

# Universidade Estadual de Campinas Instituto de Física 'Gleb Wataghin'

## Órbitas Periódicas em Conjuntos Homoclínicos a um Parâmetro

Aluno :Francisco Arpad Bajay

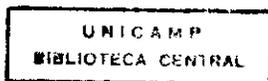
Orientador :Prof. Dr. Marcus Aloizio Martinez de Aguiar

Tese submetida ao Instituto de Física 'Gleb Wataghin' da  
Universidade Estadual de Campinas, como parte dos  
requisitos para obtenção do grau de Mestre em Ciências

07 de Julho de 1992

Este exemplar corresponde à redação  
final da Tese defendida pelo aluno  
Francisco Arpad Bajay e aprovada  
pela Comissão Julgadora.

7/1/93



A handwritten signature in black ink, appearing to be "M. A. de Aguiar", written over a horizontal line.

UNIDADE

IF

N.º CHAMADA:

T/UNICAMP/M

B 1670

V.

T.º: 18693

PROJ. 264/93

C

D

X

PREÇO R\$ 100.000,00

DATA 06/02/93

N.º CPD

TM/871/IF

EM000376051.

**Órbitas Periódicas  
em  
Conjuntos Homoclínicos  
a um Parâmetro**

dedico esse trabalho a

meu pai (in memoriam),  
minha mãe,  
Regina  
e Larissa.

# Agradecimentos

Ao prof. Marcus A. M. Aguiar pela orientação,  
Aos profs. do grupo; A. M. Ozorio de Almeida, K. Furuya e J. A. Roversi,  
Aos colegas do grupo; Gian, Mário, Werner, Sandra, Manuel, César, Marcus  
e Fausto,  
À secretaria da pós-graduação; Maria Inês, Armando e Cidinha,  
Aos colegas da pós-graduação: Boselli, Caluzi, João Paulo e Elis,  
E ao apoio financeiro do CNPQ e da CAPES.

# Resumo

Mostramos nesse trabalho, através de métodos numéricos, algumas estruturas relevantes presentes na bifurcação genérica de órbitas periódicas de Sistemas Hamiltonianos, que tem ângulo de estabilidade  $2\pi$ . Essas estruturas são os pontos fixos, suas separatrizes e as órbitas periódicas do mapa de Poincaré associado.

O mapa que descreve essa situação, denominado **Mapa de Meyer**, foi encontrado por K. R. Meyer em 1970 [24], e é o modelo adotado neste estudo.

Como o **Mapa de Meyer** representa uma situação genérica, esses resultados se aplicam a qualquer Sistema Hamiltoniano, com dois graus de liberdade, que possua esse tipo de bifurcação.

# Abstract

In this work we calculate numerically, some important structures present in the generic bifurcation of a periodic orbits of a Hamiltonian systems with stability angle of  $2\pi$ . These structures are the fixed points, the separatrices and the periodic orbits of the associated Poincaré map.

The map which describes this situation, known as **Meyer's Map**, was found by K. R. Meyer in 1970 [23], and is the model used in this work.

Since, **Meyer's Map** represents a generic situation, the results of this work applies to any Hamiltonian System possessing this kind of bifurcation.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Sistemas Dinâmicos</b>	<b>13</b>
2.1	Pontos fixos em Mapas que preservam área . . . . .	15
2.2	Seções de Poincaré . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Formas Normais</b>	<b>27</b>
3.1	Forma Normal de Birkhoff . . . . .	28
3.2	Bifurcações de Órbitas Periódicas . . . . .	34
3.3	Forma Normal de Meyer . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Métodos numéricos</b>	<b>43</b>
4.1	Cálculo dos Pontos Fixos . . . . .	43
4.2	Cálculo das Separatrizes . . . . .	45
4.3	Cálculo das Órbitas Periódicas . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>51</b>
5.1	Pontos Fixos . . . . .	52
5.2	Separatrizes . . . . .	53
5.3	Órbitas Periódicas . . . . .	60
5.4	Variação do parâmetro $\varepsilon$ . . . . .	67
5.5	Órbitas periódicas de múltiplas voltas . . . . .	69

5.6	Sobre a complexidade do Emaranhado Homoclínico . . . . .	79
6	<b>Conclusões</b>	<b>81</b>
7	<b>Bibliografia</b>	<b>83</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A Mecânica Clássica foi construída ao longo dos últimos séculos por pioneiros ilustres como Galileu, Newton, Lagrange, Hamilton e Poincaré entre outros, cujo renome ultrapassa os limites da Física ou da Matemática, tornando-os universalmente conhecidos. Durante esse período, deu-se grande ênfase à busca de soluções exatas e fechadas, que seriam supostamente encontradas mais cedo ou mais tarde para todos os problemas.

Conseqüentemente, nas primeiras décadas do século XX, difundiu-se a idéia errônea da Mecânica Clássica como um conhecimento completo e acabado. Aliado a esse fato, a revolução provocada pela Mecânica Quântica desviou em grande parte os interesses para esse novo campo.

Mesmo diante desse ambiente não propício, surgiram contribuições significativas através de Birkhoff e posteriormente Kolgomorov, Arnold, Moser, Meyer e outros que fizeram renascer o estudo da chamada Mecânica Clássica, porém numa nova ótica em que as soluções exatas davam lugar a busca da compreensão qualitativa das soluções (formas normais, estabilidade, bifurcações, órbitas periódicas, etc).

Especialmente nas três últimas décadas, um grande impulso foi dado no estudo dos sistemas dinâmicos não lineares, freqüentemente associado a uma

nova revolução, comparado à revolução da Mecânica Quântica.

Esse avanço tem se dado em duas frentes que se complementam, ou seja, o avanço da matemática pura de um lado e as simulações numéricas de outro.

As aproximações lineares, tão largamente empregadas, passaram a ser usadas com precaução, pois os termos não lineares desprezados carregam consigo informações relevantes, que vão muito além de pequenas correções nos resultados, podendo significar diferenças exponenciais como nos sistemas instáveis e também diferenças qualitativas, como o surgimento de bifurcações e caos, que não tem similaridade nos sistemas lineares.

Por isso o estudo de sistemas não lineares é de vital importância pois retrata mais realisticamente o comportamento da natureza, que é essencialmente não linear.

Vale a pena transcrever do artigo de M. V. Berry 1978 [5] em versão livre um trecho do pensamento filosófico de Maxwell escrito em 1873.

*É uma doutrina metafísica que de antecedentes iguais seguem conseqüências iguais. Nada pode contradizer isto. Mas isto não é muito útil num mundo como este, no qual antecedentes iguais jamais ocorrem novamente e nada se repete duas vezes ...*

*O axioma físico similar é " que de antecedentes semelhantes seguem conseqüências semelhantes". Mas aqui nós passamos de identidade para semelhança, de precisão absoluta para aproximação mais ou menos grosseira. Há certas classes de fenômenos ... nos quais um pequeno erro nos elementos introduz um pequeno erro nos resultados. O curso dos eventos nestes casos é estável.*

*Há outras classes de fenômenos que são mais complicados, nos quais a instabilidade pode ocorrer; o número destes casos aumenta de maneira extremamente rápida quando aumentam o número de variáveis.*

*... influências cujas magnitudes físicas são muito pequenas*

*para serem consideradas, podem produzir resultados da maior importância ...*

*Se, portanto, esses cultivadores da ciência física, que de notória inteligência, deduzem suas concepções dos físicos ... são levados na persuasão da ciência arcana ao estudo das singularidades e instabilidades, em lugar da continuidade e estabilidade das coisas, a evolução do conhecimento natural pode levar a remover este preconceito em favor do determinismo que parece surgir assumindo que a ciência física do futuro é uma mera imagem ampliada da do passado.*

Mais de um século depois, as palavras de Maxwell ainda soam como se fossem ditas hoje.

Os sistemas não lineares são de difícil tratamento e de grande complexidade, até mesmo para os matemáticos familiarizados com a linguagem.

Por outro lado, para os físicos a linguagem da matemática pura é pouco familiar e freqüentemente o rigor matemático é colocado em segundo plano, dando lugar às evidências numéricas que apontam na direção do comportamento procurado ou em estudo.

A evolução do conhecimento sobre o comportamento irregular e aperiódico depende fundamentalmente da busca de modelos matemáticos que expressem comportamentos genéricos aliados ao uso de computadores, e é nesse contexto que se insere o presente trabalho.

Sistemas complexos possuem estruturas simples que não desaparecem mesmo diante de perturbações, essas estruturas são as órbitas periódicas, que em geral formam um conjunto denso e carregam consigo grande parte da informação do sistema como um todo.

O objetivo do presente trabalho é mostrar numericamente alguns aspectos do comportamento de órbitas periódicas, bifurcações e o emaranhado homoclínico em um modelo conhecido como forma normal de Meyer.

Essa forma normal (**Mapa de Meyer**) foi escolhida porque descreve a bifurcação mais simples de uma órbita periódica que ocorre em Sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade. Além disso, esse mapa apresenta um conjunto homoclínico, que é o elemento gerador de Caos em sistemas não-lineares, controlado por apenas um parâmetro.

Do ponto de vista quântico, também existe interesse em se encontrar órbitas periódicas de conjuntos homoclínicos. De acordo com a teoria de A. M. Ozorio de Almeida [12], essas órbitas podem contribuir de forma construtiva e gerar auto-estados semiclássicos quando somadas via fórmula de Gutzwiller [20]. Dessa forma, o conhecimento das órbitas periódicas, nessas regiões do espaço de fases, torna-se crucial para uma melhor compreensão tanto da dinâmica clássica quanto dos aspectos semi-clássicos do seu espectro de energias.

Esta dissertação está desenvolvida em três partes. A primeira é uma revisão teórica de alguns elementos básicos indispensáveis à compreensão do nosso objetivo; tais como: espaço de fases, conjunto homoclínico, seções de Poincaré e formas normais. Esses e outros tópicos podem ser encontrados na literatura em diversos níveis. As referências [9], [8], [16] e [17] tratam o assunto de forma elementar, enquanto que abordagens mais completas e gerais estão em livros como os de R. L. Devaney [15], A. J. Lichtenberg e M. A. Lieberman [22] ou J. Guckenheimer [19] entre muitos outros. A revisão de alguns desses pontos é feita nos capítulos 2 e 3. A segunda parte é uma descrição dos métodos numéricos empregados, especialmente o criado por M. Baranger [4] para se encontrar órbitas periódicas, e consta do capítulo 4. E finalmente a terceira parte se compõe dos resultados obtidos, como o traçado das separatrizes, na qual encontramos um grande número de órbitas periódicas, mostramos algumas bifurcações, e além dos vários exemplos fazemos uma classificação ainda que parcial das órbitas periódicas do conjunto homoclínico, que pode ser útil em estudos futuros envolvendo quantizações,

desenvolvidos no capítulo 5 e finalmente as conclusões e perspectivas que estão no capítulo 6.

# Capítulo 2

## Sistemas Dinâmicos

Sistemas Dinâmicos são todos os sistemas que se modificam com o passar do tempo de tal forma que a nova situação sempre depende da situação anterior. Essa evolução pode dar-se de duas formas; a primeira é de forma contínua, ou seja, sempre podemos encontrar um ponto que é a evolução temporal de um ponto inicial, tão próximo quanto se queira do ponto inicial, de forma que a sua trajetória seja contínua; a segunda forma é aquela em que um ponto salta do ponto inicial ao ponto seguinte, sem passar pelos pontos intermediários, nesse caso temos um sistema discreto, que é o sistema adequado para se estudar mapas.

Um tratamento rigoroso e detalhado pode ser encontrado em V. I. Arnold [1] ou em A. M. Ozorio de Almeida [13] entre outros.

Os sistemas dinâmicos contínuos podem ser representados por  $n$  equações diferenciais de primeira ordem em  $n$  variáveis.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t) \\ &\vdots = \quad \quad \quad \vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Se o sistema não depende explicitamente do tempo ele é denominado **autônomo**, e os eixos  $X_1, X_2, \dots, X_n$  formam um espaço de dimensão  $R^n$  denominado **espaço de fases**.

O estado do sistema num instante "t" é representado pelo vetor

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

enquanto o vetor

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

define um **campo vetorial**.

Uma solução do sistema 2.1 é dada por um ponto inicial no espaço de fases

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

a partir da qual podemos encontrar uma função do tipo

$$X(x_0, t) = \begin{pmatrix} x_{10}, t \\ x_{20}, t \\ \vdots \\ x_{n0}, t \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

que satisfaz o sistema, ou seja, temos o fluxo no espaço de fases completamente definido.

Os sistemas dinâmicos discretos, por outro lado, são definidos por equações do tipo

$$\begin{aligned}x_{n+1}^1 &= f_1(x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N) \\x_{n+1}^2 &= f_2(x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N) \\&\vdots = \quad \quad \quad \vdots \\x_{n+1}^N &= f_N(x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N)\end{aligned}\tag{2.6}$$

Novamente dada uma condição inicial  $\{x_0^i\}_{i=1,\dots,N}$ , obtemos sua trajetória calculando  $\{x_1^i\}_{i=1,\dots,N}$ ,  $\{x_2^i\}_{i=1,\dots,N}$ , etc.

## 2.1 Pontos fixos em Mapas que preservam área

Uma classe importante de sistemas dinâmicos são aqueles que preservam área. Mapas de Poincaré de sistemas conservativos, por exemplo, caem nessa categoria. Como o **Mapa de Meyer** também é desse tipo, nos restringiremos aqui ao estudo desses sistemas, com dois graus de liberdade.

Essa seção está baseada em alguns tópicos do trabalho de M. V. Berry de 1978 [5], considerado um clássico na área da Dinâmica.

Os pontos fixos são a primeira e mais simples das estruturas estudadas num sistema dinâmico e se definem nos mapas como aqueles pontos que são mapeados neles mesmos. Neste trabalho vamos nos restringir apenas aos mapas do plano nele mesmo.

Os pontos fixos, de um mapa conservativo do plano, podem ser de dois tipos básicos, que são definidos em função do comportamento das curvas invariantes na sua vizinhança, e para se conhecer esse comportamento é suficiente linearizar as equações do mapa, nas proximidades do ponto fixo,

o que nos dá:

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Onde  $\mathbf{T}$  é o mapa linearizado,  $(q_0, p_0)$  o ponto fixo e  $(q, p)$  um ponto nas proximidades de  $(q_0, p_0)$ .

Os auto-valores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  da matriz  $\mathbf{T}$  nos dão o comportamento nas vizinhanças de  $(q_0, p_0)$  e para mapas que preservam área ainda temos  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ , portanto só temos duas possibilidades para os auto-valores que são:

I) — Auto-valores complexos do tipo  $\lambda_1 = e^{i\theta}$  e  $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ .

Nesse caso um ponto na vizinhança do ponto fixo descreve uma curva em forma de elipse, sem se aproximar ou se afastar do ponto fixo, por isso esse tipo de ponto é denominado **ponto fixo elíptico** ou **ponto fixo estável**.

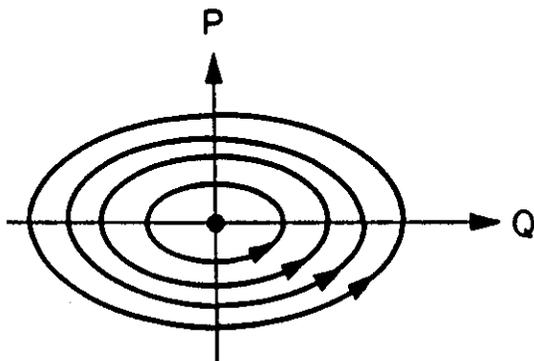


Figura 2.1: *Representação esquemática do comportamento de uma aplicação nas vizinhanças de um ponto fixo elíptico.*

II) — Auto-valores reais do tipo  $\lambda_1 = \pm e^u$  e  $\lambda_2 = \pm e^{-u}$ .

Nesse caso um ponto na vizinhança do ponto fixo descreve uma hipérbole, pois  $\lambda_1 \lambda_2 = cte$  e nesse caso o ponto é chamado de **ponto fixo hiperbólico**

ou ponto fixo instável. Cabe aqui uma subdivisão nos pontos hiperbólicos, ou seja:

**ponto fixo hiperbólico direto**, quando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2 > 0$ , isto significa que um ponto tomado nas vizinhanças do ponto fixo, mapeado sucessivamente, seguirá uma hipérbole sem sair dela.

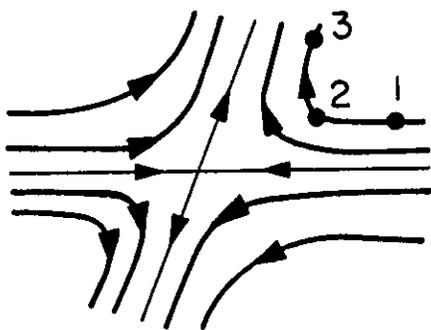


Figura 2.2: Representação esquemática do comportamento de uma aplicação nas vizinhanças de um ponto fixo hiperbólico direto.

**ponto fixo hiperbólico inverso**, quando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2 < 0$ , isto significa que um ponto tomado nas vizinhanças do ponto fixo, mapeado sucessivamente, seguirá alternadamente um ponto numa hipérbole e o outro na hipérbole inversa.

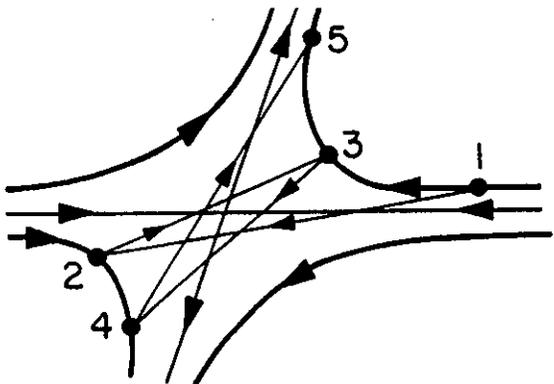


Figura 2.3: Representação esquemática do comportamento de uma aplicação nas vizinhanças de um ponto fixo hiperbólico inverso.

Além das hipérbolas temos mais quatro curvas invariantes especiais: duas têm a propriedade de a cada aplicação os pontos periódicos se aproximarem do ponto hiperbólico sem jamais alcançá-lo (isso implica que a velocidade de aproximação é cada vez menor) e as outras duas curvas onde os pontos se afastam da mesma forma que nas primeiras elas se aproximam (ou seja, se tivermos o mapa inverso, o comportamento das curvas que se afastam será o mesmo das que se aproximam).

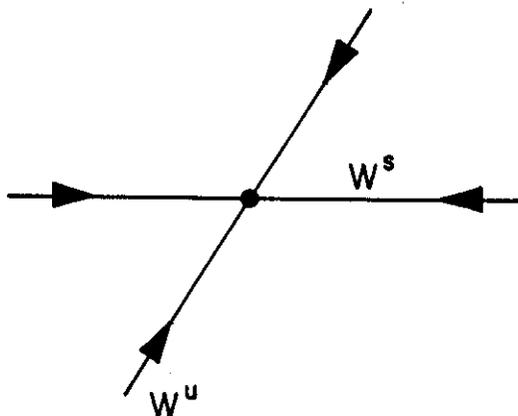


Figura 2.4: Variedades estável ( $w^s$ ) e instável ( $w^u$ ) de um ponto hiperbólico.

As curvas que se aproximam do ponto hiperbólico são chamadas de variedades estáveis ( $w^s$ ) e as que se afastam do ponto hiperbólico são as chamadas de variedades instáveis ( $w^u$ ).

As variedades estáveis e instáveis, genericamente, se enrolam umas sobre as outras, formando emaranhados que podem ser de dois tipos:

**Emaranhado Homoclínico**, é aquele em que as variedades estável e instável que se enrolam, se originam e convergem num mesmo ponto hiperbólico.

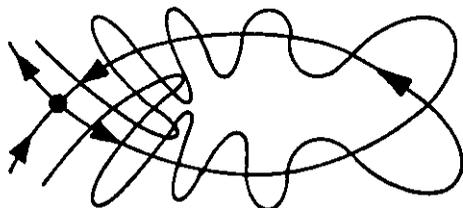


Figura 2.5: *Emaranhado homoclínico.*

**Emaranhado Heteroclínico**, é aquele em que as variedades estável e instável que se enrolam, se originam e convergem em pontos hiperbólicos distintos.

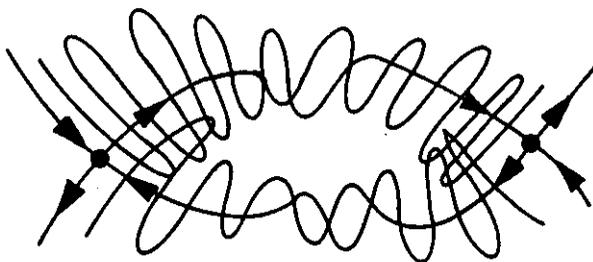


Figura 2.6: *Emaranhado heteroclínico.*

Vamos considerar aqui apenas o emaranhado homoclínico e observar algumas propriedades importantes, para que possamos entender as figuras acima.

— Uma variedade não pode nunca cruzar com ela mesma, ou seja:

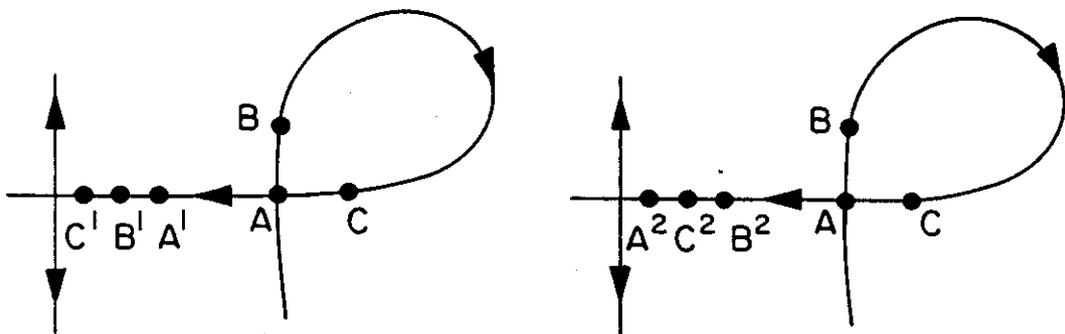


Figura 2.7: Esquema da impossibilidade da auto intersecção de uma variedade.

