções possíveis (constituindo o que denominamos 'fundo'). Um determinado conjunto de traços só passa a ser de interesse quando é formado por vários traços paralelos ocupando uma pequena área do material fotossensível, de tal forma a se destacar do fundo. Tais conjuntos de traços paralelos podem ser observados como manchas nos filmes de Raios-X, ou como conjuntos de traços nas placas de Emulsão Nuclear (figuras 2.4 e 2.5).

Estes conjuntos de traços (*chuveiros*) são de interesse porque, em geral, eles são produzidos por conjuntos de  $e^+$ ,  $e^-$  que incidiram com uma mesma direção no material fotossensível. Por eles estarem próximos e terem uma mesma direção de incidência, conclui-se que cada um destes conjuntos de  $e^+$ ,  $e^-$  é parte de uma cascata eletromagnética que atravessa o detector (ou parte dele).

Como já foi dito anteriormente, estas cascatas eletromagnéticas (ou simplesmente "chuveiros") são, em geral, iniciadas por  $\gamma$ 's (mas também podem ser iniciadas por  $e^+$ 's ou  $e^-$ 's), dentro ou fora do detector. É importante então conhecer a origem destes  $\gamma$ 's que geraram as cascatas eletromagnéticas observadas no detector. As possibilidades para a origem destes  $\gamma$ 's são várias:



Figura 2.4: Visão ampliada da cascata eletromagnética de um  $\gamma$  no detector.

- eles podem ter sido produzidos diretamente na primeira interação da partícula primária (na atmosfera).
- eles podem ter sido produzidos na atmosfera por partículas de primeira geração (em geral por  $\pi^0$ 's ou então  $\eta$ 's, que decaem rapidamente em dois  $\gamma$ 's).
- eles podem ser resultado do decaimento de  $\pi^0$ 's ou  $\eta$ 's produzidos em Interações Hadrônicas de secundários no interior do detector (nas placas de chumbo ou no alvo de carbono), ou mesmo na atmosfera.
- etc.

Enfim, as possibilidades são muitas para a origem destes  $\gamma$ 's. A CBJ costuma classificar os chuveiros produzidos, de acordo com a origem, em dois tipos,  $\gamma$ 's ou hádrons:

- tipo 1 Se o chuveiro vem de um  $\pi^0$  (ou  $\eta$ ) de primeira geração, então ele é simplesmente chamado de  $\gamma$ .
- tipo 2 Caso contrário ele é considerado de origem hadrônica, ou mais simplesmente (com um abuso de linguagem) ele é chamado de *hádron*. Então, identificar uma determinada cascata eletromagnética observada no detector como um hádron, é uma forma simplificada de dizer



Figura 2.5: Fotos[11] de uma mancha num filme de Raio-X (foto superior) e de um conjunto de traços numa placa de Emulsão Nuclear (foto inferior).

que aquela cascata eletromagnética foi iniciada por um ou mais  $\gamma$ 's<sup>1</sup>, os quais, contudo, não foram produzidos no decaimento de um  $\pi^0$  ou  $\eta$  de primeira geração.

Para evitar confusões, denominaremos genericamente os secundários observados de  $\gamma$ 's ou ainda de chuveiros. Chamaremos a atenção quando se fizer necessária a distinção entre os tipos 1 ou 2, e usaremos a notação apropriada.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Em geral, nestes casos, o hádron interage muito próximo ou no interior do detector. Assim sendo os  $\gamma$ 's gerados pelos mésons produzidos na interação deste hádron não conseguem se separar o suficiente e são observados como um único chuveiro.

### 2.3 Determinação da posição dos $\gamma$ 's

A posição relativa (x,y) dos  $\gamma$ 's nos vários planos de detecção (associa-se um plano, ou camada, para cada envelope) pode ser determinada de duas maneiras:

- Nos filmes de Raio-X, usando-se microscópio provido de fotodensitômetro para determinar o ponto  $(x_o, y_o)$  de maior opacidade da mancha produzida pelo grupo de  $e^+$ 's e  $e^-$ 's associado ao  $\gamma$ . A posição (na camada correspondente) do  $\gamma$  que produziu este chuveiro é então dada por  $(x_o, y_o)$ .
- Quando a opacidade da mancha não é suficientemente alta para permitir o uso de um fotodensitômetro, a posição do  $\gamma$  no plano da camada é determinada pelo centro geométrico do conjunto de traços deixado pelo chuveiro na placa de Emulsão Nuclear. Este centro geométrico é determinado usando-se microscópio óptico equipado com micrômetros.

O primeiro método é executado atualmente por um fotodensitômetro Mitaka NGD 20x20 com resolução de 1  $\mu$ m, o qual é controlado por um microcomputador via interface serial. Os programas de controle são escritos em linguagem Basic.

O segundo método usa um microscópio óptico e é feito manualmente.

## 2.4 Busca dos $\gamma$ 's e construção dos mapas

O primeiro passo do processo de medição consiste no mapeamento dos  $\gamma$ 's. Para cada bloco é feito um mapa das posições de todos os chuveiros do bloco correspondente. Tal mapa é feito transpondo-se as localizações de todos os chuveiros em todas as camadas para um mesmo plano (sobrepondo os filmes de Raio - X). Assim, a "distância" medida no mapa entre chuveiros, de um mesmo  $\gamma$ , de camadas diferentes (d<sub>cd</sub>), corresponde à projeção no plano de detecção da distância real entre os chuveiros.

### 2.5 Identificação das famílias

Definimos família ao conjunto de todos os chuveiros provenientes de uma mesma Interação Hadrônica.

Primeiramente, é necessário identificar os chuveiros da cascata eletromagnética de cada  $\gamma$ . Isto é feito no mapa, verificando as seqüências de chuveiros (em camadas diferentes) que apresentam d<sub>cd</sub> iguais. Cada uma das seqüências que atende a este critério é considerada a cascata eletromagnética de um  $\gamma$ .

A seguir os filmes de Raio-X são sobrepostos e deslocados, até que os chuveiros de um conjunto de  $\gamma$ 's estejam sobrepostos. Cada um destes conjuntos é identificado como uma família.

## 2.6 Determinação do ângulo zenital das famílias $(\theta_f)$

O ângulo zenital da família pode ser determinado de três maneiras diferentes.

- O primeiro método usa as placas de Emulsão Nuclear para tal fim. Os chuveiros deixam traços na placa de Emulsão Nuclear ao passarem por ela. É possível, usando-se microscópio óptico equipado com micrômetros, determinar o comprimento da projeção destes traços no plano de detecção (basta observar as placas com o microscópio e medir o comprimento dos traços). A divisão deste comprimento pela espessura da Emulsão Nuclear vai fornecer a tangente do ângulo zenital da família<sup>2</sup>. Este método, apesar de mais preciso e de ser o único que funciona sempre, é o mais trabalhoso e demorado (figura 2.6).
- O segundo método utiliza os filmes de Raios-X. Os chuveiros, ao passarem pelos filmes de Raio-X, deixam manchas. Se  $\theta_f$  for suficientemente grande, as manchas (de um mesmo chuveiro) nas duas faces do filme não estarão superpostas (já que os filmes de Raio-X apresentam duas faces fotossensíveis separadas por uma base de material não fotossensível, ao contrário da Emulsão Nuclear que tem somente uma face fotossensível). Mede-se então a projeção no plano de detecção da distância entre os pontos de maior opacidade (determinação descrita em 2.3) de ambas manchas. A divisão desta distância pela espessura do filme vai fornecer

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Na realidade este método fornece o ângulo zenital do  $\gamma$  que gerou o conjunto de  $e^+$ 's e  $e^-$ 's. Porém a diferença entre este ângulo e  $\theta_f$  é tão pequena que provoca diferenças no comprimento da projeção menores que 1  $\mu$ m, tornando-a imperceptível por este método. Para minorar esta diferença considera-se o ângulo zenital  $\theta_f$  medindo-se o  $\gamma$  mais energético.



Figura 2.6: Determinação de  $\theta_f$  usando a placa de Emulsão Nuclear. A divisão da distância X pela espessura da emulsão fornecerá a tangente do ângulo zenital  $\theta_f$ .



Figura 2.7: Determinação de  $\theta_f$  usando o filme de Raio-X. A divisão de x pela distância entre as duas películas fotossensíveis fornecerá a tangente de  $\theta_f$ .

a tangente de  $\theta_f$ . Para encontrar a medida desta projeção basta medir com o fotodensitômetro a distância entre as manchas no plano do filme. Este método, apesar de mais rápido que o primeiro, nem sempre pode ser aplicado, pois não é sempre que o fotodensitômetro é capaz de distinguir as duas manchas (figura 2.7).

• O terceiro método utiliza os mapas. A razão entre  $d_{cd}$  e a distância entre as camadas, conhecida quando da montagem do detector, fornece a tangente de  $\theta_f$  da família ao qual este  $\gamma$  pertence. Notar que tanto faz qual  $\gamma$  da família cuja  $d_{cd}$  é medida, já que, como  $\theta_f$  é praticamente igual para todas os  $\gamma$ 's de uma mesma família (ver nota 2 da página 25), o valor de  $d_{cd}$  será o mesmo para todos os  $\gamma$ 's de uma mesma família. Tal método pode ser usado sempre (os mapas são elaborados para todos os blocos e contém todos os chuveiros detectados), porém é o de menor precisão.

## 2.7 Correção do plano de detecção

Como duas ou mais famílias nem sempre tem o mesmo ângulo zenital, para que se possa analisá-las em conjunto é necessário fazer uma correção das posições (x,y) dos  $\gamma$ 's no plano da camada (PD) para um plano perpendicular a direção de incidência (PPI). O plano escolhido é aquele que contém o  $\gamma$  mais energético. Tal correção não é exata, já que o correto seria escolher o PPI que passe pelo ponto em que o hádron primário (que deu origem à família em questão) atingiu o PD. Como é praticamente impossível identificar este ponto, usa-se como referência o ponto do  $\gamma$  mais energético. Isto porque o  $\gamma$  mais energético é aquele emitido





com menor ângulo de emissão  $\theta_{\gamma}$  em relação a direção de incidência do hádron primário (figura 2.8).

#### 2.8 Determinação da energia dos $\gamma$ 's

A energia  $E_{\gamma}$  de cada  $\gamma$  pode ser determinada por dois métodos. O primeiro utiliza a correlação entre a densidade de  $e^+$ 's e  $e^-$ 's  $(N_e)$  dos chuveiros produzidos pelo  $\gamma$  e a camada (mais especificamente, a correlação entre  $N_e$ e a profundidade no detector, medida em unidades de cascata - u.c.). Uma unidade de cascata (ou um comprimento de radiação  $X_0$ ) é definida por[12]:

$$\frac{1}{X_0} = 4\alpha \frac{N}{A} Z(Z+1) r_l^2 \frac{\ln(183 \ Z^{-\frac{1}{3}})}{1+0, 12 \left(\frac{Z}{82}\right)^2}$$
(2.1)

onde:

- $\alpha\,$ é a constante de estrutura fina.
- N é o número de Avogadro.
- Zé o número atômico do meio.
- A é o número de massa do meio.
- $r_l$  é o raio clássico do elétron.
- $X_0$  é o comprimento de radiação ou unidade de cascata do meio

Então  $X_0$  (ou uma unidade de cascata) é definido como o comprimento médio que um  $\gamma$  deve percorrer em um meio com número atômico Z e número de massa A para dar início a uma cascata eletromagnética.

O segundo utiliza a correlação prevista pela teoria das cascatas eletromagnéticas entre a opacidade D dos chuveiros do  $\gamma$  e a profundidade. Ambas correlações estão relacionadas com o ângulo zenital  $\theta_f$  e a energia  $E_{\gamma}$ , conforme detalhado a seguir.

#### 2.8.1 O método da contagem

Para um determinado  $\gamma$ , com energia  $E_{\gamma}$  e ângulo zenital  $\theta_f$ , a teoria das cascatas eletromagnéticas[13], levando em conta os vários efeitos eletromagnéticos citados na seção 2.2 e a geometria do detector, permite obter curvas analíticas que descrevem  $N_e$  em função da profundidade na câmara. Na realidade, as curvas  $N_e(u.c.)$  analíticas não permitem obter  $E_{\gamma}$  diretamente. O valor que está diretamente relacionado com  $E_{\gamma}$  é a grandeza  $N_{m \acute{a} x}$ , definida como o valor máximo que a densidade  $N_e$  assume para o  $\gamma$ . Esta relação entre  $N_{m \acute{a} x}$  e  $E_{\gamma}$  é obtida também através da teoria das cascatas eletromagnéticas.

Assim, conhecendo-se a densidade  $N_e$  em cada camada<sup>3</sup>, e a profundidade desta camada em u.c., as curvas analíticas são ajustadas aos dados experimentais, usando como parâmetro de ajuste o  $\theta_f$ . Tal ajuste é feito atualmente por um pacote de programas de computador que permitem corrigir as curvas padrão<sup>4</sup> para a geometria do detector, e ajustar as curvas. Feito o ajuste, determina-se o ponto de máximo da curva  $N_e(u.c.)$  ajustada. Conhecendo-se  $N_{máx}$  determina-se  $E_{\gamma}$ , usando as curvas analíticas que relacionam as duas grandezas.

#### 2.8.2 O método da opacidade

É natural supor que as funções  $N_e(u.c.) \in D(u.c.)$  (opacidade D em função da profundidade na câmara) estejam relacionadas de alguma forma. De fato, tal relação pode ser obtida usando-se a teoria das cascatas eletromagnéticas[14], porém fatores relacionados com o tipo do filme, tempo de revelação, etc, devem ser considerados também. Para contornar este problema, são construídas curvas de calibração, relacionando  $D_{máx}$  (que é definida como o valor máximo que D assume para o  $\gamma$ ) com  $E_{\gamma}$ .

Para construir estas curvas de calibração, é necessário escolher um conjunto de  $\gamma$ 's. A seguir, aplica-se o método da contagem para determinar  $E_{\gamma}$ de cada um dos  $\gamma$ 's do conjunto. Ajustando-se as curvas analíticas D(u.c.)(corrigidas para a geometria do detector[15], porém não corrigidas para as características do processamento químico do filme) aos pontos experimentais  $D \ge u.c.$ , obtém-se  $D_{máx}$  para cada um dos  $\gamma$ 's do conjunto. Com os valores de  $D_{máx}$  assim obtidos e os de  $E_{\gamma}$  obtidos pelo método da contagem, são construídas as curvas de calibração  $D_{máx} \ge E_{\gamma}$ , parametrizadas para o ângulo zenital  $\theta_f$ .

Obtidas as curvas de calibração, a energia dos outros  $\gamma$ 's pode ser deter-

 $<sup>^3 \</sup>rm Naturalmente,$ esta contagem é feita numa área igual em todas as camadas. Esta área de contagem também é levada em conta quando do cálculo das curvas analíticas

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Na verdade as curvas analíticas são calculadas para uma geometria padrão. Para se fazer o ajuste aos dados experimentais  $N_e(u.c.)$  é necessário corrigir as curvas para a geometria do detector. O processo é feito desta maneira, porque o cálculo das curvas analíticas para cada geometria exige muito tempo de computação, enquanto que a correção das curvas é feita muito mais rapidamente.

minada usando-se somente os  $D_{m\dot{a}x}$  obtidos por ajuste para cada um destes  $\gamma$ 's e a curva de calibração.

Todo este processo está também automatizado e usa-se o mesmo pacote de programas citado em 2.8.1.

Alguns exemplos de ajustes da curva analítica D(u.c.) a dados experimentais  $D \ge 0.5$  x u.c. podem ser vistos nas figuras 2.9 e 2.10, para quatro chuveiros diferentes. Os pontos experimentais estão representados pelos círculos abertos. As linhas contínuas representam o melhor ajuste da curva D(u.c.)encontrado pelo programa. Nos chuveiros da figura 2.10 é possível identificar dois picos de opacidade. Nestes casos o programa ajusta duas curvas D(u.c.)aos dados, de tal forma que a soma destas duas curvas (a linha pontilhada) ajuste-se da melhor forma possível aos dados experimentais. Acima dos gráficos aparecem algumas informações:

- A identificação do chuveiro, *BLOCK NO.* e *SHOWER NO.*. Por exemplo, o código BLOCK NO. C16S086N significa que o chuveiro mostrado pertence à uma família observada na Câmara 16, parte Superior, bloco número 086 e que o filme de Raios-X utilizado é o do tipo N (ver tabela 2.1).
- A opacidade máxima da curva D(u.c.) (necessária para a obtenção da energia E<sub>γ</sub>), D<sub>max</sub>.
- A tangente do ângulo zenital  $(\theta_f)$  da família à qual pertence o chuveiro (usada pelo programa no cálculo das curvas analíticas), M
- O desvio no valor de  $D_{max}$ , SIGMA
- O diferença entre a posição (em u.c.) do máximo de opacidade do chuveiro sendo analisado e um chuveiro padrão de mesma energia iniciado por um único γ, DELTA

## 2.9 Determinação do CPE - Centro Ponderado por Energia

Estando as posições  $(x_i, y_i)$  dos  $\gamma$ 's de cada família corrigidas conforme descrito na seção 2.7, uma mudança de referencial faz-se necessária nas posições



Figura 2.9: Ajustes de curvas de transição para chuveiros com somente um máximo de opacidade.



Figura 2.10: Exemplos de curvas de transição para chuveiros com dois máximos de opacidade. Provavelmente os chuveiros são do tipo 2, conforme discussão do final da seção 2.2.

 $(x_i, y_i)$ , para que as famílias possam ser analisadas em conjunto. Tal correção consiste em transformar as coordenadas  $(x_i, y_i)$  do referencial original para as coordenadas no referencial do CPE. Sendo  $(x_{ci}, y_{ci})$  as coordenadas no referencial do CPE e  $(x_{CPE}, y_{CPE})$  as coordenadas do CPE no referencial original, tem-se para cada família:

$$x_{CPE} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{\gamma}} x_i E_{\gamma_i}}{\sum_{i=1}^{N_{\gamma}} E_{\gamma_i}}$$
(2.2)

$$y_{CPE} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{\gamma}} y_i E_{\gamma_i}}{\sum_{i=1}^{N_{\gamma}} E_{\gamma_i}}$$
(2.3)

$$x_{ci} = x_i - x_{CPE} \tag{2.4}$$

$$y_{ci} = y_i - y_{CPE} \tag{2.5}$$

Consideram-se as coordenadas do CPE como sendo da posição em que o hádron primário atingiria o plano PPI.

