

# Tese de Mestrado

Perturbações Primordiais de Densidade  
em  
Gravitação com Fase Conjugada

Carlos Eduardo Magalhães Batista ✓

Orientador: Marcelo Schiffer

2 de Abril de 1996

Este exemplar corresponde a  
redação final de mestrado.  
da tese defendida pelo aluno  
Carlos Eduardo Magalhães Batista  
e aprovada pela comissão julgadora

02-04-96

Marcelo Schiffer

UNIDADE IF  
N.º CHAMADA: T/UNICAMP  
V. 832p  
TCMBO BR/ 27786  
PROC. 667196  
C  D   
PREÇO 79\$ 14,00  
DATA 22/05/96  
N.º CPD

CM-00088582-5 ✓

IF/1024

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

B32p

Batista, Carlos Eduardo Magalhães  
Perturbações primordiais de densidade em  
gravitação com fase conjugada (PCG). / Carlos  
Eduardo Magalhães Batista. -- Campinas, SP :  
[s.n.], 1995.

Orientador: Marcelo Schiffer.  
Dissertação (mestrado) - Universidade  
Estadual de Campinas, Instituto de Física  
"Gleb Wataghin".

1. Cosmologia. 2. Universo inflacionário.  
I. Schiffer, Marcelo. II. Universidade  
Estadual de Campinas. Instituto de Física  
"Gleb Wataghin". III. Título.



INSTITUTO DE FÍSICA  
GLEB WATAGHIN

**PARECER DE APROVAÇÃO**  
**DEFESA DE TESE DE MESTRADO DE**  
**CARLOS EDUARDO MAGALHÃES BATISTA**

DATA: 16 / 02 / 96

BANCA EXAMINADORA:

- Prof. Dr. Marcelo Schiffer (Orientador)

- Prof. Dr. Reuven Opher

- Prof. Dr. Marcelo Moraes Guzzo

## **Agradecimentos:**

Agradeço a Capes pelo apoio e financiamento, indispensáveis ao desenvolvimento e conclusão do presente trabalho de Mestrado. Gostaria de agradecer ao Prof. Marcelo Schiffer pela sua dedicação e pelo forte incentivo desde o início até o final do trabalho, além da disponibilidade em todos os momentos. Agradeço a meu pai pelo total apoio concedido em todos os aspectos durante toda a vida.

# Notas da Banca Examinadora

Reuven Ofer

IAG - USP

Marcelo Guzzo

IFGW - UNICAMP

Marcelo Schiffer

IMECC - UNICAMP (orientador)

*Em memória a minha mãe, Silvia Magalhães Batista,  
com muito amor.*

## Resumo

Apesar de o Universo hoje ser bastante homogêneo em grandes escalas, em pequenas escalas ele é bastante inhomogêneo. No contexto do Modelo Padrão, as inhomogeneidades só podem evoluir logo após a recombinação e a densidade cresce em forma de potência do tempo.

Recentemente tem sido proposta [2] uma variação da teoria da Relatividade Geral, na qual as interações gravitacionais são mediadas através de uma métrica e um campo escalar complexo. Essa nova teoria, conhecida como *Phase Coupled Gravity* (PCG) tem o propósito de explicar as curvas de rotação planas de galáxias sem a necessidade de postular considerável quantidade de matéria escura permeando o Universo.

Nessa tese mostramos que numa das versões da teoria PCG, envolvendo um potencial quadrático, durante uma fase de expansão inflacionária ocorre um crescimento de forma aproximadamente exponencial da densidade contraste. Consequências são discutidas.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1	O Universo Homogêneo e Isotrópico . . . . .	2
1.2	Matéria Escura $\times$ Teorias alternativas de Gravitação . . . . .	9
1.2.1	Teorias Alternativas de Gravitação . . . . .	12
1.2.2	Equações Cosmológicas . . . . .	16
1.3	Perturbações primordiais da densidade de matéria . . . . .	18
1.3.1	Modelo de Jeans . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Perturbações de densidade na teoria <i>PCG</i></b>	<b>26</b>
2.0.2	Equações Perturbadas . . . . .	29
2.0.3	Equações Perturbadas para $\phi_0$ e $q_0$ . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Conclusão</b>	<b>36</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 O Universo Homogêneo e Isotrópico

Uma observação a olho nu do céu nos transmite a impressão de que a distribuição de matéria no Universo é bastante irregular. Apesar disso, ao medirmos a distribuição de galáxias em largas escalas ( distâncias da ordem de  $100Mpc$  ) descobrimos que, surpreendentemente, o Universo é bastante uniforme na sua distribuição de matéria. As medidas da radiação de fundo também confirmam essa uniformidade. O significado desse fato é que não existem no Universo direções privilegiadas. Do ponto de vista formal, esse fato está a nos dizer que, nessas escalas, o Universo é surpreendentemente homogêneo e isotrópico, que é conhecido como *princípio cosmológico*. Além disso, observamos que as galáxias se afastam umas das outras de acordo com a lei de Hubble [2], com uma velocidade de recessão que cresce linearmente com a sua distância de separação  $l$ :

$$V = Hl, \quad (1.1)$$

onde  $H$  é conhecida como a constante de Hubble.

A lei de expansão homogênea se refere as galáxias que estão suficientemente afastadas uma das outras de tal maneira que os efeitos da interação gravitacional entre elas seja desprezível ( Um contra-exemplo clássico é a nossa vizinha, a galáxia de Andrômeda, que ao invés de se afastar, está se aproximando). Desprezando movimentos causados por irregularidades locais, podemos representar a expansão por meio de um triângulo no qual tres

galáxias se encontram dispostas nos vértices. Em decorrência do princípio cosmológico, durante a evolução cosmológica [2], o triângulo no qual residem essas galáxias se expande mantendo sua forma, ou seja, o novo triângulo deverá ser similar ao antigo, com os mesmos ângulos e com os comprimentos de separação aumentados pelo mesmo fator. A distância física  $l(t)$  entre um par de galáxias varia com o tempo da forma:

$$l(t) = l_0 a(t) \quad (1.2)$$

onde  $l_0$  é uma constante para o par e  $a(t)$  é o fator de expansão universal. A derivada temporal dessa expressão nos dá a velocidade recessional discutida anteriormente com  $H(t) = \dot{a}/a$ . anteriormente. A recessão causa um desvio para o vermelho no espectro da radiação emitida por uma galáxia. Para pequenas velocidades de recessão, podemos aproximar esse desvio através da equação do efeito Doppler de primeira ordem:

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} \approx v/c = \frac{Hl}{c}, \quad (1.3)$$

onde  $\lambda_e$  e  $\lambda_o$  são os comprimentos de onda da luz emitida e observada, respectivamente.

Em geral, o deslocamento de uma galáxia é composta pela superposição do fluxo de Hubble com a velocidade peculiar

$$u = \dot{a}x + v_1(x, t) \quad (1.4)$$

onde  $x = r/a$  e  $r$  são as distâncias coordenada e física, respectivamente. Assim, uma partícula que esteja fixa na posição coordenada  $x$ , estará, na realidade, se movendo com a expansão geral do Universo e velocidade peculiar zero.

A lei de Hubble, extrapolada a distâncias maiores que a de Hubble  $L_H = c/H_o$ , implicaria que objetos a essas distâncias deslocariam-se com velocidades maiores que a da luz. Isso nos remete a questão do horizonte de partícula, que corresponde a todos os pontos do Universo que se encontram no passado do nosso cone-passado de luz. Somente os pontos no interior dessa região estão em contato causal conosco e podem ser observados. A distância própria do nosso horizonte de partículas é:

$$L(t) = a(t) \int_{t_0}^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (1.5)$$

onde  $t_0$  corresponde ao instante da origem do Universo (Ver discussão abaixo). A todo momento, mais e mais regiões desconhecidas do Universo entram no interior do cone e passam a ser observáveis [2]. A parte dessa restrição causal na observabilidade do Universo, outra limitação acontece no período anterior a recombinação. Nessa época, a radiação e matéria estavam fortemente acopladas e, devido ao espalhamento da radiação, o meio se torna muito opaco e eventos anteriores a recombinação não podem ser observados.

De uma maneira mais precisa, o fator de escala advém do elemento de linha de um Universo homogêneo e isotrópico que pode ser posto na forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right], \quad (1.6)$$

que é conhecida como métrica de Robertson-Walker. A constante  $k$  é parâmetro de curvatura:  $k = -1, 0, 1$  correspondem a universos fechado, plano e hiperbólico, respectivamente. Observadores com coordenadas espaciais constantes seguem linhas geodésicas. Desta maneira, atribuindo-se coordenadas fixas para as galáxias, segue-se que estas se movem sobre geodésicas. Além disso, por inspeção do elemento acima, concluímos que a distância entre elas é proporcional ao fator de escala. Se  $a(t)$  for uma função crescente, então as galáxias se afastam no tempo, em consonância com a Lei de Hubble. Vale a pena mencionar que, uma vez que as galáxias se movem sobre linhas geodésicas, o tempo medido em cada uma delas é o tempo próprio, que corresponde ao tempo cosmológico. A dinâmica do Universo está contida na dependência temporal do fator de escala  $a(t)$  que é especificada através das equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

onde  $G$  é a constante de Newton;  $g_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço-tempo;  $R_{\mu\nu}$  o tensor de curvatura de Ricci definido a partir da métrica;  $T_{\mu\nu}$  é o tensor momento-energia para todas as formas de matérias presentes no Universo e  $\Lambda$  é a constante cosmológica. As equações de Einstein seguem diretamente do princípio de mínima ação, mais precisamente, de variações do funcional

$$S = \frac{1}{8\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}(R + \Lambda) + S_m, \quad (1.8)$$

onde  $S_m$  corresponde a integral da densidade de Lagrangeano do setor de matéria. Como regra geral, esse Lagrangeano é obtido copiando-se o Lagrangeano da relatividade restrita, tomando o cuidado de substituir as derivadas ordinárias por derivadas covariantes definidas pela métrica e tomando-se como elemento de volume  $\sqrt{-g}d^4x$ .

As equações dinâmicas para o fator de escala requerem a especificação do conteúdo energético do Universo. A seguinte observação ajudará a estabelecer a forma do tensor energia-momento. O fluxo de calor bem como dissipação de energia dentro de um fluido requerem a especificação de direções privilegiadas dentro do fluido. Como num Universo homogêneo e isotrópico tais direções privilegiadas no espaço não existem, a única forma de matéria compatível com o Princípio Cosmológico é a de um fluido perfeito <sup>1</sup>. Pela conservação da energia temos que  $T_{\nu}^{\mu\nu} = 0$ . Da homogeneidade espacial segue-se que somente a componente do tempo desta equação é não trivial:

$$d(\rho a^3) = -Pd(a^3), \quad (1.9)$$

onde  $a(t)$  é o fator de escala. A interpretação dessa equação é imediata: como  $a^3$  é proporcional ao volume próprio de qualquer elemento de fluido, o lado esquerdo é a taxa da variação da energia total, enquanto o lado esquerdo é o trabalho realizado durante a expansão .