Se mapearmos os pontos  $A, B$  e  $C$  nessa ordem, passando pela alça, teremos  $C^1, B^1$  e  $A^1$  nessa ordem de proximidade do ponto hiperbólico, mas se mapearmos a partir de  $B, C$  e  $A$  teremos  $A^2, C^2$  e  $B^2$  nessa ordem de proximidade do ponto hiperbólico, o que é inconsistente, não é possível a partir de pontos iguais chegarmos a pontos diferentes.

— Mas uma variedade pode cruzar com outra variedade. Os pontos de cruzamento são chamados de **pontos homoclínicos**. Além disso, se houver um cruzamento, o seu mapeamento também será um cruzamento e assim sucessivamente, infinitas vezes. Como cada cruzamento é um ponto homoclínico, teremos infinitos pontos homoclínicos. As órbitas dos pontos homoclínicos são chamadas de **órbitas homoclínicas** e têm a propriedade de se aproximar infinitamente do ponto fixo hiperbólico tanto sob a ação do mapa direto quanto do inverso. O conjunto de todos os pontos homoclínicos é chamado de **conjunto homoclínico**.

— Como os mapas que estamos estudando são conservativos, eles preservam a área, isso implica que cada alça do emaranhado, depois de mapeado para uma alça seguinte, deverá manter a área que envolve, mas como os pontos homoclínicos ficam cada vez mais próximos entre si conforme se aproximam do ponto hiperbólico, para manter constante a área envolta pela alça, esta deverá se alongar e como ela não pode cruzar com ela mesma, a alça irá se curvar e enrolar cada vez mais criando uma estrutura tão complexa que mereceu a seguinte citação de Poincaré [25] em 1899.

*Que se procure representar a figura formada por essas duas curvas e suas intersecções em número infinito, onde cada uma corresponde a uma solução duplamente assintótica, suas intersecções formam um tipo de treliça, de tecido, de rede de malhas infinitamente apertadas; cada uma das duas curvas não deve jamais se cruzar com ela mesma, mas deve se dobrar sobre si mesma de uma maneira muito complexa para voltar a cruzar infinitas vezes todas as malhas da rede.*

*É tão atordoante a complexidade desta figura, que eu nem mesmo procuro traçá-la. Nada é mais próprio a nos dar uma idéia da complicação do problema de três corpos e em geral de todos os problemas da Dinâmica onde não há uma integral uniforme e onde as séries de Bohlin são divergentes.*

No presente trabalho, traçamos parte do emaranhado descrito acima, usando métodos numéricos e recursos computacionais, que serão mostrados nos capítulos subseqüentes.

## 2.2 Seções de Poincaré

Poincaré foi o primeiro a associar o espaço de fase dos Sistemas Dinâmicos a um ente geométrico, o que nos permite visualizar o comportamento (a evolução) de um fluxo no espaço de fase, no que diz respeito a diferentes condições iniciais e diferentes intensidades de perturbações.

O método, embora geral, é especialmente útil para sistemas com espaço de fase compacto e dois graus de liberdade.

A proposta de Poincaré consiste em se fazer um corte no espaço de fase e observar apenas os pontos onde o fluxo em estudo intercepta essa superfície, em vez de tentar observar o fluxo como um todo no espaço completo. (Para sistemas que não são compactos a informação obtida pelo método da seção é muito pequena, pois as trajetórias raramente passam por essa superfície um número grande de vezes.) Isso permite uma redução na dimensão a ser observada, com perda nas informações quantitativas, mas levando consigo as informações qualitativas do sistema.

Se tivermos  $n$  graus de liberdade num sistema, teremos  $n$  dimensões associadas aos momentos e mais  $n$  dimensões associadas às posições, ou seja, teremos um espaço de fase de dimensão  $2n$ . Por outro lado se o nosso sistema for conservativo, a energia será constante para cada condição inicial, e a superfície de energia imersa no espaço de fase de dimensão  $2n$  terá dimensão  $2n - 1$ .

Ou seja, para dois graus de liberdade, com espaço de fase de dimensão quatro, num sistema conservativo, a superfície de energia terá dimensão três e a seção de Poincaré dessa superfície terá dimensão dois.

Na figura a seguir vemos a projeção de uma trajetória fictícia no espaço  $X - P_X - P_Y$ . Os pontos marcados são aqueles em que  $Y = 0$ , o que define uma superfície de corte.

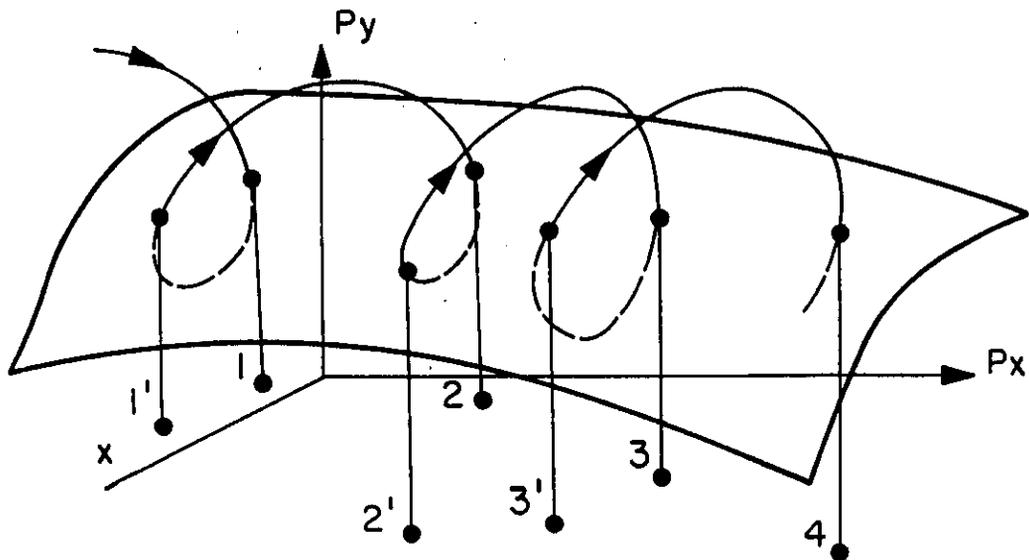


Figura 2.8: Trajetória no espaço de fases, furando a superfície de  $Y = 0$ , com a projeção dos pontos no plano  $X, P_X$  formando a seção de Poincaré.

O fluxo como um todo ficará então reduzido a dois conjuntos de pontos, dependendo do sentido em que o fluxo fura o plano; conjunto  $1, 2, 3, 4 \dots$  ou conjunto  $1', 2', 3' \dots$ , não importa a escolha do sentido.

A seção de Poincaré consiste em fornecer as coordenadas  $X$  e  $P_X$  de um dos conjuntos acima, em vez de fornecer as quatro coordenadas o tempo todo.

Se estivermos numa curva fechada no espaço de fase, isto significa que estamos em uma órbita periódica, que irá se repetir indefinidamente e cuja representação na seção de Poincaré será um ponto ou uma seqüência de pontos em que o último ponto cai novamente no primeiro. Dessa forma temos a informação sobre o tipo de órbita em que estamos, sem a necessidade de se saber por que pontos do espaço de fase total a órbita passou.

Por outro lado se estivermos sobre uma órbita não periódica (aperiódica), ela jamais irá passar pelo mesmo ponto no espaço de fase e se o sistema for conservativo, a órbita também nunca sairá da superfície de energia constante. Isso não significa no entanto, que os pontos da seção de Poincaré ficarão sobre linhas suaves. Isso só ocorre quando o sistema é integrável [2], ou seja, quando há outra constante de movimento além da energia.

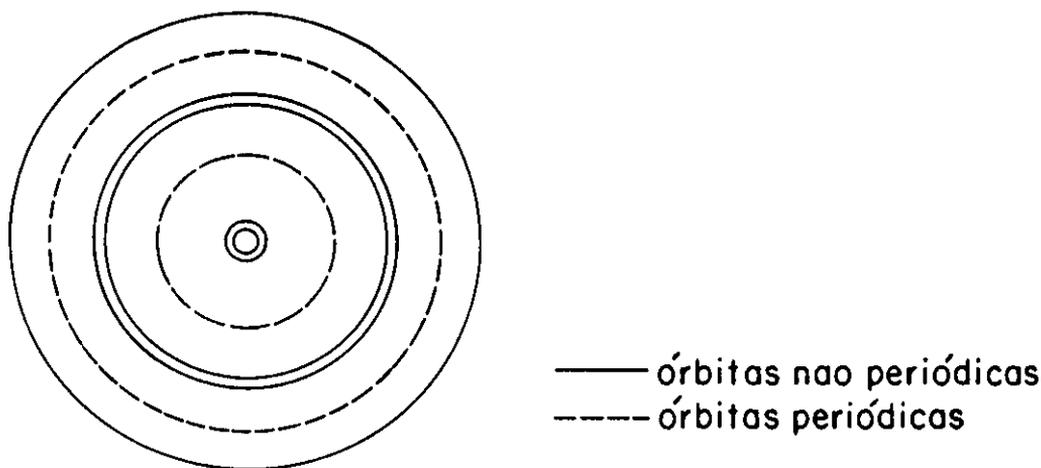


Figura 2.9: Representação esquemática de toros racionais (órbitas periódicas) e toros irracionais (órbitas aperiódicas) numa seção de Poincaré.

Podemos ter várias linhas para uma mesma energia, que correspondem a diferentes condições iniciais, lembrando que existem mais duas coordenadas que compõem essa energia e que não aparecem na seção de corte.

Um exemplo histórico das seções de Poincaré encontrado fartamente na literatura são os mapas de Hénon e Heiles, para diferentes energias como podem ser observados abaixo.

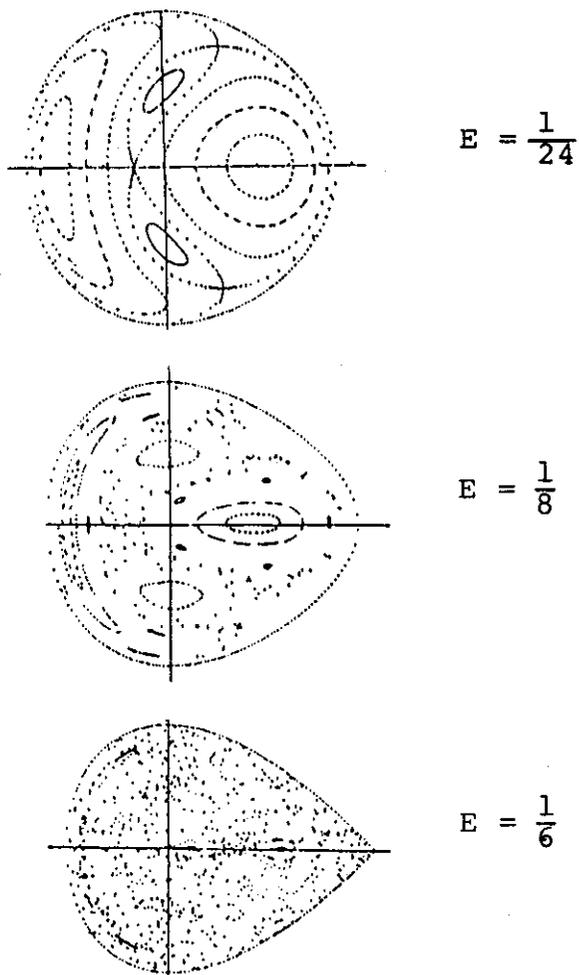


Figura 2.10: *Mapas de Hénon-Heiles para diferentes energias.*

Cabe aqui chamar a atenção para o fato das órbitas periódicas serem representadas por pontos fixos de uma seção de Poincaré, e como pontos são mais fáceis de serem tratados do que as órbitas como um todo, justifica-se a busca e o estudo de mapas analíticos nas formas normais.

# Capítulo 3

## Formas Normais

O estudo das soluções dos sistemas Hamiltonianos por linearização, nas vizinhanças das posições de equilíbrio, tem se mostrado insuficiente devido a perda de informações relevantes nos termos desprezados de ordem superior, responsáveis pela dinâmica peculiar dos sistemas não integráveis.

Esse fato nos leva a procurar transformações canônicas tais que possamos escrever as equações de Hamilton na forma mais simples possível, sem perder informações (ou pelo menos minimizando as perdas relevantes).

Quando as equações de movimento estão no seu aspecto mais simples possível, dizemos que o sistema está na **forma normal**.

A idéia de se reduzir os sistemas Hamiltonianos a formas normais já foi proposta por Poincaré [25] e depois estudada por G. D. Birkhoff [6] e trataremos disso mais adiante.

Neste capítulo mostraremos que as formas normais são extremamente úteis no estudo de bifurcações de órbitas periódicas. As órbitas periódicas bifurcadas tem período  $n$  vezes o período da órbita original e as formas normais podem ser usadas diretamente, quando  $n \geq 3$ , para encontrar o mapa analítico da seção de Poincaré associada. Os mapas de Poincaré para os casos  $n = 1$  (**forma de Meyer**) [24] e  $n = 2$  (duplicação de período) têm

que ser tratados separadamente. Embora o caso que nos interessa seja  $n = 1$ , faremos a descrição de bifurcações para  $n \geq 3$  tanto por completeza como para evidenciar o porque dos casos  $n = 1$  e  $n = 2$  serem mais complicados.

### 3.1 Forma Normal de Birkhoff

A proposta de Birkhoff é aproximar um Hamiltoniano não integrável a um Hamiltoniano não linear, porém integrável, com um resto desprezado, e que pode ser de ordem tão grande quanto se queira.

Vejamos como exemplo um Hamiltoniano genérico com dois graus de liberdade com um ponto de equilíbrio estável na origem, tratado nos trabalhos de R. E. de Carvalho [14] e G. L. S. Ritter [26], cujo formalismo mais rigoroso encontra-se no apêndice 7 de Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica de V. I. Arnold [2], um clássico por si só.

$$H(q_1, p_1, q_2, p_2) = \frac{\omega_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \geq 3}^{\infty} C_{\underline{\alpha}} q_1^{\alpha_1} p_1^{\alpha_2} q_2^{\alpha_3} p_2^{\alpha_4} \quad (3.1)$$

A aproximação proposta é chegarmos com transformações canônicas em variáveis de ângulo e ação na forma:

$$H(\underline{I}, \underline{\varphi}) = H_m(\underline{I}) + R(\underline{I}, \underline{\varphi}) \quad (3.2)$$

Onde  $H_m(\underline{I})$  é a chamada forma Normal de Birkhoff de ordem  $m$  escrita como:

$$H_m = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + A_{11} I_1 I_2 + A_{20} I_1^2 + A_{02} I_2^2 + \dots + A_{0m} I_2^m \quad (3.3)$$

Só dependendo das ações, portanto integrável. O resto desprezado será dependente tanto das ações de ordem  $> \frac{m}{2}$  quanto dos ângulos e formam a parte não integrável.

As transformações canônicas são usuais e se encontram por exemplo nos livros de L. Landau [21] e H. Goldstein [18], entre outros.

Mostraremos esse resultado pelo método de indução , antes porém vamos definir variáveis complexas conforme segue:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{z_1 + \bar{z}_1}{\sqrt{2}} & ; & p_1 = \frac{z_1 - \bar{z}_1}{\sqrt{2}} \\ q_2 = \frac{z_2 + \bar{z}_2}{\sqrt{2}} & ; & p_2 = \frac{z_2 - \bar{z}_2}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (3.4)$$

Multiplicando por  $-i$  o nosso Hamiltoniano ficará :

$$-iH = -i\omega_1 z_1 \bar{z}_1 - i\omega_2 z_2 \bar{z}_2 + \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \geq 3}^{\infty} D_{\underline{\alpha}} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \bar{z}_1^{\alpha_3} \bar{z}_2^{\alpha_4} \quad (3.5)$$

Supondo então que é possível reduzir a Hamiltoniana à sua forma normal de ordem  $N < m$  teremos :

$$\begin{aligned} -iH &= -i\omega_1 z_1 \bar{z}_1 - i\omega_2 z_2 \bar{z}_2 + \\ &+ A_{20}(z_1 \bar{z}_1)^2 + \dots A_{\frac{N}{2}0}(z_1 \bar{z}_1)^{\frac{N}{2}} + \dots A_{0\frac{N}{2}}(z_2 \bar{z}_2)^{\frac{N}{2}} + \dots \\ &+ \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \geq N+1}^{\infty} D_{\underline{\alpha}} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \bar{z}_1^{\alpha_3} \bar{z}_2^{\alpha_4} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Vamos agora mostrar que é possível levar a forma normal para ordem  $N + 1$ , fazendo uma transformação canônica de  $(z, \bar{z}) \rightarrow (w, \bar{w})$ , gerada implicitamente por :

$$\begin{aligned} S(z_1, z_2, \bar{w}_1, \bar{w}_2) &= z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \\ &+ \sum_{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \geq N+1} S_{\underline{\beta}} z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \bar{w}_1^{-\beta_3} \bar{w}_2^{-\beta_4} \end{aligned} \quad (3.7)$$

portanto temos:

$$\bar{z}_1 = \frac{\partial S}{\partial z_1} = \bar{w}_1 + \sum_{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \geq N+1} S_{\underline{\beta}} \beta_1 z_1^{\beta_1 - 1} z_2^{\beta_2} \bar{w}_1^{-\beta_3} \bar{w}_2^{-\beta_4} \quad (3.8)$$

$$w_1 = \frac{\partial S}{\partial \bar{w}_1} = z_1 + \sum_{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \geq N+1} S_{\underline{\beta}} \beta_3 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \bar{w}_1^{-\beta_3 - 1} \bar{w}_2^{-\beta_4} \quad (3.9)$$

e de forma idêntica temos as equações para  $\bar{z}_2$  e  $w_2$ . As equações acima podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}\bar{z}_1 &= \bar{w}_1 + \sum_{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4=N+1} S_{\underline{\beta}} \beta_1 w_1^{\beta_1-1} w_2^{\beta_2} \bar{w}_1^{\beta_3} \bar{w}_2^{\beta_4} + \text{O.S.}(N+2) \\ z_1 &= w_1 - \sum_{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4=N+1} S_{\underline{\beta}} \beta_3 z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \bar{w}_1^{\beta_3-1} \bar{w}_2^{\beta_4} + \text{O.S.}(N+2)\end{aligned}$$

e analogamente para  $\bar{z}_2$  e  $z_2$  onde  $\text{O.S.}(N+2)$  significa termos de ordens maiores ou iguais ao indicado entre os parênteses.

Substituindo essas coordenadas na equação 3.6 podemos observar que :

$$(z_1 \bar{z}_1)^2 = (w_1 \bar{w}_1)^2 + \text{O.S.}(2N) \quad (3.10)$$

e apenas os dois primeiros termos contribuem até ordem  $N+1$ , o que nos dá

$$\begin{aligned}-iH &= -i\omega_1 w_1 \bar{w}_1 - i\omega_2 w_2 \bar{w}_2 + \\ &+ A_{20}(w_1 \bar{w}_1)^2 + \dots A_{\frac{N}{2}}(w_1 \bar{w}_1)^{\frac{N}{2}} + \dots A_{\frac{N}{2}}(w_2 \bar{w}_2)^{\frac{N}{2}} + \dots \\ &+ \sum_{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4=N+1} w_1^{\beta_1-1} w_2^{\beta_2} \bar{w}_1^{\beta_3} \bar{w}_2^{\beta_4} \{ D_{\underline{\beta}} + i S_{\underline{\beta}} [\omega_1(\beta_1 - \beta_3) + \\ &+ \omega_2(\beta_2 - \beta_4)] \} + \text{O.S.}(N+2)\end{aligned} \quad (3.11)$$

A escolha do parâmetro  $S_{\underline{\beta}}$  para o caso em que  $(\beta_1 \neq \beta_3)$  e  $(\beta_2 \neq \beta_4)$  de forma que se anulem os "termos cruzados" deverá ser :

$$S_{\underline{\beta}} = \frac{-i D_{\underline{\beta}}}{\omega_1(\beta_1 - \beta_3) + \omega_2(\beta_2 - \beta_4)} \quad (3.12)$$

Restam apenas os "termos diagonais" em que  $(\beta_1 = \beta_3)$  e  $(\beta_2 = \beta_4)$  o que nos dá :

$$\begin{aligned}-iH &= -i\omega_1 w_1 \bar{w}_1 - i\omega_2 w_2 \bar{w}_2 + \dots + A_{\frac{N}{2}}(w_2 \bar{w}_2)^{\frac{N}{2}} + \dots \quad (3.13) \\ &+ \sum_{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4=N+1} D_{\underline{\beta}} (w_1 \bar{w}_1)^{\beta_1} (w_2 \bar{w}_2)^{\beta_3} + \text{O.S.}(N+2)\end{aligned}$$

Fazendo uma última substituição para retornar às variáveis reais

$$w_1 = \sqrt{I_1} e^{i\varphi_1}$$

$$w_2 = \sqrt{I_2} e^{i\varphi_2}$$

obtemos finalmente a forma normal de Birkhoff, que depende das ações isoladas até ordem  $N + 1$ .

$$H = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \sum_{l+k=2}^{\frac{N+1}{2}} A_{lk} I_1^l I_2^k + O.S.(\frac{N}{2} + 1) \quad (3.14)$$

Se pudermos a partir da suposição de que é possível separarmos até ordem  $N$  apenas as ações (eq. 3.6), chegarmos até a ordem  $N + 1$  (eq. 3.14), por indução podemos dizer que é possível, repetindo-se o processo, chegar até a ordem que se deseja, mas a convergência só pode ser obtida se o sistema for integrável.

