

Tese de Mestrado

Introdução à Fenomenologia da Oscilação de Neutrinos, no  
Vácuo e na Matéria

*Gustavo do Amaral Valdiviesso*

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Instituto de Física Gleb Wataghin - IFGW

---

---

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Moraes Guzzo - DRCC/IFGW/UNICAMP(Orientador)

Prof. Dr. Juan Carlos Montero Garcia - IFT/UNESP

Profa. Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato - DRCC/IFGW/UNICAMP

16 de Março de 2004



**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

V233i

Valdiviesso, Gustavo do Amaral

Introdução à fenomenologia da oscilação de neutrinos, no vácuo e na matéria / Gustavo do Amaral Valdiviesso. – Campinas, SP : [s.n.], 2004.

Orientador: Marcelo Moraes Guzzo.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Física – Estudo e ensino. 2. Oscilação de neutrinos. 3. Mistura de sabor. 4. Neutrinos solares. 5. Efeito MSW. I. Guzzo, Marcelo Moraes. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

(vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Introduction to neutrino oscillation's phenomenology, in vacuum and matter
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
  1. Physics – Study and teaching
  2. Neutrino oscillation
  3. Flavor mixing
  4. Solar neutrinos
  5. MSW effect
- **Área de concentração:** Teoria geral de partículas e campos
- **Titulação:** Mestre em física
- **Banca examinadora:**

Prof. Marcelo Moraes Guzzo  
Prof. Juan Carlos Motero Garcia  
Prof. Carola Dobrigkeit Chinellato
- **Data da defesa:** 16.03.2004

## Agradecimentos

Muitas pessoas estão envolvidas neste trabalho, tanto diretamente quanto de maneira sutil e indireta. Gostaria de agradecer a todas elas, sem pesar suas influências nem me preocupar com a ordem de importância de suas contribuições. Antecipadamente peço desculpas àqueles que possam se sentir minorizados ou injustiçados de alguma forma. Saibam que todos ocupam grandes partes do meu coração.

Agradeço em primeiro lugar ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Guzzo, que me aceitou e acreditou em minhas promessas de trabalho. Durante o ano em que este trabalho foi escrito ele tem sido meu guia e também um horizonte a alcançar. Se algum dia eu puder dar a algum aluno a mesma oportunidade que ele me deu, terei igualado minha realização pessoal e profissional à minha gratidão. “Espero não ter decepcionado suas expectativas professor”.

Agradeço também a meu pai José Carlos e minha mãe Walkiria, que durante esses vinte e cinco anos vêm feito nada menos do que viver para meu futuro e de minha irmã. Poucas pessoas podem olhar para a própria vida e dizer: “não acumulamos luxo ou riquezas materiais... todos os frutos de nosso trabalho, estão neles”. Se isso nunca passou por suas mentes, saibam que penso nisso cada vez que algo de bom me acontece. “Mãe e Pai, este trabalho também é de vocês. Só não coloco seus nomes no título porque ainda não entenderam o que é um neutrino. O que é injusto, pois ninguém entende mesmo”.

A dois professores eu devo meu respeito e agradecimentos. À professora Carola e ao professor Adolfo, que muito me ensinaram, não só conhecimento acadêmico mas algo que julgo mais importante: respeito, justiça e amizade, para com seus alunos e colegas de trabalho. Em conjunto com o professor Marcelo, vocês são o topo da curta lista de professores que me mostraram que “antes de sermos professores e cientistas, somos humanos”.

Aos meus amigos, que me aliviaram das tensões e me apoiaram com sua amizade imponderável. Aos “meninos”: Rodrigo, Castilho, Jaques e Eric que nunca me abandonam, e às meninas: Laura, Alessandra, Lucimara e Heloisa. Cada um de vocês têm a sua maneira de ajudar, e sabem o papel que tiveram. Por isso mesmo os chamo de amigos.

Porém à meu amigo e companheiro de estudos Marcelo Gama, vai um agradecimento pelas boas horas de discussão sobre a física e a natureza.

Por fim, agradeço às pessoas que formam a Universidade Estadual de Campinas por todas as oportunidades que tive e que, apesar de muitas vezes não demonstrarem (talvez por modéstia) foram muito pacientes comigo todos estes anos e também colaboraram para a conclusão deste trabalho.

## Resumo

O objetivo deste trabalho é produzir um texto didático que sirva como base para alunos de física, ao ingressarem na área da fenomenologia de neutrinos. Introduce-se o modelo de mistura de neutrinos no vácuo, baseado no conceito de superposição de estados. Mostra-se que esta hipótese leva ao fenômeno da oscilação de sabor, o qual se propõe ser uma solução para o problema do neutrino solar. Mostra-se que a oscilação que ocorre no vácuo entre o Sol e a Terra não pode explicar os dados experimentais, sendo necessária a inclusão dos efeitos da matéria solar. O meio solar leva a uma alteração nas previsões devido a efeitos de ressonância. O conjunto de fenômenos que ocorrem devido a presença e à distribuição do meio solar, chamado efeito MSW, leva à verdadeira solução do problema do neutrino solar. Faz-se um ajuste simples no modelo, encontrando o melhor ajuste aos dados de SuperKamiokande. Com o modelo ajustado, mostra-se a concordância com os dados de Homestake.

## Abstract

The subject of this work is to produce a didactic text that can be used by physics students as a basis when incoming on the neutrinos phenomenology area. We introduce the neutrinos mixing model in vacuum, based on the concept of state superposition. We show that this hypothesis leads to flavor oscillation phenomenon, the one is proposed to be a solution to the solar neutrino problem. We show that vacuum oscillations between the Sun and the Earth cannot explain the experimental data, making necessary the inclusion of solar matter effects. The solar medium leads to modifications on the predictions because of resonance effects. The set of phenomenon that takes place due to the presence and to the distribution of solar medium, called MSW effect, leads to the real solution of the solar neutrino problem. We make a simple fit on the models parameters, finding the best fit to de SuperKamiokande data set. With the model fitted, we show that it agrees with Homestake data.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução ao Texto . . . . .	1
1.2	O Neutrino: Uma Apresentação Muito Breve . . . . .	3
1.3	O Modelo Solar Padrão . . . . .	4
1.4	O Problema do Neutrino Solar . . . . .	5
1.5	A Previsão de Pontecorvo . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Oscilação no Vácuo</b>	<b>9</b>
2.1	O Fenômeno Quântico de Oscilação . . . . .	9
2.2	Um Novo Ponto de Vista Sobre o Neutrino . . . . .	10
2.3	Um Retrato do Neutrino . . . . .	13
2.4	Oscilando Entre Dois Sabores . . . . .	16
2.4.1	Definições . . . . .	16
2.4.2	Formalizando o Problema . . . . .	17
2.4.3	Mudança de Base . . . . .	18
2.4.4	Solução Geral . . . . .	20
2.4.5	Solução Particular . . . . .	21
2.4.6	Probabilidades de Conversão e Sobrevivência . . . . .	22
2.4.7	Reparametrizando a Solução . . . . .	23
2.4.8	Discussões sobre Massa, Energia e Momento . . . . .	24
2.5	Mas isto Resolve o Problema do Neutrino Solar? . . . . .	28
2.6	Complementos - Primeira Parte . . . . .	32
	Complemento I - Sistema Natural de Unidades . . . . .	32
	Complemento II - Exponencial das Matrizes de Pauli . . . . .	35
	Complemento III - Três Famílias . . . . .	40

<b>3</b>	<b>Oscilação na Matéria</b>	<b>45</b>
3.1	Potenciais Efetivos: Introdução . . . . .	45
3.2	Potenciais Efetivos: Formalismo de Duas Componentes . . . . .	46
3.3	Interação com a Matéria . . . . .	47
3.4	Uma Nova Mistura . . . . .	49
3.4.1	Método Comparativo (ou por Analogia) . . . . .	50
3.4.2	Método da Diagonalização . . . . .	51
3.5	Auto-Estados de Massa Efetiva . . . . .	53
3.6	Massa Efetiva . . . . .	55
3.7	Equação de Movimento . . . . .	56
3.7.1	Meio Uniforme . . . . .	57
3.7.2	Meio Não Uniforme . . . . .	59
3.8	Complementos - Segunda Parte . . . . .	64
	Complemento IV - Potenciais Efetivos: Teoria de Campos . . . . .	64
	Complemento V - Potenciais Efetivos: espinores . . . . .	70
<b>4</b>	<b>O efeito MSW</b>	<b>79</b>
4.1	Um exemplo simples . . . . .	79
4.2	Conversão Adiabática . . . . .	81
4.2.1	Coeficiente de Adiabaticidade . . . . .	81
4.2.2	Probabilidade de Sobrevivência . . . . .	84
4.3	Conversão Não Adiabática . . . . .	86
4.3.1	Condição de Ressonância . . . . .	86
4.3.2	Probabilidade de Transição . . . . .	87
4.3.3	Distribuição de Matéria . . . . .	88
4.3.4	Probabilidade de Transição . . . . .	89
4.4	Probabilidade de Sobrevivência: Efeito MSW . . . . .	91
4.5	Voltando ao Exemplo Simples . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Comprovação Experimental</b>	<b>95</b>
5.1	Os Dados e os Experimentos . . . . .	95
5.2	Vendo o Espectro: SuperKAMIOKANDE . . . . .	95

5.3	Homestake . . . . .	97
5.4	Discussão Sobre os Resultados . . . . .	105
5.5	Complementos - Terceira Parte . . . . .	107
	Complemento VI - Ajuste do Modelo - Cálculo Numérico . . . . .	107
<b>6</b>	<b>Conclusões Finais e Perspectivas</b>	<b>111</b>



# Introdução

## 1.1 Introdução ao Texto

Antes de iniciar a leitura deste texto, o leitor deve estar ciente de seus objetivos. A idéia deste trabalho surgiu quando o autor se deparou com a falta de um material conciso e ao mesmo tempo introdutório sobre o assunto.

Quando se pretende iniciar uma carreira, ou mesmo uma pesquisa de graduação, o estudante deve ter acesso a um material que esteja em seu nível de conhecimento e que, ao mesmo tempo, leve-o a ampliar este nível através dos novos conceitos inerentes à área almejada.

Quando novas descobertas são feitas, ou antigos modelos são comprovados, uma avalanche de artigos de revisão surge para sintetizar o conhecimento e fortalecer o reconhecimento dos novos resultados. Não há nada mais normal do que um pesquisador experiente se atualizar, ou mesmo ser introduzido a uma nova área, com base em trabalhos de revisão. Porém, é uma contradição exigir que um estudante tenha base técnica para compreender trabalhos de revisão quando pretende ingressar em uma nova área. Tal base é justamente o que o estudante busca e, portanto, não pode ser um pré-requisito.

Com base nesta idéia, este texto se destina a introduzir estudantes, que tenham no mínimo um conhecimento básico em mecânica quântica, ao estudo da *oscilação de sabor de neutrinos*. A originalidade deste texto está em sua linguagem simples e na tentativa de introduzir novos conceitos sem esperar que o estudante possua uma “bagagem extra”.

Apesar disso, o texto trata exclusivamente do fenômeno da oscilação e da solução do *problema do neutrino solar*. Introduzir o estudante ao “velho” conceito de neutrino não é uma das

pretensões deste trabalho. Desde a proposta de sua existência nos anos 30, vem se desenvolvendo uma vasta bibliografia sobre o assunto (neutrinos), e revisar esta introdução aqui tornaria o texto por demais extenso e o acrescentaria na lista dos “mais uma revisão sobre neutrinos”.

Portanto, este texto se propõe a introduzir o problema do neutrino solar e mostrar como este é solucionado através do modelo de mistura de sabores, que já foi, um dentre vários, mas que atinge agora um alto grau de comprovação, tornando-se assim a solução atualmente aceita.

O texto é composto de um corpo central, os capítulos e uma parte paralela, os complementos. O estudante pode seguir os capítulos nas primeiras leituras sem perda de conceitos ou conhecimento. Os complementos destinam-se ou a demonstrar afirmações matemáticas feitas no texto central ou a abordar tópicos que exijam conhecimentos adicionais, como teoria quântica de campos e programação, por exemplo. Desta forma, os complementos servem tanto para aprimorar o formalismo matemático sem ferir a continuidade da leitura, como para satisfazer leitores com conhecimentos um pouco mais avançados.

Como início, faremos uma breve e despretensiosa apresentação do neutrino e do problema do neutrino solar, com base nos dados atuais. A seguir, partiremos para o desenvolvimento do modelo de oscilação no vácuo, os efeitos do meio material e, finalmente, o confronto entre dados e experimentos.

Bons estudos.

## 1.2 O Neutrino: Uma Apresentação Muito Breve

Uma certa partícula, portadora de uma massa mínima, vem surpreendendo o meio científico mesmo antes de sua descoberta. Wolfgang Pauli propôs sua existência, em 4 de dezembro de 1930, para explicar o espectro contínuo de energia dos elétrons emitidos no decaimento beta, evitando assim que se abandonasse o princípio da conservação da energia. Numa carta enviada ao organizador de uma conferência, ele escreveu[1]:

Dear Radioactive Ladies and Gentlemen

(...) The continuous  $\beta$  spectrum would then be understandable, assuming that in the  $\beta$  decay together with the electron, in all cases, also a neutron is emitted, in such a way that the sum of the energy of the neutron and the electron remains constant.

(...) Thus, dear Radioactives, consider and judge. Unfortunately I cannot come personally to Tübingen, because I am necessary here for a ball that will take place in Zürich the night from 6 to 7 December.

Na carta, Pauli propôs o nome nêutron, mas o nome final derivado do italiano foi dado por Enrico Fermi. Neutrino significa “pequeno neutro”.

Sua interação com a matéria é tão tênue que um neutrino poderia atravessar várias centenas de anos-luz de chumbo sem interagir com absolutamente nada.

Como nada indicava o contrário, para todos os propósitos, o neutrino era desprovido de massa. Até hoje, conhecemos apenas um limite superior para sua massa, mas sabe-se por meios indiretos que esta massa não é zero. Como veremos adiante, o fenômeno da oscilação não ocorreria se a massa fosse nula.

O neutrino é o “parceiro” dos léptons carregados, grupo do qual o elétron faz parte. Toda vez que um dos três léptons carregados é envolvido num processo da interação fraca com um mediador carregado (caracterizando o que chamamos *corrente carregada*), um neutrino também está envolvido. A tabela a seguir mostra os três léptons carregados conhecidos e seus parceiros neutrinos.

## Famílias

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Elétron} & \text{Múon} & \text{Táuon} \\
 \left( \begin{array}{c} e \\ \nu_e \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \mu \\ \nu_\mu \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \tau \\ \nu_\tau \end{array} \right)
 \end{array}$$

Existem portanto três tipos de neutrino, a saber: o neutrino do elétron  $\nu_e$ , o neutrino do múon  $\nu_\mu$  e o neutrino do táuon (tau)  $\nu_\tau$ . Os neutrinos estão em toda parte e, junto com o fóton, são as partículas mais abundantes no Universo.

Produzidos como resultado da fusão nuclear que ocorre nas estrelas, os neutrinos chegam à Terra vindos tanto do Sol (nossa estrela mais próxima), quanto das estrelas distantes. Neutrinos também são produzidos em nossa atmosfera devido à incidência de raios cósmicos. Neste texto, nos concentraremos nos chamados *neutrinos solares*, ou seja, aqueles provenientes do nosso Sol.

### 1.3 O Modelo Solar Padrão

O Modelo Solar Padrão (MSP) prevê que as reações nucleares que servem de fonte de energia para as estrelas têm como subproduto o neutrino do elétron,  $\nu_e$ . A tabela abaixo mostra algumas das reações nucleares (aquelas que produzem neutrinos) e seus produtos.

Reação	Nome	Energia do Neutrino (MeV)
$p + p \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu_e$	<i>pp</i>	$\leq 0.42$
$p + e^- + p \rightarrow {}^2\text{H} + \nu_e$	<i>pep</i>	1.44
${}^3\text{He} + p \rightarrow {}^4\text{He} + e^+ + \nu_e$	<i>Hep</i>	$\leq 18.77$
${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$	<i>Berílio</i>	0.861
${}^8\text{B} \rightarrow {}^7\text{Be} + e^+ + \nu_e$	<i>Boro</i>	$\leq 14.06$

Na tabela anterior, não aparecem as reações do ciclo CNO (carbono, nitrogênio e oxigênio)<sup>1</sup>.

O MSP também prevê o espectro dos neutrinos produzidos no Sol. Este espectro, ou seja, a distribuição de fluxo em função da energia, é a base de comparação para o estudo dos neutrinos solares. A figura 1.1 mostra o espectro dos neutrinos com origem nas reações da tabela anterior.

Porém o maior mistério acerca do neutrino é a discrepância entre a previsão do MSP e os experimentos, que medem sempre um fluxo menor que o previsto.

<sup>1</sup>Para ver o quadro completo de reações consulte as referências [3] e [4].

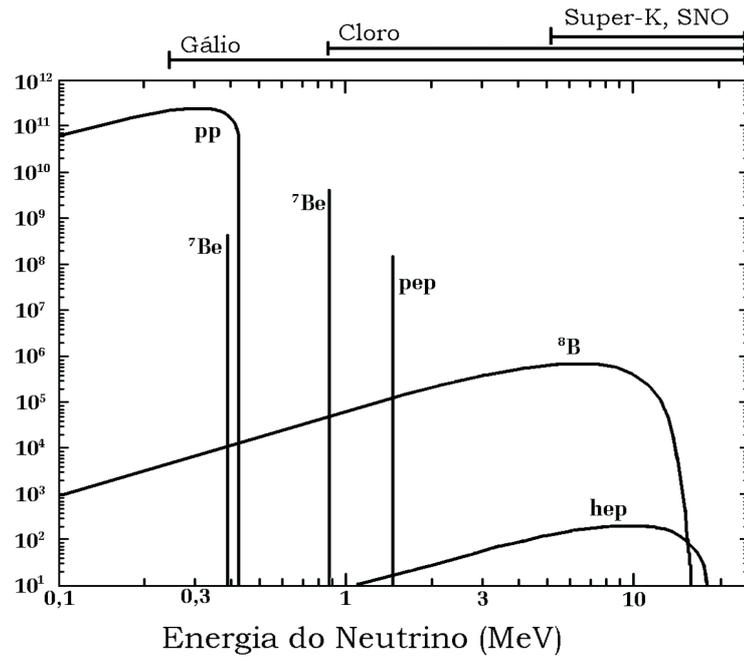


Figura 1.1: Distribuição do fluxo dos neutrinos solares em função da energia, como previsto pelo Modelo Solar Padrão. As indicações na parte superior se referem ao limiar de energia observado por cada um dos três tipos de experimentos. Os fluxos das fontes contínuas ( $pp$ ,  ${}^8B$  e  $hep$ ) são dados em unidades de neutrinos por  $cm^2$  por segundo por  $MeV$  ( $cm^{-2}s^{-1}MeV^{-1}$ ). Os fluxos das fontes monocromáticas (em linha) são dados em neutrinos por  $cm^2$  por segundo. Adaptado da Referência [3], com última atualização em 1998.

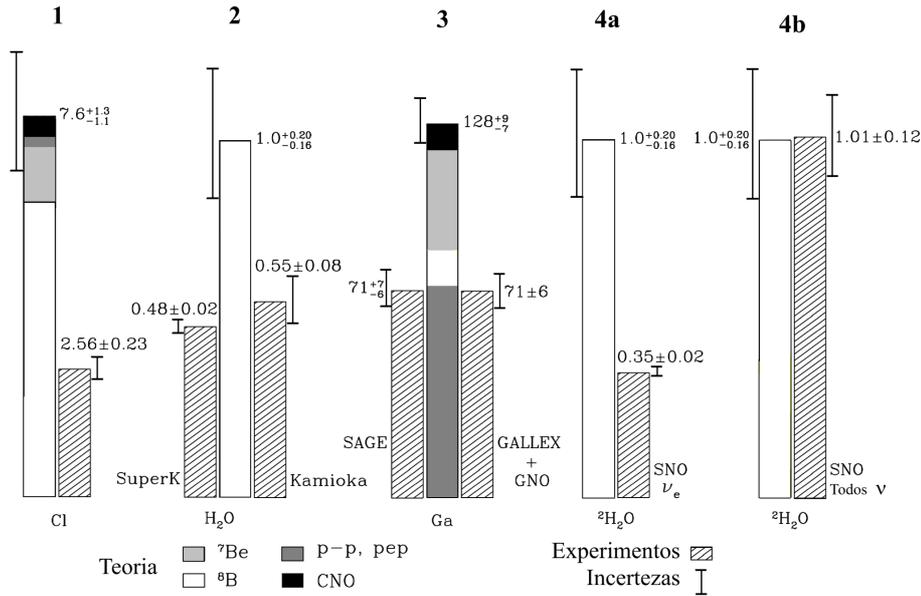
## 1.4 O Problema do Neutrino Solar

Todos os experimentos sobre neutrinos solares medem um fluxo sempre menor do que o previsto pelo Modelo Solar Padrão (MSP). Esta aparente redução pode ser observada se tomarmos a razão entre o fluxo observado  $\phi_{exp}$  e o fluxo previsto pelo MSP,  $\phi_{teo}$ . Esta razão, chamada de *fluxo relativo*, resulta sempre em valores menores que a unidade. Isto significa que, pelo menos aparentemente, os neutrinos do elétron que são produzidos no Sol estão “desaparecendo” antes de chegar à Terra. A figura 1.2 mostra um resumo dos dados sobre o neutrino solar até 2000.

Experimentos como o Super-Kamiokande (Japão) podem não somente contar o número de detecções de neutrinos como medir seu momento (energia e direção de incidência). O gráfico da figura (1.3) resume os dados observados por SK e estabelece assim o nosso *problema do neutrino solar*.

Estes resultados poderiam significar duas coisas: as previsões, e portanto o próprio MSP, estariam erradas (ou incompletas), ou algo estaria realmente reduzindo o fluxo de neutrinos do elétron provenientes do Sol. Este é o chamado *problema do neutrino solar*.

## O Modelo Solar Padrão (MSP) e os Experimentos



Bahcall–Pinsonneault 2000

Figura 1.2: Resumo dos dados acumulados sobre o problema do neutrino solar. São quatro conjuntos de dados, sendo eles respectivamente provenientes de Homestake, (Super)Kamiokande, Gallex(GNO)/Sage e SNO. Cada conjunto detecta uma região do espectro de neutrinos solares, sendo que os conjuntos 1 e 3 são os únicos a detectar neutrinos do tipo p-p e pep. No conjunto 1 eles representam uma pequena porcentagem, enquanto no conjunto 3 são cerca da metade do fluxo detectado. Os outros experimentos detectam basicamente neutrinos do Boro ( ${}^8B$ ) e do Berílio ( ${}^7Be$ ). Repare que o quarto conjunto, referente a SNO, é dividido em duas colunas: A primeira compara a teoria com o fluxo de  $\nu_e$  detectado, enquanto a segunda compara a teoria com o fluxo total ( $\nu_e, \nu_\mu$  e  $\nu_\tau$ ). Nesta última, a solução do problema do neutrino solar pelo mecanismo de conversão é confirmado: O fluxo total detectado equivale ao previsto.

## 1.5 A Previsão de Pontecorvo

A idéia de oscilação de sabor é uma das muitas tentativas de resolver o problema do neutrino solar.

Os detectores anteriores a SNO são capazes de detectar apenas os neutrinos do elétron<sup>2</sup>, que supostamente seriam os únicos a serem produzidos no Sol. Isto se deve ao fato de que a temperatura no interior do Sol não fornece energia suficiente para que ocorra criação dos férmions  $\mu$  e  $\tau$ . Isto resultaria em parceiros interagentes disponíveis no meio, para os outros dois

<sup>2</sup>Pelo menos de maneira efetiva. Kamiokande, que é um detector por espalhamento, detecta tanto corrente carregada como neutra, mas não distingue as duas. Veja a seção 5.2

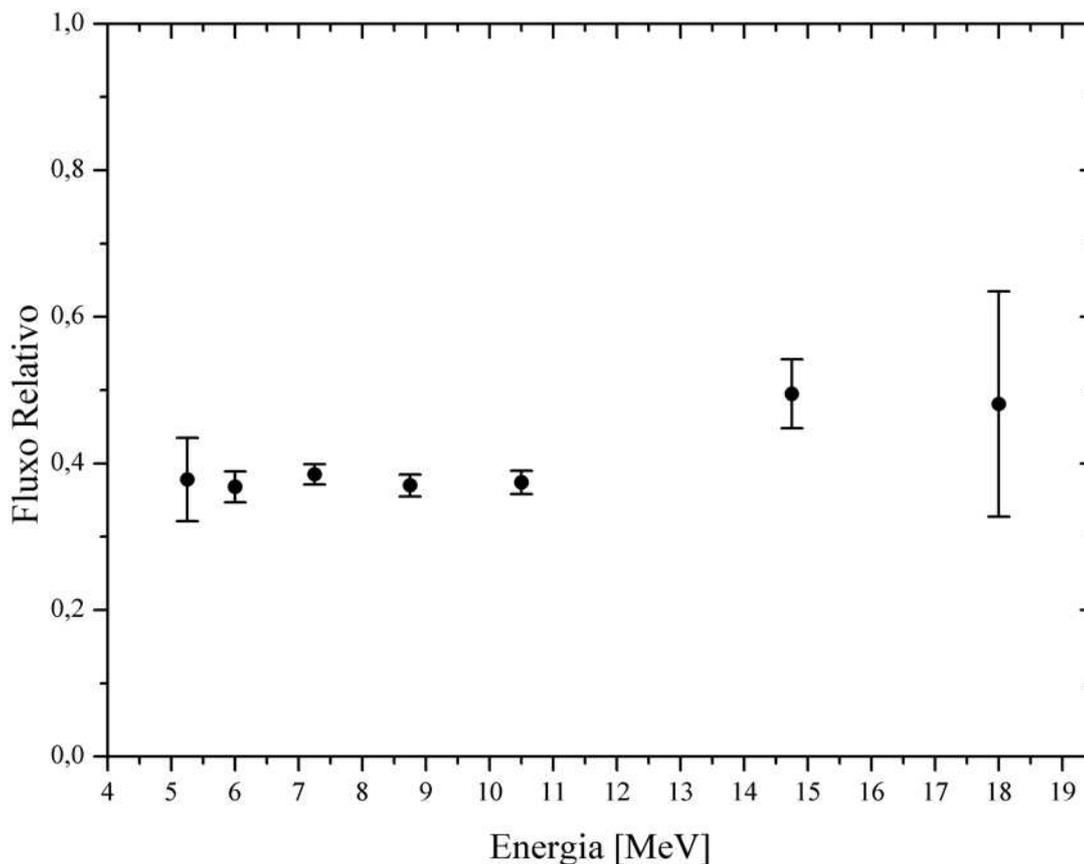


Figura 1.3: A figura acima mostra o espectro (fluxo relativo em função da energia) observado em Super-Kamiokande. Se o fluxo detectado na Terra fosse o mesmo previsto pelo modelo, teríamos todos os dados na linha  $\phi_{exp}/\phi_{teo} = 1$ .

tipos de neutrinos. Desta forma, espera-se que somente neutrinos  $\nu_e$  estejam sendo produzidos no Sol.

Se fosse possível os neutrinos oscilarem entre os três sabores conhecidos, o fluxo total não estaria sendo alterado, mas estaria sim, sendo dividido entre os três sabores. Este fato explicaria os dados, uma vez que sabemos que os experimentos anteriores a SNO detectam apenas neutrinos  $\nu_e$ .

Bruno Pontecorvo sugeriu que os neutrinos poderiam oscilar entre partícula e anti-partícula[2], um efeito análogo ao que ocorre com os káons neutros, já conhecido na época. Neste efeito, a oscilação entre o káon e sua anti-partícula ( $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ ) fazia com que uma fonte que, sabia-se, produzia somente um dos tipos de káon, proporcionasse detecções de partículas com dois tempos de vida diferentes, ou seja, káons diferentes.

Com os neutrinos, o efeito seria basicamente o mesmo. Como nossos experimentos não detectariam os anti-neutrinos, a oscilação  $\nu \leftrightarrow \bar{\nu}$  levaria a uma redução do fluxo esperado.

Esta seria uma das explicações para o problema do neutrino solar.

Com a posterior descoberta dos outros dois tipos de neutrinos, surgiu também a possibilidade de ocorrer oscilação entre os tipos. Apesar de ser diferente da oscilação neutrino - anti-neutrino, este processo ainda é análogo à oscilação entre káons, pois com o advento do modelo a quarks, esta oscilação se mostrou fruto de uma oscilação entre os tipos de quarks<sup>3</sup>.

A oscilação entre os tipos de neutrinos também levaria a uma redução no fluxo observado de neutrinos solares  $\nu_e$ , sendo assim uma outra hipótese aceitável. Muitas outras hipóteses surgiram, mas apenas esta última sobreviveu ao número e à diversidade de experimentos realizados.

Com isso, nos dedicamos neste texto a mostrar como a oscilação entre os tipos de neutrinos resolve o problema do neutrino solar. O modelo da *oscilação de sabor* começa a ser desenvolvido no próximo capítulo, e seguimos neste caminho até o capítulo final, quando confrontamos o modelo aos dados de maneira simples e ilustrativa.

---

<sup>3</sup>Uma vez que o káon e sua anti-partícula não são entidades fundamentais, os neutrinos estão mais próximos dos quarks do que dos káons, no sentido de não possuir constituintes conhecidos.

# Oscilação no Vácuo

## 2.1 O Fenômeno Quântico de Oscilação

Uma solução para o aparente desaparecimento dos neutrinos entre o Sol e a Terra é a oscilação de neutrinos. Neste processo, os três estados de sabor  $\nu_l = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$  oscilam entre si de forma que, se somente neutrinos  $\nu_e$  são produzidos no Sol, então a probabilidade de se detectar os outros sabores (vindos do Sol) não é zero. Mas se for esta a solução de nosso problema, então por que e como a oscilação ocorre?

Na mecânica quântica temos vários exemplos de oscilação. Talvez o mais conhecido, embora não muito lembrado, seja o dos sistemas de acoplamento de spin<sup>1</sup>. Tanto neste como em outros casos, a “oscilação” é o nome que se dá à dependência periódica das soluções no tempo ou no espaço. Este tipo de solução é obtida quando medimos um observável que não é diagonal na base dos auto-estados da Hamiltoniana. Tentando vencer a barreira da linguagem técnica, podemos dizer que algumas grandezas físicas não podem ser determinadas simultaneamente. No caso do momento angular, **cada uma** de suas componentes ( $L_x, L_y, L_z$ ) pode ser determinada simultaneamente com a energia do sistema. Entretanto, não se pode determinar o valor de mais de uma componente do momento angular simultaneamente. Cada vez que se mede o valor de uma componente do momento angular em uma direção, perde-se completamente a informação sobre as outras. Isto pode ser visto como uma generalização do princípio da incerteza de

---

<sup>1</sup>Este tipo de oscilação é descrita em diversos livros de graduação por ser um exemplo simples e completo onde pode-se estudar tanto as ferramentas matemáticas (de maneira introdutória, por se tratar de um sistema de apenas dois níveis), quanto os conceitos físicos sobre observáveis que não comutam. Para maiores detalhes ver a referência [7].

Heisenberg<sup>2</sup>, o qual sempre vemos aplicado diretamente ao caso das medidas de posição e momento linear ( $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ ).

Mas agora uma nova pergunta surge: Quais são os observáveis envolvidos no problema dos neutrinos e que não podem ser medidos simultaneamente, gerando assim oscilação?

## 2.2 Um Novo Ponto de Vista Sobre o Neutrino

O neutrino pode ser ainda mais complexo do que nos parece até agora. E o problema pode não estar exatamente com ele, mas sim com a forma como ele interage. A pergunta feita no final da seção anterior, sobre os observáveis envolvidos no problema e que não podem ser medidos simultaneamente, não pode ser respondida no contexto deste trabalho devido a dificuldades conceituais inerentes à teoria quântica de campos. Mas veremos que a compreensão da física por trás do neutrino nos levará a uma reformulação de tal pergunta que possa ser respondida na mecânica quântica usual.

Para que possamos “ver” um neutrino, devemos colocar um alvo em seu caminho, que interaja com ele durante seu vôo. Por ser desprovido de carga elétrica e de *cor* (a carga da interação forte) a única forma de interagir de um neutrino é via interação fraca ou gravitacional. Como ainda não dominamos tecnologia para vislumbrar interações gravitacionais entre partículas elementares em laboratório (devido a esta interação ser incrivelmente mais fraca do que as demais), então só nos resta a interação fraca. Esta é mediada por três mensageiros, os bósons  $W^+$ ,  $W^-$  e  $Z^0$ , que são massivos e por isso limitam muito o alcance da interação. A interação fraca, ou melhor os bósons mediadores, são nossos “olhos” para ver os neutrinos e ao mesmo tempo, são as “mãos” que criam os neutrinos, uma vez que as partículas fundamentais só podem ser criadas ou aniquiladas pelas interações que as afetam. Mas, e se a interação fraca não interagir *exatamente* com o neutrino? Em outras palavras, e se a partícula que chamamos de neutrino não for exatamente uma entidade física bem definida?