As equações de Einstein [eq. (1.7)], sem constante cosmológica, conduzem a um par de equações para o fator de escala  $a(t)$ :

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} \quad (1.10)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (1.11)$$

A evolução do fator de escala depende criticamente do tipo de matéria que permeia o Universo. Quando o fator de desvio para o vermelho não for muito grande, esperamos que o conteúdo material do Universo advenha proeminentemente das galáxias, cuja pressão é desprezível. Nesse período, a equação de estado é  $p = 0$ . Note que, como o Universo está em expansão ,  $\dot{a} > 0$ . Se, por outro lado,  $3p + \rho \geq 0$ , então,  $\ddot{a} \leq 0$ . Esses dois fatos implicam que

---

<sup>1</sup>Na realidade, um termo de viscosidade volumar também é permitido, mas não consideraremos essa possibilidade

a função  $a(t)$  deve se anular em algum instante no passado. Este instante é identificado como o *Big-Bang*, a singularidade inicial e início da contagem do tempo. Próximo da singularidade a Relatividade Geral não é mais válida, pois o próprio conceito de espaço-tempo perde seu significado. Como teremos oportunidade de discutir mais adiante, o Universo também está permeado por uma radiação cósmica de fundo (CBR) a uma temperatura de  $T_0 = 2,73K$ , fóssil do *Big-Bang*. A equação de estado correspondente é  $p = \rho/3$ . Apesar de sua contribuição presente para a densidade de presente de energia ser desprezível, em algum momento no passado os papéis estavam exatamente invertidos. De fato, introduzindo as duas equações de estado na equação de conservação de energia eq. 1.9, obtemos que  $\rho_m \propto a^{-3}$  e  $\rho_{\text{rad}} \propto a^{-4}$ . Isto implica que, para um fator de escala suficientemente pequeno a densidade de energia da matéria torna-se desprezível em relação a da radiação .

Definiremos agora uma função que será muito útil adiante,  $\Omega = \rho/\rho_c$ , onde  $\rho$  é a densidade de energia da matéria que permeia o Universo e

$$\rho_c \equiv \frac{3}{8\pi G_0} \frac{\dot{a}^2}{a} . \quad (1.12)$$

Segue-se das equações de Friedman [eqs. (1.10) e (1.11)], que  $\Omega > 1$  corresponde a um Universo fechado ( $k=1$ ), expandindo a partir de uma singularidade inicial até um certo limite e recontraindo novamente num tempo finito. Já se  $\Omega \leq 1$ ,  $k = -1$  e então o Universo será aberto e expandirá infinitamente. O caso  $\Omega = 1$  corresponde a um Universo plano,  $k = 0$ .

Podemos classificar a história do Universo em duas fases principais: a primeira corresponde ao universo jovem, caracterizado por densidade dominada por radiação e uma segunda em que o conteúdo energético do Universo é dominado por matéria. Este período de transição corresponde aproximadamente a um outro acontecimento na história do Universo no qual a matéria se desacopla da radiação , finalizando o longo período de equilíbrio térmico até então existente [2]. A partir desse momento, conhecido como desacoplamento, a temperatura da matéria passa a ser proporcional a  $a^{-2}$  enquanto que a da radiação continua a ser proporcional a  $a^{-1}$ .

Em grossas pinceladas, esse é o cenário da evolução do Universo conhecido como *modelo padrão* . Não está livre de problemas e contradições , como já vimos, a existência de uma singularidade cosmológica constitui uma primeira ameaça a própria Relatividade Geral. A parte disso, existe o problema da explicação da homogeneidade da radiação de fundo que é observada em escalas

que corresponderiam a regiões do Universo que nunca tiveram contato causal. Outras questões emergem no contexto da física das partículas elementares, como o problema dos monopolos que não pode ser explicado no contexto do modelo padrão. Esses foram alguns dos motivos que levaram a postulação de uma terceira época na evolução do Universo, anterior as outras duas, em que o conteúdo energético era devido a energia do vácuo dos campos de matéria. A esse período corresponde uma equação de estado  $p_{vac} + \rho_{vac} = 0$ . Note que para  $\rho_{vac} > 0$ , pela equação (1.11)  $\ddot{a} > 0$ , e a singularidade pode ser evitada. O crescimento exponencial do fator de escala serviria para por por em contato causal regiões que apresentam a mesma temperatura, e diluir a densidade de monopolos de maneira consistente com os dados observacionais.

### Anisotropia da radiação de fundo

A hipótese de isotropia e homogeneidade do Universo nos trabalhos originais de Einstein baseava-se em um princípio de estética e também tinha o propósito de simplificar a análise matemática, mas estava em conflito com os dados observacionais da época. Hoje, há uma ampla evidência de isotropia e homogeneidade do Universo. De longe a melhor, é a isotropia da temperatura da radiação cósmica de fundo. A CBR evidencia que o Universo evoluiu a partir de um *big-bang* quente. Medidas do fluxo do CBR com comprimento de onda na faixa de 70 cm a 0.1 cm estão consistentes com a de um corpo negro a temperatura de  $2.73 \pm 0.015 K$ . Tal temperatura corresponde, presentemente, a uma densidade de 422 fótons/cm<sup>3</sup>. Removido o efeito de dipolo devido ao movimento peculiar do grupo local de galáxias, a diferença de temperatura entre duas antenas separadas por ângulos variando de 10" a 180° é menor que uma parte em 10<sup>4</sup> [2]. A análise de tais medidas indicam que a nossa velocidade em relação ao agrupamento de Virgem é de aproximadamente 500 Km/s [2]. Portanto, a radiação de fundo é assombrosamente isotrópica, implicando que o Universo jovem de onde essa radiação proveio também o era. A anisotropia na radiação de fundo de corre do:

- movimento do nosso referencial local com respeito ao referencial de repouso cósmico.

O DMR (Diferencial Microwave Radiometer) no COBE (Cosmic Background Explorer) determinou com alta precisão a amplitude da anisotropia do dipolo:  $\delta T = 3.3365 \pm 0.027$  mK que corresponde a uma velocidade

do grupo local de galáxias de valor aproximadamente igual a  $627 \text{ Km/s}$  na direção do Hydra-Centaurus. Também mediu a anisotropia de dipolo devido o movimento da terra em torno do sol, com uma diferença de temperatura de  $27 \text{ mK}$ , correspondendo a uma velocidade orbital de  $30 \text{ Km/s}$ . Em abril de 1992, o DMR anunciou o descobrimento de anisotropia do CBR em escalas angulares na faixa de  $10^0$  a  $90^0$  no nível de uma parte em  $10^4$ . Um dos resultados mais interessantes foi a medida de anisotropia de quadrupolo com amplitude de  $11 \mu\text{K}$ . Pelo fato de que a anisotropia na radiação rastreia a presença de densidades de primordiais (efeito Sachs-Wolfe), a anisotropia do CBR são uma fonte importante de informações a respeito do processo de formação das estruturas no Universo. Estamos no início do mapeamento de anisotropias em escalas angulares na faixa de arco de segundo para cima, que poderá revelar o espectro de densidade de flutuações, bem como clarear a história do período de pós-recombinação do Universo.

### Abundância de elementos leves

A previsão correta das abundâncias relativas dos elementos leves produzidos num período de evolução do Universo conhecido como nucleossíntese primordial, época em que a temperatura era da ordem de  $1 \text{ MeV} \approx 10^{10} \text{ K}$ , é um dos grandes triunfos do Modelo Padrão. As reações nucleares que tomaram lugar de  $t = 0.01$  a  $100 \text{ seg.}$  (ou, então,  $T = 10 \text{ MeV}$  a  $0.1 \text{ MeV}$ ) resultaram na produção de quantidade substancial de Deutério, Hélio 3,4 e Lítio 7. A concordância entre as abundâncias preditas e as observadas para esses quatro isótopos, só sobrevive se a relação entre número presente de bárions e fótons estiver no intervalo  $4 \cdot 10^{-10} \leq \eta \leq 7 \cdot 10^{-10}$ , correspondendo a  $\Omega_B = \rho_B/\rho_c$  no intervalo 0.014 a 0.16. Portanto, a nucleossíntese primordial limita fortemente a densidade de matéria bariônica presente no Universo.

A grosso modo, ao recuarmos para tempos remotos, atingiremos uma temperatura maior que  $10^{10} \text{ K}$ , quando os fótons tem energia suficiente para fotodissociar todos os núcleos. Num período anterior a essa momento, havia um plasma quente consistindo de prótons, neutrons, radiação, pares elétron/pósitron e de neutrinos. Ao resfriar abaixo dessa temperatura, existe a possibilidade de formação núcleos mais pesados através da reação



Importante notar que acima  $10^9 \text{ K}$  essa reação acontece nos dois sentidos, e

que abaixo desse limite, só no sentido indicado. A probabilidade por unidade de tempo de que essa reação aconteça é a média térmica do produto da seção de choque da reação  $\sigma$  pela velocidade multiplicado pela densidade de neutrons. Para que essa reação ocorra, ao menos uma reação deverá acontecer no intervalo de tempo  $t$ ,

$$\langle \sigma v \rangle n t \propto 1, \quad (1.14)$$

onde  $\langle \rangle$  indicam uma média do produto. Em seguida a esse período, a temperatura da radiação cai com a expansão, e esta torna-se incapaz de fotodissociar os núcleos já formados. Desta maneira, a produção de núcleos é congelada. A abundância final de vários elementos pode ser calculado e esses números são sensíveis a taxa de expansão do Universo. Cálculos, mostram que a abundância do  $He^4$  é relativamente insensível a  $\Omega$ , sendo da ordem de 25% em massa relativo ao  $H$ , em bom acordo com a presente abundância observada. A comparação entre as abundâncias previstas e as observadas fornece a razão bárion-fóton na faixa  $4 \times 10^{-10} \leq \eta \leq 7 \times 10^{-10}$ , que corresponde a  $0.014 \leq \Omega_B \leq 0.16$ . Caso  $\Omega$  se revele maior que o limite superior acima, então seremos obrigados a confrontar a existência de contribuição não bariônica para a densidade do Universo.

## 1.2 Matéria Escura $\times$ Teorias alternativas de Gravitação

A questão da massa escura é um dos enigmas da cosmologia atual. Em um de seus aspectos, a divergência entre teoria e observação é ilustrada quando utilizamos a mecânica newtoniana para calcular a dependência entre velocidade orbital das estrelas ou nuvens de Hidrogênio neutro ( $H I$ ) na periferia da galáxia. As medidas dessas últimas se baseam na medida do efeito Doppler da linha de 21cm em galáxias espirais [2] Ao inferirmos dinamicamente a massa da galáxia através da relação  $GM(r) = v^2 r$  onde  $r$  é a distância do centro da galáxia onde a maior parte da luz é emitida, e  $v(r)$  a velocidade rotacional de uma estrela nessa região, encontramos

$$\Omega_{lum} \cong 0.01, \quad (1.15)$$

Se estendermos esse procedimento para a periferia da galáxia, como a quase totalidade da matéria da galáxia se encontra no interior dessa região, deveríamos novamente obter  $v^2 \approx \frac{GM}{r}$ , onde  $M$  é a massa galáctica e  $r$  a distância

da estrela ao centro da galáxia. Surpreendentemente, as medidas demonstram que, a grandes distâncias, a curva desenvolve um *plateau*, em contradição com o resultado teórico. Essa discrepância é conhecida como problema das curvas de rotação planas de galáxias espirais.