Se as frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são ressonantes, ou seja se  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r}{s}$ , o denominador da (eq. 3.12) pode se anular mesmo que  $(\beta_1 \neq \beta_3)$  e  $(\beta_2 \neq \beta_4)$ , portanto podemos escrever :

$$r(\beta_1 - \beta_3) + s(\beta_2 - \beta_4) = 0 \quad (3.15)$$

É fácil ver que nesse caso a equação tem solução, em ordem mais baixa possível em  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$ , quando  $\beta_1 - \beta_3 = \pm s$  e  $\beta_2 - \beta_4 = \mp r$  que nos dá apenas duas possibilidades, ou seja :

$$\beta_1 = s, \beta_3 = 0, \beta_2 = 0, \beta_4 = r$$

e

$$\beta_1 = 0, \beta_3 = s, \beta_2 = r, \beta_4 = 0$$

nesse caso teremos a forma normal ressonante ou "forma normal de Birkoff - Gustavson"

$$\begin{aligned} -iH = & -i\omega_1 w_1 \bar{w}_1 - i\omega_2 w_2 \bar{w}_2 + \dots + A_{0\frac{N}{2}} (w_2 \bar{w}_2)^{\frac{N}{2}} + \dots \\ & + D_{s00r} w_1^s \bar{w}_2^r + D_{0rs0} \bar{w}_1^s w_2^r \end{aligned} \quad (3.16)$$

ou fazendo  $\omega_2 = 1$  por simplicidade e tomando  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r}{s} - \lambda$ , teremos em termos de variáveis reais

$$H = \left(\frac{r}{s} - \lambda\right)I_1 + I_2 + \sum_{l+k=2}^{\frac{r+s}{2}} A_{lk}I_1^l I_2^k + \alpha I_1^{\frac{r}{2}} I_2^{\frac{s}{2}} \cos(s\varphi_1 - r\varphi_2) \quad (3.17)$$

Usamos acima o fato de que  $D_{s00r} = D_{0rs0}^*$  e tomamos apenas o termo em cosseno, o que pode ser feito mudando-se a fase dos ângulos. Foi também introduzido o parâmetro  $\alpha$  dependente de  $D_{s00r}$ .

A Hamiltoniana continua integrável e como a aproximação (3.17) é válida para ações pequenas, o termo em  $\alpha$  pode ser visto como uma perturbação, as seções de Poincaré de (3.17) no plano  $I_1, \varphi_1$  ficam:

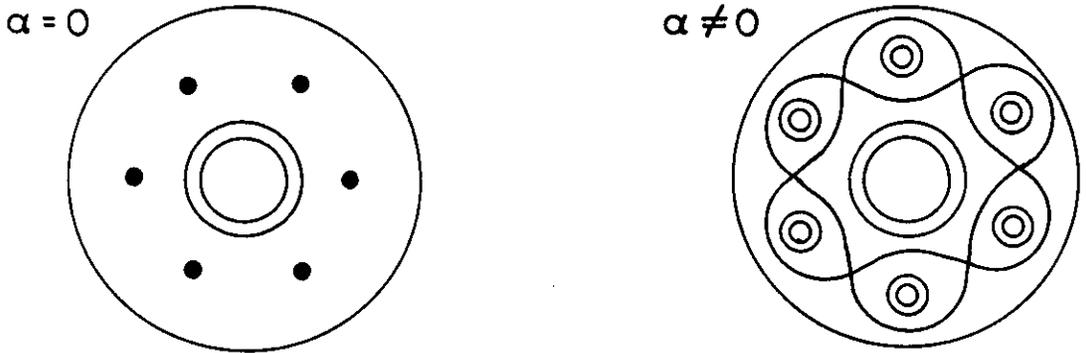


Figura 3.1: As seções de Poincaré representadas são da forma normal de normal de Birkhoff-Gustavson eq.(3.17), sendo a figura da esquerda com  $\alpha = 0$  e a da direita com  $\alpha \neq 0$ .

Analogamente ao que foi feito para dois graus de liberdade, vamos apenas indicar o procedimento para um Hamiltoniano com um grau de liberdade

que tem dependência periódica no tempo e um ponto estável na origem, cujo resultado será útil quando tratarmos das bifurcações.

Seja

$$H(q, p, t) = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) + \sum_{\alpha+\beta=3}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} E_{\alpha\beta l} p^\alpha q^\beta e^{ilt} \quad (3.18)$$

Vamos considerar os termos do somatório como termos menos significativos que podem ser vistos como uma perturbação. Seguindo o mesmo procedimento anterior, substituindo por variáveis complexas, depois fazendo uma transformação canônica usando uma função geratriz do tipo:

$$S(z, \bar{w}) = z\bar{w} + \sum_{\alpha+\beta=3}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} S_{\alpha\beta l} z^\alpha \bar{w}^\beta e^{ilt} \quad (3.19)$$

Calculamos também  $\bar{z}$ ,  $z$ ,  $\bar{w}$ ,  $w$  e iremos fazer a escolha que irá cancelar os termos "não diagonais" com:

$$S_{\alpha\beta l} = \frac{iF_{\alpha\beta l}}{\omega(\alpha - \beta) + l} \quad (3.20)$$

onde  $F_{\alpha\beta l}$  são as constantes para  $H$  escrita em termos de  $z$  e  $\bar{z}$ .

Para o caso ressonante que nos interessa precisamos tratar  $\omega = \frac{r}{s} + \varepsilon$  onde  $\varepsilon \rightarrow 0$ , portanto teremos  $r(\alpha - \beta) = -sl$ , que na ordem mais baixa possível ficará:

$$\alpha = s, \beta = 0, l = -r$$

e

$$\alpha = 0, \beta = s, l = +r$$

de forma que a nossa Hamiltoniana ficará:

$$\begin{aligned} -iH = & -i\omega w\bar{w} + F_2(w\bar{w})^2 + F_3(w\bar{w})^3 + \dots + F_{\frac{s}{2}}(w\bar{w})^{\frac{s}{2}} \\ & + (F_{s0r} w^s e^{irt} + F_{0s-r}^* \bar{w}^s e^{-irt}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

fazendo uma nova transformação que leva  $(w, \bar{w}) \rightarrow (\xi, \bar{\xi})$  através da função geradora

$$\sigma = w\bar{\xi} e^{i(\frac{r}{s})t} \quad (3.22)$$

teremos o Hamiltoniano

$$-iH(\xi, \bar{\xi}) = -i(\omega - \frac{r}{s})\xi\bar{\xi} + F_2(\xi\bar{\xi})^2 + \dots + F_{s0r}\xi^s + F_{0s-r}\bar{\xi}^s \quad (3.23)$$

que retornando às variáveis reais  $I, \varphi$  usando  $\xi = \sqrt{I}e^{i\varphi}$  e o seu conjugado chegamos em :

$$H(I, \varphi, t) = \varepsilon I + \sum_{j=2}^{\frac{s}{2}} C_j I^j + \alpha I^{\frac{s}{2}} \cos(s\varphi) + \text{O.S.}(\frac{s}{2} + 1, t) \quad (3.24)$$

essa forma final é que será utilizada mais adiante no tópico sobre bifurcações de órbitas periódicas.

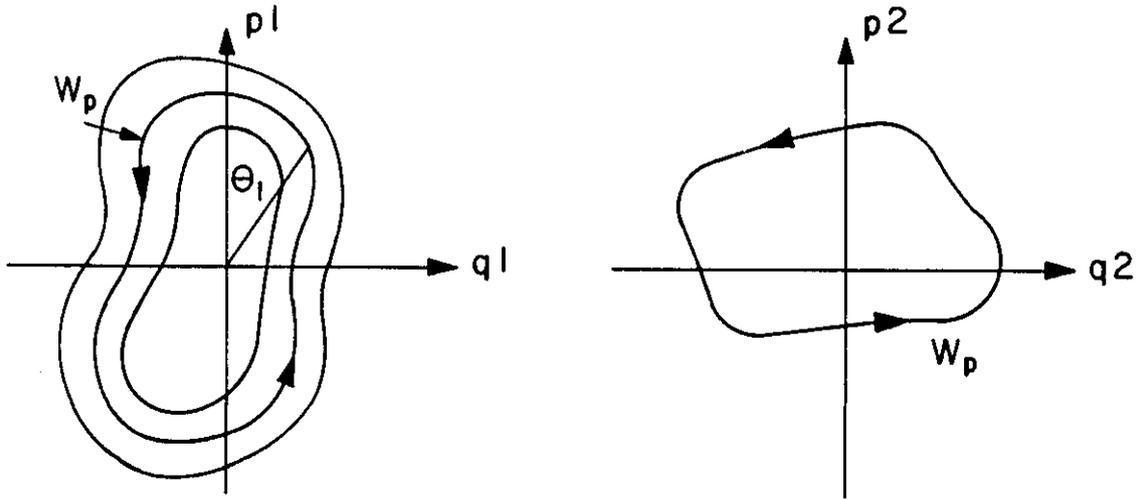
## 3.2 Bifurcações de Órbitas Periódicas

Vamos introduzir alguns pontos relevantes sobre bifurcações de órbitas periódicas estáveis, primeiramente numa forma intuitiva e depois acompanhado de algum formalismo.

Vamos supor que estamos sobre uma órbita fechada estável no espaço de fase. Essa órbita estável será representada na seção de Poincaré como um ponto fixo estável. Tomando um ponto  $X'$  na seção de Poincaré muito próximo do ponto fixo e propagando esse ponto até que ele volte à seção, teremos um novo ponto  $X''$ . O mapa de Poincaré linearizado assim obtido pode ser escrito na forma  $X'' = \mathbf{T}X'$ . Se a órbita é estável, os autovalores de  $\mathbf{T}$  serão da forma  $\exp^{\pm i\theta}$ . No sistema de coordenadas determinado pelos autovetores de  $\mathbf{T}$  veremos que o mapa corresponde a uma rotação de um ângulo  $\theta$ , que é chamado **ângulo de estabilidade** da órbita periódica.

As bifurcações da órbita periódica ocorrem toda vez que  $\theta = \frac{2\pi r}{s}$ , com  $r$  e  $s$  inteiros.

Se tivermos um Hamiltoniano com dois graus de liberdade, poderemos ver uma órbita periódica  $w_p$  projetada nos planos  $q_1, p_1$  e  $q_2, p_2$  conforme a figura esquemática.



Colocando o Hamiltoniano na forma de variáveis de ângulo e ação, temos  $H = H(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2)$ .

Fixando um ponto de referência sobre a própria órbita  $w_p$ , podemos usar por exemplo a coordenada  $\theta_1$ , em vez do tempo, para descrever os pontos dessa órbita.

Órbitas muito próximas de  $w_p$  devem acompanhar aproximadamente a órbita periódica, ou seja, também para pequenas perturbações em relação a  $w_p$  o argumento é válido.

Como estamos no caso conservativo, a energia  $E$  é constante e podemos escrever :

$$I_1 = I_1(I_2, \theta_2, -\theta_1, E) = h_E(I_2, \theta_2, u) \quad (3.25)$$

Onde  $u = -\theta_1$  e  $E$  é um parâmetro da equação. Essa é a hamiltoniana reduzida  $h_E$ , assim chamada porque obedece às equações de hamilton onde  $u$  faz o papel de "tempo".

$$\frac{dI_2}{du} = -\frac{\partial h_E}{\partial \theta_2} \quad (3.26)$$

$$\frac{d\theta_2}{du} = \frac{\partial h_E}{\partial I_2} \quad (3.27)$$

Voltando para coordenadas cartesianas  $(q_2, p_2)$  e expandindo  $h_E$  em torno do ponto fixo como:

$$q_2 = q_{20} + q$$

e

$$p_2 = p_{20} + p$$

obtemos a hamiltoniana reduzida como:

$$h = \frac{A_{20}(u)}{2}q^2 + A_{11}(u)qp + \frac{A_{02}(u)}{2}p^2 + \dots \quad (3.28)$$

Notando que  $\dot{q}_{20} = A_2(u)$  e  $\dot{p}_2\theta = -A_1(u)$ , vemos que os termos que governam o movimento de  $q$  e  $p$  começam a partir dos termos de segunda ordem. Diagonalizando a parte quadrática teremos então uma  $h$  efetiva dada por:

$$h(q, p, u) = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) + \sum_{\alpha+\beta=3}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} E_{\alpha\beta l} p^\alpha q^\beta e^{ilu} \quad (3.29)$$

De fato, os coeficientes de  $q^2$  e  $p^2$  são dependentes do tempo, mas podem ser transformados de forma a obtermos o resultado acima. Os coeficientes  $A_{ij}(u)$ , para ordens maiores ou iguais a três, foram expandidos em série de Fourier, pois são periódicos em  $u$  com período  $2\pi$ .

A equação resultante é exatamente da forma da equação (3.18), conseqüentemente podemos reescrevê-la, no caso ressonante ( $\omega = \frac{r}{s}$ ), como a equação (3.24)

$$h(I, \varphi, u) = \varepsilon I + \sum_{j=2}^{\frac{s}{2}} C_j I^j + \alpha I^{\frac{s}{2}} \cos(s\varphi) + \text{O.S.}(\frac{s}{2} + 1, u) \quad (3.30)$$

É fundamental lembrar que a expressão acima vale para  $I$  pequeno (próximo da origem) e que os termos de ordem superior foram tratados como uma perturbação. Isso implica que a expressão acima só é válida para  $s \geq 3$ ,

caso contrário, os termos perturbativos seriam mais importantes que o termo principal  $\varepsilon I$ , e a série não teria sentido.

A partir dessa hamiltoniana temos as equações de movimento que integradas no intervalo de 0 a  $2\pi$  nas proximidades do ponto fixo nos dão a forma analítica do mapa de Poincaré.

$$\varphi_1 = \varphi_0 + 2\pi\varepsilon + \sum_{j=2}^{\frac{s}{2}} 2\pi j C_j I_0^{j-1} + \pi\alpha s I_0^{\frac{s}{2}-1} \cos(s\varphi_0) \quad (3.31)$$

$$I_1 = I_0 + 2\pi\alpha s I_0^{\frac{s}{2}} \sin(s\varphi_0) \quad (3.32)$$

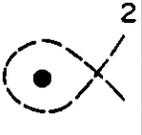
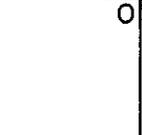
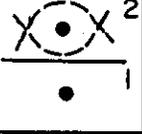
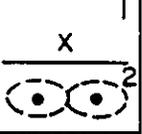
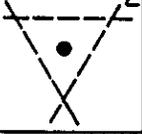
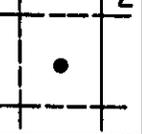
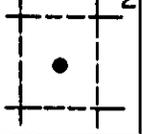
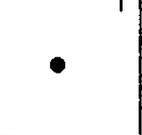
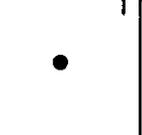
O estudo das bifurcações resume-se então ao cálculo dos pontos fixos desse mapa como função de  $s$  e do parâmetro  $\varepsilon$ .

Os casos em que  $s = 1$  ou  $s = 2$  não podem ser tratados pelos motivos já expostos acima.

### 3.3 Forma Normal de Meyer

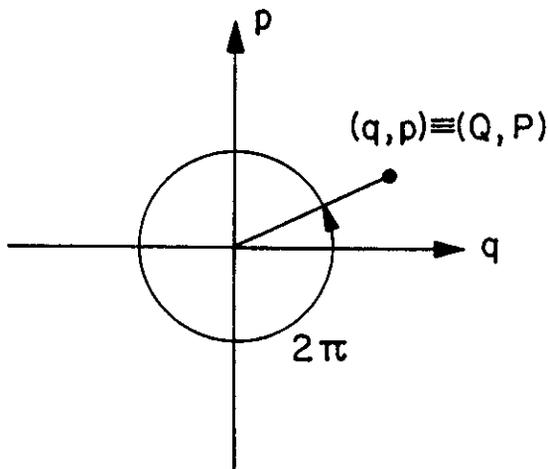
A classificação completa para as bifurcações de órbitas periódicas estáveis em Sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade foi dada por Meyer [24], conforme tabela a seguir. Esses resultados seguem imediatamente da análise das eq.(3.31) e (3.32) acima.

Essa classificação é genérica e não leva em consideração casos especiais, como certas simetrias, que foram tratados por exemplo nos trabalhos de M. A. M. Aguiar [10] e [11].

S	$\epsilon > 0$	$\epsilon < 0$
1		
2		
3		
4a		
4b		
5		
>5	of cose5	

O procedimento descrito na seção anterior só é válido para  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r}{s}$  com  $s \geq 3$  (no caso ressonante) e não descreve os casos  $s = 1$  e  $s = 2$  dessa tabela. Esses casos foram tratados por Meyer [24] separadamente.

A forma geral do Mapa de Poincaré para  $s = 1$  (que corresponde então à órbitas periódicas com ângulo de estabilidade igual a  $2\pi$ ) é



ou

$$\begin{cases} Q = q + f(q, p) \\ P = p + g(q, p) \end{cases} \quad (3.33)$$

onde as funções  $f(q, p)$  e  $g(q, p)$  devem ser tais que o mapa preserve área e  $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ . Meyer mostrou que esse mapa pode ser visto como uma transformação canônica  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ , gerada implicitamente por

$$F(p, Q) = G(p, Q) - pQ \quad (3.34)$$

e

$$\begin{aligned} q &= -\frac{\partial F(p, Q)}{\partial p} \\ P &= -\frac{\partial F(p, Q)}{\partial Q} \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde uma função típica  $G(p, Q)$  será :

$$G = -\frac{p^2}{2} - \varepsilon Q - \frac{Q^3}{3} \quad (3.36)$$

(os sinais e as coordenadas podem ser escolhidos conforme a conveniência para as simplificações posteriores)

O mapa resultante então fica

$$\begin{cases} q &= Q + p \\ P &= p + \varepsilon + Q^2 \end{cases} \quad (3.37)$$

ou isolando as novas coordenadas  $(Q, P)$  em função das antigas  $(q, p)$

$$\begin{cases} Q &= q - p \\ P &= p + \varepsilon + (q - p)^2 \end{cases} \quad (3.38)$$

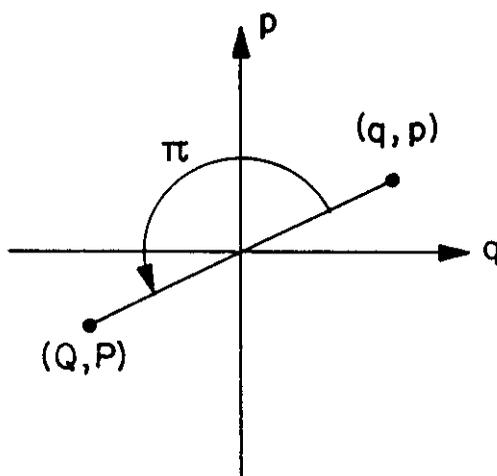
Essa é a chamada forma Normal de Meyer que usaremos daqui em diante.

É fácil verificar que essa transformação é canônica pois :

$$\{Q, P\}_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = 1 \quad (3.39)$$

O resultado importante de Meyer é que o mapa (3.38) é genérico, ou seja, a seção de Poincaré, na vizinhança de uma órbita típica com ângulo de estabilidade  $2\pi$ , será sempre dessa forma.

Apenas como completeza vamos apontar o caso em que  $s = 2$ , (que tem ângulo de estabilidade igual a  $\pi$ ) e que não pode ser tratado pela forma analítica de Birkhoff pelo mesmo motivo que para  $s = 1$ .



ou

$$\begin{cases} Q = -q + f(q, p) \\ P = -p + g(q, p) \end{cases} \quad (3.40)$$

Esse caso foi tratado por Meyer [24] no mesmo trabalho citado.

Como conclusão vamos mostrar esquematicamente o comportamento do mapa 3.38, que é uma generalização da bifurcação onde  $s = 1$ , em função do parâmetro  $\varepsilon$ , ou seja:

para  $\varepsilon > 0$  não temos pontos fixos

para  $\varepsilon = 0$  temos um único ponto fixo

para  $\varepsilon < 0$  temos dois pontos fixos

ou seja, temos uma bifurcação em  $\varepsilon = 0$  e dois ramos a partir de  $\varepsilon < 0$ , um estável e um instável.

Esse esquema simplificado não mostra a evolução das separatrizes, os pontos homoclínicos, caos ou órbitas periódicas, que serão tratados numericamente nos capítulos seguintes.

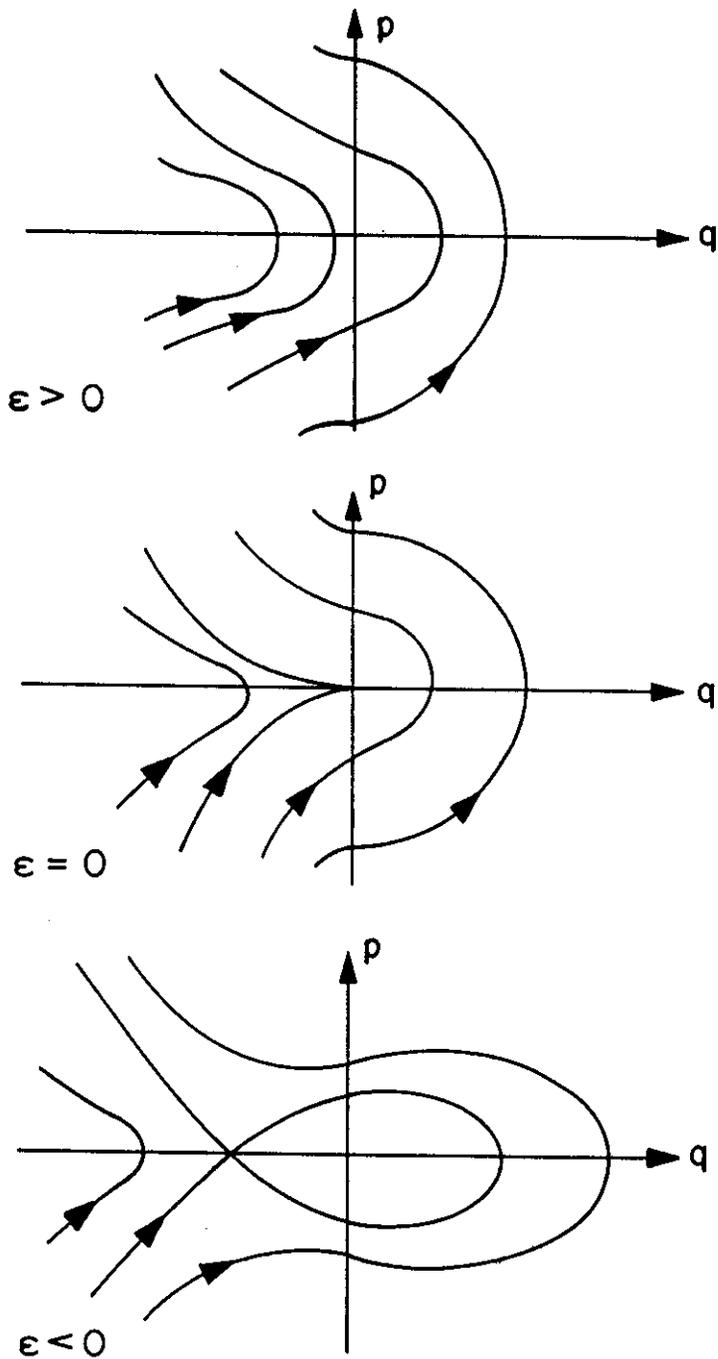


Figura 3.2: Esquema simplificado do comportamento do Mapa de Meyer para as três possibilidades distintas de:  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon = 0$  e  $\epsilon < 0$ .