Em todas as análises que seguem, todas as coordenadas usadas foram corrigidas usando as expressões 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 e a correção de plano descrita na seção 2.7.

## 2.10 Determinação da altura de interação $(H_I)$ e $\theta_{\gamma}$

Conforme descrito em 2.2, considerando-se a região onde ocorreu a Interação Hadrônica, os secundários por ela produzidos (a família) podem ser classificadas em A - Jatos, C - Jatos ou Pb - Jatos. Para cada um destes tipos existe uma maneira de se determinar o ponto onde ocorreu a interação, geralmente denominado vértice. O conhecimento da altura de interação é necessário para que se possa determinar o ângulo zenital de emissão do  $\gamma$  ( $\theta_{\gamma}$ ) em relação a direção de incidência do hádron primário (ver figura 2.11).

Ao longo desta seção serão feitas referências ao processo de "acoplamento" de dois  $\gamma$ 's em um  $\pi^0$ . É importante ressaltar que, nesta seção, deve-se entender  $\gamma$  como chuveiros do tipo 1, conforme descrito no final da seção 2.2.

A seção 2.13 descreve os métodos utilizados para identificar se um chuveiro é do tipo 1 ou tipo 2.

# 2.10.1 Acoplamento (Cinemática do decaimento $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ )

Relações cinemáticas relativísticas envolvendo conservação de momento linear e energia aplicadas a um decaimento  $\pi^0 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$  permitem obter a relação:

$$d_{12} = \frac{\sqrt{E_1 E_2} R_{12}}{M_{\pi^0}} \tag{2.6}$$

onde:

- $R_{12}$  é a distância entre  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  (medida no PPI).
- $d_{12}$  é a distância do ponto em que ocorreu a interação ao CPE (obviamente esta distância é medida perpendicularmente ao PPI).

 $E_i$  é a energia do i-ésimo  $\gamma$ .

 $M_{\pi^0}$  é a massa de repouso (ou massa invariante) do  $\pi^0$ .

O processo de combinar  $\gamma_i \in \gamma_j$  para obter a distância  $d_{ij}$  do CPE ao ponto de interação é chamado de *acoplamento*. Se o acoplamento  $\gamma_i \gamma_j$  é verdadeiro, isto é, se  $\gamma_i \in \gamma_j$  realmente vieram do mesmo  $\pi^0$ , a altura  $H_{ij}$  do ponto onde o  $\pi^0$  decai nos dois  $\gamma$ 's é dada por  $H_{ij} = d_{ij} \cos(\theta_f)$ . A altura da Interação Hadrônica pode ser aproximada por  $H_{ij}$ , pois o tempo de vida do  $\pi^0$  é muito pequeno (da ordem de  $10^{-16}$  s no sistema de repouso do  $\pi^0$  [16]), fazendo com que ele percorra uma distância muito pequena antes de decair.

#### 2.10.2 C - Jatos

Aqui, tenta-se determinar quais pares de  $\gamma$ 's decaíram de  $\pi^0$ 's usando o seguinte procedimento:

• calcula-se, usando a expressão (2.6), a altura  $H_{ij}$  associada a todas as combinações 2 a 2 dos  $\gamma$ 's pertencentes ao C - Jato cuja altura se quer determinar.



- Figura 2.11: Representação simplificada de uma família com multiplicidade igual a quatro. Na figura estão indicados  $\theta_{\gamma}$  e  $r_{\gamma}$  de um dos quatro chuveiros observados, bem como a altura de interação  $H_I$  e o centro ponderado por energia CPE da família (todos medidos no/ou em relação ao PPI). Na figura, a dimensão de  $\theta_{\gamma}$  foi exagerada por uma questão de clareza, contudo, na realidade, as direções dos secundários e a linha que liga o vértice da interação ao CPE são quase paralelas. Em geral,  $\theta_{\gamma} < 10^{-3}$  radianos.
  - como, no caso dos C Jatos, sabe-se que a interação ocorreu no alvo de carbono, pode-se restringir os valores de  $H_{ij}$  possíveis a uma faixa que coloque a interação dentro do alvo de carbono.
  - assim, os pares  $\gamma_i \gamma_j$  cuja  $H_{ij}$  estão nesta faixa, são considerados como acoplamentos  $\gamma_i \gamma_j$  legítimos, isto é, cada um desses pares é considerado como tendo sido produzido por um  $\pi^0$ .

A altura de interação do C - Jato sob análise é então a média das alturas  $H_{ij}$  dos acoplamentos legítimos.

Em geral nem todos os  $\gamma$ 's detectados são identificados como provenientes de  $\pi^0$ . Isto pode acontecer por várias razões, como por exemplo:

- O par do  $\gamma$ não ter sido detectado por ter energia inferior ao limiar de detecção.
- O  $\gamma$  ter sido produzido por um méson que não foi o  $\pi^0$ .
- O  $\gamma$  ter sido produzido diretamente na Interação Hadrônica.

Todo este processo (incluindo a transformação para o sistema de coordenadas do CPE) é feito por um programa de computador desenvolvido especialmente para esta finalidade.

#### 2.10.3 A - Jatos



Figura 2.12: Determinação da altura através de triangulação.

A determinação da altura de interação nos A - Jatos é um processo mais complicado. O que se faz basicamente é procurar o conjunto de acoplamentos  $\gamma_i \gamma_j$  (sem repetir os  $\gamma$ 's em acoplamentos diferentes) que tenha a distribuição de  $H_{ij}$  de menor desvio padrão. A altura média da distribuição assim escolhida é considerada a altura de interação do A - Jato. Nem sempre este procedimento é factível.

Para determinar a altura pode-se usar também o método da triangulação. Em certas situações favoráveis, é possível que um ou mais pares de  $\gamma$ 's da família sejam observados simultaneamente em um número razoável
de camadas. Assim sendo, pode ser que a distância entre os dois  $\gamma$ 's numa camada  $(d_1)$  seja suficientemente diferente da mesma distância numa outra camada  $(d_2)$ . Caso estas condições se verifiquem, é possível usar uma relação trigonométrica simples envolvendo  $d_1$ ,  $d_2$  e a distância  $(l_{12})$  entre as camadas acima mencionadas (conhecida da montagem do detector), para determinar a altura da interação (ver figura 2.12). A princípio este método pode ser usado desde que a multiplicidade seja maior ou igual a dois. Contudo, apesar da boa resolução em posição do detector ( $\simeq 1\mu m$ ), nem sempre ela é suficiente para permitir a determinação da diferença  $d_1 - d_2$ . Nem sempre é possível também encontrar um par de  $\gamma$ 's que seja observado simultaneamente em número suficientemente grande de camadas.

#### 2.11 A Relação $\mathcal{R}$

Verificou-se experimentalmente que a emissão de partículas (sejam elas mésons,  $\gamma$ 's, elétrons, etc) ocorre isotropicamente no referencial de laboratório (isotropia no ângulo azimutal) e de centro de massa, quando são superpostas as distribuições de ângulo azimutal de várias famílias. Alguns modelos existentes para Interações Hadrônicas supõem a formação de um estado intermediário entre a colisão dos hádrons e o decaimento nos secundários de primeira geração (por exemplo, ver [17]c)).



Figura 2.13: Curva universal  $\mathcal{R}(\Gamma\theta)$  conforme expressão (2.12).

A CBJ procura classificar estes estados usando grandezas como a massa invariante  $\mathcal{M}_{\gamma}$ , o momento transversal médio  $\langle P_t \rangle$ , fator de Lorentz médio  $\langle \Gamma \rangle$ , etc.

Baseado em trabalho original de [17], onde foram calculadas expressões (supondo emissão isotrópica e uma só interação) para as grandezas  $\sum E_{\gamma}$ (energia total do estado intermediário em forma de  $\gamma$ 's) e  $\sum (E_{\gamma}\theta_{\gamma})$  (momento transversal total na forma de  $\gamma$ 's), os termos de ordem maior em  $\theta_{\gamma}$  foram calculados,  $\sum (E_{\gamma}\theta_{\gamma}^2) \in \sum (E_{\gamma}\theta_{\gamma}^3)$ . Os somatórios são feitos para todos os  $\gamma$ 's produzidos pela interação. As expressões (apêndice A) explícitas são:

$$\sum E_{\gamma} = \Gamma \mathcal{M}_{\gamma} \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 + \Gamma^2 \theta_{\gamma}^2\right)^2} \right]$$
(2.7)

$$\sum \left(\theta_{\gamma} E_{\gamma}\right) = \frac{\mathcal{M}_{\gamma}}{2} \left[ \arctan(\Gamma \theta_{\gamma}) - \frac{1 - \Gamma^2 \theta_{\gamma}^2}{\left(1 + \Gamma^2 \theta_{\gamma}^2\right)^2} \Gamma \theta_{\gamma} \right]$$
(2.8)

$$\sum \left(\theta_{\gamma}^{2} E_{\gamma}\right) = \frac{\mathcal{M}_{\gamma}}{\Gamma} \left[\frac{\Gamma^{2} \theta_{\gamma}^{2}}{1 + \Gamma^{2} \theta_{\gamma}^{2}}\right]^{2}$$
(2.9)

$$\sum \left(\theta_{\gamma}^{3} E_{\gamma}\right) = \frac{\mathcal{M}_{\gamma}}{2\Gamma^{2}} \left[3 \arctan(\Gamma \theta_{\gamma}) - \frac{3 + 5\Gamma^{2} \theta_{\gamma}^{2}}{\left(1 + \Gamma^{2} \theta_{\gamma}^{2}\right)^{2}} \Gamma \theta\right]$$
(2.10)

Verificou-se que combinando tais grandezas da seguinte forma:

$$\mathcal{R}_{j} = \frac{\sum_{i=1}^{j} E_{\gamma_{i}} \sum_{i=1}^{j} E_{\gamma_{i}} \theta_{\gamma_{i}}^{2}}{(\frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{j} E_{\gamma_{i}} \theta_{\gamma_{i}})^{2}} , \quad \theta_{\gamma_{i}} \le \theta_{\gamma_{i+1}}$$
(2.11)

obtém-se (usando as expressões (2.7) à (2.10)) a expressão:

$$\mathcal{R}(\Gamma,\theta) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{(\Gamma^2\theta^2 + 2)\Gamma^6\theta^6}{\left[(1 + \Gamma^2\theta^2)^2 \arctan(\Gamma\theta) - (1 - \Gamma^2\theta^2)\Gamma\theta\right]^2}$$
(2.12)

a qual é expressão de uma curva universal (não depende da massa  $\mathcal{M}_{\gamma}$  do estado intermediário e pode ser escrita como função de  $x = \Gamma \theta$ , figura 2.13). A expressão (2.11) define a grandeza denominada  $\mathcal{R}$  cuja expressão analítica, obtida supondo emissão isotrópica e uma só interação, é dada por (2.12). Assim, o ajuste da expressão (2.12) aos pontos obtidos usando os dados experimentais ( $\theta_{\gamma}, E_{\gamma}$ ) na expressão (2.11), permite obter o valor de  $\Gamma$  (que é o parâmetro de ajuste) para cada família, bem como avaliar o "grau de isotropia" da família através da qualidade do ajuste.

Pode acontecer que, o hádron primário interaja mais de uma vez, produzindo uma ou mais famílias que seriam identificadas como uma só. O ajuste da relação  $\mathcal{R}$  também permite identificar estes casos, novamente através da avaliação da qualidade do ajuste. Isto porque a expressão (2.12) é obtida partindo da hipótese de uma única interação com emissão isotrópica. Assim, dados provenientes de situações diferentes (emissão não isotrópica e/ou mais de uma interação) não se ajustarão bem a curva (2.12).

Nos casos em que não é possível determinar  $\theta_{\gamma}$  (quase sempre devido a impossibilidade de se medir a altura de interação  $H_I$ ),  $\theta_{\gamma}$  pode ser substituído por  $r_{\gamma}$ , a distância do  $\gamma$  ao CPE (ver figura 2.11). Lembrando que  $\theta_{\gamma}$  é sempre muito pequeno, temos que  $\theta_{\gamma} \simeq \frac{r_{\gamma}}{H_I}$ . Substituindo  $\theta_{\gamma}$  e definindo a variável  $\bar{r} = \frac{H_I}{\Gamma}$ , as expressões (2.11) e (2.12) ficam:

$$\mathcal{R}_{j} = \frac{\sum_{i=1}^{j} E_{\gamma_{i}} \sum_{i=1}^{j} E_{\gamma_{i}} r_{\gamma_{i}}^{2}}{(\frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{j} E_{\gamma_{i}} r_{\gamma_{i}})^{2}} , r_{\gamma_{i}} \leq r_{\gamma_{i+1}}$$
(2.13)

е

$$\mathcal{R}(\bar{r},r) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\left(\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2 + 2\right) \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^6}{\left[\left(1 + \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2\right)^2 \arctan\left(\frac{r}{\bar{r}}\right) - \left(1 - \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2\right)\frac{r}{\bar{r}}\right]^2}$$
(2.14)

A maneira mais usual de se medir a qualidade do ajuste da equação (2.14) aos pontos obtidos da expressão (2.13) usando-se os dados experimentais seria através do teste estatístico do  $\chi^2$ , ou então, a partir da distribuição de erros para  $\mathcal{R}_j$  obter a função de máxima verossimilhança<sup>5</sup> (ver [23]). Em ambas é necessário conhecer a distribuição de erro de  $\mathcal{R}_j$ . Uma simples propagação de erro na expressão (2.13) mostrou-se ineficiente, provavelmente devido a correlações de ordem superior entre os vários termos das somatórias. Para contornar esta dificuldade, usamos uma técnica baseada no método de *Monte Carlo* (ver [21]). Após algumas dificuldades na aplicação da técnica (principalmente para reduzir o tempo de processamento para um valor razoável), os resultados obtidos não se mostraram satisfatórios. A figura 2.14 mostra alguns exemplos típicos do ajuste da expressão (2.14) a dados experimentais de famílias do tipo C-Jato, utilizando os erros resultantes da já citada técnica de propagação de erros. É possível observar nesta figura alguns exemplos de resultados que consideramos insatisfatórios. Por exemplo, observa-se

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Apesar de me referir somente ao par de expressões (2.13) e (2.14) por questões de clareza, as mesmas observações valem para as expressões (2.11) e (2.12), trocando as referências a  $\bar{r} e r_{\gamma}$  por  $\Gamma e \theta_{\gamma}$ , respectivamente

visualmente que a qualidade dos ajustes nos gráficos de número 2 e 6 é aproximadamente a mesma. Apesar disto, os valores respectivos de CHIREDU (1,51643 e 61,3888) não refletem esta observação. Outro exemplo, mais sutil, é o CHIREDU do gráfico 4, muito menor que todos os outros. Para todos os chuveiros (secundários observados) do C-Jato do gráfico 4,  $r_{\gamma} > \bar{r}$ , segundo o ajuste. Isto é, no mínimo, estranho, pois sabe-se que o detector tem maior eficiência na observação dos chuveiros com  $r_{\gamma} < \bar{r}$  (aqueles emitidos para frente, no referencial do centro de massa). Assim sendo, há algum problema no ajuste do gráfico 4, porém o respectivo valor de CHIREDU não reflete isto. Casos como estes se repetem nos vários testes de ajuste feitos utilizando-se esta técnica de propagação de erros. Aparentemente há algum problema na propagação de erro, que está distorcendo a distribuição de erro de  $\mathcal{R}_i$  e conseqüentemente o valor do  $\chi^2$ . Isto, por sua vez, causa problemas no ajuste, pois o mesmo é baseado na minimização do  $\chi^2$ . Nos parece que <u>não</u> se trata de um problema na técnica de propagação utilizada. É mais provável que algum efeito importante não tenha sido incluído na propagação.

Para exemplificar, uma indicação de um tal efeito é o fato do limite inferior da expressão (2.14),  $\simeq 0,69$  ser maior que o valor inicial ( $\mathcal{R}_1$ ) da expressão (2.13),  $\simeq 0,62$ . Isto é natural, pois a expressão (2.14) é obtida de (2.13) através de integrações em  $E_{\gamma}$  e  $r_{\gamma}$  à partir de zero, enquanto que o detector tem limites inferiores de detecção para estas grandezas maiores que zero. Assim sendo, há uma diferença (que deve diminuir à medida que  $r_{\gamma}$  aumenta) entre as expressões (2.13) e (2.14), independente de qualquer erro experimental nas medidas de  $E_{\gamma}$  ou  $r_{\gamma}$ . Este efeito deveria ser incluído na propagação de erro, porém é difícil quantificá-lo analiticamente. Talvez fosse possível quantificá-lo utilizando uma simulação da seqüência:

Interação Hadrônica  $\downarrow$ Estado Intermediário (bola de fogo)  $\downarrow$ Decaimento Isotrópico  $\downarrow$ Família  $\downarrow$ Detector  $\downarrow$ Dados observados



Figura 2.14: Ajustes da função  $\mathcal{R}(\bar{r}, r)$  a dados experimentais de famílias do tipo C-Jato. As informações no canto superior esquerdo de cada gráfico são (de cima para baixo e da esquerda para a direita) o número do gráfico (1 ao 10), o identificador do C-Jato (CJETID), o valor de  $\bar{r}$  e o seu respectivo erro ( $\simeq 63\%$  C.F.). No canto inferior direito aparece o  $\chi^2$  reduzido do ajuste (CHIREDU).

que permitisse comparar parâmetros (como o fator de Lorentz ou o  $\bar{r}$ ) utilizados pela simulação com os obtidos através da aplicação das técnicas de propagação de erro e de ajuste da relação  $\mathcal{R}$  aos "Dados observados" simulados. Contudo, o desenvolvimento de tal simulação não é uma tarefa simples, e provavelmente seria tema para mais uma tese.

Em virtude destas dificuldades em avaliar que efeitos devem ou não ser considerados na propagação de erros, optamos por utilizar como medida relativa da qualidade de ajuste o parâmetro dqm, definido como:

$$dqm = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(\mathcal{R}_i - \mathcal{R}(\bar{r}, r_i)\right)^2}{N}$$
(2.15)

Entendemos que o parâmetro dqm pode ser usado somente para comparar a qualidade do ajuste de duas ou mais família entre si (medida relativa da qualidade dos ajustes) e nunca para tentar obter um nível de confiança (C.F.) para o ajuste. Ele pode ser usado desta forma porque é razoável supor que, quaisquer que sejam os efeitos que devam ser considerados na propagação de erros (incluindo os erros experimentais), os mesmos devem atuar, em média, da mesma forma sobre todas as famílias.