Claramente, o potencial que se ajusta a essa curva deve de ter forma logarítmica nessa região . Inserindo esse potencial na equação de Poisson, juntamente com a estimativa da velocidades de rotação no *plateau*, obtém-se a massa faltante, aquela cuja existência é postulada para assegurar a validade da Mecânica Newtoniana. Como essa massa não é observada, ela deveria existir na forma de matéria não luminosa. A massa dinâmica de uma galáxia pode ser assim estimada através da mecânica newtoniana, tendo como entrada os valores das velocidades de rotação no plateau e a distância ao centro da galáxia. Aplicando a técnica para galáxias espirais e fazendo uma estatística para um número grande de de galáxias espirais , obtém-se um

$$\Omega_H \cong 0.1 , \quad (1.16)$$

Com relação ao seu aspecto histórico, deve-se mencionar que a primeira estimativa detalhada da massa do Universo começou com Hubble [2], baseada na contagem do número e das massas das galáxias. A estimativa dessas massas baseava-se nas energias de ligação gravitacionais necessárias para conter o movimento de estrelas e gases nos seus interiores. A primeira evidência de que considerável fração de massa esteja na forma não luminosa, surgiu da medida das velocidades das galáxias dentro dos agrupamentos de Coma e Virgem. Zwicky [2] e Smith [2] estimaram a quantidade de massa agrupada necessária para ligar gravitacionalmente as galáxias se movendo nas velocidades de dispersão observadas no interior desses aglomerados. Smith [2] notou que para detectar a massa total da nuvem de matéria circundando a galáxia, isto é o halo, faz-se necessária uma medida do efeito gravitacional no movimento dentro do halo e além dele. Os resultados, quando comparados com as massas estimadas por Hubble indicam que, se esses agrupamentos estiverem gravitacionalmente ligados, as massas de agrupamento são aproximadamente duas vezes maior que a soma das massas dentro das galáxias [2].<sup>1</sup>

No contexto da análise Newtoniana há, portanto, forte evidência de que a matéria escura seja a componente dominante na densidade de matéria do Universo. Comparando a densidade de bárions exigido pela nucleossíntese primordial, isto é  $0.04 \leq \Omega_B \leq 0.16$  com  $\Omega_{lum}$ , conclui-se que grande parte

da matéria escura, poderia se encontrar na forma bariônica. A composição não luminosa poderia ser de planetas gigantes, anãs brancas ou estrelas de neutrons. Porém, caso se confirme que  $\Omega_0 > 0.16$ , então teremos fortes evidências de que a maior parte da matéria escura seja não bariônica, podendo se apresentar na forma de neutrinos, *WIMP's* (Weak Interacting Massive Particle) estáveis, relíquias, etc.

Em escalas maiores, da ordem de 10 a 20Mpc, o estudo das velocidades peculiares em torno do aglomerado de Virgem, devidas a inomogeneidade na distribuição local de galáxias, fornece uma estimativa de

$$0.1 \leq \Omega \leq 0.2. \quad (1.17)$$

Como o valor teoricamente mais aceito em virtude do cenário inflacionário é  $\Omega = 1$ , então se os métodos dinâmicos utilizados estiverem corretos, deverá haver uma componente de densidade de massa com uma distribuição suave ( no sentido de que não acompanha a distribuição de matéria visível), em escalas maiores que 10 a 30Mpc que forneceria a quantidade de massa faltante para tornar  $\Omega_0 = 1$

$$\Omega_{\text{suave}} \simeq 0.8. \quad (1.18)$$

A composição dessas componentes poderia ser, por exemplo, de partículas relativísticas que, devido sua alta velocidade, não se tornariam sistemas ligados.

De qualquer maneira, a(s) componente(s) não bariônica(s) da matéria escura não deve(m) participar das reações da nucleossíntese para que as abundâncias estejam de acordo ao observado. Tem sido proposto que essa componente esteja na forma de componentes exóticos não bariônicos como, por exemplo, uma família de neutrinos com massa de repouso de uma dezena de elétron-volts. Pares de neutrinos teriam sido produzidos em equilíbrio térmico com radiação de fundo no Universo jovem e a presente densidade dessas relíquias de neutrinos é fixada pela temperatura da radiação de fundo observada. Pode-se mostrar que a presente densidade média de neutrinos é  $n_\nu = 113$  neutrinos /cm<sup>-3</sup>. Gershtein e Zel'dovich [2] notaram que as relíquias de neutrinos poderiam fazer uma apreciável contribuição para a presente média da densidade de massa cósmica. Cowsik e McClelland [2] encontraram que neutrinos seriam apropriados como matéria escura para ricos agrupamento de galáxias.

## 1.2.1 Teorias Alternativas de Gravitaco

A hipótese de validade da mecânica newtoniana em todas as escalas implica, necessariamente, na existência da matéria escura. Uma visão alternativa do problema tem emergido recentemente, na qual alguns pesquisadores propo o abandono da dinâmica convencional em determinada escala. Desta maneira, fica eliminanda a necessidade da postulao de uma componente não visível de matéria permeando o Universo [2]. De mais a mais, uma tal componente seria de difícil deteco e sua existência não estaria em sintonia com a lei de Tully-Fisher [2]. Tully e Fisher [2] foram os primeiros a encontrar relao entre luminosidade  $L$  de uma galáxia espiral e sua velocidade rotacional no *plateau* na forma

$$L = \alpha V^\delta, \quad (1.19)$$

onde  $L$   a luminosidade num certo intervalo de frequências;  $\alpha$ , uma constante e  $\delta$ , um parâmetro no intervalo  $2.5 \leq \delta \leq 5$ . De uma maneira geral, as fontes luminosas nesse intervalo de frequência são basicamente anãs brancas que se encontram no disco da galáxia. A hipótese da matéria escura deveria explicar como a distribuo de matéria escura a grandes distâncias do centro da galáxia poderia determinar a lei de Tully-Fisher que depende da distribuo de matéria luminosa no disco galático. Claramente, isso são seria possível através de um ajuste fino entre os parâmetros da distribuo de matéria visível no disco e a matéria escura no halo galático. Além disso, um ajuste fino na região de transio entre os efeitos de disco e halo implica no aparecimento de um "calombo" na curva de rotao, que não  observado [2].

O primeiro paradigma de uma "teoria" alternativa foi proposta por Milgrom no começo dos anos 80 e ficou conhecida como *MOND* (Modified Newtonian Dynamics). *MOND*  uma "teoria" não relativística que se basea na hipótese da quebra da Dinâmica Newtoniana [2] que ocorreria no limite de pequenas aceleraes [2]. Mais especificamente, a transio do regime newtoniano para a região onde a dinâmica  modificada ocorre numa escala de acelerao  $a_0 = 2 \times 10^{-8} \text{ cm/s}^2$ . Nesse limite, a acelerao de uma partícula teste deixaria de ser a prevista pela dinâmica newtoniana e passaria a ser  $\frac{a^2}{a_0} = g_N$  [2], onde  $g_N$   o campo gravitacional convencional e  $a_0$   uma constante com dimensão de acelerao. Tal modificao  suficiente para reproduzir as curvas de rotao de galáxias, sem a necessidade de se recorrer a postulao de uma componente invisível de matéria permeando o Universo.

Podemos escrever as condições acima na forma compacta:

$$\mu\left(\frac{g}{a_0}\right)g = g_N, \quad (1.20)$$

onde  $\mu$  é uma função obedecendo,

$$\begin{cases} \mu(x) \rightarrow x & \text{se } x \ll 1 \\ \mu(x) \rightarrow 1 & \text{se } x \gg 1 \text{ (limite Newtoniano)}. \end{cases} \quad (1.21)$$

Na gravitação newtoniana os corpos testes movem-se com aceleração igual a  $\vec{g}_N = -\vec{\nabla}\phi_N$ , onde  $\phi_N$  é o potencial gravitacional newtoniano, determinado através de equação de Poisson. Essa, por sua vez, pode ser obtida através do lagrangeano:

$$L_N = - \int \left[ \rho\phi_N + \frac{(\nabla\phi_N)^2}{8\pi G} \right] d^3r. \quad (1.22)$$

De maneira similar, o *Mond* pode ser obtido a partir de princípio variacional. Para tanto, precisamos manter a noção de potencial escalar  $\phi(x)$ . A modificação mais geral é da forma:

$$L = - \int \left[ \rho\phi + \frac{a_0^2\tau}{8\pi G} \right] d^3r, \quad (1.23)$$

onde  $\tau \equiv \tau[(\nabla\phi)^2/a_0^2]$  é uma função arbitrária. A variação do lagrangeano acima em relação a  $\phi(x)$ , com a identificação  $\mu(x) = \tau'(x^2)$ , produz a equação [2]:

$$\nabla[\mu(\nabla\phi/a_0)\nabla\phi] = 4\pi G\rho. \quad (1.24)$$

A partir das equações acima segue-se que

$$\mu(g/a_0)g = g_N + \nabla \times h. \quad (1.25)$$

Para grandes distâncias (pequenas acelerações), o termo de rotacional pode ser desprezado [2]. Nesse limite  $\mu(g/a_0)g = g_N$ , ou seja, quando  $x \ll 1$

$$g \rightarrow -\frac{(Mga_0)^{1/2}}{r} \quad (1.26)$$

No entanto,  $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$ , logo

$$\phi \rightarrow (Mga_0)^{1/2} \ln(r/r_0) \quad (1.27)$$

Pode-se mostrar facilmente que este potencial conduz a uma velocidade circular assintoticamente constante,  $V^4 = MGa_0$  [2].

Este resultado é consistente com a observada relação de Tully-Fisher. Vale observar que a aceleração do centro de massa de um sistema arbitrário ligado, num campo gravitacional externo constante, é independente de qualquer propriedade do sistema. Como consequência, todos objetos isolados caem exatamente da mesma maneira num campo gravitacional externo constante. Em outras palavras, o princípio de equivalência fraco é satisfeito [2]. Todavia, a dinâmica interna do sistema em queda livre, na presença de um campo externo constante, é diferente da dinâmica que esse mesmo sistema teria na ausência do campo externo. Claramente, corresponde a uma violação do princípio de equivalência forte [2].

## Teorias Relativísticas Alternativas

A passagem do estudo de sistemas autogravitantes em escalas, digamos, galácticas para sistemas em escalas cosmológicas requer a extensão da mecânica newtoniana para a Relatividade Geral. Da mesma maneira, podemos postular que uma teoria que seja válida em escalas cosmológicas e reproduza os resultados da *MOND* no limite apropriado, advenha também de uma teoria relativística. Portanto, o estudo das consequências cosmológicas da modificação da dinâmica usual requer uma nova teoria relativística da gravidade cujo limite não relativístico difira da mecânica newtoniana de campos fracos. Os pré-requisitos dessa teoria relativística são :

- *Limite einsteniano*: num limite apropriado deve reproduzir a Relatividade Geral, dado seu sucesso nos testes de precisão no sistema solar, bem como as previsões cosmológicas.
- *Covariante*: o princípio de covariância deve ser satisfeito, que sera verdadeiro sempre que a teoria for derivável de um princípio variacional.
- *Causalidade*: as equações derivadas de lagrangeano não devem permitir propagação superluminal de nenhum campo.
- *Positividade da energia*: Campos não podem ser portadores de energia negativa.
- *Queda livre*: A teoria deve satisfazer o princípio de equivalência fraco.

Infelizmente, não há uma prescrição única de como formular uma tal teoria. O primeiro modelo proposto foi o *Aquadratic Lagrangean Theory* (*AQUAL*) [2]. Nesse modelo, o campo gravitacional é mediado por um tensor métrico e um campo escalar adicional  $\psi$ . O lagrangeano adotado tem da forma:

$$S_\psi = -1/2 \int F(g^{\alpha\beta}\psi_{,\alpha}\psi_{,\alpha})d^4x, \quad (1.28)$$

Essa teoria concorda com os experimentos solares e contém *MOND* no domínio não relativístico. No entanto, o campo escalar  $\psi$  se propaga com velocidade maior que da luz, violando um dos critérios impostos aos candidatos a generalização da *MOND*.

