



Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Física 'Gleb Wataghin'

*Departamento de Física de Matéria Condensada
Laboratório de Óptica*

Imagens por Dupla Difração com Luz Branca sem Elementos Intermediários

Dissertação de Doutorado

Aluna: Noemí Inés Rodríguez Rivera

Dissertação apresentada ao Instituto de Física 'Gleb Wataghin' da Universidade estadual de Campinas para a obtenção do título de Doutorado em Física.

2007

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

R618i

Rodríguez Rivera, Noemí Inés

Imagem por dupla difração com luz branca sem elementos intermediários / Noemí Inés Rodríguez Rivera.
-- Campinas, SP : [s.n.], 2007.

Orientador: José Joaquín Lunazzi.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Ótica – Difração. 2. Imagem tridimensional.
3. Grades de difração. 4. Holografia. 5. Sistemas imageadores. I. Lunazzi, José Joaquín. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

- **Título em inglês:** Double diffraction white light imaging without intermediary elements
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 1. Diffractive optics
 2. Three-dimensional imaging
 3. Diffraction gratings
 4. Holography
 5. Imaging systems
- **Área de concentração:** Ótica
- **Titulação:** Doutora em Ciências
- **Banca examinadora:**

Prof. José Joaquín Lunazzi
Prof. Fernando de Souza Barros
Prof. Bernhard Johannes Lesche
Prof. Eduardo Miranda
Prof. Luiz Carlos Barbosa
- **Data da defesa:** 27.03.2007
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



Secretaria de Pós-Graduação - Tel: (19) 3521-5305 - FAX: (19) 3521-4142

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **NOEMÍ RODRIGUEZ RIVERA- RA 006627**, APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN" DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 27/03/2007.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. José Joaquín Lunazzi (Orientador da Candidata)
DFMC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Fernando de Souza Barros - IF/UFRJ

Prof. Dr. Bernhard Johannes Lesche - UFJF

Prof. Dr. Eduardo Miranda - DFMC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Luiz Carlos Barbosa - DEQ/IFGW/UNICAMP

*“Solía al despertar mirar al sol y suspirar....caminar.....sentir el viento en mi piel.
Y encontrar felicidad en momentos como aquel en que existía tu amor.....”*

A Deus e a minha família pela vida e o amor.

Agradecimentos

- Ao professor José Joaquín Lunazzi pela orientação, apoio e incentivo, que foram essenciais para a realização desta tese; a Cristina, esposa do Prof. Lunazzi, pelo seu apoio e carinho.
- A colega Daniel Magalhães pelas conversas e discussões de nossos trabalhos, que contribuíram no conteúdo desta tese.
- Ao professor Aníbal Valera e a Carmen Eyzaguirre, pelo apoio inicial que recebi para começar meus estudos de Pós-graduação.
- Ao Prof. Sakanaka, por absolver algumas de minhas dúvidas respeito ao programa Mathematica e as professores que participaram na banca desta tese que contribuíram no aperfeiçoamento da versão final desta tese.
- Ao Senhor George da oficina mecânica pelo trabalho realizado das peças mecânicas que utilizei para montar o sistema de dupla difração.
- A Maria Ignez Roquette Mokarzel, e ao pessoal da Pós-Graduação, por o apoio e colaboração durante estes quatro anos de doutorado.
- A todas as pessoas que estiveram direta ou indiretamente envolvidas com este trabalho, cujos nomes não cito explicitamente, mas não por isso foram menos importantes.
- E finalmente ao Programa de Bolsas para Instrutores Graduados “BIG” da Pró-Reitoria de Pós-graduação pelo apoio financeiro.

Resumo

Apresentamos neste trabalho a análise da formação de imagens por elementos difrativos com luz branca fazendo o traçado de raios pelas direções principais. O primeiro sistema analisado é composto por duas redes de difração e uma fenda, o segundo por dois elementos bidimensionais de estrutura espiral e um orifício, que formam imagens ortoscópicas (relevo natural). A partir das análises mencionadas desenvolvemos um sistema de dois elementos difrativos sem elementos intermediários que forma uma imagem de luz branca que é pancromática, porque oferece as cores originais.

Além disso, apresentamos um sistema formador de uma imagem por transmissão que consiste na projeção de objetos usando uma fonte linear (filamento extenso) e um elemento difrativo.

Aproveitando as propriedades de uma fonte linear, desenvolvemos um sistema que permite que espelhos ou lentes imperfeitos gerem imagens nítidas.

Mediante estes sistemas visamos conseguir um dia a formação de imagens convergentes, entretanto já oferecemos novas maneiras de se exibir imagens tridimensionais atrativas e amplas.

Abstract

We present the analysis of the formation of images by diffractive elements using white light by performing ray-tracing through main directions. The first system we describe is composed of two diffraction gratings and a slit, the second by two bi-dimensional spiral elements and a hole aperture, generating ortoscopic (natural relief) images.

From this we had found a system of two diffractive elements without any intermediating element that makes an image which is panchromatic because it gives original colors. Furthermore, we present a transmission imaging system that projects objects by means of a linear source (extended filament) and a diffractive element. Profiting the imaging properties of that linear source we also developed a system for mirrors and lenses having no sharpness to generate sharp images.

By studying these systems we seek to find a way to achieve the making of convergent images and we already offer new ways to exhibit attractive and large three-dimensional images.

Índice

Apresentação	1
1. Introdução	2
1.1 Difração escalar a grandes ângulos: a solução de alguns problemas pelo princípio da holografia	3
1.1.1 A difração pelo registro da interferência de ondas objeto e referência	3
1.1.2 Gravação e reconstrução Holográfica	5
1.2 Interferência de duas ondas planas	6
1.3 Uso do princípio da holografia para resolver difração sem aproximações	7
1.4 Difração	8
1.4.1 Difração de Fresnel e Fraunhofer	10
1.5 Cálculo da difração por uma rede utilizando as diferenças de caminho das ondas secundárias	10
1.6 Difração por uma borda	11
1.6.1 Demonstração da equação da rede de difração usando o conceito da difração por uma borda	12
1.7 Difração de um elemento óptico difrativo bidimensional	14
1.7.1 Elemento óptico difrativo EOD2D (Cd, Axicon)	15
1.8 Comparação entre uma lente refrativa, uma lente difrativa	16
1.9 Elementos ópticos de Fresnel	16
1.10 Definição de imagem ortoscópica e pseudoscópica	17
1.11 Sistema de dupla difração com fenda usando redes de difração	18
1.12 Diferença de imagens holográficas com as imagens (“holo”) geradas por nosso sistema	19
1.13 Auto- imagens Talbot e Lau	19
1.14 Equação de difração por uma rede aplicando difração de Huygens –Fresnel e o método de fase estacionária	20
1.13 Referências	21
2. Imagem Ortoscópica em um Processo de Dupla Difração	23
2.1 Imagem ortoscópica em um processo de dupla difração com uma fenda	23
2.1.1 Descrição do sistema	23
2.1.2 Imagem ortoscópica	24
2.1.3 Extensão de posições para o observador	25

2.1.4	Montagem experimental	26
2.1.5	Imagem de um objeto estendido	27
2.1.6	Presença de astigmatismo no sistema de rede simples e uma fenda	27
2.1.7	Medida da extensão de posições de um observador	29
2.2	Imagem Ortoscópica em um processo de dupla difração com um orifício.....	30
2.2.1	Descrição do Sistema	30
2.2.2	Imagem ortoscópica	32
2.2.3	Montagem experimental	32
2.2.4	Imagem de um objeto estendido	33
2.2.5	Eliminação do astigmatismo	34
2.2.6	Medida da posição de um ponto imagem.....	35
2.2.7	Calculo da extensão horizontal e a extensão vertical da imagem	36
2.3	Referências	39
3.	Imagens Pancromáticas de Luz Branca em um Processo de Dupla Difração sem Elementos Intermediários	40
3.1	Imagens de luz branca em um processo de dupla difração usando redes simples	
3.1.1	Descrição do sistema.....	41
3.1.2	Montagem experimental.....	43
3.1.3	Perspectiva do observador no sistema de dupla difração	43
3.1.4	Seletividade de comprimento de onda	45
3.1.5	Focalização da imagem	46
3.1.6	Imagem de um objeto extenso	46
3.1.7	Posição da imagem	47
3.1.8	Nitidez da imagem	50
3.1.9	Cálculo da posição da imagem usando aproximação paraxial	53
3.2	Imagens de luz branca em um processo de dupla difração usando elementos com estrutura bidimensional	56
3.2.1	Descrição do sistema	56
3.2.2	Montagem experimental	59
3.2.3	Imagem de um objeto extenso	59
3.2.4	Cálculo da posição de imagem de um objeto	60
3.3	Referências	64
4.	Holoprojeção de Objetos usando um Elemento Difrativo e Fonte Linear	
4.1	Holoprojeção de objetos usando uma Rede Holográfica	65
4.1.1	Descrição do sistema	65

4.1.2	Imagem de uma objeto tri-dimensional utilizando uma rede de difração	66
4.2	Holoprojeção de objetos usando uma Lente Holográfica	67
4.2.1	Descrição do sistema	67
4.2.2	Imagem ortoscópica	68
4.2.3	Montagem experimental	68
4.2.4	Ampliação da imagem	69
4.2.5	Cálculo da posição da imagem e magnificação da imagem	69
4.2.6	Imagem de um objeto tri-dimensional utilizando uma lente difrativa.....	71
4.3	Aplicação das propriedades de fonte linear a um elemento refletivo	73
4.4	Referências	76
5.	Conclusões	77

Apêndices

AI.	Alguns exemplos de uso da equação da rede seguindo a convenção de sinais	78
AI.	Teoria Geométrica de Difração	80
AIII.	Artigo: Imagem pseudoscópica em um processo de dupla difração com uma fenda: Propriedades do ponto crítico	96
AIV.	Efeito Talbot e Lau	103
AV.	Intensidade da imagem de dupla difração sem elementos intermediários usando a teoria de Huygens – Fresnel	107
AVI.	Algoritmos utilizados feito no programa Mathematica 5	112
AVII.	Dificuldades de Publicação	118

Apresentação

A estrutura desta dissertação esta apresentada da seguinte forma:

No inicio de cada capítulo fazemos uma introdução, colocando o assunto que será apresentado. Nas seções seguintes os assuntos são abordados e estudados em detalhes apresentando resultados quantitativos.

As figuras são numeradas de forma a revelar no primeiro algarismo o número do capítulo ou letra do apêndice, seguido por um ponto e a seqüência dela no capítulo. Os mesmo para as equações, com a diferença que o número do capítulo e a ordem da equação é separada por um hífen.

As tabelas são numeradas com números romanos de forma crescente não tendo novo início a cada capítulo.

No texto estão inseridas notas de rodapés, indicadas por números sobrescritos, exemplo: ¹², que tem a função de detalhar ou dar alguma informação adicional ao leitor. Esta informação é colocada no rodapé da página em que está sua respectiva numeração. Os números são crescentes, tendo novo início a cada capítulo.

As referências são feitas por números entre colchetes, exemplo: [5], situadas no final de cada capítulo. As referências têm novo início a cada capítulo.

No primeiro capítulo fazemos uma introdução ao tema de difração a grandes ângulos fazendo uso do principio holográfico, apresentamos uma breve amostragem das ferramentas teóricas usadas nos capítulos seguintes, demonstrações de algumas equações teóricas e o tema de dupla difração por uma fenda para a formação de uma imagem com relevo invertido. Desta forma, o capítulo 1 é dedicado para um melhor entendimento para os capítulos posteriores.

No segundo capítulo analisamos dois sistemas de dupla difração com um elemento intermediário, que formam imagem de relevo natural. O primeiro sistema de dupla difração está composto de duas redes de difração e uma fenda como elemento intermediário. No segundo sistema de dupla difração utilizamos dois elementos de estrutura espiral e um orifício como elemento intermediário.

No terceiro capítulo analisamos o sistema de dupla difração sem elementos intermediários como um sistema formador de imagem. Apresentamos dois sistemas, no primeiro sistema utilizamos redes de difração e no segundo utilizamos elementos de estrutura espiral.

No quarto capítulo estudamos o sistema de holoprojeção de objetos usando uma fonte linear e um elemento difrativo e analisamos a aplicação das propriedades da fonte linear a um sistema refletivo formador de imagens.

No quinto capítulo estão as conclusões sobre o trabalho.

No apêndice I colocamos alguns exemplos dos possíveis raios difratados usando a convenção de sinais para equação da rede.

No apêndice II, apresentamos um artigo sobre a teoria geométrica de difração.

No apêndice III, expomos um trabalho sobre o efeito Talbot e Lau.

No apêndice IV, apresentamos o artigo publicado sobre imagem pseudoscópica em um processo de dupla difração com uma fenda: propriedades do ponto crítico.

No apêndice V, demonstramos o cálculo do resultado da intensidade da imagem de dupla difração de um ponto objeto sem elementos intermediários aplicando Huygens-Fresnel.

No apêndice VI, colocamos os algoritmos utilizados nesta tese, feitos no programa Mathematica 5.

Finalmente, no apêndice VII expomos as dificuldades enfrentadas nas publicações.

Capítulo 1

Introdução

Imagens geradas com elementos difrativos estão sendo atualmente desenvolvidas para a fabricação de telescópios espaciais. Estes telescópios que utilizam elementos difrativos são mais leves, portanto o transporte dele para o espaço é muito mais econômico. Dentre os telescópios desenvolvidos pelo laboratório de Livermore [1], um deles é constituído por dois elementos difrativos e dois refrativos [2]. Entretanto na literatura não é encontrada a geração da imagem por elementos puramente difrativos para luz branca, que traria como consequência a fabricação de telescópios espaciais utilizando elementos puramente difrativos, sendo deste modo ainda mais leves.

Os primeiros estudos de formação de imagem utilizando elementos difrativos e uma fenda foram realizados no laboratório de óptica da UNICAMP [3]. Este sistema de dupla difração intermediada por uma fenda que criamos faz com que raios duplamente difratados formem uma imagem perfeitamente simétrica e de profundidade invertida (imagem pseudoscópica) [3-5]. O estudo de imagens por meio de luz branca usando dois elementos difrativos bidimensionais intermediado por um orifício, que gera imagens de profundidade invertida que são convergentes, foi realizado neste laboratório [6-7]. Nestes dois sistemas mencionados além de observar a imagem de profundidade invertida pode-se também observar ao mesmo tempo imagens de profundidade natural que serão apresentadas e estudadas no segundo capítulo desta tese, que foi o trabalho ao qual me dediquei após finalizar minha tese de mestrado.

Os resultados de dupla difração intermediada foram derivados da situação de simetria do sistema, o resultado de aumentar a abertura do elemento intermediário faz com que se perda a simetria e a extensão do ponto da imagem gerando uma aberração. Encontramos uma imagem surpreendente que resulta de usar somente dois elementos difrativos e passamos a estudá-la. Não existia até então nenhuma imagem de luz branca formada exclusivamente por difração e existia um trabalho que sugeria a impossibilidade de se obter [8]. Estas imagens geradas com duas redes de difração simples e com duas redes de estrutura espiral são definidas e caracterizadas no terceiro capítulo desta tese. O fato notável delas é a maneira com que os raios de luz desviados no espaço na primeira difração podem ser re-arranjados no segundo processo de difração. Uma semelhança de nosso sistema sem elementos intermediários é com um processo similar óptico usando elementos refrativos: pode-se obter uma imagem de um objeto de luz branca através da trajetória de luz de um prisma de pequena dispersão angular e corrigida incluindo um segundo prisma. Isto resulta interessante porque avança no sentido de se encontrar a formação de imagens puramente difrativas que substituam a óptica refrativa e refletiva.

As dificuldades que se apresentam são por trabalharmos com difração a grandes ângulos onde ao se aplicar à difração de Fresnel não obtemos uma aproximação suficiente; e onde as integrais da teoria escalar de difração sem aproximação resultam de difícil solução. Para isto recorreremos a

algumas abordagens tradicionais e ao traçado de raios principais, que em difração são os que desprezam a curvatura dos sulcos difrativos em uma pequena região. As equações com que trabalhamos tem as incógnitas dentro das raízes o que dificulta a interpretação do resultado por meio de equações simples. Encontramos as soluções de imagens por cálculo numérico constituindo um traçado de raios.

As técnicas de imagem por dupla difração intermediada que desenvolvemos surgiram do resgate de trabalhos de Lunazzi realizados por volta do ano de 1991 [9-13]. Um trabalho também realizado nessa época oferecia a projeção de uma imagem bidimensional sem precisar de lentes refrativas. Resgatamos também esse trabalho no capítulo quarto, descobrindo nele propriedades de imagem tri-dimensional e um novo tipo de tela dentro da família que chamamos de holotelas. Nossas holotelas são lentes difrativas simples ou com o campo de observação estendido verticalmente por meio de uma difusão gerada na gravação, sobre as quais aplicamos diferentes tipos de projeção.

A chave do resultado que nos permite eliminar as lentes refrativas projetoras é o uso de uma fonte fina com extensão linear horizontal. Aplicando-se esta idéia a elementos refletivos e refrativos conseguimos melhorar sua resolução e aumentar o campo de observação.

No capítulo cinco, estão as conclusões, nele deixamos nossa visão das possibilidades de avanço nesse tipo de imagens.

Na continuação apresentamos alguns conceitos básicos sobre holografia (interferência e difração), algumas propriedades de alguns elementos ópticos que usaremos em nossos sistemas e algumas relações matemáticas que usaremos neles também.

1.1 Difração escalar a grandes ângulos: a solução de alguns problemas pelo Princípio da Holografia

1.1.1 A difração pelo registro da interferência de ondas Objeto e Referência

Não há fontes realmente pontuais de luz no mundo da física, com um laser e uma objetiva de microscópio poderíamos concentrar luz com 1 μm de diâmetro, mas encontramos fontes estendidas e objetos iluminados que podem ser pensadas como um conjunto de fontes pontuais [14].

Vamos supor que A_1, A_2, \dots , etc. seja um conjunto de amplitudes de fontes pontuais do objeto. A_r representa a amplitude complexa da luz de referência, logo o total da amplitude complexa no holograma é:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_r. \quad (1-1)$$

Uma quantidade importante no processo da gravação holográfica é a intensidade total.

$$I = (A_1 + A_2 + \dots + A_r) (A_1^* + A_2^* + \dots + A_r^*). \\ I = A_1 A_1^* + A_2 A_2^* + \dots + A_r A_r^* + (A_1 A_2^* + A_2 A_1^* + \dots) + A_r (A_1^* + A_2^* + \dots) + A_r^* (A_1 + A_2 + \dots) \quad (1-2)$$

Excluindo os termos de intermodulação (os termos $A_1 A_2^* + A_2 A_1^* + \dots$), que indicam a quantidade de interferência das componentes de onda do objeto, as fontes pontuais do objeto se comportam independentemente.

Podemos limitar nossa atenção em uma só fonte pontual do objeto. Assumindo:

- Os hologramas têm uma transmitância de amplitude proporcional às intensidades do padrão de interferência.
- Os hologramas se comportam como uma rede de difração.

A onda de luz objeto e onda de luz referência podem chegar a qualquer ponto do elemento difrativo a ser representado por uma diferença de fase.

Seja $O = A_o e^{i\phi_o}$ a amplitude complexa da luz que chega no plano do elemento difrativo da fonte pontual do objeto e seja $R = A_r e^{i\phi_r}$ a amplitude complexa da onda de referência. Então a intensidade gravada no plano do elemento difrativo é:

$$I = A_o^2 + A_r^2 + R O^* + R^* O \quad (1-3)$$

o termo da interferência pode ser expressado como:

$$R O^* + R^* O = A_r e^{i\phi_r} \cdot A_o e^{-i\phi_o} + A_r e^{-i\phi_r} \cdot A_o e^{i\phi_o}$$

então:
$$I = A_o^2 + A_r^2 + 2 A_o A_r \cos(\phi_r - \phi_o) \quad (1-4)$$

E a transmitância pode ser expressa como:

$$t \propto A_o^2 + A_r^2 + A_r e^{i\phi_r} \cdot A_o e^{-i\phi_o} + A_r e^{-i\phi_r} \cdot A_o e^{i\phi_o} \quad (1-5)$$

Quando reconstruímos o holograma com uma onda objeto obtemos:

$$A_o e^{i\phi_o} \cdot t \propto (A_o^2 + A_r^2) A_o e^{i\phi_o} + A_r e^{i\phi_r} \cdot A_o e^{-i\phi_o} A_o e^{i\phi_o} + A_r e^{-i\phi_r} \cdot A_o e^{i\phi_o} A_o e^{i\phi_o} \\ A_o e^{i\phi_o} \cdot t \propto (A_o^2 + A_r^2) A_o e^{i\phi_o} + A_r A_o^2 e^{i\phi_r} + A_r A_o^2 e^{-i\phi_r} e^{2i\phi_o} \quad (1-6)$$

onde os três termos da equação (1-6) representam a onda difratada do holograma. O primeiro termo sai em uma mesma direção que a onda objeto, o segundo termo na direção da onda referência que representa uma ordem de difração e o terceiro termo representa a ordem conjugada da onda de referência.

E quando reconstruímos com a onda referência obtemos:

$$A_r e^{i\phi_r} \cdot t = (A_o^2 + A_r^2) A_r e^{i\phi_r} + A_r^2 A_o e^{-i\phi_o} e^{2i\phi_r} + A_r^2 A_o e^{i\phi_o} \quad (1-7)$$

Finalmente o caso quando reconstruímos com uma conjugada de onda referência:

$$A_r e^{-i\phi_r} \cdot t = (A_o^2 + A_r^2) A_r e^{-i\phi_r} + A_r^2 A_o e^{-i\phi_o} + A_r^2 A_o e^{i\phi_o} e^{-2i\phi_r} \quad (1-8)$$

A difração por um perfil do tipo cosseno (ou seno, na verdade ao quadrado), por exemplo, pode ser interpretada como a difração por duas ondas planas que o teriam gerado, e aplicando o princípio holográfico sabemos então que ao iluminar com uma dessas ondas supostas teremos como resultado a outra. Isto não envolveu aproximações de ângulo pequeno.

1.1.2 Gravação e reconstrução holográfica

Gravação Holográfica

A gravação é realizada pela interferência de duas ondas, uma onda objeto (que pode ser uma onda complexa) e uma onda referência que por simplicidade é usada uma onda plana para ter uma fácil reconstrução.

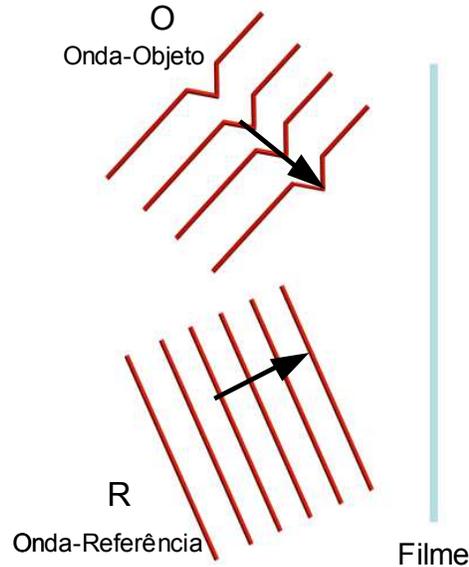


Fig. 1.1 Gravação de um holograma num filme holográfico, fazendo a interferência de onda objeto O com uma onda referência R.

Reconstrução Holográfica

Uma vez o padrão de interferência gravado no filme como na Figura 1.1, o filme deve ser revelado e fixado. Se o filme é recolocado na posição original da gravação e iluminado com a onda referência utilizada na gravação do holograma, aparece uma outra onda por trás do filme que é a onda objeto como na Figura 1.2 (a). Agora se iluminamos o holograma com uma onda conjugada de referência R^* obtemos uma imagem real do objeto como na Figura 1.2 (b).

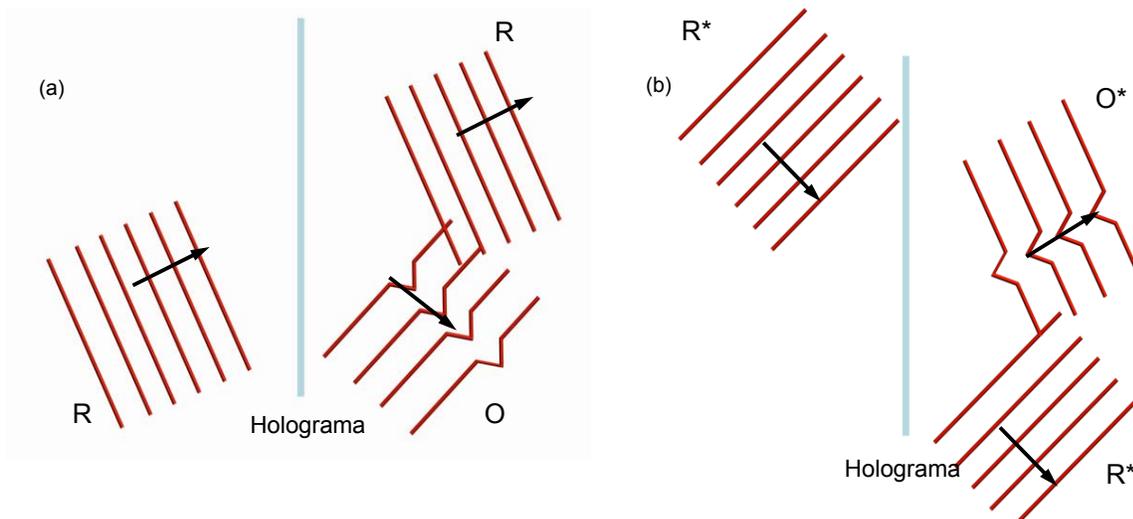


Fig. 1.2 Reconstrução holográfica: (a) Holograma iluminado pela onda R. (b) Holograma iluminado pela onda de referência conjugada R^* .

1.2 Interferência de duas ondas planas

Ao incidir duas ondas planas coerentes do mesmo comprimento de onda λ e da mesma intensidade sobre um anteparo a partir de duas direções diferentes como é mostrada na Fig. 1.3. Obteremos uma série de franjas claras e escuras; em alguns pontos do anteparo as ondas estarão em fase e se misturam obtendo as franjas claras, enquanto as outras ondas estarão em oposição de fase obtendo franjas escuras.

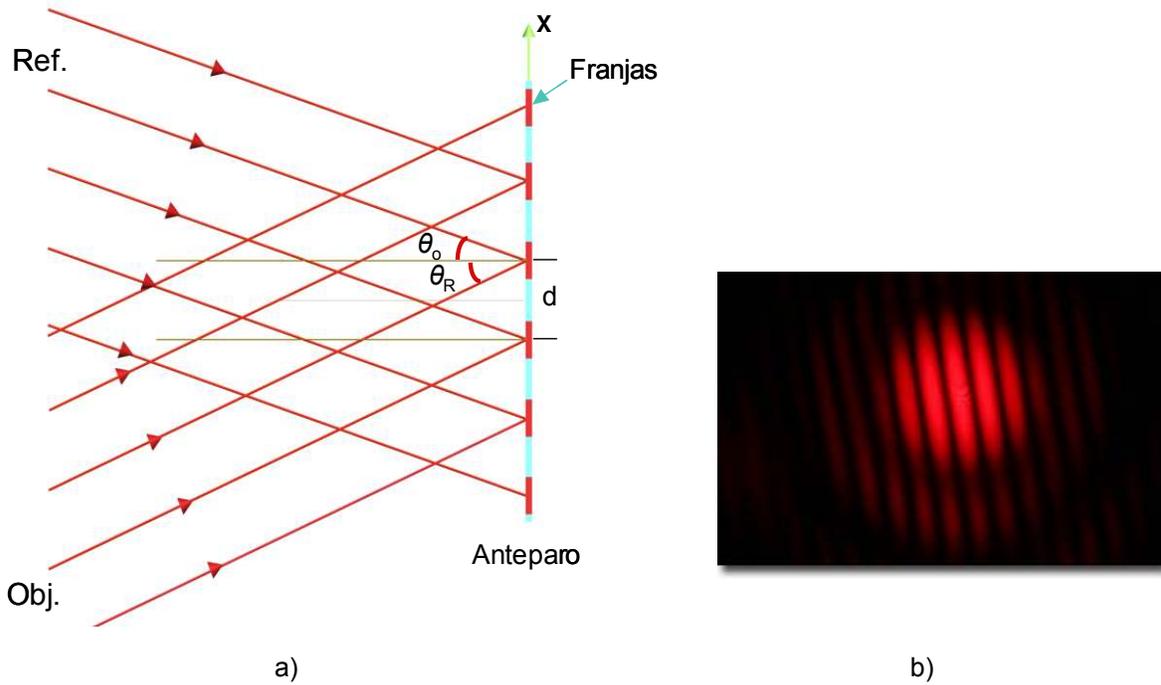


Fig. 1.3 a) Esquema da interferência de duas ondas planas. b) Fotografia das franjas de interferência.

Para uma onda objeto temos: $A \cdot e^{j.k.x.\text{sen}\theta_0}$ e para uma onda referencial temos: $A \cdot e^{-j.k.x.\text{sen}\theta_R}$
 a intensidade de interferência destas ondas é:

$$I = (A \cdot e^{j.k.x.\text{sen}\theta_0} + A \cdot e^{-j.k.x.\text{sen}\theta_R}) \times (A \cdot e^{j.k.x.\text{sen}\theta_0} + A \cdot e^{-j.k.x.\text{sen}\theta_R})^* \quad (1-9)$$

$$I = 2A^2 + A^2 (e^{-j.k.x.(\text{sen}\theta_0 + \text{sen}\theta_R)} + e^{j.k.x.(\text{sen}\theta_0 + \text{sen}\theta_R)}) \quad (1-10)$$

$I = 2A^2 (1 + \cos [k.x.(\text{sen}\theta_0 + \text{sen}\theta_R)])$, os máximos de intensidade acontecem para os ângulos $2n.\pi$ do cosseno.

Quando $x_0 = 0$, teremos o primeiro máximo. O segundo máximo acontece com $n = 1$, ou seja, $\frac{2\pi}{\lambda}$

$$x_1 (\text{sen}\theta_0 + \text{sen}\theta_R) = 2\pi.$$

A distância entre o primeiro e segundo máximo é a distância entre as duas franjas claras:

$$x_1 - x_0 = d$$

Portanto:

$$d = \frac{\lambda}{\sin\theta_O + \sin\theta_R} \quad (1-11)$$

Pode-se observar desta relação que quando maior a soma dos senos dos ângulos θ_O e θ_R menor será a distância entre as franjas. Esta série de franjas é a estrutura periodica de um elemento difrativo com periodo d .

1.3 Uso do principio da holografia para resolver difração sem aproximações

Figura 1.4 mostra como funciona o princípio da holografia para o caso de duas ondas planas que incidem em um filme sensível à luz de incidência. Isto basicamente pode ser visto na gravação e na reconstrução de um elemento difrativo, em nosso caso o elemento difrativo é uma rede de difração.

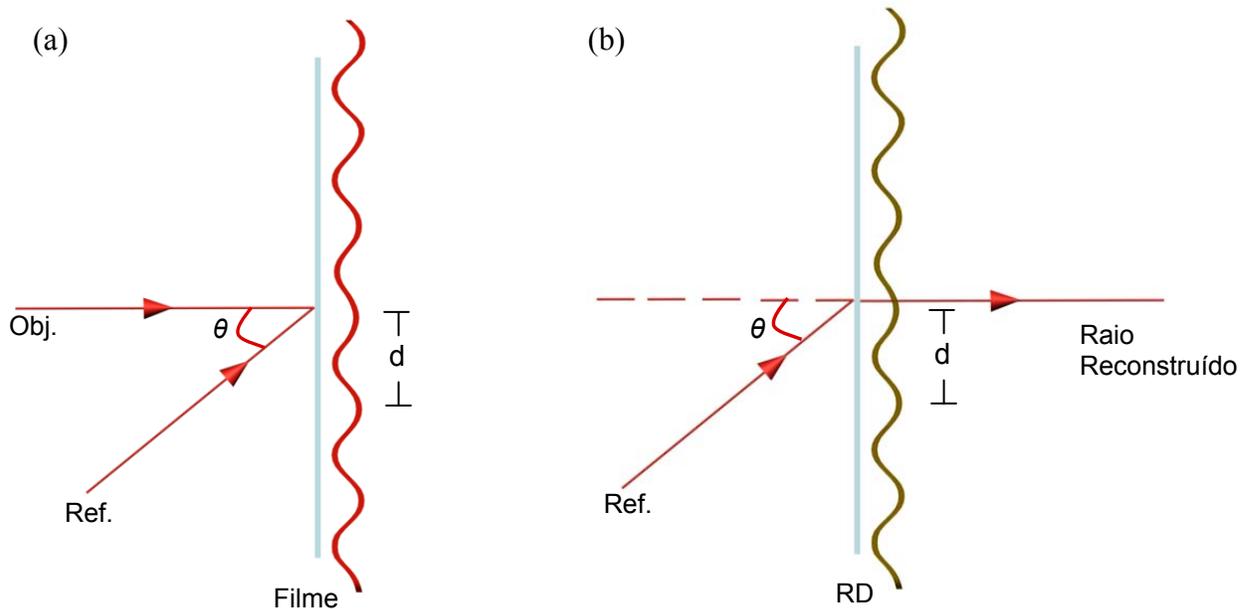


Fig.1.4 Raios principais de uma onda objeto e referência na Gravação de uma rede de difração RD (a) e na reconstrução de um RD (b)

Figura 1.5 mostramos como resolver a difração para uma rede de período d : tendo o ângulo de incidência θ_i procuramos o raio com o qual ele poderia gerar uma figura de interferência de espaçamento d . Ele vai nos indicar a direção do raio difratado.

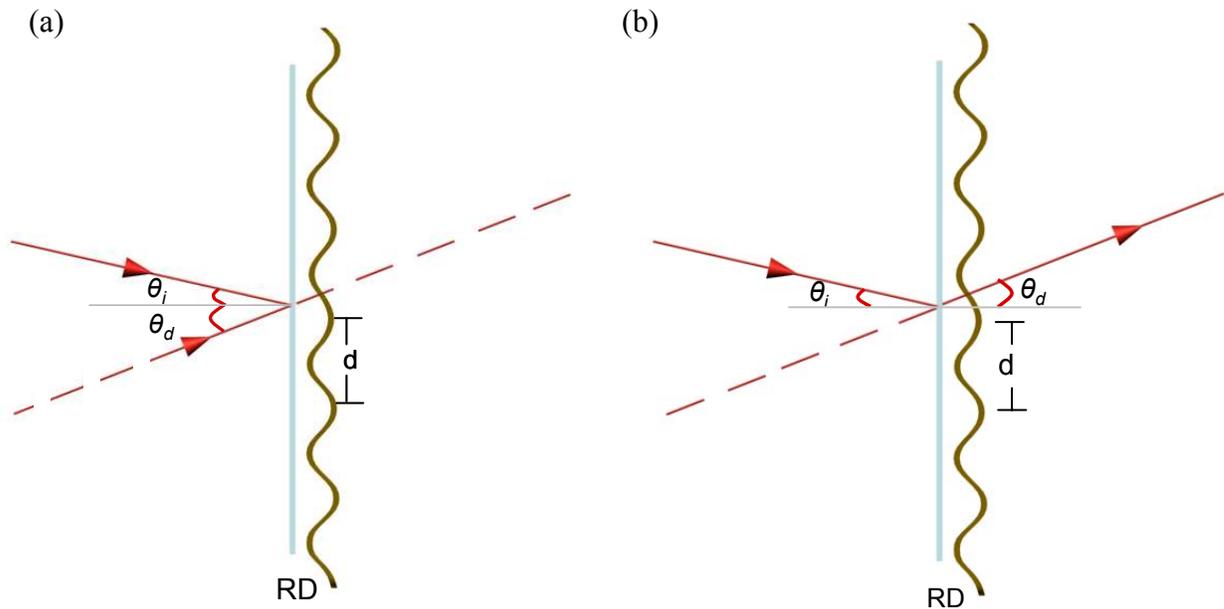


Fig.1.5 Difração por uma rede usando o princípio de holografia para demonstrar a equação da rede. (b) Encontrando o raio difratado para um período d

Da Fig. 1.5 (a) e a equação (1-11) temos:

$$d = \frac{\lambda}{\text{sen } \theta_i + \text{sen } \theta_d} \quad (1-12)$$

ou seja que corresponde:

$$\text{sen } \theta_d = \frac{\lambda}{d} - \text{sen } \theta_i \quad (1-13)$$

como na Fig. 1.5 (b). O que se constitui na equação da rede.

1.4 Difração¹

A difração ocorre sempre que uma parte de uma frente de onda fica limitada por um obstáculo ou por uma abertura de qualquer tipo. A intensidade da luz em qualquer ponto do espaço pode ser calculada tomando-se cada ponto da frente de onda como uma fonte puntiforme e calculando-se a configuração de interferência que daí resulta (Princípio de Huygens).

A referência [16] explica, detalhadamente, os trabalhos de Fresnel-Kirchhoff e Rayleigh-Sommerfeld na dedução das equações regentes do fenômeno de difração, seus resultados e uma interessante comparação, donde observa-se que a equação encontrada por Kirchhoff é uma média das soluções possíveis encontradas por Sommerfeld. Usando o Teorema de Green, com escolhas

¹ Extraída da referência [15].

adequadas de uma função de Green e da superfície fechada que circunda um volume, e sabendo que a função de Green escolhida e U satisfazem a equação de Helmholtz; chega-se a Eq. (1-14), que está de acordo com o princípio de Huygens-Fresnel:

$$U(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{j.k.r_{01}}}{r_{01}} \cdot \cos \theta \, ds \quad (1-14)$$

onde,

P_0 é o ponto de observação,

P_1 é um ponto do plano onde se encontra a obstrução interior a superfície Σ .

j é o negativo da raiz quadrada de -1 , ou seja, $j = -i$.²

θ é o ângulo entre a normal da superfície onde se encontra a abertura Σ e a reta que liga o ponto de observação com o ponto de onde provém a normal daquela superfície.

λ é o comprimento da luz

k é o módulo do vetor de onda, igual a $2\pi/\lambda$

ds é o elemento de área da superfície Σ .

r_{01} é a distância entre P_0 e P_1 .

A Fig. 1.6 ilustra essas dimensões.

A equação (1-14) expressa o campo de observação $U(P_0)$ como uma superposição de ondas esféricas divergentes $\exp[jkr_{01}]/r_{01}$ originando de fontes secundárias localizadas em cada e todo ponto $U(P_1)$ dentro da abertura. Cada fonte secundária tem um cosseno diretor $\cos \theta$. $U(P)$ pode ser considerado como qualquer componente do campo elétrico ou magnético desde que o dielétrico onde ocorre a propagação seja linear, isotrópico (propriedades independentes da direção de polarização da luz), homogêneo (permissividade constante no meio de propagação), não dispersivo (permissividade independente do comprimento de onda na propagação) e não magnético (permeabilidade magnética constante e igual a μ_0). Neste caso a teoria da difração escalar pode descrever completamente o fenômeno.

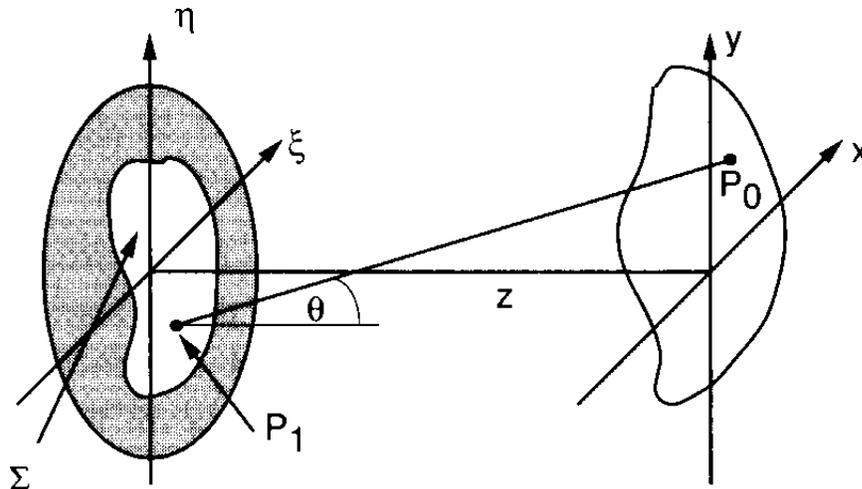


Fig. 1.6 Ilustração das dimensões envolvidas na relação de Rayleigh-Sommerfeld

² Nessa dissertação, usaremos j como sendo o negativo da unidade imaginária i .

1.4.1 Difração de Fresnel e Fraunhofer

Na seção 1.4, encontramos a equação (1-14), que é a forma geral da difração escalar. Utilizando certas aproximações obteremos duas equações que facilitarão o cálculo dos espectros de difração. Escrevendo a equação (1-14) em coordenadas cartesianas, e fazendo a aproximação paraxial na expansão binomial encontramos a integral de difração de Fresnel:

$$U(X, Y) = \frac{e^{j.k.z}}{j\lambda.z} e^{\frac{j.k}{2z}(X^2+Y^2)} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \left\{ U(\xi, \eta) e^{\frac{j.k}{2z}(\xi^2+\eta^2)} \right\} e^{-\frac{j.2\pi}{\lambda.z}(X.\xi+Y.\eta)} d\xi.d\eta \quad (1-15)$$

Uma aproximação mais forte é chamada de difração de Fraunhofer ou de *campo distante*, quando z é muito grande em relação às distâncias ξ e η . Obtemos como campo resultante a Eq. (1-16).

$$U(X, Y) = \frac{e^{j.k.z}}{j\lambda.z} e^{\frac{j.k}{2z}(X^2+Y^2)} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) e^{-\frac{j.2\pi}{\lambda.z}(X.\xi+Y.\eta)} d\xi.d\eta \quad (1-16)$$

Como está descrita na seção 1.4, esta equação (e a teoria de difração escalar) são válidas desde que o dielétrico onde ocorre a propagação seja linear, isotrópico, homogêneo, não dispersivo e não magnético; além disso, a equação (1-15) é válido para ângulos pequenos e a equação (1-16) para grandes distâncias relativas ao tamanho da abertura [17].

1.5 Cálculo da difração por uma rede utilizando as diferenças de caminho das ondas secundárias

Sejam dois raios paralelos que estão contidos em um plano ortogonal ao plano que contém o elemento difrativo. O ângulo de incidência desses raios faz θ_i com a normal. Estes atravessam à rede de difração RD desviando-se com um ângulo de θ_d com a normal; como é mostrado na Figura 1.7.

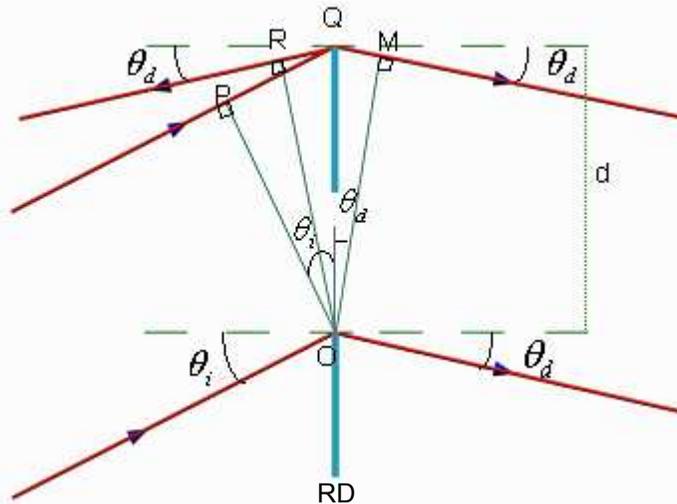


Fig. 1.7 Esquema de raios para obter a equação da rede

Neste caso estamos assumindo que os dois raios difratados convergem a uma distância grande, ou assumimos que colocamos uma lente para que estes raios converjam.

Da figura 1.7, temos que $PQ = d \sin \theta_i$ e $RQ = d \sin \theta_d$

A diferença de caminho dos raios incidentes e difratados é:

$$\lambda = d (\sin \theta_i + \sin \theta_d)$$

Para n-ésima ordem: $PQ + RQ = n \lambda$

$$\sin \theta_i + \sin \theta_d = n \lambda \quad (1-17)$$

A chamada rede de difração é uma estrutura periódica capaz de difratar uma certa onda incidente para direções indicadas pela equação (1-17). Lembrando que para que ocorra difração por uma estrutura periódica, a distância entre as franjas d deve ser da ordem de grandeza do comprimento de onda. Para trabalhar com a equação (1-17), é necessário utilizar uma convenção de sinais [18] para os ângulos e para a ordem de difração. Esta convenção é explicitada no apêndice I [AI].

1.6 Difração por uma borda

Uma maneira de se interpretar a difração como fenômeno local é que um elemento (fonte luminosa) extenso e uniforme permite considerar a somatória de elementos locais como uma fração desse resultado. Por este motivo a propagação a partir de um ponto é determinada somente pelas propriedades do meio e da estrutura do campo em uma vizinhança arbitrária e pequena do ponto. (ver artigo no apêndice II [19])

Ilustramos isto na Figura 1.8 (a), que aplica o fato de que o resultado da difração de uma onda plana incidente que está no plano normal da borda de uma lâmina delgada, resolvida pela equação não aproximada de Sommerfeld, é uma onda cilíndrica com eixo na borda. Então se aplica a idéia de que a difração de um raio incidente perpendicularmente deve dar lugar a raios espalhados em todas as direções perpendiculares à borda.

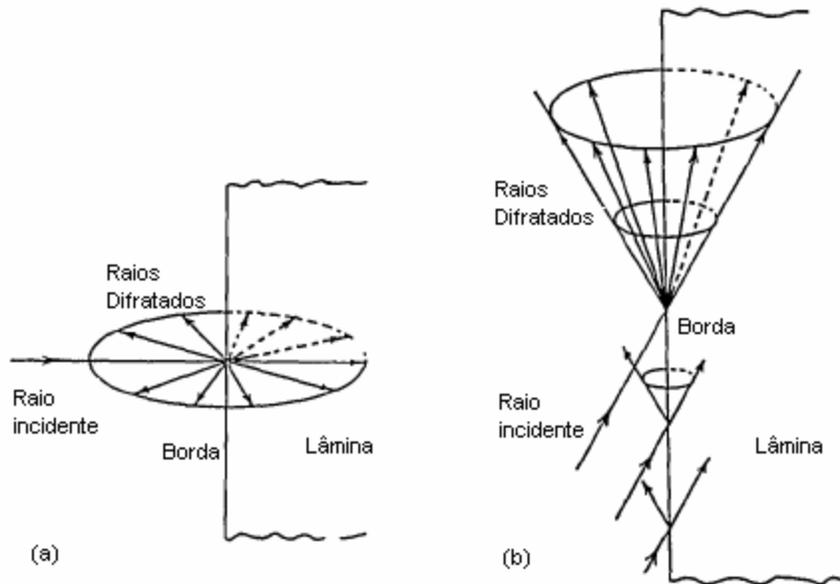


Fig. 1.8 (a) O plano dos raios difratados produzidos por um raio normal incidente sobre a borda de uma lâmina delgada. (b) O cone de raios difratados produzidos por um raio incidente que atinge à borda de uma lâmina delgada obliquamente.

Na Figura 1.8 (b) se aplica a idéia, de forma semelhante, que o resultado é um cone para um raio que incide em ângulo oblíquo. Esta conduta elementar pode ser aplicada a um conjunto de elementos como uma série de bordas ou fendas e entender o resultado da propagação até uma distância grande ou compensada pelo efeito de uma lente convergente em seu plano focal. Soma-se um conjunto de ondas secundárias que não seriam agora as do modelo antigo e mecânico de Huygens senão soluções eletromagnéticas.

1.6.1 Demonstração da equação da rede de difração usando o conceito da difração por uma borda

Uma propriedade presente em um elemento difrativo e que serve para determinar a nitidez de nossas imagens é a difração cônica, quando um raio que incide em ângulo oblíquo ao elemento difrator gera, pelas diferentes ordens de difração, um cone ao redor dele (ver Fig.1.9).

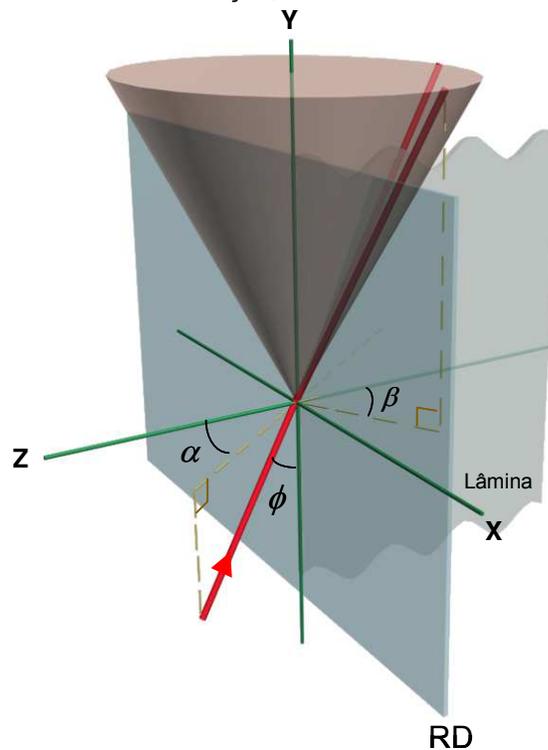
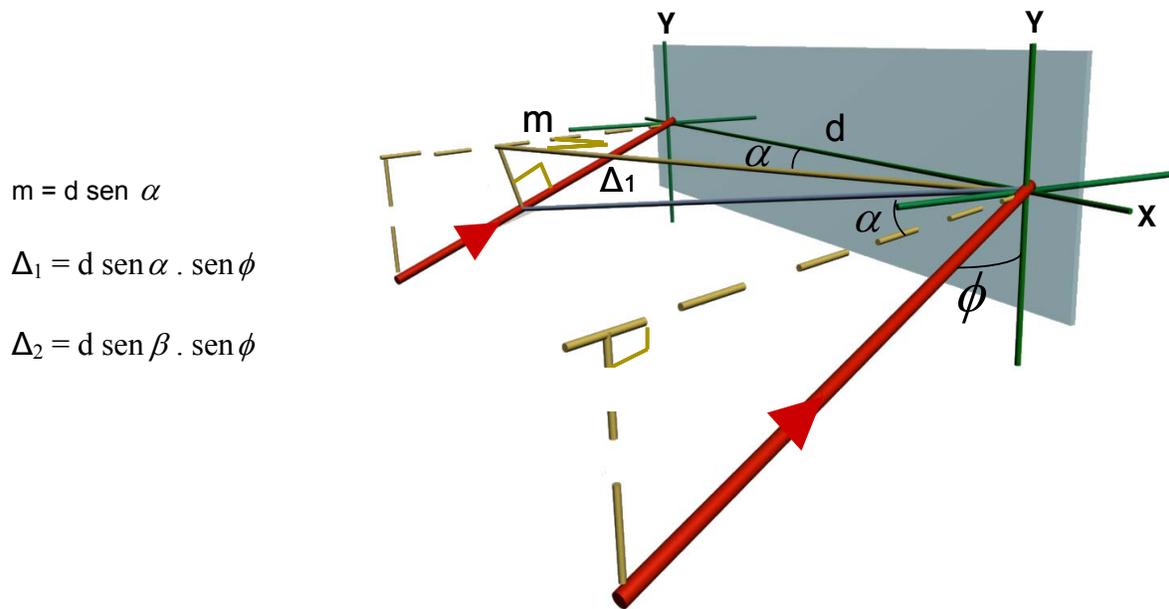


Fig. 1.9 Difração cônica acontece quando um raio oblíquo incide na rede de difração RD.

Ela é necessária para completar nosso tratamento das imagens difrativas, porque pode identificar raios que não convergem em imagem e gerem aberrações (a difração cônica birrefringente não será necessária para o cálculo de aberrações).

Tivemos que deduzir a fórmula geral da equação da rede porque só achamos a demonstração de maneira implícita na literatura usando condições de contorno [20]. Nosso desenvolvimento foi usando a diferença de caminho de dois raios que incidem obliquamente ao elemento difrator (ver Fig. 1.10)



$$m = d \operatorname{sen} \alpha$$

$$\Delta_1 = d \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \phi$$

$$\Delta_2 = d \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \phi$$

Fig. 1.10 Esquema de raios para encontrar a equação da rede geral

$$\Delta_1 + \Delta_2 = d (\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \phi) + d (\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \phi) = d \operatorname{sen} \phi (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta) \quad (1-18)$$

Diferença de caminho no plano XYZ para n -ésima ordem de difração: $n(\Delta_1 + \Delta_2)$

$$\lambda n = d \operatorname{sen} \phi (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta)$$

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = \frac{\lambda \cdot n}{d \operatorname{sen} \phi} \quad (1-19)$$

onde α é o ângulo da projeção do raio incidente ao plano XZ com o raio normal ao elemento difrativo (ângulo azimutal), β é o ângulo da projeção do raio difratado ao plano XZ com o raio normal ao elemento difrativo, ϕ é o ângulo do raio incidente com o eixo Y (ângulo zenital).

