

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE FÍSICA *Gleb Wataghin*

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ÓRBITAS DE PARTÍCULAS CLÁSSICAS EM TEORIAS DE CAMPOS DE GAUGE

Este exemplar corresponde à redação final da tese de mestrado defendida pelo aluno Rafael Monteiro Fernandes e aprovada pela comissão julgadora.


Campus 12 de Agosto de 2005

Autor: Rafael Monteiro Fernandes

Orientador: Patricio Anibal Letelier Sotomayor

Co-Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moraes Guzzo

Fevereiro de 2005

UNIDADE	IFGW	
Nº CHAMADA	TM	
	F3910	
V	EX	
TOMBO	BC/	65632
PROC.	16-86-05	
	C <input type="checkbox"/>	D <input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	11,00	
DATA	14-9-05	
Nº CPD		

IF/370

Bib. id. 364673

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

F3910

Fernandes, Rafael Monteiro
Órbitas de partículas clássicas em teorias de
campos de gauge / Rafael Monteiro Fernandes. --
Campinas, SP : [s.n.], 2005.

Orientador: Patricio Anibal Letelier Sotomayor.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual
de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Relatividade especial (Física). 2. Campos de
calibre (Física). 3. Orbitas. I. Sotomayor, Patricio
Anibal Letelier. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

- **Título em inglês:** Classical particles orbits in gauge field theories.
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 1. Special relativity (Physics)
 2. Gauge fields (Physics)
 3. Orbits
- **Área de concentração:** Física das partículas elementares e campos
- **Titulação:** Mestre em Física
- **Banca examinadora:**
Prof. Patricio Anibal Letelier Sotomayor
Prof. George Emanuel Avraam Matsas
Prof. Marcus Aloízio Martinez de Aguiar
- **Data da defesa:** 18.02.2005



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE RAFAEL MONTEIRO FERNANDES – RA 992348 APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 18 / 02 / 2005.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Patricio Anibal Letelier Sotomayor (Orientador do Candidato) –
IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas – IFT/UNESP

Prof. Dr. Marcus Aloizio Martinez de Aguiar – DFCM/IFGW/UNICAMP

Aos meus pais e ao meu vô Beto

Agradecimentos

A Deus.

À minha família, pelo apoio incondicional que me deu desde que decidi iniciar carreira nessa área até o presente momento.

Ao Prof. Patricio Letelier, não só pela orientação impecável, mas também pelas inúmeras conversas, conselhos e discussões muito valiosas.

Aos colegas de sala e de grupo: Duda, Max, Pepe e Christian, pelo companheirismo, paciência e ajudas inestimáveis.

A todos os meus amigos que me acompanharam durante toda essa jornada, tornando-a menos árdua e mais divertida: ao pessoal de Rio Claro, em especial, Carlão, João Augusto, João Fernando, Raphinha e Pedro; à galera 99 e 98, por todos os churrascos e saídas memoráveis, em especial, aos amigos de longa data, Sergio, Davi, Pedrão e Tulio; ao pessoal do futebol, pelas relaxantes peladas de sexta; aos amigos novos da APGF e da Pós.

Ao Prof. Amir Caldeira, por todos os conselhos que me guiaram em momentos decisivos.

À Sarah, que apesar de só ter entrado na minha vida nessa metade final de tese, foi e é muito importante.

À FAPESP, pelo apoio financeiro sem o qual seria impossível realizar esse trabalho.

Conteúdo

Resumo	1
Abstract	2
Introdução	3
1 Simetrias em Teorias de Campos	5
1.1 Transformação das Coordenadas	6
1.2 Transformação Intrínseca dos Campos	8
1.3 O Princípio de Gauge	9
1.3.1 Abordagem Variacional	10
1.3.2 Abordagem Geométrica Moderna	12
2 Teoria de Yang-Mills-Higgs	17
2.1 Construção da Lagrangeana	17
2.2 Monopólo BPS	21
2.3 Dyon de Julia-Zee	26
2.4 Expressão de Wong para a Interação Partícula - Campos de Yang-Mills	27
2.5 Forma da Quadriforça para a Interação Partícula - Campos Escalares	30
3 Interação Clássica entre uma Partícula Colorida e um Campo Escalar	33
3.1 Equações de Movimento para um Campo Puramente Escalar	33
3.2 Partícula Colorida no Campo de um Sóliton do Modelo $O(3)$ Não-Linear	37
3.2.1 A Superfície de Equilíbrio	39
3.2.2 Matriz de Estabilidade	40
3.2.3 Pontos de Sela e Expoentes de Lyapunov	42
3.2.4 Órbitas	44
3.2.5 Comportamento Assintótico e Interpretação Física	51

4	Interação Clássica entre uma Partícula Colorida e Monopólos	56
4.1	Órbitas de uma Partícula na Presença de um Monopólo BPS	57
4.1.1	Movimento Radial	60
4.1.2	Limite Assintótico	64
4.2	Órbitas de uma Partícula na Presença de um Dyon de Julia-Zee	73
5	Conclusões	80
A	Modelo $O(N)$ Não-Linear	82

Resumo

Apresentamos as características gerais de órbitas de partículas com isospin na presença de campos puramente escalares e de monopólos. Partindo de uma expressão consistente com a Relatividade Especial para a quadri-força que descreve a interação entre uma partícula colorida e campos com estrutura interna não-Abeliana, e considerando ainda uma equação de evolução temporal do isospin, escrevemos as equações de movimento do sistema em questão e o particularizamos para casos específicos de interesse físico. Primeiramente, aplicamos o formalismo desenvolvido à situação em que o campo com o qual o corpo interage é um sóliton do modelo $O(3)$ não-linear e observamos que a maioria das órbitas é aberta, todos os pontos de equilíbrio do sistema são instáveis e não há indícios de caos. Em seguida, usamos o formalismo para o caso de uma partícula interagindo com duas soluções não-triviais da Lagrangeana de Yang-Mills-Higgs, uma teoria de gauge cujo grupo de simetria é o $SU(2)$: o monopólo BPS e o dyon de Julia-Zee. Em particular, observamos a existência de órbitas abertas unidimensionais para ambos os sistemas; além disso, estudando o comportamento assintótico deles nos limites de baixas e altas velocidades, obtemos que as trajetórias ficam restritas a uma superfície cônica e podem ser abertas ou fechadas, dependendo da velocidade do corpo e de seu isospin, que precessiona no espaço interno. Dada a interpretação de que esses campos trazem consigo uma carga magnética, essa última conclusão remete ao conhecido resultado do Eletromagnetismo de que as órbitas de uma carga elétrica pontual na presença de um monopólo magnético também ficam confinadas a uma superfície cônica.

Abstract

We present general properties of the orbits of a particle with isospin in the presence of scalar fields and monopoles. From an expression consistent with Special Relativity for the quadriforce referring to the interaction between a coloured particle and fields with non-Abelian internal structure, and considering also an evolution equation for the isospin, we obtain the equations of motion of the resultant system and specialize to cases of physical significance. Firstly, we apply this formalism to the situation in which the interacting field is a soliton of the $O(3)$ non-linear model and observe, consequently, that the majority of the orbits are unbounded, that all the equilibrium points are unstable and that there is no supporting evidence for chaotic behaviour. Then, we use the formalism in the case in which the particle interacts with two non-trivial solutions of the Yang-Mills-Higgs Lagrangean, which is a $SU(2)$ gauge theory: the BPS monopole and the Julia-Zee dyon. Particularly, we observe the existence of unidimensional unbounded orbits for both systems. Besides, studying their asymptotic behaviour in the limits of low and high velocities, we obtain that some trajectories are restricted to a conical surface and can be bounded or unbounded, depending upon the velocity of the particle and its isospin, which precessionates in the internal space. Given the interpretation that these fields are associated with magnetic monopoles configurations, this last conclusion reminds the well known result of Electromagnetism that the orbits of an electric point charge in the presence of a magnetic monopole are also confined to the surface of a cone.

Introdução

As teorias de gauge atingiram, nos meados do século passado, um patamar importante no estudo de Física básica, ao serem alçadas como um dos principais ingredientes do atual Modelo Padrão de Partículas Elementares. Desde o trabalho pioneiro de Yang e Mills [1] até os dias de hoje, houve um considerável avanço no estudo das teorias cujos grupos de simetria são não-Abelianos, em particular, o $SU(2)$ e o $SU(3)$. Todavia, há muito ainda que se aprofundar na análise dessas teorias, em especial no que se refere a propriedades não-perturbativas delas, para que, além de que sejam esclarecidos pontos ainda obscuros, novos aspectos possam ser descobertos ou desenvolvidos, como, por exemplo, as chamadas teorias de grande unificação (GUT).

Nesse sentido, uma contribuição interessante para se entender tais sistemas pertencentes à Teoria Quântica de Campos é o limite semi-clássico, regime em que muitas vezes a percepção dos fenômenos é mais clara, possibilitando uma descrição quântica mais inteligível. Um guia largamente utilizado para tal fim são exatamente as órbitas de partículas clássicas.

Desse modo, nessa dissertação, determinamos as características gerais de órbitas clássicas em teorias de gauge, em particular, à teoria $SU(2)$ de Yang-Mills-Higgs. Como ela envolve campos escalares e vetoriais, entender como a interação entre uma partícula e campos em geral se dá é fundamental para se obterem as trajetórias. Na literatura, apesar de haver importantes contribuições na determinação das equações de movimento do corpo quando o campo em questão é vetorial, há poucos e inconclusivos trabalhos quando o campo é escalar e tem uma estrutura interna $SU(2)$. Assim, nosso ponto de partida foi a proposição de formas possíveis para a quadriforça que descreve tal interação e para a equação de precessão do isospin, que é uma propriedade intrínseca da partícula responsável pelo acoplamento com o campo. Em seguida, aplicamos essas expressões ao caso de um campo puramente escalar e ao caso de um campo escalar mais um campo de gauge referentes a duas soluções não-triviais da teoria de Yang-Mills-Higgs.

A dissertação está dividida em cinco capítulos. No primeiro, apresentamos o Princípio de Gauge a partir de considerações de simetria de uma Lagrangeana qualquer, através de duas abordagens diferentes: uma mais "física", envolvendo Cálculo Variacional, e outra mais geométrica, explicitando a relação desse Princípio com conceitos tais como conexões e curvaturas.

No segundo capítulo, introduzimos a teoria de Yang-Mills-Higgs, usando os ingredientes fornecidos pelo Princípio de Gauge para construir a Lagrangeana que a descreve. Logo após, discutimos as suas duas principais soluções não-triviais que têm uma clara interpretação física: o monopólo BPS, que descreve assintoticamente um monopólo magnético, e o dyon de Julia-Zee, que se refere a uma entidade que carrega cargas elétrica e magnética. Em seguida, apresentamos a expressão usada por Wong para descrever o movimento clássico de uma partícula na presença de campos de gauge, para propormos, na seqüência, a quadriforça de interação com campos escalares.

No terceiro capítulo, aplicamos as equações propostas ao caso em que o campo é puramente escalar, isto é, não há campos de gauge. Em especial, estudamos profundamente a situação em que esse campo é um sóliton do modelo $O(3)$ não-linear, o qual está explicado no apêndice A. Determinamos pontos de equilíbrio, comportamento assintótico e expoentes de Lyapunov relacionados ao sistema subsequente, mesclando cálculos numéricos e analíticos, para no final traçar um paralelo com um sistema de Física da Matéria Condensada. Os resultados obtidos foram publicados em Proceedings [2].

No quarto capítulo, usamos as expressões desenvolvidas no segundo capítulo para conhecer o movimento relativístico de uma partícula colorida (isto é, com isospin) na presença daquelas duas soluções da teoria de Yang-Mills-Higgs previamente citadas, as quais envolvem tanto campos escalares (também conhecidos como campos de Higgs) como campos vetoriais (os campos de gauge). Dada a complexidade das equações resultantes, restringimo-nos a estudar movimentos radiais e comportamentos assintóticos para os dois sistemas em questão, determinando as formas das órbitas em cada caso. As conclusões são apresentadas no quinto capítulo.

Capítulo 1

Simetrias em Teorias de Campos

Simetrias em uma teoria de campo podem ser definidas, a grosso modo, como as operações que deixam a Lagrangeana dos campos invariante. Em geral, as teorias de campos têm associadas a elas dois tipos distintos de simetria: uma externa, associada às coordenadas, e uma interna, referente aos campos propriamente ditos. Neste capítulo, exploraremos o efeito dessas simetrias nas teorias de campos relativísticos através do uso de Cálculo de Variações. Vamos estudar dois tipos de variações que podemos impor à ação do sistema: uma que deixa a borda do sistema fixa e não envolve variação das coordenadas (a qual designaremos por δ), e outra que leva em conta também a variação das coordenadas e da borda, conseqüentemente (a qual designaremos por δ').

Consideremos os campos ψ^μ e a Lagrangeana a eles correspondente \mathcal{L} ¹. Quando impomos que a variação da ação segundo δ deve se anular (o que nada mais é que o conhecido Princípio de Hamilton [3]), obtemos:

$$\int_R \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\mu_{,\nu}} \right) \delta \psi^\mu d^4x + \int_B d\sigma_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\mu_{,\nu}} \delta \psi^\mu = 0, \quad (1.1)$$

em que R é todo o espaço-tempo e B a sua borda. Fixando-a no infinito, e impondo que a variação dos campos se anule nessa região, obtemos as usuais equações de movimento para o campo em questão.

Agora, podemos calcular a variação da ação com respeito a δ' , ou seja, uma variação que envolva também as coordenadas. Tal procedimento leva a:

$$\delta' \int_R \mathcal{L} d^4x = \int_R \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\mu_{,\nu}} \right) \delta \psi^\mu d^4x + \int_B d\sigma_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\nu_{,\mu}} \delta \psi^\nu + \mathcal{L} \delta x^\mu \right]. \quad (1.2)$$

¹Na verdade, estamos lidando com *densidades* de Lagrangeanas; ao longo do trabalho, para simplificar, omitiremos a palavra densidade.

Podemos reconhecer no primeiro termo as equações de movimento do campo; logo, este se anula. Agora, tomemos a região R do espaço-tempo como envolta por duas superfícies tipo espaço, σ_1 e σ_2 , que se estendem até o infinito. Assim como antes, impomos que os campos e suas variações se anulam no infinito, o que nos leva a:

$$\delta' \int_R \mathcal{L} d^4x \cong \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\nu_{,\mu}} \delta \psi^\nu + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] = G(\sigma_2) - G(\sigma_1), \quad (1.3)$$

em que $G(\sigma)$ é o chamado *gerador* da variação δ' . Por fim, impondo que a variação da ação sob δ' se anule, a exemplo do que fizemos anteriormente sob a variação δ , obtemos que G não depende da superfície tipo-espaço escolhida. Assim, o gerador G é uma *constante de movimento*. A seguir, vamos explorar as propriedades dessa constante em dois casos distintos: quando realizamos uma transformação apenas das coordenadas (simetria externa) ou quando fazemos uma transformação intrínseca dos campos (simetria interna).

1.1 Transformação das Coordenadas

Neste caso, estamos supondo que δ' refere-se somente a uma transformação de coordenadas, a qual deve deixar a Lagrangeana invariante, para que a variação da ação se anule. Nesse estágio, precisamos especificar qual é essa transformação. Como estaremos trabalhando sempre no espaço-tempo de Minkowski, temos que ela nada mais é que a usual *transformação de Lorentz não-homogênea*, ou de *Poincaré*, a qual designamos por Λ^μ_ν . Desse modo, temos que $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$. Além disso, a transformação de coordenadas induz uma transformação no campo, a qual dependerá da natureza dele, isto é, dependerá se o campo é escalar, vetorial, tensorial, spinorial. Para cada possibilidade, ele se transformará de uma maneira diferente segundo as transformações de Poincaré. Por exemplo, se ele for vetorial, a transformação será $\psi'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu \psi^\nu(x)$; se for escalar, será $\psi'^\mu(x') = \psi^\mu(x)$.

Para prosseguir, podemos usar apenas transformações infinitesimais de Poincaré. Assim, obtemos: $\delta x^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$, em que a^μ é um quadrivetor qualquer (correspondente à parte estritamente não-homogênea da transformação) e ω^μ_ν é uma matriz antissimétrica (correspondente à parte estritamente homogênea), cujos seis termos livres estão relacionados a três eixos linearmente independentes de rotação no espaço-tempo e a *boosts* nessas três direções. Agora, definimos a matriz Γ^μ_ν através da transformação do campo induzida pela transformação de Poincaré:

$$\psi'^\mu(x') = [\delta^\mu_\nu + \Gamma^\mu_\nu] \psi^\nu(x). \quad (1.4)$$

Obviamente, esta matriz dependerá da natureza do campo, como já foi explicado anteriormente, e das transformações infinitesimais de Poincaré. A partir dela, definimos o tensor $f^{\mu\nu\rho}$, o qual é antissimétrico nos seus dois primeiros índices:

$$\Lambda_\alpha^\mu \Gamma_\beta^\alpha \psi^\beta \doteq f^{\mu\nu\rho} \omega_{\nu\rho}. \quad (1.5)$$

Então, usando em (1.3) as expressões para a transformação infinitesimal dos campos e das coordenadas, e usando ainda o teorema de Gauss para eliminar termos de superfície que se anulam, chegamos na seguinte expressão para o gerador de variações:

$$G(\sigma) = \int_\sigma d\sigma_\mu \left[\mathcal{L} \delta x^\mu + f^{\mu\alpha\nu}{}_{,\alpha} \delta x_\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\beta{}_{,\mu}} \psi^\beta{}_{,\nu} \delta x^\nu \right] = - \int_\sigma d\sigma_\mu T^{\mu\nu} \delta x_\nu, \quad (1.6)$$

em que definimos o *tensor momento-energia* $T^{\mu\nu}$ dos campos:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha{}_{,\mu}} \psi^{\alpha,\nu} - f^{\mu\alpha\nu}{}_{,\alpha} - \mathcal{L} \eta^{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

em que $\eta^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski. Observamos que este tensor difere do tensor momento-energia canônico (ver, por exemplo, [4]) apenas por um divergente, a saber, $f^{\mu\alpha\nu}{}_{,\alpha}$. Veremos adiante que isso não traz nenhum prejuízo às leis de conservação do sistema.

Agora, em (1.6), podemos usar a expressão infinitesimal anteriormente obtida para δx_ν , obtendo:

$$G(\sigma) = -a_\nu P^\nu - \frac{1}{2} \omega_{\nu\mu} J^{\nu\mu}, \quad (1.8)$$

em que definimos as quantidades:

$$P^\nu \equiv \int_\sigma d\sigma_\mu T^{\mu\nu} \quad (1.9)$$

e

$$J^{\mu\nu} \equiv \int_\sigma d\sigma_\alpha M^{\alpha\mu\nu} \equiv \int_\sigma d\sigma_\alpha (T^{\alpha\mu} x^\nu - T^{\alpha\nu} x^\mu). \quad (1.10)$$

Analisemos melhor a constante de movimento G que obtivemos em (1.8). Observamos de (1.9) que P^ν é o quadrimomento e, de (1.8), que ele é o gerador de translações do sistema, ou, mais especificamente: sua componente temporal gera translações no tempo e sua componente espacial gera translações no espaço. Observamos ainda, de (1.10), que $J^{\mu\nu}$ é o tensor momento angular do sistema e, de (1.8), que ele é o gerador das rotações. Aplicando o teorema de Gauss a (1.8) e usando as definições (1.9) e (1.10) chegamos às leis de conservação do sistema (em forma diferencial), a saber, a lei da conservação da energia total:

$$T^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0 \quad (1.11)$$

e a lei de conservação do momento angular:

$$M^{\mu\nu\sigma}{}_{,\mu} = 0. \quad (1.12)$$

Aplicando a definição do tensor $M^{\mu\nu\rho}$ em (1.11) e usando (1.12), obtemos ainda que:

$$T^{\mu\nu}{}_{,\mu}x^\sigma + T^{\mu\nu}\delta_\mu^\sigma - T^{\mu\sigma}{}_{,\mu}x^\nu + T^{\mu\sigma}\delta_\mu^\nu = 0 \Rightarrow T^{\sigma\nu} = T^{\nu\sigma}, \quad (1.13)$$

ou seja, o tensor momento-energia é simétrico. Vimos que ele difere do tensor canônico apenas por um divergente, ou seja, $T^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} - f^{\mu\rho\nu}{}_{,\rho}$, em que $\tilde{T}^{\mu\nu}$ é o tensor canônico. Agora, devido à antissimetria de $f^{\mu\rho\nu}$ nos seus dois primeiros índices, temos que $f^{\mu\rho\nu}{}_{,\mu\rho} = 0$, ou seja, temos satisfeita a equação de conservação para o tensor canônico, como esperávamos.

Assim, vimos que o fato de uma Lagrangeana ser invariante sob as transformações de Poincaré implica nas usuais leis de conservação da energia, momento linear e momento angular do sistema. Isto é o que denominamos de simetria externa do sistema.

1.2 Transformação Intrínseca dos Campos

Diferentemente de antes, neste caso consideramos apenas uma variação nos campos, sem variação das coordenadas; ou seja, temos que: $\delta x^\mu = 0$ e $\bar{\psi}(x) = \psi(x) + \delta_0\psi(x)$, em que δ_0 representa essa variação intrínseca. Geralmente, ela corresponde a algum grupo de simetria que deixa a Lagrangeana dos campos invariante; por exemplo, ao Eletromagnetismo corresponde o grupo de simetria $U(1)$; já à teoria de Yang-Mills, que estudaremos em detalhes adiante, corresponde em geral o grupo $SU(N)$. Aplicando essas condições em (1.3), chegamos à seguinte expressão para o gerador de variações:

$$G(\sigma) = \int_\sigma d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\nu{}_{,\mu}} \delta_0 \psi^\nu = \int_\sigma d\sigma_\mu j^\mu. \quad (1.14)$$

Aplicando agora o teorema de Gauss e eliminando termos de superfícies no infinito, chegamos à equação de continuidade:

$$j^\mu{}_{,\mu} = 0. \quad (1.15)$$

Assim, quando temos um grupo de simetria que deixa a Lagrangeana invariante, surge uma *carga conservada* dada por (1.14), respeitando a equação de continuidade (1.15). Essa é a simetria

interna do sistema. Na próxima seção, veremos o Princípio de Gauge, que está intimamente relacionado a essas simetrias internas, e quais as conseqüências que ele traz para a forma da Lagrangeana. Em seguida, particularizaremos tudo isso para o caso da teoria $SU(2)$ de Yang-Mills.

Apenas para salientar, vale dizer que quando temos uma variação correspondente tanto a uma transformação de coordenadas quanto a uma transformação intrínseca dos campos, aparecem as leis de conservação de energia, momento linear e momento angular juntamente com uma carga conservada.

1.3 O Princípio de Gauge

Na seção anterior, vimos que é possível ter variações intrínsecas dos campos que geram cargas conservadas. Como já dissemos, essas variações são expressas através de grupos de simetria que deixam a Lagrangeana invariante. Vamos enunciar isso mais precisamente. Para isso, consideremos N campos $\psi^A(x)$ e que a variação seja realizada por n elementos da álgebra de um certo grupo de Lie G , representados por $T_{(a)}^A{}_B$, ao qual estão associados n parâmetros infinitesimais ϵ^a . Ou seja, temos que (estaremos a partir de agora omitindo o sub-índice 0 de δ_0):

$$\delta\psi^A = T_{(a)}^A{}_B \epsilon^a \psi^B. \quad (1.16)$$

Como já dissemos, ao grupo G está associada uma álgebra de Lie, representada pelas constantes de estrutura $f_a{}^c{}_b$:

$$[T_{(a)}, T_{(b)}] = f_a{}^c{}_b T_{(c)}. \quad (1.17)$$

Para fins de clareza, vamos explicar a convenção de índices usada: letras latinas maiúsculas estão relacionadas ao número de campos considerados, letras latinas minúsculas, ao grupo de simetria do sistema e letras gregas minúsculas, ao espaço-tempo de Minkowski.

Tendo feito essa introdução, podemos agora enunciar o chamado *Princípio de Gauge*. Tal denominação não é em vão e reflete a importância adquirida por ele. Em linhas gerais, ele estabelece que todos os pontos da variedade subentendida pelo espaço-tempo de Minkowski em conjunto com o grupo de simetria do sistema são distintos. Ou, mais precisamente, ele enuncia que os parâmetros infinitesimais ϵ^a devem ser alçados a *funções da posição*, isto é, a $\epsilon^a(x)$, e que a Lagrangeana deve ser invariante sob transformações segundo o grupo de Lie G' correspondente a essas n funções. Desse modo, é necessário introduzir modificações na Lagrangeana original para satisfazer esse critério, o que vai ocasionar, como veremos a seguir, o surgimento de *campos compensadores* A_μ^a , também conhecidos como *campos de gauge*.

