

Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Física Gleb Wataghin  
**Dissertação de Mestrado**

# Mecânica Quântica das Oscilações de Neutrinos

Celso Chikahiro Nishi

orientador: Prof. Dr. Stefano De Leo  
*Departamento de Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP*

co-orientador: Prof. Dr. Márcio José Menon  
*Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia, IFGW-UNICAMP*

Dissertação apresentada no Instituto  
de Física Gleb Wataghin para obtenção  
do título de Mestre em Física.

Campinas, fevereiro de 2003

 UNICAMP	<b>PÓS</b> GRADUAÇÃO	<b>Instituto de Física Gleb Wataghin</b>	C.P. 6165 CEP: 13083-970 Tel. (19) 788-5305 e-mail: secpos@ifi.unicamp.br
--	-------------------------	--	--

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE CELSO CHIKAHIRO NISHI – RA 970400 APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 24 / 02 / 2003.

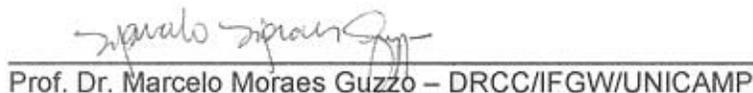
**COMISSÃO JULGADORA:**



Prof. Dr. Stefano De Leo (Orientador do Candidato) DMA/IMECC/UNICAMP



Prof. Dr. Juan Carlos Montero Garcia – IFT/UNESP/SP



Prof. Dr. Marcelo Moraes Guzzo – DRCC/IFGW/UNICAMP

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

N633m

Nishi, Celso Chikahiro

Mecânica quântica das oscilações de neutrinos /  
Celso Chikahiro Nishi. -- Campinas, SP : [s.n.], 2003.

Orientadores: Stefano De Leo e Márcio José Menon.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Neutrinos. 2. Mecânica quântica. 3. Função  
de onda. 4. Oscilações. I. De Leo, Stefano. II. Menon,  
Márcio José. III. Universidade Estadual de Campinas.  
Instituto de Física "Gleb Wataghin". IV. Título.

À minha família

“... eu estava ali, vivia entre aqueles livros cheios de conhecimentos, alguns dos quais descreviam as formas imutáveis das espécies animais, outros explicavam que a quantidade de energia se conserva integralmente no universo; estava ali, de pé em frente a uma janela cujas vidraças tinha um índice de refração determinado. Mas que barreiras frágeis! Creio que é por preguiça que o mundo parece o mesmo de um dia para o outro. ”

Jean-Paul Sartre, *A Náusea*

The most exciting phrase to hear in science, the one that heralds new discoveries, is not ‘Eureka!’ (I found it!) but ‘That’s funny ...’

Isaac Asimov (1920 - 1992)

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer à todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para este trabalho, tanto com contribuições diretas e discussões científicas como com discussões de interesse geral, evidentemente necessárias. Explicitamente, agradeço:

- ao Prof. Stefano De Leo pela orientação paciente, apoio e discussões extensivas, mas estimulantes, que tivemos;
- aos meus pais, Shinobu e Mieko; meus irmãos, Luciente, Nelson, Flávia e Emília;
- aos meus colegas de curso, Presto, Manaus, Caniggia, Dracena, Pardal, Priscila, Alexandre, Luciana, Rafael, Ossamu, Gustavo e Wagner que me acompanharam durante a graduação, alguns, também durante o mestrado;
- aos meus colegas de cantina, Presto, Dracena, Pardal, Caniggia, Alexandre, Luciana e Chico pelas interessantes discussões acadêmicas e extra acadêmicas, sobretudo;
- aos escaladores do GEEU, Tatai, Piccin, Urubas, Saúde, Shiroma e Tereza pelas escaladas e roubadas;
- ao mestre mandarin Alex e seu discípulo Presto pelas farofadas e “fenshin-gon-jinkhulah-fhuynch-jughmichu” (em “old ancient” mandarin arcaico);
- aos meus colegas da sala 21 do prédio D, Paulo, Borelli e Gustavo;
- aos colegas do “aquário”, Lásaro, Pepe, Renato, Superman, Pedro e Walter, pelas eventuais ajudas e discussões.
- aos colegas de pós-graduação e do café da APGF, Rogério, Goiano, Félix, Bahiano, André e Dracena, sem os quais o café não seria o mesmo.
- ao Prof. Pietro Rotelli pelo convite ao *Dipartimento di Fisica* da *Università degli Studi di Lecce*, onde pude ter estimulantes discussões, e ao INFN pelo apoio financeiro;
- à CAPES e à pós-graduação do IFGW pelo apoio financeiro.

## Resumo

Revisamos a Mecânica Quântica das Oscilações de neutrinos sob o ponto de vista da primeira quantização com o uso de pacotes de onda. Formalizamos o problema, assumindo como boa aproximação a propagação livre do neutrino depois da criação e antes de ser detectada. Desse modo, nenhuma consideração concreta é feita sobre os processos de criação e detecção, nem sua influência sobre o formalismo é considerada. Mesmo assim, como consequência direta, o formalismo permite resolver alguns problemas de normalização presentes em algumas abordagens usando pacotes de onda. Além disso, algumas características gerais do comportamento das fórmulas de oscilação podem ser inferidas, entre elas, o limite incoerente. Não há necessidade de distinção entre processos relativísticos e não relativísticos no formalismo, a não ser nas aproximações em cálculos explícitos. Do mesmo modo, não há efeitos de amplificação da oscilação em casos não relativísticos, apesar de tais efeitos serem advogados por alguns trabalhos.

O uso explícito de pacotes de onda gaussianos permite-nos, nesse caso, classificar os regimes de oscilação. Nela estão presentes os fenômenos: de oscilação de sabor, de separação de pacotes e de alargamento do pacote; estes últimos são desprezados em outros trabalhos. O principal ganho de se incluir o efeito de alargamento é a melhora da aproximação analítica da fórmula de oscilação, já que isso inclui termos de ordem superior. Do mesmo modo, parâmetros característicos desses fenômenos podem ser quantificados.

Alguns problemas referentes a integrações no tempo e médias são esclarecidas, e uma forma coerente de tomar médias mostra que esse procedimento só é relevante se a taxa de criação do neutrino variar muito rapidamente em relação à incerteza no tempo de detecção causado pela incerteza na posição.

Mesmo assim, alguns problemas fundamentais restaram. A solução completa do problema da indefinição de sabor inicial não foi possível mas, mostramos que sob certas condições o formalismo é plenamente aplicável.

Por fim, sob a luz do formalismo de pacotes de onda, as fórmulas de oscilação deduzidas a partir de ondas planas são analisadas e, constata-se que as fórmulas com fatores adicionais não correspondem a limites do formalismo com pacotes de onda. Algumas explicações são expostas a esse respeito.

## Abstract

We review the Quantum Mechanics of Neutrino Oscillations focused on the first quantization point of view, with the use of wave packets (WP). We formalize the problem, assuming as a good approximation the free propagation of the neutrinos after production and before detection. Therefore, no real consideration is made about the production and detection processes nor is its influence on the formalism considered. Even so, as a direct consequence, the formalism allows us to solve some problems of normalization appearing in some approaches using WP.

Moreover, some general features of the behavior of the oscillation formulas can be inferred, among them, the incoherent limit. There is no need to distinguish between relativistic and non relativistic processes in the formalism, except in the approximations in explicit calculations. There is no effects of enhancement of oscillation in the non relativistic limit as well.

The explicit use of gaussian WP allow us to classify the oscillation regimes in this case. They are characterized by the phenomena of flavor oscillations, wave packet slippage and spreading effects. The last is usually not taken into account. The main gain to include spreading effects is the better analytic approximation we get in the oscillation formulas, since it includes higher order terms. Characteristic parameters for these phenomena can be inferred as well.

Some problems concerning time integrations and time averages are cleared up, and a correct way of taking averages shows that this procedure is only important when the production rate varies more rapidly than time uncertainty caused by position uncertainty in detection.

Even though, some fundamental problems rest. The complete solution of the initial flavor definition was not yet found, but we show that under certain conditions the formalism is well applicable.

At last, under the light of the WP approach, the oscillation formulas deduced with the use of plain waves are analyzed. We verify that the formulas with extra factors in the oscillation phase do not correspond to limits of the wave packet formalism. Some explanations are given about that.

# Conteúdo

Agradecimentos	v
Resumo	vi
Abstract	vii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Problemática Geral	3
1.2 Objetivos	5
<b>2 Formalismo e Modelamento</b>	<b>7</b>
2.1 Partícula Única?	8
2.2 Formalismo de duplo bra-ket	10
2.3 Evolução Temporal	14
2.4 Observáveis e Probabilidade	15
2.5 Auto-Estados de Sabor	16
2.6 Probabilidade de Mudança de Sabor	19
2.7 Análise da fórmula de Oscilação	20
2.8 Relações de Substituição do Tempo pela Posição	23
<b>3 Aplicação em Pacotes Gaussianos</b>	<b>26</b>
3.1 Cálculo Explícito da Amplitude de Oscilação	26
3.1.1 Cálculo na Representação de Posição	28
3.2 Regimes de Oscilação para o caso gaussiano	29
3.3 Resultados e Ilustração Numérica	31
3.4 Posição de Sabor	32
<b>4 Revisão e Discussão</b>	<b>40</b>
4.1 Média sobre Observáveis Desconhecidos ou Irrelevantes	40
4.1.1 Integração no Espaço e Integração no Tempo	42
4.1.2 Conservação de Momento $\times$ Energia	44
4.1.3 Média sobre o Tempo Inicial	45
4.2 Condições Cinemáticas na Criação	49
4.2.1 Decaimento do Píon	49
4.3 Discussão do uso de Ondas Planas	51
4.4 Oscilações $\Delta m = 0$	53

<b>5 Fenômeno de Oscilação Quântica (artigo em anexo)</b>	<b>55</b>
I Introdução . . . . .	56
II Fatores Adicionais nas Fórmulas de oscilação . . . . .	57
III Formalismo de Pacote de Onda com Criação Instantânea . . . . .	59
IV Condições Cinemáticas na Produção . . . . .	61
V Criação não Instantânea . . . . .	62
VI Pacote de Onda Imaginário . . . . .	63
VII Conclusões . . . . .	64
VIII Referências . . . . .	65
Figuras . . . . .	66
<b>6 Conclusões e Perspectivas</b>	<b>71</b>
<b>Apêndice</b>	<b>72</b>
<b>A Expansões em Mecânica Quântica</b>	<b>73</b>
<b>B Propriedades da Gaussiana</b>	<b>75</b>
<b>C Integração e Aproximação de Funções de Onda</b>	<b>77</b>
<b>D Grandezas Relevantes (médias e diferenças)</b>	<b>79</b>
<b>E Erro da Associação distância <math>\leftrightarrow</math> tempo</b>	<b>81</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>83</b>

# Lista de Figuras

2.1	Função diferença de energia ( $\Delta E(p)$ ) e suas derivadas . . . . .	22
3.1	Oscilação de sabor . . . . .	35
3.2	Separação . . . . .	36
3.3	Indefinição de sabor e supressão da oscilação . . . . .	37
3.4	Sabor definido . . . . .	38
3.5	Coerência . . . . .	39
5.1	Pontos que se interferem no PO de massa: compensação de fases . . . . .	66
5.2	PO de sabor . . . . .	67
5.3	PO de duplo pico: $t = 0$ . . . . .	68
5.4	PO de duplo pico evoluído temporalmente . . . . .	69
5.5	PO de duplo pico: autoestados de sabor . . . . .	70

# Capítulo 1

## Introdução

A física de neutrinos é atualmente um campo de pesquisa expressivamente ativo e reconhecidamente desafiador dentro da física de altas energias ou, igualmente, dentro da física das partículas elementares e campos, tanto do ponto de vista teórico [1, 2, e referências] como experimental [3, 4, 5]. Haja vista os enormes detectores de neutrinos que estão em funcionamento, dos quais pode se citar o SUPERKAMIOKANDE [6] como melhor exemplo do uso massivo de recursos, tecnologia e do envolvimento de um grande número de pesquisadores, para se desvendar os mistérios do comportamento do *neutrino*. O SuperKamiokande consiste de um grande tanque contendo 50.000 toneladas de água ultra-pura situado a 1 km da superfície terrestre dentro da mina Mozumi, na cidade de Kamioka, no Japão [6]. Paralelamente, do ponto de vista teórico, um grande número de mecanismos e modelos [2, 7] estão sendo propostos para explicar o fenômeno. Alguns desses mecanismos baseiam-se em modelos de grande unificação, prevendo uma grande gama de possibilidades de geração das matrizes de mixing.

Fortes evidências experimentais apontam para a existência de “conversões” entre neutrinos de diferentes sabores em dois dos principais cenários: neutrinos atmosféricos (para uma revisão veja [7]) e neutrinos solares [8]. Neutrinos atmosféricos são neutrinos produzidos pelo decaimento de subprodutos de reações entre raios cósmicos primários e a atmosfera terrestre, principalmente advindo de píons e káons. Uma das primeiras evidências diretas de oscilação para neutrinos atmosféricos surgiu em 1998, advindo da colaboração SuperKamiokande [9], através da medição da dependência do fluxo de neutrinos muônicos com o ângulo zenital, o que indicava fortemente a oscilação de sabor com a distância. As evidências anteriores apresentavam um déficit de neutrinos muônicos atmosféricos (veja [7] e referências), (contradizendo as previsões teóricas feitas a partir de simulações de Monte Carlo), e um fluxo de neutrinos eletrônicos de acordo com as mesmas simulações. A verificação mais robusta desse déficit, baseou-se na medição da razão entre neutrinos (e antineutrinos) muônicos e eletrônicos que podia ser calculado com maior precisão. A partir daí, o experimento de Kamiokande concluiu em 1988 ([7, 10] e referências) que os dados obtidos não podiam ser explicados por erros estatísticos ou incertezas no fluxo de raios cósmicos iniciais e que uma nova física, favoravelmente às oscilações de neutrinos, poderia explicá-los. A verificação de que o desaparecimento do neutrino muônico realmente ocorre para os parâmetros característicos dos neutrinos atmosféricos, está sendo feita, com precisão cada vez maior, pelo experimento K2K [11], que está em funcionamento desde 1999. Este experimento detecta

neutrinos muônicos produzidos por um acelerador síncrotron de prótons, situado na High Energy Accelerator Research Organization (KEK<sup>1</sup>), na cidade de Tsukuba no Japão, usando o detector Super-Kamiokande que dista 250 Km da KEK. Pela colaboração K2K, foi reportada recentemente o mesmo déficit de neutrinos muônicos observada para os neutrinos atmosféricos [12].

A segunda grande evidência de conversão foi reportada recentemente pela colaboração SNO [13] no Canadá, apontando evidências, aparentemente claras, de que há conversão de neutrinos solares eletrônicos em outros sabores [14]. Neste experimento, pela primeira vez foi possível comparar diretamente fluxos de neutrinos de diferentes sabores. Até então, experimentos via decaimento beta inverso indicavam que os neutrinos eletrônicos produzidos no sol estavam chegando à Terra em número bem menor que o esperado pelas previsões do modelo padrão solar [15]. Este problema ficou conhecido como o “problema do neutrino solar”.

Reforçando o fato de que a natureza oscilante responsável pelo déficit é intrínseca aos neutrinos, o mesmo déficit também foi confirmado no experimento de KamLAND [16], preparado para detectar neutrinos terrestres produzidos nos vários reatores nucleares ao redor do detector, situado na mesma mina do detector SuperKamiokande.

Historicamente, a existência do neutrino foi inicialmente sugerida por Pauli [17], por volta de 1930, para explicar o espectro contínuo da emissão do decaimento beta, embora tivesse sido denominado de “neutron”, até a descoberta do atual neutron por Chadwick. Foi Fermi (responsável pelo desenvolvimento do seu modelo via interação de contato, válido para o decaimento beta e, em geral, para a interação fraca à baixas energias), quem atribuiu a essa partícula neutra, de spin 1/2 e de massa nula, ou quase nula, o nome de *neutrino*. Devido ao seu caráter pouco interagente e, conseqüentemente, de difícil detecção, o neutrino é, sem dúvida, uma das partículas elementares mais misteriosas existentes. Aproximadamente 100 neutrinos induzidos por raios cósmicos passam através de cada um de nós a cada segundo; somente uma interação por corpo humano é esperada em cada mil anos [18]. Dentro do Modelo Padrão das Partículas Elementares (MPPE), ele interage apenas via interação fraca (uma das quatro forças fundamentais da natureza, excetuando-se, obviamente, a gravidade que age sobre o neutrino massivo, mas que está fora do MPPE). Por isso, foi detectada apenas em 1956 [19], quase 25 anos depois da sugestão original de Pauli.

Sua difícil detecção, no entanto, pode ser de grande importância em aplicações astrofísicas como, por exemplo, para obter informações acerca das atividades de estrelas [20, secVI], visto que neutrinos são produtos comuns das reações internas estelares e não são (ou são muito pouco) interagentes com fortes campos magnéticos e elétricos como acontece com fótons; do mesmo modo, o neutrino pode ser importante para inferir sobre a dinâmica de outros corpos celestes como supernovas, nos quais os neutrinos são participantes ativos e fundamentais das reações que norteiam a sua evolução e criação. Historicamente, porém, um dos maiores interesses acerca dos neutrinos (no que se refere a problemas astrofísicos) residia na possibilidade de que a existência de massa para os neutrinos, por mais minúscula que seja, poderia influenciar na evolução cosmológica do Universo. Assim como os fótons, eles permeiam permanentemente o meio cósmico, possuindo uma radiação de fundo de 1.94 K de temperatura, e seriam parte integrante da chamada “matéria escura”, que, apesar de não

---

<sup>1</sup>KEK abrevia seu nome japonês Kou Enerugii Kasokuki Kenkyukikou

ser visível, contribui para a densidade de massa e energia do Universo [18]. Infelizmente, recentes observações da Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) [21] indicam que a contribuição dos neutrinos não é relevante para a constituição e evolução do Universo.

Apesar de ter sido uma das condições norteadoras na formulação da forma V-A da força fraca, única força nuclear atuante sobre o neutrino (obviamente desprezamos a pequena contribuição da força gravitacional), e também fundamental na criação do modelo eletrofraco Glashow-Weiberg-Salam (GWS) [20, 22], que agora compõe um dos pilares do tão bem sucedido modelo padrão, sua descrição, a priori, desprovida de massa, não inclui nenhum mecanismo capaz de explicar a conversão de sabor. Então, do ponto de vista teórico, as chamadas “oscilações de neutrinos” são um grande indício de física nova e constitui um importante material para se estudar conseqüências de modelos além do modelo padrão e sua física [2].

## 1.1 Problemática Geral

A possibilidade de oscilação dos neutrinos foi inicialmente proposta por Pontecorvo [23] em 1957, quando previa-se uma oscilação entre neutrino–anti-neutrino, visto que apenas um tipo de neutrino era conhecido na época. A primeira aparição na literatura de uma fórmula de oscilação, ocorre somente em 1969, com Gribov e Pontecorvo [24]. Inicialmente, a possibilidade de oscilação era fortemente especulada em analogia com o sistema neutro mesônico  $K^0-\bar{K}^0$ , que evidenciava oscilação partícula–anti-partícula no setor de quarks. Com káons, o modelo de oscilação obteve um incrível sucesso e concordava enormemente com os experimentos.

Desde então, enquanto o fenômeno de oscilação no vácuo foi se estabelecendo como um dos prováveis mecanismos responsáveis pela conversão de sabor dos neutrinos, a dedução de sua fórmula de oscilação foi se consolidando na literatura, usando-se, majoritariamente, ondas planas (OP) (veja por exemplo a dedução feita por Kayser [4]). Contudo, tais deduções são feitas utilizando-se várias hipóteses e aproximações, aparentemente, não rigorosas. Dentre elas, a mais utilizada é a aproximação ultra-relativística, na qual aproxima-se  $x \approx t$ , tendo em vista que a velocidade do neutrino é próxima da velocidade da luz ( $c = 1$ ). Dentro do contexto de Mecânica Quântica (MQ), em primeira quantização,  $x$  é uma variável correspondente a um observável, enquanto o tempo ( $t$ ) é apenas um parâmetro. É necessário averiguar se o uso dessa aproximação é imprescindível para a dedução ou seria mera condição simplificadora. Outra inconsistência inerente ao formalismo de OP é a descrição deslocalizada das partículas: sem localização não faz sentido falar em posição, mesmo que média, da partícula viajando num certo tempo  $t$ . De outra forma, isso implica que a relação semi-clássica  $x = vt$ , comumente utilizada, também não faz sentido, se nos restringimos estritamente a uma descrição usando OP.

Outras questões remetem à heterogeneidade existente na literatura [25, 26] a respeito das condições cinemáticas impostas entre os auto-estados de massa, como  $\Delta E = 0$ ,  $\Delta p = 0$ ,  $\Delta v = 0$  (cenários de energias [27, 36], momentos [4], velocidades [25, 26] iguais). Cinematicamente, vê-se que nenhuma das condições é rigorosamente válida (veja [28, 29], sec.4.2.1 e sec.IV cap.5). Por fim, relacionado à questão anterior, existem exemplos na literatura nos quais o uso de diferentes condições levam, no formalismo de OP, a diferentes fórmulas de oscilação [26, sec.5.II][27, 30].

O uso de pacotes de onda (PsO) [29, 31, 32, 33, 34] teve como motivação a elucidação dos problemas supra-citados, baseando-se na idéia de que as fórmulas corretas obtidas com ondas planas deveriam corresponder a casos limites do formalismo com pacotes de onda. O primeiro trabalho a tratar de pacotes de onda, dentro da física de neutrinos, foi feito por *Kayser* [31] que considerou incertezas não nulas nos momentos e mostrou que existem condições para que a oscilação ocorra. Um cálculo mais concreto usando-se pacotes gaussianos foi feito por *Giunti et al* [32]. Apenas com o uso de PsO foi possível introduzir a noção de comprimento de coerência, em analogia ao conceito usado em ótica, embora isso tenha sido qualitativamente introduzido por *Nussinov* [35]. Contudo, mesmo com a introdução de PsO, permanece o problema quanto à definição de auto-estados de sabor ou equivalentemente quanto às condições “iniciais” que devem ser impostas sobre os PsO. Uma delas define como condição, a inexistência de qualquer sabor errado no ponto de criação para todo o tempo [36]. Outra abordagem interessante consiste em encontrar a corrente de probabilidade ao invés da densidade de probabilidade [37], possibilitando a integração no tempo para encontrar o fluxo, observável que realmente é medido em experimentos.

Apesar de todo o progresso alcançado com PsO, é consenso geral entre os pesquisadores que o formalismo mais adequado para a descrição dos neutrinos [38], desde a sua criação até a sua detecção, seria o da teoria quântica de campos (TQC), com o uso do modelo padrão (MPPE) e mecanismos adicionais para geração de massa para os neutrinos [39, *para uma revisão*]. No entanto, através de um cálculo simples, pode-se mostrar que auto-estados fracos não podem ser bem definidos em TQC como combinação linear de auto-estados de massa com massas definidas e distintas [40] (sem mencionar que o uso do formalismo completo da TQC aumenta sensivelmente as dificuldades técnicas para o cálculo da amplitude de oscilação, com perda significativa no que concerne à interpretação dos seus resultados). Mesmo diante dessas dificuldades, várias abordagens usando parcialmente TQC são desenvolvidas na literatura, como, por exemplo, a abordagem de *Giunti* [41, 42] e a mais recente abordagem de *Beuthe* [38, 43], denominada de “abordagem de Pacote de Onda Externo” (External Wave Packet Approach). Outros modelos usando TQC são muito bem revisados no trabalho de *Beuthe* [38].

Finalmente, dentro do formalismo de PsO internos, no qual explicitamente associa-se PsO aos neutrinos em propagação livre, alguns efeitos de amplificação do fenômeno oscilatório são previstos para neutrinos não relativísticos [32, 34]. Como apontado por *Kiers* e *Weiss* [30], esses efeitos são desprovidos de sentido e são consequência direta de integrações temporais, feitas sobre as fórmulas de oscilação ou sobre as amplitudes de transição, consideradas necessárias pelos autores para eliminar a dependência temporal das fórmulas de oscilação. A necessidade desse procedimento é justificado, pelos mesmos, como uma média temporal, considerada imprescindível devido ao desconhecimento do tempo de criação do neutrino. Tal procedimento seria similar às médias em energia, dimensão da fonte e região de detecção, que são feitas sobre as fórmulas de oscilação e levam em conta a impossibilidade do inferimento de certas quantidades e do controle ou preparação de eventos. Assim, a questão da legitimidade desses procedimentos e sua equivalência a procedimentos de média merecem ser analisadas.

## 1.2 Objetivos

Atualmente, a fórmula de oscilação padrão, na física de neutrinos, parece descrever adequada e coerentemente os dados da maioria dos experimentos que têm sido realizados, e, por isso, é cada vez mais bem aceita na comunidade científica da área. Apesar disso, as diversas deduções dessa fórmula (e suas extensões em contextos mais gerais como TQC), existentes na literatura, parecem inequivalentes entre si, devido ao uso de diferentes condições e hipóteses que podem não ser compatíveis. Esse trabalho, então, tem como principal objetivo, esclarecer e melhorar o entendimento do fenômeno de oscilação usando uma abordagem com pacotes de onda, cujas interpretações físicas são claras e diretas. Para isso, é necessário modelar corretamente o fenômeno dentro de um formalismo da mecânica quântica (MQ), restrito à primeira quantização [54, 55], o que permite o uso irrestrito de pacotes de onda. A suficiência desse formalismo pode ser justificada pelo fato de que os neutrinos, uma vez criados pela interação fraca, percorrem livremente o vácuo, e podem ser aproximadamente descritos pelo uso da MQ em primeira quantização sem interação (desconsiderando-se influências do vácuo e interações). A incógnita do modelo, então, fica restrita às condições iniciais, nas quais a forma do pacote de onda que está sendo criado é desconhecida. Utilizaremos pacotes gaussianos para cálculos explícitos (cap.3). Obviamente, podem ser feitas objeções quanto à influência dos processos de detecção na interpretação do fenômeno e construção do modelo [33, 38, 30]. Alguns trabalhos, como [30], afirmam que o processo de detecção pode influenciar na oscilação e até mesmo reviver a oscilação no regime incoerente. Não obstante, será tratada aqui apenas a “probabilidade de a partícula estar em certa posição” quando descrita por determinado “pacote de onda”. A extensão para todo o espaço, assegura a interpretação probabilística, uma vez que a normalização tenha sido efetuada. Além disso, no caso de neutrinos, essa abordagem permite calcular coerentemente a “presença” de determinado sabor independentemente da posição e garantir que a soma das probabilidades de presença de todos os sabores seja 100%. Essa normalização automática não é garantida em modelos que usam integração no tempo [29, 32, 34], sem uma normalização adicional. Como notado por *Kiers* e *Weiss* [30], e também exposto neste trabalho (sec.4.1.1), a integração no tempo introduz fatores  $1/v$  que podem não fazer sentido em casos não relativísticos.

A necessidade do uso da Teoria Quântica de Campos (TQC) fica restrita, então, à criação e detecção, o que equivale a especificar condições iniciais impostas pela interação (responsável pela criação), sobre o pacote inicial e considerar a influência da mesma interação sobre o processo de detecção. Embora algumas abordagens como [33, 34] incluam esse efeito usando pacotes de onda de criação e detecção, isso não será considerado aqui. Assim, abordagens usando TQC e abordagens mistas (que incluem TQC e PsO) não serão tratadas (veja [43]). Desprezamos assim, a influência de neutrinos off-shell sobre a propagação.

Portanto, o uso desse formalismo, associado às hipóteses apresentadas no capítulo 2, mostrará que o fenômeno de oscilação pode ser modelado sem problemas, com fórmulas de oscilação devidamente normalizadas. Na sec.2.8, esclareceremos a inevitável discussão do procedimento de substituição do tempo pela distância, imprescindível para conectar o observável de posição ao parâmetro tempo, não observável em MQ. Outras questões referentes à média ou integração no tempo serão tratadas no cap.4, juntamente com questões interconexas como as condições cinemáticas impostas na criação (sec.4.2) e comparação do

efeito de interferência de PsO com o fenômeno de oscilação de sabor (sec.4.4). Não é preciso recorrer às sutilezas dos processos de criação e detecção para esclarecer os problemas citados acima. Embora o problema da indefinição de sabor inicial não possa ser rigorosamente resolvido dentro desse formalismo (sec.2.7), mostra-se que esse efeito é desprezível, desde que os pacotes associados aos auto-estados de massa sejam suficientemente semelhantes.

Uma vez coerentemente formalizada a descrição do fenômeno, encontraremos as fórmulas de oscilação para um caso particular, a gaussiana, por razões óbvias de tratabilidade analítica. Como consequência do uso de PsO, vários fenômenos além da oscilação podem ser quantitativamente modelados, como a separação (perda de coerência óptica) e o spreading (alargamento do PO). Condições mais claras sobre oscilação podem ser extraídas quantitativamente e comparadas com o enfoque qualitativo de Kayser [31]. A maioria dos resultados é semelhante aos encontrados em literatura [32, 34], exceto pelo fato de considerarmos também o fenômeno de spreading, que pode ser não desprezível em certos casos. A ilustração numérica é feita para casos particulares de pacotes gaussianos com parâmetros diversos.

Por fim, revisaremos as abordagens usando ondas planas (sec.4.3 e cap.5), e sob a luz do formalismo de pacotes de onda (PsO), mostraremos que fórmulas de oscilação com fatores adicionais não correspondem à limites do formalismo de PsO. Assim como, reforçaremos a origem desses fatores adicionais e mostraremos como sua inexistência pode ser entendida e interpretada.

# Capítulo 2

## Formalismo e Modelamento

As chamadas “oscilações de neutrino” correspondem a um tipo de oscilação de sabor induzida por diferenças de massa (OIDM), entre auto-estados superpostos, que se propagam no vácuo ou na matéria. Efetivamente, é o modelo que mais facilmente descreve oscilação de sabor. Sua implementação no Modelo Padrão pode ser feita economicamente, se os neutrinos forem de Majorana, com a inserção de termos de massa puramente de Majorana sem a necessidade de neutrinos de quiralidade “right” (right handed) [34, 39].

O mecanismo que está por trás do comportamento oscilatório está intimamente ligado à natureza quântica do fenômeno, visto que o princípio de superposição é estritamente necessário. Uma grande semelhança pode ser reconhecida entre esta e oscilações que ocorrem na Mecânica Quântica não relativística (veja [54]), nos quais a superposição de dois auto-estados correspondentes a duas energias diferentes da Hamiltoniana oscila no tempo com uma frequência de Bohr que depende da diferença de energia envolvida; ou igualmente relembra o fenômeno de interferência em dupla fenda [44], como no experimento de Young.

No caso de OIDM para neutrinos, o número quântico que dita as condições iniciais é o sabor, da qual depende a interação (nesse caso, interação fraca) responsável pela criação e detecção. A evolução a partir da criação é considerada livre e depende exclusivamente da Hamiltoniana total que contém as massas como parâmetros efetivos. Seus auto-estados de massa evidentemente não devem coincidir com auto-estados de sabor (existência de mixing), que podem ser escritos como combinação linear dos auto-estados de massa.

Portanto, as hipóteses necessárias para um modelamento efetivo da OIDM são:

- (i) existência de mais de um estado que evolua diferentemente no tempo. No caso do movimento livre, isso implica em massas não degeneradas (conforme é ilustrado na sec.4.4).
- (ii) estados de criação (iniciais) e estados de detecção não coincidentes com os auto-estados de massa (existência de mixing).
- (iii) possibilidade de superposição dos auto-estados de evolução (por exemplo, isso pode não ser possível quando existem regras de super-seleção).

Com a inclusão desses elementos essenciais listados acima, formalizaremos o fenômeno de OIDM nas seções subsequentes. Contudo, mostraremos também que essas hipóteses

diretamente incluídas levam a dificuldades, tais como o problema da indefinição inicial de sabor (sec.2.6).

Além disso, deve ser mencionado que, ao contrário do sistema de káons (no qual auto-estados de massa possuem canais de decaimento distintos) não é possível distinguir diretamente auto-estados de massa no caso de neutrinos. Somente auto-estados de sabor são fisicamente observáveis. Outra característica é que a oscilação deve ocorrer entre diferentes auto-estados de sabor violando o “número leptônico de sabor”, ao invés de oscilação do caráter partícula–anti-partícula que está ligado ao número quântico de estranheza para káons. Então, para neutrinos, os estados observáveis não correspondem aos chamados “auto-estados físicos” de massa, e são definidos pela única interação atuante, a interação fraca. Possivelmente algum tipo de mecanismo não padrão deve atuar de modo a violar o número leptônico de sabor [2].

Adiante aqui que esse formalismo possibilita reconhecer e esclarecer alguns problemas de normalização, além de possibilitar o cálculo de alguns observáveis *a la* Mecânica Quântica não relativística, tais como a posição média (sec.2.4).

## 2.1 Partícula Única?

Primeiramente, devemos abordar a questão da definição coerente de uma partícula simples (não composta) e única. A descrição de uma única partícula livre relativística em Mecânica Quântica depende exclusivamente de suas características cinéticas, que estão intimamente ligadas às propriedades do espaço-tempo e suas simetrias [50]. As propriedades cinéticas em questão referem-se às propriedades sob transformações de Lorentz. Desse modo, uma partícula livre deve ser descrita por um vetor complexo (spinor), que transforme de acordo com uma representação do grupo de Lorentz não homogêneo (ou grupo de Poincaré), formado pelo grupo das transformações de Lorentz homogêneas e translações no espaço-tempo. Neste caso, pode ser mostrado [50, 51] que uma representação do grupo homogêneo restrito de Lorentz (o grupo  $SO(1, 3)$  [53], que atua sobre quadri-vetores no espaço-tempo de Minkowsky) pode ser construída mediante o isomorfismo existente entre este e as matrizes complexas  $2 \times 2$  de determinante unitário  $SU(2, \mathbb{C})$ . O que emerge dessa análise é que existe um subgrupo invariante de transformações não triviais que mantém fixo o quadrimomento. No repouso ( $\mathbf{p} = 0$ ), para uma partícula de massa não nula, esse grupo é similar ao grupo de rotações (“little group” de Wigner). Ela corresponde à propriedade intrínseca do spin.

Formalmente, o estado físico que descreve uma partícula livre deve ser uma representação irredutível do grupo de Poincaré [50, 51]. A irredutibilidade da representação indica que o sistema descrito é elementar dentro da mesma descrição [52]. A massa deve ser unicamente definida como um auto-valor invariante de Lorentz do operador de Casimir de massa (mais precisamente, massa ao quadrado ou  $M^2$ ). O outro operador invariante de Casimir caracteriza o módulo do spin ( $\mathbf{S}^2$ ). Além disso, a superposição de estados de diferentes spins é suprimida por conhecidas regras de superseleção [51].

As transformações não homogêneas de Lorentz incluem transformações restritas homogêneas de Lorentz (boosts e rotações), simetrias discretas e translações no espaço-tempo [53]. Isso implica [51] que o espaço de estados pode ser gerado pelos estados de quadrimomento e spin definidos. No limite da Mecânica Quântica não relativística, o espaço de estados

que descreve uma partícula se desacopla na forma  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{orb}} \otimes \mathcal{E}_{\text{spin}}$  [54], que é um produto tensorial do espaço de estados orbitais definido sobre o espaço tridimensional de coordenadas espaciais (rigged Hilbert space [54] definido sobre  $\mathbb{R}^3$ :  $\mathcal{E}_{\text{orb}} \cong \mathcal{H}_3$ ), e do espaço interno de estados correspondentes ao spin ( $\mathcal{E}_{\text{spin}} \cong SU(2)$ ). Esse é o formalismo de Pauli, se consideramos a representação de spin 1/2.

Obviamente, no caso interagente, pode haver simetrias dinâmicas associadas às características das interações envolvidas. Isso foi levado em conta de maneira espetacular no Modelo Padrão, que levou à grande simplificação e entendimento da física de partículas através de conceitos como isospin, sabor e cor. Como os neutrinos não são totalmente livres de interação (uma vez que interagem via interação fraca), na realidade, os auto-estados de massa e sabor dos neutrinos devem ser pensados como uma consequência das propriedades dinâmicas da interação eletrofraca padrão, e talvez de interações além do Modelo Padrão. As interações modificam o vácuo da teoria (em TQC), que pode estar intimamente ligado ao comportamento oscilatório do neutrino. É interessante notar que até o advento dos fenômenos de oscilação com káons não havia nenhuma necessidade de se superpor auto-estados de massas diferentes.