1.7 Difração de um elemento óptico difrativo bidimensional

O elemento óptico difrativo bidimensional (EOD2D) que utilizaremos nesta tese é uma rede espiral (ver Fig. 1.11-a), esta rede por reflexão pode ser encontrada nos discos compactos (CD's ou DVD's). Obtemos uma rede espiral por transmissão retirando a camada refletora. Um Cd por transmissão é mostrado na Figura 1.10-b.

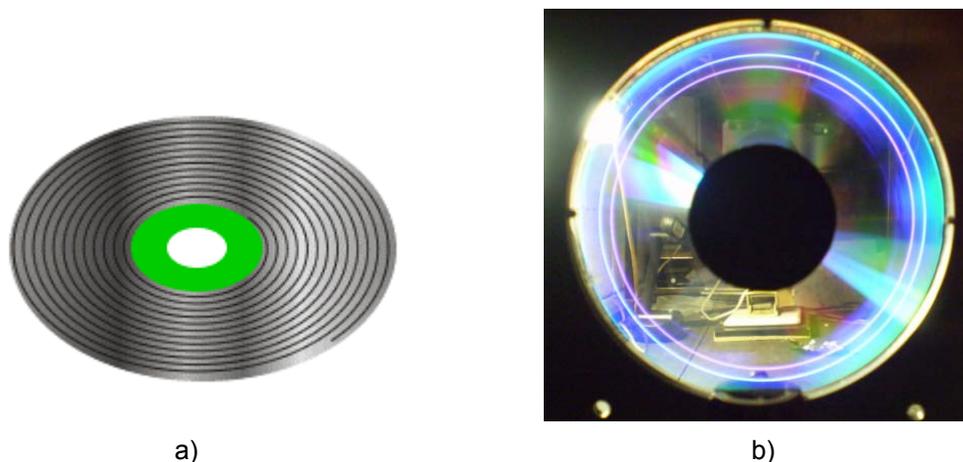


Fig 1.11 a) Rede de estrutura espiral. b) Fonte de luz branca iluminando a rede espiral por transmissão (CD).

Pode-se determinar o efeito de difração de um EOD2D para um feixe de luz mediante a equação da rede e o traçado de raios; o resultado obtido pode ser visto na Figura 1.12. Para isto consideramos uma luz monocromática de comprimento de onda de 600 nm, frequência espacial da rede 658 linhas/mm e a distância do EOD2D ao plano de observação PO de 80 mm.

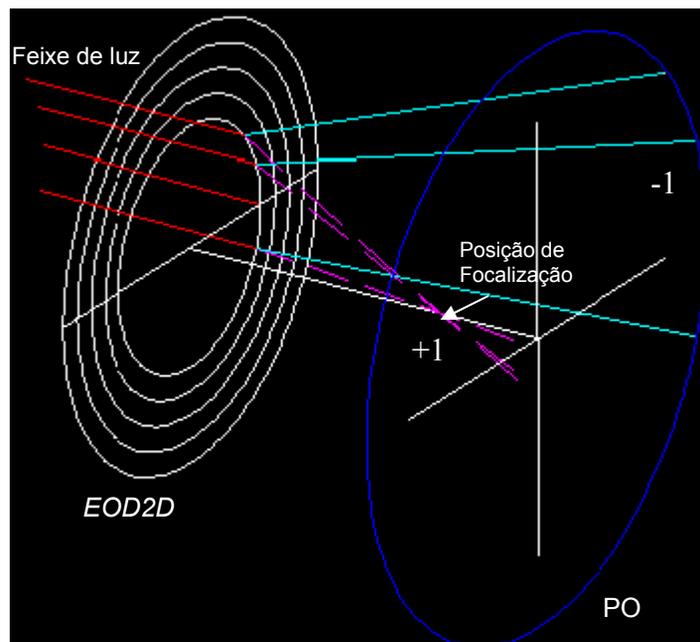


Fig. 1.12 Esquema de traçados de raios para a difração de um EOD2D.

Figura 1.12 mostra os raios difratados na ordem -1 (raios contínuos – da cor azul claro) estão distribuídos sobre a borda do círculo no plano de observação PO, e os raios difratados da ordem +1 (raios tracejados – da cor rosa) estão distribuídos em uma região menor, perto do centro do círculo no plano PO. Observa-se também sempre a divergência contínua dos raios difratados na ordem -1. Para os raios difratados na ordem +1 observamos primeiro uma convergência e após a focalização, os raios divergem.

O resultado experimental do efeito de difração para um EOD2D pode ser observado na Fig. 1.13. Utilizamos um laser de gás de Hélio-Neônio de 633 nm incidindo perpendicularmente ao EOD2D como é mostrado na Fig. 1.12. Na Fig. 1.13-a observamos que a luz difratada pertencente à ordem +1 está na posição de focalização e na ordem -1 está levemente alongada na vertical. Para a Fig. 1.13-b afastamos o plano de observação com respeito ao EOD2D e observamos que a luz das duas ordens está alongada. Na ordem -1 está mais alongada verticalmente e para a ordem +1 alongada no sentido vertical e horizontal.

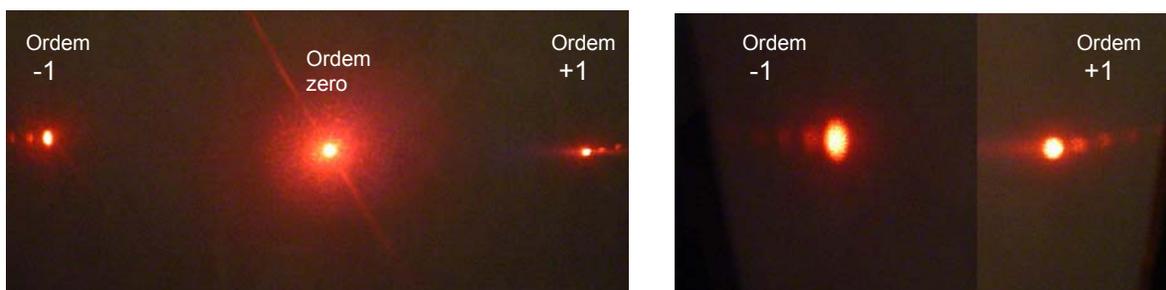


Fig. 1.13 a) Difração de um EOD2D a 70 mm de PO. b) Difração de um EOD2D a 100 mm do PO.

1.7.1 Elemento Óptico Difractivo EOD2D (Cd, Axicon)

Quando um EOD2D é iluminado com luz branca, obtemos um conjunto de feixes do tipo chamado não-difrativos [21]. Embora o fenômeno seja de difração o nome vem do fato de que o diâmetro do feixe não aumenta proporcionalmente com a distância como seria de se esperar, por exemplo, com a função de Airy, resultante da difração por uma abertura circular. Este elemento é chamado de axicon. Observamos que o feixe não difrativo resultante é uma combinação cromática, no início do feixe começa com a cor vermelha, ao afastar-se o feixe longitudinalmente do EOD2D acontece uma combinação de cores formando-se um feixe branco, no final do feixe voltamos a observar cores como verde, azul (ver Fig. 1.14).

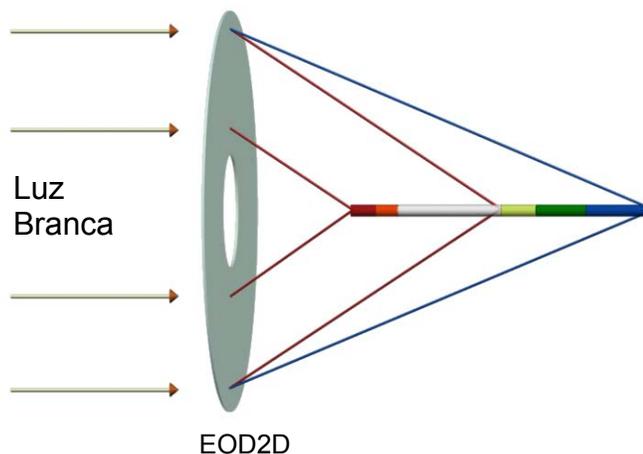


Fig. 1.14 Formação do feixe não difrativo com luz branca.

1.8 Comparação entre uma Lente Refrativa, uma Lente Difrativa

As lentes refrativas que são feitas comumente de vidro são mais pesadas que as lentes difrativas que são feitas por gravação holográfica em filme, com espessura fina da ordem de micrometros. Além disso, estas lentes se diferenciam no tamanho de desvio para cada comprimento de onda. Na lente difrativa LD o maior comprimento de onda se desvia mais que o menor. No caso das lentes refrativas LR o menor comprimento desvia mais que o maior.

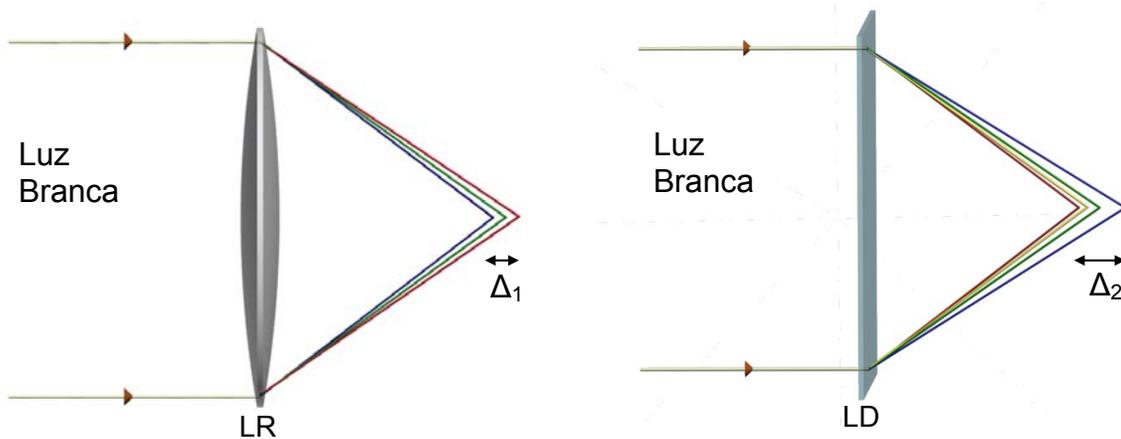


Fig. 1.15 Esquerda: lente de refração (LR) iluminada por luz branca. Direita: lente difrativa (LD) iluminada por luz branca

A distância focal na lente refrativa fina é regida pela seguinte relação: $1/f = (n-1) \cdot (1/r_1 - 1/r_2)$, onde f é a distância focal, n é o índice de refração, r_1 é raio de curvatura da primeira superfície e r_2 é o raio de curvatura da segunda superfície. O índice de refração tem dependência com o comprimento de onda. Para o vidro temos: $n(\lambda_a) = 1,532$ e $n(\lambda_v) = 1,5$. Com esses dados encontramos f para cada comprimento de onda utilizando um raio de curvatura típico: $r_1 = r_2 = 20$ cm. A variação da distância focal para os dois comprimentos de onda é: $\Delta_1 = 1,2$ cm. Esta variação corresponde a aberração cromática.

Para a lente difrativa utilizando a equação (1-17) e com os valores de $\lambda_a = 400$ nm, $\lambda_v = 700$ nm e $\nu(-1 \text{ cm}) = \nu(1 \text{ cm}) = 500$ linhas/mm, encontramos $\Delta_2 = 2,2$ cm.

Para esses dois casos específicos vemos que a aberração cromática da lente difrativa é aproximadamente o dobro da lente refrativa.

1.9 Elementos ópticos de Fresnel

O físico francês Augustin-Jean Fresnel contribuiu com a óptica ondulatória estudando o comportamento da luz teoricamente e experimentalmente. Descobriu e fez deduções matemáticas, fundamentadas no trabalho de Thomas Young e estendendo o princípio de Huygens a mais fenômenos físicos. Ele foi capaz de calcular a distribuição de luz em espectros de difração com boa precisão. Ele foi inventor da primeira lente difrativa que chamou de placa zonal de Fresnel, na refração ele gerou uma lente fina que chamou lente de Fresnel e na reflexão inventou o espelho de Fresnel, equivalente no conceito da lente.

Lentes de Fresnel

As lentes plano-convexas são em geral pesadas e caras, devido à grande quantidade de material que requerem para sua fabricação (ver Fig. 1.16 b). Com intuito de fazer uma lente mais leve e fina, Fresnel inventou a lente que leva seu nome onde a parte grossa diminui em forma de escalões como se mostra na Fig 1.16 (a). A zona anular geralmente tem uma largura constante, onde a profundidade do escalão cresce ate a borda.

Espelho de Fresnel

O espelho de Fresnel está composto por uma série de superfícies da mesma estrutura da lente de Fresnel (ver Fig. 1.16 Direita).

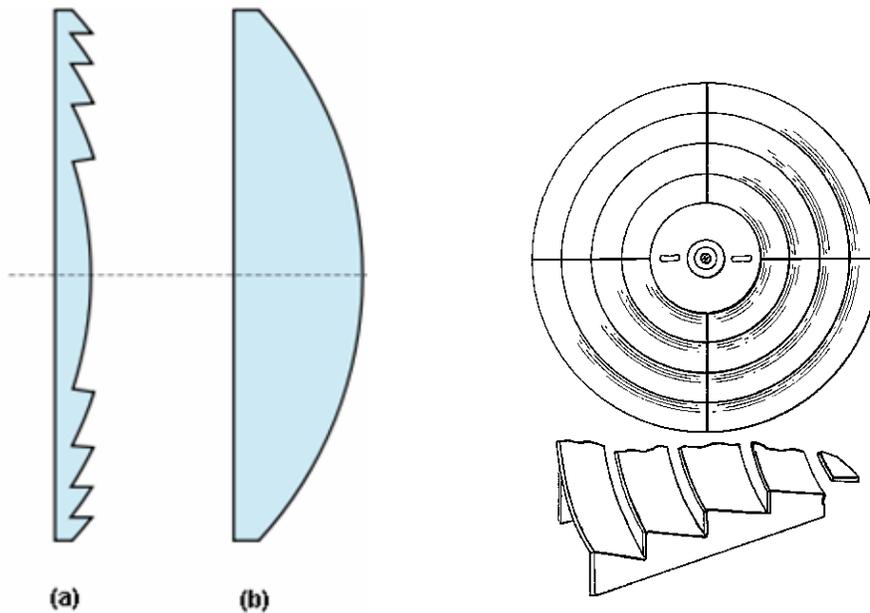


Fig. 1.16 Esquerda: (a) Lente de Fresnel. (b) Lente plano-convexa. Direita: Espelho de Fresnel

1.10 Definição de imagem ortoscópica e pseudoscópica

A imagem ortoscópica é uma imagem de relevo natural como pode ser vista na Figura 1.17-a. Observamos neste caso que a parte do objeto que está no círculo azul é vista na frente da parte do objeto que está no quadrado vermelho.

A imagem pseudoscópica é uma imagem de relevo invertido como é mostrado na Figura 1.17-b. Isto seria como ver o molde de um objeto. Neste caso a parte do objeto que está no círculo azul é vista atrás da parte do objeto que está no quadrado vermelho. Ela somente existia na estereoscopia e na holografia. Na estereoscopia por troca da cena direita com a esquerda no par estéreo. Na holografia por uma inversão de iluminação do holograma.

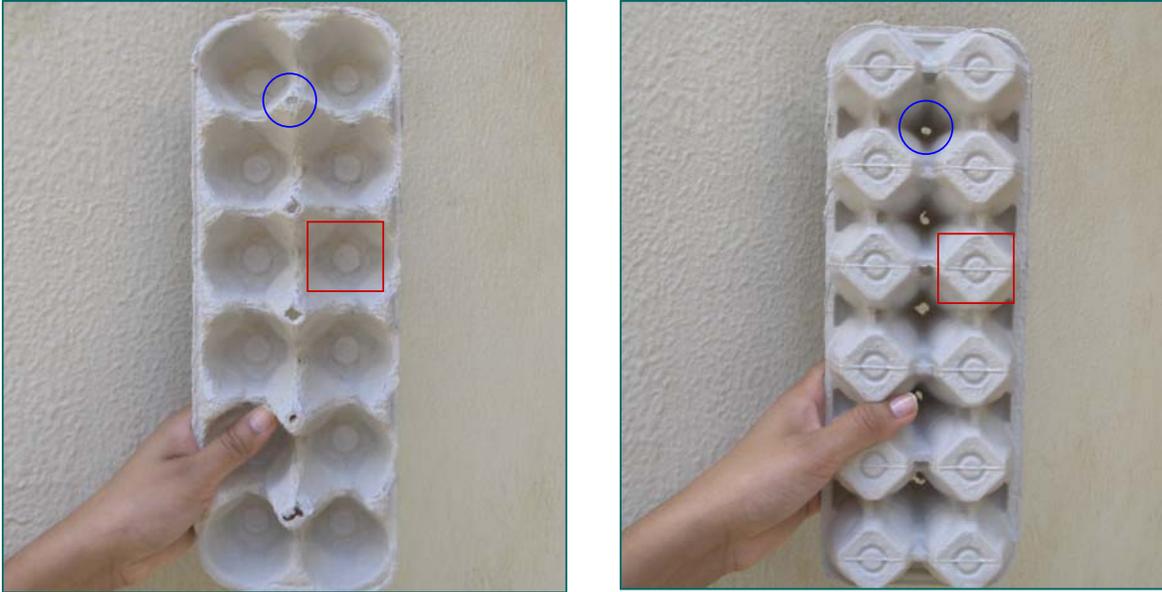


Fig. 1.17 (a) Objeto e imagem ortoscópica (relevo natural) de uma caixa de ovos, (b) imagem pseudoscópica (relevo invertido)

1.11 Sistema de dupla difração com fenda usando redes de difração

O estudo anterior [3,5] consistia em obter uma imagem de relevo invertido (Pseudoscópica) usando um sistema de dupla difração e uma fenda. Este sistema consiste de duas redes de difração RD1 e RD2, ambas estão simetricamente localizadas com respeito a uma fenda de abertura a como se mostra na Figura 1.15 (ver publicação realizada no apêndice III [22])

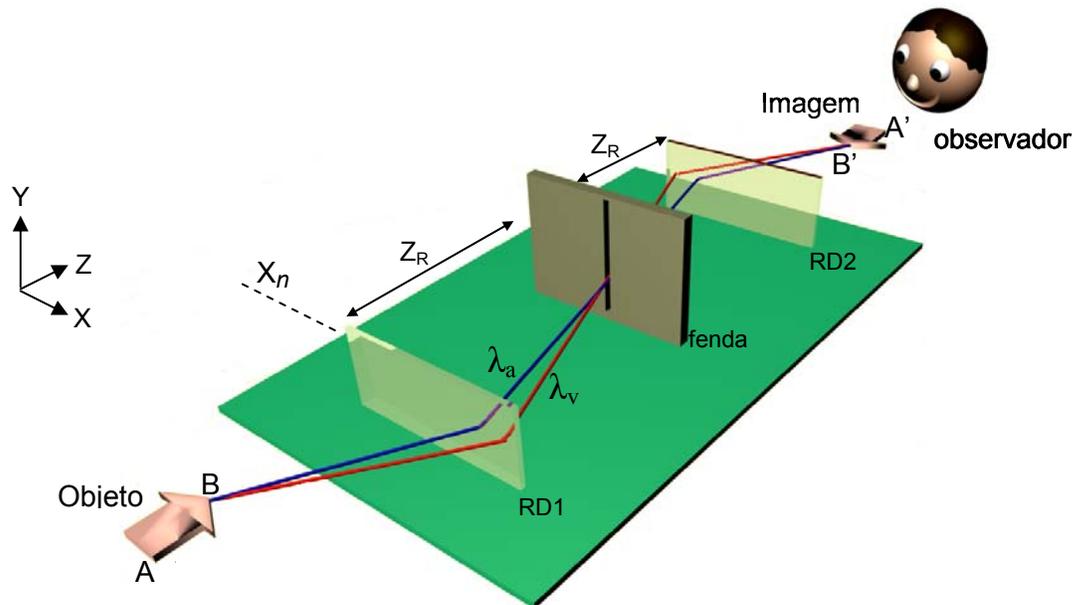


Fig. 1.18 Esquema de traçado de raios da imagem de profundidade invertida

As linhas retas da rede estão na direção do eixo Y. λ_v e λ_a são os extremos do comprimentos de onda do espectro visível. O objeto de tonalidade cinza ou branco é iluminado com luz branca divergindo em um ângulo grande, por exemplo: A e B são dois pontos objetos de coordenadas (X,Z). X_n é a coordenada genérica correspondente ao ponto incidente dos raios de luz que atingem à primeira rede e alcança à fenda depois da primeira difração. Z_R é a distância da fenda à primeira rede, que é igual à distância da fenda à segunda rede; condição de simetria. O desvio dos raios por difração é dado pela equação da rede:

$$\text{sen } \theta_i + \text{sen } \theta_d = \lambda v \quad (1-20)$$

onde θ_i representa o ângulo da luz incidente que viaja do ponto A à primeira rede RD1. θ_d representa o angulo de difração da luz que viaja de RD1 ao ponto P. λ representa o valor do comprimento de onda correspondente a cada raio e v representa o inverso do período da rede. A' e B' são as imagens duplamente difratadas dos pontos objetos A e B respectivamente.

Este mesmo esquema da Figura 1.14 é valido para analisar o sistema de dupla difração usando elementos com estrutura bidimensional e um orifício no plano XZ.

1.12 Diferença de imagens holográficas com as imagens (“holo”) geradas por nosso sistema

Holograma	Dupla Difração com luz branca ³
- Precisa de registro holográfico com laser e filme	- Sem registro, o objeto sempre deve estar presente
- Somente pode ampliar com luz branca por técnica de J.J.Lunazzi [23, 24].	- Possibilidade de aumento

1.13 Auto-imagens Talbot e Lau

O efeito Talbot não está relacionado com nosso experimento já que consiste na formação de auto-imagens de um objeto periódico iluminado com luz coerente, aparecendo ao longo da direção de propagação da luz (ver Fig. 1.19).

O efeito Lau pode ser obtido iluminando um objeto periódico com outro objeto periódico iluminado incoerentemente, o resultado são auto-imagens da estrutura do elemento difrator deslocadas a uma distância múltipla de seu período d. (ver no apêndice IV)

³ As características deste sistema também são validas para o sistema de holoprojeção de objetos usando um elemento difrativo.

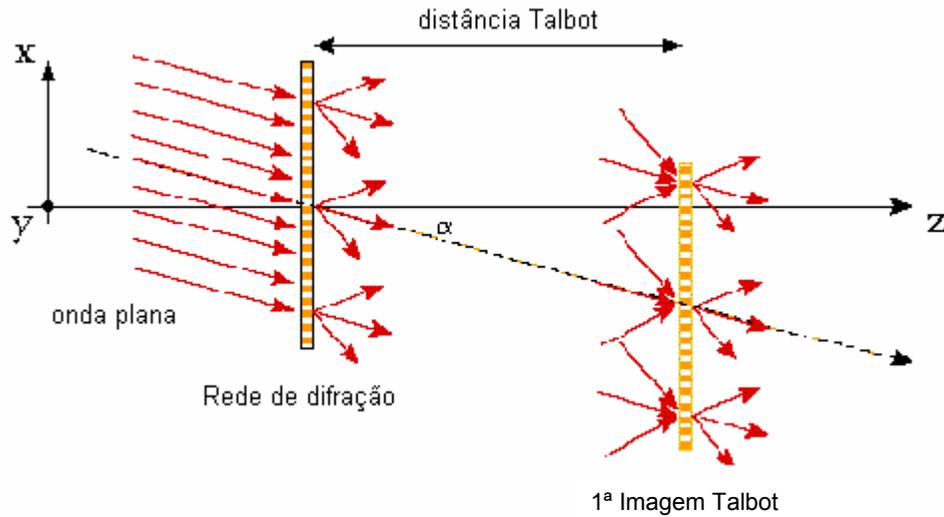


Fig. 1.19 Esquema de raios do efeito Talbot quando iluminamos com uma onda plana inclinada na direção perpendicular à rede.

Ressaltamos que valem somente para objetos periódicos, portanto, não poderia ser confundido com nossas técnicas. Talbot, Lau usam todas as ordens de difração interferindo simultaneamente, nós usamos uma única ordem em cada difração. Duas revistas rejeitaram nosso manuscrito [25] argumentando ser nosso experimento equivalente aos de Talbot e Lau. Então o enviamos a uma terceira revista da qual aguardamos resposta.

1.14 Equação de difração por uma rede aplicando difração de Huygens Fresnel e o método de fase estacionária

Utilizamos a teoria de difração de Huygens–Fresnel por não ter aproximação alguma em sua integral, ver equação (1-14) e a resolvemos com um método que tem aproximação chamada fase estacionária [26], mas não é crítico para nosso caso, porque dela chegamos a validade da equação da rede de difração. Calculamos o campo e intensidade de uma fonte de onda plana incidindo no plano do elemento difrativo (RD1) com um ângulo θ com a normal. Os cálculos e resultados da primeira e segunda difração estão no apêndice V.

Se usarmos a aproximação de Fresnel, que é uma redução da equação de Huygens-Fresnel para o caso onde os termos de fase que correspondem a potências cúbicas ou superiores x , y são desprezíveis obteríamos aproximadamente a equação da rede onde os senos ficam trocados por tangentes:

$$\tan \theta_i + \tan \theta_d = n \lambda \nu \quad (1-21)$$

Isto é um exemplo de que nossos resultados por difração de Fresnel nunca serão exatos.

No seguinte capítulo apresentamos dois sistemas de dupla difração usando um elemento intermediário para a formação de imagens ortoscópicas.

1.15 Referências

- [1] Laboratório Nacional de Lawrence Livermore - Grupo de óptica difrativa:
<http://www.llnl.gov/nif/psa/diffractive-optics/newtecheye.html>
- [2] Hyde, R. A. "Very large aperture diffractive telescopes," *App.Opt.* **38**, 4198-4212 (1999).
- [3] Rivera, N. I. R. "Imagens por dupla difração com luz branca usando redes de difração e uma fenda", Tese de Mestrado, Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas - Brasil (2003).
<http://www.ifi.unicamp.br/ccjdr/teses/apresentacao.php3?filename=IF1368>
- [4] Lunazzi, J. J.; Rivera, N. I. "Pseudoscopic imaging in a double diffraction process with a slit," *Opt. Express* **10**, 1368-1373 (2002). <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=OPEX-10-23-1368>
- [5] Lunazzi, J. J.; Rivera, N. I. "Pseudoscopic imaging in a double diffraction process with a slit: Critical point and experimental checking," XXVI ENFMC, SBF. Caxambu-M.G. 6-9 Maio (2003). Publicado em: http://www.sbf1.if.usp.br/procs/2003/R_estendido/e97.pdf
- [6] Lunazzi, J. J.; Magalhães, D. S. F. "Pseudoscopic white-light imaging by means of two bi-dimensional diffracting elements and a pinhole" in *Proc. SPIE*, vol. 5622, p.1463 (2004).
- [7] Magalhães, D. S. F. "Estudo de imagens por dupla difração com seleção de luz branca e elementos definidos bidimensionalmente", Tese de Mestrado - Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas - Brasil (2005).
- [8] Bennett, S. J. "Achromatic combinations of hologram optical elements", *Appl. Opt.* **15**, 542-545 (2002).
- [9] Lunazzi, J. J. "[Holophotography with a diffraction grating.](#)" *Opt. Eng.* **29**, 15-18 (1990).
- [10] Lunazzi, J. J.; Ocampo, J. M. J. "Binocular disparity and stereopsis obtained under white light by means of a diffraction grating," *J. Modern Opt.* **42**, N1, 3-6 (1995).
- [11] Lunazzi, J. J. "[Holoprojection of images by a double diffraction process.](#)" in "Opt. e Fis.Atômica", *Proc. of the XIV Enc.Nac.de Fis.da Mat. Condensada, Soc. Bras. de Física eds. Caxambu-MG-BR, V. S. Bagnato, C. H. de Brito Cruz eds. 07-11.05.91, p OTI 5a.12:00 (1991).*
- [12] Lunazzi, J. J. "[New possibilities in the utilization of holographic screens.](#)" *SPIE* **1667**, 289-292 (1992).
- [13] Lunazzi, J. J., Boone, P.M. "3D image projection using large diffraction screens", *SPIE* **2333**, *Proc. of the International Symposium on Display Holography, Lake Forest, USA, 07.15-18, p.449-453. (1994).*
- [14] Collier, R. J. et. al. "Optical Holography", New York, Academic Press 1971. p.58-60
- [15] Magalhães, D. S. F. "Estudo de imagens por dupla difração com seleção de luz branca e elementos definidos bidimensionalmente", Tese de Mestrado - Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas –Brasil. p.37-42 (2005).
- [16] Goodman, J. W. "Introduction to Fourier Optics" 2ª edição, Boston, McGraw-Hill, 1996. p.69
- [17] Goodman, J. W. "Introduction to Fourier Optics" 2ª edição, Boston, McGraw-Hill, 1996. p.74
- [18] Hutley, M. C. "Diffraction Grating" 1ª edição, London - New York, Academic Press, 1982. p.23-26
- [19] Keller, J. B. "Geometrical Theory of diffraction" *J. Opt. Soc. Am.* **52**, 116-130 (1962).
- [20] Petit, R. "Electromagnetic theory of gratings" Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1980.
- [21] Magalhães, D. S. F. "Estudo de imagens por dupla difração com seleção de luz branca e elementos definidos bidimensionalmente", Tese de Mestrado - Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas –Brasil. (2005). p.37-42
- [22] Lunazzi, J. J.; Rivera, N. I. "Pseudoscopic imaging in a double diffraction process with a slit: Critical point properties," *J. Opt. Soc. Am.A* **23**, 1021-1026 (2006).
- [23] Lunazzi, J. J. "Enlarging Holograms Under White Light", *Proc. of the 17th Gral. Meeting of the International Commission for Optics, Taejeon, Korea, 08.19-23, SPIE V 2778 p.469-470 (1996).*
- [24] Lunazzi, J.J. "[Enlarging holograms under white light: a way to save holographic material](#)" *OE Reports, From Holography (Vol. 9, No. 2), the newsletter of the International Technical Working Group-SPIE.*
- [25] Lunazzi, J. J.; Rivera, N. I. "White-light Imaging in a two gratings diffraction process, Available from: <http://arxiv.org/abs/physics/0506148>

[26] Papoulis, A. "Systems and transforms with applications in optics" New York, McGraw-Hill, 1968.

Capítulo 2

Imagem Ortoscópica em um Processo de Dupla Difração

Apresentamos uma imagem interessante, a qual resulta de um sistema de dupla difração intermediada por um elemento óptico não difrativo usando luz branca. Esta imagem é virtual, com profundidade normal (ortoscópica) e com paralaxe contínuo [1-5]. Para se obter esta imagem usamos codificação difrativa por redes, mas poderia ser obtida também por hologramas e telas difrativas. Utilizamos nisto uma analogia da projeção em tela difrativa com os hologramas [6].

A imagem ortoscópica é formada por dois sistemas diferentes: O primeiro a ser apresentado na seção 2.1 é o sistema de dupla difração com uma fenda, utilizando como elementos difrativos duas redes de difração simples e como elemento de absorção uma fenda. Na seção 2.2 apresentamos o sistema de dupla difração composto por dois elementos difrativos e um orifício, os elementos difrativos são duas metades de uma rede espiral e como elemento de absorção um orifício.

Para cada seção 2.1 e 2.2 apresentamos o básico formalismo da formação da imagem ortoscópica, por meio de traçados de raios pelas direções principais, a montagem experimental é descrita para cada sistema e as propriedades destas imagens são estudadas utilizando a equação da rede e a difração cônica.

2.1 Imagem Ortoscópica em um Processo de Dupla Difração com uma Fenda

2.1.1 Descrição do sistema

Os elementos difrativos utilizados para observar uma imagem ortoscópica são redes de sulcos paralelos. Estes sulcos são paralelos ao plano normal do plano XZ da Fig. 2.1. O sistema é idêntico ao que descrevemos para a imagem de profundidade invertida (Pseudoscópica) (ver Fig. 1.18), somente que o ângulo de observação muda para a ordem de difração oposta. O observador está localizado na direção dos raios duplamente difratados, o esquema de esta situação é mostrado na Fig. 2.1.

Na Figura 2.1, o objeto de luz branca A, ilumina a primeira das duas redes de difração que estão localizadas simetricamente com respeito a uma fenda. RD1 e RD2 são duas redes de difração idênticas, intermediadas por uma fenda de largura a e P é o ponto médio entre as duas redes. Observa-se uma imagem A', resultado da primeira e segunda difração que acontece do mesmo lado dos feixes não difratados, satisfazendo a equação da rede (eq. 1-13).

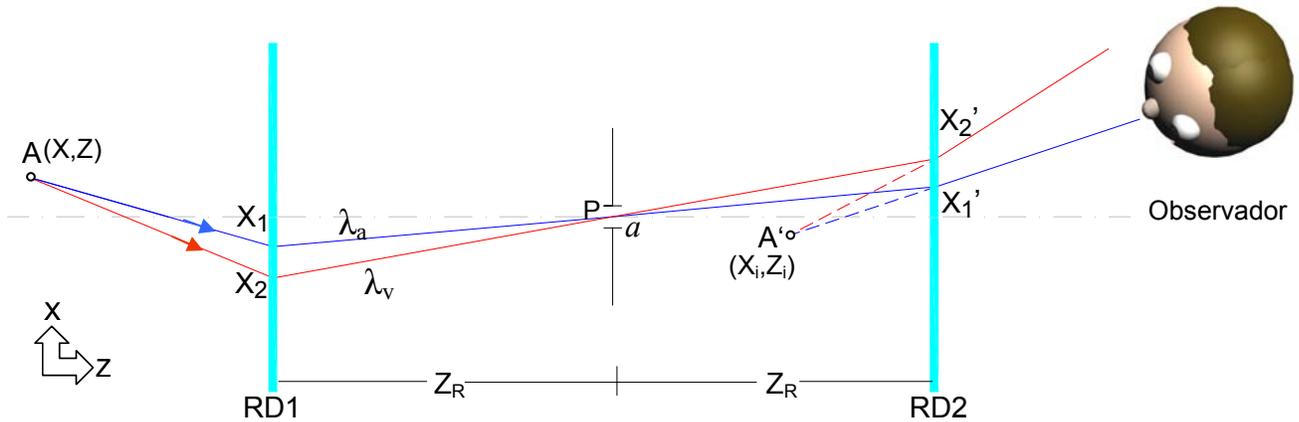


Fig. 2.1 Esquema de traçado de raios da imagem A' de um ponto objeto A de luz branca.

Na Figura 2.1, Z_R é a distância da rede RD1 ao ponto P ou a distância da rede RD2 ao ponto P. A fenda vertical de largura a é paralela ao sulco da rede. X_1 e X_2 são dois pontos na primeira rede e X_1' e X_2' são dois pontos na segunda rede. Escolhendo os comprimentos de onda λ_a e λ_v , como valores extremos para representar o fenômeno que acontece com qualquer comprimento de luz, pois os demais comprimentos são intermediários. A trajetória de luz pode ser representada pelo sistema de equações em coordenadas cartesianas:

$$\frac{X - X_1}{\sqrt{(X - X_1)^2 + Z^2}} - \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + Z_R^2}} = \lambda_a \nu; \quad \frac{X - X_2}{\sqrt{(X - X_2)^2 + Z^2}} - \frac{X_2}{\sqrt{X_2^2 + Z_R^2}} = \lambda_v \nu \quad (2-2)$$

onde o sistema de equações (2.2) corresponde à primeira difração. O cálculo da trajetória depois da segunda difração é obtido pelo sistema de equações (2.3), deste sistema se obtém a posição de um ponto imagem A' (X_i, Z_i) de um ponto objeto A (X, Z).

$$\frac{-X_1'}{\sqrt{X_1'^2 + Z_R^2}} + \frac{X_1' - X_i}{\sqrt{(X_1' - X_i)^2 + Z_i^2}} = \lambda_a \nu; \quad \frac{-X_2'}{\sqrt{X_2'^2 + Z_R^2}} + \frac{X_2' - X_i}{\sqrt{(X_2' - X_i)^2 + Z_i^2}} = \lambda_v \nu \quad (2-3)$$

2.1.2 Imagem Ortoscópica

A Figura 2.2, mostra a imagem de relevo natural para dois pontos objetos A e B. Estes pontos estão localizados em diferentes posições de profundidade no eixo z, a imagem resultante é composta pelos pontos A' e B' . Esta imagem tem a característica de ser virtual por ser obtida pelo prolongamento dos raios duplamente difratados e de ser ortoscópica por ter relevo natural.

Na Figura 2.2, X_n é a coordenada genérica correspondente ao ponto incidente dos raios de luz que atingem à primeira rede RD1 e alcança à fenda depois da primeira difração e X_m é a coordenada que correspondente ao ponto incidente dos raios de luz que atingem à segunda rede RD2.

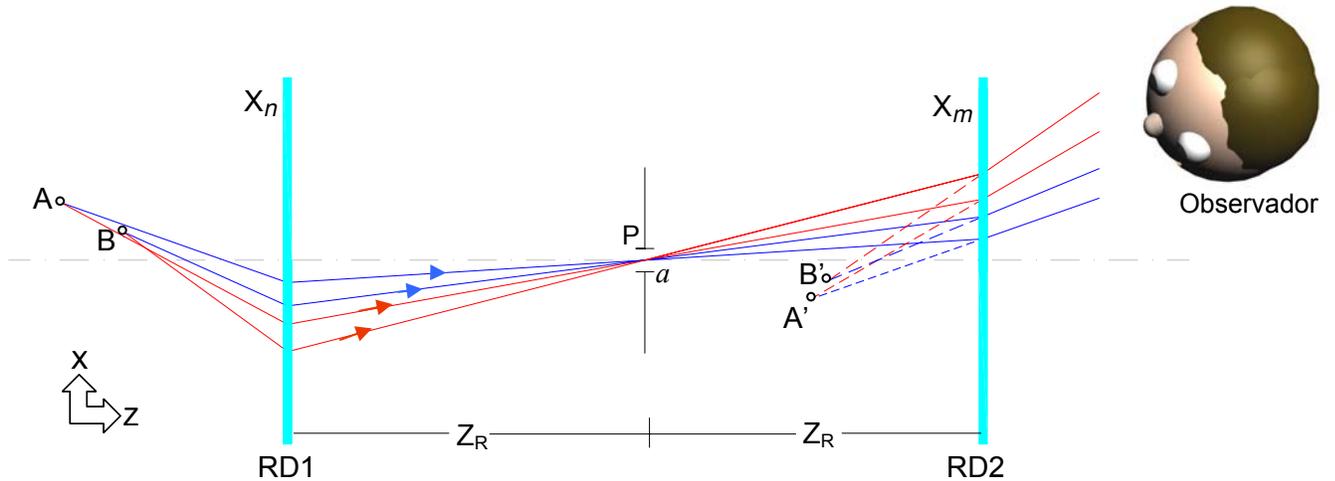


Fig. 2.2 Esquema de traçado de raios para observação da imagem de relevo natural

Notamos que as dimensões da imagem são menores em comparação com as dimensões do objeto. Uma inversão de esquerda a direita é outra característica conseqüente da imagem obtida. Os cálculos mostram que a imagem pode ter visão binocular, semelhante a uma imagem holográfica, porque a mudança do comprimento de onda corresponde ao deslocamento do ponto de vista de um observador.

2.1.3 Extensão de Posições para o Observador

É a extensão de posições onde um ou vários observadores podem estar e ver a cena inteira. Da figura 2.2 tomamos a parte da saída dos raios e indicamos a extensão de posições para o observador $\Delta X_C'$ ver fig.2.3. Dessa mesma figura observamos que existe uma região angular $\Delta\theta$ para observar os pontos imagens A' e B' . Podemos ver experimentalmente que $\Delta X_C'$ depende da extensão lateral do objeto.

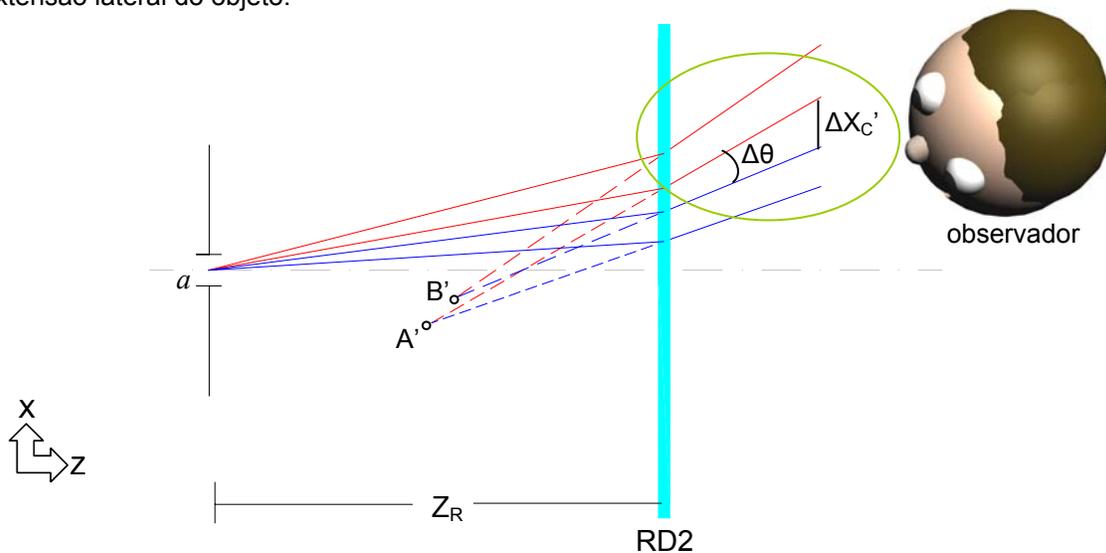


Fig. 2.3 Esquema de traçado de raios para mostrar a extensão de posições de um observador $\Delta X_C'$

Na Figura 2.4 simplificamos a Figura 2.2 escolhendo unicamente os raios que definem essa região angular $\Delta\theta$. A extensão do objeto é o espaço entre ambos os pontos A e B. Também mostramos a extensão de posições $\Delta X_C'$ para um observador que está a uma distância Z_C da segunda rede de difração.

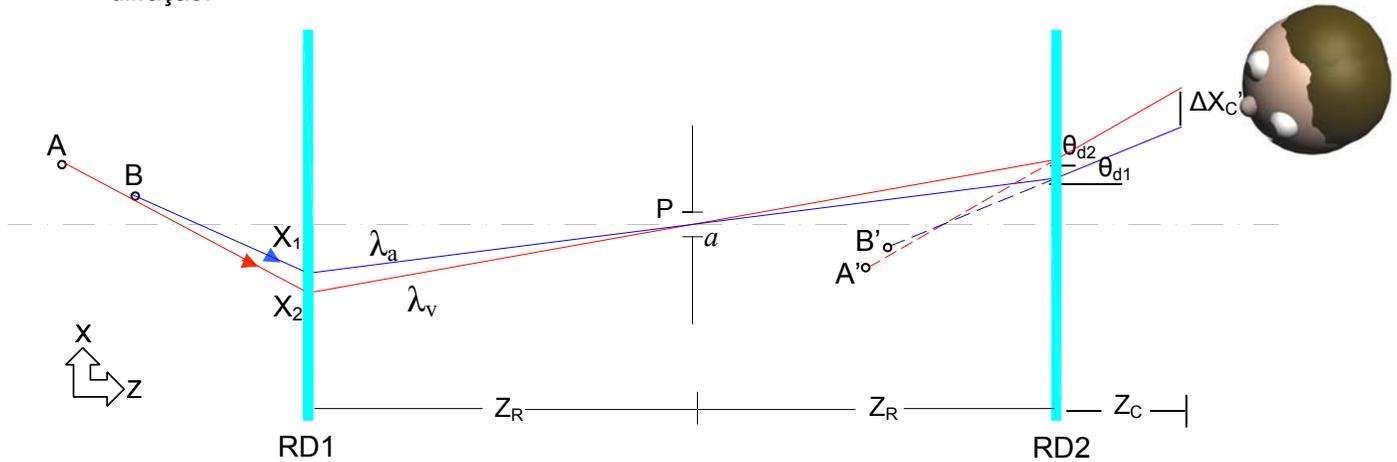


Fig. 2.4 Esquema de traçado de raios para o cálculo do campo de posições do observador.

A extensão de posições para um observador foi calculado usando a análise geométrica, onde na equação (2-4), θ_{d1} e θ_{d2} representam os ângulos de difração depois da segunda rede para os raios correspondentes aos extremos do espectro visível, azul e vermelho respectivamente.

$$\Delta X_C' = (\text{tg } \theta_{d2} - \text{tg } \theta_{d1}) Z_C + (X_2 - X_1) \quad (2-4)$$

Reciprocamente, pelo mesmo procedimento, poderíamos determinar a extensão do objeto a partir da escolha de uma extensão de posições para o observador.

2.1.4 Montagem Experimental

Empregamos duas redes holográficas estampadas de transmissão gravadas em plástico do mesmo tipo, com (533 ± 7) linhas/mm, estas redes estão colocadas entre duas placas de vidro de 2 mm de espessura. A área efetiva utilizada em cada uma foi 60 mm (H) x 40 mm (L). Elas estavam localizadas a uma distância de (600 ± 2) mm e em posição paralelas uma a outra. A fenda vertical de $(0,70 \pm 0,15)$ mm de largura foi colocada entre ambas as redes. O objeto foi colocado antes da primeira rede RD1 (ver Fig. 2.5).

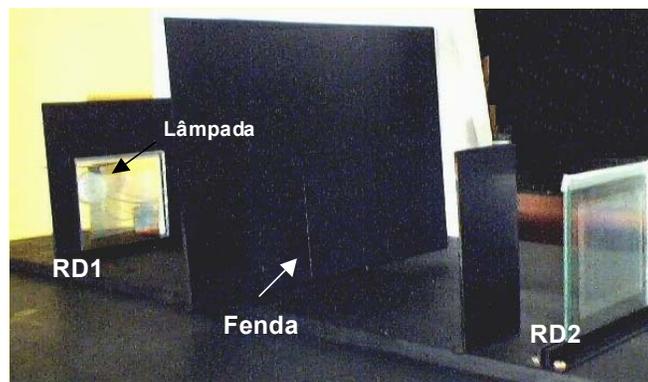


Fig. 2.5 Sistema de dupla difração usando redes e uma fenda.

As fotografias foram feitas por uma câmera de vídeo SONY HANDY CAM CCD-TRV57 ligada a uma câmera INTEL CS430 que tem a finalidade de agir como um conversor digital de captação.

2.1.5 Imagem de um objeto estendido

Utilizamos como objeto uma lâmpada halogênea de 50 W com refletor de 46 mm de diâmetro. Na Figura 2.6 mostramos o objeto e a imagem para comparar a estrutura e o tamanho. A foto foi obtida, colocando um pequeno orifício do tamanho da pupila de uma pessoa sobre a abertura da lente da câmera de vídeo. A pequeno diâmetro da pupila do olho aproximadamente 4 mm faz com que a aberração não seja visível a olho nu (ver Fig. 2.6).

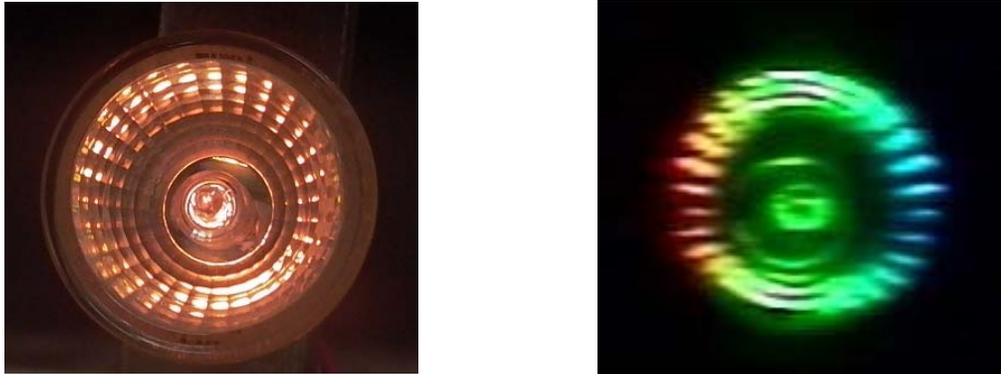


Fig. 2.6 Esquerda: Objeto (lâmpada halogênea). Direita: Imagem do objeto.

2.1.6 Presença de Astigmatismo no sistema de redes simples e uma fenda

Podemos observar um forte astigmatismo vertical na fig. 2.7-a e 2.7-b, devido a utilização de redes simples e uma fenda no sistema.

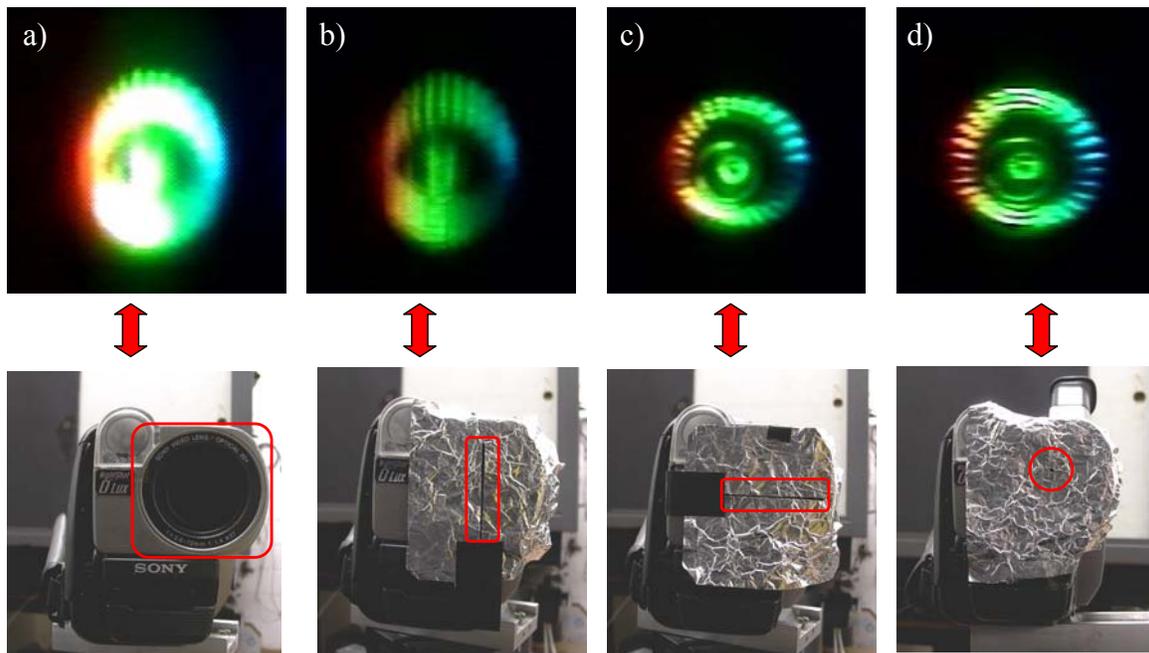


Fig. 2.7 Registro fotográfico. a) Câmera de vídeo com abertura total. b) com fenda vertical. c) com fenda horizontal. d) com um orifício.

Figura 2.7 mostra as diferentes fotos da imagem para diferentes tipos de registros fotográficos. A foto da Fig. 2.7-a foi tirada com uma câmera de vídeo que tem uma abertura de 32 mm, nesta imagem há uma forte presença de astigmatismo. Para obter a imagem da Fig. 2.7- b, limitamos a abertura da lente da câmera com uma fenda vertical de 1 mm de largura evidenciando o astigmatismo vertical. A imagem da foto da Fig 2.7-c foi obtida colocando uma fenda horizontal sobre a lente, reduzindo assim o astigmatismo. A imagem da Fig. 2.7-d foi obtida limitando a abertura da lente com um orifício para comparar com a abertura do diâmetro da pupila de uma pessoa. Assim a imagem obtida fica reduzida de astigmatismo. Outra maneira de reduzir esta aberração é utilizar no sistema de dupla difração redes que difratassem num plano horizontal e vertical (redes com estrutura bidimensional) como é vista na seção 2.2.5.

O cálculo do tamanho do astigmatismo envolve a análise da trajetória de raios que saem do plano de simetria dos esquemas anteriores e corresponde usar a propriedade de difração cônica (ver Fig 2.8).