Para outros detalhes sobre a Relação R, ver [18, 19, 20].

## 2.12 mDW, o método modificado de Duller-Walker

Conforme citado anteriormente, é interesse da CBJ identificar e quantificar grandezas características do estado intermediário que se supõe formar entre a colisão de hádrons e a produção dos secundários de primeira geração. Portanto, é necessário de alguma forma identificar os tipos de estados intermediários e separar as famílias produzidas por estes estados.

Existem algumas maneiras de se fazer isto. Uma delas é utilizar o método de Duller-Walker[22]. Neste método usa-se uma grandeza  $\mathcal{F}$  definida como a razão entre o número de  $\gamma$ 's com  $\theta_{\gamma}$  menor que um determinado  $\theta$  e o número total de  $\gamma$ 's. O fato é que este número total de  $\gamma$ 's raramente é conhecido nos dados experimentais, pois o detector tem um limiar de detecção (cerca de 200 GeV, em casos ótimos), um ou mais  $\gamma$ 's podem não ter atingido o detector, etc. Assim pensou-se em um método no qual não é necessário conhecer a priori o número total de  $\gamma$ 's.



Figura 2.15: Curva da função  $mDW(\theta_{\gamma})$  (equação 2.17). Notar o coeficiente angular 2 da "parte reta"da mesma. A curva foi normalizada por  $\Gamma \mathcal{M}_{\gamma}$ .

Nota-se (apêndice A) que as expressões (2.7) à (2.10) convergem assintoticamente para um valor constante quando  $\theta_{\gamma}$  tende a  $+\infty$ . Nota-se ainda que, combinando-se algebricamente as grandezas<sup>6</sup>  $\sum E_{\gamma}$ ,  $\sum E_{\gamma}\theta_{\gamma}$ ,  $\sum (E_{\gamma}\theta_{\gamma}^2)$ e  $\sum (E_{\gamma}\theta_{\gamma}^3)$  na forma:

$$mDW_{j} = \frac{1}{4\mathcal{M}_{\gamma}\Gamma} \left[ \sum_{i=1}^{j} E_{\gamma_{i}} + \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{j} E_{\gamma_{i}}\Gamma\theta_{\gamma_{i}} + \sum_{i=1}^{j} E_{\gamma_{i}} \left(\Gamma\theta_{\gamma_{i}}\right)^{2} + \frac{4}{3\pi} \sum_{i=1}^{j} E_{\gamma_{i}} \left(\Gamma\theta_{\gamma_{i}}\right)^{3} \right], \quad \theta_{i} \leq \theta_{i+1} \qquad (2.16)$$

obtém-se, usando novamente (2.7) à (2.10):

$$mDW(\theta_{\gamma}) = \frac{1}{\mathcal{M}_{\gamma}\Gamma} \left\{ \frac{1}{\left(1 + \Gamma^{2}\theta_{\gamma}^{2}\right)^{2}} \left[ \frac{\Gamma^{4}\theta_{\gamma}^{4}}{2} - \frac{1}{3\pi}\Gamma^{3}\theta_{\gamma}^{3} + \frac{\Gamma^{2}\theta_{\gamma}^{2}}{2} - \frac{1}{\pi}\Gamma\theta_{\gamma} \right] + \frac{1}{\pi}\arctan(\Gamma\theta_{\gamma}) \right\}$$
(2.17)

<sup>6</sup>Os coeficientes que multiplicam cada um dos termos  $(1, 4/\pi, 1 e 4/3\pi)$  servem somente para normalizar cada um dos termos de forma que todos convirjam para 1.

A expressão (2.17) possui coeficiente angular 2 (em um gráfico dilog, figura 2.15) em decorrência da hipótese sobre isotropia. É chamada de mDWem alusão a modified Duller-Walker, pois similarmente ao Duller-Walker original, ela é composta de somatórios de grandezas até um determinado  $\theta_{\gamma}$  (a diferença é que ela não necessita do conhecimento prévio do número total de  $\gamma$ 's).

Assim como ocorre para a relação  $\mathcal{R}$ , também no caso do mDW é possível substituir  $\theta_{\gamma} \in \Gamma$  por  $r_{\gamma} \in \bar{r}$ , respectivamente. Fazendo estas substituições e lembrando que  $\mathcal{M}_{\gamma}\Gamma = \Sigma E_{\gamma}$  ( $\Sigma E_{\gamma}$  é a energia total da família em forma de  $\gamma$ 's) as expressões (2.16) e (2.17) ficam, respectivamente:

$$mDW_{j} = \frac{1}{4\Sigma E_{\gamma}} \left[ \sum_{i=1}^{j} E_{\gamma_{i}} + \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{j} E_{\gamma_{i}} \frac{r_{\gamma_{i}}}{\bar{r}} + \sum_{i=1}^{j} E_{\gamma_{i}} \left(\frac{r_{\gamma_{i}}}{\bar{r}}\right)^{2} + \frac{4}{3\pi} \sum_{i=1}^{j} E_{\gamma_{i}} \left(\frac{r_{\gamma_{i}}}{\bar{r}}\right)^{3} \right], \quad r_{i} \leq r_{i+1} \qquad (2.18)$$

e:

$$mDW(r_{\gamma}) = \frac{1}{\Sigma E_{\gamma}} \left\{ \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{r_{\gamma}}{\bar{r}}\right)^2\right)^2} \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{r_{\gamma}}{\bar{r}}\right)^4 - \frac{1}{3\pi} \left(\frac{r_{\gamma}}{\bar{r}}\right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{r_{\gamma}}{\bar{r}}\right)^2 - \frac{1}{\pi} \left(\frac{r_{\gamma}}{\bar{r}}\right) \right] + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{r_{\gamma}}{\bar{r}}\right) \right\}$$
(2.19)

A expressão (2.19), assim como (2.17) também possui coeficiente angular 2, em um gráfico dilog. Usando este propriedade definimos o parâmetro *esfericidade* da família. Ajustando-se uma função do tipo  $f(r_{\gamma}) = ar_{\gamma}^{b}$  aos pontos  $(r_{\gamma_{j}}, mDW_{j})$  obtidos da expressão (2.18) para uma dada família, obtém-se os parâmetros  $a \in b$  da função  $f(r_{\gamma})$ . O parâmetro b é definido como a *esfericidade* da família.

Através da esfericidade é possível avaliar o grau relativo de isotropia de uma família em relação à uma ou mais famílias tomadas como referência. Trata-se de um critério complementar à relação  $\mathcal{R}$ .

#### 2.13 Identificação das partículas

Conforme descrito no final da seção 2.2, os chuveiros observados no detector podem ser classificados em dois grupos diferentes, de acordo com a maneira como eles foram iniciados:

- tipo 1 Se o chuveiro foi iniciado por um  $\gamma$  produzido por um  $\pi^0$  (ou  $\eta$ ) de primeira geração, então ele é classificado como um  $\gamma$ .
- tipo 2 Caso contrário ele é considerado de origem hadrônica, ou mais simplesmente (com um abuso de linguagem) ele é dito um *hádron* (ver discussão no final da seção 2.2).

Basicamente, são três os critérios que podem ser usados para se identificar um chuveiro do tipo 2 (hádron).

O primeiro critério baseia-se na curva de transição do chuveiro. É pouco provável que um chuveiro do tipo 1 ( $\gamma$ ) apresente dois ou mais máximos de opacidade na curva de transição. É mais provável que os dois ou mais máximos na curva de transição sejam causados pela superposição de múltiplos  $\gamma$ 's (chuveiros) de um mesmo hádron em diferentes graus de desenvolvimento, ou seja, o hádron geraria dois ou mais chuveiros com máximos de opacidade deslocados, os quais, contudo, seriam identificados nos filmes de Raios-X como um só chuveiro com vários máximos. A figura 2.10 mostra curvas de transição com dois máximos de opacidade.

O segundo critério usa a profundidade na qual o chuveiro é observado pela primeira vez (início do chuveiro). Para qualquer chuveiro, seja ele do tipo 1 ou 2, é maior a probabilidade de que ele seja observado logo nas primeiras camadas. Contudo, como o livre caminho médio de um hádron é maior que o de um  $\gamma$ , é maior a probabilidade de que um chuveiro com início em maiores profundidades seja um hádron (tipo 2). É claro que esta probabilidade depende de vários fatores, como energia, direção de entrada, partícula, etc., entretanto considera-se que chuveiros que são observados somente depois de 8 a 10 u.c. de Pb são do tipo 2.

O terceiro critério utiliza o aspecto do chuveiro na placa de Emulsão Nuclear para identificar o tipo. Há situações nas quais um chuveiro observado no filme de Raios-X como uma única mancha, mostra, na placa de Emulsão Nuclear uma estrutura multinuclear (*multicore*). Isto significa (a menos de falhas na Emulsão Nuclear ou no processo de desenvolvimento do chuveiro) que aquilo que parecia um único chuveiro no filme de Raios-X é na realidade um conjunto de chuveiros muito próximos (distâncias da ordem de  $10^2 \ \mu m$ ), de forma que o filme de Raios-X não é capaz de mostrar a separação entre eles. Novamente, tal situação é mais fácil de ser explicada supondo que o chuveiro é um hádron (tipo 2). Quanto maior o número destes núcleos, menor a chance de que tal chuveiro seja do tipo 1.

Excluindo os casos em que falhas não identificadas no processo de medida ou no material fotossensível possam provocar as situações descritas nos três parágrafos anteriores, todos os três critérios são, individualmente, conservadores, isto é, eles subestimam o número de chuveiros do tipo 2 (hádrons). Para tentar contornar a possibilidade de falhas, o que se faz é só identificar um chuveiro como hádron (tipo 2), quando ele atender a pelo menos dois dos critérios acima. Caso isto não ocorra, o chuveiro é identificado como um  $\gamma$ (tipo 1).

#### 2.13.1 Determinação do número de hádrons produzidos na Interação

Utilizando os critérios anteriores é possível determinar o número de hádrons que interagiram na câmara superior (os Pb-Jatos observados na câmara superior), no alvo de carbono (os C-Jatos) e na câmara inferior (os Pb-Jatos observados na câmara inferior). Conhecendo estes números e a geometria do detector, mais especificamente a espessura das duas câmaras e do alvo de carbono em unidades de livre caminho médio de interação  $\lambda$  de um hádron, é possível estimar o número de hádrons  $N_p$  produzidos na Interação Hadrônica. Após percorrer uma espessura de material<sup>7</sup> t (dada em unidades de  $\lambda$  e medida a partir do ponto em que ocorreu a Interação Hadrônica), parte dos  $N_p$  hádrons terão interagido com o material e portanto desaparecido<sup>8</sup>. O número N de hádrons ainda existentes na profundidade t é dado pela expressão (ver figura 2.16):

$$N(t) = N_p e^{-t}$$

Assim sendo, o número de hádrons  $N_s$  ainda existentes na profundidade T(que é distância entre o ponto da interação e a base do detector, dada em

 $<sup>^7 \</sup>rm Este$ material pode ser qualquer um (ar, chumbo, etc.). O que importa é que a sua espessura seja dada em unidades de  $\lambda.$ 

 $<sup>^{8}</sup>$ Naturalmente, estamos lidando aqui com comportamentos médios. Por isso supõe-se que os hádrons não sobrevivem as interações.

unidades de  $\lambda$ ) será:

$$N(T) = N_s = N_p e^{-T}$$

O número de hádrons  $N_i(x)$  que interagem com o material em uma região de espessura x (também dada em unidades de  $\lambda$ , porém contada a partir da base do detector) será dado por:

$$N_i(x) = N(t) - N_s = N_p e^{-t} - N_p e^{-T}$$

Como  $t + x = T \Rightarrow t = T - x$ , portanto a expressão anterior fica:

$$N_i(x) = N_p e^{-T} (e^x - 1)$$
(2.20)

Dos dados experimentais é possível obter T (desde que  $H_I$  tenha sido determinada) e, no mínimo, os valores de  $N_i(x)$  para:

- $x = x_1 =$ espessura da câmara inferior
- $x = x_2 = x_1$  + espessura do intervalo de ar entre a câmara inferior e o alvo de carbono + espessura do alvo de carbono
- $x = x_3 = x_2$  + espessura da câmara inferior.

Em situações favoráveis, é possível obter  $N_i(x)$  para profundidades intermediárias. De qualquer modo, ajustando a estes dados de  $N_i(x)$  a equação 2.20, é possível estimar o número  $N_p$  de hádrons produzidos na interação.



Figura 2.16: Determinação do número de hádrons produzidos na interação  $(N_P)$ . As espessuras  $T, t \in x$  são medidas em unidades do livre caminho médio  $\lambda$  de um hádron.  $H_I$  é altura de interação.

# Capítulo 3

## Análise dos dados

Este capítulo apresenta uma discussão sobre os métodos e técnicas de análise utilizados na tentativa de atingir o objetivo desta tese, bem como os resultados obtidos através dos mesmos. Além disso, são apresentados um breve histórico sobre o fenômeno Centauro e uma descrição das características que levaram a identificação deste fenômeno.

#### 3.1 O Fenômeno Centauro

O fenômeno Centauro foi observado pela primeira vez em 1972, durante a busca de famílias no material fotossensível da câmara de número 15. A primeira busca encontrou uma família na câmara inferior, no bloco I012 (o **I** significa Inferior), composta de algumas dezenas de chuveiros e com energia total observável  $\Sigma E_{\gamma}$  maior que 100 TeV. A determinação da direção de entrada da família indicava que a mesma passara pela câmara superior e pelo alvo de carbono. Devido a energia total e multiplicidade da família da câmara inferior serem relativamente grande, esperava-se encontrar facilmente a família correspondente na câmara superior (que deveria ter multiplicidades e energia total relativamente grandes). Contudo nenhuma família de multiplicidade e energia total comparáveis as observadas na câmara inferior havia sido encontrada na região esperada da câmara superior. Esta dificuldade suscitou algumas suspeitas sobre a montagem da câmara:

• Se a parte inferior tivesse sido, por engano, montada antes da superior (apesar deste não ser o procedimento de montagem correto), o evento poderia ter ocorrido no espaço de tempo entre o final da montagem da parte inferior e o início da montagem da parte superior. Uma consulta ao diário da montagem da câmara eliminou esta possibilidade.

• O bloco inferior em questão (I012), poderia ter sido montado rotacionado de 180°. Como este bloco estava em uma das extremidades da câmara inferior, isto permitiria a possibilidade do evento ser um A-Jato que penetrou por fora da câmara inferior (sem passar pela superior ou pelo alvo de carbono). Esta possibilidade também foi eliminada, pois os filmes de Raios-X que ficam na extremidade da câmara apresentam uma faixa com opacidade excessivamente alta justamente na extremidade do filme que fica mais próxima da extremidade da câmara, pois esta extremidade do filme fica mais exposta à radiação de fundo. Esta faixa mais escura dos filmes permitiu então verificar a posição em que eles foram montados e comprovou-se que eles, e conseqüentemente o bloco, foram montados corretamente.

Eliminadas as possibilidades de falha na montagem da câmara, procedeuse uma nova busca, desta vez mais cuidadosa e detalhada, nos filmes da câmara superior, na região onde se esperava encontrar algo. Desta vez encontrou-se uma família pequena, com menos de dez chuveiros e energia total observada da ordem de 30 TeV, portanto com características totalmente inesperadas. Como verificou-se geometricamente que alguns dos chuveiros da câmara inferior eram, simultaneamente, continuações de chuveiros da câmara superior, não resta dúvidas que as duas famílias são na verdade uma só, apesar da evidente discrepância entre as partes superior e inferior. O nome *Centauro* decorre justamente desta discrepância entre as partes inferior e superior do evento.

Também é importante ressaltar que, utilizando os critérios da seção 2.13 quase todos os chuveiros observados foram classificados como hádrons. Posteriormente, através de triangulação, foi possível obter a altura de interação do evento. A tabela 3.1 mostra algumas características deste evento, batizado de *Centauro I*.

Após o Centauro I, foram observados outros quatro eventos com um número excessivo de hádrons e que por isso também podem ser considerados

Identificador do Evento		C15S055I012
Número de chuveiros	$\gamma$ 's (tipo 1)	1
na câmara superior:	hádrons (tipo 2)	6
Número de chuveiros	$\gamma$ 's (tipo 1)	-
na câmara inferior:	hádrons (tipo 2)	43
Energia total observada	câmara superior	28,1
$\Sigma E$ (TeV)	câmara inferior	202,5
$\Delta E_{\gamma}$ (100)	inferior + superior	$230,\! 6$
Altura (m)		50

Tabela 3.1: Características do evento Centauro I. Foram excluídos da tabela acima quatro chuveiros observados na câmara superior por não pertencerem à mesma geração (os quatro chuveiros estão muito distantes do CPE do evento). Para detalhes sobre a classificação dos chuveiros em  $\gamma$ 's ou hádrons ver a seção 2.13.

Número do o	candidato	II	III	IV	V
Identificador	do Evento	C17S070I059	C17S097I070	C17S215I137	C16S086I037
Número de chuveiros	$\gamma$ 's (tipo 1)	5	26	61	25
na câmara superior:	hádrons (tipo 2)	15	21	15	27
Número de chuveiros	$\gamma$ 's (tipo 1)	-	-	-	-
na câmara inferior:	hádrons (tipo 2)	17	16	31	12
Energia total	câmara superior	$57,\! 6$	150, 1	$195,\! 5$	$249,\!8$
observada, $\Sigma E$ (TeV)	câmara inferior	145,8	119,8	90,1	45, 4
$\Delta D\gamma$ (16V)	inferior + superior	203,4	269,9	$285,\!6$	295, 19
Altura	(m)	80	230	500	500

Tabela 3.2: Características dos eventos candidatos a Centauro. Foram excluídos do evento Centauro IV alguns chuveiros associados ao evento pois análises mostraram que eles pertencem a uma cascata atmosférica de outra geração. Também foi excluído do evento Centauro V um chuveiro de energia relativamente alta (≃ 90 TeV), pois provavelmente trata-se da partícula líder ou de um núcleon sobrevivente. No evento Centauro V, a altura de interação foi determinada por triangulação. Nos demais eventos, usou-se o momento transversal médio do Centauro I na determinação da altura. representantes do fenômeno Centauro<sup>1</sup>. A tabela 3.2 mostra algumas características importantes destes eventos (ver, por exemplo [25]).