Contudo, temos boas razões para considerar como boa aproximação a ausência de interação sobre os neutrinos, visto que a interação fraca é de pequena intensidade comparada com outras forças fundamentais e, a grosso modo, sua influência sobre a estrutura do vácuo deve ser pequena. Então, à exceção de tempos muito próximos da criação e detecção, nos quais a interação é obviamente não desprezível, podemos considerar os neutrinos como partículas livres.

Se estendermos o formalismo para sistemas compostos, no caso de um sistema de  $n$  partículas, devemos considerar um espaço de estados total da forma  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_n$ , onde cada  $\mathcal{E}_i$  representa o espaço de estados para uma partícula. Uma base geral pode ser construída através do produto tensorial de bases de uma partícula. Obviamente, se as  $n$  partículas são idênticas (mesma massa, spin, e carga etc), o espaço efetivo é somente um subespaço no qual os estados obedecem às regras de simetrização/anti-simetrização características, de acordo com as estatísticas de Bose-Einstein/Fermi-Dirac.

Diferentemente, dentro da aproximação livre, pode-se notar que, para se tratar adequadamente a OIMD com  $n$  diferentes massas, precisamos de um espaço **reduzível** [51]  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_n$ , onde  $\mathcal{E}_k \equiv \mathcal{E}(m_k)$  ( $m_k \neq m_{k'}$ ;  $k, k' = 1, \dots, n$ ) é o espaço de estados de uma partícula caracterizados por massas diferentes. Isso difere tanto da descrição de uma partícula como de  $n$  partículas. Naturalmente, depois que incluirmos a relação de mixing ou equivalentemente os auto-estados de sabor em termos dos auto-estados de massa, o espaço de estados total deixa de ser reduzível. É importante notar que essa formalização é efetiva e não leva em conta nenhuma informação das matrizes de massa ou da influência de interações. Provavelmente essas informações devem ser incluídas para que o espaço de estados seja irreduzível e menos *ad hoc*.

Um dos problemas formais em usar soma direta de espaços  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$  (para duas massas) é que não podemos desacoplar o espaço total em  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{orb}} \otimes \mathcal{E}_{\text{massa/sabor}}$ , o que garantiria uma boa definição de auto-estados de sabor e uma noção coerente de partícula.

## 2.2 Formalismo de duplo bra-ket

Nesta seção descrevemos o formalismo e a notação partindo das idéias citadas na seção anterior e, adicionalmente, nos restringiremos ao contexto de primeira quantização (Mecânica Quântica relativística [55, 56]). Ao longo deste trabalho serão utilizadas unidades naturais  $\hbar = 1, c = 1$ .

Para ilustrar o formalismo de maneira simples e clarificar interpretações, restringiremos ao caso de duas massas e sabores, e ao caso em que não haja graus intrínsecos de liberdade (spin 0). Além disso, usaremos aqui uma notação não covariante [49], na qual as funções de onda adquirem o significado usual de densidade de probabilidade (em posição ou momento), e os operadores de posição podem ser definidos facilmente. Devido às fortes evidências de que o mixing deva ser quase máximo em ambos os casos (oscilação de neutrinos atmosféricos e solares), a simplificação de duas famílias pode ser ainda bem aplicável.

Neste caso, o espaço efetivo de estados se reduz a  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{\text{orb1}} \oplus \mathcal{E}_{\text{orb2}}$ . Cada espaço  $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}(m_k)$ , ( $k = 1, 2$ ), pode ser gerado pelos respectivos auto-estados de momento independentes do tempo  $\{|\mathbf{p}\rangle_1, |\mathbf{p}\rangle_2\}$ , auto-estados dos operadores de momento  $\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2\}$ , associados, respectivamente, às partículas de massa  $\{m_1, m_2\}$ . Os subíndices à direita dos kets denotam o espaço ao qual estes pertencem. Eles obedecem a normalização usual não covariante da Mecânica Quântica não relativística:

$${}_k\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle_k = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') .$$

Assim, dado um estado  $|\psi\rangle_k \in \mathcal{E}_k$ , este pode ser escrito em termos da base  $\{|\mathbf{p}\rangle_k\}$ , como,

$$|\psi\rangle_k = \int d^3\mathbf{p} g(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle_k , \quad (2.1)$$

cuja normalização é dada por

$${}_k\langle \psi | \psi \rangle_k = \int d^3\mathbf{p} |g(\mathbf{p})|^2 = 1 .$$

Visto que esses dois espaços são idênticos (com exceção da diferença de massa), podemos escolher  $\mathbf{P}_1 \cong \mathbf{P}_2 \cong \tilde{\mathbf{P}}$  como tendo representações idênticas dentro de cada  $\mathcal{E}_k$ , suprimindo sua dependência em massa, que classicamente poderia ser dada por  $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ . Com essa escolha, passamos a dependência explícita em massa unicamente para a energia, em termos do operador hamiltoniano e operadores que dependem do mesmo. O mais importante entre eles, e o único que será abordado, é o operador de evolução temporal. Evidentemente, outros tipos de escolha poderiam ter sido feitas e, de fato, uma análise mais detalhada deveria ser devotada a essa questão, principalmente no que concerne à não covariância do formalismo. Então, somente com a evolução temporal (na picture de Schrödinger), surgirá a dependência explícita das massas nos estados e será necessário marcar os espaços respectivos; conforme ilustrado na sec.2.8, o operador de posição, embora mantenha a mesma representação no espaço de momentos para ambos os espaços, age de maneira diferente devido à diferença em energia. Isso deve ser levado em conta ao fazermos cálculos com auto-estados de sabor que misturam auto-estados de massa.

A distinção entre espaços diferentes é feita *ad hoc*, considerando como base os auto-estados ortogonais de massa  $\{|m_1\rangle, |m_2\rangle\}$ <sup>1</sup> no qual

$$\langle m_k | m_{k'} \rangle = \delta_{kk'} . \quad (2.2)$$

Assim, o operador de massa  $M$  nessa base de massa

$$|m_1\rangle \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad |m_2\rangle \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

é diagonal e da forma  $M = m_1|m_1\rangle\langle m_1| + m_2|m_2\rangle\langle m_2| \equiv \text{diag}(m_1, m_2)$ .

Então um estado genérico de “duplo ket”,  $|\Psi\rangle\rangle$ , em  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$  pode ser escrito como uma soma direta de um estado em  $\mathcal{E}_1$  e outro em  $\mathcal{E}_2$ . Usando a notação de Dirac lê-se,

$$|\Psi\rangle\rangle = \alpha_1|\psi_1\rangle \oplus \alpha_2|\psi_2\rangle \equiv \alpha_1|\psi_1; m_1\rangle\rangle + \alpha_2|\psi_2; m_2\rangle\rangle , \quad (2.4)$$

onde

$$|\psi_k; m_k\rangle\rangle \equiv |\psi_k\rangle \otimes |m_k\rangle , \quad |\psi_k\rangle \in \mathcal{E}_k , \quad \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle = \langle \psi_2 | \psi_2 \rangle = 1 .$$

Usando (2.3) podemos escrever o estado acima como

$$|\Psi\rangle\rangle \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 |\psi_1\rangle \\ \alpha_2 |\psi_2\rangle \end{bmatrix} , \quad \text{onde } |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1 . \quad (2.4)$$

A notação “duplo” ket mostra certa semelhança com a teoria de spin 1/2 de Pauli, mas ao mesmo tempo e diferentemente do spin, ela expressa a impossibilidade de escrever um estado geral em  $\mathcal{E}$  como um único ket. Nesta notação simplificada  $|\psi_1\rangle \equiv |\psi_1\rangle_1$ , subentende-se dois marcadores (segundo membro da equação): os subscritos nas funções de onda  $\psi$  seriam apenas marcadores para fins de distinção e poderiam ser substituídos pela distinção entre  $\psi$  e  $\phi$ , por exemplo; o subscrito fora dos kets denotam, como anteriormente mencionado, a distinção entre os espaços  $\mathcal{E}_k$ . Como não há necessidade de usarmos o mesmo marcador  $k$  duas vezes, suprimimos um deles, o externo, sem perda de distinção. Eventualmente, quando formos tratar de PO iguais, restauraremos os marcadores externos.

Com essa notação, definimos naturalmente o produto escalar com a introdução do “duplo” bra,

$$\langle\langle \Psi | = \alpha_1^* \langle\langle \psi_1; m_1 | + \alpha_2^* \langle\langle \psi_2; m_2 | \equiv [ \alpha_1^* \langle \psi_1 | \quad \alpha_2^* \langle \psi_2 | ] . \quad (2.5)$$

Portanto, o produto escalar pode ser calculado de maneira simples através da álgebra matricial:

$$\langle\langle \tilde{\Psi} | \Psi \rangle\rangle \equiv [ \tilde{\alpha}_1^* \langle \tilde{\psi}_1 | \quad \tilde{\alpha}_2^* \langle \tilde{\psi}_2 | ] \begin{bmatrix} \alpha_1 |\psi_1\rangle \\ \alpha_2 |\psi_2\rangle \end{bmatrix} = \tilde{\alpha}_1^* \alpha_1 \langle \tilde{\psi}_1 | \psi_1 \rangle + \tilde{\alpha}_2^* \alpha_2 \langle \tilde{\psi}_2 | \psi_2 \rangle . \quad (2.6)$$

---

<sup>1</sup>Na verdade, esta relação de ortogonalidade deve ser baseada em algum número quântico advindo de modelos em TQC, que aqui é representado efetivamente pela massa. Repare que no limite de massas degeneradas não faz sentido falar em mixing e ortogonalidade.

Se nos restringirmos a um dos espaços de estados  $k$ , o operador de momento  $\tilde{\mathbf{P}}$  ou o operador de posição  $\tilde{\mathbf{X}}$ , serão bem definidos e idênticos; seus auto-estados  $|\mathbf{p}\rangle$  ou  $|\mathbf{x}\rangle$  gerarão o respectivo espaço. Por outro lado, o operador hamiltoniano depende do momento  $\tilde{\mathbf{P}}$  e da massa  $m_k$  na forma de

$$H_k = \tilde{H}(\tilde{\mathbf{P}}; m_k) . \quad (2.7)$$

O requerimento  $[H_k, \tilde{\mathbf{P}}] = 0$ , necessário para o movimento livre (invariância por translações gerados por  $\tilde{\mathbf{P}}$ ), é satisfeito diretamente.

Agora devemos analisar os operadores gerais que atuam sobre um estado geral (2.4a) no espaço estendido  $\mathcal{E}$ , e denotaremos esse espaço de operadores lineares de  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ .

Em particular, tomando um estado  $|\mathbf{p}\rangle\rangle \in \mathcal{E}$  como soma direta dos estados  $|\mathbf{p}_k\rangle \in \mathcal{E}_k$  com o mesmo auto-valor de momento  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$

$$|\mathbf{p}\rangle\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1 |\mathbf{p}\rangle_1 \\ \alpha_2 |\mathbf{p}\rangle_2 \end{bmatrix} , \quad \text{onde } |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1 , \quad \alpha_k \in \mathbb{C} , \quad (2.8)$$

constatamos que a soma define um conjunto de auto-estados de um operador generalizado de momento, definido em  $\mathcal{E}$  por

$$\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}} \oplus \tilde{\mathbf{P}} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}} & \\ & \tilde{\mathbf{P}} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{P}} \otimes \Gamma_1 + \tilde{\mathbf{P}} \otimes \Gamma_2 , \quad (2.9)$$

onde

$$\Gamma_k \equiv |m_k\rangle\langle m_k| \equiv \frac{1}{2}[\mathbf{1} + \epsilon_k \sigma_3] , \quad \epsilon_k = \pm 1 , \quad (2.10)$$

é o projetor do espaço  $\mathcal{E}_k$ . Podemos observar, que para um dado momento  $\mathbf{p}$ , auto-valor do operador  $\mathbf{P}$ , temos dois estados generalizados independentes, correspondentes, por exemplo, aos estados  $(\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0)$  e  $(\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1)$  acima. Esses estados são, em particular, auto-estados do operador generalizado  $\tilde{\mathbf{P}}_1, \tilde{\mathbf{P}}_2$  definido apropriadamente em  $\mathcal{E}$  como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_1 &= \mathbf{P}\Gamma_1 , \\ \tilde{\mathbf{P}}_2 &= \mathbf{P}\Gamma_2 , \end{aligned} \quad \text{onde } \begin{cases} \Gamma_k^2 &= \Gamma_k \\ \Gamma_1\Gamma_2 &= \Gamma_2\Gamma_1 = 0 . \end{cases} , \quad (2.11)$$

Note que um estado tem um momento bem definido associado à  $\mathbf{P}$  somente se ambos auto-estados de massa tiverem momentos definidos. Para distinguir entre esses dois estados independentes, temos de considerar o operador  $M$  e rotular os estados como

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}; m_1\rangle\rangle &\equiv \begin{bmatrix} |\mathbf{p}\rangle_1 \\ 0 \end{bmatrix} , \\ |\mathbf{p}; m_2\rangle\rangle &\equiv \begin{bmatrix} 0 \\ |\mathbf{p}\rangle_2 \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (2.12)$$

Agora podemos expandir qualquer estado (2.4) através dos auto-estados de momento acima:

$$|\Psi\rangle\rangle \equiv \alpha_1 \int d^3\mathbf{p} g_1(\mathbf{p}) |\mathbf{p}; m_1\rangle\rangle + \alpha_2 \int d^3\mathbf{p} g_2(\mathbf{p}) |\mathbf{p}; m_2\rangle\rangle . \quad (2.13)$$

A passagem para a notação matricial é direta.

Note que  $\{M, \mathbf{P}\}$  (1+3 operadores) forma um conjunto completo de observáveis que comutam [54] (CSCO) em  $\mathcal{E}$ , embora inicialmente o conjunto  $\{\tilde{\mathbf{P}}_1, \tilde{\mathbf{P}}_2\} \in \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$  (3+3 operadores) fosse necessário para gerar todos os estados. Isso é reflexo da soma direta de espaços, no qual é baseada a construção do espaço total  $\mathcal{E}$ .  $\tilde{\mathbf{P}}_k$  pode ser pensado como o operador de momento  $\mathbf{P}$  projetado sobre um dos espaços de massa definida  $k$ .

Analogamente, a ação de qualquer operador  $A$  em  $\mathcal{E}$ , dependente ou não da massa, pode ser definida a partir da ação dos respectivos operadores  $A_1, A_2$ , bem definidos em  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ . Isso nos leva a

$$A \equiv \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix} = A_1 \otimes \Gamma_1 + A_2 \otimes \Gamma_2 . \quad (2.14)$$

É claramente reconhecido que qualquer operador definido dessa forma tem, no mínimo, uma dupla degenerescência devido às massas.

Depois de termos definido  $\mathbf{P}$  e  $M$ , podemos generalizar a Hamiltoniana  $H_k$  em (2.7) como

$$H = H(\mathbf{P}, M) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{H}(\mathbf{P}_1; m_1) & \\ & \tilde{H}(\mathbf{P}_2; m_2) \end{pmatrix} . \quad (2.15)$$

Das definições (2.15) e (2.9) podemos notar que a relação

$$[H, \mathbf{P}] = 0$$

é satisfeita, como esperado por construção. Trivialmente, também temos

$$[\mathbf{P}, M] = 0 , \quad \text{e} \quad [H, M] = 0 .$$

Contudo, só podemos construir uma base comum a  $\{H, \mathbf{P}\}$  se nos restringirmos a um dos espaços, visto que os auto-estados correspondentes somente a  $\{\mathbf{P}\}$  (2.8) não possuem, em geral, o mesmo auto-valor de energia. Veja que

$$H \begin{bmatrix} \alpha |\mathbf{p}\rangle_1 \\ \beta |\mathbf{p}\rangle_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & \\ & E_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha |\mathbf{p}\rangle_1 \\ \beta |\mathbf{p}\rangle_2 \end{bmatrix} , \quad (2.16)$$

onde

$$E_k \equiv E(p, m_k) ,$$

é uma função fixa das variáveis indicadas. No caso relativístico livre, a energia tem a forma usual,

$$E(p, m_k) = \sqrt{p^2 + m_k^2} . \quad (2.17)$$

Portanto, não podemos construir uma base comum de auto-vetores de  $H$  e de  $\mathbf{P}$ , exceto quando  $\alpha = 0$  ou  $\beta = 0$ . Isso também será responsável pela impossibilidade de criação de estados com sabores bem definidos, a menos que os estados correspondentes às duas massas sejam exatamente iguais.

Ao invés disso, se tentarmos construir auto-estados simultâneos de massa e energia,  $\{|E_1; m_1\rangle, |E_2; m_2\rangle\}$ , da mesma forma que construímos auto-estados simultâneos de momento e massa, encontraremos outra dificuldade devido à diferença entre as energias mínimas possíveis para cada estado (considerando somente estados “on-shell”, a energia mínima é dada pela massa, que não é degenerada por hipótese). Então, o espectro de energia não pode ser bem definido para qualquer superposição de massas diferentes. Claro que poderíamos usar uma representação aproximada (veja apêndice A), mas essa aproximação é válida somente para partículas relativísticas.

Assim, utilizaremos, daqui em diante, a base gerada por  $\{M, \mathbf{P}\}$  para fazer os cálculos coerentemente e construir o formalismo.

## 2.3 Evolução Temporal

Até o momento o tempo não foi mencionado e portanto, a evolução temporal também não foi apresentada. Mostraremos aqui como a evolução temporal pode ser efetuada.

Assume-se, agora, uma evolução hamiltoniana, dada pela equação de evolução temporal tipo Schrödinger:

$$i\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle\rangle = H|\Psi(t)\rangle\rangle . \quad (2.18)$$

Dessa equação, o operador de evolução temporal generalizado  $U(t)$  é dada por

$$U(t) \equiv \exp\{-iH(\mathbf{P}, M)t\} \equiv \begin{pmatrix} U_1(t) & \\ & U_2(t) \end{pmatrix} . \quad (2.19)$$

Esta última, dada em termos dos operadores de evolução individuais

$$U_k(t) = e^{-iH_k t} , \quad (2.20)$$

que atuam em cada espaço  $\mathcal{E}_k$ . Aqui, considera-se que a Hamiltoniana não dependa explicitamente do tempo.

De acordo com a picture de Schrödinger, um estado geral em um tempo  $t$  é relacionado a um estado inicial em  $t = 0$ , por

$$|\Psi(t)\rangle\rangle = U(t)|\Psi(0)\rangle\rangle . \quad (2.21)$$

Visto que esta evolução temporal introduz uma dependência explícita das massas nos estados evoluídos através de (2.19) e (2.20), os subíndices destes operadores devem ser propagados para os estados evoluídos; os cálculos serão efetuados segundo a picture de Schrödinger usando o operador de evolução:

$$|\Psi(t)\rangle\rangle = U(t)|\Psi(0)\rangle\rangle = \begin{pmatrix} U_1(t) & \\ & U_2(t) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1|\psi_1\rangle \\ \alpha_2|\psi_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 U_1|\psi_1\rangle \\ \alpha_2 U_2|\psi_2\rangle \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1|\psi_1(t)\rangle \\ \alpha_2|\psi_2(t)\rangle \end{bmatrix} , \quad (2.21)$$

onde a evolução temporal pode ser efetuada a partir da expansão (2.1)

$$U_k(t)|\psi_k\rangle = U_k(t) \int d^3\mathbf{p} g_k(\mathbf{p})|\mathbf{p}\rangle_k = \int d^3\mathbf{p} g_k(\mathbf{p}) \exp\{-iE(\mathbf{p}, m_k)t\} |\mathbf{p}\rangle_k, \quad (2.22)$$

visto que  $\{|\mathbf{p}\rangle\}$  são auto-estados da Hamiltoniana livre com energias,

$$E_k(p) = \sqrt{p^2 + m_k^2}.$$

Do mesmo modo,  $\psi_k(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{x} | \psi_k(t) \rangle$  pode ser facilmente calculado a partir da expansão em Fourier:

$$\psi_k(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{p} g_k(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - E_k(p)t)}. \quad (2.23)$$

## 2.4 Observáveis e Probabilidade

Mostramos na seção 2.2 que um observável  $A$  em  $\mathcal{F}(\boldsymbol{\epsilon})$  pode ser construído a partir dos seus respectivos observáveis  $\{A_1, A_2\}$ , bem definidos em cada subespaço  $\boldsymbol{\epsilon}_k$ . Denotamos por  $\{a, a' \dots\}$  os possíveis auto-valores contidos no espectro de cada  $A_k$ , supondo que esta não dependa da massa explicitamente.

Dado um estado geral  $|\Psi\rangle$  (2.4a), a amplitude de probabilidade de um dado auto-valor  $a$  ser medido é dada pela soma do produto escalar com os dois estados (se o espectro de  $A_k$  não for degenerado)

$$\{\langle\langle a; m_1 |, \langle\langle a; m_2 | \},$$

definidos no formalismo acima. A probabilidade independente da massa deve ser somada sobre os dois auto-estados de massa:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a) &= |\langle\langle a; m_1 | \psi \rangle\rangle|^2 + |\langle\langle a; m_2 | \psi \rangle\rangle|^2 \\ &= |\alpha_1|^2 |\langle a | \psi_1 \rangle|^2 + |\alpha_2|^2 |\langle a | \psi_2 \rangle|^2 \\ &= \langle\langle \Gamma_1 \rangle\rangle |\langle a | \psi_1 \rangle|^2 + \langle\langle \Gamma_2 \rangle\rangle |\langle a | \psi_2 \rangle|^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Isso é análogo ao postulado de soma sobre degenerescências em Mecânica Quântica Não Relativística [54]. No nosso caso a degenerescência é dada pela massa.

O valor médio de  $A$  que denotaremos de  $\langle\langle A \rangle\rangle$  é facilmente calculado por:

$$\begin{aligned} \langle\langle A \rangle\rangle &\equiv \begin{bmatrix} \alpha_1^* \langle \psi_1 | & \alpha_2^* \langle \psi_2 | \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 | \psi_1 \rangle \\ \alpha_2 | \psi_2 \rangle \end{bmatrix} \\ &= |\alpha_1|^2 \langle A \rangle_1 + |\alpha_2|^2 \langle A \rangle_2 \\ &= \langle\langle \Gamma_1 \rangle\rangle \langle A \rangle_1 + \langle\langle \Gamma_2 \rangle\rangle \langle A \rangle_2, \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde

$$\langle A \rangle_k \equiv \langle \psi_k | \tilde{A} | \psi_k \rangle \equiv \frac{\langle\langle A \Gamma_k \rangle\rangle}{\langle\langle \Gamma_k \rangle\rangle} \quad (2.26)$$

é o valor médio normalizado de cada operador  $A$  projetado sobre  $\mathcal{E}_k$ . A última expressão é definida em termos dos operadores generalizados em  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ ; note que essa definição é consistente com os casos limites ( $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ ) or ( $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ ).

Por fim, cabe discutir o valor médio de certos operadores explicitamente. Observa-se que certas possibilidades são abertas; por exemplo, consideremos o operador de posição  $\mathbf{X}$ . Seu valor esperado  $\bar{x}$  é, de acordo com (2.25), dado por

$$\bar{x} = \langle\langle \mathbf{X} \rangle\rangle = |\alpha_1|^2 \langle \mathbf{X} \rangle_1 + |\alpha_2|^2 \langle \mathbf{X} \rangle_2 . \quad (2.27)$$

E quanto à sua variância  $\Delta x^2$ ? Podemos ter, de fato, duas definições distintas para a variância:

$$\begin{cases} \Delta x_{\text{tot}}^2 & \equiv \langle\langle (\mathbf{X} - \langle\langle \mathbf{X} \rangle\rangle)^2 \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{X}^2 \rangle\rangle - (\langle\langle \mathbf{X} \rangle\rangle)^2 ; \\ \Delta x_{\text{int}}^2 & \equiv \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} (\Delta \mathbf{X}_1)^2 \\ (\Delta \mathbf{X}_2)^2 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle = |\alpha_1|^2 \langle (\Delta \mathbf{X}_1)^2 \rangle_1 + |\alpha_2|^2 \langle (\Delta \mathbf{X}_2)^2 \rangle_2 , \end{cases} \quad (2.28)$$

onde

$$\Delta \mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k - \langle \mathbf{X} \rangle_k .$$

Elas denotam, respectivamente, a variância total e a variância intrínseca. Isso reflete o fato de que a incerteza efetiva na posição ( $\Delta x_{\text{tot}}^2$ ) tem duas contribuições: uma incerteza intrínseca ( $\Delta x_{\text{int}}^2$ ), relativa à largura de cada PO de massa, e outra incerteza dada pela separação entre esses pacotes. Podemos ter uma idéia dessa separação: se subtraímos as duas expressões de incerteza acima,

$$\Delta x_{\text{tot}}^2 - \Delta x_{\text{int}}^2 = |\alpha_1|^2 |\alpha_2|^2 (\langle \mathbf{X} \rangle_1 - \langle \mathbf{X} \rangle_2)^2 , \quad (2.29)$$

encontramos uma distância proporcional ao quadrado da distância entre as posições médias dos pacotes, com a qual podemos definir

$$\Delta x_{\text{dis}}^2 \equiv \frac{\Delta x_{\text{tot}}^2 - \Delta x_{\text{int}}^2}{\langle\langle \Gamma_1 \rangle\rangle \langle\langle \Gamma_2 \rangle\rangle} = (\langle \mathbf{X} \rangle_1 - \langle \mathbf{X} \rangle_2)^2 . \quad (2.30)$$

## 2.5 Auto-Estados de Sabor

Conforme mencionado na introdução (capítulo 2, hipótese *ii*), em OIDM é necessário que o estado inicial não tenha massa definida, já que a dinâmica é tal que a partícula continuaria no mesmo subespaço de massa sem efeitos oscilatórios ( $M$  é uma constante de movimento).

Em geral, auto-estados de sabor  $\{|f_k\rangle\}$ , ( $k = 1, 2$ ) são relacionados com auto-estados de massa,  $\{|m_k\rangle\}$ , ( $k = 1, 2$ ), por uma transformação unitária que pode ser redefinida como ortogonal (e real, o que implica em conservação CP) no caso de mixing de duas famílias no vácuo. Chamaremos essa matriz de mixing de  $U_M$ , definida por

$$\begin{bmatrix} |f_1\rangle \\ |f_2\rangle \end{bmatrix} = U_M \begin{bmatrix} |m_1\rangle \\ |m_2\rangle \end{bmatrix} , \quad (2.31)$$

parametrizada pelo ângulo de mixing  $\theta$  na forma

$$U_M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Na verdade, os auto-estados de sabor devem ser distinguidos de uma simples combinação linear de auto-estados de massa (2.2). Diferentes auto-estados de massa estão envolvidos, o que é definido somente em  $\mathcal{E}$  com a adição da parte orbital, dependente das coordenadas. Não há um espaço de estados de sabor, independente do espaço de estados orbitais, no qual podemos restringir a relação (2.31). Isso é apropriadamente denotado por

$$\begin{aligned} |\psi_1, \psi_2; f_1\rangle &= \cos \theta |\psi_1; m_1\rangle - \sin \theta |\psi_2; m_2\rangle \equiv \begin{bmatrix} \cos \theta |\psi_1\rangle \\ -\sin \theta |\psi_2\rangle \end{bmatrix}, \\ |\psi_1, \psi_2; f_2\rangle &= \sin \theta |\psi_1; m_1\rangle + \cos \theta |\psi_2; m_2\rangle \equiv \begin{bmatrix} \sin \theta |\psi_1\rangle \\ \cos \theta |\psi_2\rangle \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde

$$\langle \psi_k | \psi_k \rangle = 1, \quad k = 1, 2.$$

Isso implica

$$\langle\langle \psi_1, \psi_2; f_k | \psi_1, \psi_2; f_{k'} \rangle\rangle = \delta_{kk'}. \quad (2.34)$$

A evolução temporal pode ser calculada aplicando-se o operador de evolução generalizado (2.19) já mencionado, no qual os estados (2.33) em um dado tempo  $t$  são dados por

$$|\psi_1, \psi_2; f_k; t\rangle = U(t) |\psi_1, \psi_2; f_k\rangle = |\psi_1(t), \psi_2(t); f_k\rangle. \quad (2.35)$$

A evolução temporal de cada  $|\psi_k\rangle$  é dada por (2.22).

Introduzimos, agora, os operadores (projetores)  $\Gamma_{f_k}$  que projetam estados em auto-estados de sabor. A definição mais fiel que pode ser conseguida, mantendo-se máxima independência do espaço orbital, é dada, no caso de  $f_1$ , por

$$\Gamma_{f_1} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d^3 p |\mathbf{p}; f_1\rangle \langle\langle \mathbf{p}; f_1 | = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \mathbf{1}_1 & -\sin \theta \cos \theta T_{12} \\ -\sin \theta \cos \theta T_{21} & \sin^2 \theta \mathbf{1}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

onde

$$T_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 p |\mathbf{p}\rangle_1 \langle \mathbf{p} |, \quad (2.37)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3 p |\mathbf{p}\rangle_k \langle \mathbf{p} | = \mathbf{1}_k \text{ identidade em } \mathcal{E}_k.$$

Deixamos aqui explícito que os auto-estados  $|\mathbf{p}\rangle_k$  pertencem ao espaço  $k$ , para mostrar que  $T_{12}$  está conectando espaços de massas diferentes. A introdução explícita do operador  $T_{12}$  será necessária quando tratarmos de operadores que possuem representações ou aplicações

diferentes para estados com massas diferentes; por exemplo, quando se usa o operador de posição  $\mathbf{X} \equiv i\partial_p$  na representação de momento, deve ser explicitamente indicado em que espaço é a aplicação (sec.2.8). Para o cálculo da probabilidade de transição, a distinção é irrelevante e omitiremos os operadores  $\mathbf{1}_k$  e  $T_{12}$ . O operador  $\Gamma_{f_2}$  pode ser facilmente obtido fazendo-se, em (2.36), a substituição

$$\begin{cases} \cos\theta & \xrightarrow{f_1 \rightarrow f_2} & \sin\theta \\ \sin\theta & \longrightarrow & -\cos\theta \end{cases} .$$

Essa defenição dos projetores de sabor leva em conta qualquer valor de momento homogeneamente. O mesmo pode ser feito usando-se estados  $|\mathbf{x}; f_k\rangle$  de posição, embora o uso de auto-estados de momento torne o cálculo mais simples. Essa definição é tal que

$$\Gamma_{f_1} + \Gamma_{f_2} = \mathbf{1} \text{ em } \mathcal{E} . \quad (2.38)$$

Aplicando a identidade acima, podemos reescrever (2.33) como

$$\begin{aligned} |\psi_1, \psi_2; f_1\rangle &\equiv \int d^3p \left[ \langle\langle \mathbf{p}; f_1 | \psi_1, \psi_2; f_1 \rangle\rangle | \mathbf{p}; f_1 \rangle + \langle\langle \mathbf{p}; f_2 | \psi_1, \psi_2; f_1 \rangle\rangle | \mathbf{p}; f_2 \rangle \right] , \\ |\psi_1, \psi_2; f_2\rangle &\equiv \int d^3p \left[ \langle\langle \mathbf{p}; f_1 | \psi_1, \psi_2; f_2 \rangle\rangle | \mathbf{p}; f_1 \rangle + \langle\langle \mathbf{p}; f_2 | \psi_1, \psi_2; f_2 \rangle\rangle | \mathbf{p}; f_2 \rangle \right] , \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathbf{p}; f_1 | \psi_1, \psi_2; f_1 \rangle\rangle &= \cos^2\theta \langle \mathbf{p} | \psi_1 \rangle + \sin^2\theta \langle \mathbf{p} | \psi_2 \rangle , \\ \langle\langle \mathbf{p}; f_2 | \psi_1, \psi_2; f_1 \rangle\rangle &= \sin\theta \cos\theta [\langle \mathbf{p} | \psi_1 \rangle - \langle \mathbf{p} | \psi_2 \rangle] , \\ \langle\langle \mathbf{p}; f_1 | \psi_1, \psi_2; f_2 \rangle\rangle &= \sin\theta \cos\theta [\langle \mathbf{p} | \psi_1 \rangle - \langle \mathbf{p} | \psi_2 \rangle] , \\ \langle\langle \mathbf{p}; f_2 | \psi_1, \psi_2; f_2 \rangle\rangle &= \sin^2\theta \langle \mathbf{p} | \psi_1 \rangle + \cos^2\theta \langle \mathbf{p} | \psi_2 \rangle . \end{aligned} \quad (2.40)$$

Analogamente, na representação de coordenadas, os estados acima podem ser escritos como

$$\begin{aligned} |\psi_1, \psi_2; f_1\rangle &\equiv \int d^3x \left[ \psi_{f_1 f_1}(x, t; \theta) | \mathbf{x}; f_1 \rangle + \psi_{f_2 f_1}(x, t; \theta) | \mathbf{x}; f_2 \rangle \right] , \\ |\psi_1, \psi_2; f_2\rangle &\equiv \int d^3x \left[ \psi_{f_1 f_2}(x, t; \theta) | \mathbf{x}; f_1 \rangle + \psi_{f_2 f_2}(x, t; \theta) | \mathbf{x}; f_2 \rangle \right] , \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde

$$\begin{aligned} \psi_{f_1 f_1}(x, t; \theta) &= \cos^2\theta \psi_1(x, t) + \sin^2\theta \psi_2(x, t) , \\ \psi_{f_2 f_1}(x, t; \theta) &= \sin\theta \cos\theta [\psi_1(x, t) - \psi_2(x, t)] , \\ \psi_{f_1 f_2}(x, t; \theta) &= \sin\theta \cos\theta [\psi_1(x, t) - \psi_2(x, t)] , \\ \psi_{f_2 f_2}(x, t; \theta) &= \sin^2\theta \psi_1(x, t) + \cos^2\theta \psi_2(x, t) . \end{aligned} \quad (2.42)$$

Essas amplitudes de probabilidade de sabor serão graficados na seção 3.3 para o caso de funções de onda (auto-estados de massa) gaussianas, com alguns parâmetros característicos.

## 2.6 Probabilidade de Mudança de Sabor

Podemos agora calcular, de maneira simples, a probabilidade de um estado de sabor  $f_1$  mudar para um estado de sabor  $f_2$  depois de um tempo  $t$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{f_1 \rightarrow f_2}(t) &\equiv \langle\langle \psi_1, \psi_2; f_1; t | \Gamma_{f_2} | \psi_1, \psi_2; f_1; t \rangle\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{x} |\langle\langle \mathbf{x}; f_2 | \psi_1, \psi_2; f_1; t \rangle\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{x} |\psi_1(\mathbf{x}, t) - \psi_2(\mathbf{x}, t)|^2 \\
&= \frac{1}{2} \sin^2 2\theta (1 - \Re\{\mathcal{A}_{12}\}) ,
\end{aligned} \tag{2.43}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{12} &\equiv \langle \psi_2 | U_2^\dagger T_{21} U_1 | \psi_1 \rangle = \int d^3 \mathbf{x} \psi_1(\mathbf{x}, t) \psi_2^*(\mathbf{x}, t) \\
&= \int d^3 \mathbf{p} g_1(\mathbf{p}) g_2^*(\mathbf{p}) e^{-i \Delta E_{12}(p) t} ,
\end{aligned} \tag{2.44}$$

e

$$\Delta E_{12}(p) = E_1(p) - E_2(p) \quad (p = |\mathbf{p}|) , \quad g_2^*(\mathbf{p}) = \langle \psi_2 | \mathbf{p} \rangle , \quad g_1(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p} | \psi_1 \rangle .$$

Podemos ver que  $\Delta E_{12}(p) \neq 0$  é o responsável pela dependência temporal da probabilidade de transição; se não existisse distinção de massa (veja sec.4.4), não haveria oscilação.

Com o uso de tais definições, (2.38) assegura que

$$\mathcal{P}_{f_1 \rightarrow f_1} \equiv \langle\langle \psi_1, \psi_2; f_k; t | \Gamma_{f_1} | \psi_1, \psi_2; f_k; t \rangle\rangle = 1 - \mathcal{P}_{f_1 \rightarrow f_2} .$$

Esta definição garante a conservação da probabilidade total de sabor em qualquer tempo  $t$ :

$$\sum_i^{\text{todos os sabores}} \mathcal{P}_{f_k \rightarrow f_i}(t) = 1 , \quad \forall k = 1, 2 . \tag{2.45}$$

Também,

$$\mathcal{P}_{f_2 \rightarrow f_1} = \mathcal{P}_{f_1 \rightarrow f_2} \equiv \mathcal{P}_{\text{troca}} , \tag{2.46}$$

$$\mathcal{P}_{f_1 \rightarrow f_1} = \mathcal{P}_{f_2 \rightarrow f_2} \equiv \mathcal{P}_{\text{sobre}} , \tag{2.47}$$

onde “sobre” denota sobrevivência do sabor inicial.