O que é proposto é que existam três partículas, chamadas *neutrinos físicos*, as quais denominamos  $\nu_i = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ . Cada uma destas partículas possui massa  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , respectivamente. Elas não possuem carga elétrica e tão pouco carga de cor, mas interagem fracamente, pelo menos de certa forma. Propomos também que, por alguma razão ainda totalmente desconhecida, os

---

<sup>2</sup>Em geral,  $\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$ , ou seja, quaisquer dois observáveis que não comutem satisfazem uma relação de incerteza.

mediadores da interação fraca não *acoplam*<sup>3</sup> com estas partículas diretamente. Ao invés disso, a interação fraca apenas cria e aniquila estados *mistos* de neutrinos físicos. O sentido de estado misto que exploramos aqui é o de *superposição de estados quânticos*. Ou seja, o que “vemos” e identificamos como o neutrino  $\nu_e$  nada mais é do que uma superposição dos neutrinos físicos, algo como

$$\nu_e = U_{e1} \nu_1 + U_{e2} \nu_2 + U_{e3} \nu_3 , \quad (2.1)$$

onde  $U_{e1}$ ,  $U_{e2}$  e  $U_{e3}$  são coeficientes de mistura, ou seja, eles determinam “o quanto” de cada neutrino físico compõe o neutrino do elétron  $\nu_e$ . O mesmo deve ocorrer para os outros dois sabores  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$ . Assim, de uma forma mais completa podemos definir os estados de sabor em função dos neutrinos físicos como

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} , \quad (2.2)$$

ou de forma simplificada

$$\nu^{(s)} = U \nu^{(m)} \quad (2.3)$$

onde  $\nu^{(s)}$  e  $\nu^{(m)}$  são “vetores” cujas componentes são os estados<sup>4</sup> de sabor  $\nu_l (s)$  e de massa  $\nu_i(m)$ , respectivamente. A matriz  $U$  é chamada *matriz de mistura*. Em algumas situações pode ser necessário escrever a expressão (2.3) na forma de componentes

$$\nu_l = U_{li} \nu_i \quad (2.4)$$

com  $i = 1, 2$  e  $3$  e  $l = e, \mu$  e  $\tau$ . Na expressão anterior utilizamos a notação de Einstein para soma<sup>5</sup>. Para assegurar a *ortonormalidade* dos estados de sabor e, por consequência, a

<sup>3</sup>Usamos o termo *acoplar* ao nos referirmos à possibilidade de interação entre duas partículas.

<sup>4</sup>Neste ponto ainda usamos uma notação geral, onde representamos a *partícula* neutrino sem nos preocupar com as diferenças entre estado e campo. Mais adiante faremos distinção entre as notações, mas por hora o leitor pode entender os símbolos  $\nu$  como *funções de onda* na forma de Schrödinger.

<sup>5</sup>Na notação de Einstein, índices repetidos são índices mudos, ou seja, devem ser somados. A expressão (2.4) é equivalente a  $\nu_l = \sum_{i=1}^3 U_{li} \nu_i$ .

normalização da probabilidade, a matriz  $U$  deve ser unitária, ou seja  $U U^\dagger = \mathbb{1}$  (fazendo assim parte de um grupo homomórfico ao das rotações).

Infelizmente a matriz de mistura ainda não pode ser determinada por meios teóricos<sup>6</sup> e por isso deve ser determinada experimentalmente. Na verdade é uma extrapolação pensar que estes parâmetros serão um dia deduzidos das propriedades de outras grandezas conhecidas, como da interação fraca ou de propriedades fundamentais dos campos (partículas). Deixamos isso para os interessados em teorias de unificação, sendo que já existe uma vasta bibliografia sobre o assunto. Daqui para frente, vamos aceitar que o neutrino é assim e interage desta forma.

Temos que ampliar nosso conceito de partícula para que possamos ter em mente que o estado de superposição também é uma partícula, assim como o estado físico, e além disso, devemos dizer que o neutrino  $\nu_e$  é “tão neutrino” quanto  $\nu_1$ . Com efeito, são apenas partículas com propriedades diferentes, a saber: podemos interagir com os neutrinos  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$ , mas não temos informação sobre suas massas, por outro lado não podemos interagir com  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  e  $\nu_3$ , mas estes têm massas bem definidas. Em uma linguagem mais técnica, dizemos que os neutrinos  $\nu_i$  são *auto-estados de interação*, enquanto os neutrinos  $\nu_e$  são *auto-estados de massa ou propagação* (ver seção 2.4). Isto nos remete à pergunta inicial desta seção: quais os operadores que não comutam, envolvidos neste problema? Se estamos lidando com dois conjuntos de *auto-estados*, então uma pergunta válida seria “quais são os operadores com os quais estes estados estão relacionados?”. Mas como já foi mencionado, este tipo de questionamento nos leva a uma formulação matemática mais eficiente (e mais complexa) chamada *teoria quântica de campos*, a qual está fora do nosso contexto (a não ser em alguns complementos, que podem ser consultados por leitores que tenham conhecimentos básicos em teoria de campos). Portanto vamos nos valer da álgebra linear e reformular nossa pergunta. Todo operador pode ser escrito de maneira mais “elegante” (evidenciando seus auto-valores) quando utilizamos como base seus próprios auto-vetores (chamados aqui de auto-estados). Com efeito, dois operadores que não comutam não podem ser escritos numa mesma base. Assim, como não temos acesso aos operadores, podemos desenvolver nosso modelo baseado exclusivamente no conhecimento de suas bases diagonalizantes? A resposta a esta pergunta é afirmativa.

Conhecemos os auto-estados (auto-vetores) de interação e de massa, por definição. Conhecemos também, por definição, a matriz de mistura, a qual relaciona os dois conjuntos. Dizemos

---

<sup>6</sup>Algumas candidatas a teorias de grande unificação, ou GUT's, tentam obter os coeficientes da matriz de mistura através de princípios básicos como simetrias de calibre.

então que o primeiro conjunto, o dos auto-estados de interação, forma a *base* de interação ou *base de sabor*. Por outro lado, o segundo conjunto de vetores, o dos auto-estados físicos ou de massa, formam a *base de massa*. Esta descrição completa nossa compreensão do neutrino, pois ambas as bases são *equivalentes* em todos os sentidos<sup>7</sup>. A equivalência entre as bases é, em termos técnicos, a mesma afirmação feita no início do parágrafo anterior onde expressamos com palavras mais simples que *o neutrino  $\nu_e$  é “tão neutrino” quanto  $\nu_1$* .

Com essa mentalidade, podemos agora estudar com mais detalhes a mistura entre partículas e entender suas conseqüências.

## 2.3 Um Retrato do Neutrino

Para simplificar a análise que faremos a seguir sobre “composição” do neutrino, vamos nos limitar a estudar a mistura entre duas famílias. Isto não trará nenhum prejuízo aos resultados pois como veremos no caso do neutrino solar apenas a oscilação entre  $\nu_e$  e  $\nu_\mu$  é relevante<sup>8</sup>. Desta forma, restringindo (2.2) para um sistema  $2 \times 2$  e exigindo  $U^\dagger U = \mathbb{1}$  obtemos

$$\begin{aligned}\nu_e &= \cos \theta \nu_1 + \sin \theta \nu_2 \\ \nu_\alpha &= -\sin \theta \nu_1 + \cos \theta \nu_2 ,\end{aligned}\tag{2.5}$$

onde  $\nu_\alpha$  representa qualquer um dos outros dois sabores<sup>9</sup> ( $\nu_\mu, \nu_\tau$ ).

Vamos ressaltar dois importantes aspectos da mistura. O primeiro é que, de acordo com (2.5) os estados de sabor dos neutrinos são combinações dos estados físicos ou *auto-estados de massa*. Pensando em funções de onda, a propagação de um neutrino  $\nu_e$  é descrita pela propagação de duas funções de onda que correspondem a  $\nu_1$  e  $\nu_2$ . Como o que medimos é a probabilidade de se encontrar um estado ou outro, ou seja  $|\nu_i|^2$ , então podemos dizer que um estado  $\nu_e$ , por exemplo, é composto de uma parte  $\cos^2 \theta$  de  $\nu_1$  e outra parte  $\sin^2 \theta$  de  $\nu_2$ . A figura (2.1.a) mostra uma representação dos estados de sabor em função dos auto-estados de massa.

<sup>7</sup>Esta equivalência se deve ao fato delas estarem relacionadas por uma transformação unitária.

<sup>8</sup>Mesmo no caso dos neutrinos atmosféricos (não estudados neste texto) somente a oscilação entre  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$  é relevante, de forma que, por motivos didáticos, pode-se usar duas famílias sem perda de resultados práticos.

<sup>9</sup>Na verdade, como os experimentos realizados até agora não distinguem entre estes dois sabores,  $\nu_\alpha$  pode ser considerado uma mistura entre eles, sem que isso afete a análise dos resultados.

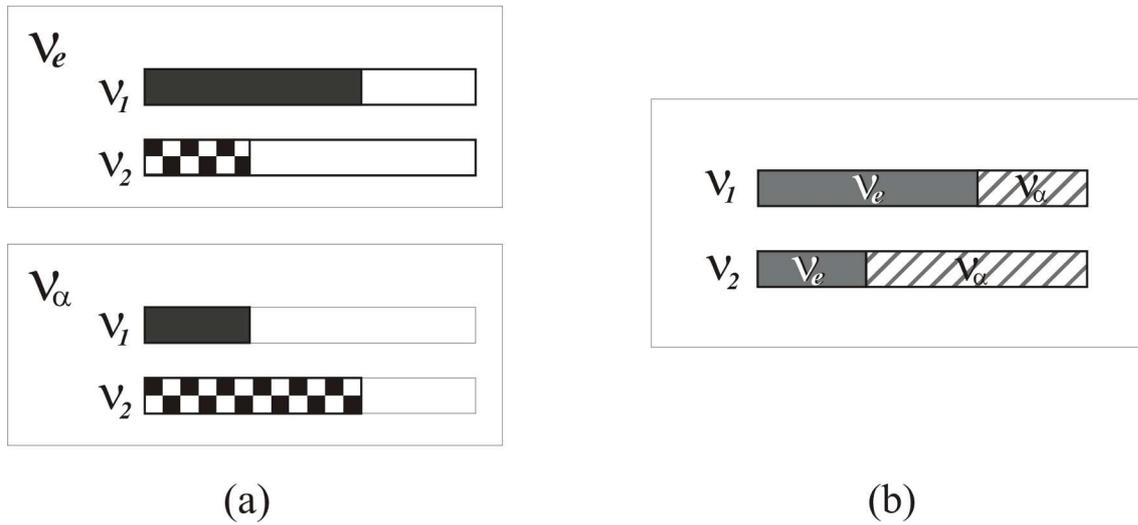


Figura 2.1: (a) Uma representação dos estados de sabor em termos dos estados físicos. O comprimento das barras mostra a probabilidade de se encontrar  $\nu_1$  ou  $\nu_2$  num dado estado de sabor,  $\nu_e$  ou  $\nu_\alpha$ . (b) Representação dos estados físicos em termos dos estados de sabor.

O segundo aspecto importante é que, devido à equivalência entre as bases, a expressão (2.5) pode ser invertida para mostrar a composição dos estados físicos em termos dos estados de sabor, resultando em

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \cos \theta \nu_e - \sin \theta \nu_\alpha \\ \nu_2 &= \sin \theta \nu_e + \cos \theta \nu_\alpha ,\end{aligned}\tag{2.6}$$

o que significa que a probabilidade de encontrar um estado de sabor  $\nu_e$  num estado de massa  $\nu_1$  é  $\cos^2 \theta$  e de encontrar  $\nu_\alpha$  é  $\sin^2 \theta$  (no mesmo estado  $\nu_1$ ). Esta composição dos estados físicos é mostrada na figura (2.1.b). Vale lembrar que as bases são perfeitamente equivalentes e, portanto, a figura (2.1.b) poderia ser exatamente como a figura (2.1.a). É preferível representar a figura (2.1.b) de maneira diferente para facilitar a composição e a interpretação da figura (2.2).

Inserindo a composição dos estados de massa (2.1.b) na composição dos estados de sabor (2.1.a) podemos construir um “retrato” do neutrino. Na figura (2.2) vemos uma representação dos neutrinos  $\nu_e$  e  $\nu_\alpha$ . Além de sua composição em termos de  $\nu_1$  e  $\nu_2$ , também vemos as composições destes em termos de  $\nu_e$  e  $\nu_\alpha$ . Aparentemente, nossa definição de mistura nos levou a uma visão paradoxal do neutrino. Repare que o neutrino do elétron tem uma parte do neutrino  $\alpha$  e vice-versa. Mas este paradoxo *aparente* é a chave para solucionar nossa questão inicial sobre os neutrinos solares.

Vamos reproduzir, com as expressões (2.5) e (2.6), os mesmos passos que seguimos na cons-

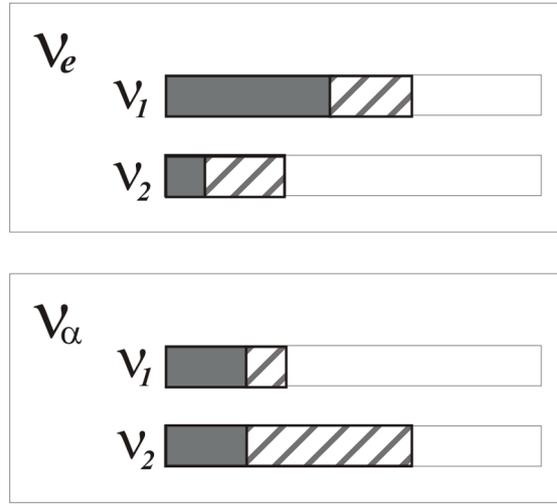


Figura 2.2: A figura acima mostra o aparente paradoxo na mistura do neutrino. Ao combinarmos as figuras (2.1.a) e (2.1.b) obtemos uma representação gráfica dos sabores do neutrino, em função dos próprios auto-estados de sabor. Os retângulos cinzas representam o sabor  $\nu_e$ , enquanto os retângulos listrados representam o sabor  $\nu_\alpha$ . Desta forma temos uma inconsistência: o neutrino  $\nu_e$ , representado no quadro superior, é aparentemente composto por uma parte do sabor  $\nu_\alpha$  (e vice-versa). Esta inconsistência é aparente pois na figura, assim como em nosso raciocínio, não podemos representar as *fases* ou senos e cossenos envolvidos na distribuição dos sabores. Os retângulos listrado que aparece nas duas linha do quadro superior (ou seja, as partes de  $\nu_\alpha$  presentes em cada auto-estado de massa) têm o mesmo tamanho, e isso garante seu cancelamento pois suas fases são extremamente opostas. A discussão segue análoga para o caso do neutrino  $\nu_\alpha$ , representado no quadro inferior.

trução da figura (2.2). Substituindo as definições das misturas de  $\nu_1$  e  $\nu_2$  de (2.6) na definição da mistura de  $\nu_e$  (primeira linha de (2.5)), temos

$$\begin{aligned}
 \nu_e &= \cos \theta (\cos \theta \nu_e - \sin \theta \nu_\alpha) + \sin \theta (\sin \theta \nu_e + \cos \theta \nu_\alpha) \\
 &= \cos^2 \theta \nu_e - \cos \theta \sin \theta \nu_\alpha + \sin^2 \theta \nu_e + \sin \theta \cos \theta \nu_\alpha \\
 &= \nu_e (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
 &= \nu_e
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ou seja, não há paradoxo. As fases entre a parte  $\nu_e$  e a parte  $\nu_\alpha$  se cancelam perfeitamente de forma que apenas a parte  $\nu_e$  sobrevive, fazendo com que o neutrino do elétron *efetivamente* contenha apenas o sabor  $\nu_e$ . Porém, há uma parte  $\nu_\alpha$  latente em sua composição<sup>10</sup>. Durante a propagação, as fases não mais se cancelam, pois a velocidade de fase de cada componente depende de sua massa (que são diferentes, por hipótese) e isso faz com que uma parte  $\nu_\alpha$  comece a surgir em um estado inicialmente puro de  $\nu_e$ . Este é o mecanismo chave para a

<sup>10</sup>Composição no sentido de superposição.

oscilação. Como veremos mais adiante, se as massas forem iguais não há oscilação pois, como apontado pelo argumento anterior, se as velocidades de fase das componentes forem exatamente as mesmas, o cancelamento será uma constante de movimento e nenhuma oscilação ocorre.

Temos agora que compreender a descrição matemática das idéias discutidas até aqui, para que possamos obter um modelo capaz de prever resultados e explicar os dados existentes.

## 2.4 Oscilando Entre Dois Sabores

### 2.4.1 Definições

Continuaremos aqui com a descrição simplificada em termos de dois sabores  $\nu_e$  e  $\nu_\alpha$ . Também passaremos a usar o formalismo de vetores de estado *kets* e *bras*. Assim as expressões (2.5) e (2.6) se tornam, respectivamente,

$$|\nu_e\rangle = \cos\theta |\nu_1\rangle + \sin\theta |\nu_2\rangle \quad (2.8)$$

$$|\nu_\alpha\rangle = -\sin\theta |\nu_1\rangle + \cos\theta |\nu_2\rangle \quad (2.9)$$

e

$$|\nu_1\rangle = \cos\theta |\nu_e\rangle - \sin\theta |\nu_\alpha\rangle \quad (2.10)$$

$$|\nu_2\rangle = \sin\theta |\nu_e\rangle + \cos\theta |\nu_\alpha\rangle . \quad (2.11)$$

Uma notação muito prática para este problema são os vetores<sup>11</sup> de duas componentes. Esta notação é geralmente utilizada em sistemas de dois níveis como os sistemas que possuem apenas o spin como grau de liberdade. Sua principal característica é a possibilidade de utilizar as matrizes de Pauli como base para descrever os operadores<sup>12</sup>. Sendo assim, definimos o vetor:

$$\nu^{(s)} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}_s, \text{ onde } |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 = 1 . \quad (2.12)$$

O índice  $s$  indica que o vetor em questão está escrito na base dos auto-estados de sabor. A base do espaço de vetores se relaciona com a base do espaço de estados, formando a “ponte” entre o formalismo de vetores e o formalismo de bras e kets, de forma que

<sup>11</sup>Estes objetos não são rigorosamente vetores, mas nomeá-los assim é didático e não causará problemas futuros.

<sup>12</sup>Ver Complemento II.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_s \equiv |\nu_e\rangle \quad (2.13)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_s \equiv |\nu_\alpha\rangle . \quad (2.14)$$

Da mesma forma, temos os vetores escritos na base dos auto-estados de massa:

$$\nu^{(m)} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_m, \text{ onde } |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1, \quad (2.15)$$

sendo que as bases relacionam os vetores aos estados ket:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_m \equiv |\nu_1\rangle \quad (2.16)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_m \equiv |\nu_2\rangle . \quad (2.17)$$

Com esta notação e utilizando a expressão (2.3), escrevemos

$$\nu^{(s)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \nu^{(m)}, \quad (2.18)$$

onde a matriz de mistura  $U$  é a mais simples, com parâmetros reais, e é definida como função de  $\theta$ , sendo este chamado *ângulo de mistura*. Lembramos que esta definição de  $U$  é a matriz  $2 \times 2$  mais simples que satisfaz a condição

$$UU^\dagger = \mathbb{1} . \quad (2.19)$$

Lembramos também que o ângulo de mistura é o único parâmetro do modelo, e atualmente não pode ser determinado por nenhuma teoria, sendo necessário medi-lo experimentalmente.

### 2.4.2 Formalizando o Problema

Sendo  $\nu^{(m)}$  o vetor dos estados das partículas físicas, ou seja, aquelas que possuem massa bem definida e se propagam no vácuo, então estes estados são aqueles que devem satisfazer a equação de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \nu^{(m)} = H \nu^{(m)} . \quad (2.20)$$

Vamos utilizar o sistema natural de unidades, onde:

$$c = 1 \quad \text{e} \quad \hbar = 1. \quad (2.21)$$

Neste sistema massa, energia e momento ficam em pé de igualdade<sup>13</sup>, e no caso da física de partículas elementares, escolhemos o  $eV$  (*eletron-volt*) como unidade de massa-energia-momento.

Desta forma, a equação de Schrödinger para os estados físicos fica

$$i \frac{d}{dt} \nu^{(m)} = H \nu^{(m)} , \quad (2.22)$$

onde  $H$  é a *Hamiltoniana* do sistema, e é representada matricialmente por

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} . \quad (2.23)$$

onde as energias  $E_1$  e  $E_2$  são, respectivamente, as energias dos neutrinos físicos  $\nu_1$  e  $\nu_2$ .

### 2.4.3 Mudança de Base

Nosso interesse é que o modelo possa prever a probabilidade de sobrevivência dos neutrinos eletrônicos no seu trajeto Sol-Terra. Uma vez que não interagimos diretamente com os neutrinos físicos, não é de nosso interesse prático escrever a solução em função dos estados  $\nu_1$  e  $\nu_2$ . Para tanto será necessário escrever a equação (2.22) utilizando os estados de sabor  $\nu^{(s)}$ , ao invés dos estados de massa  $\nu^{(m)}$ . Para isso, assim como em (2.6), escrevemos os estados físicos em função dos estados de sabor, ou seja, o inverso da expressão (2.3)

$$\nu^{(m)} = U^\dagger \nu^{(s)} . \quad (2.24)$$

Substituindo (2.24) em (2.22) e partindo da hipótese de que o ângulo de mistura é constante no vácuo<sup>14</sup> temos:

---

<sup>13</sup>Ver Complemento I.

<sup>14</sup>Não há motivos para ser diferente, pois o vácuo é homogêneo e isotrópico.

$$iU^\dagger \frac{d}{dt} \nu^{(s)} = H U^\dagger \nu^{(s)} . \quad (2.25)$$

Multiplicando pela esquerda por  $U$  e usando a propriedade (2.19) temos

$$i \frac{d}{dt} \nu^{(s)} = U H U^\dagger \nu^{(s)} . \quad (2.26)$$

Definimos  $H_s$  como

$$\begin{aligned} H_s &\equiv U H U^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} E_1 \cos^2 \theta + E_2 \sin^2 \theta & (E_2 - E_1) \cos \theta \sin \theta \\ (E_2 - E_1) \cos \theta \sin \theta & E_1 \sin^2 \theta + E_2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Podemos expandir qualquer matriz  $2 \times 2$  em uma combinação das *matrizes de Pauli* e da identidade. Para nossos propósitos, esta decomposição é especialmente interessante pois a aplicação das matrizes de Pauli em vetores de duas componentes como  $\nu^{(m)}$  e  $\nu^{(s)}$  é trivial<sup>15</sup>. Com isso  $H_s$  fica

$$H_s = \frac{(E_1 + E_2)}{2} \mathbb{1} + \frac{(E_2 - E_1)}{2} (\sigma_1 \sin 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta) . \quad (2.28)$$

onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são as matrizes de Pauli<sup>16</sup>. Normalmente omite-se o símbolo da matriz identidade  $\mathbb{1}$  neste tipo de expressão. Isso pode confundir o estudante no início pois não ressalta o caráter matricial do operador. Neste texto usaremos sempre a forma acima, mas o estudante deve estar ciente de que encontrará em outros textos a mesma expressão da seguinte forma:

$$H_s = \frac{(E_1 + E_2)}{2} + \frac{(E_2 - E_1)}{2} (\sigma_1 \sin 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta) .$$

De qualquer forma, temos que ressaltar aqui um detalhe importante para o modelo e que já pode ser notado a partir da hamiltoniana  $H_s$ . Reparamos que, ao contrário de  $H$  na definição (2.23),  $H_s$  não é diagonal. A forma diagonal de  $H$  na equação de Schrödinger (2.22) significa que *a probabilidade de haver transições entre os estados  $\nu_1$  e  $\nu_2$  é nula*. Porém vemos que

<sup>15</sup>Para mais detalhes quanto à decomposição em matrizes de Pauli e suas aplicações, ver Complemento II.

<sup>16</sup>É mais comum encontrar na literatura  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ . Porém aqui usaremos a notação mais usada nos textos que envolvem Relatividade Especial, a saber:  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , respectivamente.

exatamente o oposto pode ser dito a respeito da equação (2.27). Os termos não diagonais no operador hamiltoniano  $H_s$  indicam que a solução da equação trará probabilidades **não nulas** de que em estados puramente compostos de  $\nu_e$  por exemplo, encontremos ocorrência de  $\nu_\alpha$  (e vice-versa). Isto nos remete às discussões da seção anterior sobre as origens da oscilação e por enquanto nos indica que estamos no caminho certo. Vemos em  $H_s$  na expressão (2.27) que, se  $E_1 = E_2$  ou se  $\theta = \pi/4$ , a matriz passa a ser diagonal. A diferença entre  $E_1$  e  $E_2$  dita a diferença entre as velocidades de fase das funções de onda de  $\nu_1$  e  $\nu_2$ . Isto significa que somente se esta diferença existir será possível observar uma conversão entre os estados  $\nu_l$  ( $\nu_e \rightleftharpoons \nu_\alpha$ ).

#### 2.4.4 Solução Geral

Voltando à resolução da equação de Schrödinger, de posse de  $H_s$  a expressão (2.26) fica

$$i \frac{d}{dt} \nu^{(s)} = H_s \nu^{(s)}, \quad (2.29)$$

a qual possui soluções do tipo

$$\nu^{(s)}(t) = e^{-i H_s t} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}_s, \quad (2.30)$$

onde  $\varphi_1, \varphi_2$  são constantes e dependem das condições iniciais. Estas condições podem ser interpretadas como sendo a proporção dos neutrinos  $\nu_e$  com relação aos  $\nu_\alpha$ . Como todas as operações realizadas até aqui envolveram apenas a matriz  $U$  (que satisfaz  $UU^\dagger = \mathbb{1}$ ), então basta garantir que  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1$  para que  $\nu^{(s)}(t)$  seja normalizado.

Para obter a solução geral da equação, substituímos a expressão (2.28) para  $H_s$  na solução proposta (2.30). A função exponencial de uma matriz de Pauli tem algumas propriedades especiais<sup>17</sup> e em particular usaremos a igualdade:

$$e^{-i\alpha(\sigma_1 \sin \beta - \sigma_3 \cos \beta)} = \mathbb{1} \cos \alpha - i(\sigma_1 \sin \beta - \sigma_3 \cos \beta) \sin \alpha \quad (2.31)$$

Comparando a expressão acima com (2.28), vemos que  $\beta = 2\theta$  e  $\alpha = (E_2 - E_1)t/2$  (o  $t$  vem da solução 2.30). Definindo  $E_2 - E_1$  como  $\Delta E$  obtemos a solução geral

$$\nu^{(s)}(t) = e^{-i \frac{E_1 + E_2}{2} t} \times$$

---

<sup>17</sup>Ver Complemento II.

$$\left[ \mathbb{1} \cos\left(\frac{\Delta E}{2}t\right) - i(\sigma_1 \sin 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta) \sin\left(\frac{\Delta E}{2}t\right) \right] \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

### 2.4.5 Solução Particular

Em primeiro lugar, lembramos que a equação resolvida está escrita na base dos auto-estados de sabor (a partir da substituição da expressão (2.24)). Portanto já estamos lidando com neutrinos  $\nu_e$  e  $\nu_\alpha$ . Se interpretarmos as constantes  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  como proporções entre o número inicial de cada tipo de neutrino, então o estado  $\nu^{(s)}(t)$  pode ser interpretado como descritor de um feixe de neutrinos que, a princípio, pode conter qualquer um dos dois (três) sabores.

Com efeito, a condição inicial de que o fluxo de neutrinos provenientes do Sol é puramente composto de  $\nu_e$  pode ser escrita como:

$$\nu^{(s)}(0) = |\nu_e\rangle \implies \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_s. \quad (2.33)$$

Então teremos que aplicar  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  (que usamos para escrever  $H_s$ ) em (2.33), ou seja

$$\sigma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_s = |\nu_\alpha\rangle \quad (2.34)$$

e

$$\sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_s = |\nu_e\rangle. \quad (2.35)$$

Fazemos assim a associação entre a notação vetorial e a notação de vetores de estado. Chamamos a solução  $\nu^{(s)}(t)$  de  $|\nu_e(t)\rangle$ , para ressaltar que não estamos mais lidando com a notação de duas componentes, mas sim, com vetores de estado.

Com isso, obtemos a solução particular

$$|\nu_e(t)\rangle = e^{-i\frac{E_1+E_2}{2}t} \times \left[ \cos\left(\frac{\Delta E}{2}t\right) |\nu_e\rangle - i(|\nu_\alpha\rangle \sin 2\theta - |\nu_e\rangle \cos 2\theta) \sin\left(\frac{\Delta E}{2}t\right) \right], \quad (2.36)$$

Reorganizando os termos e colocando os estados  $|\nu_e\rangle$  e  $|\nu_\alpha\rangle$  em evidência, temos

$$\begin{aligned}
|\nu_e(t)\rangle &= e^{-i\frac{E_1+E_2}{2}t} \times \\
&\left\{ \left[ \cos\left(\frac{\Delta E}{2}t\right) + i \cos 2\theta \sin\left(\frac{\Delta E}{2}t\right) \right] |\nu_e\rangle \right. \\
&\quad \left. - i \sin 2\theta \sin\left(\frac{\Delta E}{2}t\right) |\nu_\alpha\rangle \right\}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

A solução possui uma parte que representa a propagação do estado inicial  $|\nu_e\rangle$  e outra que representa  $|\nu_\alpha\rangle$ . Novamente podemos notar aqui os efeitos da mistura, como discutido na seção anterior, que leva o estado  $|\nu_e\rangle$  a ter em si uma parte latente de  $|\nu_\alpha\rangle$ . Como discutido também, as fases destas componentes *não* mais se cancelam perfeitamente, o que leva à observação periódica (pois a solução é função de senos e cossenos) de ocorrências de  $|\nu_\alpha\rangle$  em um estado que, por hipótese, é formado inicialmente apenas por  $|\nu_e\rangle$ . Se o ângulo de mistura  $\theta$  for a zero, a solução (2.37) fica

$$\begin{aligned}
|\nu_e(t)\rangle &= e^{-i\frac{E_1+E_2}{2}t} \left[ \cos\left(\frac{\Delta E}{2}t\right) + i \sin\left(\frac{\Delta E}{2}t\right) \right] |\nu_e\rangle \\
&= e^{-i\frac{E_1+E_2}{2}t} e^{i\frac{E_2-E_1}{2}t} |\nu_e\rangle \\
&= e^{-i\frac{E_1+E_1}{2}t} |\nu_e\rangle \\
&= e^{-iE_1t} |\nu_e\rangle
\end{aligned} \tag{2.38}$$

que nada mais é do que o estado inicial  $|\nu_e\rangle$  evoluindo no tempo, puro e sem oscilações.

### 2.4.6 Probabilidades de Conversão e Sobrevivência

Finalmente podemos obter a probabilidade de *conversão*  $P_{e\alpha}$ , ou seja, a probabilidade de um neutrino produzido como  $\nu_e$  ser detectado como  $\nu_\alpha$  após um certo tempo  $t$ . Esta é dada por

$$\begin{aligned}
P_{e\alpha}(t) &= |\langle \nu_\alpha | \nu_e(t) \rangle|^2 \\
&= \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta E}{2}t\right)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Como as probabilidades estão normalizadas, podemos obter a probabilidade de *sobrevivência*  $P_{ee} = 1 - P_{e\alpha}$  dada por

$$P_{ee}(t) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta E}{2} t \right) \quad (2.40)$$

Esta é portanto a solução final, resultado do nosso modelo de oscilações no vácuo. Porém para torná-lo prático na aplicação da fenomenologia dos neutrinos ainda são necessárias algumas alterações e aproximações na expressão acima, como veremos adiante.