Contudo, como se nota pela tabela 3.2, estes outros eventos não apresentam tão claramente a característica que nomeou o fenômeno, ou seja, a discrepância em energia e multiplicidade entre as partes superior e inferior dos eventos e é por isso que, muitas vezes, eles são denominados 'candidatos' a Centauro. Portanto, a identificação destes eventos como sendo do tipo Centauro baseia-se no tamanho acima do normal da componente hadrônica (chuveiros do tipo 2), tanto em energia quanto em multiplicidade. Em outras palavras, a identificação de famílias do tipo Centauro depende exclusivamente dos critérios de identificação das partículas descritos na seção 2.13, pois são eles que permitem identificar os chuveiros de origem hadrônica (tipo 2).

#### 3.2 Amostras de dados utilizadas

Nas análises a serem descritas nas próximas seções foram utilizadas cinco amostras de dados:

- Amostra 1 Composta da família Centauro I e das 4 quatro candidatas a Centauro descritas na seção 3.1 (II, III, IV, V).
- Amostra 2 Composta de 280 famílias experimentais do tipo A-Jato.
- Amostra 3 Composta de 87 famílias do tipo C-Jato.
- Amostra 4 Composta pelas mesmas famílias da Amostra 2, porém retirando das mesmas os chuveiros observados na câmara inferior.
- Amostra 5 Composta de 9360 famílias simuladas do tipo A-Jato, todas com  $\Sigma E_{\gamma} > 10$  TeV. Chuveiros com  $E_{\gamma} < 1$  TeV foram excluídos (experimentalmente, o limiar energético inferior de detecção para um chuveiro

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Na realidade, a este número poderiam ser acrescentados um evento reportado pela colaboração PAMIR e Chacaltaya[24] e mais 4 outros eventos (além dos quatro candidatos citados no texto) observados pela CBJ. Destes outros quatro eventos observados pela CBJ, um ainda não está completamente analisado, outro (segundo análises preliminares) aparenta ter entrado pelo lado do detector, o terceiro tem multiplicidade e energia total notavelmente diferentes daquelas dos 4 candidatos a Centauro citados no texto e o último foi observado numa câmara onde o teto do galpão onde fica o detector cedeu durante o período de exposição e neve caiu sobre o detector.

é aproximadamente este). A simulação pode ser dividida em duas partes:

- As interações e propagação na atmosfera foram simuladas utilizando o programa CORSIKA[26] até a profundidade de Chacaltaya. O mesmo permite usar diferentes modelos para as Interações Hadrônicas a altas energias. O modelo usado foi o QGSJET[26]. A composição química (das partículas primárias da Radiação Cósmica) utilizada foi a de Nikolsky. A energia das partículas primárias  $(E_0)$  foi sorteada na faixa  $(10^{15} \leq E_0 < 10^{19})$  eV usando o espectro padrão.
- A resposta do detector<sup>2</sup> as partículas que produzem chuveiros do tipo 2 (os hádrons) foi simulada utilizando a distribuição  $k_{\gamma}$  (inelasticidade eletromagnética). Sendo  $E_h$  a energia da partícula, a energia do chuveiro de tipo 2 ( $E_{\gamma}$ ) é dada[27] por  $E_{\gamma} = k_{\gamma}E_p$ . O valor médio de  $k_{\gamma}$  depende do alvo e do hádron, entre outros fatores. A simulação utilizada considera duas situações, interações **pion-Carbono** (<  $k_{\gamma} >= 0, 250$ ) e interações **próton-Carbono** (<  $k_{\gamma} >= 0, 157$ ). Os valores de <  $k_{\gamma} >$  utilizados foram obtidos usando o modelo QGSJET para interações na energia de 100 TeV

#### 3.3 Seleção dos eventos

O objetivo deste trabalho é determinar meios de se diferenciar uma família (ou evento) do tipo Centauro dos eventos não Centauro (ou vice-versa), sem recorrer aos métodos de identificação das partículas (seção 2.13).

Neste sentido, uma alternativa é buscar grandeza(s) que assuma(m) valore(s) (ou pertençam a uma faixa de valores) específicos para eventos do tipo Centauro. Devido as flutuações inerentes aos processos físicos responsáveis pelos fenômenos observados, é mais provável que haja faixas de valores, e não

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>A simulação utilizada para o detector não é detalhada, porém leva em consideração os fatores mais importantes. Uma simulação mais detalhada poderia ser conseguida utilizando pacotes especificamente desenvolvidos para este fim. Contudo tais pacotes não levam em consideração efeitos físicos importantes, como o efeito LPM. Por exemplo, um destes pacotes mais utilizado, o GEANT[28], não consegue lidar com hádrons de energias maiores que cerca de 10 TeV (muito importantes no caso de Chacaltaya), nem consideram o efeito LPM (muito importante também nas interações eletromagnéticas a energias da ordem das observadas pelo detector da CBJ).

valores, específicos dos eventos Centauros. Chamaremos a cada uma destas faixas de faixa de aceitação da respectiva grandeza. Assim sendo, encontradas estas grandezas e suas respectivas faixa(s) de aceitação, as famílias com valores destas grandezas fora das respectivas faixas são ditas incompatíveis com o fenômeno Centauro, ou simplesmente, famílias não-Centauro. As famílias com valores destas grandezas dentro das respectivas faixas de aceitação são aceitas como do tipo Centauro. É importante ressaltar, contudo, que flutuações podem levar este método a fornecer resultados incorretos, fazendo com que sua eficiência não seja total. Infelizmente, para obter o valor desta eficiência seria preciso, no mínimo, conhecer as distribuições das grandezas a serem usadas como critérios de seleção, o que não é sempre possível. Por outro lado, é possível estimar um nível de confiança para o resultado usando os dados experimentais, como será mostrado mais adiante.

Uma outra alternativa é supor que alguma característica dos eventos Centauro (como por exemplo a distribuição de energia observada  $E_{\gamma}$ , ver seção 2.8), possa diferenciá-los dos eventos não Centauro. Neste caso, é preciso encontrar uma maneira objetiva de se dizer quando esta característica é diferente entre dois eventos, bem como de atribuir um nível de confiança para esta diferença. No caso desta característica ser uma distribuição, isto é feito utilizando-se um teste estatístico de hipótese apropriado para a situação, e o que determina se dois eventos são ou não diferentes é um valor mínimo deste nível de confiança.

Os critérios de seleção utilizados foram nove. Sete deles são do tipo faixa de aceitação, um é baseado no nível de confiança de um teste estatístico e o último é um misto dos dois tipos. As próximas seções descrevem e justificam as grandezas utilizadas como critério de seleção, bem como apresenta os resultados obtidos.

#### 3.4 Multiplicidade e Energia Total Observada

A multiplicidade  $\mathcal{N}$  (número de chuveiros observados na família) e a energia total observada  $\Sigma E_{\gamma}$  (soma da energia observada de todos os chuveiros da família, ver seção 2.8) são, naturalmente, as primeiras grandezas a serem consideradas como possíveis critérios de seleção. A multiplicidade é obtida diretamente no material fotossensível e a energia quase que diretamente, e isto as torna as grandezas menos suscetíveis à erros. A tabela 3.3(a) apresenta os limites de  $\mathcal{N}$  e  $\Sigma E_{\gamma}$  da Amostra 1. Usando estes limites para definir as

Grandeza	Valor mínimo Família	Valor máximo Família
$\mathcal{N}$	37 Centauro II	107 Centauro IV
$\Sigma E_{\gamma}$ (TeV)	203,4 Centauro II	295,1 Centauro V

(a) Valores limites das faixas de seleção de  $\mathcal{N} \in \Sigma E_{\gamma}$ , obtidos da Amostra 1. Também estão indicadas as famílias da amostra que apresentam os valores limites.

Grandeza	Valor mínimo Família	Valor máximo Família
$\mathcal{N}$	7 Centauro I	83 Centauro IV
$\Sigma E_{\gamma}$ (TeV)	28,1 Centauro I	220,6 Centauro V

(b) Valores limites das faixas de seleção de  $\mathcal{N} \in \Sigma E_{\gamma}$  obtidos da Amostra 1, considerando somente os chuveiros observados na câmara superior (para aplicação na Amostra 4). Também estão indicadas as famílias da amostra que apresentam os valores limites.

		Número de famílias selecionadas		
Amostra	Critério	compatíveis	não compatíveis	
		com os Centauros	com os Centauros	
Amostra 2	$\mathcal{N}$	104 (37%)	176~(63%)	
Amostra 2	$\Sigma E_{\gamma}$	42 (15%)	238~(85%)	
Amostra 3	$\mathcal{N}$	3(3%)	84 (97%)	
Amostra 5	$\Sigma E_{\gamma}$	$0 \ (0\%)$	87~(100%)	
Amostra 4	$\mathcal{N}$	234 (84%)	46~(16%)	
Amostra 4	$\Sigma E_{\gamma}$	178~(64%)	102 (36%)	
Amostra 5	$\mathcal{N}$	1438 (15%)	7922 (85%)	
Amostra J	$\Sigma E_{\gamma}$	354~(4%)	9006~(96%)	

(c) Número de famílias selecionadas pelos critérios de multiplicidade e energia total observada. Nas amostras Amostra 2, Amostra 3 e Amostra 5, foram utilizadas as faixas de seleção da tabela 3.3(a) e na Amostra 4, utilizou-se as faixas da tabela 3.3(b). Entre parênteses aparece a porcentagem (do número total de eventos da amostra correspondente) que o número de eventos selecionados representa.

Tabela 3.3: 
$${\cal N} \, \, {
m e} \, \, \Sigma E_{\gamma}$$

faixas de seleção para os critérios de multiplicidade e energia total observada obtém-se os resultado mostrados na tabela 3.3(c), para as amostras Amostra 2, Amostra 3 e Amostra 5.

Para a Amostra 4 é necessário refazer a tabela 3.3(a), pois somente os chuveiros observados na câmara superior devem ser utilizados. Assim sendo, as novas faixas de seleção serão as mostradas na tabela 3.3(b). Usando estas faixas obtém-se os resultados mostrados também na tabela 3.3(c).

### 3.5 Ângulo zenital médio dos chuveiros $\langle \theta_{\gamma} \rangle$

Outra grandeza que pode ser usada como critério de seleção é o ângulo zenital médio dos chuveiros da família  $\langle \theta_{\gamma} \rangle$  (por estar relacionado diretamente com a distribuição de ângulo zenital da família). Infelizmente, nem sempre é possível obter este ângulo, pois o mesmo depende da altura de interação  $H_I$  (ver seção 2.10), e nem sempre é possível determinar esta última. Para permitir que a distribuição de ângulo zenital seja usada como critério para todas as famílias (ainda que indiretamente), é necessário usar a distância ao CPE  $r_{\gamma}$  em lugar do ângulo zenital  $\theta_{\gamma}$ . Contudo, para fazer uso de  $r_{\gamma}$  é necessário de alguma forma compensar o efeito da altura de interação  $H_I$ , pois eventos com o mesmo  $\langle \theta_{\gamma} \rangle$  terão  $\langle r_{\gamma} \rangle$  diferentes caso as respectivas alturas de interação sejam diferentes. Análises feitas em outros trabalhos de membros da CBJ (ver, por exemplo, [29]) mostram que uma maneira de conseguir esta compensação é multiplicar  $\langle r_{\gamma} \rangle$  por  $\Sigma E_{\gamma}$ . A tabela 3.4(a) mostra os limites da faixa de seleção de  $\langle r_{\gamma} \rangle \Sigma E_{\gamma}$  para a Amostra 1. Novamente, para a Amostra 4, é necessário recalcular os limites da faixa de seleção (tabela 3.4(b)). Os resultados da seleção usando o critério  $\langle r_{\gamma} \rangle \Sigma E_{\gamma}$  estão na tabela 3.4(c).

### **3.6** Momento Transversal Médio $\langle P_t \rangle_{\gamma}$

Vários modelos fenomenológicos de Interações Hadrônicas relacionam o momento transversal médio dos secundários com a massa da partícula predominantemente produzida na Interação Hadrônica (ver, por exemplo, [17]c)). Tendo isto em vista, é apropriado verificar se o  $\langle P_t \rangle$  pode ser usado como um critério de seleção. Novamente, devido a impossibilidade de se determinar a altura de interação para todas as famílias, nem sempre é possível obter o  $\langle P_t \rangle \gamma$ , pois o mesmo é dado por  $\langle P_t \rangle_{\gamma} = \langle E_{\gamma} \theta_{\gamma} \rangle$ . Assim sendo, recorreremos

Valor mínimo	Valor máximo
Família	Família
1294,4	18755,5
Centauro I	Centauro IV

(a) Limites da faixa de seleção para o critério  $\langle r_{\gamma} \rangle \Sigma E_{\gamma}$  obtidos da Amostra 1. Valores em mm-TeV

Valor mínimo	Valor máximo
Família	Família
332,7	10955,3
Centauro I	Centauro IV

(b) Limites da faixa de seleção para o critério  $\langle r_{\gamma} \rangle \Sigma E_{\gamma}$  obtidos da Amostra 1, usando somente os chuveiros observados na câmara superior (para aplicação na Amostra 4). Valores em mm-TeV

	Número de famílias selecionada	
Amostra	$\operatorname{compat}$ íveis	não compatíveis
	com os Centauros	com os Centauros
Amostra 2	228~(81%)	52~(19%)
Amostra 3	69~(79%)	18 (21%)
Amostra 4	224 (80%)	56~(20%)
Amostra 5	7859~(83%)	1501~(16%)

(c) Número de famílias selecionadas pelo critério  $\langle r_{\gamma}\rangle\Sigma E_{\gamma}$ . Nas amostras Amostra 2, Amostra 3 e Amostra 5, foi utilizada a faixa de seleção da tabela 3.4(a) e na Amostra 4, utilizou-se a faixa da tabela 3.4(b). Entre parênteses aparece a porcentagem (do número total de eventos da amostra correspondente) que o número de eventos selecionados representa.

Tabela 3.4:  $\langle r_{\gamma} \rangle \Sigma E_{\gamma}$ 

novamente à substituição de  $\theta_{\gamma}$  por  $r_{\gamma}$ , para obter a grandeza  $\langle E_{\gamma}r_{\gamma}\rangle$ , proporcional a  $\langle P_t \rangle$ . Também, pelas mesmas razões da seção anterior, usaremos  $\Sigma E_{\gamma}$  para tentar compensar o efeito da altura de interação. Ficamos então com a grandeza  $\langle E_{\gamma}r_{\gamma}\rangle\Sigma E_{\gamma}$  como novo critério de seleção, em substituição ao  $\langle P_t \rangle_{\gamma}$ . As faixas de seleção obtidas da Amostra 1 e os resultados obtidos estão na tabela 3.5.

### 3.7 Isotropia

#### **3.7.1** dqm e esfericidade

A profundidade na qual está localizado o detector da CBJ equivale a cerca de sete vezes o livre caminho médio de interação de um próton. Isto faz com que seja considerável a chance da partícula primária interagir mais de uma vez permitindo que secundários de várias gerações diferentes possam atingir o detector. De fato, estudos feitos por membros da CBJ[30] indicam que dada uma família, é mais provável que a mesma tenha sido produzida por um primário que sofreu de 2 à 3 interações sucessivas<sup>3</sup>. Isto introduz uma dificuldade em análises como a proposta nesta tese (onde se pretende estudar aspectos que talvez estejam relacionados a tipos diferentes de Interações Hadrônicas), qual seja identificar se uma família é resultado de uma ou mais Interações Hadrônicas sucessivas. Esta identificação é importante porque, analisar uma família composta de grupos de secundários produzidos em Interações Hadrônicas diferentes como se esta família fosse resultado de uma única interação, pode levar a resultados incorretos. Todas as análises feitas nos cinco eventos Centauro indicam que os mesmos apresentam um grau de contaminação por interações sucessivas baixo. Portanto, é importante que a análise aqui proposta seja feita, na medida do possível, utilizando eventos com grau de contaminação semelhante aos dos Centauros.

Conforme foi discutido nas seções 2.11 e 2.12, os parâmetros dqm e esfericidade podem ajudar na tarefa de determinar o grau de contaminação relativo entre grupos de eventos (através da hipótese de que eventos com

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Duas observações importantes. A primeira é que este resultado depende, por exemplo, da hipótese feita sobre a distruibuição de inelasticidade, entre outras coisas. Daí a variação no intervalo de  $2\sim3$ . A segunda é que não está se questionando o número médio de interações sucessivas que um primário pode sofrer (neste caso a resposta é algo entre 6 e 7).

Valor mínimo	Valor máximo
Família	Família
4242,2	50001,7
Centauro I	Centauro IV

(a) Limites da faixa de seleção para o critério  $\langle E_{\gamma}r_{\gamma}\rangle\Sigma E_{\gamma}$  obtidos da Amostra 1. Valores em mm(TeV)<sup>2</sup>.

Valor mínimo	Valor máximo
Família	Família
1110,0	27841,3
Centauro I	Centauro V

(b) Limites da faixa de seleção para o critério  $\langle E_{\gamma}r_{\gamma}\rangle\Sigma E_{\gamma}$  obtidos da Amostra 1, usando somente os chuveiros observados na câmara superior (para aplicação na Amostra 4). Valores em mm(TeV)<sup>2</sup>.

	Número de famílias selecionadas	
Amostra	$\operatorname{compat}$ íveis	não compatíveis
	com os Centauros	com os Centauros
Amostra 2	199~(71%)	81~(29%)
Amostra 3	58~(67%)	29~(33%)
Amostra 4	185~(66%)	95~(34%)
Amostra 5	8394~(90%)	966~(10%)

(c) Número de famílias selecionadas pelo critério  $\langle E_{\gamma}r_{\gamma}\rangle\Sigma E_{\gamma}$ . Nas amostras Amostra 2, Amostra 3 e Amostra 5, foi utilizada a faixa de seleção da tabela 3.5(a) e na Amostra 4, utilizou-se a faixa da tabela 3.5(b). Entre parênteses aparece a porcentagem (do número total de eventos da amostra correspondente) que o número de eventos selecionados representa.

Tabela 3.5:  $\langle E_{\gamma}r_{\gamma}\rangle\Sigma E_{\gamma}$ 

baixa contaminação são isotrópicos). Por isso as faixas de seleção dos parâmetros dqm e esfericidade, obtidas da Amostra 1, foram usadas nas famílias das outras amostras na tentativa de eliminar aquelas com graus de contaminação diferentes dos Centauros. As faixas de seleção utilizadas e os resultados obtidos estão na tabela 3.6.