1.3.1 Abordagem Variacional

Ao alçarmos os parâmetros de variação a funções, então não mais a variação da Lagrangeana original $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi^A, \psi_{,\mu}^A)$ é nula. Usando as equações de movimento e continuidade previamente obtidas, chegamos a:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{,\mu}^A} T_{(a)}^A{}_B \psi^B \frac{\partial\epsilon^a}{\partial x^\mu}. \quad (1.18)$$

Queremos que a Lagrangeana original seja invariante sob este novo grupo de Lie que compreende as funções $\epsilon^a(x)$. Então, para anularmos esse novo termo que apareceu, introduzimos um novo campo $A'^J(x)$, com $J = 1, 2, \dots, M$ (M a determinar) que se transforma como:

$$\delta A'^J = U_{(a)}^J{}_K A'^K \epsilon^a(x) + C^{J\mu}{}_a \frac{\partial\epsilon^a}{\partial x^\mu}, \quad (1.19)$$

em que os coeficientes U e C são constantes a determinar. Agora, definimos uma Lagrangeana modificada $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(\psi^A, \psi_{,\mu}^A, A'^J)$ de modo que tenhamos:

$$\delta\mathcal{L}' = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\psi^A} \delta\psi^A + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\psi_{,\mu}^A} \delta\psi_{,\mu}^A + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial A'^J} \delta A'^J = 0. \quad (1.20)$$

Substituindo nas equações acima as variações já determinadas obtemos duas equações: uma correspondente ao coeficiente de $\epsilon^a(x)$:

$$\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\psi^A} T_{(a)}^A{}_B \psi^B + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\psi_{,\mu}^A} T_{(a)}^A{}_B \psi_{,\mu}^B + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial A'^J} U_{(a)}^J{}_K A'^K = 0 \quad (1.21)$$

e outra ao coeficiente de $\frac{\partial\epsilon^a}{\partial x}$:

$$\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\psi_{,\mu}^A} T_{(a)}^A{}_B \psi^B + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial A'^J} C^{J\mu}{}_a = 0, \quad (1.22)$$

uma vez que essas funções são arbitrárias. Agora, esta última equação corresponde, na verdade, a $4n$ equações, referentes aos $4n$ coeficientes de $\frac{\partial\epsilon^a}{\partial x}$ (n referente ao índice a e quatro referente ao índice μ). Logo, para o sistema ter solução única não-singular, devemos ter $M = 4n$ componentes de A'^J e também que a matriz $C^{J\mu}{}_a$ tenha inversa. Assim, definimos:

$$A_\mu^a = C^{-1}{}^a{}_\mu{}^J A'^J, \quad (1.23)$$

de modo que a variação do novo campo fica:

$$\delta A_\mu^a = S_{(c)}{}^a{}_\mu{}^\nu A_\nu^b \epsilon^c(x) + \frac{\partial\epsilon^a}{\partial x^\mu}, \quad (1.24)$$

em que $S_{(c) \mu b}^{a \nu} = C^{-1}{}^a{}_{\mu}{}^{\nu}{}_{b} U_{(c) K}^J C^K{}_{\nu}$. Assim, para satisfazer a equação (1.22), obtemos que o campo A_{μ}^a só pode aparecer na Lagrangeana através da combinação:

$$D_{\mu} \psi^A = \frac{\partial \psi^A}{\partial x^{\mu}} - T_{(a) B}^A \psi^B A_{\mu}^a, \quad (1.25)$$

a qual denominamos *derivada covariante* do campo ψ^A . Portanto, a nova Lagrangeana $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(\psi^A, \psi_{,\mu}^A, A'^J)$ deve ter a forma $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}''(\psi^A, D_{\mu} \psi^A)$. Através dessa relação, efetuamos as derivadas de (1.21) pela regra da cadeia e impomos que $\mathcal{L}''(\psi^A, D_{\mu} \psi^A) = \mathcal{L}(\psi^A, D_{\mu} \psi^A)$, para que quando o campo A_{μ}^a se anule tenhamos a mesma Lagrangeana de antes. Levando tudo isso em conta na equação (1.21), obtemos a constante que precisávamos determinar:

$$S_{(c) \mu b}^{a \nu} = \delta_{\mu}^{\nu} f_c{}^a{}_{b}. \quad (1.26)$$

Usando esta expressão, podemos determinar também a variação de $D_{\mu} \psi^A$:

$$\delta D_{\mu} \psi^A = T_{(a) B}^A \epsilon^a D_{\mu} \psi^B. \quad (1.27)$$

Portanto, concluímos que, ao impormos o Princípio de Gauge, surge um novo campo com $4n$ componentes A_{μ}^a , o qual aparece na Lagrangeana original "transformando" as derivadas ordinárias dos campos ψ^A em derivadas covariantes dadas por (1.25). Além disso, esse campo se transforma como:

$$\delta A_{\mu}^a = f_c{}^a{}_{b} A_{\mu}^b \epsilon^c + \frac{\partial \epsilon^a}{\partial x^{\mu}}. \quad (1.28)$$

Agora, temos novos campos A_{μ}^a e, portanto, temos que encontrar a forma da Lagrangeana desses novos campos livres, $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(A_{\mu}^a, A_{\mu, \nu}^a)$, que seja invariante sob uma transformação segundo o grupo de Lie G' . Para isso, utilizamos um procedimento semelhante ao que acabamos de fazer: impomos que a variação de \mathcal{L}_0 seja zero, usamos a expressão (1.28) para a variação de A_{μ}^a e fazemos os coeficientes de $\epsilon^a(x)$ e suas derivadas iguais a zero, resultando em um sistema de equações, com cuja análise determinarmos as possíveis formas da Lagrangeana. Tal procedimento nos leva à conclusão de que as derivadas de A_{μ}^a só podem aparecer em \mathcal{L}_0 através da combinação:

$$F_{\mu\nu}^a = \frac{\partial A_{\nu}^a}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}^a}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{2} f_b{}^a{}_{c} (A_{\mu}^b A_{\nu}^c - A_{\nu}^b A_{\mu}^c) \quad (1.29)$$

e que \mathcal{L}_0 deve ser função apenas de $F_{\mu\nu}^a$, satisfazendo a relação:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F_{\mu\nu}^a} f_c{}^a{}_{b} F_{\mu\nu}^b = 0. \quad (1.30)$$

Além disso, obtemos que a variação de $F_{\mu\nu}^a$ deve ser dada por:

$$\delta F_{\mu\nu}^a = \epsilon^b f_b^a{}^c F_{\mu\nu}^c. \quad (1.31)$$

Podemos reescrever a equação (1.29) de uma maneira mais conveniente, usando a propriedade (ver [5]) $f_b^a{}^c = -f_c^a{}^b$:

$$F_{\mu\nu}^a = \frac{\partial A_\nu^a}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu^a}{\partial x^\nu} - f_b^a{}^c A_\mu^b A_\nu^c. \quad (1.32)$$

Agora que já construímos a Lagrangeana de interação entre os campos ψ^A e A_μ^a e a Lagrangeana livre de A_μ^a , podemos analisar a Lagrangeana total, $\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_0(F_{\mu\nu}^a) + \mathcal{L}(\psi^A, D_\mu \psi^A)$. Essa análise é feita impondo que a variação total da ação se anule, usando as expressões obtidas para as variações de A_μ^a e $F_{\mu\nu}^a$, e escolhendo as funções $\epsilon^a(x)$ de modo que ela e suas derivadas se anulem na borda da região de integração correspondente à ação. Esse procedimento nos leva à equação de continuidade $j_{,\mu}^\mu = 0$ da carga introduzida pela variação intrínseca dos campos segundo G' com (ver, por exemplo, [6]):

$$j_a^\mu = - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\mu \psi^A} T_{(a) B}^A \psi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F_{\mu\nu}^b} f_a^b{}^c A_\nu^c \right). \quad (1.33)$$

Portanto, a imposição do Princípio de Gauge gerou um novo campo A_μ^a que se transforma segundo (1.28), interage com o campo ψ^A de acordo com (1.25), apresenta uma Lagrangeana livre que depende somente da combinação $F_{\mu\nu}^a$ dada por (1.29) e gera uma carga cuja quadri-corrente associada é (1.33). Além disso, todas essas Lagrangeanas são agora invariantes sob transformações segundo o grupo de Lie G' , uma "generalização" do grupo de Lie original G .

1.3.2 Abordagem Geométrica Moderna

O que fizemos na seção anterior foi determinar as propriedades do campo compensador usando como ferramenta fundamental o cálculo variacional. Entretanto, podemos fazer a mesma análise usando geometria diferencial ao invés de um cálculo mais "bruto". Para isso, portanto, é necessário um conhecimento dos conceitos básicos de geometria diferencial, tais como formas diferenciais, conexões, curvaturas, produto cunha, estrela de Hodge, representações, espaços tangentes, derivada exterior. Não entraremos nesses conceitos, que podem ser encontrados em [7], [5] ou qualquer livro de introdução à geometria diferencial, mas iremos usá-los para desenvolver a teoria.

Inicialmente, vamos enunciar o problema: temos um campo escalar ψ (campos vetoriais ou spinoriais não serão tratados a fim de evitar complicações) que interpretamos como uma 0-forma que leva de um conjunto aberto \mathcal{U} do \mathbb{R}^4 a um certo espaço vetorial r -dimensional que

denominaremos de V . Temos ainda um grupo de Lie G e sua álgebra correspondente \mathfrak{g} . Sob uma transformação de gauge local $\gamma : \mathcal{U} \rightarrow G$ temos que ψ é transformado em ψ' :

$$\psi'(x) = \rho(\gamma(x))\psi(x), \quad (1.34)$$

em que $\rho(\gamma(x))$ é uma representação de G em V . Para simplificar a notação, escreveremos a representação apenas como $\gamma(x)$.

O que queremos é analisar a geometria da invariância de gauge, ou seja, invariância sob transformações como as acima explicitadas. Pelo Princípio de Gauge, dois pontos em V são *a priori* completamente independentes. Assim, precisamos primeiramente de uma maneira de ligar esses pontos, ou seja, conectar de alguma maneira os espaços tangentes correspondentes a eles. Esse é o primeiro passo para definirmos operações importantes, como derivadas, por exemplo. Desse modo, definimos o transportador paralelo ao longo de uma curva C como um elemento de G denotado por $\Gamma[C]$, que pode atuar no espaço V através da representação ρ já definida anteriormente. Logo, $\Gamma[C]v$ é um vetor em V_y transportado paralelamente através de C a partir de $v \in V_x$. Para definirmos como ele se transforma segundo uma transformação local de gauge γ , basta reconhecer que as duas operações envolvidas (transporte paralelo e transformação de gauge) devem comutar. Assim, obtemos:

$$\Gamma'[C] = \gamma(y)\Gamma[C]\gamma^{-1}(x). \quad (1.35)$$

Agora, sabemos que o transporte paralelo deve ser uma operação contínua. Portanto, para uma curva infinitesimal \bar{C} , $\Gamma[\bar{C}]$ deve diferir da identidade, em primeira ordem, por um elemento da álgebra \mathfrak{g} . Logo, até essa ordem considerada, temos que:

$$\Gamma = I - \epsilon A, \quad (1.36)$$

em que A é uma 1-forma que leva de \mathcal{U} para a álgebra \mathfrak{g} e ϵ é um parâmetro infinitesimal. Essa forma é conhecida como *conexão* ou *campo de gauge*.

Vamos ver agora como essa conexão atua. Tomemos uma curva parametrizada por τ com $0 \leq \tau \leq 1$, ou seja, uma curva $Q(\tau)$, cujo vetor tangente, em cada ponto, é $\dot{Q}(\tau)$. Tomando, para um certo ponto, um incremento infinitesimal ϵ , e usando (1.36), obtemos, em primeira ordem em ϵ :

$$\psi(\tau + \epsilon) = [I - \epsilon A(\dot{Q}(\tau))]\psi(\tau), \quad (1.37)$$

ou seja, tomando a definição usual de derivada, temos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = -A(\dot{Q}(\tau))\psi(\tau). \quad (1.38)$$

Logo, o teorema de existência e unicidade nos garante que, dada a condição inicial $\psi(0)$, teremos sempre uma solução para essa equação e ela será única. Agora, particionando essa curva em pedaços infinitesimais e iterando a equação (1.37), obtemos $\psi(1)$:

$$\begin{aligned}\psi(1) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[I - \frac{1}{N} A \left(\dot{Q} \left(\frac{N-1}{N} \right) \right) \right] \cdots \left[I - \frac{1}{N} A \left(\dot{Q} \left(\frac{1}{N} \right) \right) \right] \left[I - \frac{1}{N} A \left(\dot{Q}(0) \right) \right] \psi(0) \\ &:= P \exp \left\{ - \int_C A \right\} \psi(0),\end{aligned}\tag{1.39}$$

de modo que:

$$\Gamma[C] = P \exp \left\{ - \int_C A \right\},\tag{1.40}$$

em que P significa um ordenamento da integral de caminho da exponencial, o qual só será relevante se o grupo G for não-abeliano.

De posse de (1.35), podemos usar a expressão infinitesimal de $\Gamma[C]$, (1.36), bem como a expressão infinitesimal da curva C para obtermos a transformação de A ; fazendo isso, encontramos:

$$A' = \gamma A \gamma^{-1} + \gamma d\gamma^{-1},\tag{1.41}$$

que deve ser entendido como calculado pontualmente em V (já que a curva é arbitrária e podemos escolher várias delas de modo a varrer todo o espaço). Assim, dessas considerações sobre pontos distintos e transformações de gauge, chegamos a um campo que nada mais é que a conexão e se transforma de acordo com (1.41).

Através dessa conexão, podemos definir a derivada covariante pela diferença entre $\psi(\tau + \epsilon)$ e a 0-forma obtida através do transporte paralelo (por uma curva infinitesimal) a partir de $\psi(\tau)$, conforme (1.37):

$$\begin{aligned}D\psi|_{Q(\tau)}(\dot{Q}(\tau)) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi(Q(\tau + \epsilon)) - \psi(Q(\tau)) + \epsilon A(\dot{Q}(\tau))\psi(Q(\tau))] \\ &= d\psi|_{Q(\tau)}(\dot{Q}(\tau)) + (A \wedge \psi)|_{Q(\tau)}(\dot{Q}(\tau)).\end{aligned}\tag{1.42}$$

Assim, temos uma derivada que envolve 0-formas tomadas no mesmo espaço tangente $V_{Q(\tau+\epsilon)}$; ela é na verdade uma 1-forma, e pode ser representada por:

$$D\psi = d\psi + A \wedge \psi.\tag{1.43}$$

Usando ainda as equações (1.34) e (1.41), podemos determinar a transformação da derivada covariante:

$$(D\psi)' = \gamma D\psi, \quad (1.44)$$

que notamos ser semelhante à transformação de ψ . Vale notar que a derivada covariante pode ser definida de maneira semelhante para objetos que não sejam 0-formas, mas cujas transformações sejam semelhantes à de ψ . Podemos ainda aplicar duas vezes o operador D a ψ ; usando a regra de Leibniz para D juntamente com o fato de que $d^2 = 0$, obtemos:

$$D^2\psi = (dA + A \wedge A) \wedge \psi. \quad (1.45)$$

Examinemos agora a expressão para a conexão, eq. (1.40), um pouco mais profundamente: consideremos que a curva C seja fechada. Sabemos que, se a variedade fosse plana, então o vetor transportado paralelamente através dessa curva fechada deveria ser igual ao inicial, ou seja, teríamos $\Gamma[C] = I$. Entretanto, temos agora uma conexão A e, a princípio, temos uma curvatura que fará $\Gamma[C]$ se desviar da identidade. Vamos quantificar essas coisas. No caso de o nosso grupo ser abeliano, podemos manipular a exponencial tranqüilamente e, através do teorema de Gauss, obter:

$$\Gamma[C] = \exp\left\{-\oint_C A\right\} = \exp\left\{-\int_{S(C)} dA\right\} = \exp\left\{-\int_{S(C)} F\right\}, \quad (1.46)$$

em que $S(C)$ é uma superfície qualquer sobre o caminho fechado e $F = dA$ é uma 2-forma chamada de curvatura ou "força" do campo (não no sentido de interação, mas do inglês *strength*). Apesar de ser facilmente tratada no caso abeliano, essa exponencial traz grandes dificuldades no caso não-abeliano devido ao ordenamento representado por P . Assim, uma maneira mais clara de lidar com ela (porém menos rigorosa) é observar seu comportamento quando consideramos uma curva infinitesimal e fazer uma expansão até a ordem quadrática no comprimento da curva:

$$\begin{aligned} P \exp\left\{-\oint_C A\right\} = & I - \int_0^1 d\tau A(\dot{Q}(\tau)) \\ & + \int_0^1 d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 A(\dot{Q}(\tau_2))A(\dot{Q}(\tau_1)). \end{aligned} \quad (1.47)$$

A primeira integral é trivial:

$$\int_0^1 d\tau A(\dot{Q}(\tau)) = \oint_C A = \int_{S(C)} dA. \quad (1.48)$$

Para lidarmos com a segunda integral, alguns truques são necessários: primeiro, dividimo-na em partes simétrica e antissimétrica e notamos que a primeira parte é da ordem quártica no comprimento da curva, podendo portanto ser desprezada. Depois, escolhendo uma base de

coordenadas e expandindo nela A e $\dot{Q}(\tau)$, aplicando o teorema de Gauss e indo até a ordem desejada, chegamos em (mais detalhes podem ser encontrados em [7]):

$$P \exp\{-\oint_C A\} = I - \int_{S(C)} (dA + A \wedge A). \quad (1.49)$$

Ou seja, para o caso geral, a curvatura F é dada por:

$$F := dA + A \wedge A, \quad (1.50)$$

ou, em termos de componentes numa base de coordenadas:

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]\} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (1.51)$$

Podemos observar ainda, usando (1.41), que a transformação de F é dada por:

$$F' = \gamma F \gamma^{-1}. \quad (1.52)$$

Substituindo em (1.45), vemos outra justificativa para denominar F de curvatura:

$$D^2\psi = F \wedge \psi, \quad (1.53)$$

já que D^2 seria zero para uma variedade plana. Por fim, podemos calcular DF e obter a *identidade de Bianchi*, que vale para qualquer teoria de gauge:

$$DF = 0. \quad (1.54)$$

Com isso finalizamos nossa análise das conseqüências geométricas resultantes da invariância por transformações de gauge. Observamos que obtivemos expressões semelhantes às deduzidas na seção anterior para F , $D\psi$, suas transformações e a transformação de A : basta comparar (1.51), (1.43), (1.52), (1.44), (1.41) com (1.32), (1.25), (1.31), (1.27), (1.28), respectivamente. Além disso, essas entidades adquiriram um caráter geométrico claro. Porém, vale ressaltar que a elegância dessa abordagem não exclui as contas mais "brutas" de antes, já que várias delas são inevitáveis para obter algumas soluções de uma maneira mais direta e mais "física". Vale acrescentar que, historicamente, o modo "bruto" veio sempre antes da abordagem geométrica, que vem servindo mais como um refinamento de teorias já desenvolvidas do que um meio para se obter novos aspectos delas.

Capítulo 2

Teoria de Yang-Mills-Higgs

No capítulo anterior, deduzimos e descrevemos o procedimento para se criar uma Lagrangeana invariante por um certo grupo de simetria local, o grupo de gauge. Assim, o nosso próximo passo é escolher esse grupo e estudar as características do sistema resultante. A escolha mais simples possível é o grupo abeliano $U(1)$, cuja teoria resultante nada mais é que o já bem estabelecido Eletromagnetismo. No que segue, iremos tratar do mais simples grupo não-abeliano: o $SU(2)$. A teoria daí resultante é conhecida como *Teoria $SU(2)$ de Yang-Mills* (as teorias não-abelianas em geral, que vêm do grupo de gauge $SU(N)$, são denominadas Teorias de Yang-Mills) e, se levarmos em conta ainda um potencial particular conhecido como potencial de Higgs, a teoria recebe o nome de *Teoria de Yang-Mills-Higgs*. Outra denominação também dada a ela é de teoria do *isospin*, pois pode-se mostrar que, nela, as partículas trazem consigo uma propriedade intrínseca descrita de maneira análoga ao spin de partículas em Mecânica Quântica. Isso não é surpreendente, uma vez que o grupo de simetria $SU(2)$ é o que descreve, em Mecânica Quântica, o spin. Durante todo o trabalho restante, iremos nos restringir a essa teoria $SU(2)$, pois ela já traz consigo aspectos interessantes e não-triviais de teorias não-abelianas em geral.

2.1 Construção da Lagrangeana

Primeiramente, consideremos um campo escalar tripleto que denominaremos de ϕ^a ($a = 1, 2, 3$), correspondente ao $\psi^A(x)$ da seção (1.3.1). Este campo é muitas vezes chamado de *campo de Higgs* e se transforma segundo a representação de $SU(2)$ em matrizes 3×3 :

$$\phi^a \rightarrow [\exp(-iL^c\theta_c(x))]_{ab}\phi^b \approx \phi^a - (iL^c\theta_c(x))_{ab}\phi^b, \quad (2.1)$$

em que

$$(L^a)_{bc} = i\epsilon_{abc} \quad (2.2)$$

são os três geradores do $SU(2)$ nessa representação em matrizes 3×3 e $\theta^a(x)$ é o parâmetro que varia conforme a posição. Em termos da linguagem introduzida na seção (1.3.1), temos que $-i(L_a)_{bc} = \epsilon_{abc}$ corresponde a $T_{(a)}^A_B$, ou seja, a um elemento da álgebra responsável pela transformação infinitesimal de gauge, e $\theta^a(x)$ corresponde a $\epsilon^a(x)$. Outra coisa de que necessitamos são as constantes de estrutura; para calculá-las, escrevemos os elementos $T_{(a)}^A_B$ explicitamente em forma matricial:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, basta calcular os comutadores entre as três matrizes. Assim, obtemos as constantes de estrutura de que necessitamos (ver, por exemplo, [8]):

$$[T_a, T_b] = -\epsilon_{abc} T_c. \quad (2.3)$$

Neste ponto, vale ressaltar a convenção de índices utilizada: letras latinas referem-se ao grupo interno $SU(2)$, são numeradas de 1 a 3 e também são chamadas de *índice de cor*; letras gregas estão relacionadas com o espaço-tempo de Minkowski (grupo de Lorentz) e são numeradas de 0 a 3. Ressaltamos ainda que, no caso do índice de cor, muitas vezes relaxaremos a convenção da soma de Einstein: índices latinos repetidos tanto em cima quanto embaixo devem ser subentendidos como somados. Feitas essas ressalvas, voltemos à nossa teoria.

Tendo determinado o grupo local de simetria e suas características, podemos agora seguir os passos da seção (1.3.1) e construir nossa Lagrangeana total (campos livres + interação). A Lagrangeana dos campos ϕ^a original é dada por:

$$\mathcal{L}_{orig} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - U(\phi), \quad (2.4)$$

em que o primeiro termo refere-se à energia cinética e o segundo à energia potencial. Agora, segundo o procedimento da seção (1.3.1), definimos três campos vetoriais A_μ^a e a derivada covariante, conforme a equação (1.25):

$$D_\mu \phi^a = \partial_\mu \phi^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b \phi^c, \quad (2.5)$$

em que $g > 0$ é a constante de acoplamento do campo considerado. Para escrevermos a Lagrangeana dos campos A_μ^a livres, definimos, de acordo com (1.32), o "tensor de campo":

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.6)$$

Assim, a Lagrangeana total será:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} D_\mu \phi^a D^\mu \phi^a - U(\phi). \quad (2.7)$$

É comum introduzirmos um potencial específico nessa Lagrangeana, que é o chamado potencial de Higgs (ver, por exemplo, [9]):

$$U(\phi) = \frac{1}{4} \zeta (\phi^a \phi^a - F^2)^2, \quad (2.8)$$

em que $\zeta > 0$ e F são constantes. Com essas características, conforme já dissemos anteriormente, a teoria também é conhecida como *Yang-Mills-Higgs*. Vamos obter as equações de movimento; para isso, devemos usar:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\beta}^\alpha} = 0, \quad (2.9)$$

com ϕ^a e A_μ^a no lugar de ψ^α . Desse modo, manipulando os índices mudos e usando propriedades do tensor de Levi-Civita, obtemos as equações de movimento de Yang-Mills-Higgs:

$$D_\mu F^{\mu\nu a} = g\epsilon^{abc} (D^\nu \phi^b) \phi^c, \quad (2.10)$$

$$D_\mu D^\mu \phi^a = -\zeta (\phi^b \phi^b) \phi^a + \zeta \phi^a F^2, \quad (2.11)$$

em que as derivadas covariantes dos tensores são obtidas de maneira semelhante a (2.5) e g é a constante de acoplamento do campo de gauge. Esse sistema de equações é de difícil solução, pois se trata de equações diferenciais parciais não-lineares acopladas. Nas seções seguintes, veremos soluções com interessantes significados físicos, a saber, o monopólo BPS e o dyon de Julia-Zee. Agora, vamos definir um outro tensor importante, o tensor dual $\tilde{F}_{\mu\nu}^a$:

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma a}. \quad (2.12)$$

Calculando a sua derivada covariante, obtemos:

$$D_\mu \tilde{F}^{a\mu\nu} = 0, \quad (2.13)$$

que nada mais é que a identidade de Bianchi já obtida anteriormente em (1.54). À luz do Eletromagnetismo, podemos interpretá-la como uma generalização das equações homogêneas de Maxwell. Ela é de fundamental importância para se obter as soluções auto-duais e anti-auto-duais no espaço Euclidiano de 4 dimensões quando se estudam os instantons de Yang-Mills.

Outro tensor que será de muita utilidade posteriormente para nós é o tensor $G_{\mu\nu}$ que faz a conexão entre a teoria de Yang-Mills-Higgs e o Eletromagnetismo. Conforme já dissemos, o Eletromagnetismo provém de impormos $U(1)$ como o grupo de simetria do sistema físico. Porém, sabemos que $U(1)$ é um subgrupo de $SU(2)$; logo, é possível termos sistemas eletromagnéticos "mergulhados" nesse grupo de simetria mais amplo. Existem várias maneiras de se definir o tensor eletromagnético a partir de Yang-Mills-Higgs; a mais conhecida é sem dúvida a proposta por 't Hooft [10]:

$$G_{\mu\nu} = \hat{\phi}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{g} \epsilon^{abc} \hat{\phi}^a D_\mu \hat{\phi}^b D_\nu \hat{\phi}^c, \quad (2.14)$$

em que $\hat{\phi}^a = \phi^a / |\phi|$. Esta definição apresenta duas importantes propriedades: é invariante sob transformações de gauge e, em regiões em que $\hat{\phi}^a = (0, 0, 1)$,

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3, \quad (2.15)$$

ou seja, se o campo ϕ^a aponta sempre numa mesma direção interna, então a componente (no espaço interno) de A_μ^a nessa direção pode ser interpretada como o potencial eletromagnético usual, localmente. Veremos mais aplicações desse tensor na próxima seção.

Outra situação que podemos analisar é o caso em que $\phi^a = 0$, ou seja, temos apenas os campos de Yang-Mills livres. De acordo com as equações (2.10) e (2.11), a dinâmica dos campos é governada por:

$$D_\mu F^{\mu\nu a} = 0 \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu a} = g \epsilon^{abc} F^{\mu\nu b} A_\mu^c, \quad (2.16)$$

isto é, o campo de Yang-Mills se acopla consigo mesmo.

Apenas por completeza, é possível ainda simplificar a notação tomando uma base para o grupo $SU(2)$, que tem três graus de liberdade; o mais usual é considerar a representação 2×2 e tomar como base os geradores de rotação $\tau^a = i\sigma^a/2$, em que as matrizes σ^a são as três matrizes de Pauli ¹. Desse modo, podemos definir as matrizes:

¹Usando essa base, encontramos a constante de estrutura através da conhecida relação de anticomutação entre as matrizes de Pauli $[\sigma^a, \sigma^b] = 2i\epsilon^{abc}\sigma^c$. Logo, multiplicando por $-1/4$, obtemos: $[\tau^a, \tau^b] = -\epsilon^{abc}\tau^c$.

$$\begin{aligned}
A_\mu &= -g\tau^a A_\mu^a, \\
F_{\mu\nu} &= -g\tau^a F_{\mu\nu}^a,
\end{aligned}
\tag{2.17}$$

de modo que o tensor de campo e seu dual ficam:

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \\
\tilde{F}_{\mu\nu} &= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (\partial^\alpha A^\beta + A^\alpha A^\beta).
\end{aligned}
\tag{2.18}$$

2.2 Monopólo BPS

O monopólo BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) é uma solução das equações não-lineares (2.10) e (2.11) e tem essa denominação por causa de sua interpretação física relacionada a monopólos magnéticos. Além disso, ela apresenta uma outra propriedade muito importante: é um *sóliton* da teoria de Yang-Mills-Higgs. Nesta seção, vamos estudar como obter essa solução; nossa abordagem será de primeiramente procurar os sólitons da teoria e, depois, interpretá-los à luz do Eletromagnetismo.

Assim, para começar, precisamos de uma definição de sólitons. Infelizmente, não há na literatura uma definição precisa e consensual. Para os nossos objetivos, será suficiente usar a definição de [9], para o qual sólitons são soluções não-singulares das equações de campo para as quais ocorram duas coisas: (i) suas densidades de energia são localizadas no espaço para cada instante (isto é, a densidade de energia é finita e vai a zero quando se tende ao infinito espacial) e apresentam a forma $\epsilon(\vec{x}, t) = \epsilon(\vec{x} - \vec{u}t)$ (isto é, a densidade de energia não se dispersa); (ii) existe uma solução cuja densidade de energia se caracteriza por, em $t \rightarrow -\infty$, ser a soma das energias de N soluções e, em $t \rightarrow +\infty$, ser a mesma soma com cada elemento possivelmente deslocado de uma fase.

Como a condição (ii) é muito difícil de se verificar, de maneira geral, nos contentaremos em satisfazer apenas a condição (i) (na literatura, soluções desse tipo são às vezes denominadas de *ondas solitárias*). Considerando soluções estáticas ($\vec{u} = 0$), vemos que (i) será satisfeita simplesmente se sua energia for finita. Logo, iremos procurar soluções estáticas de (2.10) e (2.11) de energia finita, com a hipótese adicional de $A_0^a = 0$. Agora, fazemos uma outra mudança na convenção dos índices: letras latinas passam também a se referir às coordenadas espaciais do espaço-tempo de Minkowski. Para não haver confusão entre elas e as letras latinas referentes ao índice de cor, guardaremos as primeiras letras do alfabeto (a, b, c, d, \dots) para a cor e as letras do meio do alfabeto (i, j, k, l, \dots) para as coordenadas espaciais.