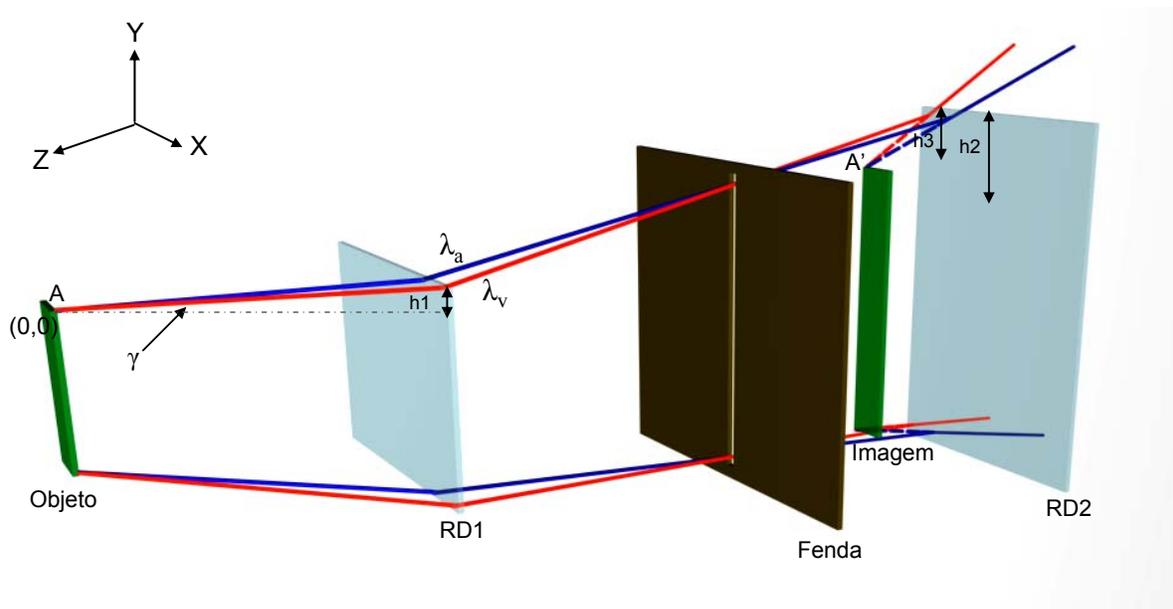


Fig. 2.8 Esquema de traçado de raios que explicam a presença de astigmatismo

A Figura 2.8 mostra o traçado de raios para um ponto A de um objeto extenso. Do ponto objeto A saem raios, neste caso escolhemos os raios de maior comprimento λ_v e um de menor comprimento λ_a . Estes raios saem com um ângulo γ para incidir na primeira rede RD1 como é mostrado na Fig. 2.8. Utilizando a equação da rede geral (1-19) são determinados os pontos de incidência no plano de RD1. Logo que estes raios passam por RD1 difratando, eles se interceptam no plano da fenda. Após isso os raios incidem na segunda rede RD2. Utilizando novamente a equação da rede geral para a segunda difração encontramos os pontos de incidência no plano de RD2 para os raios duplamente difratados, encontrando assim a posição da imagem A' do ponto objeto A.

O tamanho do astigmatismo está definido por: $AST \equiv (h_2 - h_3) + h_1$

onde:

h_1 é a altura que faz o ponto A com o ponto de incidência do raio no plano da RD1

h_2 é a altura que faz o ponto de incidência do raio no plano da RD1 com o ponto de incidência dos raios no plano RD2.

h_3 é a altura que faz o ponto de incidência do raio no plano da RD2 com o ponto imagem A'

γ é o ângulo de incidência oblíquo que faz o ponto objeto A à rede RD1

Exemplo:

Para: $\gamma = 5^\circ$, $\varphi = 90 - \gamma$, $A(X,Z) = (30,150)$

$AST_v = 59,9$ mm; $AST_a = 60,9$ mm

Onde:

AST_v é o tamanho do astigmatismo para o comprimento de onda maior.

AST_a é o tamanho do astigmatismo para o comprimento de onda menor.

AST é o tamanho do astigmatismo, distância no eixo y entre os pontos A e A' .

2.1.7 Medida da extensão de posições de um observador

Utilizamos para este propósito um objeto composto por duas pequenas lâmpadas com filamentos de $(2,0 \pm 0,5)$ mm de largura (ver figura 2.9). O campo de vista horizontal experimental foi medido usando uma placa com uma fenda de 1mm de largura colocada sobre um trilho para medir o deslocamento que faz quando o observador vê pela fenda o início do comprimento de onda vermelho até o azul.



Fig. 2.9 Duas lâmpadas pequenas utilizadas para medir o campo de vista.

Empregando os seguintes valores em nosso experimento $\lambda_a = 500$ nm, $\lambda_v = 670$ nm, $Z_R = 330$ mm, $Z_C = 1300$ mm e utilizando a equação (2-4) com ajuda do programa Mathematica¹ obtivemos o resultado mostrado na tabela I.

Tabela I: Comparação entre o resultado experimental e o calculado da extensão de posições para um observador.

	X_A (mm)*	Z_A (mm)*	X_B (mm)*	Z_B (mm)*	$\Delta X_C'$ (mm)
<i>Exp.</i>	28 ± 3	209 ± 3	17 ± 3	179 ± 3	[182,196]
<i>Calc.</i>	28 ± 3	209 ± 3	17 ± 3	179 ± 3	[188,224]

* Os valores das posições dos objetos A (X_A , Z_A) e B (X_B , Z_B) foram medidos experimentalmente e usados para calcular o valor $\Delta X_C'$ utilizando a equação da rede.

¹ Utilizamos o algoritmo VII.1 Cálculo da extensão de posições para um observador do apêndice VII.

2.2. Imagem Ortoscópica em um processo de Dupla Difração com um Orifício

Até o momento analisamos a formação da imagem com profundidade normal (ortoscópica), usando duas redes de sulcos retos paralelos e uma fenda [7,8]. Agora nesta seção estudaremos a generalização das propriedades de simetria para elementos de difração bidimensionais e um orifício para o caso de formação de uma imagem ortoscópica.

Utilizando dois elementos difrativos de estrutura espiral obtivemos uma imagem focalizada verticalmente e horizontalmente em uma mesma posição, onde o astigmatismo vertical das imagens é eliminado.

2.2.1. Descrição do sistema

O sistema é semelhante ao que descrevemos para a imagem ortoscópica do sistema de redes simples e uma fenda. Agora as redes simples são redes espirais, e a fenda é substituída por um orifício. O observador vê a imagem resultante do mesmo lado que os raios duplamente difratados, esta difração é tratada só no plano XZ (ver Fig. 2.10).

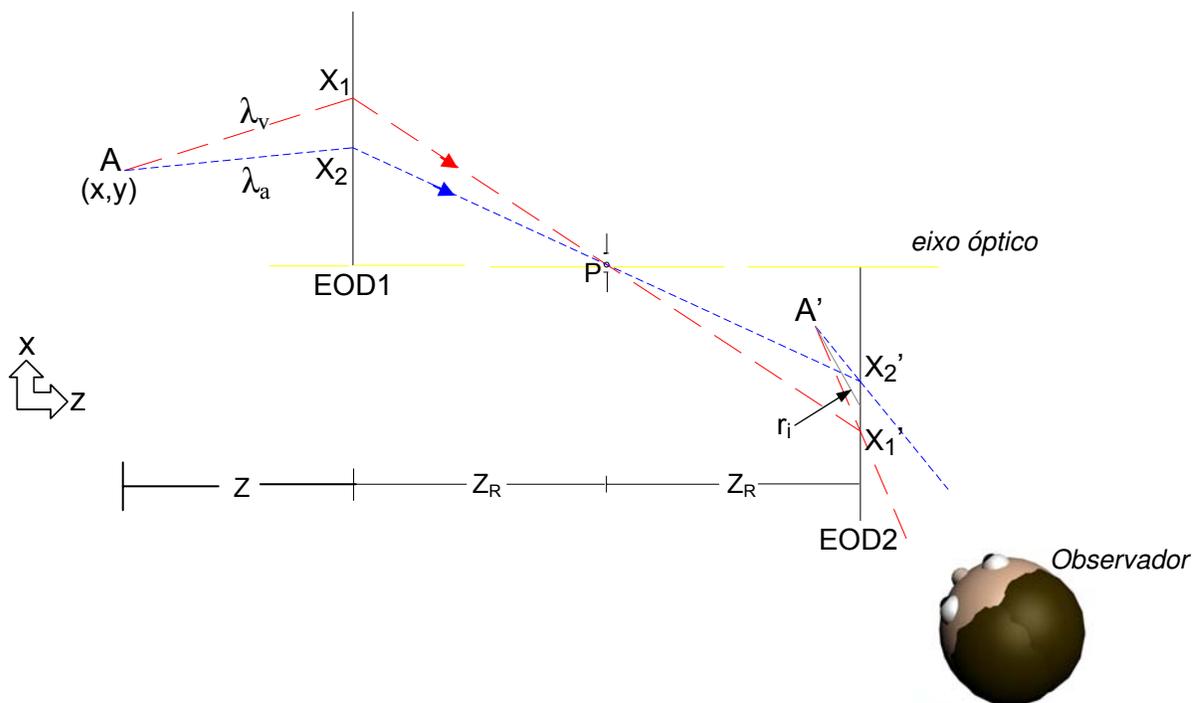


Fig. 2.10 Esquema de traçado de raios para a imagem A' de um ponto objeto A de luz branca.

Na Figura 2.10, um objeto pontual de luz branca A ilumina o primeiro elemento óptico difrativo EOD1. Os raios difratados passam pelo centro do orifício que está localizado no ponto P e logo incidem no segundo elemento óptico difrativo EOD2. EOD1 e EOD2 são dois elementos difrativos de estrutura espiral idênticos e estão simetricamente localizados com respeito a um orifício. Utilizamos duas metades de um completo elemento difrativo espiral, cortados verticalmente pela metade e cobertos por uma máscara de abertura circular. P está localizado entre os dois elementos difrativos. O observador vê a imagem A' do objeto A dos raios duplamente difratados, que satisfazem a equação da rede (eq. 1-13).

Damos o nome de “eixo óptico” à linha perpendicular do elemento óptico difrativo que passa através do orifício. Um caso geral de um plano contendo o eixo óptico e oblíquo ao plano horizontal (plano XZ) pode ser tratado similarmente embora os raios do objeto são incidentes em um ângulo. O espalhamento dos raios difratados gerados pela rede espiral permite um raio passar através de

um orifício P. Quando este raio atinge à segunda rede de difração o raio difratado é dirigido fora do plano oblíquo PII e seu prolongamento virtual passa através de um ponto imagem em sincronismo com o processo de imagem do plano horizontal PI (ver Fig.2.11). A difração cônica [9-10] permite a existência de raios espalhados em diferentes direções, para o observador ver a imagem total em um só ponto de vista. Com este resultado o observador vê a imagem resultante da primeira e segunda difração em uma única posição, satisfazendo a equação da rede geral (eq. 1.19). Considerando o traçado de raios com $\phi = 90^\circ$ resulta a equação (1-13) que é suficiente para caracterizar algumas propriedades da imagem.

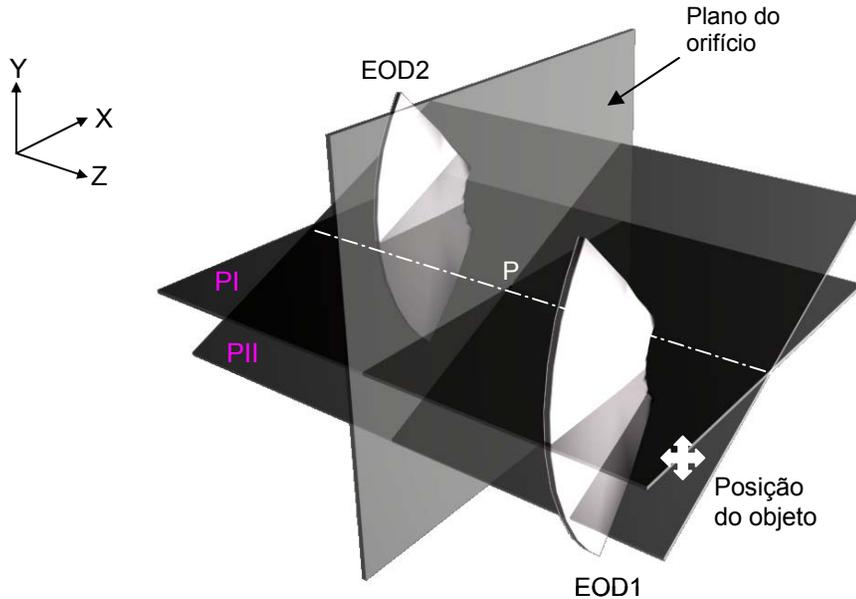


Fig. 2.11 Plano oblíquo onde se repete o esquema do plano XY

Na Figura 2.10, X_1 e X_2 são dois pontos no primeiro elemento e X_1' e X_2' são dois pontos no segundo elemento. r_i é a distância entre a posição da imagem A' e ponto X_p (ponto médio entre X_1' e X_2') que estão em EOD2. Escolhendo os comprimentos de onda λ_a e λ_v como valores extremos para representar o fenômeno que acontece com qualquer comprimento de luz, pois os demais comprimentos são intermediários. A trajetória de luz pode ser representada pelo mesmo sistema de equações que descreve a trajetória da rede de linhas paralelas:

$$\frac{X_1 - X}{\sqrt{(X_1 - X)^2 + Z^2}} + \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + Z_R^2}} = \lambda_v v; \quad \frac{X_2 - X}{\sqrt{(X_2 - X)^2 + Z^2}} + \frac{X_2}{\sqrt{X_2^2 + Z_R^2}} = \lambda_a v \quad (2-5)$$

onde o sistema da eq. (2-5) corresponde à primeira difração. O cálculo da trajetória depois da segunda difração é obtido pelo sistema de equações (2-6), deste sistema se obtém a posição de um ponto imagem (X_i, Z_i) de um ponto objeto (X, Z).

$$\frac{X_1'}{\sqrt{X_1'^2 + Z_R^2}} + \frac{X_i - X_1'}{\sqrt{(X_i - X_1')^2 + Z_i^2}} = \lambda_v v; \quad \frac{X_2'}{\sqrt{X_2'^2 + Z_R^2}} + \frac{X_i - X_2'}{\sqrt{(X_i - X_2')^2 + Z_i^2}} = \lambda_a v \quad (2-6)$$

2.2.2 Imagem Ortoscópica

Figura 2.12, mostra a imagem ortoscópica para dois pontos objetos A e B que estão localizados em diferentes profundidades do eixo z, A' e B' são os pontos imagens de A e B, esta imagem tem a característica de ser virtual e de relevo natural. Outra característica desta imagem é possuir uma inversão de direita à esquerda na direção do eixo x. Uma pequena extensão horizontal da imagem na direção do eixo x é notada em comparação à extensão horizontal do objeto onde os extremos desse objeto são os pontos A e B.

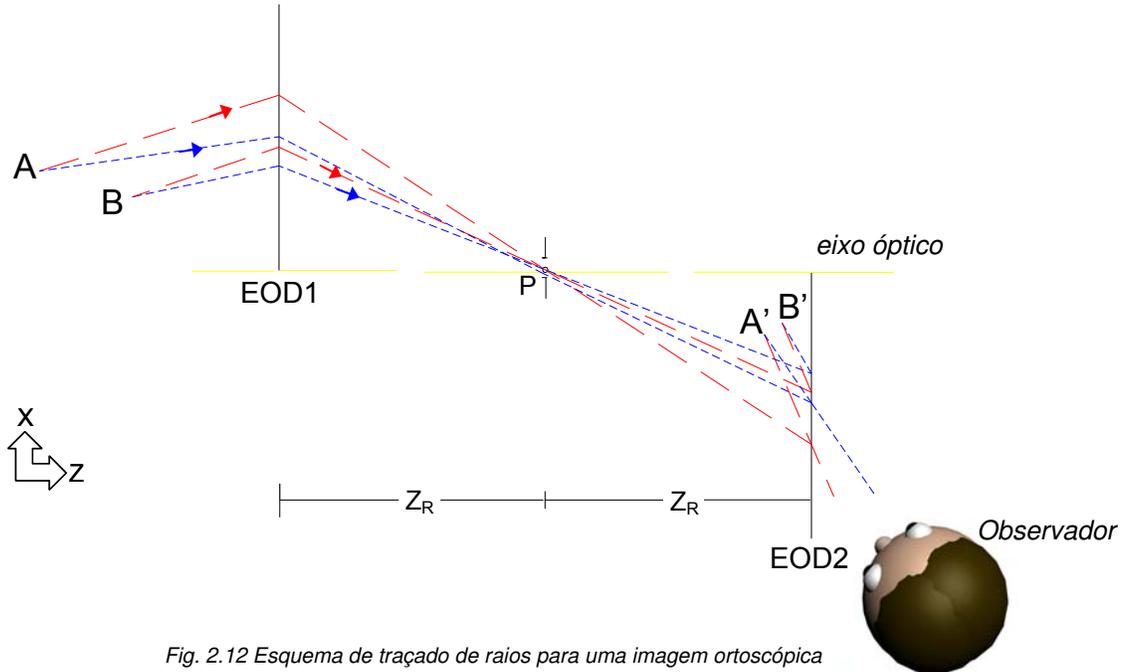


Fig. 2.12 Esquema de traçado de raios para uma imagem ortoscópica

2.2.3 Montagem Experimental

O sistema utilizado é composto de duas redes espirais de transmissão EOD1 e EOD2 obtido de um disco digital de dados com frequência espacial de 658 ± 5 linhas/mm e eficiência de difração de 10%. A área efetiva do elemento difrator é $(19,0 \pm 0,3)$ cm² que corresponde a menos da metade de um disco digital. O objeto utilizado foi uma lâmpada halogênea com espelho parabólico refletor de 50 W. Parte da luz que é difratada pelo primeiro elemento pode ser visto iluminado em uma região arredor do orifício feito de papel alumínio (ver Fig. 2.13). Uma câmera de vídeo Sony foi utilizada para registrar a imagem a ser capturado por uma câmera web que esta ligada a um computador.

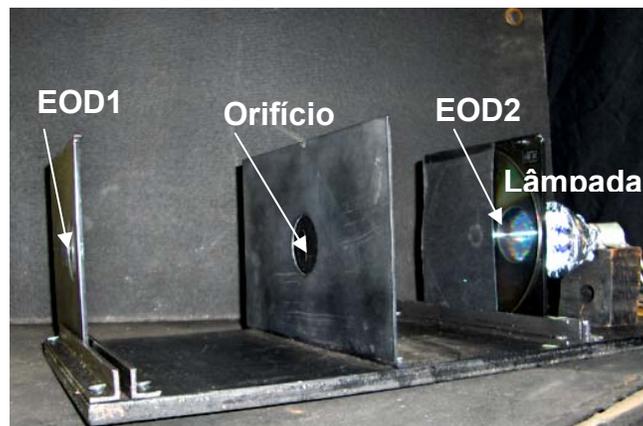


Fig. 2.13 Montagem experimental do sistema de dupla difração com um orifício.

Figura 2.14 mostra a distribuição da luz gerada por um objeto pontual O (LED de luz branca) difratada em EOD1. Esta distribuição de luz atinge a região ao redor do orifício P . A região de luz difratada é de 14 cm de largura; apenas 4,5 cm de largura pertence à primeira ordem de difração que é a ordem a ser estudada. A linha tracejada identificada com OP (ver Fig. 2.14), está contida no plano XY da Fig. 2.10. Os raios contidos neste plano XY podem passar pelo orifício P , para logo seguir o caminho de formação da imagem. Raios fora do plano XY somente podem atingir ao orifício através da difração cônica.

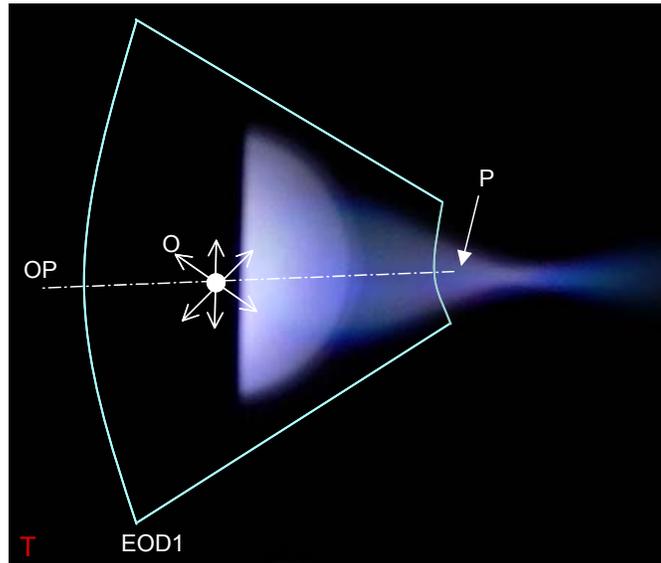


Fig. 2.14 Distribuição de luz difratada na região do orifício P

2.2.4 Imagem de um objeto de Estendido

A Figura 2.15 mostra uma foto da imagem ortoscópica tirada a uma distância do observador $Z_c = (150 \pm 5)$ mm. Observa-se da foto que a dimensão horizontal é menor que a vertical, isso pode ser demonstrado pela análise de traçado de raios, que estudaremos na seção 2.2.6. Pode-se observar experimentalmente que estas dimensões da imagem variam de acordo com a distância do objeto ao primeiro elemento difratador EOD1.

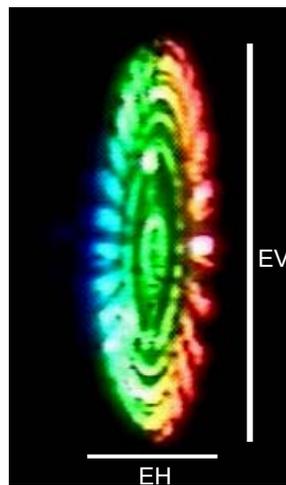


Fig. 2.15 Imagem ortoscópica de uma lâmpada de halogênea.

A extensão horizontal EH da imagem diminui quando o objeto se afasta do primeiro EOD1 igual que a extensão vertical EV, mas não na mesma proporção. Observamos também que quando o objeto fica mais perto do primeiro elemento difrator a imagem fica com aumento máximo, igual ao tamanho do objeto.

2.2.5 Eliminação do Astigmatismo

Na Figura 2.7 mostramos duas imagens da lâmpada halogênea obtidas com redes de linhas paralelas e observando a presença de astigmatismo vertical. Na figura 2.15 corresponde ao caso de dupla difração com um orifício usando redes espirais. A imagem obtida com nosso sistema de elementos bidimensionais é mais completa porque ela acontece nas duas direções do plano horizontal e vertical.

Para corrigir este tipo de aberração presenciada no sistema de dupla difração com redes de linhas retas, utilizamos nosso novo sistema de dupla difração usando redes com estrutura bidimensional.

As imagens da Fig. 2.16 foram obtidas limitando a abertura da lente de uma câmera de vídeo de 32 mm de diâmetro com uma fenda. Na imagem da esquerda a lente foi limitada por uma fenda horizontal de 1 mm de espessura. Na imagem da direita a lente foi limitada por a fenda vertical de 1mm. Demonstrando assim a inexistência do astigmatismo vertical (ver Fig. 2.15).

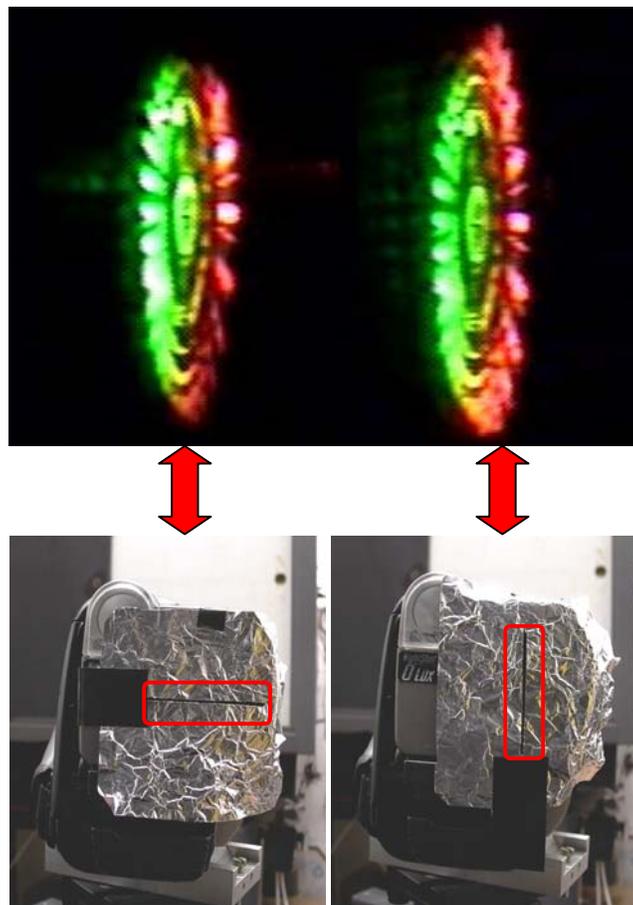


Fig. 2.16 Esquerda: abertura da lente reduzida com fenda horizontal, direita: reduzida com fenda vertical.

2.2.6 Medida da posição de um ponto Imagem

Utilizamos para este propósito uma objetiva ASAHI de uma câmera fotográfica PENTAX-M, com o intuito de obter uma referência da distância de focalização de um objeto. Para determinar a posição da imagem para diferentes posições do objeto, empregamos os seguintes valores para nosso experimento $\lambda_a = 500$ nm, $\lambda_v = 700$ nm, $Z_R = (126 \pm 4)$ mm, $X = (37,0 \pm 0,5)$ mm e utilizando as equações (2-5) e (2-6) e com ajuda do programa Mathematica², obtemos os resultados que mostramos na tabela II e na Fig. 2.17.

Tabela II: Comparação entre o resultado experimental e o calculado da distância da posição imagem ao segundo elemento difrator.

Z (mm)	$r_{i\ exp}$ (mm)	Xp (mm)	$r_{i\ cal}$ (mm)
301 ± 5	29 ± 3	-48,5 ± 0,1	25 ± 1
141 ± 5	23 ± 2	-45,3 ± 0,2	22 ± 1
90 ± 6	20 ± 2	-43,4 ± 0,3	20 ± 1
33 ± 9	10 ± 2	-40,1 ± 0,7	11 ± 2

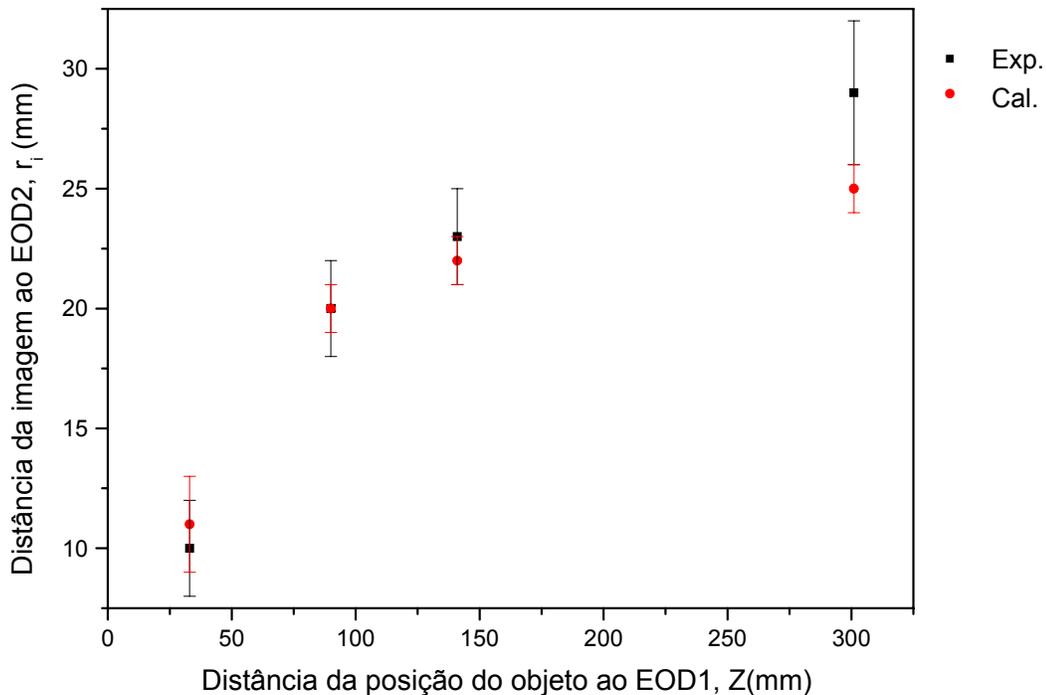


Fig. 2.17 Dependência da Posição da imagem com relação à posição do objeto

² Utilizamos o algoritmo VII.2 Distância do ponto imagem ao segundo elemento difrativo do apêndice VII.

2.2.7 Cálculo da extensão horizontal e a extensão vertical da imagem

Extensão Horizontal da imagem

Sejam os pontos A e B dois pontos extremos do objeto (ver Fig. 2.18). Os sub índices 1,2 são as diferentes posições que pode ter o objeto no eixo z. Para encontrar extensão horizontal da imagem $\Delta X_{i_{AB}}$ de um objeto com extensão horizontal ΔX_{AB} , utilizamos o sistema de equações (2-5) e (2-6). Os valores utilizados foram $v = 658$ linhas/mm, $\lambda_a = 400$ nm, $\lambda_v = 700$ nm, $X_A = 40$ mm, $X_B = 30$ mm.

Extensão horizontal do objeto: $\Delta X_{AB} = 10$ mm.

Tabela III: Resultados experimentais da extensão horizontal da imagem $\Delta X_{i_{AB}}$.

$Z_A = Z_B$ (mm)	X_{i_A} (mm)	Z_{i_A} (mm)	X_{i_B} (mm)	Z_{i_B} (mm)	$\Delta X_{i_{AB}}$ (mm)
33	-34,5	7,61	-25,9	9,5	8,6
90	-31,3	12,3	-24,4	14,7	6,9
141	-30,3	13,9	-24,5	16,2	5,8

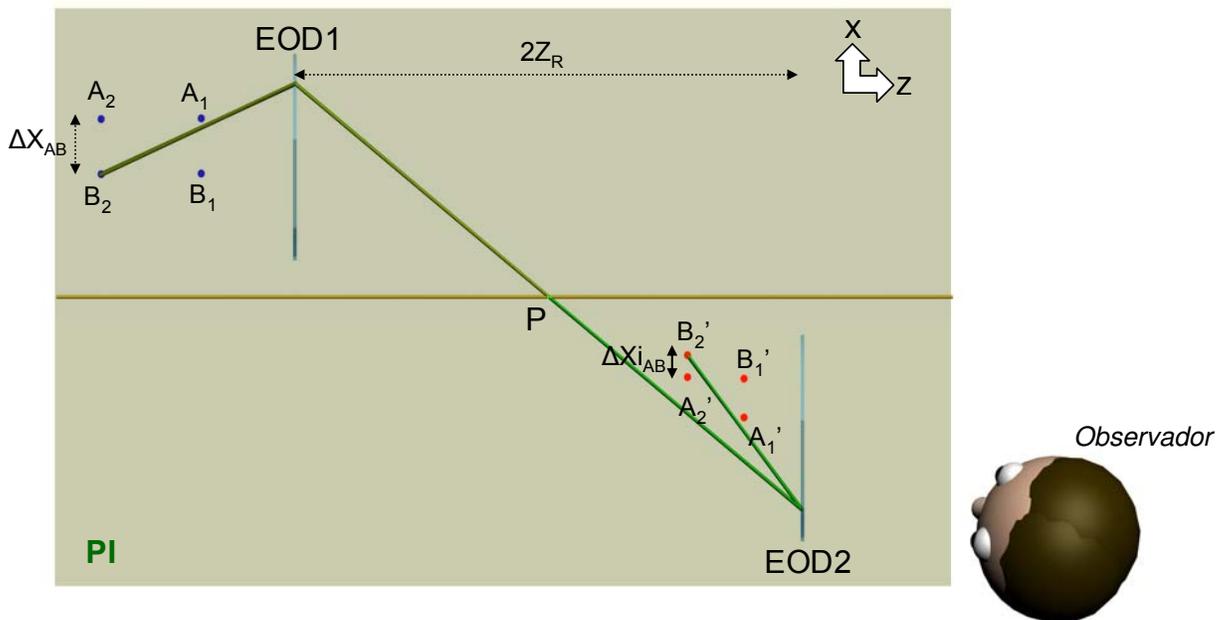


Fig. 2.18 Esquema da variação da extensão horizontal dos pontos imagens A' e B' dos pontos objetos A e B.

Extensão Vertical da imagem

A validade da mudança de tamanho da extensão vertical respeito às diferentes posições do objeto na direção do eixo z foi verificada; utilizando o traçado de raios e a equação da rede para um objeto extenso na vertical que esta contida entre os planos PI e PII (ver Fig. 2.20). Onde h é a extensão vertical do objeto, h' é a extensão vertical da imagem (ver 2.19) e α é o ângulo entre os planos PI e PII.

$$\alpha = \text{ArcTan} \left(\frac{h}{X} \right) \tag{2-7}$$

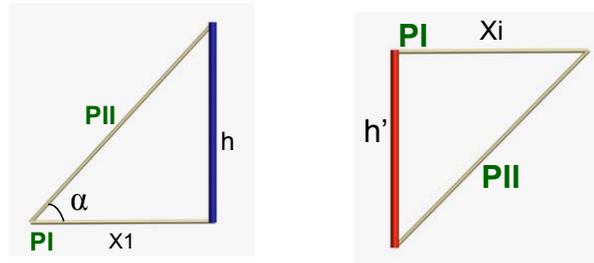


Fig. 2.19 Triangulação geométrica: a) para determinar o ângulo entre o plano PI e PII que depende da extensão vertical h . b) para determinar a extensão vertical h' .

A trajetória de luz de nosso sistema pode ser representada pelo seguinte sistema de equações:

$$e \quad \frac{\frac{X_{1,2}}{\cos \alpha} - \sqrt{X^2 + h^2}}{\sqrt{\left(\frac{X_{1,2}}{\cos \alpha} - \sqrt{X^2 + h^2}\right)^2 + Z^2}} + \frac{\frac{X_{1,2}}{\cos \alpha}}{\sqrt{\left(\frac{X_{1,2}}{\cos \alpha}\right)^2 + Z_R^2}} = \lambda_{a,v} \nu \quad (2-8)$$

$$\frac{-\frac{X_{1,2}}{\cos \alpha}}{\sqrt{\left(\frac{X_{1,2}}{\cos \alpha}\right)^2 + Z_R^2}} + \frac{\frac{X_{1,2}}{\cos \alpha} - X_i}{\sqrt{\left(\frac{X_{1,2}}{\cos \alpha} - X_i\right)^2 + Z_i^2}} = \lambda_{a,v} \nu \quad (2-9)$$

Para calcular a extensão vertical h' (eq. 2-10) para dois pontos objetos na posição $X_A = 40$ mm e $X_B = 30$ mm, utilizamos uma frequência $\nu = 658$ linhas/mm, uma distância do observador ao EOD2 (Z_R) de 126,5 mm e $\lambda_a = 400$ nm, $\lambda_v = 700$ nm comprimentos de onda azul e vermelho respectivamente, que são os raios correspondentes aos extremos do espectro visível.

$$h' = x_i \cdot \sin \alpha \quad (2-10)$$

Utilizamos as equações (2-8), (2-9) e (2-10) para obter h' com ajuda do programa Mathematica³, e os resultados são mostramos na tabela IV e V.

Tabela IV: Resultados da posição da imagem quando a extensão vertical $h = 15$ mm

$Z_A = Z_B$ (mm)	X_{iA} (mm)	Z_{iA} (mm)	X_{iB} (mm)	Z_{iB} (mm)	h_A' (mm)	h_B' (mm)
33	-36,9	7,1	-28,9	8,8	12,9	12,9
90	-33,2	11,6	-26,9	13,8	11,6	12,0
141	-32,0	13,2	-26,5	15,4	11,2	11,8

³ Utilizamos o algoritmo VII.3 Cálculo da extensão vertical da imagem do apêndice VII.

Tabela V: Resultados da posição da imagem quando a extensão vertical $h = 10$ mm

$Z_A = Z_B$ (mm)	X_{iA} (mm)	Z_{iA} (mm)	X_{iB} (mm)	Z_{iB} (mm)	$h_{A'}$ (mm)	$h_{B'}$ (mm)
33	-35,6	7,4	-27,2	9,2	8,6	8,6
90	-32,2	12,0	-25,5	14,3	7,8	8,1
141	-31,0	13,6	-25,4	15,8	7,5	8,0

Na Figura 2.19, A e B são dois objetos extensos que estão colocados em diferentes posições da direção do eixo Z (posição 1: corresponde a A_1 e B_1 ; posição 2: corresponde a A_2 e B_2). Estes objetos estão contidos entre dois planos, onde em cada plano é válida a equação da rede. Por exemplo, na figura o objeto extenso B na posição 1 de altura h , está contido entre os planos PI e PII. B_1' é a imagem extensa de altura h' do objeto B na posição 1.

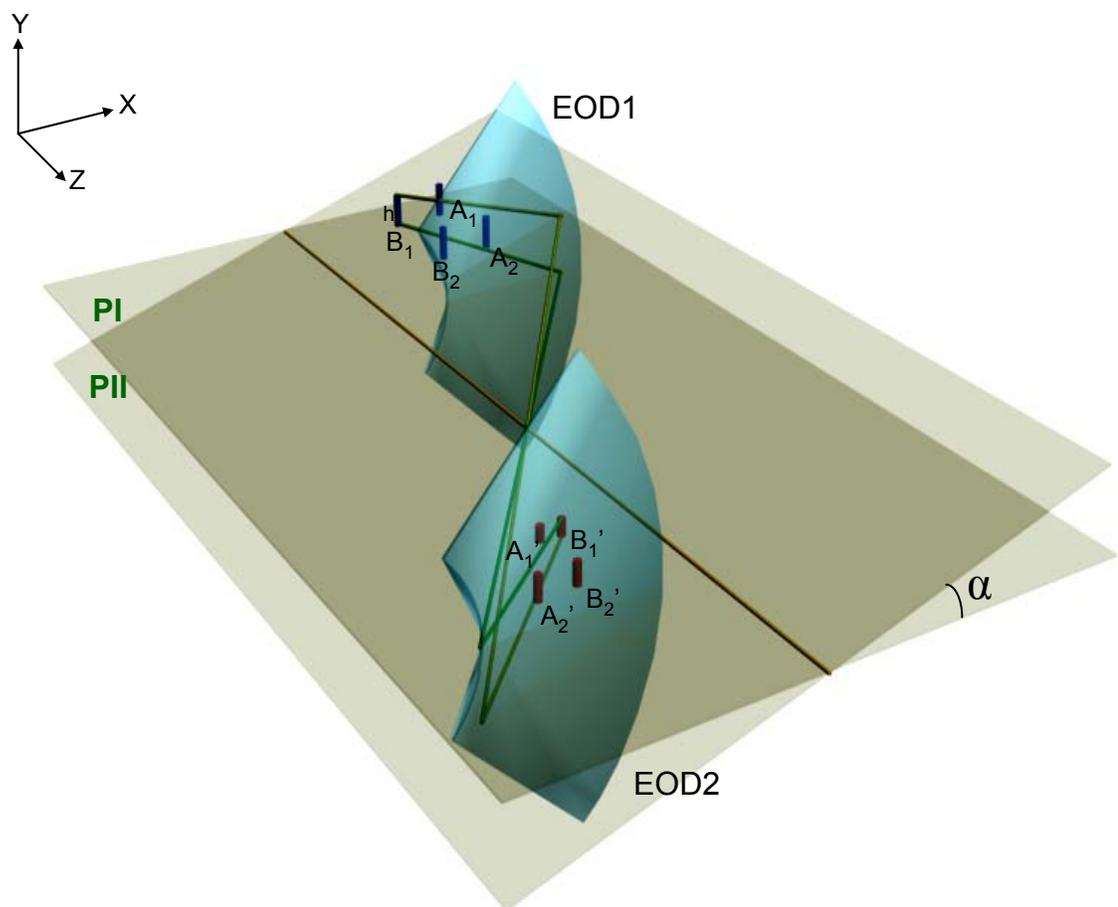


Fig. 2.20 B_1' e B_2' são as imagens do objeto B nas posições 1 e 2 respectivamente.

Dos resultados da tabela III e V determinamos a validade do tamanho da imagem. A redução da extensão horizontal é muito maior que a redução da extensão vertical, quando o objeto está mais distante do primeiro elemento difrativo EOD1. Quando o objeto está mais perto do EOD1 a imagem fica quase do mesmo tamanho do objeto nas duas direções.

2.3 Referências

- [1] Lunazzi, J. J. "[Holophotography with a diffraction grating.](#)" Opt. Eng. **29**, 15-18 (1990).
- [2] Lunazzi, J. J.; Ocampo, J. M. J. "Binocular disparity and stereopsis obtained under white light by means of a diffraction grating," J. Modern Opt. **42**, N1, 3-6 (1995).
- [3] Lunazzi, J. J. "[Holoprojection of images by a double diffraction process.](#)" in "Opt. e Fis.Atômica", Proc. of the XIV Enc.Nac.de Fis.da Mat. Condensada, Soc. Bras. de Física eds. Caxambu-MG-BR, V. S. Bagnato, C. H. de Brito Cruz eds. 07-11.05.91, p OTI 5a.12:00 (1991).
- [4] Lunazzi, J. J. "[New possibilities in the utilization of holographic screens.](#)" SPIE 1667, p. 289-292 (1992).
- [5] Lunazzi, J. J. ; Boone, P.M. "3D image projection using large diffraction screens", SPIE 2333, Proc. of the International Symposium on Display Holography, Lake Forest, USA, 07.15-18, p.449-453. (1994)
- [6] Lunazzi, J. J. ; Boone, P.M. "One- step technique for enlarging straddling holographic images by white-light projection onto a diffractive screen", Opt. letters **19**, 1897-1899 (1994).
- [7] Lunazzi, J. J.; Rivera, N. I. "Orthoscopic Imaging in a Double diffraction Process with Slit, Brazilian Society of Physics meeting" XXVII ENFMC-Poços de Caldas-MG, May 4-8th, 2004.
- [8] Lunazzi, J. J.; Rivera, N. I.; Magalhães, D. S. F. "Orthoscopic and pseudoscopic white-light imaging by means of symmetrical diffractive optical elements," Proc. of Immersive Environments in: Frontiers in Optics (Optical Society of America, Rochester, 2004)
- [9] Petit, R. "Electromagnetic theory of gratings" Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1980.
- [10] Hogert, E. N.; Rebollo, M. A.; Gaggioli, N. G. "Alignment and/ or tilting measurement by means of conical diffraction phenomena" Opt. & Laser Tech. **23** N6, (1991)

Capítulo 3

Imagens Pancromáticas de Luz Branca em um Processo de Dupla Difração sem Elementos Intermediários

A imagem de dupla de difração intermediada por meio de elementos não difrativos foi demonstrada em trabalhos prévios e uma extensão no segundo capítulo desta tese. Eliminando os elementos intermediadores obtemos mais luminosidade e simplicidade para obter imagens mais nítidas e completas por não perder a cores originais do objeto. Apresentamos dois novos sistemas ópticos para obter imagens usando luz branca sem elementos intermediários. O primeiro sistema consiste em obter imagens usando duas redes de difração simples e o segundo sistema usando duas redes com estrutura bidimensional espiral. Os raios da segunda ordem de difração do primeiro elemento difrativo são coletados para obter a primeira ordem de difração da segunda rede do mesmo valor periódico. Obtivemos uma imagem que tem maior correção cromática que a imagem obtida por prismas. A condição de imagem depende da relação de distância entre as redes e a distância do objeto. Procuramos uma imagem com uma curta distância entre os elementos, variando as distâncias entre os elementos difrativos e a distância do objeto até encontrar um resultado satisfatório quando a imagem acontece perto da posição do objeto.

Esta imagem não pode ser interpretada como auto-imagens de Talbot ou Lau porque esses efeitos usam a recombinação de todas as ordens ao mesmo tempo. O objetivo de nosso trabalho é ajudar a eliminar elementos refrativos na geração de novos telescópios ópticos espaciais. Nestas aplicações a primeira lente por ser difrativa pode ser de pouco peso, mas a objetiva refrativa intermediária não. Hyde e Dixit descrevem essa aplicação, Meier também, seu trabalho sobre a imagem duplamente difratada [1-5] como sendo de difração simples mais em todos os casos tem um elemento refrativo ou refletivo sendo ainda necessário para se obter imagens convergentes (reais). Estes elementos refrativos aumentam o peso da nave espacial e seriam usualmente eliminados [6]. Nosso presente trabalho apesar de não obter um sistema para imagem convergente, pode ser um caminho útil para procurar essa possibilidade. Apesar de Bennet [7] ter demonstrado a impossibilidade de se obter imagens convergentes por meio de dois elementos holográficos dentro da aproximação paraxial da teoria de difração de Fresnel. Kato e et.al. [8], fabricam um sistema de duas lentes holográficas por litografia, conseguindo obter uma imagem convergente que não tem aberração em uma variação de comprimento de onda de 10 nanômetros. Estes resultados não são válidos em nosso caso porque nossos elementos não são lentes: nós utilizamos em nosso primeiro sistema redes simples, e em nosso segundo sistema axicons difrativos. Também, os ângulos com que trabalhamos não são pequenos, portanto não permitem confiar na teoria paraxial.

3.1 Imagens de Luz Branca em um Processo de Dupla Difração usando Redes Simples

O processo óptico que permite integralmente obter uma imagem de um objeto de luz branca usando somente duas redes de difração de linhas retas e paralelas é descrito na seção 3.1.1 e foi descoberto em uma oportunidade em que se retirou a fenda do sistema de dupla difração com uma fenda. Este processo não precisa de nenhum elemento intermediário. A imagem está localizada perto e ao lado do objeto, esta imagem mantém as cores originais. O fenômeno é analisado pelo cálculo de traçados de raios para mostrar a estrita relação que existe entre os parâmetros envolvidos da imagem.

3.1.1 Descrição do sistema

Na Figura 3.1. O é o ponto de um objeto tri-dimensional com luz branca. Um conjunto de raios luminosos deste objeto sai e atinge o ponto X_{1n} da primeira rede de difração RD1 de 2ν linhas/mm que está a uma distância Z do objeto. Os correspondentes raios difratados atingem uma segunda rede RD2 (de ν linhas/mm) em um ponto X_{2m} , quando novamente são difratados, são considerados raios duplamente difratados. Os sulcos das redes RD1 e RD2 estão ortogonais ao plano XZ (o plano da folha).

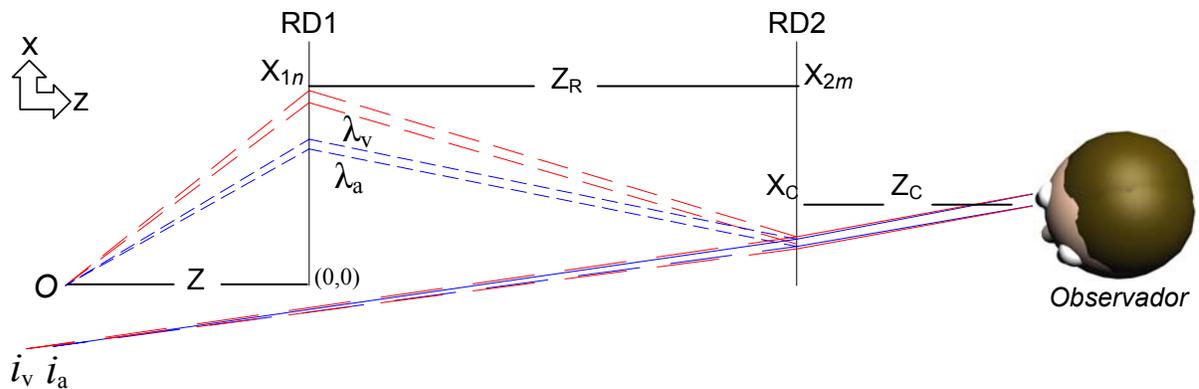


Fig. 3.1 Esquema de traçado de raios no plano XZ para um processo de dupla difração.

RD2 está localizado a uma distância Z_R de RD1, neste processo utilizamos redes de sulcos retos e paralelos. A imagem pode ser vista por um observador ou por uma câmera, esta câmera possui uma lente de abertura semelhante ao diâmetro da pupila do olho de um observador. Um conjunto de raios virtuais é a prolongação dos raios duplamente difratados que convergem em um ponto imagem i . i_a é o ponto imagem para um comprimento de onda menor e i_v para um comprimento de onda maior. A imagem está localizada próxima da posição do objeto (ver Fig.3.1) e pode ser encontrada usando a equação da rede de difração.

A segunda ordem de difração na primeira rede RD1 segue a equação abaixo:

$$\text{sen } \theta_i - \text{sen } \theta_d = 2 \lambda \nu \quad (3-1)$$

onde θ_i é o ângulo de incidência, θ_d é o ângulo de difração onde a luz resulta desviada pela difração, ν é a frequência espacial da rede de difração e λ é o comprimento de onda, um valor que compreende todo o espectro visível. A equação (3-1) pode-se expressar em coordenadas cartesianas como:

$$\frac{X_{1n}}{\sqrt{X_{1n}^2 + Z^2}} + \frac{X_{1n} - X_{2m}}{\sqrt{(X_{1n} - X_{2m})^2 + Z_R^2}} = 2 \lambda_{nm} \nu \quad (3-2)$$

λ_{nm} é o comprimento de onda de cada raio que passa pelas coordenadas de X_{1n} e X_{2m} .

Analogamente, a primeira ordem de difração na segunda rede RD2 pode-se expressar como:

$$\frac{X_{1n} - X_{2m}}{\sqrt{(X_{1n} - X_{2m})^2 + Z^2}} + \frac{X_C - X_{2m}}{\sqrt{(X_C - X_{2m})^2 + Z_C^2}} = \lambda_{nm} \nu \quad (3-3)$$

onde (X_C, Z_C) é a coordenada da posição do observador. O ângulo de saída para o segundo processo de difração dos raios é:

$$\Phi_{dn} = \arcsen \left[\frac{X_{1n}}{\sqrt{X_{1n}^2 + Z^2}} - \lambda_{nm} \nu \right] \quad (3-4)$$

Do sistema de equações (3-2) - (3-3) podemos obter os valores X_{1n} e X_{2m} . Com os valores de X_{1n} e X_{2m} e a equação (3-5), para cada comprimento de onda λ_a e λ_v , encontramos a posição de um ponto imagem (X_i, Z_i) de um ponto objeto (X, Z) . X_{i_a} para o menor comprimento e X_{i_v} para o maior comprimento de onda.

$$\frac{X_{1n} - X_{2m}}{\sqrt{(X_{1n} - X_{2m})^2 + Z_R^2}} + \frac{X_{2m} - X_{i_{a,v}}}{\sqrt{(X_{2m} - X_{i_{a,v}})^2 + Z_{i_{a,v}}^2}} = \lambda_{nm} \nu \quad (3-5)$$

O sistema também pode ser utilizado girando o conjunto de redes RD1 e RD2 de 90° com respeito ao eixo z como é mostrado na Figura 3.2. Este sistema será utilizado na próxima seção para a obtenção de imagens. A vantagem deste segundo sistema é observar de frente á rede a imagem que pode ser vista de cima para baixo (na direção do eixo Y).

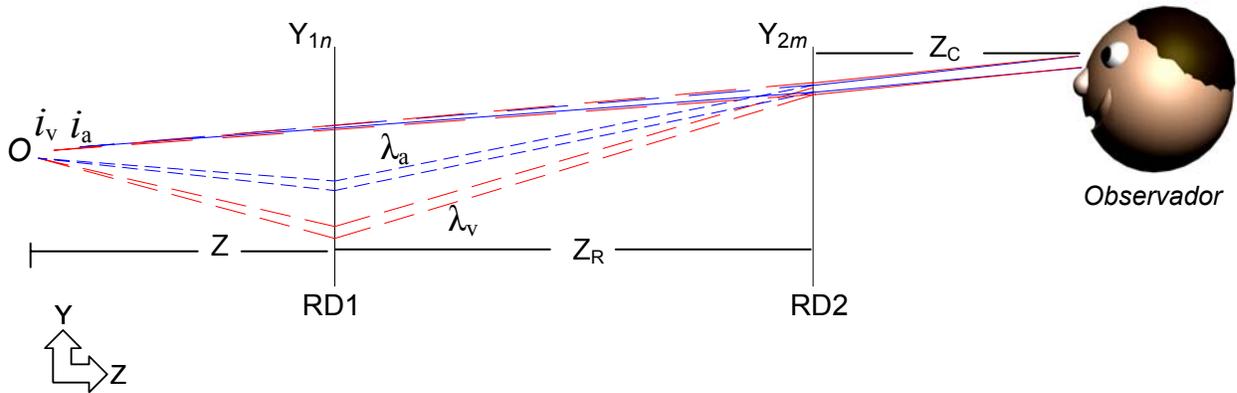


Fig. 3.2 Esquema de traçado de raios no plano YZ para um processo de dupla difração.

3.1.2 Montagem experimental

Na primeira montagem foi utilizada uma lâmpada doméstica de 40 W, a largura de seu filamento era de 0,5 mm e ele estava posicionado verticalmente e paralelo aos sulcos da rede. Empregamos duas redes holográficas de transmissão do mesmo tipo, com uma frequência espacial de 540 ± 9 linhas/mm para uma primeira rede e 503 ± 8 linhas/mm para a segunda. A segunda ordem da primeira rede difração e a primeira ordem da segunda rede de difração são utilizadas correspondentemente com as equações (3-2) e (3-3). A área efetiva utilizada de cada rede foi aproximadamente de 60 mm (H) x 40 mm (L). Elas estavam separadas por uma distância de $Z_R = 660$ mm e em posição paralela. O objeto foi localizado a uma distância de (425 ± 5) mm da primeira rede. O observador ou uma câmera foi localizado a uma distância de (468 ± 5) mm da segunda rede e sua linha visual foi de um ângulo de $6,8^\circ$ com a normal das redes.