#### **3.7.2** relm

Um parâmetro que também pode ser usado para avaliar isotropia (e conseqüentemente o grau de contaminação da família) é a relação relm entre o número  $n_f$  de chuveiros da família com  $r_{\gamma} \geq \bar{r}$  e a multiplicidade da família  $(\bar{r} \in obtido através do ajuste da Relação \mathcal{R})$ . Conforme já foi discutido na seção 2.11,  $n_f$  deve ser o número de partículas emitidas para frente no referencial do centro de massa do estado intermediário. Estas partículas emitidas para frente no referencial do centro de massa são aquelas mais próximas do CPE (no referencial do laboratório), e portanto mais facilmente observáveis. Assim sendo, é razoável supor que mais da metade das partículas observadas sejam parte das emitidas para frente, ou, em outras palavras, a relação relm deve ser maior que 0, 5. Vários fatores, que não necessariamente a contaminação da família, podem fazer com que o valor experimental de *relm* seja menor que 0, 5, logo não é possível usar o critério desta maneira. Contudo, é possível determinar o valor mínimo de relm de uma amostra de eventos considerados isotrópicos, como por exemplo a Amostra 1. Este valor pode então ser utilizado como o limite inferior da faixa de seleção de relm. A tabela 3.7 mostra as faixas de seleção utilizadas bem como os resultados obtidos.

### 3.7.3 Ângulo azimutal $(\phi)$

Uma avaliação parcial da isotropia da família pode também ser obtida verificando a uniformidade da distribuição de ângulo azimutal dos chuveiros desta família. A determinação do ângulo azimutal é relativamente simples. Para isto é necessário:

- Conhecer a posição dos chuveiros no plano perpendicular à direção de incidência (PPI, ver seção 2.7).
- Escolher uma direção neste plano como sendo a referência ( $\phi = 0$ ). A direção usada nesta análise foi a determinada pela linha que liga o CPE

Grandeza	Valor mínimo Família	Valor máximo Família
dqm	$1,25 \times 10^{-3}$ Centauro III	$5,51 \times 10^{-3}$ Centauro I
esfericidade	1,37 Centauro I	1,79 Centauro III

 (a) Valores limites das faixas de seleção de dqm e esfericidade, obtidos da Amostra 1. Também estão indicadas as famílias da amostra que apresentam os valores limites.

Grandeza	Valor mínimo Família	Valor máximo Família
dqm	2,21 × 10 <sup>−3</sup> Centauro II	$1,68 \times 10^{-2}$ Centauro III
esfericidade	0,92 Centauro I	2,01 Centauro III

(b) Valores limites das faixas de seleção de dqm e esfericidade obtidos da Amostra 1, considerando somente os chuveiros observados na câmara superior (para aplicação na Amostra 4). Também estão indicadas as famílias da amostra que apresentam os valores limites.

		Número de famílias selecionadas		
Amostra	Critério	compatíveis	não compatíveis	
		com os Centauros	com os Centauros	
Amostra 2	dqm	111(40%)	166~(60%)	
Alliostia 2	esfericidade	157 (56%)	120 (43%)	
Amostra 3	dqm	23 (27%)	60~(69%)	
Alliostia 5	esfericidade	24 (28%)	59~(68%)	
Amostro 4	dqm	146(52%)	129~(46%)	
Alliostia 4	esfericidade	240 (85%)	35~(13%)	
Amostra E	dqm	4409(47%)	4208 (45%)	
Aniostra 5	esfericidade	4731 (51%)	3886~(42%)	

(c) Número de famílias selecionadas pelos critérios dqme esfericidade. Nas amostras Amostra 2, Amostra 3 e Amostra 5, foram utilizadas as faixas de seleção da tabela 3.6(a) e na Amostra 4, utilizou-se as faixas da tabela 3.6(b). Entre parênteses aparece a porcentagem (do número total de eventos da amostra correspondente) que o número de eventos selecionados representa. Um número de eventos diferente em cada uma das 4 amostras foi excluído da análise porque não foi possível fazer o ajuste da Relação  $\mathcal{R}$  nos mesmos.

Tabela 3.6:  $dqm \in esfericidade$ 

Valor mínimo	Valor máximo	
Família	Família	
$0,\!238$	1	
Centauro III	-	

(a) Limites da faixa de seleção para o critério relm obtidos da Amostra 1. Na realidade somente o valor mínimo foi obtido da Amostra 1. Para o valor máximo foi usado o maior valor permitido relm = 1 (todos os secundários detectados emitidos para frente).

Valor mínimo	Valor máximo
Família	Família
$0,\!079$	1
Centauro III	-

(b) Limites da faixa de seleção para o critério *relm*, obtidos da Amostra 1, usando somente os chuveiros observados na câmara superior (para aplicação na Amostra 4). Para o valor máximo mostrado, vale aqui a mesma observação feita na tabela 3.7(a).

	Número de famílias selecionadas		
Amostra	$\operatorname{compat}$ íveis	não compatíveis	
	com os Centauros	com os Centauros	
Amostra 2	237~(84%)	40 (14%)	
Amostra 3	45~(52%)	38~(44%)	
Amostra 4	224 (80%)	51 (18%)	
Amostra 5	7572~(80%)	1045~(11%)	

(c) Número de famílias selecionadas pelo critério relm. Nas amostras Amostra 2, Amostra 3 e Amostra 5, foi utilizada a faixa de seleção da tabela 3.7(a) e na Amostra 4, utilizou-se a faixa da tabela 3.7(b). Entre parênteses aparece a porcentagem (do número total de eventos da amostra correspondente) que o número de eventos selecionados representa. Um número de eventos diferente em cada uma das 4 amostras foi excluído da análise porque não foi possível fazer o ajuste da Relação  $\mathcal{R}$ nos mesmos.

#### Tabela 3.7: relm

ao chuveiro mais energético (o que equivale a dizer que  $\phi = 0$  para o chuveiro mais energético).

Para avaliar quantitativamente a uniformidade de uma distribuição é necessário usar algum teste estatístico. Nossa escolha foi pelo teste de Kolmogorov-Smirnov (ver apêndice B para detalhes), pois o mesmo pode ser usado nos casos de baixa multiplicidade sem perda significativa de eficiência. Desta forma, o teste pode ser usado para comparar a distribuição de ângulos azimutais dos chuveiros da família com uma distribuição uniforme, fornecendo uma medida quantitativa da discrepância entre a distribuição dos valores experimentais de  $\phi$  da família e uma distribuição uniforme. Os resultados do teste, para cada comparação, são a *estatística de teste D* e o *nível de confiança*  $\alpha_{ks}$  (novamente, ver apêndice B para detalhes). Aplicando desta maneira o teste à Amostra 1, é possível obter os limites inferior e superior de  $\alpha_{ks}$ , definindo as faixas de aceitação para o critério de seleção baseado na isotropia em ângulo azimutal. Os resultados podem ser vistos na tabela 3.8

### 3.8 Seleção conjunta

Conforme se nota pelas tabelas 3.3 à 3.8, os vários critérios de seleção apresentam resultados bem diferentes, no que se refere à sua suposta capacidade de separar as famílias compatíveis com as do tipo Centauro das não compatíveis. Assim sendo, é difícil verificar (tomando por base somente os resultados das tabelas acima citadas) quais critérios deveriam ser usados para separar as famílias compatíveis das não compatíveis. É por isso que decidimos aplicar os critérios em conjunto, isto é, para que uma família seja considerada compatível com as do tipo Centauro é necessário que ela seja selecionada como compatível por todos os critérios. Chamaremos esta metodologia de seleção conjunta, e para simplificar, denominaremos as famílias classificadas como compatíveis por todos os critérios de sobreviventes e o seu número de  $n_s$ .

#### 3.8.1 Redundância da seleção conjunta

A seleção conjunta foi adotada devido a dificuldade em se avaliar quais critérios de seleção são mais apropriados. Contudo, a confiabilidade dos resultados seria máxima se todas as famílias consideradas não compatíveis com os Centauro, o fossem por todos os critérios. Esta seria, naturalmente, a situação

Valor mínimo	Valor máximo
Família	Família
$\begin{array}{c} 8,66 \times 10^{-4} \\ \text{Centauro IV} \end{array}$	$9,34 \times 10^{-1}$ Centauro V

 (a) Limites da faixa de seleção para o critério da isotropia em ângulo azimutal obtidos da Amostra 1.

Valor mínimo Família	Valor máximo Família
$7,43 \times 10^{-1}$	$9,97 \times 10^{-1}$
Centaulo II	Centauro I

(b) Limites da faixa de seleção para o critério da isotropia em ângulo azimutal, obtidos da Amostra 1, usando somente os chuveiros observados na câmara superior (para aplicação na Amostra 4).

	Número de famílias selecionadas		
Amostra	$\operatorname{compat}$ íveis	não compatíveis	
	com os Centauros	com os Centauros	
Amostra 2	181~(65%)	99~(35%)	
Amostra 3	-	-	
Amostra 4	22 (8%)	258~(92%)	
Amostra 5	3830~(41%)	5530~(59%)	

(c) Número de famílias selecionadas pelo critério da isotropia em ângulo azimutal. Nas amostras Amostra 2, Amostra 3 e Amostra 5, foi utilizada a faixa de seleção da tabela 3.8(a) e na Amostra 4, utilizou-se a faixa da tabela 3.8(b). Entre parênteses aparece a porcentagem (do número total de eventos da amostra correspondente) que o número de eventos selecionados representa.

Tabela 3.8: Isotropia no ângulo azimutal

Rodundância	Freqüência (número de famílias)			
neuunuancia	Amostra 2	Amostra 3	Amostra 4	Amostra 5
1	20	0	63	53
2	58	5	68	1775
3	67	17	70	3104
4	64	34	38	2494
5	43	19	22	1266
6	18	9	12	476
7	6	3	3	131
8	1	-	1	60

Tabela 3.9: Distribuição das *Redundâncias* nas várias famílias. Por exemplo, há 20 famílias na Amostra 2 com *redundância* igual a 1.

ideal, e como tal não se verifica na prática. Para avaliar a confiabilidade da seleção conjunta, dentro do enfoque proposto nesta seção, usaremos um parâmetro que chamaremos de *redundância*. Definimos a *redundância* da seleção conjunta sobre uma família, como o número de critérios de seleção que selecionam a família como não compatível com os Centauro. Assim sendo, uma família sobrevivente tem redundância 0 (zero) e o ideal seria que todas as famílias não sobreviventes tivessem redundância igual ao número de critérios aplicados na amostra.

A tabela 3.9 mostra a distribuição da *redundância* nas várias amostras analisadas. A figura 3.1 apresenta gráficos do tipo "torta" para os dados da tabela 3.9. Nesta figura, o tamanho da fatia é proporcional à relação (número de famílias com a dada redundância) / (número de famílias na amostra).

#### 3.8.2 Nível de confiança da seleção conjunta

A princípio, pode parecer que a seleção conjunta levaria necessariamente a um número pequeno de famílias compatíveis com aquelas utilizadas como fonte das faixas de seleção. Contudo, uma análise estatística feita na Amostra 2 mostra que isto não se verifica. Sorteando 5 famílias da Amostra 2 e usando-as como fonte das faixas de seleção, aplica-se os critérios de seleção as 275 famílias restantes verificando quantas delas são classificadas como compatíveis, com as 5 sorteadas, por todos os critérios  $(n_s)$ . O número de



Figura 3.1: Representação gráfica dos valores da tabela 3.9.



Figura 3.2: Distribuição de  $n_s$ , obtida da Amostra 2 conforme descrito no texto. A área cinza representa a região com  $n_s \leq 3$ .  $N_{total}$  é o número total de combinações testadas. <  $n_s >$  é o valor médio de  $n_s$ . RMS é o desvio quadrático médio.  $n_s^{mp}$  é o valor mais provável de  $n_s$ .  $N(n_s \leq 3)$  é o número de combinações com  $n_s \leq 3$ .

combinações possíveis de 5 famílias que podem ser sorteadas dentre as 280 é bem grande (da ordem de  $10^{10}$ ). Contudo, verificamos que repetindo o processo para um número não tão grande de combinações (cerca de  $10^6$ ) é possível obter a distribuição de  $n_s$ . O resultado pode ser visto na figura 3.2. O valor médio de  $n_s$  ( $\langle n_s \rangle$ ) obtido da distribuição é 36, enquanto que o valor mais provável ( $n_s^{mp}$ ) é 14. Conforme se nota pela figura 3.2, é maior a probabilidade de se obter valores de  $n_s$  tais que  $n_s > \langle n_s \rangle$  ou  $n_s > n_s^{mp}$ . Isto mostra que a metodologia aqui sugerida de aplicação dos critérios de seleção em conjunto, não resulta necessariamente em valores pequenos de  $n_s$  (muito pelo contrário).

A tabela 3.10 mostra os valores de  $n_s$  obtidos para as amostras Amostra 2 à Amostra 5, usando agora a Amostra 1 como fonte das faixas de seleção.

Amostra	$n_s$	p(%)
Amostra 2	3	$^{2,8}$
Amostra 3	0	$< 0,\!3$
Amostra 4	3	2,8
Amostra 5	1	< 0,9

Tabela 3.10: Valores de  $n_s$  obtidos para as amostras Amostra 2 à Amostra 5, usando a Amostra 1 como fonte das faixas de seleção. Ver o texto para uma descrição de p.

O valor do parametro p, mostrado na terceira coluna da tabela 3.10, foi obtido diretamente da figura 3.2 para as amostras Amostra 2 e Amostra 4 (corresponde à relação entre as áreas cinza e total do gráfico). Nos outros casos, o valor de p foi estimado supondo que a distribuição da figura 3.2 é válida também para as outras amostras, com as devidas normalizações. Este parâmetro é a probabilidade de se obter um valor igual ou menor ao  $n_s$  da segunda coluna, usando cinco famílias quaisquer da amostra da primeira coluna como fonte das faixas de seleção. É sempre importante lembrar que os valores de  $n_s$  da segunda coluna foram obtidos usando as cinco famílias da Amostra 1 (os cinco Centauros) como fonte das faixas de seleção. Assim, o valor de p pode ser interpretado como a probabilidade do respectivo valor de  $n_s$  ser resultante de uma flutuação dos dados experimentais, e não de uma eventual diferença entre as famílias da Amostra 1 e as da amostra sendo testada.

#### 3.9 Distribuição de Energia $E_{\gamma}$

Em trabalho anterior[31], resultados preliminares indicavam que a distribuição de energia fracionária  $\left(\frac{E_{\gamma}}{\Sigma E_{\gamma}}\right)$  das famílias do tipo Centauro não seria a mesma das famílias normais. Destas indicações surgiu a idéia de que, talvez a distribuição de energia fracionária pudesse ser usada para diferenciar as famílias do tipo Centauro das demais, sem ser necessário recorrer aos critérios da seção 2.13. Análises posteriores nos mostraram que, na realidade, isto se verifica para a distribuição de energia  $E_{\gamma}$ , porém de uma forma complexa, como será mostrado a seguir. Foi para contornar esta complexidade que usamos a seleção conjunta, descrita na seção anterior.

Utilizando novamente o teste estatístico Kolmogorov-Smirnov, é possível estudar as eventuais diferenças nas distribuições de energia das várias amostras de algumas formas diferentes:

- comparando (sempre aos pares como requer o teste estatístico Kolmogorov-Smirnov ), as distribuições de energia de todas as famílias de uma dada amostra.
- comparando as distribuições de energia das famílias de uma dada amostra com as das famílias de uma outra amostra.
- combinando os dois métodos acima.

Os valores de  $\alpha_{ks}$  obtidos de qualquer uma das formas acima podem estar distribuídos de três formas diferentes (ver apêndice B para detalhes):

- Caso 1 Uniformemente entre 0 e 1, caso as distribuições de energia comparadas sejam todas iguais<sup>4</sup>.
- Caso 2 Concentrados numa região próxima a 0, caso as distribuições comparadas sejam todas diferentes uma das outras.
- Caso 3 Como uma soma das duas anteriores, se as famílias pudessem ser separadas em grupos, de tal forma que as famílias de um mesmo grupo tivessem distribuições de energia iguais<sup>4</sup>, mas que grupos diferentes tivessem distribuições diferentes.

 $<sup>^4</sup>$  A palavra iguais deve ser entendida neste contexto como amostras diferentes (nos valores individuais de cada membro da amostra e/ou no tamanho da amostra) de uma mesma distribuição pai.

Com intuito de comparar as distribuições de energia das famílias que compõe as amostras Amostra 1 e Amostra 2, une-se as duas e constrói-se a nova amostra Amostra 6. Comparando duas a duas as distribuições de energia das famílias da Amostra 6 usando o teste estatístico Kolmogorov-Smirnov, obtemos a distribuição de  $\alpha_{ks}$  mostrada na figura 3.3.



Figura 3.3: Distribuição dos valores de  $\alpha_{ks}$  obtidos das comparações aos pares das famílias das amostra Amostra 2 e Amostra 1. O gráfico foi normalizado, para facilitar a comparação com o comportamento de uma distribuição uniforme entre 0 e 1.

Claramente, a distribuição de  $\alpha_{ks}$  da figura 3.3 se enquadra no Caso 3 acima. Em outras palavras, o resultado da figura 3.3 nos diz que as famílias da Amostra 6 podem ser dividas em, pelo menos, dois grupos, onde cada um deles possui uma distribuição de energia característica diferente. Para identificar estes grupos seria necessário saber, pelo menos, quais são suas respectivas distribuições de energia. Foi a dificuldade de obter esta informação que nos forçou a aplicar os critérios de seleção nas várias amostras, na tentativa de retirar das mesmas as famílias que fossem muito diferentes dos Centauros. Desta forma, fazendo o estudo da distribuição de energia usando somente as famílias da Amostra 1 e as famílias sobreviventes das outras amostras, elimina-se, na medida do possível, os efeitos destes outros grupos de famílias, quaisquer que sejam eles. Apesar do resultado da figura 3.3 ser consistente com análises anteriores feitas por membros da CBJ, que identificaram pelo menos três grupos diferentes de famílias<sup>5</sup>, a sua singularidade é evidenciada quando comparado com a figura 3.4. A mesma mostra a distribuição dos valores de  $\alpha_{ks}$  resultantes da comparação aos pares das famílias da Amostra 5 (os dados simulados). Nota-se que o comportamento da distribuição de  $\alpha_{ks}$  está muito mais próximo do Caso 1 (distribuições de energia todas iguais) do que do Caso 3 (comportamento dos dados experimentais).