Inicialmente, devemos obter a expressão da energia associada à Lagrangeana (2.7); para isso, usamos a densidade Hamiltoniana H do sistema, a qual, por se tratar de um caso estático, é igual ao negativo da Lagrangeana (2.7):

$$E = \int d^3x H = \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{ij}^a F^{aj} + \frac{1}{2} D_i \phi^a D^i \phi^a + \frac{1}{4} \zeta (\phi^a \phi^a - F^2)^2 \right]. \quad (2.19)$$

Agora, para a energia ser finita, é preciso que, quando as coordenadas espaciais tenderem a infinito, a energia vá a zero; ou seja, os campos devem satisfazer uma configuração em que (2.19) se anule suficientemente rápido. Assim, para $r = |\vec{x}| \rightarrow \infty$, devemos ter:

$$A_i^a \rightarrow 0, \quad (2.20)$$

$$\phi^a \phi^a \rightarrow F^2, \quad (2.21)$$

$$r^{3/2} D_i \phi^a \rightarrow 0. \quad (2.22)$$

Pode-se mostrar que a primeira condição é suficiente, mas não necessária, uma vez que existem várias outras soluções para A_i^a com energia nula que estão relacionadas com a solução para $A_i^a = 0$ por uma transformação de gauge. Assim, consideraremos apenas as duas últimas condições, (2.21) e (2.22).

A condição (2.21) diz que, quando as coordenadas espaciais tendem para infinito, o vetor (ϕ^1, ϕ^2, ϕ^3) deve estar, no espaço interno, numa superfície esférica de raio F , a qual denominaremos de S_2^{int} . Já a condição (2.22) mostra que, desde que os campos de gauge caiam a zero tão rapidamente quanto r^{-1} , podemos ter $\partial_\theta \phi^a$ e $\partial_\varphi \phi^a$ diferentes de zero no infinito, já que é a derivada covariante que deve se anular, e não a derivada ordinária. Expressando de outra maneira, os campos ϕ^a podem tender à esfera interna em diferentes direções para diferentes pontos da borda do espaço quando $|\vec{x}| \rightarrow \infty$. Como o espaço é tridimensional, essa borda no infinito, que compreende as condições de contorno do sistema, é uma superfície esférica, a qual denominamos de S_2^{fis} . Logo, para satisfazer às condições de contorno, é necessário termos um mapa $S_2^{fis} \rightarrow S_2^{int}$, ou seja, para cada ponto (correspondente a uma condição de contorno) na superfície esférica no infinito espacial deve corresponder uma direção na superfície esférica interna.

Para prosseguir, usamos um teorema da Topologia muito importante: ele enuncia que esses mapas de $S_2^{fis} \rightarrow S_2^{int}$ podem ser classificados em diferentes *setores de homotopia*, os quais formam um grupo $\pi_2(S_2)$ isomorfo aos inteiros (ou seja, $\pi_2(S_2) = \mathbb{Z}$). Além disso, os setores são incomunicáveis: um mapa dentro de um setor pode ser transformado de modo contínuo num outro mapa do mesmo setor, mas nunca num mapa de outro setor. O número inteiro Q que caracteriza cada setor nada mais é que o número de vezes que o mapa percorre S_2^{int} para cada volta percorrida em S_2^{fis} . Assim, teremos vários tipos de configuração dos campos ϕ^a

correspondentes a diferentes setores Q . Por exemplo, uma configuração possível para $Q = 0$ é quando $\phi^a(\vec{x} \rightarrow \infty)$ aponta, no espaço interno, sempre na mesma direção, independente do ponto em S_2^{fis} : percorrendo toda essa esfera, estaremos sempre no mesmo ponto em S_2^{int} , o que implica que não demos nenhuma volta completa nela. Outro exemplo é quando $\phi^a(\vec{x} \rightarrow \infty)$ aponta internamente na direção radial (paralelamente ao vetor coordenada): para cada ponto de S_2^{fis} temos um único ponto em S_2^{int} , o que significa que estamos no setor $Q = 1$.

Precisamos agora de uma maneira sistemática de calcular Q para cada configuração dos campos. Para isso, propõe-se a existência de uma "corrente", que denominaremos de k_μ :

$$k_\mu = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{abc} \partial^\nu \hat{\phi}^a \partial^\rho \hat{\phi}^b \partial^\sigma \hat{\phi}^c. \quad (2.23)$$

Pela antissimetria do tensor de Levi-Civita, vemos claramente que $\partial^\mu k_\mu = 0$, o que nos remete a uma equação de continuidade; então, inspirados nessa semelhança, definimos a *carga topológica* Q :

$$Q = \int d^3x k_0 = \frac{1}{8\pi} \int_{S_2^{fis}} d^2\sigma_i \left(\epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} \hat{\phi}^a \partial_j \hat{\phi}^b \partial_k \hat{\phi}^c \right). \quad (2.24)$$

Por construção, vemos que tanto a corrente quanto a carga topológica são invariantes de gauge. Resta ainda mostrar que a carga topológica é o número de setor, o que pode ser encontrado em [9]:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int dS_2^{int}. \quad (2.25)$$

Assim, Q é exatamente o número de voltas que se dá em S_2^{int} para cada volta em S_2^{fis} . Vale ressaltar que essa carga topológica não é originária de nenhuma simetria interna, como aquelas abordadas no primeiro capítulo, o que a torna diferente das cargas usuais, como a elétrica, por exemplo.

Entretanto, há uma relação interessante entre a carga topológica e a carga magnética, como mostraremos agora. Lembramos que não existe até o momento nenhuma evidência empírica da existência de cargas (ou monopólos) magnéticas, embora nada impeça de colocá-la à força nas equações de Maxwell ². Tomando o tensor de campo eletromagnético, equação (2.14), podemos calcular o divergente do seu dual:

$$\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu G^{\rho\sigma} = \frac{4\pi}{g} k_\mu, \quad (2.26)$$

em que k_μ é a corrente definida em (2.23). Agora, do Eletromagnetismo, sabemos calcular o campo magnético:

²Pelo contrário, as equações de Maxwell tornam-se mais simétricas quando introduzimos o monopólo magnético.

$$B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} G^{jk} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi \frac{k_0}{g} \quad (2.27)$$

e, integrando essa expressão em todo o espaço e usando o teorema de Gauss, obtemos a relação entre a carga magnética e a carga topológica:

$$m = \int d^3x \frac{k_0}{g} = \frac{Q}{g}. \quad (2.28)$$

Assim, vemos que a carga magnética, se existir, é classicamente quantizada, já que Q só pode assumir valores inteiros. Se levarmos em conta ainda a quantização de Dirac, que provém de um argumento baseado na Mecânica Quântica, então temos uma explicação natural para a origem da quantização da carga elétrica. Voltemos agora ao nosso problema: vimos que as condições para finitude da energia levaram à divisão das possíveis configurações dos campos em setores independentes caracterizados por uma carga topológica; porém, não obtivemos ainda nenhuma solução explícita. Para isso, podemos tomar o *ansatz* de 't Hooft-Polyakov (ver [10], [11] ou [12]):

$$\begin{aligned} \phi^a(x) &= x^a \frac{F(r)}{r}, \\ A_a^i &= \epsilon_{aij} x^j \frac{W(r)}{r}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

em que $F(r)$ e $W(r)$ são funções que devem se comportar, assintoticamente, devido às condições (2.21) e (2.22) de energia finita, como:

$$\begin{aligned} F(r) &\rightarrow F, \\ W(r) &\rightarrow 1/gr. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Substituindo a solução anterior em (2.24) ou simplesmente notando a simetria radial presente, podemos observar que ela se refere ao setor $Q = 1$; além disso, substituindo-a em (2.27) e usando as condições de finitude da energia, obtemos que, quando $r \rightarrow \infty$:

$$\vec{B}(\vec{x}) \rightarrow \frac{1}{g} \frac{\vec{x}}{r^3}, \quad (2.31)$$

mostrando que essa solução corresponde a um monopólo magnético. Podemos notar ainda que ela não apresenta carga elétrica, pois não há campos elétricos associados (uma vez que $A_0^a = 0$, o que implica em $E_i = G_{0i} = 0$).

Até agora, porém, essas considerações só garantiram que essa configuração de campos tem energia finita; para garantir que ela será também solução das equações de campo (e portanto um sóliton) é necessário substituir o *ansatz* em (2.10) e (2.11) e resolver o sistema de equações

diferenciais. Devido à simetria radial presente, podemos chegar, após longas contas, em duas equações diferenciais ordinárias acopladas:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 K(r)}{dr^2} &= K(r)[K^2(r) - 1] + H^2(r)K(r), \\ r^2 \frac{d^2 H(r)}{dr^2} &= 2H(r)K^2(r) + \zeta H(r) \left[\frac{H^2(r)}{g^2} - r^2 F^2 \right], \end{aligned} \quad (2.32)$$

em que:

$$\begin{aligned} K(r) &= 1 - grW(r), \\ H(r) &= grF(r). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Resolver estas equações não é tarefa trivial; porém, para o limite $\zeta \rightarrow 0$, Bogomol'nyi [13] e, independentemente, Prasad e Sommerfield [14], mostraram que elas são satisfeitas por:

$$\begin{aligned} K(r) &= \frac{gFr}{\sinh gFr}, \\ H(r) &= \frac{gFr}{\tanh gFr} - 1. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Assim, nesse limite, as equações (2.29), juntamente com (2.34), tornam-se a solução do sistema de Yang-Mills-Higgs conhecida como *monopólo BPS*³, referente ao fato de ela apresentar uma carga magnética "elementar" ($Q = 1$). Nesse mesmo limite de $\zeta \rightarrow 0$, o sistema possui ainda uma interessante propriedade. Pode-se mostrar que a energia satisfaz a desigualdade (ver, por exemplo, [9]):

$$E \geq \frac{4\pi QF}{g} \quad (2.35)$$

e que a igualdade só é alcançada se os campos satisfizerem a *condição de Bogomol'nyi* [13]:

$$F_{ij}^a = \epsilon_{ijk} D^k \phi^a. \quad (2.36)$$

Resolvendo essa equação, estamos minimizando a energia no setor correspondente à configuração dessa solução de (2.36). Já vimos anteriormente que a energia é o negativo da Lagrangeana (configuração estática); então, como a solução das equações de movimento é aquela que minimiza

³Em alguns lugares ela também é chamada de *monopólo de 't Hooft-Polyakov*, apesar de essa denominação ser empregada mais usualmente para se referir à solução geral do *ansatz* (2.29).

a Lagrangeana, temos que, se minimizarmos a energia em cada setor independente, estamos obtendo uma configuração de campos que apresenta as características de ser solução das equações de movimento e ter energia finita, dada pela igualdade em (2.35). Desse modo, uma solução de (2.36) é um sóliton do sistema. Salientamos que essa equação só vale no limite $\zeta \rightarrow 0$ e que, até o presente momento, não existem soluções analíticas para $Q > 1$ ou $\zeta \neq 0$ do *ansatz* de 't Hooft-Polyakov.

2.3 Dyon de Julia-Zee

A solução apresentada na seção anterior não traz consigo carga elétrica alguma, o que pode ser verificado diretamente pelo fato de A_0^a ser nulo. Em 1975, Julia e Zee [15] propuseram uma maneira de incorporar carga elétrica ao monopólo magnético de 't Hooft-Polyakov incorporando, no *ansatz* original (2.29), um termo estático:

$$A_0^a = x^a \frac{J(r)}{gr^2}, \quad (2.37)$$

sujeito às condições de contorno:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} J(r) = 0. \quad (2.38)$$

Assim, esse termo dá origem, segundo o tensor eletromagnético de 't Hooft, equação (2.14), a um campo elétrico gerado por uma carga pontual:

$$q = \frac{-8\pi}{g} \int_0^\infty dr \frac{JK^2}{r}, \quad (2.39)$$

e esse objeto, que carrega cargas elétrica e magnética, é conhecido como *dyon*. Substituindo o novo *ansatz* nas equações de movimento da teoria de Yang-Mills-Higgs, (2.10) e (2.11), obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 K(r)}{dr^2} &= K(r) [K^2(r) - J^2(r) + H^2(r) - 1], \\ r^2 \frac{d^2 H(r)}{dr^2} &= 2H(r)K^2(r) + \zeta H(r) \left[\frac{H^2(r)}{g^2} - r^2 F^2 \right], \\ r^2 \frac{d^2 J(r)}{dr^2} &= 2J(r)K^2(r). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Novamente, a exemplo do monopólo BPS, essas equações têm solução analítica no limite de $\zeta \rightarrow 0$ (ver, por exemplo, [14] e [13]):

$$\begin{aligned}
K(r) &= \frac{gFr}{\sinh gFr}, \\
H(r) &= \cosh \lambda \left(\frac{gFr}{\tanh gFr} - 1 \right), \\
J(r) &= \sinh \lambda \left(\frac{gFr}{\tanh gFr} - 1 \right),
\end{aligned} \tag{2.41}$$

em que λ é uma constante arbitrária real. Essa solução é denominada *dyon de Julia-Zee*, e a carga elétrica que ela carrega adquire uma expressão simples:

$$q = \sinh \lambda \frac{4\pi}{g}. \tag{2.42}$$

Portanto, o fato de a constante λ ser diferente de zero é que fornece o caráter "elétrico" aos campos descritos acima.

2.4 Expressão de Wong para a Interação Partícula - Campos de Yang-Mills

Até o presente momento, estudamos a teoria de Yang-Mills-Higgs e soluções para as equações de campo. Porém, resta ainda uma pergunta fundamental: como as partículas interagem com esses campos? No Eletromagnetismo, que corresponde à teoria $U(1)$, sabemos que a interação entre uma partícula carregada (com carga elétrica q) e os campos eletromagnéticos é dada pela força de Lorentz, que se apresenta, na sua forma covariante, como [4]:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = K^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau}, \tag{2.43}$$

em que m é a massa de repouso da partícula, $F^{\mu\nu}$ é o usual tensor de campo do Eletromagnetismo e τ é o tempo próprio da partícula. No nosso caso, como o espaço interno é o $SU(2)$, não faz sentido associar à partícula uma carga escalar, como a elétrica. Então, definimos o *isospin* da partícula como um vetor I^a no espaço interno. Como este apresenta três graus de liberdade, temos novamente três valores para a : $a = 1, 2, 3$.

Considerando um limite clássico de um sistema quântico, Wong propôs ([16]) uma maneira para se obter a interação entre uma partícula colorida (já que é caracterizada por um vetor cujos índices são de cor) e campos de Yang-Mills, acoplando, na equação de Dirac, esses campos ao isospin da partícula, através da seguinte expressão:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = c\alpha^i (p_i - gA_i^a I^a) \psi + mc^2 \beta \psi + gcA_a^0 I^a \psi. \tag{2.44}$$

Antes de prosseguir, falemos um pouco sobre a equação de Dirac: ela foi concebida na tentativa de se escrever uma equação linear no tempo que, quando se aplicasse a prescrição quântica $\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$ e $E \rightarrow i\hbar\partial_t$, tornar-se-ia a expressão relativística da energia, $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, ao invés da expressão clássica $E = p^2/2m$ na qual a equação de Schrödinger se converte quando da aplicação dessa mesma prescrição. Nesta equação, ψ é um spinor quadridimensional e α^i e β são as usuais matrizes de Björken-Drell. Inicialmente, ela foi concebida por Dirac como a equação de uma função de onda de uma única partícula; entretanto, após a interpretação das soluções de energia negativa como antipartículas, verificou-se que, para fazer sentido, a equação de Dirac deveria ser uma teoria de N partículas, e não de somente uma. Assim, atualmente, ela é interpretada como uma equação de onda cuja quantização canônica fornece um espectro de N partículas de spin 1/2 de dois tipos: o elétron e sua antipartícula, chamada pósitron. Portanto, a equação (2.44) fornece o acoplamento de uma partícula de spin 1/2 com os campos de Yang-Mills.

Desse modo, podemos interpretar os termos de (2.44) que não aparecem na equação de Dirac sem acoplamento. O termo que se acopla com o momento linear é muito semelhante ao acoplamento mínimo entre o potencial vetor eletromagnético e o momento, que surge naturalmente ao se fazer uma formulação Hamiltoniana clássica para a interação radiação - matéria. Já o último termo corresponde ao acoplamento entre os campos de Yang-Mills, através de sua componente não-espacial, com o isospin da partícula. Pode-se mostrar que esses acoplamentos na Hamiltoniana surgem como consequência de se impor um acoplamento mínimo na Lagrangeana (Dirac + Yang-Mills) similar à derivada covariante definida em (1.25), só que com iI^a/\hbar como os geradores da transformação:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \bar{\psi}\gamma^\mu (\partial_\mu - igA_\mu^a I^a) \psi - \frac{mc}{\hbar}\bar{\psi}\psi, \quad (2.45)$$

em que $F_{\mu\nu}^a$ é o tensor de campo de Yang-Mills definido anteriormente e γ^μ são as usuais matrizes de Dirac.

Agora que já interpretamos a equação (2.44), podemos calcular a evolução temporal dos operadores posição, momento linear e isospin através da versão de Heisenberg. Para calcular os comutadores necessários, podemos fazer uso dos seguintes comutadores, bem conhecidos em Mecânica Quântica (ver, por exemplo, [17]):

$$\begin{aligned} [x_i, p_j] &= i\hbar\delta_{ij}, \\ [f(x_i), p_j] &= i\hbar\frac{\partial f}{\partial x_j}, \\ [I^a, I^b] &= i\hbar\epsilon_{abc}I^c, \end{aligned} \quad (2.46)$$

em que a última relação é, na verdade, consequência não de relações quânticas, mas da relação de

comutação dos geradores do $SU(2)$. Assim, de posse dessas relações, podemos calcular facilmente as evoluções temporais desejadas:

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[H, x_i] = \alpha_i c, \\ \frac{dp_i}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[H, p_i] = gc (\alpha^j \partial_i A_j^a - \partial_i A_0^a) I^a, \\ \frac{dI^a}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[H, I^a] = gc (\alpha^i A_i^b - A_0^b) \epsilon_{abc} I^c.\end{aligned}\quad (2.47)$$

Agora, a exemplo do Eletromagnetismo, definimos o momento mecânico do sistema (diferente do momento conjugado \vec{p}):

$$\pi_i = p_i - gA_i^a I^a. \quad (2.48)$$

Então, de posse das equações (2.47), podemos calcular, na versão de Heisenberg, a variação temporal do momento mecânico. Omitiremos essa conta, que se restringe a cálculo de comutadores. De posse da variação temporal de π_i , podemos, inspirados no Eletromagnetismo, fazer o limite clássico em que $\pi_i = m\dot{x}_i$ e, estendendo a validade da equação para a componente temporal de π_μ , obter:

$$m \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = gF_{\mu\nu}^a I^a(\tau) \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (2.49)$$

Além dessa equação, deve-se levar em conta o vínculo estabelecido pela última equação de (2.47):

$$\frac{dI^a}{d\tau} + g\epsilon_{abc} A_\mu^b I^c \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0. \quad (2.50)$$

As equações (2.49) e (2.50) são a generalização da força de Lorentz do Eletromagnetismo e expressam a interação entre uma partícula colorida e os campos vetoriais de Yang-Mills, interação essa representada pela evolução temporal da posição x_μ e do isospin I^a da partícula. Ressaltamos o fato de que só se considera, nessa expressão, o campo de gauge A_μ^a , e nada se fala a respeito do campo escalar de Higgs ϕ^a .

Uma propriedade importante dessa expressão é que ela carrega consigo uma lei de conservação. Podemos verificá-la multiplicando (2.50) por I^a e usando a antissimetria do tensor de Levi-Civita, de modo que:

$$I^a \frac{dI^a}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d^2(I^a I^a)}{d\tau^2} = 0, \quad (2.51)$$

ou seja, o módulo do isospin é conservado, o que já era esperado, uma vez que o grupo de simetria do sistema é o $SU(2)$.

2.5 Forma da Quadriforça para a Interação Partícula - Campos Escalares

Conforme ressaltamos na seção anterior, a expressão de Wong leva em conta apenas a contribuição do campo vetorial de gauge para a quadriforça descrevendo a interação entre uma partícula e um campo de gauge. Porém, nada a respeito dos campos escalares da teoria é considerado, já que eles não foram incluídos na Hamiltoniana inicial de Dirac. Portanto, resta a questão de como se dá essa interação. Na literatura, existem poucos modelos propostos para descrevê-la: os dois principais são o de Fehér [18] e o de Azizi [19], nos quais se procura estender as equações de Wong a uma quinta dimensão que de alguma maneira estaria relacionada com o campo escalar.

Na proposta de Fehér, o campo escalar entra como a quinta componente do campo de Yang-Mills; o principal artifício para se chegar às equações de movimento é considerar o tempo próprio da partícula como uma projeção no espaço quadridimensional de um parâmetro afim correspondente à trajetória da partícula na variedade $5D$ na qual estão escritas as equações de Wong generalizadas. A grande desvantagem desta abordagem vem da artificialidade do argumento, que não se parece realmente como uma generalização natural das equações de Wong, como bem apontou Azizi em [19].

Já na proposta de Azizi, a quinta dimensão entra como mais uma variável da dinâmica da partícula, sem nenhum significado físico mais profundo. Projetada no espaço-tempo de Minkowski, a equação de movimento da partícula fica:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = g F^{\alpha\mu\nu} I^\alpha \frac{dx_\nu}{d\tau} + g \frac{dx^5}{d\tau} D^\mu \phi^\alpha I^\alpha, \quad (2.52)$$

em que D^μ é a derivada covariante e x^5 é a coordenada da quinta dimensão, a qual satisfaz:

$$m \frac{dx^5}{d\tau} = -g \phi^\alpha I^\alpha + h, \quad (2.53)$$

em que h é uma constante de integração. Assim, de (2.52) e (2.53), observamos a principal desvantagem da proposta de Azizi: essa quadriforça não satisfaz a relação da Relatividade Especial de que a aceleração é ortogonal à velocidade:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \frac{dx_\mu}{d\tau} = 0, \quad (2.54)$$

que vem do vínculo:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} = 1, \quad (2.55)$$

o qual é uma consequência de se tomar o tempo próprio da partícula como o parâmetro afim da sua linha mundo. Caso impuséssemos a relação (2.54), teríamos mais uma equação a ser satisfeita, o que deixaria o sistema sobredeterminado. Assim, nós propomos uma outra expressão para a interação entre uma partícula colorida (isto é, com estrutura interna) e campos escalares em geral. Ao invés de seguirmos a abordagem das duas propostas anteriores de escrever as equações de Wong em cinco dimensões, mudaremos o enfoque, propondo diretamente uma expressão para a quadriforça K^μ tal que:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = K^\mu. \quad (2.56)$$

Para isso, nós nos pautaremos por duas propriedades para construir a forma que nossa expressão deve assumir: há um acoplamento mínimo entre o campo escalar e o isospin da partícula (isto é, esperamos apenas uma soma no índice de cor) e a quadriforça tem que ser ortogonal à quadrivelocidade. Com base nesses dois pressupostos, temos basicamente duas formas para a quadriforça: a primeira é através do tensor de Levi-Civita:

$$K^\mu = q \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \frac{dx_\nu}{d\tau} \phi_{,\lambda}^a I^a W_\rho, \quad (2.57)$$

na qual q é a constante de acoplamento e W_ρ , um vetor indeterminado. Claramente, ele não pode ser a quadrivelocidade ou uma derivada do campo escalar; assim, restam as possibilidades de ele ser a quadriaceleração, derivadas superiores da quadrivelocidade ou um campo externo arbitrário, que são todas artificiais para se descrever o movimento de uma única partícula. Logo, abandonamos essa forma e estudamos uma outra, que utiliza o projetor no subespaço ortogonal à quadrivelocidade, $H^{\mu\nu}$:

$$K^\mu = q H^{\mu\nu} \phi_{,\nu}^a I^a. \quad (2.58)$$

Vamos descrever esse tensor explicitamente: sua principal característica é que $H^{\mu\nu} u_\nu = 0$, em que u_ν é a quadrivelocidade da partícula. Dessa equação, concluímos que há várias formas possíveis para esse projetor. Porém, impondo que ele seja no máximo quadrático na velocidade, temos uma única opção:

$$H^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (2.59)$$

em que $\eta^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski. Portanto, a expressão para a dinâmica da partícula fica:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = q \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \phi_{,\nu}^a I^a. \quad (2.60)$$

Observamos que essa expressão é bastante semelhante a uma das propostas em [3] para uma interação entre uma partícula e um campo escalar em Relatividade Especial. A única diferença

é que acoplamos o isospin da partícula, exatamente para "eliminar" o índice referente ao espaço interno. Deve-se lembrar ainda que, além desta equação, há o vínculo (2.55), que também deve ser satisfeito.

Agora, resta descrever a dinâmica do isospin da partícula. Para isso, propomos uma equação bastante semelhante à deduzida por Wong para o caso de um campo vetorial de gauge, de modo que ela carregue as características de o módulo do isospin ser constante e de haver um acoplamento com o espaço externo:

$$\frac{dI^a}{d\tau} + g\epsilon^{abc}\phi^b_{,\mu}I^c\frac{dx^\mu}{d\tau} = 0. \quad (2.61)$$

Até o presente momento, não falamos em teorias de gauge. As equações (2.60) e (2.61) são as propostas para a interação entre uma partícula colorida e um campo escalar qualquer, sem nenhuma restrição. Agora, no caso de esses campos escalares estarem associados a um campo de gauge, temos que fazer uma pequena modificação nessas expressões, de modo que elas sejam invariantes por uma transformação de gauge. Assim, devemos substituir a derivada parcial (∂_μ) nessas expressões pela derivada covariante (D_μ), de modo que as equações de movimento fiquem:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} &= q\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right)D_\nu\phi^aI^a, \\ \frac{DI^a}{D\tau} + g\epsilon^{abc}D_\mu\phi^bI^c\frac{dx^\mu}{d\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Ressaltamos, por fim, que essa proposta para as equações de movimento da partícula colorida, assim como todas as outras apresentadas, resulta de considerações fundamentadas em pressupostos teóricos. A questão sobre qual dessas é a que descreve realmente o movimento só pode ser respondida através de experimentos.

Capítulo 3

Interação Clássica entre uma Partícula Colorida e um Campo Escalar

Neste capítulo, aplicaremos as expressões propostas no último capítulo explicitamente para o caso de um campo puramente escalar (ou seja, sem campos de gauge presentes). Em particular, vamos estudar com mais profundidade o caso do movimento de uma partícula colorida num campo solitônico do modelo $O(3)$ não-linear.

Ressaltamos novamente a convenção de índices utilizada: letras gregas minúsculas referem-se às coordenadas do espaço-tempo, letras latinas minúsculas do começo do alfabeto, às coordenadas internas (*cor*) e letras latinas do meio do alfabeto, às coordenadas espaciais. Para os índices de *cor*, relaxamos a notação de Einstein e consideramos somados índices repetidos em quaisquer posições.