Na segunda montagem (de acordo com a Fig. 3.2) utilizamos um objeto extenso composto de uma estampa de metal cuja superfície foi pintada com uma tinta de alumínio fosco para difundir a luz e um parafuso a frente para comparar a distância de profundidade dos objetos; neste caso os objetos foram iluminados com uma lâmpada halogênea de 50 W (ver Fig. 3.3). Empregamos duas redes holográficas de transmissão, com uma frequência espacial de 910 ± 20 linhas/mm para uma primeira rede e 503 ± 8 linhas/mm para a segunda. Utilizamos a primeira ordem de difração em cada uma das redes. Neste caso as redes estavam separadas por uma distância de $Z_R = 90$ mm.

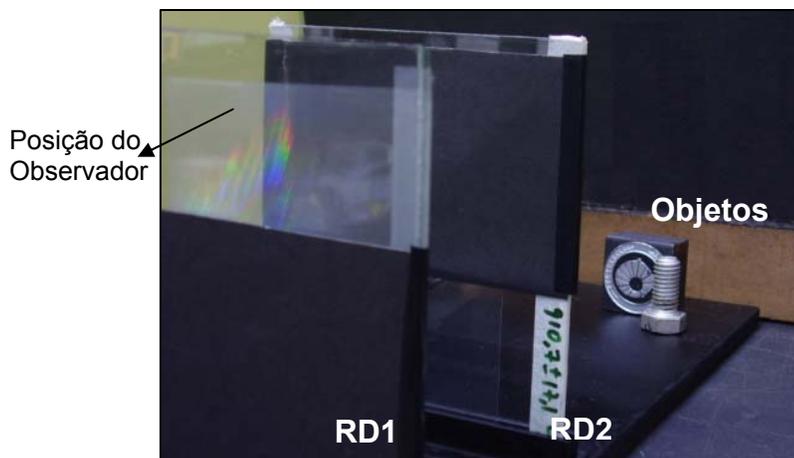


Fig. 3.3 Sistema de dupla difração usando redes simples.

Uma câmera de vídeo SONY Handycam foi utilizada nas montagens para capturar as imagens em um computador. A abertura da lente foi de 3 mm para mantê-la comparável com a abertura do olho do observador.

3.1.3 Perspectiva do observador no sistema de dupla difração

Este sistema de dupla difração tem uma analogia com prévios casos de imagem através de uma rede de difração [9], a refração por um prisma e o processo ordinário por uma lente. Quando consideramos a difração por uma rede, estando os sulcos ortogonais ao plano da folha (ver Fig. 3.4), notamos que o observador vê cada comprimento de onda em uma perspectiva diferente. Isto acontece porque os raios difratam em diferente ângulo para cada comprimento de onda. A convergência dos raios virtuais dos raios difratados gera uma imagem de O ao lado do objeto O para um observador que está localizado como na Fig. 3.4.

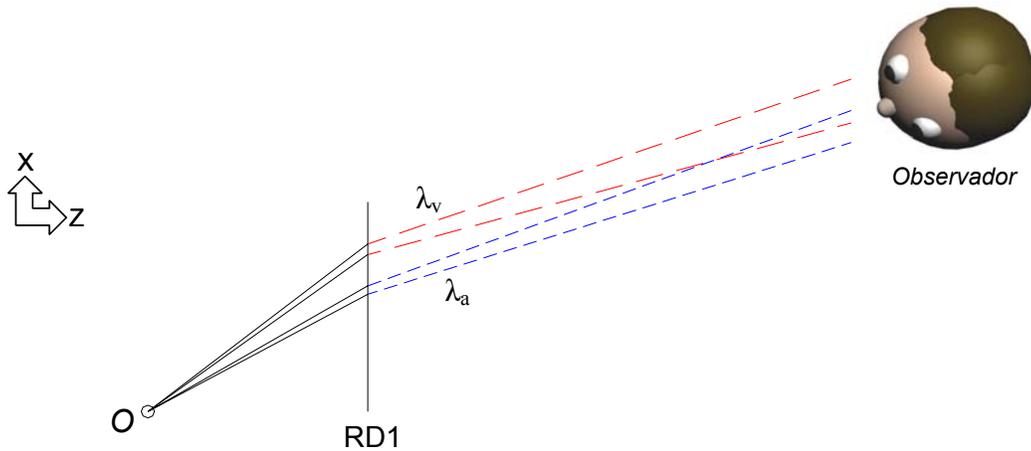


Fig. 3.4 Exemplo esquemático da variação da perspectiva associada para cada comprimento de onda.

Nosso sistema de dupla difração é mostrado na Fig. 3.5, para indicamos com dois observadores virtuais $VO_{\lambda >}$ e $VO_{\lambda <}$ a posição de onde um observador pode ver a perspectiva dos raios difratados para a primeira ordem de difração. A perspectiva descrita para o caso da primeira ordem de difração da RD1 é análoga ao que o observador real verá a imagem virtual \tilde{i} . Este caso é similar ao de um prisma, com a única diferença que os comprimentos de onda maiores desviam menos que os comprimentos menores. Mas nesses casos o desvio do objeto não é crítico, enquanto em nossa experiência é crítica.

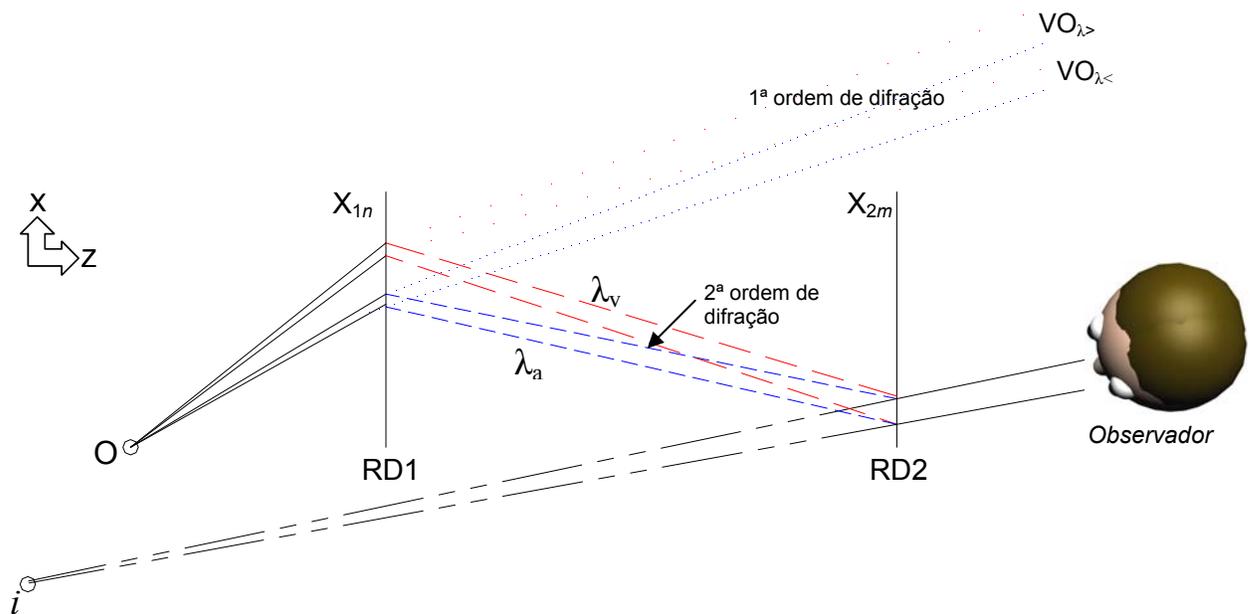


Fig. 3.5 Exemplo esquemático da perspectiva alcançada pelo observador para ver a imagem \tilde{i} no sistema de dupla difração

Da perspectiva do observador vê-se que os raios virtuais convergem, a posição da convergência dependerá da posição do objeto. Isto tem analogia com a ação da focalização das lentes, onde um ponto objeto tem uma posição de focalização da imagem definida.

3.1.4 Seletividade de comprimento de onda

O primeiro experimento foi feito para a obtenção da imagem de um filamento de lâmpada. Colocamos uma fenda vertical de 1 mm após a primeira rede de difração obtendo imagens filtradas, com o intuito de comparar com a imagem sem fenda (ver Fig. 3.6). Esta fenda seleciona o comprimento de onda da largura de banda. A Fig. 3.7 mostra as fotografias das imagens. Ao lado esquerdo da figura temos a imagem de luz branca do filamento (sem fenda). Ao lado direito desta, as imagens filtradas, estas imagens são obtidas ao selecionar seqüencialmente os comprimentos de onda da banda vermelha, verde e azul.

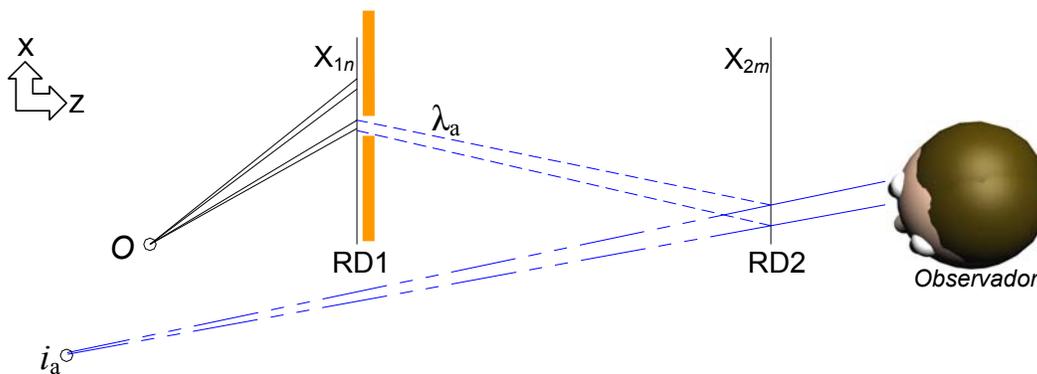


Fig. 3.6 Esquema de traçado de raios quando colocamos uma fenda após a primeira rede RD1, exemplo para a seleção do comprimento de onda azul.

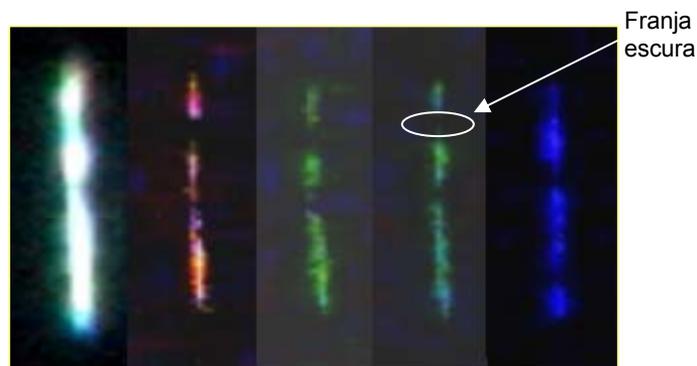


Fig. 3.7 Imagem do filamento de uma lâmpada. Esquerda: imagem branca direta. Outros: imagens filtradas por meio de uma fenda.

É interessante notar as distintas franjas escuras cortando as imagens filtradas, elas foram causadas pelos caracteres opacos que estavam no bulbo de vidro a 27 mm à frente do filamento. A diferença das posições das franjas escuras para cada comprimento de onda (Fig. 3.7) pode ser explicada através da difração cônica (ver seção 2.1.6).

3.1.5 Focalização da Imagem

Em nosso caso a focalização da imagem é distinguível como uma seqüência espectral de cores, facilitando assim as medidas. Se nós iluminamos com dois ou mais comprimentos de ondas definidos exatamente, por exemplo, com um feixe de laser, a desfocalização pode ser medida cuidadosamente e o objeto não precisa ser um ponto ou uma linha, mas pode ser uma borda.

Neste segundo experimento mostramos a desfocalização da imagem de um filamento de lâmpada: quando a imagem do objeto está focalizada (no centro da Fig. 3.8), a 38 mm antes da posição de focalização (à esquerda da Fig. 3.8) e a 48 mm depois da posição de focalização (à direita da Fig. 3.8).

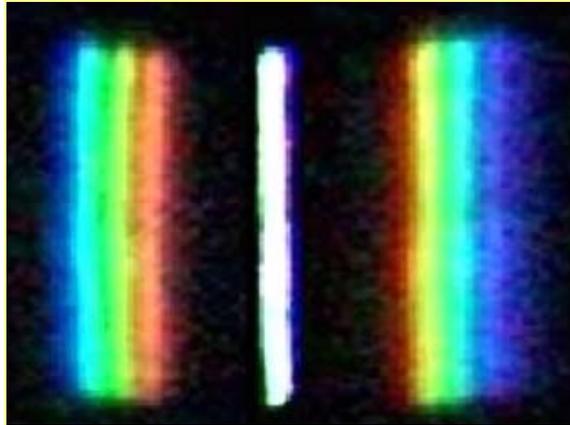


Fig. 3.8 Efeitos de desfocalização de uma imagem em três posições diferentes. Esquerda: antes da posição de focalização. Centro: posição de focalização. Direita: depois da posição de focalização.

Para o caso das lentes refrativas temos uma maior profundidade de foco quando a distância focal da lente é maior. Para nosso sistema existe uma forte dependência da profundidade de foco com a posição do objeto¹.

3.1.6 Imagem de um objeto extenso

Neste terceiro experimento, utilizamos os objetos descritos na segunda montagem para mostrar a imagem de objetos extensos. A Figura 3.9 mostra no lado esquerdo uma fotografia direta do objeto e no lado direito a imagem obtida depois da dupla difração. A imagem obtida cria um efeito de ilusão de aparência atrativa.



Fig. 3.9 Esquerda: Fotografia de dois objetos extensos. Direita: Imagem dos objetos.

¹ Para nosso sistema a imagem é ortoscópica e para o caso da lente refrativa a imagem é pseudocópica.

Observamos que este tipo de imagem é pancromático porque não perde as cores originais que tem o objeto. Além disso, a imagem é ortoscópica porque tem profundidade natural (ver seção 1.10) e não possui qualquer tipo de inversão.

3.1.7 Posição da imagem

Caracterizamos o sistema de dupla difração com luz branca encontrando a posição da imagem usando o traçado de raios e a equação da rede de difração. Verificamos as medidas da parte experimental com o valor obtido pelo cálculo teórico, utilizando o sistema de equações (3-2)-(3-3) e a equação (3-5).

Para esta experiência utilizamos como objeto duas pequenas lâmpadas com filamento de $(2,0 \pm 0,5)$ mm de largura (ver Fig. 2.9). Empregamos os seguintes valores para nossos cálculos: o ângulo de incidência de um raio que sai do objeto com a normal da rede de difração $\theta_i = 18^\circ$, os extremos dos comprimentos de onda da luz visível $\lambda_a = 400$ nm e $\lambda_v = 700$ nm e a distância do observador à segunda rede $Z_C = 210$ mm (ver Fig. 3.1). Alguns dados medidos estão na Tabela VI.

Tabela VI: Medidas coletadas para utilizar na determinação da posição da imagem.

$Z_R \pm \Delta Z_R$ (mm)	$X_C \pm \Delta X_C$ (mm)	$R \pm \Delta R$ (mm)	$Z \pm \Delta Z$ (mm)
360 ± 5	34 ± 5	270 ± 56	257 ± 53
460 ± 5	58 ± 8	347 ± 88	330 ± 84
560 ± 5	72 ± 8	410 ± 89	390 ± 85
660 ± 5	67 ± 7	504 ± 113	479 ± 107
760 ± 5	64 ± 3	624 ± 116	594 ± 110
860 ± 9	42 ± 5	723 ± 139	688 ± 132

Na Tabela VI, Z e R são mostrados na Fig. 3.10, onde: $Z = R \cos \theta_i$ e $\Delta Z = \Delta R \cdot \cos \theta_i$ ², ΔZ e ΔR são a metade da tolerância da posição do objeto para podermos observar a imagem nítida.

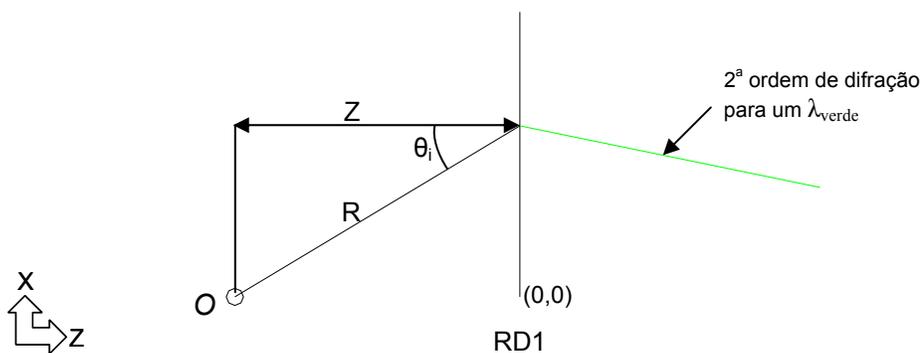


Fig. 3.10 Incidência em RD1 de um raio R que sai do objeto O.

² A incerteza foi calculada por propagação de erros. Desconsideramos a incerteza em θ_i .

Utilizando o sistema de equação (3-2)-(3-3) e a equação (3-5); resolvidas com ajuda do programa Mathematica³, obtemos os resultados que mostramos na Tabela VII.

Tabela VII: Comparação entre os resultados experimentais e os calculados da posição da imagem a partir do objeto.

$Z_R \pm \Delta Z_R$ (mm)	$Xi_{exp} \pm \Delta Xi_{exp}$ (mm)	$Zi_{exp} \pm \Delta Zi_{exp}$ (mm)	$ Xi_{cal} \pm \Delta Xi_{cal}$ (mm)	$ Zi_{cal} \pm \Delta Zi_{cal}$ (mm)	$Ri_{exp} \pm \Delta Ri_{exp}$ (mm)	$Ri_{cal} \pm \Delta Ri_{cal}$ (mm)
360 ± 5	17 ± 5	97 ± 51	19 ± 5	101 ± 58	98 ± 50	103 ± 57
460 ± 5	22 ± 8	130 ± 83	24 ± 7	131 ± 75	132 ± 81	133 ± 74
560 ± 5	30 ± 8	145 ± 84	34 ± 9	156 ± 91	148 ± 82	160 ± 89
660 ± 5	29 ± 7	172 ± 108	33 ± 9	189 ± 108	174 ± 107	192 ± 106
760 ± 5	23 ± 3	185 ± 111	24 ± 6	226 ± 127	186 ± 110	227 ± 126
860 ± 9	18 ± 5	216 ± 134	22 ± 5	258 ± 145	217 ± 133	259 ± 144

Na Tabela VII, Z_R é a medida da distância entre a rede RD1 e RD2 e ΔZ_R é sua incerteza. A coordenada (X_i, Z_i) é a posição da imagem i a partir da posição do objeto O . R_i é a distância entre a posição da imagem e a posição do objeto, como é mostrada na Fig. 3.11 e ΔR_i é a metade da profundidade foco da imagem onde:

$$\Delta R_i = \frac{1}{R_i} \sqrt{X_i^2 \cdot \Delta X_i^2 + Z_i^2 \cdot \Delta Z_i^2} \quad \text{e} \quad R_i^2 = X_i^2 + Z_i^2.$$

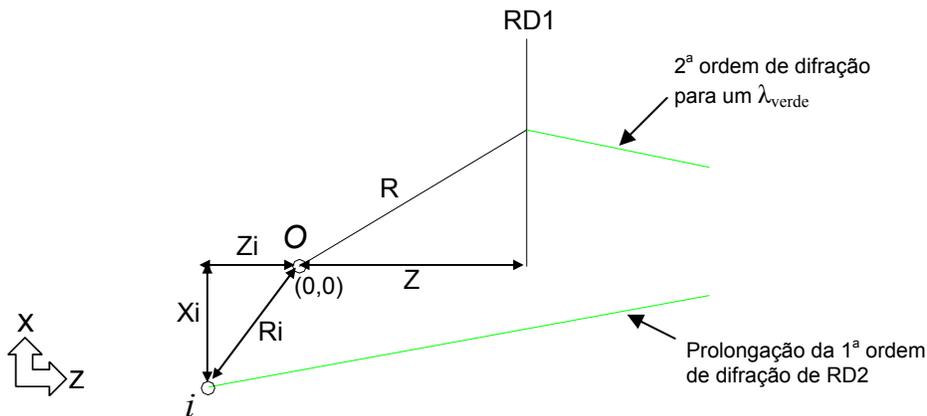


Fig. 3.11 Posição da imagem localizada a uma distância R_i do objeto.

Da Fig. 3.12 podemos observar o gráfico que representa a proporcionalidade da distância entre as duas redes e o raio da distância do objeto; para posições fixas da primeira rede de difração RD1 e do observador. As barras verticais representam a tolerância da posição do objeto onde é vista a imagem pancromática.

³ Utilizamos o algoritmo VII.4 Cálculo da posição da imagem variando a posição do objeto e a distância entre as redes. Ver no apêndice VII.

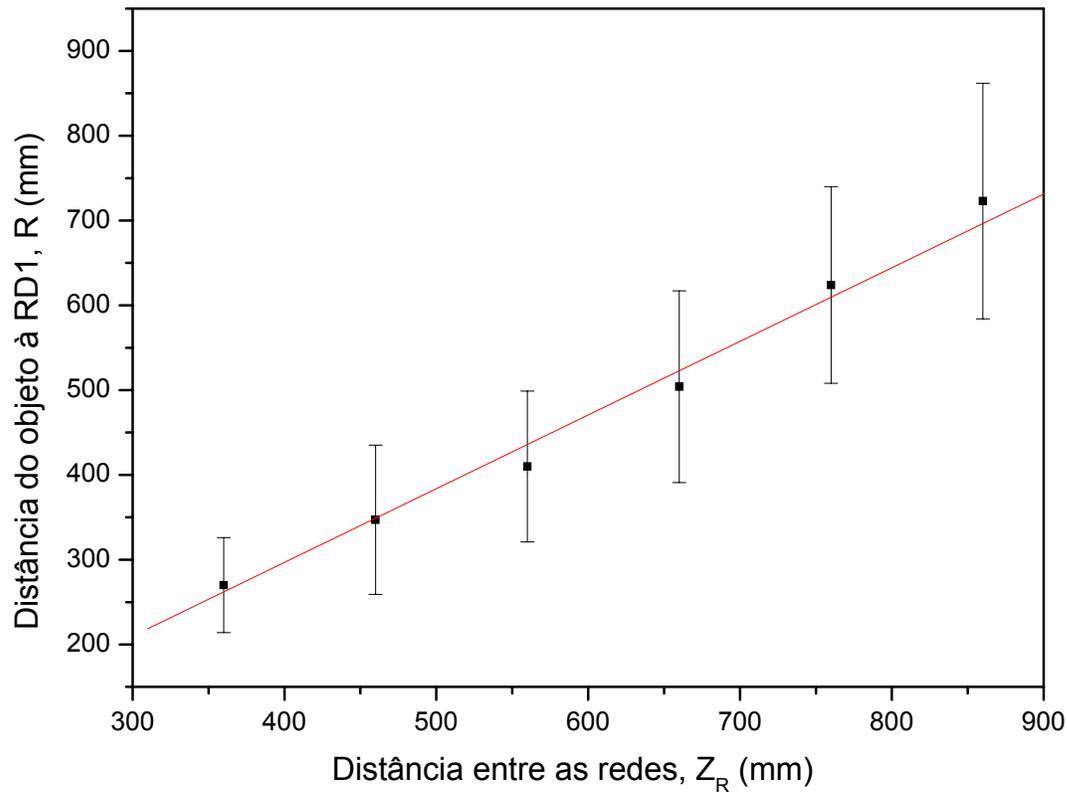


Fig. 3.12 Distância do objeto a RD1 em função da distância entre as redes de difração onde pode-se encontrar uma imagem pancromática.

A Fig. 3.13 mostra o gráfico da distância da imagem ao objeto como função da distância entre as redes. Este gráfico mostra a comparação de nossas medidas experimentais com os valores obtidos pelo cálculo teórico. As barras verticais de cor preta (valores experimentais) e de cor vermelha (valores calculados) representam a profundidade de foco da imagem onde o observador pode ver a imagem com nitidez. Os quadradinhos pretos e os círculos vermelhos são as posições onde o observador poder ver a imagem com maior nitidez.

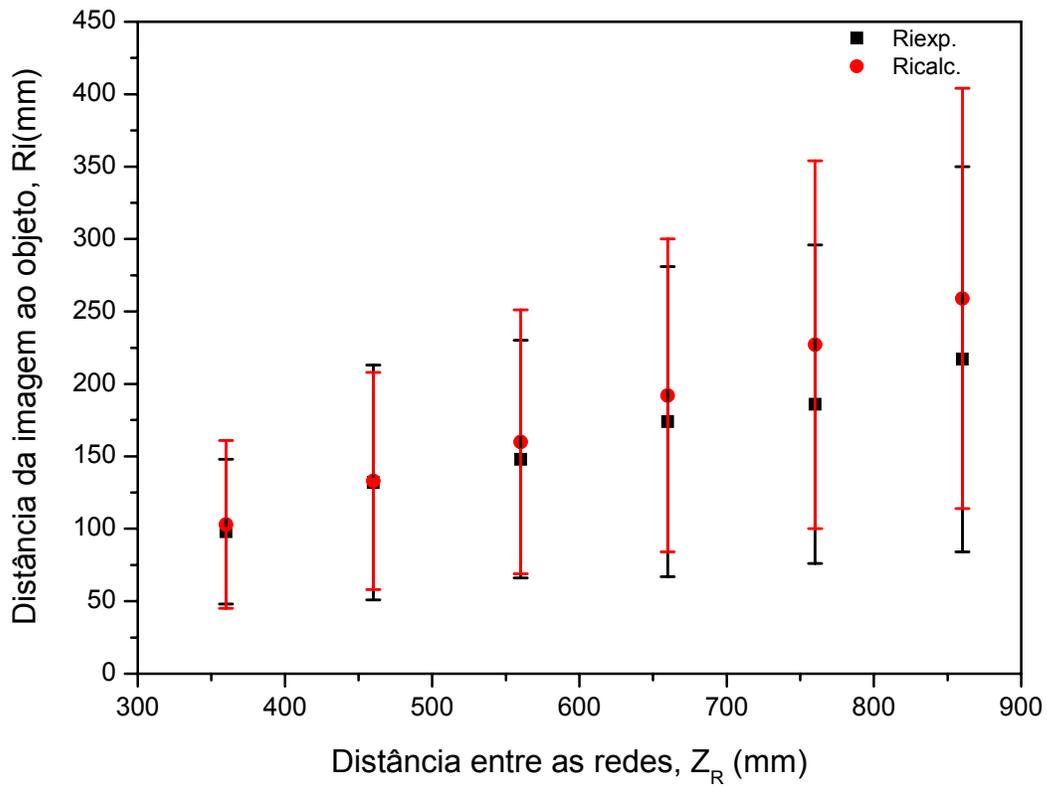


Fig. 3.13 Posição encontrada da imagem pancromática, as barras representam a profundidade do foco da imagem.

3.1.8 Nitidez da imagem

A nitidez de uma imagem está relacionada com a convergência dos raios de cada comprimento de onda. Esta convergência dos raios acontece em diferente profundidade no ponto i_a e i_v . (ver Fig. 3.14)

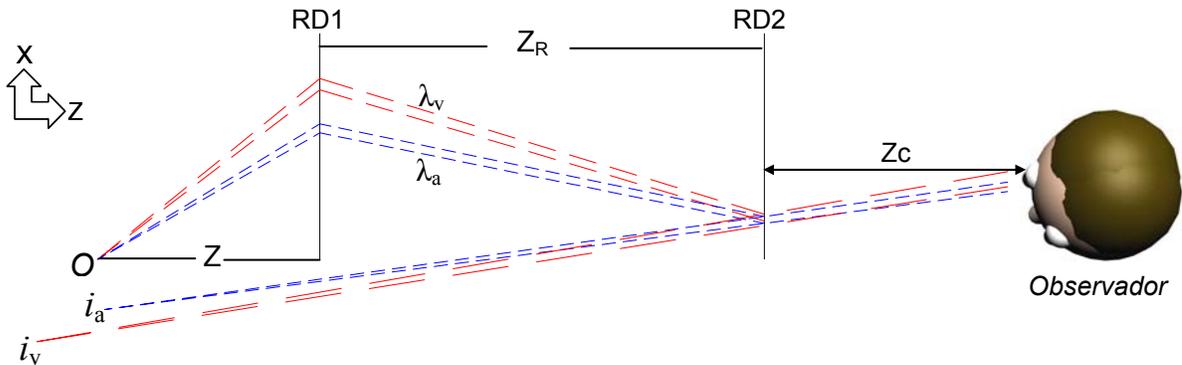


Fig. 3.14 Esquema de traçados de raios para mostrar a convergência dos raios.

Quando o observador vê todos os pontos convergentes superpostos em uma única direção a imagem é nítida. Faremos um exemplo para os extremos dos comprimentos de onda do espectro visível λ_v e λ_a como é mostrado na Figura 3.15.

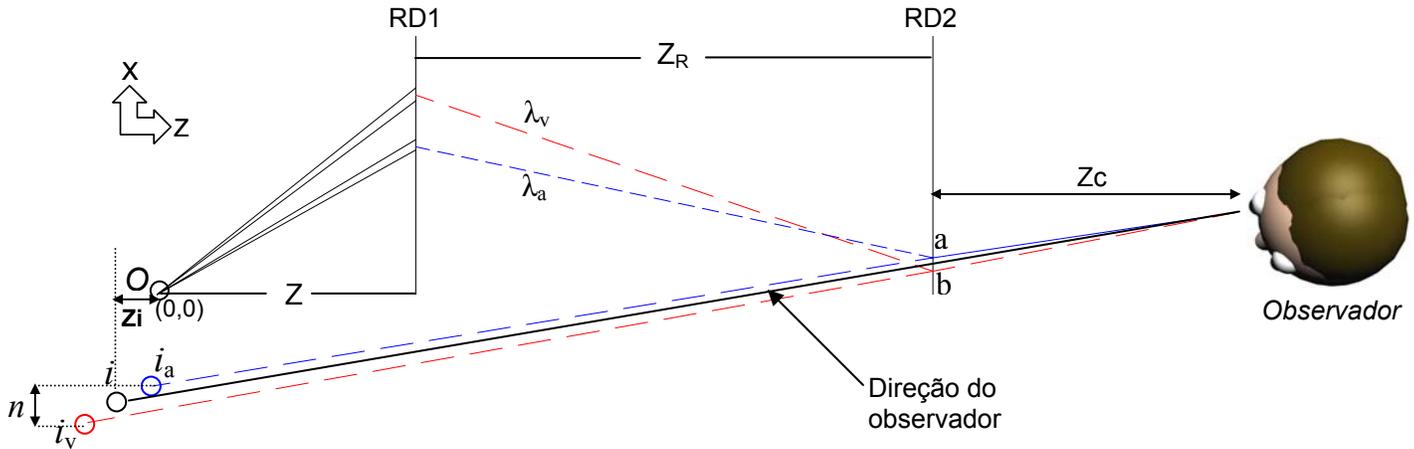


Fig. 3.15 Esquema de traçados de raios para determinar a nitidez de um ponto imagem de O.

Dos raios λ_v e λ_a que convergem nos pontos i_v e i_a respectivamente, escolhemos somente os raios azul médio e vermelho médio. A linha preta representa a direção do observador. Se os pontos: i_a e i_v estivessem contidos na linha de direção do observador, o observador veria a imagem nítida; e se esses pontos estivessem afastados da direção do observador a imagem ficaria aberrada, como se mostra na Fig. 3.15.

A extensão de um ponto imagem i está relacionada com seu tamanho de aberração n . Quanto menor for o valor de n mais nitidez haverá.

$$L \equiv |Z_i + Z| + Z_R \tag{3-6}$$

$$n = \frac{(a - b)}{Z_c} \cdot (L + Z_c) \tag{3-7}$$

Utilizando as equações (3-6) e (3-7) podemos determinar o tamanho da aberração da imagem, para diferentes posições do objeto. Onde a distância entre as redes $Z_R = 360$ mm e as frequências espaciais das redes de RD1 é 540 linhas/mm e de RD2 é 508 linhas/mm. Os resultados estão na Tabela VIII.

Tabela VIII: Cálculo teórico do tamanho da aberração.

	Z (mm)	a (λ_a) (mm)	b (λ_v) (mm)	c (λ_{verde}) (mm)	i_a (mm)	i_v (mm)	i_{verde} (mm)	n (mm)
O3	250	23,9	22,8	23,1	(-16,0; -42,7)	(-28,1; -156,6)	(-22,1; -87,6)	4,7
	260	24,6	24,0	24,1	(-13,7; -44,0)	(-23,4; -160,4)	(-18,8; -89,9)	3,0
	270	25,3	25,0	25,0	(-11,4; -45,3)	(-19,4; -164,0)	(-15,5; -92,3)	1,4
O2	280	26,0	26,0	25,9	(-9,0; -46,6)	(-15,0; -167,4)	(-12,2; -94,5)	0,2
	290	26,7	27,1	26,8	(-6,7; -47,8)	(-10,6; -170,8)	(-8,9; -96,6)	1,8
O1	300	27,4	28,1	27,6	(-4,4; -49,0)	(-6,3; -174,0)	(-5,6; -98,7)	3,5

Da Tabela VIII, a, b e c são pontos de incidência dos raios médios dos comprimentos de onda azul, vermelho e verde respectivamente. i_a , i_v , i_{verde} são as posições dos pontos imagens do comprimento azul, vermelho e verde respectivamente.

A Fig. 3.16 mostra a relação da nitidez da imagem em função das diferentes posições do objeto. Os pontos objetos O1, O2 e O3 estão localizados em diferentes posições do eixo z. A nitidez de seus pontos imagens de i_1 , i_2 e i_3 estão relacionados com a posição dos pontos convergentes do conjunto de raios de cada comprimentos de onda. Os pontos convergentes para cada comprimento de onda são os pontos imagens.

Quando os pontos imagens estão contidos na linha de direção do observador, a imagem é mais nítida; por exemplo, é o caso do conjunto de raios duplamente difratados que estão representados pelo quadrado azul i_2 , este conjunto está contido na direção do observador DO2. Quando os pontos imagens estão mais afastados da linha de direção do observador, a imagem perde nitidez; por exemplo, é o caso do conjunto de raios duplamente difratados que estão representados pelo quadrado preto i_1 e rosa i_3 , nem todos os raios de cada conjunto estão contidos na linha de direção do observador DO1 e DO3 respectivamente. Assim o ponto i_2 possui imagem mais nítida que i_1 e i_3 .

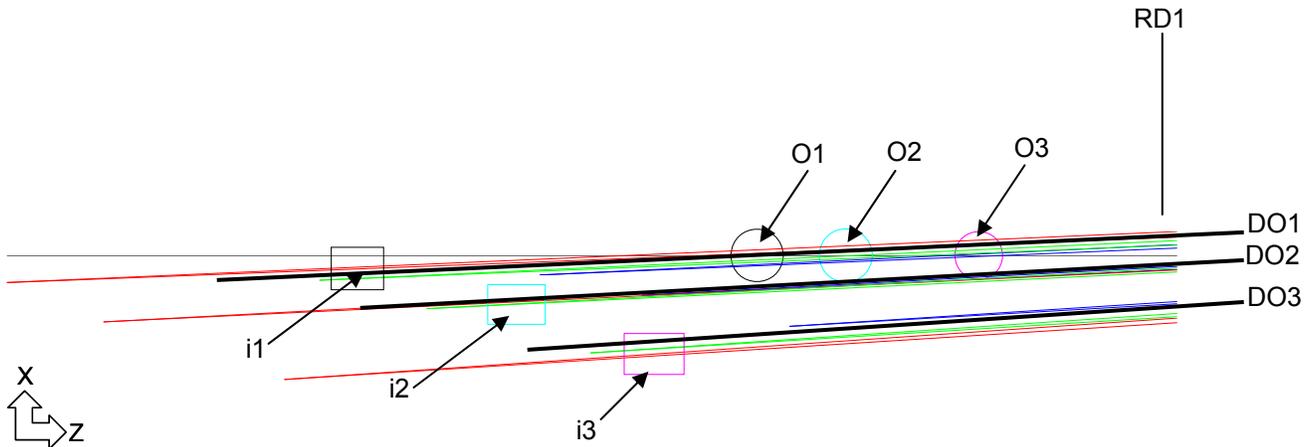


Fig. 3.15 Esquema da convergência dos raios para diferentes comprimentos de onda de três pontos objetos.

Nitidez da imagem quando mudamos a frequência espacial da rede

Como pode ser visto na Tabela VIII, o ponto objeto O2 tem $Z = 280$ mm, $Z_R = 360$ mm, $v_1 = 540$ linhas/mm para RD1 e $v_2 = 508$ linhas/mm para RD2. O tamanho dessa aberração é $n = 0,2$ mm. Agora vamos modificar o valor de v_1 e de v_2 . O que acontece com o tamanho da aberração do ponto imagem de O2 é mostrado na Tabela IX.

Tabela IX: Resultado do tamanho de aberração ao mudar o número de linhas das redes.

v_1 (linhas/mm)	v_2 (linhas/mm)	a (λ_a) (mm)	b (λ_v) (mm)	i_a (mm)	i_v (mm)	n (mm)
540	508	26,0	26,1	(- 9,0; - 46,6)	(-15,0; - 167,4)	0,2
648	610	25,8	26,7	(-10,7; - 69,5)	(-17,1; - 268,4)	3,6
756	711	25,9	27,7	(-12,4; - 98,5)	(-18,0; - 418,9)	9,6
864	813	25,9	29,3	(-13,9; -134,6)	(-16,7; - 651,9)	19,7
972	914	26,1	31,5	(-15,3; -179,6)	(-10,5; -1037,9)	37,3
1080	1016	26,4	34,4	(-16,5; -235,5)	(8,2; -1750,7)	70,2

3.1.9 Cálculo da posição da imagem usando aproximação paraxial

Nesta seção vamos determinar a posição da imagem de um ponto objeto para o sistema de dupla difração sem elementos intermediários, utilizando a aproximação paraxial que é válida para ângulos pequenos, neste caso nos referimos ao ângulo que faz o raio de incidente com o plano normal da rede.

A Figura 3.16 representa o esquema qualitativo de raios do sistema de dupla difração desconsiderando a aproximação paraxial, nesta figura é considerado um objeto tridimensional que pode ser de luz branca (uma estrela, uma lâmpada ou um fenômeno luminoso) ou o objeto pode ser iluminado pela luz branca. Neste caso escolhemos nosso objeto como um objeto tridimensional representado pelas três setas na figura. O conjunto de raios luminosos pode ter qualquer valor de comprimento de onda dentro do espectro de luz branca. RD1 representa o primeiro elemento difrator que possui um elevado número de linhas por milímetro de maneira a desviar por difração boa parte da luz que nele incide. Neste caso os sulcos da rede são ortogonais ao plano da folha. A incidência da luz CR1 é mostrada na figura acontecendo em um ângulo qualquer. CR2 é a parte difratada do conjunto de raios de CR1. RD2 é o segundo elemento difrator, que pode ser idêntico a RD1. CR3 é a parte difratada de CR2 após de passar pelo elemento RD2. Se a primeira difração desviou os raios CR1 a direita de sua direção de incidência, a segunda difração o faz a esquerda.

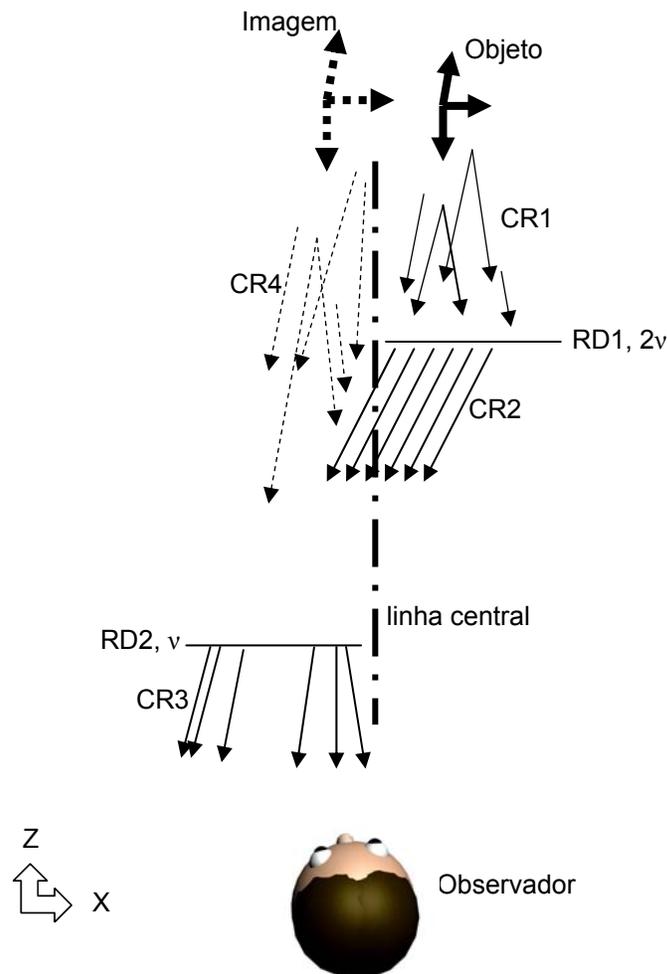


Fig. 3.16 Esquema de raios para um objeto extenso no sistema de dupla difração.

O observador ou elemento detector de imagem, recebe os raios CR3 como se tivessem sido originados no objeto e não tivessem sofrido difrações. CR4 é um conjunto imaginário de raios virtuais que são o prolongamento dos raios verdadeiros CR3 e que oferecem a imagem do objeto. A linha central é uma linha imaginária de referência que separa a região onde estão o objeto, CR1 e RD1, com os elementos RD2 e CR3.

Agora vamos determinar a posição da imagem i de um objeto pontual O , utilizando aproximação paraxial, onde assumimos que o ângulo de incidência dos raios que saem do objeto e incidem na primeira rede são pequenos, ou seja, $\text{sen } \theta = \theta$. Na Fig. 3.17 vemos a figura utilizada no traçado de raios para determinar a posição da imagem. O raio que é representado pela linha I representa qualquer comprimento de onda do espectro visível. Esta linha I também pode ser a linha de direção do observador (ver Fig. 3.15).

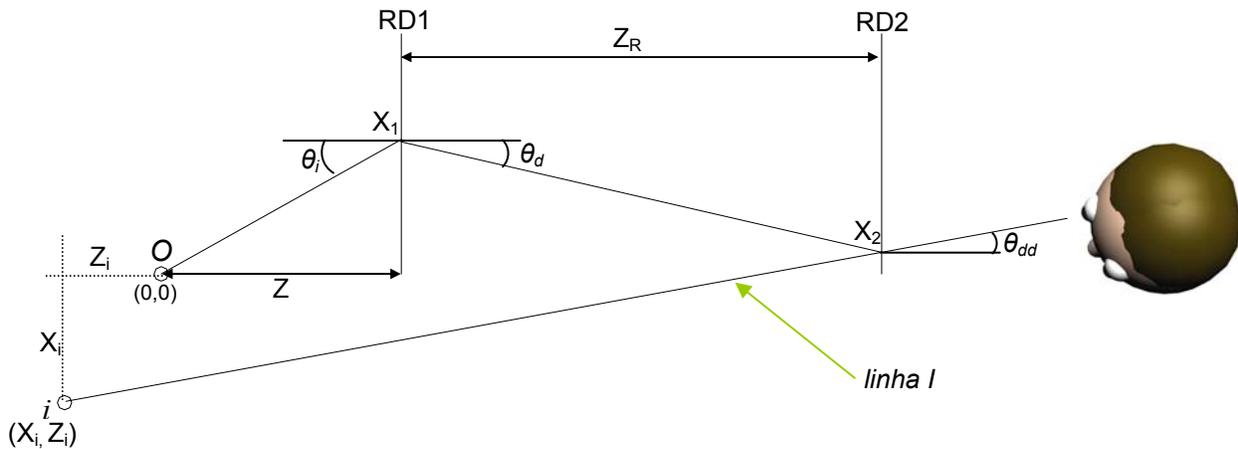


Fig. 3.17 Esquema de traçado de raios de um objeto pontual para determinar a posição da imagem utilizando aproximação paraxial.

Utilizando a equação da rede na primeira difração:

$\text{sen } \theta_i + \text{sen } \theta_d = 2 \cdot \nu \cdot \lambda$, e aproximando paraxialmente temos:

$$\theta_d = (2 \cdot \nu \cdot \lambda - \theta_i) \quad (3-8)$$

Da Figura 3.17: $\text{tg } \theta_d = \frac{X_1 - X_2}{Z_R} \Rightarrow X_2 = X_1 - Z_R \text{tg } \theta_d = X_1 - Z_R (2 \cdot \nu \cdot \lambda - \theta_i)$

Utilizando a equação da rede na segunda difração:

$-\text{sen } \theta_d - \text{sen } \theta_{dd} = \nu \cdot \lambda$, e aproximando paraxialmente temos:

$$\theta_{dd} = (-\nu \cdot \lambda + \theta_i) \quad (3-9)$$

A equação da reta da linha I é:

$$X = \text{tg } \theta_{dd} Z + X_2 \quad (3-10)$$

Seja dois raios de diferentes comprimentos de onda λ_n e λ_{n+1} , e utilizando a equação (3-10), temos:

$$X_n = (-v \cdot \lambda_n + \theta_{in}) Z_n - X_{1n} + Z_R (2 \cdot v \cdot \lambda_n - \theta_{in})$$

$$X_{n+1} = (-v \cdot \lambda_{n+1} + \theta_{in+1}) Z_{n+1} - X_{1n+1} + Z_R (2 \cdot v \cdot \lambda_{n+1} - \theta_{in+1})$$

Considerando: $X_n = X_{n+1}$, $Z_n = Z_{n+1}$ e $Z_n = Z_R + Z_i$.

Obtemos:

$$[-v(\lambda_n - \lambda_{n+1})Z_R] + 2Z_R \cdot v(\lambda_n - \lambda_{n+1}) + X_{n+1} - X_n = Z_i [-v(\lambda_n - \lambda_{n+1}) + (\theta_{in} - \theta_{in+1})]$$

$$\Rightarrow Z_R \cdot v(\lambda_n - \lambda_{n+1}) + (X_{n+1} - X_n) = -Z_i \cdot v(\lambda_n - \lambda_{n+1}) + Z_i(\theta_{in} - \theta_{in+1})$$

quando $\lambda_n = \lambda_{n+1}$ temos:

$$Z_i = (X_n - X_{n+1}) / (\theta_{in} - \theta_{in+1}) \quad (3-11)$$

Como: $\theta_{in} = X_n / Z$

$$\Rightarrow Z_i = Z$$

Na Figura 3.17, Z_R representa a distância entre as redes, Z_i a distância da posição da imagem à posição do objeto e Z é a distância da posição do objeto a RD1, o resultado da posição da imagem com aproximação paraxial foi encontrado, quando $Z_i = Z$. Este resultado é próximo quando a distância entre as redes é pequena. Quando a distância entre as redes aumenta, a distância da posição da imagem com a posição do objeto é mais distante.

3.2 Imagens de luz branca em um processo de dupla difração usando elementos com estrutura bidimensional

No intuito de obter imagens utilizando sulcos curvados, empregamos os elementos ópticos difrativos de estrutura espiral dentro da mesma relação de nosso trabalho prévio com redes de sulcos retos e paralelos. Porque as curvas dos sulcos são feitas de modo a convergir a uma distância mais curta que a utilizada em nosso trabalho prévio (seção 3.1). Tivemos de procurar a existência de imagens também em distâncias mais curtas, e fomos bem sucedidos.

Algumas diferenças entre as imagens obtidas pelas redes de sulcos retos e de sulcos curvados circularmente são descritas na seção 3.2.3.

3.2.1. Descrição do sistema

Figura 3.18 mostra o esquema de raios para o caso de sistema de dupla difração utilizando redes espirais. Um objeto de luz branca é posicionado em frente da rede espiral EOD1, onde a linha central passa pelo centro de curvatura da rede espiral. A segunda ordem de difração é direcionada ao lado do centro de curvatura e coletada em uma certa distância por um idêntico elemento difrativo EOD2. A primeira ordem de difração é direcionada ao lado oposto do centro de curvatura.

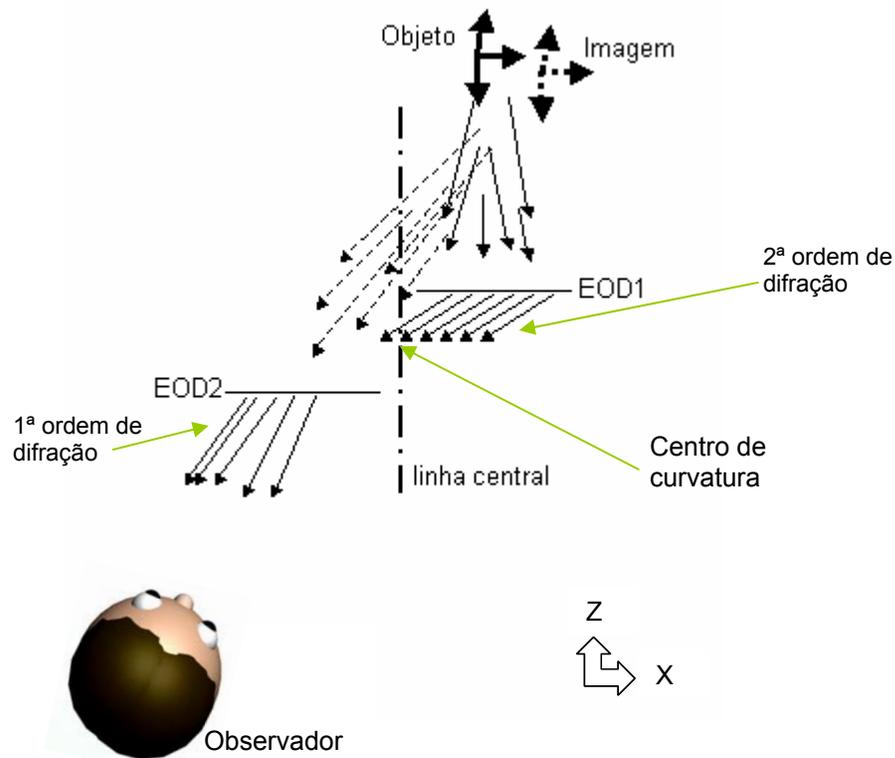


Fig. 3.18 Esquema de raios do sistema de dupla difração utilizando redes espirais

A direção de desvio da segunda difração é oposta à da primeira difração, a imagem vista pelo observador corresponde a uma imagem divergente do objeto.

Podemos explicar a situação usando o esquema de traçado de raios dentro de uma família de planos, no qual o raio incidente, os raios da primeira e segunda difração estão contidos. Estes planos contêm a linha central como se mostra na figura 3.19 para os planos I e II.

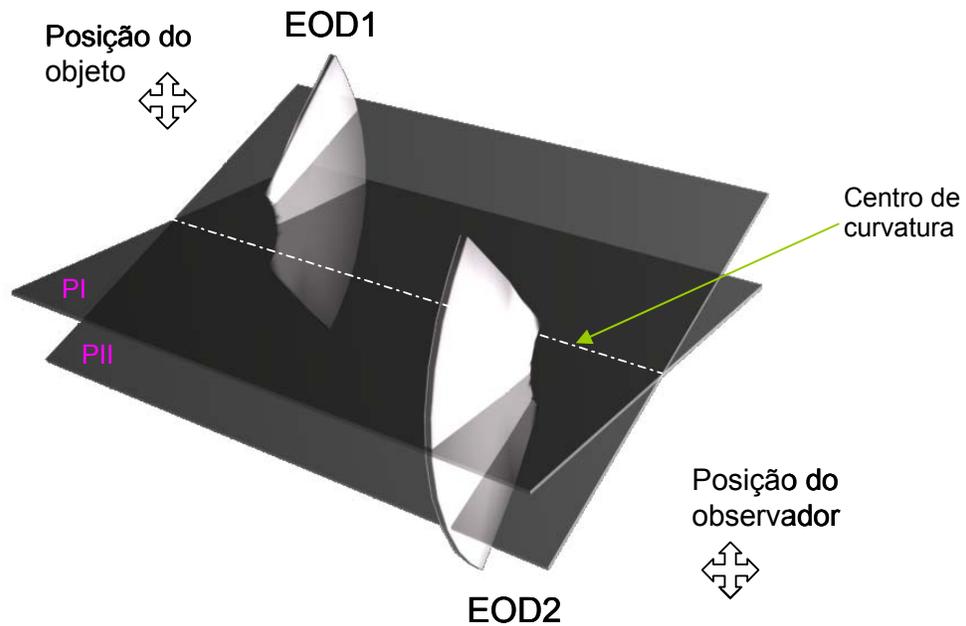


Fig. 3.19 Esquema representativo de dois planos onde acontece a propagação dos raios.

Este esquema descreve a principal orientação da luz difratada para os raios incidentes que pertencem a esses planos e a análise pode ser utilizada para dar uma explicação da formação da imagem, generalizando a validade na revolução ao redor da linha central. Raios oblíquos difratados correspondem à situação análoga da difração cônica [10] e algumas diferenças das propriedades de imagem podem existir, mas não serão consideradas nos cálculos neste capítulo.