### 2.4.7 Reparametrizando a Solução

A dependência temporal está na função  $\sin^2$  que tem período  $\pi$  e, portanto, a probabilidade de sobrevivência tem um período

$$\frac{\Delta E}{2} T = \pi \implies T = \frac{2\pi}{\Delta E} . \quad (2.41)$$

Porém, temos que observar que não faz sentido definirmos um período  $T$  (temporal) para as oscilações. Sabemos que os neutrinos viajam do Sol à Terra em um certo tempo, mas a solução que obtivemos é derivada de um formalismo de ondas planas que está implícito na resolução da equação (2.29). Neste tipo de formalismo, o estado  $\nu^{(s)}$  sempre existiu e sempre existirá, sendo que a variável  $t$  é apenas um parâmetro de evolução. Para este e outros efeitos, o tempo, no sentido exato da palavra, somente poderia ser representado por  $t$  se fosse feito uso de um formalismo de *pacotes-de-onda*, por exemplo. Neste caso, o parâmetro  $t$  representaria a propagação do pacote-de-onda do Sol até a Terra, representando exatamente a propagação espacial de um neutrino entre sua origem e sua detecção. Como este não é o caso, temos que reinterpretar o parâmetro  $t$  para obtermos não só resultados físicos como também de interpretação coerente. Com efeito, sabemos que os neutrinos são partículas extremamente relativísticas, devido à sua massa ser muito pequena<sup>18</sup>. Portanto não é uma aproximação grosseira dizer que sua velocidade é aproximadamente aquela da luz, de forma que:

$$v_{\text{neutrino}} \approx c , \quad (2.42)$$

---

<sup>18</sup>Veremos mais adiante o significado técnico para “massa muito pequena” neste caso.

e, além disso, tal velocidade é constante, pois estamos tratando de partículas no vácuo (na ausência de interações - entenda-se “forças”). Assim podemos relacionar  $t$  com um parâmetro<sup>19</sup>  $x$ :

$$x = v_{\text{neutrino}} t \approx c t , \quad (2.43)$$

onde  $x$  pode ser interpretado como a distância entre a fonte e o detector. Mas no sistema de unidades adotado,  $c = 1$  e portanto  $x \approx t$ . Isto significa que o que fizemos foi simplesmente uma reinterpretação do parâmetro  $t$ , agora chamado de  $x$  para lembrar que a probabilidade (2.40) depende de um valor característico entre a fonte e o detector. No sistema natural de unidades, os parâmetros temporais ou espaciais têm dimensão de  $[Energia]^{-1}$ . Como  $x$  e  $t$  estão relacionados de maneira simples e a constante que faz tal relação vale 1, a reinterpretação dos parâmetros foi simples (simplesmente conceitual), deixando a conversão das distâncias de metros (ou centímetros) para as unidades convenientes (geralmente  $MeV^{-1}$ ) quando formos tratar das comparações com os experimentos.

Assim, deste ponto em diante, escreveremos as equações e as respectivas soluções em função de  $x$  e não  $t$ , sem perda de generalidade. A probabilidade de sobrevivência fica então escrita como

$$P_{ee}(x) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta E}{2} x \right) \quad (2.44)$$

onde o *comprimento de oscilação* é dado por

$$l_o = \frac{2\pi}{\Delta E} . \quad (2.45)$$

### 2.4.8 Discussões sobre Massa, Energia e Momento

Na tarefa de tornar nossa solução prática e aplicável, ainda nos resta analisar as energias  $E_1$  e  $E_2$  envolvidas. A expressão (2.44) depende de  $\Delta E$ , que é a diferença entre as energias dos estados  $\nu_1$  e  $\nu_2$ . Mas isto supõe diretamente que há uma diferença de energia entre os estados. A pergunta é qual o tipo de energia a que estamos nos referindo? Faz sentido que um estado de sabor seja composto por uma superposição de partículas com velocidades diferentes, por exemplo?

---

<sup>19</sup>Alguns textos usam  $L$  no lugar de  $x$ .

As energias  $E_1$  e  $E_2$  que introduzimos na hamiltoniana (2.23) são energias *relativísticas*, pois em geral a física das partículas elementares lida com velocidades muito próximas à da luz. Por isso, qualquer energia envolvida nestes processos (aqueles que concernem a física de partículas, por exemplo) deve ser expressa pela fórmula

$$E_i^2 = p_i^2 + m_i^2, \quad (2.46)$$

onde  $p_i \equiv |\vec{p}_i|$  é o módulo do momento linear do estado  $\nu_i$ , com  $i = 1, 2$  (ou 3).

O módulo quadrado do momento linear está relacionado com a parte cinética da energia, enquanto  $m_i$  está relacionado com a energia na forma de massa (lembre-se de que estamos no sistema natural de unidades:  $m$  é na verdade  $mc^2$ ). Assim os auto-valores da hamiltoniana contêm informações sobre a parte cinética dos neutrinos, que depende da energia disponível para a reação, e sobre a massa dos estados físicos, que depende exclusivamente das características dos neutrinos. A questão relevante aqui é “o quanto” cada tipo de energia (cinética ou de massa) participa da energia total.

Existem na literatura diversos métodos de justificar as próximas passagens sendo que há, obviamente, um consenso sobre resultado. Vamos ver a seguir apenas uma destas justificativas.

Na expressão (2.46), o índice  $i$  indica o estado de massa, como foi dito acima. Quando um neutrino é produzido, a reação de criação determina precisamente seu momento linear através das leis de conservação. Desta forma, a primeira observação a fazer é que:

$$p_i \equiv p, \quad (2.47)$$

ou seja, devido a superposição não temos acesso a qual estado de massa foi criado, mas sabemos que o estado de interação tem momento  $p$  e, assim sendo, também devem ter momento  $p$  os estados de massa.

A partir deste valor para o momento  $p$ , pode-se obter a energia total do estado de massa a partir da expressão (2.46):

$$p^2 = E_i^2 - m_i^2 \quad (2.48)$$

O Modelo Solar Padrão prevê que a energia dos neutrinos solares está na escala de  $MeV$  (milhões de elétron-volt). As tentativas de se medir a massa do neutrino mais leve fornecem

valores da ordem de  $eV$ . Ou seja, podemos com certeza dizer que a energia total, auto-valor da hamiltoniana, é praticamente a energia cinética do neutrino. Isso esclarece o que foi dito anteriormente acerca da massa do neutrino e sobre ela ser “muito pequena”. Na física este tipo de comparação sempre deve ser feita com cautela. Aqui a expressão “muito pequena” se refere à comparação entre a energia cinética (proporcional a  $p^2$ ) e a energia de massa ( $m^2$ ). Matematicamente é o mesmo que

$$\frac{m_i}{E_i} \ll 1. \quad (2.49)$$

Da relação acima podemos encontrar uma aproximação para  $p$  na expressão (2.48):

$$\begin{aligned} p &= E_i \sqrt{1 - \frac{m_i^2}{E_i^2}} \\ &\approx E_i \left(1 - \frac{m_i^2}{2E_i^2}\right) \\ &= E_i - \frac{m_i^2}{2E_i} \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde usamos uma expansão binomial para fazer a aproximação anterior. Isolando-se o termo  $E_i$ , temos que

$$E_i = p + \frac{m_i^2}{2E_i}, \quad (2.51)$$

onde a energia  $E_i$  parece estar definida de maneira implícita (pois aparece de ambos os lados desta expressão). Apesar disso, a relação acima tem total validade dentro do limite estabelecido anteriormente ( $m^2 \ll p^2$ ).

Neste ponto, vamos retomar a idéia sobre o formalismo de *ondas planas*, o qual estamos utilizando aqui desde o início<sup>20</sup>. Neste formalismo, não podemos adotar a idéia de que cada estado  $\nu$  representa apenas uma partícula. Quando utilizamos ondas planas, consideramos um *feixe de partículas*, espacialmente bem distribuídas (sem descontinuidades espaciais) e infinito em ambos os sentidos. Este feixe hipotético será nossa representação para o feixe de neutrinos produzidos no Sol e que chega até a Terra.

Desta forma, vamos dizer que  $E$  é a *energia do feixe* enquanto  $E_i$  é o auto-valor da Hamiltoniana para um dado estado de massa  $\nu_i$ . O feixe de neutrinos detectável é aquele composto

---

<sup>20</sup>Outra opção seria um formalismo de *pacotes de onda*[16]

pelos estados de sabor ( $\nu_e$  e  $\nu_\alpha$ ), ou neutrinos interagentes. Então vamos relacionar a energia  $E$  dos neutrinos interagentes com os auto-valores da Hamiltoniana  $E_i$  (para os estados de massa) utilizando a expressão (2.51):

$$E_i = p + \frac{m_i^2}{2E}, \quad (2.52)$$

onde estamos na realidade dizendo que, a fração  $m_i^2/2E_i$  tem aproximadamente o mesmo valor numérico que  $m_i^2/2E$ . Dito de outra forma, estamos expressando os auto-valores  $E_i$  em termos das massas  $m_i$  (bem definidas nos estados físicos) e da energia do feixe  $E$  (bem definida para os estados de sabor).

Substituindo  $E_1$  e  $E_2$ , obtidos da expressão (2.52) e usando a definição de  $\Delta E$  obtemos

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{m_2^2 - m_1^2}{2E}. \quad (2.53)$$

Definimos a quantidade  $\Delta$  como sendo a *diferença do quadrado das massas*, ou seja

$$\Delta \equiv m_2^2 - m_1^2, \quad (2.54)$$

sendo esta uma grandeza fundamental deste modelo, em conjunto ao ângulo de mistura  $\theta$ .

Com isto, não podemos confundir a função das quantidades  $E_i$  e  $E$ . A não igualdade entre os auto-valores  $E_i$  é nossa hipótese fundamental ( $\Delta E \neq 0$ ) e não a estamos descartando de forma alguma quando definimos  $E$ . Apenas transferimos a “função” que a diferença existente entre os auto-valores ( $\Delta E$ ) exerce sobre o modelo, para as novas grandezas  $\Delta$  e  $E$ .

Assim temos um resultado mais aplicável aos dados experimentais e cujas prováveis restrições, devido a tantas aproximações feitas, se mostrarão irrelevantes no caso dos neutrinos solares (e em muitos outros casos). Escrevemos finalmente a solução para a oscilação de sabor no vácuo

$$P_{ee} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta}{4E} x \right) \quad (2.55)$$

já na forma como é freqüentemente encontrada na literatura. Os parâmetros  $\theta$  e  $\Delta$  são inerentes à física de partículas e precisam ser determinados experimentalmente.

Resta-nos agora aplicar o resultado acima nos dados que temos sobre os neutrinos solares. Apesar de que historicamente deveríamos tentar explicar os dados de Homestake em primeiro lugar, é preferível analisar direto o que poderemos chamar de *o segundo problema do neutrino solar*, o qual somente se revelou com os dados de Kamiokande e Super-Kamiokande.

## 2.5 Mas isto Resolve o Problema do Neutrino Solar?

Podemos agora tentar explicar os dados de Super-Kamiokande, que pode ser considerado como a evolução do experimento de Kamiokande. Vamos deixar a descrição completa e técnica do experimento para a seção (5.2). Por hora basta saber que tanto Kamiokande quanto Super-Kamiokande detectam apenas neutrinos do elétron<sup>21</sup> e, além disso, vêem algo que o experimento de Homestake não via: o espectro, ou seja, a dependência energética do fluxo de neutrinos que atinge o detector.

Vamos chamar de  $\phi$  o fluxo de neutrinos. Temos que lidar basicamente com dois fluxos, o teórico  $\phi_{teo}$ , previsto pelo Modelo Solar Padrão, e o experimental  $\phi_{exp}$ , ou seja, o observado. Como já explicamos no início, o problema do neutrino solar se resume basicamente na observação de que

$$\phi_{exp} \ll \phi_{teo} \quad (2.56)$$

ou, expresso de outra forma,

$$\frac{\phi_{exp}}{\phi_{teo}} < 1 \quad (2.57)$$

A razão acima é chamada de *fluxo relativo*. Como nunca se observou um “ganho” na quantidade de neutrinos observados (somente redução), então o fluxo relativo é uma grandeza estritamente menor que um. A figura 2.3 mostra o fluxo relativo em função da energia, obtido por Super-Kamiokande.

A observação de que o fluxo relativo é sempre menor que um nos leva a uma primeira interpretação dos dados do gráfico: podemos relacionar *diretamente* a razão  $\frac{\phi_{exp}}{\phi_{teo}}$  com a probabilidade de sobrevivência  $P_{ee}$ . Então só o que temos que fazer é ajustar a nossa solução (2.55) aos dados do gráfico da figura 2.3. Vamos começar então analisando a solução (2.55).

Em primeiro lugar, vemos que o espectro obtido possui todos os pontos abaixo de 0,5. Por isso, o termo de  $\sin^2 2\theta$  não pode ser muito menor que 1, pois como a média do  $\sin^2(\frac{\Delta x}{4E})$  é 0,5, se  $\sin^2 2\theta$  for muito menor que 1, a média da oscilação ficará acima de 0,5. Portanto o requisito mínimo para que a solução represente os dados é

$$\sin^2 2\theta \approx 1. \quad (2.58)$$

---

<sup>21</sup>Novamente, veja a seção 5.2 para compreender a validade desta afirmação.

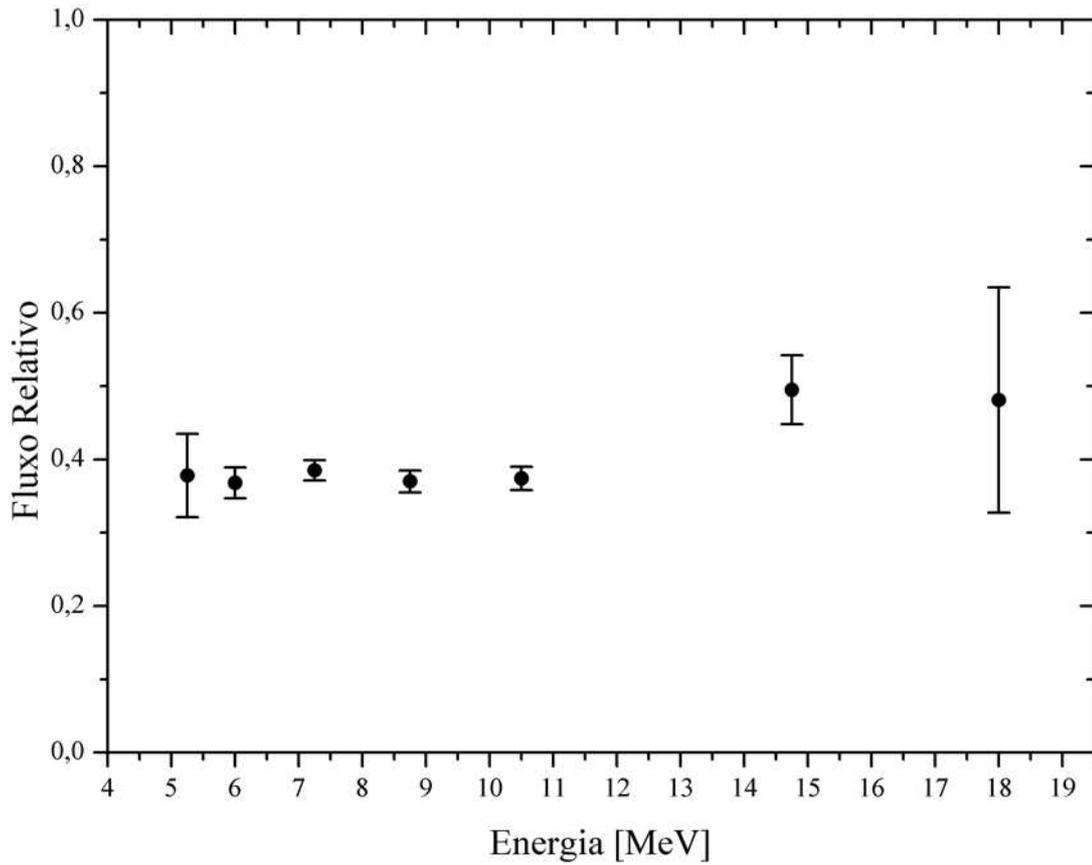


Figura 2.3: A figura acima mostra o espectro (fluxo relativo em função da energia) observado em Super-Kamiokande. Se o fluxo detectado na Terra fosse o mesmo previsto pelo modelo, teríamos todos os dados na linha  $\phi_{exp}/\phi_{teo} = 1$ . Na realidade, o experimento mede um fluxo misto entre neutrinos do elétron e do múon, mas o fluxo de neutrinos eletrônicos pode ser obtido por meio de previsões teóricas. Na obtenção do gráfico acima,  $\phi_{exp}$  já leva em conta esta correção, sendo portanto apenas o fluxo de neutrinos eletrônicos. Tal correção será mostrada na seção 5.2.

Isto simplifica muito nossa tarefa pois teremos apenas que descobrir o valor de  $\Delta$ , pelo menos em uma primeira aproximação. Vamos adotar  $x$  como a distância Sol-Terra, que é  $1,5 \times 10^{11}m$ , ou  $7,6 \times 10^{23}MeV^{-1}$ , em unidades naturais<sup>22</sup>.

Invertendo a solução para obtermos  $\Delta$  em função da probabilidade e da energia,

$$\Delta = \frac{4E}{x} \arcsen \sqrt{1 - P_{ee}} , \quad (2.59)$$

podemos utilizar os pontos do gráfico anterior para construir a tabela a seguir, onde para cada valor de energia e probabilidade, relacionamos o valor de  $\Delta$  correspondente.

---

<sup>22</sup>Ver Complemento I.

$E(\text{MeV})$	$P_{ee}$	$\Delta 10^{-23}(\text{MeV}^2)$
5,25	0,378	2,51
6,00	0,368	2,87
7,25	0,385	3,44
8,75	0,370	4,22
10,50	0,374	5,04
14,75	0,495	6,14
18,00	0,481	7,62

Ao contrário do esperado, não obtivemos um único valor para  $\Delta$ , mas sim, valores crescentes com a energia, o que não é aceitável. Deveríamos encontrar um único valor, o que deixaria o modelo coerente e confirmaria sua validade. Apenas por motivos didáticos, vamos continuar nossa análise apesar desta grave incoerência. Vamos supor que os vários valores obtidos para  $\Delta$  sejam devidos a erros no experimento ou nas previsões teóricas (lembre-se que os valores de  $P_{ee}$  envolvem a previsão do fluxo teórico) e vamos tomar uma média simples como valor mais provável. Ou seja,

$$\Delta = 4,55 \times 10^{-23} \text{ MeV}^2 \text{ ( ou } 4,55 \times 10^{-11} \text{ eV}^2 \text{)}. \quad (2.60)$$

Fazendo o gráfico da solução (2.55), com  $\sin^2 2\theta \approx 1$  e  $\Delta$  dado por (2.60) observamos que a curva não representa os dados.

Por mais que procuremos valores para  $\Delta$  e  $\theta$ , a probabilidade de sobrevivência tem um comportamento oscilatório, não somente em função de  $x$ , mas também em função de  $E$ , enquanto os dados mostram um espectro praticamente constante. Este fenômeno é chamado de *ausência de distorção espectral* e a discrepância entre a curva obtida em (2.4) e os dados pode ser chamada de o *segundo problema do neutrino solar*.

Desta forma, vemos que a oscilação de sabor no vácuo não pode explicar o problema dos neutrinos solares de forma completa e satisfatória. Na verdade, a solução 2.55 teria explicado os experimentos de Homestake, mas isto seria uma análise obviamente incompleta, pois Homestake não vê o espectro, mas sim uma média do fluxo numa banda (região) muito larga de energia.

Como veremos adiante, a resposta completa ao problema vem de algo que ignoramos inicialmente, a saber: a interação dos neutrinos com a matéria solar. Sabemos que tal interação é sutil e que não deveria ter grande influência sobre os resultados, não em primeira ordem. Mas ao fazermos tal suposição, ignoramos o efeito que a *variação* da matéria solar possa ter, variação esta que ocorre naturalmente no trajeto do neutrino entre o núcleo do Sol e sua superfície. Este

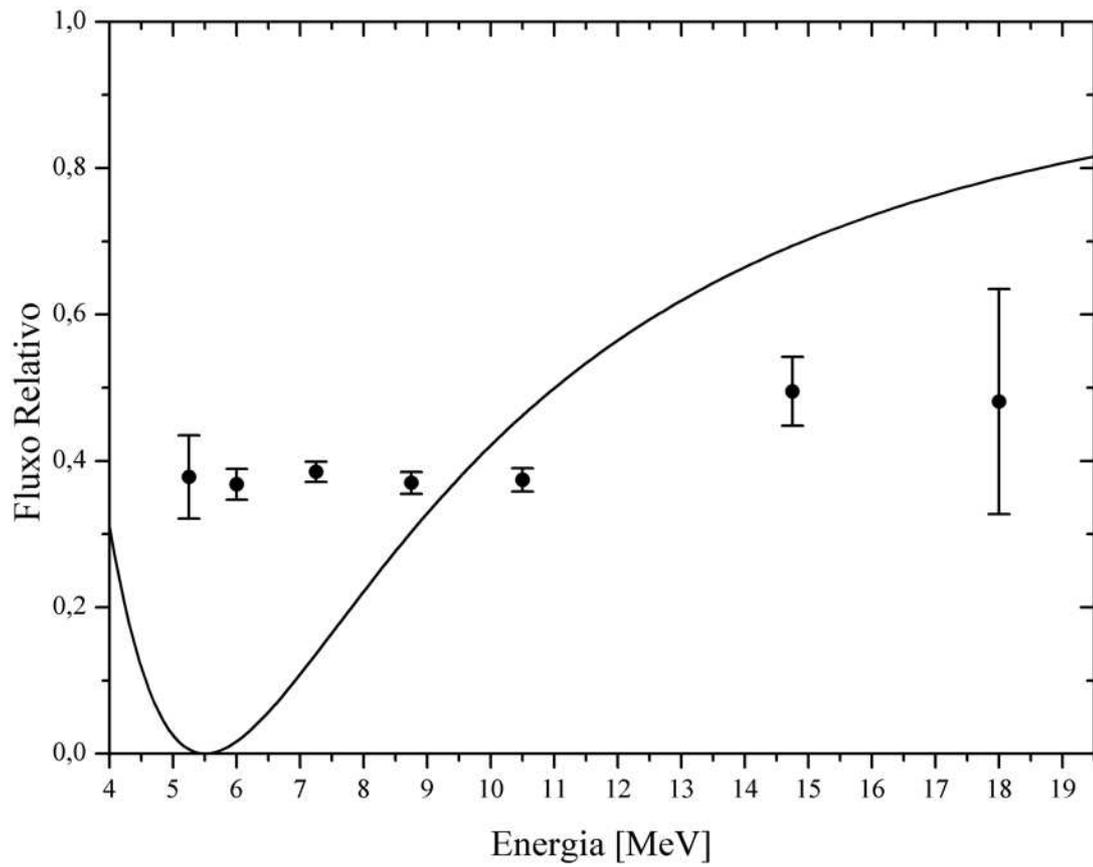


Figura 2.4: Ajuste simples dos dados de Super-Kamiokande ao modelo de oscilação no vácuo. A curva do gráfico mostra o fluxo relativo como previsto pelo modelo, com parâmetros  $\sin^2 2\theta = 1$  e  $\Delta = 4,55 \times 10^{-11} eV^2$ .

é o efeito *MSW* que, como veremos nos próximos capítulos, será a solução definitiva para o problema do neutrino solar.

## COMPLEMENTO I

### SISTEMA NATURAL DE UNIDADES

O que chamamos aqui de *sistema natural de unidades* não é somente um sistema de unidades, mas sim de dimensionalidade. Quando adotamos as constantes  $c = 1$  e  $\hbar = 1$  estamos alterando a dimensão física das grandezas conhecidas. Não estamos simplesmente definindo a velocidade da luz como sendo  $c = 1m/s$  ou  $\hbar = 1J\cdots$ , mas sim definindo que  $c$  e  $\hbar$  são grandezas *unitárias* e *adimensionais*. Se prosseguirmos com uma análise dimensional sobre  $c$  e  $\hbar$  teremos um panorama de como estas redefinições afetam as outras grandezas físicas.

Adotaremos  $L$  como “dimensão de espaço”,  $T$  como “dimensão de tempo”,  $M$  como “dimensão de massa” e por simplicidade,  $E$  como “dimensão de energia” ( $E = ML^2T^{-2}$ ). Assim:

$$[c] = \frac{L}{T} \equiv 1 \quad (2.61)$$

ou seja,

$$[L] \equiv [T] \quad (2.62)$$

levando assim ao extremo a igualdade entre as dimensões espaciais e temporais exigida pela relatividade especial.

Por outro lado

$$[\hbar] = ET \equiv 1 \quad (2.63)$$

ou seja,  $E$  e  $T$  são dimensionalmente inversos (e portanto  $E$  e  $L$  também o são). Além disso, da fórmula  $E = mc^2$ , temos que

$$[E] = [M] \quad (2.64)$$

portanto temos todas as dimensões básicas relacionadas (a menos da carga elétrica). Podemos escolher uma destas dimensões como fundamental e derivar todas as outras desta. Por convenção, adota-se a energia como sendo a dimensão fundamental, de forma que todas as outras são derivadas desta. A tabela abaixo mostra várias grandezas físicas e suas respectivas dimensões.

Grandeza	Dim. Usual	Dim. Natural
comprimento	$L$	$E^{-1}$
tempo	$T$	$E^{-1}$
velocidade	$LT^{-1}$	adimensional
massa	$M$	$E$
energia	$E$	$E$
momento linear	$MLT^{-1}$	$E$
momento angular	$ML^2T^{-1}$	adimensional

Com efeito, deve-se ainda escolher uma unidade conveniente para energia. Em física de partículas a unidade mais conveniente é o *elétron-Volt* ( $eV$ ), que é definido como “a energia adquirida por um elétron ao ser acelerado entre dois pontos com uma diferença de potencial de 1 *Volt*”, ou seja

$$1 eV = 1.6 \times 10^{-19} J . \quad (2.65)$$

Apenas como regra mnemônica, observe que este nada mais é do que o valor numérico da carga do elétron, em Coulombs. A qualquer momento, podemos retomar os valores no SI se usarmos os fatores de conversão

$$\hbar = 6,58 \times 10^{-22} MeV s \quad (2.66)$$

$$\hbar c = 1,97 \times 10^{-13} MeV m \quad (2.67)$$

$$c^2 = 6,24 \times 10^7 MeV/kg \quad (2.68)$$

Repare que os fatores estão em  $MeV$  e não simplesmente  $eV$ . Esta é a escala de energia na qual os fenômenos relacionados a neutrinos solares ocorrem em geral.

Como exemplo, vamos converter a distância Sol-Terra usada como um dos dados do modelo de oscilação no vácuo. No sistema internacional, seu valor é de  $1,5 \times 10^{11} m$  (150 milhões de quilômetros). Para obter seu valor em unidades naturais, demos “remover” o  $m$  (metro) dividindo o número em questão pela constante (2.67), cuja unidade é  $MeV m$ , resultando assim em uma grandeza com unidade  $MeV^{-1}$ ,

$$x = 1,5 \times 10^{11} m \rightarrow x = \frac{1,5 \times 10^{11} m}{1,97 \times 10^{-13} MeV m} = 7,6 \times 10^{23} MeV^{-1} . \quad (2.69)$$

Uma observação final e importante deve ser feita a respeito da notação utilizada. O símbolo  $MeV^{-1}$ , por exemplo, significa na verdade  $M^{-1}eV^{-1}$ , ou seja,  $10^{-6}eV^{-1}$ . A potência que

acompanha a unidade do número (2.69) se refere tanto à sua unidade quanto à sua escala, e um certo cuidado deve ser tomado ao converter valores, por exemplo, da escala de  $MeV^{-1}$  para  $eV^{-1}$ . Não há nada novo aqui, pois o mesmo ocorre com unidades como  $cm^2$  ou  $mm^3$ . Mas como estamos lidando com um novo sistema de unidades e dimensões, no início deve-se tomar algum cuidado para evitar enganos neste sentido.

## COMPLEMENTO II

## EXPONENCIAL DAS MATRIZES DE PAULI

Utilizamos no texto a seguinte representação das matrizes de Pauli,

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.70)$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.71)$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

as quais, em conjunto com a matriz identidade,

$$\sigma_0 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

formam uma base para as matrizes  $2 \times 2$  complexas. Elas possuem as seguintes propriedades:

$$\sigma_i^2 = \mathbb{1} \quad (2.74)$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] \equiv \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (2.75)$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 0 \quad (2.76)$$

onde  $i, j, k = 1, 2, 3$  e  $\epsilon_{ijk}$  é um coeficiente anti-simétrico, ou seja:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk = 123 \text{ ou qualquer permutação } \textit{par} \text{ entre eles} \\ -1 & \text{se } ijk \text{ for qualquer permutação } \textit{ímpar} \text{ entre } 123 \\ 0 & \text{no caso de quaisquer dois índices repetidos} \end{cases} \quad (2.77)$$

Assim qualquer matriz com coeficientes genéricos  $A_{ij}$  dada por

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

pode ser escrita como uma combinação linear das matrizes  $\sigma_i$ ,

$$A = a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3, \quad (2.79)$$

onde os coeficientes  $a_i$  são dados por

$$a_0 = \frac{A_{11} + A_{22}}{2}, \quad (2.80)$$

$$a_1 = \frac{A_{12} + A_{21}}{2}, \quad (2.81)$$

$$a_2 = i \frac{A_{12} - A_{21}}{2}, \quad (2.82)$$

$$a_3 = \frac{A_{11} - A_{22}}{2}. \quad (2.83)$$

Agora temos que provar a identidade (2.31), ou seja

$$e^{-i\alpha(\sigma_1 \sin \beta - \sigma_3 \cos \beta)} = \mathbb{1} \cos \alpha - i(\sigma_1 \sin \beta - \sigma_3 \cos \beta) \sin \alpha$$

Vamos começar definindo uma matriz  $A$  como sendo

$$A \equiv -i\alpha(\sigma_1 \sin \beta - \sigma_3 \cos \beta) \quad (2.84)$$

de forma a termos uma exponencial com um único parâmetro, onde usaremos diretamente a sua expansão em série de Taylor como sendo a *definição* para a exponencial de uma matriz, ou seja:

$$e^A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \quad (2.85)$$

Portanto, vamos precisar dos valores de  $A^2$ ,  $A^3$ , ...

$$\begin{aligned}
A^2 &= -\alpha^2(\sigma_1 \sin \beta - \sigma_3 \cos \beta)(\sigma_1 \sin \beta - \sigma_3 \cos \beta) \\
&= -\alpha^2(\sigma_1^2 \sin^2 \beta - \sin \beta \cos \beta \sigma_1 \sigma_3 - \sin \beta \cos \beta \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_3^2 \cos^2 \beta) \\
&= -\alpha^2(\mathbb{1} \sin^2 \beta + \mathbb{1} \cos^2 \beta - \sin \beta \cos \beta \{\sigma_1, \sigma_3\}) \\
&= -\alpha^2[\mathbb{1}(\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) - 0] \\
&= -\alpha^2 \mathbb{1}
\end{aligned} \tag{2.86}$$

onde usamos as propriedades (2.74) e (2.76). Continuando com  $A^3$  temos

$$\begin{aligned}
A^3 &= -i\alpha(\sigma_1 \sin \beta - \sigma_3 \cos \beta) A^2 \\
&= i\alpha^3(\sigma_1 \sin \beta - \sigma_3 \cos \beta)
\end{aligned} \tag{2.87}$$

onde observamos rapidamente que podemos generalizar  $A^2$  e  $A^3$  para  $A^{2n}$  e  $A^{2n+1}$ , de forma que

$$\begin{aligned}
A^{2n} = (A^2)^n &= (-\alpha^2 \mathbb{1}) \\
&= (-1)^n \alpha^{2n} \mathbb{1}
\end{aligned} \tag{2.88}$$

e

$$\begin{aligned}
A^{2n+1} = A^{2n} A &= (-1)^n \alpha^{2n} \mathbb{1} A \\
&= -i(-1)^n \alpha^{2n+1}(\sigma_1 \sin \beta - \sigma_3 \cos \beta)
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Substituindo  $A^{2n}$  e  $A^{2n+1}$  na definição da exponencial (2.85), dividindo assim a somatória em termos pares e ímpares, temos

$$\begin{aligned}
e^A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \mathbb{1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-1)^n \alpha^{2n} \right) - i(\sigma_1 \sin \beta - \sigma_3 \cos \beta) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (-1)^n \alpha^{2n+1} \right) \\
&= \mathbb{1} \cos \alpha - i(\sigma_1 \sin \beta - \sigma_3 \cos \beta) \sin \alpha
\end{aligned} \tag{2.90}$$

onde utilizamos as séries de Taylor das funções seno e cosseno,

$$\sin \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2.91)$$

e

$$\cos \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} , \quad (2.92)$$

tendo demonstrado assim a identidade (2.31), utilizada para simplificar a aplicação de um operador não diagonal a um vetor.

Algumas variações da demonstração anterior podem ser úteis. Na seção 3.7.1 utiliza-se a expressão (3.62), a saber

$$\begin{aligned} e^{-i\alpha[a \sin \beta \sigma_1 + (a - d \cos \beta) \sigma_3]} &= \\ &= \cos \left[ \alpha \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \beta} \right] - \\ &- i \sin \left[ \alpha \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \beta} \right] \frac{d \sin \beta \sigma_1 + (a - d \cos \beta) \sigma_3}{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \beta}} . \end{aligned} \quad (2.93)$$

Seguindo o mesmo procedimento, podemos demonstrar esta relação. Na verdade, este procedimento serve para qualquer tipo de relação que envolva a exponencial de combinações das matrizes de Pauli.