3.1 Equações de Movimento para um Campo Puramente Escalar

Até o presente momento, tratamos tudo no referencial da partícula, já que estamos usando o tempo próprio τ dela. Para descrever o seu movimento em relação a um referencial "fora" dela, precisamos passar para o tempo do observador t . Como a partícula não executa um movimento livre, esse referencial deve ser concebido como um cuja velocidade muda a cada instante, se "ajustando" à nova velocidade da partícula. Nele, o observador mede, passado um intervalo $d\tau$ no referencial próprio da partícula, um intervalo dt dado por ¹:

¹Estamos, a partir de agora, no sistema natural de unidades, em que $\hbar = c = 1$. Assim, omitiremos daqui por diante quaisquer unidades referentes às grandezas envolvidas na descrição do sistema físico, deixando-as subentendidas.

$$dt = \gamma d\tau = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^i v^i}}, \quad (3.1)$$

em que $v^i = dx^i/dt$ é a velocidade da partícula medida pelo observador. Desse modo, usando a equação (3.1) e as definições de velocidade e aceleração próprias da partícula, chegamos nas conhecidas relações (expressas em notação de quadrivetores):

$$\begin{aligned} \frac{dx^\mu}{d\tau} &= (\gamma, \gamma \vec{v}), \\ \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} &= \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{(1 - v^2)^2}, \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{(1 - v^2)^2} \vec{v} + \frac{\vec{a}}{1 - v^2} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Observamos que o vínculo (2.55) fica automaticamente satisfeito pela primeira das duas equações. Agora, substituindo essas relações em (2.60), obtemos três equações diferenciais de segunda ordem independentes, considerando que o campo escalar não dependa do tempo ²:

$$\begin{aligned} \frac{m\ddot{x}}{(1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2)} &= -q\phi_{,x}^a I^a, \\ \frac{m\ddot{y}}{(1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2)} &= -q\phi_{,y}^a I^a, \\ \frac{m\ddot{z}}{(1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2)} &= -q\phi_{,z}^a I^a. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Estaremos denotando, a partir de agora, $(\dot{\quad})$ como a derivada em relação ao tempo do observador t . Notamos que, além de acopladas entre si, as equações acima estão acopladas ainda ao isospin.

Outra característica interessante desse sistema, derivado da quadriforça (2.60), é que se o campo escalar não depende de uma certa coordenada espacial, então não há aceleração da partícula na direção desta coordenada. Isto pode ser visto claramente das equações anteriores; por exemplo, se ϕ^a não depende de x , então $\ddot{x} = 0$. Esta é uma propriedade desejável para a quadriforça, pois "preserva" a simetria imposta pelo campo escalar.

Logo, restam agora as três equações provenientes da evolução temporal do isospin, equação (2.61). Usando que $dt = \gamma d\tau$ e levando em conta que o campo escalar não depende explicitamente do tempo, obtemos um conjunto de três equações diferenciais de primeira ordem:

²Estamos usando a métrica de Minkowski com assinatura negativa, $(\eta^{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

$$\begin{aligned}
\dot{I}_1 &= -q\dot{x}(\phi_{,x}^2 I_3 - \phi_{,x}^3 I_2) - q\dot{y}(\phi_{,y}^2 I_3 - \phi_{,y}^3 I_2) - q\dot{z}(\phi_{,z}^2 I_3 - \phi_{,z}^3 I_2), \\
\dot{I}_2 &= -q\dot{x}(\phi_{,x}^3 I_1 - \phi_{,x}^1 I_3) - q\dot{y}(\phi_{,y}^3 I_1 - \phi_{,y}^1 I_3) - q\dot{z}(\phi_{,z}^3 I_1 - \phi_{,z}^1 I_3), \\
\dot{I}_3 &= -q\dot{x}(\phi_{,x}^1 I_2 - \phi_{,x}^2 I_1) - q\dot{y}(\phi_{,y}^1 I_2 - \phi_{,y}^2 I_1) - q\dot{z}(\phi_{,z}^1 I_2 - \phi_{,z}^2 I_1).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Destas três equações, vemos claramente que há uma constante de movimento: tomando a equação da evolução temporal do isospin, equação (2.61), e contraindo-a com I^a , obtemos, devido à antissimetria do símbolo de Levi-Civita:

$$\dot{I}^a I^a = 0 \Rightarrow I^a I^a = \text{cte}, \tag{3.5}$$

ou seja, o módulo do isospin é uma constante de movimento, o que nada mais é que um reflexo do fato de o grupo de simetria do espaço interno ser o $SU(2)$, conforme o que já explicamos anteriormente. Levando em consideração as equações (3.3) e (3.4), concluímos que as equações de movimento formam o seguinte sistema dinâmico autônomo (a partir de agora, usaremos, quando conveniente, a notação vetorial para as coordenadas do espaço interno):

$$\begin{aligned}
\dot{x}^j &= v^j, \\
\dot{v}^j &= -\frac{q}{m}\gamma^{-2}\phi_{,j}^a I^a, \\
\dot{\vec{I}} &= q\left(\vec{I} \times \vec{\phi}_{,j}\right)v^j.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Uma questão importante sobre esse sistema é a respeito da conservação da energia, que pode ser investigada usando o Teorema de Liouville para sistemas dinâmicos. Dado um sistema dinâmico autônomo n -dimensional representado por $\dot{x}^i = f^i(x^i)$, pode-se mostrar que a variação temporal do volume ocupado por uma configuração inicial no espaço de fase é dado por (ver, por exemplo, [20]):

$$\frac{dV}{dt} = \int_{D(0)} \text{div} f d^n x, \tag{3.7}$$

em que $D(0)$ é a região ocupada, no espaço de fase, pela configuração inicial e:

$$\text{div} f = \frac{\partial f^i}{\partial x^i}.$$

Fazendo esse cálculo para (3.6), encontramos (usando a notação vetorial para vetores do espaço interno):

$$\text{div} f = \frac{2q}{m}\left(\dot{\vec{\phi}} \cdot \vec{I}\right). \tag{3.8}$$

Assim, somente para expressões muito particulares de ϕ^a é que a condição de divergência nula é satisfeita, o que nos mostra que, em geral, o volume no espaço de fase não é conservado. Entretanto, não há uma relação clara deste fato com a conservação ou não da energia, uma vez que o sistema em questão não é Hamiltoniano, já que há um número ímpar de coordenadas ³. Assim, para estudar mais a fundo essa questão, devemos usar outros artifícios. Um deles consiste em contrair a segunda equação de (3.6) por $\gamma^3 v^j$ e usar que:

$$\frac{dT}{dt} = m\gamma^3 v^j \dot{v}^j, \quad (3.9)$$

em que T é a energia cinética relativística total da partícula, isto é, $T = m\gamma$ (ou seja, inclui a energia de repouso). Com esse procedimento, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{d}{dt} (m \ln T/m + q\phi^a I^a) = q\phi^a \frac{dI^a}{dt}, \quad (3.10)$$

que seria uma lei de conservação, se não fosse pelo termo que envolve a derivada do isospin. Observamos também que, no limite Newtoniano ($v \ll 1$), o termo logarítmico se transforma na energia cinética da partícula, uma vez que:

$$m \ln T/m = m \ln (1 - v^2)^{-1/2} \simeq m \ln (1 + v^2/2) \simeq mv^2/2, \quad (3.11)$$

o que corrobora a interpretação da equação (3.10) como a variação da "energia total" do sistema. Notamos que a origem dessa não conservação reside basicamente no acoplamento das coordenadas externas com o isospin, pois será necessária uma parcela de energia, no espaço interno, responsável pela rotação do isospin, e que não está sendo levada em conta na expressão acima. Isso pode ser visto também analisando apenas o sistema mecânico formado pelas duas primeiras equações de (3.6): o isospin atua como um campo externo dependente do tempo (o que deixa o sistema dinâmico restrito não autônomo), o qual quebra a simetria por translação temporal, impedindo a conservação da energia. Fica claro, por esse argumento e pela expressão (3.10), que existe uma lei de conservação da energia para o caso em que o isospin é constante. Analisemos quando isso ocorre: tomando a equação (2.61), temos que, no caso em que $\dot{I}^a = 0$:

$$\epsilon^{abc} I^c \phi_{,i}^b \dot{x}^i = 0 \Rightarrow \vec{I} \times \dot{\vec{\phi}} = 0. \quad (3.12)$$

Assim, isso só vai ser possível se $\vec{I} \parallel \dot{\vec{\phi}}$. Como o isospin é um vetor constante, essa condição só é satisfeita se $\dot{\vec{\phi}}$ apontar sempre na mesma direção, no espaço interno, o que nem sempre acontece, já que, no caso geral, ϕ^a é uma função das coordenadas. Outra consequência de $\dot{\vec{\phi}}$ ser constante é que o vetor $\vec{\phi}$ vai ter que apontar, após um certo período de tempo, sempre na mesma

³Pois não há, aparentemente, momento conjugado ao isospin, já que as equações que descrevem sua evolução temporal são de primeira ordem.

direção; logo, se estivermos lidando com soluções do tipo sóliton, fica claro que apenas aquelas configurações com carga topológica nula (setor de homotopia $Q = 0$) é que irão satisfazer os requisitos anteriores, gerando assim uma expressão semelhante a uma energia total conservada para o sistema.

3.2 Partícula Colorida no Campo de um Sóliton do Modelo $O(3)$ Não-Linear

A primeira aplicação que faremos da expressão de interação entre uma partícula colorida e um campo escalar, equações (2.60) e (2.61), será através de um modelo bidimensional simples, composto apenas por campos escalares com simetria interna correspondente a $SU(2)$: o modelo $O(3)$ não-linear. Uma descrição detalhada desta teoria encontra-se no Apêndice A; para os objetivos desta seção, usaremos apenas os fatos de que nesse modelo os campos escalares não dependem do tempo nem de uma das coordenadas espaciais (a qual escolhemos como a coordenada z) e de que suas equações de movimento não lineares admitem uma solução do tipo sóliton com carga topológica unitária dada por:

$$\begin{aligned}\phi^1 &= \frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \\ \phi^2 &= \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \\ \phi^3 &= \frac{x^2 + y^2 - 4}{x^2 + y^2 + 4},\end{aligned}\tag{3.13}$$

em que usamos a normalização unitária para o módulo do campo escalar (ou seja, ϕ^a pertence sempre à esfera interna de raio unitário S_2^{int}).

Consideremos agora uma partícula colorida com isospin I^a e massa m na presença do campo descrito pelas equações (3.13). O movimento da partícula, bem como a precessão de seu isospin, são descritos pelas equações do sistema dinâmico (3.6). Agora, do fato de o campo não depender da coordenada z , podemos ver claramente destas equações que $\ddot{z} = 0$ e, portanto, a velocidade da partícula na direção z é constante. Para simplificar as contas, impomos que inicialmente a partícula não apresenta velocidade nesta direção, e assim, seu movimento está restrito ao plano (x, y) ⁴.

Outro fato a ser levado em conta para simplificar as equações é que podemos escrever a componente 3 do isospin como função das outras duas componentes, já que o módulo do isospin é

⁴Se quisermos impor uma velocidade inicial $v_{0z} \neq 0$, basta tomar estas órbitas no plano (x, y) e superpor um movimento uniforme na direção z .

uma constante de movimento. Assim, escolhendo trabalhar em coordenadas cartesianas, obtemos o seguinte vínculo:

$$I_3 = \pm \sqrt{1 - I_1^2 - I_2^2}, \quad (3.14)$$

em que escolhemos o módulo do isospin, que é constante, como igual a 1 (ou seja, o mesmo valor do módulo do campo escalar). Substituindo as equações (3.13) e (3.14) no sistema dinâmico (3.6) e levando em conta que $v_z = 0$, como explicado anteriormente, temos as equações de movimento da partícula explicitamente:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x, \\ \dot{y} &= v_y, \\ \dot{v}_x &= \frac{-4q}{m} \frac{(1 - v_x^2 - v_y^2)}{(x^2 + y^2 + 4)^2} [I_1(-x^2 + y^2 + 4) - 2I_1xy + 4x\epsilon\sqrt{1 - I_1^2 - I_2^2}], \\ \dot{v}_y &= \frac{-4q}{m} \frac{(1 - v_x^2 - v_y^2)}{(x^2 + y^2 + 4)^2} [-2I_1xy + I_2(x^2 - y^2 + 4) + 4y\epsilon\sqrt{1 - I_1^2 - I_2^2}], \\ \dot{I}_1 &= \frac{-4q}{(x^2 + y^2 + 4)^2} \{v_x[-4xI_2 - 2xy\epsilon\sqrt{1 - I_1^2 - I_2^2}] + \\ &\quad v_y[-4yI_2 + (x^2 - y^2 + 4)\epsilon\sqrt{1 - I_1^2 - I_2^2}]\}, \\ \dot{I}_2 &= \frac{-4q}{(x^2 + y^2 + 4)^2} \{v_x[4xI_1 - (-x^2 + y^2 + 4)\epsilon\sqrt{1 - I_1^2 - I_2^2}] + \\ &\quad v_y[4yI_1 + 2xy\epsilon\sqrt{1 - I_1^2 - I_2^2}]\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

em que estamos denotando $\epsilon = \pm 1$. Assim, suprimimos uma das equações de movimento, deixando o sistema mais simples, em troca da introdução desse vínculo ϵ . Obviamente, quando optamos por trabalhar em coordenadas cartesianas, estamos na verdade dividindo o espaço interno, que é uma esfera unitária, em dois hemisférios separados, como evidencia a equação (3.14). Portanto, ao se resolver as equações (3.15), deve-se atentar ao fato de que se a solução tocar o plano equatorial, devemos, se necessário, mudar o sistema de equações, alterando o sinal de ϵ .

Uma maneira de se evitar esse inconveniente das coordenadas cartesianas seria escrever o isospin em coordenadas esféricas. Porém, a grande desvantagem é que surgem singularidades nos dois pólos da esfera que representa o espaço interno e, muito pior, as soluções numéricas são insatisfatórias, muito instáveis, provavelmente devido a um termo global $\sin(\theta)^{-1}$ que aparece numa das equações. Portanto, qualquer sistema de coordenadas que se escolha sempre apresentará inconvenientes, o que é um reflexo do conhecido corolário do Teorema de Hopf-Poincaré de que "não se penteiam esferas" (ver [21], por exemplo). Escolheremos o sistema cartesiano porque ele não apresenta problemas numéricos como o sistema polar, nesse caso.

Voltando ao sistema (3.15), observamos que, aparentemente, não há outras constantes de movimento além da conservação do módulo do isospin. Como foi discutido anteriormente, por se tratar de uma solução com carga topológica não-trivial, não é possível achar uma solução em que o isospin seja constante (e portanto haja uma energia conservada). Assim, como aparentemente não há uma resolução analítica das equações de movimento, devemos estudá-las numericamente. Porém, apesar disso, existem outras características globais do sistema que podem ser melhor exploradas analiticamente, tais como estabilidade e comportamento assintótico, de modo a guiar com mais precisão o estudo numérico a ser feito.

3.2.1 A Superfície de Equilíbrio

Para estudar a estabilidade do sistema, calculamos inicialmente os pontos de equilíbrio de (3.15); impondo a condição de equilíbrio, observamos que dois cortes no espaço de fase, dados por $v_x = 0$ e $v_y = 0$, resolvem 4 das 6 equações em questão. Restam ainda outras duas independentes que envolvem as outras 4 coordenadas. Logo, restarão 2 graus de liberdade, o que resultará em uma superfície de equilíbrio. Para parametrizá-la, escolhemos as coordenadas x e y como independentes e expressamos as duas componentes do isospin como função delas, obtendo:

$$I_{(1,2)} = \pm \frac{4\epsilon x_{(1,2)}}{x^2 + y^2 + 4}, \begin{cases} - & \text{se } (x, y) \in D_2 \cup \partial D_2 \\ + & \text{se } (x, y) \notin D_2 \end{cases} \quad (3.16)$$

com:

$$D_2 \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\} \quad (3.17)$$

o disco de raio 2. Assim, temos na verdade duas parametrizações possíveis, que dependem da localização das coordenadas independentes, e que denominaremos, a partir de agora, de parametrização positiva (no caso de o sinal em (3.16) ser +) e parametrização negativa (no caso de o sinal ser -). Observamos que a parametrização positiva é sempre usada quando (x, y) encontrar-se *fora* de D_2 enquanto que a parametrização negativa deve ser usada quando o ponto estiver *dentro* do disco, para ambos os sistemas. Vemos que, em ∂D_2 (ou seja, o círculo de raio 2), as duas parametrizações são possíveis; assim, temos um problema, na superfície de equilíbrio, de uma região sobredeterminada, ou seja, uma região cujos pontos assumem dois valores diferentes para os mesmos parâmetros que descrevem a superfície. Poder-se-ia imaginar que esse é um reflexo do fato de termos escolhido coordenadas cartesianas, mas um cálculo em coordenadas esféricas (para o espaço interno) revela a mesma estrutura dessa região.

Da equação (3.16), podemos observar que, na superfície de equilíbrio, temos $I^a = \pm \phi^a$. Essa relação não é uma coincidência, mas, assim como as condições sobre as velocidades, poderia ter

sendo obtida diretamente das equações originais escritas em forma vetorial ⁵:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{I}}{d\tau} - \vec{I} \times \vec{\phi}_{,\mu} u^\mu &= 0, \\ m \frac{du^\mu}{d\tau} &= q (\eta^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) \vec{I} \cdot \vec{\phi}_{,\nu}, \\ \frac{dx^\mu}{d\tau} &= u^\mu.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Estamos interessados nos pontos de equilíbrio, isto é, $dI^a/d\tau = du^\mu/d\tau = dx^j/d\tau = 0$. A condição $u^j = 0$ e $u^0 = \gamma = \text{cte}$ ⁶ satisfaz a primeira e a terceira equação e reduz a segunda a:

$$\vec{I} \cdot \vec{\phi}^j = 0.\tag{3.19}$$

Agora, tomando $\vec{I} \parallel \vec{\phi}$, o que implica em $I^a = \pm \phi^a$ (já que ambos os vetores têm mesmo módulo), temos que esta equação fica satisfeita, pois:

$$\vec{I} \cdot \vec{\phi}^j = \pm \vec{\phi} \cdot \vec{\phi}^j = \pm \frac{1}{2} (\vec{\phi} \cdot \vec{\phi})^j = 0,\tag{3.20}$$

em que a última passagem se justifica pelo fato de o módulo de $\vec{\phi}$ ser constante. Assim, recuperamos o resultado obtido em (3.16), exceto pelo critério para a escolha dos sinais, a qual pode ser obtida estudando as equações (3.13) e (3.14), as quais descrevem, respectivamente, ϕ^3 e I^3 . Observamos, da segunda dessas equações, que para $\epsilon = +1$, I^3 é obviamente sempre um número positivo. Entretanto, da equação de ϕ^3 , vemos que essa componente do campo é negativa na região compreendida dentro de D_2 e positiva na região fora desse disco. Portanto, deve-se escolher a parametrização negativa se o ponto (x, y) pertencer ao disco e a positiva caso isso não aconteça. Raciocínio análogo pode ser feito para o caso em que $\epsilon = -1$, o que conduz à equação (3.16).

3.2.2 Matriz de Estabilidade

Tendo determinado a superfície de equilíbrio do sistema dinâmico, podemos agora estudar a sua estabilidade. Para isso, basta calcular o jacobiano do sistema de equações avaliado na superfície de equilíbrio (essa matriz é conhecida como matriz de estabilidade). Esse cálculo foi realizado através do software *Maple*; no caso em que a parametrização positiva deve ser utilizada para o sistema com $\epsilon = 1$ ou a negativa para o sistema com $\epsilon = -1$, obtemos ⁷:

⁵Consideraremos aqui o tempo próprio pois a análise é mais imediata neste caso.

⁶Salientamos que a condição (2.54) deve ser respeitada, o que impede que todas as componentes da quadricidade zerem.

⁷Estamos considerando o seguinte ordenamento de coordenadas: $\{v_x, v_y, x, y, I_1, I_2\}$.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{(x^2+y^2+4)^2} & 0 & \frac{4(x^2-y^2+4)}{(x^2+y^2+4)(x^2+y^2-4)} & \frac{8xy}{(x^2+y^2+4)(x^2+y^2-4)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{(x^2+y^2+4)^2} & \frac{8xy}{(x^2+y^2+4)(x^2+y^2-4)} & \frac{4(y^2-x^2+4)}{(x^2+y^2+4)(x^2+y^2-4)} \\ \frac{-4(x^2-y^2+4)}{(x^2+y^2+4)^2} & \frac{-8xy}{(x^2+y^2+4)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8xy}{(x^2+y^2+4)^2} & \frac{4(y^2-x^2+4)}{(x^2+y^2+4)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de M_1 são todos duplamente degenerados:

$$\left\{ 0, 1, \frac{16}{(x^2 + y^2 + 4)^2} \right\}.$$

Observamos que o três autovalores são todos não-negativos e nunca maiores que 1. Assim, condições iniciais na superfície de equilíbrio que estejam parametrizadas por pontos (x, y) ou na região fora de D_2 para o sistema com $\epsilon = 1$ ou na região dentro do disco para o sistema com $\epsilon = -1$ resultarão em órbitas *instáveis*, e os pontos de equilíbrio em questão serão de repulsão.

No caso de considerarmos as regiões em que devemos usar a parametrização com sinal negativo para o sistema com $\epsilon = 1$ ou a com sinal positivo para o sistema com $\epsilon = -1$, encontramos a seguinte matriz de estabilidade:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-16}{(x^2+y^2+4)^2} & 0 & \frac{4(x^2-y^2+4)}{(x^2+y^2+4)(x^2+y^2-4)} & \frac{8xy}{(x^2+y^2+4)(x^2+y^2-4)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-16}{(x^2+y^2+4)^2} & \frac{8xy}{(x^2+y^2+4)(x^2+y^2-4)} & \frac{4(y^2-x^2+4)}{(x^2+y^2+4)(x^2+y^2-4)} \\ \frac{4(x^2-y^2+4)}{(x^2+y^2+4)^2} & \frac{8xy}{(x^2+y^2+4)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-8xy}{(x^2+y^2+4)^2} & \frac{-4(y^2-x^2+4)}{(x^2+y^2+4)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de M_2 são também todos duplamente degenerados:

$$\left\{ 1, 0, \frac{-16}{(x^2 + y^2 + 4)^2} \right\}.$$

Observamos que um dos autovalores será sempre negativo e menor que 1 em módulo. Portanto, os pontos da superfície de equilíbrio parametrizados por pontos (x, y) que estejam ou dentro de D_2 para o caso do sistema com $\epsilon = 1$ ou fora de D_2 para o sistema com $\epsilon = -1$, serão *pontos instáveis tipo sela*. Órbitas que tenham como condições iniciais esses pontos, no espaço de fase, serão atraídas na direção correspondente ao autovetor referente ao autovalor negativo e repelidas na direção do autovetor referente ao autovalor positivo.

Quanto à região correspondente ao círculo de raio 2, como valem as duas parametrizações, para ambos os valores de ϵ , há tanto um ponto que é de repulsão (correspondente ao sinal positivo) quanto um ponto que é de sela (correspondente ao sinal negativo).

Portanto, através de duas análises simples, extraímos importantes características gerais das órbitas do sistema dinâmico (3.15) e podemos, agora, aprofundar nosso estudo do sistema.

3.2.3 Pontos de Sela e Expoentes de Lyapunov

Conforme explicamos na seção anterior, os pontos de equilíbrio nesse sistema são todos instáveis, de modo que as órbitas próximas a eles tendem sempre a ser repelidas. Além disso, como mostraremos mais adiante, assintoticamente todas as soluções do sistema representam órbitas que escapam. Portanto, um aspecto interessante para se estudar é como duas órbitas com condições iniciais próximas tendem a se afastar com o passar do tempo, a fim de investigar a possibilidade de comportamento caótico. Uma maneira quantitativa de se obter essa informação é através do maior dos expoentes de Lyapunov ⁸ (ver, por exemplo, [22]):

$$\lambda = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ d(0) \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{d(t)}{d(0)} \right), \quad (3.21)$$

em que $d(t)$ é a distância euclidiana entre as duas órbitas em questão no espaço de fase. Se esse expoente for diferente de zero, então as órbitas divergem exponencialmente no espaço de fase, o que é um indício da ocorrência de comportamento caótico. Na verdade, a definição de caos é mais complexa do que simplesmente um expoente de Lyapunov não nulo, mas esse fato já é um bom indício para procurar mais a fundo sua ocorrência num sistema.

Para calcular numericamente (3.21), tomamos órbitas próximas dos pontos instáveis tipo sela, pois nesse caso a divergência das órbitas se pronuncia mais dramática, já que há, no espaço de fase, uma direção de aproximação e outra de afastamento. Logo, o que fizemos foi tomar duas condições iniciais próximas a um ponto de sela e entre si, mas de maneira que uma esteja na direção do autovetor correspondente ao autovalor negativo (aproximação) e a outra na direção do autovetor correspondente ao autovalor positivo (afastamento).

Realizar efetivamente o cálculo de (3.21) numericamente não é ainda tarefa trivial. Há vários métodos com diferentes graus de refinamento, especialmente para sistemas Hamiltonianos, categoria à qual não se encaixa nosso modelo. Assim, dispusemos de dois métodos simples, porém confiáveis. O primeiro é considerar a expressão (3.21) sem os limites, ou seja, considerar:

⁸Como o espaço de fase tem dimensão 6, temos 6 expoentes de Lyapunov

$$L(t) = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{d(t)}{d(0)} \right). \quad (3.22)$$

O método consiste em observar o comportamento para tempos longos do gráfico desta função em relação ao tempo, tomando um grande intervalo de integração numérica para o sistema de equações considerado e uma pequena distância inicial entre as órbitas (um valor relativo em torno de 1%, por exemplo).

O segundo método é mais útil para comprovar se o expoente é nulo. Ele consiste em plotar pontos de $d(t)/d(0)$ para intervalos igualmente espaçados de t desde o começo do intervalo de integração (o qual deve ser grande, como no caso anterior) até o seu final. Em seguida, ajusta-se a melhor reta que descreve o conjunto de pontos através do método dos mínimos quadrados e calcula-se também o coeficiente de correlação linear R dele. O objetivo deste método é verificar se, globalmente, a relação $d(t)/d(0)$ se comporta como uma reta, o que pode ser verificado através do coeficiente de correlação: quanto mais próximo de 1 ele for, em módulo, melhor é a aproximação linear para descrever o conjunto de pontos. Caso tal comportamento linear seja comprovado, então o expoente de Lyapunov é nulo pois, aplicando L'Hospital em (3.21), temos que:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(at + b)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a}{at + b} = 0. \quad (3.23)$$

Um cuidado importante ao se aplicar esse método é evitar que instabilidades numéricas influenciem no resultado obtido. Calculando órbitas cujas condições iniciais estejam na superfície de equilíbrio, esperamos que elas sejam retas constantes, afinal estamos num ponto de equilíbrio do sistema. Entretanto, pelo fato de os pontos de equilíbrio serem instáveis (e notamos durante algumas integrações que essa instabilidade é alta), podem ocorrer, para algumas condições iniciais, instabilidades devidas ao próprio método que estamos usando (no caso, o Runge-Kutta de quarta ordem, como explicaremos adiante). E realmente observamos, para alguns pontos nessa superfície de equilíbrio, órbitas que oscilam um pouco em relação à reta esperada ou mesmo divergem após algum tempo. Assim, para fazer sentido o cálculo, escolhemos pontos que satisfaçam essa condição de estabilidade e aí sim determinamos duas condições iniciais nas direções de repulsão e atração do ponto escolhido.

Observamos, aplicando esses dois procedimentos a vários pontos dos dois sistemas, que o valor do expoente de Lyapunov sempre se anulou. Ilustraremos os métodos aplicando-os ao ponto $(x = 0.1, y = 0.2)$ para o sistema com $\epsilon = 1$; os gráficos correspondentes encontram-se na figura 3.1.