Uma conseqüência das equações (2.40) e (2.43) é o fato de que, inicialmente, ambos os PO relacionados a  $m_1$  e  $m_2$  devem ser iguais para que nenhum outro sabor esteja incluso em  $t = 0$  ( $\mathcal{P}_{\text{troca}} = 0$ ). Portanto, a notação

$$|\psi_1, \psi_2; f_1\rangle\rangle$$

não corresponde corretamente a um “estado de sabor”, mas deve ser entendida pela forma como foi construída em (2.33) e (2.34). Evidentemente, uma análise baseada em TQC é requerida para uma construção mais rigorosa da relação de mixing.

Uma maneira alternativa para definir estados (não mais auto-estados) de sabor ao invés daquele definido por (2.31) ou (2.36), consiste em redefinir os estados (2.33) com determinados  $\psi_1, \psi_2$  como sendo os estados de sabor “físicos” criados nas reações. A probabilidade de encontrar determinado sabor (sobrevivência ou troca) é dada pelo quadrado da amplitude de correlação [58],

$$\langle\langle \psi_1, \psi_2; f_1 | U(t) | \psi_1, \psi_2; f_1 \rangle\rangle, \quad \langle\langle \psi_1, \psi_2; f_2 | U(t) | \psi_1, \psi_2; f_1 \rangle\rangle, \quad (2.48)$$

que quantifica a “similaridade” a diferentes tempos entre o estado evoluído e um dos estados de sabor iniciais. Tal probabilidade pode ser usada para modelar processos de criação e detecção [33] definindo estados de sabor, de criação e de detecção, ligeiramente diferentes daqueles iniciais, o que implica na introdução de ineficiências e gera uma fórmula de oscilação dependente dos parâmetros dos estados de sabor definidos. Contudo, a escolha desses estados é sobremaneira arbitrária e, não dispondo de informações acerca desses parâmetros, preferimos utilizar os auto-estados de sabor independentes da parte orbital definidos anteriormente, e calcular uma probabilidade de transição ideal caracterizada simplesmente pela probabilidade de “encontrar” determinado sabor, independente da posição ou do momento. Informações acerca do pacote de onda que está sendo criado, podem ser inferidas se soubermos as características da interação responsável e do meio criador; no caso do sol, por exemplo, certos limites são impostos para a localização dos neutrinos devido a densidade e pressão do meio e do livre caminho médio das partículas criadoras entre colisões no meio [47].

## 2.7 Análise da fórmula de Oscilação

Antes de entrar em cálculos explícitos, analíticos ou numéricos, é interessante analisar as características gerais da fórmula de oscilação obtida em (2.43). Para tal, é suficiente analisar o comportamento do termo oscilante  $\mathcal{A}_{12}(t)$  de (2.44).

Primeiramente, notamos que a probabilidade de mudança de sabor somente é zero se

$$\Re\{\mathcal{A}_{12}\} = 1,$$

i.e., quando o termo de oscilação tem a parte real máxima. Assim, é válido escrever  $\mathcal{A}_{12}$  na forma

$$\mathcal{A}_{12}(t) = |\mathcal{A}_{12}(t)| e^{i\Theta(t)},$$

que separa a amplitude de oscilação, dada por  $|\mathcal{A}_{12}(t)|$ , e a fase oscilatória, dada por  $\Theta(t)$ .

Desse modo, é importante investigar  $\mathcal{A}_{12}$  no tempo inicial  $t = 0$ . A partir de (2.44), podemos ver que, quando  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_{12}(0)| &= |\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle| \\ &= \left| \int d^3 p g_1(\mathbf{p}) g_2^*(\mathbf{p}) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int d^3 p |g_1(\mathbf{p})g_2(\mathbf{p})| \\
&\leq \int d^3 p \frac{1}{2}[|g_1(\mathbf{p})|^2 + |g_2(\mathbf{p})|^2] \\
&= 1,
\end{aligned} \tag{2.49}$$

visto que  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  estão normalizados. A igualdade vale somente quando esses dois kets são iguais ( $|\psi_1\rangle \equiv |\psi_2\rangle$ ). Essa condição implica uma forte restrição sobre a condição na qual a probabilidade inicial de troca de sabor é nula. Embora a interação fraca (responsável pela criação) conserve sabor, neste formalismo, que não leva em conta a interação explicitamente, o estado inicial não possui necessariamente um sabor puro; essa condição deve ser imposta adicionalmente de maneira coerente. A imposição estrita de tal condição implica que a parte orbital dos estados de massa iniciais é idêntica, inclusive seu momento médio. Tal condição entra em contradição com os requerimentos cinemáticos nos quais constata-se que nenhum cenário de quantidades cinemáticas iguais é favorecido *a priori*. Na seção 4.2.1 faremos uma discussão a respeito, e ilustraremos porque tais requerimentos não devem ser interpretados estritamente. Mostraremos também que, pelo menos no caso do decaimento do pión, a componente não pura de sabor é desprezível.

Sendo assim, podemos analisar o comportamento subsequente para a probabilidade de conversão de sabor:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_{12}(t)| &= |\langle \psi_2 | U_2^\dagger U_1 | \psi_1 \rangle| \\
&= \left| \int d^3 p g_1(\mathbf{p}) g_2^*(\mathbf{p}) e^{-i\Delta E(p)t} \right| \\
&= \left| \int d^3 p G(\mathbf{p}) e^{i[\Delta\phi(\mathbf{p}) - \Delta E(p)t]} \right| \\
&\leq \int d^3 p G(\mathbf{p}) \\
&\leq 1,
\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$G(\mathbf{p}) = |g_1(\mathbf{p})g_2(\mathbf{p})|, \quad g_k(\mathbf{p}) = |g_k(\mathbf{p})|e^{i\phi_k(\mathbf{p})}.$$

A diferença entre os valores de  $\mathcal{A}_{12}$  e

$$\int d^3 p G(\mathbf{p})$$

depende da variação<sup>2</sup> da função  $\Delta\phi(\mathbf{p}) - \Delta E(p)t$  no expoente, responsável pela oscilação do integrando e, conseqüente redução do seu valor. A variação dessa função pode ser quantificada pela sua primeira derivada, supondo que esta função possui um comportamento suave. De fato, pode-se averiguar que a função  $|\Delta E(p)|$  é uma função suave e monotonicamente decrescente (veja fig.2.1). Além disso, para energias relativísticas ( $\bar{p} \gg \bar{m}$ ), todos os módulos de suas derivadas são monotonicamente decrescentes (fig.2.1). Logo, se as funções  $g_n$  tiverem valores apreciáveis em apenas uma pequena região ao redor de energias relativísticas, não haverá mudanças bruscas na função  $\Delta E$ , e as aproximações sobre a mesma serão boas.

---

<sup>2</sup>a notação para diferenças ( $\Delta$ ) e médias ( $\bar{\phantom{x}}$ ) consta no apêndice D.

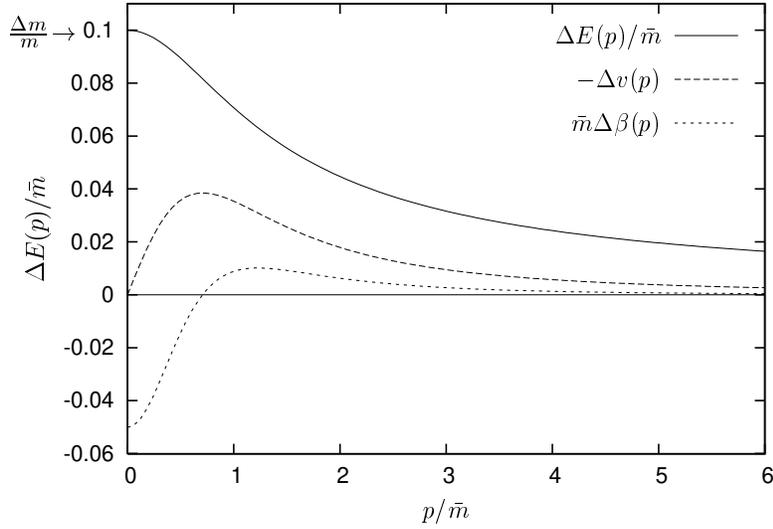


Figura 2.1: Graficamos a função  $\Delta E(p)$  e suas derivadas  $\Delta v(p)$  e  $\Delta\beta(p)$  (veja equação (3.3)) para  $\Delta m/\bar{m} = 0.1$ . Todas as funções são suaves na região relativística  $p \gg \bar{m}$ , e são aproximadamente funções de potências  $p^{-n}$  com  $n = 1, 2, 3$  respectivamente.

A derivada resultante é

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \nabla(\Delta\phi)(\mathbf{p}) - \Delta\mathbf{v}(p)t .$$

Se as funções  $g_k$  são reais (ou simplesmente se suas funções de fase  $\phi$  são iguais), deduz-se que

$$|\mathcal{A}_{12}(t)| = \left| \int d^3p |g_1(\mathbf{p})g_2(\mathbf{p})| e^{-i\Delta E(p)t} \right| \leq \int d^3p |g_1(\mathbf{p})g_2(\mathbf{p})| = |\mathcal{A}_{12}(0)| . \quad (2.51)$$

Nesse caso, a amplitude de oscilação apenas decresce com o tempo, já que a variação de  $\Delta E(p)t$  aumenta, fazendo com que o integrando oscile muito rapidamente, anulando a integral. Se, além disso, a amplitude de oscilação inicial é pequena ( $|\mathcal{A}_{12}| \approx 0$ ), então a oscilação não será observável em nenhum momento desde a criação. Esse caso é ilustrado na fig.3.3 da sec.3.3.

No caso geral em que  $\Delta\phi \neq 0$ , pode haver um aumento da amplitude, enquanto  $\mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$  diminui em módulo em relação ao tempo.

Há mais um caso em que podemos saber o comportamento da amplitude de oscilação independentemente da forma dos pacotes. Este caso corresponde ao limite incoerente ( $t \rightarrow \infty$ ). Podemos escrever (2.50) efetivamente como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{12}(t) &= \int d^3\mathbf{p} G(\mathbf{p}) e^{i[\Delta\phi(\mathbf{p}) - \Delta E(p)t]} \\ &= \int dp p^2 e^{-i\Delta E(p)t} \int d\Omega G(\mathbf{p}) e^{i\Delta\phi(p)} \end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty dp \tilde{G}(p) e^{i[\Delta\tilde{\phi}(p) - \Delta E(p)t]} , \quad (2.52)$$

onde as funções efetivas  $\tilde{G}$  e  $\tilde{\phi}$  são definidas em termos da média sobre todos os ângulos sólidos  $\Omega$  possíveis, dos quais depende o vetor  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\Omega)$ :

$$\tilde{G}(p) e^{i\Delta\tilde{\phi}(p)} = p^2 \int d\Omega G(\mathbf{p}) e^{i\Delta\phi(\mathbf{p})} .$$

Sabendo-se que  $\tilde{G}$  tende a zero à medida que  $p \rightarrow 0$  e  $p \rightarrow \infty$  (condição para que a função seja quadrado integrável), nota-se que a integral da última expressão em (2.52) pode ser calculada sobre um intervalo limitado em que  $\tilde{G}$  contribui efetivamente. Dentro desse intervalo, se  $t \rightarrow \infty$ , o expoente  $\Delta E(p)t$  faz o integrando oscilar muito rapidamente, fazendo com que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{12}(t) = 0 . \quad (2.53)$$

Esse resultado deixa a probabilidade de conversão de sabor constante:

$$\mathcal{P}_{\text{troca}} = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta . \quad (2.54)$$

O tempo  $t$  no qual a oscilação da probabilidade de conversão começa a cessar pode ser estimado quantitativamente a partir de  $\max |\mathbf{f}(\bar{\mathbf{p}}, t)| I \gtrsim 2\pi$ , onde  $I$  é o tamanho do intervalo no qual  $G(p)$  é apreciável e  $\bar{\mathbf{p}}$  é o centro do intervalo. Para  $\Delta\phi = 0$ , temos  $t \gtrsim 2\pi/\Delta v I$ , o que é aproximadamente o tempo de separação  $T_{\text{sep}}$  (3.15). Contudo, alguns trabalhos como [30, 38] reportam a possibilidade de retorno ao regime oscilatório devido a uma detecção coerente. Dado que efeitos dos processos de detecção e criação não foram incluídos, não há como reproduzi-los neste enfoque.

Apesar disso, podemos extrair das considerações acima (sem considerar efeitos de detecção) que qualquer fórmula de oscilação derivada de (2.43) e (2.44) pode ser escrita na forma

$$\mathcal{P}_{\text{troca}} = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta [1 - A(t) \cos \Theta(t)] , \quad (2.55)$$

onde  $A(t) = |\mathcal{A}_{12}(t)|$  é uma função real positiva sempre menor que a unidade, e tende a zero assintoticamente com o tempo.  $\Theta$  é o termo responsável pela oscilação. A fórmula acima pode ser útil para modelar processos em que não há informações acerca dos processos microscópicos que produzem os neutrinos e que caracterizam seu PO. Pode-se escolher as funções  $A(t)$  e  $\Theta(t)$  com as restrições acima.

## 2.8 Relações de Substituição do Tempo pela Posição

A partir da integração no espaço de uma densidade de probabilidade, chegamos a uma probabilidade de transição (2.43) dependente do tempo  $t$ , um parâmetro interno da Mecânica Quântica. No entanto, é desejável escrever todas as fórmulas passíveis de serem comparadas com o experimento em termos de observáveis.

De acordo com [32, 38], com o uso de PO, é necessário uma média no tempo inicial, do qual não se tem controle. Essa média, porém, é feita sobre todo o tempo, o que elimina o parâmetro  $t$  da fórmula de oscilação. Assim, resta apenas uma densidade de probabilidade média que depende da variável de posição  $x$ ; essa quantidade deve ser normalizada para ser interpretada como uma probabilidade. Esse tipo de integração será discutido na sec.4.1.1.

Usaremos aqui uma outra estratégia que se mostrará efetivamente equivalente ao formalismo de OP. A fim de conectar o parâmetro de tempo não observável com a posição observável, faremos uso das características estatísticas da Mecânica Quântica (uma relação somente pode ser estabelecida em termos da média, de acordo com a distribuição de probabilidade dada pelo módulo quadrado da função de onda). Uma tentativa consistente é calcular,

$$\langle\langle \mathbf{X} \rangle\rangle = x(t) , \quad (2.56)$$

e inverter a relação para obter  $t = t(\langle\langle \mathbf{X} \rangle\rangle)$ , em que  $\langle\langle \mathbf{X} \rangle\rangle$  representa a distância média percorrida pelo neutrino. Devemos assegurar que a incerteza para tal relação, dada pelo desvio quadrático médio  $\Delta \mathbf{X}^2$ , seja menor que a incerteza na fonte de emissão e região de detecção.

Além disso, deve ser ressaltado que a detecção se baseia nas propriedades de sabor do neutrino, via força fraca, observando-se seus produtos de reação carregados; nem o sabor nem a distância percorrida podem ser medidas diretamente. A distância só pode ser conhecida em média considerando-se a dinâmica de detecção e a posição de criação, conhecida a localização da fonte.

Essa média na posição da fonte e detector é imprescindível no confronto de dados experimentais. Outro observável do qual conhecemos apenas sua distribuição é a energia, sobre a qual também deve ser tomada uma média. Essa análise é feita na sec.4.1.

Portanto, a quantidade de real interesse, é, ao invés de (2.56), a posição média de sabor:

$$x_{f_k}(t) = \frac{\langle\langle \mathbf{X}_{f_k} \rangle\rangle}{\langle\langle \Gamma_{f_k} \rangle\rangle} \quad (2.57)$$

dada pelo valor esperado (normalizado) do operador de posição de sabor:

$$\mathbf{X}_{f_k} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{X}\Gamma_{f_k} + \Gamma_{f_k}\mathbf{X}) , \quad (2.58)$$

onde levamos em conta a simetrização na definição acima, devido à não-comutabilidade dos observáveis. Explicitamente,

$$\mathbf{X}_{f_2} \equiv \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \mathbf{X}_1 & \sin \theta \cos \theta \mathbf{X}_{12} \\ \sin \theta \cos \theta \mathbf{X}_{21} & \cos^2 \theta \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} , \quad (2.59)$$

onde

$$\mathbf{X}_{21} = \frac{1}{2}(\mathbf{X}_2 T_{21} + T_{21} \mathbf{X}_1) = (\mathbf{X}_{12})^\dagger . \quad (2.60)$$

Logo,

$$\langle\langle \mathbf{X}_{f_2} \rangle\rangle(t) = \sin^2 \theta \cos^2 \theta [\langle \mathbf{X} \rangle_1(t) + \langle \mathbf{X} \rangle_2(t) + 2\Re\{x_{21}(t)\}] , \quad (2.61)$$

onde

$$x_{21}(t) \equiv \langle \psi_2(t) | \mathbf{X}_{21} | \psi_1(t) \rangle . \quad (2.62)$$

Se aplicarmos  $T_{21}$  (2.37) explicitamente, chegamos a

$$\begin{aligned} x_{21}(t) &= \frac{1}{2} [\langle \psi_2(t) | T_{21} \mathbf{X}_1 | \psi_1(t) \rangle + \langle \psi_2(t) | \mathbf{X}_2 T_{21} | \psi_1(t) \rangle] \\ &= \int d^3 \mathbf{p} \left\{ \left( g_2(\mathbf{p}) e^{-iE_2(p)t} \right)^* i \overleftrightarrow{\partial}_p \left( g_1(\mathbf{p}) e^{-iE_1(p)t} \right) \right\} , \\ &= \int d^3 \mathbf{p} \left\{ \frac{i}{2} \left( g_2^* \partial_p g_1 - \partial_p g_2^* g_1 \right) + \frac{1}{2} \left[ \mathbf{v}_1(\mathbf{p}) + \mathbf{v}_2(\mathbf{p}) \right] t \right\} e^{-i\Delta E(p)t} , \end{aligned} \quad (2.63)$$

em que  $\overleftrightarrow{\partial}_p$  denota a operação

$$A(\mathbf{p}) \overleftrightarrow{\partial}_p B(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left[ A(\mathbf{p}) \frac{\partial B}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}) - \frac{\partial A}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}) B(\mathbf{p}) \right] .$$

Podemos identificar duas contribuições na integral acima: o primeiro termo contribui com um deslocamento médio constante; o segundo termo é responsável pelo movimento médio uniforme linear com o tempo na forma  $x = vt$ , cuja velocidade é dada pela média sobre os momentos da função velocidade média:

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{v}_1(\mathbf{p}) + \mathbf{v}_2(\mathbf{p}) \right] , \quad \mathbf{v}_k(\mathbf{p}) = \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}) . \quad (2.64)$$

Note que se  $\Delta E(p) = 0$  não haveria oscilação e o movimento seria puramente uniforme com um deslocamento inicial.

A igualdade

$$\mathbf{X}_{f_1} + \mathbf{X}_{f_2} = \mathbf{X} \quad (2.65)$$

nos permite computar  $\langle\langle \mathbf{X}_{f_2} \rangle\rangle(t)$ , sabendo-se  $\langle\langle \mathbf{X} \rangle\rangle$  e  $\langle\langle \mathbf{X}_{f_1} \rangle\rangle(t)$ .  $\langle\langle \mathbf{X} \rangle\rangle$  pode ser facilmente obtido sabendo-se que

$$\langle\langle \mathbf{X} \rangle\rangle_k = \langle\langle \mathbf{V} \rangle\rangle_k t = \mathbf{v}_k t ,$$

no caso em que ambos os pacotes são centrados em  $x = 0$  e em  $t = 0$ .

Podemos calcular também a incerteza nestas posições usando  $\langle\langle (\Delta X_{f_k})^2 \rangle\rangle$  para estimar o erro que cometemos quando associamos  $x_{f_2}$  a  $t$ . Mas devido a complexidade das expressões, esses cálculos se tornam demasiado extensas e inviáveis. Podemos simplesmente estimá-los por meio de  $\langle\langle (\Delta X_k)^2 \rangle\rangle_k$  que nos dá os tamanhos dos pacotes, e por  $\Delta x_{\text{dis}}^2$  em (2.30), que fornece a separação entre os mesmos. A inclusão dessas incertezas na associação é ilustrada no apêndice E tomando-se uma média a nível clássico.

# Capítulo 3

## Aplicação em Pacotes Gaussianos

Aplicaremos nesse capítulo o formalismo e as notações descritos anteriormente em pacotes de onda (PsO) gaussianos. Inicialmente, calculamos a probabilidade de mudança de sabor e, a seguir, a posição média de “sabor”. Esta última grandeza será útil na substituição do tempo pelo observável de posição. Por meio de gráficos numéricos, ilustramos os principais fenômenos que emergem, tais como a oscilação propriamente dita, a separação dos pacotes, o alargamento e os mecanismos que suprimem a oscilação e a definição de sabor.

### 3.1 Cálculo Explícito da Amplitude de Oscilação

De posse do formalismo descrito até agora, podemos calcular explicitamente a probabilidade de transição, definindo estados orbitais para ambos os auto-estados de massa. Por simplicidade, restringiremo-nos a um problema unidimensional. Essa restrição implica que não devemos obter nenhum efeito de dispersão resultante do não paralelismo dos momentos ou do alargamento dos PsO nas direções perpendiculares ao movimento, assim como não deverão aparecer efeitos resultantes da diminuição do fluxo com a distância. Uma descrição detalhada desses efeitos encontra-se em [38].

Devido à facilidade algébrica, usaremos pacotes de formas gaussianas. Estas são adequadas para a descrição aproximada de qualquer pacote bem localizado (pequena largura) em torno de um máximo dominante (aproximadamente dado pelo valor médio). Na representação dos momentos, temos

$$\langle p | \psi_k \rangle = g_k(p) = \Omega(p - p_k; a_k^{-1}/2) , \quad (3.1)$$

que descreve, como no Apêndice B, uma função gaussiana caracterizada por

$$\langle \mathbf{P} \rangle_k = p_k , \quad \langle (\Delta \mathbf{P})_k^2 \rangle_k = \frac{1}{4a_k^2} = \frac{1}{4 \langle (\Delta \mathbf{X})_k^2 \rangle_k} .$$

Na representação das coordenadas, o PO é dado por

$$\psi_k(x, t) = \int dp \Omega(p - p_k; a_k^{-1}/2) e^{i(p x - E(p)t)} . \quad (3.2)$$

A probabilidade de transição é calculada usando-se (2.43) e (2.44). A amplitude  $\mathcal{A}_{12}$  pode ser explicitamente calculada a partir do produto de dois pacotes gaussianos

$$\Omega(p - p_1; \frac{1}{2a_1})\Omega(p - p_2; \frac{1}{2a_2}) \propto \Omega(p - \bar{p}; \frac{1}{\sqrt{2(a_1^2 + a_2^2)}})$$

que é também (proporcional a) uma gaussiana centrada em <sup>1</sup>

$$\bar{p} = \langle p_k; a_k^2 \rangle_{12} \equiv \frac{p_1 a_1^2 + p_2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} .$$

Visto que a gaussiana é uma função que decresce rapidamente à medida que se distancia do máximo, podemos expandir:

$$\Delta E(p) \approx \Delta E(\bar{p}) + \Delta v(\bar{p})(p - \bar{p}) + \Delta\beta(\bar{p})(p - \bar{p})^2 ; \quad (3.3)$$

onde

$$v_k(\bar{p}) \equiv \frac{dE_k(\bar{p})}{dp} = \frac{\bar{p}}{E_k(\bar{p})} , \quad \beta_k(\bar{p}) \equiv \frac{1}{2} \frac{d^2 E(\bar{p})}{dp^2} = \frac{m_k^2}{2E_k^3(\bar{p})} , \quad E_k(\bar{p}) = \sqrt{\bar{p}^2 + m_k^2} ,$$

sendo ( $k = 1, 2$ ). A diferença  $\Delta f = f_1 - f_2$  é assim definida para qualquer quantidade  $f$  associada à massa  $m_1$  e  $m_2$ .

Dentro dessas aproximações, a integral (2.44) resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{12} &= \int dp g_1(p) g_2^*(p) e^{-i\Delta E_{12}(p)t} , \\ &\approx \alpha^{\frac{1}{2}} \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \exp\{-[a^2](\Delta p)^2\} \exp\left\{-\frac{(\Delta v(\bar{p})t)^2}{8\tilde{a}^2|\mathcal{S}|^2} \left(1 - i\frac{t}{\tilde{\mathfrak{X}}}\right)\right\} e^{-i\Delta E(\bar{p})t} , \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde

$$\Delta E(\bar{p}) = \frac{\Delta m^2}{2E(\bar{p})} , \quad \alpha = \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} , \quad [a^2] = \frac{a_1^2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} ,$$

$$\mathcal{S} = 1 + i\frac{t}{\tilde{\mathfrak{X}}} , \quad \tilde{\mathfrak{X}} = \frac{2\tilde{a}^2}{\Delta\beta(\bar{p})} , \quad \tilde{a}^2 = (a_1^2 + a_2^2)/2 .$$

Na expressão acima,  $\alpha$  representa uma fator de assimetria, cujo máximo  $\alpha = 1$  é alcançado quando  $a_1 = a_2$ . O fator  $\mathcal{S}$  representa o termo de “alargamento”<sup>2</sup>, responsável pelo alargamento do PO (efeito de “spreading”); note que inicialmente  $\mathcal{S}(t=0) = 1$  e posteriormente seu módulo apenas decresce com o tempo, contribuindo para que a altura do pacote diminua e sua largura aumente. O tempo  $\tilde{\mathfrak{X}}$  é o tempo característico para que efeitos de alargamento sejam importantes na probabilidade de conversão; note que uma estimativa para que a aproximação (3.3) na integral acima seja válida é  $\partial_p^3 \Delta E(\bar{p})t/6 \ll \pi$  (veja apêndie C).

Usando (2.43) e (2.46), temos a probabilidade de mudança de sabor

$$\mathcal{P}_{\text{troca}}(t) = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta (1 - \Re\{\mathcal{A}_{12}(t)\}) . \quad (3.5)$$

<sup>1</sup>vide Apêndice B.

<sup>2</sup>note que os responsáveis pelo alargamento são coeficientes de  $p^n$  com expoente  $n$  par na expansão.

### 3.1.1 Cálculo na Representação de Posição

Embora tenhamos, por simplicidade, feito os cálculos na representação de momento na seção 3.1, podemos refazê-los na representação de posição usando as aproximações do apêndice C para pacotes de onda gaussianos. Mostraremos que existem diferenças sutis entre a fórmula de oscilação assim calculada e a fórmula de oscilação calculada na seção 3.1.

Para computar a fórmula de oscilação, é suficiente calcular o termo de oscilação  $\mathcal{A}_{12}(t)$  na representação de posição:

$$\mathcal{A}_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_1(x, t) \psi_2^*(x, t) . \quad (3.6)$$

Usando a aproximação gaussiana (C.7), com gaussianas de larguras iniciais iguais ( $a_1 = a_2 = a$ ), temos, para cada função de onda,

$$\psi_n(x, t) \approx e^{i(p_n x - E_n t)} \Omega(x - v_n t; a; \beta_n t/a^2) . \quad (3.7)$$

Incluindo essas funções de onda em (3.6), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{12}(t) &\approx e^{i[\Delta p \bar{v} - \Delta E]t} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\Delta p(x - \bar{v}t)} \Omega(x - \bar{v}t - \frac{\Delta v}{2}t; a; \beta_1 t/a^2) \Omega(x - \bar{v}t + \frac{\Delta v}{2}t; a; -\beta_2 t/a^2) \\ &= \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} e^{-i\Delta\Phi} e^{-\frac{(\Delta vt)^2}{8a^2\mathcal{S}}} \exp\left\{\frac{-\Delta p \Delta v t \bar{\beta} t}{2a^2\mathcal{S}}\right\} \exp\left\{-\frac{(a\Delta p)^2}{2\mathcal{S}}\left(1 + i\frac{\Delta\beta}{2a^2}t + \frac{\beta_1\beta_2 t^2}{4a^4}\right)\right\} , \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde

$$\mathcal{S} = 1 + i\frac{t}{\tilde{\mathcal{X}}} , \quad \tilde{\mathcal{X}} = \frac{2a^2}{\Delta\beta} , \quad \Delta\Phi = \Delta E - \Delta p \bar{v} = \left(\frac{\Delta m^2}{2E} - \Delta v \frac{\Delta E}{2E}\right)t .$$

A diferença  $\Delta\Phi$ , é a fase de oscilação padrão, com correções de segunda ordem em  $\Delta m$  e  $\Delta p$ . Desprezando essas correções, esta fase é equivalente a  $\Delta E(\bar{p})t$  em (3.4).

Se desprezarmos os efeitos de alargamento ( $\beta_n \rightarrow 0$ ), obteremos, no lugar de (3.8), a amplitude

$$\mathcal{A}_{12}(t) \approx e^{-i\Delta\Phi} e^{-\frac{(a\Delta p)^2}{2}} e^{-\frac{(\Delta vt)^2}{8a^2}} . \quad (3.9)$$

Esta amplitude corresponde a um fator de oscilação equivalente ao encontrado na seção 3.1, com as mesmas aproximações, exceto pelo fato de que o termo de amortecimento da oscilação (decorrente da separação  $\Delta vt$  entre os pacotes), depende corretamente das velocidades, ao invés de  $\Delta v(\bar{p})$ , encontrado em (3.8). A diferença entre os dois fatores pode ser vista explicitamente a seguir:

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{1}{2}[v_1(p_1) + v_2(p_2)] = \frac{p_1}{2\sqrt{p_1^2 + m_1^2}} + \frac{p_2}{2\sqrt{p_2^2 + m_2^2}} \\ \Delta v(\bar{p}) &= \frac{1}{2}[v_1(\bar{p}) + v_2(\bar{p})] = \frac{\bar{p}}{2\sqrt{\bar{p}^2 + m_1^2}} + \frac{\bar{p}}{2\sqrt{\bar{p}^2 + m_2^2}} . \end{aligned} \quad (3.10)$$

O mesmo vale para o tempo de alargamento, em que  $\Delta\beta$  em (3.8) difere de  $\Delta\beta_{12} = \Delta\beta(\bar{p})$  em (3.4). O apêndice D ilustra que a diferença está na contribuição da diferença de momento

$\Delta p$  nessas funções; esta diferença pode ser da mesma ordem de  $\Delta m$  em determinados casos. A principal diferença decorrente da contribuição de  $\Delta p$  está na existência ou não de zeros de função; a figura 2.1 mostra que a função diferença  $\Delta E(p)$  e suas derivadas não possuem raízes para  $p > 0$  enquanto as diferenças  $\Delta v$  e  $\Delta \beta$  podem assumir valores nulos (veja apêndice D). Essa diferença pode se manifestar no tempo de separação ou no efeito de alargamento (como acontece na fig.3.5, na qual o tempo de separação é infinito).

Essas são as principais diferenças entre as duas fórmulas; o restante dos termos são equivalentes se os efeitos de alargamento são desprezíveis ou mesmo pequenos. Assim, usaremos a fórmula (3.4), com as substituições  $\Delta v(\bar{p}) \rightarrow \Delta v$  e  $\Delta \beta(\bar{p}) \rightarrow \Delta \beta$ , para análises posteriores do modelo gaussiano.

Para efeito de ilustração, calculamos o termo de oscilação no caso mais geral em que  $a_1 \neq a_2$ , que, ao invés de (3.8), resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{12}(t) = & \alpha^{\frac{1}{2}} \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} e^{-i\Delta\Phi} e^{-\frac{(\Delta vt)^2}{8\tilde{a}^2\mathcal{S}}} \exp\left\{i\frac{\Delta p\Delta vt}{4\tilde{a}^2\mathcal{S}}(\Delta a^2 + 2i\bar{\beta}t)\right\} \\ & \times \exp\left\{-\frac{[a^2](\Delta p)^2}{\mathcal{S}}\left(1 + i\Delta\left(\frac{\beta}{2a^2}\right)t + \frac{\beta_1\beta_2 t^2}{4a_1^2 a_2^2}\right)\right\}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde

$$\alpha = \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad [a^2] = \frac{a_1^2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad \mathcal{S} = 1 + i\frac{t}{\tilde{\mathfrak{X}}}, \quad \tilde{\mathfrak{X}} = \frac{2\tilde{a}^2}{\Delta\beta}, \quad \tilde{a}^2 = (a_1^2 + a_2^2)/2.$$

## 3.2 Regimes de Oscilação para o caso gaussiano

Com o cálculo explícito feito na seção 3.1, podemos observar a estrutura fina da fórmula de oscilação referente à oscilação e ao amortecimento (diminuição da amplitude).

É ilustrado explicitamente em (3.4) que o módulo de  $\mathcal{A}_{12}$  apenas decresce com o tempo; o uso de (2.51) já poderia antecipar tal resultado, visto que as amplitudes de momento  $g_n$  são funções gaussianas reais (3.1). Nesse caso, o valor inicial de  $\mathcal{A}_{12}$  determina a ocorrência do fenômeno de oscilação de sabor. Avaliamos então,

$$\mathcal{A}_{12}(0) = \alpha^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{a_1 a_2}{2}\alpha(\Delta p)^2\right\} \leq 1, \quad \alpha = \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad (3.12)$$

um resultado exato devido a integrabilidade quando  $t = 0$ . Em (3.12)  $[a^2]_{12}$  foi reescrito em termos de  $\alpha$ . Esse fator de assimetria, quantifica a semelhança entre  $a_1$  e  $a_2$ , já que seu valor varia de 0 ( $a_1 = 0$  ou  $a_2 = 0$ ) a 1 ( $a_1 = a_2 \neq 0$ ). Observamos, então, que o valor de  $\mathcal{A}_{12}$  depende decisivamente dos valores de  $\Delta p$  e  $a_n$ ; quando  $\Delta p = 0$  e  $a_1 = a_2$  (correspondente a  $g_1 = g_2$ ), então  $\mathcal{A}_{12} = 1$ , o valor máximo. Do contrário quanto maior  $\sqrt{a_1 a_2} \Delta p$  e a diferença entre  $a_1, a_2$ , menor o valor da amplitude; essa relação equivale a uma menor sobreposição (“overlap”) entre os PsO, o que leva à supressão do fenômeno de oscilação, independentemente do tempo, mas dependente das condições iniciais de criação. No caso de larguras iguais  $a_1 = a_2 = a$  (veja sec.3.3) a condição para que tenhamos definição (aproximada) de sabor é

$$a|\Delta p| \ll 1. \quad (3.13)$$

Fisicamente, a característica de supressão poderia ser explicada pela proposição de Kayser [31], de que a possibilidade de distinção entre os auto-estados de massa implicaria em perda de oscilação. Dito em outras palavras, a literatura atesta a necessidade de haver um processo coerente de criação para que haja oscilação [30].

Dada a definição inicial de sabor, podemos classificar os regimes de oscilação para tempos subsequentes. O termo predominantemente oscilante depende do expoente

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta m^2}{2E}t = 2\pi \frac{t}{T_{\text{osc}}} , \quad (3.14)$$

enquanto o termo que predominantemente amortece a oscilação é dado pela exponencial real cujo expoente, em módulo, é

$$\frac{(\Delta vt)^2}{8\tilde{a}^2} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{t}{T_{\text{sep}}} \right)^2 . \quad (3.15)$$

Este expoente provém do efeito da separação entre os PsO devido à diferença de velocidade. O tempo de separação  $T_{\text{sep}}$  que está relacionado a um comprimento de separação (ou comprimento de coerência, devido à analogia com a perda de coerência em óptica) foi primeiramente proposto dentro da física de neutrinos por Nussinov [35] em 1976, mas sua dedução com o uso de PsO (a saber, gaussianos) fora feito por Giunti [32] em 1991.

O fenômeno de mudança de sabor pode ser classificado quantitativamente com o uso do parâmetro

$$\eta \equiv \frac{T_{\text{osc}}}{2\pi T_{\text{sep}}} = \frac{\Delta v \bar{E}}{\Delta m^2 2\tilde{a}} \approx \frac{\bar{v}}{2\tilde{a}\bar{E}} , \quad \tilde{a}^2 = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2) , \quad (3.16)$$

em dois tipos:

- $\eta > 1$  (oscilatório); que resulta em comportamento oscilatório, e
- $\eta < 1$  (amortecido); onde o amortecimento é mais rápido que a oscilação.