Apesar do centro de curvatura de uma curva espiral não coincidir com sua origem, nós aproximamos o modelo ao caso de sulco circular, devido a uma pequena inclinação adicional de uma curva espiral comparado ao caso de círculos concêntricos. De outra modo, cálculos do campo de luz difratado por uma curva espiral e uma seqüência concêntrica de anéis a espaços iguais com mesmo número de sulcos por milímetro mostra resultados similares [11]

O Processo de difração é resolvido através da equação da rede e o esquema do processo de imagem é mostrado na figura 3.20 onde X, Z são as coordenadas do objeto. X_{1n} é a coordenada de incidência no primeiro elemento difrativo EOD1 e X_{2m} é a coordenada de incidência do segundo elemento difrativo EOD2 e Z_R é a distância entre ambos os elementos.

λ_{nm} é o comprimento de onda de cada raio difratado em X_{1n} e segundo difratado em X_{2m} . Exemplo destes valores de comprimentos de onda são dados na Fig 3.20 por meio de λ_v e λ_a , onde $\lambda_v > \lambda_a$. A primeira ordem de difração na primeira rede EOD1 segue a equação (3-1).

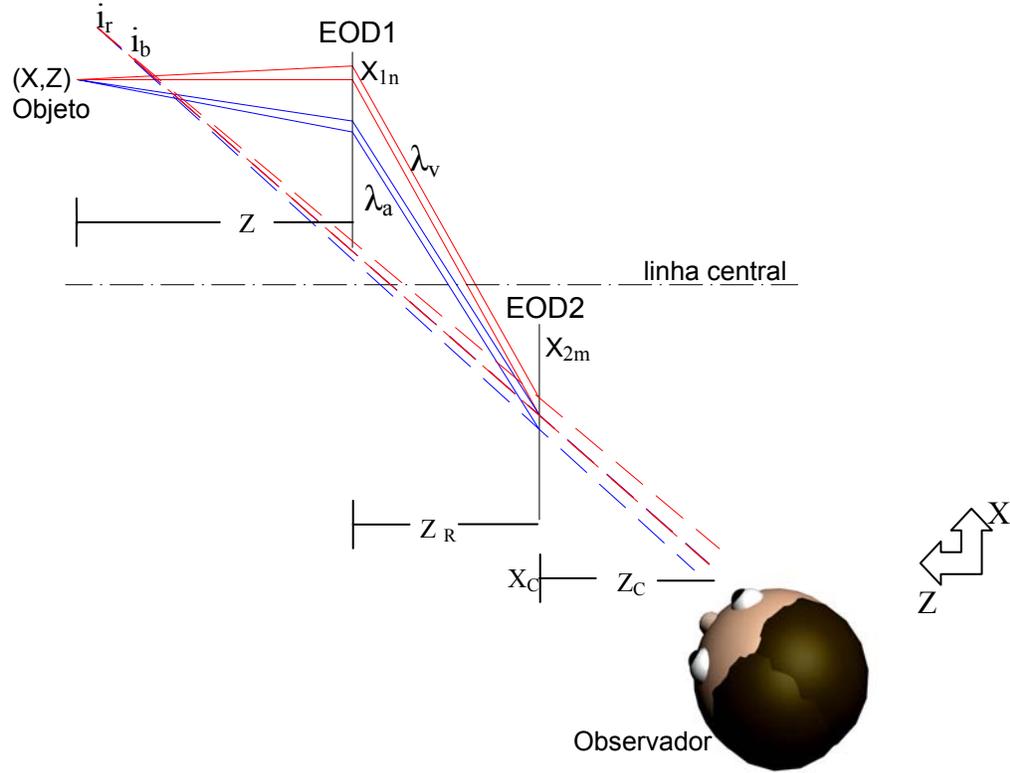


Fig. 3.20 Esquema de traçado de raios para o sistema de dupla difração para redes espirais

Segundo o esquema de traçado de raios da Figura 3.20, a equação (3-1) pode-se expressar em termos de coordenadas cartesianas como:

$$\frac{X_{1n} - X}{\sqrt{X_{1n}^2 + Z^2}} + \frac{X_{1n} - X_{2m}}{\sqrt{(X_{1n} - X_{2m})^2 + Z_R^2}} = 2 \lambda_{nm} v \quad (3-12)$$

Analogamente, a primeira ordem de difração na segunda rede EOD2 pode-se expressar como:

$$-\frac{X_{1n} - X_{2m}}{\sqrt{(X_{1n} - X_{2m})^2 + Z^2}} + \frac{X_{2m} - X_C}{\sqrt{(X_{2m} - X_C)^2 + Z_C^2}} = -\lambda_{nm} v \quad (3-13)$$

onde X_C , Z_C são coordenadas da posição do observador.

Do sistema de equações (3-12) - (3-13) podemos obter os valores X_{1n} e X_{2m} . Com os valores de X_{1n} e X_{2m} e a equação (3-14), para cada comprimento de onda λ_a e λ_v , encontramos a posição de um ponto imagem (X_i , Z_i) de um ponto objeto (X , Z). X_{i_a} para o menor comprimento e X_{i_v} para o maior comprimento de onda.

$$-\frac{X_{1n} - X_{2m}}{\sqrt{(X_{1n} - X_{2m})^2 + Z_R^2}} + \frac{X_{2m} - X_{i_{a,v}}}{\sqrt{(X_{2m} - X_{i_{a,v}})^2 + Z_{i_{a,v}}^2}} = -\lambda_{nm} \nu \quad (3-14)$$

3.2.2 Montagem Experimental

O elemento óptico difrativo EOD utilizado é um elemento difrativo espiral onde somente um quarto deste é utilizado, esta parte é mascarada por uma abertura circular (ver Fig. 3.21). Estes elementos difrativos são discos digitais de dados feitos de um só sulco espiral. O número de sulcos por milímetro é de 658 ± 5 um número quase constante através de todo o disco. O disco não possui filme refletivo e é utilizado por transmissão para reduzir os efeitos de planicidade. Sua eficiência de difração é 10%. O objeto utilizado é uma seta de papel branco de 4,5 cm de altura e foi colocada sobre uma placa metálica preta. A seta está direcionada para abaixo e posicionada em $(24,0 \pm 0,2)$ cm em frente do primeiro elemento difrativo. Só a segunda ordem de difração tem um campo angular capaz de alcançar o segundo elemento difrativo em uma distância de $(8,5 \pm 0,5)$ cm da primeira rede. A Figura 3.21 é uma fotografia do sistema de um ponto de vista onde a posição do objeto é visto mais perto que a posição do observador. Isto permite observar a abertura circular da primeira e segunda máscara preta dos discos difrativos, mostrando que só uma pequena parte de cada disco é usado.

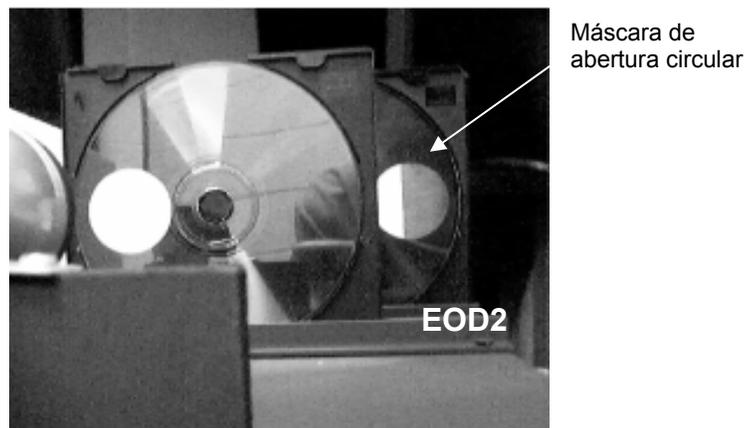


Fig. 3.21 Fotografia do sistema no processo de dupla difração visto do lado do objeto

3.2.3 Imagem de um objeto extenso

Figura 3.22 (esquerda) é uma fotografia do objeto em um ponto de vista frontal e a Figura 3.22 (direita) é uma fotografia mostrando a imagem da seta resultando verticalmente invertida. Esta inversão natural da imagem é a primeira diferença a ser notada comparando com o caso da rede de difração comum de linhas retas (seção 3.1). Outra diferença é a distorção que aparece quando o observador muda verticalmente sua posição. Uma diferença intrínseca é que a formação da imagem não só acontece dentro de um plano, alguns raios estão fora do plano, mas, não pode-se determinar experimentalmente quanto isto afeta a qualidade da imagem.

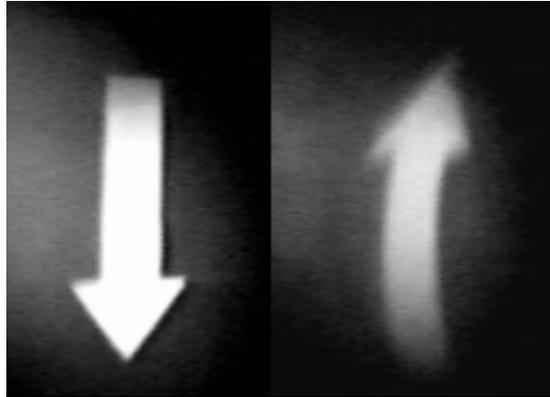


Fig. 3.22 Esquerda: Fotografia do objeto. Direita: Imagem de dupla difração

O objeto pode ser longitudinalmente deslocado 2 cm adiante ou atrás sem notar perda da qualidade da imagem.

3.2.4 Cálculo da posição da imagem de um objeto

Para calcular experimentalmente a posição da imagem colocamos um espelho de primeira superfície entre os EODs (ver Figura 3.23). Este espelho está mais perto de EOD1, mas não intersectando os raios difratados de EOD1. Um objeto vertical fino OV foi colocado para comparar esta imagem refletida deste objeto com a imagem da dupla difração por paralaxe. Através da posição de OV podemos encontrar a posição da imagem na dupla difração.

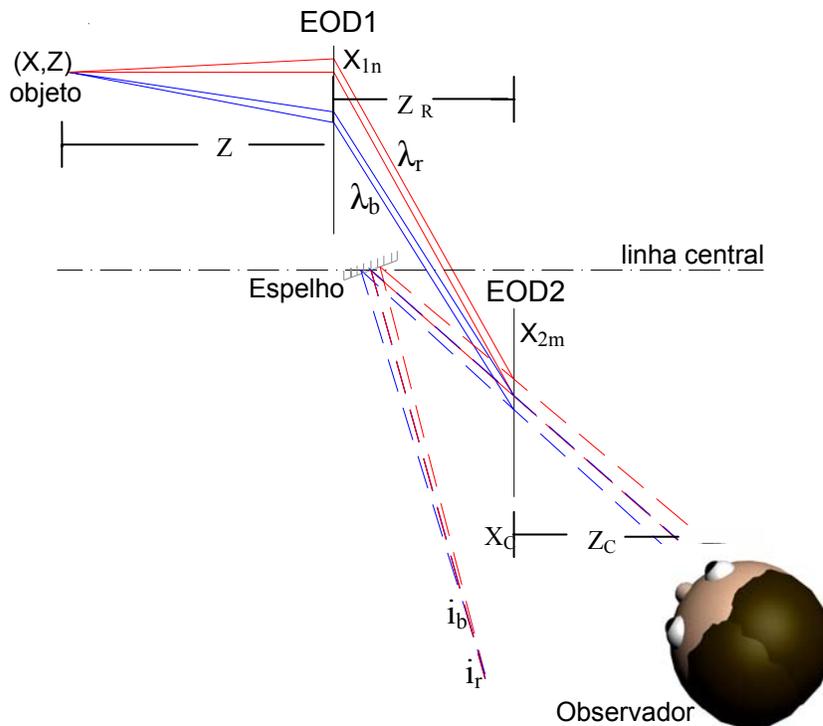


Fig. 3.23 Sistema de dupla difração usado para obter a posição da imagem experimentalmente.

Utilizamos os seguintes valores para nosso experimento $\lambda_a = 400 \text{ nm}$, $\lambda_v = 700 \text{ nm}$, $Z_R = (8,5 \pm 0,5) \text{ cm}$ e a medida da distância do observador foi de $X_c = (12 \pm 1) \text{ cm}$ e $Z_c = (11 \pm 1) \text{ cm}$. Medimos a desta maneira a distância da imagem $Z_{i \text{ exp}}$ ao segundo EOD. Utilizando as equações (3.5) e (3.6) obtemos a posição da imagem por meio do programa Mathematica⁴ [12]. O valor calculado da distância da imagem $Z_{i \text{ teo.}}$ é mostrado na tabela VII. Figura 3.23 representa o traçado de raios para obter a posição (x_i, z_i) .

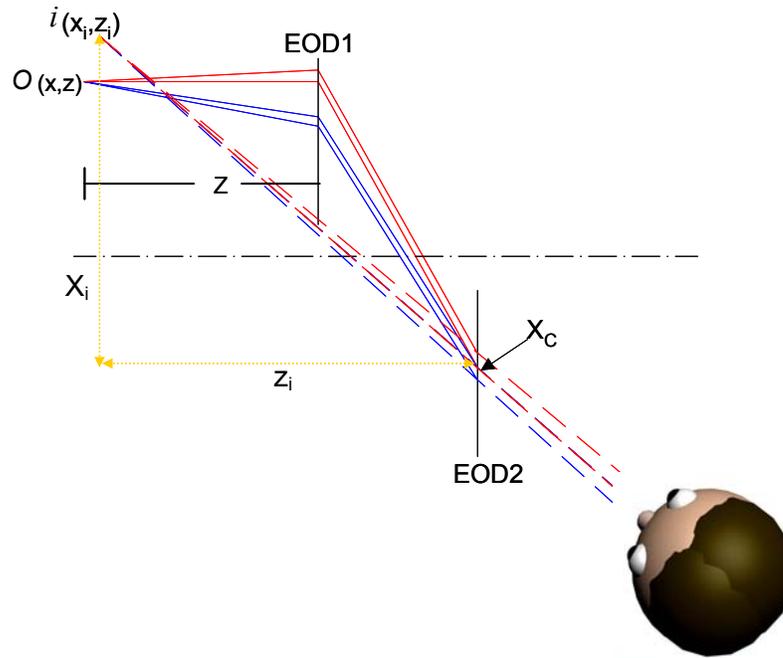


Fig. 3.23 Esquema de traçado de raios para obter a posição (x_i, z_i) .

Tabela X: Comparação entre o resultados experimental e o calculado da posição da imagem no eixo z.

Z (cm)	$Z_{i \text{ exp.}}$ (cm)	$Z_{i \text{ Cal.}}$ (cm)	$X_{i \text{ Cal.}}$ (cm)
$24,0 \pm 0,2$	36 ± 5	34 ± 1	$12,4 \pm 0,1$

Tabela XI: Resultados da posição da imagem no eixo Z e X para diferentes posições do objeto.

Z (cm)	$Z_{i \text{ cal.}}$ (cm)	$X_{i \text{ cal.}}$ (cm)
24	$34,1 \pm 0,8$	$12,4 \pm 0,0$
20	$30,8 \pm 0,8$	$11,5 \pm 0,0$
10	$27,6 \pm 0,7$	$10,5 \pm 0,0$
12	$24,5 \pm 0,7$	$9,60 \pm 0,01$
8	$21,5 \pm 0,6$	$8,69 \pm 0,01$
4	$18,6 \pm 0,6$	$7,81 \pm 0,03$
2	$17,2 \pm 0,5$	$7,39 \pm 0,04$

⁴ Utilizamos o algoritmo VII.5 Cálculo da posição da imagem no eixo z do apêndice VII.

Da Figura 3.24 observamos as posições da imagem no eixo Z em função de posição do objeto (X,Z) onde $X = 0$ cm. Da Figura 3.25 observamos as posições da imagem no eixo X em função de posição do objeto.

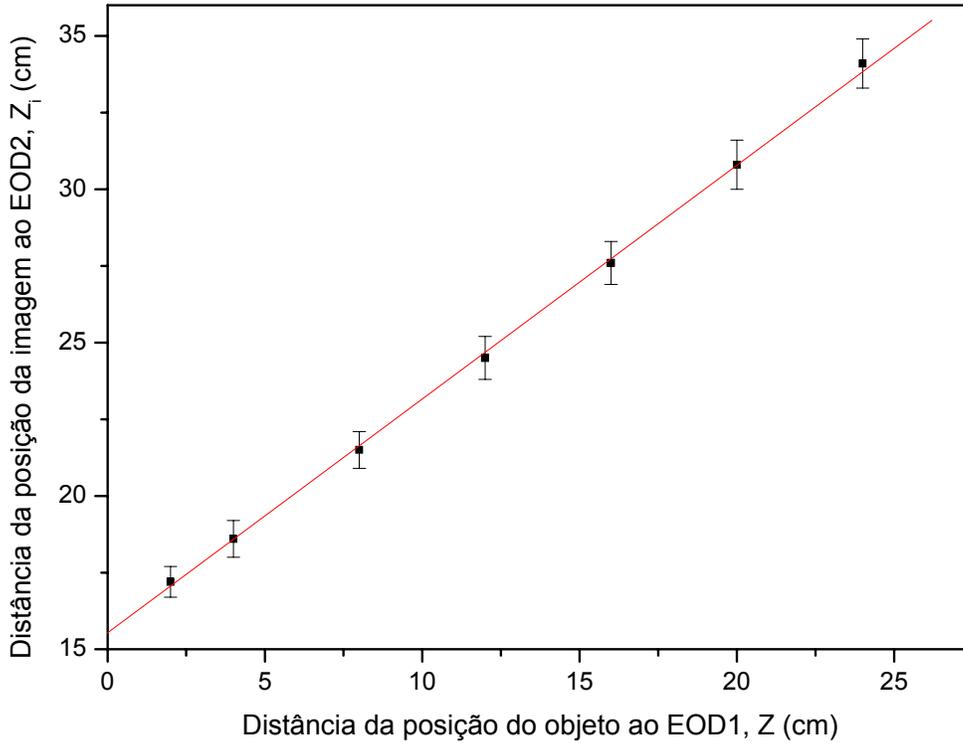


Fig. 3.24 Variação da posição da imagem na direção do eixo Z para diferentes posições do objeto.

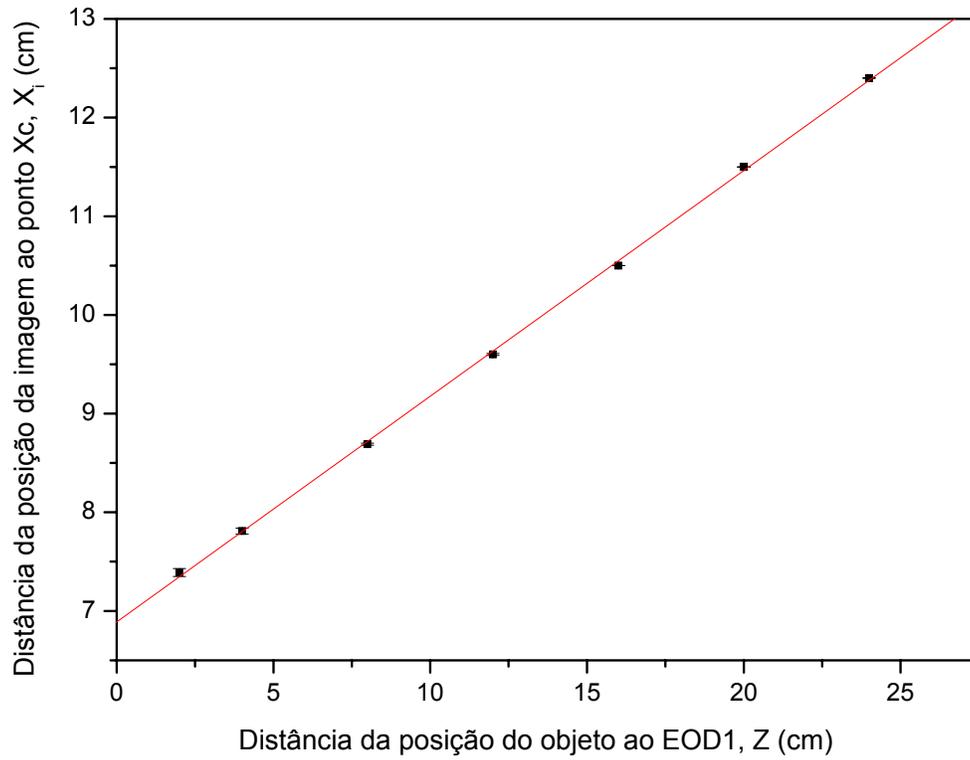


Fig. 3.25 Variação da posição da imagem na direção do eixo X, para diferentes posições do objeto.

Consideramos nosso trabalho original e não temos considerado outros autores que o aproximassem dele e as diferenças com o sistema de imagem de Talbot e Lau são marcantes. No entanto temos recebido críticas de árbitros e editores de duas publicações especializadas que comentamos no apêndice VI. comentamos no apêndice VI.

3.3 Referências

- [1] Hyde, R. A. "Very large aperture diffractive telescopes," *App.Opt.* **38**, 4198-4212 (1999).
- [2] Dixit, S.; Menapace, J.; Yu, J. ; Britten, J.; Hyde, R. "Large-aperture diffractive optical elements for high-power laser and space applications," in *Diffractive Optics and Micro-Optics*, (Optical Society of America, Rochester, 2004)
- [3] Rodríguez, L. G.; Alonso, J.; Bernabéu, E. "Grating pseudo-imaging with polychromatic and finite extension sources," *Opt. Express* **12**, 2529-2541 (2004)
- [4] Meinel, A. B.; Meinel, M. P. "Large membrane space optics: imagery and aberrations of diffractive and holographic achromatized optical elements of high diffraction order, " *Opt. Eng.* **41** (8) 1995-2007 (2002).
- [5] Meinel, A. B.; Meinel, M. P. "Parametric dependencies of high-diffraction-order achromatized aplanatic configurations that employ circular or crossed-linear diffractive optical elements," *Appl. Opt.* **41** 7155-7166 (2002).
- [6] Dixit, S. private report, October 11th (2004).
- [7] Bennett, S. J. "Achromatic combinations of hologram optical elements" *Appl. Opt.* **15**, 542-545 (2002).
- [8] Kato, M.; Maeda, S.; Yamagishi, F. et. al. "Wavelength independent grating lens system" *Appl. Opt.* **28**, 682-686 (1989).
- [9] Lunazzi, J. J. "[New possibilities in the utilization of holographic screens.](#)" SPIE 1667, p. 289-292 (1992).
- [10] Hogert, E. N.; Rebollo, M. A.; Gaggioli, N. G. "Alignment and/ or tilting measurement by means of conical diffraction phenomena" *Opt. & Laser Tech.* **23** N6, (1991)
- [11] Magalhães D. S. F., Estudo de imagens por dupla difração com seleção de luz branca e elementos definidos bidimensionalmente, (2005) Dissertação (Mestrado) - Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual. pp 32-37
<<http://webbif.ifi.unicamp.br/teses/apresentacao.php?filename=IF419>>
- [12] Software made by Wolfram Research named Mathematica 5.0 version.

Capítulo 4

Holoprojeção de Objetos usando um Elemento Difractivo e uma Fonte Linear

Existem maneiras de obter imagens de luz branca usando elementos difractivos através da projecção de uma tela difractiva por meio de lentes desenvolvidas por Lunazzi [1]. Chamamos a este tipo de projecção genericamente de holoprojecção por terem paralaxe contínuo, mostrando a profundidade sem precisar de óculos. A dependência de lentes faz a focalização ser muito crítica e seria desejável eliminá-la. Lunazzi também desenvolveu um sistema de uma única difracção para a projecção de um objeto 2D (transparências) iluminado com uma lâmpada de luz branca de filamento extenso sobre uma tela difractiva, obtendo imagens bidimensionais com paralaxe contínuo [2]. Este trabalho prévio nos ajuda a encontrar um novo sistema que apresentaremos neste capítulo, para obter imagens tridimensionais usando apenas um elemento difractivo e sem necessidade de focalização.

Na continuação apresentamos dois sistemas de holoprojecção de objetos usando luz branca e um elemento difractivo. O Primeiro sistema está constituído de uma fonte linear (fonte estendida) e uma rede de difracção. No segundo sistema utilizamos a mesma fonte linear e uma lente difractiva. Além disso, apresentamos um sistema que permite que um espelho e uma fonte linear gerem imagens nítidas.

4.1 Holoprojecção de objetos usando uma Rede Holográfica

4.1.1 Descrição do sistema

O processo para obter imagens usando somente uma difracção é descrito na Figura 4.1. f representa o filamento estendido de luz branca no qual cada ponto é considerado emissor de raios de luz branca em todas as direcções, por exemplo, o ponto f_{OD} . O ponto f_{OE} representa um ponto do filamento. De f_{OE} divergem raios que atingem o objeto O_1 , fazendo uma sombra com respeito ao tamanho do objeto. Os raios que contornam a este objeto atingem à rede de difracção obtendo-se raios difractivos. A prolongação destes raios difractivos de dois diferentes comprimentos de onda convergem na pupila do observador. O observador está localizado no mesmo lado dos raios difractivos e a imagem i_1 pode ser observada nitidamente pelo observador. Esta imagem i_1 fica mais afastada da rede de difracção RD que o objeto O_1 . O observador vê a imagem do objeto com um fundo espectral.

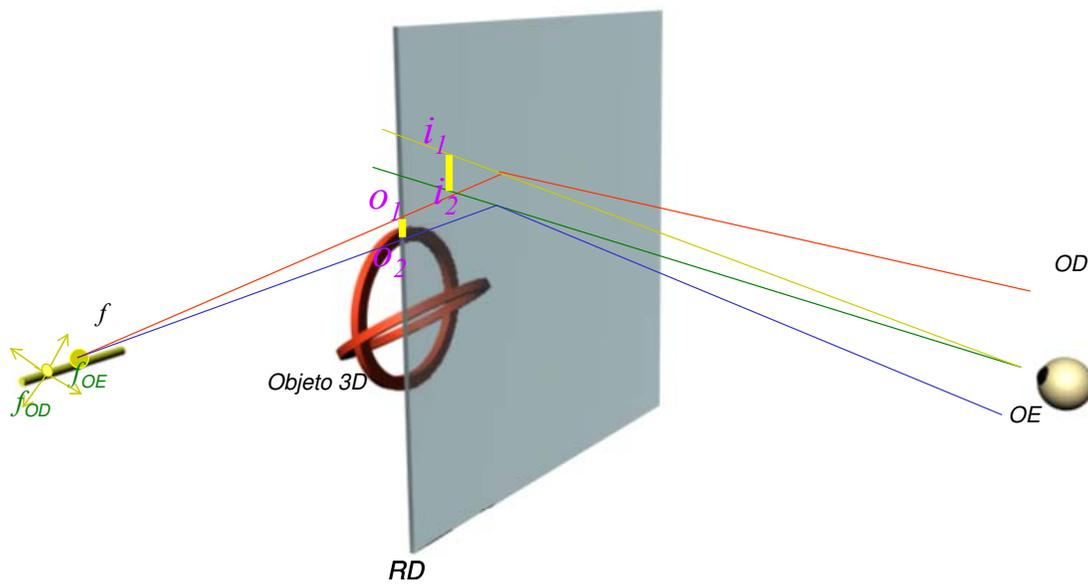


Fig. 4.1 Esquema do sistema de holoprojeção usando o uma rede de difração

4.1.2 Imagem de um objeto tri-dimensional utilizando uma rede de difração

Na Figura 4.2 mostramos a imagem de um objeto usando o sistema de holoprojeção. Esta imagem apresenta as seguintes características: profundidade normal, paralaxe continua, perfeita nitidez. A extensão vertical das posições do observador onde pode observar a imagem dependerá da frequência da rede, com maior frequência maior será a extensão.



Fig. 4.2 Imagem usando o sistema de holoprojeção usando uma rede de difração

4.2 Holoprojeção de objetos usando uma Lente Holográfica

Apresentamos um novo sistema de holoprojeção onde objetos são projetados sobre uma tela difrativa, o qual neste caso é uma única lente holográfica. O objeto é iluminado por um extenso filamento de uma lâmpada de luz branca. Obtendo imagens tridimensionais (3D) com profundidade normal (ortoscópico) do tipo de uma sombra comum. A paralaxe continua e a perfeita nitidez são características da imagem que depende da extensão do filamento luminoso e das propriedades da lente difrativa.

4.2.1 Descrição do sistema

O processo para obter imagens usando somente uma difração é descrito na Figura 4.3. f representa o filamento de luz branca do qual cada ponto é considerado emissor de raios de luz branca em todas as direções, por exemplo, o ponto f_{OD} . O ponto f_{OE} representa um ponto do filamento. De f_{OE} divergem raios que atingem o objeto O_1 , fazendo uma sombra com respeito ao tamanho do objeto. Os raios que contornam a este objeto atingem à lente difrativa obtendo-se raios difrativos. A prolongação destes raios difrativos de um mesmo comprimento convergem na pupila do observador. O observador está localizado no mesmo lado dos raios difratados e a imagem i_1 pode ser observada nitidamente pelo observador mais longe que a posição do objeto O_1 . O observador vê a imagem do objeto com um fundo de uma só cor e ela muda quando o observador mexe a cabeça de cima para baixo.

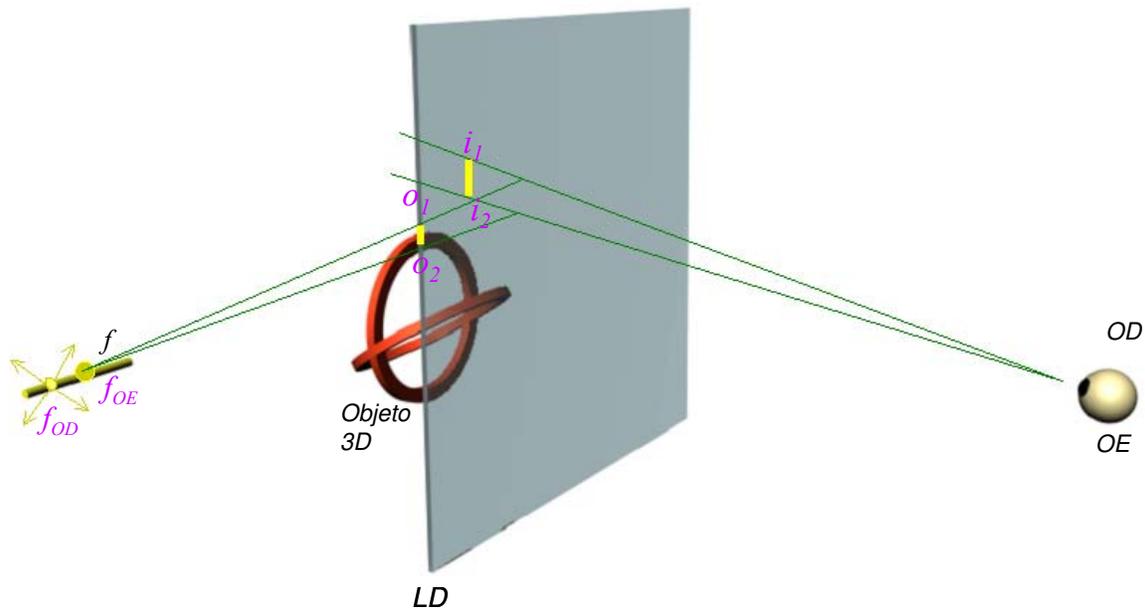


Fig. 4.3 Esquema do sistema de holoprojeção usando uma lente difrativa

4.2.2 Imagem Ortoscópica

Na Figura 4.4, segundo o esquema de raios observa-se a imagem virtual com profundidade normal (ortoscópica), considerando nesta situação dois pontos objetos O_1 e O_2 localizados em diferentes posições de profundidade e representando $v(x)$ como a freqüência variável, onde $v_3 > v_2 > v_1$.

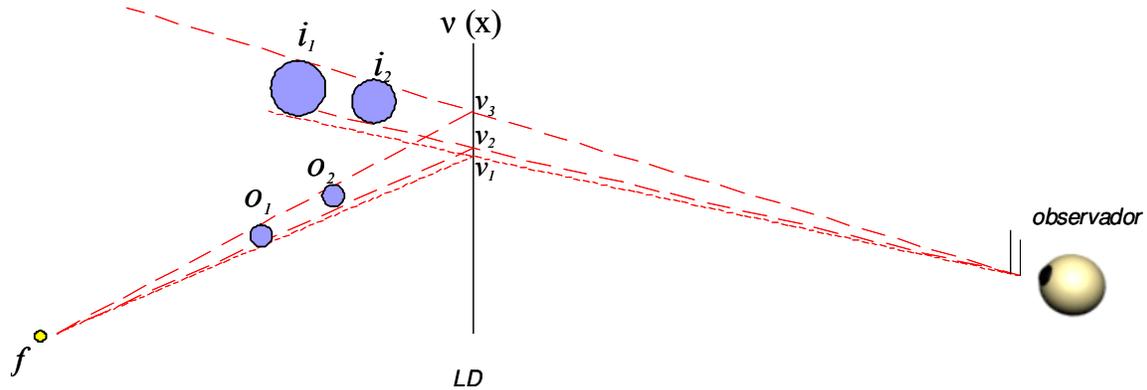


Fig. 4.4 Esquema de traçado de raios para mostrar a profundidade normal $v_1 < v_2 < v_3$

Os raios de um mesmo comprimento de onda que saem do filamento f em direção aos objetos O_1 e O_2 passando pela borda destes e alcançando o elemento difrativo nos pontos onde as freqüências têm valores v_3 , v_2 e v_1 . Estes raios difratados convergem na pupila do observador. Observando-se a imagem i_2 mais perto à posição do observador que a imagem i_1 , quando o objeto O_2 está mais perto à posição do observador que O_1 .

4.2.3 Montagem Experimental

Utilizamos em nosso experimento uma lâmpada de filamento comprido de 40 W Silvana, o comprimento do filamento é de (70 ± 5) mm e 0,3 mm de largura. Esta lâmpada foi colocada de tal modo que seu filamento horizontal esteja paralelo ao plano da mesa (ver Fig. 4.5). O primeiro objeto utilizado foi um giroscópio de diâmetro de (70 ± 5) mm e o segundo objeto foi uma régua transparente.

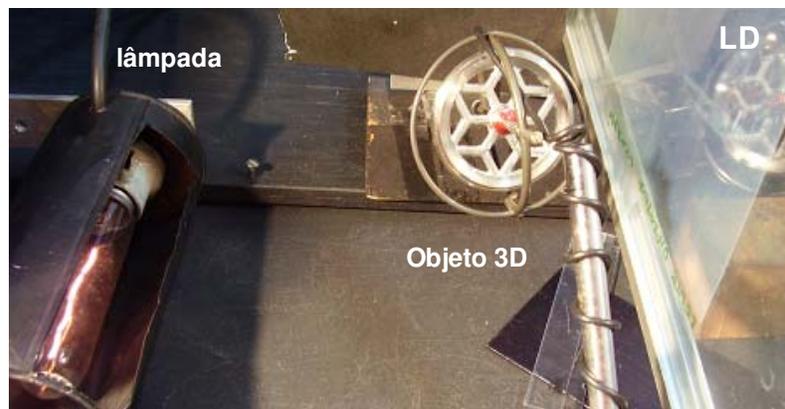


Fig. 4.5 Sistema de holoprojeção usando uma tela difrativa

A área efetiva da lente difrativa holográfica foi de 170 x 120 mm localizado a 430 mm da lâmpada. Esta lente tem uma frequência variável de 500 a 1400 linhas/mm, estas frequências estão distribuídas de maneira ascendente de baixo para cima.

4.2.4 Ampliação da imagem

Esta característica se faz presente para este sistema de holoprojeção, a imagem pode ser vista ampliada dependendo da posição do objeto com respeito à posição da lâmpada. Na Figura 4.4, mostramos por meio do traçado de raios a explicação desta ampliação. Quando o objeto O_1 está mais perto que O_2 à lâmpada, a imagem i_1 fica mais ampliada que i_2 .

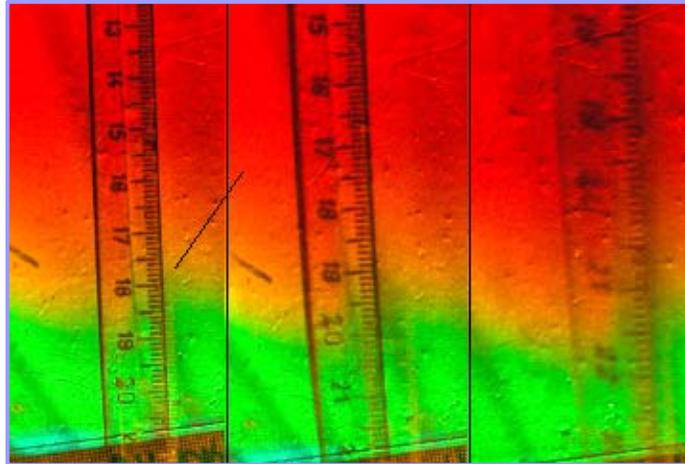


Fig. 4.6 Ampliação de um objeto usando o sistema de holoprojeção com lente difrativa

Na Figura 4.6 mostramos a ampliação de imagens utilizando como objeto uma régua transparente, observa-se que quando o objeto está mais longe da lâmpada a imagem é mais reduzida (lado esquerdo) e quando fica mais perto à lâmpada é mais ampliada (lado direito).

4.2.5 Cálculo da posição da imagem e magnificação da imagem

Medida da posição da imagem

Nesta seção vamos calcular a posição da imagem de um ponto objeto. Utilizando o traçado de raios (ver Fig.4.7) encontramos as expressões para determinar os valores de X_i e Z_i (posição da imagem). Para obter os valores experimentais utilizamos como objeto a borda de uma régua e medimos com um suporte vertical a posição da imagem utilizando a paralaxe.

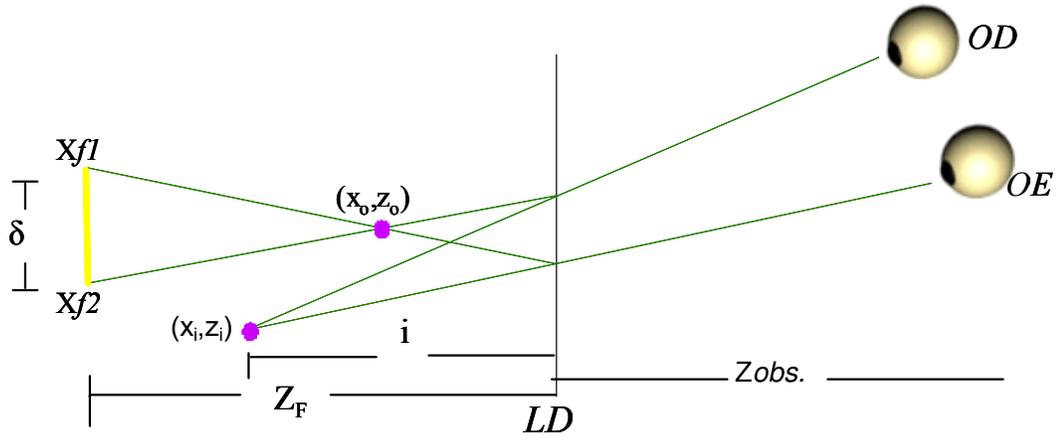


Fig. 4.7 Esquema de traçados de raios para a obtenção da posição da imagem de um objeto

Na Figura 4.7 δ é a distância entre dois pontos do filamento $Xf1$ e $Xf2$. (x_o, z_o) é a posição do objeto, Z_{obs} é a distância do observador a LD, Z_F é a distância entre o filamento e a lente difrativa, OE é o olho esquerdo, OD é o olho direito e o valor numérico de 65 mm foi usado por ser a distância aproximada entre os olhos de um observador. A seguir as equações (3-1) e (3-2) são utilizadas para determinar o cálculo da posição da imagem.

$$Z_i = \frac{Z_{obs} \cdot Z_o \cdot \delta}{65(Z_F - Z_o) - Z_o \cdot \delta} \quad (3-1)$$

$$X_i = (Z_F - Z_i) \left(\frac{X_o - Xf2}{Z_F - Z_o} \right) \quad (3-2)$$

Cálculo da magnificação

Para este sistema conseguimos determinar a magnificação M de um objeto, para isso precisamos conhecer a distância do objeto ao elemento difrativo Z_o e a distância da imagem ao elemento difrativo Z_i , a distância da fonte linear (de filamento extenso) δ , a distância de separação dos olhos e a distância do elemento difrativo ao observador Z_{obs} .

$$M = \frac{Z_i \cdot Z_{obs} \cdot \delta}{65(Z_F - Z_o) - Z_o \cdot \delta} \quad (3-3)$$

Experimentalmente e teoricamente encontramos que a distância Z_o é menor que Z_i , isto nos leva a dizer que o aumento máximo acontecerá quando a posição da imagem estiver na posição da fonte linear e o aumento 1 quando $Z_o = Z_i$.

Na tabela XII apresentamos os resultados da posição da imagem e a magnificação da imagem.

Tabela XII: Comparação dos resultados experimentais e os calculados da posição da imagem no eixo Z e sua a magnificação.

Z_o (mm)	$Z_{i\text{ cal}}$ (mm)	$Z_{i\text{ exp}}$ (mm)	$M_{\text{ cal}}$ (mm)
10 ± 2	18 ± 2	19 ± 4	$1,9 \pm 0,5$
17 ± 2	34 ± 2	35 ± 4	$2,0 \pm 0,3$

4.2.6 Imagem de um objeto tri-dimensional utilizando uma lente difrativa

Na Figura 4.8 mostramos a imagem de um objeto usando o sistema de holoprojeção. Esta imagem apresenta as seguintes características: profundidade normal, paralaxe continua, perfeita nitidez. A extensão vertical das posições do observador é ampla o que permite observar a imagem de maneira agradável.

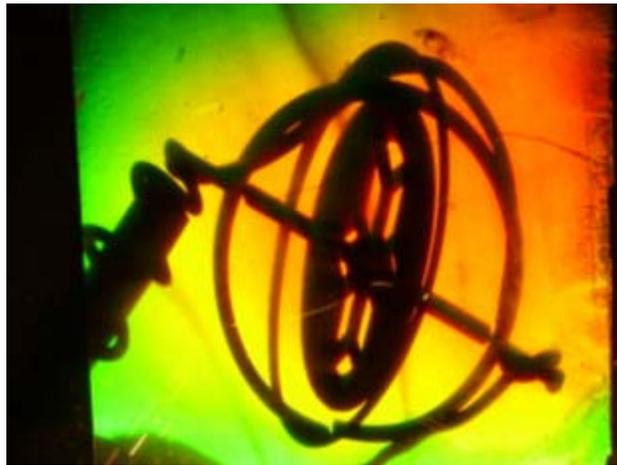


Fig. 4.8 Imagem usando o sistema de holoprojeção usando uma tela difrativa

Uma experiência final foi gerar um estereograma (ver Fig. 4.9), a partir de duas fotos tiradas em diferentes perspectivas, em uma posição esquerda e outro em uma posição direita do observador e com ajuda do programa Gimp, obtivemos um estereograma que ajuda a verificar tridimensionalidade da imagem.



Fig. 4.9 Estereograma de uma imagem obtida pelo sistema de holoprojeção usando uma tela difrativa

Holoprojeção de um relógio digital



Objeto



Fig. 4.10 Esquerda: Sistema de holoprojeção de um relógio digital. Direita: Imagem do relógio.

4.3 Aplicação das propriedades de fonte linear a um elemento refletivo

Este sistema está composto de uma fonte linear (fonte extensa) e um elemento refletivo. Como elemento refletivo utilizamos o fundo de uma frigideira que tem uma estrutura especial parecida ao espelho de Fresnel, o qual chamaremos de “quase espelho de espelho de Fresnel” (QEF) (ver Fig. 4.11)

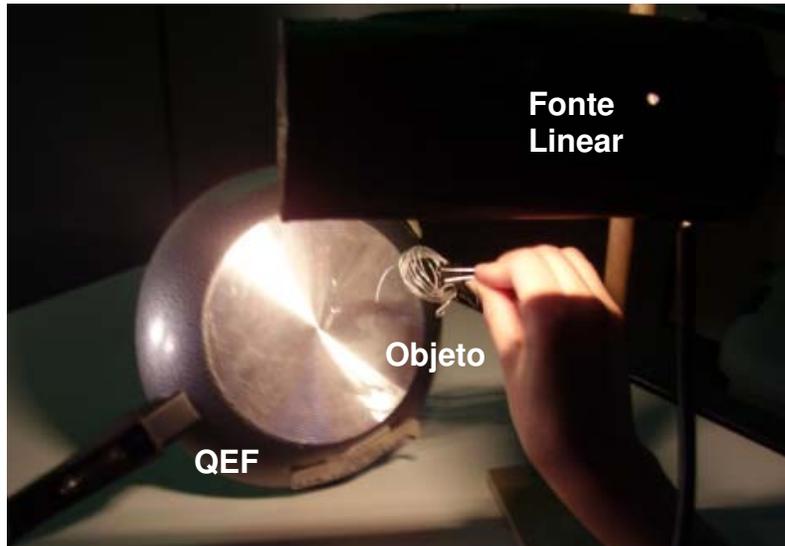


Fig. 4.11 Objeto (fio de nylon) e o elemento refletivo (frigideira)

Na Fig. 4.12 mostramos a imagem formada por nosso sistema de reflexão usando uma fonte linear

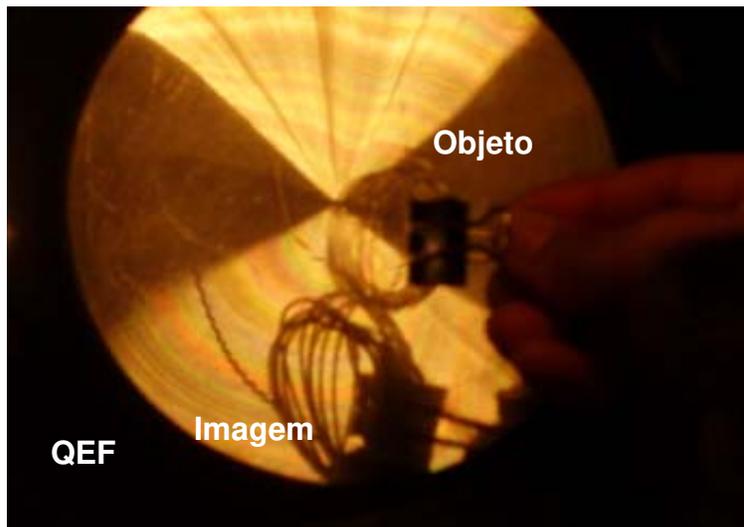


Fig. 4.12 Imagem de fio de nylon por transmissão e reflexão

A seguir mostramos o traçado de raios de nosso sistema de reflexão para poder entender as propriedades da imagem. Na Fig. 4.13 mostramos a formação da imagem e observamos que alguns raios convergem antes que outros.

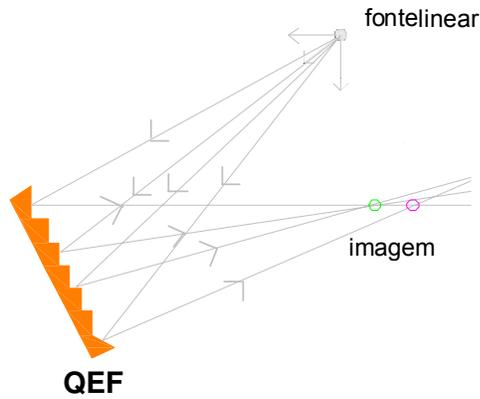


Fig. 4.13 Formação da imagem e presença de aberração

Na Fig. 4.14 mostramos a formação da imagem I de um objeto extenso O . Um observador vê esta imagem mais ampliada quando o objeto está mais perto do filamento.

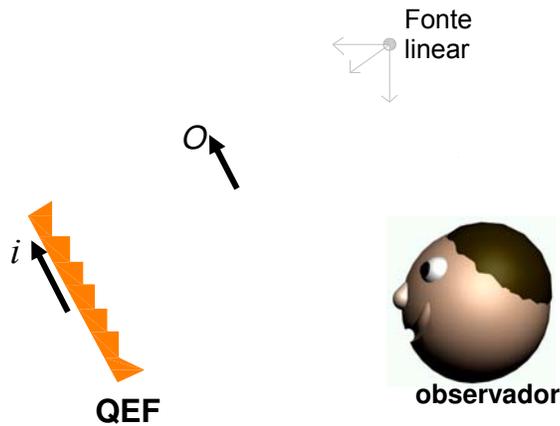


Fig. 4.14 Formação da imagem i de um objeto extenso O

Quando ao invés de iluminar com uma fonte linear, iluminamos com uma fonte pontual o observador observa a imagem com apenas um olho como se mostra na Fig. 4.15.

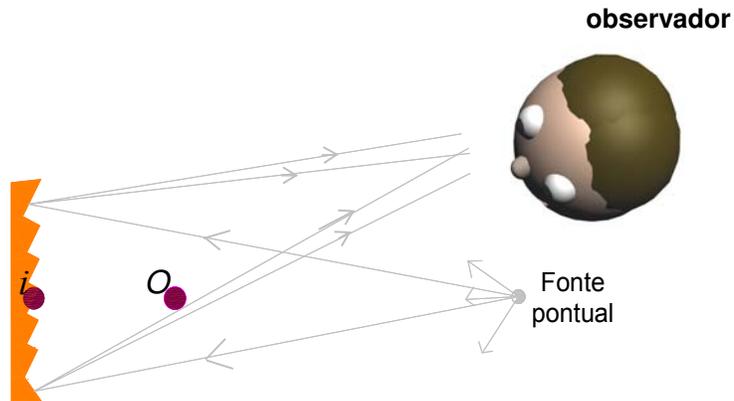


Fig. 4.15 Esquema de raios que mostra como o observador vê a imagem utilizando uma fonte pontual.

A Fig. 4.16 mostra o sistema usando a fonte extensa onde, por meio de traçados de raios, podemos ver que o observador tem visão binocular.

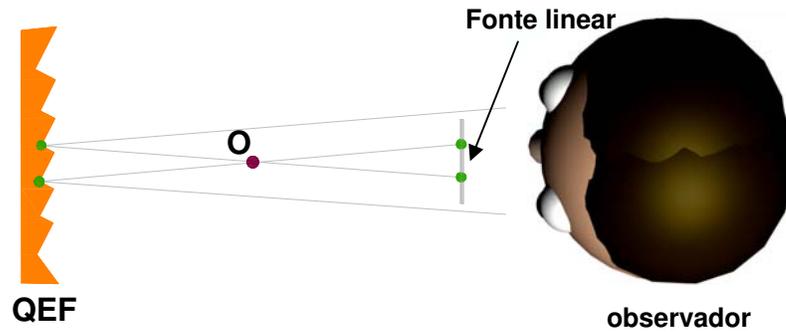


Fig. 4.16 Esquema de raios que mostra que observador vê a imagem com os dois olhos

Possível estereoscópio que eliminaria os óculos 3D

Este estereoscópio está constituído de dois filamentos extensos $f1$ e $f2$ que iluminam os elementos A e B que são duas cenas diferentes de um objeto. Estes raios atingem o elemento difrativo LD para finalmente convergir na pupila de cada olho do observador como se mostra na Fig. 4.17.

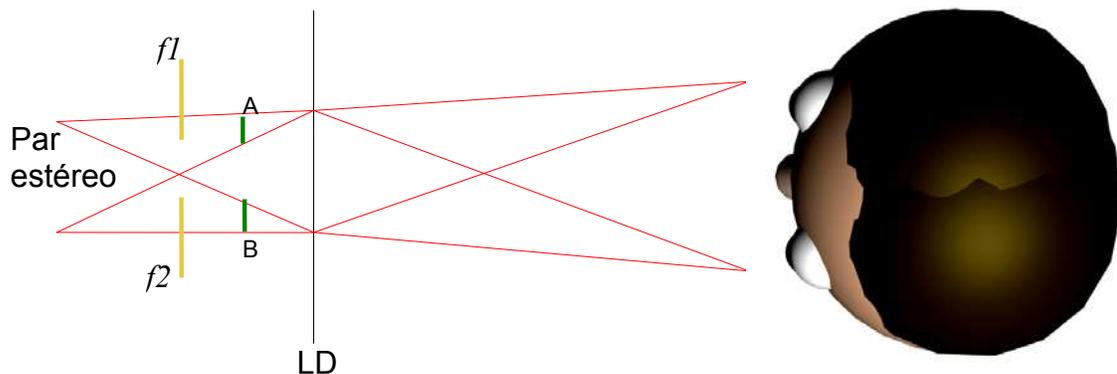


Fig. 4.17 Sistema para observar uma imagem 3D sem precisar usar óculos

4.4 Referências

- [1] Lunazzi, J.J.; Boone P.M. "A holographic screen for projecting images of objects, photographs and holograms", Proc.of the XVII Enc.Nac.de Fis da Mat. Condensada, Caxambu-MG-BR, 07-11.06.94, p.129-131.
- [2] Lunazzi, J.J. "Lensless Slide Projection: A Demonstrative Experience," V Simpósio Estadual de Lasers e Aplicações, São Paulo, Brasil, 26-28 Out. 1992.