# Capítulo 4

## Métodos numéricos

### 4.1 Cálculo dos Pontos Fixos

Os pontos fixos são aqueles que, após a aplicação do mapa, retornam ao mesmo ponto e podem ser obtidos facilmente conforme exposto a seguir.

Seja uma aplicação genérica do tipo:

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + \mathbf{f}(q_n, p_n) \\ p_{n+1} = p_n + \mathbf{g}(q_n, p_n) \end{cases} \quad (4.1)$$

Os pontos fixos são aqueles que satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n \\ p_{n+1} = p_n \end{cases} \quad (4.2)$$

ou

$$\begin{cases} \mathbf{f}(q_n, p_n) = 0 \\ \mathbf{g}(q_n, p_n) = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Sejam  $(q_0, p_0)$  as soluções de 4.3.

A natureza dos pontos fixos pode ser determinada estudando-se o comportamento da aplicação nas suas proximidades, ou seja:

$$\begin{cases} q'_0 + \delta q' = q_0 + \delta q + \mathbf{f}(q_0 + \delta q, p_0 + \delta p) \\ p'_0 + \delta p' = p_0 + \delta p + \mathbf{g}(q_0 + \delta q, p_0 + \delta p) \end{cases} \quad (4.4)$$

Desenvolvendo  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  e desprezando os termos de ordem superior, teremos uma linearização nas proximidades de  $(q_0, p_0)$  que pode ser escrita na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \delta q' \\ \delta p' \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta p \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Onde  $T$ , a matriz que leva um ponto dado nas proximidades de  $(q_0, p_0)$  a sua nova posição usando a aplicação linearizada, depende de  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$ .

No caso de aplicações que preservam Área, os auto-valores de  $T$  podem ser de dois tipos:

$$\begin{aligned} \lambda &= e^{\pm i\theta} \\ \text{ou} & \\ \lambda &= e^{\pm x} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Se tivermos  $\lambda = e^{\pm i\theta}$  o ponto é do tipo elíptico (estável), ou seja, um ponto próximo do ponto fixo em aplicações sucessivas permanecerá sobre uma elipse, sem se afastar ou aproximar do ponto fixo.

Por outro lado se tivermos  $\lambda = e^{\pm x}$  o ponto fixo será do tipo hiperbólico (instável), ou seja, um ponto nas proximidades do ponto fixo em sucessivas aplicações ficará sobre uma hipérbole, afastando-se rapidamente do ponto fixo.

Da mesma forma que encontramos os pontos fixos podemos encontrar pontos periódicos fazendo sucessivas aplicações até o período desejado e igualando ao ponto inicial.

A solução do sistema resultante nos dará os pontos procurados.

Por exemplo, para período dois temos:

$$\begin{cases} q_{n+2} = q_{n+1} + \mathbf{f}(q_{n+1}, p_{n+1}) \\ p_{n+2} = p_{n+1} + \mathbf{g}(q_{n+1}, p_{n+1}) \end{cases} \quad (4.7)$$

ou

$$\begin{cases} q_{n+2} = q_n + \mathbf{f}(q_n, p_n) + \mathbf{f}(q_n + \mathbf{f}(q_n, p_n), p_n + \mathbf{g}(q_n, p_n)) \\ p_{n+2} = p_n + \mathbf{g}(q_n, p_n) + \mathbf{g}(q_n + \mathbf{f}(q_n, p_n), p_n + \mathbf{g}(q_n, p_n)) \end{cases} \quad (4.8)$$

Fazendo  $q_{n+2} = q_n$  e  $p_{n+2} = p_n$  temos um sistema em  $(q_n, p_n)$  cujas soluções serão os pontos de período dois.

Se o mapa for polinomial, esse método não será eficiente para períodos acima de dois ou três, pois os polinômios a serem resolvidos costumam ter graus muito elevados, dificultando a sua solução.

Um método mais eficiente será descrito na seção 4.3.

## 4.2 Cálculo das Separatrizes

As separatrizes são as curvas limites que separam dois tipos distintos de movimentos, tais como rotações de librações.

Nos pontos fixos hiperbólicos, temos duas direções importantes que são determinadas pelos auto-vetores da matriz transformação de 4.5.

Essas direções se aproximam assintoticamente das separatrizes nas proximidades do ponto hiperbólico. Isso significa que pontos tomados sobre as retas dos autovetores, arbitrariamente próximos do ponto fixo e mapeados conforme a aplicação, ficarão também arbitrariamente próximos das separatrizes.

Um método para se obter um conjunto de pontos que pode ser usado para traçar as separatrizes é calcular a aplicação em estudo, um número

fixo de vezes, a partir de um ponto sobre a reta da linearização, próximo do ponto hiperbólico.

Esse conjunto de pontos é bastante denso próximo do ponto fixo e disperso para regiões mais afastadas. Para se melhorar a densidade de pontos nas regiões afastadas, tomam-se diversos pontos na reta da linearização, entre o primeiro ponto escolhido e a sua primeira aplicação, e iteram-se cada um deles o mesmo número de vezes que o ponto inicial.

Esse procedimento aplicado ao mapa normal nos dará uma boa aproximação da separatriz instável.

A separatriz estável pode ser obtida da mesma forma, porém a partir do mapa inverso, que pode ser calculado desde que a aplicação seja um homeomorfismo .

$$\begin{cases} q_n = q_{n+1} + \mathbf{f}'(q_{n+1}, p_{n+1}) \\ p_n = p_{n+1} + \mathbf{g}'(q_{n+1}, p_{n+1}) \end{cases} \quad (4.9)$$

Com o mapa inverso, analogamente ao que foi feito no mapa direto, teremos um conjunto de pontos que se aproximam da separatriz estável com a precisão que se deseja.

## 4.3 Cálculo das Órbitas Periódicas

O Método descrito a seguir foi desenvolvido por M. Baranger [4], [3] e usado por M. A. A. Aguiar [10] para o cálculo de órbitas periódicas de Sistemas Hamiltonianos contínuos e será adaptado aqui para mapas da forma 4.1. Uma outra adaptação foi feita por M. B. Matos em [23], especificamente para encontrar pontos homoclínicos.

A grande vantagem desse método está em dois pontos fundamentais, ou seja:

- primeiro a grande velocidade de convergência, em poucas iterações (4 ou 5 por exemplo, para uma precisão da ordem de  $10^{-10}$ ), consegue-se a convergência desejada.

- segundo esse método consegue a convergência inclusive para pontos instáveis, o que é muito difícil nos métodos convencionais.

Sem esse método seria impraticável o desenvolvimento desse trabalho.

Para uma órbita periódica de período  $N$  queremos encontrar os pontos:

$$(q_n, p_n) \equiv \begin{pmatrix} q_1, p_1 \\ q_2, p_2 \\ q_3, p_3 \\ \vdots \\ q_N, p_N \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

onde a periodicidade  $N$  é garantida por

$$(q_{N+1}, p_{N+1}) = (q_1, p_1) \quad (4.11)$$

Partimos de uma estimativa que denominaremos de tentativa

$$(q_n^0, p_n^0) \equiv \begin{pmatrix} q_1^0, p_1^0 \\ q_2^0, p_2^0 \\ q_3^0, p_3^0 \\ \vdots \\ q_N^0, p_N^0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

A tentativa estará afastada dos pontos da Órbita periódica por uma pequena diferença que chamaremos de correção definida como:

$$(q_n^I, p_n^I) \equiv \begin{pmatrix} q_1^I, p_1^I \\ q_2^I, p_2^I \\ q_3^I, p_3^I \\ \vdots \\ q_N^I, p_N^I \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

ou seja, os pontos da Órbita Periódica serão a tentativa mais a correção:

$$(q_n, p_n) = (q_n^0, p_n^0) + (q_n^I, p_n^I) = (q_n^0 + q_n^I, p_n^0 + p_n^I) \quad (4.14)$$

Substituindo 4.14 em 4.1 obtemos um sistema recursivo de equações para a correção:

$$\begin{cases} q_{n+1}^I = q_n^0 + q_n^I - q_{n+1}^0 + \mathbf{f}(q_n^0 + q_n^I, p_n^0 + p_n^I) \\ p_{n+1}^I = p_n^0 + p_n^I - p_{n+1}^0 + \mathbf{g}(q_n^0 + q_n^I, p_n^0 + p_n^I) \end{cases} \quad (4.15)$$

Expandindo  $\mathbf{f}(q_n^0 + q_n^I, p_n^0 + p_n^I)$  em Série de Taylor teremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(q_n^0 + q_n^I, p_n^0 + p_n^I) &= \mathbf{f}(q_n^0, p_n^0) + q_n^I \left. \frac{\partial \mathbf{f}(q_n, p_n)}{\partial q_n} \right|_{q_n^0, p_n^0} + \\ &+ p_n^I \left. \frac{\partial \mathbf{f}(q_n, p_n)}{\partial p_n} \right|_{q_n^0, p_n^0} + \dots \end{aligned} \quad (4.16)$$

analogamente para  $\mathbf{g}(q_n^0 + q_n^I, p_n^0 + p_n^I)$  teremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(q_n^0 + q_n^I, p_n^0 + p_n^I) &= \mathbf{g}(q_n^0, p_n^0) + q_n^I \left. \frac{\partial \mathbf{g}(q_n, p_n)}{\partial q_n} \right|_{q_n^0, p_n^0} + \\ &+ p_n^I \left. \frac{\partial \mathbf{g}(q_n, p_n)}{\partial p_n} \right|_{q_n^0, p_n^0} + \dots \end{aligned} \quad (4.17)$$

Desprezando os termos de ordem superior, introduzindo 4.16 e 4.17 em 4.15 e rearranjando os termos:

$$\begin{cases} q_{n+1}^I = q_n^I + q_n^I F_x^0 + p_n^I F_y^0 + a_n \\ p_{n+1}^I = p_n^I + q_n^I G_x^0 + p_n^I G_y^0 + b_n \end{cases} \quad (4.18)$$

Onde chamamos

$$F_x^0 = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(q_n, p_n)}{\partial q_n} \right|_{q_n^0, p_n^0} \quad ; \quad F_y^0 = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(q_n, p_n)}{\partial p_n} \right|_{q_n^0, p_n^0}$$

$$G_x^0 = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(q_n, p_n)}{\partial q_n} \right|_{q_n^0, p_n^0} ; G_y^0 = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(q_n, p_n)}{\partial p_n} \right|_{q_n^0, p_n^0} \quad (4.19)$$

e

$$a_n = q_n^0 - q_{n+1}^0 + \mathbf{f}(q_n^0, p_n^0) \quad (4.20)$$

$$b_n = p_n^0 - p_{n+1}^0 + \mathbf{g}(q_n^0, p_n^0)$$

Usando uma representação matricial para o mapa 4.18 teremos:

$$Z_n^I = \begin{pmatrix} q_n^I \\ p_n^I \end{pmatrix}; U_n = \begin{pmatrix} 1 + F_x^0 & F_y^0 \\ G_x^0 & 1 + G_y^0 \end{pmatrix}; C_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

ou seja:

$$Z_{n+1}^I = U_n Z_n^I + C_n \quad (4.22)$$

Pelas condições iniciais conhecemos  $C_n$  e  $U_n$ , e queremos  $Z_n^I$  de modo que possamos calcular todos os  $Z_{n+1}^I$ , na seguinte forma:

$$Z_2^I = U_1 Z_1^I + C_1$$

$$Z_3^I = U_2 Z_2^I + C_2 = U_2 U_1 Z_1^I + U_2 C_1 + C_2$$

$$Z_4^I = \dots = U_3 U_2 U_1 Z_1^I + U_3 U_2 C_1 + U_3 C_2 + C_3 \quad (4.23)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$Z_{N+1}^I = \dots = M Z_1^I + B$$

Onde  $M$  ( a matriz monodromia ) e  $B$  são calculados como:

$$M = U_N U_{N-1} U_{N-2} \dots U_2 U_1 \quad (4.24)$$

$$B = U_N \dots U_2 C_1 + U_N \dots U_3 C_2 + \dots + U_N C_{N-1} + C_N$$

Impondo-se a periodicidade  $N$  temos que  $Z_{N+1}^I = Z_1^I$  que substituído em 4.23 e rearranjando o resultado nos dá:

$$Z_1^I = (1 - M)^{-1} B \quad (4.25)$$

A partir de  $Z_1^I$  podemos calcular  $Z_2^I, Z_3^I, \dots, Z_N^I$  por 4.23 e dessa forma a equação 4.14 se torna:

$$Z_n = Z_n^0 + Z_n^I \quad (4.26)$$

$Z_n$  são os pontos da órbita periódica, calculados a partir da tentativa  $Z_n^0$ , tomados nas vizinhanças da órbita periódica e corrigidos por  $Z_n^I$ . Mas sabemos que  $Z_n^I$  é uma aproximação, portanto  $Z_n$  não será exato, mas sim um valor melhor que  $Z_n^0$ . Porém tomando-se os valores de  $Z_n$  como  $Z_n^0$  de uma nova rotina de cálculo, nos aproximaremos ainda mais do  $Z_n$  procurado. Dessa forma, em iterações sucessivas teremos  $Z_n^0 \rightarrow Z_n$  ou seja  $Z_n^I \rightarrow 0$ .

O desvio pode ser calculado com a precisão que se deseja usando:

$$D = \sum_{n=1}^N [(q_n^I)^2 + (p_n^I)^2]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \quad (4.27)$$

como uma medida do erro de cada iteração.

A estabilidade dos pontos da órbita periódica pode ser determinada pelos autovalores da matriz  $M$ , ou seja, se tivermos autovalores reais, a órbita é hiperbólica ( instável ), se os autovalores forem complexos a órbita é elíptica ( estável ).

# Capítulo 5

## Resultados Numéricos

Neste capítulo vamos aplicar os métodos numéricos, descritos no capítulo anterior, ao modelo em estudo, que é a forma normal de Meyer, afim de encontrarmos os pontos fixos, traçarmos as separatrizes e finalmente calcularmos os pontos periódicos.

Deve-se no entanto realçar o fato do trabalho de T. J. S. B. Coutinho em [7] já ter tratado da generalização das aplicações quadráticas e o presente mapa é uma aplicação quadrática.

A forma normal de Meyer é:

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n - p_n \\ p_{n+1} = p_n + \varepsilon + (q_n - p_n)^2 \end{cases} \quad (5.1)$$

## 5.1 Pontos Fixos

Usando as equações 4.1 e 4.3 para os pontos fixos, encontramos os seguintes resultados:

$$q_0 = \pm\sqrt{-\varepsilon} \tag{5.2}$$

$$p_0 = 0$$

e portanto os dois pontos fixos  $(+\sqrt{-\varepsilon}, 0)$  e  $(-\sqrt{-\varepsilon}, 0)$  só existem para  $\varepsilon < 0$ .

Nas proximidades desses pontos teremos:

$$\begin{cases} q'_0 + \delta q' = q_0 + \delta q - \delta p \\ \delta p' = \delta p + \varepsilon + ((q_0 + \delta q_0) - \delta p_0)^2 \end{cases} \tag{5.3}$$

Desenvolvendo o sistema, desprezando os termos de ordem superior e usando a equação 4.5 na sua forma matricial obtemos

$$\begin{pmatrix} \delta q' \\ \delta p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2q & 1 - 2q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta p \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Onde a matriz  $T$  da equação 4.5 tem como auto-valores

$$\lambda = 1 - q \pm \sqrt{q^2 - 2q}$$

Substituindo o ponto fixo  $(+\sqrt{-\varepsilon}, 0)$  temos  $\lambda = 1 - \sqrt{-\varepsilon} \pm \sqrt{-\varepsilon - 2\sqrt{-\varepsilon}}$  e como  $\varepsilon < 0$  temos duas possibilidades:

$\lambda$  é complexo se  $-4 < \varepsilon < 0$

ou

$\lambda$  é real se  $\varepsilon < -4$ .

Substituindo o ponto fixo  $(-\sqrt{-\varepsilon}, 0)$  temos  $\lambda = 1 + \sqrt{-\varepsilon} \pm \sqrt{-\varepsilon + 2\sqrt{-\varepsilon}}$  e como  $\varepsilon < 0$ ,  $\lambda$  é real sempre.

Resumindo, a natureza dos pontos fixos será:

Hiperbólico em  $(-\sqrt{-\varepsilon}, 0)$  se  $\varepsilon < 0$  (sempre)

Elíptico em  $(+\sqrt{-\varepsilon}, 0)$  se  $-4 < \varepsilon < 0$  e

Hiperbólico em  $(+\sqrt{-\varepsilon}, 0)$  se  $\varepsilon < -4$ .

## 5.2 Separatrizes

As separatrizes são duas, uma estável que termina no ponto hiperbólico e uma instável que nasce no mesmo ponto.

Pontos tomados sobre a separatriz instável, próximos do ponto hiperbólico, são mapeados usando a forma normal de Meyer direta (equação 5.1), mas pontos sobre a separatriz estável vão em direção ao ponto fixo, de forma que temos que usar a forma normal de Meyer inversa para obter essa separatriz, ou seja:

$$\begin{cases} q_{n+1} = p_n - \varepsilon - q_n^2 + q_n \\ p_{n+1} = p_n - \varepsilon - q_n^2 \end{cases} \quad (5.5)$$

No intervalo em estudo,  $-4 < \varepsilon < 0$ , temos um único ponto fixo hiperbólico  $(-\sqrt{-\varepsilon}, 0)$ , que tem dois autovetores, cujas direções determinam as retas que são tangentes às separatrizes no ponto hiperbólico.

Essas retas são:

$$\begin{aligned} p^u &= (-\sqrt{-\varepsilon} - \sqrt{-\varepsilon + 2\sqrt{-\varepsilon}})(q^u + \sqrt{-\varepsilon}) \\ p^s &= (-\sqrt{-\varepsilon} + \sqrt{-\varepsilon + 2\sqrt{-\varepsilon}})(q^s + \sqrt{-\varepsilon}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Tomando pontos sobre as retas, próximos ao ponto hiperbólico e usando o mapa direto para a variedade instável e o mapa inverso para a variedade estável, teremos as separatrizes para diversos valores do parâmetro  $\varepsilon$ , conforme seguem as figuras.

A mesma escala foi usada para os mapas com  $\varepsilon = -0.1$ ,  $\varepsilon = -0.3$  e  $\varepsilon = -0.5$ . Uma escala maior foi adotada nos mapas seguintes.