Como saída a esse problema, Bekenstein [2] propôs a *Phase Coupling Gravity* (*PCG*). Nesse formalismo, em adição ao tensor de campo da Relatividade Geral, a matéria acopla-se a fase de um campo complexo  $\chi$ . A ação proposta para esse campo tem a forma:

$$S_\chi = -1/2 \int (g^{\alpha\beta}\chi_{,\alpha}\chi_{,\beta} + V(\chi^*\chi))(-g)^{1/2}d^4x, \quad (1.29)$$

onde  $V(\chi)$  representa a autointeração do campo escalar complexo. Em termos dos campos  $q$  (amplitude) e  $\phi$  (fase), a lagrangeana acima se escreve como

$$S_{q,\phi} = -1/2 \int (q_{,\alpha}q^{,\alpha} + q^2\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} + V(q^2))(-g)^{1/2}d^4x. \quad (1.30)$$

Pode-se mostrar que essa lagrangeano é equivalente a uma teoria de Brans Dicke com  $\omega$  variável [2]. Além disso no setor da matéria fazemos a substituição :  $L_m$  passa a ser multiplicado por  $e^\phi$ . A fase do campo estaria ligada ao campo escalar da teoria usual de Brans-Dicke, ao passo que o parametro  $\omega$  estaria relacionado com sua amplitude. Tal teoria evita o problema da causalidade presente em *AQUAL*. As previsões dependem da forma do potencial do campo escalar de auto-interação . Diversas versões surgem para em virtude das diferentes escolhas do potencial. Na mais simples de todas, conhecida como *PCG* mínima,  $V(q^2) = 0$  [2]. Porém tal potencial gera curvas de rotação de galáxias com a mesma forma para diversas massas, em contradição com o observado. Além disso o *PCG* mínima apresenta instabilidade de vácuo. Por essas razões o *PCG* com potencial nulo fica excluída.

## 1.2.2 Equações Cosmológicas

Há duas representações alternativas e fisicamente equivalentes da teoria de tensor escalar. Na primeira, a ação deve ser escrita no referencial de Einstein em que o campo escalar interage explicitamente com a matéria e as trajetórias de partícula não são geodésicas da métrica de Einstein. Alternativamente, a ação é descrita no referencial físico em que a interação escalar é absorvida pela transformação conforme da métrica e as trajetórias das partículas são geodésicas da nova métrica [2]. No problema cosmológico o referencial físico mostra-se mais conveniente. A ação nesta forma do *PCG* fica  $S = S_g + S_m$ , onde:

$$S_g = \frac{1}{16\pi G_0} \int (-g)^{1/2} d^4x \left\{ e^{\eta\phi} \left[ R - q_{;\alpha} q^{;\alpha} - (q^2 - 3/2\eta^2) \phi_{;\alpha} \phi^{;\alpha} - e^{\eta\phi} V(q^2) \right] \right\}; \quad (1.31)$$

e

$$S_m = \int (-g)^{1/2} d^4x L_m \quad (1.32)$$

Aqui,  $R$  é o escalar de Ricci,  $q$  e  $\phi$  são a amplitude e a fase do campo escalar complexo, respectivamente, e  $V(q^2)$  é o potencial de auto-interação. A métrica física  $g^{\mu\nu}$  está relacionada com a métrica de Einstein  $g_{\mu\nu}^*$  através da transformação conforme:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^* e^{(-\eta\phi)}, \quad (1.33)$$

onde  $\eta$  é um parâmetro. A ação da teoria se assemelha com a da teoria de Brans-Dicke, onde o campo escalar de Brans-Dicke seria  $e^{\eta\phi}$  e o equivalente ao parâmetro de Brans-Dicke seria:

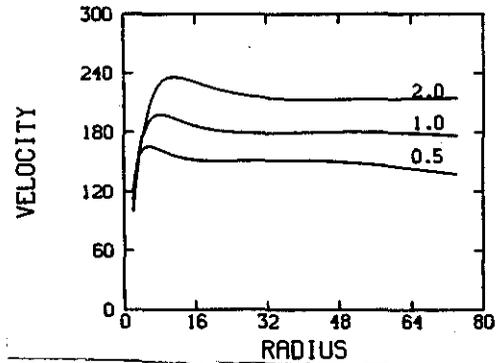
$$\omega = \left(\frac{q}{\eta}\right)^2 - \frac{3}{2}. \quad (1.34)$$

Considerações cosmológicas restringem a forma do potencial de auto-interação do campo escalar. Um potencial que decresca monotonicamente acarretaria instabilidade de vácuo e rápida evolução da amplitude escalar  $q$  para altos valores. Já um potencial que seja uma função monotonicamente crescente da amplitude escalar seria viável pois a presença da derivada temporal diferente de zero da fase escalar  $\phi$  gera um potencial efetivo dependente do tempo com um único mínimo e, portanto, o vácuo seria estável. Argumentos similares levam a eliminar o potencial sextico negativo, bem como o

Figura 1.1: curvas de rotação

*PCG* mínima. Como não há nenhum princípio que determine a escolha do potencial, tem sido escolhido um potencial quadrático por sua simplicidade e por não incorrer em problemas de instabilidade.

Em resumo, decompondo o campo complexo do *PCG* em dois campos reais (fase e amplitude),  $\chi = qe^{i\phi}$ , podemos escrever a ação na forma 1.31, onde  $V(q^2) = Aq^2 + B$  com  $A, B$  (em unidades de  $\frac{c^2}{H_0^2}$ ) e  $\eta$  são parâmetros (constantes) do modelo. Estes parâmetros são ajustados a fim de dar origem a curvas planas de rotação de galáxia e, ao mesmo tempo, reproduzir um Universo com curvatura zero e baixa densidade de matéria (Universo sem quantidades significantes de matéria escura). Os valores obtidos por Sanders são  $A = 4,0 \times 10^4$ ,  $B = 6.7$  e  $\eta = 10^{-7}$ . Em seguida, ilustramos as curvas de rotação previstas pelo modelo acima.



Se o *PCG* for visto como generalização da teoria de Brans-Dicke, a evolução temporal da amplitude escalar [2] indica que o valor efetivo de  $\omega$  se torna grande em épocas remotas, e então, o campo escalar não possui papel significativo. A evolução do Universo jovem seria similar a do Modelo Padrão, exceto pela alta taxa de expansão devido ao grande valor da 'constante' Gravitacional. Como a fase do campo escalar se acopla fracamente a matéria não relativística, espera-se que os valores globais da fase e da amplitude escalar devam permanecer essencialmente constante no universo muito jovem, correspondendo a uma época de inflação.

Como a constante efetiva de Newton torna-se muito grande, pode-se esperar que o cenário de crescimento de inhomogeneidades no processo de formação de sistemas autogravitantes seja alterado. Essa questão será analisada deta-

lhadamente no próximo capítulo. Antes disso, passemos a uma revisão do formalismo de perturbações de densidade no modelo padrão.

## 1.3 Perturbações primordiais da densidade de matéria

Em grandes escalas, o Universo é homogêneo e isotrópico. Quando o observamos em escalas menores, as inomogeneidades se manifestam através dos aglomerados de galáxias, estrelas, quasares, etc. A densidade  $\frac{\delta\rho}{\rho}$  no interior de agrupamentos de galáxias é cerca de  $10^2$  vezes a densidade média do universo; no interior de uma galáxia é, em média,  $10^4$  vezes. Em escalas da ordem de 100Mpc as flutuações de densidade  $\frac{\delta\rho}{\rho}$  em relação a média cosmológica são de uma parte em  $10^4$ . Essa surpreendentemente homogênea é evidenciada também pela isotropia da radiação de fundo. Sendo a radiação de fundo uma relíquia cosmológica, o Universo deve ter sido, necessariamente, extremamente homogêneo e isotrópico no passado. Em algum momento no passado, inomogeneidades devem ter brotado em pequenas escalas, decorrentes da instabilidade gravitacional. Tal crescimento de inomogeneidades não pode ocorrer antes do desacoplamento pois até então os bárions estão fortemente acoplados aos fótons e a pressão da matéria é suficientemente grande para prevenir o colapso gravitacional de pequenas flutuações. Na seção seguinte descrevemos o formalismo Newtoniano para descrever o crescimento de flutuações de densidade e, em seguida, o formalismo relativístico.

### 1.3.1 Modelo de Jeans

No início do século, Sir James Jeans [2] propôs, pela primeira vez, no contexto da mecânica de fluidos newtoniana, um formalismo capaz de explicar a formação de estruturas no interior de um meio homogêneo e autogravitante. Jeans assumiu um Universo plano, estático e infinito, preenchido por um fluido perfeito. As equações necessárias para descrever o crescimento de estruturas são a equação de continuidade para o fluido:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0, \quad (1.35)$$

a equação de Euler

$$\frac{\text{partial}\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\rho^{-1}\vec{\nabla}p + \vec{g} \quad (1.36)$$

e as equações para o campo gravitacional  $\vec{g}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0 \quad (1.37)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho. \quad (1.38)$$

Essas equações , devem ser complementadas pela especificação da equação de estado  $p = p(\rho)$ .

A solução não perturbada corresponde a uma situação estática de distribuição homogênea de matéria. Em seguida, estuda-se a dinâmica das perturbações a partir das equações acima. No que se segue, usaremos o subscrito '0' e '1' para indicar as componentes não perturbadas e perturbadas das quantidades físicas respectivas. Claramente,  $\vec{V}_0 = \vec{g}_0 = 0$  e  $p_0$  e  $\rho_0$  são constantes em todo espaço. Podemos escrever

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 + \rho_1 \\ p = p_0 + p_1 \\ \vec{v} = \vec{v}_1. \end{cases} \quad (1.39)$$

Considerando apenas perturbações adiabáticas,  $p_1 = c^2\rho_1$ ,  $c^2$  é a velocidade do som no interior do fluido. Inserindo as expressões acima nas equações do fluido autogravitante e retendo apenas os termos de primeira ordem, segue o seguinte conjunto de equações :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0; \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{c^2}{\rho_0} \nabla \rho_1 + \vec{g}_1 = 0; \\ \nabla \times \vec{g}_1 = 0; \\ \nabla \cdot \vec{g}_1 = -4\pi G\rho, \end{cases} \quad (1.40)$$

Combinando as equações entre si, obtemos para os modos compressionais ( $\nabla \times \vec{v} = 0$ ):

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \rho_1 = 4\pi G\rho_0 \rho_1. \quad (1.41)$$

Introduzindo a solução do tipo onda plana:

$$\rho_1 = A e^{ikx - i\omega t}, \quad (1.42)$$

obtem-se a seguinte relação de dispersão :

$$\omega^2 = c^2 k^2 - 4\pi G \rho_0. \quad (1.43)$$

Para o estudo do comportamento dessas soluções é conveniente definir o vetor de onda de Jeans:

$$k_J = \sqrt{\frac{4\pi G \rho}{c^2}}, \quad (1.44)$$

como ficará evidente em seguida. Seja  $\tau_p \sim \lambda/c^2$  e  $\tau_g \sim (\rho G)^{-1/2}$  os tempos característicos de resposta da onda de pressão e o de colapso gravitacional, respectivamente, onde  $k = 2\pi/\lambda$ . Esperamos que as instabilidades no interior do fluido ocorram no momento em que o tempo característico de resposta da pressão seja maior que o tempo de resposta do colapso gravitacional [2]. Isto é,  $k_J$  marca o instante de transição do regime estável de propagação de ondas sonoras no interior do fluido, para o regime instável em que o colapso gravitacional das perturbações na densidade de matéria se desenvolve no interior do fluido. Estas últimas tem um crescimento exponencial no tempo.

Alternativamente, pode-se caracterizar as perturbações por uma massa de repouso  $M$  dentro de uma esfera de raio  $\lambda/2$ . Definimos a massa de Jeans como sendo a massa no interior de um raio  $\lambda/2$ . Assim:

$$M_J = \frac{\pi}{3} \left( \frac{\pi}{K_J} \right)^3 \rho. \quad (1.45)$$

Perturbações de massa menor que  $M_J$  são gravitacionalmente estáveis, enquanto aquelas de massa maior que  $M_J$  são instáveis.