A segunda aproximação em (3.16) vale se  $\Delta p/\bar{p} \ll \Delta m/\bar{m}$ ; em caso de oscilação, podemos dividir a conversão de sabor em dois regimes:

- $t \lesssim T_{\text{sep}}$ : resultando em regime oscilatório, e
- $t \gtrsim T_{\text{sep}}$ : regime incoerente.

O regime de transição ou de separação (em que ocorre a separação dos PsO) acontece durante o intervalo intermediário  $t \approx T_{\text{sep}}$

Note que dentro do regime oscilatório<sup>3</sup>  $\Delta vt \ll a$ , com definição aproximada de sabor  $a|\Delta p| \ll 1$  ( $a_1 = a_2$ ), o termo de oscilação (3.4) recai, como esperado, no termo padrão

$$\Re\{\mathcal{A}_{12}\}|_{a|\Delta p| \ll 1, \Delta vt \ll a} = \cos\left(\frac{\Delta m^2 t}{2\bar{E}}\right) , \quad (3.17)$$

que leva à fórmula de oscilação padrão:

$$\mathcal{P}(f_1 \rightarrow f_2; t) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \underbrace{\frac{\Delta m^2 t}{4\bar{E}}}_{\frac{\Delta\Phi}{2}} \right) . \quad (3.18)$$

---

<sup>3</sup>o regime oscilatório foi chamado de “minimal slippage” no artigo em anexo no cap.5.

### 3.3 Resultados e Ilustração Numérica

Ilustraremos aqui, para o caso de funções de onda gaussianas, alguns dos fenômenos analisados anteriormente. Tomamos o caso em que o ângulo de mistura é máximo:  $\theta = 45^\circ = \pi/4$ . Adotamos um estado de sabor “ $f_1$ ” (aproximado) como condição inicial,

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(x, t)|m_1\rangle - \psi_1(x, t)|m_2\rangle] = \psi_{f_1}(x, t; \frac{\pi}{4})|f_1\rangle + \psi_{f_2}(x, t; \frac{\pi}{4})|f_2\rangle ,$$

onde  $\psi_{f_1}$  e  $\psi_{f_2}$  referem-se às amplitudes:

$$\begin{aligned} \psi_{f_1}(x, t; \frac{\pi}{4}) &= \frac{1}{2}[\psi_1(x, t) + \psi_2(x, t)] , \\ \psi_{f_2}(x, t; \frac{\pi}{4}) &= \frac{1}{2}[\psi_1(x, t) - \psi_2(x, t)] . \end{aligned} \quad (3.19)$$

Tais amplitudes são equivalentes a  $\psi_{f_1 f_1}$  e  $\psi_{f_2 f_1}$  em (2.42), em que o segundo subíndice que denota o sabor inicial  $f_1$  foi omitido, uma vez que também trataremos de um caso em que a definição de sabor é inválida (fig.3.3).

Os PsO no espaço dos momentos são gaussianas centradas em  $p_k$ , com a mesma largura  $\frac{1}{2a}$ :

$$g_k(p) = \Omega(p - p_k; \frac{1}{2a}) .$$

A probabilidade de mudança de sabor nesse caso ( $a_1 = a_2 = a$ ,  $\theta = \pi/4$ ) assume a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{f_1 \rightarrow f_2}(t) &= \frac{1}{2}(1 - \Re\{\mathcal{A}_{12}(t)\}) , \quad \text{onde} \\ \mathcal{A}_{12}(t) &\approx \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{A}_{12}(0) \exp\left\{-\frac{(\Delta vt)^2}{4a^2|\mathcal{S}|^2}\left(1 - i\frac{t}{2}\right)\right\} e^{-i\Delta\Phi} , \quad \text{e} \\ \mathcal{A}_{12}(0) &= e^{-\frac{(a\Delta p)^2}{2}} . \end{aligned}$$

Note que, nesse caso, o valor de  $a\Delta p$  é determinante para criação ou não de um sabor aproximadamente bem definido.

A seguir, serão graficadas as densidades de probabilidade de sabor  $|\psi_{f_n}(x, t)|^2$  acima do eixo das abscissas e as densidades de probabilidade de massa  $|\psi_n|^2/2$  abaixo do mesmo eixo, em cores diferentes. A normalização é tal que as probabilidades de presença de sabor ou massa são dadas pelas áreas entre a curva e o eixo das abscissas, de forma que a soma das áreas acima ou abaixo seja unitária.

O procedimento numérico é o seguinte: (i) as amplitudes de massa  $\psi_n(x, t)$  são obtidas por integração numérica da expansão em momentos (2.23); (ii) as amplitudes de sabor  $\psi_{f_n}$  são calculadas a partir de (3.19); (iii) o módulo quadrado das amplitudes é calculado e, (iv) essas probabilidades são ilustradas em função da coordenada relativa  $x/a$ , a um dado tempo fixo  $t$ .

O procedimento de tomar coordenadas relativas é útil aqui porque evita precisar o parâmetro desconhecido  $a = \delta x$  (largura inicial dos pacotes de onda  $\psi_1$  e  $\psi_2$ ). Com a associação de valores numéricos a  $\{\bar{p}, \Delta p, \bar{m}, \Delta m\}/a$  (procedimento equivalente à definição de  $p_1, p_2, m_1$  e  $m_2$ ), todos os parâmetros estão determinados.

Primeiramente ilustraremos na fig.3.1 uma partícula no regime de oscilação. A fig.3.2 mostra a mesma partícula no regime de separação.

A partir da modificação do parâmetro  $\Delta p$ , a fig.3.3 ilustra um caso em que não há predominância de sabor no primeiro momento, nem há oscilação para todo o tempo subsequente (resultado de (2.51)). Isso se deve à grande diferença entre os PsO de massa, resultando aqui em uma grande diferença de momento  $\Delta p$ . Em função dessa diferença, os PsO formam um padrão similar às franjas de interferência óptica, na qual pode-se observar um fenômeno periódico após meio período de oscilação ( $T_{osc}/2$ ), sem a oscilação de área. Já a fig.3.4 ilustra um caso oposto ao ilustrado na fig.3.4, com um valor de  $\Delta p$  menor em uma ordem de grandeza. Vê-se que, inicialmente, existe (praticamente) apenas o sabor  $f_1$ . A pequena presença do sabor  $f_2$  pode ser verificada com o aumento da escala.

Por fim, a fig.3.5 ilustra o caso em que não há separação dos PsO ( $\Delta v = 0$ ). O efeito de alargamento é visível, se compararmos com a fig.3.2(a), que apresenta aproximadamente os mesmos tempos característicos de alargamento.

### 3.4 Posição de Sabor

Utilizando o modelo gaussiano analisado até agora, podemos calcular explicitamente a posição média de sabor. A equação (2.63) nos leva a

$$x_{21}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \left\{ -i\Delta[a_k^2(p - p_k)]_{12} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial E_1}{\partial p} + \frac{\partial E_2}{\partial p} \right] t \right\} g_1 g_2^* e^{-i\Delta E(p)t} , \quad (3.20)$$

onde subentende-se que na diferença (denotada por  $\Delta$ ) os índices mudos  $k$  variam de 1, 2 (veja apêndice B). Podemos identificar os dois termos acima como, respectivamente: (i) uma parte sem translação, somente oscilatória e, (ii) um termo oscilatório em torno da posição média linear em  $t$ . Note que ambos deveriam resultar em uma média não oscilatória se  $\Delta m = 0$ , em particular o último termo seria a posição média dependente da velocidade média  $\bar{v}$  (2.64).

Definimos agora, um funcional integral  $\mathcal{I}$ , em termos de uma função geral  $A$ :

$$\mathcal{I}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} dp A(p) g_1 g_2^* e^{-i\Delta E(p)t} . \quad (3.21)$$

Novamente, expandimos a dependência da energia no momento até a ordem de  $\beta$  em torno de  $\bar{p}$  (centro da distribuição  $g_1 g_2$ ), como em (3.3). Da mesma forma, para  $\bar{v}$ , temos, em uma dimensão,

$$\bar{v}(p) \approx \bar{v}(\bar{p}) + 2\bar{\beta}(\bar{p})(p - \bar{p}) \approx \bar{v} + 2\bar{\beta}(p - \bar{p}) .$$

A integral (3.20), então, resulta em<sup>4</sup>

$$x_{21}(t) = \mathcal{I} \left( -i[\Delta(a^2)p - \Delta(p_k a_k^2)]_{12} + \bar{v}t + 2\bar{\beta}(p - \bar{p})t \right) .$$

---

<sup>4</sup>veja apêndice B para esclarecer a notação e apêndice D para verificar diferenças e médias.

Agora, basta calcular

$$\mathcal{I}(1) = \mathcal{A}_{12} , \quad \mathcal{I}(p - \bar{p}) = \frac{i}{t} \frac{\partial}{\partial \Delta v} \mathcal{A}_{12} ,$$

usando o “truque” da derivada. Com isso,

$$\Re\{x_{21}(t)\} \approx \bar{v}t \Re\{\mathcal{A}_{12}\} - 2\bar{\beta} \frac{\partial}{\partial \Delta v} \Im\{\mathcal{A}_{12}\} + [\Delta(a^2)\bar{p} - \Delta(p_k a_k^2)_{12}] \Im\{\mathcal{A}_{12}\} + \frac{\Delta(a^2)}{t} \frac{\partial}{\partial \Delta v} \Re\{\mathcal{A}_{12}\} . \quad (3.22)$$

A expressão em (3.22) pode ser calculada usando-se (2.44).

A partir desse cálculo vemos que o termo predominante é aquele que contém  $\bar{v}t$ . Ao substituí-lo em (2.61) obtemos

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathbf{X}_{f_2} \rangle\rangle(t) &= 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta [\bar{v}t - \bar{v}t |\mathcal{A}_{12}| \cos \Theta] \\ &= \bar{v}t \mathcal{D}_{\text{troca}}(t) , \end{aligned} \quad (3.23)$$

o que nos leva à posição média do sabor  $f_2$ :

$$x_{f_2} \equiv \frac{\langle\langle \mathbf{X}_{f_2} \rangle\rangle(t)}{\langle\langle \Gamma_{f_2} \rangle\rangle(t)} \approx \bar{v}t . \quad (3.24)$$

A probabilidade de transição pode ser escrita em termos de  $x_{f_2}$

$$\mathcal{A}_{12}(x_{f_2}) \approx \alpha^{\frac{1}{2}} \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \exp\{-[a^2] \Delta p^2\} \exp\left\{-\frac{(\Delta v)^2}{v} \frac{x_{f_2}}{8\tilde{a}^2 |S|^2} \left(1 - i \frac{x_{f_2}}{\tilde{\chi}}\right)\right\} e^{-i \Delta \Phi(x_{f_2})} . \quad (3.25)$$

Se (2.65) for utilizada para calcular  $x_{f_1}$ ,

$$\begin{aligned} x_{f_1} &\equiv \frac{\langle\langle \mathbf{X}_{f_1} \rangle\rangle}{1 - \mathcal{D}_{\text{troca}}} = \frac{\langle\langle \mathbf{X} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{X}_{f_2} \rangle\rangle}{1 - \mathcal{D}_{\text{troca}}} \\ &= \bar{v}t + \cos 2\theta \frac{\Delta v t}{2} [1 - \mathcal{D}_{\text{troca}}]^{-1} , \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde

$$\langle\langle \mathbf{X} \rangle\rangle = \cos^2 \theta v_1 t + \sin^2 \theta v_2 t = \bar{v}t + \cos 2\theta \Delta v t / 2 .$$

No regime oscilatório, o segundo termo é desprezível e o pacote tem velocidade média  $\bar{v}$ .

Os outros termos de (3.22) são pequenos se comparados ao primeiro, mas eles ainda podem exercer alguma influência no movimento dos PsO de sabor, como ilustrado pelo movimento oscilatório dos picos na fig.3.1. Para analisá-los melhor, tomemos o caso mais simples, no qual  $a_1 = a_2 = a$ . Nesse caso a equação (3.22) torna-se

$$\Re\{x_{21}(t)\} \approx \bar{v}t \Re\{\mathcal{A}_{12}\} - 2\bar{\beta} \frac{\partial}{\partial \Delta v} \Im\{\mathcal{A}_{12}\} + a^2 \Delta p \Im\{\mathcal{A}_{12}\} .$$

Dos dois últimos termos, o primeiro possui o fator multiplicativo  $2\frac{\bar{\beta}}{\Delta v} (\Delta v t / a)^2$  (muito pequeno no regime oscilatório); o segundo, por outro lado, depende apenas de  $a^2 \Delta p$ ; este pode

ser grande (da ordem da unidade) como o  $\epsilon$ , no caso da fig.3.1. No regime oscilatório, obteremos

$$\Delta x_{f_2} = a^2 \Delta p \frac{\mathcal{A}_{12}(0) \sin(-\Theta)}{1 - \mathcal{A}_{12}(0) \cos \Theta}, \quad (3.27)$$

como fator adicional à (3.24). Por exemplo, para as figuras (b) e (c) da fig.3.1 teremos

$$(b) \quad \Theta = \frac{\pi}{4}, \quad \Delta x_{f_2} = -0.7a$$

$$\text{onde } \mathcal{A}_{12}(0) = 0.6 \text{ e } a\Delta p = 1.$$

$$(c) \quad \Theta = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta x_{f_2} = -1a$$

Esses valores estão na mesma ordem de grandeza dos desvios mostrados na fig.3.1; o erro se deve, provavelmente, a outras contribuições ou a média está significativamente deslocada devido ao pico secundário.

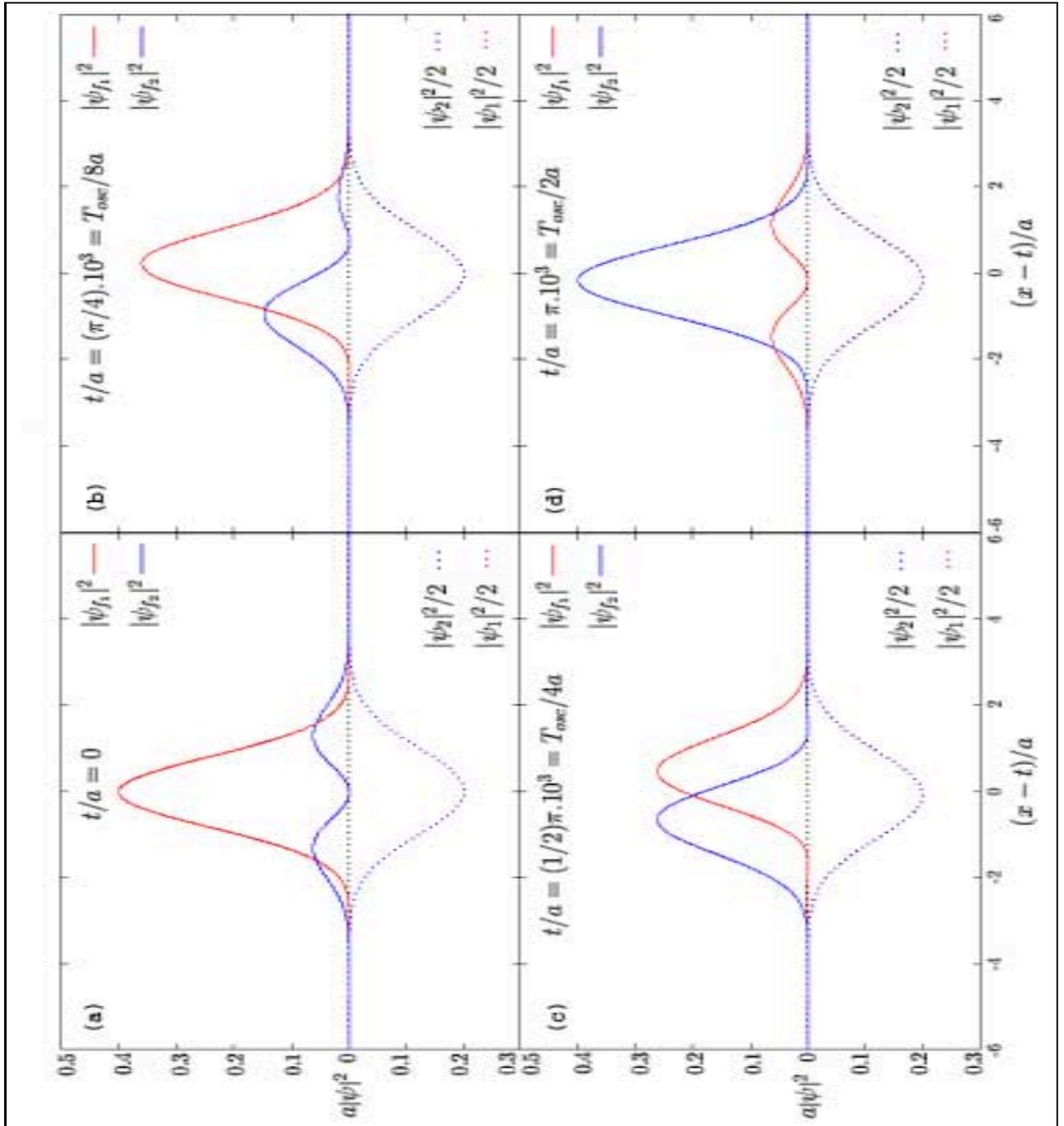


Figura 3.1: **Oscilação de sabor:** Densidades de probabilidades de sabor (módulo quadrado dos PsO de sabor)  $|\psi_{f_n}(x, t; \frac{\pi}{4})|^2$  (acima) e de massa  $|\psi_n(x, t)|^2$  (abaixo) em quatro tempos distintos: (a)  $t = 0$ , (b)  $t = T_{\text{osc}}/8$ , (c)  $t = T_{\text{osc}}/4$  e (d)  $t = T_{\text{osc}}/2$ . A “presença” de cada auto-estado é medida pela área abaixo de cada curva. O eixo horizontal em  $x/a$  acompanha a partícula com velocidade média  $\bar{v} \approx 1$ . Em (a) há predominância do sabor  $f_1$ . Em (b) a probabilidade de encontrar o sabor  $f_2$  cresce. Em (c) a probabilidade de encontrar os dois sabores são equivalentes após um quarto de período. Em (d) a presença do sabor  $f_2$  é máxima e igual àquela de  $f_1$  em (a). Os PsO dos auto-estados de massa 1 e 2 possuem formas gaussianas idênticas (as fases são diferentes) e são mostradas sobrepostas. Observa-se que os picos dos PsO de sabor seguem um movimento periódico em torno de  $\bar{v}t$ . Esse movimento é explicado na sec.3.4.

**Dados:**  $\bar{p} = 100/a$ ,  $\Delta p = 1/a$ ,  $\bar{v} = 1 - 5 \times 10^{-3}$ ,  $\bar{m} = 1/a$ ,  $\Delta m/\bar{m} = 0.1$ ,  $\eta = 10^{-2}$ ,

$$\mathcal{O}_{f_1 \rightarrow f_2}(0) = \frac{1}{2}(1 - 0.61) = 20\%,$$

**Tempos característicos:**  $T_{\text{osc}}/a = 2\pi \times 10^3$ ,  $T_{\text{sep}}/a = 10^5$  e  $\mathcal{T}/a = 2 \times 10^6$

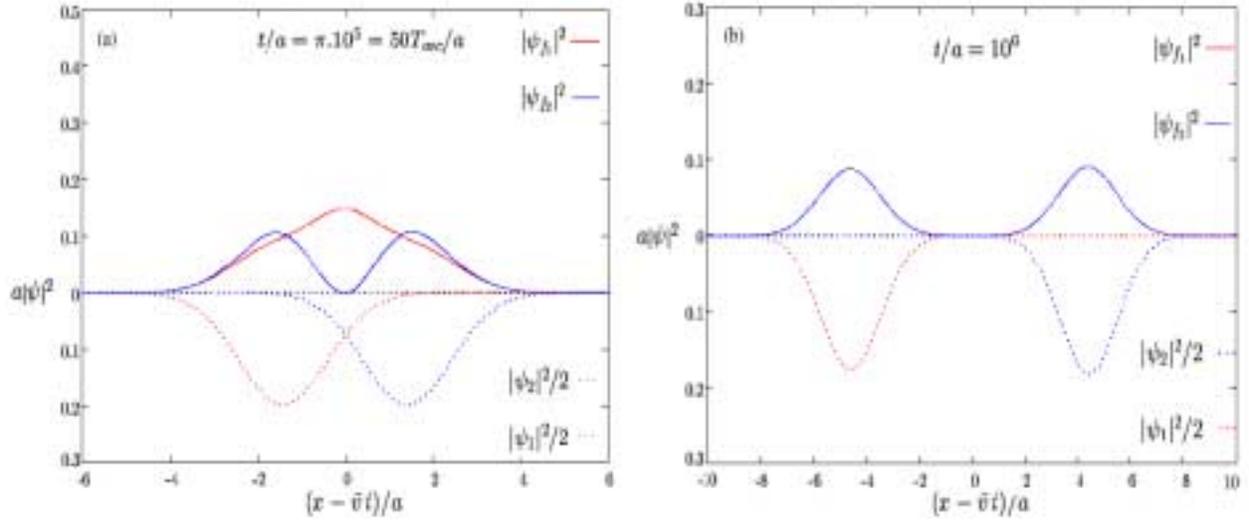


Figura 3.2: **Separação:** Densidades de probabilidade de sabor (módulo quadrado dos PsO de sabor)  $|\psi_{f_n}(x, t; \frac{\pi}{4})|^2$  (acima) e de massa  $|\psi_n(x, t)|^2$  (abaixo) em dois tempos distintos: (a)  $t = 50 T_{osc}$  e (b)  $t/a = 10^6$ . A “presença” de cada auto-estado é medida pela área abaixo de cada curva; o eixo horizontal em  $x/a$  acompanha a partícula com velocidade média  $\bar{v}$ . Em (a), observa-se claramente a iminente separação entre os pacotes  $|\psi_1(x, t)|^2$  e  $|\psi_2(x, t)|^2$ ; a predominância de sabor “ $f_1$ ” em relação a “ $f_2$ ” é consideravelmente menor do que em  $t = 0$ , devido à diminuição da região de interferência. Em (b), caso em que os PsO estão completamente no regime incoerente, a interferência é desprezível entre os PsO de massa. Neste gráfico, as probabilidades de sabor, correspondentes às áreas sob os PsO, são constantes;  $|\psi_{f_1}(x, t; \frac{\pi}{4})|^2$  e  $|\psi_{f_2}(x, t; \frac{\pi}{4})|^2$  se encontram sobrepostos, pois possuem a mesma forma funcional (composto por dois picos), resultante da escolha particular do ângulo de mistura máxima.

**Dados:** vide fig.3.1; **Tempos característicos:** vide fig.3.1.

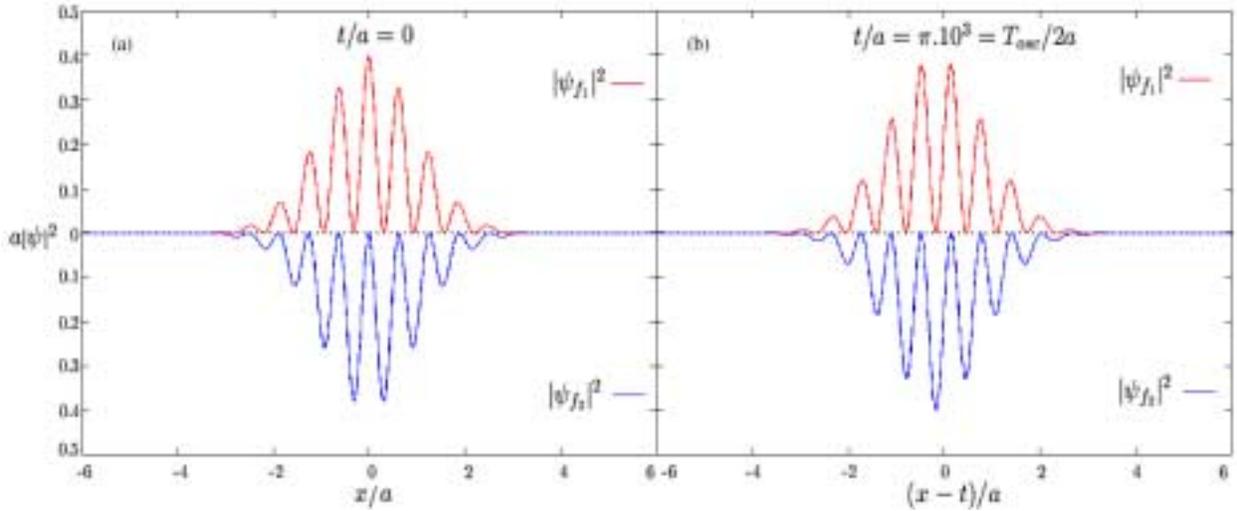


Figura 3.3: **Indefinição de sabor e supressão da oscilação:** Densidades de probabilidade de sabor (módulo quadrado dos PsO de sabor)  $|\psi_{f_1}(x, t; \frac{\pi}{4})|^2$  (acima) e  $|\psi_n(x, t)|^2$  (abaixo), em dois tempos distintos: (a)  $t = 0$  e (b)  $t = T_{\text{osc}}/2$ . A “presença” de cada auto-estado é medida pela área abaixo de cada curva. O eixo horizontal em  $x/a$  acompanha a partícula com velocidade média  $\bar{v}$ . Observa-se um padrão semelhante às franjas de interferência observadas em experimentos ópticos, com largura  $\delta x = \frac{2\pi}{\delta p} \approx \frac{1}{3}2a$ , compatível com a presença de três picos entre  $|x| < a$ . Essas franjas sofrem um deslocamento periódico com o mesmo período de oscilação.

**Dados:**  $\bar{p} = 100/a, \Delta p = 10/a, \bar{v} = 1 - 5 \times 10^{-3}, \bar{m} = 1/a, \Delta m/\bar{m} = 0.1,$   
 $\mathcal{O}_{f_1 \rightarrow f_2}(0) = \frac{1}{2}(1 - 2 \cdot 10^{-22})$

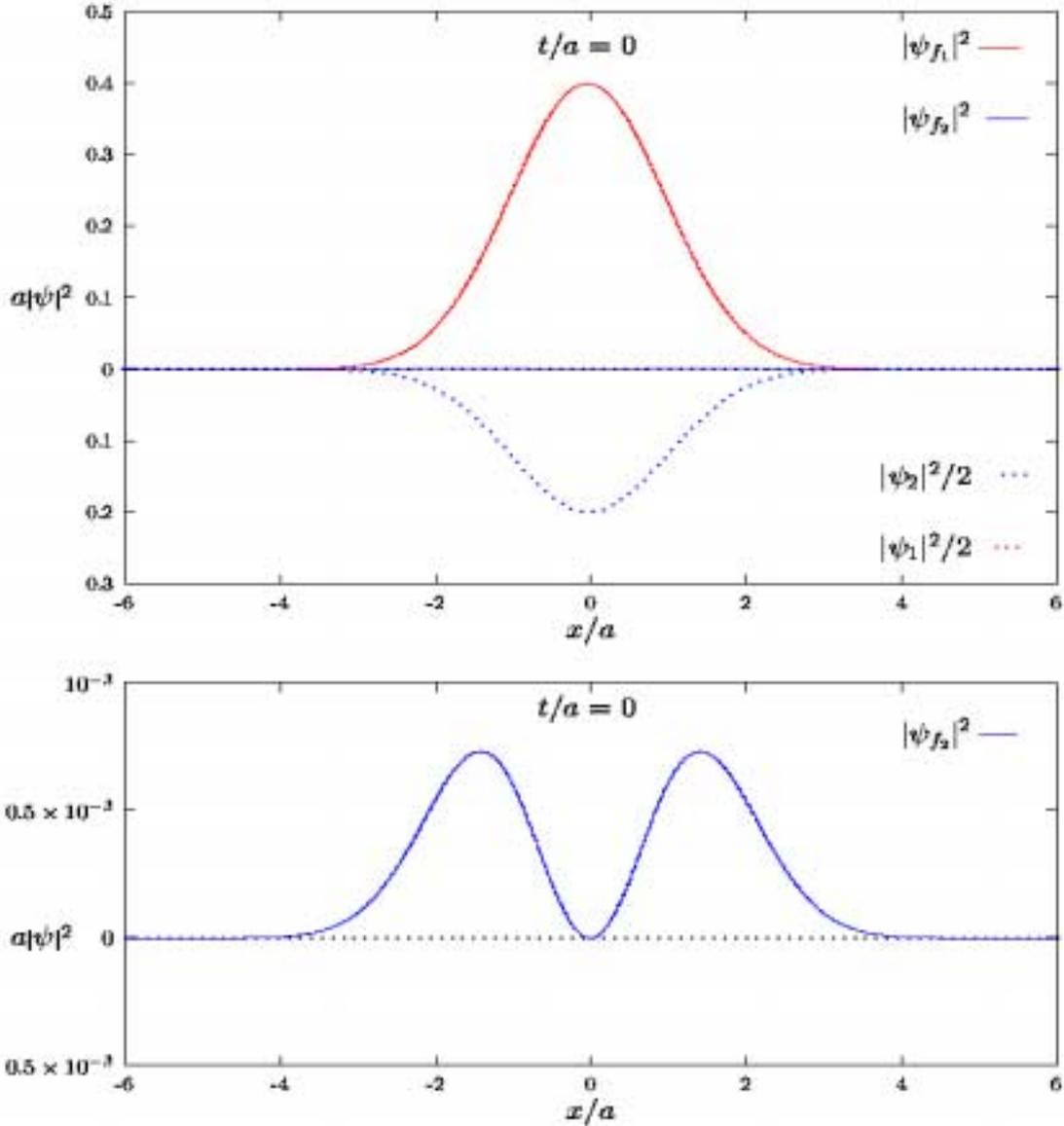


Figura 3.4: **Sabor definido:** (a) Densidades de probabilidade de sabor (módulo quadrado dos PsO de sabor)  $|\psi_{f_n}(x, t; \frac{\pi}{4})|^2$  (acima) e de massa  $|\psi_n(x, t)|^2$  (abaixo), no tempo inicial. Devido ao pequeno valor de  $\Delta p$ , o sabor  $f_1$  é predominante e aparentemente único; existe, na verdade, uma pequena fração do sabor  $f_2$ , visível em (b), com o aumento da escala.

**Dados:**  $\bar{p} = 100/a$ ,  $\Delta p = 0.1/a$ ,  $\bar{v} = 1 - 5 \times 10^{-3}$ ,  $\bar{m} = 1/a$ ,  $\Delta m/\bar{m} = 0.1$ ,

$$\delta_{f_1 \rightarrow f_2}(0) = \frac{1}{4} \times 10^{-2} = 0.25\%$$

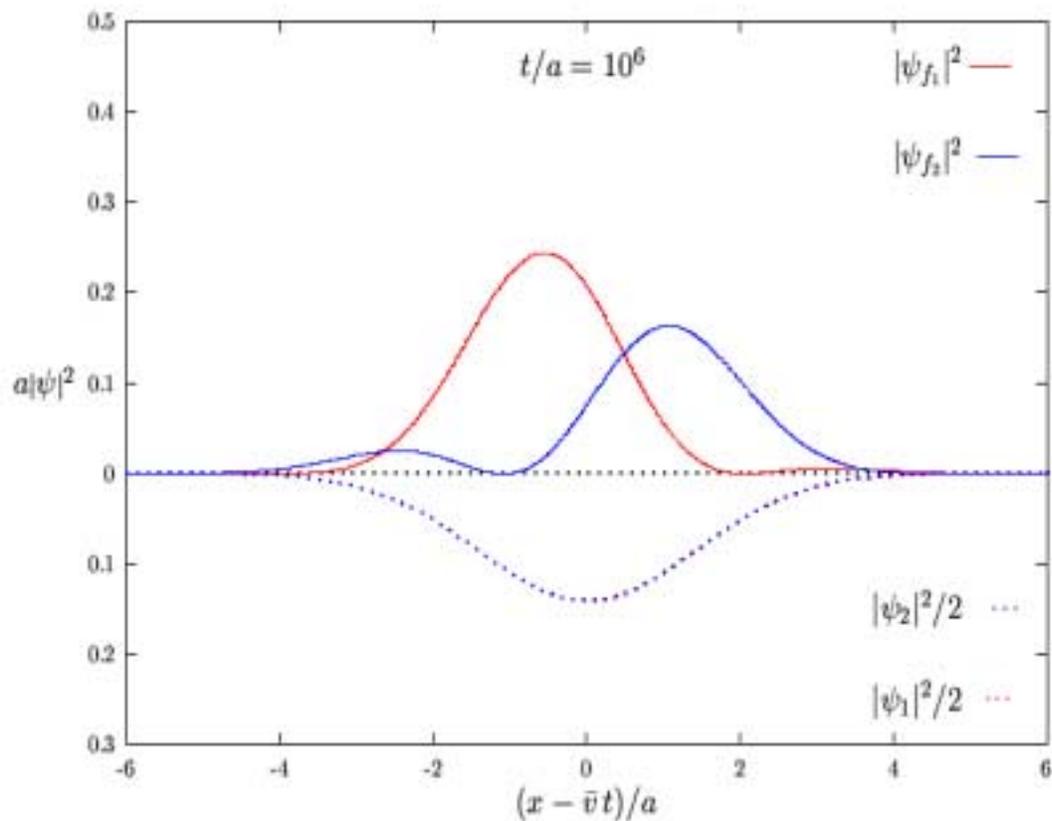


Figura 3.5: **Coerência:** Densidades de probabilidade de sabor (módulo quadrado dos PsO de sabor)  $|\psi_{f_n}(x, t; \frac{\pi}{4})|^2$  (acima) e de massa  $|\psi_n(x, t)|^2$  (abaixo) em um tempo da mesma ordem de grandeza do tempo de spreading. Não há separação entre os pacotes porque ambos possuem a mesma velocidade ( $\Delta v \propto \frac{\Delta p}{\bar{p}} - \frac{\Delta m}{\bar{m}} \approx 0$ ). Nota-se o efeito de alargamento pela diminuição do PO de massa (se comparado à fig.3.1).

**Dados:**  $\bar{p} = 100/a$ ,  $\Delta p = 1/a$ ,  $\bar{v} = 1 - 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\bar{m} = 1/a$ ,  $\Delta m/\bar{m} = 0.01$

**Tempos característicos:**  $T_{\text{osc}}/a = 2\pi \times 10^4$  ( $\eta \rightarrow 0$ )  
 $T_{\text{sep}}/a \rightarrow \infty$   
 $\mathfrak{T}/a = 2 \times 10^6$

# Capítulo 4

## Revisão e Discussão

Neste capítulo, faremos uma revisão de tópicos bem conhecidos na literatura e um estudo mais detalhado sobre alguns tópicos, que embora pouco discutidos na literatura, são importantes para justificar e complementar a utilização de pacotes de onda.

Inicialmente, na seção 4.1, revisaremos o procedimento de tomar médias sobre observáveis desconhecidos ou irrelevantes, e sua necessidade na análise das oscilações de sabor dos neutrinos. A seguir, na sec.4.1.1, discutiremos as relações entre a integração no tempo, média no tempo e a integração no espaço. Na mesma seção, mostraremos que, a altas energias, a integração no tempo é equivalente a integração no espaço, diferindo por um fator de normalização. Na sec.4.1.2, veremos que a diferença entre integração no espaço e integração no tempo se traduz no espaço de momento-energia na conservação do momento ou da energia. Na sec.4.1.3, analisaremos, de forma coerente, o procedimento de média sobre o tempo inicial e veremos que tal procedimento não é relevante para processos de produção constante.

Em seguida, na seção 4.2, discutiremos a influência das condições cinemáticas na criação sobre a oscilação de sabor, e o caso particular do decaimento do pión (sec.4.2.1).

Na seção 4.3, faremos uma breve discussão do uso de ondas planas na literatura, esclarecendo alguns pontos sob a luz do formalismo de pacotes de onda desenvolvido. Uma discussão mais detalhada pode ser encontrada no artigo em anexo (capítulo 5).

Finalmente, na seção 4.4, ilustraremos a oscilação da densidade de probabilidade devido à interferência de dois PsO, para o caso de uma partícula de massa única. Matematicamente, esse fenômeno oscilatório é muito similar à oscilação de sabor, mas conceitualmente muito diferente.