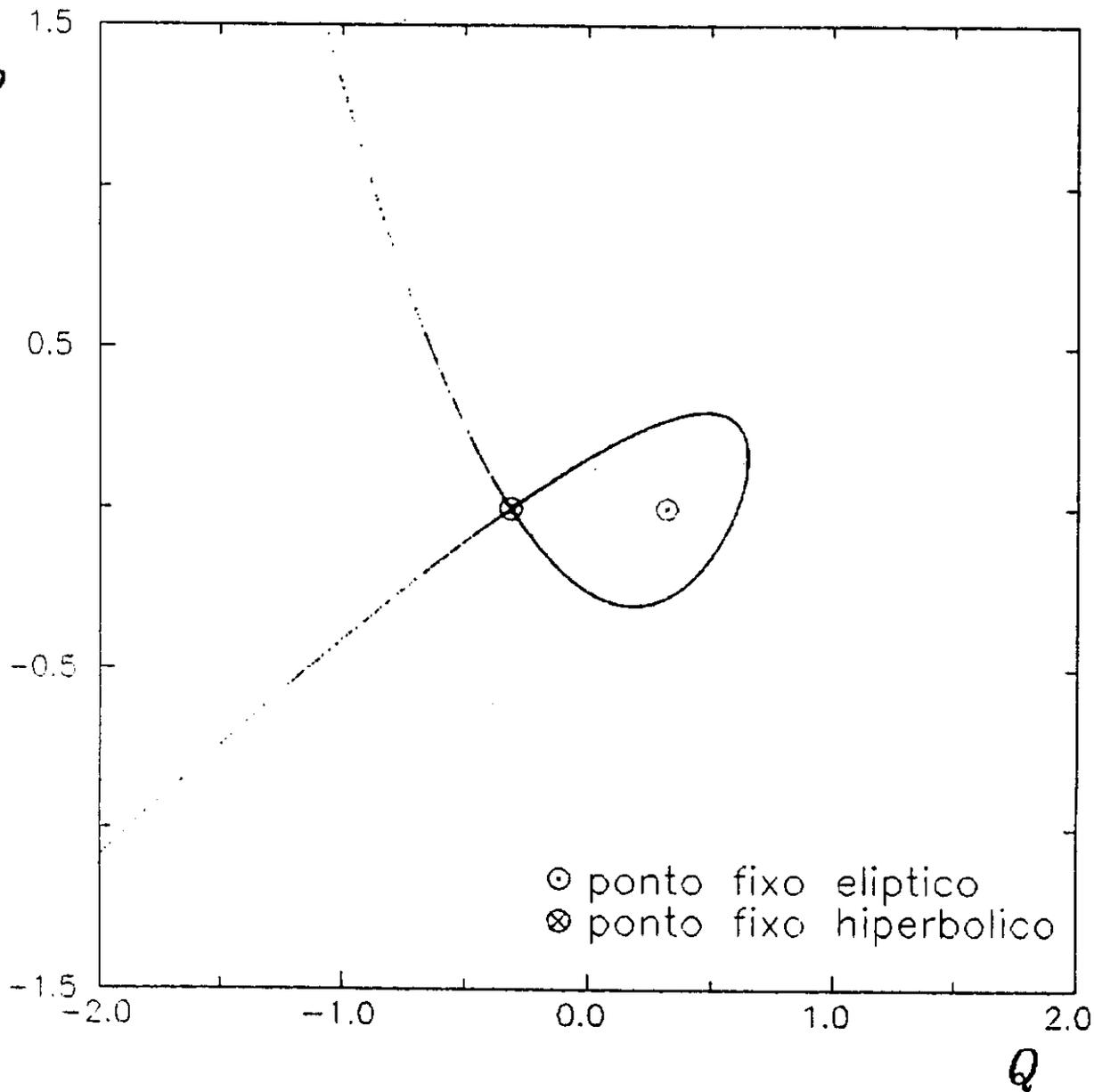


Figura 5.1: *Separatrizes com  $\varepsilon = -0.1$ . Com esse valor de parâmetro não é possível distinguir as duas separatrizes, mas apenas uma única alça, saindo do ponto fixo hiperbólico e rodeando o ponto fixo elíptico.*

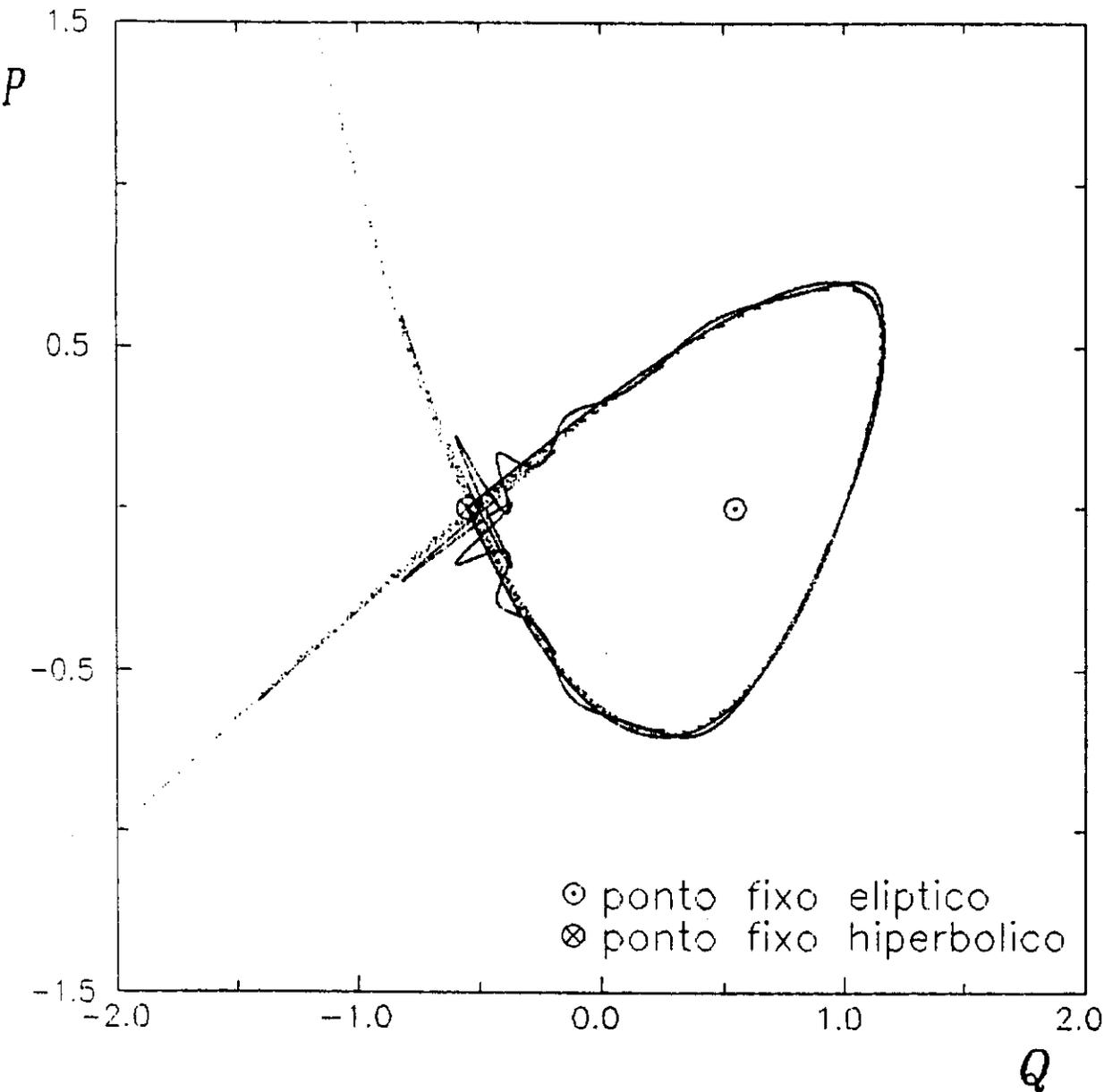


Figura 5.2: *Separatrizes com  $\epsilon = -0.3$ . Com esse valor de parâmetro já se percebe uma oscilação das separatrizes, na região próxima ao ponto hiperbólico, mas ainda é difícil distinguir as duas separatrizes no restante da alça.*

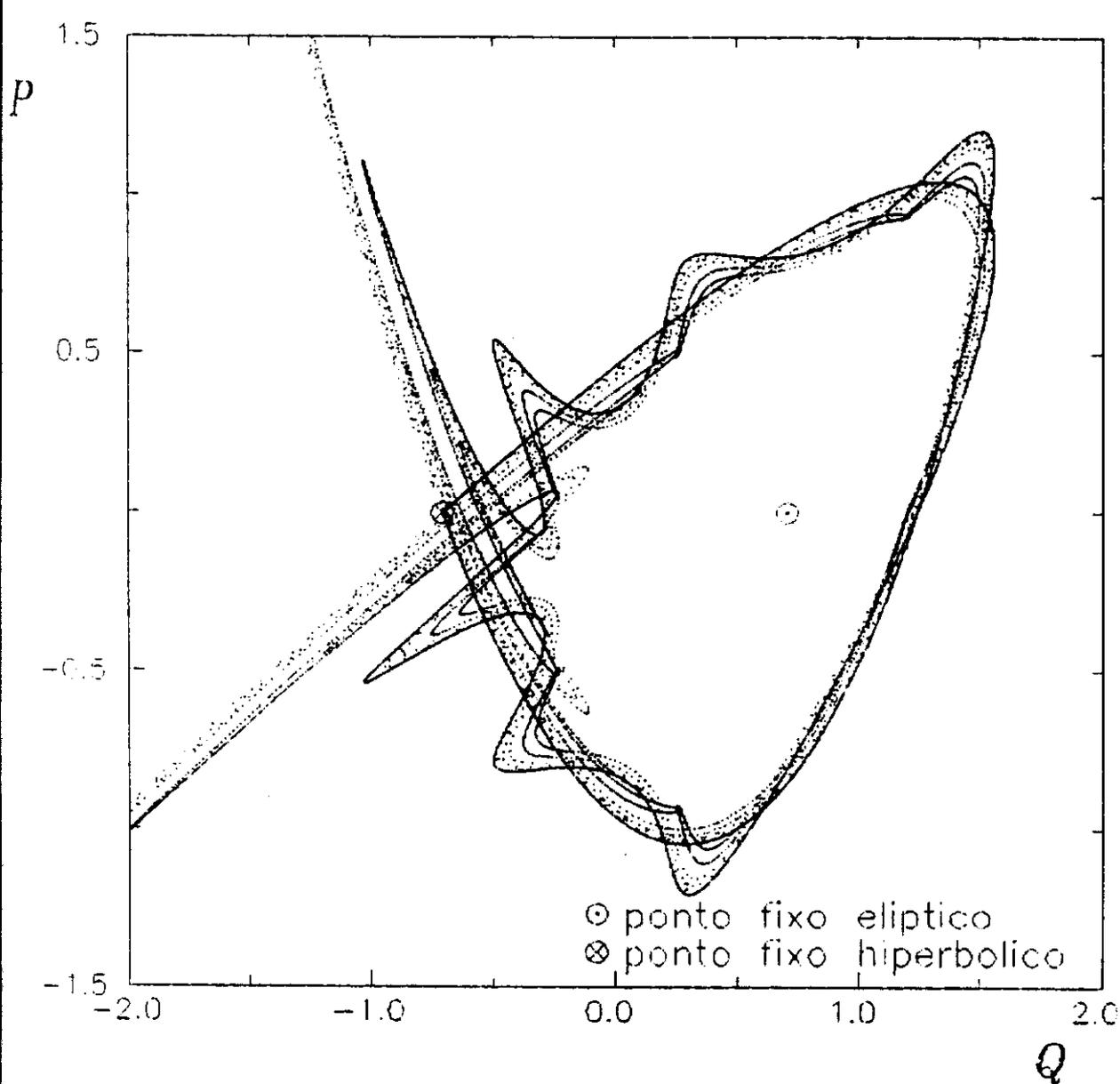


Figura 5.3: *Separatrizes com  $\varepsilon = -0.5$ . Com esse valor de parâmetro é possível distinguir as duas separatrizes em toda a alça, e ainda podemos ver diversas curvas secundárias que compõe o emaranhado homoclínico.*

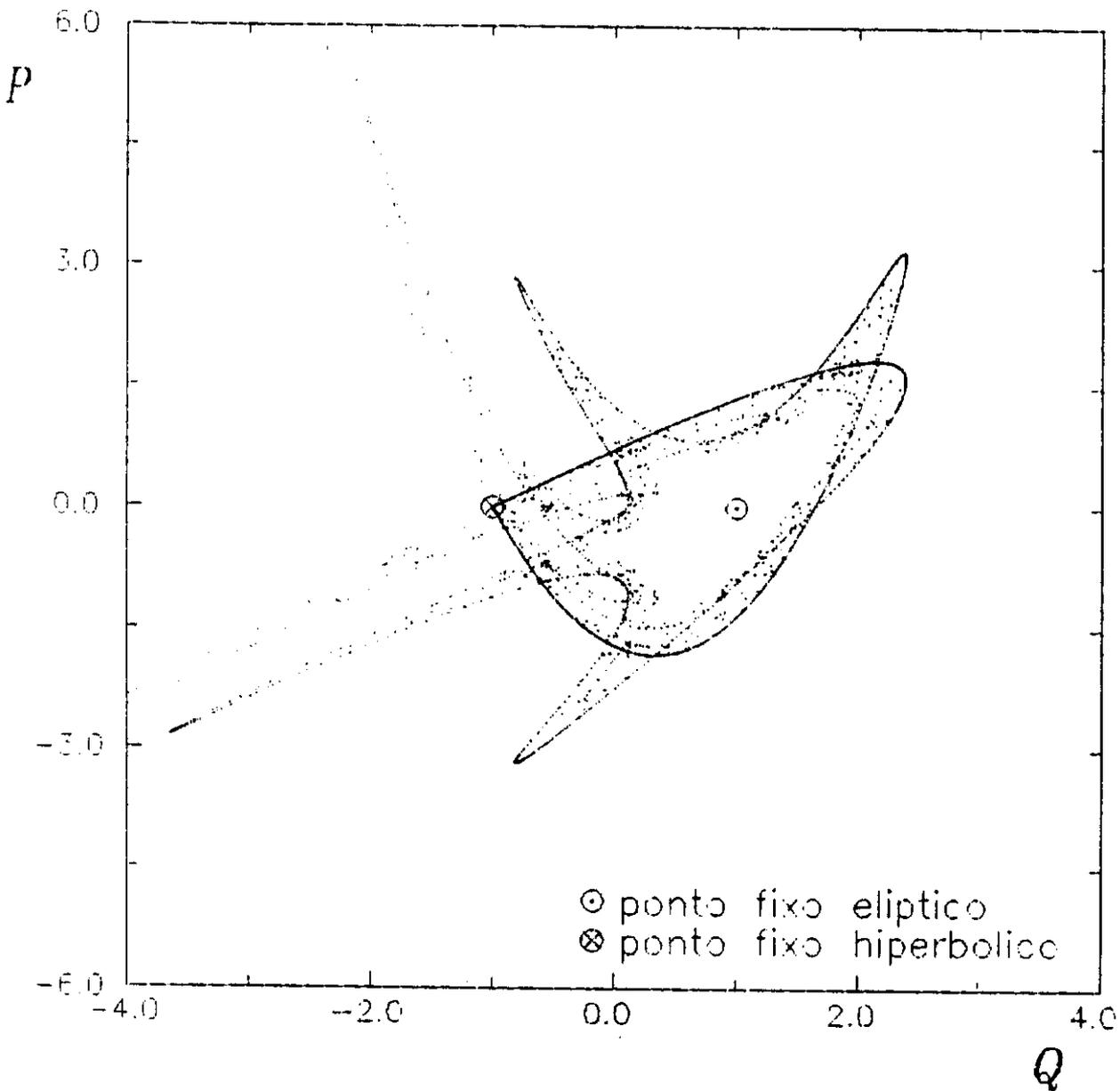


Figura 5.4: *Separatrizes com  $\varepsilon = -1.0$ . Para esse valor do parâmetro as oscilações das separatrizes já são da ordem das dimensões do próprio emaranhado homoclínico.*

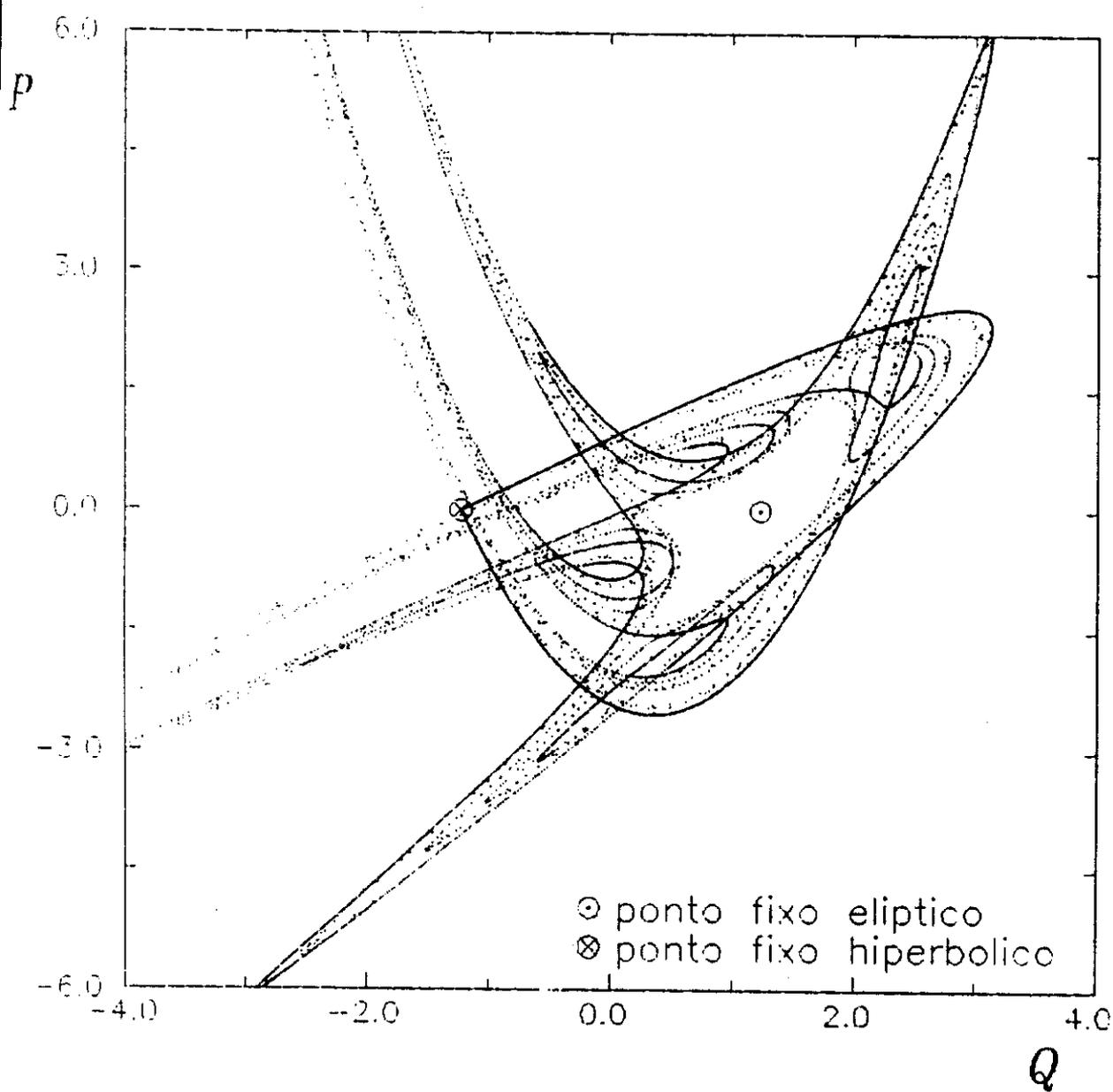


Figura 5.5: Separatrizes com  $\varepsilon = -1.5$ . Para esse valor de parâmetro, além das oscilações serem de mesma ordem que o próprio emaranhado homoclínico, a região estável em volta do ponto elíptico já é muito pequena.

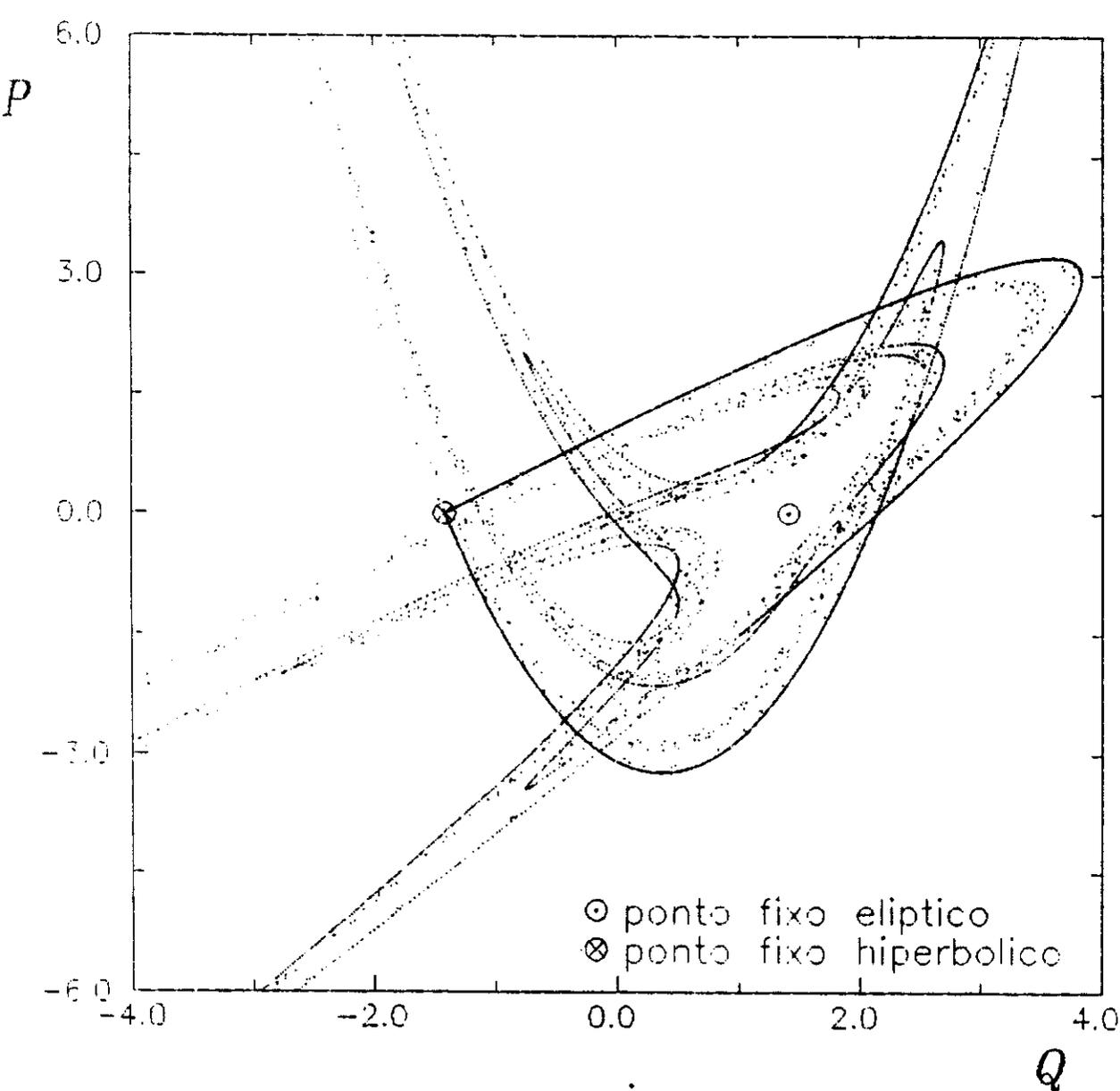


Figura 5.6: *Separatrizes com  $\epsilon = -2.0$ . Para esse valor do parâmetro já não notamos grandes mudanças em relação à figura anterior e a região interna do loop está cada vez menor em relação ao resto do conjunto.*

## 5.3 Órbitas Periódicas

O cálculo das órbitas periódicas, a seguir, usou como parâmetro inicial de trabalho  $\varepsilon = -0.5$  e a partir desse valor, vamos reproduzir o mapa visto na seção anterior. A escolha desse valor de parâmetro é arbitrária, mas, diante das curvas traçadas na seção anterior, parece ser um bom valor de trabalho, pois concilia a possibilidade de se distinguir as duas separatrizes com uma grande área estável ao redor do ponto elíptico. Afim de facilitar a compreensão, acrescentamos algumas curvas invariantes na região interna da alça formada pelas separatrizes, ou seja, nas proximidades do ponto fixo elíptico.