Claramente, a análise de Jeans não pode ser aplicada a teoria de formação de estruturas no Universo, uma vez que se baseia na teoria newtoniana. Faz-se necessário um tratamento relativístico. O primeiro cálculo relativístico do comportamento de perturbações na densidade de matéria com objetivo de explicar formação de estruturas foi proposto por Lifshitz [2] em 1946. Ele levou em conta a expansão do universo e efeitos relativísticos, fazendo uso das equações de Einstein e da métrica de Friedman-Robertson-Walker. Lifshitz demonstrou que, surpreendentemente, os resultados relativísticos podem ser corretamente reproduzidos pela teoria newtoniana se levarmos em conta a expansão do Universo de uma maneira *ad hoc*. Com o propósito de comparar a evolução do crescimento de densidades primordiais prevista pela Relatividade Geral com aquela obtida pela *PCG*, optamos por recapitular os

resultados do Modelo Padrão usando o expediente do formalismo ‘newtoniano’, uma vez que no próximo capítulo, teremos oportunidade de discutir o formalismo relativístico exaustivamente no contexto da teoria *PCG*.

Para levar em conta a expansão cosmológica basta usar as mesmas equações que usamos anteriormente (eqs.de Euler e da continuidade) subentendendo que as mesmas são validas nas coordenadas físicas  $(\vec{r}, t)$ , onde  $\vec{r} = a(t)\vec{x}$ . A velocidade do fluido deve ser escrito na forma

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{a}\vec{x} + \vec{v}(x, t), \quad (1.46)$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade peculiar, e o primeiro termo corresponde ao fluxo de Hubble. Tendo em vista que

$$\vec{\nabla}_r = a^{-1}\vec{\nabla}_x \quad (1.47)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x - \frac{\dot{a}}{a}\vec{x} \cdot \vec{\nabla} \quad (1.48)$$

Após alguma álgebra obtemos as equações para as perturbações de densidade e velocidade:

$$\dot{\rho}_1 + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_1 + \frac{\dot{a}(\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\rho_1}{a} + \rho_0\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0, \quad (1.49)$$

$$\dot{\vec{v}}_1 + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v}_1 + \frac{\dot{a}}{a}(\vec{r} \cdot \nabla)\vec{v}_1 = -\frac{\nabla p_1}{\rho_0} + \vec{g}_1. \quad (1.50)$$

As equações para o campo gravitacional perturbado são :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{g}_1 = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{g}_1 = -4\pi G\rho_1 \end{cases} \quad (1.51)$$

Para as perturbações adiabáticas,  $p_1 = c^2\rho_1$ , onde  $c$  é a velocidade do som no meio. A homogeneidade requer um *ansatz* para as perturbações na forma de onda plana:

$$\rho_1(r, t) = \rho_1(t)e^{\frac{ir \cdot q}{a}}, \quad (1.52)$$

onde  $r$  é a distância física e  $q$  o vetor de onda coordenada. Relações similares valem para  $\vec{g}_1$  e  $\vec{v}_1$ . Definindo a densidade de contraste como ( $\delta = \delta\rho/\rho$ ) e introduzindo o *ansatz* acima nas eqs.(1.40), obtem-se após uma álgebra trivial uma equação para a densidade de contraste:

$$\ddot{\delta} + \frac{2\dot{a}\dot{\delta}}{a} + \left(\frac{c^2q^2}{a^2} - 4\pi \cdot G\rho\right)\delta = 0 \quad (1.53)$$

A equação acima provém do modo compressional e governa o crescimento (ou decaimento) de condensações primordiais em um Universo em expansão. A equação acima é relativamente complicada e uma solução de forma fechada que fosse válida por toda a fase dominada por matéria é praticamente impossível. É de praxe resolvê-la em dois casos principais. No primeiro caso, não desprezamos o termo de pressão do fluido. Nesse caso, as forças de pressão são maiores do que as forças responsáveis pelo colapso gravitacional. Isso corresponderia a situação em que a massa de Jeans é muito maior que a massa galáctica e as flutuações correspondem a ondas sonoras amortecidas no interior do meio.

Em seguida a esse período, segue-se a fase em que podemos desprezar a pressão no interior do fluido. Portanto, nesta fase, a força de gravitação é muito maior que a força de pressão e a matéria se encontra livre para colapsar. Nessa situação, a massa de Jeans é menor que a massa galáctica. A equação acima para  $q = 0$  (negligenciando a pressão), num período dominado por matéria, implica num crescimento em forma de potência para a densidade contraste:

$$\delta \propto t^{2/3}. \quad (1.54)$$

O contraste entre esse resultado e a análise original de Jeans é gritante. Num Universo em expansão, o crescimento exponencial é substituído por um crescimento em forma de potência. Esse fato é insatisfatório, pois o crescimento se torna relativamente lento e não haveria tempo o suficiente desde o período do desacoplamento para que a densidade de contraste entrasse num regime não linear,  $\delta \gtrsim 1$ , onde a auto-gravitação se torna intensa o suficiente para que o sistema se desacople do estado de expansão geral do Universo. A condição  $\delta_+ \sim 1$  implica num limite mínimo na magnitude inicial na época da recombinação,  $10^{-3} \leq \delta_+ \leq 10^{-4}$  [2].

Para conhecer tal valor seria necessário saber quando houve passagem para o regime não linear. Estimando a energia de ligação entre as galáxias, Weymann estimou que isso deva ter ocorrido depois de  $10^7$  anos. No período linear ( $\delta_+ < 1$ ) o tamanho físico das perturbações cresce junto com a expansão, isto é  $\lambda_f = a\lambda$ . Na passagem para o período não linear, a perturbação se desliga da expansão geral e passa a se comportar como um sistema gravitacional autoligado.

A massa de Jeans obtida levando em conta a expansão cosmológica tem expressão similar a eq. (1.45), bastando substituir o comprimento de onda

comóvel pelo físico. Pode-se mostrar que essa massa é independente do tempo e, desta maneira, serve como medida das massas das estruturas que poderiam ter se formado, em função de seu tamanho, em decorrência do colapso gravitacional. Estimando o tamanho físico de uma perturbação cuja massa seja da ordem da massa galáctica (cerca de  $10^{11}$  massas solares), obtém-se que no regime linear  $\lambda_f \simeq 1.9 Mpc$ . Como o tamanho físico de uma galáxia é muito menor que este valor, cerca de  $30 kpc$ , tal resultado comprova a necessidade da passagem para um regime não linear em algum momento no passado. Antes de entrar em detalhe na formação das estruturas, convém conhecer as condições iniciais para tal época, como por exemplo o valor de:

- $\Omega_0$ , a densidade total do universo medida em unidades de  $\rho_c$ .
- $\Omega_i$ , densidade dos vários componentes do universo (matéria bariônica, partículas relativísticas, etc).
- Tipo e espectro de perturbação primordial (adiabática ou isocurvatura).

Os valores aceitos no momento são as seguintes:

- $\Omega_0 = 1$ , valor obtido pela inflação.
- $\Omega_B \leq 0.16$ .

Tal resultado é previsto através da nucleossíntese Primordial.

- O espectro das inhomogeneidades tem a forma Harrison-Zel'dovich, correspondendo a  $(\delta\rho/\rho)_{hor} = const.$

Como já foi dito, o Universo que observamos hoje é o resultado final de uma amplificação gravitacional de pequenas perturbações primordiais de um Universo, outrora bastante homogêneo. Existem atualmente vários modelos para explicar o crescimento de estruturas, embora não exista uma compreensão tão completa e plausível como a que temos para a origem da abundância cósmica do Hélio e da radiação de fundo. Dois tipos de flutuações serão discutidas, as adiabáticas (ou de curvatura) e as de isocurvatura (ou isoterma). Antes de entrar nos detalhes, é conveniente dividir a história da evolução das perturbações em duas fases distintas: *primeira fase* e *segunda fase*, correspondendo às épocas em que as perturbações se encontram fora e dentro do horizonte, respectivamente.

Em instantes  $t \geq t_{EQ}$ , praticamente todos modos interessantes de flutuação estão bem dentro do horizonte e correspondem a densidades de perturbações newtonianas. Todavia, em instantes bem remotos,  $t \ll t_{EQ}$ , momento em que as escalas de interesse cosmológico estavam bem fora do horizonte, há dois tipos de flutuações distintas:

- adiabática (curvatura).
- isocurvatura (ou isoterma).

Flutuações adiabáticas são flutuações na densidade de energia ( $\delta\rho \neq 0$ ) e podem ser caracterizadas de forma invariante de gauge como flutuações no valor local da curvatura espacial. Pelo princípio de equivalência, todas componentes da densidade de energia participam de tais perturbações :

$$\delta = \frac{\delta n_B}{n_B} = \frac{\delta s}{s} = 1/3 \frac{\delta T}{T}, \quad (1.55)$$

Onde  $s$  é a densidade de entropia  $n_B$  é a densidade de matéria bariônica.

O segundo tipo, as flutuações de isocurvatura, ocorrem em escalas sub-horizonte e são caracterizados por flutuações na forma da equação de estado local, como por exemplo, através da variação de pressão. Uma vez que causalidade exclui a redistribuição da densidade de energia em escalas maiores que a do horizonte,  $\delta\rho = 0$ .

As flutuações adiabáticas estão presentes inicialmente como flutuações na curvatura [2] ou podem ser produzidas em tempos remotos contanto que algum mecanismo (como inflação) ocorra. Nos modelos inflacionários, o espaço de de Sitter produz flutuações no campo inflaton dando surgimento a flutuações adiabáticas. Flutuações de isocurvatura podem também ser produzidas durante inflação, por exemplo, como flutuações no número local de densidade de bárions. Geralmente as flutuações de isocurvatura são produzidas por processos microfísicos que não podem transportar energia ao longo de escalas super-horizontes, mas que possam perturbar a equação de estado local. Estas flutuações na equação de estado local, conduzem a perturbações na densidade após o modo entrar no horizonte e o universo se tornar dominado pela Matéria.

Podemos agora descrever as duas fases do universo:

### 1. Primeira Fase

Nesta fase as perturbações são de escala sub-horizonte ( $\lambda_f \ll H^{-1}$ ). Perturbando o modelo Friedman, surgem temos dois modos; um crescente e outro decrescente. No período dominado por matéria, as densidades crescem com  $a \propto t^{2/3}$ . É conveniente caracterizar os distúrbios por uma massa de repouso  $M_J$ , que é a massa no interior uma esfera cujo diâmetro é o comprimento de onda de Jeans. Admitindo-se que a densidade do Universo é basicamente dominado pela matéria segue-se que  $M_J \propto T^{3/2}$ .

## 2. Segunda Fase

Nesta fase as perturbações estão fora do horizonte ( $\lambda_f \gg H^{-1}$ ). Pelas equações de Einstein obtem-se quatro modos de flutuações. No entanto dois modos não são físicos, estão associados a invariância de gauge da teoria. Quanto aos outros dois modos, um tem crescimento  $a \propto t$  e outro, um decrescimento.

# Capítulo 2

## Perturbações de densidade na teoria PCG

Como tivemos oportunidade de discutir, *PCG* é a melhor opção para explicar curvas de rotações de galáxia, sem precisar recorrer a uma quantidade apreciável de matéria escura. O modelo de Friedman parece estar bastante bem estabelecido no que concerne ao período pós-nucleossíntese, no entanto, há problemas quanto a escala da perturbação na época da igualdade da densidade de radiação e matéria. O COBE observou certas manchas que remontam a época da recombinação. Através do efeito Sachs-Wolfe [2] ser relacionadas as flutuações de densidade. As observações sugerem que a magnitude da densidade contraste durante o desacoplamento é de aproximadamente  $10^{-3} \leq (\delta\rho/\rho) \leq 10^{-4}$  [2]. O objetivo do nosso trabalho é testar as previsões da *PCG* quanto ao crescimento de inhomogeneidades. Para tanto, baseamos nosso trabalho na versão de *PCG* exposta por Sanders [2]. Obtemos as equações de Friedman modificadas e as resolvemos no Universo primordial. Como é de praxe, assumimos o paradigma inflacionário para esse período. Em seguida, introduzimos perturbações na densidade e obtivemos soluções para a densidade contraste e para os campos.