5. Conclusões

Criamos dois tipos de sistemas ópticos para obter uma imagem ortoscópica por dupla difração. Nosso modelo do fenômeno e nossos cálculos são consistentes com nossos experimentos. Este novo sistema de imagem incrementa com o interesse sobre o estudo da imagem por difração feita por meio de luz branca.

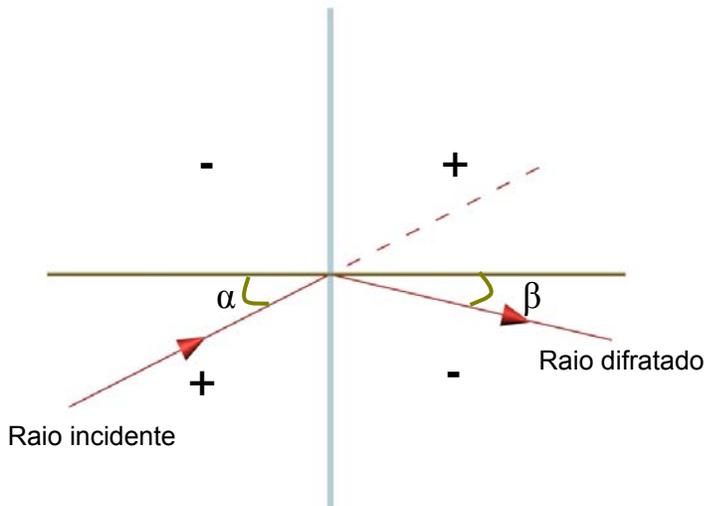
Mostramos que é possível produzir uma imagem completa de dupla difração de luz branca quando a difração acontece com duas vezes o número de linhas por milímetro no primeiro elemento que no segundo ou uma equivalente relação de ordens de difração. A principal diferencia dos sistemas de dupla difração sem elementos intermediários é que no caso de usar redes de sulcos retos pode ser a imagem não é invertida de cima para baixo e no caso de dupla difração com elemento de estrutura bidimensional a imagem é observada com inversão de cima para baixo. A relação do número de sulcos ser um fator dois entre o primeiro e segundo elemento foi ocasional e um estudo mereceria ser feito para ver se outras relações também gerariam imagens.

Obtivemos um novo tipo de imagem 3D em um processo que envolve uma única difração sem necessidade de algum outro elemento óptico. O sistema pode ser usado como lentes alcançando o limite de sua capacidade de magnificação. Pode ser usado também para a construção de um estéreoscópio e para a projeção de anúncios publicitários.

Apêndice I

AI. Alguns exemplos de uso da equação da rede seguindo a convenção de sinais

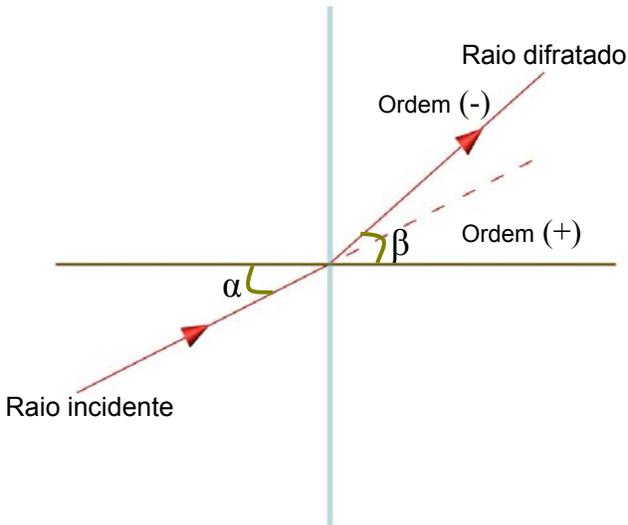
A partir da equação da rede $\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta = n \lambda v$. Os ângulos α e β podem ser negativos ou positivos segundo o quadrante onde esteja o raio que forma o ângulo α ou β com a normal da rede de difração. O Primeiro quadrante é positivo, o segundo quadrante negativo e o terceiro e quarto quadrante positivo e negativo respectivamente.



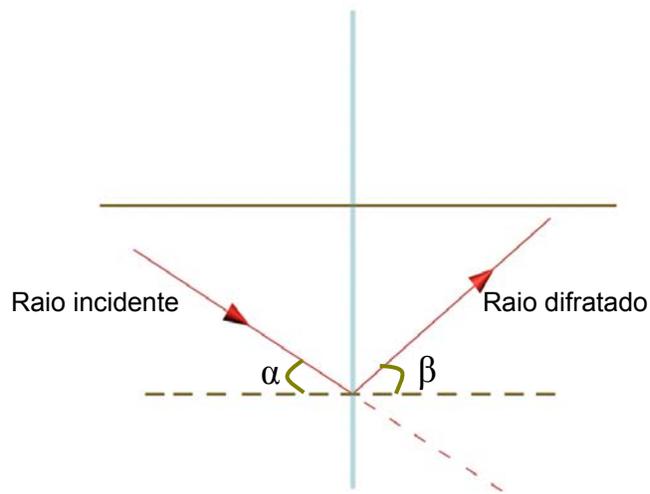
$$\text{sen } \alpha - \text{sen } (-\beta) = |n| \lambda v$$

$$\text{sen } |\alpha| - (-\text{sen } |\beta|) = |n| \lambda v$$

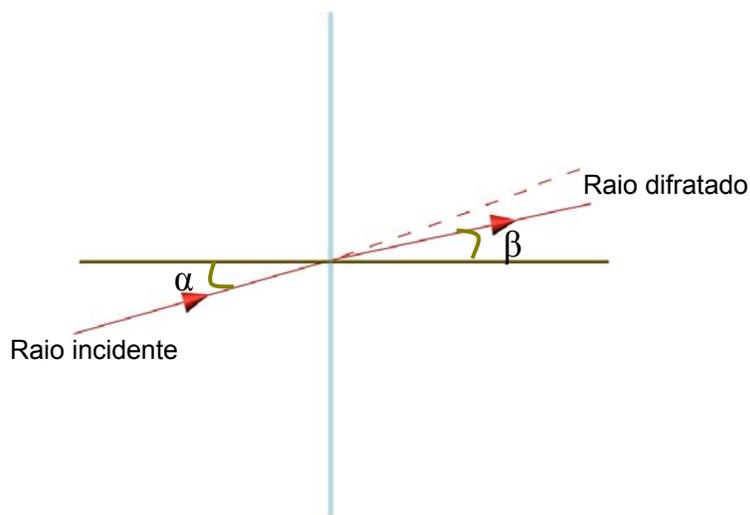
$$\text{sen } |\alpha| + \text{sen } |\beta| = |n| \lambda v$$



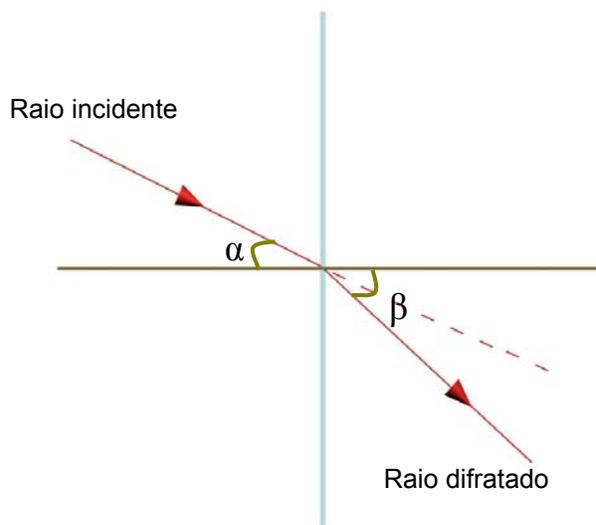
$$\text{sen } |\alpha| - \text{sen } |\beta| = -|n| \lambda v$$



$$- \text{sen } |\alpha| - \text{sen } |\beta| = - |n| \lambda v$$



$$\text{sen } |\alpha| - \text{sen } |\beta| = |n| \lambda v$$



$$- \text{sen } |\alpha| + \text{sen } |\beta| = |n| \lambda v$$

Apêndice II

All. Teoria Geométrica de Difração

Geometrical Theory of Diffraction*

JOSEPH B. KELLER

Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, New York

(Received September 13, 1961)

The geometrical theory of diffraction is an extension of geometrical optics which accounts for diffraction. It introduces diffracted rays in addition to the usual rays of geometrical optics. These rays are produced by incident rays which hit edges, corners, or vertices of boundary surfaces, or which graze such surfaces. Various laws of diffraction, analogous to the laws of reflection and refraction, are employed to characterize the diffracted rays. A modified form of Fermat's principle, equivalent to these laws, can also be used. Diffracted wave fronts are defined, which can be found by a Huygens wavelet construction. There is an associated phase or eikonal function which satisfies the eikonal equation. In addition complex or imaginary rays are introduced. A field is associated with each ray and the total field at a point is the sum of the fields on all rays through the point. The phase of the field on a ray is proportional to the optical length of the ray from some

reference point. The amplitude varies in accordance with the principle of conservation of energy in a narrow tube of rays. The initial value of the field on a diffracted ray is determined from the incident field with the aid of an appropriate diffraction coefficient. These diffraction coefficients are determined from certain canonical problems. They all vanish as the wavelength tends to zero. The theory is applied to diffraction by an aperture in a thin screen diffraction by a disk, etc., to illustrate it. Agreement is shown between the predictions of the theory and various other theoretical analyses of some of these problems. Experimental confirmation of the theory is also presented. The mathematical justification of the theory on the basis of electromagnetic theory is described. Finally, the applicability of this theory, or a modification of it, to other branches of physics is explained.

1. INTRODUCTION

GEOMETRICAL optics, the oldest and most widely used theory of light propagation, fails to account for certain optical phenomena called diffraction. We shall describe an extension of geometrical optics which does account for these phenomena. It is called the geometrical theory of diffraction.^{1,2} Like geometrical optics, it assumes that light travels along certain straight or curved lines called rays. But it introduces various new ones, called diffracted rays, in addition to the usual rays. Some of them enter the shadow regions and account for the light there while others go into the illuminated regions.

Diffracted rays are produced by incident rays which hit edges, corners, or vertices of boundary surfaces, or which graze such surfaces. Ordinary geometrical optics does not describe what happens in these cases but the new theory does. It does so by means of several laws of diffraction which are analogous to the laws of reflection and refraction. Like them, the new laws are deducible from Fermat's principle, appropriately modified. Away from the diffracting surfaces, diffracted rays behave just like ordinary rays.

In terms of the new rays, diffracted wave fronts can be defined. A Huygens wavelet construction can also be devised to determine them. It is also possible to introduce an eikonal or phase function which is constant on

these wave fronts and which satisfies the usual eikonal equation. Thus all the fundamental principles of ordinary geometrical optics can be extended to the geometrical theory of diffraction.

Ordinary geometrical optics is often used to determine the distribution of light intensity, polarization, and phase throughout space. This is accomplished by assigning a field value to each ray and letting the total field at a point be the sum of the fields on all the rays through that point. The phase of the field on a ray is assumed to be proportional to the optical length of the ray from some reference point where the phase is zero. The amplitude is assumed to vary in accordance with the principle of conservation of energy in a narrow tube of rays. The direction of the field, when it is a vector, is given by a unit vector perpendicular to the ray. This vector slides parallel to itself along the ray in a homogeneous medium, and rotates around the ray in a specific way as it slides along it in an inhomogeneous medium.

Exactly the same principles as those just described can be used to assign a field to each diffracted ray. The only difficulty occurs in obtaining the initial value of the field at the point of diffraction. In the case of the ordinary rays, the field on a ray emerging from a source is specified at the source. But on a reflected or transmitted ray, the initial value is obtained by multiplying the field on the incident ray by a reflection or transmission coefficient. By analogy the initial value of the field on a diffracted ray is obtained by multiplying the field on the incident ray by a diffraction coefficient, which is a matrix for a vector field. There are different coefficients for edge diffraction, vertex diffraction, etc.

All the diffraction coefficients vanish as the wavelength λ of the field tends to zero. Then the sum of the fields on all diffracted rays, which we call the diffracted field, also vanishes. The geometrical optics field alone remains in this case, as we should expect because diffraction is usually attributed to the fact that λ is not zero.

* This paper was presented as an invited address at the Seminar on Recent Developments in Optics and Related Fields at the October 13, 1960 meeting of the Optical Society of America, Boston, Massachusetts. The research on which it is based was sponsored in part by the Air Force Cambridge Research Laboratories, Office of Aerospace Research.

¹ J. B. Keller, "The geometrical theory of diffraction," *Proceedings of the Symposium on Microwave Optics*, Eaton Electronics Research Laboratory, McGill University, Montreal, Canada (June, 1953).

² See J. B. Keller, in *Calculus of Variations and its Applications*, *Proceedings of Symposia in Applied Math.*, edited by L. M. Graves (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York and American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1958), Vol. 8.

Dimensional considerations show that edge-diffraction coefficients are proportional to λ^3 and tip- or vertex-diffraction coefficients to λ . The field diffracted around a curved surface decreases exponentially with λ , and is consequently weaker than the field diffracted by a tip which is in turn weaker than that diffracted by an edge.

Diffraction coefficients can be characterized by recognizing that only the immediate neighborhood of the point of diffraction can affect their values. Thus the directions of incidence and diffraction, the wavelength, and the geometrical and physical properties of the media at the point of diffraction determine them. This suggests that they are determined by certain simpler problems in which only the local geometrical and physical properties enter. These "canonical" problems must be solved in order to determine the diffraction coefficients mathematically. Alternatively, experimental measurements on these canonical configurations can yield the coefficients.

The theory outlined above suffices for the analysis of a large class of situations involving diffraction. However, there remain phenomena which can be analyzed only by the inclusion of still another type of ray—the complex or imaginary ray. In a homogeneous medium such a ray is a complex straight line, while in an inhomogeneous medium it is a complex-valued solution of the differential equations for rays. Such rays occur as transmitted rays whenever total internal reflection occurs, and also in many other situations. Fields can be associated with these rays just as well as with the other kinds of rays.

A different kind of diffraction effect, not covered by the theory as explained so far, occurs at a caustic or focus of the ordinary or the diffracted rays. At such places neighboring rays intersect and the cross-sectional area of a tube of rays becomes zero. Consequently the principle of energy conservation in a tube of rays leads to an infinite amplitude for the field there. In order to obtain a finite value for the field at such places the present theory introduces a caustic correction factor. When the field on a ray passing through a caustic is multiplied by the appropriate factor, it becomes finite at the caustic. The caustic correction factors are determined by the wavelength and the local-ray geometry near the caustic, and are obtained from canonical problems.

In the subsequent sections this theory will be explained more fully and applied to some typical illustrative examples. Other applications of the theory will also be described. The mathematical interpretation of the theory in terms of asymptotic expansions will be explained in order to relate it to electromagnetic theory. The construction of similar theories in other branches of physics will also be commented upon.

2. EDGE-DIFFRACTED RAYS

The fundamental premise underlying the geometrical theory of diffraction is that light propagation is entirely

a local phenomenon because the wavelength of light is so small. By this it is meant that the manner of propagation at a given point is determined solely by the properties of the medium and the structure of the field in an arbitrarily small neighborhood of the point. Furthermore all fields, no matter how they are produced, must have the same local structure, namely, that of a plane wave. Therefore, all fields must propagate in the same way. In particular, then, diffracted fields must travel along rays just like the ordinary geometrical optics field does, and, in fact, these rays must obey the ordinary geometrical-optics laws. The rays along which the diffracted field propagates are the diffracted rays.

Where do diffracted rays come from? It seems clear that they must be produced by some of the ordinary optical rays, but, which ones? The laws of propagation, reflection, and refraction enable us to follow the usual rays from the source outward, and determine where they go and what rays they produce, with some exceptions. The usual laws fail to specify what happens to a ray which hits an edge or a vertex, or grazes a boundary surface. Therefore, such rays must give rise to diffracted rays. We hypothesize that they do. In the case of edges, this hypothesis is related to Thomas Young's idea that diffraction is an edge effect.

This hypothesis can be tested mathematically in those cases where diffraction problems have been solved by other means. One such case is the diffraction of a plane wave by a semi-infinite screen with a straight edge. The solution of this problem obtained by Sommerfeld³ consists of incident and reflected plane waves plus a third wave which is called a diffracted wave. When the incident wave is propagating in a direction normal to the edge of the screen, the diffracted wave is cylindrical with the edge as its axis. The straight lines orthogonal to the cylindrical wave fronts of the diffracted wave appear to come from the edge and can be identified with our diffracted rays. This example also suggests that an incident ray normal to the edge produces diffracted rays which are also normal to the edge and which leave it in all directions.

When the incident rays in the direction of propagation of the incident wave are oblique to the edge of the screen, the diffracted wave in Sommerfeld's solution is conical. This means that the diffracted wave fronts are parallel cones with the edge as their common axis. The straight lines orthogonal to these cones also appear to come from the edge, and can be identified with our diffracted rays. This example suggests the *law of edge diffraction*. A diffracted ray and the corresponding incident ray make equal angles with the edge at the point of diffraction, provided that they are both in the same medium. They lie on opposite sides of the plane normal to the edge at the point of diffraction. When the two rays lie in different media, the ratio of the sines of the

³ A. J. W. Sommerfeld, *Optics* (Academic Press, Inc., New York, 1954).

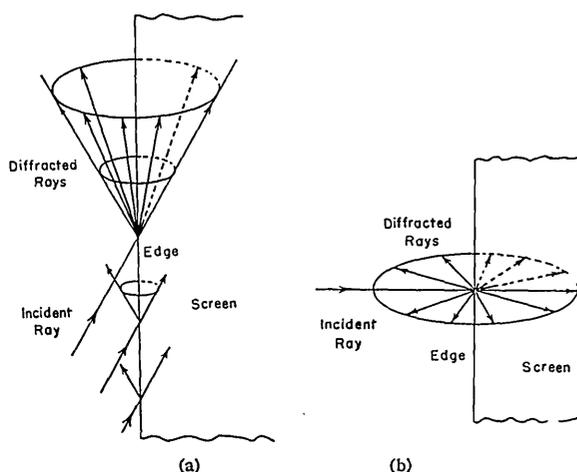


FIG. 1. (a) The cone of diffracted rays produced by an incident ray which hits the edge of a thin screen obliquely. (b) The plane of diffracted rays produced by a ray normally incident on the edge of a thin screen.

angles between the incident and diffracted rays and the normal plane is the reciprocal of the ratio of the indices of refraction of the two media. See Fig. 1.

The second part of this law, pertaining to diffraction into a different medium, is not suggested by the above example but is suggested by Snell's law of refraction. Both parts of the law are consequences of the following modified form of Fermat's principle which we call *Fermat's principle for edge diffraction*. An edge-diffracted ray from a point P to a point Q is a curve which has stationary optical length among all curves from P to Q with one point on the edge.

The derivation of the law of edge diffraction from this principle is particularly simple when the edge is straight and both rays lie in the same homogeneous medium. Then it is obvious that the ray consists of two straight-line segments meeting at a point on the edge. Let us rotate the plane containing the edge and the point Q around the edge until it contains P . In doing so the length of the segment from Q to the axis is unchanged, and the angle between the segment and the axis is unchanged. After the rotation, P , Q , and the edge lie in one plane and the stationary optical path is that given by the law of reflection. Thus the two segments must make equal angles with the edge and lie on opposite sides of the plane normal to the edge at the point of diffraction—but this is the law of edge diffraction for rays in the same medium. A similar argument, using Snell's law, yields the law of edge diffraction for rays in different media.

The law of edge diffraction is also confirmed by several approximate solutions of the problem of diffraction by an aperture in a thin screen. The Kirchhoff method, sometimes called the method of physical optics, represents the field diffracted through an aperture as an integral over the aperture. Rubinowicz⁴ evaluated this

integral asymptotically for short wavelengths when the incident field was a spherical wave, by using the Maggi transformation. He showed that the diffracted field at a point Q consisted of contributions from a small number of points on the edge. If we draw straight lines from these points to Q and call them diffracted rays we find that all of them at smooth parts of the edge satisfy the law of edge diffraction. The integrals of the Kirchhoff and modified Kirchhoff method, which employs Rayleigh's formulas, have been evaluated asymptotically for short wavelengths by van Kampen⁵ and by Keller *et al.*⁶ for arbitrary incident fields. The latter authors also evaluated Braunbek's⁷ improved version of the Kirchhoff integrals. In all cases the points on smooth parts of the edge which contribute to the diffracted field correspond to diffracted rays satisfying the law of edge diffraction.

An indirect experimental verification of the existence of edge diffracted rays and of the law of edge diffraction is contained in the results of Coulson and Becknell.⁸ They photographed the cross sections of the shadows of thin opaque disks of various shapes and detected bright lines in the shadows. When the incident field was normally incident on a disk, the bright line was found to be the evolute of the edge of the disk. In the special case of a circle the evolute is just the center, which appears as the well-known bright spot on the axis of the shadow. According to the law of edge diffraction, the diffracted rays lie in planes normal to the edge when the incident rays are normal to the edge. Therefore the caustic of these rays is a cylinder normal to the disk. Its cross section is the envelope of the normals to the edge in the plane of the disk, which is just the evolute of the edge. Thus the cross section of the caustic of the diffracted rays coincides with the bright lines which were observed. A similar interpretation applies to the bright lines observed at oblique incidence. Similar bright lines were observed by Nienhuis⁹ in the diffraction patterns of apertures. He found that they were exactly the caustics of diffracted rays which he assumed to emanate normally from the edge.

3. FIELDS DIFFRACTED BY STRAIGHT EDGES

Let us now consider the field u_e on a ray diffracted from an edge.¹⁰ For simplicity let us suppose that the ray is in a homogeneous medium so that it is a straight line. Let us begin with the two-dimensional case in which the edge is a straight line and the incident rays all lie in planes normal to the edge. Then the diffracted rays are also normal to the edge, and emanate from it in all

⁵ N. G. van Kampen, *Physica* 14, 575 (1949).

⁶ J. B. Keller, R. M. Lewis, and B. D. Seckler, *J. Appl. Phys.* 28, 570 (1957).

⁷ W. Braunbek, *Z. Physik* 127, 381 (1950); 127, 405 (1950).

⁸ J. Coulson and G. G. Becknell, *Phys. Rev.* 20, 594 (1922); 20, 607 (1922).

⁹ K. Nienhuis, Thesis, Groningen, 1948.

¹⁰ J. B. Keller, *J. Appl. Phys.* 28, 426 (1957).

⁴ A. Rubinowicz, *Ann. Physik* 53, 257 (1917); 73, 339 (1924).

directions. Thus it suffices to consider only the rays in one plane normal to the edge.

If λ denotes the wavelength of the incident field u_i , it is convenient to define the propagation constant $k=2\pi/\lambda$. We also denote by r the distance from the edge. Then the phase on a diffracted ray is just kr plus the phase ψ_i of the incident ray at the edge. To find the amplitude $A(r)$, which we assume to be a scalar, we consider as a tube of rays two neighboring rays in the same plane normal to the edge. Actually the tube is a cylinder of unit height. The cross-sectional area of this tube is proportional to r and the flux through it is proportional to rA^2 . Since the flux must be constant, $A(r)$ is proportional to $r^{-1/2}$. The amplitude is also proportional to the incident amplitude A_i at the edge so we write $A(r)=DA_i r^{-1/2}$, where D is a diffraction coefficient. Thus the diffracted field is

$$u_e = DA_i r^{-1/2} e^{i(kr + \psi_i)} = Du_i r^{-1/2} e^{ikr}. \quad (1)$$

Let us compare our result (1) with Sommerfeld's³ exact solution for diffraction of a plane scalar wave by a half-plane. When his result is asymptotically expanded for large values of kr , it agrees perfectly with (1) provided that

$$D = -\frac{e^{i\pi/4}}{2(2\pi k)^{1/2} \sin\beta} [\sec \frac{1}{2}(\theta - \alpha) \pm \csc \frac{1}{2}(\theta + \alpha)]. \quad (2)$$

Here β is the angle between the incident ray and the edge which is $\pi/2$ in this case. The angles between the incident and diffracted rays and the normal to the screen are θ and α , respectively (see Fig. 2). The upper sign applies when the boundary condition on the half-plane is $u=0$ while the lower sign applies if it is $\partial u/\partial n=0$.

The agreement between (1) and the exact solution confirms our theory and also determines the edge diffraction coefficient D . Similar agreement occurs for oblique incidence on a half-plane when (1) is replaced by the appropriate expression and the denominator $\sin\beta$ is included in (2). In this case θ and α are defined as above after first projecting the rays into the plane normal to the edge. In case the half-plane is replaced by a wedge of angle $(2-n)\pi$, comparison of (1), and its modified form for $\beta \neq \pi/2$, with Sommerfeld's exact solution for a wedge yields agreement when

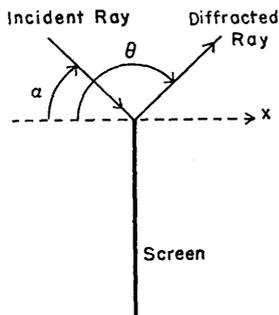


FIG. 2. The projection of incident and diffracted rays into a plane normal to the edge of a screen. The angles α and θ are those between the projections and the normal to the screen, measured as shown in the figure. The edge is normal to the plane of the figure.

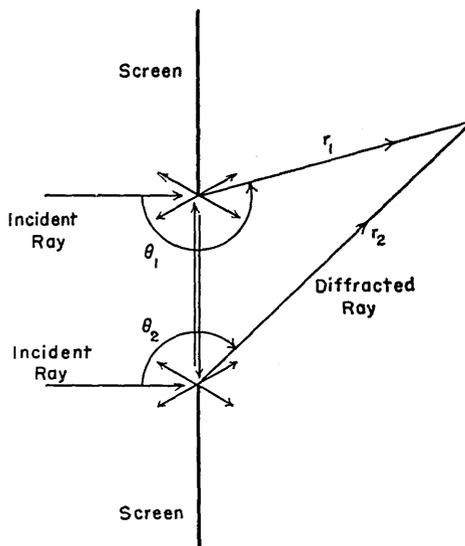


FIG. 3. The diffracted rays produced by a plane wave normally incident on a slit in a thin screen. The two incident rays which hit the slit edges are shown, with some of the singly diffracted rays they produce. One diffracted ray from each edge is shown crossing the slit and hitting the opposite edge, producing doubly diffracted rays.

$$D = \frac{e^{i\pi/4} \sin \frac{\pi}{n}}{n(2\pi k)^{1/2} \sin\beta} \left[\left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\theta - \alpha}{n} \right)^{-1} \mp \left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\theta + \alpha + \pi}{n} \right)^{-1} \right]. \quad (3)$$

For $n=2$ the wedge becomes a half-plane and (3) reduces to (2). [Equation (3) is misprinted in Eq. (A10) of reference 10.] In the electromagnetic case D is a matrix which has been determined in reference 10 for a perfectly conducting thin screen.

We shall now apply (1) and (2) to determine the field diffracted through an infinitely long slit of width $2a$ in a thin screen. By Babinet's principle, this will also be the field diffracted by a thin strip of width $2a$. For simplicity we shall assume that the incident field is a plane wave propagating in a direction normal to the edges of the slit. Then the problem is two dimensional and we can confine our attention to a plane normal to the edges. In this plane let the screen lie in the y axis of a rectangular coordinate system with the edges of the slit at $x=0$, $y=\pm a$. Let the incident field be $e^{ik(x \cos\alpha - y \sin\alpha)}$. Two singly diffracted rays, one from each edge, pass through any point P . Thus the singly diffracted field at P , $u_{e1}(P)$, is the sum of two terms of the form (1).

$$u_{e1}(P) = -\frac{e^{ik(r_1 - a \sin\alpha) + i\pi/4}}{2(2\pi k r_1)^{1/2}} [\sec \frac{1}{2}(\theta_1 + \alpha) \pm \csc \frac{1}{2}(\theta_1 - \alpha)] - \frac{e^{ik(r_2 + a \sin\alpha) + i\pi/4}}{2(2\pi k r_2)^{1/2}} + [\sec \frac{1}{2}(\theta_2 - \alpha) \pm \csc \frac{1}{2}(\theta_2 + \alpha)]. \quad (4)$$

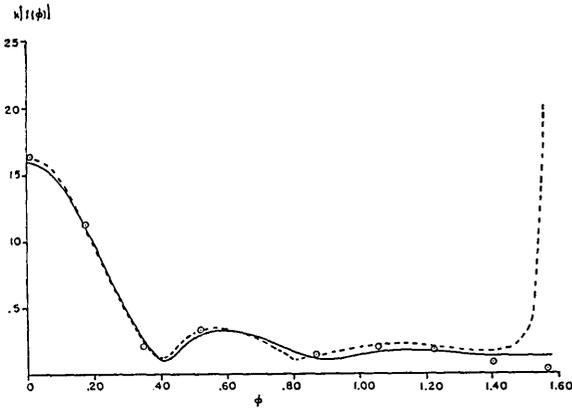


FIG. 4. The far-field diffraction pattern of a slit of width $2a$ hit normally by a plane wave; $ka=8$. The solid curve based upon Eq. (6) results from single diffraction, and applies to a screen on which $u=0$ or $\partial u/\partial n=0$. The dashed curve includes the effects of multiple diffraction for a screen on which $u=0$. The dots are based upon the exact solution of the reduced wave equation for a screen on which $u=0$.¹¹ The ordinate is $k|f(\varphi)|$ and the abscissa is φ in radians.

In (4) r_1 and r_2 denote the distances from P to the upper and lower edges, and the angles θ_1 and θ_2 are determined by the corresponding rays, as shown in Fig. 3.

The diffraction pattern of the slit, $f_s(\varphi)$, can be obtained from (4) by introducing the polar coordinates r, φ of P . When P is far from the slit ($r \gg a$) we have $r_1 \sim r - a \sin \varphi$, $r_2 \sim r + a \sin \varphi$, $\theta_1 \sim \pi + \varphi$, and $\theta_2 \sim \pi - \varphi$. Then (4) becomes

$$u_{e1}(P) = - (k/2\pi r)^{1/2} e^{ikr + i\pi/4} f_s(\varphi). \quad (5)$$

The diffraction pattern $f_s(\varphi)$ due to single diffraction is found to be

$$f_s(\varphi) = i \frac{\sin[k a (\sin \varphi + \sin \alpha)]}{k \sin \frac{1}{2}(\varphi + \alpha)} \pm \frac{\cos[k a (\sin \varphi + \sin \alpha)]}{k \cos \frac{1}{2}(\varphi - \alpha)}. \quad (6)$$

This equation shows that $|f_s(\varphi)|$ is not zero for any value of φ and that it is the same for the two types of boundary conditions on the screen.

In Figs. 4 and 5, $|k f_s(\varphi)|$ is shown as a function of φ for normal incidence ($\alpha=0$). The range of φ is 0 to $\pi/2$ which is the region behind the slit. In Fig. 4 for which $ka=8$, the exact values of the diffraction pattern are shown. They are based upon numerical evaluation of the exact solution of the reduced wave equation with $u=0$ on the screen, and are given by Karp and Russek.¹¹ The agreement between our theory and the exact values is seen to be quite good even though the slit is only about 3 wavelengths wide.

The transmission cross section σ of the slit per unit length can be obtained simply by employing the cross-section theorem. According to this theorem it is equal to the imaginary part of the diffraction pattern in the forward direction $\varphi = -\alpha$. By applying the theorem to $f_s(\varphi)$ we obtain $\sigma = 2a \cos \alpha$, which is just the geometrical optics result.

¹¹ S. N. Karp and A. Russek, J. Appl. Phys. 27, 886 (1956).

To obtain a better value of σ , let us consider the two doubly diffracted rays which go in the direction $\varphi = -\alpha$. They are produced by two singly diffracted rays which cross the slit and hit the opposite edges. The field at the upper edge on the singly diffracted ray from the lower edge is given by the second term in (4) with $\theta_2 = \pi/2$ and $r_2 = 2a$. If we choose the upper sign, appropriate to a screen on which $u=0$, we obtain

$$u_{e1} = - \frac{e^{ika(2+\sin\alpha)+i\pi/4}}{2(\pi ka)^{1/2}} \sec \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right). \quad (7)$$

We now use (7) as the incident field in (1) to obtain the field on the doubly diffracted rays. We proceed similarly to find the doubly diffracted field from the lower edge and add the two results to obtain the doubly diffracted field u_{e2} . Far from the slit we can write it in the form (5) with $f_d(\varphi)$ instead of $f_s(\varphi)$. In the direction $\varphi = -\alpha$, f_d has the value

$$f_d(-\alpha) = - \frac{1}{k(\pi ka)^{1/2}} \left[\frac{e^{i2ka(1+\sin\alpha)+i\pi/4}}{1+\sin\alpha} + \frac{e^{i2ka(1-\sin\alpha)+i\pi/4}}{1-\sin\alpha} \right]. \quad (8)$$

To obtain σ we apply the cross-section theorem which requires taking the imaginary part of $f_s(-\alpha) + f_d(-\alpha)$. The result is

$$\sigma = 2a \cos \alpha - \frac{1}{k(\pi ka)^{1/2}} \left[\frac{\cos[2ka(1+\sin\alpha) - \pi/4]}{1+\sin\alpha} + \frac{\cos[2ka(1-\sin\alpha) - \pi/4]}{1-\sin\alpha} \right]. \quad (9)$$

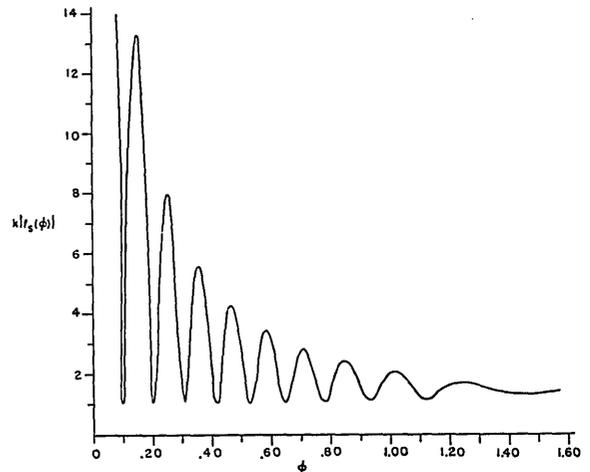


FIG. 5. The far-field diffraction pattern of a slit of width $2a$ hit normally by a plane wave; $ka=10\pi$. The curve, based on Eq. (6), results from single diffraction for a screen on which $u=0$ or $\partial u/\partial n=0$. The ordinate is $k|f_s(\varphi)|$ and the abscissa is φ in radians. The value at $\varphi=0$ is finite but too high to be shown.

This expression has also been obtained by H. Levine by a different method. For normal incidence, $\alpha=0$, and (9) becomes

$$\frac{\sigma}{2a} = 1 - \frac{\cos(2ka - \pi/4)}{\pi^{1/2}(ka)^{3/2}} \quad (10)$$

In Fig. 6 $\sigma/2a$ is shown as a function of ka based on (10), and points obtained from the exact solution of the boundary-value problem are also shown. The agreement is quite good even when the wavelength is several times the slit width. When additional multiply diffracted rays are taken into account, even better agreement is obtained, as the dashed curve in the figure shows. The expression for the field obtained by summing all the multiply diffracted fields coincides with that obtained by Karp and Russek¹¹ in a different way.

The above calculation of the doubly diffracted field was performed for a screen on which $u=0$. For a screen on which $\partial u/\partial n=0$ no diffracted field is produced when a plane wave travels toward the edge in a direction parallel to the screen. As a consequence the diffraction coefficient D , given by (2) with the lower sign, vanishes when $\alpha=\pi/2$. In this case the diffracted field is proportional to $\partial u_i/\partial n$, the normal derivative of the incident field at the edge. Thus (1) must be replaced by

$$u_e = D' \frac{\partial u_i}{\partial n} \cdot r^{-1/2} e^{ikr} \quad (11)$$

Here D' is a new diffraction coefficient which can be obtained by solving the problem of diffraction of the wave $x e^{-iky}$ by a half-plane lying on the negative y axis. This was done by Karp and Keller¹² with the result

$$D'(\theta) = -\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial \alpha} D(\theta, \pi/2) = -\frac{e^{-i\pi/4} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}{2(2\pi)^{1/2} k^{3/2} \sin^2 \beta \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} \quad (12)$$

Let us use (11) and (12) to determine the doubly diffracted field for a screen on which $\partial u/\partial n=0$. First we obtain from the second term in (4) at $\theta_2=\pi/2$, $r_2=2a$ the result

$$\frac{\partial u_{e1}}{\partial n} = -\frac{e^{ika(2+\sin\alpha)+i\pi/4} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{8(\pi ka^3)^{1/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} \quad (13)$$

We now use (13) and (12) in (11) to obtain the doubly diffracted field from the upper edge, and do a similar

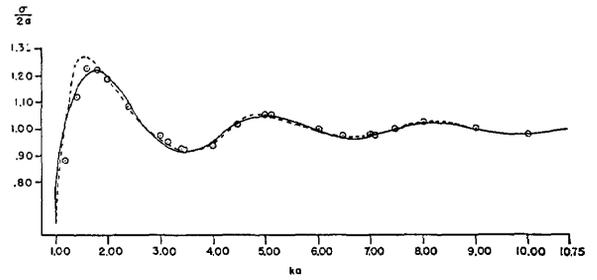


Fig. 6. The transmission cross section of a slit of width $2a$ as a function of ka , for normal incidence with $u=0$ on the screen. The solid curve, based on Eq. (10), results from single and double diffraction; the dashed curve includes single and all multiple diffraction. The dots are based upon the exact solution of the reduced wave equation with $u=0$ on the screen.¹¹ The ordinate is $\sigma/2a$ and the abscissa is ka .

calculation for the lower edge. Then we add the two doubly diffracted fields to obtain

$$u_{e2} = \frac{e^{ika(2+\sin\alpha)+ikr_1} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_1}{2}\right)}{16\pi(ka)^{3/2}(2kr_1)^{1/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_1}{2}\right)} + \frac{e^{ika(2-\sin\alpha)+ikr_2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_2}{2}\right)}{16\pi(ka)^{3/2}(2kr_2)^{1/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_2}{2}\right)} \quad (14)$$

Far from the slit we write u_{e2} in the form (5) and obtain $f_a(\varphi)$. Then we apply the cross-section theorem to $f_s(-\alpha)+f_a(-\alpha)$ and find

$$\sigma = 2a \cos\alpha - \frac{2a}{32\pi^{1/2}(ka)^{3/2}} \times \left\{ \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} \sin[2ka(1+\sin\alpha) - \pi/4] + \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)} \sin[2ka(1-\sin\alpha) - \pi/4] \right\} \quad (15)$$

For normal incidence $\alpha=0$ and (15) becomes

$$\frac{\sigma}{2a} = 1 - \frac{\sin(2ka - \pi/4)}{8\pi^{1/2}(ka)^{3/2}} \quad (16)$$

¹² S. N. Karp and J. B. Keller, *Optica Acta* (Paris) 8, 61 (1961).

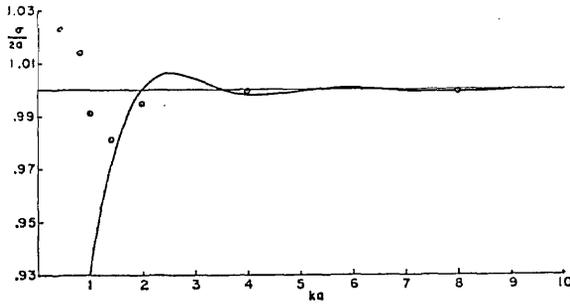


FIG. 7. The transmission cross section of a slit of width $2a$ as a function of ka , for normal incidence with $\partial u/\partial n=0$ on the screen. The curve, based on Eq. (16), results from single and double diffraction. The dots are based upon the exact solution of the reduced wave equation.¹³ The ordinate is $\sigma/2a$ and the abscissa is ka .

A graph of $\sigma/2a$ versus ka based on (16) is shown in Fig. 7 together with some values of $\sigma/2a$ computed by Skavlem¹³ from the exact solution of the boundary value problem.

Let us now consider a diffraction grating consisting of $2N+1$ parallel slits each of width $2a$ with centers a distance b apart. Let us again consider the two-dimensional case in which a plane wave is incident at angle α with its wavefronts parallel to the edges. Then one singly diffracted ray from each edge will pass through every point and the total field is the sum of $2(2N+1)$ terms of the form (1). Let us number the slits from $t=-N$ to $t=N$ with the center of slit t at $y=tb$ and let r_t, φ_t be polar coordinates with their origin at this center. We now add together the fields on the two rays from the edges of slit t . If $r_t \gg a$ we obtain the result (5) for that slit, with r_t, φ_t instead of r, φ and multiplied by the factor $e^{-ikt b \sin \alpha}$ to account for the phase of the incident wave. Thus far from the grating we have

$$u_{01} = - \sum_{t=-N}^{t=N} \left(\frac{k}{2\pi r_t} \right)^{\frac{1}{2}} e^{ik(r_t - tb \sin \alpha) + i\pi/4} f_s(\varphi). \quad (17)$$

To simplify (17), let r, φ be polar coordinates with their origin at the center of the middle slit. At points far from the grating compared to its length $2Nb+2a$ we have $\varphi_t \sim \varphi$ and $r_t \sim r - tb \sin \alpha$ and (17) becomes

$$\begin{aligned} u_{01} &= - \left(\frac{k}{2\pi r} \right)^{\frac{1}{2}} e^{ikr + i\pi/4} f_s(\varphi) \sum_{t=-N}^{t=N} e^{-ikt b (\sin \varphi + \sin \alpha)} \\ &= - \left(\frac{k}{2\pi r} \right)^{\frac{1}{2}} e^{ikr + i\pi/4} f_s(\varphi) \\ &\quad \times \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})kb(\sin \varphi + \sin \alpha)]}{\sin[\frac{1}{2}kb(\sin \varphi + \sin \alpha)]}. \end{aligned} \quad (18)$$

The same result applies with N instead of $N + \frac{1}{2}$ if there are $2N$ slits and the origin is at the midpoint of the grating. The result expresses the diffraction pattern as

the product of the pattern of a single slit and a grating factor which is the quotient of sines.

The method of this section has been applied to diffraction by a semi-infinite thick screen with a flat end and by a truncated wedge by Burke and Keller.¹⁴ In computing the doubly diffracted field for a screen upon which $u=0$ it was found that $D=0$. This is related to the fact that the singly diffracted field vanishes at the edge. Here again the doubly diffracted field is proportional to $\partial u_i/\partial n$ at the edge. The corresponding diffraction coefficient $D'(\theta, n)$ was found by solving a canonical problem, as was done to obtain (12). If $D(\alpha, \theta, n)$ denotes the coefficient in (3), the result is

$$\begin{aligned} D'(\theta, n) &= - \frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial \alpha} D(-\pi/2, \theta, n) = \frac{2e^{-i\pi/4} \sin(\pi/n)}{n^2 k^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad \times \frac{\sin\left[\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)/n\right]}{\left\{ \cos \frac{\pi}{n} - \cos\left[\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)/n\right] \right\}}. \end{aligned} \quad (19)$$

In the case of grazing incidence additional considerations which we shall not explain are required because the incident ray and a diffracted ray both continue along the surface together.

4. FIELDS DIFFRACTED BY CURVED EDGES

The field on an edge-diffracted ray is given by (1) only in the special case when the diffracted wave is cylindrical. In general (1) must be replaced by

$$u_e = Du_i [r(1 + \rho_1^{-1}r)]^{-\frac{1}{2}} e^{ikr}. \quad (20)$$

Here ρ_1 denotes the distance from the edge to the caustic of the diffracted rays, measured negatively in the direction of propagation. (See Fig. 8.) We obtain (20) by employing the energy principle according to which A varies inversely as the square root of the cross-sectional area of a tube of rays. If ρ_1 and ρ_2 denote the radii of curvature of the wave front which is orthogonal to the tube at one cross section, then ρ_1+r and ρ_2+r are the corresponding radii a distance r further along the tube. (See Fig. 9.) Thus the cross-sectional area is proportional to $(\rho_1+r)(\rho_2+r)$ and A is proportional to $[(\rho_1+r)(\rho_2+r)]^{-\frac{1}{2}}$. When $\rho_2=0$, A varies as $[r(1 + \rho_1^{-1}r)]^{-\frac{1}{2}}$. Since the diffracted rays form a caustic at the edge, $\rho_2=0$ there. If r denotes distance along a ray from the edge, the last expression for A applies. By using it together with the phase factor and the factors Du_i previously explained, we obtain (20).

The distance ρ_1 in (20) can be found by geometrical considerations. When the edge is a plane curve, it is

¹⁴ J. E. Burke and J. B. Keller, Research Rept. EDL-E48, Electronic Defense Laboratories, Sylvania Electronic Systems, Mountain View, California (March, 1960).

¹³ C. J. Bouwkamp, Repts. Progr. in Phys. 17, 35 (1954).

given by the following formula, which is analogous to the lens and mirror laws

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{\dot{\beta}}{\sin\beta} - \frac{\cos\delta}{\rho \sin^2\beta}. \quad (21)$$

Here $\rho \geq 0$ denotes the radius of curvature of the edge, β is the angle between the incident ray and the (positive) tangent to the edge, $\dot{\beta}$ is the derivative of β with respect to arclength s along the edge, and δ is the angle between the diffracted ray and the normal to the edge. Since both β and $\partial/\partial s$ change sign when the direction of increasing arclength is reversed, this direction can be chosen arbitrarily without effecting the value of ρ_1 . The normal, which lies in the plane of the edge, is assumed to point towards its center of curvature.

As an application of (21) let us consider a spherical wave diffracted by a straight edge. In this case $\rho = \infty$ so the focal length of the edge is infinite and the last term in (21) vanishes. A simple calculation shows that $\dot{\beta} = -R^{-1} \sin\beta$ at a point on the edge a distance R from the source. Thus (21) yields $\rho_1 = R$ as we should have expected. If $u_i = e^{ikR}/R$ then (20) yields

$$u_e = -\frac{e^{ik(R+r)+i\pi/4}}{2 \sin\beta (2\pi k)^{3/2} [rR(r+R)]^{3/2}} \times [\sec \frac{1}{2}(\theta - \alpha) \pm \csc \frac{1}{2}(\theta + \alpha)]. \quad (22)$$

This result coincides with the asymptotic expansion of the diffracted field given by the exact solution of the reduced wave equation for this problem, providing another confirmation of our theory.

When a plane wave is normally incident upon a screen containing an aperture of any shape, $\beta = \pi/2$ for every ray and (21) yields $\rho_1 = -\rho/\cos\delta$. If $\beta = \pi/2$ it follows from the definitions of θ and δ that $\delta = \theta - \pi/2$ so $\rho_1 = -\rho/\sin\theta$. For a circular aperture of radius a , $\rho = a$ and $\rho_1 = -a/\sin\theta$. In this case two singly diffracted rays

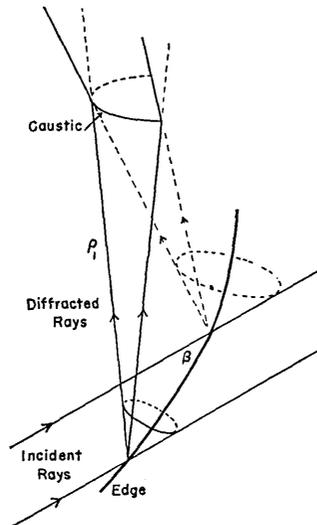


FIG. 8. A pair of neighboring incident rays hitting a curved edge, and some of the resulting diffracted rays. The two cones of diffracted rays intersect at the caustic, which is at the distance ρ_1 from the edge along the rays.

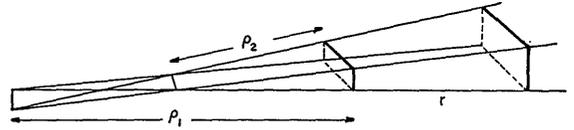


FIG. 9. A tube of rays and two small portions of wave fronts normal to them a distance r apart. The neighboring rays intersect at the two centers of curvature of the wave fronts. They are at the distances ρ_1 and ρ_2 from one wave front and at ρ_1+r and ρ_2+r from the other. The ratio of the areas of the wavefront sections is seen to be $\rho_1\rho_2/(\rho_1+r)(\rho_2+r)$.

pass through each point P not on the axis. They come from the nearest and farthest points on the edge. If the incident field is $u_i = e^{ikx}$ and the screen is in the plane $x=0$, we obtain by adding two terms of the form (20) the result

$$u_{e1}(P) = -\frac{e^{ikr_1+i\pi/4}}{2(2\pi k)^{3/2}} \left[\sec \frac{\theta_1}{2} \pm \csc \frac{\theta_1}{2} \right] [r_1(1 - a^{-1}r_1 \sin\theta_1)]^{-3/2} - \frac{e^{ikr_2+i\pi/4}}{2(2\pi k)^{3/2}} \left[\sec \frac{\theta_2}{2} \pm \csc \frac{\theta_2}{2} \right] \times [r_2(1 - a^{-1}r_2 \sin\theta_2)]^{-3/2}. \quad (23)$$

The angles and distances in (23) are as shown in Fig. 3. Far from the aperture (23) simplifies to

$$u_{e1} = -\frac{ke^{ikr}}{2\pi r} f_s(\varphi). \quad (24)$$

The diffraction pattern $f_s(\varphi)$ due to single diffraction is from (23)

$$f_s(\varphi) = k^{-3/2} (2\pi a/\sin\varphi)^{3/2} \left\{ i \frac{\sin[ka \sin\varphi - (\pi/4)]}{\sin(\varphi/2)} \pm \frac{\cos[ka \sin\varphi - (\pi/4)]}{\cos(\varphi/2)} \right\}. \quad (25)$$

A graph of $|kf_s(\varphi)|$ based on (25) is given in Fig. 10 for $ka = 3\pi$. It shows that $f_s(\varphi)$ is infinite at $\varphi=0$, which is a consequence of the fact that the axis, a caustic of the diffracted rays, and the shadow boundary $r=a$ both extend in the direction $\varphi=0$.

Let us examine (23) near the axis by introducing ρ and x , the distances from P to the axis and to the plane of the screen, and $\delta = \tan^{-1}(x/a)$. When $\rho \ll a$, (23) can be simplified to

$$u_{e1} = -\frac{a^{3/2} e^{ik(x \sin\delta + a \cos\delta)}}{(2\pi k\rho)^{3/2} (x^2 + a^2)^{3/2}} \left[\sec \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \pm \csc \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \times \cos \left(k\rho \cos\delta - \frac{\pi}{4} \right). \quad (26)$$

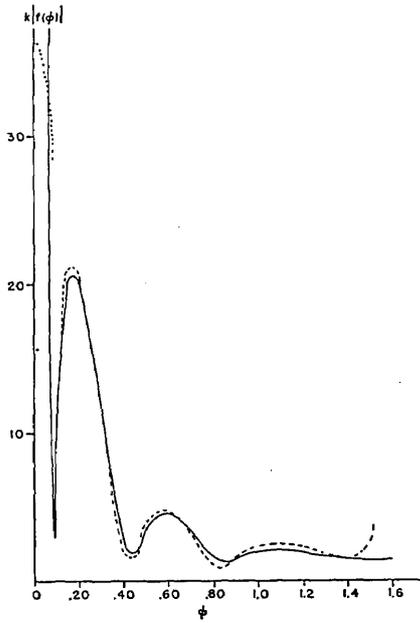


FIG. 10. The diffraction pattern of a circular hole of radius a hit normally by a plane wave; $ka=3\pi$. The solid curve, based on Eq. (25) results from single diffraction with either $u=0$ or $\partial u/\partial n=0$ on the screen. The dashed curve, for the case $u=0$ on the screen, also includes multiple diffraction. The dotted curve near $\varphi=0$ includes the caustic and shadow-boundary corrections given by (30).

This equation shows that u_{e1} is singular like $\rho^{-1/2}$ on the axial caustic $\rho=0$. To modify it so that u_{e1} is finite there, we consider the following exact solution of the reduced wave equation, in which δ is a constant and J_0 is the zero-order Bessel function

$$e^{ikz \sin \delta} J_0(k\rho \cos \delta) \sim \frac{2e^{ikz \sin \delta}}{(2\pi k\rho \cos \delta)^{1/2}} \cos(k\rho \cos \delta - \pi/4). \quad (27)$$

The right side of (27) is the asymptotic expansion of the solution on the left side when $k\rho$ is large. It shows that the solution corresponds to rays converging on an axial caustic, making the angle $\pi/2 - \delta$ with the axis, just as is the case in (26). Near the axis the right side of (27) is not applicable and the same is true of (26). Therefore we assume that the right side of (26) can be converted to its correct value on and near the axis by multiplying it by the ratio of the left side of (27) to the right side, and we call this ratio the axial caustic correction factor F

$$F = \frac{1}{2} (2\pi k\rho \cos \delta)^{1/2} \sec(k\rho \cos \delta - \pi/4) J_0(k\rho \cos \delta). \quad (28)$$

[The factor $\frac{1}{2}$ was omitted in (A16) of reference 10]. When we multiply the right side of (26) by F , we obtain on and near the axis

$$u_{e1} = -\frac{(a \cos \delta)^{1/2}}{2(x^2 + a^2)^{1/2}} \left[\sec\left(\frac{\delta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \pm \csc\left(\frac{\delta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \times J_0(k\rho \cos \delta) \exp[ik(x^2 + a^2)^{1/2}]. \quad (29)$$

Far from the screen δ approaches $\pi/2$ and $\sec[(\delta/2) + (\pi/4)] \approx 2x/a$, so u_{e1} does not decrease with x along the axis. This is because the shadow boundary $r=a$ extends in the direction parallel to the boundary. When we combine u_{e1} with the geometrical optics field $u_g = e^{ikx}$ in the region $r < a$, the plane wave terms cancel and we obtain a spherical wave

$$u_g + u_{e1} \approx e^{ikx} - \frac{a}{2x} e^{ikx} \left(1 + \frac{ika^2}{2x} \right) - J_0(ka \sin \varphi) = -\frac{ke^{ikx}}{2\pi x} i\pi a^2 J_0(ka \sin \varphi). \quad (30)$$

Thus $f_s(\varphi)$ has the finite value $i\pi a^2 J_0(ka \sin \varphi)$ near $\varphi=0$, rather than the singular value given by (25). The transmission cross section σ is the imaginary part of $f(0)$ according to the cross-section theorem, so (30) yields $\sigma = \pi a^2$, the geometrical optics value.