### 4.1 Média sobre Observáveis Desconhecidos ou Irrelevantes

Na física de altas energias, a preparação e seleção de eventos são de fundamental importância para a extração de dados experimentais confiáveis e de boa qualidade. O reconhecimento de eventos por si não é uma tarefa fácil, dificultado principalmente pela enorme quantidade de eventos “ruído” (ou de “background”) que, por exemplo, acompanham colisões de altas energias de hádrons ou que bombardeiam os detectores constantemente (raios cósmicos, fontes terrestres naturais e artificiais de radiação). No caso de neutrinos, o reconhecimento

de eventos que foram ocasionados por colisão de neutrinos é uma tarefa bastante árdua devido à ínfima seção de choque do neutrino e conseqüente escassez de eventos. Ainda assim, muitas vezes, é necessário restringir ainda mais os escassos eventos em função da fonte de produção de neutrinos ou do intervalo de energia (em geral, essas duas características estão relacionadas, pois cada fonte possui um espectro de emissão característico). Por outro lado, tais restrições podem inviabilizar a análise dos dados por escassez de eventos; então, é necessário aumentar o espaço amostral e tratar estatisticamente os observáveis que não são diretamente relevantes para o experimento, ou mesmo, que são desconhecidos. Por exemplo, sabendo-se o espectro de emissão de neutrinos da fonte, podemos tratar estatisticamente os dados, tomando médias sobre a energia de acordo com o espectro, de forma que necessitamos apenas do número de neutrinos detectados vindos da fonte, independentemente da energia. Esse problema se agrava quando tratamos de neutrinos por não termos controle sobre as principais fontes de grande fluxo de neutrinos (que são naturais): o sol e a atmosfera.

Tal cálculo pode ser feito utilizando-se o formalismo de matriz densidade [59]. Dentro da aproximação de que não há correlação entre os estados (sem interação), podemos descrever uma mistura estatística de estados  $|\psi; \eta\rangle$  caracterizados por um conjunto de parâmetros que denotaremos como  $\eta$ ; esta pode representar a energia média do estado e/ou posição de criação, etc. Sabendo-se a distribuição  $D(\eta)$  que esses estados devem satisfazer, podemos escrever a mistura estatística total  $\rho_T$  como

$$\rho_T = \int d\eta D(\eta) |\psi; \eta\rangle \langle \psi; \eta|. \quad (4.1)$$

A probabilidade média (média sobre  $\eta$ ) de uma mistura estatística de estados, inicialmente de sabor aproximado  $f_1$ , mudar de sabor para  $f_2$  é dada pelo valor esperado do projetor de sabor  $f_2$ :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_{f_1 \leftrightarrow f_2}(t) \rangle_\eta &= \text{tr}\{\Gamma_{f_2} \rho_T(t; f_1)\} \\ &= \int d\eta D(\eta) |\langle f_2 | \psi; f_1; \eta \rangle|^2 \\ &= \int d\eta D(\eta) \mathcal{P}_{f_1 \leftrightarrow f_2}(t; \eta); \end{aligned} \quad (4.2)$$

esta última é a forma usual e prática na qual a média é efetuada. Por exemplo, o processo de média sobre o espectro de energia da fonte é muito bem conhecido nesta forma na literatura [34, pag.145] e amplamente utilizado no confronto experimento–modelo. Devemos apenas substituir  $\eta$  pela energia e  $D(\eta)$  por  $D(E)$  (o espectro de emissão de neutrinos dependente da energia). Nesse caso, devido a peculiaridade da dependência energética na fórmula padrão, proporcional a  $1 - \cos(\frac{k}{E})$ , é interessante notar que a média pode ser substituída por uma transformada de Fourier, usando-se

$$\langle \cos(\frac{k}{E}) \rangle_E = \int_0^\infty dE D(E) \cos(\frac{k}{E}) = \Re\{\mathfrak{F}\{\tilde{D}\}\}, \quad (4.3)$$

onde  $\mathfrak{F}$  representa a transformada de Fourier usual:

$$\mathfrak{F}\{f\}(k) = \int dx e^{ikx} f(x), \quad (4.4)$$

e  $\tilde{D}$  denota a função:

$$\tilde{D}(1/E) = E^2 D(E) . \quad (4.5)$$

Assim, a fórmula padrão média, sobre o espectro energético:

$$\langle \mathcal{O}_{f_1 \leftrightarrow f_2}(t) \rangle_E = \frac{1}{2} \sin^2 \theta [1 - \Re \{ \mathfrak{F} \{ \tilde{D} \} (\Delta m^2 t / 2) \} ] , \quad (4.6)$$

pode ser obtida facilmente com a transformada de Fourier de uma função que depende do espectro de energia.

Apesar da simplicidade, em princípio, do procedimento de tomar a média sobre observáveis, esta introdução será útil para a discussão do procedimento de média sobre o tempo inicial (que trataremos na subseção 4.1.3), visto que o uso de PsO justifica a associação do tempo transcorrido com a distância, mas aparentemente não leva em conta a incerteza do tempo inicial, ou seja, o momento em que a partícula foi criada. Este procedimento de média é às vezes utilizado indevidamente como método de eliminação do tempo nas amplitudes de sabor para chegar à fórmula de oscilação dependente da distância [32].

### 4.1.1 Integração no Espaço e Integração no Tempo

Analisaremos nesta seção as questões de integração no espaço ou no tempo. Na seção 2.5, utilizamos a integração sobre todo o espaço para encontrar a probabilidade de transição de sabor (2.43) dependente do tempo. A integração é necessária, do ponto de vista da Mecânica Quântica, para levar em conta a probabilidade de encontrar determinado sabor sobre todo o espaço, haja vista que o módulo quadrado da função de onda representa uma densidade de probabilidade. A posição representava uma degenerescência, cuja integração, devido à completeza do espaço de estados e à normalização, levava a uma fórmula de oscilação dependente do tempo e devidamente normalizada. A partir da fórmula dependente do tempo, usamos o procedimento de associação do tempo com o observável posição, feita na sec.2.8.

Contudo, é preciso notar que o tempo  $t$ , utilizado até aqui, corresponde ao tempo transcorrido desde a criação. Em princípio, o tempo de detecção  $t_D$  poderia ser mensurável, permitindo a associação do tempo transcorrido  $t$  a  $t_D - t_C$ , no qual  $t_C$  é o tempo de criação. A principal justificativa encontrada na literatura [32, 38] para se introduzir uma integração no tempo refere-se ao não conhecimento de  $t_C$ , o que deveria ser levado em conta na forma de uma média homogênea. Contudo, surge a necessidade de fatores adicionais para normalização quando integramos no tempo ao invés de integrar no espaço [32, 34, 29].

Veremos, a seguir, (i) como integrações no tempo são introduzidas na dedução de fórmulas de oscilação, (ii) como a utilização de uma média temporal coerentemente definida, sobre a densidade de probabilidade, leva a incongruências e (iii) como uma integração devidamente normalizada (uma normalização adicional) pode ser equivalente à integração no espaço em determinados casos. Na sec.4.1.3, procuramos tratar corretamente a média sobre o tempo inicial utilizando os conceitos discutidos no começo da seção 4.1; veremos que o procedimento de troca de posição pelo tempo já leva esse efeito em conta nos casos em que a função de emissão varia muito lentamente em relação à escala de tempo de detecção.

Primeiramente, para analisar a integração no tempo, começamos reescrevendo (2.42), que corresponde à amplitude de probabilidade de mudança de sabor (dependente do tempo e do espaço), de um partícula de sabor  $f_1$  se tornar  $f_2$ :

$$\psi_{f_2 f_1}(x, t; \theta) \equiv \langle\langle x; f_2 | \psi; f_1; t \rangle\rangle = \sin\theta \cos\theta [\psi_1(x, t) - \psi_2(x, t)] . \quad (4.6)$$

A probabilidade de transição é obtida na seção 2.6 integrando-se na posição  $x$  (em uma dimensão):

$$\mathcal{P}_{f_1 \rightarrow f_2} = \int dx |\psi_{f_2 f_1}(x, t; \theta)|^2 . \quad (4.7)$$

Ao invés disso, alguns trabalhos [32, 34] utilizam

$$\mathcal{P}'_{f_1 \rightarrow f_2} = N \int dt |\psi_{f_2 f_1}(x, t; \theta)|^2 , \quad (4.8)$$

onde  $N$  é um fator de normalização, adicional à normalização das funções de onda, que depende das velocidades (como será visto a seguir). A normalização é fixada pela conservação de probabilidade total (2.45).

Para ilustrar o fato de que a integração no tempo pode ser equivalente à integração no espaço, recorreremos à aproximação ilustrada no apêndice C. Nesta aproximação, uma função de onda, cuja distribuição em momento seja bem centrada em torno de um valor  $p_0$ , com uma pequena incerteza  $\delta p$ , pode ser escrita da forma (C.4) [60], desde que efeitos de alargamento sejam desprezíveis:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp g(p) e^{i[p x - E(p)t]} \approx e^{i[p_0 x - E_0 t]} \chi(x - v_0 t) , \quad (4.9)$$

onde  $v_0 = \partial_p E(p_0) = p_0/E_0$  corresponde à velocidade de grupo. Devemos ressaltar que a aproximação acima é válida a tempos curtos e, portanto, a utilização da mesma não é justificada na integral temporal (4.8), cuja integração abrange todo o tempo de  $[0, \infty)$  ou  $(-\infty, \infty)$ . Mesmo assim, continuaremos esta discussão assumindo que a aproximação seja válida para todo o tempo, visto que este tipo de integração é utilizada na literatura [32, 34].

Nesse caso, se a função  $\psi$  está normalizada

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x, t)|^2 \equiv 1 ,$$

podemos ver que a integração no tempo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |\psi(x, t)|^2 \approx \int_{-\infty}^{\infty} dx |\chi(x - v_0 t)|^2 / v_0 = 1/v_0$$

é aproximadamente constante e deve ser multiplicada pela velocidade para que seja normalizada.

No caso da oscilação de neutrinos, se integrarmos no tempo ao invés de integrarmos no espaço, precisamos de um termo dependente das velocidades para a normalização [32]. Reescrevendo (2.42a)

$$\psi_{f_2 f_1}(x, t; \theta) \approx \sin\theta \cos\theta [e^{i[p_1 x - E_1 t]} \chi(x - v_1 t) - e^{i[p_2 x - E_2 t]} \chi(x - v_2 t)] \quad (4.10)$$

e escrevendo

$$v_n = \bar{v} \pm \Delta v/2 ,$$

podemos ver que a integral no tempo (4.8) nos leva a

$$\begin{aligned} \mathcal{O}'_{f_1 \rightarrow f_2}(x) &= \sin \theta \cos \theta \int dt |\psi_1(x, t) - \psi_2(x, t)|^2 \\ &\approx \frac{\sin 2\theta}{2} \left[ \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} - 2\Re \int dt e^{i[\Delta p x - \Delta E t]} \chi_1(x - \bar{v}t - \frac{\Delta v}{2}t) \chi_2^*(x - \bar{v}t + \frac{\Delta v}{2}t) \right] \\ &\approx \Re \left\{ \frac{\sin 2\theta}{2} \left[ \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} - 2e^{i[\Delta p - \frac{\Delta E}{\bar{v}}]x} \int \frac{dy}{\bar{v}} e^{-i\frac{\Delta v}{\bar{v}}y} \chi_1(y - \frac{\Delta v}{2\bar{v}}(x-y)) \chi_2^*(y + \frac{\Delta v}{2\bar{v}}(x-y)) \right] \right\} \\ &\approx \Re \left\{ \frac{\sin 2\theta}{2} \left[ \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} - \frac{1}{\bar{v}} 2e^{i[\Delta p - \frac{\Delta E}{\bar{v}}]x} \right] \right\} \\ &\approx \frac{\sin 2\theta}{2} \left[ \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} - \frac{1}{\bar{v}} 2 \cos\left(\frac{\Delta m^2}{2E}x\right) \right] , \end{aligned} \quad (4.11)$$

se  $\Delta v/\bar{v} \ll 1$  e  $\Delta v t \ll \delta x = a$ . Evidentemente, esta fórmula não está normalizada (a soma das probabilidades de  $f_1 \rightarrow f_2$  e  $f_2 \rightarrow f_1$  não é unitária); o fator de normalização  $N$  deverá depender das velocidades [32, 29]. Giunti [32] exhibe a integral no tempo exata para o caso gaussiano, dentro da aproximação de alargamento desprezível. Naturalmente, se impormos a aproximação ultra-relativística  $v_1 \approx v_2 \approx 1$ , obteremos efetivamente a fórmula padrão.

Por fim, visto que a integral (4.8) é finita e efetivamente equivalente no caso ultra-relativístico, uma média temporal propriamente dita seria

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt |\psi_{f_2 f_1}(x, t; \theta)|^2 = 0 , \quad (4.12)$$

que tenderia a zero, sem a obtenção de fórmula alguma. Analogamente, temos o anulamento da média

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 dt_0 \mathcal{O}_{f_1 \rightarrow f_2}(t - t_0) = 0 . \quad (4.13)$$

### 4.1.2 Conservação de Momento $\times$ Energia

Outra discussão que emerge da controvérsia integração no espaço ou no tempo é a implicação de que a integração no espaço leva à conservação de momento e a integração no tempo leva à conservação de energia.

Se as distribuições de momento  $g_n$  possuem apenas contribuição apreciável de momentos positivos e muito maiores do que o valor da massa, podemos contornar o fato de que não existe espectro bem definido de energia para superposições de auto-estados de massa, definindo distribuições de energia em termos de distribuições de momento (veja apêndice A). Para tal, utilizamos as expansões (A.1) e (A.3) para as amplitudes de massa  $\psi_n$ ,

$$\begin{aligned} \psi_n(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp g_n(p) e^{i[p x - E(p)t]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dE \tilde{g}_n(E) e^{i[p(E)x - E t]} , \end{aligned}$$

com  $\tilde{g}_n(E) = \frac{E}{p_n(E)} g_n(p_n(E))$ .

Procedendo assim, podemos escrever a integral no tempo de  $\psi_1 \psi_2^*$  para uma integral nas energias [29]. Essa integral implica na conservação de energia

$$\begin{aligned} \int dt \psi_1(x, t) \psi_2^*(x, t) &= \int dE dE' \tilde{g}_1(E') \tilde{g}_2^*(E) e^{i[p_1(E') - p_2(E)]t} \int \frac{dx}{2\pi} e^{-i(E' - E)t} \\ &= \int dE \tilde{g}_1(E) \tilde{g}_2^*(E) e^{i[p_1(E') - p_2(E)]t} \end{aligned} \quad (4.14)$$

se integrarmos no tempo, ao invés da conservação de momento

$$\begin{aligned} \int dx \psi_1(x, t) \psi_2^*(x, t) &= \int dp dp' g_1(p') g_2^*(p) e^{-i[E_1(p') - E_2(p)]t} \int \frac{dx}{2\pi} e^{i(p' - p)x} \\ &= \int dp g_1^*(p) g_2(p) e^{-i[E_1(p) - E_2(p)]t} \end{aligned} \quad (4.15)$$

se integrarmos na posição (sec.2.6). O termo “conservação” se aplica no sentido de que as integrais acima representam termos de interferência a energias iguais (ou momentos iguais), o que implica que a oscilação é consequência da soma (integral) das contribuições das amplitudes de mesma energia (ou momento). Além disso, em  $x = 0$  ( $t = 0$ ) a interferência deve ser máxima e aproximadamente unitária para garantir definição de sabor. Isso acontece nas integrais acima quando as distribuições de energia (momento) são idênticas, portanto conservadas no sentido de distribuição.

### 4.1.3 Média sobre o Tempo Inicial

O tempo  $t$  considerado até aqui corresponde ao tempo de percurso do neutrino. Formalmente esse tempo é um parâmetro não observável da Mecânica Quântica. Idealmente,  $t$  pode ser conectado com o tempo de criação  $t_C$  e de detecção  $t_D$  através da relação  $t = t_D - t_C$ . O tempo de detecção pode ser estimado através da análise dos processos de detecção e reconstituição de eventos (nos casos de experimentos que usam métodos de detecção em “tempo real”, como experimentos de espalhamento elástico). A princípio, o tempo de criação poderia ser controlável em experimentos terrestres com a preparação e seleção do feixe de neutrinos em fontes artificiais; contudo, devido à seção de choque do neutrino ser baixíssima, um alto fluxo de neutrino é necessário para detectar pouquíssimos eventos em grandes detectores. Geralmente, uma quantidade apreciável de eventos é conseguida com a exposição do detector durante um longo período de tempo sob uma fonte contínua como o sol ou a atmosfera. A emissão contínua, porém, implica que não temos nenhum controle sobre  $t_C$ , forçando um tratamento estatístico.

Supomos, como sendo uma boa aproximação, que os neutrinos criados em cada instante  $t_C$  possam ser representados por um único estado inicial  $|\psi_0\rangle$  (característico da reação e das condições de criação). Está implícito nesta suposição a condição de que não haja interação entre os neutrinos produzidos a tempos diferentes. Satisfeitas essas condições, podemos descrever esse feixe de neutrinos através de uma mistura estatística de estados idênticos produzidos a tempos diferentes.

Analisamos isoladamente um desses estados produzido num tempo  $t_C = -t_0$  ( $t_0 > 0$ ). O estado de Schrödinger a um dado tempo  $t$  é dado pelo operador de evolução temporal

$$|\psi(t); -t_0\rangle = U(t; -t_0)|\psi_0\rangle = U(t)U(t_0)|\psi_0\rangle = U(t)|\psi_0; -t_0\rangle, \quad t \geq -t_0, \quad (4.16)$$

sendo que, para o nosso caso,  $U(t; t_0) = \exp\{-iH(t - t_0)\} = U(t - t_0)$ ; a simplificação de notação  $|\psi(0)\rangle \equiv |\psi_0\rangle$  é usada. Definimos também a matriz de densidade  $\rho(t)$  para esse estado puro:

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = U(t)|\psi_0\rangle\langle\psi_0|U^\dagger(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t). \quad (4.17)$$

Com isso, se o espectro de emissão cessa a  $t_C = 0$  e se a diferença entre o tempo de emissão de uma partícula e a seguinte se aproxima de zero, podemos descrever a emissão em termos de uma distribuição contínua  $\dot{w}_C(-t_0)$  e a mistura estatística para  $t > 0$  em termos da matriz de densidade total será

$$\rho_T(t) = \int_{-\infty}^0 dt_0 \dot{w}_C(t_0) |\psi(t); t_0\rangle\langle\psi(t); t_0| = U(t)\rho_T(0)U^\dagger(t). \quad (4.18)$$

Em (4.18),  $\dot{w}_C(t_0)$  pode ser interpretado como a probabilidade por unidade de tempo de uma partícula (estado) ser criado a um tempo  $t_0$ .

No caso geral, se a emissão se estende até além do tempo de interesse  $t$ , devemos considerar

$$\rho_T(t) = \int_{-\infty}^t dt_0 \dot{w}_C(t_0) |\psi(t); t_0\rangle\langle\psi(t); t_0| = \int_{-\infty}^t dt_0 \dot{w}_C(t_0) \rho(t - t_0). \quad (4.18)$$

A normalização em (4.18a) não tem, contudo, uma normalização fixa:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \rho_T(t) &= \int_{-\infty}^t dt_0 \dot{w}_C(t_0) \text{Tr} |\psi(t - t_0)\rangle\langle\psi(t - t_0)| \\ &= \int_{-\infty}^t dt_0 \dot{w}_C(t_0) \int dx |\psi(x, t - t_0)|^2 \\ &= \int_{-\infty}^t dt_0 \dot{w}_C(t_0) \\ &\equiv w_C(t). \end{aligned} \quad (4.19)$$

A última igualdade define a função  $w_C$  em termos de  $\dot{w}_C$ , que é, de fato, a derivada temporal da função  $w_C$  assim definida. A variação da normalização com o tempo é, explicitamente,

$$\frac{d}{dt} \text{Tr} \rho_T(t) = \dot{w}_C(t). \quad (4.20)$$

Isso mostra que a taxa de emissão  $\dot{w}_C(t)$  corresponde à taxa de mudança do “número” de partículas, mudança que se manifesta na normalização.

Podemos ter uma idéia mais concreta dessa correspondência com

$$\frac{d}{dt} \rho_T(t) = \dot{w}_C(t) |\psi_0\rangle\langle\psi_0| - i[H, \rho_T(t)]. \quad (4.21)$$

O primeiro termo do lado direito da igualdade representa o aumento de estados usados na mistura estatística provocado pela criação de partículas enquanto o segundo termo corresponde a evolução unitária normal da Mecânica Quântica.

Devemos, então, impor algumas condições físicas sobre as funções  $w_C$  e  $\dot{w}_C$ : primeiramente, devemos ter

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Tr \rho_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \dot{w}_C(t_0) \equiv 1, \quad (4.22)$$

o que implica que a função de emissão deve ser apreciável somente num certo intervalo de tempo finito e desprezível fora desse intervalo (para que o número total de partículas emitidas seja finita). Em especial, podemos normalizar esse valor à unidade. Com essa normalização, a função  $w_C$  possui valor assintoticamente 1 depois do intervalo de tempo de emissão apreciável. Por questões de simplicidade, assumiremos um intervalo finito explícito  $[T_1, T_2]$  dentro do qual a probabilidade de emissão é diferente de zero. Podemos ver a partir de (4.21) que, depois de um tempo  $T_2$ , a evolução unitária é restaurada já que não há mais criação de estados.

Muitas vezes, porém, a taxa de emissão da fonte não pode ser definida para todo o tempo. De fato, se a escala de tempo em que a fonte fica “ligada” for muito maior que a escala de tempo em que os processos ocorrem, não é possível nem necessário saber a taxa de emissão a longos tempos, já que os eventos que interferem no fenômeno num dado momento são consequência de estados criados em um determinado período de tempo anterior. No caso de partículas livres (por exemplo neutrinos vindos do sol) esse tempo é precisamente o tempo de percurso que o neutrino demora para vir (do sol ao detector na Terra).

Vamos agora estabelecer matematicamente essa relação, notando que podemos escrever a densidade (4.18a) na forma:

$$\rho_T(t) \equiv \int_0^{\infty} d\tau \dot{w}_C(t - \tau) \rho(\tau). \quad (4.22)$$

A partir dessa fórmula, observamos que a probabilidade de um certo auto-valor  $a$  de um observável  $A$  ser medido é dada por

$$\mathcal{P}_T(A \rightarrow a; t) = Tr\{P_a \rho_T(t)\} = \int_0^{\infty} d\tau \dot{w}_C(t - \tau) \mathcal{P}(A \rightarrow a; \tau), \quad P_a = |a\rangle\langle a|, \quad (4.23)$$

onde  $\mathcal{P}(A \rightarrow a; \tau) = Tr\{P_a \rho(\tau)\}$  é a probabilidade de medição do auto-valor  $a$  para o estado puro  $|\psi(\tau)\rangle$  e  $P_a$  o projetor sobre o subespaço de auto-valor  $a$ . Desse modo, a probabilidade de medição do auto-valor  $a$  na mistura estatística  $\rho_T(t)$  é dada pela probabilidade individual do estado puro  $\rho(\tau)$ , ponderada pela taxa de criação  $\dot{w}_C(t - \tau)$  no momento inicial.

No caso de partículas livres, caso em que o detector está a uma distância  $L$  da fonte, somente contribuirão para a medida as partículas cujo tempo de percurso  $\tau \approx L/\bar{v}$ , já que  $\rho(x, x', \tau) = \psi(x, \tau)\psi^*(x', \tau)$  é apreciável somente se  $x \approx x' \approx \bar{v}t$  (desde que efeitos de alargamento e deformação dos pacotes sejam desprezíveis). O intervalo de tempo relevante para o processo é  $\delta\tau = \sigma/\bar{v}$ . Nesse caso, podemos reescrever a mistura estatística (4.18b)

utilizando-se somente as contribuições relevantes

$$\rho_T(L, t) = \frac{\int_{L/\bar{v}-\delta\tau}^{L/\bar{v}+\delta\tau} d\tau \dot{w}_C(t-\tau)\rho(\tau)}{\int_{L/\bar{v}-\delta\tau}^{L/\bar{v}+\delta\tau} d\tau \dot{w}_C(t-\tau)}, \quad (4.24)$$

onde  $\sigma$  é a meia largura do pacote<sup>1</sup>. Note que estamos assumindo aqui que a precisão de detecção não é menor que o tamanho do pacote; com isso, se esse intervalo de tempo característico para detecção for muito menor que o tempo característico em que a função de emissão  $\dot{w}_C$  ( $\dot{w}_C\delta\tau \ll 1$ ) muda apreciavelmente, podemos aproximar (4.24) em

$$\rho_T(L, t) \approx \frac{\dot{w}_C(t-L/\bar{v})}{\dot{w}_C(t-L/\bar{v})} \frac{1}{2\delta\tau} \int_{L/\bar{v}-\delta\tau}^{L/\bar{v}+\delta\tau} d\tau \rho(\tau) = \frac{1}{2\delta\tau} \int_{L/\bar{v}-\delta\tau}^{L/\bar{v}+\delta\tau} d\tau \rho(\tau), \quad (4.25)$$

a depender somente do comportamento individual de  $\rho(\tau)$ . Então, a probabilidade de conversão de sabor resulta em

$$\langle \mathcal{P}_{f_1 \rightarrow f_2}(L/\bar{v}) \rangle_C = \frac{1}{2\delta\tau} \int_{L/\bar{v}-\delta\tau}^{L/\bar{v}+\delta\tau} d\tau \mathcal{P}_{f_1 \rightarrow f_2}(\tau). \quad (4.26)$$

Contudo, essa é uma média no tempo que leva em conta a imprecisão da associação  $\tau \leftrightarrow L/\bar{v}$ , cuja incerteza  $\delta\tau = \sigma/\bar{v}$  é causada pela incerteza na posição. Adicionalmente, esse tipo de média pode ser irrelevante se a probabilidade de conversão de sabor não muda apreciavelmente no intervalo  $\delta\tau$ . Essa condição pode ser quantificada por

$$\delta \mathcal{P}_{f_1 \rightarrow f_2}(\tau) = \delta\tau \frac{d\mathcal{P}_{f_1 \rightarrow f_2}(\tau)}{d\tau} \ll 1. \quad (4.27)$$

A expressão à direita contém fatores como  $\frac{\Delta vt}{\delta x} \delta\tau$  e  $\delta\tau/T_{\text{osc}}$  (o que pode ser inferido usando-se o modelo gaussiano), multiplicando termos oscilatórios com módulos menores que a unidade. A condição (4.27) acima engloba as condições de não separação ( $\Delta vt \ll \delta x$ ) e de possibilidade de observação da oscilação ( $\delta\tau \ll T_{\text{osc}}$  ou  $\delta x \ll L_{\text{osc}}$ ). A probabilidade (4.26) sob estas condições pode ser aproximada simplesmente por,

$$\langle \mathcal{P}_{f_1 \rightarrow f_2}(L/\bar{v}) \rangle_C \approx \mathcal{P}_{f_1 \rightarrow f_2}(L/\bar{v});$$

o lado direito é exatamente a probabilidade de conversão usando o procedimento de troca (sec.2.8).

Portanto, a média no tempo inicial não é necessária se a taxa de emissão não muda apreciavelmente no intervalo em que a detecção ocorre, embora a média no tempo em torno da incerteza do tempo de detecção possa ser relevante (apêndice E). A influência da taxa de emissão poderia ser relevante em eventos de curta duração como a emissão de neutrinos em supernovas.

---

<sup>1</sup>da mesma ordem de grandeza da incerteza em posição  $\sigma \sim \delta x = \sqrt{\langle \Delta X^2 \rangle}$ .

Devemos ressaltar a hipótese implícita em todo o trabalho de que  $\mathcal{P}_{f_1 \rightarrow f_2}(\tau \approx L/\bar{v})$  seja a probabilidade de conversão de sabor quando a partícula é detectada idealmente a uma distância média  $L$ . Não há informação acerca da probabilidade de detecção que dependeria da posição e precisão de detecção; isso evidentemente introduziria ineficiências na probabilidade de conversão.

## 4.2 Condições Cinemáticas na Criação

Como consta na sec.IV do artigo em anexo no cap.5, o cálculo semiclássico direto (no referencial de repouso da partícula mãe) mostra que a imposição exata das conservações de momento e energia num processo de produção de neutrinos (cuas partículas envolvidas possuem massas bem definidas) não levam à nenhuma das condições cinemáticas particulares ( $\Delta E = 0, \Delta p = 0, \Delta v = 0$ ), muitas vezes empregadas (veja [4, 27, 26]). Esses cenários de energias, momentos e velocidades iguais entre os auto-estados de massa do neutrino foram foco de muitos debates na literatura [27, 26, 48, 36, 25, 30]. Adicionalmente, com uma mudança de referencial, mostra-se que somente  $\Delta E = 0$  é possível em um referencial particular, mas não especial, do ponto de vista físico.

Evidentemente, o fato de estarmos atribuindo massas exatas às partículas participantes, e o fato de supormos dois canais de produção distintos para os dois auto-estados de massa que constituem o auto-estado de sabor criado devem ser mais detalhadamente discutidos, embora tais condições sejam citadas para o caso do pión em alguns trabalhos [28, 29]. Em geral, os cálculos semiclássicos de conservação de momento e energia são válidos, pois tratamos apenas os auto-estados de massa; a conservação é válida em média para cada distribuição de energia e momento. No entanto, surge um problema ao tratarmos de superposições de auto-estados de massas diferentes.

Esse problema pode ser amenizado notando-se que partículas que decaem não possuem massas bem definidas. *Grosso modo*, deve ser levado em conta uma incerteza na massa, ou energia de repouso, devido às interações responsáveis pelo decaimento. A incerteza pode ser estimada pela taxa de decaimento  $\Gamma$  da partícula. Para que o neutrino seja criado coerentemente, com grandezas cinemáticas (médias) como energia, momento e massa média bem definidas, ao mesmo tempo em que a distinção entre os auto-estados de massa não seja possível (o que impediria a oscilação [31]), devemos ter  $\frac{|\Delta p|}{2\delta p}, \frac{|\Delta E|}{2\delta E} \ll 1$ .  $\delta$  denota a incerteza quântica de Heisenberg. Note que a primeira condição é exatamente o requerimento necessário no modelo gaussiano para que tenhamos definição inial de sabor  $a|\Delta p| \ll 1$ , (3.13).

De posse dessas condição, mostraremos, na seção seguinte, que, para o caso de neutrinos produzidos no decaimento do pión, as quantidades cinemáticas são tais que possibilitam uma criação de sabor aproximado e a oscilação é possível, podendo ser descrita pelo modelo gaussiano.

### 4.2.1 Decaimento do Pión

Usando os resultados da sec.IV do artigo no cap.5, que resume-se ao uso da conservação do momento e da energia, podemos calcular, de maneira simples, o momento e a energia do

neutrino num decaimento a dois corpos, como no caso do decaimento do pión no repouso

$$\pi \rightarrow \nu_\mu + \mu \quad (M_\pi \rightarrow p_n, P_\mu) .$$

Os valores cinemáticos do neutrino  $p_n = (E_n, \mathbf{p}_n)$ ,  $|\mathbf{p}_n| = p_n$ , nesse caso, podem ser calculados; resultando em:

$$\begin{aligned} & \longrightarrow m_n \ll M_\pi - M_\mu \\ & \left\{ \begin{array}{l} E_n = E_0 + \frac{m_n^2}{2M_\pi} \\ p_n = \sqrt{E_n^2 - m_n^2} \\ v_n = \frac{p_n}{E_n} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \Delta E = \frac{\Delta m^2}{2M_\pi} \\ \Delta p \approx -\frac{\Delta m^2}{2E_0} + \Delta E \approx -3.7\Delta E \\ \Delta v \approx -\frac{\Delta m^2}{2E_0^2} \end{array} \right. . \quad (4.28) \\ & E_0 = \frac{M_\pi^2 - M_\mu^2}{2M_\pi} \quad (\approx 30\text{MeV}) \end{aligned}$$

Nenhum dos valores coincide com zero. Apesar disso, deve-se questionar se algum desses valores pode ser nulo em algum outro referencial. Uma vez que não podemos efetuar transformações de boost para duas velocidades diferentes, a diferença de velocidade será sempre não nula. Sabemos que momento e energia formam um quadrivetor; apenas um deles pode ser nulo em algum referencial dependendo-se

$$\Delta p^\mu \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{“tipo tempo”} \iff \exists \Delta \mathbf{p}' = 0 \\ \text{“tipo espaço”} \iff \exists \Delta E' = 0 . \end{array} \right. \quad (4.29)$$

Calculando

$$(\Delta E)^2 - (\Delta \mathbf{p})^2 \approx -\left(\frac{\Delta m^2}{2E_0}\right)^2 \left(\frac{M_\mu}{M_\pi}\right)^2 < 0 , \quad (4.30)$$

vemos que  $\Delta p^\mu$  é do tipo espaço e somente a diferença de energia pode ser nula. Adicionalmente, vemos que  $\bar{p}^\mu$  é do tipo tempo.

Como pode ser visto na sec.IV do artigo em anexo cap.5, podemos ver que esse resultado é geral para qualquer decaimento, se mantivermos todas as massas “on-shell”.

A partir desses dados podemos, nesse caso, o tamanho do PO do neutrino criado. A energia média do neutrino criado pode ser estimado por

$$\bar{E} \approx E_0 = \frac{M_\pi^2 - M_\mu^2}{2M_\pi} \approx 30\text{MeV} .$$

Estimando a incerteza das massas do pión e do múon pelas suas respectivas taxas de decaimento  $\delta M_\pi \approx \Gamma_\pi$  e  $\delta M_\mu \approx \Gamma_\mu$ , e sabendo-se que  $\Gamma_\pi \gg \Gamma_\mu$ , podemos estimar a incerteza na energia do neutrino produzido por

$$\delta \bar{E} \approx \delta \left( \frac{M_\pi^2 - M_\mu^2}{2M_\pi} \right) \approx \Gamma_\pi / 2 .$$

Estima-se

$$\frac{\Delta E}{2\delta E} \approx \frac{\Delta m^2}{2M_\pi \Gamma_\pi} \approx \pi \frac{E_0}{M_\pi} \frac{\tau_\pi}{T_{osc}} \approx \frac{\tau_\pi}{T_{osc}} \approx \frac{10^{-8}s}{10^{-5}s} = 10^{-3} ,$$

utilizando  $cT_{osc} = L_{osc} \approx 10^4 \text{m}$  [34, pag.138] ou  $T_{osc} \approx 10^{-5} \text{s}$ ,  $\Delta m^2 \approx 10^{-3} \text{eV}^2$  e  $\bar{E} \approx 30 \text{MeV}$ ;  $\tau_\pi$  é o tempo de decaimento do pión. A razão acima nos mostra que o tempo de decaimento do pión é muito menor que o período de oscilação (condição necessária para observarmos oscilação de sabor). Como observado anteriormente,  $|\Delta p| \approx |\Delta E|$  e, para neutrinos relativísticos,  $\delta E \approx \delta p$ . Assim, se as incertezas de Heiseberg no momento e na posição não são muito grandes,

$$\delta x |\Delta p| \approx \frac{|\Delta p|}{2\Delta p} \approx \frac{|\Delta E|}{2\delta E} \ll 1$$

( $a|\Delta p| \ll 1$  em nosso modelo gaussiano), essa condição garante uma definição aproximada de sabor (sec.3.1). Obviamente, a condição de energias relativísticas é satisfeita, já que  $\bar{E}/\bar{m} \gg 1$ . Assim, a outra condição para que a oscilação possa ser observada (3.16):

$$\eta = \frac{\bar{v}}{2a\bar{E}} \gg 1 ,$$

é garantida para neutrinos relativísticos, já que

$$a\bar{E} = \frac{\bar{E}}{2\Delta p} \approx \frac{\bar{E}}{2|\delta E|} \gg 1$$

também é satisfeita. Tal condição implica que a oscilação de sabor pode ser descrita coerentemente pelo modelo gaussiano para o caso de neutrinos produzidos no decaimento do pión, oscilando enquanto  $t \ll T_{sep}$ .

### 4.3 Discussão do uso de Ondas Planas

Faremos aqui uma pequena discussão acerca do uso de ondas planas: os fatores adicionais que aparecem em deduções da fórmula de oscilação sob determinadas condições e como a conexão com o conceito de PO resolve esse problema. Discussões mais gerais são formalizadas no artigo em anexo (cap.5).