Definimos a matriz  $B$  como sendo

$$B = -i\alpha [d \sin \beta \sigma_1 + (a - d \cos \beta) \sigma_3] , \quad (2.94)$$

então  $B^2$  é dado por

$$B^2 = -\alpha^2 \left[ d^2 \sin^2 \beta + d(a - d \cos \beta) \{\sigma_1, \sigma_3\} + (a - d \cos \beta)^2 \right] , \quad (2.95)$$

onde novamente  $\{\sigma_1, \sigma_3\} = 0$ , obtendo assim

$$B^2 = -\alpha^2 \left[ d^2 \sin^2 \beta + (a - d \cos \beta)^2 \right] . \quad (2.96)$$

Com isso, obtemos também uma expressão para  $B^{2n}$ :

$$B^{2n} = (-1)^n \left[ \alpha \sqrt{d^2 \sin^2 \beta + (a - d \cos \beta)^2} \right]^{2n} \quad (2.97)$$

e outra para  $B^{2n+1}$

$$B^{2n+1} = -i(-1)^n \left[ \alpha \sqrt{d^2 \sin^2 \beta + (a - d \cos \beta)^2} \right]^{2n+1} \frac{d \sin \beta \sigma_1 + (a - d \cos \beta) \sigma_3}{\sqrt{d^2 \sin^2 \beta + (a - d \cos \beta)^2}} \quad (2.98)$$

as quais, substituídas em (2.85), levam à relação (3.62) desejada.

## COMPLEMENTO III

### TRÊS FAMÍLIAS

A generalização da solução obtida para três sabores (ou mais) é direta. Da relação (2.4), escrevemos os auto-estados de interação em função do auto-estados físicos de maneira geral como

$$| \nu_l \rangle = \sum_{i=1}^3 U_{li} | \nu_i \rangle \quad (2.99)$$

ou na notação de Einstein:

$$| \nu_l \rangle = U_{li} | \nu_i \rangle . \quad (2.100)$$

Nesta notação a somatória é suprimida e assumimos que dois índices repetidos num mesmo termo (como o  $i$  na expressão acima) implica em uma soma.

Se uma fonte produz um estado  $| \nu_l \rangle$ , sua evolução temporal é dada por

$$| \nu_l(t) \rangle = e^{-iE_l t} U_{li} | \nu_i \rangle . \quad (2.101)$$

A probabilidade de encontrar o estado original  $| \nu_l \rangle$  em uma configuração  $| \nu_{l'} \rangle$  é dada por

$$P_{l'} = | \langle \nu_{l'} | \nu_l(t) \rangle |^2 . \quad (2.102)$$

O produto interno é dado por

$$\langle \nu_{l'} | \nu_l(t) \rangle = e^{-iE_l t} U_{li} \langle \nu_{l'} | \nu_i \rangle , \quad (2.103)$$

onde usamos a expressão equivalente a (2.4), porém relacionando os estados “bra”, ou seja

$$\begin{aligned} \langle \nu_{l'} | \nu_l(t) \rangle &= e^{-iE_l t} U_{li} U_{l'j}^* \langle \nu_j | \nu_i \rangle \\ &= e^{-iE_l t} U_{li} U_{l'j}^* \delta_{ji} \\ &= e^{-iE_j t} U_{lj} U_{l'j}^* . \end{aligned} \quad (2.104)$$

Assim, a probabilidade é dada por

$$\begin{aligned}
P_W(t) &= | \langle \nu_W | \nu_l(t) \rangle |^2 \\
&= \left( e^{-iE_j t} U_{lj} U_{l'j}^* \right) \left( e^{-iE_k t} U_{lk} U_{l'k}^* \right)^* \\
&= e^{-i(E_j - E_k)t} U_{lj} U_{l'j}^* U_{lk}^* U_{l'k} \\
&= e^{-i(E_j - E_k)t} \left| U_{lj} U_{l'j}^* U_{lk}^* U_{l'k} \right| e^{arg(U_{lj} U_{l'j}^* U_{lk}^* U_{l'k})} \\
&= e^{-i(E_j - E_k)t} \left| U_{lj} U_{l'j}^* U_{lk}^* U_{l'k} \right| e^{\varphi_{W'jk}} \\
&= \left| U_{lj} U_{l'j}^* U_{lk}^* U_{l'k} \right| e^{-i[(E_j - E_k)t - \varphi_{W'jk}]} \tag{2.105}
\end{aligned}$$

onde  $\varphi_{W'jk} = \text{argumento}(U_{lj} U_{l'j}^* U_{lk}^* U_{l'k})$ . Para melhorar a forma desta expressão, vamos chamar temporariamente o fator  $\left| U_{lj} U_{l'j}^* U_{lk}^* U_{l'k} \right|$  de  $\rho_{W'jk}$ . Note também que ao trocarmos os índices  $j$  e  $k$  em  $\varphi$ , temos que

$$\varphi_{W'jk} \xrightarrow{j \leftrightarrow k} \varphi_{W'kj} \tag{2.106}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{W'jk} &= arg(U_{lj} U_{l'j}^* U_{lk}^* U_{l'k}) \\
\varphi_{W'kj} &= arg(U_{lk} U_{l'k}^* U_{lj}^* U_{l'j}) \\
&= arg(U_{lk}^* U_{l'k} U_{lj} U_{l'j}^*)^* \\
&= arg(U_{lj} U_{l'j}^* U_{lk}^* U_{l'k})^* \\
&= -arg(U_{lj} U_{l'j}^* U_{lk}^* U_{l'k}) \\
&= -\varphi_{W'jk} \tag{2.107}
\end{aligned}$$

e se trocarmos os índices em  $\rho_{W'jk}$  obtemos a mesma expressão, ou seja,

$$\rho_{W'jk} = \rho_{W'kj} \tag{2.108}$$

Assim podemos reescrever a probabilidade de conversão como

$$\begin{aligned}
P_W(t) &= \rho_{W'jk} e^{-i[(E_j - E_k)t - \varphi_{W'jk}]} \\
&= \rho_{W'11} e^{-i[(E_1 - E_1)t - \varphi_{W'11}]} + \rho_{W'12} e^{-i[(E_1 - E_2)t - \varphi_{W'12}]} + \rho_{W'13} e^{-i[(E_1 - E_3)t - \varphi_{W'13}]} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\rho_{W'21}e^{-i[(E_2-E_1)t-\varphi_{W'21}]} + \rho_{W'22}e^{-i[(E_2-E_2)t-\varphi_{W'22}]} + \rho_{W'23}e^{-i[(E_2-E_3)t-\varphi_{W'23}]} + \\
& +\rho_{W'31}e^{-i[(E_3-E_1)t-\varphi_{W'31}]} + \rho_{W'32}e^{-i[(E_3-E_2)t-\varphi_{W'32}]} + \rho_{W'33}e^{-i[(E_3-E_3)t-\varphi_{W'33}]} \\
= & \rho_{W'11}e^{-i[(E_1-E_1)t-\varphi_{W'11}]} + \rho_{W'21}e^{i[(E_2-E_1)t-\varphi_{W'21}]} + \rho_{W'31}e^{i[(E_3-E_1)t-\varphi_{W'31}]} + \\
& +\rho_{W'21}e^{-i[(E_2-E_1)t-\varphi_{W'21}]} + \rho_{W'22}e^{-i[(E_2-E_2)t-\varphi_{W'22}]} + \rho_{W'32}e^{i[(E_3-E_2)t-\varphi_{W'32}]} + \\
& +\rho_{W'31}e^{-i[(E_3-E_1)t-\varphi_{W'31}]} + \rho_{W'32}e^{-i[(E_3-E_2)t-\varphi_{W'32}]} + \rho_{W'33}e^{-i[(E_3-E_3)t-\varphi_{W'33}]} \\
= & \rho_{W'11}e^{-i[(E_1-E_1)t-\varphi_{W'11}]} + \rho_{W'22}e^{-i[(E_2-E_2)t-\varphi_{W'22}]} + \rho_{W'33}e^{-i[(E_3-E_3)t-\varphi_{W'33}]} \\
& +\rho_{W'21}\left\{e^{i[(E_2-E_1)t-\varphi_{W'21}]} + e^{-i[(E_2-E_1)t-\varphi_{W'21}]} \right\} + \\
& +\rho_{W'31}\left\{e^{i[(E_3-E_1)t-\varphi_{W'31}]} + e^{-i[(E_3-E_1)t-\varphi_{W'31}]} \right\} + \\
& +\rho_{W'32}\left\{e^{i[(E_3-E_2)t-\varphi_{W'32}]} + e^{-i[(E_3-E_2)t-\varphi_{W'32}]} \right\} \\
= & \rho_{W'11}e^{i\varphi_{W'11}} + \rho_{W'22}e^{i\varphi_{W'22}} + \rho_{W'33}e^{i\varphi_{W'33}} \\
& +\rho_{W'21}2\cos[(E_2-E_1)t-\varphi_{W'21}] + \\
& +\rho_{W'31}2\cos[(E_3-E_1)t-\varphi_{W'31}] + \\
& +\rho_{W'32}2\cos[(E_3-E_2)t-\varphi_{W'32}] \tag{2.109}
\end{aligned}$$

Usamos agora as mesmas propriedades nos termos que envolvem cossenos:

$$\begin{aligned}
& \rho_{W'jk}2\cos[(E_j-E_k)t-\varphi_{W'jk}] = \\
= & \rho_{W'jk}\cos[(E_j-E_k)t-\varphi_{W'jk}] + \rho_{W'jk}\cos[(E_j-E_k)t-\varphi_{W'jk}] \\
= & \rho_{W'jk}\cos[(E_j-E_k)t-\varphi_{W'jk}] + \rho_{W'kj}\cos[-(E_k-E_j)t+\varphi_{W'kj}] \\
= & \rho_{W'jk}\cos[(E_j-E_k)t-\varphi_{W'jk}] + \rho_{W'kj}\cos[(E_k-E_j)t+\varphi_{W'kj}], \tag{2.110}
\end{aligned}$$

onde usamos que  $\cos(-a) = \cos a$ . Desta forma, podemos voltar a uma somatória completa nos coeficientes  $k$  e  $j$ , de modo que a probabilidade assume uma forma simples e compacta:

$$\begin{aligned}
P_W(t) & = \rho_{W'lk}\cos[(E_j-E_k)t-\varphi_{W'jk}] \\
& = \left|U_{lj}U_{l'j}^*U_{lk}^*U_{l'k}\right|\cos[(E_j-E_k)t-\varphi_{W'jk}]. \tag{2.111}
\end{aligned}$$

Se utilizarmos as expressões (2.53), (2.54) e (2.43) obtemos

$$\begin{aligned}
P_W(t) & = \rho_{W'lk}\cos[(E_j-E_k)t-\varphi_{W'jk}] \\
& = \left|U_{lj}U_{l'j}^*U_{lk}^*U_{l'k}\right|\cos\left(\frac{\Delta_{jk}}{2E}x-\varphi_{W'jk}\right), \tag{2.112}
\end{aligned}$$

onde

$$\Delta_{jk} = m_j^2 - m_k^2 . \quad (2.113)$$

Esta expressão é totalmente análoga à (2.55). Os elementos  $U_{jk}$  da matriz de mistura são parametrizados com dois ângulos de mistura:  $\theta_1$  e  $\theta_2$  (lembre-se de que bastam dois ângulos para parametrizar uma rotação em três dimensões). No caso de usarmos uma parametrização onde todos os  $U_{jk}$  são reais, o termo  $\varphi_{ll'jk}$  vai a zero, e obtemos

$$P_{ll'}(t) = \sum_{jk} |U_{lj}U_{l'j}U_{lk}U_{l'k}| \cos\left(\frac{\Delta_{jk}}{2E}x\right) , \quad (2.114)$$

onde escrevemos o símbolo da somatória novamente para relembrarmos da soma implícita.

Para mostrar a analogia entre (2.55) e (2.114), vamos derivar a primeira da última. Assim:

$$\begin{aligned} P_{ee}(t) &= \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 |U_{ej}U_{ej}U_{ek}U_{ek}| \cos\left(\frac{\Delta_{jk}}{2E}x\right) \\ &= |U_{e1}U_{e1}U_{e1}U_{e1}| \cos\left(\frac{\Delta_{11}}{2E}x\right) + |U_{e1}U_{e1}U_{e2}U_{e2}| \cos\left(\frac{\Delta_{12}}{2E}x\right) \\ &\quad + |U_{e2}U_{e2}U_{e1}U_{e1}| \cos\left(\frac{\Delta_{21}}{2E}x\right) + |U_{e2}U_{e2}U_{e2}U_{e2}| \cos\left(\frac{\Delta_{22}}{2E}x\right) \end{aligned} \quad (2.115)$$

onde  $\Delta_{12} = -\Delta_{21}$ ,  $\Delta_{11} = \Delta_{22} = 0$  e

$$\begin{aligned} U_{e1} &= \cos \theta , \quad U_{e2} = \sin \theta , \\ U_{\alpha 1} &= -\sin \theta , \quad U_{\alpha 2} = \cos \theta . \end{aligned}$$

Portanto, utilizando as definições acima, temos:

$$\begin{aligned} P_{ee}(t) &= \cos^4 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos\left(-\frac{\Delta_{21}}{2E}x\right) \\ &\quad + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos\left(\frac{\Delta_{21}}{2E}x\right) + \sin^4 \theta \\ &= \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos\left(\frac{\Delta_{21}}{2E}x\right) . \end{aligned} \quad (2.116)$$

Usando propriedades trigonométricas simples<sup>23</sup>

<sup>23</sup>Facilmente obtidas das expressões para  $\cos 2a$  e  $\sin 2a$ .

$$\cos a = 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{a}{2} \right) \text{ e} \quad (2.117)$$

$$4 \cos^2 a \sin^2 a = \sin^2 2a \quad (2.118)$$

obtemos

$$\begin{aligned} P_{ee}(t) &= \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \left[ 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\Delta_{21}}{4E} x \right) \right] \\ &= \cos^4 \theta + 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta - 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin^2 \left( \frac{\Delta_{21}}{4E} x \right) \\ &= \left( \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right)^2 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta_{21}}{4E} x \right) \\ &= 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta_{21}}{4E} x \right) \end{aligned} \quad (2.119)$$

onde  $\Delta_{21} \equiv \Delta$ . Desta forma, mostramos que a generalização para três sabores está correta, no sentido de equivalência com o modelo de dois sabores desenvolvido.

# Oscilação na Matéria

## 3.1 Potenciais Efetivos: Introdução

Os neutrinos interagem fracamente com a matéria solar em seu trajeto Sol-Terra. Porém vimos que apenas a oscilação no vácuo não pode explicar a ausência de distorção espectral observada por Super-Kamiokande. Então surge a possibilidade de que tal interação com a matéria solar modifique o modelo de forma a explicar os dados. Na verdade, esta “possibilidade” se mostrará a verdadeira solução para o problema do neutrino solar.

A interação dos neutrinos com qualquer tipo de matéria é mediada pela interação fraca e por isso é muito tênue. Na média, pode-se dizer que um neutrino atravessaria mil anos-luz de chumbo sem interagir com nada. Por isso, não tratamos esta interação partícula-a-partícula, mas sim na forma de uma média.

O ramo da física que estuda as interações partícula-a-partícula é a *Teoria Quântica de Campos*. Na fenomenologia dos neutrinos não se costuma usar este tipo de abordagem por ser no mínimo inadequada, como veremos a seguir. O que se faz é, a partir da teoria de campos, derivar um mecanismo de interação efetiva (este é o sentido da palavra *média* utilizada no final do parágrafo anterior) que pode ser usado na mecânica quântica usual para levar em conta a fraca interação dos neutrinos com o meio material. Esse mecanismo de interação efetiva se baseia em *potenciais efetivos*, ou seja, quantidades que alteram a energia total de cada componente do feixe de neutrinos, dependentes das características do meio.

Porém o formalismo matemático envolvido nestes cálculos não costuma ser abordado em cursos de graduação e, por motivos didáticos, não convém abordá-los no corpo central deste

texto. Por isso, para aqueles que dominam as ferramentas matemáticas necessárias, os complementos *IV* e *V* abordam a derivação dos potenciais efetivos e alguns conceitos sobre *spinors* necessários para tais demonstrações.

## 3.2 Potenciais Efetivos:

### Formalismo de Duas Componentes

Vamos voltar ao formalismo no qual representamos o feixe de neutrinos por vetores de duas componentes, como apresentados nas expressões (2.12) e (2.15):

$$\nu^{(s)} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}_s, \text{ onde } |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 = 1, \quad (3.1)$$

e

$$\nu^{(m)} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_m, \text{ onde } |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1. \quad (3.2)$$

Este formalismo tem sua importância devido à diferença entre as interações de cada componente. A interação fraca se manifesta sob duas formas básicas: correntes carregadas, mediadas pelas partículas  $W^\pm$  e correntes neutras, mediada pelas partículas  $Z^0$ . Nas correntes neutras, cada tipo de neutrino pode interagir com todos os tipos de partículas conhecidas (quarks ou léptons), ou seja, é uma interação universal. Já nas correntes carregadas, cada tipo de neutrino pode interagir somente com seus parceiros léptons.

Desta forma, a componente  $\nu_e$  irá interagir tanto com quarks (presentes nos prótons e nêutrons dos núcleos) através de corrente neutra, quanto com os elétrons (seu parceiro lépton) por meio de correntes carregadas e neutras. Por outro lado, a componente  $\nu_\alpha$  irá interagir somente via corrente neutra, pois *não há múons ou táuons na matéria solar*. Na verdade, a energia necessária para criar a massa destas partículas é muito maior que a energia térmica média no Sol. Assim, não se espera que sua presença seja efetiva.

É exatamente esta diferença entre as interações de cada componente que levará aos efeitos da oscilação na matéria. A notação de duas componentes se mostra favorável neste ponto. Cada componente sofrerá a interação via um potencial efetivo diferente.

O potencial efetivo sobre a componente  $\nu_e$  do feixe, composta por uma contribuição da corrente carregada  $V_{q_e}$  e outra da corrente neutra  $V_{n_e}$ , é dado por

$$V_e = Vq_e + Vn_e \quad (3.3)$$

$$= \sqrt{2}G_F \left( n_e - \frac{n_n}{2} \right) . \quad (3.4)$$

Por outro lado, o potencial efetivo para a componente  $\nu_\alpha$ , composto apenas de uma contribuição da corrente neutra, é dado por

$$V_\alpha = Vn_\alpha \quad (3.5)$$

$$= -\sqrt{2}G_F \frac{n_n}{2} \quad (3.6)$$

onde  $G_F$  é a constante de Fermi, cujo valor numérico é

$$G_F = 1,66 \times 10^{-11} \text{MeV}^{-2} \quad (3.7)$$

Os parâmetros  $n_e$  e  $n_n$  são, respectivamente, as densidades de elétrons e de nêutrons do meio. O potencial efetivo pode ser representado por uma matriz em nossa notação de duas componentes. Neste caso,

$$V_{eff} = \begin{pmatrix} V_e & 0 \\ 0 & V_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}G_F \left( n_e - \frac{n_n}{2} \right) & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}G_F \frac{n_n}{2} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

que pode ser escrito ainda como

$$V_{eff} = -\sqrt{2}G_F \frac{n_n}{2} \mathbb{1} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}G_F n_e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Em resumo, a matéria altera a energia total do feixe de neutrinos, através do potencial efetivo. Esta alteração é diferente para cada componente do feixe e deve ser levada em conta na Hamiltoniana do sistema, com faremos a seguir.

### 3.3 Interação com a Matéria

No capítulo 2, vimos que a hamiltoniana escrita na base dos auto-estados de sabor é dada pela expressão (2.28), reescrita abaixo:

$$H_s = \frac{(E_1 + E_2)}{2} \mathbb{1} + \frac{(E_2 - E_1)}{2} (\sigma_1 \sin 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta) ,$$

mas também vimos que as energias  $E_1$  e  $E_2$  podem ser tratadas com algumas considerações (aproximações) em torno da ordem de grandeza da massa dos neutrinos e da ordem de sua energia cinética, o que nos levou a concluir que

$$E_i = E + \frac{m_i^2}{2E} \quad (3.10)$$

que, substituído na hamiltoniana (2.28), fornece

$$H_s = E + \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{4E} \mathbb{1} + \frac{\Delta}{4E} (\sigma_1 \sin 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta) , \quad (3.11)$$

onde  $\Delta$  é a *diferença do quadrado das massas*, definida em (2.54) por

$$\Delta = m_2^2 - m_1^2 .$$

Para simplificar as passagens que faremos a seguir, vamos substituir  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  na hamiltoniana  $H_s$ , obtendo assim sua forma matricial explícita:

$$H_s = E + \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{4E} \mathbb{1} + \frac{\Delta}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} , \quad (3.12)$$

Podemos agora escrever a hamiltoniana efetiva na matéria, a qual chamaremos de  $\widetilde{H}_s$ , e será definida como

$$\widetilde{H}_s = H_s + V_{eff} . \quad (3.13)$$

Substituindo assim (3.12) e (3.9) em (3.13) temos

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_s &= E + \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{4E} \mathbb{1} + \frac{\Delta}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \\ &\quad - \sqrt{2}G_F \frac{n_n}{2} \mathbb{1} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}G_F n_e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Agrupando os termos proporcionais à identidade e somando as matrizes, temos

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_s &= \left( E + \frac{m_2^2 + m_1^2}{4E} - \sqrt{2}G_F \frac{n_n}{2} \right) \mathbb{1} + \\ &\quad + \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta \cos 2\theta + 4\sqrt{2}G_F n_e E & \Delta \sin 2\theta \\ \Delta \sin 2\theta & \Delta \cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde definiremos a quantidade  $A$  como sendo

$$A \equiv 2\sqrt{2}G_F n_e E, \quad (3.16)$$

obtendo assim a hamiltoniana na matéria

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_s = & \left( E + \frac{m_2^2 + m_1^2}{4E} - \sqrt{2}G_F \frac{n_n}{2} \right) \mathbb{1} + \\ & + \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta \cos 2\theta + 2A & \Delta \sin 2\theta \\ \Delta \sin 2\theta & \Delta \cos 2\theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

A hamiltoniana definida acima representa a propagação do feixe de neutrinos em um meio material descrito pelas densidades  $n_e$  e  $n_n$ . Repare que o sub-índice  $S$  indica que estamos lidando com a base dos auto-estados de interação. Não poderia ser diferente. Seria um erro grave adicionar o potencial efetivo à hamiltoniana escrita na base dos auto-estados de massa, pois a dedução e mesmo o próprio sentido físico do potencial efetivo está na interação com a matéria e nenhuma interação pode ser descrita pelos auto-estados de massa, pela sua própria definição.

Esta alteração na energia total pode ser vista como uma modificação na “inércia” dos neutrinos. O meio material impõe uma resistência à passagem das partículas, e esta resistência pode ser interpretada como um ganho de massa. Para tanto, supomos que a energia cinética das partículas  $E$  seja inalterada, pois assim a modificação da energia total pelo potencial efetivo tem que ser absorvida necessariamente pela massa. Assim, como veremos na próxima seção, será necessário definirmos novos estados de massa para compreendermos a propagação dos neutrinos na matéria.

### 3.4 Uma Nova Mistura

Nesta seção, seguiremos dois caminhos distintos que levam ao mesmo ponto, a saber: a definição de um *ângulo de mistura efetivo*, como efeito da presença de matéria e da conseqüente alteração da massa efetiva dos estados físicos. O primeiro método é mais comum e simples, baseado no que poderia ser chamado de “intuição física” e por isso é normalmente usado nos textos. O segundo método é matematicamente justificado e serve como comprovação para o primeiro.

### 3.4.1 Método Comparativo (ou por Analogia)

Voltando momentaneamente à oscilação no vácuo, buscamos uma maneira de definir o ângulo de mistura em termos de quantidades físicas do sistema. Podemos escrever a hamiltoniana  $H_s$  da expressão (3.12) de maneira simplificada como

$$H_s = \frac{\Delta}{4E} \begin{pmatrix} \epsilon - \cos 2\theta & \text{sen } 2\theta \\ \text{sen } 2\theta & \epsilon + \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

onde  $\epsilon$  representa os termos proporcionais à matriz identidade. Observamos que, representando suas componentes matriciais por  $H_s^{(ij)}$ , temos

$$\frac{H_s^{12} + H_s^{21}}{H_s^{22} - H_s^{11}} = \frac{\frac{\Delta}{4E} \sin 2\theta + \frac{\Delta}{4E} \sin 2\theta}{\frac{\Delta}{4E}(\epsilon + \cos 2\theta) - \frac{\Delta}{4E}(\epsilon - \cos 2\theta)}, \quad (3.19)$$

cancelando os fatores  $(\frac{\Delta}{4E})$  e os termos  $\epsilon$  no denominador, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{H_s^{12} + H_s^{21}}{H_s^{22} - H_s^{11}} &= \frac{\sin 2\theta + \sin 2\theta}{\cos 2\theta + \cos 2\theta} \\ &= \frac{2 \sin 2\theta}{2 \cos 2\theta} \\ &= \tan 2\theta. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Repare que, o cancelamento de  $\epsilon$  mostra que o ângulo de mistura é independente dos termos diagonais. Podemos utilizar este resultado para *definir* o ângulo de mistura em termos das componentes da hamiltoniana. No caso da hamiltoniana ser diagonal ( $H_s^{12} = H_s^{21} = 0$ ), o ângulo de mistura se anula, como já foi discutido no capítulo 2. Normalmente os textos sobre o assunto se valem do fato da hamiltoniana ser simétrica ( $H_s^{12} = H_s^{21}$ ) para simplificar a definição acima, escrevendo

$$\tan 2\theta \equiv \frac{2 H_s^{12}}{H_s^{22} - H_s^{11}}. \quad (3.21)$$

Consideremos agora a oscilação na matéria. Uma vez que a hamiltoniana do vácuo foi alterada pelo potencial efetivo, podemos incorporar esta alteração no próprio ângulo de mistura.

Então vamos definir por analogia o *ângulo de mistura na matéria* como

$$\tan 2\tilde{\theta} \equiv \frac{2 \widetilde{H}_s^{12}}{\widetilde{H}_s^{22} - \widetilde{H}_s^{11}}. \quad (3.22)$$

Da expressão (3.17) obtemos as componentes de  $\widetilde{H}_s$ , que substituídas em (3.22) fornece

$$\tan 2\tilde{\theta} = \frac{\Delta \sin 2\theta}{\Delta \cos 2\theta - A}. \quad (3.23)$$

Utilizando a seguinte propriedade trigonométrica

$$\sin^2 a = \frac{\tan^2 a}{1 + \tan^2 a}, \quad (3.24)$$

temos

$$\sin^2 2\tilde{\theta} = \frac{\Delta^2 \sin^2 2\theta}{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta}. \quad (3.25)$$

A expressão anterior define o ângulo de mistura na matéria  $\tilde{\theta}$  em termos das características do meio (fator  $A$ ), do ângulo de mistura no vácuo  $\theta$  e das características da interação fraca (constante  $G_F$ ).

### 3.4.2 Método da Diagonalização

A hamiltoniana para a propagação na matéria dada por (3.17) pode ser escrita esquematicamente como

$$\widetilde{H}_s = \epsilon_m \mathbb{1} + \begin{pmatrix} h_m^{11} & h_m^{12} \\ h_m^{21} & h_m^{22} \end{pmatrix}, \text{ com } h_m^{12} = h_m^{21}, \quad (3.26)$$

onde  $\epsilon_m$  representa os termos de (3.17) proporcionais à identidade, e os sub-índices  $m$  indicam a presença de matéria. Procuramos por uma matriz unitária  $\widetilde{U}$  que diagonalize a hamiltoniana, através da transformação de similaridade:

$$\widetilde{U}^\dagger \widetilde{H}_s \widetilde{U} = \text{diagonal}. \quad (3.27)$$

Por ser uma transformação unitária, vamos propor a forma básica

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & \sin \tilde{\theta} \\ -\sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

onde  $\tilde{\theta}$  é o parâmetro diagonalizante. Substituindo (3.28) em (3.27) temos

$$\begin{aligned}
\tilde{U}^\dagger \tilde{H}_s \tilde{U} &= \epsilon_m \mathbb{1} + \\
&+ \begin{pmatrix} h_m^{11} \cos^2 \tilde{\theta} - 2h_m^{12} \cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} + h_m^{22} \sin^2 \tilde{\theta} \\ h_m^{12} \cos^2 \tilde{\theta} + (h_m^{11} - h_m^{22}) \cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} - h_m^{12} \sin^2 \tilde{\theta} \\ h_m^{12} \cos^2 \tilde{\theta} + (h_m^{11} - h_m^{22}) \cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} - h_m^{12} \sin^2 \tilde{\theta} \\ \dots \\ h_m^{11} \sin^2 \tilde{\theta} + 2h_m^{12} \cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} + h_m^{22} \cos^2 \tilde{\theta} \sin^2 \tilde{\theta} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

onde usamos o fato de que  $h_m^{12} = h_m^{21}$ . Repare que os termos não diagonais são idênticos.

Da imposição de que os termos não diagonais sejam nulos, temos a equação:

$$h_m^{12} \cos^2 \tilde{\theta} + (h_m^{11} - h_m^{22}) \cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} - h_m^{12} \sin^2 \tilde{\theta} = 0 . \tag{3.30}$$

Quadrando a equação anterior e substituindo  $\cos^2 \tilde{\theta}$  por  $1 - \sin^2 \tilde{\theta}$ , temos que

$$\left[ 4 \left( h_m^{12} \right)^2 + \left( h_m^{11} - h_m^{22} \right)^2 \right] \sin^4 \tilde{\theta} - \left[ 4 \left( h_m^{12} \right)^2 + \left( h_m^{11} - h_m^{22} \right)^2 \right] \sin^2 \tilde{\theta} + \left( h_m^{12} \right)^2 = 0 \tag{3.31}$$

ou

$$\left[ 4 \left( h_m^{12} \right)^2 + \left( h_m^{11} - h_m^{22} \right)^2 \right] \left( \sin^4 \tilde{\theta} - \sin^2 \tilde{\theta} \right) + \left( h_m^{12} \right)^2 = 0 \tag{3.32}$$

Fazendo uso de propriedades trigonométricas básicas<sup>1</sup>, sabemos que

$$\sin^4 a - \sin^2 a = -\frac{1}{4} \sin^2 2a , \tag{3.33}$$

a qual usada na expressão (3.32) resulta em

$$-\frac{1}{4} \left[ 4 \left( h_m^{12} \right)^2 + \left( h_m^{11} - h_m^{22} \right)^2 \right] \sin^2 2\tilde{\theta} + \left( h_m^{12} \right)^2 = 0 . \tag{3.34}$$

Podemos facilmente isolar  $\sin^2 2\tilde{\theta}$ , obtendo assim

$$\sin^2 2\tilde{\theta} = \frac{4 \left( h_m^{12} \right)^2}{4 \left( h_m^{12} \right)^2 + \left( h_m^{11} - h_m^{22} \right)^2} . \tag{3.35}$$

Para finalizar, escrevemos os valores de  $h_m^{11}$ ,  $h_m^{12}$  e  $h_m^{22}$ , obtidos de (3.17):

---

<sup>1</sup>Use  $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ .

$$h_m^{11} = \frac{1}{4E}(-\Delta \cos 2\theta + 2A) \quad (3.36)$$

$$h_m^{12} = \frac{1}{4E}(\Delta \sin 2\theta) \quad (3.37)$$

$$h_m^{22} = \frac{1}{4E}(\Delta \cos 2\theta) \quad (3.38)$$

e substituindo estes em (3.35) resulta

$$\sin^2 2\tilde{\theta} = \frac{\Delta^2 \sin^2 2\theta}{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta},$$

que nada mais é do que a expressão (3.25).

Concluindo, por motivos didáticos preferiu-se derivar a expressão para o ângulo de mistura efetivo por dois métodos diferentes: o primeiro deles, freqüente na literatura, e o segundo, mais do que um método, uma justificativa para o primeiro.

Uma consideração final de grande importância é que o ângulo de mistura na matéria pode ser *máximo* ou *mínimo*, dependendo das características do meio. Na expressão (3.25) vemos que quando  $A = \Delta \cos 2\theta$  temos que  $\sin^2 2\tilde{\theta} = 1$ , ou seja, na matéria pode haver mistura máxima mesmo que não haja no vácuo. Por outro lado, se  $A \rightarrow \infty$  temos que  $\sin^2 2\tilde{\theta} \rightarrow 0$ , o que implica em ausência de mistura.

De qualquer forma, de posse do ângulo de mistura efetivo, podemos estudar as alterações causadas nos estados de massa devido à interação com o meio.

### 3.5 Auto-Estados de Massa Efetiva

De posse desta nova definição para a mistura, podemos também redefinir os auto-estados de massa utilizando a relação (2.24)

$$\begin{aligned} \nu^{(m)} &= U^\dagger \nu^{(s)} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \nu^{(s)} \end{aligned}$$

que define os auto-estados de massa em função dos auto-estados de interação. Partindo do princípio de que o meio material não pode alterar a forma de uma interação fundamental (o

que levaria a uma alteração dos estados  $\nu^{(s)}$ , vamos definir os *auto-estados de massa efetiva* como

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}^{(m)} &= \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & -\sin \tilde{\theta} \\ \sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix} \nu^{(s)} \\ &= \tilde{U}^\dagger \nu^{(s)}\end{aligned}\quad (3.39)$$

e por conseqüência os estados de sabor são dados por

$$\begin{aligned}\nu^{(s)} &= \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & \sin \tilde{\theta} \\ -\sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix} \tilde{\nu}^{(m)} \\ &= \tilde{U} \tilde{\nu}^{(m)}\end{aligned}\quad (3.40)$$

ou seja, a *matriz de mistura efetiva*  $\tilde{U}$  é dada por

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & \sin \tilde{\theta} \\ -\sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

onde  $\tilde{\theta}$  é dado implicitamente por (3.25). Evitamos escrever  $\theta$  ou  $\tilde{\theta}$  explicitamente para evitar a utilização de funções trigonométricas inversas. De fato, é sempre possível e muito mais simples utilizar propriedades trigonométricas básicas para relacionar os resultados envolvendo o ângulo de mistura.