Do comportamento do gráfico (a) da figura 3.1 e do valor do coeficiente de correlação linear referente ao gráfico (b), podemos concluir, pelo que foi dito anteriormente, que o expoente de Lyapunov, neste caso, é nulo. O fato de a equação da reta obtida pelo método dos mínimos

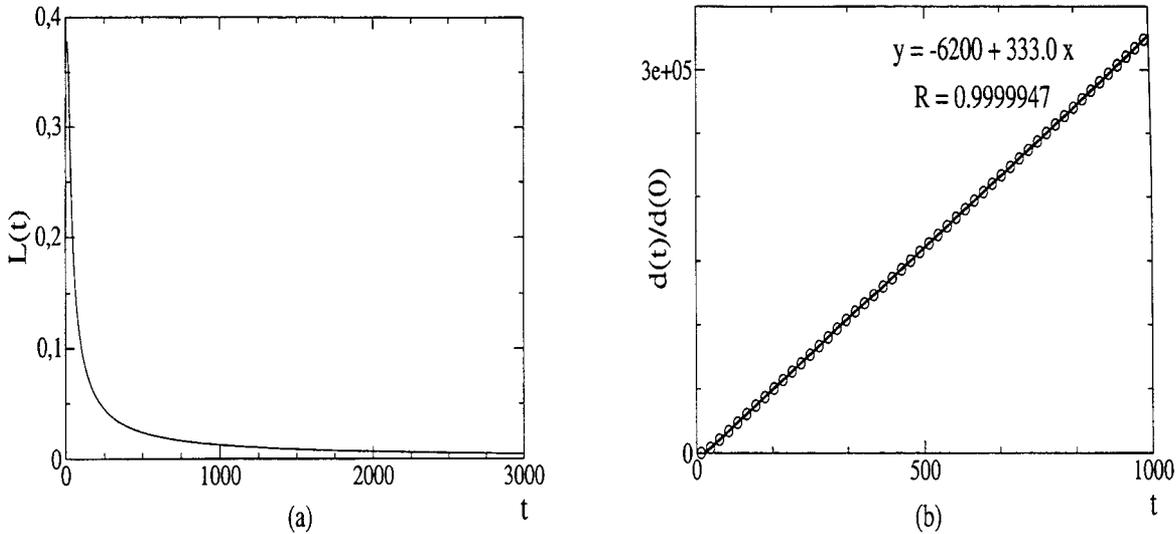


Figura 3.1: Gráficos referentes a duas condições iniciais muito próximas ao ponto de equilíbrio correspondente a $(x = 0.1, y = 0.2)$. (a) Gráfico de $L(t)$ versus t (primeiro método). (b) Gráfico de pontos para o quociente $d(t)/d(0)$ em função de t , reta que melhor ajusta o conjunto de pontos e coeficiente de correlação linear R dele (segundo método).

quadrados (gráfico (b)) não contemplar o ponto $(0, 1)$, como seria esperado, não deve causar preocupações, pois o que está envolvido no cálculo do expoente de Lyapunov, equação (3.21), é o limite $t \rightarrow \infty$, de modo que não nos interessa o comportamento local dessa aproximação linear, mas sim o comportamento global. As órbitas referentes às duas condições iniciais em questão são apresentadas na figura 3.2.

Pela figura 3.2, aliás, as órbitas não parecem estar divergindo linearmente. Porém, a divergência linear sugerida no parágrafo anterior só faz sentido quando consideramos *todo* o espaço de fase, e não apenas uma projeção.

3.2.4 Órbitas

Tendo descrito todos os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico (3.15), temos agora um bom guia para escolher condições iniciais e obter suas conseqüentes órbitas (através de solução numérica das equações de movimento), já que órbitas pertencentes a uma mesma região de classificação do espaço de fase terão comportamentos ao menos semelhantes. Assim, levando em consideração tudo o que foi explicado anteriormente, podemos dividir nosso espaço de fase, para cada um dos dois sistemas independentemente, de acordo com o valor de ϵ , em duas regiões principais: a que compreende a superfície de equilíbrio (a qual denotaremos por região $A^{(\epsilon)}$) e a

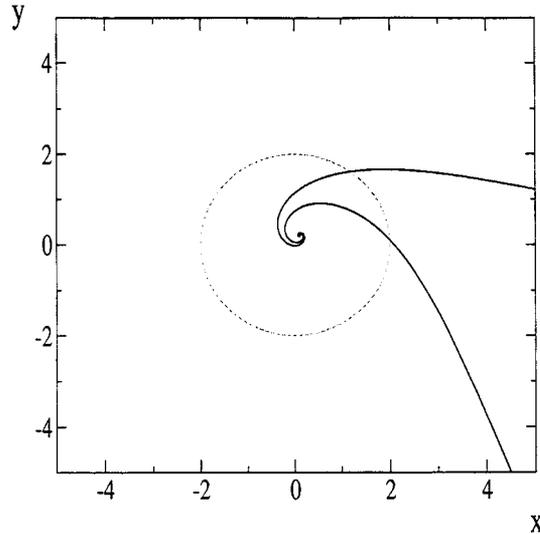


Figura 3.2: Órbitas, no plano (x, y) , referentes a duas condições iniciais muito próximas ao ponto de equilíbrio correspondente a $(x = 0.1, y = 0.2)$.

que contém pontos fora dessa superfície (denotada por $\overline{A^{(\epsilon)}}$). Em $A^{(\epsilon)}$, temos ainda a subdivisão em regiões referentes à parametrização com sinal negativo, à com sinal positivo e à com os dois sinais possíveis, as quais denotaremos respectivamente por $A_-^{(\epsilon)}$, $A_+^{(\epsilon)}$ e $A_{\pm}^{(\epsilon)}$.

Para calcular essas órbitas, usamos um código em *Fortran* conhecido como *dode*, que integra sistemas de equações diferenciais baseado no método de Runge-Kutta de quarta ordem, com controle de passo e de erro. Mais informações sobre esse código podem ser encontradas em [23]. Observamos que nem toda condição inicial dada permite ao método obter uma boa solução numérica, uma vez que algumas órbitas apresentam picos, cessando de oscilar de repente. Esse comportamento se revela mais freqüente para pontos próximos da superfície de equilíbrio, onde a instabilidade é elevada, como mostramos analiticamente. De qualquer modo, esse revés, provavelmente devido a problemas de escalas, torna-se um fator limitante, podendo nos impedir de encontrar soluções com condições iniciais muito específicas. Todavia, isto não deve ser encarado como um fator muito preocupante, pois tendo descrito analiticamente as regiões do espaço de fase, estaremos interessados não em comportamentos específicos de órbitas, mas em comportamentos gerais.

Outro fator que teve que ser levado em conta é o fato de termos dividido o espaço interno em dois hemisférios, resultado de nossa escolha por coordenadas cartesianas, como havíamos explicado anteriormente. Assim, para as órbitas fazerem sentido, é necessário garantir que a precessão do vetor isospin nunca o faça tocar o plano equatorial no espaço interno, ou seja, as órbitas aceitáveis não podem passar por $I_3 = 0$. Quando isso ocorre, devido à separação

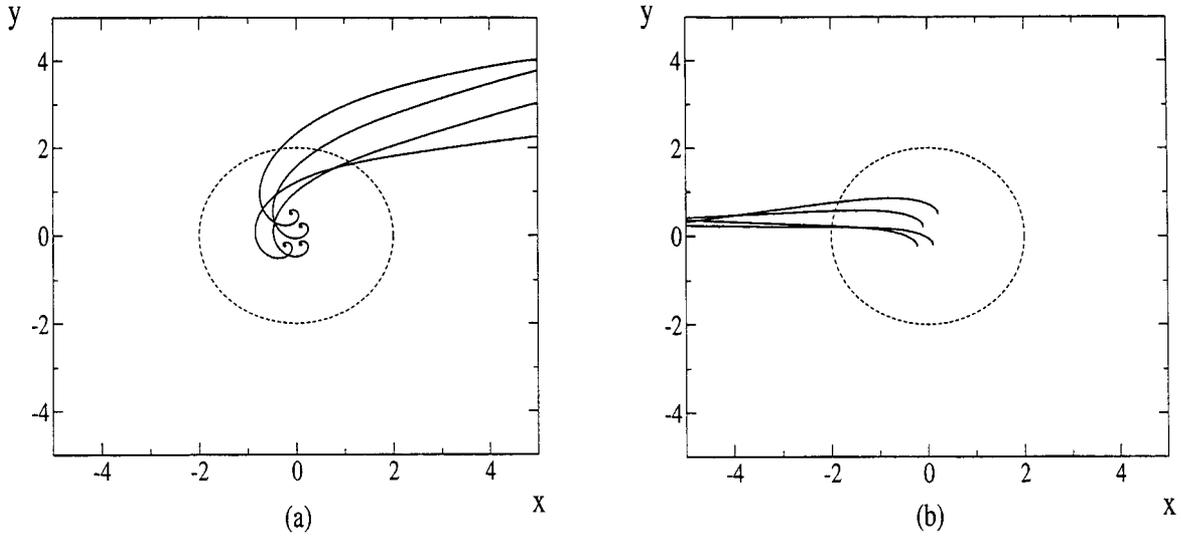


Figura 3.3: Órbitas, no plano (x, y) , referentes a condições iniciais na superfície de equilíbrio com parametrização de sinal negativo para os sistemas com (a) $\epsilon = 1$ e (b) $\epsilon = -1$.

do círculo unitário em dois hemisférios, o sistema não permite que o vetor passe para o outro hemisfério, ocasionando muitas vezes um comportamento inesperado da órbita, como pudemos observar em integrações numéricas. Assim, para evitar esse problema, ao evoluirmos as funções do sistema dinâmico numericamente, sempre aumentamos o tempo de integração e verificamos se a órbita não tocava o plano equatorial.

Nas figuras 3.3 e 3.4 são apresentadas algumas órbitas para condições iniciais próximas às regiões $A_{-}^{(\pm 1)}$ e $A_{+}^{(\pm 1)}$, respectivamente. Podemos observar que órbitas cujas condições iniciais estão próximas de $A_{-}^{(+1)}$ ou $A_{+}^{(-1)}$ têm uma forma espiral e escapam para infinito; já para pontos próximos de $A_{-}^{(-1)}$ ou $A_{+}^{(+1)}$, nenhuma órbita tem comportamento espiral, e todas escapam para infinito. Isso já era esperado devido ao fato já demonstrado analiticamente de que, nas regiões $A_{-}^{(+1)}$ e $A_{+}^{(-1)}$, os pontos iniciais estão próximos de pontos de sela, facilitando a ocorrência dessas órbitas espirais, enquanto que nas regiões $A_{-}^{(-1)}$ e $A_{+}^{(+1)}$, os pontos próximos são de repulsão. Além disso, esse comportamento espiral (ou não espiral, dependendo da região) se repete quando se observa a forma das órbitas nos outros cortes planos do espaço de fase, isto é, nos planos (v_x, v_y) e (I_1, I_2) .

Quanto à região A_{\pm} , não conseguimos obter nenhuma órbita com condições iniciais próximas a essa região nem por esse método numérico nem por vários outros testados. Tal fato não é tão inesperado, pois além de a cada ponto dessa região estarem associados dois pontos da superfície de equilíbrio, o valor da componente I_3 do isospin é nula ⁹, e quando isso ocorre, como explicamos

⁹Já que $I_3 = \pm\phi^3$ e essa componente do campo escalar se anula para $x^2 + y^2 = 4$, de acordo com a equação

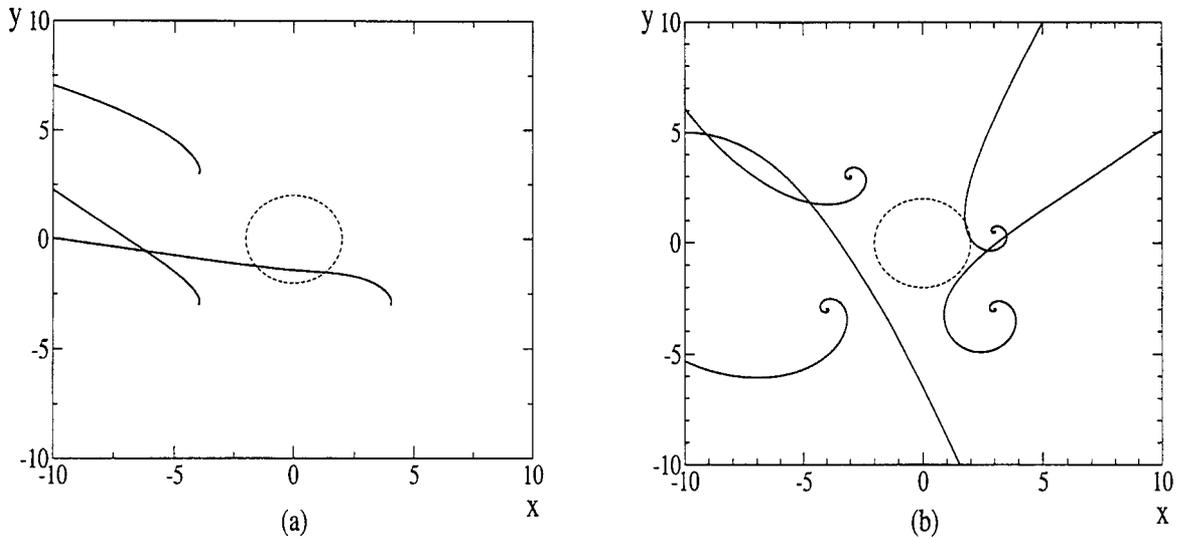


Figura 3.4: Órbitas, no plano (x, y) , referentes a condições iniciais na superfície de equilíbrio com parametrização de sinal positivo para os sistemas com (a) $\epsilon = 1$ e (b) $\epsilon = -1$.

anteriormente, há problemas devido à divisão do espaço interno em dois hemisférios.

Órbitas na região $\overline{A^{(\epsilon)}}$ são apresentadas nas figuras 3.5, 3.7 e 3.8, para os dois valores de ϵ . Na primeira delas, selecionamos sete condições iniciais para o sistema com $\epsilon = 1$ e dez para o sistema com $\epsilon = -1$, modificando apenas a velocidade inicial da partícula em cada uma das condições iniciais. Começamos próximos à superfície de equilíbrio, com $\{x(0) = 0, y(0) = 0, v_x(0) = 0.1, v_y(0) = 0.1, I_1(0) = 0, J(0) = 0\}$, e aumentamos gradativamente as velocidades adicionando 0.1 a ambas, mantendo iguais valores para as 4 outras coordenadas, até chegarmos a $v_x = v_y = 0.7$ para o sistema com $\epsilon = 1$ e a $v_x = v_y = 0.95$ para o com $\epsilon = -1$. Todas as órbitas, no plano (x, y) , estão plotadas juntas na figura 3.5; observamos que, até a velocidade de 0.7, para os dois sistemas, à medida que a velocidade inicial da partícula aumenta, sua órbita vai ficando menos encurvada, indicando que para velocidades baixas a interação é mais intensa se comparada com velocidades mais altas. Isso também pode ser verificado pelos gráficos da figura 3.6, que apresenta a evolução temporal da velocidade na direção x para as órbitas da figura 3.5: quando as velocidades iniciais são altas, as finais tendem a valores próximos a estas, sem variar muito com o tempo.

Uma tentativa de encontrar soluções com velocidades iniciais maiores que 0.7 para o sistema com $\epsilon = 1$ esbarra em alguns problemas, como por exemplo o fato de a velocidade final da partícula ser maior que 1, o que é inaceitável, pela Relatividade. Provavelmente, esse fato estranho deve-se a algum problema numérico, consequência de lidar com raízes de números

(3.13).

negativos ou complexos. Salientamos que esse problema não ocorre para o sistema com $\epsilon = -1$, em que conseguimos boas soluções numéricas até velocidades elevadas tais quais $v_x = v_y = 0.95$.

A figura 3.7 traz novamente uma série de condições iniciais para os dois sistemas, mas que desta vez diferem entre si pelo valor das posições iniciais. Começamos com $\{x(0) = 1, y(0) = 1, v_x(0) = 0.7, v_y(0) = 0.4, I_1(0) = 0.1, I_2(0) = 0.2\}$ e prosseguimos diminuindo os valores iniciais das posições em 0.1, até chegar em $x(0) = y(0) = 0$ para o sistema com $\epsilon = -1$ e $x(0) = y(0) = 0.2$ para o sistema com $\epsilon = 1$ ¹⁰, mantendo os outros valores iniciais iguais aos primeiros. As órbitas referentes a essas condições iniciais, no plano (x, y) , estão plotadas em conjunto, separadamente para cada sistema. Pode-se observar que elas pouco mudam, indicando que a forma de órbitas longe da superfície de equilíbrio não tem uma dependência forte em relação à posição inicial escolhida.

Já na figura 3.8, variamos uma das componentes do isospin: escolhemos uma seqüência de condições iniciais, iguais para os dois sistemas, que começam com $\{x(0) = 0, y(0) = 0, v_x(0) = 0.6, v_y(0) = 0.5, I_1(0) = 0.05, I_2(0) = 0\}$ e seguem com o valor de $I_1(0)$ aumentando de 0.05 até chegar a 0.4, mantendo todos os outros valores iniciais constantes. As órbitas, no plano (x, y) , resultantes dessas condições iniciais estão plotadas juntas. Observa-se que, ao contrário da posição inicial, o valor inicial do isospin (ou de uma componente dele, pelo menos) influencia bastante a forma das órbitas, mesmo numa região mais distante da superfície de equilíbrio.

¹⁰Uma vez que as órbitas para as posições iniciais iguais a 0.1 ou 0 não são bem comportadas para os sistema com $\epsilon = 1$

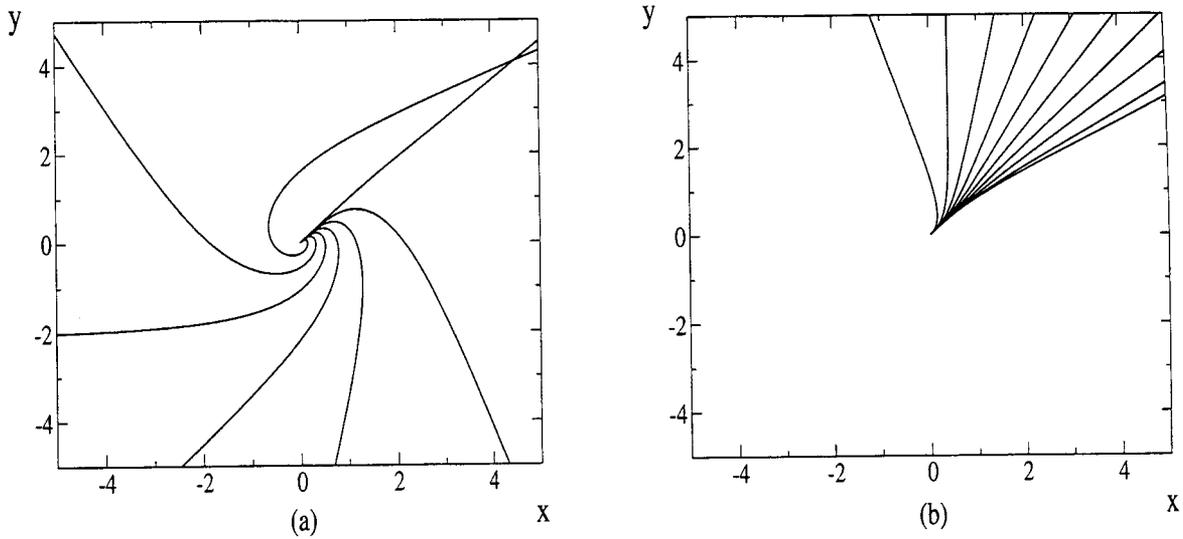


Figura 3.5: Órbitas, no plano (x, y) , referentes às condições iniciais $(x(0) = 0, y(0) = 0, v_x(0) = j/10, v_y(0) = j/10, I_1(0) = 0, I_2(0) = 0)$ com (a) $j = 1, 2, \dots, 7$ para o sistema com $\epsilon = 1$ e (b) $j = 1, 2, \dots, 9$ além de $v_x = v_y = 0.95$ para o sistema com $\epsilon = -1$.

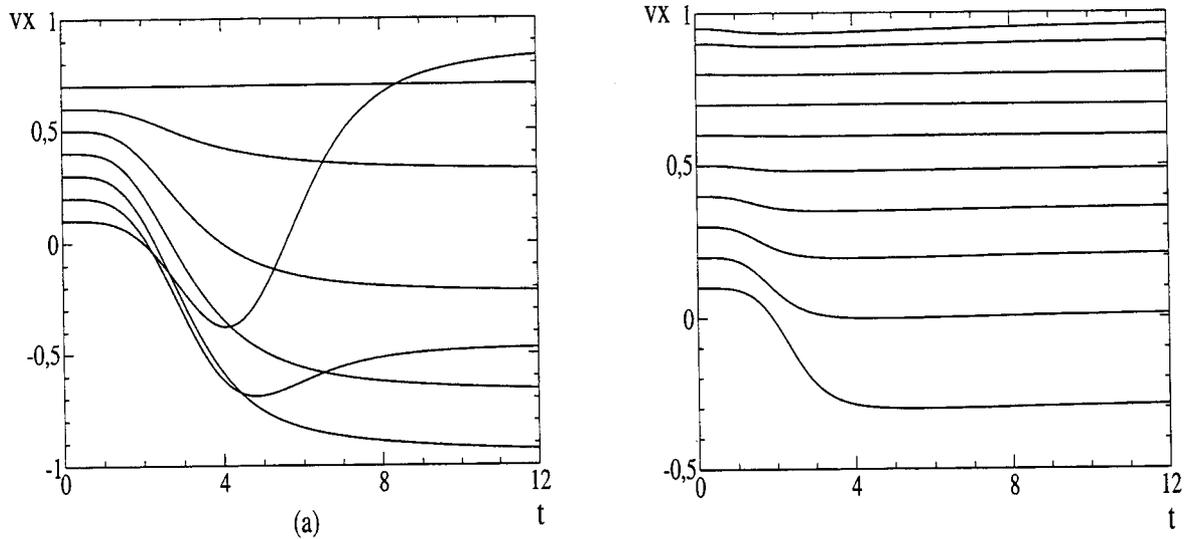


Figura 3.6: Gráficos da evolução temporal da velocidade na direção x para as órbitas mostradas respectivamente em (a) e (b) da figura 3.5.

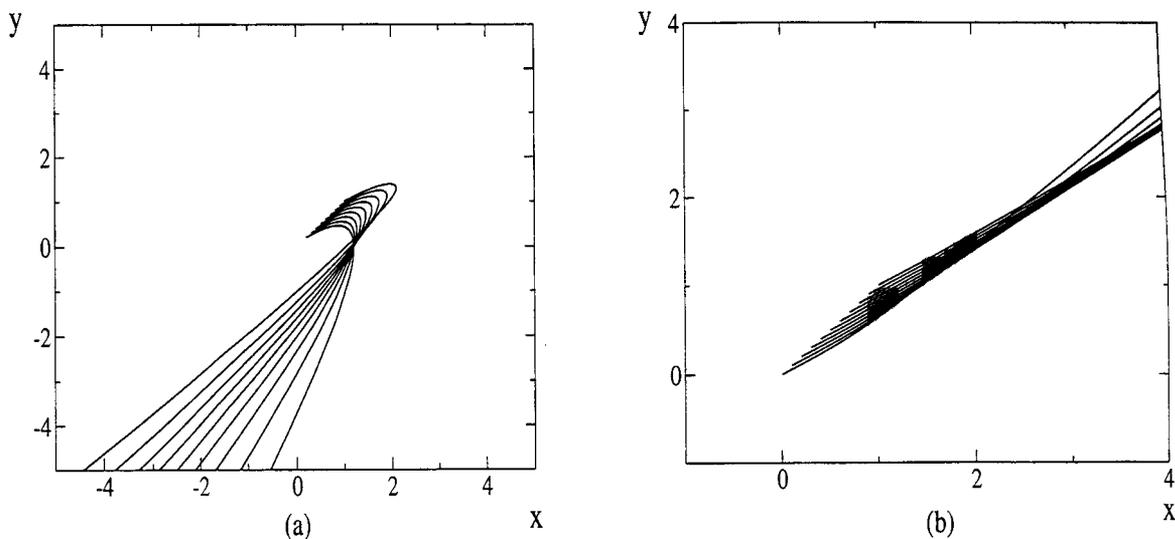


Figura 3.7: Órbitas, no plano (x, y) , referentes às condições iniciais $(x(0) = j/10, y(0) = j/10, v_x(0) = 0.7, v_y(0) = 0.4, I_1(0) = 0.1, I_2(0) = 0.2)$ com (a) $j = 2, 3 \dots 10$ para o sistema com $\epsilon = 1$ e (b) $j = 0, 1 \dots 10$ para o sistema com $\epsilon = -1$.

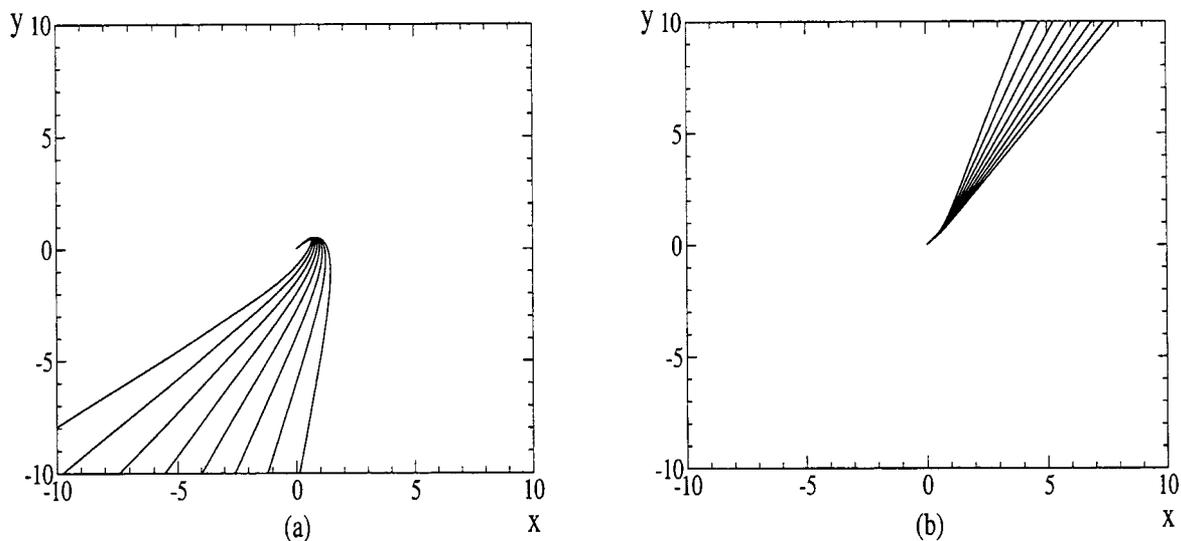


Figura 3.8: Órbitas, no plano (x, y) , referentes às condições iniciais $(x(0) = 0, y(0) = 0, v_x(0) = 0.6, v_y(0) = 0.5, I_1(0) = j/20, I_2(0) = 0)$ com $j = 1, 2 \dots 8$ para os sistemas com (a) $\epsilon = 1$ e (b) $\epsilon = -1$.

3.2.5 Comportamento Assintótico e Interpretação Física

Uma característica interessante do sistema que podemos estudar, até mesmo para verificar se o integrador numérico está reproduzindo corretamente o comportamento do sistema dinâmico, é a forma assintótica das órbitas, isto é, o que ocorre com elas quando $r \rightarrow \infty$. Para isso, podemos tomar as expressões das componentes do campo escalar, equação (3.13), derivá-las e aplicá-las diretamente na fórmula (3.6), que fornece as equações de movimento. Observamos diretamente que todas essas derivadas são funções racionais de x e y e, portanto, vão a zero no infinito:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_{,x}^a = \lim_{r \rightarrow \infty} \phi_{,y}^a = 0, \quad (3.24)$$

de modo que, assintoticamente, o isospin da partícula pára de precessionar (I_1 e I_2 constantes) e ela executa movimentos uniformes nas direções x e y , já que as velocidades v_x e v_y tornam-se constantes. Estas características podem ser verificadas numericamente se fizermos o tempo de integração grande o suficiente, já que todas as órbitas obtidas numericamente escapam (não há, aparentemente, órbitas limitadas).