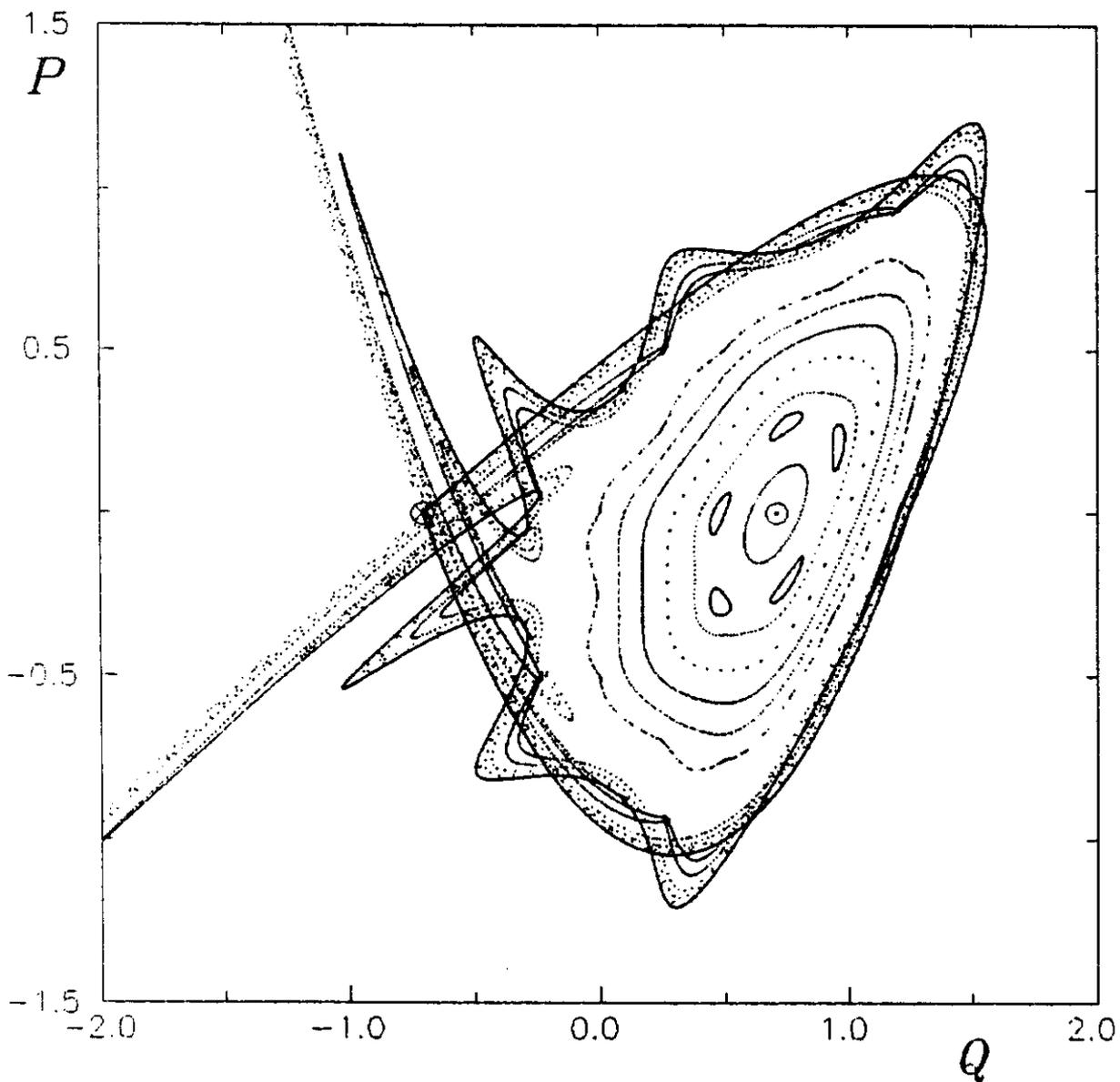


Figura 5.7: *Curvas Invariantes para  $\epsilon = -0.5$ . Podemos observar diversas curvas invariantes ao redor do ponto elíptico, e em especial a existência de um conjunto de cinco ilhas.*

Identifica-se imediatamente um conjunto de cinco ilhas rodeando o ponto fixo elíptico.

Essas ilhas serão o nosso objetivo inicial, que ampliadas e com um maior número de curvas invariantes nos dão a figura a seguir.

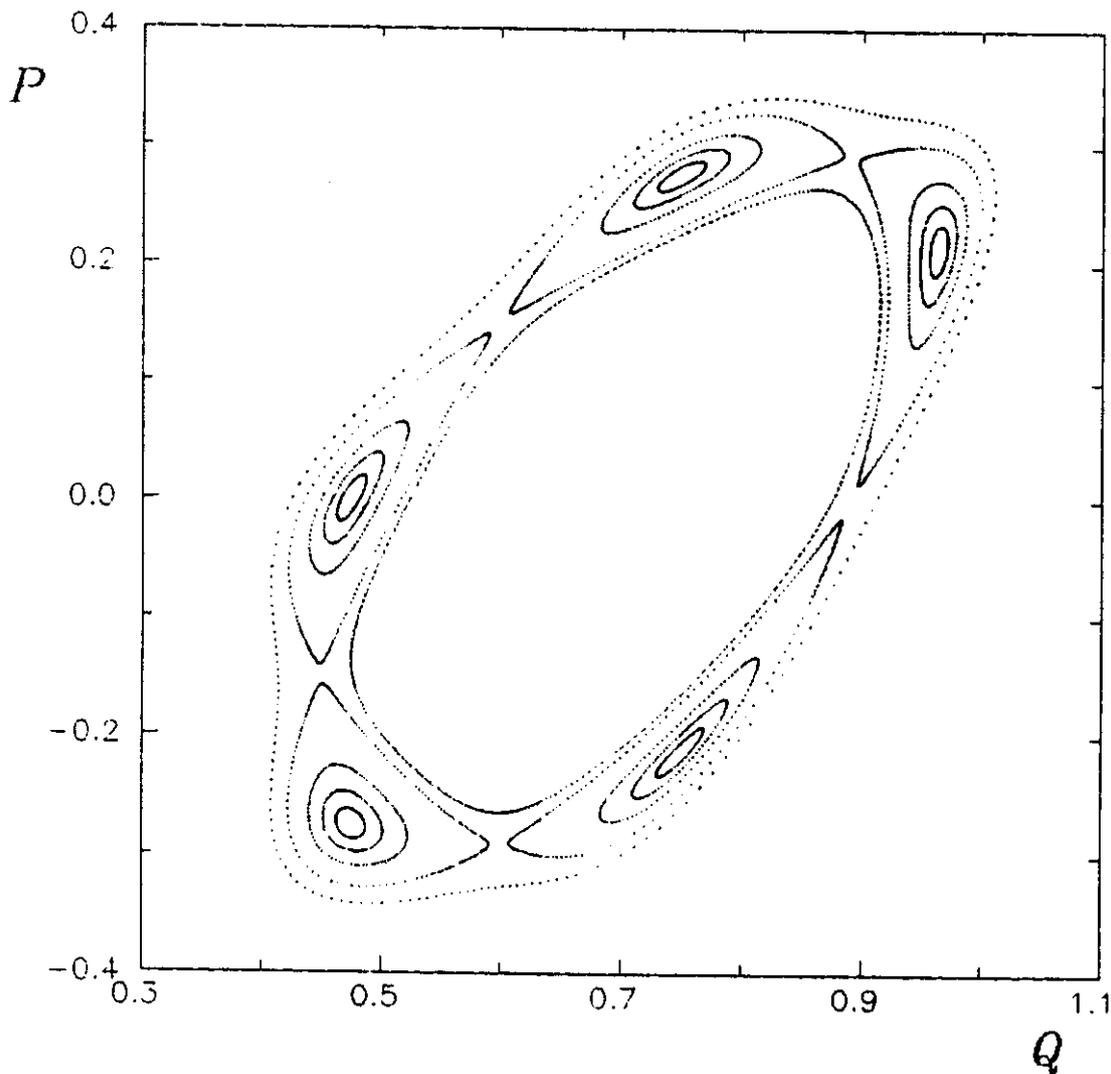


Figura 5.8: Ilhas das Órbitas de Período 5. Essa figura é uma ampliação da figura anterior, com o mesmo  $\varepsilon = -0.5$ , mas com mais curvas invariantes.

O método numérico descrito no capítulo 4 baseia-se em aproximações que convergem para as órbitas periódicas a partir de um conjunto inicial de pontos, que no nosso caso foi obtido graficamente a partir da figura acima. Tomando um conjunto de cinco pontos nas proximidades dos centros das cinco ilhas e usando o método de convergência encontramos uma órbita periódica estável de período cinco. Analogamente usando, como pontos de partida, as proximidades dos pontos de tangência entre as ilhas, teremos uma órbita periódica instável de mesmo período.

Usando esses dois conjuntos de pontos como partida e acrescentando um ponto extra entre dois pontos quaisquer de cada um dos conjuntos, consegue-se a convergência para as órbitas de período seis. Repetindo-se o processo, encontramos as órbitas de período 7, 8, ...etc, até o período desejado.

Dessa forma temos duas famílias de órbitas que denominaremos preliminarmente de **família estável** e **família instável**, conforme figura a seguir.

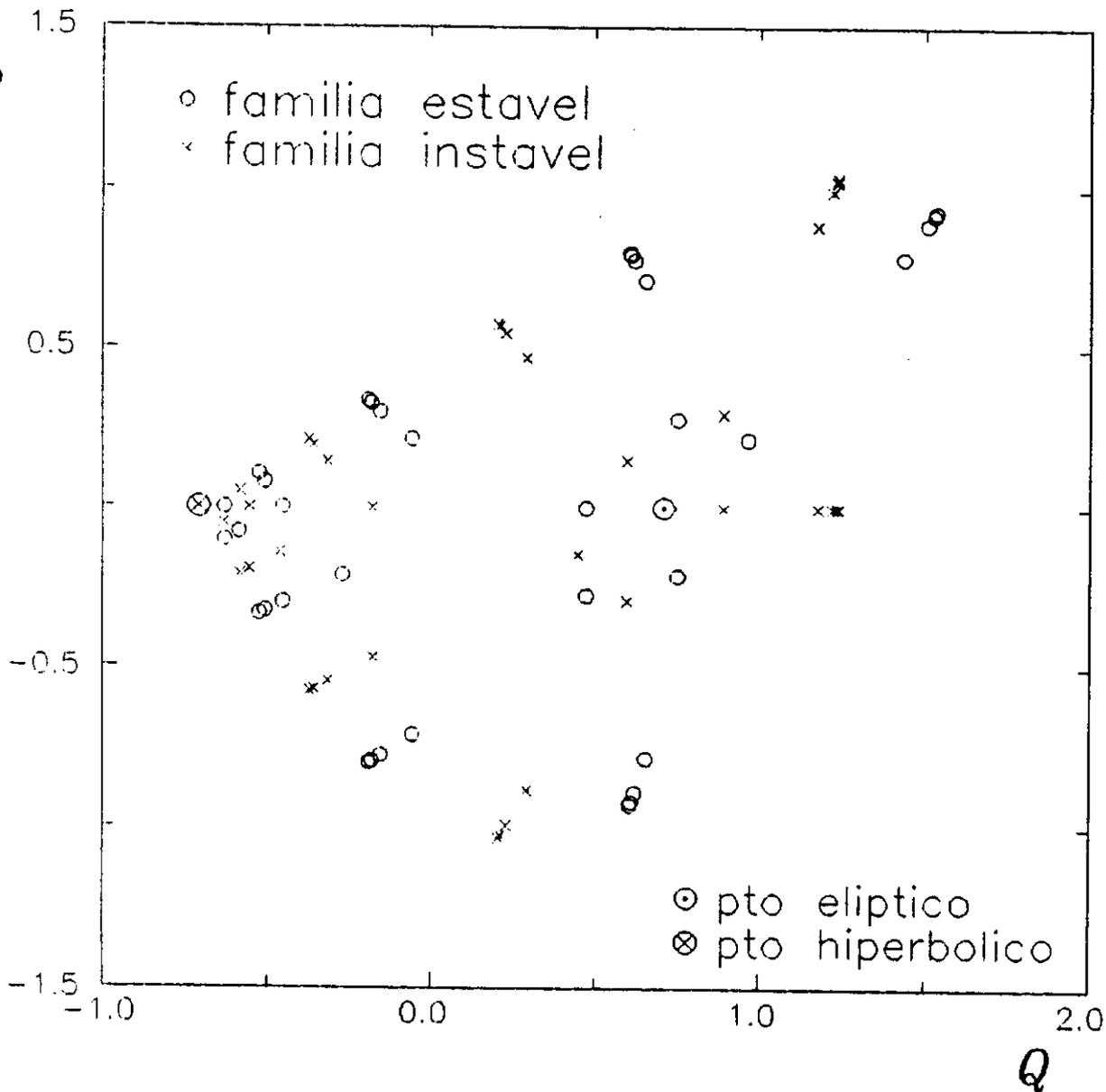


Figura 5.9: *Famílias de Órbitas Periódicas com períodos 5, 6, 7, 8 e 9 . Todas as órbitas plotadas são para o mesmo  $\varepsilon = -0.5$ . É imediata a constatação que essas órbitas existem sempre aos pares, uma da família estável e outra da família instável.*

Convém ressaltar que para o parâmetro em estudo ( $\varepsilon = -0.5$ ), as órbitas de período maior que seis da família estável na verdade são instáveis, e a denominação refere-se somente a sua origem e não a sua condição no presente valor do parâmetro. Dessa forma é conveniente renomearmos essas famílias; assim sendo, às órbitas da família estável chamaremos de **inversas** e às órbitas da família instável chamaremos de **diretas**. Essa denominação se refere ao fato de que no regime em que ambas as órbitas são instáveis, os auto-valores das **diretas** são positivos e os auto-valores das **inversas** são negativos. Quando for conveniente, usaremos as duas denominações simultaneamente.

Uma constatação numérica nos mostra que para uma órbita periódica qualquer, os pontos rodam em volta do ponto fixo elíptico, porém com ângulos de estabilidade diferentes entre si, ou seja, quando os pontos estão rodando em volta do ponto fixo elíptico, na região entre o ponto fixo elíptico e o ponto fixo hiperbólico, o ângulo de estabilidade é menor que na região diametralmente oposta.

Em outras palavras, os pontos de uma órbita periódica rodam em volta do ponto fixo elíptico, com velocidades variáveis; mais devagar, próximo ao ponto fixo hiperbólico; e mais rapidamente, nas regiões mais afastadas.

Esse comportamento é cada vez mais acentuado quanto maior for o período da órbita, o que é consistente com o fato das órbitas de períodos grandes se aproximarem das separatrizes.

As separatrizes podem ser vistas como constituídas por órbitas de período infinito, ou seja, uma vez na separatriz estável, o ângulo de estabilidade (e conseqüentemente a velocidade em volta de ponto elíptico) diminui até tender a zero, ou leva um tempo infinito para atingir o ponto hiperbólico. Quanto à separatriz instável, pode-se dizer que quanto mais próximo do ponto fixo hiperbólico, maior será o tempo necessário para o ponto conseguir se afastar, ou seja, temos o mesmo comportamento da separatriz estável,

porém com sentido temporal invertido.

Diante disso pode-se observar que o aumento do período de uma dada órbita se dá com o aumento do número de pontos periódicos, sempre nas vizinhanças do ponto fixo hiperbólico e nunca no lado oposto do loop homoclínico, e como o aumento de período converge para as separatrizes, nas proximidades do ponto hiperbólico a convergência é mais lenta que no lado oposto do loop.

Esses pontos de convergência são os pontos onde se cruzam as separatrizes estável e instável, ou seja, são órbitas homoclínicas, como pode ser observado na figura abaixo.

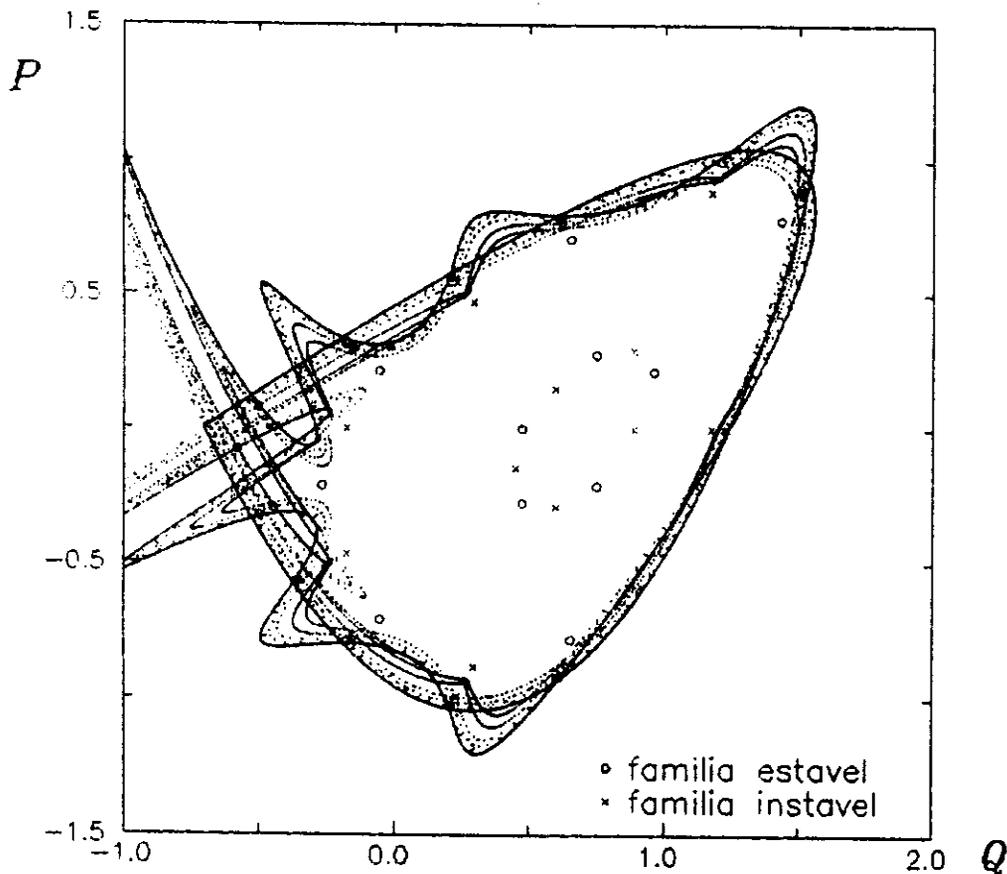


Figura 5.10: *Conjunto Homoclínico, com  $\epsilon = -0.5$  onde podemos observar a convergência das famílias direta (instável) e inversa (estável).*

## 5.4 Variação do parâmetro $\varepsilon$

Vamos agora mostrar a evolução de uma órbita periódica diante da variação do parâmetro  $\varepsilon$ . O objetivo é determinar o ponto ou pontos de onde se originam essas órbitas.

Primeiramente vamos determinar os pontos críticos em que ocorrem as  $n$ -plicações a partir do ponto elíptico, isso pode ser calculado a partir do ângulo de estabilidade, ou seja, cada vez que o ângulo de estabilidade for  $\theta = \frac{2\pi}{M}$  onde  $M$  é o período da  $n$ -plicação.

como os auto-valores do ponto elíptico podem ser escritos como:

$$\lambda = 1 - \sqrt{-\varepsilon} \pm \sqrt{-\varepsilon - 2\sqrt{-\varepsilon}} \quad (5.7)$$

como  $\lambda = e^{\pm i\theta}$ , se substituirmos  $\sqrt{-\varepsilon} = X$ , teremos:

$$\cos \theta = 1 - X$$

$$i \sin \theta = \sqrt{X^2 - 2X}$$

ou

$$\tan^2 \theta = -\frac{X^2 - 2X}{X^2 - 2X + 1} \quad (5.8)$$

o que nos permite, para um dado período  $M$ , encontrar o valor de  $\varepsilon$  em que esse período irá surgir.

Escolhemos como exemplo uma órbita de período sete, que é um número primo e portanto não é nenhum múltiplo de órbitas de períodos menores que sofreram  $n$ -plicações.

Calculando pelo método acima temos para  $M = 7$  que  $\varepsilon = -0.14175990$ , que pode ser confirmado pela figura a seguir, onde foi calculado numericamente para diversos valores do parâmetro  $\varepsilon$  a posição da órbita de período sete.

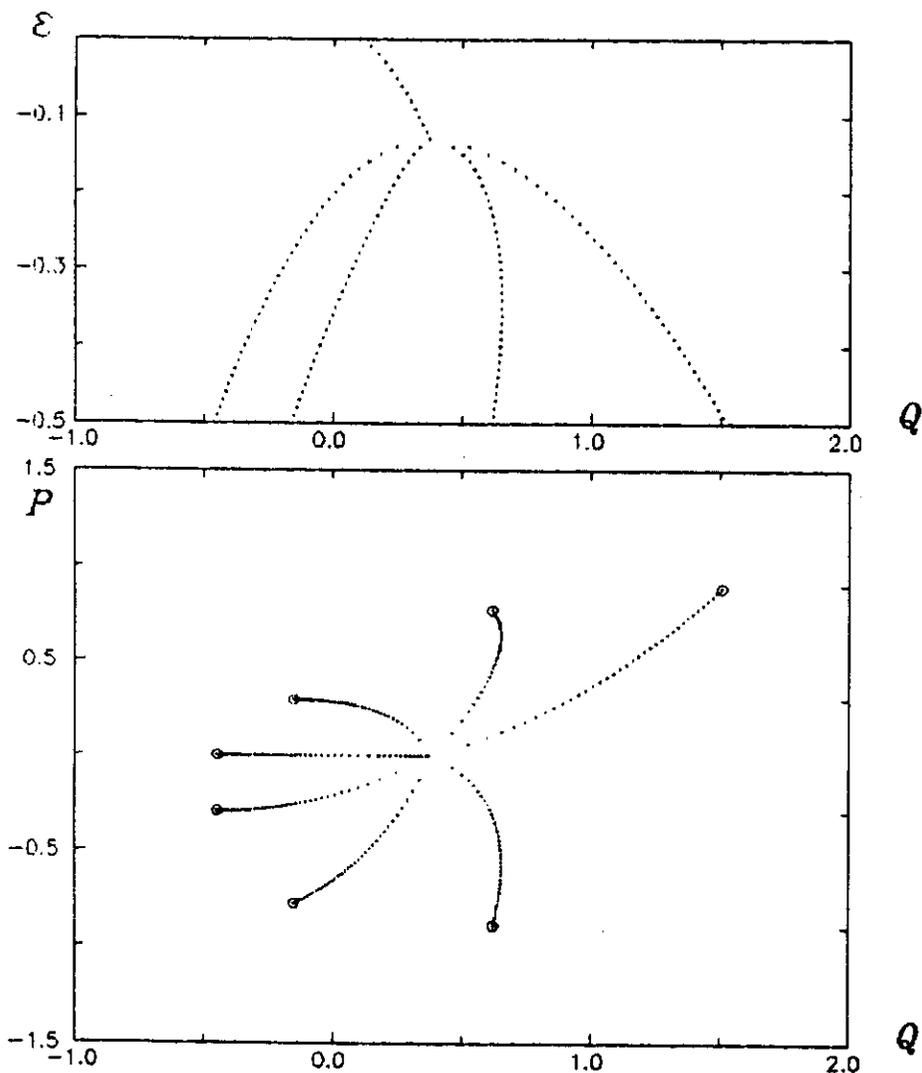


Figura 5.11: Órbita de período 7 da família inversa. Na figura superior temos a variação de  $\varepsilon$  entre 0 e  $-0.5$  numa projeção de  $\varepsilon \times Q$  e na figura inferior, uma projeção em  $P \times Q$ , para a mesma variação de  $\varepsilon$ .