Figura 3.4: Distribuição dos valores de  $\alpha_{ks}$  obtidos das comparações aos pares das famílias da Amostra 5. O gráfico foi normalizado, para facilitar a comparação com o comportamento de uma distribuição uniforme entre 0 e 1. As barras de erro são muito pequenas e por isso não aparecem no gráfico.

Esta diferença entre as distribuições experimentais de  $\alpha_k s$  e a simulada se mantém nas amostras Amostra 3 (figura 3.5) e Amostra 4 (figura 3.6). Isto, novamente, justifica o uso da comparação das distribuições de energia (através do teste estatístico Kolmogorov-Smirnov) como critério de seleção de famílias compatíveis ou não com as do tipo Centauro.

A tabela 3.11 mostra, para cada uma das amostras Amostra 2 à Amostra

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Este grupos são conhecidos pelos nomes *Mirim*,  $A_{\zeta} \acute{u} \in Gua_{\zeta} \acute{u}$ , e a existência dos mesmos está relacionada com o fenômeno da *quebra do scaling de Feynman*[25].



Figura 3.5: Distribuição dos valores de  $\alpha_{ks}$  obtidos das comparações aos pares das famílias das amostras Amostra 3 e Amostra 1. O gráfico foi normalizado, para facilitar a comparação com o comportamento de uma distribuição uniforme entre 0 e 1.



Figura 3.6: Distribuição dos valores de  $\alpha_{ks}$  obtidos das comparações aos pares das famílias das amostras Amostra 4 e Amostra 1. O gráfico foi normalizado, para facilitar a comparação com o comportamento de uma distribuição uniforme entre 0 e 1.
5, os valores máximos de  $\alpha_k s$  resultantes da comparação das famílias sobreviventes com as famílias do tipo Centauro (Amostra 1). A tabela também mostra os níveis de confiança mínimos (do teste estatístico Kolmogorov-Smirnov, ver apêndice B) na hipótese de que as famílias sobreviventes não são compatíveis com as famílias da Amostra 1. Chama a atenção o fato de que, retirando a família Centauro III da Amostra 1, todos os níveis de confiança aumentam.

Amostra	$lpha_{ks}^{ m máximo}$	NC (%)
Amostra 2	$0,\!928$	7,2
Amostra 3	-	-
Amostra 4	$0,\!945$	$^{5,5}$
Amostra 5	$0,\!046$	95,4

(a) Com a família Centauro III na Amostra 1.

Amostra	$lpha_{ks}^{ m máximo}$	NC (%)
Amostra 2	$0,\!226$	77,4
Amostra 3	-	-
Amostra 4	$0,\!868$	13,2
Amostra 5	$0,\!037$	96,3

(b) Excluindo da Amostra 1 a família Centauro III.

Tabela 3.11: Valores máximos de  $\alpha_{ks}$ , e os respectivos níveis de confiança mínimos (NC), das comparações das famílias da Amostra 1 com as sobreviventes das várias amostras. Não há valores para a Amostra 3 porque não houve famílias sobreviventes neste caso.

#### Capítulo 4

## Os eventos selecionados

Neste capítulo serão apresentadas algumas características individuais dos 5 eventos Centauro e das 3 famílias sobreviventes do tipo A-Jato da Amostra 2. Para simplificar a notação, as três famílias sobreviventes serão referenciadas pelo sua numeração no banco de dados da Amostra 2: 17, 242 e 267. Ao contrário do capítulo anterior, será dada especial atenção as diferenças entre os chuveiros dos tipos 1 e 2, de acordo com os critérios da seção 2.13.

Nas figuras 4.1 à 4.12, todas as grandezas mostradas foram calculadas separando-se a componente hadrônica (chuveiros do tipo 2) da eletromagnética (chuveiros do tipo 1). Os resultados da parte hadrônica estão em vermelho e os da parte eletromagnética em azul. Os resultados em preto correspondem aqueles obtidos sem fazer distinção entre as duas componentes. Foram ajustadas as distribuições integrais de energia fracionária  $f = E_{\gamma}/\Sigma E$ , figuras 4.3 e 4.4, e de  $c = E_{\gamma}r_{\gamma}$  (figuras 4.7 e 4.8) as funções  $N(f > f_0) = N_0 Exp(-f_0/\langle f \rangle)$  e  $N(c > c_0) = N_0 Exp(-c_0/\langle c \rangle)$ . A intenção é usar os parâmetros  $N_0$ ,  $\langle c \rangle$  e  $\langle f \rangle$  para caracterizar as distribuições e conseqüentemente e as 8 famílias. Os resultados do ajustes estão na tabela 4.1, para as famílias Centauro, e na tabela 4.2, para as famílias sobreviventes.

As figuras 4.13 à 4.16 mostram gráficos do tipo "legoplot" para as grandezas  $r_{\gamma}$ ,  $\phi$  (ângulo azimutal) e  $E_{\gamma}r_{\gamma}$ , para as 8 famílias. Através deles é possível observar simultaneamente o efeito de várias características: a distribuição de momento transversal  $P_t$  (através de  $E_{\gamma}r_{\gamma}$ ), distribuição de ângulo zenital (através de  $r_{\gamma}$ ) e a distribuição de ângulo azimutal  $\phi$ . Nestas figuras, os cálculos foram feitos sem separar os chuveiros nos tipos 1 e 2, contudo a cor da barra indica o tipo chuveiro, de acordo com a mesma legenda de cores utilizada nas figuras 4.1 à 4.12. As estreitas barras verdes com um círculo vermelho no alto indicam o CPE dos chuveiros do tipo 2, enquanto que aquelas com um círculo azul indicam o CPE dos chuveiros de tipo 1.

			Ι	II	III	IV	V
	+	$N_0$	$55 \pm 6$	$43 \pm 6$	$69 \pm 7$	$136 \pm 11$	$90 \pm 12$
	U	$\langle f \rangle$	$0,020\pm0,004$	$0,026\pm0,006$	$0,016\pm0,003$	$0,0073 \pm 0,0007$	$0,011 \pm 0,002$
$E_{\gamma}$	h	$N_0$	$54 \pm 6$	$39 \pm 6$	$46 \pm 8$	$48 \pm 8$	$52 \pm 8$
$\overline{\Sigma E_{\gamma}}$	11	$\langle f \rangle$	$0,019 \pm 0,004$	$0,026\pm0,006$	$0,018 \pm 0,004$	$0,020\pm0,005$	$0,018 \pm 0,004$
	a	$N_0$	-	-	$28 \pm 5$	$99 \pm 12$	$31 \pm 10$
	8	$\langle f \rangle$	-	-	$0,03\pm0,01$	$0,011\pm0,001$	$0,05 \pm 0,04$
	+	$N_0$	$56 \pm 6$	$42 \pm 6$	$66 \pm 5$	$112 \pm 7$	$68 \pm 5$
	U	$\langle c \rangle$	$16 \pm 3$	$32 \pm 7$	$77 \pm 11$	$138 \pm 18$	$100 \pm 13$
F r	h	$N_0$	$55 \pm 6$	$37 \pm 6$	$40 \pm 5$	$41 \pm 5$	$41 \pm 4$
$D_{\gamma} \gamma_{\gamma}$	11	$\langle c \rangle$	$16 \pm 3$	$34 \pm 12$	$78 \pm 17$	$233\pm58$	$112 \pm 20$
	ď	$N_0$	-	-	$29 \pm 4$	$72 \pm 9$	$26 \pm 4$
	8	$\langle c \rangle$	-	-	$61 \pm 15$	$104 \pm 23$	$131 \pm 59$

Tabela 4.1: Resultados dos ajustes para as famílias Centauro. Na tabela,  $t\to todos,\ h\to hádrons$  (tipo 2) e $g\to\gamma's$  (tipo 1)

			17	242	267	
	todos	$N_0$	$79 \pm 10$	$54 \pm 8$	$63 \pm 10$	
		$\langle f \rangle$	$0,009\pm0,002$	$0,018 \pm 0,004$	$0,013\pm0,003$	
$E_{\gamma}$	hádrons	$N_0$	-	-	-	
$\overline{\Sigma E_{\gamma}}$		$\langle f \rangle$	-	-	-	
	$\gamma$ 's	$N_0$	$79\pm 8$	$46 \pm 7$	$52 \pm 9$	
		$\langle f \rangle$	$0,012\pm0,002$	$0,0231 \pm 0,005$	$0,014 \pm 0,004$	
$E_{\gamma}r_{\gamma}$	todos	$N_0$	$18 \pm 3$	$48 \pm 5$	$55 \pm 9$	
	10003	$\langle c \rangle$	$25 \pm 10$	$165 \pm 32$	$96 \pm 31$	
	hádrons $\gamma$ 's	$N_0$	-	-	-	
		$\langle c \rangle$	-	-	-	
		$N_0$	$18 \pm 3$	$42 \pm 5$	$48 \pm 5$	
		$\langle c \rangle$	$25 \pm 10$	$157 \pm 33$	$62 \pm 13$	

Tabela 4.2: Resultados dos ajustes para as famílias sobreviventes.



Figura 4.1: Distribuições diferenciais de Energia Fracionária.



Figura 4.2: Distribuições diferenciais de Energia Fracionária (continuação).



Figura 4.3: Distribuições integrais de Energia Fracionária.



Figura 4.4: Distribuições integrais de Energia Fracionária (continuação).



Figura 4.5: Distribuições diferenciais de  $E_{\gamma}r_{\gamma}$ .



Figura 4.6: Distribuições diferenciais de  $E_{\gamma}r_{\gamma}$  (continuação).



Figura 4.7: Distribuições integrais de  $E_{\gamma}r_{\gamma}$ .



Figura 4.8: Distribuições integrais de  $E_{\gamma}r_{\gamma}$  (continuação).



Figura 4.9: Gráficos da relação  $\mathcal{R}$ .



Figura 4.10: Gráficos da relação  ${\cal R}$  (continuação).



Figura 4.11: Distribuições de ângulo azimutal  $\phi$ .



Figura 4.12: Distribuições de ângulo azimutal  $\phi$  (continuação).



Figura 4.13: "Legoplot"  $r_{\gamma} \times \phi \times E_{\gamma} r_{\gamma}$ .



(a) Centauro III



(b) Centauro IV

Figura 4.14: "Legoplot"  $r_{\gamma} \times \phi \times E_{\gamma} r_{\gamma}$  (continuação).



(a) Centauro V



(b) família 17

Figura 4.15: "Legoplot"  $r_{\gamma} \times \phi \times E_{\gamma} r_{\gamma}$  (continuação).

A figura 4.17 mostra o gráfico  $mDW \times \theta$  para algumas famílias das amostras Amostra 1, Amostra 2 e Amostra 3 das quais foi possível determinar a altura de interação. É possível notar a presença de alguns grupos de eventos e que estes grupos ocupam regiões diferentes do gráfico. Nesta figura, os grupos estão identificados pelos nomes *Mirim*,  $A_{\zeta} u$  e *Guaç*u.

Também foi estimado o número de hádrons  $N_p$  produzidos na interação (ver seção 2.13.1) para cada uma das famílias da Amostra 1. As figuras 4.18(a) à 4.19(b) mostram os resultados obtidos. Para construir os gráficos destas figuras foram usados os valores de densidade e  $\lambda$  (livre caminho médio de interação de um hádron) da tabela 4.3.

Região	Material	$\lambda  m g/cm^2$	$\frac{\rm densidade}{\rm g/cm^3}$
câmaras superior e inferior	Chumbo	194	$11,\!35$
Alvo	Carbono	66,5	$1,\!1$
Atmosfera acima do detector	Ar	90	0,001205

Tabela 4.3: Valores de densidade e  $\lambda$ utilizados para estimar os valores de  $N_p$  para as famílias Centauro (Amostra 1).



(a) família 242



(b) família 267

Figura 4.16: "Legoplot"  $r_{\gamma} \times \phi \times E_{\gamma} r_{\gamma}$  (continuação).



Figura 4.17: Gráfico do  $mDW \times \theta$  para algumas famílias que tiveram a altura de interação determinada diretamente.



(c) Centauro III

Figura 4.18: Determinação do número de hádrons  $N_p$  produzidos na interação. Ver tabela 4.3 para detalhes sobre as densidades e livres caminhos médios de interação utilizados.



Figura 4.19: Determinação do número de hádrons  $N_p$  produzidos na interação (continuação).

#### Capítulo 5

#### Conclusões e Discussões

O objetivo principal deste trabalho era mostrar que as cinco famílias da Amostra 1, do tipo Centauro, são diferentes dos demais eventos, sem recorrer aos critérios que permitem determinar a origem dos chuveiros, descritos na seção 2.13. Conforme dito anteriormente, a motivação principal foi uma aparente diferença entre a distribuição de energia fracionária de alguns eventos do tipo Centauro e um grupo de eventos não Centauro, diferença esta observada na referência [31]. Contudo, análises posteriores com teste estatístico Kolmogorov-Smirnov mostraram que o uso da energia fracionária introduzia um viés<sup>1</sup> na análise e que o correto seria usar a energia  $E_{\gamma}$ . A análise das distribuições de energia com o teste estatístico Kolmogorov-Smirnov produziu os gráficos das figuras 3.3 e 3.4, e a diferença entre eles leva ao primeiro resultado importante deste trabalho. Como o gráfico da figura 3.4 deveria ser uma simulação do 3.3, a diferença entre eles mostra que a simulação utilizada não reproduz algum efeito presente nos dados experimentais. Acreditamos que este efeito esteja relacionado com os diferentes grupos de famílias identificados pela CBJ (ver [17]c)), já que a simulação utilizada não supõe a formação destes grupos. Assim sendo, a diferença entre os gráficos pode ser mais uma indicação da existência destes grupos de famílias identificados pela CBJ. Por outro lado, esta simulação é largamente utilizada pela comunidade

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Sendo a energia fracionária do i-ésimo chuveiro, de uma família de multiplicidade N, definida como  $E_{\gamma_i}/\Sigma E_{\gamma}$ , a energia fracionária média da família será  $\frac{1}{N}\sum \frac{E_{\gamma_i}}{\Sigma E_{\gamma}} = \frac{1}{N}\frac{\Sigma E_{\gamma}}{\Sigma E_{\gamma}} = \frac{1}{N}\frac{\Sigma E_{\gamma}}{\Sigma E_{\gamma}} = \frac{1}{N}$ . Logo, duas amostras com a mesma distribuição de **energia** mas multiplicidades diferentes, terão **energias fracionárias médias** diferentes. Em outras palavras, duas amostras com a mesma distribuição de energia podem ter distribuições de energia fracionária diferentes.

internacional da área de Raios Cósmicos e reproduz satisfatoriamente dados de outros experimentos (diferentes do experimento da CBJ), e não reproduzir os dados da CBJ é, aparentemente contraditório. Seria necessário estudar mais detalhadamente a origem da diferença entre os gráficos das figuras 3.3 e 3.4, para entender o porque desta aparente contradição.

Voltando ao objetivo principal do trabalho, os resultados da seleção conjunta (tabela 3.10) são uma indicação clara de que os 5 eventos da Amostra 1 são, de fato, diferentes dos demais. Talvez, se tomados isoladamente, os valores de  $n_s$  obtidos para cada uma das amostras Amostra 2 à Amostra 5 possam ser interpretados como flutuações normais. Contudo, seria surpreendente se o resultado  $n_s < 3$  em todos os casos fosse também uma flutuação e não conseqüência do fato das cinco famílias da Amostra 1 serem de fato diferentes das demais.

Usando a análise de distribuição de energia (tabelas 3.11(a) e 3.11(b)), a família simulada sobrevivente pode ser considerada diferente das famílias da Amostra 1 com um nível de confiança mínimo de 95,4%. De certa forma, trata-se de um resultado esperado, tendo em vista os comportamentos diferentes dos gráficos das figuras 3.3 e 3.4.

No caso da Amostra 4, a interpretação dos resultados das tabelas 3.11 é complexa. Antes de continuar, é importante ressaltar que a Amostra 4 usa as mesmas famílias da Amostra 2. A diferença está no fato de que, na comparação da Amostra 4 com a Amostra 1, somente os chuveiros observados na câmara superior foram utilizados. Isto não muda as famílias da Amostra 4, mas muda sensivelmente as da Amostra 1 (ver tabelas 3.1 e 3.2). Continuando, para a Amostra 4, o nível de confiança na diferença entre as distribuições de energia é baixo, porém, como somente os chuveiros observados na câmara superior foram considerados, o que se pode dizer é que a distribuição de energia da 'parte superior' de algumas famílias Centauro (Amostra 1) é compatível com a distribuição de energia das famílias normais. Verificando um a um os valores de  $a_{ks}$  para cada comparação das três famílias sobreviventes com as cinco do tipo Centauro, observa-se que os maiores valores ocorrem para os Centauros com mais chuveiros observados na câmara superior e maiores alturas de interação. Este comportamento pode ser interpretado como conseqüência de contaminação da 'parte superior' destes Centauros por interações sucessivas. Também é difícil avaliar se usar somente os chuveiros da parte superior da família introduz algum viés na distribuição de energia.

Na Amostra 2, a análise de distribuição de energia fornece um resultado mais consistente com a seleção conjunta, apesar da aparente inconsistência da família Centauro III. Novamente, isto pode ser resultado de contaminação do evento por interações sucessivas. Por exemplo, observando o gráfico da figura 4.9(c), é possível notar uma diferença mais acentuada entre as curvas da relação  $\mathcal R$  para as várias componentes do que nos outros Centauros (comparar, por exemplo com o gráfico da figura 4.10(a) do Centauro V, que possui, aproximadamente, as mesmas multiplicidades). Notar também que a distribuição de ângulo azimutal da família Centauro III (gráfico da figura 4.11(c), curva vermelha, feita sem distinguir o tipo do chuveiro) tem um formato peculiar, notadamente diferente das outras famílias da Amostra 1. Como a família Centauro III se espalha por dois blocos adjacentes na câmara superior e a posição relativa entre os blocos não é conhecida com precisão, pode ser que haja algum viés nas suas medidas, apesar de todos os cuidados tomados para evitar isto. Talvez as discrepâncias apontadas nos gráficos das figuras 4.10(a) e 4.11(c) sejam conseqüência disto. Desconsiderando o resultado da família Centauro III, as três famílias sobreviventes da Amostra 2 podem ser consideradas diferentes das famílias da Amostra 1 com um nível de confiança mínimo de 77.4%.