Isto foi feito visualmente para todas as órbitas integradas; para algumas, calculamos o coeficiente de correlação linear e obtivemos sempre um valor muito próximo da unidade. As figuras 3.9 e 3.10 mostram o comportamento global das órbitas antes mostradas localmente nas figuras 3.3 e 3.5, respectivamente; os menores coeficientes de correlação linear calculados em cada uma das figuras são, respectivamente, 0.983 e 0.9998, o que evidencia esse comportamento linear assintótico. A figura 3.11 ilustra o que foi dito anteriormente a respeito do isospin e da velocidade da partícula no infinito, onde essas grandezas ficam constantes. Apesar de essa figura corresponder a uma órbita em particular, esse comportamento foi verificado para todas as outras órbitas integradas.

Nesse ponto, podemos voltar à discussão a respeito da energia cinética relativística total da partícula, T . Como assintoticamente o isospin tende a um valor constante, e também a velocidade tem esse comportamento, esperamos que, para regiões bem distantes da origem, a energia atinja um valor limite aproximadamente constante. Assim, na figura 3.12, estão apresentadas as variações das energias da partícula para três condições iniciais diferentes: uma próxima da região de pontos de sela da superfície de equilíbrio, uma próxima da região de repulsão da mesma e outra distante dessa superfície. Observamos, confirmado as expectativas, que a energia fica limitada assintoticamente em todos os casos.

O comportamento assintótico das órbitas de uma partícula colorida pode ser estendido para o caso em que o campo escalar presente é uma configuração tipo sóliton do modelo $O(3)$ não-linear com uma carga topológica Q qualquer. Conforme explicitado no apêndice A, as componentes do campo ficam descritas por:

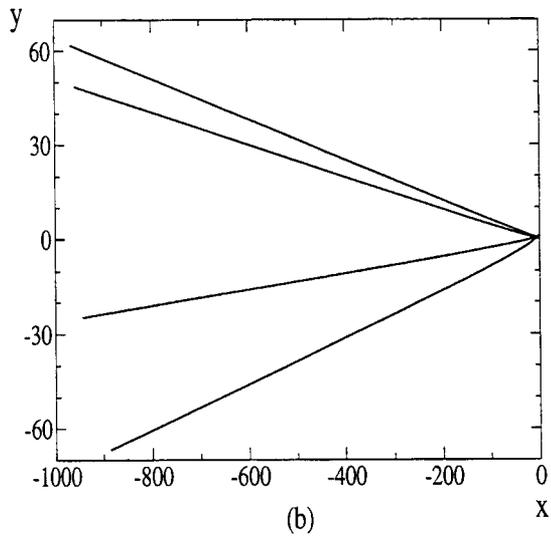
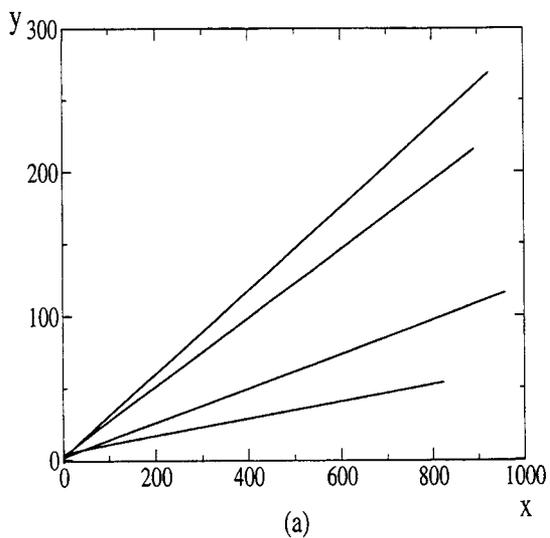


Figura 3.9: Comportamento global das órbitas apresentadas na figura 3.3

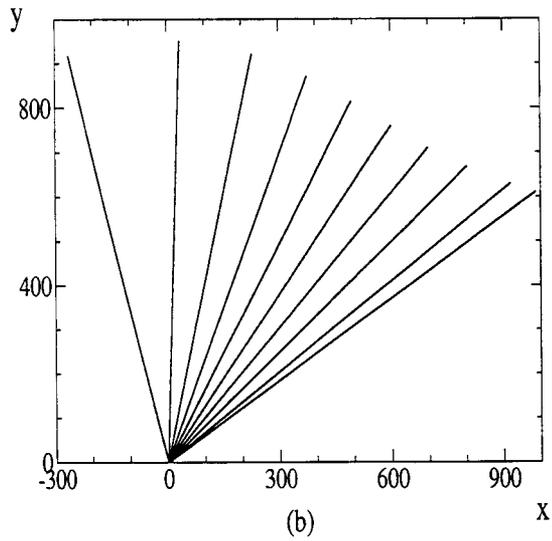
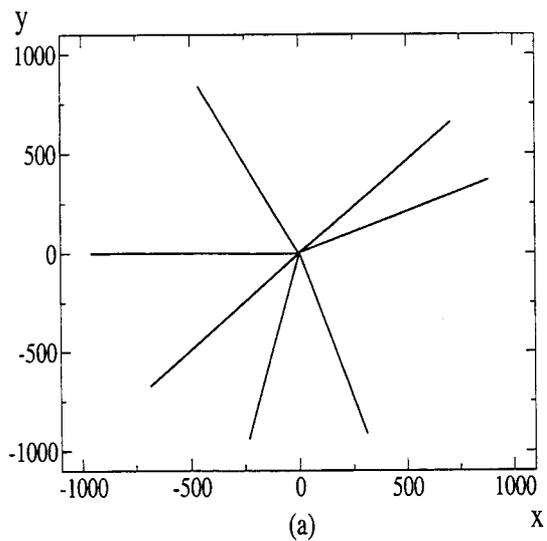


Figura 3.10: Comportamento global das órbitas apresentadas na figura 3.5

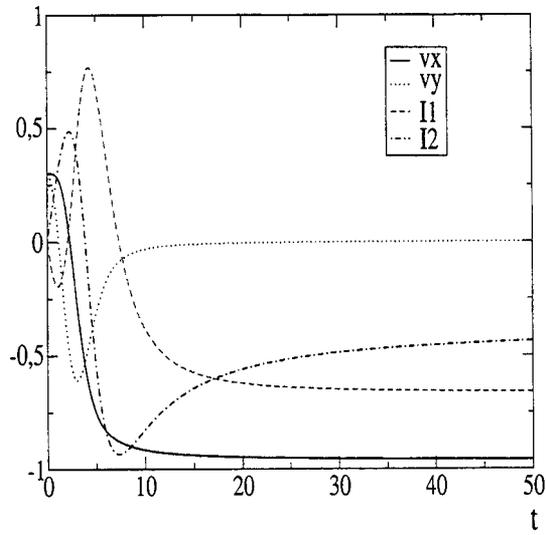


Figura 3.11: Gráfico das velocidades nas direções x e y e das componentes 1 e 2 do isospin da partícula em função do tempo para a condição inicial $(x(0) = 0, y(0) = 0, v_x(0) = 0.3, v_y(0) = 0.3, I_1(0) = 0, I_2(0) = 0)$ para o sistema com $\epsilon = 1$.

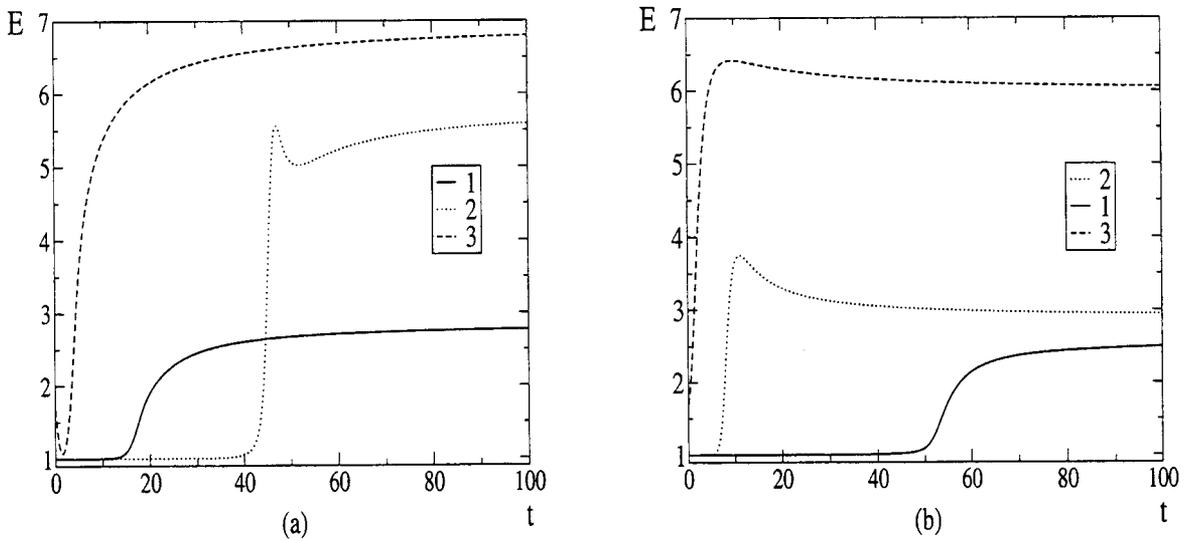


Figura 3.12: Energia em função do tempo para órbita com condição inicial próxima de um ponto de sela (1), próxima de um ponto de repulsão (2) e distante da superfície de equilíbrio (3), considerando os sistema com (a) $\epsilon = 1$ e (b) $\epsilon = -1$

$$\begin{aligned}
\phi^1 &= \frac{4r^Q \cos Q\theta}{r^{2Q} + 4}, \\
\phi^2 &= \frac{4r^Q \sin Q\theta}{r^{2Q} + 4}, \\
\phi^3 &= \frac{r^{2Q} - 4}{r^{2Q} + 4},
\end{aligned} \tag{3.25}$$

em que:

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\
\theta &= \arctan \frac{y}{x}.
\end{aligned}$$

Assim, de (3.25), podemos observar que, para $Q \geq 1$, as derivadas das componentes do campo vão a zero no infinito, de modo que as órbitas da partícula na presença de um sólton qualquer devem ser semelhantes. Outro aspecto interessante é que, dessa mesma equação, podemos obter a parametrização da superfície de equilíbrio do sistema dinâmico envolvido em termos das coordenadas cartesianas (x, y) (ou das polares (r, θ) , em outra abordagem), já que demonstramos anteriormente que ela é equivalente a $I^a = \pm\phi^a$. Assim, repetindo o mesmo procedimento anterior, obtemos:

$$I_1 + iI_2 = \pm \frac{4\epsilon r^Q e^{iQ}}{r^{2Q} + 4}, \begin{cases} - & \text{se } (x, y) \in D_{2^{1/Q}} \cup \partial D_{2^{1/Q}} \\ + & \text{se } (x, y) \notin D_{2^{1/Q}} \end{cases} \tag{3.26}$$

com:

$$D_{2^{1/Q}} \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 4^{1/Q}\}. \tag{3.27}$$

Por fim, podemos fazer uma interpretação física desse sistema baseados no fato de que o modelo $O(3)$ não-linear descreve um ferromagneto bidimensional isotrópico, em Física da Matéria Condensada. Nessa interpretação, o campo ϕ^a , na verdade, não é um campo escalar, mas um parâmetro de ordem que indica a direção e o sentido do spin em cada posição do ferromagneto. Como as soluções tipo sólton desse modelo têm uma energia finita (dada por $E = 4\pi|Q|$), fica claro que a uma certa temperatura finita vai haver uma determinada densidade desses estados, a qual pode ser obtida através da distribuição canônica. A carga topológica do sólton indica possíveis configurações do spin no ferromagneto; por exemplo, para $Q = 1$, o spin em cada posição pode apontar para qualquer direção, com igual probabilidade.

No sistema que estudamos, em que o sólton tinha carga topológica unitária, vimos que, quando uma partícula colorida é colocada nesse sistema ferromagnético, ela vai entrar em equi-

líbrio instável quando estiver inicialmente em repouso e quando seu isospin tiver a mesma direção do spin do sistema naquele ponto em que ela foi deixada.

Pela interpretação anterior, podemos ter uma idéia pictórica de o porquê disso ocorrer. A condição de equilíbrio se dá de maneira muito semelhante ao caso de um dipolo magnético num campo magnético externo ¹¹. Agora, no caso $Q = 1$, cada ponto do ferromagneto aponta para uma direção diferente, de modo que se a partícula colorida for levemente deslocada para qualquer direção, seu isospin não mais vai ser (anti)paralelo ao spin naquele ponto, fazendo com que ele precesse para tentar satisfazer novamente a condição de equilíbrio. Entretanto, a partícula ganhou uma pequena velocidade devido a essa interação e vai continuar se movendo e tentando deixar seu isospin paralelo ao spin de cada ponto, o que vai resultar em mais precessão do isospin, até que a partícula se afaste o suficiente da região em que o módulo do campo é considerável (região assintótica) e prossiga num movimento aproximadamente retilíneo.

¹¹Como já dissemos, essa comparação é apenas pictórica, já que a interação dipolo - campo magnético se dá pela teoria do Eletromagnetismo, a qual não está contida nem contém esse modelo do qual estamos fazendo uso.

Capítulo 4

Interação Clássica entre uma Partícula Colorida e Monopólos

O formalismo introduzido no capítulo anterior para a interação entre uma partícula colorida e um campo escalar com grupo de simetria interno $SU(2)$ pode ser generalizado para o caso em que há também campos de gauge, bastando para isso trocar as derivadas ordinárias ∂_μ (referentes a entidades do espaço interno) por derivadas covariantes D_μ :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} &= g \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) D_\nu \phi^a I^a, \\ \frac{DI^a}{D\tau} + g \epsilon^{abc} D_\mu \phi^b I^c \frac{dx^\mu}{d\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Entretanto, há que se considerar, na expressão da quadriforça, um termo que leve em conta a auto-interação do campo vetorial de gauge; para isso, usamos o termo deduzido por Wong [16], que já é invariante de gauge. Além disso, por questão de conveniência que será explicitada mais adiante, neste capítulo utilizaremos a métrica de Minkowski com assinatura positiva, isto é, $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, o que nos leva a alterar um sinal no projetor ao subespaço ortogonal à velocidade¹. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} &= g \left(\eta^{\mu\nu} + \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) D_\nu \phi^a I^a + g F_\nu^{a\mu} \frac{dx^\nu}{d\tau} I^a, \\ \frac{\partial I^a}{\partial \tau} + g \epsilon^{abc} \left(D_\mu \phi^b + A_\mu^b \right) I^c \frac{dx^\mu}{d\tau} &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

em que:

¹Uma vez que, para essa assinatura, $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = -1$.

$$\begin{aligned}
D_\mu \psi^a &= \partial_\mu \psi^a + g \epsilon^{abc} A_\mu^b \psi^c, \\
F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c,
\end{aligned}
\tag{4.3}$$

com ψ^a um vetor qualquer no espaço interno. No que segue, usaremos (4.2) para estudar as órbitas de uma partícula teste na presença de dois campos: o de um monopólo BPS e o de um dyon de Julia-Zee.

4.1 Órbitas de uma Partícula na Presença de um Monopólo BPS

O monopólo BPS, como explicado anteriormente, é caracterizado pelos seguintes campos estáticos:

$$\begin{aligned}
\phi^a &= x^a \frac{H(r)}{gr^2}, \\
A_a^i &= \epsilon_{aij} x^j \frac{1 - K(r)}{gr^2},
\end{aligned}
\tag{4.4}$$

com:

$$\begin{aligned}
H(r) &= \frac{gFr}{\tanh gFr} - 1, \\
K(r) &= \frac{gFr}{\sinh gFr},
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

em que F é uma constante referente ao termo potencial da Lagrangeana de Yang-Mills-Higgs. Como nessas expressões os índices internos se misturam com os índices espaciais do espaço-tempo, fica conveniente usar a métrica de Minkowski com assinatura positiva, para facilitar o manuseio desses índices nas equações de movimento. Assim, no que se segue, índices espaciais de M_4 repetidos em qualquer ordem serão considerados somados. De posse das expressões anteriores, podemos calcular diretamente as componentes não nulas F_{ij}^a do tensor de campo:

$$F_{ij}^a = \frac{\epsilon_{ijk}}{gr^2} \left[\frac{x^k x^a}{r^2} (K^2 - rK' - 1) + rK' \delta_k^a \right],
\tag{4.6}$$

bem como as componentes não nulas da derivada covariante:

$$D_i \phi^a = \frac{HK}{gr^2} \delta_i^a + \frac{x^a x^i}{gr^4} [rH' - H(1 + K)],
\tag{4.7}$$

em que denotaremos, a partir de agora, a derivada com relação a r por uma linha. Agora, substituímos as expressões (4.4), (4.6) e (4.7) em (4.2) e passamos para o tempo do observador em co-movimento com a partícula (como no capítulo anterior) para chegar ao seguinte sistema de equações:

$$m\vec{a} = \frac{HK}{\gamma^2 r^2} \vec{I} + \frac{rH' - H(1+K)}{\gamma^2 r^4} (\vec{I} \cdot \vec{r}) \vec{r} + \frac{K^2 - rK' - 1}{\gamma r^4} (\vec{I} \cdot \vec{r}) (\vec{v} \times \vec{r}) + \frac{K'}{\gamma r} (\vec{v} \times \vec{I}), \quad (4.8)$$

$$\dot{\vec{I}} = \frac{1-K}{r^2} [\vec{I} \times (\vec{v} \times \vec{r})] + \frac{HK}{r^2} (\vec{I} \times \vec{v}) + \frac{rH' - H(1+K)}{r^2} (\vec{r} \cdot \vec{v}) (\vec{I} \times \vec{r}), \quad (4.9)$$

em que $(\dot{})$ significa derivar em relação ao tempo t do observador, \vec{v} é a velocidade da partícula, \vec{a} a sua aceleração (ambas medidas pelo observador) e $\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$ é o fator de Lorentz. Observamos que a expressão original da quadriforça, que correspondia a quatro equações (uma para cada índice), foi reduzida a três, o que é conseqüência do vínculo de a velocidade ser ortogonal à aceleração. Usando essa identidade, pode-se mostrar facilmente que a equação correspondente ao índice zero é uma combinação das outras três apresentadas acima.

Uma propriedade importante do sistema que pode ser determinada analiticamente é como um elemento de volume dV no espaço de fase evolui com o tempo. Repetindo o mesmo procedimento do capítulo anterior, através do Teorema de Liouville, obtemos, para uma região $D(0)$:

$$\frac{dV}{dt} = \int_{D(0)} \frac{-2}{m} \left\{ \frac{HK}{r^2} (\vec{I} \cdot \vec{v}) + \frac{rH' - H(1+K)}{r^4} (\vec{I} \cdot \vec{r}) (\vec{r} \cdot \vec{v}) \right\} d^9q, \quad (4.10)$$

em que $\{q_i\}$ são as coordenadas do espaço de fase ². Assim, a não ser em certas configurações especiais do sistema, o volume no espaço de fase não se conserva. Notamos também que, tomando as equações de movimento no limite Newtoniano ($v \ll 1$), esse mesmo cálculo mostra que o volume é agora conservado. Entretanto, dessas conclusões nada se pode intuir a respeito da conservação da energia, já que o sistema não é Hamiltoniano e nem pode ser escrito como um, uma vez que temos um número ímpar de coordenadas independentes. Por sua vez, isso resulta do fato de a equação de evolução do isospin ser de ordem um, o que torna difícil a definição de um momento conjugado a ele.

Para tentar obter alguma informação a respeito da energia, poder-se-ia pensar em usar o Teorema de Liouville ao sistema restrito apenas às coordenadas do espaço externo; todavia, tal procedimento é impedido pelo fato de esse sistema restrito não ser mais autônomo, devido ao acoplamento com as coordenadas do isospin. Se por outro lado tomarmos o produto escalar de (4.8) com a velocidade, a fim de obtermos a energia cinética (relativística ou Newtoniana) da

²Ou seja, temos que $\{q_i\} = \{x, y, z, v_x, v_y, v_z, I_1, I_2, I_3\}$.

partícula, vemos também que uma das dificuldades em se encontrar uma expressão de conservação de energia resulta na variação das coordenadas internas com o tempo. Portanto, de maneira geral, a exemplo do caso do campo tipo sólton do modelo $O(3)$ não-linear, concluímos que a não conservação da energia vem do acoplamento com o isospin e que somente para casos especiais em que ele seja constante é que haverá uma constante de movimento associada à energia total. Salientamos ainda, nesse ponto, que o sistema tem uma constante de movimento óbvia associada ao seu espaço interno: o módulo do isospin.

Por fim, um outro aspecto global fundamental é a questão acerca da existência de pontos de equilíbrio do sistema dinâmico. Impondo portanto a condição $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{I}} = 0$ em (4.8) e (4.9), vemos que esta última equação fica automaticamente satisfeita, enquanto a primeira resulta em:

$$\frac{HK}{r^2} \vec{I} + \frac{rH' - H(1+K)}{r^4} (\vec{I} \cdot \vec{r}) \vec{r} = 0. \quad (4.11)$$

Para analisar esta expressão, é conveniente definir uma base de vetores ortonormais em movimento com a partícula:

$$\left\{ \hat{r}, \hat{w} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{|\vec{r} \times \vec{v}|}, \hat{u} = \frac{\vec{r} \times \vec{w}}{|\vec{r} \times \vec{w}|} \right\}. \quad (4.12)$$

Assim, escrevendo $\vec{I} = \alpha \hat{r} + \beta \hat{w} + \rho \hat{u}$, ficamos com:

$$\frac{HK}{r^2} \beta \hat{w} + \frac{HK}{r^2} \rho \hat{u} + \frac{rH' - H}{r^2} \alpha \hat{r} = 0. \quad (4.13)$$

Agora, de (4.5), vemos claramente que a função $K(r)$ nunca se anula; além disso, a função $H(r)$ também não pode se anular, já que, para isso ocorrer, teríamos que satisfazer a identidade $\tanh x = x$. Analisemos por que isso é impossível: as funções x e $\tanh x$ coincidem para $x = 0$; entretanto, para $x > 0$, enquanto a derivada da primeira é sempre 1, a da segunda é $\cosh^{-2} x$, que é sempre menor que 1, já que $\cosh x > 1$ nessa região. Logo, essas duas funções nunca coincidem para $x > 0$ e a identidade anterior nunca é satisfeita. Para completar, podemos calcular $rH' - H$ e ver que essa combinação nunca se anula também, pois, para isso ocorrer, deveríamos satisfazer $x = \sinh x$, o que é impossível, como evidencia uma análise análoga à discutida para a identidade $x = \tanh x$. Logo, a única opção que resta para que (4.13) seja satisfeita é a solução trivial $\alpha = \beta = \rho = 0$. Assim, concluímos que não há pontos de equilíbrio no sistema.

Tendo estudado aspectos globais do movimento da partícula, podemos agora procurar casos específicos em que a solução das equações não é tão complexa, permitindo que se conheçam aspectos locais das órbitas da partícula. Alternativamente, poderíamos tentar resolver o sistema numericamente; contudo, a ausência de pontos de equilíbrio e o elevado número de graus de liberdade no espaço de fase sugerem que essa não é a melhor opção para se estudar as possíveis

órbitas. Portanto, estudaremos o sistema sob duas condições distintas: movimento radial e limite assintótico.

4.1.1 Movimento Radial

Verifiquemos se as equações de movimento (4.8) e (4.9) permitem a ocorrência de um movimento radial. Para que isso seja possível, devemos impôr que \vec{v} seja paralelo a \vec{r} e constatar se as equações fornecem um resultado coerente, isto é, se delas resulta que \vec{a} também é paralelo a \vec{r} . Após impôr essa condição na primeira das equações, notamos que, além da parte radial, restam ainda componentes da aceleração nas direções de \vec{l} e de $\vec{l} \times \vec{v}$, que não são necessariamente radiais. Esta última aponta inclusive para uma direção perpendicular a \vec{r} sempre, de modo que, se quisermos ter um resultado coerente, precisamos cancelá-la. Isto é facilmente atingido impondo adicionalmente que \vec{l} seja radial. Além disso, essa nova imposição corrige também o primeiro termo mencionado, do que resulta que a aceleração sempre aponta na direção radial.

Contudo, essa nova imposição precisa ainda ser testada na segunda equação para ver se é coerente. Assim, substituindo-a em (4.9) e usando que $\vec{v} \times \vec{r} = 0$, obtemos que o vetor isospin é constante e, portanto, aponta sempre na direção radial. Resumindo: se a partícula for lançada numa direção radial com isospin apenas na direção radial também, então sua órbita estará confinada nessa direção e seu isospin será sempre constante. Logo, temos um movimento unidimensional desacoplado da dinâmica interna:

$$m\vec{a} = m\ddot{r}\hat{r} = \frac{\alpha HK}{\gamma^2 r^2} \hat{r} + \frac{\alpha(rH' - H - HK)}{\gamma^2 r^2} \hat{r} = -(1 - \dot{r}^2) \frac{dV(r)}{dr} \hat{r}, \quad (4.14)$$

em que a função $V(r)$ é dada por:

$$V(r) = -\alpha \frac{H(r)}{r} = \alpha \left[-\frac{gF}{\tanh gFr} + \frac{1}{r} \right] \quad (4.15)$$

e α , assim como definido anteriormente, é a projeção do isospin na direção radial. Salientamos ainda o fato de que, no que se segue, a coordenada r pode assumir valores negativos, já que apenas fixamos uma direção no espaço, de modo que o movimento seja unidimensional.