The result (30) applies only in the immediate vicinity of $\varphi=0$ since its derivation employed the geometrical optics field in the region $r < a$. To obtain an improved form of the diffraction pattern (25) which is valid for a larger range of φ , we shall introduce a caustic and shadow boundary correction directly into (25). We do this by observing that $(\sin \varphi)^{-1} \sin(ka \sin \varphi - \pi/4)$ and $(\sin \varphi)^{-1} \cos(ka \sin \varphi - \pi/4)$ are proportional to the asymptotic forms of $J_1(ka \sin \varphi)$ and $J_0(ka \sin \varphi)$, respectively. Upon using these functions in (25) in place of their asymptotic forms, we obtain

$$f_s(\varphi) = \frac{\pi a}{k} \left[\frac{iJ_1(ka \sin \varphi)}{\sin(\varphi/2)} \pm \frac{J_0(ka \sin \varphi)}{\cos(\varphi/2)} \right]. \quad (31)$$

Let us now consider the doubly diffracted field in order to obtain a more accurate value of σ . For a screen on which $u=0$ the first term in (23) becomes at $r_1=2a$, $\theta=\pi/2$

$$u_{e1} = -\frac{e^{2ika+i\pi/4}}{(2\pi ka)^{1/2}}. \quad (32)$$

This is the field on a ray which has crossed the aperture to the opposite edge. By treating it as the incident field in (20) we obtain for the doubly diffracted field

$$u_{e2} = \frac{e^{ik(r_1+2a)}}{2\pi ka^{1/2}} [r_1(1-a^{-1}r_1 \cos \delta_1)]^{-1/2} \frac{\delta_1}{2} + \frac{e^{ik(r_2+2a)}}{2\pi ka^{1/2}} [r_2(1-a^{-1}r_2 \cos \delta_2)]^{-1/2} \frac{\delta_2}{2}. \quad (33)$$

Near the axis we find by comparing (33) with (26) that

$$u_{e2} = -\frac{2e^{2ika+i\pi/4}}{(2\pi ka)^{1/2}} \sec \left[\frac{\delta}{2} \left(\sec\left(\frac{\delta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \csc\left(\frac{\delta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right) \right]^{-1} u_{e1}. \quad (34)$$

From (34) we see that u_{e2} becomes infinite on the axis like u_{e1} does and it can be made regular by the same caustic correction. The result can be obtained by using (29) in (34). In this way we obtain at points far behind the screen and near the axis

$$u_{e2} = -\frac{ke^{ikx}}{2\pi x} \left[-\frac{2(\pi a)^{\frac{3}{2}}}{k} e^{2ika-i\pi/4} J_0(ka \sin \varphi) \right]. \quad (35)$$

The bracketed quantity in (35) is $f_d(\varphi)$, the diffraction-pattern contribution from double diffraction. Upon applying the cross-section theorem to it, and adding the result to πa^2 , which was obtained from (30), we find

$$\frac{\sigma}{\pi a^2} = 1 - \frac{2 \sin[2ka - \pi/4]}{\pi^{\frac{1}{2}}(ka)^{\frac{3}{2}}}. \quad (36)$$

This result, which was also obtained in a different way by Levine,¹⁵ is shown in Fig. 11. Values of $\sigma/\pi a^2$ obtained from the exact solution of the corresponding boundary value problem for the reduced wave equation are also shown. The agreement can be seen to be quite good, even when the wavelength is twice the diameter.

For an aperture in a screen on which $\partial u/\partial n=0$ we must use (11) with a factor $(1+\rho_1^{-1}r)$ on the right side, to find the doubly diffracted field. We begin by obtaining from the first term in (23) at $r_1=2a$, $\theta_2=\pi/2$ the result

$$\frac{\partial u_{e1}}{\partial n} = -\frac{e^{2ika-i\pi/4}}{4(2\pi ka^3)^{\frac{1}{2}}}. \quad (37)$$

This is the normal derivative of the singly diffracted field on a ray which has crossed the aperture to the opposite edge. We now use (37) in (11) with the extra

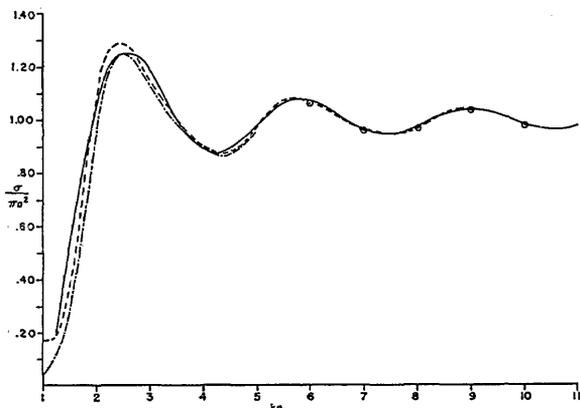


FIG. 11. The transmission cross section σ of a circular aperture of radius a in a thin screen on which $u=0$. The wave is normally incident. The solid curve, based on Eq. (36), results from single and double diffraction; the dashed curve also includes all multiple diffractions. The dots and the broken curve up to $ka=5$ are based upon the exact solution of the reduced wave equation.¹⁵ The ordinate is $\sigma/\pi a^2$ and the abscissa ka .

¹⁵ H. Levine, Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, Research Rept. EM-84 (1955).

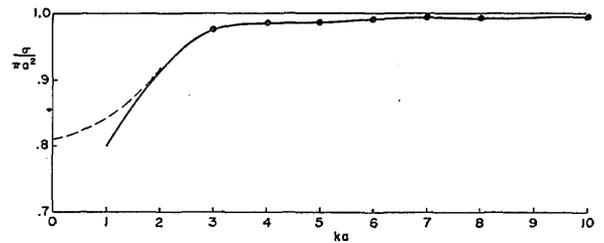


FIG. 12. The transmission cross section σ for normal incidence on a circular hole in a screen on which $\partial u/\partial n=0$. The ordinate is $\sigma/\pi a^2$ and the abscissa is ka . The solid curve is based upon Eq. (40) which results from single and double diffraction. The encircled points and the dashed curve are the exact values computed by Bouwkamp.¹³

factor to obtain the doubly diffracted field which is

$$u_{e2} = -\frac{ie^{ik(r_1+2a)}}{16\pi(k^4 a^3)^{\frac{1}{2}}} [r_1(1-a^{-1}r_1 \cos \delta_1)]^{-\frac{1}{2}} \frac{\sin(\delta_1/2)}{\cos^2(\delta_1/2)} - \frac{ie^{ik(r_2+2a)}}{16\pi(k^4 a^3)^{\frac{1}{2}}} [r_2(1-a^{-1}r_2 \cos \delta_2)]^{-\frac{1}{2}} \frac{\sin(\delta_2/2)}{\cos^2(\delta_2/2)}. \quad (38)$$

Proceeding as before, we evaluate (38) at points near the axis, then apply the caustic correction factor (28), and finally evaluate the result far from the screen. In this way we obtain

$$u_{e2} = -\frac{ke^{ikx}}{2\pi x} \left[\frac{\pi^{\frac{1}{2}} J_0(ka \sin \varphi)}{4k^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}}} e^{2ika+i\pi/4} \right]. \quad (39)$$

To compute σ we apply the cross-section theorem which requires us to take the imaginary part of the bracketed expression in (39) at $\varphi=0$. We must add this contribution to σ from double diffraction to πa^2 , obtained from (30). We also add the term $-\pi/4ka^2$ which was shown by Buchal and Keller¹⁶ to come from the second term in the singly diffracted field u_{e1} . In this way we obtain

$$\frac{\sigma}{\pi a^2} = 1 - \frac{1}{4(ka)^2} + \frac{\sin(2ka + \pi/4)}{4\pi^{\frac{1}{2}}(ka)^{\frac{3}{2}}}. \quad (40)$$

This result was also obtained by Levine and Wu.¹⁷ It is shown in Fig. 12 together with values based upon the exact solution of the reduced wave equation with $\partial u/\partial n=0$ on the screen. The agreement appears to be quite good for $ka \geq 2$.

De Vore and Kouyoumjian¹⁸ have used the method of this section to calculate the singly and doubly diffracted fields produced by a plane electromagnetic wave inci-

¹⁶ R. N. Buchal and J. B. Keller, *Commun. Pure Appl. Math.* 8, 85 (1960).

¹⁷ H. Levine and T. T. Wu, *Tech. Rept. 71, Applied Mathematics and Statistics Laboratory, Stanford University, Stanford, California, (July, 1957).*

¹⁸ R. DeVore and R. Kouyoumjian, "The back scattering from a circular disk," *URSI-IRE Spring meeting, Washington D. C. (May, 1961).*

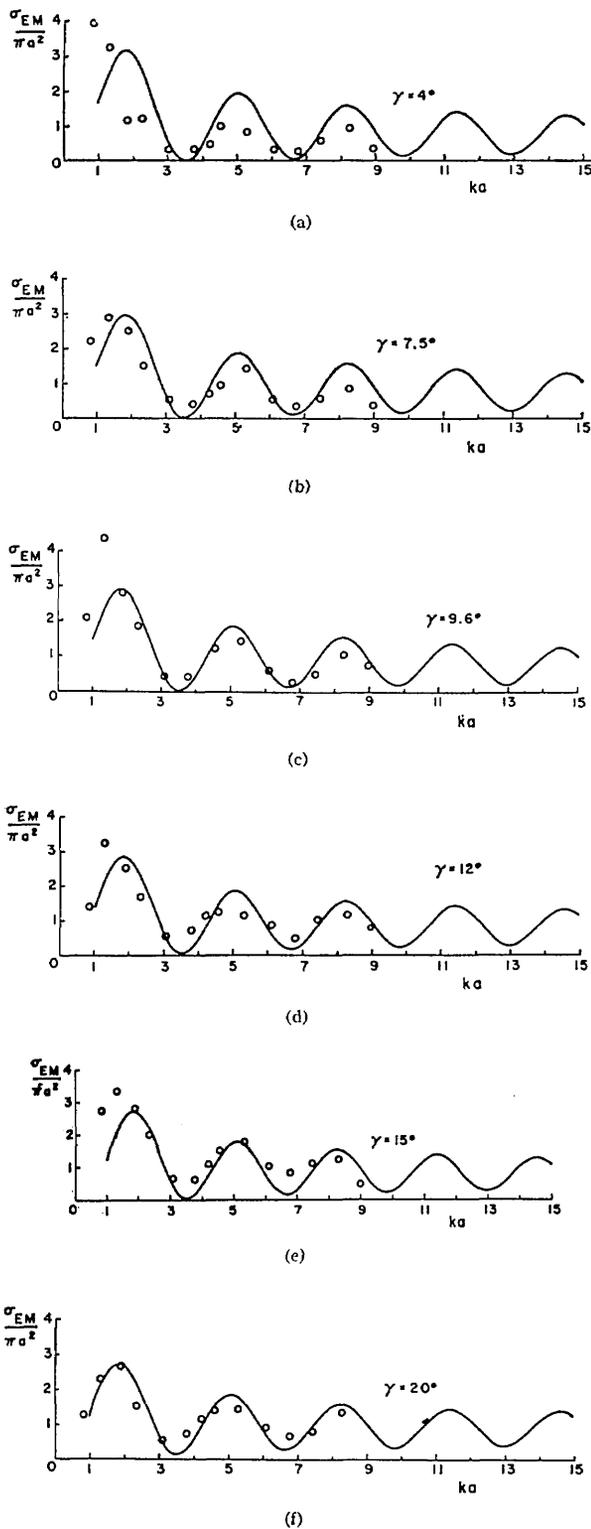


FIG. 13. Experimental and theoretical values of the electromagnetic back scattering cross section σ_{EM} of a finite circular metal cone for axial incidence. The ordinate is $\sigma_{EM}/\pi a^2$ and the abscissa is ka where a is the radius of the base of the cone. The circles are measured values and the curves are computed using the singly and doubly diffracted fields from the edge. The half-angle γ of the cone is indicated on each curve.

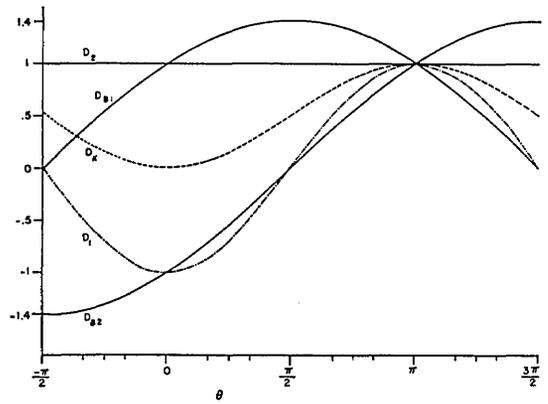


FIG. 14. Comparison of the Kirchhoff edge-diffraction coefficients D_1 , D_2 , and D_k with the Braunbek coefficients D_{B1} and D_{B2} for normal incidence ($\alpha=0$). The latter coincide with our D_i given by Eq. (2) with the upper and lower signs, respectively. D_1 and D_2 result from the two usual modifications of the Kirchhoff theory and $D_k = \frac{1}{2}(D_1 + D_2)$ comes from the usual form of it. The ordinate is $-2(2\pi/k)^{1/2}e^{-i\pi/4}\sin\theta D$ and the abscissa is θ . All the coefficients are singular on the shadow boundary $\theta=\pi$ but the singular factor $\sin\theta$ has been removed. The dark side of the screen is at $\theta=3\pi/2$ and the illuminated side at $\theta=-\pi/2$.

dent from any direction on a perfectly conducting thin disk. They also performed accurate measurements of the diffracted field and found excellent agreement with the theory. Keller¹⁹ has also used it to calculate the singly and doubly diffracted fields scattered by a perfectly conducting finite circular cone with a flat base hit by an axially incident plane wave. The back-scattered field comes primarily from the sharp edge at the rear of the cone and may be calculated by using the diffraction coefficient D given by (3) with the sign depending upon the orientation of the incident electric field. The results have been compared²⁰ with the measured values of Keys and Primich.²¹ The comparison, shown in Fig. 13, indicates that the theory is fairly accurate even when ka is as small as unity. The theory has also been applied to objects of other shapes by Burke and Keller.²²

It has been shown⁶ by asymptotic evaluation, that the Kirchhoff theory, its two usual modifications and Braunbek's modification all lead to expressions for the field diffracted by an aperture in a thin screen, which can be interpreted as sums of fields on diffracted rays. The expression for the field on each ray was found to be exactly of the form (21), which is an additional corroboration of our theory. The Braunbek modification yielded exactly the diffraction coefficients (2) given by our theory, but the various other Kirchhoff methods gave different coefficients. The various coefficients are compared in Fig. 14 from which it can be seen that the

¹⁹ J. B. Keller, IRE Trans. Antennas and Prop. AP-8, 175 (1960).

²⁰ J. B. Keller, IRE Trans. Antennas and Prop. AP-9, 411 (1961).

²¹ J. E. Keys and R. I. Primich, Defense Research Telecommunications Establishment, Ottawa, Canada, Rept. 1010 (May, 1959).

²² J. E. Burke and J. B. Keller, Research Rept. EDL-E49, Electronic Defense Laboratories, Sylvania Electronic Systems, Mountain View, California (April, 1960).

Kirchhoff results agree with ours in the forward direction, but differ considerably at other angles. Thus we may expect the Kirchhoff theory to lead to incorrect results at large diffraction angles.

The present method has been used by Keller²³ to determine the force and torque exerted on a rigid immobile thin disk or strip by an incident plane acoustic wave. In this case, if u denotes the acoustic pressure, the force on the disk is proportional to its total scattering cross section. By Babinet's principle this is found to be twice the transmission cross section of the complementary aperture. Similarly the torque on the disk is proportional to the angular derivative of the diffraction pattern of the disk, evaluated in the forward direction, and this pattern is the negative of that of the complementary aperture. For strips the same statements apply to the force and torque per unit length. Thus the results obtained above for σ yield the force directly. By differentiating the pattern $f(\varphi)$ with respect to φ at $\varphi = -\alpha$, we can also obtain the torque. Graphs of some of the results for the torque are shown in Figs. 15-17.

5. CORNER OR TIP DIFFRACTION

Let us now consider diffraction by special points such as the corner of an edge of a boundary surface or the tip of a conical boundary surface. We call such points vertices and assume that an incident ray which hits one produces infinitely many diffracted rays which satisfy the *Law of vertex diffraction*: A diffracted ray and the corresponding incident ray may meet at any angle at a vertex of a boundary surface. This law follows at once from *Fermat's principle for vertex diffraction*: A vertex-diffracted ray from a point P to a point Q is a curve which has stationary optical length among all curves from P to Q passing through the vertex.

Both of these formulations show that a ray incident on a vertex produces a two-parameter family of dif-

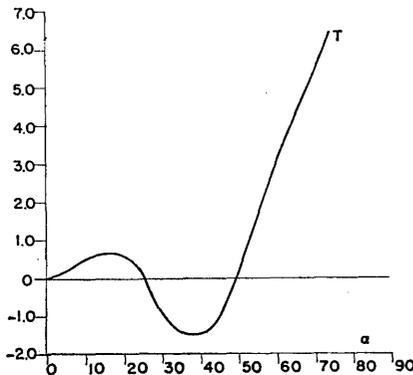


FIG. 15. The acoustic torque T per unit length on a strip of width $2a$ as a function of the angle of incidence α for $ka=5$. The vertical scale is the value of $T|a^2P^2/\rho_0c^2\pi^{\frac{1}{2}}(ka)^{\frac{1}{2}}|^{-1}$, where P is the amplitude of the incident pressure wave, ρ_0 is the density of the medium and c is its sound speed. The values of α at which $T=0$ are equilibrium angles which are stable if $T'_\alpha < 0$ and unstable if $T'_\alpha > 0$. The curve does not apply near $\alpha = \pi/2$, which corresponds to grazing incidence, at which $T=0$. T is an odd function of α .

²³ J. B. Keller, J. Acoust. Soc. Am, 29, 1085 (1957).

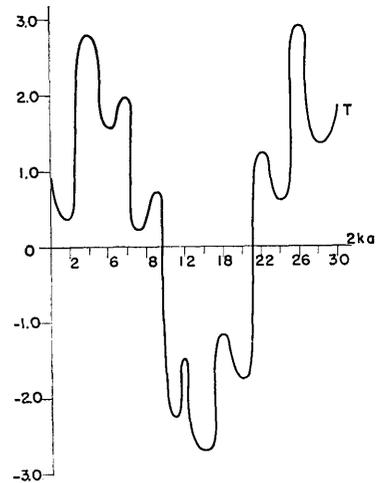


FIG. 16. The acoustic torque T per unit length on a strip of width $2a$ as a function of ka for $\alpha = \pi/4$ (45°). The vertical scale is the same as in Fig. 15.

fracted rays which leave the vertex in all directions. In a homogeneous medium they are straight lines and the corresponding diffracted wave fronts are spheres with the vertex as their center. Thus the diffracted wave is spherical, as we might expect. This expectation is verified by the exact solution of the boundary-value problem for the reduced wave equation, corresponding to diffraction by a cone. This confirmation lends support to the law of vertex diffraction. Additional support is provided by the asymptotic evaluation⁶ for short wavelengths of the various forms of the Kirchhoff approximation for diffraction through an aperture in a thin screen. This evaluation shows that the field at any point contains a sum of terms, one for each vertex on the edge of the aperture. Each of these terms corresponds to a vertex-diffracted ray, in agreement with our theory.

To determine the field on a vertex-diffracted ray let us still consider a homogeneous medium. Then the phase on such a ray at the distance r from the vertex is $kr + \Psi_i$, where Ψ_i is the phase of the incident field at the vertex. The amplitude varies as r^{-1} since the cross-sectional area of a tube of rays is proportional to r^2 . Therefore we write the field on the diffracted ray as

$$u = Cu_i(e^{ikr}/r). \tag{41}$$

Here C is the appropriate vertex or corner diffraction coefficient. It depends upon the directions of the incident and diffracted rays, the local geometry of the vertex and the local properties of the media at it. Dimensional considerations show that C is proportional to a length, so it must be proportional to k^{-1} .

The field diffracted by any cone when a plane wave is incident is of the form (41), as we find by analyzing the boundary value problem for the reduced wave equation. This not only confirms our theory but enables us to determine C when the boundary-value problem can be solved. It has been solved for elliptic cones, including the plane angular sector, by Kraus and Levine,²⁴ but C

²⁴ L. Kraus and L. Levine, Commun. Pure Appl. Math. 14, 49 (1961).

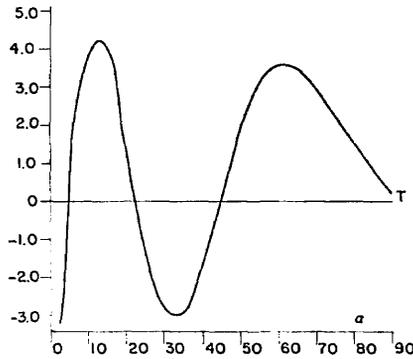


FIG. 17. The acoustic torque T on a circular disk of radius a as a function of the angle of incidence α for $ka=5$. The vertical scale is the value of $T |P^2 a^3 / \rho_0 c (ka)^2|^{-1}$. P , ρ_0 , and c are defined in the caption of Fig. 15. The values of x at which $T=0$ are equilibrium values, stable if $T_\alpha < 0$ and unstable if $T_\alpha > 0$. The curve does not apply near $\alpha=0$ (normal incidence) nor $\alpha=\pi/2$ (grazing incidence).

has not been evaluated. For circular cones, it has been evaluated by Felsen²⁵ and by Siegel *et al.*²⁶ The various forms of the Kirchhoff integral for diffraction through an aperture, when evaluated asymptotically,⁶ yield fields of the form (41) for each corner on the aperture edge. Here again the resulting expressions for C are different for the different versions of the Kirchhoff method, and none can be expected to coincide with the exact value contained in the solution of Kraus and Levine. We shall not consider any applications of vertex diffraction.

6. SURFACE-DIFFRACTED RAYS

Let us now consider an incident ray which grazes a boundary surface, i.e., is tangent to the surface. We assume that such a ray gives rise to a surface-diffracted ray in accordance with the *law of surface diffraction*: An incident ray and the resulting surface diffracted ray in the same medium are parallel to each other at the point of diffraction and lie on opposite sides of the plane normal to the ray at this point. When the two rays lie in different media, they obey the law of refraction.

The surface ray travels along the surface in a manner determined by the usual differential equations for rays on a surface. Therefore in a homogeneous medium it is an arc of a geodesic or shortest path on the surface. At every point the surface ray sheds a diffracted ray satisfying the law of surface diffraction. All of these properties of surface-diffracted rays follow from *Fermat's principle for surface diffraction*: A surface-diffracted ray from a point P to a point Q is a curve which makes stationary the optical length among all curves from P to Q having an arc on the boundary surface.

To illustrate these ideas, let us consider a boundary surface which is a cylinder parallel to the z axis. Let the

intersection of the cylinder with the xy plane be a smooth closed convex curve C and suppose that the medium surrounding the cylinder is homogeneous. To find a surface-diffracted ray from P to Q , both of which lie outside C , we observe that the optical length of a curve is proportional to its geometric length. Therefore to utilize Fermat's principle we imagine a string from P to Q , and consider it to be pulled taut. Then it will consist of two straight-line segments from P and Q to the cylinder and a geodesic arc along the cylinder. When P and Q are both in the xy plane the arc is just an arc of C ; otherwise it is a helical arc along the cylinder. It may wrap around the cylinder any number of times in either direction, so there are countably many surface diffracted rays from P to Q .

We define a surface-diffracted wavefront to be a surface orthogonal to a family (i.e., normal congruence) of surface-diffracted rays. In the example just described let us suppose that P is a line source parallel to the z axis. Then the surface-diffracted wavefronts which it produces are cylinders with generators parallel to the z axis. Their intersections with the xy plane are the involutes of the curve C .

Two examples of surface-diffracted rays are shown in Figs. 18 and 19. In both cases the grazing ray is incident horizontally from the left. One of the shed surface-diffracted rays is shown in Fig. 18 and two are shown in Fig. 19. In both cases the figures show cross sections of opaque screens surrounded by homogeneous media.

To construct the field on a surface diffracted ray we assume that the phase of the field increases in proportion to optical length along the ray. The amplitude is assumed to be proportional to the amplitude of the incident field at the point of diffraction. The coefficient of proportionality involves a new surface-diffraction coefficient B which depends upon local properties of the boundary surface and the media at the point of diffraction. Along the portion of the diffracted ray on the surface, the amplitude is assumed to vary in accordance with the principle of energy conservation in a narrow strip of rays on the surface. Thus it varies inversely as the square root of the width of this strip because of

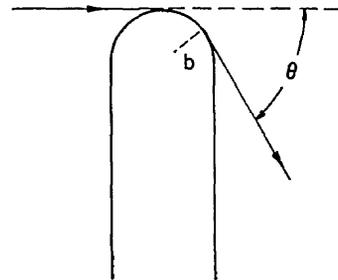


FIG. 18. Cross section of a screen of width $2b$ with a rounded end of radius b . A plane wave is normally incident upon it from the left. The dashed line is the shadow boundary. An incident ray which grazes the end of the screen is shown together with one of the surface diffracted rays which it produces in the shadow region. The angle between this ray and the shadow boundary is θ .

²⁵ L. B. Felsen, *J. Appl. Phys.* **26**, 138 (1955).

²⁶ K. M. Siegel, J. W. Crispin, and C. E. Schensted, *J. Appl. Phys.* **26**, 309 (1955).

convergence or divergence. However, it also decays because of radiation from the surface along the shed diffracted rays. The decay rate is assumed to be determined by a decay exponent α which depends upon local properties of the surface and media. The amplitude on a shed diffracted ray varies in the usual manner and is proportional to the field on the surface diffracted ray at the point of shedding. The proportionality factor involves another diffraction coefficient which can be shown to be the same as the coefficient B introduced above as a consequence of the principle of reciprocity. The details of this construction of the field are given for cylinders by Keller²⁷ and for three-dimensional surfaces by Levy and Keller.²⁸

The theory has been tested by applying it to diffraction of a cylindrical wave by a circular cylinder and comparing the predicted field with the asymptotic expansion of the exact solution. The two results agreed exactly when appropriate expressions were used for the diffraction coefficient B and the decay rate α . Thus the theory was confirmed and B and α were determined. The theory was further confirmed by making similar comparisons for diffraction by a parabolic cylinder, an elliptic cylinder (Levy²⁹), a spheroid (Levy and Keller³⁰) and the screen of Fig. 19 (Magiros and Keller³¹). Of course, in all cases the same values of B and α were employed.

A numerical test of the accuracy of the theory was made by Keller³² for the screen of Fig. 19. The field u far from the end of the screen in the shadow region can be written as $u = f(\theta, kb)e^{ikr + i\pi/4}(kr)^{-1/2}$. The function $f(\theta, kb)$ was evaluated for $\theta = \pi/4$ as a function of kb from the exact solution of the boundary-value problem and from the formula given by our theory. The results are shown in Fig. 20. The upper curves and points apply to a screen on which $\partial u / \partial n = 0$; the lower ones to a screen on which $u = 0$. The solid curves are obtained when a simple

Fig. 19. Cross section of an infinitely thin screen with a cylindrical tip of radius b . A plane wave is normally incident upon it from the left. The dotted line is the shadow boundary. An incident ray which grazes the tip is shown together with two of the surface diffracted rays which it produces. One of them is reflected from the screen, and both ultimately make the angle θ with the shadow boundary.

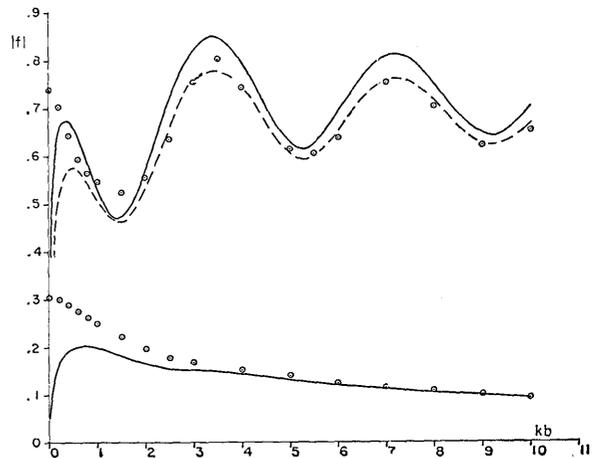
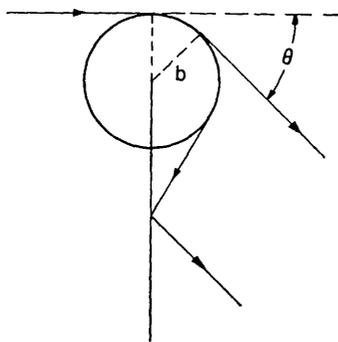


Fig. 20. The far-field amplitude $|f(\pi/4, kb)|$ in the shadow of the screen of Fig. 19 in the direction $\theta = \pi/4$ as a function of kb . The upper curves and points apply to a screen on which $\partial u / \partial n = 0$ while the lower ones pertain to a screen on which $u = 0$. The encircled points were obtained by laborious numerical computation of the series solution of the boundary-value problem; the curves were obtained from the formulas given by the geometrical theory of diffraction. The dashed curve was obtained from a formula in which an improved expression for α was used.

expression is used for the decay exponent α and the dashed curve when a more accurate expression is used for α . The agreement between the curves given by our theory and the points from the exact solution appears to be quite good for $kb > 2$. Similar curves for the screen of Fig. 18 are shown in Fig. 21, but there is no exact solution with which to compare them.

Diffracted rays have also been introduced by Franz and Depperman³³ who called the associated waves "creeping waves." They applied them to explain oscillations in the measurements of the radar back-scattering cross section of metallic circular cylinders. A refinement of the method described above for determining B and α was given by Levy and Keller.³⁴ They showed how variation of the curvature of the diffracting surface modifies the values of B and α determined from a circular cylinder. The determination of the field near the diffracting surface requires special considerations, described in references 27 and 28, because the surface is a caustic of the diffracted rays. Another special treatment described by Buchal and Keller¹⁶ is required near the shadow boundary. Near the point of diffraction, where the shadow boundary meets the diffracting surface, a still different special analysis due to V. Fock and to C. L. Pekeris is required. A uniform expression for the field in these various regions has been obtained, in two-dimensional cases, by Logan and Yee³⁵ by combining

²⁷ J. B. Keller, IRE Trans. Antennas and Propagation AP-4, 243 (1956).

²⁸ B. R. Levy and J. B. Keller, Commun. Pure Appl. Math. 12, 159 (1959).

²⁹ B. R. Levy, J. Math. and Mech. 9, 147 (1960).

³⁰ B. R. Levy and J. B. Keller, Can. J. Phys. 38, 128 (1960).

³¹ D. Magiros and J. B. Keller, Commun. Pure Appl. Math. 14, 457 (1961).

³² J. B. Keller, J. Appl. Phys. 30, 1452 (1952).

³³ W. Franz and K. Depperman, Ann. Physik 10, 361 (1952).

³⁴ B. R. Levy and J. B. Keller, IRE Trans. Antennas and Propagation, AP-7, 552 (1959).

³⁵ N. A. Logan and K. S. Yee, Symposium on Electromagnetic Theory, U. S. Army Mathematics Research Center, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin (April, 1961).

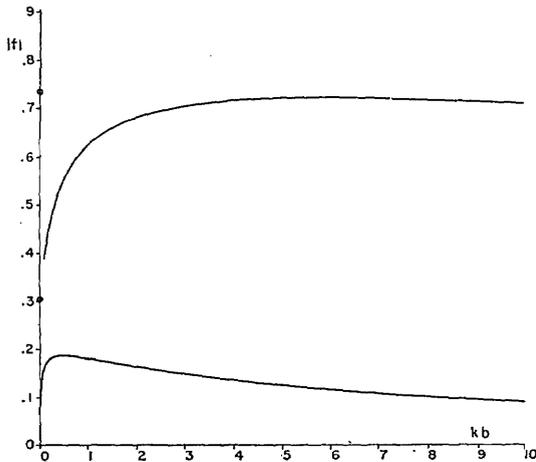


FIG. 21. The far-field amplitude $|f(\pi/4, kb)|$ in the shadow of the screen of Fig. 18 in the direction $\theta = \pi/4$ as a function of kb . The curves are based upon the geometrical theory of diffraction while the points at $kb=0$ are determined from the solution for diffraction by a half-plane. The upper curve and point apply to a screen on which $\partial u / \partial n = 0$; the lower ones to a screen on which $u = 0$. Probably only the decreasing portions of the curves are correct, and most likely the amplitude decreases monotonically for all values of kb .

the method of Fock and Pekeris with the geometrical considerations we have described.

7. FURTHER DEVELOPMENTS

The geometrical theory of diffraction which we have described has been applied to inhomogeneous media by Friedrichs and Keller³⁶ and by Seckler and Keller.³⁷ It has also been extended by the introduction of complex or imaginary rays.²

A similar theory can be constructed to describe any kind of wave propagation and this has been done to some extent for water waves, elastic waves, quantum-mechanical waves, surface waves, etc. When anisotropic media are present, or when more than one propagation velocity exist, there are more kinds of rays and the theory is correspondingly more complicated. However the principles are essentially unchanged.

From a mathematical point of view, the field constructed by means of the present theory is the leading part of the asymptotic expansion of the exact field for small values of λ or large values of k . The full asymptotic expansion consists of additional terms in the amplitude of the field on each ray. These terms are smaller than the first term by factors of k^{-n} , $n = 1, 2, \dots$. These statements have been proved in special cases, but not in general.

³⁶ K. O. Friedrichs and J. B. Keller, *J. Appl. Phys.* **26**, 961 (1955).

³⁷ B. D. Seckler and J. B. Keller, *J. Acoust. Soc. Am.* **31**, 192 (1958).

Apêndice III

AIII. Artigo: Imagem pseudoscópica em um processo de dupla difração com uma fenda: Propriedades de ponto crítico

Pseudoscopic imaging in a double diffraction process with a slit: critical point properties

José J. Lunazzi and Noemí I. Rivera

*Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin, Caixa Postal 6165,
13083-852 Campinas, SP, Brazil*

Received April 4, 2005; revised September 19, 2005; accepted January 20, 2006; posted January 26, 2006 (Doc. ID 61318)

Pseudoscopic (inverted depth) images that keep a continuous parallax were shown to be possible by use of a double diffraction process intermediated by a slit. One diffraction grating directing light to the slit acts as a wavelength encoder of views, while a second diffraction grating decodes the projected image. The process results in the enlargement of the image under common white light illumination up to infinite magnification at a critical point. We show that this point corresponds to another simple-symmetry object–observer system. Our treatment allows us to explain the experience by just dealing with main ray directions. © 2006 Optical Society of America

OCIS codes: 050.1970, 090.1970, 090.2870, 110.0110, 110.2990, 110.6880.

1. INTRODUCTION

Direct pseudoscopic images are uncommon in optics. Recently, a pseudoscopic image was demonstrated in refractive optics,¹ but more widely known are registered images, such as inverted stereo pairs or holographic images. Pseudoscopic holographic imaging may render inverted depth images in continuous parallax exclusively under monochromatic light or through some process that renders the final image monochromatic at least over the horizontal field of view. We demonstrated previously,² that diffraction could be combined with a simple process to obtain reversed depth images whose continuous horizontal parallax is due exclusively to diffractive elements. This new kind of image is of interest because it opens up the possibility of comparing the its parallax field and image quality with those produced by conventional imaging systems. New optical systems based on double diffraction intermediated by a refractive element³ could also benefit from knowledge of the properties of a simpler system such as ours. In this paper we show additional properties of this kind of image: image resolution, presence of astigmatism, viewing angular field, field of view, and magnification. We analyze the case of propagation in a plane that is not perpendicular to the gratings, giving experimental evidence of the pseudoscopic image, its spectral composition, its magnification, and the existence of a critical point.

The system is depicted in the simple symmetry of Fig. 1. Our system consists of two identical diffraction gratings, *DG1* and *DG2*, symmetrically located at either side of an aperture *a*. The plane of the figure corresponds to a horizontal plane, while the aperture of the slit and the lines of the grating are in a vertical direction. λ_M , λ_m are the extreme wavelengths of the visible spectrum. An object of white or gray tonality is illuminated by common white light diffusing at a very wide angle, for example, from point *A*, whose coordinates are *X*, *Y*, *Z*. X_i is the ge-

neric coordinate corresponding to the point of incidence of the light rays that impinge on the first grating and may reach the slit after diffraction.

We consider the part of the beam reaching the grating that, after diffraction, travels toward the aperture. Z_R is the distance from the slit to the first grating, made equal to the distance from the slit to the second grating, the symmetry condition. Deviation of rays by diffraction is given by the basic grating equation,

$$\sin \theta_i - \sin \theta_d = \lambda \nu, \quad (1)$$

where θ_i represents the angle of incidence of light traveling from point *A* to points on the grating, θ_d represents the angle of diffraction of light that travels from points on the grating to point *P*, ν is the inverse of the grating period, and λ represents the wavelength value corresponding to each ray.

We see from Fig. 1 and Eq. (1) that the angle θ_i of incidence into the first grating through which the wavelength λ will be allowed to enter the slit can be obtained from the equation

$$\theta_i = \arcsin \left[\frac{(X - X_i)}{\sqrt{(X - X_i)^2 + Z^2}} \right], \quad (2)$$

where the value of X_i is known from the relationship

$$\frac{(X - X_i)}{\sqrt{(X - X_i)^2 + Z^2}} - \frac{X_i}{\sqrt{X_i^2 + Z_R^2}} = \lambda \nu. \quad (3)$$

This is the way in which we demonstrated the formation of the pseudoscopic image. In Fig. 1, we are dealing with an image that is convergent in the horizontal plane but that does not converge vertically due to beam divergence in the vertical plane. This situation changes when we consider an observer, because the reduced diameter of the pu-

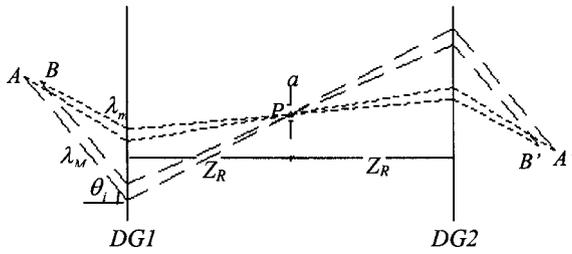


Fig. 1. Ray-tracing scheme for the depth inverted image.

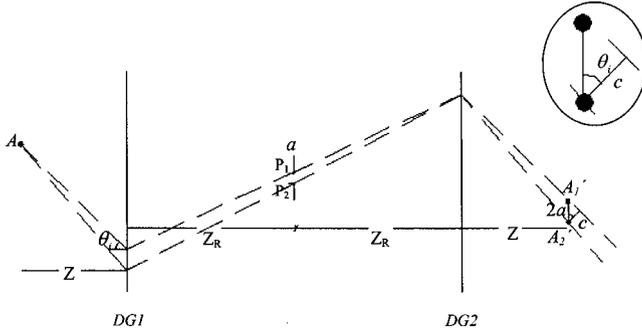


Fig. 2. Schematic ray tracing showing the limit of sharpness due to the width of the slit.

pils of the observer's eyes causes the image to be convergent on the retinas.

2. IMAGE RESOLUTION

The perfect symmetry of the system precludes the existence of aberrations in a horizontal ray-tracing analysis, so it is not appropriate to perform the classical first-order and third-order aberration analysis. The image quality can be degraded only horizontally due to the width of the slit or the defects of the diffracting elements. The slit does not interfere in the direct visual observation process vertically, but it creates a lateral wavelength blurring of the same angular extension as its aperture, similar to that of a pinhole camera. We see the situation in Fig. 2, where the width of the slit was effectively considered by including the two rays that pass through the borders of the slit instead of a single ray going through its center. Two points A_1' and A_2' are the symmetrical of the object point A corresponding to the border points P_1 and P_2 , defining an extension $2a$. The dashed lines were added to the scheme to aid in understanding this. It appears to the observer that the image point has an extension $c = 2a \cos \theta_i$.

3. PRESENCE OF ASTIGMATISM AND CONSIDERATIONS ON IMAGE QUALITY

It happens that the eye of the observer will always be focusing at points whose distance corresponds to the distance traveled by the light in the vertical plane and, at the same time, at points where the slit and the second diffraction grating produce the image in the horizontal plane. This combination of two focal properties creates astigmatism (see Fig. 3) which is proportional to the diameter of the eye's pupil. Calculating with the Emsley⁴ model of the eye and considering a pupil diameter of

3 mm and the data of our experiment, the astigmatic image of a point becomes 0.07 mm high at the retina.

The perception of depth by binocular vision is a triangulation operation acting on the horizontal plane, so that depth is determined by the horizontal rays. We can highlight the particular properties of our system that have reduced chromatic aberrations because of the wavelength spreading distribution. Surface flaws of the diffractive elements are less important due to the tolerance of the transmission gratings; this causes deflection to be dependent mainly on the period of the grating and very little on the inclination of the grating. Geometric distortion exists only as the result of different vertical and horizontal scales, linearity being preserved on each of the scales. They can eventually be matched by properly choosing the value of the period for both gratings.

4. VIEWING ANGULAR FIELD

The horizontal angular parallax can be calculated by considering two points of the object and the path of light whose wavelength values are on extremes of the spectrum. The angular region limited by these rays is the common region for simultaneous observation of the two points and includes all intermediate points (see Fig. 4). X_{Ai} , X_{Bi} are coordinates corresponding to the points of incidence of the light rays from points A and B, respectively in the first grating. Due to the symmetry of the system, all rays reach the second grating at points such as X_{Ai}' , X_{Bi}' . Employing Eq. (3) to get the value of X_i and introducing that value into Eq. (2) gives

$$\theta_i = \theta_i(X, Z, Z_R, \nu, \lambda), \quad (4)$$

an equation that we do not calculate but solved numerically. We can then obtain the angular field $\Delta\theta$ by calculating two λ values at the extreme wavelengths at the corresponding extreme lateral points of the object and subtracting them. The analysis must then be made for points at extreme lateral and depth points of the object. The resulting expression is

$$\Delta\theta = \theta_i(X, Z, X_B, Z_B, Z_R, \nu, \lambda_M) - \theta_i(X, Z, X_A, Z_A, Z_R, \nu, \lambda_m). \quad (5)$$

We solve it numerically by means of the software Mathematica 4.1. The calculated values for the data of our experimental case are given in Table 1 together with the experimental results. It is possible to obtain a case where the expression for $\Delta\theta$ is simple by choosing the case that considers point A in a position where λ_M is diffracted perpendicularly through DG1, thus impinging into DG2 and point B at a position where λ_m does the same. Considering that Eq. (2) can then be replaced by

$$\theta_i = \arcsin \lambda \nu, \quad (6)$$

the symmetry of the problem allows us to use the same values of the field $\Delta\theta$ at the second stage to analyze the viewing situation, so that we have

$$\Delta\theta = \arcsin \lambda_M \nu - \arcsin \lambda_m \nu \quad (7)$$

as the value of the horizontal angular parallax. For $\lambda_M = 650$ nm and $\lambda_m = 450$ nm we obtain $\Delta\theta = 6.5^\circ$. Doubling

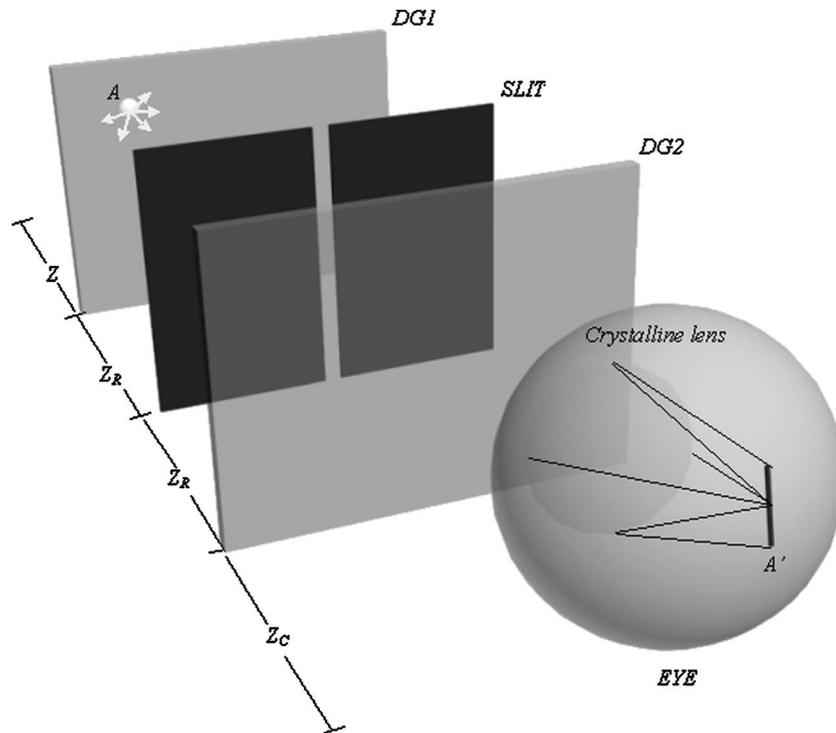


Fig. 3. Schematic perspective view of the setup including ray tracing that generates vertical astigmatism. A, point object; A, astigmatic image.

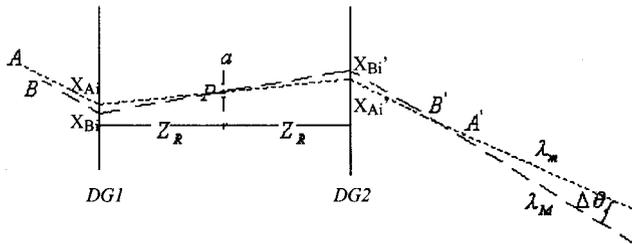


Fig. 4. Ray-tracing scheme for calculating the angular field of view.

Table 1. Experimental Checking of the Angular Field^a

$\lambda_A = 500 \text{ nm}$	$\lambda_B = 670 \text{ nm}$	Theoretical	Measured
$x_A \text{ (mm)}$	$x_B \text{ (mm)}$	$\Delta\theta_T \text{ (}^\circ\text{)}$	$\Delta\theta_E \text{ (}^\circ\text{)}$
28	17	2.7	2.4
$z_A \text{ (mm)}$	$z_B \text{ (mm)}$	—	—
209	179	—	—

^aValues obtained for $Z_R = 300 \text{ mm}$.

the number of lines per millimeter causes this field to be doubled, indicating that it is possible to create a system for binocular observation of the image.

5. FIELD OF VIEW AND CRITICAL POINT

Figure 5 shows as a shadowed angle the object field of view for a fixed position (x_c, z_c) of the observer. CP is the point that is symmetrical to the observer’s position. Assuming that two light rays go through this point and reach the observer’s position, X_{CPi1} and X_{CPi2} are their ab-

scissas. The region seen of an object depends on the object distance in a manner that resembles that of an object under a converging lens: It can change dramatically when close to a certain critical distance that renders infinite magnification. This happens at the critical point CP as follows: By including in the system an object at three different depth positions O_1, O_2, O_3 , we can notice that a very small area is imaged as the object approaches the critical point. The situation is explained at point O_2 , in the case when the viewpoint is symmetric to the object. It is clear from Fig. 5 how magnification may vary with longitudinal object position. The whole field of view between X'_2 and X'_1 can be fulfilled either by some extension of the object or by a single object point in the critical case when the object is at CP. Comparing point O_1 with point O_3 , the crossing of rays that correspond to laterally extreme object points explains the lateral inversion on the image.

6. CASE OF PROPAGATION IN A PLANE THAT IS NOT PERPENDICULAR TO THE GRATINGS

Our first analysis was based on Figs. 1 and 2 assuming that the observer is located on the same horizontal plane as the object, as shown for observer O_1 in Fig. 6. That horizontal plane is then the plane H of wavelength dispersion. If we now consider the observer being located over or under that plane, the difference would be in that case that dispersion does not occur perpendicularly to the gratings. Let us analyze now the propagation in another plane at an angle α to plane H such that the image is seen by the vertically displaced observer O_2 . All rays that diverge in that upward direction do not properly satisfy Eq. (1)

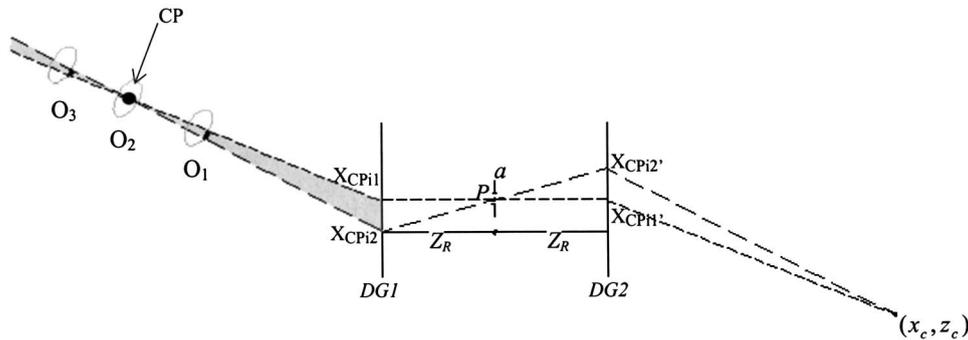


Fig. 5. Ray-tracing scheme showing object field of view. Object in three positions around the critical point: O_1 , in front of the critical point; O_2 , at the critical point; O_3 , behind the critical point.

but satisfy another one⁵ that includes the value of its angle of incidence as determined by polar coordinates (θ, φ) :

$$\sin \theta_i - \sin \theta_d = \lambda \nu / \sqrt{1 - \varphi^2}. \tag{8}$$

This diffraction case is called “conical diffraction” by some authors.⁶ Although a ray may rise over the oblique plane, it goes under it after the slit, and finally the point-symmetric situation remains the same. A new plane of symmetry could be drawn for each ray that enters at any azimuthal angle, but the image point i can no longer be precisely determined, and some aberration may be present. The vertical parallax and field of view are easy to predict by triangulation because both are directly allowed by the height of the slit.

7. INCREASING THE DISTANCE TO THE SECOND GRATING

When the distance from the second grating to the slit is doubled, because the angles of incidence at DG2 are the same, two consequences are clear: the image is magnified because it is extended through the grating, and the observer must move to (x'_c, z'_c) to keep the critical point at the same place as before (see Fig. 7). If the observer moves laterally to follow the view of the object while the grating is being displaced, the result is that of Fig. 8, and the position of the critical point comes closer to the system.

8. EXPERIMENTAL RESULTS

We employed two plastic embossed holographic transmission gratings of the same type, which are commercially available for architectural or educational purposes. Both had 533 ± 5 lines/mm and were fixed between two glass plates 2 mm thick. The effective area used was 60 mm \times 40 mm. They were located 600 ± 2 mm apart in a parallel position, and a vertical black paper slit 0.7 ± 0.15 mm wide was inserted between the two gratings. Parallelism of the grating planes was verified to better than ± 1 mm by making coincident reflections of a diode laser beam that traversed the slit, impinged on both gratings, and returned to the laser exit window. Photographs were made with a SONY video 8 Handycam camera connected to a Pentium I computer to get 240×320 -pixel resolution.

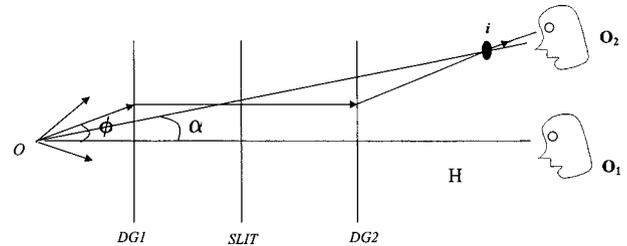


Fig. 6. Single ray path for a vertically displaced observer, O_2 .

In an initial experiment we employed an 85-mm-long almost vertical luminous filament from a 300 W halogen lamp, inclined with its higher extreme at a distance 230 mm from the grating, closer than its other extreme, which was 280 mm from it. The camera was 1015 mm from the grating. The object was inclined frontally to show with a stereo photographic pair that the image is pseudoscopic. We adopted two viewpoints showing the filament in a frontal view and in a lateral view, demonstrating the depth inversion in Fig. 9 because the right-hand-side view shows a vertical line while the left-hand-side view shows the upper part inclined to the left, a parallax sequence corresponding to an object that is inclined to the back.