O símbolo  $\tilde{\nu}^{(m)}$  agora representa estados físicos efetivos, cuja notação segue

$$\tilde{\nu}^{(m)} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix}_{\tilde{m}}, \quad \text{onde } |\tilde{\psi}_1|^2 + |\tilde{\psi}_2|^2 = 1, \quad (3.42)$$

sendo que a base do espaço de estados  $\tilde{\nu}^{(m)}$  se relaciona com a base do espaço de estados  $|\tilde{\nu}_i\rangle$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\tilde{m}} \equiv |\tilde{\nu}_1\rangle \quad (3.43)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\tilde{m}} \equiv |\tilde{\nu}_2\rangle. \quad (3.44)$$

Até agora, vimos que a presença de um meio material traz alterações significativas ao modelo. A definição da mistura efetiva mostra a possibilidade de que haja efeitos oscilatórios máximos ou mínimos, com certa independência da mistura no vácuo<sup>2</sup>.

### 3.6 Massa Efetiva

Voltando à expressão (3.17), definimos  $\widetilde{M}^2$  como

$$\widetilde{M}^2 \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Delta \cos 2\theta + 2A & \Delta \sin 2\theta \\ \Delta \sin 2\theta & \Delta \cos 2\theta \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Esta é chamada *matriz de massa ao quadrado*, de forma a podermos escrever a hamiltoniana para a propagação na matéria como

$$\widetilde{H}_s = \left( E + \frac{m_2^2 + m_1^2}{4E} - \sqrt{2}G_F \frac{n_n}{2} \right) \mathbb{1} + \frac{1}{2E} \widetilde{M}^2. \quad (3.46)$$

Os autovalores de  $\widetilde{H}_s$ , que chamaremos de  $\widetilde{E}_i$ , são dados por

$$\widetilde{E}_i = E + \frac{m_2^2 + m_1^2}{4E} - \frac{\sqrt{2}}{2}G_F n_n + \frac{\widetilde{m}_i^2}{2E} \quad (3.47)$$

onde  $\widetilde{m}_i^2$  são os autovalores de  $\widetilde{M}^2$ . Esta é a relação massa-energia para um feixe de neutrinos propagando-se em um meio, ou seja, é equivalente a (2.51).

Os auto-valores de  $\widetilde{M}^2$  são dados por

$$\widetilde{m}_\pm^2 = \frac{1}{2} \left[ (m_1^2 + m_2^2 + A) \pm \sqrt{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta} \right] \quad (3.48)$$

Vamos estudar  $\widetilde{m}_\pm^2$  em função de  $A$ . Se  $A \rightarrow 0$ , temos

$$\begin{aligned} \widetilde{m}_\pm^2 &= \frac{1}{2} \left[ (m_1^2 + m_2^2) \pm \sqrt{\Delta^2 \cos^2 2\theta + \Delta^2 \sin^2 2\theta} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (m_1^2 + m_2^2) \pm \Delta \sqrt{\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (m_1^2 + m_2^2) \pm (m_2^2 - m_1^2) \right], \end{aligned} \quad (3.49)$$

---

<sup>2</sup>É claro que o valor da densidade na qual a mistura efetiva é máxima depende da mistura no vácuo, mas seu comportamento geral independe do valor exato de  $\theta$ .

e neste caso limite vemos que

$$\widetilde{m}_-^2 \rightarrow m_1^2 \quad (3.50)$$

$$\widetilde{m}_+^2 \rightarrow m_2^2, \quad (3.51)$$

ou seja, os auto-valores de  $\widetilde{M}^2$  fazem o papel de massa efetiva dos estados físicos. Assim, faremos a associação correta, definindo  $\widetilde{m}_1^2 \equiv \widetilde{m}_-^2$  e  $\widetilde{m}_2^2 \equiv \widetilde{m}_+^2$ . Podemos então dizer que as massas efetivas dos estados físicos são dadas pela raiz quadrada dos auto-valores de  $\widetilde{M}^2$ , que são

$$\widetilde{m}_1^2 = \frac{1}{2} \left[ (m_1^2 + m_2^2 + A) - \sqrt{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta} \right] \quad (3.52)$$

$$\widetilde{m}_2^2 = \frac{1}{2} \left[ (m_1^2 + m_2^2 + A) + \sqrt{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta} \right]. \quad (3.53)$$

Finalmente, podemos obter a *diferença do quadrado das massas efetivas*  $\widetilde{\Delta}$  como sendo

$$\widetilde{\Delta} \equiv \widetilde{m}_2^2 - \widetilde{m}_1^2 \quad (3.54)$$

$$= \sqrt{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta}. \quad (3.55)$$

### 3.7 Equação de Movimento

Vamos finalmente estudar a equação de movimento na matéria. A equação de Schrödinger que descreve o feixe

$$i \frac{d}{dx} \nu^{(s)} = \widetilde{H}_s \nu^{(s)} \quad (3.56)$$

é escrita explicitamente, utilizando (3.46) como

$$i \frac{d}{dx} \nu^{(s)} = \left[ \left( E + \frac{m_2^2 + m_1^2}{4E} - \sqrt{2} G_F \frac{n_n}{2} \right) \mathbb{1} + \frac{1}{2E} \widetilde{M}^2 \right] \nu^{(s)}. \quad (3.57)$$

A expressão acima é a equação de movimento completa para neutrinos propagando-se na matéria, escrita na base de interação. Ela possui uma diferença crucial em relação à sua equivalente no vácuo (2.29), a saber: o operador  $\widetilde{M}^2$ , que faz parte da hamiltoniana, pode depender da posição  $x$  no caso de estarmos lidando com um meio de densidade não constante.

Neste caso, o parâmetro  $A$  passa a ser função de  $x$  devido à sua dependência na densidade eletrônica  $n_e \equiv n_e(x)$ . Assim sendo, vamos nos restringir em primeiro lugar a resolver a equação (3.57) no caso de densidade constante (meio uniforme). Em seguida, discutiremos o caso de densidade variável, o qual se mostrará de extrema importância no caso do problema dos neutrinos solares.

### 3.7.1 Meio Uniforme

Esta parte não é de grande importância para aqueles estudantes que estão fazendo uma primeira leitura do texto. Como concluiremos em breve, a resolução do problema do neutrino solar reside na variação da densidade do meio, ou seja, não no caso tratado aqui. Portanto o estudante poderia seguir para a seção seguinte (Meio Não Uniforme) sem perder a linha de raciocínio, deixando esta seção para uma segunda leitura.

Assumindo que a hamiltoniana  $\widetilde{H}_s$  não depende do parâmetro  $x$ , a equação (3.57) admite solução do tipo

$$\nu^{(s)}(t) = e^{-ix\widetilde{H}_s} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}_s, \quad (3.58)$$

onde  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são constantes arbitrárias, a serem definidas pelas condições iniciais. Para substituir  $\widetilde{H}_s$  em (3.58) vamos escrever  $\widetilde{M}^2$  como combinação das matrizes de Pauli, assim como fizemos no caso de  $H_s$  para o vácuo. Usando as expressões (2.80) a (2.83) temos que

$$\widetilde{M}^2 = \frac{A}{2} \mathbb{1} + \frac{\Delta}{2} \sin 2\theta \sigma_1 + \frac{A - \Delta \cos 2\theta}{2} \sigma_3. \quad (3.59)$$

Agrupando todos os termos proporcionais à identidade, podemos escrever  $\widetilde{H}_s$  como:

$$\widetilde{H}_s = \epsilon_m \mathbb{1} + \frac{1}{4E} [\Delta \sin 2\theta \sigma_1 + (A - \cos 2\theta) \sigma_3], \quad (3.60)$$

onde

$$\epsilon_m = E + \frac{m_2^2 + m_1^2}{4E} - \sqrt{2}G_F \frac{n_n}{2} + \frac{A}{4E}. \quad (3.61)$$

Substituindo (3.60) em (3.58) e utilizando a seguinte propriedade<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Ver Complemento II.

$$\begin{aligned}
& e^{-i\alpha[d\sin\beta\sigma_1+(a-d\Delta\cos\beta)\sigma_3]} = & (3.62) \\
& = \cos\left[\alpha\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\beta}\right] - \\
& - i\sin\left[\alpha\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\beta}\right] \frac{d\sin\beta\sigma_1+(a-d\cos\beta)\sigma_3}{\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\beta}} & (3.63)
\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}
\nu^{(s)}(t) &= e^{-ix\widetilde{H}_s} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \\
&= \left\{ e^{-i\epsilon_m x} \times \right. \\
&\quad \left. e^{-i\frac{x}{4E}[\Delta\sin 2\theta\sigma_1+(A-\Delta\cos 2\theta)\sigma_3]} \right\} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} & (3.64) \\
&= \left\{ e^{-i\epsilon_m x} \times \right. \\
&\quad \cos\left[\frac{x}{4E}\sqrt{A^2+\Delta^2-2A\Delta\cos 2\theta}\right] - \\
&\quad \left. -i\sin\left[\frac{x}{4E}\sqrt{A^2+\Delta^2-2A\Delta\cos 2\theta}\right] \frac{\Delta\sin 2\theta\sigma_1+(A-\Delta\cos 2\theta)\sigma_3}{\sqrt{A^2+\Delta^2-2A\Delta\cos 2\theta}} \right\} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} & (3.65)
\end{aligned}$$

O termo  $A^2 + \Delta^2 - 2A\Delta\cos 2\theta$  pode ser reescrito de maneira conveniente:

$$\begin{aligned}
A^2 + \Delta^2 - 2A\Delta\cos 2\theta &= A^2 + \Delta^2(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) - 2A\Delta\cos 2\theta \\
&= (\Delta^2\cos^2 2\theta - 2A\Delta\cos 2\theta + A^2) + \Delta^2\sin^2 2\theta \\
&= (\Delta\cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2\sin^2 2\theta, & (3.66)
\end{aligned}$$

e já podemos também assumir a condição inicial (2.33) e as expressões (2.34) e (2.35) para escrever a projeção do estado  $|\nu(t)\rangle$  no estado  $|\nu_\alpha\rangle$  (o procedimento é análogo àquele adotado no capítulo 2), obtendo

$$\begin{aligned}
\langle\nu_\alpha|\nu(t)\rangle &= -i\frac{\Delta\sin 2\theta}{\sqrt{(\Delta\cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2\sin^2 2\theta}} \times \\
&\quad \sin\left[\frac{x}{4E}\sqrt{(\Delta\cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2\sin^2 2\theta}\right]. & (3.67)
\end{aligned}$$

Observe que, utilizando as expressões (3.25), (3.48) e (3.55) obtemos

$$\langle \nu_\alpha | \nu(t) \rangle = -i \sin 2\tilde{\theta} \sin \left( \frac{\tilde{\Delta}}{4E} x \right), \quad (3.68)$$

de onde podemos finalmente obter a probabilidade de conversão  $|\langle \nu_\alpha | \nu(t) \rangle|^2$

$$\begin{aligned} P_{e\alpha} &= \langle \nu_\alpha | \nu(t) \rangle \\ &= \sin^2 2\tilde{\theta} \sin^2 \left( \frac{\tilde{\Delta}}{4E} x \right) \end{aligned} \quad (3.69)$$

e, conseqüentemente, a probabilidade de sobrevivência

$$P_{ee} = 1 - \sin^2 2\tilde{\theta} \sin^2 \left( \frac{\tilde{\Delta}}{4E} x \right) \quad (3.70)$$

é análoga àquela para o vácuo (2.55). Vemos que ocorre apenas uma substituição dos parâmetros  $\theta$  e  $\Delta$  para seus respectivos valores na presença de matéria,  $\tilde{\theta}$  e  $\tilde{\Delta}$ . Isto não acrescenta nada de novo, a não ser a possibilidade de ocorrer mistura efetiva máxima, mesmo que a mistura no vácuo não seja máxima. Devemos lembrar que a primeira hipótese para obter a solução (3.70) foi a uniformidade do meio, ou seja

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dx} = 0. \quad (3.71)$$

Como veremos a seguir e no próximo capítulo, a solução que buscamos para nosso problema reside exatamente no caso onde a densidade é variável, ou seja

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dx} \neq 0. \quad (3.72)$$

### 3.7.2 Meio Não Uniforme

Vamos agora estudar o caso no qual o meio não é uniforme, ou seja, a densidade variável levará à variação tanto do ângulo de mistura efetivo

$$\tilde{\theta} \equiv \tilde{\theta}(x) \quad (3.73)$$

quanto dos estados físicos efetivos

$$\tilde{\nu}_1 \equiv \tilde{\nu}_1(x) \quad (3.74)$$

$$\tilde{\nu}_2 \equiv \tilde{\nu}_2(x) \quad (3.75)$$

e, conseqüentemente, de suas massas efetivas, durante o trajeto do neutrino através da matéria solar. Os estados de interação permanecem constantes pois a forma da interação fraca não se altera com a presença de matéria.

O ângulo de mistura efetivo na matéria é determinado implicitamente pela expressão (3.25), a saber

$$\sin^2 2\tilde{\theta} = \frac{\Delta^2 \sin^2 2\theta}{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta} ,$$

a qual pode ser vista como uma função do parâmetro  $A$  (uma vez que esta é a única função de  $x$  nesta expressão<sup>4</sup>). Como função de  $A$ , a expressão (3.25) tem a forma de uma curva de ressonância

$$F(A) = \frac{\Gamma^2}{(A_R - A)^2 + \Gamma^2}, \quad (3.76)$$

que é conhecida como ressonância de Breit-Wigner com largura  $\Gamma$ , altura 1 e valor ressonante  $A_R$ .

Comparando com a expressão (3.25) vemos que

$$A_R = \Delta \cos 2\theta , \quad (3.77)$$

$$\Gamma = \Delta \sin 2\theta . \quad (3.78)$$

Em fenômenos de ressonância, efeitos de caráter extremo podem ocorrer. A maneira como esta ressonância afeta o modelo é descrita pela equação de movimento, a qual iremos resolver.

Para que possamos entender melhor a influência que a variação da densidade acarreta, é conveniente mudar a equação (3.57) para a base de auto-estados de massa efetiva, utilizando para isso a matriz de mistura na matéria  $\tilde{U}$ .

Com relação à equação (3.57), vamos ignorar os termos proporcionais à identidade, pois como temos visto até aqui, estes contribuem apenas com uma fase na solução final, a qual

---

<sup>4</sup> $A = 2\sqrt{2}G_F n_e(x) E$

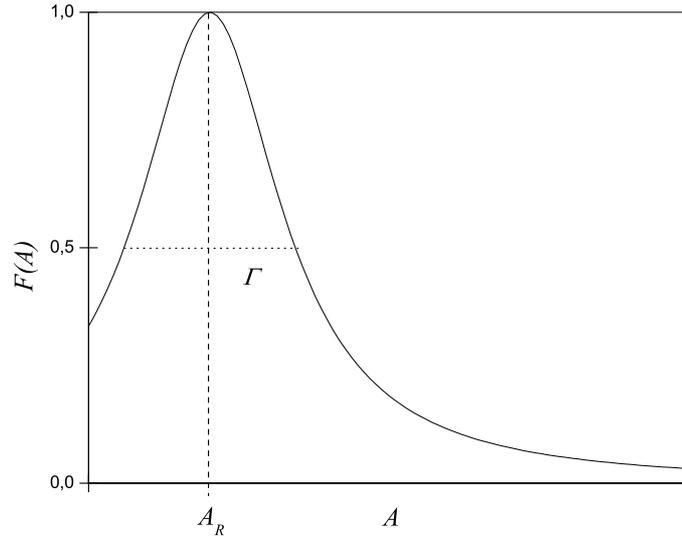


Figura 3.1: A figura acima mostra a forma da função  $F(A)$ . O máximo da função se encontra em  $A = A_R$  e sua largura a meia altura é dada por  $\Gamma$ . No caso específico da expressão (3.25), o ponto onde a curva intercepta o eixo vertical corresponde ao valor do  $\sin^2 2\theta$ .

não contribui para a probabilidade pois não estamos lidando com interferência entre feixes. A equação de movimento sem os termos proporcionais à identidade é dada por:

$$i \frac{d}{dx} \nu^{(s)} = \frac{1}{2E} \tilde{M}^2 \nu^{(s)} . \quad (3.79)$$

Da expressão (3.39) temos que

$$\nu^{(s)} = \tilde{U} \tilde{\nu}^{(m)} , \quad (3.80)$$

a qual substituindo em (3.79), leva a:

$$i \frac{d}{dx} \tilde{U} \tilde{\nu}^{(m)} = \frac{1}{2E} \tilde{M}^2 \tilde{U} \tilde{\nu}^{(m)} \quad (3.81)$$

que, se multiplicada pela esquerda por  $\tilde{U}^\dagger$ , resulta em

$$i \tilde{U}^\dagger \frac{d}{dx} \tilde{U} \tilde{\nu}^{(m)} = \frac{1}{2E} \tilde{U}^\dagger \tilde{M}^2 \tilde{U} \tilde{\nu}^{(m)} . \quad (3.82)$$

No lado esquerdo da expressão anterior, aplicamos a regra de derivação do produto:

$$\frac{d}{dx} (\tilde{U} \tilde{\nu}^{(m)}) = \left( \frac{d}{dx} \tilde{U} \right) \tilde{\nu}^{(m)} + \tilde{U} \left( \frac{d}{dx} \tilde{\nu}^{(m)} \right) . \quad (3.83)$$

Substituindo (3.83) em (3.82) temos

$$\tilde{U}^\dagger \left( \frac{d}{dx} \tilde{U} \right) \tilde{\nu}^{(m)} + \tilde{U}^\dagger \tilde{U} \left( \frac{d}{dx} \tilde{\nu}^{(m)} \right) = \frac{1}{2E} \tilde{U}^\dagger \tilde{M}^2 \tilde{U} \tilde{\nu}^{(m)}. \quad (3.84)$$

Para finalizar, observamos que  $\tilde{U}^\dagger \tilde{U} = \mathbb{1}$  e reorganizamos os termos de forma que a matriz  $\tilde{U}$  apareça apenas do lado direito da igualdade, obtendo assim:

$$i \frac{d}{dx} \tilde{\nu}^{(m)} = \left( \frac{1}{2E} \tilde{U}^\dagger \tilde{M}^2 \tilde{U} - i \tilde{U}^\dagger \frac{d}{dx} \tilde{U} \right) \tilde{\nu}^{(m)}. \quad (3.85)$$

A expressão (3.85) é a equação de movimento para os estados físicos efetivos. Para escrevê-la na forma matricial, temos que abrir os termos do lado direito e escrevê-los na forma matricial separadamente.

O primeiro termo é, por definição da matriz  $\tilde{U}$ , a matriz diagonal que representa  $\tilde{M}^2$  pois, como foi definido em (3.27), o ângulo de mistura efetivo  $\tilde{\theta}$  é o parâmetro diagonalizante da hamiltoniana  $\tilde{H}_s$  da qual  $\tilde{M}^2$  é um termo como vemos em (3.46). Assim sendo, temos que

$$\tilde{U}^\dagger \tilde{M}^2 \tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{m}_1^2 & 0 \\ 0 & \tilde{m}_2^2 \end{pmatrix}, \quad (3.86)$$

onde  $\tilde{m}_1^2$  e  $\tilde{m}_2^2$  são os auto-valores de  $\tilde{M}^2$  dados por (3.52) e (3.53), respectivamente.

O segundo termo do lado direito de (3.85) deve ser calculado explicitamente. Assim sendo,

$$\begin{aligned} \tilde{U}^\dagger \frac{d}{dx} \tilde{U} &= \tilde{U}^\dagger \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} \cos \tilde{\theta} & \frac{d}{dx} \sin \tilde{\theta} \\ -\frac{d}{dx} \sin \tilde{\theta} & \frac{d}{dx} \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix} \\ &= \tilde{U}^\dagger \begin{pmatrix} -\sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \\ -\cos \tilde{\theta} & -\sin \tilde{\theta} \end{pmatrix} \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta} + \cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} & \cos^2 \tilde{\theta} + \sin^2 \tilde{\theta} \\ -\sin^2 \tilde{\theta} - \cos^2 \tilde{\theta} & + \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta} - \cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} \end{pmatrix} \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \\ -\frac{d\tilde{\theta}}{dx} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Assim, substituindo (3.86) e (3.87) em (3.85) obtemos

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix}_{\tilde{m}} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{m}_1^2}{2E} & i \frac{d\theta}{dx} \\ -i \frac{d\theta}{dx} & \frac{\tilde{m}_2^2}{2E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix}_{\tilde{m}}, \quad (3.88)$$

que é a equação de movimento escrita na base dos auto-estados de massa efetiva.

Observe que apesar da equação (3.88) estar expressa na base dos auto-estados de massa efetiva, ela **não é diagonal nesta base**. Isto significa que os auto-estados de massa efetiva não são auto-estados de propagação se o meio não for uniforme. Os termos não diagonais são exatamente a variação do ângulo de mistura durante o trajeto do neutrino. No caso de termos um meio uniforme, as derivadas se anulam e a hamiltoniana da equação (3.88) passa a ser diagonal. Neste caso específico, os estados  $|\tilde{\nu}_1\rangle$  e  $|\tilde{\nu}_2\rangle$  são auto-estados de propagação.

Os termos não diagonais levam a um novo efeito, a saber: existe uma probabilidade não nula de transição entre os auto-estados de massa, ou de forma técnica,  $\langle \tilde{\nu}_1 | \tilde{\nu}_2 \rangle \neq 0$

O que ocorre no vácuo pode ser resumido da seguinte forma: Um estado  $|\nu_1\rangle$  **ou**  $|\nu_2\rangle$  é criado, mas não temos meios de distingüir entre eles. Devido a esta incerteza, os estados de sabor alternam-se, dando origem à oscilação. Enquanto isso, o estado físico originalmente criado não se altera, sendo sempre  $|\nu_1\rangle$  ou  $|\nu_2\rangle$  (o mesmo que foi criado).

Na matéria uniforme, não há grandes mudanças em relação ao vácuo, a não ser o aparecimento da massa e da mistura efetiva. O restante do processo é idêntico ao descrito para o vácuo.

Finalmente, na matéria não uniforme, a mistura efetiva sofre um processo ressonante que leva a uma probabilidade não nula de um estado de massa sofrer uma *transição* para outro. Ou seja, se um estado  $|\tilde{\nu}_1\rangle$  é criado, ele pode encontrar condições específicas durante seu trajeto, onde um “salto” pode ocorrer, levando o estado físico original de  $|\tilde{\nu}_1\rangle$  para  $|\tilde{\nu}_2\rangle$  e, conseqüentemente, “trocando” as probabilidades de detecção entre os estados de sabor.

Estes efeitos ressonantes podem causar até mesmo *supressões* na oscilação. A essência fundamental deste efeito ressonante, chamado efeito Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein (MSW), será o assunto do próximo capítulo, onde estudaremos com maior profundidade a propagação dos neutrinos pela matéria não uniforme e, finalmente, chegaremos à peça final do quebra-cabeças do neutrino solar.

## COMPLEMENTO IV

### POTENCIAIS EFETIVOS: TEORIA DE CAMPOS

Para tratar a interação dos neutrinos com a matéria é necessário o formalismo da *Teoria Quântica de Campos*. No entanto, estamos interessados em obter uma maneira de aproximar estas interações por *potenciais efetivos*, de maneira a manter a simplicidade de nosso formalismo no decorrer do texto.

Para compreender os complementos IV e V, o estudante precisa ter conhecimentos prévios em Teoria Quântica de Campos. Assumimos que o leitor compreende conceitos como gráficos de Feynman, formalismo lagrangiano, segunda quantização, espinores e modelo eletrofraco.

A aproximação que faremos é simplesmente assumir a existência de um grande número de interações ocorrendo no feixe de neutrinos (entre o feixe e a matéria do meio) e que a energia do feixe é muito menor que a massa dos mediadores da interação fraca  $W^\pm$  e  $Z^0$ .

O intuito destas hipóteses é permitir que certas aproximações sejam feitas para que as interações possam ser interpretadas como uma energia potencial adicionada à energia total do feixe.

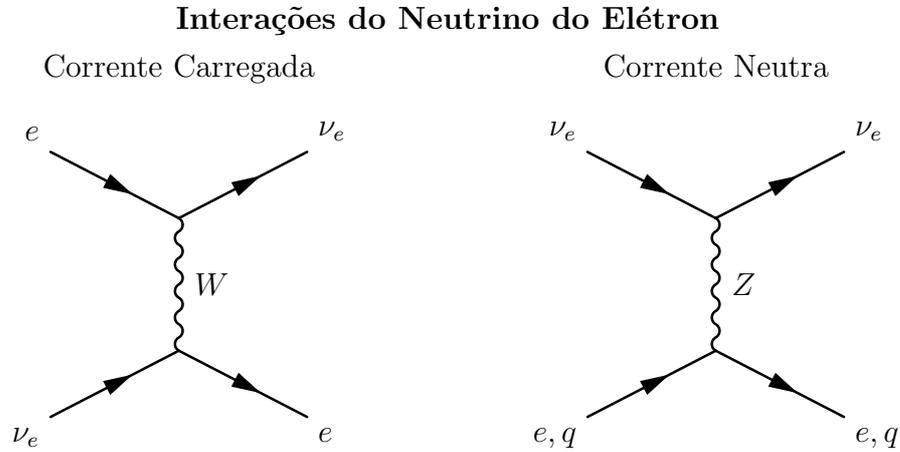
No problema do neutrino solar, lidamos com um meio (a matéria solar) dominado por elétrons, prótons e nêutrons. Os prótons e os nêutrons são, por sua vez, compostos de quarks, que também participam da interação. A energia média, devido à temperatura, não é suficiente para que haja múons ou táuons livres. Como veremos a seguir, esta falta de simetria entre as possíveis interações que cada sabor de neutrino pode realizar, será visível nos valores finais para os potenciais efetivos.

A interação fraca pode ser resumida em dois processos: a *corrente carregada*, onde um mediador carregado é trocado entre as partículas interagentes, e a *corrente neutra*, onde um mediador neutro é trocado. A corrente neutra é universal: todas as partículas conhecidas possuem este mecanismo de interação. Já para a corrente carregada existe um requisito restritivo: apenas partículas da mesma “família” podem interagir<sup>5</sup>. Desta forma, os neutrinos do elétron recebem este nome pois interagem via corrente carregada apenas com elétrons, e o mesmo vale para os outros sabores.

---

<sup>5</sup>Isto é verdade apenas para os lépton, pois no caso dos quarks também existe mistura de sabores e, neste caso, eles sofrem interações entre famílias.

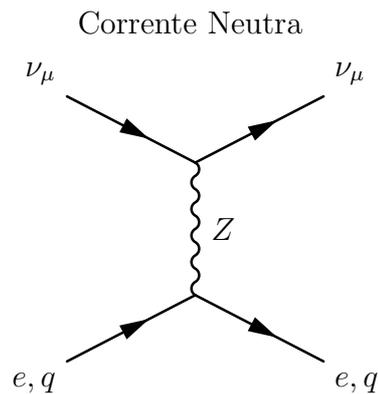
Os diagramas de Feynman a seguir mostram as interações sofridas pelos neutrinos do elétron na matéria solar.



Simbolizamos por  $q$  os quarks presentes no meio ( $q = u, d$ , quarks “up” e “down”). Estes são os constituintes dos prótons e nêutrons.

O diagrama abaixo mostra as interações sofridas pelo neutrino do múon (lembre-se de que estamos desprezando a presença do neutrino do táuon no problema do neutrino solar).

### Interações do Neutrino do Múon



Podemos então obter as lagrangianas de interação a partir dos diagramas anteriores. A lagrangiana efetiva da corrente carregada é dada por:

$$L_{ef} = - \left( \frac{g}{\sqrt{2}} \right)^2 \{ \bar{e}_L \gamma^\alpha \nu_{eL} \} \frac{-i g_{\alpha\beta}}{q^2 - M_W^2} \{ \bar{\nu}_{eL} \gamma^\beta e_L \} \quad (3.89)$$

onde

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad (3.90)$$

O fator  $g$  é a constante de acoplamento da interação fraca, segundo o modelo eletrofraco, e  $M_W$  é a massa da partícula intermediária  $W^\pm$ . Substituindo  $g^2/2$  na expressão (3.89), obtemos

$$L_{ef} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \{\bar{e}_L \gamma^\alpha \nu_{eL}\} \frac{-ig_{\alpha\beta} M_W^2}{q^2 - M_W^2} \{\bar{\nu}_{eL} \gamma^\beta e_L\}. \quad (3.91)$$

A primeira aproximação que faremos é com relação ao módulo do momento linear  $q$ . Substituindo  $g$  da expressão (3.90) em (3.89) e considerando  $M_W \gg q$ , temos que

$$\frac{-M_W^2}{q^2 - M_W^2} = \frac{-1}{\left(\frac{q}{M_W}\right)^2 - 1} \approx 1 \quad (3.92)$$

o que, usando a operação  $\gamma^\alpha g_{\alpha\beta} \gamma^\beta = \gamma^\alpha \gamma_\alpha$ , leva a lagrangiana (3.89) a

$$L_{ef} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \{\bar{e}_L \gamma^\alpha \nu_{eL}\} \{\bar{\nu}_{eL} \gamma_\alpha e_L\}. \quad (3.93)$$

Executando uma *transformação de Fierz* [5], podemos isolar os espinores correspondentes aos elétrons e aos neutrinos em fatores diferentes. Ou seja,

$$L_{ef} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \{\bar{e}_L \gamma^\alpha e_L\} \{\bar{\nu}_{eL} \gamma_\alpha \nu_{eL}\}. \quad (3.94)$$

Vamos utilizar também o fato de que

$$e_L = \left(\frac{1 - \gamma_5}{2}\right) e, \quad (3.95)$$

além de algumas propriedades das matrizes gamma para sua reordenação, obtendo assim

$$L_{ef} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{e} \gamma^\alpha \left(\frac{1 - \gamma_5}{2}\right) e \right\} \{\bar{\nu}_{eL} \gamma_\alpha \nu_{eL}\}. \quad (3.96)$$

Finalmente, tomamos uma média sobre os estados de elétron distribuídos na matéria, obtendo a expressão

$$L_{ef} = -\frac{2G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{eL} \gamma_\alpha \nu_{eL} \{ \langle \bar{e} \gamma^\alpha e \rangle - \langle \bar{e} \gamma^\alpha \gamma_5 e \rangle \}. \quad (3.97)$$

O termo  $\langle \bar{e} \gamma^\alpha e \rangle$  é a corrente média e o termo  $\langle \bar{e} \gamma^\alpha \gamma_5 e \rangle$  é o spin médio<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Ambas as afirmações são demonstradas no Complemento V

Vamos agora fazer uso de um fato importante sobre a distribuição de matéria do meio. Em qualquer meio fluido podemos assumir que as partículas com momento  $\vec{p}$  e spin  $\vec{s}$ <sup>7</sup> estão em mesmo número que aquelas com momento  $-\vec{p}$  e spin  $-\vec{s}$ . Vamos chamar esta hipótese de *aleatoriedade na distribuição de matéria*. Com base neste fato, tanto a velocidade média do meio quanto o spin médio será *zero*. Sendo assim, podemos eliminar da expressão anterior o termo do spin médio  $\langle \bar{e} \gamma^\alpha \gamma_5 e \rangle$  :

$$L_{ef} = -\frac{2G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{eL} \gamma_\alpha \nu_{eL} \langle \bar{e} \gamma^\alpha e \rangle , \quad (3.98)$$

e isolar na corrente média o termo que envolve  $\gamma^0$  dos que envolvem  $\gamma^j$  (onde  $j = 1, 2, 3$ ), de forma que

$$L_{ef} = -\frac{2G_F}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{\nu}_{eL} \gamma_0 \nu_{eL} \langle \bar{e} \gamma^0 e \rangle + \bar{\nu}_{eL} \gamma_j \nu_{eL} \langle \bar{e} \gamma^j e \rangle \right\} \quad (3.99)$$

onde o fator  $\langle \bar{e} \gamma^0 e \rangle$  é a densidade média de elétrons no meio<sup>8</sup>  $n_e$  e o termo  $\langle \bar{e} \gamma^j e \rangle$  é a velocidade média. Este último, como já foi apontado anteriormente, é nulo devido à aleatoriedade na distribuição da matéria. Desta forma, obtemos finalmente:

$$L_{ef} = -\sqrt{2} G_F n_e \bar{\nu}_{eL} \gamma_0 \nu_{eL} . \quad (3.100)$$

Esta é a lagrangiana de interação efetiva devido à corrente carregada.