Inicialmente, analisemos a equação (4.14) no limite Newtoniano, isto é, $|\dot{r}| \ll 1$. Neste caso, $V(r)$ pode ser claramente interpretado como uma energia potencial associada ao campo, já que, da equação anterior, resulta diretamente a lei de conservação:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V(r) = \text{cte.} \quad (4.16)$$

O movimento da partícula pode então ser analisado qualitativamente pela forma do potencial, cujas propriedades principais estão abaixo listadas:

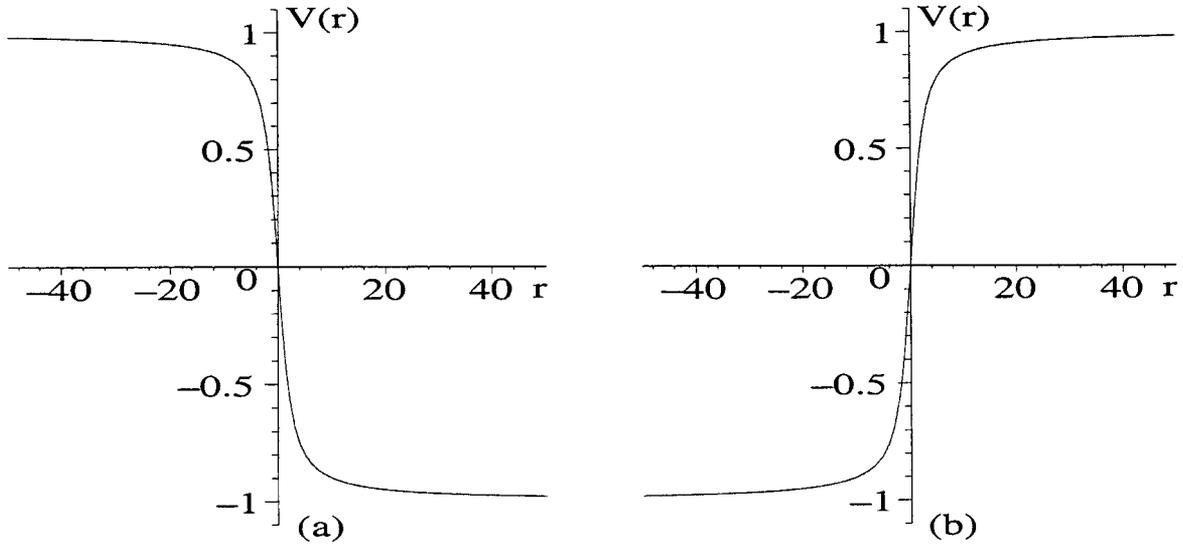


Figura 4.1: Energia potencial da partícula colorida na presença de um campo BPS com $g = F = 1$, no limite Newtoniano e em movimento radial com: (a) $\alpha = 1$, (b) $\alpha = -1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{r \rightarrow 0} V(r) = 0 \\ \lim_{r \rightarrow \pm\infty} V(r) = \mp \alpha g F \\ \frac{dV}{dr} \neq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V(r) < 0 \quad \text{para todo } r > 0 \\ V(r) > 0 \quad \text{para todo } r < 0 \end{array} \right.$$

Logo, vemos que se trata de um potencial puramente repulsivo, o que faz com que todas as órbitas radiais da partícula escapem, para baixas energias. A figura 4.1 (a) apresenta o gráfico dessa função quando se tomam as constantes arbitrárias iguais à unidade e ratifica a análise feita acima. No caso em que a projeção radial do isospin α é negativa, o potencial muda de forma, sendo refletido pelo eixo r , como ilustra a figura 4.1 (b). Assim, para baixas energias, a partícula não mais é repelida para o infinito positivo, mas sim para o infinito negativo. Logo, concluímos que, apesar de o movimento no espaço externo estar desacoplado do movimento no espaço interno, o isospin tem um papel fundamental na determinação das órbitas do corpo. Há que se salientar ainda, que, para a partícula não deixar o limite de validade da aproximação Newtoniana, é necessário que sua energia satisfaça a relação:

$$E \ll m/2 + |\alpha| g F.$$

Para finalizar, podemos encontrar, usando a conservação da energia, uma expressão que fornece, implicitamente, a evolução temporal da coordenada r :

$$\int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{E + \frac{\alpha g F}{\tanh g F r'} - \frac{\alpha}{r'}}} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} t. \quad (4.17)$$

Agora, após termos estudado o limite Newtoniano do movimento radial, podemos estudá-lo no caso geral, em que a equação de movimento é dada por (4.14). Nesta situação, podemos determinar uma constante de movimento que relaciona a energia cinética total da partícula T ³ e a função $V(r)$; para isso, partimos da definição de T :

$$T = m\gamma \Rightarrow \frac{dT}{dt} = m\gamma^3 \dot{r}\ddot{r} \quad (4.18)$$

e, usando a equação de movimento (4.14), chegamos à relação:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{T}{m} \frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m \ln T/m + V(r)) = 0, \quad (4.19)$$

que, no limite de baixas velocidades, recupera a expressão da conservação da energia obtida no caso Newtoniano. Dessa nova constante, podemos ainda determinar como T varia com a posição:

$$T(r) = T(r_0) e^{(V(r_0) - V(r))/m} = T(r_0) \exp \left[\frac{\alpha}{m} \left(\frac{gF}{\tanh gFr} - \frac{1}{r} \right) \right]_{r_0}^r. \quad (4.20)$$

Da expressão acima, notamos que, como $V(r)$ é limitado, a energia também o será:

$$T(r_0) e^{(V(r_0) - |\alpha|gF)/m} \leq T \leq T(r_0) e^{(V(r_0) + |\alpha|gF)/m}.$$

Além disso, dessa lei de conservação, podemos determinar qualitativamente como se dará o movimento da partícula procurando pontos de retorno, isto é, pontos em que $T = m$ (ou seja, $v = 0$):

$$V(r) = m \ln \frac{T(r_0)}{m} + V(r_0). \quad (4.21)$$

Analisemos esta equação para o caso em que $\alpha > 0$ e em que a partícula não sai do repouso. Como $V(r)$ é uma função monotonicamente decrescente e como $T(r_0) > m$ (já que a partícula não sai do repouso), vemos que haverá nenhum ou apenas um ponto de retorno, dependendo se $T(r_0) > m \exp[(\alpha g F - V(r_0))/m]$ ou $T(r_0) < m \exp[(\alpha g F - V(r_0))/m]$, respectivamente. No caso de existir, fica claro que esse ponto de retorno se dará para um certo $r < r_0$, o que implica que a partícula escapa para o infinito positivo. Já se esse ponto estiver ausente, a partícula ainda assim escapa, mas na direção em que for lançada inicialmente. Portanto, em qualquer um dos dois casos, não há órbitas limitadas. Agora, na situação em que a partícula for deixada em

³A exemplo do capítulo anterior, estamos denominando de energia cinética total a soma da energia "puramente cinética" com a energia de repouso da partícula.

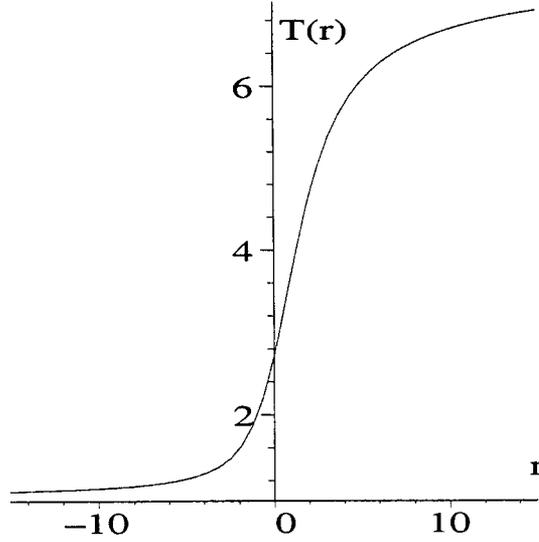


Figura 4.2: Energia cinética total relativística da partícula em movimento radial na presença de um campo BPS com $g = F = 1$ e $m = \alpha = 1$ em função da posição.

repouso, pelos mesmos argumentos anteriores, concluímos que o ponto de retorno será o próprio ponto inicial, de modo que a partícula escapará para o infinito positivo. A figura 4.2 reflete esse tipo de movimento ao apresentar a energia cinética total em função da posição para uma partícula que sai do repouso em $r \rightarrow -\infty$ (todas as constantes arbitrárias foram igualadas a unidade); a região central do gráfico está associada ao ganho de energia dela ao interagir com o campo. A análise dessas mesmas situações para $\alpha < 0$ é análoga à feita acima; a principal diferença é que a direção na qual a partícula escapa preferencialmente é o infinito negativo.

Por fim, da lei de conservação anterior, podemos ainda expressar implicitamente a variação da posição do corpo em função do tempo:

$$\int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{\kappa^2} e^{2V(r')/m}}} = \pm t, \quad (4.22)$$

em que:

$$\kappa = T(r_0) e^{V(r_0)/m}.$$

Para observar diretamente as órbitas, resolvemos numericamente a equação de movimento (4.14) usando o mesmo código do capítulo anterior. Como usual, todas as constantes arbitrárias foram igualadas à unidade. As órbitas são mostradas na figura 4.3 em duas situações diferentes: na parte (a), são apresentadas nove órbitas correspondentes às condições iniciais $r_0 = 10^{-2}$ e $\dot{r}_0 = j/10$, com $j = 1..9$, enquanto que na parte (b) temos nove órbitas também com $r_0 = 10^{-2}$,

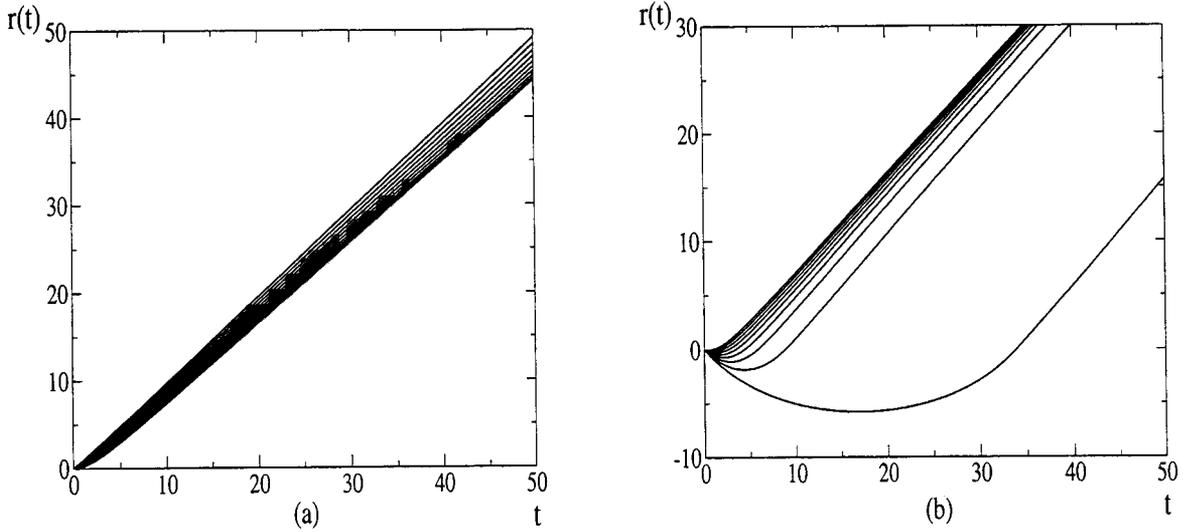


Figura 4.3: Órbitas radiais de uma partícula num campo BPS, lançada de $r_0 = 10^{-2}$ e com: (a) $\dot{r}_0 = j/10$ e (b) $\dot{r}_0 = -j/10$ para $j = 1..9$.

mas agora com $\dot{r}_0 = -j/10$ ($j = 1..9$ também).

4.1.2 Limite Assintótico

Uma possibilidade interessante para se estudar o sistema (4.8) e (4.9) é no seu limite assintótico, ou seja, quando $r \gg 1$. Para isso, basta analisar os termos de cada uma das equações e manter os de ordem dominante, ou seja, os de maior expoente em r . Fazendo esse procedimento, encontramos:

$$\begin{aligned}
 m\vec{a} &= \frac{\alpha}{\gamma^2 r^3} \vec{r} + \frac{\alpha}{\gamma r^3} (\vec{r} \times \vec{v}), \\
 \dot{\vec{I}} &= \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{r^2} (\vec{I} \times \vec{r}),
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

isto é, a evolução temporal no espaço externo é dominada por termos $\mathcal{O}(r^{-2})$, enquanto que, no espaço interno, ela é dominada por termos $\mathcal{O}(r^0)$. Vale salientar que, novamente, estamos denotando $\alpha = \vec{I} \cdot \hat{r}$. Para extrairmos mais informações dessas equações, usemos a base (4.12), na qual expressamos o isospin como:

$$\vec{I} = \alpha \hat{r} + \beta \hat{w} + \rho \hat{u}.
 \tag{4.24}$$

Da definição da base, podemos calcular:

$$\dot{\vec{I}} = \left(\dot{\alpha} + \frac{\rho w}{r^2} \right) \hat{r} + \left(\dot{\beta} - \frac{\rho r}{w^2} \vec{a} \cdot \vec{w} \right) \hat{w} + \left(\dot{\rho} - \frac{\alpha w}{r^2} + \frac{\beta}{w} \hat{u} \cdot (\vec{r} \times \vec{a}) \right) \hat{u} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \dot{\alpha} \hat{r} + \dot{\beta} \hat{w} + \dot{\rho} \hat{u}, \quad (4.25)$$

em que usamos que $\vec{a} \sim \mathcal{O}(r^{-2})$ e mantivemos, na expressão, apenas os termos $\mathcal{O}(r^0)$. Do mesmo modo, podemos também calcular:

$$(\vec{I} \times \vec{r}) = r(\rho \hat{w} - \beta \hat{u}). \quad (4.26)$$

Assim, substituindo as duas expressões anteriores na segunda equação de (4.23), obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= 0, \\ \dot{\beta} &= \rho v_r, \\ \dot{\rho} &= -\beta v_r, \end{aligned} \quad (4.27)$$

em que $v_r = \vec{v} \cdot \hat{r}$. Logo, observamos que α é uma constante de movimento, enquanto as duas outras projeções do isospin são funções oscilatórias. Este último fato pode ser verificado definindo:

$$\zeta = \beta + i\rho,$$

de modo que as duas últimas equações do sistema se reduzem a:

$$\dot{\zeta} = -i\zeta v_r \Rightarrow \zeta(t) = \zeta(0)e^{-i\Delta r(t)} \Rightarrow \begin{cases} \beta(t) = \beta(0) \cos \Delta r(t) + \rho(0) \sin \Delta r(t), \\ \rho(t) = \rho(0) \cos \Delta r(t) - \beta(0) \sin \Delta r(t), \end{cases} \quad (4.28)$$

em que usamos a identidade $v_r = \dot{r}$ e definimos $\Delta r(t) = r(t) - r_0$. Assim, tendo desacoplado a evolução do isospin do movimento no espaço externo, resta-nos um sistema puramente mecânico a ser analisado.

Nesse sentido, de acordo com o que foi discutido anteriormente, como a componente do isospin que se acopla às coordenadas externas é constante, podemos esperar encontrar uma constante de movimento associada à energia total da partícula. Para fazer isso, tomamos sua energia cinética total T , usamos a identidade $\vec{a} \cdot \vec{v} = r\dot{r}$ e repetimos o procedimento adotado no caso do movimento radial, obtendo:

$$\frac{d}{dt} \left(m \ln T/m + \frac{\alpha}{r} \right) = 0. \quad (4.29)$$

Porém, agora, ao contrário do caso anterior de movimento radial, a partícula pode se mover em três dimensões e, assim, essa única constante de movimento não é suficiente para determinar suas possíveis órbitas, por si só. Outras possíveis constantes de movimento não são facilmente encontradas (o momento angular total e o orbital, por exemplo, não se conservam) e, além disso, resolver analiticamente (4.23) também não é tarefa trivial, o que nos leva a estudar alguns casos limites deste sistema para que tenhamos acesso a alguns comportamentos típicos dele. Nesse sentido, podemos analisar duas situações bastante distintas: o limite Newtoniano ($v \ll 1$) e o limite ultra-relativístico ($v \approx 1$).

Limite Newtoniano

Para baixas velocidades ($v \ll 1$), a equação de movimento assume a forma:

$$m\vec{a} = \frac{\alpha}{r^3}\vec{r} + \frac{\alpha}{r^3}(\vec{r} \times \vec{v}). \quad (4.30)$$

Fazendo analogia com o Eletromagnetismo, esta expressão se assemelha à equação de Lorentz para uma carga pontual α interagindo com um campo elétrico gerado por uma carga unitária localizada na origem e um campo magnético provocado por um monopólo magnético unitário também na origem. Além disso, o primeiro termo tem sua origem devida ao campo de Higgs, enquanto o segundo está relacionado ao campo de gauge. Termos dessas formas eram esperados, já que o monopólo BPS comporta-se, para grandes distâncias, como o campo de um monopólo magnético. Observamos ainda que essa expressão é bastante semelhante àquela que Azizi obteve, usando a sua expressão de quadri-força, em [19], só que sem o fator extra que lá aparece representando a dinâmica de uma quinta dimensão adicional.

Como já era esperado da discussão inicial sobre a conservação da energia nesse limite assintótico, notamos que a equação (4.30) apresenta uma constante de movimento associada à energia total do sistema:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{\alpha}{r} = \text{cte}, \quad (4.31)$$

que também pode ser obtida de (4.29) fazendo o limite de baixas velocidades. Além desta, há outras duas constantes relacionadas ao momento angular. Baseados em [24], definimos o momento angular total do sistema partícula-campo como:

$$\vec{J} = \vec{L} + \alpha\hat{r} = m(\vec{r} \times \vec{v}) + \alpha\hat{r}, \quad (4.32)$$

em que \vec{L} é, obviamente, o momento angular orbital da partícula. Usando a equação de movimento (4.30), obtém-se diretamente que \vec{J} é uma constante de movimento. Além disso, como:

$$J^2 = L^2 + \alpha^2, \quad (4.33)$$

resulta que o módulo do momento angular orbital é também uma constante de movimento. Assim, temos três constantes: E , L e \vec{J} . Para descrever as órbitas da partícula, definimos três eixos perpendiculares x, y, z de modo que este último coincida com o vetor constante \vec{J} . Assim, denominando de θ o ângulo do vetor posição da partícula com relação ao eixo \hat{z} (ângulo polar), obtemos, de (4.32):

$$\vec{J} \cdot \hat{r} = \alpha \Rightarrow \cos \theta = \frac{\alpha}{J} = \text{cte.} \quad (4.34)$$

Portanto, a partícula está restrita a se mover na superfície de um cone cujo eixo principal encontra-se na direção \vec{J} e cujo semi-ângulo de abertura é dado por (4.34). Para se determinar a evolução temporal de $r(t)$, podemos combinar a equação (4.31) com a forma explícita do módulo do momento angular orbital:

$$L^2 = m^2 r^2 (v^2 - \dot{r}^2), \quad (4.35)$$

para obter:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{ef}(r). \quad (4.36)$$

Assim, na direção radial, temos um potencial efetivo, que nada mais é que o potencial original mais a barreira centrífuga. A figura 4.4 apresenta a forma genérica desse potencial para $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$; analisando a sua forma, podemos determinar os tipos de órbita da partícula. No que segue, consideraremos sempre $L \neq 0$, já que o caso $L = 0$ corresponde ao movimento radial, que já foi abordado anteriormente. Portanto, quanto ao sinal de α , há duas situações distintas a serem levadas em conta: a primeira é quando $\alpha > 0$, o que implica, pela forma do potencial efetivo, que a partícula só pode ter energia total positiva e que existe apenas um ponto de retorno, sempre mais próximo da origem do que o ponto de lançamento, dado por:

$$\bar{r} = \frac{\alpha}{2E} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2}} \right). \quad (4.37)$$

Salientamos que, nesse ponto de retorno, na verdade temos $\dot{r} = 0$, mas não $v = 0$. De qualquer modo, a partícula sempre escapa para o infinito, independente da direção em que for lançada, desde que o ponto de retorno esteja obviamente na região de validade do limite assintótico, o que ocorre para:

$$E \ll \alpha. \quad (4.38)$$

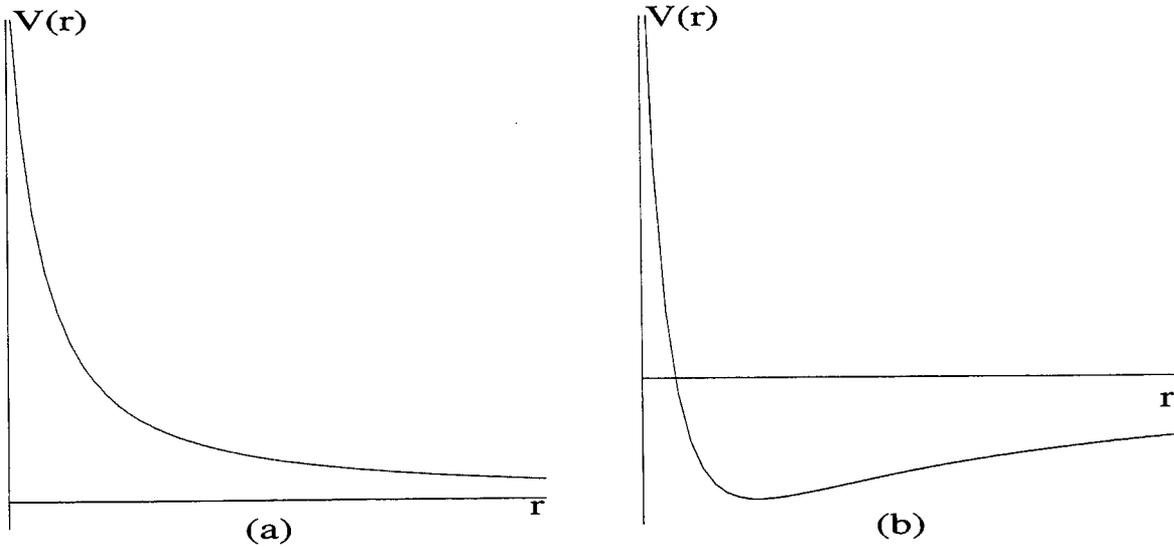


Figura 4.4: Forma genérica do potencial efetivo radial para (a) $\alpha > 0$ e (b) $\alpha < 0$.

Além disso, deve-se respeitar a condição de que a partícula esteja sempre no limite Newtoniano, isto é, que sua velocidade nunca alcance valores muito elevados. Como o mínimo do potencial ocorre para $r \rightarrow \infty$, onde ele se anula, essa condição corresponde a:

$$E \ll \frac{m}{2}. \quad (4.39)$$

Consideremos agora o caso em que $\alpha < 0$; é imediato que a partícula pode ter agora energia positiva ou negativa. No caso de a energia ser positiva, há um único ponto de retorno localizado mais próximo da origem do que o ponto de partida e dado por:

$$\bar{r} = -\frac{\alpha}{2E} \left(\sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2}} - 1 \right). \quad (4.40)$$

Assim, desde que esse ponto esteja na região assintótica, podemos garantir que a partícula escapa sempre. Agora, no caso em que a partícula apresenta energia negativa, existem dois pontos de retorno, dados por:

$$\bar{r}_{\pm} = -\frac{\alpha}{2|E|} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2L^2|E|}{m\alpha^2}} \right), \quad (4.41)$$

desde que seja satisfeita, obviamente, a condição:

$$\frac{L^2|E|}{m\alpha^2} < 1/2. \quad (4.42)$$

Além disso, nessa situação, temos também um ponto de equilíbrio estável:

$$r_{eq} = -\frac{L^2}{m\alpha}. \quad (4.43)$$

Portanto, desde que esses pontos estejam na região de validade do limite assintótico ⁴, a partícula vai ficar presa e, portanto, não escapa. Salientamos que existe a possibilidade de um movimento em que ela apenas rotaciona na superfície compreendida pela intersecção entre o cone e a esfera de raio r_{eq} , bastando, para isso, que ela tenha energia $E = -m\alpha^2/2L^2$. Por fim, vale ressaltar que o ponto de equilíbrio em questão não é um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico global, já que, como afirmado anteriormente, a partícula apresenta um movimento de rotação para essa órbita.

A forma analítica de $r(t)$, para qualquer sinal de α , pode ser obtida através da equação diferencial que resulta de (4.36):

$$r\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m}r^2 - \frac{2\alpha}{m}r - \frac{L^2}{m^2}}, \quad (4.44)$$

cuja solução é dada implicitamente por:

$$\left[\frac{m}{2E} \sqrt{\frac{2E}{m}r^2 - \frac{2\alpha}{m}r - \frac{L^2}{m^2}} + \frac{\alpha\sqrt{m}}{(2E)^{3/2}} \ln \left(\frac{\sqrt{8E}\sqrt{2Er^2 - 2\alpha r - L^2/m} + 4Er - 2\alpha}{m} \right) \right]_{r_0}^{r(t)} = \pm t, \quad (4.45)$$

no caso em que a energia da partícula é positiva, enquanto que, no caso em que ela é negativa, a solução assume a forma:

$$\left[\frac{m}{2E} \sqrt{\frac{2E}{m}r^2 - \frac{2\alpha}{m}r - \frac{L^2}{m^2}} - \frac{\alpha\sqrt{m}}{(2|E|)^{3/2}} \arcsin \left(\frac{4Er - 2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2 + 8EL^2/m}} \right) \right]_{r_0}^{r(t)} = \pm t. \quad (4.46)$$

O sinal da equação (4.44) deve ser escolhido coerentemente com as condições iniciais, isto é, ele deve ser igual ao sinal da velocidade radial inicial da partícula. Entretanto, há que se considerar a existência de pontos de retorno, de acordo com o que foi explicado antes, de modo que o sinal deve ser alterado toda vez que a partícula passar por um deles.

Como exemplo numérico, resolvemos (4.44) com o sinal negativo inicialmente e com $m = 1$, $\alpha = 1$, $E = 0.005$, $L = 0.1$ e $r_0 = 300$. Observamos que, próximo ao ponto de retorno, $r \approx 200$, não há mais solução real, de modo que é preciso usar a equação com sinal positivo a partir de então. Os gráficos da evolução temporal de $r(t)$ estão apresentados na figura 4.5.

⁴Para que isso de fato ocorra, de maneira geral devemos ter as seguintes relações entre as constantes: $|E| \ll |\alpha|$ e $L^2 \gg m|\alpha|$, respeitando a equação (4.42). Além disso, para que a partícula não adquira velocidades muito altas e permaneça no limite Newtoniano, soma-se a essas a condição (4.39).

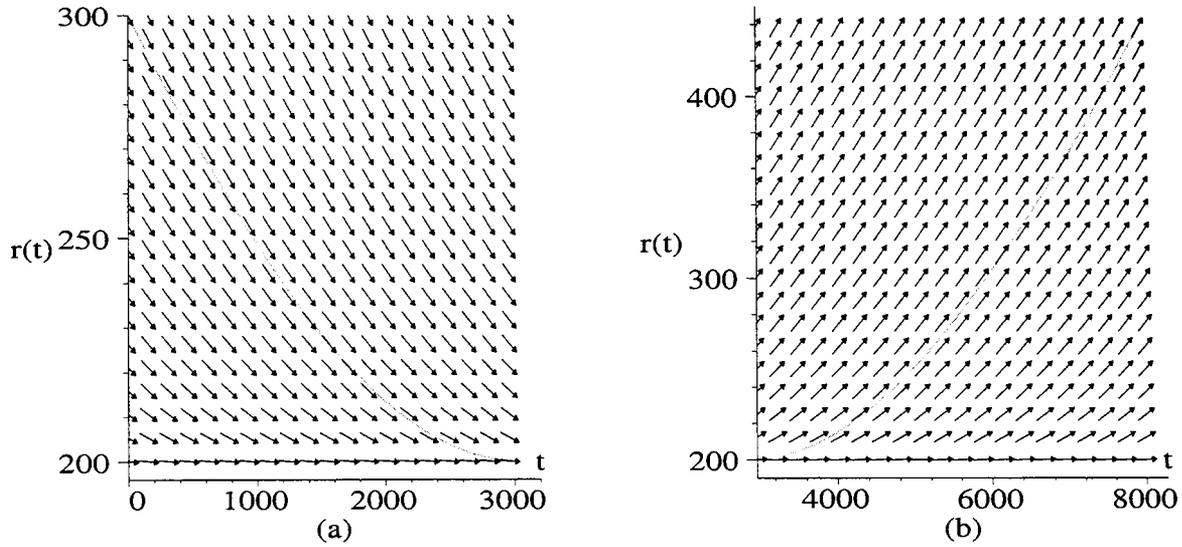


Figura 4.5: Gráfico da coordenada r como função do tempo para a partícula lançada num campo BPS em $r_0 = 300$, com $m = \alpha = 1$, $E = 0.005$ e $L = 0.1$. Na figura (a), tomou-se a equação com sinal negativo; devido à proximidade do ponto de retorno em $r \approx 200$, foi necessário tomar a equação com sinal positivo para continuar a descrever o movimento em (b).

Como já determinamos o modo com que as coordenadas r e θ variam com o tempo, para completar a descrição da órbita da partícula, resta apenas conhecer a evolução temporal da coordenada azimutal ϕ . Para isso, basta tomar a relação (4.35) e também:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2.$$

Usando que θ é constante, obtemos a seguinte equação implícita para $\phi(t)$:

$$\phi(t) = \phi(0) \pm \frac{J}{m} \int_0^t \frac{dt'}{r^2(t')}, \quad (4.47)$$

já que, neste caso, não temos uma forma explícita para $r(t)$. No caso em que $\alpha < 0$ e a partícula está em r_{eq} , a evolução temporal de $\phi(t)$ é dada por:

$$\phi(t) = \phi(0) \pm \frac{mJ\alpha^2}{L^4} t^2, \quad (4.48)$$

ou seja, varia com t^2 .