A second experiment with the object at the same position showed the image seen from the same viewpoint (red wavelength) as shown in Fig. 10, where we compare the unfiltered image with the image as seen alternatively with two interference filters. The wavelength limitation shows the correspondence between wavelength value and the horizontal part of the image.

Our third experiment used as object a 50 W halogen lamp with mirror and compared the original image with the image obtained after doubling the distance from the second grating to the slit. The object was located at $X = 221 \pm 5$ mm, $Z = 68 \pm 5$ mm, with the observer at $x_c = 202 \pm 5$ mm and $z_c = 928 \pm 5$ mm. The observer’s viewpoint needed to be changed 80 mm to the right. The image is seen in Fig. 11, magnified by a factor of 4. In our fourth experiment we employed as object the shadow of a paper clip located against a diffusing background. We needed to do that instead of illuminating the clip itself because we needed a brighter image on the camera in order for it to be accepted by the exposure system. The average mean intensity in this case is much higher. The clip is made of wire 1 mm thick, and we employed its asymmetric shape to identify the inversion properties corresponding to the

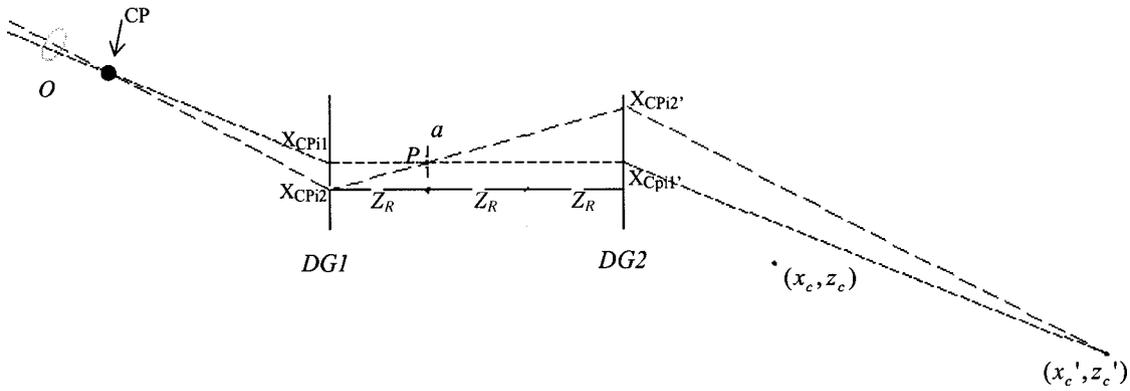


Fig. 7. Observer’s position that keeps the critical point invariant when the second grating is displaced.

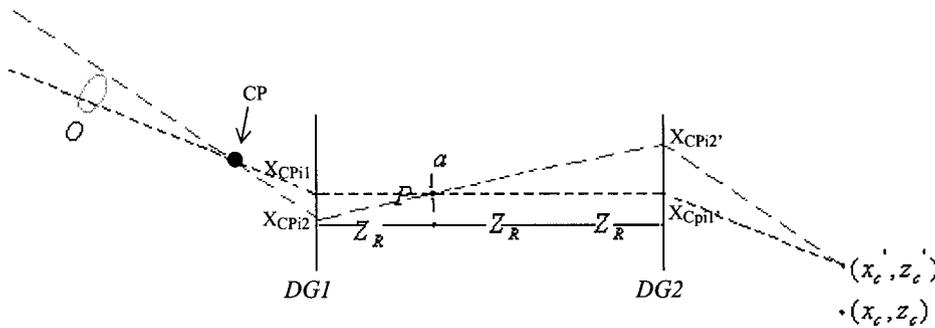


Fig. 8. Ray-tracing scheme showing magnification and observer’s position when the second grating’s distance is doubled.

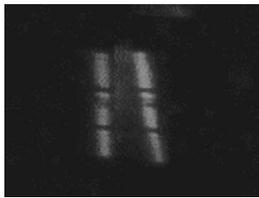


Fig. 9. Photographic evidence of the pseudoscopy of the image: right-hand-side image (blue wavelength) and left-hand-side image (red wavelength).

dispersion direction. The situation is illustrated in Fig. 12 and the resulting images in Fig. 13. The background remained fixed at 1680 mm distance, while the clip was located at three different positions: (a) between the system and the critical point at 960 mm, (b) at the critical point at 1270 mm, and (c) farther from the critical point at 1540 mm. Besides showing the inversion clearly, the image appears quite undistorted, and infinite magnification is evident through the entire extension of the elongated image resulting when the critical point is reached.

Our final experiment consisted of measuring the viewing angular field. For simplicity of comparison the result has been included with the theoretical values of Table 1.

9. CONCLUSIONS

The symmetry of the developed system shows an easy way to analyze the system’s images, and the quality of the images is close to the resolution of the naked eye. Although intended not for educational purposes but for developing new imaging systems having less weight and volume, the system is so simple that any person with minimal skill can perform experiments demonstrating

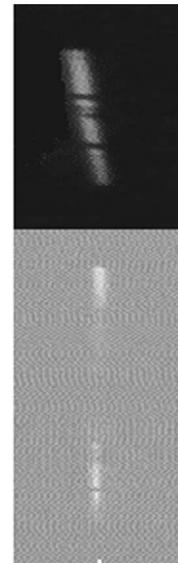


Fig. 10. Top, unfiltered red-wavelength view of the filament; middle, same view after filtering to 634–640 nm bandwidth; bottom, same view as top image but filtered to 643–657 nm bandwidth.

the new properties of diffractive white light imaging. We may then conclude that the ray distribution generated after the second diffraction may always be considered a decoding of the effect of the primary grating and that the original intensity distribution of rays from the object has been maintained through this selective wavelength distribution process. Although the diffracting element acts in one direction only and does not project an image, it is pos-

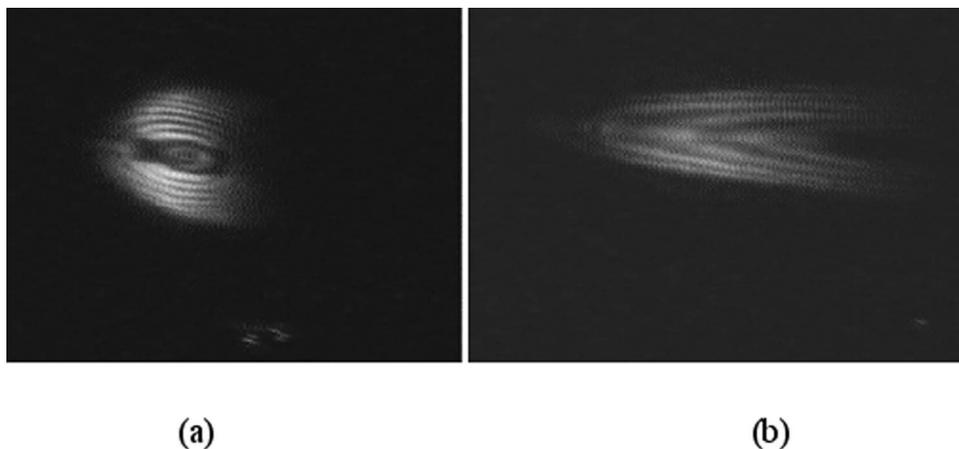


Fig. 11. Magnification by displacement of the second grating: (a) undisplaced, (b) displaced 300 mm.

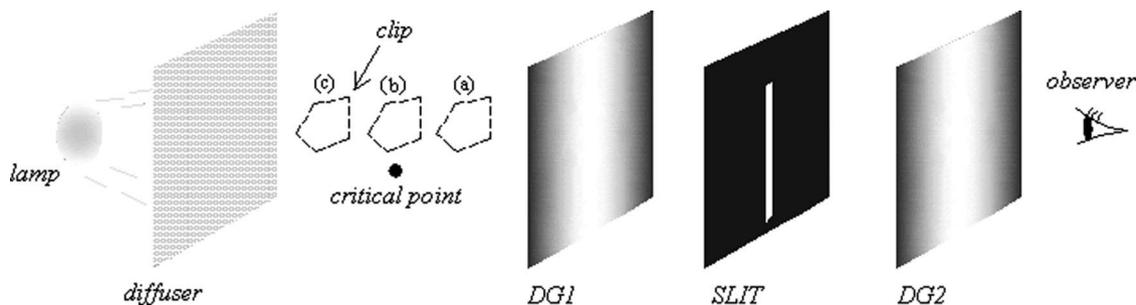


Fig. 12. Schematic view of the experiment performed to show the properties of the critical point.

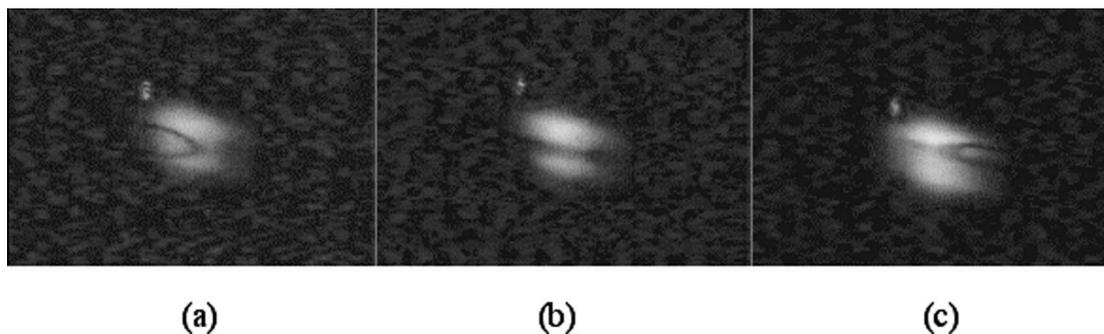


Fig. 13. Sequence of object positions at increasing distances showing the inversion of the image: (a) between the first grating and the critical point, (b) at the critical position, and (c) farther from the critical position, showing lateral inversion.

sible to have a two-dimensional equivalent by using circular diffraction gratings, a result to be published elsewhere.

ACKNOWLEDGMENTS

The Pro-Reitoria de Pós Graduação of Campinas State University-UNICAMP is acknowledged for a fellowship for Noemí Inés Rodríguez Rivera. The Fundo de Assistência ao Ensino e à Pesquisa-FAEP of Campinas State University-UNICAMP is acknowledged for financial support. Paul and Silvia Baldi are acknowledged for reviewing the English grammar.

The authors can be reached by e-mail as follows: José J. Lunazzi, lunazzi@ifi.unicamp.br, and Noemí I. Rivera, nriviera@ifi.unicamp.br.

REFERENCES

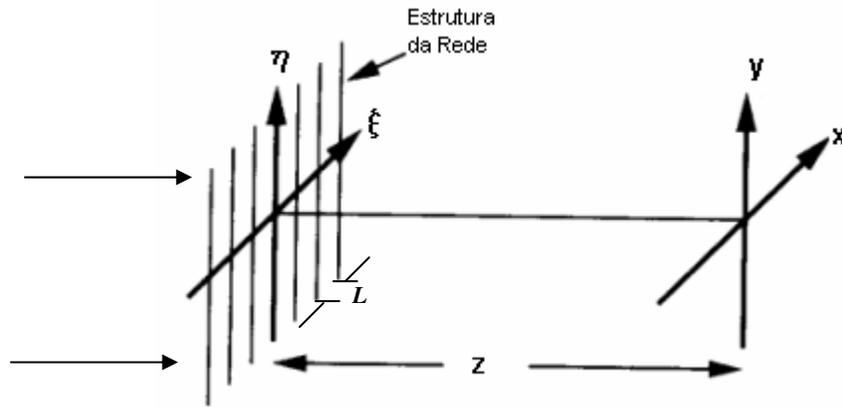
1. F. Okano and J. Arai, "Optical shifter for a three-dimensional image by use of a gradient-index lens array," *Appl. Opt.* **41**, 4140–4147 (2002).
2. J. J. Lunazzi and N. I. Rivera, "Pseudoscopic imaging in a double diffraction process with a slit," *Opt. Express* **10**, 1368–1373 (2002).
3. R. A. Hyde, "Very large aperture diffractive telescopes," *Appl. Opt.* **38**, 4198–4212 (1999).
4. L. S. Pedrotti and F. L. Pedrotti, "Optics of the eye," in *Optic and Vision* (Prentice Hall, 1998), pp. 202–203.
5. J. M. Simon and M. A. Gil, "Diffraction grating and optical aberrations: a new and exact formulation," *Appl. Opt.* **24**, 2956–2958 (1985).
6. E. N. Hogert, M. A. Rebollo, and N. G. Gaggioli, "Alignment and/or tilting measurement by means of conical diffraction phenomena," *Opt. Laser Technol.* **23**, 341–344 (1991).

Apêndice IV

AIV. Efeito Talbot e Lau

AIV.1 Efeito Talbot

O que acontece quando se ilumina uma estrutura periódica localizada no plano $\eta\xi$ e é observada no plano de observação XY?



AIV.1 Rede senoidal iluminada com uma onda plana

A função de transmitância da estrutura periódica é: $t_A(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left[1 + m \cdot \text{Cos} \left(2 \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{L} \right) \right]$

Utilizando a aproximação de Fresnel (aproximação paraxial), obtemos a distribuição no plano XY:

$$U(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{m}{4} e^{-j\pi \frac{\lambda \cdot z}{L^2}} e^{j2\pi \frac{x}{L}} + \frac{m}{4} e^{-j\pi \frac{\lambda \cdot z}{L^2}} e^{-j2\pi \frac{x}{L}}$$

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + m \cdot e^{\frac{-j\pi \cdot \lambda \cdot z}{L^2}} \text{Cos} \left(2 \cdot \pi \cdot \frac{x}{L} \right) \right]$$

$$I(x, y) = \frac{1}{4} \cdot \left[1 + 2 \cdot m \cdot \text{Cos} \left(\frac{\pi \cdot \lambda \cdot z}{L^2} \right) \cdot \text{Cos} \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{L} \right) + m^2 \text{Cos}^2 \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{L} \right) \right]$$

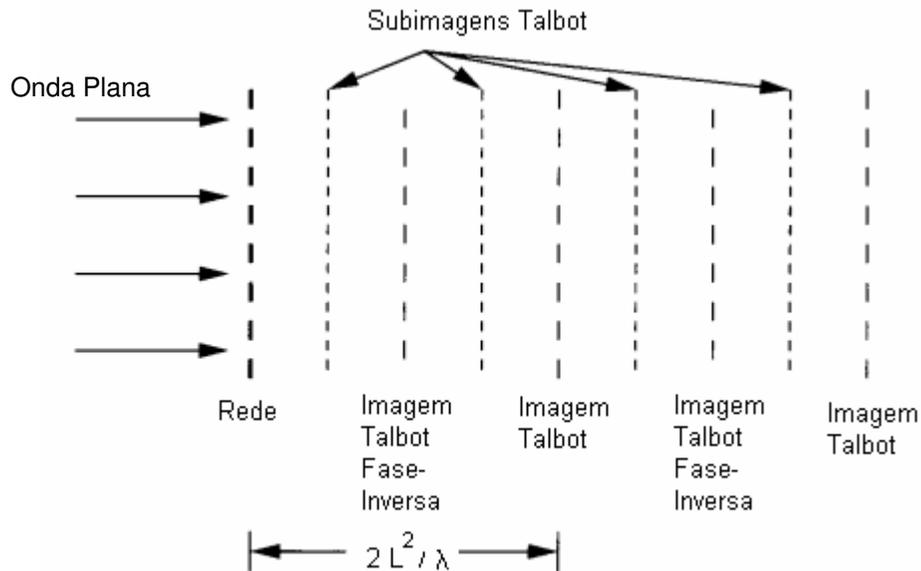
Considerando: $\frac{\pi \cdot \lambda \cdot z}{L^2} = n \cdot \pi$ então; $z = \frac{n \cdot L^2}{\lambda}$

Se n é par: $U(x, y) = \frac{1}{2} \left[1 + m \cdot \text{Cos} \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{L} \right) \right]$ Auto -imagem

$$I(x, y) = \frac{1}{4} \left[1 + m \cdot \text{Cos} \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{L} \right) \right]^2$$

Se n é ímpar: $U(x, y) = \frac{1}{2} \left[1 - m \cdot \text{Cos} \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{L} \right) \right]^2$ Auto -imagem deslocada

Formando-se assim uma replica da estrutura do objeto (ver Fig. AIV.2), neste caso, o objeto é a estrutura periódica da rede e pode ser obtida em qualquer comprimento de onda.



AIV.2 Auto-imagem Talbot, iluminando com uma onda plana à rede.

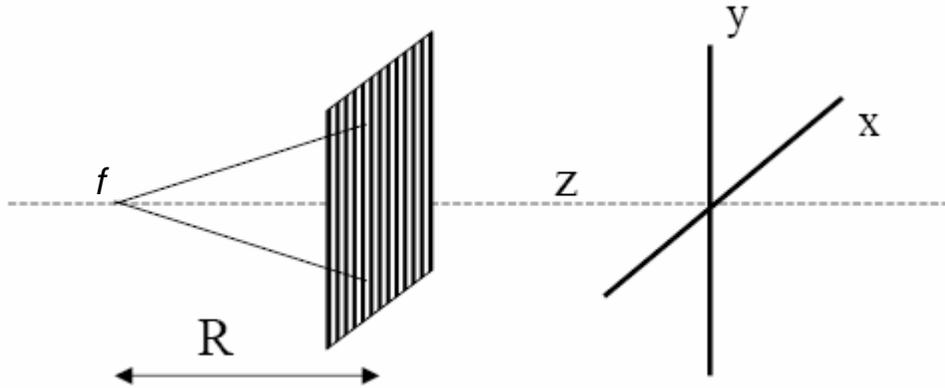
Quando iluminamos com uma onda plana inclinada na direção perpendicular à rede, obtemos que o padrão de difração se desloca.

$$e^{-j \cdot k \xi \cdot \text{sen} \alpha} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{m}{4} e^{-j \pi \frac{\lambda \cdot z}{L^2}} e^{j 2 \pi \frac{x-z \cdot \text{sen} \alpha}{L}} + \frac{m}{4} e^{-j \pi \frac{\lambda \cdot z}{L^2}} e^{-j 2 \pi \frac{x-z \cdot \text{sen} \alpha}{L}}$$

e quando iluminamos com uma onda plana inclinada na direção da rede, o padrão de difração é o mesmo.

$$e^{-j.k\eta \sin\alpha} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{m}{4} e^{-j\pi \frac{\lambda.z}{L^2}} e^{j2\pi \frac{x}{L}} + \frac{m}{4} e^{-j\pi \frac{\lambda.z}{L^2}} e^{-j2\pi \frac{x}{L}}$$

O que acontece quando iluminamos com uma fonte pontual?



AIV.3 Rede senoidal iluminada com uma fonte pontual f.

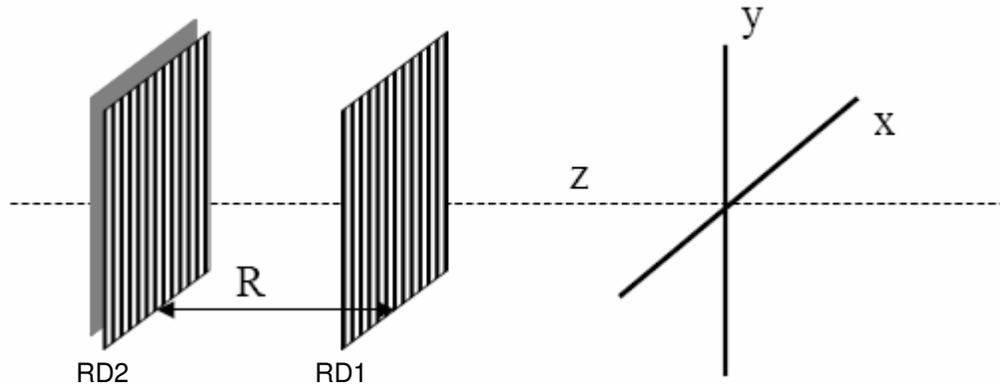
$$U(x, y) = \sum m_i e^{j\pi \frac{\lambda.i^2.Rz}{L^2(R+z)}} e^{j2\pi \frac{i.R}{L(R+z)}x}$$

Considerando: $\frac{\pi.\lambda.R.z}{L^2(R+z)} = n.\pi$

Se n é par: $L' = \frac{(R+z).L}{R} \Rightarrow z = \frac{2.L'^2}{\lambda}$ Auto-imagem com aumento

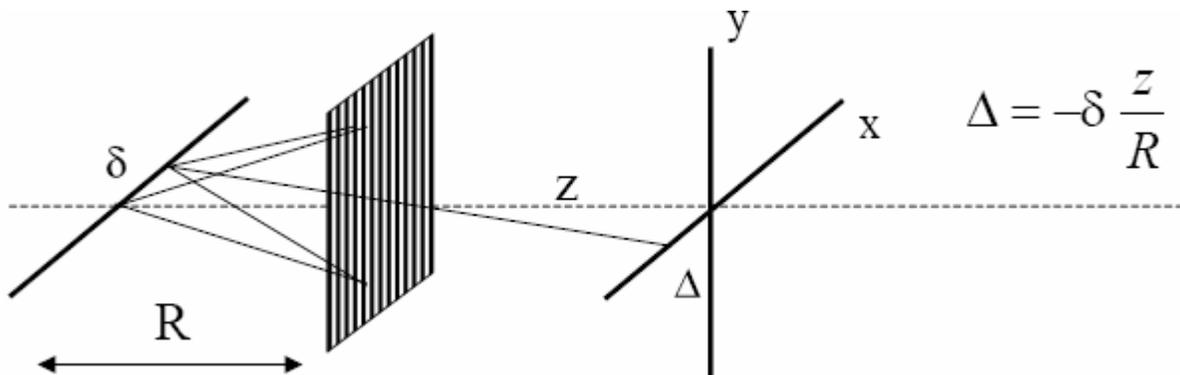
AIV.2 Efeito Lau

O que acontece quando se ilumina uma estrutura periódica com outra estrutura periódica iluminada com luz incoerente e é observada a uma distância z no plano de observação XY?



AIV.4 Rede senoidal iluminada com a iluminação de luz coerente de outra rede senoidal.

Cada linha na primeira rede RD1 considera-se como um conjunto de fontes pontuais incoerentes. No plano XY, teremos a superposição incoerente dos padrões de difração devidos a cada uma das fontes.

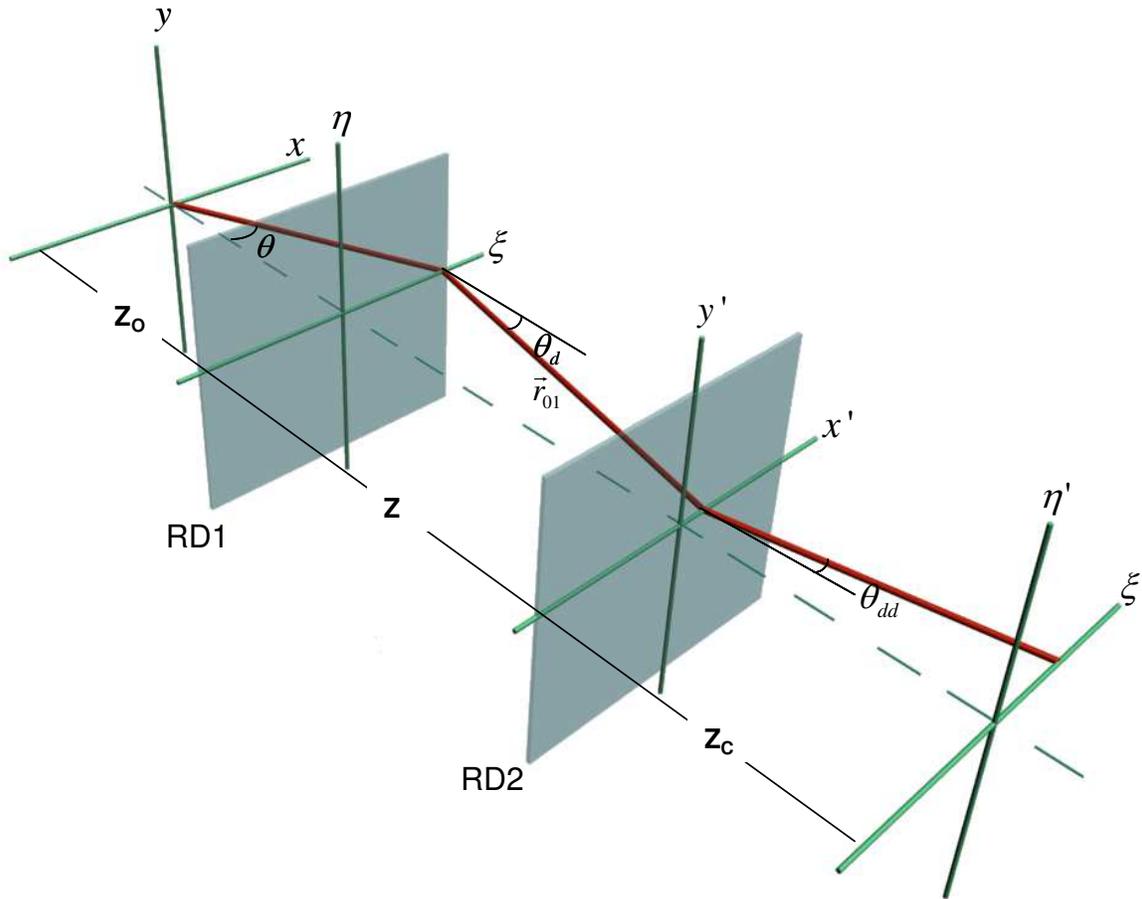


AIII.5 Traçado de raios para a obtenção das franjas de Lau.

Se a distância Z estamos em uma auto-imagem e as contribuições das distintas linhas da primeira rede são auto-imagens deslocadas a uma distancia múltiplo de seu período L' , o obtemos são a franjas de Lau.

Apêndice V

AV. Intensidade da imagem de dupla difração sem elementos intermediários usando a teoria de Huygens – Fresnel



AV.1 Notação de coordenadas cartesianas para a formação de imagem por dupla difração

Segundo a teoria escalar de difração de Huygens-Fresnel

$$U(x', y') = \frac{1}{j\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \frac{e^{j.k.r_{01}}}{r_{01}} d\xi d\eta \tag{AV-1}$$

A onda objeto é uma onda plana incidindo no plano da primeira rede de difração com um ângulo θ em relação ao eixo Z:

$$e^{j.k.\xi.\text{sen}\theta}$$

$$r_{01} = \sqrt{Z^2 + (x' - \xi)^2 + (Y - \eta)^2}$$

Vamos considerar em nosso caso que a difração acontece só no plano horizontal XZ então:

$$r_{01} = \sqrt{Z^2 + (x' - \xi)^2}$$

$$U(x') = \frac{J_2\left(\frac{m}{2}\right)}{j \cdot \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j \cdot k \cdot \xi \cdot \sin \theta} \cdot e^{j \cdot k \cdot \sqrt{Z^2 + (\xi - x')^2}} \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{m}{2} \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot \xi)}}{\sqrt{Z^2 + (\xi - x')^2}} d\xi \quad (\text{AV-2})$$

$$U(x') = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j \cdot k [\xi \cdot \sin \theta + \sqrt{Z^2 + (\xi - x')^2} + 4\pi \cdot f_0 \cdot \xi]} d\xi}{\sqrt{Z^2 + (\xi - x')^2}} \quad (\text{AV-3})$$

$$U(x') = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{j \cdot k \cdot U(\xi)} d\xi \quad ; \quad f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{Z^2 + (\xi - x')^2}} \quad (\text{AV-4})$$

A solução geral para o tipo de integral A-1 usando o método de fase estacionária é:

$$M(X') = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot e^{j \cdot k \cdot M(\xi)} d\xi \quad (\text{AV-5})$$

$$M(X') \approx \sqrt{\frac{2\pi}{|k| \cdot |M''(\xi_0)|}} \cdot f(\xi_0) \cdot e^{j \cdot k \cdot M(\xi_0)} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{4} \text{sign}(k) \cdot \text{sign}(M''(\xi_0))} \quad (\text{AV-6})$$

$$\text{para: } M'(\xi_0) = 0 \quad , \quad \text{e grandes valores de } k \quad (\text{AV-7})$$

Resolvendo a integral pelo método de fase estacionária.

$$U(\xi) = \xi \cdot \sin \theta + \sqrt{Z^2 + (\xi - x')^2} + \beta \cdot \xi = \sqrt{Z^2 + (\xi - x')^2} + \gamma \cdot \xi \quad (\text{AV-8})$$

onde:

$$\gamma = \sin\theta + \beta \quad ; \quad \beta = \frac{4\pi \cdot f_0}{k} \quad (\text{AV-9})$$

derivando encontramos um ponto estacionário ξ_0 :

$$U'(\xi) = \frac{\xi - x'}{\sqrt{Z^2 + (\xi - x')^2}} + \gamma = 0 \quad ; \quad \xi_0 = x' - \frac{Z \cdot \gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \quad (\text{AV-10})$$

$$U(\xi_0) = \frac{Z}{\sqrt{1 - \gamma^2}} + \gamma \cdot \left(x' - \frac{Z \cdot \gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \right) \quad (\text{AV-11})$$

$$U''(\xi_0) = \frac{Z^2}{\sqrt{[Z^2 + (\xi_0 - x')^2]^3}} = \frac{\sqrt{(1 - \gamma^2)^3}}{Z} \quad (\text{AV-12})$$

$$f(\xi_0) = \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{Z} \quad (\text{AV-13})$$

Da primeira difração para a segunda ordem de difração obtemos:

$$U(x') = \alpha \cdot \frac{\sqrt{2\pi \cdot Z}}{k \cdot \sqrt{(1 - \gamma^2)^3}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{Z} \cdot e^{j \cdot k \cdot \left(\gamma \cdot x' - \frac{Z \cdot \gamma^2}{\sqrt{1 - \gamma^2}} + \frac{Z}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \right)} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{4}} \quad (\text{AV-14})$$

$$\text{onde: } \gamma = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + Z_0^2}} + 2f_0 \cdot \lambda \quad ; \quad \omega = j \cdot k \cdot \left(\frac{Z}{\sqrt{1 - \gamma^2}} - \frac{Z \cdot \gamma^2}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \right) \quad (\text{AV-15})$$

$$\sin \theta_d = \gamma = \sin \theta + \beta = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + Z_0^2}} + 2 \cdot \lambda \cdot f_0 \quad (\text{AV-16})$$

Intensidade depois da primeira difração

$$I(x') = \alpha^2 \cdot \frac{2\pi \cdot Z}{k \cdot \sqrt{(1 - \gamma^2)^3}} \cdot \frac{1 - \gamma^2}{Z^2} \quad (\text{AV-17})$$

Fazendo a segunda difração, usando o princípio de Huygens – Fresnel para a primeira difração (negativa)

$$U(\xi') = \frac{\alpha}{j.\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \sum J_q\left(\frac{m}{2}\right) \frac{e^{j.k.\gamma.x'} \cdot e^{j.k.\sqrt{Z_C^2 + (\xi' - x')^2}} \cdot e^{j.2\pi.q.f_0.x'} \cdot e^{\omega}}{\sqrt{Z_C^2 + (\xi' - x')^2}} dx' \quad (AV-18)$$

$$U(\xi') = e^{\omega} \cdot \frac{\alpha J_{-1}\left(\frac{m}{2}\right)}{j.\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j.k.\gamma.x'} \cdot e^{j.k.\sqrt{Z_C^2 + (\xi' - x')^2}} \cdot e^{-j.2\pi.f_0.x'}}{\sqrt{Z_C^2 + (\xi' - x')^2}} dx'$$

$$U(\xi') = \rho \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{j.k[\gamma.x' + \sqrt{Z_C^2 + (\xi' - x')^2} + \delta.x']} dx' \quad (AV-18)$$

onde: $\delta = \frac{-2.\pi.f_0}{k}$

$$U(x') = \gamma.X' + \sqrt{Z_C^2 + (\xi' - X')^2} + \delta.X' = \sqrt{Z_C^2 + (\xi' - X')^2} + \mu.X' \quad (AV-19)$$

derivando encontramos um ponto estacionário X_0' :

$$U'(x') = \frac{-\xi' + x'}{\sqrt{Z_C^2 + (\xi' - x')^2}} + \mu = 0 \quad ; \quad x_0' = \xi' - \frac{Z_C \cdot \mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \quad (AV-20)$$

$$U(x_0') = Z_C \cdot \sqrt{1 - \mu^2} + \mu \cdot \xi' \quad (AV-21)$$

$$U''(x_0') = \frac{\sqrt{(1 - \mu^2)^3}}{Z_C} \quad ; \quad f(x_0') = \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{Z_C} \quad (AV-22)$$

Da segunda difração usando a primeira ordem de difração obtemos:

$$U(\xi') = \rho \cdot \sqrt{\frac{2\pi.Z_C}{k \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)^3}}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{Z_C} \cdot e^{j.k(\mu.\xi' + Z_C \cdot \sqrt{1 - \gamma^2})} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{4}} \quad (AV-23)$$

onde: $\sin \theta_{dd} = \gamma + \delta = \sin \theta_d - \lambda \cdot f_0$ (AV-24)

$$\frac{\xi' - X'}{\sqrt{Z_c'^2 + (\xi' - X')^2}} = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + Z_0^2}} + \lambda \cdot f_0 \quad (\text{AV-25})$$

Intensidade depois do processo de dupla difração

$$I(\xi') = \rho^2 \cdot \frac{2\pi \cdot Z_c}{k \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)^3}} \cdot \frac{1 - \mu^2}{Z_c^2} \quad (\text{AV-26})$$

Vemos que das equações (AV-14) e (AV-24), que são obtidas a partir da equação de Huygnes-Fresnel, verificamos a validade da equação da rede.

Apêndice VI

AVI. Algoritmos utilizados feito mediante o programa Mathematica 5.

AVI.1 Cálculo da extensão de posições para um observador

```

Clear[λa, λv, xA, zA, xA, zB, vV, va, zR, x1, x2, x3, x4, cam, campo, θd1, θd2]
λa = 0.500 * 10-3;          (*feixe azul*)
λv = 0.670 * 10-3;          (*feixe vermelho*)
d = 1.8761 * 10-3;
va = λa * (1 / d);          (*primeira ordem*)
vV = λv * (1 / d);          (*primeira ordem*)
zR = 330;
xA = 28; zA = 209;
xB = 17; zB = 179;

FindRoot[ $\frac{x_A - x_1}{\sqrt{(x_A - x_1)^2 + z_A^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + z_R^2}} == va, \{x_1, 0\}$ ]

x1 = x1 /. %;
x3 = -x1;

FindRoot[ $\frac{-x_3}{\sqrt{x_3^2 + z_R^2}} + \text{Sin}[\theta_{d1}] == va, \{\theta_{d1}, 0\}$ ]

θd1 = θd1 /. %;

FindRoot[ $\frac{x_B - x_2}{\sqrt{(x_B - x_2)^2 + z_B^2}} - \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + z_R^2}} == vV, \{x_2, 0\}$ ]

x2 = x2 /. %;
x4 = -x2;

FindRoot[ $\frac{-x_4}{\sqrt{x_4^2 + z_R^2}} + \text{Sin}[\theta_{d2}] == vV, \{\theta_{d2}, 0\}$ ]

θd2 = θd2 /. %;
(θd2 - θd1) * 180 / 3.1415  (*ângulo de observação*)
cam = (Tan[θd2] - Tan[θd1]) * 1300;
campo = cam + (x2 - x1)  (*campo de observação*)

```

AVI.2 Distância do ponto imagem ao segundo elemento difrativo

```

Clear[λa, λv, d, va, vv, x, z, zR, x1, x2, x3, x4, xi, zi]
λa = 0.500 * 10-3;          (*feixe azul*)
λv = 0.700 * 10-3;          (*feixe vermelho*)
d = 1.5198 * 10-3;
va = λa * (1 / d);
vv = λv * (1 / d);
zR = 126.5;
x = 37;
z = 33;
FindRoot[ $\frac{x1 - x}{\sqrt{(x1 - x)^2 + z^2}} + \frac{x1}{\sqrt{x1^2 + zR^2}} == vv, \{x1, 0\}]$ 
x1 = x1 /. %;
FindRoot[ $\frac{x2 - x}{\sqrt{(x2 - x)^2 + z^2}} + \frac{x2}{\sqrt{x2^2 + zR^2}} == va, \{x2, 0\}]$ 
x2 = x2 /. %;
x3 = -x1;
x4 = -x2;
FindRoot[ $\left\{ \frac{x3}{\sqrt{x3^2 + zR^2}} + \frac{-x3 + xi}{\sqrt{(-x3 + xi)^2 + zi^2}} == vv, \right.$ 
 $\left. \frac{x4}{\sqrt{x4^2 + zR^2}} + \frac{-x4 + xi}{\sqrt{(-x4 + xi)^2 + zi^2}} == va \right\}, \{xi, 0\}, \{zi, 10\}]$ 
{xi, zi} = {xi, zi} /. %;
(*orto*)
xp = ((x3 + x4) / 2)
xc = xp - xi;
ri =  $\sqrt{xc^2 + zi^2}$ 

```

AVI.3 Cálculo da extensão vertical da imagem

```
Clear[λa, λv, d, va, vv, x, z, zR, x1, x2, x3, x4, xi, zi,
```

```
θiv, θia, α, h]
```

```
λa = 0.500 * 10-3; (*feixe azul*)
```

```
λv = 0.700 * 10-3; (*feixe vermelho*)
```

```
d = 1.5198 * 10-3;
```

```
va = λa * (1 / d);
```

```
vv = λv * (1 / d);
```

```
zR = 126.5;
```

```
x = 30;
```

```
z = 141;
```

```
h = 15;
```

```
FindRoot[ArcTan[ $\frac{h}{x}$ ] == α, {α, 0}]
```

```
α = α / . %;
```

```
FindRoot[ $\frac{\frac{x1}{\cos[\alpha]} - \sqrt{x^2 + h^2}}{\sqrt{\left(\frac{x1}{\cos[\alpha]} - \sqrt{x^2 + h^2}\right)^2 + z^2}} + \frac{\frac{x1}{\cos[\alpha]}}{\sqrt{\left(\frac{x1}{\cos[\alpha]}\right)^2 + zR^2}} == vv, \{x1, 0\}$ ]
```

```
x1 = x1 / . %;
```

```
FindRoot[ $\frac{\frac{x2}{\cos[\alpha]} - \sqrt{x^2 + h^2}}{\sqrt{\left(\frac{x2}{\cos[\alpha]} - \sqrt{x^2 + h^2}\right)^2 + z^2}} + \frac{\frac{x2}{\cos[\alpha]}}{\sqrt{\left(\frac{x2}{\cos[\alpha]}\right)^2 + zR^2}} == va, \{x2, 0\}$ ]
```

```
x2 = x2 / . %;
```

```
FindRoot[ $\left\{ \frac{-\frac{x1}{\cos[\alpha]}}{\sqrt{\left(\frac{x1}{\cos[\alpha]}\right)^2 + zR^2}} + \frac{\frac{x1}{\cos[\alpha]} + xi}{\sqrt{\left(\frac{x1}{\cos[\alpha]} + xi\right)^2 + zi^2}} == vv,$ 
```

```
 $\frac{-\frac{x2}{\cos[\alpha]}}{\sqrt{\left(\frac{x2}{\cos[\alpha]}\right)^2 + zR^2}} + \frac{\frac{x2}{\cos[\alpha]} + xi}{\sqrt{\left(\frac{x2}{\cos[\alpha]} + xi\right)^2 + zi^2}} == va, \{xi, 0\}, \{zi, 10\}$ 
```

```
{xi, zi} = {xi, zi} / . %;
```

```
(*orto*)
```

AVI.4 Cálculo da posição da imagem variando a posição do objeto e a distância entre as redes Cálculo da extensão vertical da imagem

```

Clear[λaa, λvv, d, v1a, v11, v22, v1vv, v2a, v2vv, x, z, zR, x11, x12, x13, x14, x21,
x22, x23, x24, xc, zc, xv, xa, za, zv]
Clear[g1, g2, f1, f2, p3, p4, q3, q4, h1, h2, s3, s4]
g1[x11_, x21_] :=  $\frac{x11}{\sqrt{x11^2 + z^2}} + \frac{x11 - x21}{\sqrt{(x11 - x21)^2 + zR^2}} - 2 * v1a;$ 
g2[x11_, x21_] :=  $-\frac{x11 - x21}{\sqrt{(x11 - x21)^2 + zR^2}} - \frac{xc - x21}{\sqrt{(xc - x21)^2 + zc^2}} + v2a;$ 
f1[x12_, x22_] :=  $\frac{x12}{\sqrt{x12^2 + z^2}} + \frac{x12 - x22}{\sqrt{(x12 - x22)^2 + zR^2}} - 2 * v1a;$ 
f2[x12_, x22_] :=  $-\frac{x12 - x22}{\sqrt{(x12 - x22)^2 + zR^2}} - \frac{xc + 5 - x22}{\sqrt{(xc + 5 - x22)^2 + zc^2}} + v2a;$ 
p3[x13_, x23_] :=  $\frac{x13}{\sqrt{x13^2 + z^2}} + \frac{x13 - x23}{\sqrt{(x13 - x23)^2 + zR^2}} - 2 * v1vv;$ 
p4[x13_, x23_] :=  $-\frac{x13 - x23}{\sqrt{(x13 - x23)^2 + zR^2}} - \frac{xc - x23}{\sqrt{(xc - x23)^2 + zc^2}} + v2vv;$ 
q3[x14_, x24_] :=  $\frac{x14}{\sqrt{x14^2 + z^2}} + \frac{x14 - x24}{\sqrt{(x14 - x24)^2 + zR^2}} - 2 * v1vv;$ 
q4[x14_, x24_] :=  $-\frac{x14 - x24}{\sqrt{(x14 - x24)^2 + zR^2}} - \frac{xc + 5 - x24}{\sqrt{(xc - x24)^2 + zc^2}} + v2vv;$ 
h1[xa_, za_] :=  $-\frac{x11 - x21}{\sqrt{(x11 - x21)^2 + zR^2}} - \frac{x21 - xa}{\sqrt{(x21 - xa)^2 + (zR - za)^2}} + v2a;$ 
h2[xa_, za_] :=  $-\frac{x12 - x22}{\sqrt{(x12 - x22)^2 + zR^2}} - \frac{x22 - xa}{\sqrt{(x22 - xa)^2 + (zR - za)^2}} + v2a;$ 
s3[xv_, zv_] :=  $-\frac{x13 - x23}{\sqrt{(x13 - x23)^2 + zR^2}} - \frac{x23 - xv}{\sqrt{(x23 - xv)^2 + (zR - zv)^2}} + v2vv;$ 
s4[xv_, zv_] :=  $-\frac{x14 - x24}{\sqrt{(x14 - x24)^2 + zR^2}} - \frac{x24 - xv}{\sqrt{(x24 - xv)^2 + (zR - zv)^2}} + v2vv;$ 

```

```

(*Dados*)
λaa = 0.400 * 10-3;
λvv = 0.700 * 10-3;
v11 = 540;
v22 = 508.2;
v1a = λaa * v11;
v1vv = λvv * v11;
v2a = λaa * v22;
v2vv = λvv * v22;
xc = 34.21;
zc = 210;
zR = 360;
x11x21 =
  Table[{x11, x21} /. FindRoot[{g1[x11, x21] == 0, g2[x11, x21] == 0}, {x11, 1, 5}, {x21, -1, 1}],
    {z, -257.2, -256, 0.2}];
x11x21 // MatrixForm
x11x21[[1]]
ListPlot[Transpose[x11x21][[1]]]
ListPlot[x11x21, PlotJoined → True];
x12x22 =
  Table[{x12, x22} /. FindRoot[{f1[x12, x22] == 0, f2[x12, x22] == 0}, {x12, 1, 4}, {x22, 1, 4}],
    {z, -257.2, -256, 0.2}];
x12x22 // MatrixForm;
ListPlot[x12x22, PlotJoined → True];
y12 = Transpose[Join[Transpose[x11x21], Transpose[x12x22]]];
y12 // MatrixForm;
x13x23 =
  Table[{x13, x23} /. FindRoot[{p3[x13, x23] == 0, p4[x13, x23] == 0}, {x13, 1, 5}, {x23, -1, 1}],
    {z, -257.2, -256, 0.2}];
x13x23 =
  Table[{x13, x23} /. FindRoot[{p3[x13, x23] == 0, p4[x13, x23] == 0}, {x13, 1, 5}, {x23, -1, 1}],
    {z, -257.2, -256, 0.2}];
x14x24 =
  Table[{x14, x24} /. FindRoot[{q3[x14, x24] == 0, q4[x14, x24] == 0}, {x14, 1, 5}, {x24, -1, 1}],
    {z, -257.2, -256, 0.2}];
y34 = Transpose[Join[Transpose[x13x23], Transpose[x14x24]]];
y34 = Transpose[Join[Transpose[x13x23], Transpose[x14x24]]];
y34 = Transpose[Join[Transpose[x13x23], Transpose[x14x24]]];
len = Length[y12];
xaza = Table[{x11, x21, x12, x22} = y12[[j]];
  {xa, za} /. FindRoot[{h1[xa, za] == 0, h2[xa, za] == 0}, {xa, 0}, {za, 0}], {j, 1, len}]
y34 // MatrixForm;
len = Length[y34];
xvzv = Table[{x13, x23, x14, x24} = y34[[j]];
  {xv, zv} /. FindRoot[{s3[xv, zv] == 0, s4[xv, zv] == 0}, {xv, 1, 2}, {zv, 1, 2}], {j, 1, len}]
xvzv // MatrixForm;

```

AVI.5 Cálculo da posição da imagem no eixo z

```

Clear[λa, λv, d, va, vv, x, z, zR, x11, x12, x13, x14, x21, x22, x23, x24, xc, zc, φ1, φ2, φ3, φ4, xa, za]
λa = 0.400 * 10-3;          (*feixe azul*)
λv = 0.700 * 10-3;          (*feixe vermelho*)
d = 1.51976 * 10-3;
va = λa * (1 / d);
vv = λv * (1 / d);
zR = 90;
zc = 110;
xc = -124;
z = -280;
x = 0;

FindRoot[ { {  $\frac{x11 - x}{\sqrt{(x11 - x)^2 + z^2}} + \frac{x11 - x21}{\sqrt{(x11 - x21)^2 + zR^2}} = 2 * va,$ 
 $-\frac{x11 - x21}{\sqrt{(x11 - x21)^2 + zR^2}} + \frac{-xc + x21}{\sqrt{(-xc + x21)^2 + zc^2}} = -va$  }, {x11, 0}, {x21, 0} ]
{x11, x21} = {x11, x21} /. %;

FindRoot[ { {  $-\frac{x11 - x21}{\sqrt{(x11 - x21)^2 + zR^2}} + \text{Sin}[\phi1] = -va$  }, {φ1, 0} ]
φ1 = φ1 /. %;

FindRoot[ { {  $\frac{x12 - x}{\sqrt{(x12 - x)^2 + z^2}} + \frac{x12 - x22}{\sqrt{(x12 - x22)^2 + zR^2}} = 2 * va,$ 
 $-\frac{x12 - x22}{\sqrt{(x12 - x22)^2 + zR^2}} + \frac{-xc + 5 + x22}{\sqrt{(-xc + 5 + x22)^2 + zc^2}} = -va$  }, {x12, 0}, {x22, 0} ]
{x12, x22} = {x12, x22} /. %;

FindRoot[ { {  $-\frac{x12 - x22}{\sqrt{(x12 - x22)^2 + zR^2}} + \text{Sin}[\phi2] = -va$  }, {φ2, 0} ]
φ2 = φ2 /. %;

FindRoot[ { {  $\frac{xa}{\sqrt{xa^2 + za^2}} = \text{Sin}[\phi1], \frac{xa + x21 - x22}{\sqrt{(xa + x21 - x22)^2 + za^2}} = \text{Sin}[\phi2]$  }, {xa, 0}, {za, 10} ]

```

Apêndice VII

AVII. Dificuldades de publicação

O processo de imagem por dupla difração seletiva de luz branca inventado, além de ser muito original e de grande beleza pela sua simplicidade, trouxe um novo tipo de imagem, a imagem com relevo invertido. Ela inexistia na óptica de lentes e espelhos e somente era conhecida por meio de registro fotográfico, na estereoscopia e na holografia. Por isto provavelmente foi escolhido como capa da revista "Optics Express", da Optical Society of América em 2.002. Este tipo de imagem já tinha sido descrito pelo Prof. Lunazzi em 1.991 em congresso nacional, mas agora foi mostrado com um elemento a menos (retirou-se a lente refrativa) e publicado em revista internacional da especialidade. Sem elementos refrativos nem refletivos, porém com um anteparo absorvente em forma de fenda, o processo estava simplificado, mas não o bastante. O desejo era o de poder eliminar a intermediação e nessa procura acabou acontecendo a descoberta: olhando no sistema montado, imagens de outras ordens de difração elevando a cabeça por sobre o nível da fenda, percebeu uma imagem com menos distorção cromática do que as outras. Fazendo ajustes de distâncias encontramos uma perfeita imagem por dupla difração de luz branca sem elemento intermediário algum (portanto mais luminosa e precisa) equivalente a de um prisma, porém com qualidade cromática superior. Isto aconteceu em 2.003. A transcendência deste fenômeno, que julgava seria grande, no entanto, não aconteceu por desinteresse da comunidade científica nas várias tentativas realizadas de levá-lo. Foi exposto em congresso da sociedade de óptica OSA dos EUA inclusive levando o experimento junto e em junho de 2.005, percebendo como o a publicação de um artigo pode ser demorada (tínhamos um com mais de seis meses em análise na revista JOSA dessa sociedade, sem retorno algum, o que veio acontecer somente depois de um ano de submetido, sendo aprovado sem discussão) e já com tratamento analítico que demonstrava o processo foi publicado livremente na internet pelo serviço ArXiv (www.arxiv.org) da biblioteca da universidade Cornell nos EUA, com repositórios em entidades acadêmicas do mundo inteiro que repetem o conteúdo constituindo uma revolucionária maneira de testemunho de autoria, antes relegada a aprovação de alguma revista. Depois o trabalho foi submetido sucessivamente a três revistas: Journal of Optics Pure and Applied-JOPA A, quem o rejeitou de cara em somente alguns dias com a opinião de quem seria unicamente o encarregado de colocá-lo em julgamento de árbitros (atente-se para o plural) e sem justificativa válida mais que depreciá-lo. Nem uma referência que indicasse a não originalidade do fenômeno. Fomos reclamando, primeiro solicitando a resposta por carta visto que mensagem não é documento até hoje: a carta veio, mas sem justificativa, o que demonstra a falta de consistência da posição que acabou tomando essa revista. Passamos a instâncias superiores: o editor chefe da revista, quem a nossa carta respondeu em mensagem que estava analisando a situação sem jamais enviar outra informação, e depois a executivos da editora da revista que estaríamos em nível superior ao editor da revista, que jamais responderam. Comentamos o caso entre dez colegas da área de óptica de prestígio mundial, dos quais um respondeu que não dispunha de tempo para a análise, mas outro, secretária da International Commission for Optics teceu comentários a respeito de que o formato e a descrição poderiam não estar bem claros.

Depois enviamos o artigo a revista "Applied Optics", da OSA, pois descobrimos que era outra das poucas revistas na área que em princípio estão dispostas a aceitar artigos que primeiramente sejam do conhecimento público pelo ArXiv, fato que curiosamente não se revela na leitura das condições de publicação dessa revista senão por meio de um serviço disponível na web que nos foi recomendado por funcionário do ArXiv. Qual não foi nossa surpresa quando veio o parecer de um árbitro igualmente negativo e sem dar referência alguma a precedentes do fenômeno, confundindo-o de maneira que somente pode ser considerada de má fé com o clássico efeito das auto-imagens Lau e com o aval do editor que não usou sequer um segundo árbitro. Nossa reclamação a esse editor teve uma resposta imediata e incrivelmente honesta e desconcertante: "Consultei o cadastro e a pessoa que deu esse parecer é prestigiosa". Ou seja que ele, James Wyant, com seu conhecimento de óptica, não quis opinar sobre o artigo mas endossou a opinião

de quem arbitrou absurdamente e não cumpriu seu dever básico de tomar ao menos uma segunda opinião.

Enfim, sem respostas procuramos apóio da Sociedade Brasileira de Física, que negou, e enviamos em dezembro uma carta aberta á comunidade da Sociedade Brasileira de Física por meio de seu presidente, quem não se manifestou ainda.

Voltando ao fenômeno, este efeito seria a base para substituir toda a óptica refrativa pela difrativa? Parece ambicioso, mas é uma simples hipótese inspirada na facilidade com que elementos difrativos de grande tamanho podem ser construídos em quantidade, a baixo preço, replicados e pelo seu baixo peso acoplados a instrumentos inclusive espaciais (projeto estadunidense "Eyeglass" de telescópio difrato-refrato-difrativo baseado em duas naves espaciais e segundo a conversa de Lunazzi em congresso nos EUA em 1.994 com um dos pesquisadores que eliminar o peso da parte refrativa seria muito benéfico). Agora o trabalho de "White-Light Imaging in a Two Gratings Diffraction Process" está novamente corregido para enviar a outra revista (Nature Photonics).