Consideremos agora a contribuição da neutra carregada. A lagrangiana de interação, onde já consideramos a aproximação equivalente à (3.92), é dada por

$$L_{ef} = -\sqrt{2} G_F \left\{ \sum_i \bar{l}_i \gamma^\alpha \left[ I_{3L} \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) Q \sin^2 \theta_W \right] l_i \right\} \{ \bar{\nu}_L \gamma_\alpha \nu_L \} . \quad (3.101)$$

onde  $\nu_L$  pode representar qualquer um dos três sabores. Os  $l_i$  representam as partículas interagentes do meio (elétrons, prótons e nêutrons). O símbolo  $I_{3L}^i$  representa a terceira componente do isospin da partícula  $l_i$ , enquanto  $Q^i$  representa a carga elétrica da mesma. O fator  $\theta_W$  é chamado ângulo de Weinberg e é um dos parâmetros da teoria *eletrofraca* das interações elementares (também conhecido como *modelo Glashow-Weinberg-Salam*). O valor deste fator não será necessário pois o resultado será independente do mesmo, como veremos adiante. Esta

<sup>7</sup>Por  $\vec{s}$  estamos apenas abreviando as quantidades  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$ .

<sup>8</sup>Ver Complemento V

lagrangiana, bem como mais detalhes sobre o modelo, podem ser encontradas em livros texto sobre Modelo Padrão ou, especificamente, sobre interação Eletrofraca.

A tabela a seguir mostra os auto-valores destes operadores para os componentes do meio solar:

	$I_{3L}$	$Q$
$e$	$-1/2$	$-1$
$p$	$1/2$	$1$
$n$	$-1/2$	$0$

Novamente, tomando a média sobre os estados do meio solar, os termos de momento e spin médios vão a zero. Com efeito, restarão apenas os termos proporcionais às densidades:  $n_e$ ,  $n_p$  e  $n_n$ , as quais denotamos de maneira geral por  $n_i$ . Assim, a lagrangiana efetiva para a corrente neutra fica

$$L_{ef} = -\sqrt{2}G_F \left[ \sum_i n_i (I_{3L}^i - 2Q^i \sin^2 \theta_W) \right] \{ \bar{\nu}_L \gamma_\alpha \nu_L \}. \quad (3.102)$$

Finalmente, efetuamos a somatória em  $i$ , utilizando os auto-valores de  $I_{3L}$  e  $Q$ , obtendo assim

$$\begin{aligned} L_{ef} = & -\sqrt{2}G_F \left[ n_e \left( -\frac{1}{2} - 2(-1) \sin^2 \theta_W \right) + n_p \left( \frac{1}{2} - 2(+1) \sin^2 \theta_W \right) \right. \\ & \left. + n_n \left( -\frac{1}{2} - 2(0) \sin^2 \theta_W \right) \right] \{ \bar{\nu}_L \gamma_\alpha \nu_L \}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Considerando que a matéria solar é neutra, ou seja,  $n_p = n_e$ , os termos proporcionais à densidade eletrônica se cancelam, de forma que

$$\begin{aligned} L_{ef} = & -\sqrt{2}G_F \left[ -n_e \left( \frac{1}{2} - 2 \sin^2 \theta_W \right) + n_e \left( \frac{1}{2} - 2 \sin^2 \theta_W \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} n_n \right] \{ \bar{\nu}_L \gamma_0 \nu_L \} \\ = & \frac{\sqrt{2}}{2} G_F n_n \{ \bar{\nu}_L \gamma_0 \nu_L \}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Com isto, podemos escrever a lagrangiana efetiva com relação às duas componentes,  $\nu_e$  e  $\nu_\alpha$  utilizando para isto as lagrangianas (3.100) e (3.104), obtendo assim

$$L_{ef} = - \sum_{l=e,\alpha} \bar{\nu}_L \gamma_0 V_{\nu l} \nu_L, \quad (3.105)$$

onde

$$V_{\nu l} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}G_F \left( n_e - \frac{1}{2}n_n \right) & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}G_F n_n \end{pmatrix} \quad (3.106)$$

é o potencial efetivo, escrito na base de duas componentes.

Obtemos assim o potencial efetivo sobre a componente  $\nu_e$  do feixe,

$$\begin{aligned} V_e &= V_{\nu e} \\ &= \sqrt{2}G_F \left( n_e - \frac{n_n}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.107)$$

e o potencial para a componente  $\nu_\mu$ ,

$$\begin{aligned} V_\alpha &= V_{\nu\alpha} \\ &= -\sqrt{2}G_F \frac{n_n}{2} . \end{aligned} \quad (3.108)$$

Como foi dito anteriormente, o fator proporcional a  $n_e$  em (3.107), se deve a diferença entre as possibilidades de interação de cada sabor na matéria solar.

## COMPLEMENTO V

## POTENCIAIS EFETIVOS: ESPINORES

O objetivo deste complemento é demonstrar as relações

$$\langle \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi \rangle = \text{número de partículas por unidade de volume (densidade)} \quad (3.109)$$

$$\langle \bar{\Psi} \gamma^j \Psi \rangle \propto \text{momento linear} \quad (3.110)$$

$$\langle \bar{\Psi} \gamma^\alpha \gamma_5 \Psi \rangle \propto \text{spin} \quad (3.111)$$

e, por consequência destas, deixar claro que as médias (3.110) e (3.111) se anulam devido à aleatoriedade na distribuição da matéria, como é indicado no complemento IV.

Utilizamos para isso as propriedades dos espinores e das soluções da equação de Dirac. Os símbolos  $\Psi$  representam *operadores de campos*. Estes operadores podem ser representados nas equações como  $e$ , quando se tratar de um elétron,  $q$  no caso de quarks ou  $l$  quando se tratar de léptons em geral.

Uma solução geral da equação de Dirac pode ser escrita como

$$\Psi = \sum_{r,p} \left( \frac{m}{V E_p} \right)^{1/2} [c_r(p) u_r(p) e^{-ip \cdot x/\hbar} + d_r^\dagger(p) v_r(p) e^{ip \cdot x/\hbar}] \quad (3.112)$$

onde  $V$  é o volume de normalização,  $E_p$  é a energia correspondente ao do momento  $p$ ,  $c_r$  e  $d_r^\dagger$  são operadores de aniquilação e de criação, respectivamente, e as bases são dadas pelos espinores  $u_r$  e  $v_r$ . O índice  $r$  representa a projeção do spin na direção do movimento, podendo assumir os valores 1 ou 2. As bases  $u_r$  e  $v_r$  são dadas por

$$u_1(p) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ B p_z \\ B(p_x + ip_y) \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

$$u_2(p) = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ B(p_x - ip_y) \\ -B p_z \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

$$v_1(p) = A \begin{bmatrix} B(p_x - ip_y) \\ -B p_z \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

$$v_2(p) = A \begin{bmatrix} B p_z \\ B(p_x + ip_y) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

onde

$$A = \sqrt{\frac{E + m}{2m}}, \quad (3.117)$$

$$B = \frac{1}{E + m} \quad (3.118)$$

sendo  $E \equiv E_p$  e  $p = (E, p_x, p_y, p_z)$  é o quadrivetor momento linear<sup>9</sup>.

Em analogia ao campo  $\Psi$ , temos também o campo conjugado  $\bar{\Psi}$ , dado por

$$\bar{\Psi} = \sum_{r,p} \left( \frac{m}{V E_p} \right)^{1/2} \left[ d_r(p) \bar{v}_r(p) e^{-ip \cdot x/\hbar} + c_r^\dagger(p) \bar{u}_r(p) e^{ip \cdot x/\hbar} \right]. \quad (3.119)$$

De posse das expressões acima, podemos obter uma expressão para  $\bar{\Psi} \gamma^\alpha \Psi$ :

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \gamma^\alpha \Psi &= \\ & \frac{m}{V} \sum_{rp} \sum_{r'p'} \frac{1}{(E_p E_{p'})^{1/2}} \times \\ & \left[ d_r(p) \bar{v}_r(p) e^{-ip \cdot x/\hbar} + c_r^\dagger(p) \bar{u}_r(p) e^{ip \cdot x/\hbar} \right] \gamma^\alpha \times \\ & \left[ c_{r'}(p') u_{r'}(p') e^{-ip' \cdot x/\hbar} + d_{r'}^\dagger(p') v_{r'}(p') e^{ip' \cdot x/\hbar} \right] \end{aligned} \quad (3.120)$$

Para simplificar a notação, vamos utilizar  $c_r$  ao invés de  $c_r(p)$  e  $c_{r'}$  ao invés de  $c_{r'}(p')$  (o mesmo para  $c^\dagger$ ,  $d$  e  $d^\dagger$ ). Assim

<sup>9</sup>Lembramos que estamos utilizando o sistema natural de unidades, portanto  $c = 1$ .

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}\gamma^\alpha\Psi = & \\
& \frac{m}{V} \sum_{rp} \sum_{r'p'} \frac{1}{(E_p - E_{p'})^{1/2}} \left\{ (d_r \ c_{r'}) \bar{v}_r \gamma^\alpha u_{r'} e^{-ix/\hbar(p+p')} \right. \\
& + (d_r \ d_{r'}^\dagger) \bar{v}_r \gamma^\alpha v_{r'} e^{-ix/\hbar(p-p')} \\
& + (c_r^\dagger \ c_{r'}) \bar{u}_r \gamma^\alpha u_{r'} e^{ix/\hbar(p-p')} \\
& \left. + (c_r^\dagger \ d_{r'}^\dagger) \bar{u}_r \gamma^\alpha v_{r'} e^{ix/\hbar(p+p')} \right\} \quad (3.121)
\end{aligned}$$

Para calcularmos as médias dos campos, se faz necessário o uso de estados  $|\varphi\rangle$ , os quais representam os estados quânticos possíveis para as partículas constituintes do meio.

As médias sobre pares de operadores do tipo  $(d_r \ c_{r'})$  e  $(c_r^\dagger \ d_{r'}^\dagger)$  levarão a produtos entre estados ortogonais, resultando em termos nulos:

$$\langle \varphi | d_r \ c_{r'} | \varphi \rangle = 0 \quad (3.122)$$

e

$$\langle \varphi | c_r^\dagger \ d_{r'}^\dagger | \varphi \rangle = 0 \ . \quad (3.123)$$

Isto ocorre porque os operadores estão criando e aniquilando (não necessariamente nesta ordem) partículas diferentes (partículas e anti-partículas), de forma que a probabilidade de se encontrar um estado com estas características de volta ao estado inicial  $|\varphi\rangle$  é nula.

Portanto a média da expressão (3.121) se resume a

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\Psi}\gamma^\alpha\Psi \rangle = & \\
= \langle \varphi | \bar{\Psi}\gamma^\alpha\Psi | \varphi \rangle & \\
= \frac{m}{V} \sum_{rp} \sum_{r'p'} \frac{1}{(E_p - E_{p'})^{1/2}} \left\{ \langle \varphi | d_r \ d_{r'}^\dagger | \varphi \rangle \bar{v}_r \gamma^\alpha v_{r'} e^{-ix/\hbar(p-p')} \right. \\
& \left. + \langle \varphi | c_r^\dagger \ c_{r'} | \varphi \rangle \bar{u}_r \gamma^\alpha u_{r'} e^{ix/\hbar(p-p')} \right\} \quad (3.124)
\end{aligned}$$

Os operadores do tipo  $cc^\dagger$  são chamados *operadores número*<sup>10</sup> e seu auto-valor nos diz o número de partículas presentes em um dado estado. No caso da expressão (3.124),  $N_r(p)$  e  $N_{r'}(p')$  representam *número de partículas com spin  $r$  ( $r'$ ) e momento  $p$  ( $p'$ )*, Estas definições levam aos seguintes valores médios:

<sup>10</sup>Usaremos a seguir uma de suas propriedades, a saber:  $\{c, c^\dagger\} = 1$ , ou seja,  $cc^\dagger + c^\dagger c = 1$ .

$$\langle \varphi | c_r^\dagger c_{r'} | \varphi \rangle = \delta_{rr'} \delta_{pp'} N_r \quad (3.125)$$

e

$$\langle \varphi | d_r d_{r'}^\dagger | \varphi \rangle = \delta_{rr'} \delta_{pp'} (1 - \bar{N}_r) \quad (3.126)$$

Substituindo (3.125) e (3.126) em (3.124), obtemos

$$\langle \bar{\Psi} \gamma^\alpha \Psi \rangle = \frac{m}{V} \sum_{rp} \frac{1}{E_p} [ N_r \bar{u}_r \gamma^\alpha u_r - \bar{N}_r \bar{v}_r \gamma^\alpha v_r ] , \quad (3.127)$$

onde o fator  $\delta_{rr'} \delta_{pp'}$  das expressões (3.125) e (3.126) eliminou a somatória em  $r'p'$ .

Vamos definir o *número de partículas por unidade de volume* com um certo momento  $p$  e spin  $r$  como sendo

$$n_r(p) \equiv \frac{N_r}{V} , \quad (3.128)$$

de forma a obtermos

$$\langle \bar{\Psi} \gamma^\alpha \Psi \rangle = \sum_{rp} \frac{m}{E_p} [ n_r(p) \bar{u}_r \gamma^\alpha u_r - \bar{n}_r(p) \bar{v}_r \gamma^\alpha v_r ] . \quad (3.129)$$

Repare que as densidades  $\bar{n}$  e  $n$  referem-se a *número de partículas por volume* e não *massa por volume*.

Agora, é necessário obter uma expressão para as componentes dos quadrivetores  $\bar{v}_r \gamma^\alpha v_r$  e  $\bar{u}_r \gamma^\alpha u_r$ . Esta parte deve ser feita componente-a-componente ( $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ). Assim, optamos por mostrar em primeiro lugar a relação (3.109), que envolve a componente ( $\alpha = 0$ ).

A partir da expressão (3.129), vamos utilizar as definições (3.113) a (3.116), além das matrizes  $\gamma^\alpha$  na representação usual (Dirac-Pauli):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (3.130)$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} , \quad (3.131)$$

onde  $\mathbb{1}$  é a matriz identidade  $2 \times 2$  e  $\sigma^i$  são as matrizes de Pauli. Portanto, as matrizes  $\gamma^\alpha$  são de ordem 4. Desta forma, considerando  $\alpha = 0$ , temos que

$$\bar{u}_1 \gamma^0 u_1 = A^2(1 + B^2|p|^2) \quad (3.132)$$

$$\bar{u}_2 \gamma^0 u_2 = A^2(1 + B^2|p|^2) \quad (3.133)$$

onde substituímos as definições de  $A$  e  $B$ , (3.117) e (3.118) respectivamente, obtendo

$$\bar{u}_1 \gamma^0 u_1 = \frac{E + m}{2m} \left( 1 + \frac{|p|^2}{(E + m)^2} \right) \quad (3.134)$$

onde  $|p|^2 = E^2 - m^2$ . Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 \gamma^0 u_1 = \bar{u}_2 \gamma^0 u_2 &= \frac{E + m}{2m} \left( 1 + \frac{E^2 - m^2}{(E + m)^2} \right) \\ &= \frac{E + m}{2m} \left[ 1 + \frac{(E - m)(E + m)}{(E + m)^2} \right] \\ &= \frac{E + m}{2m} \left( 1 + \frac{E - m}{E + m} \right) \\ &= \frac{E + m}{2m} \left( \frac{E + m + E - m}{E + m} \right) \\ &= \frac{E + m}{2m} \frac{2E}{E + m} \\ &= \frac{E}{m} . \end{aligned} \quad (3.135)$$

Lembrando que  $E = E_p$ . Analogamente, mostra-se que

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 \gamma^0 v_1 = \bar{v}_2 \gamma^0 v_2 &= -A^2(1 + B^2|p|^2) \\ &= -\bar{u}_1 \gamma^0 u_1 \\ &= -\frac{E}{m} . \end{aligned} \quad (3.136)$$

Assim, realizamos a somatória em  $r$  na expressão (3.129), obtendo

$$\begin{aligned} \langle \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi \rangle &= \sum_p \frac{m}{E_p} \frac{E_p}{m} [n_1(p) + n_2(p) + \bar{n}_1(p) + \bar{n}_2(p)] \\ &= \sum_p [n(p) + \bar{n}(p)] \end{aligned} \quad (3.137)$$

que nada mais é do que o número total de partículas e anti-partículas do estado  $\Psi$  no meio, a qual definimos como

$$n \equiv \sum_p [n(p) + \bar{n}(p)] \quad (3.138)$$

Assim sendo, demonstramos que

$$\langle \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi \rangle = n . \quad (3.139)$$

De maneira análoga, vamos mostrar agora a afirmação (3.110). Com isso, temos que escrever explicitamente as outras três médias dos componentes do quadrivetor  $\bar{\Psi} \gamma^\alpha \Psi$ , com  $\alpha = 1, 2, 3$ . Assim, partindo da expressão (3.129) e utilizando a expressão de  $\gamma^1$ , temos

$$\bar{u}_1 \gamma^1 u_1 = 2A^2 B p_x \quad (3.140)$$

onde  $p_x$  é a primeira componente do quadrivetor momento linear.

Substituindo  $A$  e  $B$  temos

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 \gamma^1 u_1 &= 2 \left( \frac{E+m}{2m} \right) \left( \frac{1}{E+m} \right) p_x \\ &= \frac{p_x}{m} \end{aligned}$$

Lembramos que  $p_x/m \neq v_x$ , pois estamos lidando com velocidades relativísticas<sup>11</sup>. Ainda assim,  $p_x/m$  está relacionado diretamente com a velocidade  $v_x$  e com o módulo da velocidade  $v$ :

$$\frac{p_x}{m} = \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (3.141)$$

de forma que, podemos dizer que  $p_x/m$  (assim como  $p_y/m$  e  $p_z/m$ ) são *proporcionais à velocidade*<sup>12</sup>. Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 \gamma^1 u_2 &= 2 \left( \frac{E+m}{2m} \right) \left( \frac{1}{E+m} \right) p_x \\ &= \frac{p_x}{m}; \end{aligned}$$

<sup>11</sup>Na relatividade especial,  $p = \gamma m v$ , onde  $\gamma$  é o fator de Lorentz  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ .

<sup>12</sup>Mesmo que a proporcionalidade não seja constante

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 \gamma^1 v_1 = \bar{v}_2 \gamma^1 v_2 &= 2 \left( \frac{E+m}{2m} \right) \left( \frac{1}{E+m} \right) p_x \\ &= \frac{p_x}{m}.\end{aligned}$$

Assim, substituindo os resultados anteriores na expressão (3.129), obtemos:

$$\langle \bar{\Psi} \gamma^1 \Psi \rangle = \sum_p \frac{m}{E_p} \frac{p_x}{m} [n(p) - \bar{n}(p)] \quad (3.142)$$

$$= \sum_p \frac{p_x}{E_p} [n(p) - \bar{n}(p)] \quad (3.143)$$

Vemos que esta quantidade é diretamente proporcional ao momento na direção  $x$ . Ao realizarmos a somatória em  $p$  na expressão acima, devemos levar em conta nossa hipótese sobre a aleatoriedade da matéria, representada pelo estado  $\Psi$ . Com isto, temos que  $p_x$  é igualmente distribuído entre valores positivos e negativos, ou seja, se para cada  $|p_x|$  temos o mesmo número de partículas se movendo em ambos os sentidos, então:

$$\langle \bar{\Psi} \gamma^1 \Psi \rangle = 0. \quad (3.144)$$

De maneira análoga mostra-se que:

$$\langle \bar{\Psi} \gamma^2 \Psi \rangle = 0 \quad \text{e} \quad (3.145)$$

$$\langle \bar{\Psi} \gamma^3 \Psi \rangle = 0, \quad (3.146)$$

provando assim a relação (3.110).

Finalmente, vamos calcular as expressões para  $\langle \bar{\Psi} \gamma^\alpha \gamma^5 \Psi \rangle$ . A expressão análoga a (3.129) para este caso é dada por:

$$\langle \bar{\Psi} \gamma^\alpha \gamma^5 \Psi \rangle = \sum_{rp} \frac{m}{E_p} \left[ n_r(p) \bar{u}_r \gamma^\alpha \gamma^5 u_r - \bar{n}_r(p) \bar{v}_r \gamma^\alpha \gamma^5 v_r \right]. \quad (3.147)$$

A matriz  $\gamma^5$  é definida como

$$\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \quad (3.148)$$

sendo que sua representação (uma vez escolhida a representação Dirac-Pauli para as  $\gamma^\alpha$ ) é

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.149)$$

Utilizando (3.129) e seguindo o procedimento que vem sendo feito até aqui, obtemos:

$$\langle \bar{\Psi} \gamma^0 \gamma^5 \Psi \rangle = 0 \quad (3.150)$$

$$\langle \bar{\Psi} \gamma^1 \gamma^5 \Psi \rangle \propto p_z p_x \quad (3.151)$$

$$\langle \bar{\Psi} \gamma^2 \gamma^5 \Psi \rangle \propto p_z p_y. \quad (3.152)$$

Com isso, a somatoria em  $p$  leva os termos com fatores  $p_z p_x$  e  $p_z p_y$  a zero<sup>13</sup>. Porém, há uma sutileza acerca do fator  $\langle \bar{\Psi} \gamma^3 \gamma^5 \Psi \rangle$ , o qual não foi listado acima. A expressão que se obtém para este termo é dada por:

$$\langle \bar{\Psi} \gamma^3 \gamma^5 \Psi \rangle = \sum_p A^2 [1 - B^2(|p_x|^2 + |p_y|^2 - |p_z|^2)] [(n_1 - n_2) - (\bar{n}_1 - \bar{n}_2)]. \quad (3.153)$$

Repare que a dependência nas componentes do momento é positiva definida, de forma que a somatória em  $p$  não levará este termo a zero. Porém, a aleatoriedade da matéria faz com que as densidades se cancelem, de forma que

$$n_1 - n_2 = 0 \quad (3.154)$$

$$\bar{n}_1 - \bar{n}_2 = 0. \quad (3.155)$$

Este cancelamento se deve ao fato de que a densidade de partículas com spin  $r = 1$  é igual a densidade de partículas com spin  $r = 2$  devido à aleatoriedade na distribuição de spins na matéria.

Desta forma, as condições exigidas no complemento *IV* para a obtenção do potencial efetivo se mostram válidas.

---

<sup>13</sup>Novamente, devido a aleatoriedade na distribuição da matéria.



## O efeito MSW

### 4.1 Um exemplo simples

A presença de matéria altera o modelo da oscilação de neutrinos de maneira significativa. O ângulo de mistura  $\theta$  é substituída por um *ângulo de mistura efetivo*  $\tilde{\theta}$ , definido implicitamente pela relação (3.25):

$$\sin^2 2\tilde{\theta} = \frac{\Delta^2 \sin^2 2\theta}{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta},$$

cujo valor depende não somente da diferença de massa ao quadrado  $\Delta$  e da própria mistura no vácuo, como também das propriedades do meio, representadas pelo parâmetro  $A$ ,

$$A = 2\sqrt{2}G_F n_e(x)E,$$

onde  $G_F$  é a constante de Fermi<sup>1</sup>,  $n_e(x)$  é a *função densidade* do meio ( $x$  é qualquer parâmetro que varie a função  $n_e$  sobre o trajeto do feixe) e  $E$  é a energia do feixe. O parâmetro  $A$  carrega toda a informação necessária sobre a interação efetiva, a saber: A energia do feixe, a densidade do meio e a constante de acoplamento entre eles (neutrinos e meio).

Quando o meio não é uniforme, de forma que  $A$  tenha uma dependência explícita em  $x$ , o ângulo de mistura efetivo pode ser visto como uma função de  $A$ , a qual possui a forma de uma *curva de ressonância*. Isso significa que, não importa qual o valor da mistura no vácuo, sempre há valores de  $A$  para os quais a mistura efetiva pode ser intensificada ( $\sin^2 2\tilde{\theta} \rightarrow 1$ )

---

<sup>1</sup>Esta é uma característica fundamental da interação fraca:  $G_F = 1.66 \times 10^{-11} \text{MeV}^{-2}$

ou suprimida ( $\sin^2 2\tilde{\theta} \rightarrow 0$ ). Para compreender exatamente em que estes fenômenos ditos *ressonantes* implicam, vamos analisar o seguinte exemplo.

Vamos assumir em primeiro lugar que o ângulo de mistura no vácuo é tal que  $\sin^2 2\theta \approx 1$  (grande mistura). Ao ser criado em um meio material, o neutrino tem sua mistura de sabor definida pelas propriedades físicas de seu ponto de criação, ou seja, densidade de elétrons e energia presentes no processo de criação do neutrino. Estas características podem ser resumidas no ângulo de mistura efetivo  $\tilde{\theta}_0$ . O sub-índice “zero” indica que este parâmetro depende exclusivamente das características do ponto de criação.

Vamos supor agora que um neutrino do elétron foi criado em um ponto cujas propriedades do meio levam a  $\sin^2 2\tilde{\theta}_0 \approx 0$ . Desta forma, utilizando as expressões de (3.39) a (3.43), as quais definem a mistura na matéria, temos

$$|\nu_e\rangle = \cos\tilde{\theta}_0 |\tilde{\nu}_1\rangle + \sin\tilde{\theta}_0 |\tilde{\nu}_2\rangle . \quad (4.1)$$

Porém, se  $\sin^2 2\tilde{\theta}_0 \approx 0$  (mistura efetiva mínima) então

$$|\nu_e\rangle \approx |\tilde{\nu}_1\rangle . \quad (4.2)$$

Com isso definimos nosso quadro inicial. Vamos agora levar este estado  $|\tilde{\nu}_1\rangle$  do meio solar para o vácuo. Assim o estado efetivo de massa converge para o estado físico de vácuo:

$$|\tilde{\nu}_1\rangle \rightarrow |\nu_1\rangle , \quad (4.3)$$

onde a expressão (2.10) nos diz que

$$|\nu_1\rangle = \cos\theta |\nu_e\rangle - \sin\theta |\nu_\alpha\rangle .$$

Usando nossa hipótese inicial de que  $\sin^2 2\theta \approx 1$  (mistura máxima), temos que

$$|\nu_1\rangle \approx \frac{|\nu_e\rangle - |\nu_\alpha\rangle}{\sqrt{2}} . \quad (4.4)$$

Desta forma, o feixe originalmente composto de neutrinos  $\nu_e$  se passa a ter 50% de cada sabor. Isto significa uma considerável supressão do feixe de neutrinos do elétron.

Este exemplo é muito simplificado mas retrata a essência da conversão ressonante. Repare que em lugar algum mencionamos oscilação. A supressão do sabor criado, durante seu trajeto, se

deve às características que definem  $\tilde{\theta}_0$ , à grande mistura definida para o vácuo e, principalmente, à variação do meio, onde um estado físico efetivo converge para um estado físico de vácuo. Em resumo, condições iniciais e variação do meio são uma nova fonte de conversão, que surge inevitavelmente do modelo de oscilação, mas que de certa forma atua independentemente. Este é o chamado efeito *MSW* ([12],[13]), nome derivado dos pioneiros no estudo deste tipo de conversão: S. P. Mikheyev, A. Yu Smirnov e L. Wolfenstein.

Não nos importamos com as condições que levam aos valores sugeridos para  $\tilde{\theta}_0$  e  $\theta$ , levando, respectivamente, a uma mistura efetiva **nula** e uma mistura **máxima** no vácuo. Porém o resultado obtido possui o mesmo padrão do problema do neutrino solar. Isto, é claro, não é mero acaso. Até o fim deste capítulo veremos que as condições no núcleo solar (região onde é produzida quase a totalidade dos neutrinos) e os valores previstos para  $\Delta$  e  $\theta$  levam a condições similares as utilizadas no exemplo, ou seja, de maneira simplificada (na verdade, levada a extremos) esta é a verdadeira solução para o problema do neutrino solar.

## 4.2 Conversão Adiabática

### 4.2.1 Coeficiente de Adiabaticidade

A partir da equação (3.88), a saber

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix}_{\tilde{m}} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{m}_1^2}{2E} & i \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \\ -i \frac{d\tilde{\theta}}{dx} & \frac{\tilde{m}_2^2}{2E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix}_{\tilde{m}},$$

vemos que a hamiltoniana que descreve a propagação na matéria, escrita na base dos estados de massa efetiva, é dada por

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{m}_1^2}{2E} & i \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \\ -i \frac{d\tilde{\theta}}{dx} & \frac{\tilde{m}_2^2}{2E} \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

A solução completa da equação (3.88) depende da integrabilidade da função  $n_e(x)$ . Infelizmente a distribuição da matéria solar possui uma forma complicada, o que exige métodos numéricos de integração. O que faremos então é resolver a equação (3.88) em dois casos distintos. No primeiro caso os coeficientes não diagonais de (4.5) são pequenos o suficiente para

podemos considerar a hamiltoniana como sendo diagonal. No segundo caso, consideraremos as grandes contribuições deste termos.

Os auto-valores de (4.5) são dados por

$$\tilde{h}_{\pm} = \frac{\tilde{m}_2^2 + \tilde{m}_1^2}{4E} \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2}{4E}\right)^2 + \left(\frac{d\tilde{\theta}}{dx}\right)^2}. \quad (4.6)$$

Para que  $\tilde{H}$  seja diagonal, seus auto-valores devem ser iguais aos seus elementos da diagonal principal,

$$\frac{\tilde{m}_1^2}{2E} \text{ e } \frac{\tilde{m}_2^2}{2E}, \quad (4.7)$$

respectivamente. Vemos da expressão (4.6) que os auto-valores  $h_{\pm}$  se aproximam dos valores acima quando

$$\left(\frac{d\tilde{\theta}}{dx}\right)^2 \ll \left(\frac{\tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2}{4E}\right)^2, \quad (4.8)$$

ou, de outra maneira,

$$\left|\frac{d\tilde{\theta}}{dx}\right| \ll \left|\frac{\tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2}{4E}\right|. \quad (4.9)$$

Da expressão (3.25), o lado esquerdo da relação (4.9) fica<sup>2</sup>

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dx} = \frac{\sqrt{2}G_F E \sin^2 2\tilde{\theta}}{\Delta} \frac{dn_e}{dx}. \quad (4.10)$$

Substituindo a expressão (3.55) para  $\tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2$  no lado direito da relação (4.9) e tendo (4.10) no lado esquerdo, temos

$$\frac{\sqrt{2}G_F E \sin^2 2\tilde{\theta}}{\Delta} \left|\frac{dn_e}{dx}\right| \ll \frac{\sqrt{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta}}{4E}. \quad (4.11)$$

Com a expressão para o ângulo de mistura efetiva (3.25), podemos simplificar a expressão anterior:

$$\frac{\sqrt{2}G_F E \sin^2 2\tilde{\theta}}{\Delta} \left|\frac{dn_e}{dx}\right| \ll \frac{\Delta \sin 2\theta}{4E \sin 2\tilde{\theta}}. \quad (4.12)$$

<sup>2</sup>Usamos uma derivação implícita:  $\frac{d}{dx} \tan 2\tilde{\theta} = \frac{1}{\cos^2 2\tilde{\theta}} \frac{d\tilde{\theta}}{dx}$ .

Reorganizando os termos obtemos, finalmente,

$$\frac{\sin^2 2\theta}{\sin^3 2\tilde{\theta}} \frac{(\Delta/E)^2}{4\sqrt{2}G_F \left| \frac{dn_e}{dx} \right|} \gg 1. \quad (4.13)$$

Esta é a condição que buscávamos para que a hamiltoniana (4.5) fosse aproximadamente diagonal. Lembramos a principal conseqüência da existência dos termos não diagonais: a probabilidade não nula de ocorrer em transições do tipo  $\tilde{\nu}_1 \rightleftharpoons \tilde{\nu}_2$ . Portanto, quando assumimos que a condição (4.13) é satisfeita, eliminamos a probabilidade de que tais transições ou “saltos” ocorram entre os estados físicos.

Do ponto de vista termodinâmico, o feixe de neutrino pode ser visto como um sistema. No vácuo, ele está completamente isolado de um meio. Na matéria, há a possibilidade de troca de “calor” entre o sistema e o meio, que se comporta como um reservatório térmico<sup>3</sup>. Quando o feixe sofre uma transição entre os estados físicos, a massa efetiva do estado está sendo alterada de  $\tilde{m}_1$  para  $\tilde{m}_2$ , ou vice-versa. De certa forma, podemos dizer que o sistema está doando ou recebendo “calor” do meio. Por calor, entenda-se *energia*, de forma que a evolução do sistema passa de um estado de menor massa efetiva (menor energia) para um estado de maior massa efetiva (de maior energia), ou vice-versa.

Esta analogia termodinâmica serve para definirmos a noção de *adiabaticidade* do sistema. Dizemos que o feixe está sofrendo efeitos adiabáticos se as condições são tais que transições  $\tilde{\nu}_1 \rightleftharpoons \tilde{\nu}_2$  não ocorrem (entenda-se como “extremamente raras”). Assim, da expressão (4.13) definimos o *coeficiente de adiabaticidade*  $\gamma$  como sendo<sup>4</sup>

$$\gamma(x, E) = \frac{\sin^2 2\theta}{\sin^3 2\tilde{\theta}} \frac{(\Delta/E)^2}{2\sqrt{2}G_F \left| \frac{dn_e}{dx} \right|}. \quad (4.14)$$

Portanto o sistema pode ser considerado adiabático se

$$\gamma(x, E) \gg 1, \quad (4.15)$$

---

<sup>3</sup>Ou seja, pode doar ou receber uma quantidade infinita de calor sem alterar sua temperatura, neste caso, a energia média do meio.