Nosso primeiro passo é obter a equação de movimento da métrica. Para tanto, tomamos a variação da eq. (1.31) com a escolha de potencial quadrático em  $g_{\alpha\beta}$ . Obtemos, através desse processo:

$$8\pi G_0 T^{\alpha\beta} e^{-\eta\phi} = (R^{\alpha\beta} - R/2g^{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}q_{;\mu}q^{;\mu}g^{\alpha\beta} +$$

$$(q^2 - 3/2\eta^2)\left(\frac{1}{2}\phi_{;\mu}\phi^{;\mu}g^{\alpha\beta} - \phi^{;\alpha}\phi^{;\beta}\right) - q^{;\alpha}q^{;\beta} + \frac{1}{2}e^{\eta\phi}V(q^2)g^{\alpha\beta} + \eta(\eta\phi_{;\mu}\phi^{;\mu} + \phi^{;\mu}_{;\mu})g^{\alpha\beta} - \eta(\eta\phi^{;\beta}\phi^{;\alpha} + \phi^{;\alpha;\beta}). \quad (2.1)$$

Aqui  $T^{\alpha\beta}$  é o tensor energia momento da matéria. Procedimento similar, aplicado aos campos escalares, fornece a equação para o campo  $\phi$ :

$$\eta R - \eta q_{;\alpha}q^{;\alpha} + \eta\left(q^2 - \frac{3\eta^2}{2}\right)\phi_{;\alpha}\phi^{;\alpha} - 2V(q^2)\eta e^{\eta\phi} + 4qq_{;\alpha}\phi_{;\beta}g^{\alpha\beta} + 2\left(q^2 - \frac{3\eta^2}{2}\right)\square\phi = 0 \quad (2.2)$$

e para o campo  $q$ :

$$e^{-\eta\phi} \left[ e^{\eta\phi} q^{;\alpha} \right]_{;\alpha} - q\phi^{;\alpha}\phi_{;\alpha} - V'(q^2)qe^{\eta\phi} = 0. \quad (2.3)$$

Tomando o traço da eq. (2.1) obtemos uma expressão muito útil :

$$8\pi G_0 T e^{-\eta\phi} = -R + q_{;\mu}q^{;\mu} + \phi_{;\alpha}\phi^{;\alpha}\left(\frac{3\eta^2}{2} + q^2\right) + 2V(q^2)e^{\eta\phi} + 3\eta\square\phi, \quad (2.4)$$

onde  $T$  é o traço do tensor moment energia. Eliminando o escalar de curvatura com a eq. do campo  $\phi$  (eq. 2.2) , obtemos:

$$4\pi G_0 T = \left(q^2\phi_{;\alpha}\phi^{;\alpha} + \frac{2qq_{;\alpha}\phi^{;\alpha}}{\eta} + \frac{q^2\square\phi}{\eta}\right)e^{\eta\phi}. \quad (2.5)$$

Assumindo que o conteúdo material do Universo esteja na forma de um fluido perfeito:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)v^\alpha v^\beta + pg^{\alpha\beta}, \quad (2.6)$$

segue-se que,

$$T = 3p - \rho. \quad (2.7)$$

Nos períodos em que o Universo era dominado por matéria  $p = 0$  e, por radiação ,  $p = \rho/3$ .

Para um Universo homogêneo e isotrópico, devemos tomar a métrica da eq. (1.6) para um universo plano ( $k = 0$ ). Além disso, os gradientes espaciais dos campos escalares devem ser nulos pois, se não fossem, definiriam direções privilegiadas no espaço. Em outras palavras, o princípio cosmológico implica

que  $\phi$  e  $q$  devem depender apenas do tempo, o mesmo valendo para a densidade  $\rho$  e a pressão  $p$ . Desta maneira, as equações de campo ficam enormemente simplificadas. O D'Alambertiano não perturbado, que aparece em diversas equações é:

$$\square\phi_0 = -\ddot{\phi}_0 + \phi_{;ij}g^{ij} = -\ddot{\phi}_0 - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}_0. \quad (2.8)$$

Portanto a equação não perturbada do campo para  $q$  [eq. (2.3)] fica:

$$\ddot{q} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{q} + \eta\phi\dot{q} - q\dot{\phi}^2 = -V'(q^2)e^{\eta\phi}q. \quad (2.9)$$

Já a componente (00) das equações para a métrica [eq.(2.1)] :

$$\rho 8\pi G_0 e^{-\eta\phi} = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{q}^2}{2} + \frac{3}{4}\eta^2\dot{\phi}^2 - \frac{q^2\dot{\phi}^2}{2} - \frac{e^{\eta\phi}V(q^2)}{2} + 3\eta\phi\frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.10)$$

que pode ser posta na forma:

$$\frac{8\pi}{3}\rho G_0 e^{-\eta\phi} = \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\eta\dot{\phi}}{2}\right)^2 - \frac{\dot{q}^2}{6} - \frac{1}{6}e^{\eta\phi}V(q^2) - \frac{1}{6}q^2\dot{\phi}^2. \quad (2.11)$$

A equação do traço eq.(2.4) é simplificada:

$$8\pi G_0 T e^{-\eta\phi} = -R - \dot{q}^2 - \dot{\phi}^2\left(\frac{3}{2}\eta^2 + q^2\right) + 2V(q^2)e^{\eta\phi} + 3\eta\left(-\ddot{\phi} - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}\right). \quad (2.12)$$

Nessas mesmas circunstâncias, a equação de campo para  $\phi$  [eq. (2.2)], toma a forma:

$$\eta R + \eta\dot{q}^2 - \eta\left(q^2 - \frac{3}{2}\eta^2\right)\dot{\phi}^2 - 2V(q^2)\eta e^{\eta\phi} - 4q\dot{\phi}\dot{q} - 2\left(q^2 - \frac{3}{2}\eta^2\right)\ddot{\phi} - 6\frac{\dot{a}}{a}\left(q^2 - \frac{3}{2}\eta^2\right)\dot{\phi} = 0. \quad (2.13)$$

Finalmente, a equação (2.5) se converte em:

$$4\pi G_0 T = e^{\eta\phi}\left(-q^2\dot{\phi}^2 - \frac{2}{\eta}q\dot{q}\dot{\phi} - \frac{q^2\ddot{\phi}}{\eta} - \frac{3}{\eta}q^2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}\right). \quad (2.14)$$

Como dissemos anteriormente, Sanders [2] discutiu, que em um período inflacionário os campos escalares são aproximadamente constantes. Dentro desse espírito, tomamos como campos de base  $q_0 = \text{constante}$  e procuramos a solução para  $\phi_0$ . Nesse caso, pela equação (2.9) segue-se que:

$$\phi_0^2 = Ae^{\eta\phi_0}, \quad (2.15)$$

cuja solução é,

$$\phi_0 = \frac{-2}{\eta} \ln\left(-\frac{\eta\sqrt{At}}{2} + K\right), \quad (2.16)$$

onde  $K$  é uma constante de integração. Note que, consistentemente, essa função é aproximadamente constante em tempos remotos.

## 2.0.2 Equações Perturbadas

Isto encerra o estudo das soluções dos campos de fundo. Uma vez que estamos interessados no crescimento das flutuações desses campos, devemos estudar as equações que governam pequenas perturbações das grandezas envolvidas: os campos escalares, a densidade, a pressão e a métrica. Como mencionamos anteriormente, os resultados de Lifshitz, que se baseiam nas equações de Einstein e na métrica de Robertson Walker, determinam que o crescimento da densidade contraste seja da forma de potência de  $t$ . Como veremos em seguida, a teoria *PCG* prevê um crescimento exponencial para a densidade de contraste durante o período inflacionário. Com esse propósito, fazendo as devidas perturbações,

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho_1 \\ p &= p_0 + p_1 \\ \phi &= \phi_0 + \phi_1 \\ q &= q_0 + q_1 \\ g_{\alpha\beta} &= a^2\delta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para referência futura, calculamos o D'Alambertiano,

$$\begin{aligned} \phi_{;\alpha;\beta}g^{\alpha\beta} &= -\phi_{;0;0} + \phi_{;i;j}g^{ij} \\ &= -\ddot{\phi} + (\delta_{ij} + h_{ij}a^{-2})^{-1}a^{-2}\phi_{;i;j}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Retendo apenas os termos de primeira ordem nas perturbações:

$$(\delta_{ij} + \frac{h_{ij}}{a^2})^{-1} \approx (\delta_{ij} - \frac{h_{ij}}{a^2}), \quad (2.19)$$

onde  $\phi_{;i;j} = \phi_{,i;j} - \Gamma_{ij}^\gamma \phi_{,j}$ .

Expandindo o D'Alambertiano:

$$\begin{aligned} (\square\phi)_1 &= -\ddot{\phi}_1 - a^{-2}\delta_{ij}\Gamma_{ij}^0\ddot{\phi}_1 - \frac{1}{2}a^{-2}\dot{h}\dot{\phi}_0 + a^{-4}h_{ij}\Gamma_{ij}^0\dot{\phi}_0 \\ &= -\ddot{\phi}_1 - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}_1 - \frac{1}{2}a^{-2}\dot{h}\dot{\phi}_0 + a^{-3}h\dot{a}\dot{\phi}_0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Como as equações são espacialmente homogêneas, as perturbações admitem soluções na forma de onda plana  $\phi_1 \propto \exp(ikx)$  onde  $k$  é o vetor de onda comóvel e  $x$  a posição coordenada. O caso mais favorável para o crescimento de inomogeneidades ocorre quando o vetor de onda  $k \rightarrow 0$ . Estudaremos esse caso e desprezamos então o termo  $\phi_{,i;j}^1$ . A derivada covariante do campo escalar com componentes temporal e espacial é:

$$\phi_{;0;i} = \phi_{,0,i}^1 - \frac{\dot{a}}{a}\phi_{,i}^1, \quad (2.21)$$

se anula pois tal termo possui somente componentes perturbadas ( $g_{0i} = 0$  no referencial síncrono). Em seguida, tomamos as perturbações as equações que ainda estão na forma de derivadas dos índices gregos. A equação de campo  $q$  (2.3) perturbada fica:

$$\begin{aligned} -\eta\dot{\phi}_0\dot{q}_1 - \eta\dot{\phi}_1\dot{q}_0 + q_{1;\alpha}^{\dot{\alpha}} + (q_0 + q_1)(\dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_1)^2 - \\ A(q_0 + q_1)e^{\eta\phi_0}(1 + \eta\phi_1) = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Fazendo o mesmo procedimento para a equação de Einstein modificada temos:

$$\begin{aligned} 8\pi G_0(\rho_1 - \rho_0\eta\phi_1) &= e^{\eta\phi_0} \left[ R_{00}^* + R^*/2 - \dot{q}_0\dot{q}_1 - (q_0^2 - \frac{3}{2}\eta^2)(\dot{\phi}_0\dot{\phi}_1) - \right. \\ &\quad \left. q_0q_1\dot{\phi}_0^2 - Aq_0q_1e^{\eta\phi_0} - e^{\eta\phi_0}\frac{\eta}{2}\phi_1(Aq_0^2 + B) - \right. \\ &\quad \left. \eta\square_1\phi - \eta\ddot{\phi}_1 \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde  $R^*$  e  $R_{00}^*$  representam a perturbações do escalar de curvatura e do tensor de Ricci (componente 0-0):

$$R^* = \frac{\ddot{h}}{a^2} + h\left(-\frac{2\dot{a}^2}{a^4} - \frac{2\ddot{a}}{a^3}\right), \quad (2.24)$$

$$R_{00}^* = -\frac{\ddot{h}}{2a^2} + \frac{\dot{a}\dot{h}}{a^3} \quad (2.25)$$

O valor acima vale para o caso particular em que o fator de escala evolui exponencialmente. Fazendo o mesmo com a equação do traço (2.5) obtemos:

$$4\pi G_0 e^{-\eta\phi_0} (T_1 - \eta\phi_1 T_0) = -2q_0^2 \dot{\phi}_0 \dot{\phi}_1 - 2q_0 q_1 \dot{\phi}_0^2 - \frac{2}{\eta} q_0 (\dot{q}_0 \dot{\phi}_1 + \dot{q}_1 \dot{\phi}_0) - \frac{2}{\eta} q_1 \dot{q}_0 \dot{\phi}_0 + \frac{1}{\eta} q_0^2 (\square\phi)_1 + \frac{2}{\eta} q_0 q_1 (\square\phi)_0. \quad (2.26)$$

Esta é a equação do traço perturbada.