A oscilação de neutrinos no vácuo é geralmente tratada do ponto de vista de ondas planas (OP), cuja fórmula de oscilação [4]

$$\mathcal{O}(\alpha \rightarrow \beta; L) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \underbrace{\frac{\Delta m^2 L}{4E}}_{\frac{\Delta \Phi_{st}}{2}} \right) \quad (4.31)$$

é deduzida a partir de várias hipóteses e aproximações (muitas vezes não rigorosamente analisadas). A fase de oscilação padrão acima,  $\Phi_{st}$ , é dada pela diferença de fase das ondas planas

$$e^{-i\Phi_n} , \quad \Phi_n = (Et - px)_n , \quad (4.32)$$

que, em geral, depende da posição e do tempo [25, 45]. Uma das dependências, em  $x$  ou  $t$ , pode ser removida com o uso das condições cinemáticas  $\Delta E = 0$  ou  $\Delta p = 0$ , respectivamente [4, 27, 30]. Mas, em geral, como no cenário de velocidade iguais [25, 26], surge

a necessidade de conectar a posição ao tempo. Esta substituição do tempo pelo espaço é efetuada usando-se a relação semi-clássica  $x \approx vt$ , onde  $v$  é tomado como a velocidade média. Como, em geral, o neutrino tem velocidades relativísticas, usa-se frequentemente a aproximação ultra-relativística  $x \approx t$  ( $c = 1$ ).

Para ilustrar as considerações acima podemos aproximar a fase de oscilação (4.32), por exemplo, na forma

$$\begin{aligned}
\Phi = ET - PL &\stackrel{T \approx L}{\approx} (E - P)L \\
&= (E - P) \frac{(E + P)L}{(E + P)} \\
&\stackrel{\text{UR}}{\approx} \frac{M^2}{2E} L \longrightarrow \Delta\Phi,
\end{aligned} \tag{4.33}$$

o que resulta na fase padrão (4.31).

Por outro lado, se utilizarmos outra condição e aproximação, obteremos:

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi = \Delta(ET - PL) &= \Delta\left[\frac{E^2 - P^2}{E}\right]T \\
&= \Delta\left(\frac{M^2}{E}\right)T \\
&= \frac{\Delta M^2 \bar{L}}{E \bar{V}} \\
&= \frac{\Delta M^2 \bar{L}}{P}, \\
&\stackrel{\text{UR}}{\approx} \frac{\Delta M^2 \bar{L}}{E}
\end{aligned} \quad \boxed{\begin{aligned} \Delta T &= 0 \\ \Delta E &= 0 \\ (L = \frac{P}{E}T)_n \end{aligned}} \tag{4.34}$$

que é uma fase de oscilação duas vezes maior que a usual (4.31). Este fator multiplicativo adicional 2 pode assumir diversos valores em outros casos, a depender das condições impostas e das aproximações usadas. O caso geral está descrito na sec.II do cap.5. Podem-se encontrar discrepâncias entre o caso relativístico e o não-relativístico. Além disso, pode-se mostrar [26] que no caso de velocidade iguais, a fase é aquela padrão (4.31).

Devemos notar aqui que, ao usarmos ondas planas, tratamos de estados de momentos bem definidos e posições não definidas. Esse é o caso extremo em que não se pode associar ( $x = vt$ ), uma vez que os dois auto-estados de massa podem estar em qualquer lugar com diferentes velocidades. No entanto, podemos tratar OP como casos limite de pacotes de onda, i.e., quando a distribuição nos momentos é suficientemente bem localizada para que possamos associar um momento bem definido a cada auto-estado de massa, e ao mesmo tempo, quando a incerteza na posição é menor do que a incerteza ou precisão de detecção, e menor que a distância de oscilação, para que se possa observá-la.

No segundo cálculo, a relação semiclassical  $x_n = v_n t$  foi utilizada para cada auto-estado de massa. Esse uso equivale, na abordagem de PsO, a tomar a contribuição em fase de dois pontos deslocados. Contudo, a sec.III do cap.5 mostra que, com PsO, essa análise também leva a um fator de fase inicial não nulo que cancela exatamente o fator adicional, restando apenas a fase padrão.

Uma explicação simplista e correta, a posteriori, para o fato de que com o uso de PsO o fator de oscilação é aproximadamente o fator standard de fase (4.31), consiste no fato de

que a interferência ponto a ponto entre os PsO é local; não há necessidade de considerar efeitos de diferenças de velocidades de propagação pois estes já estão no formalismo. Se compararmos com a dedução usando ondas planas, teremos  $\Delta x = 0$  e  $\Delta t = 0$ . Os parâmetros de distância e tempo percorrido que aparecem da dedução usual com ondas planas devem ser pensados como valores médios dos observáveis de posição e tempo descritos de acordo com as distribuições dadas pelos PsO. Assim, a maneira correta de se calcular o fator de fase é (compare com (3.8)),

$$\Delta\phi = \Delta p^\mu x_\mu \Big|_{\mathbf{x} \rightarrow \langle \mathbf{x} \rangle = \bar{\mathbf{v}}t} . \quad (4.35)$$

Note que, escrita dessa forma, a fase é covariante até o momento em que se escolhe o referencial, para o qual é válida a relação  $\langle \mathbf{x} \rangle = \bar{\mathbf{v}}t$ .

## 4.4 Oscilações $\Delta m = 0$

Ilustramos aqui um fenômeno de interferência quântica para uma partícula de massa bem definida  $m$ , que resulta da sobreposição de dois pacotes de onda com velocidades médias diferentes. Esta ilustração tem como objetivo mostrar que fenômenos oscilatórios de interferência podem ocorrer na densidade de probabilidade mas a probabilidade de detectar a partícula independente da posição deve ser constante para uma partícula de massa definida. No caso de oscilações de sabor, a integração no espaço possibilita dissociar esse tipo de fenômeno da oscilação de sabor em si.

Primeiramente, definimos dois pacotes gaussianos se movendo com velocidade de grupo  $v_n$ , momento  $p_n$  e energia  $E_n$  ( $n = 1, 2$ ); respectivamente:

$$\psi_n(x, t) \equiv \int dp \Omega(p - p_n; a_n/2) e^{i(px - E(p)t)} \approx e^{i(p_n x - E_n t)} \Omega(x - v_n t; \sqrt{a_n^2 + i\beta_n t}) ; \quad n = 1, 2 , \quad (4.36)$$

onde

$$\langle \mathbf{P} \rangle = p_n , \quad \langle \Delta \mathbf{P}^2 \rangle = (2a_n)^{-2} , \quad E_n \equiv E(p_n) , \quad v_n \equiv \frac{dE}{dp}(p_n) , \quad \beta_n \equiv \frac{1}{2} \frac{d^2 E}{dp^2}(p_n) .$$

Podemos citar dois exemplos relevantes onde essa aproximação é válida:

$$\text{n\~ao relativ\~astico:} \quad \begin{cases} E_n = \frac{p_n^2}{2m} ; \\ v_n = \frac{p_n}{m_n} ; \\ \beta_n = \frac{1}{2m_n} ; \end{cases} \quad \text{expans\~ao em} \quad \begin{cases} E_n = \sqrt{p_n^2 + m_n^2} ; \\ v_n = \frac{p_n}{E_n} ; \\ \beta_n = \frac{m_n^2}{2E_n^3} . \end{cases} \quad (4.37)$$

desde que  $p_n$  seja suficientemente relativístico (veja apêndice C e fig.2.1).

Podemos, então, combinar esses dois pacotes sob a forma

$$\psi(x, t) = \frac{N}{\sqrt{2}} [\psi_1(x, t) + \psi_2(x, t)] , \quad (4.38)$$

onde  $N$  é um fator de normalização real. Calculando a densidade de probabilidade [54], temos<sup>2</sup>

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{N^2}{2} \left\{ \Omega^2(x - v_1 t; \tilde{a}_1) + \Omega^2(x - v_2 t; \tilde{a}_2) + \alpha^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(\Delta v_{12} t)^2}{8(\tilde{a}^2)}} \Omega^2(x - \bar{v}_{12} t; \sqrt{2[\tilde{a}^2]_{12}}) \cos \Theta \right\}, \quad (4.39)$$

onde

$$\alpha = \left[ \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right], \quad \bar{v}_{12} = \langle v_n; a_n^2 \rangle_{12}, \quad \tilde{a}_n^2 = a_n^2 + \left( \frac{\beta_n t}{a_n} \right)^2,$$

$$\Theta = \Delta p_{12} x - \Delta E_{12} t + \Delta \phi_{12}, \quad \Delta \phi_{12} = -\frac{1}{2} \Delta \varphi_{12} + \Delta \left[ \frac{\beta_n t}{a_n^2 \tilde{a}_n^2} \right]_{12} \left( x - \langle v_n; \frac{\beta_n}{a_n^2 \tilde{a}_n^2} \rangle t \right)^2 - \frac{(\Delta p_{12})^2 a_1^2 a_2^2}{\Delta a_{12}^2}.$$

O PO de onda acima é composto de dois pacotes gaussianos se movendo com suas respectivas velocidades de grupo, e uma parte mista, causada pela interferência entre as mesmas. Esse último termo exibe um comportamento oscilatório, análogo ao experimento de dupla fenda. À primeira vista, esse comportamento se assemelha à descrição de uma partícula oscilando no tempo e no espaço (veja a dependência em  $x, t$  de  $\Theta$  dentro da função cosseno). Assim, perguntamos como distinguir entre essa oscilação e o fenômeno de oscilação causada pela diferença de massas; a resposta é simples: basta integrar sobre todos as possíveis posições  $x$ , já que  $|\psi|^2$  representa a densidade de probabilidade no espaço, que consiste em uma degenerescência da “probabilidade de encontrar” a partícula. A probabilidade total é dada então por:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(t) &= \int_{-\infty}^{-\infty} dx |\psi(x, t)|^2 \\ &\equiv \frac{N^2}{2} \int_{-\infty}^{-\infty} dp \left| \Omega(p - p_1; a_1/2) e^{-iE(p)t} + \Omega(p - p_2; a_2/2) e^{-iE(p)t} \right|^2 \\ &= N^2 [1 + \Re\{\mathcal{A}\}] \\ &= \text{constante} \rightarrow 1 \quad (\text{ajustando-se } N \text{ apropriadamente}), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-\infty}^{-\infty} dp \Omega(p - p_1; a_1/2) e^{-iE(p)t} \left( \Omega(p - p_2; a_2/2) e^{-iE(p)t} \right)^* \\ &= \int_{-\infty}^{-\infty} dp \Omega(p - p_1; a_1/2) \Omega(p - p_2; a_2/2). \end{aligned}$$

Nesta equação,  $\mathcal{A}$  é independente do tempo porque a relação de dispersão  $E_1(p) = E_2(p) = E(p; m)$  é idêntica quando aplicada a uma partícula de massa definida. Embora seja um resultado trivial, esse resultado é o que, de fato, possibilita a normalização de um PO independente do tempo na Mecânica Quântica padrão, devido à evolução unitária.

Note que, se não houver integração em  $x$ , oscilações similares a esse tipo de interferência podem ocorrer adicionalmente à oscilação de sabor no caso de superposição de massas diferentes. Dentro do formalismo desenvolvido, a integração no espaço é fundamental para dissociarmos essas formas de oscilação das oscilações de sabor propriamente ditas.

---

<sup>2</sup>Algumas propriedades listadas no apêndice B foram usadas.

# Capítulo 5

## Fenômeno de Oscilação Quântica (artigo em anexo)

Este artigo consta no banco de dados pre-print de Los Alamos (hep-ph/0208086) e foi submetido à revista Journal of Experimental and Theoretical Physics (JETP).

Alguns tópicos abordados no artigo, a saber: os *fatores adicionais nas fórmulas de oscilação* (II–sec.4.3) e as *condições cinemáticas na produção* (IV–sec.4.2), já foram tratados de maneira simples nos capítulos anteriores, enquanto que a dedução da fórmula de oscilação usando o modelo gaussiano (III–cap.3) é tratada com mais detalhe neste artigo. Os outros tópicos abordados no artigo são:

- **Criação não Instantânea**

Todo o formalismo desenvolvido no cap.2 e usado no cap.3 foi baseado na suposição implícita de que a partícula descrita pelo seu PO é criada instantaneamente em  $t = 0$ . Sob estas condições, o PO tem sabor inicial exatamente definido, somente se  $\psi_1(x, 0) = \psi_2(x, 0)$ . Podemos afrouxar essa condição de instantaneidade de forma a efetuar uma criação ponto a ponto, na qual cada ponto tem sabor definido. Essa análise é feita particularmente para a fase, sem que haja mudança na fase padrão de oscilação.

- **Pacote de Onda imaginário**

Como uma ilustração drástica de que a forma do pacote de onda pode influenciar de maneira muito significativa no comportamento de oscilação de sabor, propomos, na sec.VI do artigo em anexo no cap.(5), um “gedanken wave packet”, com uma contribuição adicional na fase de oscilação; essa contribuição possibilita grandes modificações na fase de oscilação. O pacote consiste da superposição de dois PsO gaussianos separados espacialmente, com uma diferença de fase constante, adequadamente ajustada.

# QUANTUM OSCILLATION PHENOMENA

Stefano De Leo<sup>1</sup>, Celso C. Nishi<sup>2</sup>, and Pietro P. Rotelli<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Department of Applied Mathematics, State University of Campinas  
PO Box 6065, SP 13083-970, Campinas, Brazil  
*deleo@ime.unicamp.br*

<sup>2</sup> Department of Cosmic Rays and Chronology, State University of Campinas  
PO Box 6165, SP 13083-970, Campinas, Brazil  
*ccnishi@ifi.unicamp.br*

<sup>3</sup> Department of Physics, INFN, University of Lecce  
PO Box 193, 73100, Lecce, Italy  
*rotelli@le.infn.it*

*July, 2002*

**Abstract.** We give a detailed analysis of the oscillation formula within the context of the wave packet formalism. Particular attention is made to insure flavor eigenstate creation in the physical cases ( $\Delta p \neq 0$ ). This requirement imposes non instantaneous particle creation in all frames. It is shown that the standard formula is not only exact when the mass wave packets have the same velocity, but it is a good approximation when minimal slippage occurs. For more general situations the oscillation formula contains additional arbitrary parameters, which allows for the unknown form of the wave packet envelope.

**PACS.** 12.15.F – 14.60.Pq

## I. INTRODUCTION

In the last few years, the great interest in neutrino physics, and in particular in neutrino masses, has stirred up an increasing number of theoretical works upon the quantum mechanics of oscillation phenomena [1–3]. Notwithstanding the exceptional ferment in this field, the situation is still confused, and the conceptual difficulties hidden in the oscillation formulas represent an intriguing, and sometimes embarrassing, challenge for physicists. The most controversial point in discussing the quantum mechanics of particle oscillations is represented by the derivation of formulas containing *extra factors* in the oscillation length [4–12]. In this paper, we review the source of these factors and show why in the wave packet formalism with *minimal slippage* one finds, independently from the kinematical assumptions, the standard oscillation probability. However, in more general situations one does indeed find different oscillation formulas. This question is of course essential if one wants to derive consistent mass differences from oscillation phenomena. It may well be that different experiments, or even sets of measurements within a given experiment (e.g. atmospheric neutrino data), involve different oscillation formulas, and this must be taken into account.

One of the basic assumptions in neutrino physics is that only flavor eigenstates are destroyed or created. Now, in the wave function formalism this is a problem which, in our opinion, has not yet been satisfactorily solved. The most common approach is to assume instantaneous creation within the context of an equal momentum hypothesis [13]. Unfortunately, there is no physical Lorentz frame in which this occurs. Some authors have even tried to bypass the problem by *re-defining* the flavor eigenstates according to convenience [14]. In this paper we shall describe how to achieve this obligatory condition within the wave packet formalism. It will automatically imply *non instantaneous* creation of the wave packet for any physical production process.

In our analysis, we shall for simplicity work within a two flavor/mass mixing model. The structure of the paper is as follows:

- In Section II, we recall the arguments in favor of extra factors in the oscillation formula. We shall in particular note that an essential assumption in these derivations is that the flavor eigenstate is *identical*, including the phase, at each point of creation.
- In Section III, we recall the equal momentum wave packet derivation of the standard oscillation formula.
- We discuss the physical kinematics for particle creation in Section IV.
- The extension from the equal momentum case to an arbitrary case is tackled, and solved, in Section V. In this Section, we also show that, while physically essential, this generalization does not in itself invalidate the standard oscillation formula.
- In Section VI, we return to the question of non-standard oscillation formulas by showing the results of a multiple peak (specifically a two-peak) model with substantial slippage.
- We draw our conclusions in Section VII.

## II. EXTRA FACTORS IN THE OSCILLATION FORMULAS

In the quantum mechanics of particle oscillation, substantial mathematical simplification results from the assumption that the space dependence of the wave functions is one-dimensional, hence, in what follows, we shall use this simplification. Flavor oscillations are observed when a source creates a particle which is a mixture of two or more mass eigenstates. The main aspects of oscillation phenomena can be understood by studying the two flavor problem

$$\begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix},$$

where  $\nu_\alpha$  and  $\nu_\beta$  are flavor eigenstates and  $\nu_1$  and  $\nu_2$  are mass eigenstates.

Suppose we have a physical system whose initial state is represented by the flavor state  $\nu_\alpha$ . At later times, the probability to find the flavor state  $\nu_\beta$  is conventionally expressed in terms of the mixing angle  $\theta$  and of the relative phase  $\Delta\Phi$  by

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = \sin^2 2\theta \frac{1 - \cos \Delta\Phi}{2}.$$

It is to be noted that the above formula ignores any possible effects involving the shape of the wave functions. The Lorentz invariant phase factor  $\Delta\Phi$  is usually given in terms of the distance  $L$  (travelled in the time  $T$ ), of the mass difference  $\Delta m^2$ , and of the energies mean value  $\bar{E}$ . Due to the relativistic nature of neutrinos, this phase is evaluated by considering  $T \approx L$  and  $p_{1,2} \approx E_{1,2}$ , i.e.

$$\Delta\Phi = T \Delta E - L \Delta p \approx L (\Delta E - \Delta p) \approx L \Delta m^2 / 2\bar{E}. \quad (1)$$

By using this phase difference, one gets the well-known expression [15–19]

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L) \approx \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4\bar{E}} L \right) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \pi \frac{L}{L_{osc}} \right), \quad (2)$$

where

$$L_{osc} = \frac{4\pi\bar{E}}{\Delta m^2} \approx 2.48 \frac{E[\text{GeV}]}{\Delta m^2[\text{eV}^2]} \text{ Km} \quad (3)$$

is the distance at which  $\Delta\Phi$  becomes  $2\pi$ . In this paper, we shall refer to Eq.(2) as the *standard oscillation probability* and to Eq.(3) as the *standard oscillation length*. As an aside, we note that the assumptions in Eq.(1) have formally cost us the Lorentz invariance of the standard oscillation formula. As written, it is no longer valid in all Lorentz frames.

The historical development of the calculation of the phase factor  $\Delta\Phi$  is interesting and a little mysterious. The first prediction of the oscillation probability was given in 1969 by Gribov and Pontecorvo [20]

$$|\nu_e(t)|^2 = |\nu_e(0)|^2 \left[ \left( 1 - \frac{\sin^2 2\theta}{2} \right) + \frac{\sin^2 2\theta}{2} \cos \left( 2 \frac{\Delta m^2}{2\bar{p}} t \right) \right].$$

The important point to note here is a factor two difference with respect to the relative phase which appears in Eq.(1). Only some years later, to be more precise in 1976, was the standard oscillation probability obtained by Fritsch and Minkowsky [21].

For a long time thereafter, the oscillation probability (2) stood as the fundamental starting point in neutrino physics and no comment was ever made on the additional factor two which appeared in the Gribov and Pontecorvo work (for further details see ref. [10]). In 1995, Lipkin re-discussed the derivation of the oscillation probability and pointed out that, by assuming the *equal momentum scenario*, an extra factor of two appears in the oscillation phase [4]. The hypothesis of equal energies was then suggested to re-obtain and justify the standard result [5]. However, simply by following the reasoning of Lipkin [4], the authors of ref. [8] showed that, contrary to Lipkin's assertion, the only case in which the standard oscillation phase can be reproduced is in the *equal velocity scenario*. This condition also distinguishes itself from the others (equal energy or equal momentum) by being Lorentz invariant. This does not mean that this scenario, which yields the maximum simplicity and recovers the standard oscillation probability, coincides with the real situation in neutrino production. As observed in refs. [7,8] common velocities imply  $E_1/E_2 = p_1/p_2 = m_1/m_2$  and since this may be very far from unity it would contradict the estimates of the neutrino energies for the known production mechanisms. A discussion of the kinematical constraints derived from energy-momentum conservation in neutrino production will be given in Section IV.

In order to understand how extra factors appear in the oscillation formula, let us analyze the difference of phase responsible for the oscillation phenomenon. In the plane wave formalism the appropriate plane wave phase is associated with each mass eigenstate. Since the four-momentum of different masses cannot coincide, the phase of each mass eigenstate will change with time and distance. Thus an initially pure flavor-eigenstate will be modified with time. The mass-eigenstate phase difference is

$$\Delta\Phi = \Delta(ET - pL) . \quad (4)$$

In the standard treatment, one evaluates this by setting  $\Delta T = \Delta L = 0$  [22,23]. Nevertheless, if the two mass eigenstates have *different* speeds, by assuming instantaneous creation, we should experience, at the common time  $T$ , the interference between wave function points which have travelled different distances, i.e.

$$L_1 = v_1 T \quad \text{and} \quad L_2 = v_2 T \quad [ \Rightarrow \Delta L = T \Delta v \quad \text{and} \quad T = \bar{L}/\bar{v} ] .$$

The interference between wave function points which have travelled different distances is the source of an extra multiplicative factor,

$$\epsilon = \frac{\Delta\Phi(\Delta L \neq 0)}{\Delta\Phi(\Delta L = 0)} \quad \left[ \equiv \frac{\Delta\Phi(\Delta v \neq 0)}{\Delta\Phi(\Delta v = 0)} \right] , \quad (5)$$

in the oscillation phase (length). In order to quantify this effect, we explicitly calculate the difference of phase given in Eq.(4). By simple algebraic manipulations, we obtain

$$\Delta\Phi = \left( \frac{1}{\bar{v}} \Delta E - \Delta p - \frac{\bar{p}}{\bar{v}} \Delta v \right) \bar{L} . \quad (6)$$

As particular cases, we can immediately compute the Lorentz invariant factor  $\Delta\Phi$  in the common velocity and common energy scenario,

$$\begin{aligned} \Delta\Phi [ \Delta v = 0 ] &= \frac{\Delta m^2}{2\bar{p}} \bar{L} \approx \frac{\Delta m^2}{2\bar{E}} \bar{L} \quad [\text{standard result}] , \\ \Delta\Phi [ \Delta E = 0 ] &= \frac{\Delta m^2}{\bar{p}} \bar{L} \approx \frac{\Delta m^2}{\bar{E}} \bar{L} \quad [\text{extra factor two}] . \end{aligned}$$

In order to get a more general expression for the extra factor, we rewrite  $\epsilon$  in terms of  $\bar{p}$ ,  $\bar{E}$ ,  $\Delta p$  and  $\Delta E$  as follows

$$\epsilon(\bar{p}, \bar{E}; \Delta p, \Delta E) = 1 + \frac{\bar{p}\Delta v}{\bar{v}\Delta p - \Delta E} . \quad (7)$$

Considering  $\Delta p \ll \bar{E}$  and  $\Delta E \ll \bar{E}$ , we obtain

$$\begin{aligned}
\epsilon(\bar{p}, \bar{E}; \Delta p \ll \bar{E}, \Delta E \ll \bar{E}) &= 1 + \frac{\bar{p}(\bar{E}\Delta p - \bar{p}\Delta E)}{\bar{E}(\bar{p}\Delta p - \bar{E}\Delta E)} \left\{ 1 + \mathcal{O}\left[\frac{\Delta E\Delta p}{\bar{E}^2}, \left(\frac{\Delta E}{\bar{E}}\right)^2\right] \right\} \\
&\approx 1 + \frac{\bar{p}(\bar{E}\Delta p - \bar{p}\Delta E)}{\bar{E}(\bar{p}\Delta p - \bar{E}\Delta E)} \\
&\approx \begin{cases} 1 & \text{when } \Delta p = 0 \text{ and } p_{1,2} \ll E_{1,2} , \\ 2 & \text{when } \Delta p = 0 \text{ and } p_{1,2} \approx E_{1,2} . \end{cases} \quad (8)
\end{aligned}$$

There are difference in the value of  $\epsilon$  between the scenarios of common momentum and common energy but they are only significant in the non-relativistic limit. Such a situation could in principle be tested, for example, in the neutral kaon system. In neutrino physics, where non-relativistic neutrinos are unobservable, when  $\Delta v \neq 0$ , we practically *always* find an extra factor two in the oscillation length. In conclusion, to recover the standard formula for neutrinos in this formalism (where the energy of production is approximately known and is orders of magnitude greater than the postulated masses), in addition to the exact common velocity scenario we would also need to impose almost equal masses to guarantee  $E_1/E_2 \approx 1$  [8].

Now it is important to observe that, in all the above, one has implicitly assumed that the flavor eigenstate is always given by the mixing matrix (chosen real by convention) with which we started this Section. That is, the flavor eigenstate has been assumed *identical* at all points and/or times of creation. However, we can of course multiply a flavor (mass) eigenstate by a phase factor without modifying its flavor (mass). Perhaps less obvious, this phase may even be space-time dependent. A significant example of this occurs in the next Section and is generalized in Section V. An alternative wave packet example, specifically devised to approximate at a given time the above non standard oscillating phase, is presented in Section VI.

### III. WAVE PACKET FORMALISM WITH INSTANTANEOUS CREATION

In the preceding section, we introduced the fundamental arguments leading to extra factors in the oscillation probability. In this section, we are going to show why these factors do not appear in the usual wave packet formalism. We begin by trying to understand qualitatively the problem in a very simple case, that is  $\Delta p = 0$  [24, 25], and deduce from it several important conclusions.

So far, we have only considered a single plane wave. Rigorously, such an energy-momentum eigenstate cannot represent a physical state - it is not normalizable. It would also pose us with the problem of defining  $L$  and  $T$  in the oscillation phase. To avoid these problems, we must employ a normalized superposition of plane waves

$$\exp\{-i[E(p, m_n)t - px]\}$$

and describe the time evolution of flavor states by the wave packet

$$\begin{aligned}
\Psi(x, t) &= \psi_1(x, t) \cos\theta \boldsymbol{\nu}_1 + \psi_2(x, t) \sin\theta \boldsymbol{\nu}_2 \\
&= [\psi_1(x, t) \cos^2\theta + \psi_2(x, t) \sin^2\theta] \boldsymbol{\nu}_\alpha + [\psi_2(x, t) - \psi_1(x, t)] \cos\theta \sin\theta \boldsymbol{\nu}_\beta \\
&= \psi_\alpha(x, t; \theta) \boldsymbol{\nu}_\alpha + \psi_\beta(x, t; \theta) \boldsymbol{\nu}_\beta , \quad (9)
\end{aligned}$$

where

$$\psi_n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(p) \exp\{-i[E(p, m_n)t - px]\} dp .$$

As a model assumption, we suppose that the momentum distributions  $\varphi_n(p)$  are given by Gaussian functions peaked around the mass eigenstate momenta  $p_n$ , i.e.

$$\varphi_n(p) = \left(\frac{a_n^2}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-a_n^2(p - p_n)^2/4\right] . \quad (10)$$

To *instantaneously* create at  $t = 0$ , in a localized region centered around the spatial coordinate  $x = 0$ , a flavor state  $\nu_\alpha$ , we have to impose the following constraint

$$\psi_1(x, 0) = \psi_2(x, 0) \quad [ \Rightarrow \Delta a = \Delta p = 0 ] . \quad (11)$$

Consequently, from Eq.(9) we get

$$\Psi(x, 0) = \left( \frac{2}{\pi a^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[ -\frac{x^2}{a^2} \right] \exp [i p_0 x] \nu_\alpha = \psi(x, 0) \nu_\alpha , \quad (12)$$

where  $p_0 = p_1 = p_2$ . The probability  $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t)$  of observing a flavor state  $\nu_\beta$  at the instant  $t$  is equal to the integrated squared modulus of the  $\nu_\beta$  coefficient in Eq.(9),

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_\beta(x, t; \theta)|^2 dx . \\ &= \sin^2 2\theta \left[ 1 - \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(x, t) \psi_2^*(x, t) dx \right] / 2 . \end{aligned} \quad (13)$$

Actually, this result with a unique time assumes that the detector is not localized in a region smaller or comparable to the size of the wave packet. Otherwise for  $t$  we would have to use the average time of measurement. In order to calculate the oscillation probability, let us change the  $x$ -integration into  $p$ -integration

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(x, t) \psi_2^*(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(p) \exp \{ -i [E(p, m_1) - E(p, m_2)] t \} dp$$

and use the following approximation

$$\begin{aligned} E(p, m_1) - E(p, m_2) &= \left( 1 + \frac{p^2 - p_0^2}{E_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} E_1 - \left( 1 + \frac{p^2 - p_0^2}{E_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} E_2 \\ &\approx \left( 1 - \frac{p^2 - p_0^2}{2 \bar{E}^2} \right) \Delta E \\ &\approx \left[ 1 - \frac{(p - p_0) p_0}{\bar{E}^2} \right] \Delta E \\ &\approx \Delta E + (p - p_0) \Delta v . \end{aligned}$$

This approximation is justified if we assume  $\delta p \ll \bar{E}$  and  $\Delta E \ll \bar{E}$ . The oscillation term is then given by

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^*(x, t) \psi_2(x, t) dx &\approx \left( \frac{a^2}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp [-i \Delta E t] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [-a^2 \sigma^2 / 2] \exp [-i \sigma \Delta v t] d\sigma \\ &= \exp [-i \Delta E t] \exp \left[ - \left( \frac{\Delta v t}{a\sqrt{2}} \right)^2 \right] . \end{aligned}$$

By observing that  $\Delta E = \Delta m^2 / 2\bar{E}$  and using the approximation  $T = \bar{L} / \bar{v} \approx \bar{L}$  (where  $T$  stands for the observation time), Eq.(13) reduces to

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; \bar{L}) \approx \sin^2 2\theta \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\Delta v T}{a\sqrt{2}} \right)^2 \right] \cos \left( \frac{\Delta m^2}{2\bar{E}} \bar{L} \right) \right\} / 2 . \quad (14)$$

Thus, when minimal slippage occurs ( $\Delta v T \ll a$ ) the standard oscillation probability (2) is a good approximation and *no* extra factor appears in the oscillation term . This contradicts the result given in the previous Section, where, in the equal momentum scenario by using the plane wave derivation, an extra factor of two was obtained, see Eq.(8). To explain this apparent paradox, we observe that, at time  $T$  and at a fixed position  $x_f$ , in the overlapping region, we experience the interference between space points whose separation at creation is given (see Fig. 1) by

$$\Delta x_{in} = -\Delta v T .$$

This implies that an *additional* initial phase,

$$\Delta\Phi_{in} = -p_0 \Delta x_{in} = p_0 \Delta v T , \quad (15)$$

is automatically included in the wave packet formalism. Consequently, the final result contains both the phase difference calculated in the previous Section, i.e.

$$\Delta\Phi = T \Delta E - p_0 \Delta L ,$$

and the additional term given in Eq.(15). Thus, the *standard* result,

$$\Delta\Phi_{st} = \Delta\Phi_{in} + \Delta\Phi = T \Delta E , \quad (16)$$

is obtained. Hence, the difference in this scenario with that of the previous Section is that here the flavor eigenstate is *not* unique at all points of creation. *Each point is associated with an appropriate  $x$ -dependent phase.*

Before proceeding further, we must ask whether the above equal momentum scenario is physically possible, and if not, how it is to be modified while maintaining the creation of only a flavor eigenstate. These modification could well change the oscillation phase. To respond to these questions we must first review the kinematics of particle creation.

#### IV. KINEMATIC CONSTRAINTS IN PRODUCTION

We start by observing that any production process of a particle (be it an oscillating particle or not) can be considered, for kinematic purposes, as *an effective two-body decay* such as

$$m_0 \leftarrow \overset{M}{\bullet} \rightarrow m_{1,2}$$

where we recall that the subscript in  $m_{1,2}$  refers to the oscillating mass eigenvalues. If the production process is a decay into more than two particles, then  $m_0$  represents the effective mass of all the accompanying particles and is of course greater than or equal to the sum of their masses. For production processes other than decays  $M$  is simply the center of mass energy and not the mass of a resonance. In this “rest” frame, energy and momentum conservation imply

$$M = \sqrt{p_n^2 + m_0^2} + \sqrt{p_n^2 + m_n^2} = \sqrt{p_n^2 + m_0^2} + E_n , \quad n = 1, 2 .$$

By simple algebraic manipulations, we find [26, 27]

$$\Delta E = \frac{\Delta m^2}{2M} , \quad \Delta p = \frac{\bar{E} - M}{\bar{p}} \Delta E \quad \text{and} \quad \Delta v = \frac{1 - (\bar{p}/\bar{E})^2 - (M/\bar{E})}{\bar{p}} \left[ 1 - \left( \frac{\Delta E}{2\bar{E}} \right)^2 \right]^{-1} \Delta E . \quad (17)$$

The next step is to observe that by assumption

$$\Delta m \neq 0 \quad \text{and thus} \quad 2(M - \bar{E}) = \sqrt{p_1^2 + m_0^2} + \sqrt{p_2^2 + m_0^2} \neq 0 .$$

Consequently, in the rest frame of the decaying particle of mass  $M$  (or, in general, in the center of mass frame) we have

$$\Delta E \neq 0 , \quad \Delta p \neq 0 \quad \text{and} \quad \Delta v \neq 0 . \quad (18)$$

This implies that there does not exist any frame in which  $\Delta v = 0$  since this is a Lorentz invariant condition. We can also show that there does not exist any frame in which  $\Delta p = 0$ . In fact, by performing a Lorentz transformation with velocity  $\beta$  from the rest frame of the decaying particle  $M$  (or center of mass), we find

$$\begin{aligned} \Delta E' &= \gamma (\Delta E - \beta \Delta p) , \\ \Delta p' &= \gamma (\Delta p - \beta \Delta E) . \end{aligned}$$

To satisfy  $\Delta p' = 0$ , we have to impose the following *unphysical* condition on  $\beta$

$$|\beta| = |\Delta p / \Delta E| = |(\bar{E} - M) / \bar{p}| = (\sqrt{p_1^2 + m_0^2} + \sqrt{p_2^2 + m_0^2}) / 2\bar{p} > 1 .$$

This shows that  $(\Delta E, \Delta p)$  is space-like. Therefore, there will, on the contrary, always be frames in which  $\Delta E' = 0$ .

It is now important to realize that the condition  $\Delta p \neq 0$  automatically implies for  $x \neq 0$  that the mass eigenstates defined in the previous Section are no-longer equal at  $t = 0$ ,

$$\psi_1(x, 0) \neq \psi_2(x, 0) .$$

This inevitably leads, within the context of instantaneous creation, to a non zero probability to find (see Fig. 2) a flavor state  $\nu_\beta$  at time  $t = 0$  [9,19]. Indeed, for  $\Delta p \neq 0$  and with instantaneous creation, we obtain the following oscillation probability

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) \approx \sin^2 2\theta \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{a \Delta p}{2\sqrt{2}} \right)^2 - \left( \frac{\Delta v t}{a\sqrt{2}} \right)^2 \right] \cos \left( \frac{\Delta m^2}{2E} t \right) \right\} / 2 . \quad (19)$$

Thus, there does not exist *any* time for which the state is a pure flavor eigenstate. In the next Section, we shall describe how by generalizing to non instantaneous creation we can eliminate the initial difference of phase between the mass eigenstates and hence achieve *pure flavor creation event-wise* .

## V. NON INSTANTANEOUS CREATION

We have identified the initial difference of phases in the mass eigenstates

$$-\Delta p x_c ,$$

where  $x_c$  is a generic space point in the creation wave packet, as the cause for having at the time of creation a state which is *not* a pure flavor eigenstate. This undesired effect can be removed either by the unphysical assumption of equal momenta or by introducing for each space point  $x_c$  a corresponding creation time  $t_c$  which satisfies the following relation

$$\Delta E t_c - \Delta p x_c = 0 . \quad (20)$$

This condition guarantees

$$dP(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; x_c, t_c) = 0$$

and consequently allows for pure flavor creation *event-wise*.