A figura 5.11 mostra a órbita de período sete da família **inversa**, com  $\varepsilon$  variando de 0 a  $-0.5$ . Temos duas figuras distintas, a superior onde estão plotados o parâmetro  $\varepsilon$  por  $Q$ , onde pode-se notar uma única linha se ramificando em quatro outras. Essa linha única é o ponto **elíptico** para os diversos valores do parâmetro (na verdade ela continua depois da bifurcação, apenas não está desenhada) e quatro linhas que se originam dela, que na verdade são sete, pois três delas possuem os mesmos valores de  $\varepsilon$  e  $Q$ , que outras três linhas, o que pode facilmente ser observado, na figura inferior, em que temos as coordenadas  $Q$  e  $P$ , onde as sete linhas são distintas.

Fica evidente que a origem dessa órbita de período sete se deve a uma bifurcação do ponto fixo elíptico, que chamaremos de **bifurcação local**.

A órbita periódica de período sete, porém da família **direta**, se origina no mesmo ponto, ou seja as órbitas que surgem a partir do ponto fixo elíptico surgem aos pares, **diretas** e **inversas**.

Estudando as órbitas da família **inversa** (estável) podemos observar que existe uma mudança de estabilidade, ou seja, com o aumento do valor do parâmetro  $|\varepsilon|$  a órbita estável se transforma em instável ao mesmo tempo em que dá origem a uma órbita periódica estável com o dobro do período.

## 5.5 Órbitas periódicas de múltiplas voltas

No caso do exemplo em estudo, a órbita de período sete da família estável já está instável, ou seja, já bifurcou e devemos encontrar uma órbita de período quatorze que inclusive também já pode ter bifurcado e pode ser que seja instável.

Procurando uma órbita de período quatorze nas proximidades da órbita de período sete significa que devemos procurar uma órbita que dê duas voltas em torno do ponto elíptico.

Pudemos encontrar tres órbitas em vez de apenas uma, conforme figura

a seguir.

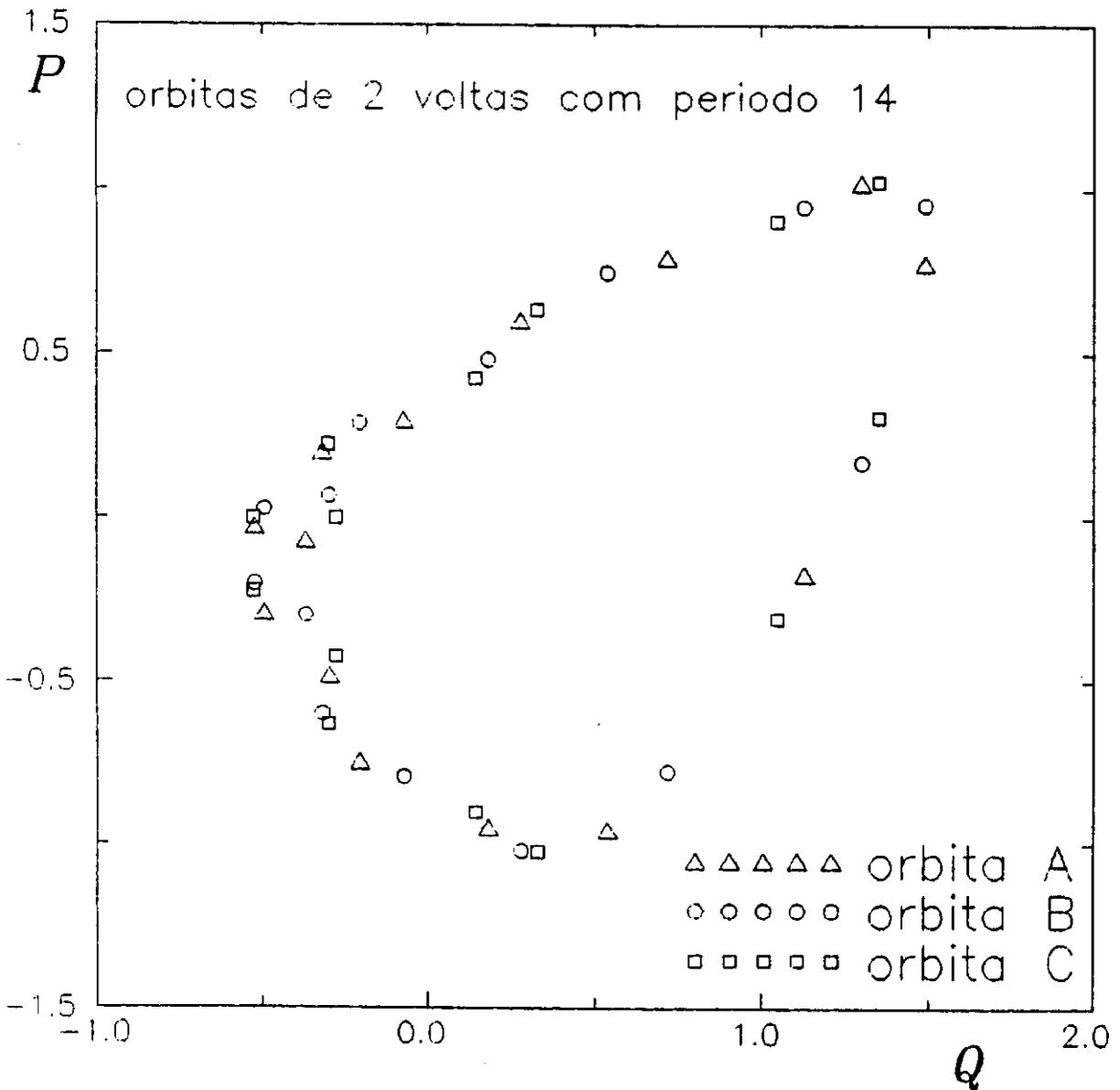


Figura 5.12: Órbitas de período 14 com duas voltas. Podemos observar que foram encontradas três órbitas distintas com mesmo período para o mesmo valor do parâmetro  $\varepsilon = -0.5$ .

Fazendo o mesmo procedimento de variação do parâmetro  $\varepsilon$ , usado para estudar a órbita de período sete, para cada uma das tres órbitas de período quatorze encontradas, teremos:

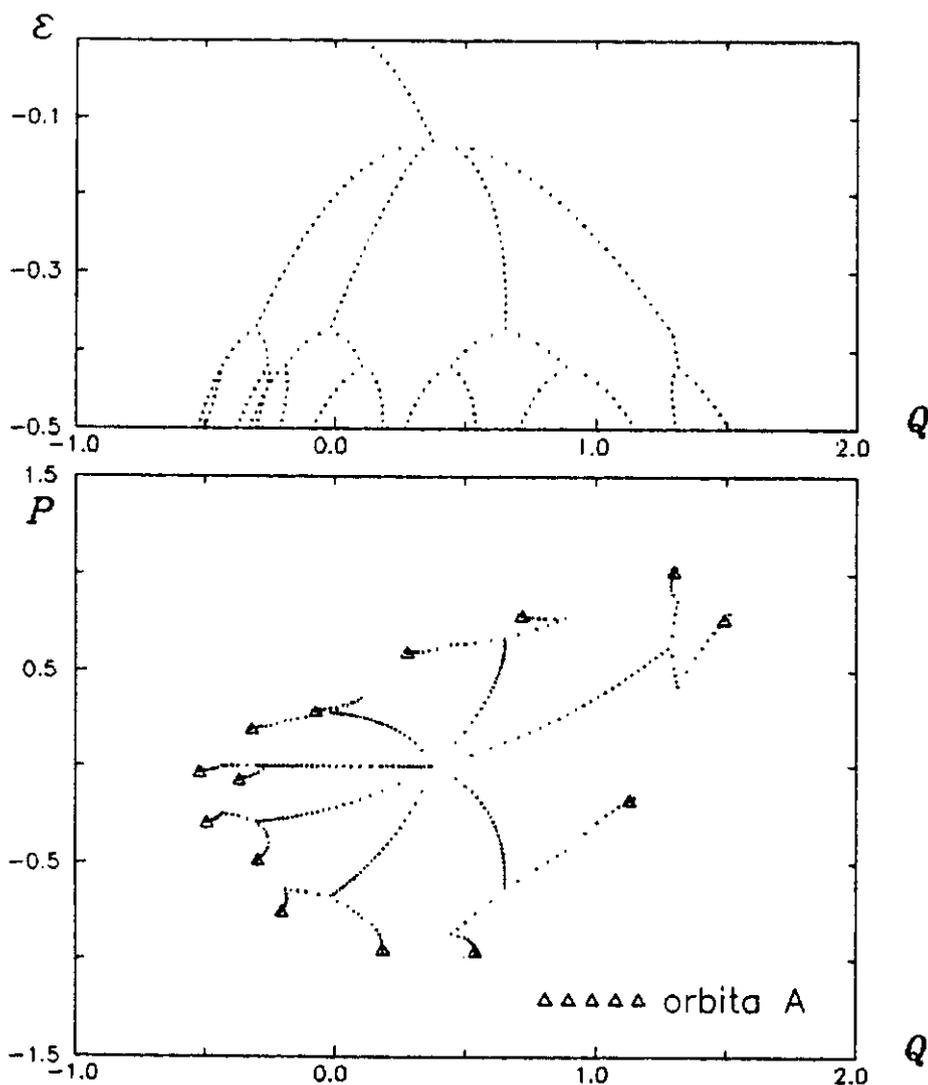


Figura 5.13: Órbita "A" de período quatorze. Podemos observar na figura superior a curva do ponto elíptico, a bifurcação de período sete, já descrita com 4 ramos (na verdade 7) e os mais 7 ramos (também duplos portanto 14), que podem ser melhor entendidos observando a figura inferior.

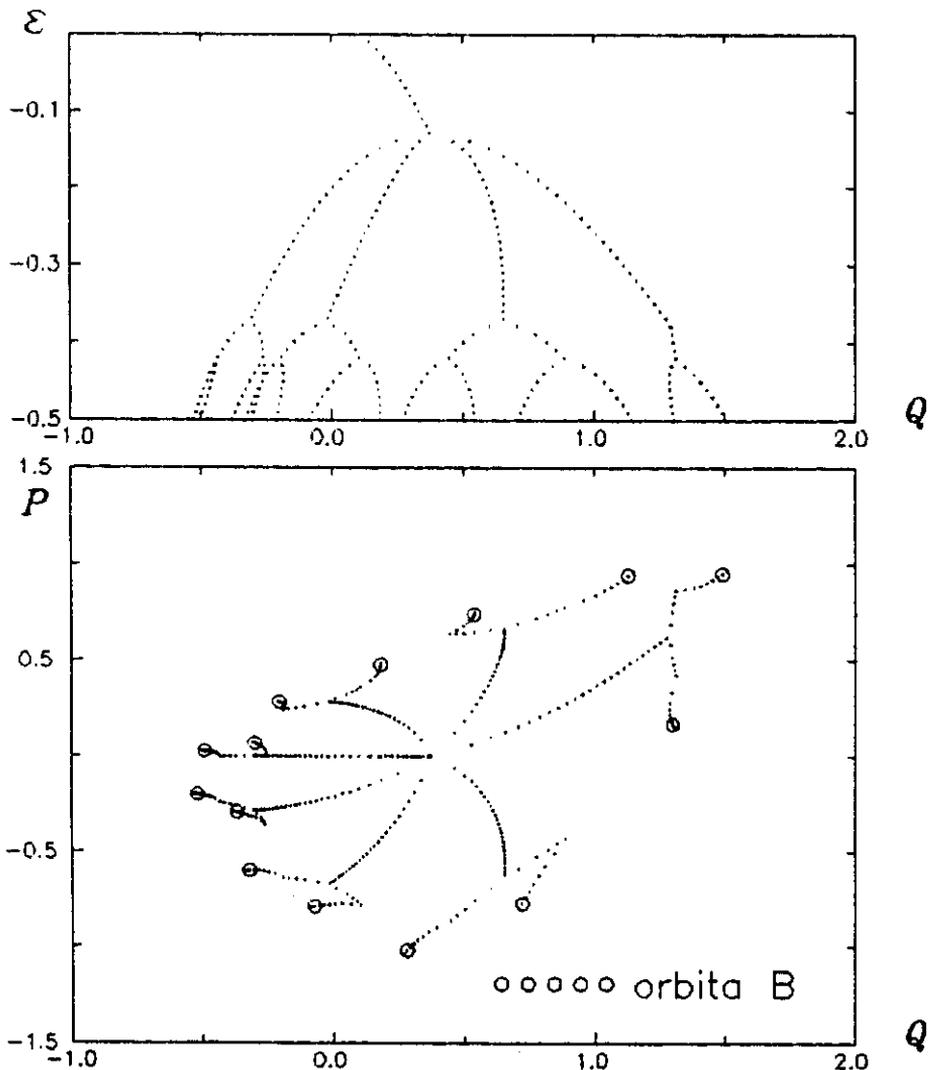


Figura 5.14: Órbita "B" de período quatorze. O mesmo da figura anterior, mas com as extremidades dos ramos em posições diferentes.

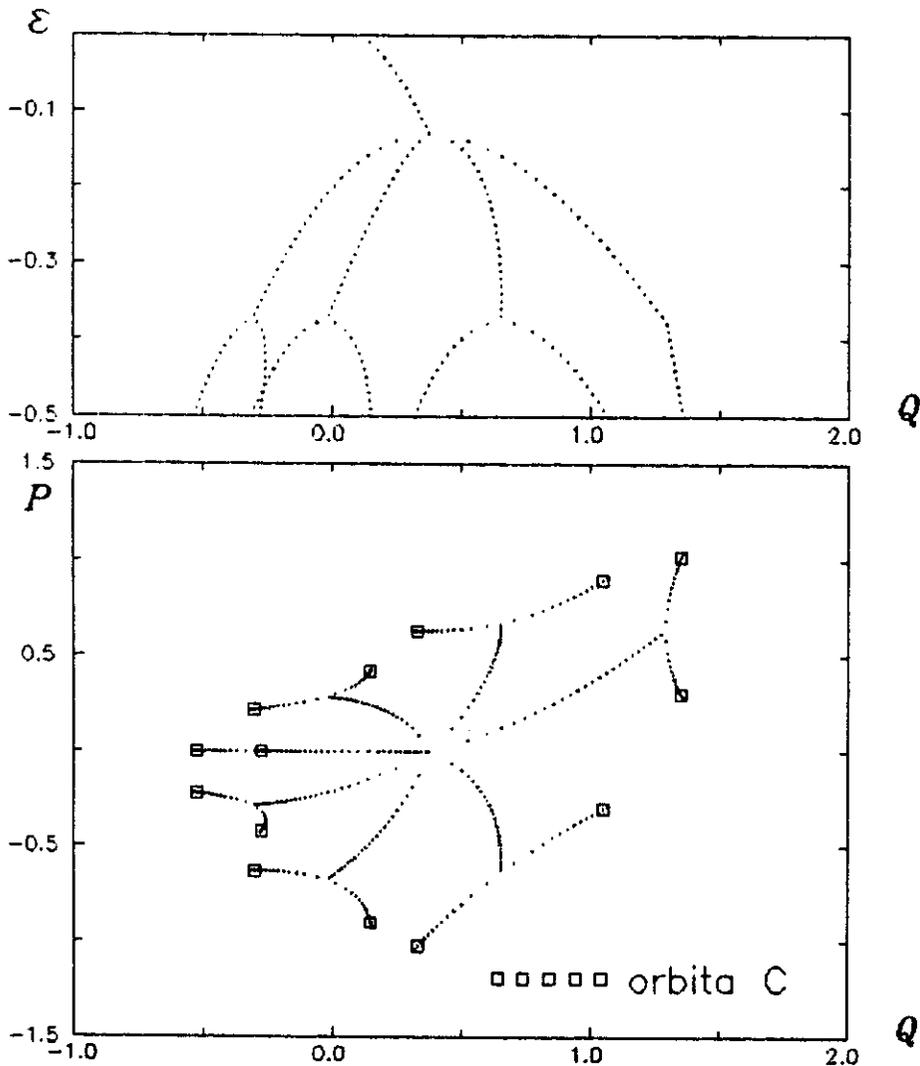


Figura 5.15: Órbita "C" de período quatorze. Nesse caso a origem da órbita pode ser observada como uma duplicação da órbita de período 7 já descrita anteriormente.

Essa análise nos permite encontrar com facilidade qual das órbitas se originou da bifurcação da órbita de período sete que é a órbita chamada de "C".

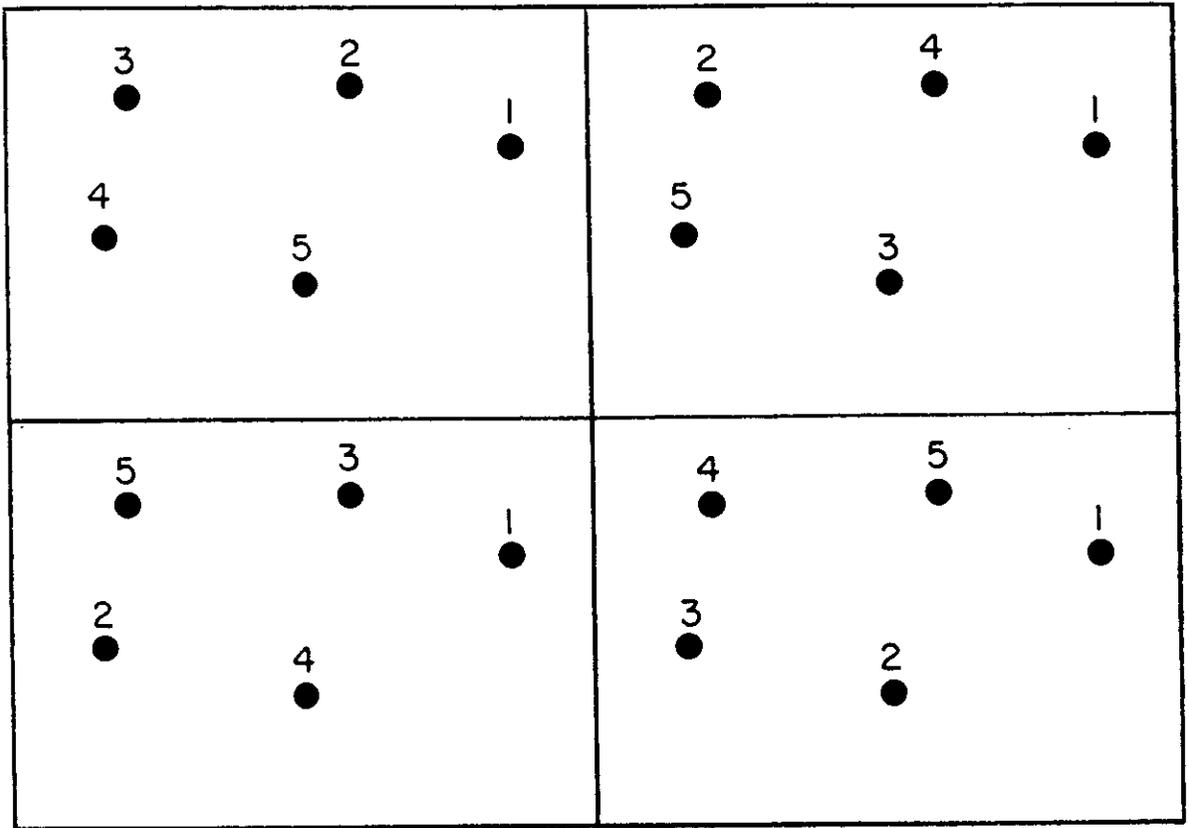
As outras duas surgem também aos pares, porém não são o resultado da bifurcação de uma órbita periódica e por isso as chamaremos de **bifurcações globais**.

A introdução de conceitos como órbitas **diretas e inversas**, bifurcações **locais e globais**, visa uma possível classificação das órbitas periódicas de conjuntos homoclínicos. Falta porém discutir dois pontos importantes: primeiro devemos notar que um mesmo conjunto de pontos que representa uma dada órbita periódica também representa todos os múltiplos dessa mesma órbita, ou seja, para cada órbita periódica encontrada temos infinitas outras correlacionadas.

Além disso, o número de pontos que representa o período de uma órbita periódica não basta para fixar uma órbita, pois ele também representará todas as possibilidades de mesmo período, mas com um número diferente de voltas ao redor do ponto elíptico.

Se  $n$  for primo teremos  $n - 1$  possibilidades para uma órbita de período  $n$ .

Vamos mostrar esquematicamente as possibilidades para  $n = 5$ .



Conforme aumentamos o período das órbitas, as possibilidades de diferentes órbitas com mesmo período aumentam exponencialmente. Seguem alguns exemplos para múltiplas voltas, com uma representação esquemática das curvas invariantes associadas.