<sup>4</sup>Repare que há uma diferença de um fator 1/2 entre a expressão (4.13) e a definição (4.14). Isto porque esta é a definição comum na literatura. Esta diferença vem da definição da condição (4.9), a qual é geralmente definida simplesmente baseada na diferença entre os termos diagonais de  $\tilde{H}$ , de forma que o fator 1/2 não aparece. Este fator não altera a condição de adiabaticidade (4.15), e por isso não deve perturbar o leitor.

ou seja, o sistema é adiabático para baixas energias ou gradientes suaves de densidade. No caso limite onde o meio é uniforme,  $\gamma$  tende a infinito.

### 4.2.2 Probabilidade de Sobrevivência

No caso adiabático, a hamiltoniana (3.17) é aproximadamente diagonal, de forma que a equação correspondente à (3.88) será

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix}_{\tilde{m}} \approx \begin{pmatrix} \tilde{E}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{E}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix}_{\tilde{m}}, \quad (4.16)$$

onde

$$\tilde{E}_i = \frac{\tilde{m}_i^2}{2E}. \quad (4.17)$$

Como a matriz é diagonal, as equações são *desacopladas*, de modo que podemos escrever uma única equação no formalismo de estados (que neste caso é mais eficiente comparado ao formalismo de vetores). Assim, a equação (4.16) pode ser reescrita como

$$-i \frac{d}{dx} | \tilde{\nu}_j(x) \rangle = \tilde{E}_j(x) | \tilde{\nu}_j(x) \rangle, \quad (4.18)$$

onde  $j = 1, 2$  e cuja solução é dada por

$$| \tilde{\nu}_j(t) \rangle = | \tilde{\nu}_j(0) \rangle e^{-i \int_0^x \tilde{E}_j(x') dx'}. \quad (4.19)$$

Para obter a probabilidade de sobrevivência adiabática,  $P_{ee}^{ad}(x)$ , precisamos calcular o produto interno  $\langle \nu_e(x) | \nu_e(0) \rangle$ . De fato, dispomos apenas da solução (4.19) escrita na base dos estados físicos. Assim, devemos expressar o produto interno em termos da solução conhecida.

$$\begin{aligned} \langle \nu_e(x) | \nu_e(0) \rangle &= \langle \nu_e(x) | \left( \sum_j | \tilde{\nu}_j(x) \rangle \langle \tilde{\nu}_j(x) | \right) \left( \sum_k | \tilde{\nu}_k(0) \rangle \langle \tilde{\nu}_k(0) | \right) | \nu_e(0) \rangle \\ &= \sum_{jk} \langle \nu_e(x) | \tilde{\nu}_j(x) \rangle \langle \tilde{\nu}_j(x) | \tilde{\nu}_k(0) \rangle \langle \tilde{\nu}_k(0) | \nu_e(0) \rangle, \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde utilizamos as relações de fechamento da base  $\{ \tilde{\nu}_j \}$ , no ponto de detecção  $x$  e no ponto de criação 0.

O primeiro e o terceiro fator na expressão (4.20) são os coeficientes da matriz de mistura nos pontos  $x$  e  $0$ , respectivamente, isto é

$$\begin{aligned} \langle \nu_e(x) | \tilde{\nu}_1(x) \rangle &= \langle \nu_e(x) | (\cos \tilde{\theta} | \nu_e(x) \rangle - \sin \tilde{\theta} | \nu_\alpha(x) \rangle) \\ &= \cos \tilde{\theta} \langle \nu_e(x) | \nu_e(x) \rangle - \sin \tilde{\theta} \langle \nu_e(x) | \nu_\alpha(x) \rangle \\ &= \cos \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (4.21)$$

e, analogamente,

$$\langle \nu_e(x) | \tilde{\nu}_2(x) \rangle = \sin \tilde{\theta} \quad (4.22)$$

$$\langle \tilde{\nu}_1(0) | \nu_e(0) \rangle = \cos \tilde{\theta}_0 \quad (4.23)$$

$$\langle \tilde{\nu}_2(0) | \nu_e(0) \rangle = -\sin \tilde{\theta}_0 . \quad (4.24)$$

O termo central da expressão (4.20) é dado pela solução (4.19), de forma que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nu}_j(x) | \tilde{\nu}_k(0) \rangle &= \langle \tilde{\nu}_j(0) | e^{i \int_0^x \tilde{E}_j(x') dx'} | \tilde{\nu}_k(0) \rangle \\ &= e^{i \int_0^x \tilde{E}_j(x') dx'} \delta_{jk} . \end{aligned} \quad (4.25)$$

Substituindo as expressões (4.21) a (4.25) no produto interno (4.20), temos que

$$\langle \nu_e(x) | \nu_e(0) \rangle = \cos \tilde{\theta} e^{i \int_0^x \tilde{E}_1(x') dx'} \cos \tilde{\theta}_0 - \sin \tilde{\theta} e^{i \int_0^x \tilde{E}_2(x') dx'} \sin \tilde{\theta}_0 . \quad (4.26)$$

Portanto a probabilidade é dada por

$$P_{ee}^{ad}(x) = |\langle \nu_e(x) | \nu_e(0) \rangle|^2 \quad (4.27)$$

$$= |\cos \tilde{\theta}_0 \cos \tilde{\theta} e^{i \int_0^x \tilde{E}_1(x') dx'} - \sin \tilde{\theta}_0 \sin \tilde{\theta} e^{i \int_0^x \tilde{E}_2(x') dx'}|^2 \quad (4.28)$$

Obtendo o módulo quadrado da expressão e organizando os termos adequadamente, temos

$$P_{ee}^{ad}(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos 2\tilde{\theta}_0 \cos 2\tilde{\theta}(x) + \sin 2\tilde{\theta}_0 \sin 2\tilde{\theta}(x) \cos \phi(x) \right] \quad (4.29)$$

onde explicitamos a dependência em  $x$  e definimos  $\phi(x)$  como

$$\phi(x) \equiv \int_0^x dx' \left[ \tilde{E}_2(x') - \tilde{E}_1(x') \right] \quad (4.30)$$

De acordo com (4.17), a fase  $\phi(x)$  depende do espectro do feixe de neutrinos detectados (dependência em  $1/E$ ). Esta fase é uma média na energia e de acordo com a referência [4], no

caso específico do espectro de neutrinos do Sol, o fator  $\cos \phi$  se anula com a condição de que  $\Delta \gg 10^{-10} eV^2$  (ou  $\Delta \gg 10^{-22} MeV^2$ ).

Vamos por hora assumir que  $\cos \phi \approx 0$  e posteriormente confirmar que esta afirmação está correta para o caso do neutrino solar. Assim, temos

$$P_{ee}^{ad}(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos 2\tilde{\theta}_o \cos 2\tilde{\theta}(x) \right]. \quad (4.31)$$

Repare que a única dependência em  $x$  está no ângulo de mistura efetiva. Se o ponto de detecção for no vácuo, onde  $\tilde{\theta}(x) = \theta$ , então **a probabilidade de sobrevivência passa a ser independente de  $x$** , de forma que

$$P_{ee}^{ad} = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos 2\tilde{\theta}_o \cos 2\theta \right). \quad (4.32)$$

Este resultado sintetiza o efeito MSW no caso dos neutrinos solares. Resta agora analisar os efeitos das transições não adiabáticas sobre a probabilidade acima. Como veremos a seguir, com algumas considerações simples sobre probabilidade podemos obter um resultado convincente.

## 4.3 Conversão Não Adiabática

### 4.3.1 Condição de Ressonância

Finalmente, vamos considerar o caso onde ocorre ressonância. A principal observação de Mikheyev e Smirnov é que neutrinos produzidos em regiões mais internas do Sol poderão passar por uma *região de ressonância*, ou seja, onde  $A = \Delta \cos 2\theta$ .

Esta região pode ser definida como o intervalo de posição  $x$  onde a probabilidade de ocorrer uma transição  $\tilde{\nu}_1 \rightleftharpoons \tilde{\nu}_2$  é considerável. A expressão (3.77) define o valor de  $A$  na ressonância como  $A_R$ , onde

$$A_R = \Delta \cos 2\theta ,$$

Podemos obter, a partir da definição de  $A$ , a densidade eletrônica necessária para que ocorra ressonância:

$$n_R = \frac{\Delta \cos 2\theta}{E 2\sqrt{2}G_F}, \quad (4.33)$$

a qual, substituída na expressão (4.14) e tomando  $\sin 2\tilde{\theta} = 1$ , fornece o coeficiente de adiabaticidade na condição de ressonância

$$\gamma_R = \frac{\Delta}{E} \cdot \frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} \cdot \frac{1}{\left| \frac{d}{dx} \ln n_e \right|_R} . \quad (4.34)$$

Ou seja, para grandes valores de  $\left| \frac{d}{dx} \ln n_e \right|_R$  ou pequenos valores de  $\Delta/E$  podemos ter transições não adiabáticas.

O que faremos é definir uma probabilidade de transição  $X$  e obter a probabilidade de sobrevivência para este caso a partir do caso adiabático.

### 4.3.2 Probabilidade de Transição

Se um estado  $|\tilde{\nu}_1\rangle$  passa por uma região de ressonância há uma probabilidade, definida como  $X$ , de que ele se torne um estado  $|\tilde{\nu}_2\rangle$  (ou vice-versa).

Assim, um estado detectado como  $|\nu_e\rangle$  pode ter sido produzido como  $|\tilde{\nu}_1\rangle$  e **não ter sofrido nenhuma transição** e não ter “sobrevivido” ao processo de conversão adiabática, de forma que ele foi realmente produzido como  $|\tilde{\nu}_1\rangle$ . A probabilidade desta seqüência de eventos ocorrer é dada por:

$$P_1 = (1 - X)P_{ee}^{ad} . \quad (4.35)$$

Por outro lado, o estado que foi produzido como  $|\tilde{\nu}_1\rangle$  e seria detectado como  $|\nu_\mu\rangle$  pode sofrer uma transição para  $|\tilde{\nu}_2\rangle$  e ser também detectado como  $|\nu_e\rangle$ . Ou seja, há uma probabilidade de que a conversão não adiabática e transição ressonante se combinem para que um estado  $|\nu_e\rangle$  seja detectado. A probabilidade desta seqüência de eventos ocorrer é dada por:

$$P_2 = XP_{e\mu}^{ad} . \quad (4.36)$$

Assim, como estamos interessados na observação do neutrino  $\nu_e$ , a probabilidade de observar um estado  $|\nu_e\rangle$  por uma das seqüências acima **ou** pela outra, é dada por

$$\begin{aligned} P_{ee} &= (1 - X)P_{ee}^{ad} + XP_{e\mu}^{ad} \\ &= (1 - X)P_{ee}^{ad} + X(1 - P_{ee}^{ad}) \\ &= 1 - (1 - 2X)P_{ee}^{ad} \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 + (1 - 2X) \cos 2\tilde{\theta}_o \cos 2\theta \right] , \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde utilizamos a expressão (4.32).

A probabilidade de transição  $X$  poderia ser calculada a partir da equação (3.88). Mas uma solução analítica depende, entre outras coisas, da integração da função densidade  $n_e(x)$ . Como veremos em breve, a função densidade do Sol, prevista pelo Modelo Solar Padrão, dificulta muito a obtenção de uma solução analítica, sendo necessário o uso de métodos numéricos. Este tipo de cálculo está fora dos objetivos deste texto.

Uma outra maneira de se obter a probabilidade  $X$  é através de um método semi-clássico chamado *método das trajetórias complexas de Landau*. Este método, quando aplicado a este caso em particular [8, 9], leva a uma expressão simples para  $X$ , desde que façamos algumas aproximações.

### 4.3.3 Distribuição de Matéria

A aproximação em questão é em relação à função da densidade de matéria  $n_e(z)$ . A função prevista pelo Modelo Solar Padrão é dada por

$$n_e(z) = n_e(0) \exp\left(-\frac{az^2}{z+b}\right) \text{ MeV}^3, \quad (4.38)$$

onde  $z = r/R_o$ <sup>5</sup> é distância de um ponto  $r$  ao centro do Sol, normalizada pelo raio  $R_o$  do Sol<sup>6</sup> ( $z = 1$  implica  $r = R_o$ ). Os valores para as constantes  $n_e(0)$ ,  $a$  e  $b$  estão dados a seguir. A Figura 4.1 mostra a função  $n_e(z)$  com estes valores.

$$n_e(0) = 4,54 \times 10^{-7} \text{ MeV}^3 \quad (4.39)$$

$$a = 11,1 \quad (4.40)$$

$$b = 0,15 \quad (4.41)$$

O que faremos basicamente é aproximar a função (4.38) por outra mais simples e que seja válida próxima à ressonância. A função proposta é [4]

$$n_e(z) = 9,2 \times 10^{-7} \exp(-10z) \text{ MeV}^3 \quad (4.42)$$

---

<sup>5</sup>Usaremos  $z$  no lugar de  $x$  quando estivermos lidando com coordenadas no interior do Sol. Desta forma, sempre que  $x \leq R_o$  usaremos  $z = x/R_o$ .

<sup>6</sup> $R = 7 \times 10^8 \text{ m} = 3,55 \times 10^{21} \text{ MeV}^{-1}$ .

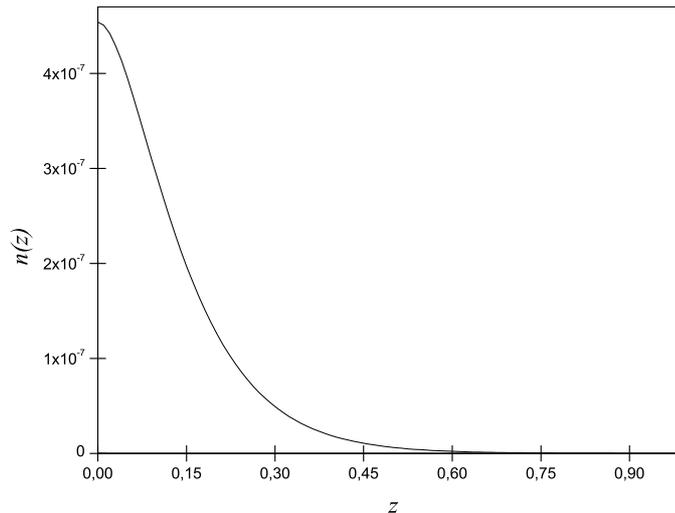


Figura 4.1: Função Densidade Eletrônica do Sol - O gráfico acima mostra a distribuição da densidade eletrônica no interior do Sol. No eixo horizontal, os valores de 0 a 1 correspondem à fração do raio solar. Repare que, com exceção da região interior a 0,15, a função se comporta como um decaimento exponencial comum. Esta comparação é feita na figura (4.2)

onde  $z = r/R_0$  com  $R_0 = 3.55 \times 10^{21} \text{ MeV}^{-1}$  sendo o raio do Sol . Esta distribuição é válida na região compreendida entre  $0,15 < z < 0,90$ . A figura 4.2 compara as funções (4.38) e (4.42).

Com efeito, o método de Landau fornece uma primeira aproximação para a probabilidade de transição [4].

#### 4.3.4 Probabilidade de Transição

Supomos uma solução para  $X$  do tipo

$$X = e^{-\gamma_R F} \quad (4.43)$$

onde  $F$  deve ser obtido e depende da variação de  $n_e$  nas proximidades da ressonância.

O fator  $F$  pode ser obtido por vários métodos, tendo sido calculado primeiramente por Landau no contexto da física atômica. Para encontrar o comportamento semi-clássico em primeira ordem, o método de Landau [4] fornece, para o caso específico em que  $\left| \frac{d}{dx} \ln n_e \right| = \text{cte}$  perto da ressonância, o seguinte valor para  $F$

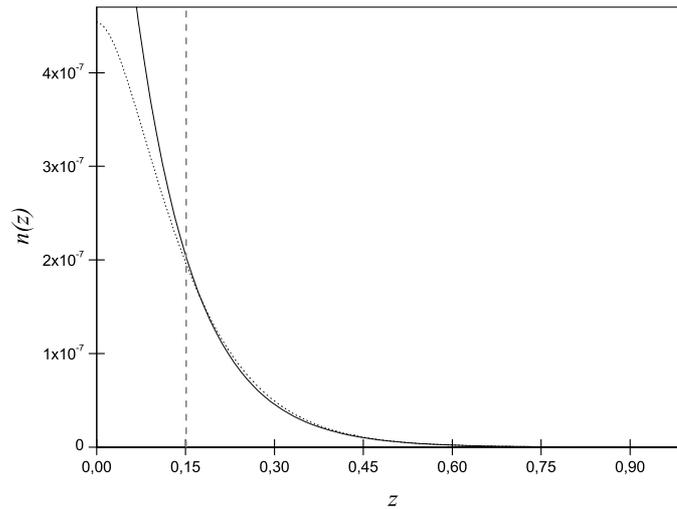


Figura 4.2: Aproximação para a Função Densidade Eletrônica do Sol - O gráfico acima mostra duas curvas. A curva com linha cheia é uma aproximação para distribuição da densidade eletrônica no interior do Sol (curva pontilhada, mostrada anteriormente na figura 4.1). A aproximação é válida para valores  $z > 0,15$ , indicado na figura pela linha vertical tracejada.

$$F = \pi/4 . \quad (4.44)$$

Assim, substituindo em (4.43), temos que

$$X = e^{-\gamma R \frac{\pi}{4}} . \quad (4.45)$$

Repare que a função (4.42) sugerida como aproximação para a distribuição de densidade, satisfaz a condição necessária:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dx} \ln n_e \right| &= \left| \frac{d}{dx} \ln [9,2 \times 10^{-7} \exp(-10z)] \right| \\ &= \left| -\frac{10}{R_0} \right| \\ &= \frac{10}{R_0} , \end{aligned} \quad (4.46)$$

que é portanto constante (lembre-se que  $z = x/R_0$ ), de forma a validar a expressão (4.45).

## 4.4 Probabilidade de Sobrevivência: Efeito MSW

Concluimos assim a probabilidade para o caso não adiabático, substituindo a expressão (4.45) em (4.37) obtendo

$$P_{ee} = \frac{1}{2} \left[ 1 + (1 - 2e^{-\gamma R \frac{\pi}{4}}) \cos 2\tilde{\theta}_o \cos 2\theta \right]. \quad (4.47)$$

Lembramos que, apesar de ser constante com relação a  $x$ , a expressão acima é função da energia  $E$ . A figura 4.3 mostra o comportamento do espectro de neutrinos que chega à Terra, como função do logaritmo da energia.

Para ângulos de mistura pequenos, quase todo o espectro “sobrevive” e uma pequena fração é convertida. Enquanto a mistura aumenta, uma região cada vez maior de energia passa a sofrer conversão total. A partir de um certo valor de  $\theta$ , nem a região de sobrevivência, nem a de conversão, são totais, de forma que ambas convergem para o centro do gráfico, onde no limite em que  $\theta = 1$  seus valores se igualam em  $1/2$ .

O efeito MSW é a solução do problema do neutrino solar pois o modelo prevê um espectro sem distorções. Com isso, a ausência de distorção espectral que se observa nos dados da figura 2.4 é explicada e o verdadeiro mecanismo de conversão é esclarecido.

## 4.5 Voltando ao Exemplo Simples

Na seção 4.1, mostramos um exemplo de como a variação abrupta do meio material pode causar conversão sem o efeito de oscilação. O exemplo foi baseado nas seguintes hipóteses:  $\sin^2 2\theta \approx 1$  e  $\sin^2 2\tilde{\theta}_0 \ll 1$ .

A primeira hipótese será confirmada na seção 5.2, onde obtemos o valor  $\sin^2 2\theta = 0,95$ . A segunda hipótese será confirmada agora.

A partir de (3.25), podemos obter o valor de  $\sin^2 2\tilde{\theta}_0$ . Usando a expressão (3.16) para o parâmetro  $A$  e a função que fornece a densidade de matéria no núcleo do sol, dada por (4.38), temos:

$$\begin{aligned} A_0 &= 2\sqrt{2}G_F n_e(z=0) E \\ &= 2\sqrt{2} 1,66 \times 10^{-11} 4,54 \times 10^{-7} E \\ &= 2,13 \times 10^{-17} E \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde  $E$  é a energia do feixe, dada em  $MeV$ . Na figura 2.3 vemos que SuperKamiokande observa neutrinos vindo do Sol com energias da ordem de  $MeV$ . Assim, sabendo que quanto maior a energia mais o feixe sente os efeitos da matéria, vamos adotar este valor para  $E = 1$  (limite inferior prático). Desta forma

$$A_0 \cong 10^{-16} MeV^2 . \quad (4.49)$$

Para completar, vamos adiantar outro resultado da seção 5.2, dizendo que  $\Delta \cong \times 10^{-16} MeV^2$ . Substituindo o valor de  $A_0$  em (3.25) e usando  $\sin^2 2\theta = 0,95$ , temos

$$\sin^2 2\tilde{\theta}_0 = 0,35 . \quad (4.50)$$

O exemplo mencionado no início do capítulo assumia uma mistura efetiva nula no ponto de criação. Como resultado, 50% dos neutrinos eletrônicos eram convertidos. Vemos que este não é o caso, mas a mistura efetiva real ainda é pequena se comparada com a mistura no vácuo. Além disso, o valor não nulo de  $\sin^2 2\tilde{\theta}_0$  (nesta região de energia) explica a supressão média observada em SuperKamiokande. Isto faz com que nosso exemplo inicial seja suficiente para ilustrar a conversão dos neutrinos solares.

No capítulo seguinte, faremos uma análise dos resultados de SuperKamiokande à luz do efeito MSW e com um método numérico simplificado iremos não somente obter valores para  $\theta$  e  $\Delta$ , como também verificar o ajuste da expressão (4.47) aos dados experimentais.

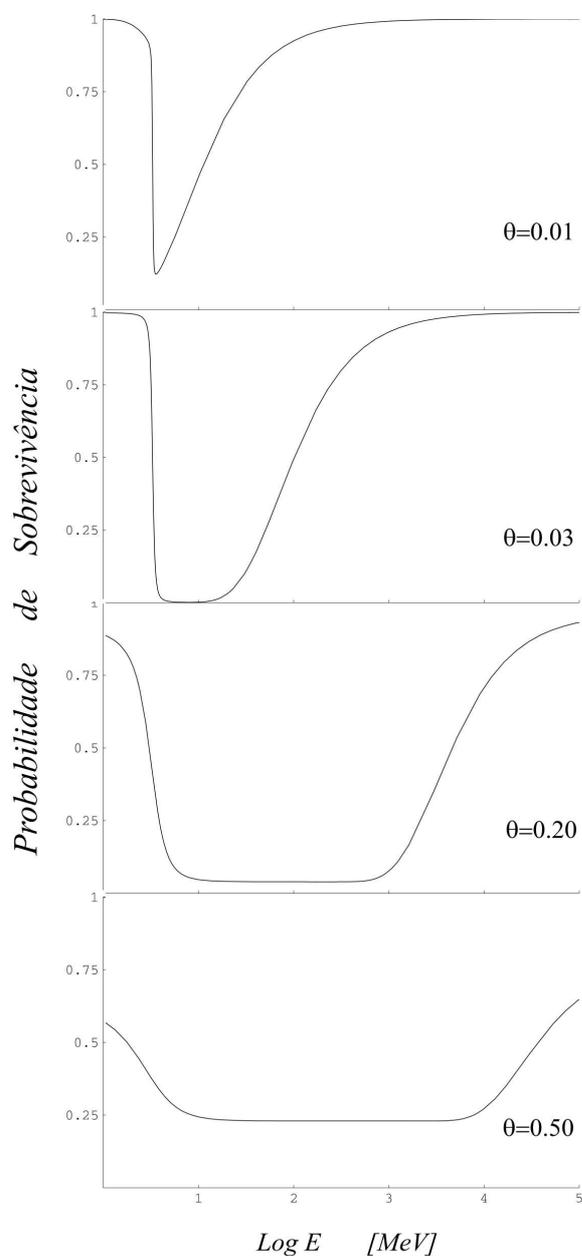


Figura 4.3: Resultado do Efeito MSW: A probabilidade de sobrevivência em função do logaritmo da energia. De cima para baixo, vemos o gráfico da função (4.47) para vários valores de  $\theta$ . Repare como para valores de  $\theta$  cada vez maiores o espectro toma a forma de um “platô”, ou seja, uma região de espectro constante. A escala horizontal é logarítmica, ou seja, 1 equivale a 10, 2 equivale a 100 e assim por diante.



# Comprovação Experimental

## 5.1 Os Dados e os Experimentos

Desde 1964, quando Homestake iniciou a tomar seus dados, vários experimentos vêm acumulando informações sobre o fluxo de neutrinos do elétron que chegam à Terra provenientes do Sol. A figura 1.2 mostra o resumo dos dados dos principais experimentos até o ano 2000.

Para confirmar o modelo que foi introduzido nos capítulos anteriores, vamos começar com o experimento de SuperKamiokande. No capítulo 2 mostramos que a oscilação no vácuo não pode explicar estes dados pois o modelo prevê um espectro oscilatório, enquanto o experimento detecta um espectro plano, sem distorções. A seguir, vamos mostrar como o efeito MSW, causado pela matéria solar, explica o espectro de SuperKamiokande. Em seguida, vamos confirmar o modelo também com os dados de Homestake, o primeiro experimento para detecção de neutrinos, Gallex (agora chamado de GNO) e Sage. Por fim, mostraremos qualitativamente como o experimento SNO confirmou o mecanismo de conversão por observação direta.

## 5.2 Vendo o Espectro: SuperKAMIOKANDE

O experimento de KAMIOKANDE [6] (Kamioka Nucleon Decay Experiment) foi originalmente desenvolvido para a busca do decaimento do próton. Ele mostrou que os neutrinos detectados pelo experimento de Homestake realmente vinham do Sol e que suas energias eram compatíveis com as previstas pelo Modelo Solar Padrão.

SuperKAMIOKANDE[6] (SK para abreviar), uma versão ampliada de KAMIOKANDE,

começou a tomar dados em 1996. Por ser um experimento em tempo real (ao contrário do método de contagem de Homestake), pode-se observar vários fenômenos no mesmo detector, a saber: decaimento do próton, neutrinos atmosféricos e de supernovas e neutrinos solares. Também é possível investigar efeitos como variação dia-noite e variação anual do fluxo de neutrinos.

O experimento tem a capacidade de medir, por métodos indiretos, a energia do neutrino detectado e a direção de incidência. O sistema de detecção se baseia no efeito Cherenkov (luz emitida pelo freamento de uma carga que viaja mais rápido que a luz, no meio). Com este método, tanto elétrons como múons produzidos no interior do sistema são detectados e os dados sobre neutrino são reconstruídos a partir dos outros produtos da interação.

Uma consideração importante sobre os dados de SK é que seu sistema de detecção mede tanto neutrinos do elétron como do múon e do táuon<sup>1</sup>. Com isto, o fluxo total medido é composto de todos os sabores. Como precisamos ter uma informação somente sobre o fluxo de neutrinos  $\nu_e$ , temos que recorrer à teoria para aprimorar os dados de SK.

Com base no Modelo Padrão de Partículas e Interações, mostra-se que, para as energias relevantes ao experimento, a probabilidade total de um neutrino do múon ou do táuon interagir com o detector é *um sétimo* da probabilidade de um neutrino do elétron interagir. Assim, a probabilidade medida por SK,  $P_{SK}$  é dada por

$$P_{SK} = P_{ee} + \frac{1}{7}P_{e\mu} . \quad (5.1)$$

Como  $P_{ee} = 1 - P_{e\mu}$ , podemos isolar  $P_{ee}$  na expressão acima, obtendo

$$P_{ee} = \frac{1}{6}(7P_{SK} - 1) . \quad (5.2)$$

A tabela abaixo mostra um resumo dos dados de SK, coletados durante 1496 dias de funcionamento. A segunda coluna mostra o fluxo normalizado total ( $\phi_{exp}/\phi_{teo}$ ) de onde resulta a probabilidade total detectada  $P_{SK}$ . A terceira coluna mostra a probabilidade de sobrevivência para o neutrino do elétron, obtida através da fórmula (5.2).

---

<sup>1</sup>Lembrando que  $|\nu_\alpha\rangle = \frac{|\nu_\mu\rangle + |\nu_\tau\rangle}{\sqrt{2}}$

$E(\text{MeV})$	$P_{SK}$	$P_{ee}$	$Erro$
5,25	0,467	0,378	0,057
6,00	0,458	0,368	0,021
7,25	0,473	0,385	0,014
8,75	0,460	0,370	0,015
10,50	0,463	0,374	0,016
14,75	0,567	0,495	0,047
18,00	0,555	0,481	0,154

A figura 2.3 mostra um gráfico com os dados acima (onde o eixo vertical se refere à coluna  $P_{ee}$ ). No capítulo 2 tentamos ajustar a estes dados a solução para a oscilação no vácuo, sem sucesso. Agora, de posse do resultado do efeito MSW, podemos tentar ajustar a solução final (4.47) aos dados da figura 2.3, obtendo assim  $\theta$  e  $\Delta$ , e também verificando se a curva se ajusta aos dados.

Utilizando o método da minimização<sup>2</sup> de  $\chi^2$ , obtivemos os seguintes resultados para o conjunto de dados de SK:

$$\Delta = 10^{-16} \text{ MeV}^2 \quad \text{ou} \quad \times 10^{-4} \text{ eV}^2 \quad (5.3)$$

e

$$\theta = 0,67 \text{ rad} \quad \text{ou} \quad \sin^2 \theta = 0,95 . \quad (5.4)$$

Por fim, um acidente no final de 2001 causou sérios danos ao detector de SK. Os dados acima resumem os resultados de 1496 dias de medição, entre maio de 1996 e julho de 2001, com um total de  $22400 \pm 800$  eventos de detecção correspondendo a uma média de 15 eventos por dia.

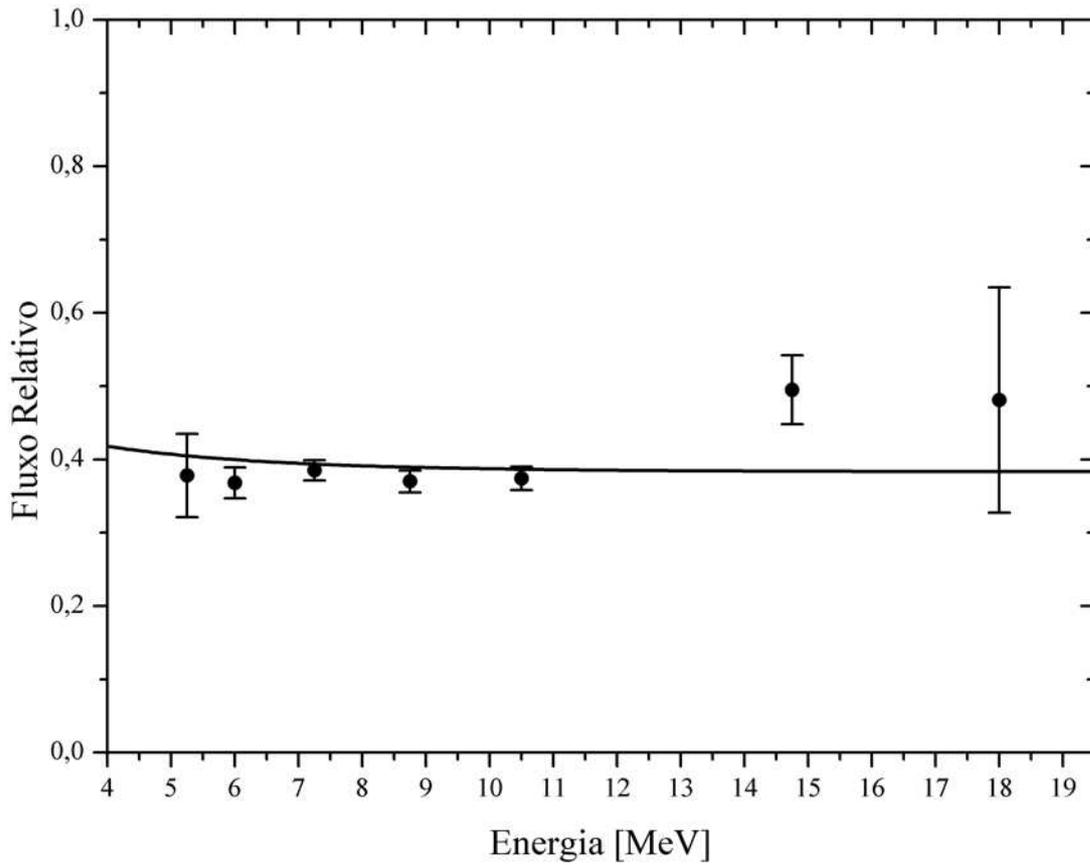
## 5.3 Homestake

Este foi o primeiro experimento para detecção de neutrinos solares, proposto em 1964 imediatamente após a publicação do primeiro Modelo Solar. Seu detector, constituído principalmente de Cloro, entrou em operação em 1965 na mina de ouro de Homestake (USA).