É evidente que, sozinha, a análise de distribuição de energia não seria suficiente para evidenciar a diferença entre os Centauros e as famílias das amostras Amostra 2 à Amostra 4), mesmo porque fica claro dos vários resultados apresentados que ela é muito susceptível a contaminações por interações sucessivas. Contudo, apoiada pela seleção conjunta, seus resultados indicam que as cinco famílias da Amostra 1 são diferentes das famílias das demais amostras, inclusive das sobreviventes. É sempre importante lembrar que, tanto na seleção conjunta quanto na análise de distribuição de energia, não foi feita distinção entre os dois tipos de chuveiros (seção 2.13).

Aceita a validade dos resultados acima, fica a dúvida sobre o porque das famílias Centauro serem diferentes das demais, principalmente no aspecto da dominância da componente hadrônica (chuveiros do tipo 2). A explicação mais ortodoxa é que não há produção de  $\pi^0$ 's na Interação Hadrônica. Contudo, já foi dito aqui que as análise da CBJ em seus dados mostram que as famílias observadas podem ser divididas em alguns grupos com características distintas (momento transversal médio, massa invariante do estado intermediário, etc.). Um destes grupos, composto pelas famílias de menor multiplicidade e momento transversal médio é chamado de *Mirim*. Um segundo grupo é chamado  $A_{\zeta}$ , composto por famílias com multiplicidade e momento transversal médio maiores que os do grupo Mirim. Esta separação entre os grupos está ilustrada na figura 4.17, que mostra o gráfico  $mDW \times \theta_{\gamma} \Sigma E_{\gamma}$  para algumas famílias das quais foi possível determinar a altura de interação, incluindo os Centauros I e V. Notar como os vários grupos ocupam regiões diferentes do gráfico e que, quanto maior o momento transversal médio, mais a direita do gráfico o grupo se localiza. Observa-se que, no grupo Mirim os chuveiros do tipo 1 são provenientes de  $\pi^0$ 's, enquanto que no grupo Açú já é possível identificar a produção de mésons  $\eta$  (ver, por exemplo [32]). Assim sendo, com o aumento do momento transversal médio da família, estaria aumentando a massa dos mésons produzidos, o que parece razoável. Alguns modelos fenomenológicos (ver [17]c)), inclusive, associam o momento transversal médio observado da família com a massa do méson produzido predominantemente na Interação Hadrônica. Dos dados da CBJ é possível obter os seguintes valores aproximados (para C-Jatos):

grupo	$\langle P_t^{\gamma} \rangle$	méson observado
_	(mev/c)	massa (Mev)
Mirim	$\sim 195$	$\pi^0$
MITIM	$\simeq 125$	$\simeq 135$
Δcú	$\sim 258$	$\eta,\pi^0$
nçu	_ 200	$\simeq 548$
Centauro	$\simeq 300$	?

No caso dos Centauros, como verifica-se que os chuveiros são em sua maior parte do tipo 2 (hádrons), o momento transversal médio observado  $\langle P_t^{\gamma} \rangle$ deveria ser corrigido pela inelasticidade  $k_{\gamma}$ . Usando  $k_{\gamma} = 0, 3$ , a massa do 'méson' equivalente seria  $\simeq 900 MeV$ , o que sugere que, talvez, o 'méson' produzido predominantemente na interação seja na verdade um bárion (o próton) e que nas interações do tipo Centauro estaria ocorrendo uma **produção múltipla de bárions e anti-baríons**.

Uma das hipóteses já levantadas para a origem do fenômeno Centauro é de que o mesmo seria decorrente da Interação Hadrônica de alguma partícula exótica. No "legoplot" da figura 4.15(a), a barra preta corresponde a um chuveiro do Centauro V que, sozinho, carrega cerca de 18% da energia total observada da família. O valor do  $P_t^{\gamma}$  deste chuveiro é cerca de 680 MeV/c (ou 460 MeV/c, se considerarmos somente os chuveiros do tipo 2 no cálculo do CPE). Este chuveiro (identificado pelo número 62) apresenta todas as caracteríticas de um chuveiro do tipo 2, isto é, um chuveiro iniciado por hádron (ver figura 5.1). Por se tratar de um chuveiro do tipo 2 que carrega uma fração razoável da da energia total observada da família, pode ser que este chuveiro tenha sido gerado pelo hádron sobrevivente (ou líder). Usando uma inelasticidade eletromagnética média da ordem de  $0.2 \sim 0.3$ , o  $P_t$  deste hádron poderia ser grosseiramente estimado como algo em torno de 1 GeV/c, o que sugeriria que o mesmo seria um proton. Isto eliminaria a possibilidade do fenômeno Centauro ser causado por uma partícula exótica.

Adicionando ao gráfico da figura 1.4 os valores de  $\langle P_t \rangle$  e multiplicidade por intervalo de rapidez das cinco famílias da Amostra 1, obtém-se o gráfico da figura 5.2. Segundo, por exemplo, Jacob[34], o comportamento dos dados de maiores energias da figura 5.2 (os mesmos da figura 1.4) seria uma possível indicação de que os quarks e gluons, que, supostamente (segundo a Cromodinâmica Quântica) se formam entre a Interação Hadrônica e a Produção Múltipla de Mésons, estariam sofrendo uma espécie de mudança de estado, formando o *Plasma Quark-Gluon* (QGP). Sem correção pela inelasticidade eletromagnética, os dados dos cinco Centauros parecem acompanhar os C-Jatos. Porém, fazendo esta correção, os 5 Centauros passariam para a região cinza indicada no gráfico da figura 5.2 e, portanto, fica em aberto a questão de como este comportamento dos 5 Centauros estaria relacionado com a formação do QGP.

#### Centauro V (C16S086I037)

#### Classificação dos y s

Ciassificação dos pis			
Câm.	Sup.	Câm. Inf.	Total
G1	G2		
17	3	0	20

G1: ajuste com um máximo nos filmes de Raio-X

#: <u>1</u>, <u>2</u>, <u>3</u>, <u>5</u>, <u>6</u>, <u>7</u>, <u>9</u>, <u>12</u>, <u>15</u>, <u>24</u>, <u>30</u>, <u>32</u>, <u>46</u>, <u>47</u>, <u>49</u>, <u>52</u> e <u>53</u>

G2: observados dois núcleos nas Emulsão Nuclear

#: <u>4, 16</u> e <u>17</u>

Classificação dos hádrons

Câm. Sup.			Câm.	Inf.	Total			
H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	
7	4	3	2	9	3	9*	4	41*

- H1: aparece na superior, continua na inferior e são multi-nucleares (pelo menos 2 na superior ou na inferior). Os #20 e #27 foram utilizados para determinação da altura (vértice da interação), tanto nos filmes de Raio-X quanto nas placas de Emulsão Nuclear.
- #:  $\underline{8}(1 \text{ sup e } 2 \text{ inf}), \underline{10}(2 \text{ sup e } 2 \text{ inf}), \underline{11}(2 \text{ sup e } 1 \text{ inf}), \underline{20}(4 \text{ sup e } 2 \text{ inf}), \underline{27}(5 \text{ sup e } 3 \text{ inf})+28(\text{ajuste com mais de } 1 \text{ máximo}), \underline{37}(2 \text{ sup e } 1 \text{ inf}) \text{ e } \underline{40}(4 \text{ sup e } 2 \text{ inf})$ H2: quantidade de núcleos  $\geq 3$  ( $\equiv A$ -jatos).
  - #: <u>21</u>(4 núcleos), <u>25</u>(4 núcleos e ajuste com mais de 1 máximo)+26, <u>39</u>(3 núcleos) e <u>50</u>(3 núcleos e ajuste com mais de 1 máximo)
- H3: quantidade de núcleos = 2 ( ≡ A-jatos)e tem ajuste com mais de 1 máximo #: <u>19, 22</u> e <u>33</u>
- H4: visível -9 u.c. e tem ajuste com mais de 1 máximo #:<u>18</u>(1 núcleo na 12 u.c. e <u>34</u>(2 núcleos na 12 u.c.)
- H5: ajuste com mais de 1 máximo
- #: <u>13, 29, 35, 41, 38+42, 43+44, 45, 48 e 51</u>
- H6: aparenta melhor ajuste com mais de 1 máximo #: <u>23, 31, 36</u>
- H7: não é ajustável com uma curva simples, apresenta múltiplos núcleos (≡ C-jatos) e são observadas até a 22 u.c. Um deles (#62\*) foi identificado com 'partícula sobrevivente' porque apresenta pelo menos dois máximos na câmara inferior e foi observado de 6 u.c. a 30 u.c.
  #: <u>54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 62\*</u> e <u>64</u>
- H8: não é ajustavel com uma curva simples, são observadas somente apos ~6 u.c. até ~24 u.c. (≡ Pb-jatos)

Figura 5.1: Esta tabela indica quais e quantos chuveiros do Centauro V atendem a cada um dos critérios de identificação de chuveiros nos tipos 1 e 2. Os chuveiros estão dividos em grupos (G1,G2, ..., H1, H2, H3, etc.), sendo que cada um destes grupos tem chuveiros que atendem a um mesmo conjunto destes critérios. O chuveiro de número 62 esta no grupo H7.

<sup>#: 61, 63(</sup>até 22 u.c.), 65(após 4 u.c.) e 66(após 4 u.c.)



Figura 5.2: Os dados das cinco famílias Centauro da Amostra 1 comparados com os dados da figura 1.4.  $N_h$  é o número de chuveiros do tipo 2 (hádrons),  $N_\gamma$  é o número de chuveiros do tipo 1 ( $\gamma$ 's) e  $N_c$  é o número de hádrons carregados.

## Apêndice A

# Dedução das expressões para <br/> ${}^{\scriptscriptstyle \Sigma}\theta^n_\gamma E_\gamma$

O número de  $\gamma$ 's produzidos por intervalo de energia, pelo Estado Intermediário (EI), no seu referencial de repouso e em um sistema de coordenadas esféricas centrado no EI é dado por:

$$dN = \frac{1}{4\pi}g(E^*, \theta^*, \phi^*)\sin\theta^* d\theta^* d\phi^* dE^*$$
(A.1)

onde:

 $\mathbf{N}$  é o número de  $\gamma$ 's;

 $E^*$  é a energia do  $\gamma$  no referencial de repouso do EI;

- $\phi^*$  é o ângulo azimutal da direção do  $\gamma$  no referencial de repouso do EI;
- $\theta^*$  é o ângulo zenital da direção do  $\gamma$  no referencial de repouso do EI;
- $g(E^*,\theta^*,\phi^*)$ é a função distribuição de energia no referencial de repouso do EI.

Supondo produção isotrópica nos ângulos zenital e azimutal, A.1 fica:

$$dN = -\frac{1}{2}g(E^{*}) d(\cos \theta^{*}) dE^{*}$$
(A.2)

No referencial de laboratório, A.2 fica:

$$dN = -\frac{1}{2}h(E,\theta)d(\cos\theta)dE$$
(A.3)

com:

 $h(E, \theta)$  sendo a função distribuição de energia no referencial de laboratório;

- *E* a energia no referencial de laboratório, dada pela transformação de Lorentz  $E = \Gamma E^* (1 + \beta \cos \theta^*)$  onde  $\beta = v/c \ (\beta \simeq 1);$
- $\theta\,$ o ângulo zenital no referencial de laboratório.

Tem-se também que:

$$\int_0^\infty g(E^*) \, dE^* = N_\gamma \tag{A.4}$$

е

$$\int_0^\infty E^* g(E^*) dE^* = \mathcal{M}_\gamma c^2 \tag{A.5}$$

com  $N_{\gamma}$  sendo o número total de  $\gamma$ 's produzidos, c a velocidade da luz e  $\mathcal{M}_{\gamma}$ a massa invariante (ou de repouso) em forma de  $\gamma$ 's do EI.

## A.1 Cálculo de $\sum_{\theta_i < \theta} E(\theta)$

Usando as expressões acima, ve-se que  $\sum_{\theta_i < \theta} E(\theta)$  é dado (no referencial de laboratório) por:

$$\sum_{\theta_i < \theta} E(\theta) = -\int_1^{\cos \theta} \int_0^\infty \frac{1}{2} E h(E, \theta') dE d(\cos \theta')$$
$$= -\int_1^{\cos \theta^*} \int_0^\infty \frac{1}{2} \Gamma E^* (1 + \beta \cos \theta^{*\prime}) g(E^*) dE^* d(\cos \theta^{*\prime})$$

como,  $\beta = 1$  no caso de  $\gamma$ 's, tem-se:

$$\sum_{\theta_i < \theta} E(\theta) = -\frac{\Gamma}{2} \int_1^{\cos \theta^*} (1 + \cos \theta^{*\prime}) d(\cos \theta^{*\prime}) \int_0^\infty E^* g(E^*) dE^*$$

substituindo na expressão anterior o resultado de A.5:

$$\sum_{\theta_i < \theta} E(\theta) = -\frac{\mathcal{M}_{\gamma} c^2 \Gamma}{2} \int_1^{\cos \theta^*} (1 + \cos \theta^{*\prime}) \ d(\cos \theta^{*\prime})$$

$$= -\frac{\mathcal{M}_{\gamma} c^2 \Gamma}{2} \left[ \cos \theta^{*\prime} + \frac{\cos^2 \theta^{*\prime}}{2} \right] \Big|_{\cos \theta^{*\prime} = 1}^{\cos \theta^{*\prime} = \cos \theta^{\prime}}$$
$$= -\frac{\mathcal{M}_{\gamma} c^2 \Gamma}{2} \left[ \cos \theta^* + \frac{\cos^2 \theta^*}{2} - \frac{3}{2} \right]$$

Agora, da transformação de Lorentz para  $\theta^*\colon$ 

$$\Gamma \tan \theta = \tan \frac{\theta^*}{2} \Rightarrow$$

$$\tan \frac{\theta^*}{2} \simeq \Gamma \theta \Rightarrow \qquad (A.6)$$

$$\cos \theta^* \simeq \frac{1 - \Gamma^2 \theta^2}{1 + \Gamma^2 \theta^2}$$

usando a aproximação acima para  $\cos \theta^*$ :

$$\sum_{\theta_i < \theta} E(\theta) \simeq -\frac{\mathcal{M}_{\gamma} c^2 \Gamma}{2} \left[ \frac{1 - \Gamma^2 \theta^2}{1 + \Gamma^2 \theta^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \Gamma^2 \theta^2}{1 + \Gamma^2 \theta^2} \right)^2 - \frac{3}{2} \right]$$

E, simplificando a última expressão, obtém-se finalmente:

$$\sum_{\theta_i < \theta} E(\theta) \simeq \mathcal{M}_{\gamma} c^2 \Gamma \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 + \Gamma^2 \theta^2\right)^2} \right]$$
(A.7)

# A.2 Cálculo de $\sum_{\theta_i < \theta} \theta E(\theta)$

A expressão para  $\sum_{\substack{\theta_i < \theta \\ \theta_i < \theta}} E(\theta)\theta$  (no referencial de laboratório) é (similarmente ao caso de  $\sum_{\substack{\theta_i < \theta \\ \theta_i < \theta}} E(\theta)$ ):

$$\sum_{\theta_i < \theta} \theta E(\theta) \stackrel{\theta \simeq \sin \theta}{\simeq} \sum_{\theta_i < \theta} P_t(\theta) = \sum_{\theta_i < \theta} E(\theta) \sin \theta \stackrel{E^* \sin \theta^* = E \sin \theta}{=} -\int_1^{\cos \theta^*} \int_0^\infty \frac{1}{2} E^* \sin \theta^* g(E^*) dE^* d(\cos \theta^{*\prime})$$

Notar que a aproximação  $\sin\theta\simeq\theta$  vale porque os valores de  $\theta$  no referencial de laboratório são da ordem de  $10^{-3}$  rad. A relação  $E^*\sin\theta^* =$ 

105

 $E \sin \theta$  vale em qualquer caso, porque o momento transversal  $P_t = E \sin \theta = E^* \sin \theta^*$  é invariante sob uma transformação de Lorentz. Continuando então tem-se:

$$\sum_{\theta_i < \theta} P_t(\theta) = -\int_1^{\cos \theta^*} \frac{1}{2} \sin \theta^{*\prime} d(\cos \theta^{*\prime}) \int_0^\infty E^* g(E^*) dE^*$$

usando novamente A.5:

$$\sum_{\theta_i < \theta} P_t(\theta) = -\int_1^{\cos \theta^*} \frac{1}{2} \sin \theta^{*\prime} \mathcal{M}_\gamma c^2 d(\cos \theta^{*\prime})$$
$$= -\frac{\mathcal{M}_\gamma c^2}{2} \int_1^{\cos \theta^*} \sin \theta^{*\prime} d(\cos \theta^{*\prime})$$
$$= \frac{\mathcal{M}_\gamma c^2}{2} \left[ -\frac{\sin \theta^* \cos \theta^*}{2} + \frac{\theta^*}{2} \right] \Big|_{\theta^{*\prime} = \theta^*}^{\theta^{*\prime} = \theta^*}$$

Agora, usando a aproximação  $\sin \theta^* \cos \theta^* \simeq 2\Gamma \theta \frac{1-\Gamma^2 \theta^2}{1+\Gamma^2 \theta^2}$ :

$$\sum_{\theta_i < \theta} P_t(\theta) \simeq \frac{\mathcal{M}_{\gamma} c^2}{2} \left[ \frac{\theta^*}{2} - \Gamma \theta \frac{1 - \Gamma^2 \theta^2}{1 + \Gamma^2 \theta^2} \right]_{\theta^{*'} = 0}^{\theta^{*'} = \theta^*}$$

Usando o resultado da equação A.6 tem-se, finalmente:

$$\sum_{\theta_i < \theta} \theta E(\theta) \simeq \frac{\mathcal{M}_{\gamma} c^2}{2} \left[ \arctan(\Gamma \theta) - \Gamma \theta \frac{1 - \Gamma^2 \theta^2}{1 + \Gamma^2 \theta^2} \right]$$
(A.8)

# A.3 Cálculo de $\sum_{\theta_i < \theta} \theta^2 E(\theta)$

Para simplificar a notação  $\sum_{\theta_i < \theta} \theta^2 E(\theta)$  será escrito como  $\sum_{\theta_i < \theta} \theta^2 E$ . A expressão neste caso é:

$$\sum_{\theta_i < \theta} \theta^2 E = -\int_1^{\cos \theta} \int_0^\infty \frac{1}{2} E \,\theta^2 \,h(E,\theta') \,dE \,d(\cos \theta')$$