Somewhat surprisingly this substantial modification does not invalidate the standard oscillation formula. In fact, by following the plane wave phase calculation of Section II, we find at the interference space-time point  $(x_f, T)$  the following mass eigenstate phases

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= E_1 (T - t_{1,c}) - p_1 v_1 (T - t_{1,c}) , \\ \Phi_2 &= E_2 (T - t_{2,c}) - p_2 v_2 (T - t_{2,c}) . \end{aligned}$$

The last two terms in the difference of phase

$$\Delta \Phi = T [\Delta E - \Delta(pv)] - \Delta(Et_c) + \Delta(pvt_c) \quad (21)$$

represent the generalization of Eq. (6) in the case of non instantaneous creation. However, as explained in the previous Section, in the wave packet formalism additional initial phases are automatically included in the expression of the oscillation phase. Thus, for non instantaneous creation, we still have to take into account the contributions of the initial phases

$$\begin{aligned} \Phi_{1,in} &= E_1 t_{1,c} - p_1 [x_f - v_1 (T - t_{1,c})] , \\ \Phi_{2,in} &= E_2 t_{2,c} - p_2 [x_f - v_2 (T - t_{2,c})] . \end{aligned}$$

The final result contains both the difference of phase (21) and the additional term

$$\Delta \Phi_{in} = -\Delta p x_f + T \Delta(pv) + \Delta(Et_c) - \Delta(pvt_c) . \quad (22)$$

Finally, after integration ( $x_f \rightarrow \bar{L}$ ) the standard result

$$\Delta \Phi_{st} = T \Delta E - \bar{L} \Delta p \quad (23)$$

is once more obtained.

The above procedure has eliminated flavor contamination at creation. Nevertheless, since creation no longer occurs at a unique time and the partially formed wave packets naturally evolve, there will still not be a pure flavor eigenstate at any fixed time, with the trivial exception of the very first instant in the creation process. We also observe that any search for the particle during this time (creation) will not necessarily yield a positive result since the wave function is not fully normalized. The measurement will still produce a collapse of the wave function in the appropriate percentage of cases to zero.

## VI. GEDANKEN WAVE PACKETS

We have seen that the implementation of pure flavor creation, while non trivial, does not modify the standard oscillation formula. However, the wave packet assumed was by no means the most general. Now we shall study the possible consequences of a two-peak wave packet. This is the simplest which allows for the insertion of additional constant initial phase factors.

To simplify the following calculation, we return to the unphysical (in any frame)  $\Delta p = 0$  scenario with instantaneous creation at  $t = 0$ . We consider a wave packet obtained by a sum of generalized Gaussians with peaks at  $x = \pm x_0$  (see Fig. 3),

$$\psi(x, 0) = N \left\{ \exp [i p_0 (x + x_0)] \exp \left[ -\frac{(x + x_0)^2}{a^2} \right] + \exp [i p_0 (x - x_0)] \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{a^2} \right] \right\}, \quad (24)$$

where  $N$  is the normalization constant. We also assume that the peaks are well separated. In this case

$$N \approx \left( \frac{1}{2\pi a^2} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Note that each gaussian has its own extra constant phase factor.

We now allow the wave packets to evolve and consider the situation (measurement) in which the first peak of one mass eigenstate overlaps with the second peak of the other (see Fig. 4). In this region of overlap, oscillation occurs but it is to be noted that there are non-overlapping parts of the wave packet which correspond to pure mass eigenvalues (see Fig. 5). The contribution of these parts yields a non oscillating term. Indeed this is exactly what happens when the mass wave packets have completely separated (decoherence). The oscillating term is modified by the presence of the difference between the phase factors  $\exp[ip_0 x_0]$  and  $\exp[-ip_0 x_0]$ . Thus, the oscillation formula at or around these times reads

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) \approx \sin^2 2\theta \left\{ 1 - \frac{1}{2} \exp \left[ -\left( \frac{\Delta v t - 2x_0}{a\sqrt{2}} \right)^2 \right] \cos \left[ \left( \frac{\Delta m^2}{2\bar{E}} t \right) \mp 2p_0 x_0 \right] \right\} / 2, \quad (25)$$

where the sign in the constant term  $\mp 2p_0 x_0$  depends on  $v_1 \gtrless v_2$ . In this picture,

$$2p_0 x_0 \approx \pm p_0 \Delta v t \approx \mp \frac{\Delta m^2}{2\bar{E}} t.$$

Thus, we obtain the extra factor two of Section II for the oscillating phase. It is true that since  $\mp 2p_0 x_0$  is a constant term the oscillation period is still be the standard one (see Fig. 5). However, with multiple peaks, each with independent initial constant phases, the effective extra phase term could become  $L$  or  $T$  dependent. We see no good physical reasons for excluding such a contribution a priori.

In the case of *minimal slippage* when the interference occurs within each separate peak, the constant phases play no role. In these cases, we can also ignore (by definition) the non-overlapping parts of the wave function. Thus, the standard result is obtained as a good approximation. This is now consistent with the fact that for no slippage ( $\Delta v = 0$ ) the standard formula is *exact*.

It is also useful to observe that, in the incoherent limit, one has a clean method for determining experimentally the mixing angle, whatever the wave packet form is,

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; T \gg a/|\Delta v|) = \sin^2 2\theta / 2 .$$

Nevertheless, the time for the onset of complete incoherence depends upon the wave packet dimensions and upon the different mass velocities.

## VII. CONCLUSIONS

The aim of this work was to shed some new light on the quantum mechanics of particle oscillations. The primary objective was to search for the conditions under which the standard oscillation formula is valid. In the process we have understood the origin of the extra factors in the plane wave oscillation calculations. It is the implicit assumption that at creation (whether instantaneous or not) the flavor eigenstate is unique even up to the phase at all points and times of creation. To the best of our knowledge this has not been pointed out previously. The often quoted *plane wave derivations* of the standard formula have generally been based upon invalid approximations or formalisms chosen so as to compensate for the neglect of the initial phase contributions.

Other authors have previously pointed out that the assumptions of equal velocity, momentum and energy are “unphysical” in the sense that they are not compatible with the known production processes in the laboratory frame. We have pointed out here that the first two are rigorously *non physical* in the sense that there is no Lorentz frame in which they occur. Only the equal energy case is theoretically possible. Consequently, since the assumption of *instantaneous creation* together with flavor eigenstate production imposes equal momentum, it is non physical. We can correct for this by assuming an *event-wise production* mechanism. Event-wise production is perfectly natural. It is even predicted for the equal momentum case (had it existed) when seen by another observer in a Lorentz frame in which the momenta are not equal. Somewhat surprisingly the standard oscillation phase, as calculated in the wave packet formalism, is not affected by this modification, at least not for the cases with minimal slippage. Thus, we have concluded that within the wave packet formalism the standard result is not only exact in the case of equal velocities (no slippage) but also a good approximation in all cases in which minimal slippage occurs between the mass wave packets.

Now the standard oscillation formula contains no dependence upon the form of the wave packets involved. *This clearly cannot be valid in general.* Indeed, as a simple and well known counter example we have recalled in the previous Section the incoherence limit, whose onset is dependent upon the size of the wave packets and the differences in the mass eigenstate velocities. One must expect the dimensions and explicit form of the wave packets, including all relative phases, to play a role in the oscillation formula. We have exhibited a simple two-gaussian model to demonstrate not only this but also how a result that simulates the extra-factors calculations (for the oscillating part) can be obtained.

Allowing for completely arbitrary modulations of the plane waves, we must introduce additional parameters into our generalized formula

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = \sin^2 2\theta \left\{ 1 - R(t) \cos \left[ \frac{\Delta m^2}{2E} t + \varphi(t) \right] \right\} / 2 , \quad (26)$$

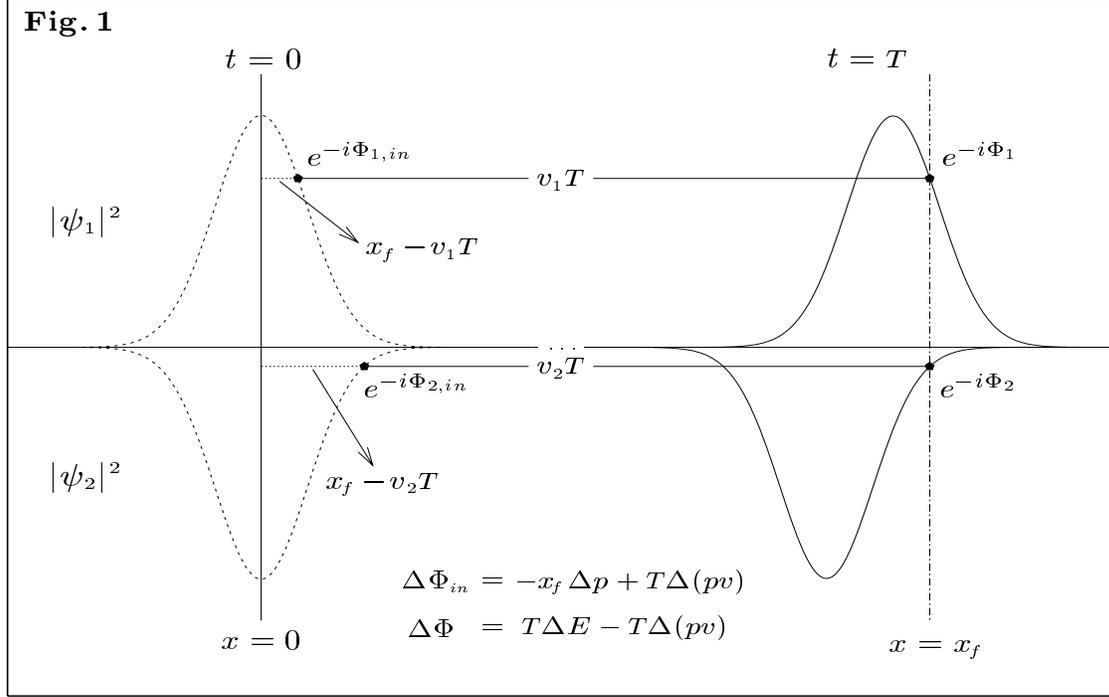
where  $R(t)$  and  $\varphi(t)$  depend upon the details of the wave packet envelope. This formula contains two extra parameters when compared to the standard formula, four in all. It may well prove necessary to employ our generalized expression in order to reconcile diverse experimental results. The alternative could lead to inconsistencies in the determination of mass differences and/or mixing angles. Use of this formula may also avoid the need to introduce one or more sterile neutrinos. This equation, as it stands, is probably too vague for practical phenomenological fits. However, it is always possible, without returning to the standard formula, to add simplifying assumptions such as the time independence of the extra phase term.

Apart from the question posed in this paper of what is the most practical oscillation formula to be used in phenomenological fits, there is an aspect of this work which is of great interest, at least to the authors. The details of the creation and annihilation of wave packets is to a large degree unknown territory. Oscillation phenomena may indeed be useful as a source of information upon this

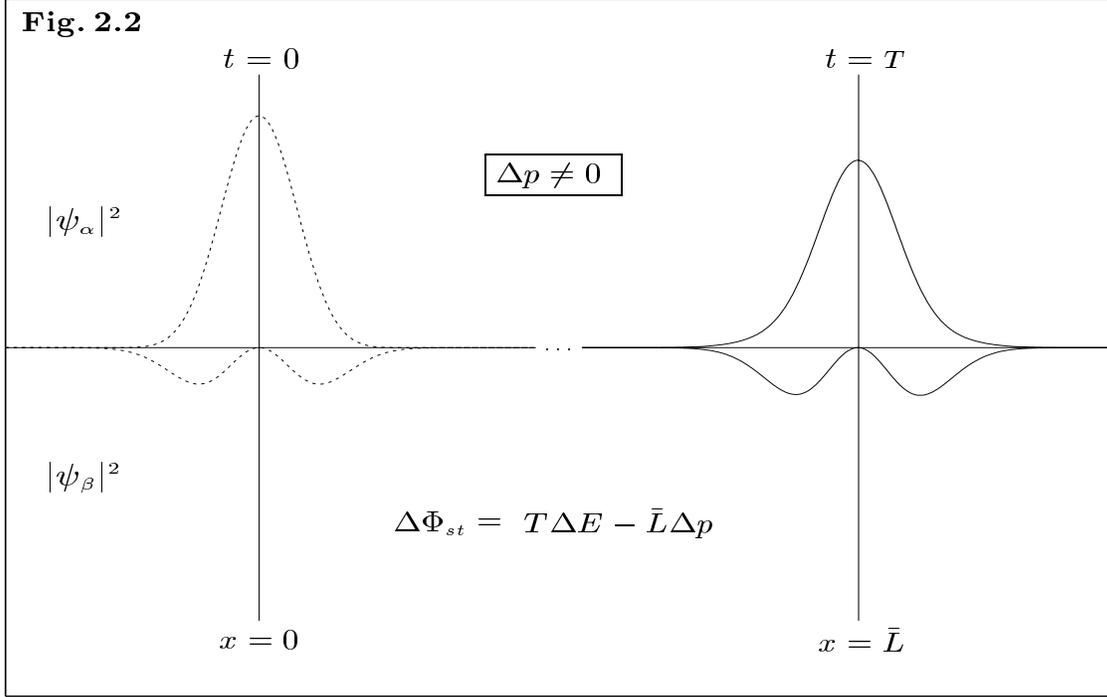
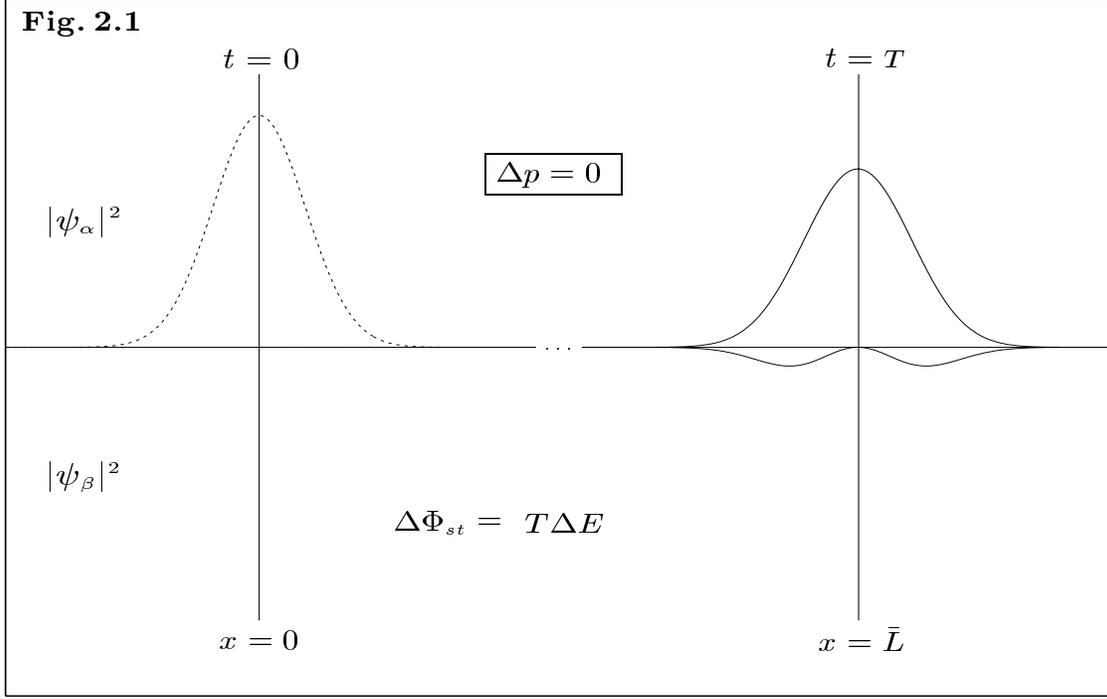
subject. It should also be possible to investigate this aspect for photon wave packets with the help of very precise measurements in interference phenomena. In the case of photons the effect of slippage is substituted by the occurrence of different path lengths. For example, in optics it is well known that interference effects cease if the difference of path lengths exceeds the wave packet dimension, and this should permit the determination of these dimensions. This technique may, of course, also be extended to any elementary particle that lives long enough. This particular subject matter recalls transitory phenomena in various sectors of classical physics. Its study, both theoretical and experimental, at the quantum mechanical level is surely a great challenge.

## References

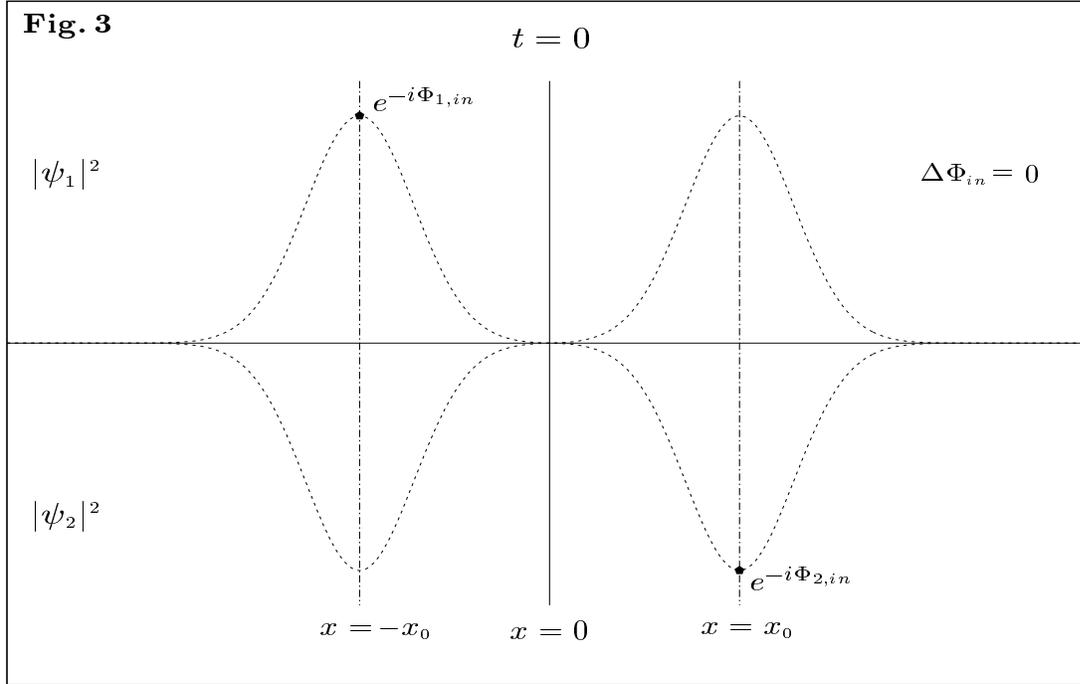
1. M. Zralek, *Acta Phys. Polon. B* **29**, 3925 (1998).
2. K. Zuber, *Phys. Rept.* **305**, 295 (1998).
3. S. Bilenky, C. Giunti, and W. Grimus, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **43**, 1 (1999).
4. H. J. Lipkin, *Phys. Lett. B* **348**, 604 (1995).
5. Y. Grossman and H. J. Lipkin, *Phys. Rev. D* **55**, 2760 (1997).
6. Y. Takeuchi, Y. Tazaki, S. Tsai, and T. Yamazaki, *Mod. Phys. Lett. A* **14**, 2329 (1999).
7. L. B. Okun and I. S. Tsukerman, *Mod. Phys. Lett. A* **15**, 1481 (2000).
8. S. De Leo, G. Ducati, and P. Rotelli, *Mod. Phys. Lett. A* **15**, 2057 (2000).
9. Y. Takeuchi, Y. Tazaki, S. Tsai, and T. Yamazaki, *Prog. Theor. Phys.* **105**, 471 (2001).
10. J. H. Field, *The description of neutrino and muon oscillations by interfering amplitudes of classical space-time paths* (hep-ph/0110064).
11. C. Giunti, *The phase of neutrino oscillations* (hep-ph/0202063).
12. P. Rotelli, "Invalid approximations in the oscillation formula" in *NOW 2000*, Proceedings of the Europhysics Neutrino Oscillation Workshop (Ed. G. Fogli, North-Holland 2001).
13. B. Kayser, *Eur. J. Phys. C* **15**, 344 (2000).
14. C. Giunti, and C. W. Kim, *Phys. Rev. D* **58**, 017301 (1998).
15. S. M. Bilenky and B. Pontecorvo, *Phys. Rept.* **41**, 225 (1978).
16. S. M. Bilenky and S. T. Petcov, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 671 (1987).
17. B. Kayser, F. Gibrat-Debu, and F. Perrier, *The Physics of Massive Neutrinos* (World Scientific, Singapore, 1989).
18. F. Bohem and P. Vogel, *Physics of Massive Neutrinos*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
19. C. W. Kim and A. Pevsner, *Neutrinos in Physics and Astrophysics*, (Harwood Academic Publishers, Langhorne, 1993).
20. V. Gribov and B. Pontecorvo, *Phys. Lett. B* **28**, 493 (1969).
21. H. Fritsch and P. Minkowsky, *Phys. Lett. B* **62**, 72 (1976).
22. J. Lowe, B. Bassaleck, H. Burkhardt, A. Rusek, G. J. Stephenson Jr, and T. Goldman, *Phys. Lett. B* **384**, 288 (1996).
23. K. Kiers and N. Weiss, *Phys. Rev. D* **57**, 3091 (1998).
24. B. Kayser, *Phys. Rev. D* **24**, 110 (1981).
25. J. Rich, *Phys. Rev. D* **48**, 4318 (1993).
26. R. G. Winter, *Lett. Nuovo Cimento* **30**, 101 (1981).
27. C. Giunti, *Mod. Phys. Lett. A* **16**, 2636 (2001).



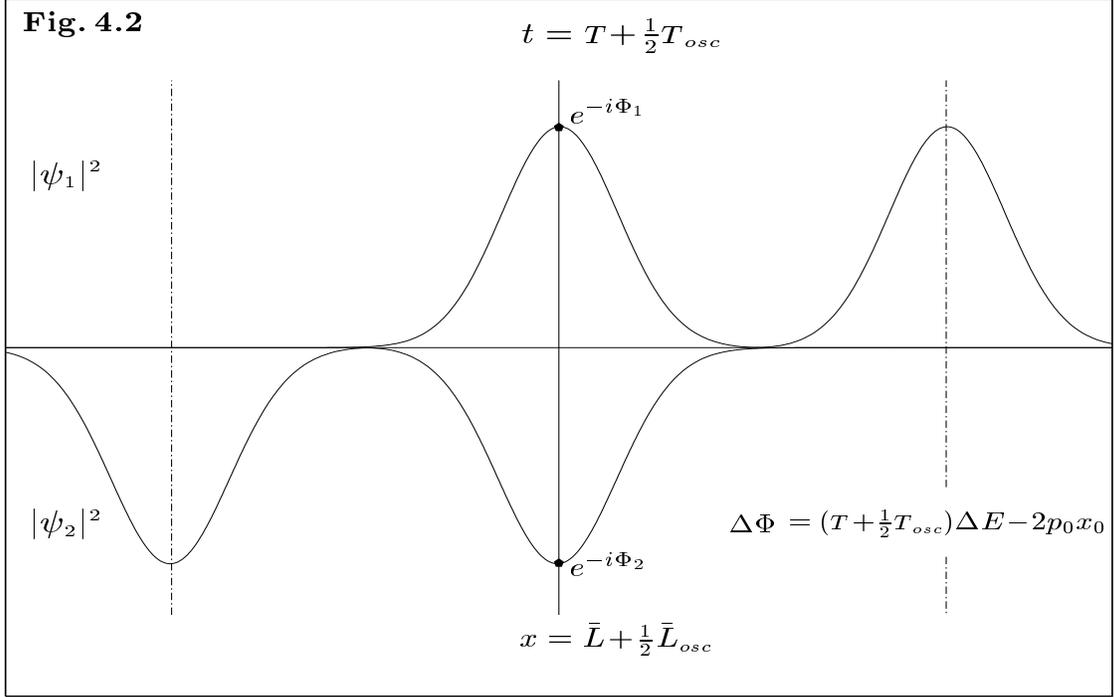
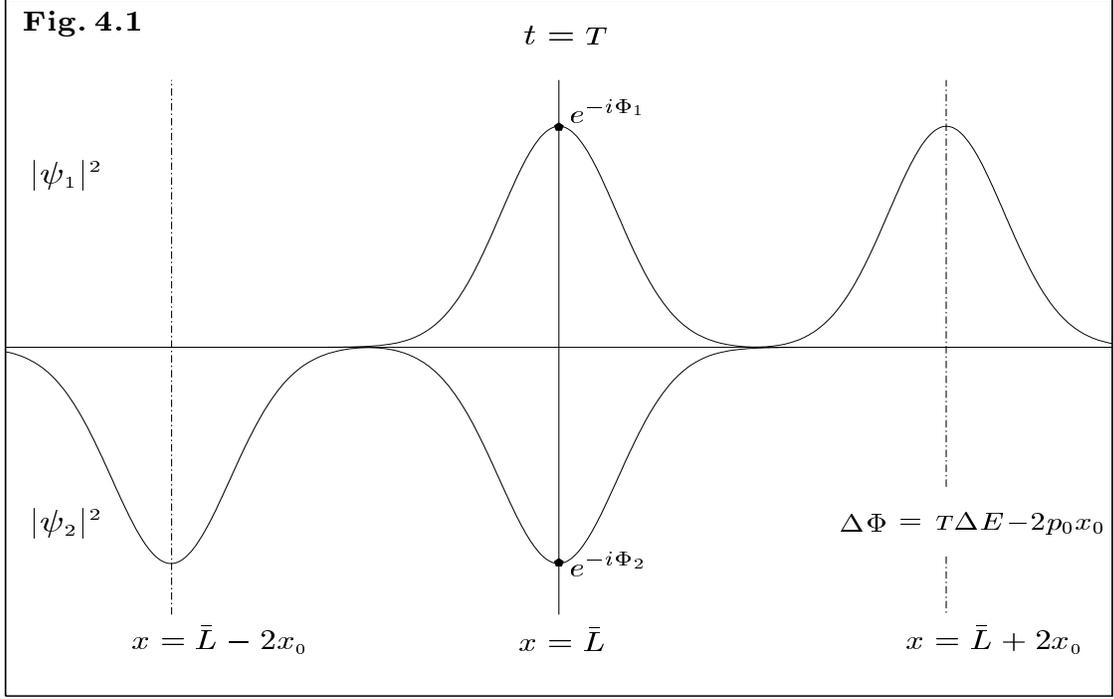
**Fig. 1.** The square modulus of the mass eigenstate coefficients,  $|\psi_1(x, t)|^2$  (upper-half) and  $|\psi_2(x, t)|^2$  (lower-half), is plotted as a function of  $x$  for two times:  $t = 0$  (left-side) and  $t = T$  (right-side). As a model assumption, the wave packets are supposed to be Gaussian functions (with the same width  $a$ ) peaked around  $x = 0$ . At observation time  $T$ , the mass eigenstate wave packets are centered around *different* space-points,  $L_1 = v_1 T$  and  $L_2 = v_2 T$  (spreading effects are neglected). Since  $L_1$  and  $L_2$  are assumed very large compared to  $a$ , the plots of the mass eigenstate wave packets at creation and observation are separated by dots in the  $x$ -axis. At observation time  $T$ ,  $x_f$  is a fixed point in the overlapping region. At this point, the mass eigenstate phases are given by  $\Phi_1(x_f, T) = E_1 T - p_1 v_1 T$  and  $\Phi_2(x_f, T) = E_2 T - p_2 v_2 T$ . The interfering wave packet points at  $(x_f, T)$  correspond to *different* initial wave packet points. Thus, the initial phases  $\Phi_{1,in}(x_f - v_1 T, 0) = -p_1 x_f + p_1 v_1 T$  and  $\Phi_{2,in}(x_f - v_2 T, 0) = -p_2 x_f + p_2 v_2 T$  are automatically included in the wave packet formalism. Consequently, the *standard* result  $T \Delta E - x_f \Delta p$  is obtained.



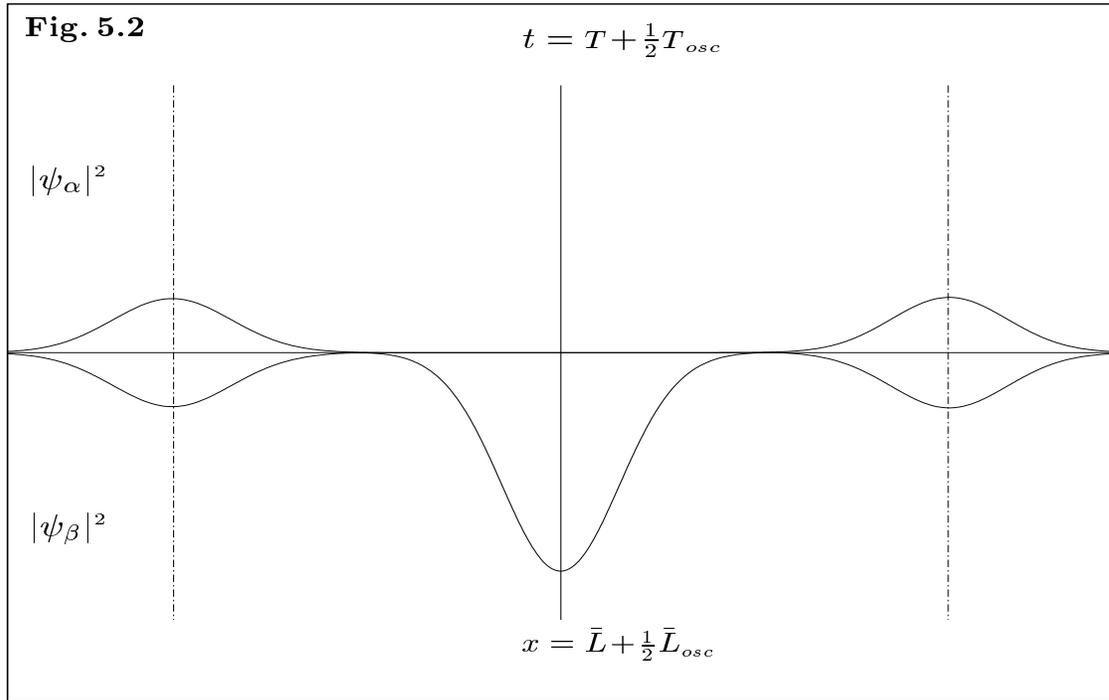
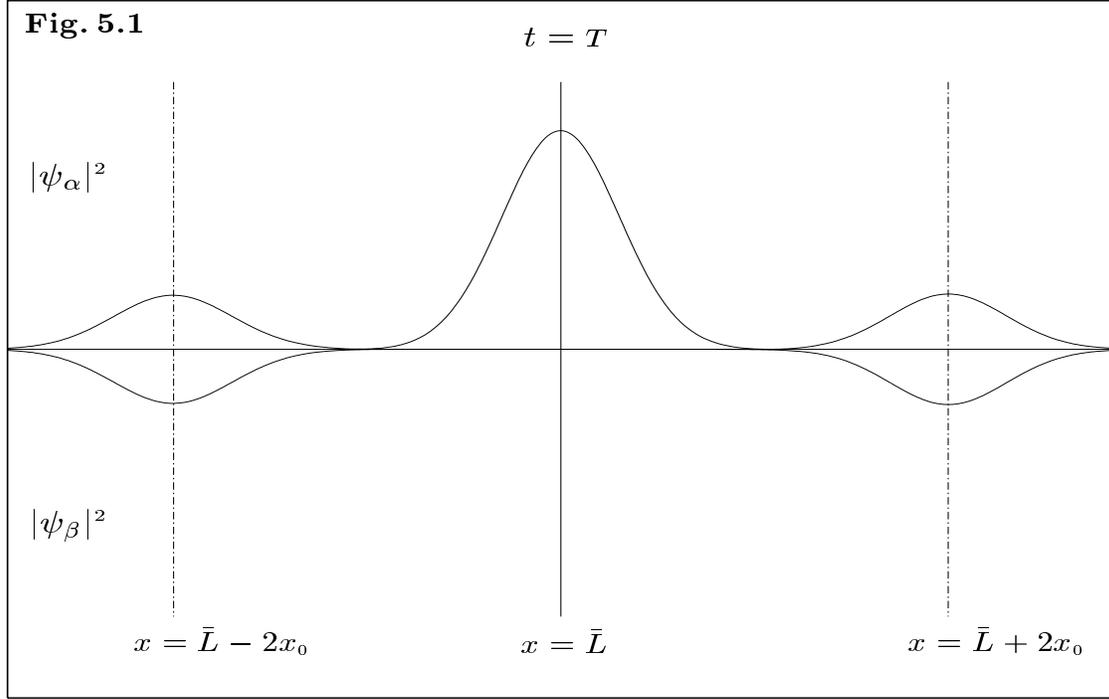
**Fig. 2.** The square modulus of the flavor eigenstate coefficients,  $|\psi_\alpha(x, t; \frac{x}{4})|^2$  (upper-half) and  $|\psi_\beta(x, t; \frac{x}{4})|^2$  (lower-half), is plotted as a function of  $x$  for two times:  $t = 0$  (left-side) and  $t = T$  (right-side). The observation time  $T$  was chosen as an integer number of standard oscillation periods,  $T_{osc} = 4\pi\bar{E}/\Delta m^2$ . In the case  $\Delta p = 0$ , a pure flavor state  $\nu_\alpha$  is created at time  $t = 0$  (upper plot). Slippage (see Fig. 1) leads to a non zero probability to find a flavor state  $\nu_\beta$  at time  $T$ . However, in the case  $\Delta p \neq 0$ , within the context of instantaneous creation, there does not exist *any* time for which the state is a pure flavor eigenstate (lower plot)



**Fig. 3.** The square modulus of the mass eigenstate coefficients,  $|\psi_1(x, t)|^2$  (upper-half) and  $|\psi_2(x, t)|^2$  (lower-half), is plotted as a function of  $x$  for the initial time  $t = 0$ . As a model assumption, the wave packets are supposed to be *generalized* Gaussian functions peaked around  $x = \pm x_0$ .



**Fig. 4.** The square modulus of the mass eigenstate coefficients,  $|\psi_1(x, t)|^2$  (upper-half) and  $|\psi_2(x, t)|^2$  (lower-half), is plotted as a function of  $x$  for two times:  $t = T$  and  $t = T + \frac{1}{2}T_{osc}$ . The choice of  $T = 2x_0/\Delta v$  guarantees that the first peak (from the left) of the  $\nu_1$  mass eigenstate wave packet overlaps with the second peak of the  $\nu_2$  mass eigenstate wave packet. By observing that  $T/T_{osc} \approx x_0\bar{E} \gg 1$  and using Eq. (25), it can be immediately understood why the plots of the mass eigenstate wave packets at the times  $t = T$  and  $t = T + \frac{1}{2}T_{osc}$  practically coincide.



**Fig. 5.** The square modulus of the flavor eigenstate coefficients,  $|\psi_\alpha(x, t; \frac{\pi}{4})|^2$  (upper-half) and  $|\psi_\beta(x, t; \frac{\pi}{4})|^2$  (lower-half), is plotted as a function of  $x$  for two times:  $t = T$  and  $t = T + \frac{1}{2}T_{osc}$ . The choice of  $T = 2x_0/\Delta v$  (which does *not* necessarily coincides with an integer number of standard oscillation period  $T_{osc}$ ) corresponds to a (local) maximum probability to find the flavor state  $\nu_\alpha$  (upper plot). This would not agree with the prediction of the standard formula, because of the presence of the extra constant phase term. Nevertheless, the standard oscillation period is maintained. Indeed, at the later time  $T + \frac{1}{2}T_{osc}$ , we have a (local) maximum probability to find the flavor state  $\nu_\beta$  (lower plot).

# Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho desenvolvemos um formalismo coerente para tratar oscilações de neutrinos com o uso de pacotes de onda num espaço de Hilbert redutível composto por uma soma direta de dois espaços de massa definida  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ . O modelo gaussiano se mostrou adequado dentro das aproximações usadas e condições necessárias de definição de sabor. As aproximações usadas também incluem o efeito de alargamento do PO (“spreading”), até agora não incluso na literatura. Com ela podemos classificar os regimes de oscilação e parâmetros característicos, assim como quantificar condições necessárias para a ocorrência das oscilações dentro de uma aproximação de ordem superior e, logo, com menor erro. Como a probabilidade de transição encontrada é dependente do tempo, um processo de substituição do tempo pela posição foi devidamente legitimado usando-se a propriedade de média da Mecânica Quântica.