Tomando as componetes  $\alpha = 0$  e  $\beta = i$  da eq. (2.1), e assumindo um período inflacionário, onde  $a = e^{\Lambda t}$  ( $\Lambda$  não é a constante cosmológica!) e uma equação de estado do tipo  $p = -\rho$ , segue-se que

$$\dot{h} - 2h\Lambda = -3e^{2\Lambda t} (\dot{\phi}_1 - \Lambda\phi_1), \quad (2.27)$$

onde  $h = h_{11} + h_{22} + h_{33}$ .

Usando as eqs.(2.20) e (2.27), o D'Alembertiano perturbado toma a seguinte forma :

$$(\square\phi)_1 = -\ddot{\phi}_1 - 3\Lambda\dot{\phi}_1 + \frac{3\eta\sqrt{A}}{2K} (\dot{\phi}_1 - \Lambda\phi_1). \quad (2.28)$$

A equação para  $(\square q)_1$  assume a mesma forma que a de cima, com  $\dot{q}_0 = 0$ .

### 2.0.3 Equações Perturbadas para $\phi_0$ e $q_0$

Até aqui montamos as equações perturbadas na sua forma geral, sem explicitarmos as soluções das grandezas não perturbadas  $q_0, \phi_0$  que obtivemos anteriormente. Usando as eqs. (2.16) e (2.22), segue-se que

$$\ddot{q}_1 + \dot{q}_1 \left[ 3\Lambda + \frac{2\eta\sqrt{A}}{-\eta\sqrt{At+2K}} \right] - 4q_0 \left( \frac{\sqrt{A}}{-\eta\sqrt{At+2K}} \right) \dot{\phi}_1 + q_0 \eta \left( \frac{4\sqrt{A}}{(-\eta\sqrt{At+2K})^2} \right) \phi_1 = 0. \quad (2.29)$$

Por eq.(2.23) e eq. (2.28) temos também:

$$e^{-\eta\phi_0} 8\pi G_0 (\rho_1 - \eta\rho_0\phi_1) = R_{00}^* + \frac{R^*}{2} - (q_0^2 - \frac{3\eta^2}{2}) \dot{\phi}_0 \dot{\phi}_1 - q_0 \dot{\phi}_0^2 q_1 - Aq_0 e^{\eta\phi_0} q_1 - \frac{\eta}{2} e^{\eta\phi_0} (Aq_0^2 + B)\phi_1 - \eta \left[ -3\Lambda\dot{\phi}_1 + \frac{3\eta}{2} \dot{\phi}_0 (\dot{\phi}_1 - \Lambda\phi_1) \right] \quad (2.30)$$

Lembrando as definições de  $R^*$  e  $R_{00}^*$  [eqs. (2.24) e (2.25)] e a relação entre  $h$  e  $\phi_1$  [eq.(2.27)], obtemos:

$$R_{00}^* + \frac{R^*}{2} = -3\Lambda\eta(\dot{\phi}_1 - \Lambda\phi_1) \quad (2.31)$$

Então a equação (2.30) fica:

$$\begin{aligned} 8\pi G_0(\rho_1 - \eta\rho_0\phi_1) = & \left\{ \dot{\phi}_1 \left[ -(q_0^2 - \frac{3}{2}\eta^2) \frac{2\sqrt{A}}{2K - \eta\sqrt{At}} - 3\eta^2 \frac{\sqrt{A}}{2K - \eta\sqrt{At}} \right] \right. \\ & + \phi_1 \left[ 3\Lambda^2\eta - 2\eta \frac{Aq_0^2 + B}{(2K - \eta\sqrt{At})^2} + 3\eta^2\Lambda \frac{\sqrt{A}}{2K - \eta\sqrt{At}} \right] \\ & \left. + q_1 \left[ \frac{-8q_0A}{(-\eta\sqrt{At} + 2K)^2} \right] \right\} \frac{4}{(+2K - \eta\sqrt{At})^2}. \quad (2.32) \end{aligned}$$

Pela equação perturbada do traço eq.(2.26) , encontramos:

$$\begin{aligned} 8\pi G_0(\rho_1 - \eta\phi_1\rho_0) = & -\frac{2}{(2K - \eta\sqrt{At})^2} \left\{ -\ddot{\phi}_1 \left( \frac{q_0^2}{\eta} \right) + \dot{\phi}_1 \left( \frac{3}{2}\dot{\phi}_0 q_0^2 - 2q_0^2\dot{\phi}_0 - \frac{3}{\eta}\Lambda q_0^2 \right) + \right. \\ & \left. -\phi_1 \left( \frac{3}{2}q_0^2\Lambda\dot{\phi}_0 \right) - \dot{q}_1 \left( \frac{2}{\eta}q_0\dot{\phi}_0 \right) - q_1 \left( \frac{2}{\eta}q_0\ddot{\phi}_0 + \frac{6}{\eta}\Lambda q_0\dot{\phi}_0 + 2q_0\dot{\phi}_0^2 \right) \right\}. \quad (2.33) \end{aligned}$$

Portanto reescrevemos a equação (2.30) e a deixamos na forma de :

$$\begin{aligned} 8\pi G_0(\rho_1 - \eta\rho_0\phi_1) = & \left\{ \dot{\phi}_1 \left( -3\Lambda\eta - (q_0^2 - \frac{3}{2}\eta^2)\dot{\phi}_0 + 3\eta\Lambda - \frac{3}{2}\eta^2\dot{\phi}_0 \right) + \right. \\ & \left. \phi_1 \left( 3\Lambda^2\eta - \frac{\dot{\phi}_0^2}{2A}\eta(Aq_0^2 + B) + \frac{3}{2}\eta^2\dot{\phi}_0\Lambda \right) - (2q_0\dot{\phi}_0^2)q_1 \right\} \frac{\dot{\phi}_0^2}{A}. \quad (2.34) \end{aligned}$$

Comparando as eq.'s (2.33) e (2.34), segue-se que :

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_1 + \dot{\phi}_1 \left( 3\Lambda + \frac{\dot{\phi}_0\eta}{2} + 2\dot{\phi}_0\eta \right) + \phi_1 \left( \frac{3}{2}\eta\Lambda\dot{\phi}_0 - \frac{6\Lambda^2\eta^2}{q_0^2} + \frac{\dot{\phi}_0^2\eta^2}{q_0^2 A} (Aq_0^2 + B) \right. \\ \left. - \frac{3\eta^3\dot{\phi}_0\Lambda}{q_0^2} \right) + \dot{q}_1 \left( \frac{2\dot{\phi}_0}{q_0} \right) + q_1 \left( \frac{2\ddot{\phi}_0}{q_0} + \frac{6\Lambda\dot{\phi}_0}{q_0} + \frac{6\eta\dot{\phi}_0^2}{q_0} \right) = 0. \quad (2.35) \end{aligned}$$

Esta é uma equação muito importante , pois reuduz a solução do problema das perturbações a apenas duas variáveis perturbadas independentes,  $q_1$  e  $\phi_1$ . É conveniente fazer uma troca de variável,

$$\tau = -\frac{\eta t}{2} + \frac{K}{\sqrt{A}}. \quad (2.36)$$

Adotando a convenção em que linhas correspondem a derivadas em relação a  $\tau$ , eq. (2.35) pode ser posta na forma:

$$\phi_1'' + \left(\chi_1 - \frac{5}{\tau}\right)\phi_1' + \phi_1\left(\chi_2 + \frac{\chi_3}{\tau} + \frac{\chi_4}{\tau^2}\right) + \frac{\chi_5 q_1'}{\tau} + q_1\left(\frac{\chi_6}{\tau} + \frac{\chi_7}{\tau^2}\right) = 0, \quad (2.37)$$

onde os  $\chi_i$ 's são várias constantes que dependem de  $\Lambda$ ,  $q_0$ ,  $\eta$ ,  $A$  e  $B$  conforme tabela abaixo:

Lista de Parâmetros Cosmológicos	
$\chi_1$	$-\frac{6\Lambda}{\eta}$
$\chi_2$	$-\frac{6\Lambda^2\eta^2}{q_0^2}$
$\chi_3$	$\frac{3\eta\Lambda}{2} - \frac{3\eta^3\Lambda}{q_0^2}$
$\chi_4$	$\frac{\eta^2}{Aq_0^2}(Aq_0^2 + B)$
$\chi_5$	$-\frac{\eta}{q_0}$
$\chi_6$	$\frac{6\Lambda}{q_0}$
$\chi_7$	$\frac{\tau\eta}{q_0}$
$\chi_8$	$\frac{4q_0}{\eta}$
$\alpha$	$-\frac{6\Lambda}{\eta}$

(2.38)

Fazendo o mesmo para a equação do campo  $q$  2.29 obtemos:

$$q_1'' + q_1'\left(\alpha - \frac{2}{\tau}\right) + \frac{\chi_8\phi_1'}{\tau} + \frac{\chi_8\phi_1}{\tau^2} = 0, \quad (2.39)$$

Onde  $\alpha$  e  $\chi_8$  são constantes que aparecem na tabela acima. Estas equações são fundamentais, pois as duas estão em função de  $\phi_1$  e  $q_1$  apenas. O próximo passo é resolvê-las. Pela equação (2.39), vemos facilmente que ela pode ser escrita como:

$$q_1'' + q_1'\left(\alpha - \frac{2}{\tau}\right) + \frac{(\phi_1\tau)'}{\tau^2}\chi_8 = 0 \quad (2.40)$$

Integrando a equação podemos exprimir  $\phi_1$  em termos de  $q_1$  :

$$\phi_1 = \frac{1}{\chi_8\tau} \left\{ q_1'\tau^2 + \alpha\tau^2 q_1 - 4q_1\tau + \psi \right\}, \quad (2.41)$$

onde  $\psi = \int q_1(4 - 2\alpha\tau)d\tau$ . É necessário também conhecer sua derivada em relação a  $\tau$  :

$$\phi_1' = \frac{1}{\chi_8} \left\{ q_1''\tau + q_1'(-3 + \alpha\tau) + q_1\left(-\alpha + \frac{4}{\tau}\right) - \frac{\psi}{\tau^2} \right\}, \quad (2.42)$$

Enquanto que a derivada segunda é:

$$\phi_1'' = \frac{1}{\chi_8} \left\{ q_1''' \tau + q_1''(-2 + \alpha\tau) + q_1' \left( \frac{4}{\tau} \right) + q_1 \left( -\frac{8}{\tau^2} + \frac{2\alpha}{\tau} + \frac{2\psi}{\tau^3} \right) \right\} \quad (2.43)$$