Aproximando  $\theta^2 \simeq \sin^2 \theta$ :

$$\sum_{\theta_i < \theta} \theta^2 E \simeq -\int_1^{\cos \theta} \int_0^\infty \frac{1}{2} E \sin^2 \theta \ h(E, \theta') \ dE \ d(\cos \theta')$$
$$\simeq -\int_1^{\cos \theta} \int_0^\infty \frac{1}{2} E \sin \theta \ \sin \theta \ h(E, \theta') \ dE \ d(\cos \theta')$$

Novamente, temos:

$$E^* \sin \theta^* = E \sin \theta \\ E \simeq \Gamma E^* (1 + \cos \theta^*)$$
  $\Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\Gamma} \frac{\sin \theta^*}{(1 + \cos \theta^*)}$ 

Então:

$$\sum_{\theta_i < \theta} \theta^2 E \simeq -\frac{1}{2} \int_1^{\cos \theta^*} \int_0^\infty E^{*\prime} \sin \theta^{*\prime} \frac{1}{\Gamma} \frac{\sin \theta^{*\prime}}{1 + \cos \theta^{*\prime}} g(E^{*\prime}) dE^{*\prime} d(\cos \theta^{*\prime})$$

Usando novamente A.5:

$$\sum_{\theta_i < \theta} \theta^2 E \simeq -\frac{1}{2\Gamma} \mathcal{M}_{\gamma} c^2 \int_1^{\cos \theta^*} \frac{\sin^2 \theta^{*\prime}}{1 + \cos \theta^{*\prime}} d(\cos \theta^{*\prime})$$
$$\simeq -\frac{1}{2\Gamma} \mathcal{M}_{\gamma} c^2 \int_1^{\cos \theta^*} \frac{1 - \cos^2 \theta^{*\prime}}{1 + \cos \theta^{*\prime}} d(\cos \theta^{*\prime})$$
$$\simeq -\frac{1}{2\Gamma} \mathcal{M}_{\gamma} c^2 \int_1^{\cos \theta^*} \frac{(1 - \cos \theta^{*\prime})(1 + \cos \theta^{*\prime})}{1 + \cos \theta^{*\prime}} d(\cos \theta^{*\prime})$$
$$\simeq -\frac{1}{2\Gamma} \mathcal{M}_{\gamma} c^2 \int_1^{\cos \theta^*} (1 - \cos \theta^{*\prime}) d(\cos \theta^{*\prime})$$

Agora, resolvendo a integral e usando a aproximação  $\cos\theta^* \simeq \frac{1-\Gamma^2\,\theta^2}{1+\Gamma^2\,\theta^2}$ :

$$\sum_{\theta_i < \theta} \theta^2 E \simeq -\frac{1}{2\Gamma} \mathcal{M}_{\gamma} c^2 \left[ -2 \frac{\Gamma^4 \theta^4}{\left(1 + \Gamma^2 \theta^2\right)^2} \right]$$

E finalmente:

$$\sum_{\theta_i < \theta} \theta^2 E \simeq \frac{\mathcal{M}_{\gamma} c^2}{\Gamma} \left[ \frac{\Gamma^2 \theta^2}{1 + \Gamma^2 \theta^2} \right]^2$$

# A.4 Cálculo de $\sum_{\theta_i < \theta} \theta^3 E(\theta)$

Para simplificar a notação  $\sum_{\theta_i < \theta} \theta^3 E(\theta)$  será escrito como  $\sum_{\theta_i < \theta} \theta^3 E$ . A integral que define (aproximando  $\theta^3 \simeq \sin^3 \theta$ ) é:

$$\sum_{\theta_i < \theta} \theta^3 E \simeq -\int_1^{\cos \theta} \int_0^\infty \frac{1}{2} E \, \sin^3 \theta \, h(E, \theta') \, dE \, d(\cos \theta')$$

sendo:

$$\sin \theta = \frac{1}{\Gamma} \frac{\sin \theta^*}{1 + \cos \theta^*} \Rightarrow \sin^3 \theta = \frac{1}{\Gamma^3} \frac{\sin^3 \theta^*}{\left(1 + \cos \theta^*\right)^3}$$

е

$$E \simeq \Gamma E^* (1 + \cos \theta^*)$$

tem-se:

$$\sum_{\theta_i < \theta} \theta^3 E \simeq -\frac{1}{2\Gamma^2} \int_1^{\cos \theta^*} \frac{\sin^3 \theta^{*\prime}}{\left(1 + \cos \theta^{*\prime}\right)^3} \left(1 + \cos \theta^{*\prime}\right) \times \int_0^\infty E^{*\prime} g(E^{*\prime}) dE^{*\prime} d(\cos \theta^{*\prime})$$

Usando novamente A.5:

$$\sum_{\theta_i < \theta} \theta^3 E \simeq -\frac{\mathcal{M}_{\gamma} c^2}{2\Gamma^3} \int_1^{\cos \theta^*} \frac{\sin^3 \theta^{*\prime}}{\left(1 + \cos \theta^{*\prime}\right)^2} d(\cos \theta^{*\prime})$$

$$\begin{split} \sum_{\theta_i < \theta} \theta^3 E \simeq \frac{\mathcal{M}_{\gamma} c^2}{2\Gamma^3} \int_0^{\theta^*} \frac{\sin^3 \theta^{*\prime}}{(1 + \cos \theta^{*\prime})^2} \sin \theta^{*\prime} d\theta^{*\prime} = \\ &= \frac{\mathcal{M}_{\gamma} c^2}{2\Gamma^3} \int_0^{\theta^*} \frac{\sin^4 \theta^{*\prime}}{(1 + \cos \theta^{*\prime})^2} d\theta^{*\prime} = \\ &= \frac{\mathcal{M}_{\gamma} c^2}{2\Gamma^3} \int_0^{\theta^*} \frac{(1 - \cos^2 \theta^{*\prime})(1 - \cos^2 \theta^{*\prime})}{(1 + \cos \theta^{*\prime})^2} d\theta^{*\prime} = \\ &= \frac{\mathcal{M}_{\gamma} c^2}{2\Gamma^3} \int_0^{\theta^*} \frac{(1 - \cos \theta^{*\prime})(1 - \cos \theta^{*\prime})(1 + \cos \theta^{*\prime})}{(1 + \cos \theta^{*\prime})^2} d\theta^{*\prime} = \end{split}$$
$$= \frac{\mathcal{M}_{\gamma} c^2}{2\Gamma^3} \int_0^{\theta^*} (1 - \cos \theta^{*\prime})^2 d\theta^{*\prime} =$$
$$= \frac{\mathcal{M}_{\gamma} c^2}{2\Gamma^3} \left[ \frac{-8\sin \theta^{*\prime} + \sin 2\theta^{*\prime} + 6\theta^{*\prime}}{4} \right]$$

Sendo:

$$\tan \frac{\theta^{*'}}{2} \simeq \Gamma \theta$$
$$\sin \theta^{*'} \simeq \frac{2\Gamma \theta}{1 + \Gamma^2 \theta^2}$$
$$\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$$
$$\cos \theta^* \simeq \frac{1 - \Gamma^2 \theta^2}{1 + \Gamma^2 \theta^2}$$

obtém-se finalmente:

$$\sum_{\theta_i < \theta} \theta^3 E \simeq \frac{\mathcal{M}_{\gamma} c^2}{2\Gamma^2} \left[ \frac{\Gamma \theta \left( 1 - \Gamma^2 \theta^2 \right)}{\left( 1 + \Gamma^2 \theta^2 \right)^2} - \frac{4\Gamma \theta}{1 + \Gamma^2 \theta^2} + 3 \arctan \left[ \Gamma \theta \right] \right] \Rightarrow$$
$$\sum_{\theta_i < \theta} \theta^3 E \simeq \frac{\mathcal{M}_{\gamma} c^2}{2\Gamma^2} \left[ 3 \arctan(\Gamma \theta_{\gamma}) - \frac{3 + 5\Gamma^2 \theta_{\gamma}^2}{\left( 1 + \Gamma^2 \theta_{\gamma}^2 \right)^2} \Gamma \theta \right]$$

## Apêndice B

## O teste estatístico Kolmogorov-Smirnov

Dados dois conjuntos de dados, são frequentes as situações em que se deseja saber se ambos se originaram ou não de uma mesma função densidade de probabilidade (f.d.p), ou simplesmente, de uma mesma distribuição. Estatisticamente, a questão é posta da seguinte forma: é possível provar, dentro de um dado nível de confiança, que é falsa a hipótese nula de que os dois conjuntos de dados tem a mesma distribuição? Há varios testes de hipótese, dentre eles o famoso teste do  $\chi^2$ , que permitem obter a resposta da questão, contudo o teste estatístico denominado Kolmogorv-Smirnov tem uma vantagem importante. Como não é necessário classificar os dados de cada conjunto em grupos, ele se aplica melhor em situações onde a quantidade de dados é pequena.

O teste é aplicado comparando-se os estimadores sem viés  $S_N(x)$  das funções de distribuição cumulativa das f.d.p.(x) dais quais se originaram os dois conjuntos de dados (estes conjuntos de dados são amostras de valores da variável x). A estatística de teste é justamente a diferença máxima Dentre  $S_1(x)$  e  $S_2(x)$ . O teste também pode ser aplicado no caso em que se deseja comparar um conjunto de dados diretamente com uma f.d.p. Neste caso,  $S_2(x)$  é substituído pela própria função de distribuição cumulativa da f.d.p.. O nível de confiança do teste é dado por  $1 - \alpha_{ks}$ , onde  $\alpha_{ks}$  é calculado a partir de D de várias formas diferentes (dependendo do comportamento da variável x e do tipo de comparação sendo feita). Por exemplo, há uma expressão específica para o caso em que a variável x é periódica (um ângulo, por exemplo). Contudo sempre teremos  $0 < \alpha_{ks} \leq 1$ .

## APÊNDICE B. O TESTE ESTATÍSTICO KOLMOGOROV-SMIRNOV111

Em geral, valores de  $\alpha_{ks}$  próximos a 0 (zero) indicam a não validade da hipótese nula e valores próximos a 1 (um) indicam a sua validade. Porém, isto não significa que é impossível obter valores de  $\alpha_{ks}$  próximos a zero caso a hipótese nula seja verdadeira. De fato, a distribuição de  $\alpha_{ks}$  é uniforme nos casos em que a hipótese nula é verdadeira. Quando a hipótese nula não é verdadeira, os valores de  $\alpha_{ks}$  estarão distribuídos próximos ao zero.

Maiores detalhes podem ser obtidos na referência [33].

## Bibliografia

- C.M.G.Lattes, G.P.S.Occhialini e C.F.Powell, Nature 160, 453 (1947)
- [2] D.J.Bird & outros, Astrophys. J. 441, 144 (1995)
- [3] N.Hayashida & outros, Phys. Rev. Lett. 73, 3491 (1994)
- [4] Colaboração Brasil-Japão, Canadian Journal of Physics 46, S660 (1968)
- [5] R.P.Feynman, Phys. Rev. Lett. 24, 1415 (1969)
- [6] G.Pancheri & C.Rubbia, Nucl. Phys. A418, 117c (1984)
- [7] T.Alexopulos e outros, Phys. Rev. Lett. 60, 1622 (1988)
- [8] T.K.Gaisser & F.Halzen, Phys. Rev. Lett. 54, 1754 (1985)
- [9] Uma lista parcial de publicações sobre o fenômeno Centauro é:
  - A.B.Migdal e outros, Phys. Lett. 65B, 423 (1976)
  - D.Sutherland, AIP Conf.Proc. 49, 503 (1978)
  - J.D.Bjorken & L.D.McLerran, Phys. Rev. D20, 2353 (1979)
  - S.A.Chin & A.K.Kerman, Phys. Rev. Lett. 43, 1292 (1979)
  - A.K.Mann & H.Primakoff, Phys. Rev. D22, 1115 (1980)
  - K.Kinoshita & P.B.Price, Phys. Rev. D24, 1708 (1981)
  - UA1 Collaboration, Phys. Lett. 112B, 189 (1982)

- K.Alpgard e outros, Phys. Lett. 115B, 71 (1982)
- G.N.Fowler e outros, Phys. Lett. 116B, 203 (1982)
- F.Halzen & H.C.Liu, Phys. Rev. Lett 46, 771 (1982)
- P.Ammiraju e outros, Nuov. Cim. 78A, 172 (1983)
- E.Witten, Phys Rev. D30, 272 (1984)
- C.S.Lam & S.Y.Lo, Phys. Rev. Lett. 52, 1184 (1984)
- G.Baym e outros, Phys. Lett. 160B, 181 (1985)
- C.Rubbia, Proc. 1985 Int. Symp. on Lepton and Proton Interactions at High Energies, Kyoto - Japan, 242 (1985)
- B.S.Acharya & M.V.S.Rao, J. Phys. G17, 759 (1991)
- A.D.Panagiotou e outros, Phys Rev. D45, 3134 (1992)
- P.B.Price, Phys. Rev. D47, 5194 (1993)
- A.Attallah & J.N.Capdevielle, J. Phys. G19, 1381 (1993)
- S.Pratt & W.Zelevinsky, Phys. rev. Lett. 72, 816 (1994)
- T.C.Brooks e outros, Phys. Rev. D52, 5667 (1997)
- C.E.Navia e outros, Phys. Rev. D55, 5834 (1997)
- A.L.S.Angelis e outros, Nucl. Phys. B-Proc. Sup. 75A, 203 (1999)
- C.R.A.Augusto e outros, Phys Rev D59, 054001 (1999)
- [10] **a)** M.Akashi & outros, Prog. Theor. Phys. Suppl. 32, 1 (1964)
  - b) Chacaltaya Emulsion Chamber Experiment, Prog. Theor. Phys. Suppl. 47, 1 (1971)
- [11] Y.Fujimoto & S.Hayakawa, Handbuch der Physik (Springer Verlag), XLVI/2, 115 (1967)
- [12] B.Rossi, High Energy Particles (Prentice-Hall, Inc.), primeira edição, 220 (1952)
- [13] **a**) B.Rossi & K.Greisen, Rev. Mod. Phys. 13, 240 (1941)
  - b) K.Kamata & J.Nishimura, Prog. Theor. Phys. Suppl. 6, 93 (1958)

- c) J.Nishimura, Prog. Theor. Phys. Suppl. 32, 72 (1964)
- d) J.Nishimura, Handbuch der Physik (Springer Verlag), XL-VI/2, 1 (1967)
- [14] **a)** I.Ohta, Prog. Theor. Phys. Suppl. 47, 271 (1971)
  - **b)** I.Ohta & outros, Nucl. Instrum. Meth. 161,35 (1979)
- [15] a) M.Okamoto & T.Shibata, Nucl. Instrum. Meth. A 257, 155 (1987)
  - b) T.Fujinaga & outros, Nucl. Instrum. Meth. A 276, 317 (1989)
- [16] Review of Particle Properties, Phys. Rev. D50, número 3, 1173 (1994)
- [17] a) Tese de Doutorado (em japonês) de T.Shibata, Universidade de Waseda
  - b) Chacaltaya Emulsion Chamber Experiment, Prog. Theor. Phys. Suppl. 47, 49 (1971)
  - c) Brasil-Japan Collaboration of Chacaltaya Emulsion Chamber Experiment, Prog. Theor. Phys. Suppl. 76, 1 (1983)
- [18] F.R.Arias Revollo, Interações hadrônicas: análise de C-jatos, Tese de Doutorado, Biblioteca do Instituto de Física 'Gleb Wataghin', UNICAMP, Campinas-SP (1996)
- [19] M.J.Menon, Observações sobre interações induzidas por hadrons da radiação cosmica ocorridas no alvo de camaras de fotoemulsões e chumbo, Tese de Mestrado, Biblioteca do Instituto de Física 'Gleb Wataghin', UNICAMP, Campinas-SP (1982)
- [20] E.H.Shibuya, Procc. 18TH International Cosmic Ray Conference, Bangalore-India, HE5-10, 97 (1983)
- [21] J.Swain & L.Taylor, Nucl. Instrum. Meth. A 411, 153 (1998)
- [22] N.M.Duller & W.D.Walker, Phys. Rev. 93, 215 (1954)

- [23] P.R.Bevington & D.K.Robinson, Data Reduction And Error Analysis For The Physical Sciences (McGraw-Hill), segunda edição, 96, 180 (1992)
- [24] A.S.Borisov *et al.*, Phys. Lett. B 190:(1-2), 226 (1987)
- [25] C.M.G.Lattes, Y.Fujimoto e S.Hasegawa, Phys. Rep. 65 No. 3, 151 (1980)
- Para o programa CORSIKA: D. Heck et al., Report FZKA 6019 (1998), disponível na "web page" do CORSIKA em http://www-ik3.fzk.de/ heck/corsika.
  - Modelo QGSJET: N.N. Kalmykov and S.S. Ostapchenko, Yad. Fiz. 56, 105 (1993); Phys. At. Nucl. 56(3), 346 (1993); N.N. Kalmykov, S.S. Ostapchenko and A.I. Pavlov, Izv. RAN Ser. Fiz. 58, N12, 21 (1994); N.N. Kalmykov, S.S. Ostapchenko and A.I. Pavlov, Bull. Russ. Acad. Science (Physics), 58, 1966 (1194).
- [27] L.T.Baradzei *et al.*, Nucl. Phys. B 370, 365 (1992)
- [28] http://wwwinfo.cern.ch/asd/geant4/geant4.html
- [29] E.H.Shibuya, Observações sobre interações na atmosfera de hádrons (partículas nuclearmente ativas) da radiação cósmica, detectadas em câmaras de fotoemulsões-chumbo expostas a 5220 metros acima do nível do mar, Tese de Doutorado, Biblioteca do Instituto de Física 'Gleb Wataghin', UNICAMP, Campinas-SP (1977)
- [30] Professora Carola Dobrigkeit Chinellato, comunicação particular (resultado não publicado).
- [31] P.C.Beggio, Remedições e Análise de alguns Eventos Exóticos em Interações Hadrônicas de Altas Energias, Tese de Mestrado, Biblioteca do Instituto de Física 'Gleb Wataghin', UNICAMP, Campinas-SP (1994)
- [32] S.L.C.Barroso, Busca de Mésons  $\eta$ , Tese de Mestrado, Biblioteca do Instituto de Física 'Gleb Wataghin', UNICAMP, Campinas-SP (1996)

- [33] W.H.Press, S.A.Teukolsky, W.T.Vetterling e B.P.Flannery, NUMERICAL RECIPES IN FORTRAN - The Art of Scientific Computing (Cambridge), segunda edição, 617 (1992)
- [34] M.Jacob, Nucl. Phys. A418, 7c (1984)