O alvo foi um tanque preenchido com 615 toneladas de *Percloroetileno* ( $C_2Cl_4$ ). A detecção era feita a partir da absorção de um  $\nu_e$  por um núcleo de *Cl*. Para energias acima de  $0,814 \text{ MeV}$  a reação

---

<sup>2</sup>Ver Complemento VI.



Espectro observado em SuperKamiokande e a curva que melhor se ajusta aos dados, resultado do efeito MSW.



ocorre. Os átomos de Argônio eram então extraídos e contados, pois  ${}^{37}\text{Ar}$  é instável e decai novamente em  ${}^{37}\text{Cl}$ , com uma meia-vida de 35 dias.

O detector tomou dados continuamente de 1967 até 1994, com exceção do período entre maio 1985 a outubro de 1986. O resultado final, baseado nos dados entre 1970 – 1994, foi

$$\phi_{exp} = 2.56 \pm 0,23 \text{ SNU} \quad (5.6)$$

onde *SNU* significa “*Solar Neutrino Unit*” que nada mais é do que uma unidade de fluxo, definida como *uma captura por  $10^{36}$  átomos, por segundo*.

A partir da coluna 1 da figura 1.2, obtemos o valor previsto pelo MSP:

$$\phi_{teo} = 7,6 \pm 1,3 \text{ SNU} , \quad (5.7)$$

o que resulta na seguinte razão  $R_{exp}$  entre os fluxos:

$$R_{exp} = \frac{\phi_{exp}}{\phi_{teo}} = 0,34 \pm 0,03 \quad (5.8)$$

De acordo com a coluna 1 da figura 1.2, o experimento de Homestake mede fundamentalmente neutrinos do Boro ( ${}^8B$ ). Com a exceção do ciclo CNO, o espectro dos neutrinos solares calculado, a partir do MSP, é mostrado na figura 5.1.

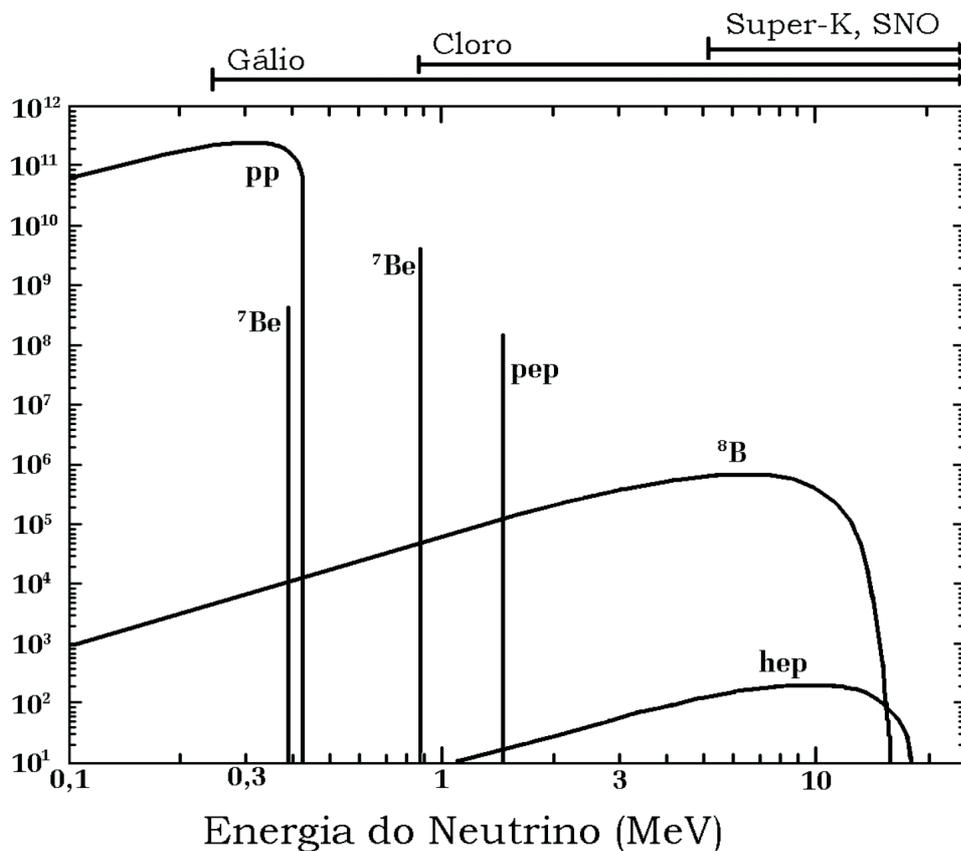


Figura 5.1: Distribuição do fluxo dos neutrinos solares em função da energia, como previsto pelo Modelo Solar Padrão. Os fluxos das fontes contínuas ( $pp$ ,  ${}^8B$  e  $hep$ ) são dados em unidades de neutrinos por  $cm^2$  por segundo por  $MeV$  ( $cm^{-2}s^{-1}MeV^{-1}$ ). Os fluxos das fontes monocromáticas (em linha) são dados em neutrinos por  $cm^2$  por segundo. Adaptado da Referência [3], com última atualização em 1998.

O que faremos agora é obter um método aproximado para comparar o valor de  $R_{exp}$  com o que chamaremos de  $R_{MSW}$ , ou seja, a previsão do modelo MSW sobre a razão observada em Homestake.

Assim como no caso de (5.8), onde calculamos a razão entre o fluxo experimental e o teórico, o valor de  $R_{MSW}$  será definido como:

$$R_{MSW} = \frac{\phi_{MSW}}{\phi_{teo}} \quad (5.9)$$

onde  $\phi_{MSW}$  é o fluxo previsto pelo modelo MSW. Utilizando a figura (5.1), podemos obter o fluxo teórico de qualquer uma das fontes em questão (neutrinos do Boro, neste caso). Com exceção das linhas de espectro monocromático ( ${}^7\text{Be}$  e  $pep$ ) as funções mostradas na figura (5.1) são na verdade “densidades” de fluxo, com relação à energia,  $\varphi_{teo}(E)$ . Desta forma, para obtermos o fluxo de uma certa região do espectro, realizamos uma integral simples

$$\phi_{teo} = \int_{E_F}^{E_I} \varphi_{teo}(E) dE \quad (5.10)$$

onde  $E_F$  e  $E_I$  determinam o intervalo de energia.

Para obtermos a previsão do fluxo  $\phi_{MSW}$ , necessitamos de uma *função peso*  $P(E)$ . Tal função indica a porcentagem do fluxo que sobrevive, devido ao efeito MSW. Assim, o fluxo previsto pode ser obtido por

$$\phi_{MSW} = \int_{E_F}^{E_I} \varphi_{teo}(E) P(E) dE, \quad (5.11)$$

de forma que, se  $P(E) \equiv 1$ , então  $\phi_{MSW} = \phi_{teo}$ . Esta função é exatamente a probabilidade de sobrevivência (4.47), a saber

$$P_{ee}(E) = \frac{1}{2} \left[ 1 + (1 - 2e^{-\gamma R \frac{\pi}{4}}) \cos 2\tilde{\theta}_o \cos 2\theta \right].$$

Entretanto, não temos acesso à função  $\varphi_{teo}(E)$ . Portanto usaremos um método numérico que, podemos dizer, será no mínimo ilustrativo. Vamos aproximar as integrais (5.10) e (5.11) por somatórias, de forma que

$$\phi_{teo} \cong \sum_{k=1}^N \varphi_{teo}(E_k) \Delta E_k \quad (5.12)$$

e

$$\phi_{MSW} \cong \sum_{k=1}^N \varphi_{teo}(E_k) P(E_k) \Delta E_k. \quad (5.13)$$

Na verdade estamos apenas utilizando o método aproximado de integração por retângulos. Os valores de  $E_k$ ,  $\Delta E_k$  e  $N$  devem ser obtidos a partir de uma análise do intervalo de integração  $E_I \leq E \leq E_F$ .

Vamos escolher um total de  $N = 4$  pontos. Com isso, o intervalo  $0,8 \leq E \leq 14,06 \text{ MeV}$  pode ser dividido em intervalos de aproximadamente  $3 \text{ MeV}$ . Como o intervalo não é exato, vamos adotar valores para  $\Delta E_k$  diferentes (poderiam ser retângulos idênticos). Os valores de  $E_k$  são arbitrários, mas para nossos fins escolhemos:

$$E_k = \{2, 5, 8, 11\} \text{ MeV} . \quad (5.14)$$

Cada ponto  $E_k$  pertence à base de um retângulo de largura  $\Delta E_k$ . Na tabela a seguir mostramos os valores de  $E_k$  escolhidos, com seus respectivos intervalos e suas larguras  $\Delta E_k$ .

$E_k$ (MeV)	intervalo	$\Delta E_k$ (MeV)
$E_1 = 2$	$0,8 \leq E_1 \leq 3,5$	$\Delta E_1 = 2,7$
$E_2 = 5$	$3,5 \leq E_2 \leq 6,5$	$\Delta E_2 = 3$
$E_3 = 8$	$6,5 \leq E_3 \leq 9,5$	$\Delta E_3 = 3$
$E_4 = 11$	$9,5 \leq E_4 \leq 14,06$	$\Delta E_4 = 4,6$

Para obter os valores das densidades de fluxo  $\varphi(E_k)$  utilizamos o próprio gráfico, adotando o valor mais próximo que puder ser medido com uma régua<sup>3</sup>.

A figura 5.2 mostra o espectro (correspondente ao neutrino do Boro apenas) e os valores de  $E_k$ , relacionados aos respectivos valores de  $\varphi(E_k)$  na escala vertical.

Vemos na figura 5.2 que aos pontos  $E_2$  e  $E_3$  corresponde aproximadamente o mesmo valor de  $\varphi(E_k)$ . A tabela a seguir mostra os valores obtidos a partir da figura.

$E_k$ (MeV)	$\varphi(E_k)$ ( $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{MeV}^{-1}$ )
$E_1$	$2 \times 10^5$
$E_2$	$8 \times 10^5$
$E_3$	$8 \times 10^5$
$E_4$	$1 \times 10^5$

Substituindo os valores de  $E_k$ ,  $\varphi E_k$  e  $\Delta E_k$  na expressão (5.12) obtemos

$$\begin{aligned} \phi_{teo} &= 5,5 \times 10^6 \\ &\cong 6 \times 10^6 \frac{1}{\text{cm}^2\text{s}} . \end{aligned} \quad (5.15)$$

---

<sup>3</sup>Lembre-se de que este método é ilustrativo e a figura (5.1) não oferece precisão suficiente para valores com mais de um algarismo significativo (mesmo com um algarismo, podemos estar cometendo exageros).

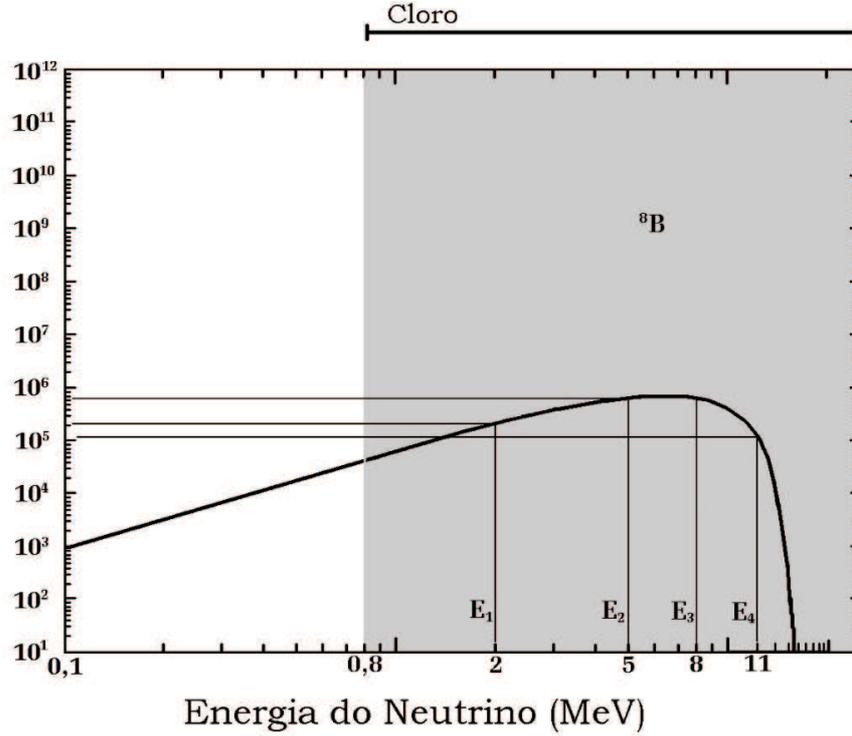


Figura 5.2: Espectro dos neutrinos solares relativos ao Boro. A região escura mostra a sensibilidade de Homestake. Os quatro pontos  $E_k$  foram marcados e relacionados aos respectivos valores de  $\varphi(E_k)$ . Repare que uma sub-escala foi inserida logo após  $E = 10 \text{ MeV}$  para que o ponto  $E_4 = 11 \text{ MeV}$  pudesse ser localizado.

Para dar seqüência, precisamos atribuir valores à função  $P(E_k)$ . Assim, vamos explicitar as funções  $\gamma_R$  e  $\cos 2\tilde{\theta}_0$ . Da expressão (4.34) temos

$$\gamma_R = \frac{\Delta}{E} \cdot \frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} \cdot \frac{1}{\left| \frac{d}{dx} \ln n_e \right|_R},$$

onde  $\left| \frac{d}{dx} \ln n_e \right|_R$  é obtido a partir de (4.42),

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dx} \ln n_e \right|_R &= \left| \frac{d}{dx} \left[ \ln(9,2 \times 10^{-7}) - 10 \frac{x}{R_0} \right] \right|_R \\ &= \left| -\frac{10}{R_0} \right|_R \\ &= \frac{10}{R_0} \end{aligned} \tag{5.16}$$

onde, utilizando o valor de  $R_0$ ,

$$R_0 = 3,55 \times 10^{21} \text{ MeV}^{-1} \tag{5.17}$$

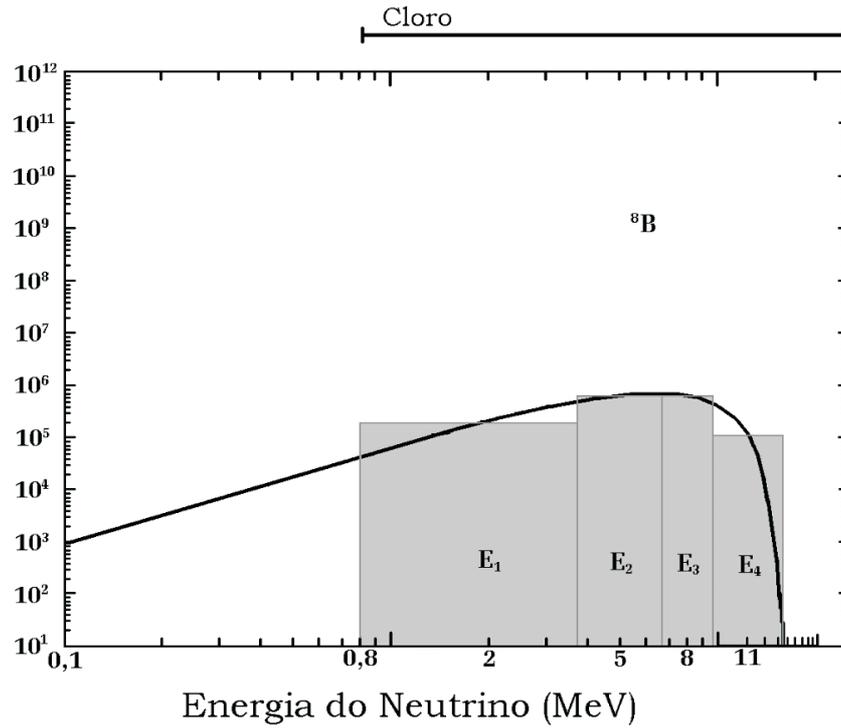


Figura 5.3: Novamente o espectro dos neutrinos solares relativos ao Boro. Esta figura serve apenas de ilustração para o método da integração por retângulos.

obtemos

$$\left| \frac{d}{dx} \ln n_e \right|_R = 2,82 \times 10^{-21} . \quad (5.18)$$

Vamos utilizar os valores de  $\theta$  e  $\Delta$  obtidos dos dados de SK, a saber

$$\Delta = 10^{-16} \text{ MeV}^2 \text{ e} \quad (5.19)$$

$$\theta = 0,67 \text{ rad} . \quad (5.20)$$

Estes resultados levam à

$$\sin 2\theta = 0,97 \text{ e} \quad (5.21)$$

$$\cos 2\theta = 0,23 . \quad (5.22)$$

Substituindo os valores (5.18), (5.20), (5.21) e (5.22) na expressão para  $\gamma_R$ , temos

$$\gamma_R = \frac{1,45 \times 10^5}{E} . \quad (5.23)$$

Como estamos lidando com energias de no máximo  $14 \text{ MeV}$ , o menor valor de  $\gamma_R$  para este experimento será

$$\gamma_{R,min} = 1,04 \times 10^4 . \quad (5.24)$$

Substituindo  $\gamma_{R,min}$  na expressão (4.45) para a probabilidade de transição  $X$ , temos

$$\begin{aligned} X_{max} &= e^{-\gamma_{R,min} \frac{\pi}{4}} \\ &= e^{-8 \times 10^3} \\ &\approx 0 . \end{aligned} \quad (5.25)$$

Ou seja, os neutrinos do espectro do Boro não sofrem transição entre estados de massa, no interior do Sol. Isto simplifica a expressão da probabilidade de sobrevivência, de forma que

$$P_{ee}(E) = \frac{1}{2} [1 + \cos 2\tilde{\theta}_o \cos 2\theta] . \quad (5.26)$$

Desta forma, eliminamos uma das dependências em  $E_k$ , restando apenas a função  $\cos 2\tilde{\theta}_o$  definida a partir da expressão (3.25), de onde obtemos

$$\begin{aligned} \cos 2\tilde{\theta}_o &= \sqrt{1 - \sin^2 2\tilde{\theta}_o} \\ &= \frac{\Delta \cos 2\theta - A_0}{\sqrt{(\Delta \cos 2\theta - A_0)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta}} , \end{aligned} \quad (5.27)$$

onde  $A_0$  é dado pela expressão (4.48), a saber

$$A_0 = 2,13 \times 10^{-17} E . \quad (5.28)$$

Assim, utilizando os valores (5.20), (5.21), (5.22) e (4.48) na expressão (5.27), obtemos

$$\begin{aligned} C(E_k) &\equiv \cos 2\tilde{\theta}_o \\ &= \frac{2,29 \times 10^{-17} - 2,13 \times 10^{-17} E_k}{\sqrt{(2,29 \times 10^{-17} - 2,13 \times 10^{-17} E_k)^2 + 94,8 (10^{-17})^2}} \\ &= \frac{2,29 - 2,13 E_k}{\sqrt{(2,29 - 2,13 E_k)^2 + 94,8}} . \end{aligned} \quad (5.29)$$

Com a expressão (5.29) em mãos, podemos obter uma tabela relacionando os valores de  $E_k$  e  $P(E_k) \equiv P_{ee}(E_k)$ .

$E_k$ (MeV)	$C(E_k)$	$P(E_k)$
$E_1 = 2$	-0,198	0,477
$E_2 = 5$	-0,651	0,425
$E_3 = 8$	-0,835	0,402
$E_4 = 11$	-0,908	0,396

Desta forma, podemos finalmente obter o valor de  $\phi_{MSW}$ , utilizando a expressão (5.13), resultando em

$$\begin{aligned}\phi_{MSW} &= 2,43 \times 10^6 \\ &\cong 2 \times 10^6 \frac{1}{\text{cm}^2 \text{s}}.\end{aligned}\quad (5.30)$$

Finalmente, obtemos a previsão para a razão observada  $R_{MSW}$ , dada por

$$\begin{aligned}R_{MSW} &= \frac{\phi_{MSW}}{\phi_{teo}} \\ &= \frac{2 \times 10^6}{6 \times 10^6} \\ &\approx 0,3\end{aligned}\quad (5.31)$$

Comparando os valores de  $R_{exp}$  e  $R_{MSW}$ , vemos que a previsão do modelo está coerente com o observado:

$$R_{exp} = 0,34 \pm 0,03 \quad (5.32)$$

e

$$R_{MSW} = 0,3 \quad (5.33)$$

## 5.4 Discussão Sobre os Resultados

Devemos observar que o resultado anterior sobre Homestake não é fruto de um simples “ajuste” do modelo aos dados de Homestake. O ajuste já havia sido feito aos dados de SK. O que fizemos nesta seção foi uma *previsão*. Mesmo que o resultado de Homestake já fosse conhecido, ele não foi utilizado em momento algum. Mais importante do que um simples ajuste, o resultado acima mostra que, uma vez determinados os parâmetros do modelo (o que foi feito neste texto, com base em SK), ele passa a ter um poder de previsão. Isto é extremamente importante na aceitação de um modelo.

Historicamente, os dados de Homestake foram primeiramente ajustados ao modelo de oscilação no vácuo. Neste caso, obtém-se que o comprimento de oscilação deveria ser da ordem da distância Sol-Terra, o que leva a um valor para  $\Delta$  da ordem de  $10^{10}eV^2$ , considerando  $\sin^2 2\theta \approx 1$ . Porém, o modelo de oscilação no vácuo nunca poderia se ajustar simultaneamente aos dois experimentos discutidos aqui, devido ao problema do espectro.

Uma vez confirmado o poder de previsão do modelo, a obtenção dos parâmetros dever ser feita de maneira global, ou simultânea. Isto significa realizar um procedimento de minimização do  $\chi^2$  sobre todos os dados existentes (ou relevantes) sobre os neutrinos solares. Mais do que isto, a análise numérica realizada atualmente inclui os dados do experimento terrestre *KamLAND*, onde são estudados anti-neutrinos originados de reatores nucleares, localizados principalmente no Japão (onde também se localiza o experimento). Estes dados referem-se à oscilação no vácuo e não ao efeito MSW. Porém, vimos nas seções anteriores que, mesmo para o modelo MSW, os parâmetros fundamentais são os mesmos do vácuo (além da distribuição da matéria solar). Assim, a ocorrência de uma concordância entre os dois conjuntos de dados, neutrinos solares (MSW) e neutrinos de reatores (vácuo), leva à confirmação final do modelo apresentado neste texto.

A análise global dos dados sobre neutrinos solares e *KamLAND* resulta nos valores atualmente aceitos para os parâmetros do modelo[11],

$$\Delta \approx 7 \times 10^{-5} eV^2 \quad (\text{ou } 7 \times 10^{-17} MeV^2) \quad (5.34)$$

e

$$\tan^2 \theta \approx 0,4 \quad (\text{ou } \theta = 0,6 \text{ rad}) \quad (5.35)$$

## COMPLEMENTO VI

## AJUSTE DO MODELO - CÁLCULO NUMÉRICO

O método da minimização de  $\chi^2$  (lê-se “qui-quadrado”) é muito simples e eficiente. Ele consiste na minimização de uma função  $\chi^2$ , que nada mais é do que uma “distância” entre um conjunto de dados experimentais e uma função teórica. Ao encontrar quais os parâmetros que minimizam esta distância, estamos automaticamente encontrando a função que melhor se ajusta aos dados.

Seja  $R = P(E; x, y)$  a função do modelo em questão. Os parâmetros  $x$  e  $y$  correspondem às variáveis no experimento e devem ser determinados para que a função se ajuste aos dados. Sejam também os conjuntos de dados **Razao**, **Energia** e **Erro** (definidos abaixo) de forma que o par ordenado  $(E, R)$  representa um ponto no plano  $\text{Energia} \times R_{exp}$  e **Erro** é o erro de cada medida  $R$ .

Assim, definimos a quantidade  $\chi^2$  como sendo

$$\chi^2(x, y) = \sum_{n=1}^N \frac{[R - P(E; x, y)]^2}{Z^2}. \quad (5.36)$$

Qualquer algoritmo que encontre os valores de  $a$  e  $b$  e que leve  $\chi^2$  a seu valor mínimo será suficiente para ajustar o modelo aos dados.

A seguir, apresentamos um algoritmo que utiliza a linguagem de comandos do programa *Mathematica*. O que fazemos é introduzir os dados na forma de tabelas, as quais chamamos respectivamente de **Energia**, **Razão** (razão entre o fluxo medido e o teórico) e **Erro**. Em seguida, definimos as funções do modelo (baseado na expressão (4.47)) e finalmente escrevemos o código do programa.

Definição dos dados:

**Energia** := {5.25 , 6.00 , 7.25, 8.75 , 10.50, 14.75, 18.00}

**Razao** := {0.378 , 0.368, 0.385 , 0.370, 0.374 , 0.495 , 0.481}

**Erro** := {0.057, 0.021, 0.014, 0.015, 0.016, 0.047, 0.154}

Definição das Funções:

$$F[x_-, y_-, En_-] := \frac{\left(\frac{y}{En}\right) \cos[2x] - 2.13 \times 10^{-17}}{\sqrt{\left(\left(\frac{y}{En}\right) \cos[2x] - 2.13 \times 10^{-17}\right)^2 + \left(\frac{y}{En}\right)^2 \sin[2x]^2}}$$

$$P[x_-, y_-, En_-] := 1/2(F[x, y, En] \cos[2x])$$

$$Ki2[x_-, y_-] := \text{Sum}\left[\left(\frac{\text{Razao}[[n]] - P[x, 10^{\wedge}y, \text{Energia}[[n]] ]}{\text{Erro}[[n]]}\right)^2, \{n, 1, 7\}\right]$$

Nas definições acima  $x$  e  $y$  são, respectivamente,  $\theta$  (ângulo de mistura no vácuo) e  $\Delta$  (diferença do quadrado das massas).

Parâmetros de entrada:

Xmin = 0;

Xmax = 1;

Nx = 100;

Ymin = 15;

Ymax = 20;

Ny = 100;

Código do Programa

incX = (Xmax - Xmin)/Nx;

incY = (Ymax - Ymin)/Ny;

Ki2Min = Ki2[0, 0];

XKi2Min = Xmin;

YKi2Min = Ymin;

For[i = Xmin, i <= Xmax, i += incX,

For[j = Ymin, j <= Ymax, j += incY,

KiTemp1 = Ki2[i, -j];

KiTemp2 = Ki2Min;

Ki2Min = If[KiTemp1 < KiTemp2, KiTemp1, KiTemp2];

XKi2Min = If[KiTemp1 < KiTemp2, i, XKi2Min];

```

YKi2Min = If[KiTemp1 < KiTemp2, -j, YKi2Min];
]];
Print["Entradas:"];
Print["Parametro Theta] variado de ", Xmin, "a ", Xmax, "em ", Nx, "passos."];
Print["Parametro Delta variado de ", N[10^Ymin], "a ", N[10^Ymax], "em ", Ny, "passos."];
Print["Saidas:"];
Print["Valor de Qui Quadrado Minimo= ", Ki2Min];
Print["Parametros Minimizantes:"];
Print["Theta = ", N[XKi2Min] ];
Print["Delta = ", N[10^YKi2Min] ];

```

O resultado do programa acima foi

$$\Delta = 10^{-16} \text{ MeV}^2 \quad (10^{-4} \text{ eV}^2) \quad (5.37)$$

e

$$\theta = 0,67 \text{ rad} \quad (\sin^2 \theta = 0,95) . \quad (5.38)$$

Estes resultados são baseados nos dados de fluxo médio, por faixa de energia, medidos por Super-Kamiokande. Estes dados, por se tratarem de médias, levam a valores ligeiramente diferentes de  $\theta$  e  $\Delta$  do que os atualmente aceitos. Além disso, a discrepância também é fruto de um conjunto de dados que envolve não somente SK, como também KamLand. Desta forma, os valores  $\theta$  e  $\Delta$  mais recentes ajustam o modelo a mais de um grupo de dados, minimizando  $\chi^2$  para todo o conjunto.



## Conclusões Finais e Perspectivas

Neste trabalho, apresentamos um texto didático para introduzir estudantes de física à área da *Fenomenologia de Neutrinos*, apresentando o modelo de *mistura de sabores e oscilação induzida por massa*, ou simplesmente, oscilação de sabor. Concluímos que o fenômeno da oscilação de sabor bem como o efeito MSW (aplicação e modificação dos efeitos pela presença de matéria) formam uma solução compatível com os dados referentes aos neutrinos solares. Através de um tratamento de dados simples, porém ilustrativo, mostrou-se a compatibilidade entre os dados e o modelo.

Acerca do método apicado, apresentou-se o modelo conhecido como *oscilação de sabor* visando o estudante com conhecimentos básicos de mecânica quântica. Durante o decorrer do texto, mostramos não só os métodos normalmente usados na literatura, mas também outros métodos, com cunho didático, buscando atingir uma faixa maior de estudantes, em diferentes níveis de conhecimento.

Tem-se como perspectiva para este trabalho a publicação de um artigo[15], na área de ensino de física, com o objetivo de tornar útil o seu conteúdo. Espera-se utilizar tanto o artigo, como o texto integral no ensino de alunos que pretendam ingressar na área da fenomenologia de neutrinos. Uma análise sobre a compreensão do texto pelos estudantes poderá trazer melhoras futuras em sua apresentação.

Finalmente, com relação aos valores obtidos atualmente para os parâmetros do modelo, tem-se[11]

$$\Delta = 7 \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \quad (6.1)$$

$$\theta = 0,6 \text{ rad} \quad . \quad (6.2)$$

o que mostra que, mesmo sob uma óptica didática, com métodos simplificados e, quase sempre, meramente ilustrativos (sem “peso” como teste científico) é possível obter resultados com mesma ordem de grandeza, senão até com um pouco mais de precisão. Isto é claro, se o estudante realizar tais análises com seriedade e responsabilidade. Os métodos de análise de resultados utilizados durante todo o texto são aproximações dos métodos mais “robustos” utilizados nos confrontos entre modelos e experimentos. Mas, apesar de aproximados, esperamos que o estudante sinta como este confronto pode ser feito (mesmo que seja com uma simples calculadora científica, como é o caso de nossos exemplos) e que esta experiência o prepare para os métodos formais de análise de modelos utilizando programação numérica e ajuste de parâmetros, restritos a todos tipo de condição experimental e teórica, como usualmente é feito.

Finalmente, é desejo dos autores que os alunos compreendam não somente a área em questão, a fenomenologia da oscilação de neutrinos, mas também a responsabilidade que se deve ter ao fazer ciência. Para que outros possam confiar e utilizar seus resultados, seu trabalho deve ser feito com ética e responsabilidade. E também que faz parte desta responsabilidade ensinar as próximas gerações com atenção e respeito aos estudantes.

# Referências Bibliográficas

- [1] Solomey, N. - *The Elusive Neutrino: A Subatomic Detective Story*, Scientific American Library, New York, (1997).
- [2] Esposito, S. , Tancredi, N. - *Pontecorvo neutrino-antineutrino oscillations: theory and experimental limits*, hep-ph/9705351.
- [3] Bahcall, J. N. - *Neutrino Astrophysics*, Cambridge Univ. Press (1989).
- [4] Palash, B. P. - *Particle Physics Confronts the Solar Neutrino Problem*, International Journal of Modern Physics A, vol. 7, No 22 (1992), pgs 5387-5459.
- [5] Mandl, F., Shaw. G. - *Quantum Field Theory*, Wiley and Sons, New York (1984).
- [6] Miramonti, L. , Reseghetti, F. - *Solar Neutrino Physics: historical evolution, present status and perspectives*, hep-ex/0302035, (2003).
- [7] Cohen-Tannoudji C. - *Quantum Mechanics*, Vol. I, pgs 403-415.
- [8] Parke, S.J., Phys. Rev. Lett.**57**, 1275 (1986).
- [9] Haxton, W.C., Phys. Rev. Lett.**57**, 1271 (1986).
- [10] Bilenky, S. M., Petcov, S. T. - *Reviews of Modern Physics*, Vol. 59, No. 3, Part I, (1987)
- [11] Smirnov, A. Y. - *The MSW effect and Solar Neutrinos*, hep-ph/0305106 (2003).
- [12] Wolfenstein, L. - Phys. Rev. **D17**, 2369 (1978).
- [13] Mikheyev, S. P. and Smirnov, A. Y. - *Nuovo Cimento*, **C9**, 17 (1986).
- [14] Poon, A. W. P., hep-ex/0211013

- [15] Valdiviesso, G. do A., Guzzo, M. M., *RBEF-Revista Brasileira de Ensino de Física*, Vol. 27, n. 4, pgs 495-506. ([www.sbfisica.org.br/rbef/Vol27/Num4/](http://www.sbfisica.org.br/rbef/Vol27/Num4/))
- [16] Chikahiro, C. N., De Leo, S., *Mecanica quântica das oscilações de neutrinos*, Dissertação de Mestrado ([webbif.ifi.unicamp.br/teses/apresentacao.php?filename=IF1385](http://webbif.ifi.unicamp.br/teses/apresentacao.php?filename=IF1385)), Unicamp, (2003)