Ao longo da formalização, revisamos alguns dos principais problemas envolvidos na oscilação de neutrinos dentro da abordagem de pacotes de onda. Um deles, o problema de normalização das fórmulas de oscilação, é esclarecido juntamente com a controvérsia de integração no tempo ou espaço. Vimos também que o efeito da média sobre o tempo inicial desconhecido é irrelevante se a taxa de emissão não variar muito rapidamente com o tempo. Ilustramos (para o modelo gaussiano) os vários fenômenos encontrados utilizando integração numérica e graficando as densidades de probabilidade para os dois sabores e massas.

Um dos principais problemas restantes envolvendo PsO concerne à não definição inicial de sabor, se quisermos impor grandezas cinemáticas diferentes para os dois auto-estados de massa, o que é favorecida pela cinemática de decaimento real. Embora o efeito possa ser pequeno, sem problemas para o modelamento, ela viola, formalmente, a implicação de que a interação fraca conserva o sabor e o neutrino que sofre apenas essa interação deve ser criado como auto-estado de sabor.

Outra sutileza para o qual deve ser chamada a atenção neste formalismo é a sua não covariância. O uso de pacotes de onda explícitos necessariamente implica que tal PO é característica de um dado referencial. A condição requerida aqui para a criação de um auto-estado de sabor definido, *que inicialmente não exista contribuição de sabor errada na superposição inicial de PO*, vale somente para um referencial em particular. Mesmo que isso aconteça nesse referencial, em qualquer outro, a mesma afirmação não é válida. Nesse espírito, a **criação não instantânea** (sec.V–cap.5) analisa a criação somente no aspecto da fase. Assim, uma definição covariante e coerente com uma criação pura, é necessária para os

auto-estados de sabor.

Para esse fim, parece necessária a inclusão completa da interação fraca envolvida na criação dentro de um formalismo de TQC. Embora, a inclusão direta, em TQC, do fato de que auto-estados de sabor são superposições de auto-estados de massa com massas definidas leve, também, à não criação de sabor definido. Existem abordagens que incluem a interação fraca como feita por Beuthe [43, 38], que também revisa muito bem a maioria das abordagens usando pacotes de onda e ondas planas. Ele classifica as abordagens usando PO em duas categorias gerais: Modelos de Pacotes de Onda Intermediários (Intermediate Wave Packet Approach - IWP) e Modelos de Pacotes de Onda Externos (External Wave Packet Approach - EWP). De acordo com essa classificação, este trabalho e [32, 33] se enquadram na primeira classe. Seria interessante averiguar como os formalismo em TQC e os modelos de Grande Unificação resolvem o problema de definição de auto-estados de sabor.

# Apêndice A

## Expansões em Mecânica Quântica

Fazemos, aqui, um paralelo entre o espaço de coordenadas e o espaço de momento-energia, no caso de uma partícula livre relativística de massa  $m$  e spin nulo. Expandimos as funções de onda dependentes das coordenadas em termos da distribuição em momento e em energia. As respectivas inversas são calculadas utilizando-se transformadas de Fourier. Restringimo-nos a uma dimensão no espaço de coordenadas  $x$  e momentos  $p$  e, às expansões sobre as energias positivas somente.

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp g(p) e^{i[p x - E(p)t]} \quad (\text{A.1})$$

$$g(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x, t) e^{-ipx} \quad (\text{A.2})$$

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dE \tilde{g}(E, x) e^{-iEt} \quad (\text{A.3})$$

$$\tilde{g}(E, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \psi(x, t) e^{iEt} \quad (\text{A.4})$$

$$\tilde{g}(E, x) = \theta(E - m) \frac{E}{\sqrt{E^2 - m^2}} [g(p(E)) e^{ipx} + g(-p(E)) e^{-ip(E)x}] \quad (\text{A.5})$$

$$\tilde{g}(E, x) \approx \frac{E}{\sqrt{E^2 - m^2}} g(p(E)) e^{ip(E)x} , \quad (\text{A.6})$$

quando  $g(p) \approx 0$  para  $p < p_1$ , para algum  $p_1 > m > 0$ .

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp g(p) e^{i[p x - E(p)t]} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp [g(p)e^{ipx} + g(-p)e^{-ipx}] e^{-iE(p)t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E dE}{\sqrt{E^2 - m^2}} \theta(E - m) [g(p(E))e^{ip(E)x} + g(-(E))e^{-ip(E)x}] e^{-iEt}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

onde  $\frac{dp(E)}{dE} = \frac{E}{\sqrt{E^2 - m^2}}$  desde que  $E > m$  e  $p > 0$ .

# Apêndice B

## Propriedades da Gaussiana

Pacotes de onda gaussianos podem ser calculados de maneira simples utilizando algumas propriedades úteis da função gaussiana. Denotamos a função de onda gaussiana (real) pela letra grega  $\Omega(x; a)$ . A função de onda gaussiana usual é obtida quadrando-se essa função  $\Omega^2(x; a)$ , onde  $x$  é a variável e  $a^2$  é a variância. A mesma letra  $\Omega$  será usada para sua extensão complexa (função de onda normalizada) com o acréscimo de um parâmetro  $b$ .

### Propriedades Algébricas:

$$\begin{aligned}
 \Omega(x; a) &= [2\pi a^2]^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{4a^2}} \\
 \Omega^2(x; a) &= [2\pi a^2]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \equiv \text{função gaussiana} \\
 \Omega(x; a; b) &= [2\pi a^2(1+ib)^2]^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(1+ib)}} = (1+ib)^{-\frac{1}{4}} \Omega(x; a\sqrt{1+ib}) \\
 |\Omega(x; a; b)|^2 &= \Omega^2(x; a|1+ib|) \\
 \Omega(x; a; b) &= \Omega(x; a|1+ib|)e^{i\phi} ; \quad \phi = \frac{x^2}{2a^2} \frac{b}{|1+ib|^2} - \frac{1}{2}\varphi , \quad \varphi = \arctan(b) \quad (\text{B.1})
 \end{aligned}$$

### Transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \Omega(p; \frac{1}{2a}) e^{ipx} &= \Omega(x; a) , \\
 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \Omega(p-p_0; \frac{1}{2a}) e^{i(p x - E(p)t)} &\approx e^{i(p_0 x - E_0 t)} \Omega(x - v_0 t; a; \beta_0 t/a^2) , \\
 &\text{quando } E(p) \approx E_0 + v_0(p-p_0) + \beta_0(p-p_0)^2 , \\
 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \Omega^2(x; a) e^{ikx} &= \frac{1}{2a} \Omega(k; \frac{1}{a}) . \quad (\text{B.2})
 \end{aligned}$$

### Normalização e médias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} dx \Omega^2(x; a) = 1 \\ \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x \Omega^2(x; a) = 0 \\ \langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \Omega^2(x; a) = a^2 \end{array} \right. \quad (\text{B.3})$$

**Regra do Produto:**

$$\Omega(p - p_1; \frac{1}{2a_1})\Omega(p - p_2; \frac{1}{2a_2}) = \left[ \frac{2a_1a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} \exp\{-[a^2]_{12}(\Delta p)^2\}\Omega^2(p - \bar{p}; \frac{1}{2\sqrt{\langle a^2 \rangle_{12}}})$$

$$\Omega(x - x_1; a_1)\Omega(x - x_2; a_2) = \left[ \frac{2a_1a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{(\Delta x)^2}{8\langle a^2 \rangle}\}\Omega^2(x - \bar{x}; \langle a^{-2} \rangle_{12}^{-\frac{1}{2}})$$

$$\bar{p} = \langle p; a^2 \rangle_{12} \equiv \frac{p_1a_1^2 + p_2a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \equiv \text{“m\u00e9dia ponderada”}$$

$$\bar{x} = \langle x; a^{-2} \rangle_{12} \equiv \frac{x_1a_2^2 + x_2a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} \equiv \text{“m\u00e9dia ponderada com } (a_1 \leftrightarrow a_2)\text{”}$$

**Notação para m\u00e9dias e diferen\u00e7as:** A notação a seguir ser\u00e1 utilizada ao longo da tese, objetivando a simplifica\u00e7\u00e3o. Essas opera\u00e7\u00f5es s\u00e3o definidas quando existem apenas dois par\u00e2metros distintos.

$$\begin{aligned} \Delta a &\equiv a_1 - a_2 \\ \Delta(ap)_{12} &\equiv a_1p_1 - a_2p_2 \\ \langle a \rangle_{12} &\equiv \frac{a_1 + a_2}{2} \equiv \bar{a} \\ \langle a^{-1} \rangle_{12} &= \frac{a_1 + a_2}{2a_1a_2} \equiv \frac{1}{2[a]_{12}} \\ \langle p; a^2 \rangle_{12} &\equiv \frac{p_1a_1^2 + p_2a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \\ [a]_{12} &\equiv (a_1^{-1} + a_2^{-1})^{-1} = \frac{a_1a_2}{a_1 + a_2} \\ [a^{-1}]_{12} &\equiv \frac{1}{a_1 + a_2} = \frac{1}{2\langle a \rangle_{12}} \\ \sum_{n=1,2} (a_n^2(p - p_n)^2) &= 2\langle a \rangle_{12}(p - \langle p_n; a^2 \rangle_{12})^2 - (\Delta p_{12})^2[a^2]_{12} \end{aligned}$$

# Apêndice C

## Integração e Aproximação de Funções de Onda

Seja uma função de onda escalar, de uma partícula livre relativística de spin nulo, com uma massa bem definida  $m$  e, somente contribuições de energias positivas. Neste caso podemos expandir a função de onda  $\psi(x, t)$  da partícula em termos das autofunções de momento e energia,

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp g(p - p_0) e^{i[p_x - E(p)t]} \\ &= e^{i[p_0 x - E_0 t]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{p} g(\tilde{p}) e^{i[\tilde{p} x - \Delta\tilde{E}(\tilde{p}; p_0)t]} \\ &\approx e^{i[p_0 x - E_0 t]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\delta p}^{-\delta p} dp g(p) e^{i[p_x - \Delta\tilde{E}(p; p_0)t]},\end{aligned}\tag{C.1}$$

onde  $\Delta\tilde{E}(p; p_0) = E(p + p_0) - E(p_0)$  e  $E_0 = E(p_0)$ . Denotamos por  $p_0$  e  $\delta p$  a média e a incerteza no momento da distribuição  $|g(p - p_0)|^2$ ,

$$p_0 = \langle P \rangle, \quad \delta p^2 = \langle (P - p_0)^2 \rangle.$$

Na aproximação acima, assumimos que a distribuição seja suave e bem centrada em um único pico em torno de  $p_0$ , i.e., com um único máximo absoluto na região. Com isso, a integral pode ser aproximada pela integral dentro da região em torno de  $p_0$ , com raio  $\delta p$ <sup>1</sup>. Além disso podemos expandir a dependência da energia no momento em torno desse ponto,

$$\Delta\tilde{E}(p; p_0) = \partial_p E(p_0)p + \frac{1}{2}\partial_p^2 E(p_0)p^2 + O(3) = v(p_0)p + \beta(p_0)p^2 + O(3),\tag{C.2}$$

onde  $\partial_p = \frac{\partial}{\partial p}$ .

Agora, utilizando

$$g(p) = |g(p)|e^{i\phi(p)},$$

---

<sup>1</sup>efetivamente algum fator  $\lambda$  deve ser multiplicado mas ela serve como uma estimativa da ordem de grandeza.

e, assumindo que a função  $\phi(p)$  seja suave e não tenha variações bruscas dentro da região entre  $p_0 \pm \delta p$ , podemos, novamente, aproxima-lo até a segunda ordem,

$$\phi(p) = \phi(0) + \phi'(0)p + \phi''(0)p^2 + O(3) . \quad (\text{C.3})$$

Usando as expansões acima, a integral (C.1) fica,

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &\approx e^{i[p_0 x - E(p_0)t + \phi(0)]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp |g(0)| e^{ip(x - v_0 t + \phi'(0))} \exp\{i(\phi''(0) - \beta_0 t)p^2\} \\ &\approx e^{i[p_0 x - E(p_0)t + \phi(0)]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp |g(0)| e^{ip(x - v_0 t + \phi'(0))} \\ &= e^{i[p_0 x - E(p_0)t]} \chi(x - v_0 t) , \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

onde  $\chi$  denota uma função efetiva da variável indicada. A primeira aproximação acima só é válida se os erros de terceira ordem das expansões (C.2) e (C.3) são desprezíveis. Na segunda aproximação, desprezamos o termo de segunda ordem para chegar na última relação muito simplificadora. O erro que cometemos ao desprezarmos o termo de segunda ordem na fase pode ser estimado por  $\phi''(0)\delta p^2$  e  $\beta(p_0)t\delta p^2$ . Se esses erros são

$$|\phi''(0)|\delta p^2 \ll \pi , \quad |\beta(p_0)t|\delta p^2 \ll \pi , \quad (\text{C.5})$$

então, a oscilação do integrando causado pelo erro na fase é desprezível e a última relação em (C.4) é garantida. A primeira condição acima é necessária para a validade da aproximação na integral. Como a segunda condição depende do tempo, ela define um tempo de alargamento (tempo característico no qual os efeitos de alargamento se tornam importantes),

$$\mathfrak{T} = \frac{\pi}{|\beta(p_0)|\delta p^2} . \quad (\text{C.6})$$

Se o tempo é muito menor que o mesmo, o efeito de alargamento é inexistente. Isso equivale a validade da relação (C.4).

Para extrair relações úteis além da expansão de segunda ordem, ou saber o efeito de spreading, precisamos saber a forma explícita de  $g(p)$ . Um caso interessante em que a integral pode ser resolvida analiticamente é o caso do PO gaussiano.

Nesse caso  $g(p) = \Omega(p; 1/2a)$  é real e  $\phi = 0$ . A primeira integral de (C.4) pode ser efetuada facilmente utilizando as propriedades da gaussiana (apêndice B). A integral resulta em

$$\psi(x, t) \approx e^{i[p_0 x - E(p_0)t]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp \Omega(p; 1/2a) e^{ip(x - v_0 t)} e^{-i\beta_0 t p^2} = e^{i(p_0 x - E_0 t)} \Omega(x - v_0 t; a; \beta_0 t/a^2) , \quad (\text{C.7})$$

que está definida no apêndice B. A condição para aproximação é que o erro de terceira ordem seja desprezível:

$$t \frac{1}{3!} \partial_p^3 E(p_0) \delta p^3 \ll \pi . \quad (\text{C.8})$$

Isso impõe uma condição mais amena para o tempo, comparada a (C.5).

# Apêndice D

## Grandezas Relevantes (médias e diferenças)

Neste apêndice, listamos algumas relações úteis para calcular médias e diferenças de valores. Por simplicidade, todas as grandezas são unidimensionais. A notação que denota médias e diferenças será a seguinte:

$$\bar{a} \equiv \frac{1}{2}(a_1 + a_2), \quad \Delta a \equiv a_1 - a_2, \quad (\text{D.1})$$

onde  $a$  denota qualquer variável bem definido em um dos espaços  $\mathcal{E}_k$ . As variáveis dinâmicas de interesse são: momento, energia e massa ( $p, E, m$ ). Tentaremos escrever todas as grandezas em termos das mesmas. A relação que conecta essas grandezas é dada pela relação de Einstein, que indica que trataremos aqui somente de partículas “on-shell”, com massas:

$$E_1^2 - p_1^2 = m_1^2, \quad E_2^2 - p_2^2 = m_2^2. \quad (\text{D.2})$$

A média e a diferença do produto de duas quantidades satisfaz:

$$\begin{aligned} \Delta(AB) &= \Delta A \bar{B} + \bar{A} \Delta B, \\ \overline{AB} &= \bar{A} \bar{B} + \Delta A \Delta B / 4. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Então,

$$\Delta(E^2 - p^2 - m^2) = 0, \quad \overline{(E^2 - p^2 - m^2)} = 0. \quad (\text{D.4})$$

Por conveniência, definimos

$$\tilde{v} = \frac{\bar{p}}{\bar{E}} \quad (\neq \bar{v}), \quad \tilde{\gamma} = \frac{\bar{E}}{\bar{m}} \quad (\neq \bar{\gamma}), \quad \bar{p}^\mu \bar{p}_\mu - \bar{m}^2 = -\frac{1}{4}[\Delta p^\mu \Delta p_\mu - (\Delta m)^2] \equiv \mu^2. \quad (\text{D.5})$$

Usando (D.3) e (D.2), obtemos

$$2\bar{E}\Delta E = 2\bar{p}\Delta p + \Delta m^2 \Rightarrow \frac{\Delta E}{\bar{E}} = \left(\frac{\bar{p}}{\bar{E}}\right)^2 \frac{\Delta p}{\bar{p}} + \left(\frac{\bar{m}}{\bar{E}}\right)^2 \frac{\Delta m}{\bar{m}} = \tilde{v}^2 \frac{\Delta p}{\bar{p}} + \tilde{\gamma}^{-2} \frac{\Delta m}{\bar{m}}. \quad (\text{D.6})$$

Assim,

$$B_E = [1 - (\frac{\Delta E}{2E})^2]^{-1}, \quad B_p = [1 - (\frac{\Delta p}{2\bar{p}})^2]^{-1}, \quad B_m = [1 - (\frac{\Delta m}{2\bar{m}})^2]^{-1},$$

$$\Delta v = \Delta(\frac{p}{E}) = \tilde{v}(\frac{\Delta p}{\bar{p}} - \frac{\Delta E}{E})B_E = \tilde{v}\tilde{\gamma}^{-2}[\frac{\Delta p}{\bar{p}} - \frac{\Delta m}{\bar{m}}]B_E + B_E \frac{\Delta p}{\bar{p}} \frac{\mu^2}{\bar{m}^2}$$

$$2\Delta\beta = \Delta(\frac{1-v^2}{E}) = \Delta(\frac{1}{E})[1 - \bar{v}^2 - 2\bar{v}^2] = \Delta(\frac{1}{E})[1 - 3\bar{v}^2 - (\frac{\Delta v}{2})^2]$$

$$\bar{v} = \overline{(\frac{p}{E})} = \tilde{v}B_E[1 - \frac{\Delta p}{2\bar{p}} \frac{\Delta E}{2E}]$$

$$\bar{\gamma} = \tilde{\gamma}B_m[1 - \frac{\Delta E}{2E} \frac{\Delta m}{2\bar{m}}]$$

$$\overline{E^2} = \bar{E}^2 + (\Delta E/2)^2$$

$$\frac{\mu^2}{\bar{m}^2} = \tilde{v}^2(\frac{\Delta m}{2\bar{m}} - \frac{\Delta p}{2\bar{p}})^2[1 - \tilde{\gamma}^{-2}(\frac{\Delta m}{2\bar{m}})^2 - \tilde{v}^2(\frac{\Delta p}{2\bar{p}})^2]^{-1}$$

$$\tilde{\gamma}^2(1 - \tilde{v}^2) = \frac{\bar{E}^2}{\bar{m}^2}(1 - \frac{\bar{p}^2}{E^2}) = 1 + \frac{\mu^2}{\bar{m}^2}$$

Note que  $\frac{|\Delta a|}{2a} < 1$ , sempre! se  $a_1, a_2 > 0$ .

$\mu^2$  denota quanto o quadrivector  $\bar{p}^\mu$  e  $\Delta p^\mu$  são “off-shell” em relação a  $\bar{m}$  e  $|\Delta m|$ .

Repare que, se  $\frac{\Delta p}{\bar{p}} \approx \frac{\Delta m}{\bar{m}} \implies \Delta v \approx 0, \mu^2 \approx 0$

**Caso  $\Delta p = 0$ :**

$$\Delta E(p) = \frac{\Delta m^2}{2E(p)} = \frac{\bar{m}}{E(p)} \Delta m$$

$$\Delta v(p) = -\bar{v}(p) \frac{\Delta E(p)}{E(p)}$$

$$2\Delta\beta(p) = \Delta(\frac{1}{E})\{1 - \bar{v}^2[3 + (\frac{\Delta E}{2E})^2]\}$$

**Derivadas de  $E(p)$ :**

$$\partial_p E(p) = v(p) = \frac{p}{E(p)}$$

$$\partial_p^2 E(p) = \frac{m^2}{E(p)^3}$$

$$\partial_p^3 E(p) = -3 \frac{m^2 p}{E(p)^5}$$

# Apêndice E

## Erro da Associação distância $\leftrightarrow$ tempo

Fora visto na sec.4.1.3 que o procedimento de associar o tempo de percurso do neutrino  $t$  à distância percorrida  $L$  a partir de  $L = \bar{v}t$  (sec.2.8) é uma aproximação boa na probabilidade de conversão de sabor, se a mesma varia pouco dentro do erro cometido na associação  $\delta t = \delta x/\bar{v}$ . Se isso não acontece, temos que tomar uma média sobre esse intervalo de tempo. Contudo, ao invés de tomar uma média homogênea como em (4.26), uma estratégia mais correta seria tomar uma média sobre uma distribuição localizada em  $t$  centrada em  $L/\bar{v}$  e erro dado pela incerteza na posição  $\delta x/\bar{v}$ , devido ao erro estatístico a nível clássico na associação  $L \approx \bar{v}t$ . Na realidade, formalmente o erro se deve à distribuição na posição  $|\psi(x, t)|^2$  dependente do parâmetro  $t$ . A incerteza na posição  $\delta x$  é quantificada pelo desvio quadrático médio  $\delta x^2(t) = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle$ , que em geral depende não trivialmente do tempo. Mas como essa dependência é, em geral, suave, podemos aproxima-la por  $L/\bar{v}$ . Desse modo, a distribuição estatística de associação do tempo pela distância pode ser descrita por uma gaussiana

$$D(t) = \Omega^2(t - L/\bar{v}; \sigma_t) , \quad \sigma_t = \frac{1}{\bar{v}}\delta x(t = L/\bar{v}).$$

Aplicaremos essas duas relações ao cálculo da probabilidade de conversão de sabor. Antes disso, porém, calculamos, para um estado que inicialmente tem sabor aproximado  $f_1$ , o valor médio da posição de sabor  $f_2$ :

$$L = x_{f_2} \approx \bar{v}t$$

(calculado na sec.3.4). O erro poderia ser dado por  $\langle\langle \Delta X_{f_2} \rangle\rangle / \langle\langle \Gamma_{f_2} \rangle\rangle$ , mas ela possui termos oscilatórios, além de ser de cálculo difícil. Ao invés disso, usaremos o desvio quadrático médio total, que independe do sabor (2.28):

$$\sigma_x^2 = \langle\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle\rangle = \bar{a}^2 + \frac{1}{2}\Delta(a^2) \cos 2\theta + \sin 2\theta \left(\frac{\Delta vt}{2}\right)^2 . \quad (\text{E.1})$$

O aparecimento do ângulo de mistura é natural devido à influência das amplitudes na superposição. Por exemplo, a posição média independente do sabor é dada por

$$\langle\langle X \rangle\rangle = \bar{v}t + \cos 2\theta \Delta vt / 2 . \quad (\text{E.2})$$

Naturalmente, se  $\theta \rightarrow 0$ , então  $\langle\langle X \rangle\rangle \rightarrow v_1 t$ , já que apenas o autoestado  $|m_1\rangle$  contribui para a sobreposição nesse limite.

A probabilidade média de conversão de sabor é dada, então, por

$$\langle \mathcal{P}_{f_1 \rightarrow f_2}(L/\bar{v}) \rangle = \int d\tau D(\tau) \mathcal{P}_{f_1 \rightarrow f_2}(\tau) . \quad (\text{E.3})$$

Podemos efetuar analiticamente esse cálculo para o modelo gaussiano, com larguras iniciais iguais ( $\Delta a = 0$ ) entre os PO de massa e ângulo de mixing máximo ( $\theta = \pi/4$ ), dentro da aproximação de alargamento desprezível.

O termo de oscilação, o único que depende do tempo, é dado, nesse caso, por

$$\mathcal{A}_{12}(t) = e^{-(a\Delta p)^2/2} e^{-i\Delta\Phi(t)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta vt}{2a}\right)^2\right\} .$$

O termo de oscilação médio será

$$\langle \mathcal{A}_{12}(L/\bar{v}) \rangle = [1 + \epsilon^2]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sigma_x^2 k^2} e^{-i2\pi L/L'_{\text{osc}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{L}{L_{\text{sep}}}\right)^2\right\} , \quad (\text{E.4})$$

onde

$$\epsilon = \frac{\Delta v}{2\bar{v}} [1 + (\frac{\Delta v L}{2\bar{v}a})^2]^{\frac{1}{2}} \approx \frac{\Delta v}{2\bar{v}} , \quad L'_{\text{osc}} = \bar{v}T_{\text{osc}}[1 + \epsilon^2] \approx \bar{v}T_{\text{osc}} , \quad L_{\text{sep}} = \bar{v}T_{\text{sep}}[1 + \epsilon^2]^{\frac{1}{2}} , \quad k = \frac{2\pi}{L'_{\text{osc}}} .$$

Esse é um resultado similar ao encontrado por Giunti [33]. Nessa fórmula de oscilação temos todos os efeitos possíveis dentro das aproximações usadas. Os efeitos de oscilação de sabor e perda de coerência devido à separação do PO já eram previstos e, adicionalmente, temos o requerimento explícito de que o comprimento de oscilação  $L_{\text{osc}}$  não deve ser menor que a incerteza na posição  $\sigma_x$ ; o expoente  $(k\sigma_x)^2$  não estava presente na probabilidade dependente somente do tempo.

# Bibliografia

- [1] R. N. Mohapatra, “*Theories of Neutrino Masses and Mixings*”, To appear in “Current Aspects of Neutrino Physics” Editor: D. Caldwell (Springer-Verlag); *pre-print*: hep-ph/9910365.
- [2] R. N. Mohapatra and P. B. Pal, *Massive Neutrinos In Physics And Astrophysics*, World Scientific (1998)
- [3] P. Fisher, B. Kayser, K. S. McFarland, “*Neutrino Mass and Oscillation*”, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 49 (1999) 481; pre-print: hep-ph/9906244
- [4] B. Kayser, “*Neutrino Mass*”, “Review Of Particle Physics,” Eur. Phys. J. C **15**, 344 (2000).
- [5] K. Hagiwara *et al.* [Particle Data Group Collaboration], “Review Of Particle Physics,” Phys. Rev. D **66**, 010001 (2002).
- [6] SuperKamiokande official web-page: <http://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/sk/super-kamiokande.html>
- [7] T. Kajita and Y. Totsuka, “*Observation of atmospheric neutrinos*”, Rev. Mod. Phys. **73**, 85 (2001).
- [8] J. N. Bahcall, “*An Introduction to Solar Neutrino Research*”, in “Physics of Leptons,” Proceedings of the XXV SLAC Summer Institute on Particle Physics. August 4-15, 1997. SLAC R-528, ed. A. Breaux, J. Chan, L. DePorcel, and L. Dixon (National Technical Information Service, U.S. Department of Commerce, 1998), pp. 181-199; hep-ph/9711358. web-page: <http://www.sns.ias.edu/~jnb/>
- [9] veja, por exemplo, Sci. Am. **279**, 18-20 (Agosto 1998); SuperKamiokande colarboration: Y. Fukuda *et al.*, “*Measurement of a Small Atmospheric  $\nu_\mu/\nu_e$  Ratio*,” Phys. Rev. Lett. **81**, 1562-1565 (1998);
- [10] K. S. Hirata, T. Kajita, T. Kifunte *et al.*, “*Search for Correlation of Neutrino Events with Solar-Flares in Kamiokande*”, Phys. Rev. Lett **61** (23): 2653-2656 (1988).
- [11] S. H. Ahn *et al.* [K2K Collaboration], “*Detection of accelerator produced neutrinos at a distance of 250-km*,” Phys. Lett. B **511**, 178 (2001) [arXiv:hep-ex/0103001]. Veja também o site oficial: <http://neutrino.kek.jp/>

- [12] M. H. Ahn *et al.* [K2K Collaboration], “*Indications of neutrino oscillation in a 250-km long-baseline experiment*,” Phys. Rev. Lett. **90**, 041801 (2003) [arXiv:hep-ex/0212007];
- [13] G. T. Ewan *et al.*, “*The Sudbury Neutrino Observatory*,” Nucl. Inst. Meth. **A134**, 373-379 (1992); veja também J. Boger *et al.*, “*The Sudbury Neutrino Observatory*,” Nucl. Inst. Meth. Phys. Res., Sect. **A449**, 172 (2000), nucl-ex/9910016. veja também SNO website: <http://sno.phys.queensu.ca>
- [14] Q. R. Ahmad *et al.* [SNO Collaboration], “*Measurement of day and night neutrino energy spectra at SNO and constraints on neutrino mixing parameters*,” Phys. Rev. Lett. **89**, 011302 (2002) [arXiv:nucl-ex/0204009]; “*Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory*,” Phys. Rev. Lett. **89**, 011301 (2002) [arXiv:nucl-ex/0204008].
- [15] Standard Solar Model: J. N. Bahcall, M. H. Pinsonneault, and S. Basu, Atrophys. J. **555**, 990 (2001); também, Phys. Lett. B **433**, 1 (1998).
- [16] KamLAND Collaboration, “*First Results from KamLAND: Evidence for Reactor Anti-Neutrino Disappearance*,” Phys. Rev. Lett. **90**, 021802 (2003); *pre-print*: hep-ex/0212021.
- [17] L. M. Brown, “*The Idea of Neutrino*”, Physics Today, 23 (Sep 1978).
- [18] para mais detalhes sobre história da origem dos neutrino: W. C. Haxton and B. R Holstein, “*Neutrino Physics*”, Am. J. Phys. **68** (1), January 2000.
- [19] C. L. Cowan Jr., F. Reines, F. B. Harrison, E. C. Anderson, and F. N. Hayes, “*Detection of the Free Neutrino: A confirmation*,” Science **124**, 103-1-4 (1962).
- [20] S. Weinberg, “*Recent Progress in gauge theories of the weak, eletromagnetic and strong Interactions*”, Rev. Mod. Phys. **46**, 255 (1974);
- [21] Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) official web-page: [http://map.gsfc.nasa.gov/m\\_mm/mr\\_limits.html](http://map.gsfc.nasa.gov/m_mm/mr_limits.html); veja também: C. L. Bennett *et al.*, “*First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results*,” [arXiv:astro-ph/0302207].
- [22] E. S. Abers and B. W. Lee, “*Gauge Theories*”, Phys. Rep. **9**, 1 (1973).
- [23] B. Pontecorvo, “*Mesonium and Antimesonium*”, JETP **6**, 429-431 (1958) [Zh.Eksp.Teor.Fiz. **33**,549 (1957)]; “*Inverse Beta Processes and Nonconservation of Lepton Charge*”, JETP **7**, 172-173 (1958).
- [24] V. Gribov and B. Pontecorvo, “*Neutrino Astronomy and Lepton Charge*”, Phys. Lett B **28** 493 (1969).
- [25] Y. Takeuchi, Y. Tazaki, S. Y. Tsai and T. Yamazaki, “*Physics involved in neutrino oscillation*”, Mod. Phys. Lett. A **14** (33), 2329 (1999) [arXiv:hep-ph/9809558].

- [26] S. De Leo, G. Ducati and P. Rotelli, “*Remarks upon the mass oscillation formulas*”, Mod. Phys. Lett. A **15**, 2057 (2000) [arXiv:hep-ph/9906460].
- [27] H. J. Lipkin, “*Theories of non-experiments in coherent decays of neutral mesons*”, Phys. Lett. B **348**, 604 (1995), hep-ph/9501269;
- [28] R. G. Winter, “*Neutrino Oscillation Kinematics*”, Lett. Nuovo Cim. **30**, 101 (1981).
- [29] Y. Takeuchi, Y. Tazaki, S. Tsai, and T. Yamazaki, “*How do Neutrinos Propagate ? Wave-Packet Treatment of Neutrino Oscillation*”, Prog. Theor. Phys. **105**, 471 (2001) [arXiv:hep-ph/0006334].
- [30] K Kiers and N Weiss, “*Neutrino Oscillation in a model with a source and detector*”, Phys. Rev. D **24**, 4318 (1998).
- [31] B. Kayser, “*On The Quantum Mechanics Of Neutrino Oscillation,*” Phys. Rev. D **24**, 110 (1981).
- [32] C. Giunti, C. W. Kim and U. W. Lee, “*When do neutrinos really oscillate? Quantum mechanics of neutrino oscillations*”, Phys. Rev D **44**, 3635 (1991).
- [33] C. Giunti, and C. W. Kim, “*Coherence of neutrino oscillations in the wave packet approach*” Phys. Rev D **58**, 017301 (1998).
- [34] C. W. Kim and A. Pevsner, “*Neutrinos in Physics and Astrophysics*”, (Harwood Academic Publishers, Langhorne, 1993).
- [35] S. Nussinov, “*Solar Neutrinos And Neutrino Mixing*”, Phys. Lett. **63** B (2), 201 (1976).
- [36] Y. Grossman and H. J. Lipkin, “*Flavor oscillations from a spatially localized source: A simple general treatment*”, Phys. Rev. D **55**, 2760 (1997) [arXiv:hep-ph/9607201].
- [37] M. Zralek, “*From Kaons to neutrinos: Quantum Mechanics of Particle oscillations*”, hep-ph/9810543 (1998).
- [38] M. Beuthe, “*Oscillations of neutrinos and mesons in quantum field theory*”, Phys. Rept. **375**, 105 (2003); [arXiv:hep-ph/0109119]. Also “*Propagation et oscillations en theorie des champs*”, PhD thesis in French (2000); hep-ph/0010054.
- [39] S. M. Bilenky and S. T. Petkov, “*Massive neutrinos and neutrino oscillations*”, Rev. Mod. Phys. **59**, 671 (1987).
- [40] C. Giunti, C. W. Kim and U. W. Lee, “*Remarks on The Weak States of Neutrinos*” Phys. Rev. D **45**, 2414 (1992).
- [41] C. Giunti, C. W. Kim, J. A. Lee and U. W. Lee, “*On The Treatment Of Neutrino Oscillations Without Resort To Weak Eigenstates,*”, Phys. Rev. D **48**, 4310 (1993); [arXiv:hep-ph/9305276].

- [42] C. Giunti, C. W. Kim and U. W. Lee, “*When do neutrinos cease to oscillate?*” Phys. Lett B **421**, 237 (1998).
- [43] M. Beuthe, “*Towards a unique formula for neutrino oscillations in vacuum*”, Phys. Rev. D **66** 013003 (2002); hep-ph/0202068.
- [44] C. Giunti, “*The phase of neutrino oscillations*” (2002), hep-ph/0202063.
- [45] C. Giunti and C. W. Kim, “*Quantum mechanics of neutrino oscillations*”, Found. Phys. Lett. **14**, 213 (2001) [arXiv:hep-ph/0011074 (2000)].
- [46] K Kiers, S Nussinov and N Weiss, “*Coherence effects in neutrino oscillations*”, Phys. Rev. D **53**, 537-547 (1996).
- [47] A. Loeb, “*Collisional Incoherence In Neutrino Line Emission,*” Phys. Rev. D **39**, 1009 (1989).
- [48] L. B. Okun and I. S. Tsukerman, “*Comment on equal velocity assumption for neutrino oscillations,*” Mod. Phys. Lett. A **15**, 1481 (2000) [arXiv:hep-ph/0007262].
- [49] R. Fong and E. G. P. Rowe, “*The bra-ket Formalism for Free Relativistic Particles*”, Phys.**46**, 559-576 (1968).
- [50] E. P. Wigner, “*On unitary representations of Inhomogeneous Lorentz group*”, Ann. Math. **40**, 149-204 (1939).
- [51] E. P. Wigner, “*Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group Including Reflections*” in *Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics*, Ed. F Gürsey (Gordon & Breach, New York 1964).
- [52] T. D. Newton and E. P. Wigner, “*Localized States for Elementary Systems*”, Rev. Mod. Phys. **21**, 400-406 (1949).
- [53] A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Dover (1980).
- [54] T. Cohen, *Quantum Mechanics* (John Wiley & Sons, 1977), p.72, V.1.
- [55] J D Bjorken and S D Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, New York, NY, McGraw-Hill (1964).
- [56] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, International Series in Pure and Applied Physics, McGraw-Hill (1980).
- [57] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics* (John Wiley & Sons, 1970), p.95.
- [58] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, 1994), p.79.
- [59] J. von Neumann, *Mathematical foundations of quantum mechanics*, Princeton Univ., Princeton, 1955.
- [60] C. A. A. de Carvalho and H. M. Nussenzveig, “*Time delay*”, Phys. Rep. **364** 2, 83-174 (June 2002).