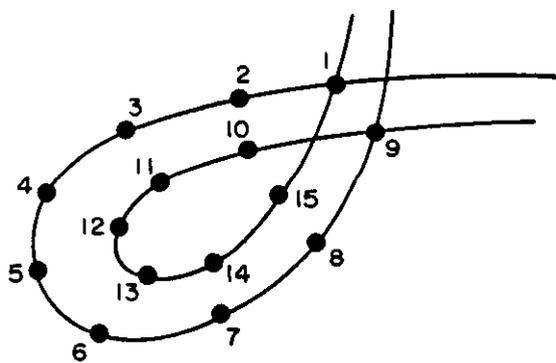
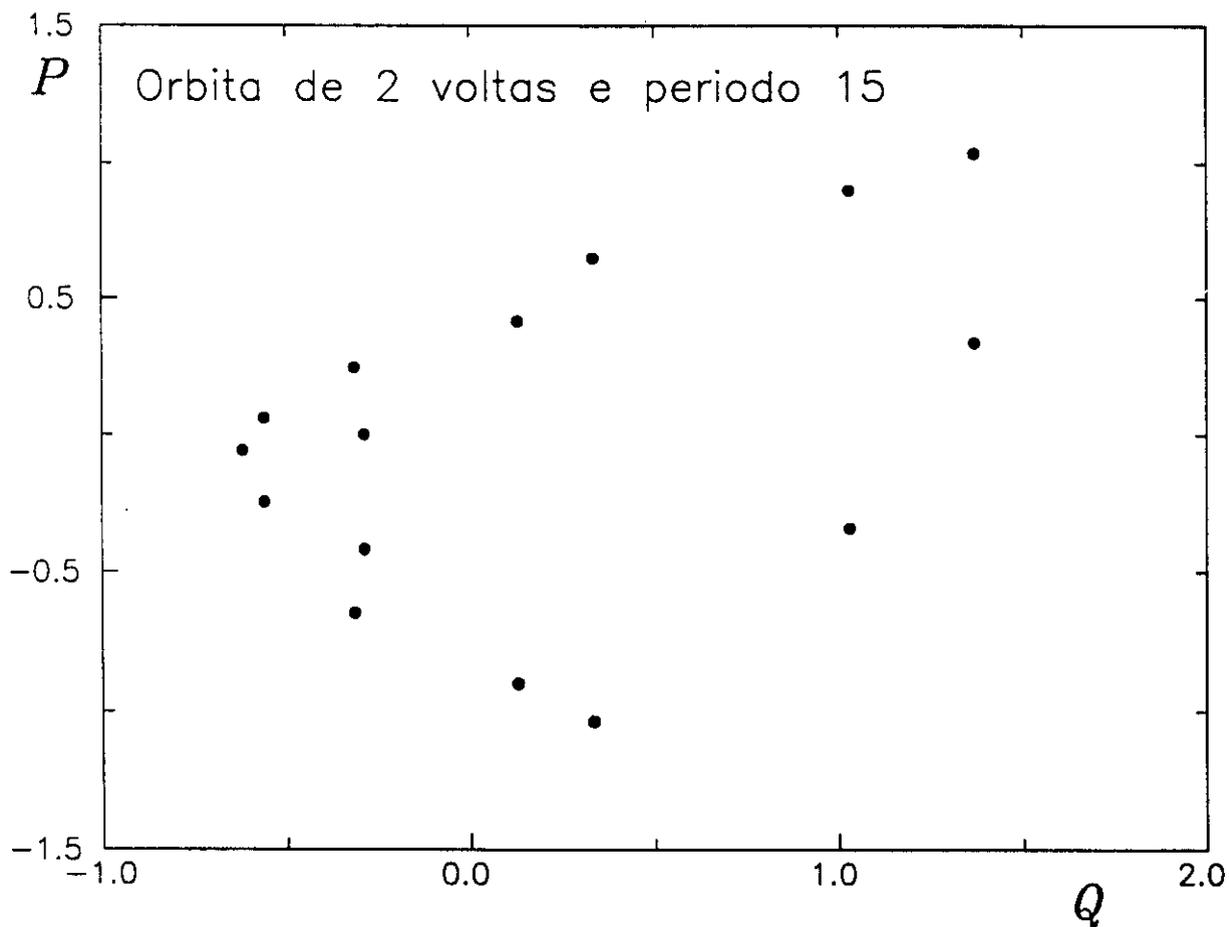


Figura 5.16: Órbita com 2 voltas e período 15.

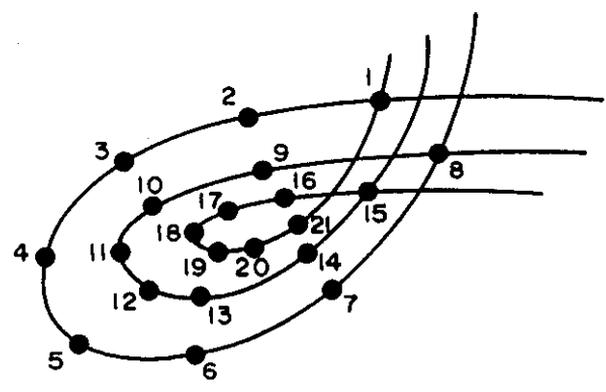
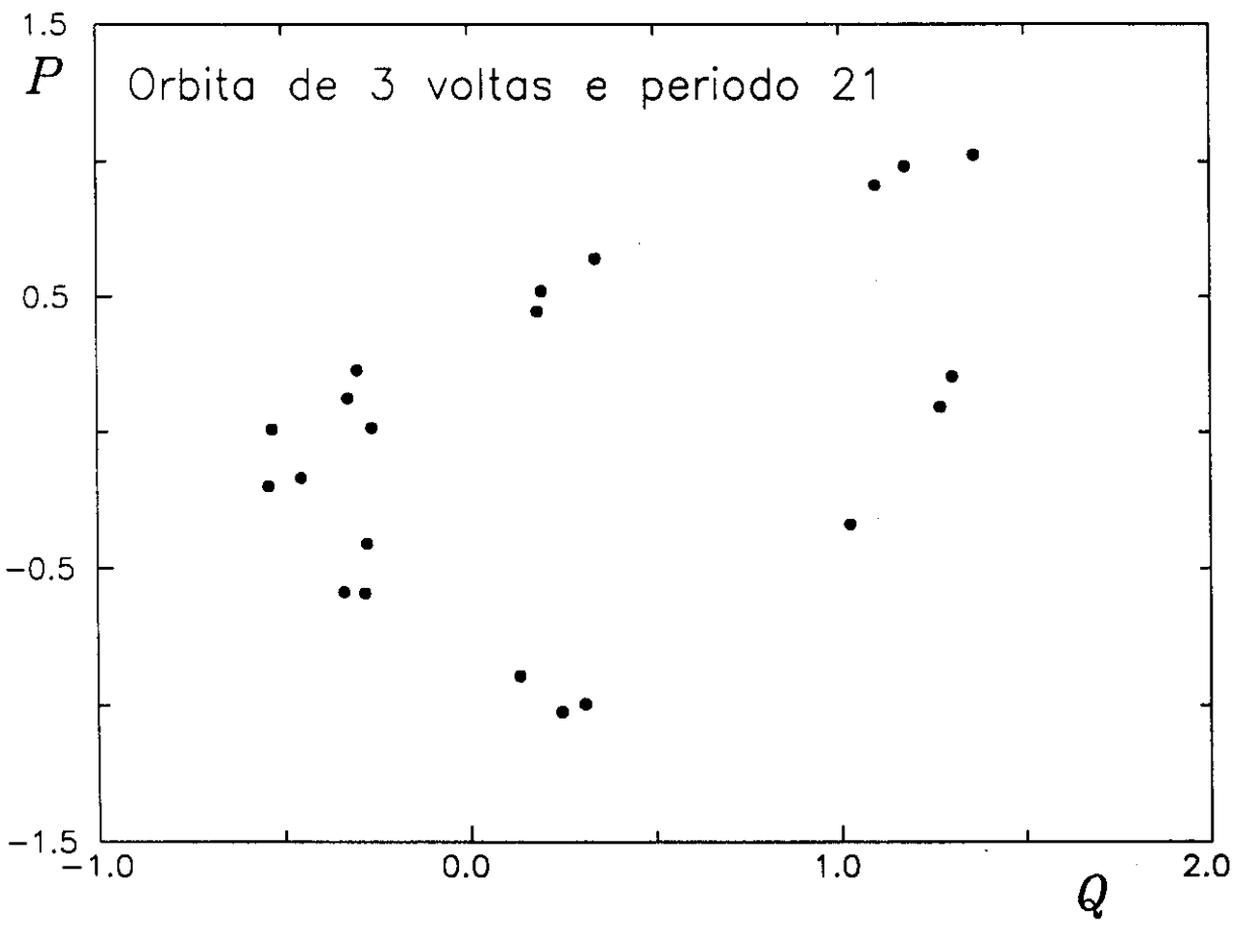


Figura 5.17: Órbita com 3 voltas e período 21.

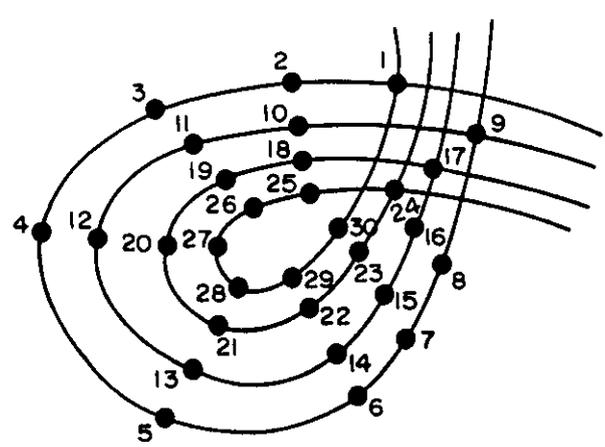
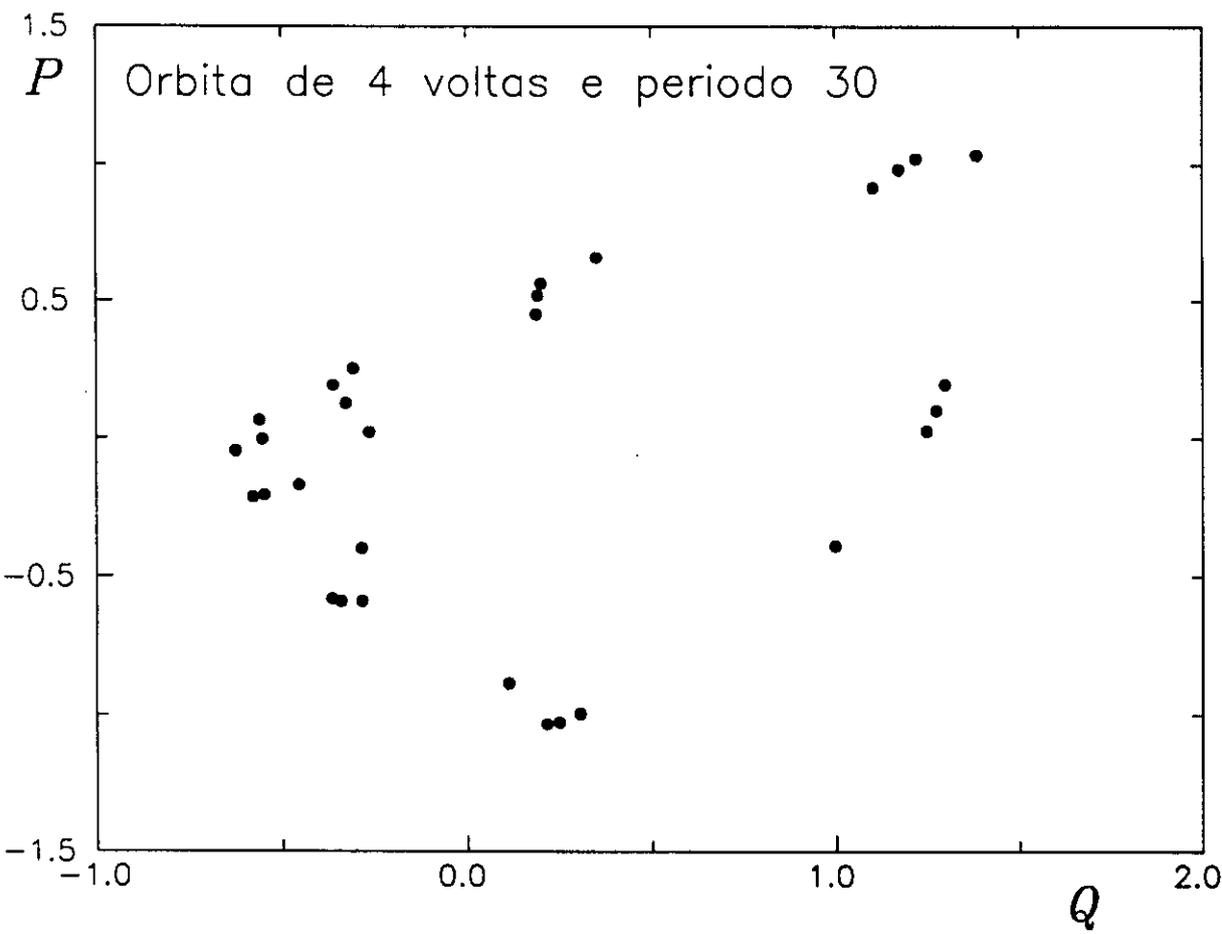


Figura 5.18: Órbita com 4 voltas e período 30.

## 5.6 Sobre a complexidade do Emaranhado Homoclínico

De posse dos resultados obtidos nas seções anteriores, podemos pensar em propor uma classificação que englobe todas as órbitas periódicas contidas no loop homoclínico do **Mapa de Meyer**. O parâmetro natural sugerido pelos cálculos numéricos é o número de voltas que a órbita dá em torno do ponto fixo elíptico a cada período. Seja  $N_V$  esse indicador, então:

Se  $N_V = 1$ , teremos órbitas de período  $n$ , começando em  $n_{min}$  ( que depende de  $\varepsilon$  ), até infinito. Para cada  $n$  existem duas órbitas, a **direta** e a **inversa**. Conforme  $|\varepsilon|$  diminui, essas órbitas se aproximam até coalescerem com o ponto fixo elíptico. Usaremos  $n_D$  e  $n_I$  para nos referirmos a essas órbitas, **diretas** e **inversas** respectivamente. Não foi observado numericamente para  $N_V = 1$  nenhum caso em que as órbitas **direta** e **inversa** coalesçam fora do ponto elíptico caracterizando uma **bifurcação global**.

Se  $N_V = 2$ , precisamos de um par de números inteiros para representar as órbitas:  $(n_1, n_2)$ . Com isso dizemos que a órbita em questão percorre a primeira volta sobre uma curva invariante com  $n_1$  pontos e a segunda com  $n_2$  pontos. Obviamente o período é  $n_1 + n_2$ . Acrescentamos o índice  $D$  ou  $I$  para especificar órbitas **diretas** ou **inversas** como antes:  $(n_1, n_2)_D$  e  $(n_1, n_2)_I$ .

Se  $N_V = 3$ , teremos analogamente  $(n_1, n_2, n_3)_D$  e  $(n_1, n_2, n_3)_I$  e assim por diante. Deve-se notar que as permutações cíclicas dos índices entre parênteses representam a mesma órbita, percorrida a partir de pontos iniciais diferentes e que permutações anti-cíclicas representam a mesma órbita percorrida com o mapa inverso.

Em geral, para cada  $N_V$  temos uma seqüência  $(n_1, n_2, \dots, n_{N_V})_\alpha$  de inteiros representando órbitas de período  $n = \sum_{i=1}^{N_V} n_i$ , onde  $\alpha = D$  ou  $\alpha = I$ .

Em todos os casos os valores de  $n_i$  são limitados por baixo, ou seja,

combinações envolvendo  $n_i$ 's podem não existir para um dado valor de  $\varepsilon$ .

Uma análise mais cuidadosa mostra, no entanto, que essa classificação não é completa. De fato, existe mais de uma órbita com a mesma representação acima. Para ilustrar tomemos o exemplo da figura 5.12, onde aparecem 3 diferentes órbitas de período 14 com duas voltas. As órbitas **A** e **B** podem ser representadas como  $(8,6)_I$  e  $(8,6)_D$ , mas a órbita **C** também é do tipo  $(8,6)_I$ . Para nos livrarmos desse problema (que complica muito se  $N_V$  é grande), temos que modificar nossa classificação. Note-se que a "órbita extra", **C**, vem da bifurcação local da órbita  $7_I$ , e essas bifurcações locais "estragam" nossa classificação inicial. Vamos então, a princípio, excluir todas as bifurcações locais:

— Se  $N_V = 1$ ,  $n_I$  e  $n_D$  representam (como antes) órbitas inversas e diretas de período  $n$ .

— Se  $N_V = 2$ ,  $(n_1, n_2)_I$  e  $(n_1, n_2)_D$  representam órbitas globais de duas voltas, inversas e diretas, de período  $n_1 + n_2$ .

E assim por diante para  $N_V = 3, 4, \dots$  etc. A cada órbita inversa (ou estável) das famílias acima, está associada uma cascata de bifurcações locais genéricas descritas pela tabela da pag. 34. Note-se no entanto, que isso não é tudo! Cada par de órbitas globais ( a direta e a inversa) bifurcam de forma que seu mapa local é novamente o **Mapa de Meyer** (ver o esquema simplificado na pag.38, onde o par de pontos surge em  $\varepsilon = 0$ ). Podemos então dizer que a cada órbita direta (instável) está associada uma cascata de bifurcações globais que tem a mesma classificação em termos do número de voltas em torno do ponto elíptico, representado pela órbita estável.

Dessa forma, essa classificação, em termos de número de voltas, serve como uma base sob a qual essa própria classificação se repete indefinidamente, formando uma estrutura fractal.

Isso ilustra a complexidade inerente do emaranhado homoclínico presente no **Mapa de Meyer**.

# Capítulo 6

## Conclusões

O objetivo deste trabalho foi o de contribuir para a compreensão de alguns aspectos fundamentais da bifurcação representada pelo **Mapa de Meyer**, através da apresentação dos resultados em forma de gráficos, que permitem educar a nossa intuição num campo tão complexo como esse.

O fato mais relevante no trabalho é que ele se aplica a qualquer sistema que possua esse tipo de bifurcação que é completamente genérica.

As bifurcações chamadas de **globais** têm a mesma forma de origem que a própria bifurcação principal em estudo, o que nos permite visualizar uma verdadeira estrutura fractal nas múltiplas bifurcações, que vão surgindo conforme variamos o nosso parâmetro de controle.

Encontramos numericamente um grande número de órbitas periódicas e as suas associações com o conjunto homoclínico.

De fato, ficou caracterizado que as órbitas periódicas se acumulam exponencialmente junto ao conjunto homoclínico, nas intersecções primárias para as órbitas que dão apenas uma volta, nas secundárias para as órbitas que dão duas voltas, depois nas terciárias e assim por diante.

Pudemos também observar o surgimento das famílias estável e instável a partir do ponto fixo elíptico, bem como a sua evolução diante da variação

do parâmetro  $\varepsilon$  e com isso foi possível diferenciarmos as bifurcações locais das globais.

Ficou demonstrado neste trabalho que é possível calcular com precisão muito boa uma grande quantidade de órbitas periódicas com diferentes números de voltas. Isso sugere que vale a pena investir numa possível quantização do **Mapa de Meyer**, pois teríamos um ótimo exemplo para testar a famosa fórmula semi-clássica de Gutzwiller em uma situação genérica.

# Bibliografia

- [1] V. I. Arnold. *Equações Diferenciais Ordinárias*. M.I.R., Moscou, (1985).
- [2] V. I. Arnold. *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*. M.I.R., Moscou, (1987).
- [3] M. Baranger and K. T. R. Davies. Periodic trajectories for a two-dimensional nonintegrable hamiltonian. *Annals of Physics*, **177**:330–358, (1987).
- [4] M. Baranger, K. T. R. Davies, and J. H. Mahoney. The calculation of periodic trajectories. *Annals of Physics*, **186**:95–110, (1988).
- [5] M. V. Berry. Regular and irregular motion. *AIP Conference Proceedings*, **46**:16–120, (1978). Ed. Jorna.
- [6] G. D. Birkhoff. *Acta Math.*, **43**:1, (1920).
- [7] T. J. S. B. Coutinho. *Movimento Regular e Caótico em Aplicações Quadráticas*. Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin, (1984).
- [8] M. A. M. de Aguiar. *Caos*. Curso de Inverno UNICAMP, (1989). notas de aula.

- [9] M. A. M. de Aguiar. Caos em sistemas hamiltonianos. Mini-curso de Pós-Graduação USP, (1992). notas de aula.
- [10] M. A. M. de Aguiar. *Órbitas Periódicas em Sistemas Hamiltonianos não Integráveis com dois Graus de Liberdade*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo. Instituto de Física, (1987).
- [11] M. A. M. de Aguiar, C. P. Malta, and K. T. R. Davies. Bifurcations of periodic trajectories in non-integrable hamiltonian systems with two degrees of freedom: numerical and analytical results. *Annals of Physics*, **180**:167-205, (1987).
- [12] A. M. Ozorio de Almeida. On the quantisation of homoclinic motion. *Nonlinearity*, **2**:519 - 540, (1989).
- [13] A. M. Ozorio de Almeida. *Sistemas Hamiltonianos: Caos e Quantização*. UNICAMP, Campinas, (1987).
- [14] R. E. de Carvalho. *Caos num contexto Ressonante e sua Quantização*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin, (1989).
- [15] R. L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley, Boston, (1989).
- [16] Autores diversos. Física não linear. I - Escola de Inverno UFMG, (1989). notas de aula.
- [17] K. Furuya. Introdução ao caos. II - Escola de Inverno UFMG, (1990). notas de aula.
- [18] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, (1981).

- [19] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York, (1983).
- [20] M. C. Gutzwiller. *J. Math.Phys.*, **12**:343, (1971).
- [21] L. Landau. *Mecânica*. M.I.R., Moscou, (1980).
- [22] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman. *Regular and Stochastic Motion*. Springer-Verlag, New York, (1983).
- [23] M. B. Matos. *Cálculo de Pontos Periódicos em Aplicações Fracamente Dissipativas*. Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin, (1988).
- [24] K. R. Meyer. Generic bifurcation of periodic points. *Transactions of the American Mathematical Society*, **149**:95–107, (1970).
- [25] H. Poincaré. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*. Gauthier-Villars, Paris, (1899).
- [26] G. L. S. Ritter. *Pontos Periódicos em Aplicações Caóticas*. Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin, (1987).