Com a ajuda das eq.'s acima podemos eliminar uma das variáveis e reescrever (2.37) como apenas função de  $q_1$ :

$$\begin{aligned} & q_1''' \tau + q_1'' [-7 + \tau(\alpha + \chi_1)] \\ & + q_1' \left[ \frac{1}{\tau}(19 + \chi_4 + \chi_8\chi_5) + (\chi_3 - 3\chi_1) + \tau(\alpha\chi_1 - 5\alpha + \chi_2) \right] \\ q_1 & \left[ \frac{1}{\tau^2}(-28 - 4\chi_4 + \chi_7\chi_8) + \frac{1}{\tau}(7\alpha + 4\chi_1 + \alpha\chi_4 - 4\chi_3 + \chi_8\chi_6) + (-\alpha\chi_1 + \alpha\chi_3 - 4\chi_2) \right] \\ & \psi \left[ \frac{1}{\tau^3}(7 + \chi_4) + \frac{1}{\tau^2}(\chi_3 - \chi_1) + \frac{1}{\tau}(\chi_2) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Tomando esta equação e derivando-a fim de eliminar a integral  $\psi$ , obtemos uma equação de tamanho hipercolossal, porém no limite que  $-\tau \rightarrow i\infty$ , a equação é fortemente simplificada, reduzindo-se a:

$$q_1''' + q_1''(\chi_1 + \alpha) + q_1'(\alpha\chi_1 + \chi_2) + q_1\alpha\chi_2 = 0. \quad (2.45)$$

Tal equação admite solução da forma exponencial:

$$q_1 = e^{P\tau}. \quad (2.46)$$

Note que, devido a nossa definição para  $\tau$ , uma solução  $q_1(t)$  com crescimento exponencial no tempo  $t$  deverá corresponder a uma solução com  $P$  negativo. Unindo as equações acima e introduzindo o valor das constantes [eq. (2.38)], encontramos:

$$P^3 - 12\frac{\Lambda}{\eta}P^2 + P \left[ \left(6\frac{\Lambda}{\eta}\right)^2 \left(1 - \frac{\eta^4}{6q_0^2}\right) \right] + \frac{\eta^4}{6q_0^2} \left(\frac{6\Lambda}{\eta}\right)^3 = 0. \quad (2.47)$$

Definindo  $Q = \frac{P\eta}{6\Lambda}$ , a equação acima fica:

$$Q(Q-1)^2 + \frac{\eta^4}{6q_0^2}(1-Q) = 0, \quad (2.48)$$

cujas soluções são:

$$Q = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4\eta^4}{6q_0^2}} \end{cases}. \quad (2.49)$$

Assumindo  $\eta^4/q_0^2 \ll 1$ , podemos expandir a raiz, e encontramos a solução negativa de  $P$  :

$$P = -\frac{\eta^3 \Lambda}{q_0^2}. \quad (2.50)$$

Havendo conhecimento de  $q_1$ , podemos encontrar a solução para  $\phi_1$  :

$$\phi_1 = \left( \frac{1}{\chi_8} (P\tau + \alpha\tau - 4) - \frac{2\alpha}{P} \right) e^{P\tau} \quad (2.51)$$

No entanto, o que realmente nos interessa é o valor  $\rho_1$ . Tomando o limite  $|\tau| \gg 1$  da eq. (2.32) e levando os valores de  $q_1$  e  $\phi_1$  nesse mesmo limite [eqs.(2.50,2.51)] para essa equação, obtemos a solução assintótica para  $\rho_1$ :

$$8\pi G_0 \rho_1 \approx \frac{e^{P\tau}}{\tau^2} \frac{\eta(P + \alpha)}{\chi_8 A} \left\{ \frac{\eta P q_0^2}{2} + 3\Lambda^2 + 8\pi G_0 \rho_0 \right\}. \quad (2.52)$$

A Relatividade Geral, preve  $\rho_1 = \text{const.}$  durante o período inflacionário. Em contraste, a PCG prevê um crescimento tipo exponencial dessa quantidade. Em seguida, discutiremos as implicações cosmológicas desse fato.

# Capítulo 3

## Conclusão

Ao revisarmos o crescimento da densidade de contraste no contexto da Relatividade Geral, vimos que esta cresce em forma de potência do tempo ( $\delta_+ \propto t$ ) durante a época dominada por radiação. No entanto, como havíamos frisado, durante tal fase os bárions não podem se movimentar livremente pelo plasma de fótons, devido a pressão da radiação. Em consequência, a matéria não poderia ter colapsado. Nesse período, a massa de Jeans é menor que uma massa galáctica típica. A esse período, segue-se outro em que as perturbações se comportam como ondas sonoras (oscilações). Neste período o vetor de onda comóvel  $k$  é muito maior que o vetor de onda de Jeans  $k_J$ . Posto de outra maneira, a massa de Jeans  $M_J$  é muito maior do que a massa galáctica  $M$ , cujo valor é cerca de  $10^{11}$  massas solares. Por esse motivo, devido a ação da pressão do fluido, a matéria novamente não poderá colapsar. Finalmente, ao chegarmos ao desacoplamento, a massa de Jeans cai abruptamente, de cerca  $10^{17}$  a  $10^5$  massas solares, devido a enorme diminuição da pressão. Nesta fase a matéria poderá de fato colapsar.

A partir desse momento, o modelo de Friedman prevê um crescimento da densidade de contraste da forma  $\delta_+ \propto t^{2/3}$ . Nesse cenário torna-se difícil explicar como as fortes concentrações de matéria que observamos (galáxias, aglomerados, etc) poderiam ter evoluído a partir de fracas condensações de matéria com uma lei de crescimento tão lento. De fato, com um crescimento tão lento não haveria tempo hábil para a densidade de contraste entrasse no regime de evolução não linear, onde  $\delta \approx 1$  e as condensações se desacoplaram da expansão geral do Universo devido a sua autogravitação.

Como tivemos oportunidade de discutir, algumas teorias alternativas a

Relatividade Geral tem sido propostas para explicar as curvas planas de rotação de galáxias sem ter que recorrer ao expediente de postular a existência de considerável quantidade matéria escura permeando o Universo.

Usando a versão da teoria *PCG* com um potencial quadrático [2], obtivemos um comportamento tipo exponencial para o crescimento de  $\rho_1$  durante o período inflacionário. Ao sair desse período inflacionário, e entrar no período dominado pela radiação, essas perturbações são também congeladas, por mecanismos similares aqueles que ocorrem no modelo padrão. Ao entrar na fase seguinte, o modelo evolui de maneira idêntica ao Modelo Padrão. O ponto importante a salientar aqui é ao entrar nesse novo período, a densidade de contraste tem acumulado o crescimento exponencial obtido durante o período inflacionário. Por outro lado, este crescimento estarem acordo com as medidas de anisotropia do COBE que restringe a densidade contraste  $\delta$  como sendo um pouco menor que uma parte em  $10^5$ . Essa restrição não inviabiliza o *PCG* pois um  $\eta$  próximo de  $10^{-6}$  pequeno geraria um crescimento modesto da densidade contraste, apesar da dependência exponencial. Em resumo, no Universo jovem, que evolui de forma prevista pelo *PCG*, poderíamos explicar o atual aspecto do Universo observável, pois seu crescimento do tipo exponencial garantiria uma magnitude inicial para a densidade contraste durante a recombinação, da ordem de  $10^{-3}$  a  $10^{-4}$ . Existem várias formas de potencial que poderiam ser usadas, porém aqueles que carregam instabilidade de vácuo estão proibidos (potencial sêxtico, *PCG* mínima, etc). Além disso, apesar de que as previsões da *PCG* mínima estarem de acordo com os testes de precisão no sistema solar [2], ela prevê curvas planas que não dependem da massa da galáxia, em total desacordo com o observado. Portanto, o potencial quadrático torna-se a opção mais atraente, mas seguramente, não definitiva.

Embora o Modelo de Friedman apresente problemas conceituais, como por exemplo o problema do horizonte, das presentes inomogeneidades observadas etc, ele é bastante coerente com todos os testes observacionais. Talvez o mais importante de todos seja a previsão dos núcleos leves criados durante a nucleossíntese primordial. O alto acordo entre teoria e observação garante validade do modelo Padrão a partir de épocas que remontam 1 seg, ou equivalentemente, a uma temperatura de 10MeV.

A questão importante é se a abundância de elementos primordiais observada poderia desclassificar *PCG* como uma teoria cosmológica viável. Uma das principais previsões da teoria é a variação da Constante de Newton  $G$

[2]. O valor de  $G$  seria um pouco maior durante a nucleossíntese implicando numa taxa de expansão do Universo nesta época era cerca de 6 % maior. Isso conduziria, aparentemente, a um aumento na produção de Hélio primordial. No entanto no modelo em questão a densidade bariônica seria menor e por isso os dois efeitos se compensariam aproximadamente [2]. Desta maneira, a abundância prevista para o Hélio estaria dentro do limite experimental. Com relação aos núcleos mais pesados, as abundâncias do  $H^2$  e  $Li^7$  seriam cerca de 10 a 100 vezes maior do que o observado [2]. Deve-se mencionar que tal previsão depende da forma do potencial usado. Com relação aos experimentos solares a teoria carrega determinados problemas, como por exemplo na precessão do periélio de Mercúrio [2].

Concluimos esta tese com a observação que  $PCG$  vai muito além de prever curvas planas de rotação galáxias, ela faz novas previsões em todas escalas e, em contraste ao paradigma da matéria escura, pode ser testada contra os dados observacionais. Como uma das consequências, mostramos nesse trabalho que  $PCG$  poderia resolver o problema da formação de estruturas no Universo.

# Bibliografia

- [1] Bekenstein, J. D. and Sanders,R., 1994. *Astrophys. J.*, **429**, 480.
- [2] Peebles, P. J. E. (1993), *Principles of Physical Cosmology*, (Princeton: Princeton University Press).
- [3] Schutz, B. F. (1990), *A first course of General Relativity*,
- [4] Kolb, E. W., Turner, M. S. (1994), *The early Universe*, (Addison-Wesley Publishing Company).
- [5] Sachs,R. K., and Wolfe,A.M.,1967. *Ap.J.*,**147**,73.
- [6] Smoot, G. F. and Lubin, P. M. (1979), *Astrophys. J.*, **234**, L83
- [7] Hubble, E. (1926b), *Ap. J.* **64**, 321.
- [8] Zwicky, F. (1933), *Helv. Phys. Acta* **6**, 110 .
- [9] Smith, S. (1936), *Ap. J.* **83**, 23.
- [10] Gershtein, S. S. and Zel'dovich, Ya. B (1966), *JETP Lett.* **4**, 174.
- [11] Cowsik, R. and McClelland,J. (1973), *Ap. J.* **180**, 7.
- [12] Bekenstein, J. D. (1987a), In: *Proceedings of the second Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics*, ed.Dyer, C., (Singapore: World Scientific).
- [13] Tully, R. B and Fisher, J. R. (1977), *Astr. Ap.*, **54**, 661.
- [14] Milgrom, M. (1983), *Astrophys. J.*,**270** , 365.

- [15] Milgrom, M. (1983), *Astrophys. J.*, **270**, 371.
- [16] Bekenstein, J. D. and Milgrom, M., 1984. *Astrophys. J.*, **286**, 7
- [17] Milgrom, M. (1986), *Astrophys. J.*, **302**, 617.
- [18] Sanders R. H. (1988), *Mon. Not. R. Astr. Soc.* , **235**, 105.
- [19] Sanders, R.H. (1989), *Mon. Not. R. Astr. Soc.* , **241**, 135.
- [20] Jeans, J., *Phil. (1902), Trans. Roy. Soc.*, **199A**, 49.
- [21] Lifshitz, E. J. (1946), *Phys. U.R.S.S.*, **10**, 116.
- [22] Weinberg, S. (1972), *Gravitation and Cosmology* , (New York: Wiley).