Limite Ultra-relativístico

Após termos descrito o sistema (4.23) no limite Newtoniano, podemos agora estudá-lo no limite ultra-relativístico e comparar os resultados obtidos em cada caso. Para realizar essa aproximação, basta fazer $\gamma^{-1} \rightarrow 0$ nas expressões originais e reter os termos dominantes:

$$m\vec{a} = \frac{\alpha}{\gamma r^3} (\vec{r} \times \vec{v}). \quad (4.49)$$

Ressaltamos, como já discutido anteriormente, que as componentes do isospin da partícula, na base (4.12), são $\alpha = \text{cte}$ e β e ρ dados por (4.28).

Fazendo o produto escalar de (4.49) com o vetor velocidade, obtemos a conservação da energia cinética da partícula:

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow v = \text{cte} \Rightarrow \gamma = \text{cte}. \quad (4.50)$$

Ou seja, uma vez que a partícula esteja inicialmente no limite ultra-relativístico, sempre ela permanecerá nessa aproximação. Da equação acima, vemos que não há energia potencial associada ao campo e, portanto, a partícula está livre para se mover por todo o espaço, podendo inclusive deixar a região assintótica. Entretanto, como veremos logo a seguir, as órbitas da partícula ainda escaparão, mesmo se o corpo for inicialmente lançado na direção da origem; tal fato não deve causar espanto, pois agora estamos em três dimensões, de modo que a velocidade radial da partícula pode se anular sem que as outras componentes o façam, deixando assim a velocidade total constante. Para determinar essas propriedades, procuramos outras constantes de movimento do sistema; generalizando (4.32), definimos o momento angular total relativístico do sistema:

$$\vec{J}_{rel} = \frac{m(\vec{r} \times \vec{v})}{\sqrt{1-v^2}} + \alpha \hat{r}. \quad (4.51)$$

Usando as equações (4.49), obtemos que \vec{J}_{rel} é uma constante de movimento e, de (4.34), que a partícula fica restrita a mover-se num cone cujo eixo coincide com \vec{J}_{rel} e cujo semi-ângulo de abertura satisfaz:

$$\cos \theta_{rel} = \frac{\alpha}{J_{rel}}. \quad (4.52)$$

Além disso, de (4.33), fica claro que o módulo do momento angular orbital relativístico também é uma constante de movimento. Desse modo, da fórmula (4.35) generalizada para o caso relativístico, obtemos a seguinte equação diferencial para $r(t)$:

$$r\dot{r} = \pm \sqrt{v^2 r^2 - \frac{(1-v^2)L_{rel}^2}{m^2}} = \pm \sqrt{v^2 r^2 - \frac{L^2}{m^2}}, \quad (4.53)$$

cuja solução é dada por:

$$r(t) = \left[\frac{L^2}{v^2 m^2} + \left(\sqrt{r_0^2 - \frac{L^2}{v^2 m^2}} \pm vt \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (4.54)$$

em que denominamos de \vec{L} o momento angular orbital Newtoniano da partícula. A equação acima pode ser expressa numa forma mais clara usando que L é uma constante de movimento:

$$L = mvr_0 \sin \omega_0, \quad (4.55)$$

em que ω_0 é o ângulo entre \vec{r}_0 e \vec{v}_0 . Assim, chegamos a:

$$r(t) = r_0 \sqrt{\sin^2 \omega_0 + \left(|\cos \omega_0| \pm \frac{vt}{r_0} \right)^2}. \quad (4.56)$$

Portanto, se o sinal escolhido for o positivo, a partícula será repelida, escapando para infinito pela superfície cônica previamente determinada. Já se o sinal escolhido for o negativo, a exemplo do caso Newtoniano, a partícula avança em direção à origem até atingir, no instante $t_{min} = r_0 \cos \omega_0 / v$, uma distância mínima $r_{min} = r_0 |\sin \omega_0|$. Depois disso, ela volta a se afastar da origem até escapar para infinito. Assim, próximo a esse ponto especial, a partícula precessiona rapidamente ao redor do cone no qual ela desenvolve seu movimento, já que a sua velocidade total deve se manter constante. Ressaltamos ainda que, para o limite assintótico continuar válido durante toda a trajetória do corpo, basta garantir que ω_0 não seja muito pequeno.

Por fim, para completar a descrição da trajetória da partícula, podemos determinar a forma explícita de $\phi(t)$, usando o correspondente relativístico da equação (4.47); obtemos:

$$\phi(t) = \phi(0) \pm \frac{J}{L} \left[\arctan \left(\frac{|\cos \omega_0| \pm vt/r_0}{\sin \omega_0} \right) - \left| \omega_0 - \frac{\pi}{2} \right| \right]. \quad (4.57)$$

Portanto, tendo estudado os dois limites extremos $v \ll 1$ e $v \approx 1$, podemos inferir como se dá o movimento da partícula no limite assintótico para qualquer velocidade. Nas duas aproximações, vimos que o movimento da partícula se dá numa superfície cônica, o que não é verdade para uma velocidade qualquer. As principais diferenças entre esses cones são que, para uma mesma posição inicial da partícula, no caso Newtoniano o eixo está mais deslocado na direção radial do que o eixo no limite ultra-relativístico, além de aquele ter um ângulo de abertura menor em relação a este, já que o momento angular orbital relativístico é muito maior, em módulo, do que o momento angular Newtoniano. Desse modo, podemos inferir que, se permitirmos à partícula ter uma velocidade qualquer nessa região assintótica, e se $E > 0$, ela tende a escapar por uma trajetória que varre cones sucessivos entre esses dois cones extremos descritos anteriormente. Já para o caso em que $E < 0$, fica difícil quantificar o intervalo de velocidade iniciais para o qual

isso é possível, uma vez que, apesar de existirem movimentos ligados a baixas velocidades, eles não ocorrem a altas.

4.2 Órbitas de uma Partícula na Presença de um Dyon de Julia-Zee

Conforme discutido no segundo capítulo, o dyon de Julia-Zee é uma solução estática das equações de Yang-Mills-Higgs caracterizada pelos campos:

$$\begin{aligned}\phi^a &= x^a \frac{\bar{H}(r)}{gr^2}, \\ A_a^i &= \epsilon_{aij} x^j \frac{1 - K(r)}{gr^2}, \\ A_a^0 &= x^a \frac{J(r)}{gr^2},\end{aligned}\tag{4.58}$$

com:

$$\begin{aligned}\bar{H}(r) &= \cosh \lambda \left(\frac{gFr}{\tanh gFr} - 1 \right) = H(r) \cosh \lambda, \\ J(r) &= \sinh \lambda \left(\frac{gFr}{\tanh gFr} - 1 \right) = H(r) \sinh \lambda, \\ K(r) &= \frac{gFr}{\sinh gFr},\end{aligned}\tag{4.59}$$

em que λ é uma constante arbitrária. O tensor $F_{\mu\nu}^a$ tem componentes não-nulas dadas por (4.6) (com \bar{H} no lugar de H) e também por:

$$F_{i0}^a = \sinh \lambda \left\{ \frac{HK}{gr^2} \delta_i^a + \frac{x^a x^i}{gr^4} [rH' - H(1 + K)] \right\}.\tag{4.60}$$

Além disso, a componente temporal da derivada covariante de ϕ^a continua nula, enquanto as componentes espaciais são as mesmas de (4.7), trocando novamente H por \bar{H} .

Nosso objetivo é estudar o movimento de uma partícula colorida na presença do campo do dyon, usando o formalismo previamente discutido. Em linhas gerais, aplicaremos os mesmos métodos e aproximações da seção anterior, quando o campo em questão era aquele de um monopólio BPS, e compararemos os resultados obtidos nos dois casos. Assim, substituímos as relações acima nas equações (4.2) e mudamos para o referencial do observador em co-movimento para obter ⁵:

⁵Novamente, estamos usando a métrica de Minkowski com assinatura positiva.

$$\begin{aligned}
m\vec{a} = & \frac{HK}{\gamma^2 r^2} \left[\vec{I} (\cosh \lambda + \gamma \sinh \lambda) - \gamma \sinh \lambda (\vec{I} \cdot \vec{v}) \vec{v} \right] + \\
& + \frac{rH' - H(1+K)}{\gamma^2 r^4} (\vec{I} \cdot \vec{r}) \cdot [(\cosh \lambda + \gamma \sinh \lambda) \vec{r} - \gamma \sinh \lambda (\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{v}] + \\
& + \frac{K^2 - rK' - 1}{\gamma r^4} (\vec{I} \cdot \vec{r}) (\vec{v} \times \vec{r}) + \frac{K'}{\gamma r} (\vec{v} \times \vec{I}), \tag{4.61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{I}} = & \frac{1-K}{r^2} \left[\vec{I} \times (\vec{v} \times \vec{r}) \right] + \frac{HK \cosh \lambda}{r^2} (\vec{I} \times \vec{v}) + \\
& + \frac{[rH' - H(1+K - \tanh \lambda)] \cosh \lambda}{r^2} (\vec{r} \cdot \vec{v}) (\vec{I} \times \vec{r}). \tag{4.62}
\end{aligned}$$

A análise quanto à existência de pontos de equilíbrio do sistema dinâmico é equivalente ao caso do campo BPS, já que as mesmas equações são obtidas: não há, também para esse sistema, nenhum ponto de equilíbrio. No que concerne a evolução temporal de um volume no espaço de fase, usando o Teorema de Liouville, novamente concluímos que o volume só se conserva para configurações especiais do sistema, dentre as quais se destaca o limite Newtoniano. Por fim, devido à complexidade das equações acima, lançamos mão de casos especiais e aproximações para estudar as órbitas da partícula.

O primeiro desses casos, inspirado pela seção anterior, é quando há apenas movimento radial, isto é, movimento unidimensional. Como a estrutura vetorial de (4.61)-(4.62) é basicamente a mesma de (4.8)-(4.9), concluímos que o movimento radial é possível se a velocidade e o isospin iniciais da partícula apontarem na direção \hat{r} . Nessa situação, o isospin da partícula permanece constante durante toda a sua trajetória, apontando sempre na direção radial, enquanto a coordenada r evolui de acordo com:

$$m\ddot{r} = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{dV}{dr} \left(\cosh \lambda + \frac{\sinh \lambda}{\gamma} \right), \tag{4.63}$$

em que a função $V(r)$ é a mesma de (4.15); mais uma vez, salientamos o fato de a coordenada r admitir tanto valores positivos quanto negativos. Fica claro que, no limite Newtoniano, essa equação é semelhante àquela do movimento radial Newtoniano de uma partícula teste na presença de um monopólo BPS; a única diferença é que, agora, a constante α é substituída por uma "constante efetiva" $\bar{\alpha}$ de mesmo sinal mas de módulo maior:

$$\alpha \rightarrow \bar{\alpha} = \alpha e^\lambda, \tag{4.64}$$

a qual carrega consigo a informação sobre o caráter elétrico do dyon. Desse modo, a análise das órbitas da partícula é equivalente à feita anteriormente, trocando, obviamente, α por $\bar{\alpha}$ nas equações relevantes.

Também no limite ultra-relativístico, $\gamma^{-1} \rightarrow 0$, vemos que o movimento radial da partícula no campo do dyon é novamente semelhante ao seu movimento no campo BPS no mesmo regime. Mais uma vez, a constante α é substituída por uma "constante efetiva" que não muda de sinal e aumenta em módulo:

$$\alpha \rightarrow \bar{\alpha} = \alpha \cosh \lambda. \quad (4.65)$$

Vamos estudar agora como ficam as órbitas radiais correspondentes ao campo do dyon para qualquer velocidade. Da equação (4.63), obtemos, multiplicando-a por \dot{r} , a seguinte constante de movimento:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{\cosh \lambda} \ln (T/m + \tanh \lambda) + V(r) \right] = 0, \quad (4.66)$$

em que T é a energia cinética total relativística da partícula. A partir da expressão acima obtemos:

$$T(r) = \kappa e^{-V(r) \cosh \lambda/m} - m \tanh \lambda, \quad (4.67)$$

em que:

$$\kappa = [T(r_0) + m \tanh \lambda] e^{\cosh \lambda V(r_0)/m}.$$

Logo, fazendo uma análise semelhante à do caso BPS-radial, vemos que existe ainda um ou nenhum ponto de retorno para esse sistema, de modo que a partícula sempre escapa. Assim como antes, a direção preferencial de escape é o infinito positivo para $\alpha > 0$ e o infinito negativo para $\alpha < 0$, embora a localização dos pontos de retorno e o intervalo de energias para o qual eles ocorrem diferem desse caso em relação ao anterior. Portanto, concluímos que as órbitas radiais da partícula lançada no campo BPS e no campo do dyon são semelhantes globalmente.

Da lei de conservação, podemos ainda obter as equações das órbitas das partículas:

$$\int_{r_0}^r dr' \left[1 - \left(\frac{\kappa}{m} e^{-V(r') \cosh \lambda/m} - \tanh \lambda \right)^{-2} \right]^{-1/2} = \pm t. \quad (4.68)$$

Para que possamos comparar essas órbitas obtidas com aquelas em que a partícula está interagindo com o monopólo BPS, apresentamos na figura 4.6 três gráficos correspondentes às trajetórias nos dois casos com condições iniciais $r_0 = 10^{-2}$ e: (a) $\dot{r}_0 = 0.01$; (b) $\dot{r}_0 = 0.5$; (c) $\dot{r}_0 = 0.9$, além de $\alpha = m = 1$ e $\sinh \lambda = 2$. Observamos que, para altas velocidades, a concordância entre as órbitas é maior, já que o fator γ^{-2} , que é muito pequeno, de uma certa maneira diminui a influência do fator λ . Já para velocidades mais baixas, esse fator desempenha um papel mais relevante e as órbitas são localmente distintas. Nos três casos, vemos que os

comportamentos globais das órbitas são semelhantes, o que também foi verificado para vários outros conjuntos de condições iniciais.

Tendo estudado o movimento radial da partícula na presença de um dyon, podemos agora estudar seu comportamento na região assintótica, assim como fizemos no caso do campo BPS. Repetindo o procedimento, chegamos às seguintes equações:

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \frac{\alpha}{\gamma^2 r^3} [(\cosh \lambda + \gamma \sinh \lambda) \vec{r} - \gamma \sinh \lambda (\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{v}] + \frac{\alpha}{\gamma r^3} (\vec{r} \times \vec{v}), \\ \dot{\alpha} &= 0, \\ \dot{\beta} &= \rho v_r e^{-\lambda}, \\ \dot{\rho} &= -\beta v_r e^{-\lambda}, \end{aligned} \tag{4.69}$$

em que definimos novamente as coordenadas do isospin na base (4.12) como:

$$\vec{I} = \alpha \hat{r} + \beta \hat{w} + \rho \hat{u}.$$

Portanto, também nesse caso, a componente radial do isospin é constante, enquanto as outras duas são oscilatórias:

$$\beta(t) = \beta(0) \cos(\Delta r(t) e^{-\lambda}) + \rho(0) \sin(\Delta r(t) e^{-\lambda}), \tag{4.70}$$

$$\rho(t) = \rho(0) \cos(\Delta r(t) e^{-\lambda}) - \beta(0) \sin(\Delta r(t) e^{-\lambda}). \tag{4.71}$$

Assim, a única diferença destas expressões para aquelas do caso do monopólo BPS é no período de oscilação das funções senoidais. No que se refere ao sistema mecânico subsequente de (4.69), podemos analisá-lo mais precisamente estudando o sistema em duas situações extremas, a saber, no limite de baixas e altas velocidades (limites Newtoniano e ultra-relativístico, respectivamente). Desse modo, no limite $v \ll 1$, a equação de movimento fica:

$$m\vec{a} = \frac{\alpha e^\lambda}{r^3} \vec{r} + \frac{\alpha}{r^3} (\vec{r} \times \vec{v}), \tag{4.72}$$

em que fizemos a aproximação ⁶:

$$\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{v} = r [\hat{r} - v^2 (\hat{r} \cdot \hat{v}) \hat{v}] \approx r \hat{r}. \tag{4.73}$$

Fica evidente a semelhança entre as expressões (4.30) e (4.72); a presença do dyon afeta apenas a contribuição análoga ao campo elétrico, o que era esperado, uma vez que o dyon pode ser interpretado como uma entidade que carrega carga elétrica além da magnética.

⁶A qual é coerente com todas as feitas até agora nesse limite, já que desprezam-se termos $\mathcal{O}(v^2)$.

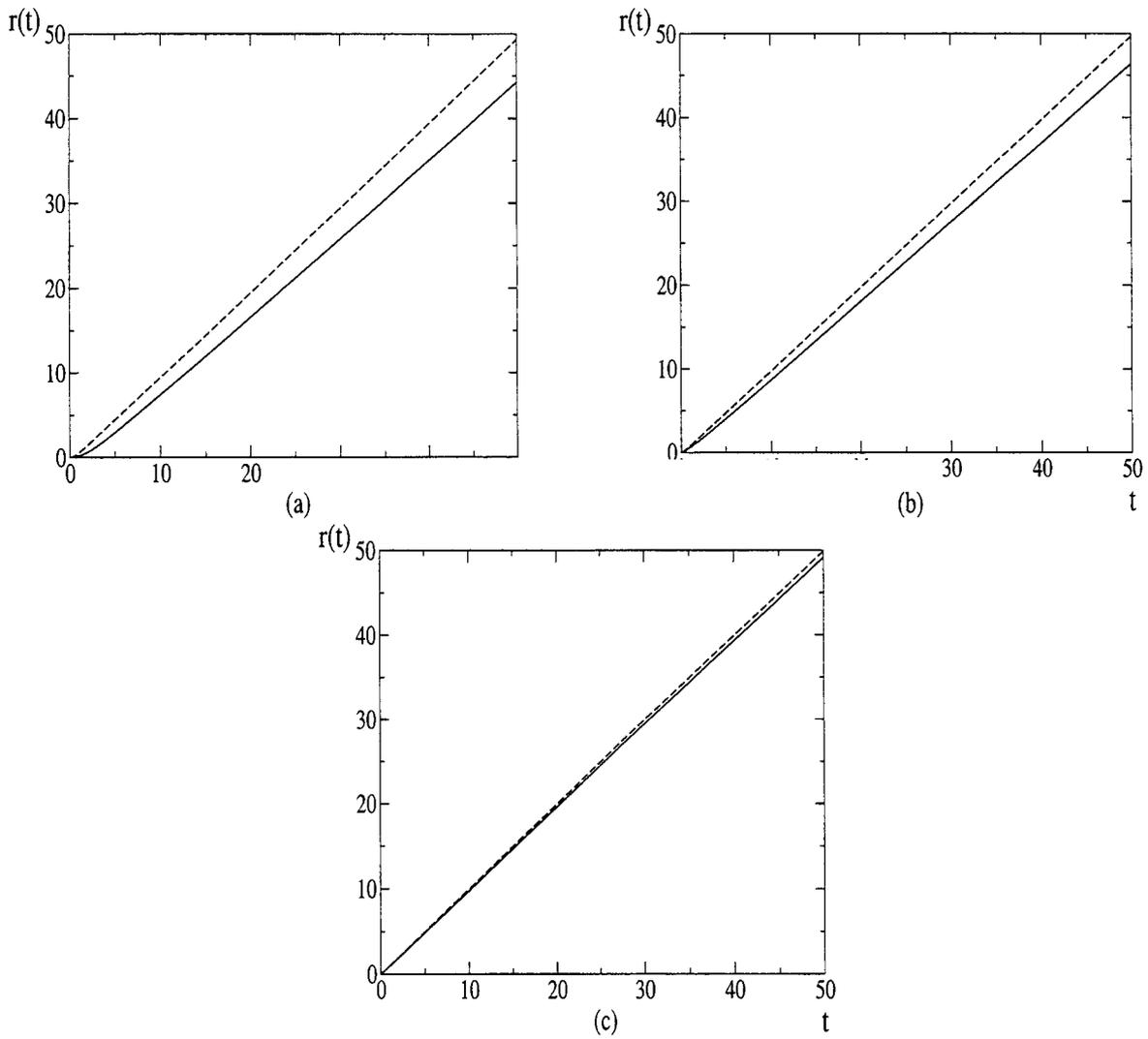


Figura 4.6: Órbitas radiais de uma partícula no campo de um monopólo BPS (linha cheia) e no campo de um dyon (linha pontilhada), lançada de $r_0 = 10^{-2}$ e com: (a) $\dot{r}_0 = 0.01$, (b) $\dot{r}_0 = 0.5$ e (c) $\dot{r}_0 = 0.9$, além de $\alpha = m = 1$ e $\sinh \lambda = 2$.

Aplicando o mesmo procedimento da seção anterior, obtemos as seguintes constantes de movimento para o sistema (4.72):

$$\begin{aligned} E &= \frac{mv^2}{2} + \frac{\alpha e^\lambda}{r}, \\ L &= m |\vec{r} \times \vec{v}|, \\ \vec{J} &= m (\vec{r} \times \vec{v}) + \alpha \hat{r}, \end{aligned} \quad (4.74)$$

as quais podem ser interpretadas como a energia total, o módulo do momento angular orbital e o vetor momento angular total, respectivamente. Dos mesmos argumentos usados anteriormente, vemos que o movimento da partícula fica restrito à superfície cônica com eixo \vec{J} e semi-ângulo de abertura (4.34). Além disso, as expressões para $r(t)$ e $\phi(t)$ continuam descritas por (4.45) e (4.47), desde que se faça a substituição de α pela "constante efetiva" αe^λ . Portanto, para baixas velocidades, a partícula pode executar órbitas fechadas.

Por outro lado, podemos estudar (4.69) no limite ultra-relativístico, isto é, para $v \approx 1$:

$$m\vec{a} = \frac{\alpha \sinh \lambda}{\gamma r^3} [\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{v}] + \frac{\alpha}{\gamma r^3} (\vec{r} \times \vec{v}). \quad (4.75)$$

Comparando a expressão obtida com (4.49), vemos que a principal diferença está na presença de termos nas direções \hat{r} e \hat{v} . Fazendo o produto escalar de (4.75) com o vetor velocidade, obtemos uma lei de conservação para a energia total relativística:

$$E = m\gamma + \frac{\alpha \sinh \lambda}{r} = T + \frac{\alpha \sinh \lambda}{r} = \text{cte}, \quad (4.76)$$

em que T é, claramente, a energia cinética total relativística da partícula. Assim, neste caso, diferentemente de antes, a presença do dyon ocasiona o aparecimento de um termo potencial, o qual, todavia, pode ser desprezado frente à energia cinética, já que, nesse regime assintótico ultra-relativístico, $\gamma \gg 1$ e $r^{-1} \ll 1$. Portanto, podemos considerar a energia cinética constante. Tomando o momento angular relativístico total:

$$\vec{J} = \frac{m (\vec{r} \times \vec{v})}{\sqrt{1 - v^2}} + \alpha \hat{r}, \quad (4.77)$$

vemos que ele continua conservado e sem nenhuma contribuição extra do dyon em relação ao monopólo BPS. Portanto, novamente as trajetórias da partícula ficam confinadas num cone de eixo \vec{J} e semi-ângulo de abertura (4.34), ou seja, o mesmo cone do caso do monopólo BPS. Além disso, o momento angular orbital também é conservado e, como as três constantes de movimento são exatamente as mesmas do caso BPS, as órbitas da partícula são dadas pelas mesmas equações de $r(t)$, $\theta(t)$ e $\phi(t)$, sem nenhuma contribuição adicional do dyon, ou seja, sem o aparecimento do termo λ . Desse modo, a exemplo do que foi explicado no caso do movimento radial, o limite

ultra-relativístico suplanta as diferenças entre os casos em que o campo de interação é o monopólo BPS ou é o dyon.

Capítulo 5

Conclusões

Nessa dissertação, apresentamos o movimento relativístico que uma partícula com isospin desenvolve na presença de alguns tipos de campos solitônicos, baseados em novas expressões propostas para descrever as equações de movimento do corpo. Como resultado geral, observamos que, tanto quando consideramos apenas um campo escalar como quando acrescentamos ainda um campo de gauge, o isospin da partícula se acopla ao campo transferindo energia no espaço externo para energia no espaço interno. A falta de uma expressão que quantificasse esse último tipo de energia, a qual ocasiona a precessão do isospin, impediu que obtivéssemos uma constante associada à energia total do sistema, isto é, à energia no espaço externo, bem determinada, somada à energia no espaço interno.

No que se refere às formas das órbitas da partícula, alguns resultados valem ser ressaltados. No caso em que o campo com o qual o corpo interage é um sólito do modelo $O(3)$ não-linear, obtivemos que todos os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico são instáveis e que, assintoticamente, a partícula atinge um regime de velocidade e isospin constantes. Esses dois fatos, confirmados por cálculos numéricos de trajetórias, indicam que não há órbitas fechadas para o sistema em questão, fazendo com que a partícula sempre escape para o infinito. O valor nulo obtido numericamente para os expoentes de Lyapunov referentes a vários conjuntos de pares de órbitas com condições iniciais próximas a pontos de equilíbrio tipo sela, sendo uma na direção de afastamento e outra na de aproximação, indicou a ausência de comportamento caótico para o sistema.

Quando consideramos a interação entre a partícula com isospin e o monopólo BPS, o qual no infinito comporta-se como um monopólo magnético, obtivemos um interessante resultado no regime assintótico: tanto para o limite Newtoniano (baixas velocidades) quanto para o limite ultra-relativístico (altas velocidades), as órbitas do corpo ficam sempre restritas a uma superfície cônica. Apesar de essa propriedade não valer para velocidades intermediárias, ela nos remete

ao já bem estabelecido resultado do Eletromagnetismo de que uma carga elétrica pontual na presença de um monopólo magnético fica restrita a mover-se num cone (ver, por exemplo, [25] ou [26]). Assim, mesmo tendo partido de uma abordagem completamente distinta da usual, já que consideramos uma solução de uma teoria de gauge não-Abeliana e uma nova proposta de expressão para a quadri-força, chegamos a um resultado qualitativamente semelhante. A principal diferença é que, no nosso caso, vimos ser possível a existência de órbitas fechadas ou limitadas, mas que só podem ocorrer para baixas velocidades, já que, para altas, obtivemos que todas as trajetórias escapam. Ainda no que tange o movimento da partícula colorida no campo do monopólo BPS, observamos também a possibilidade de movimentos radiais (unidimensionais, portanto) cujas órbitas sempre são abertas, independente da velocidade do corpo.

O último sistema que estudamos foi referente ao movimento de uma partícula com isospin na presença de um dyon de Julia-Zee. Observamos várias semelhanças entre ele e o sistema compreendido pelo monopólo BPS, o que era de se esperar, dada a natureza análoga das duas soluções. Novamente, observamos a ocorrência de órbitas abertas em movimentos unidimensionais e de trajetórias restritas a uma superfície cônica no regime assintótico, tanto nos limites de alta como de baixa velocidades. O resultado mais interessante, nesse caso, foi o aparecimento de um fator proporcional à carga elétrica do dyon em um dos termos da equação de movimento da partícula no regime assintótico para baixas velocidades, que pode ser interpretado como um acréscimo no "campo elétrico efetivo" sentido pelo corpo.

Para se aprofundar mais nos estudos desse tipo de sistema, o próximo passo seria estudar outras configurações de campos com outros significados físicos; mais especificamente, poder-se-ia analisar o movimento de uma partícula interagindo com instantons, como o de Yang-Mills, por exemplo. O interessante desse tipo de configuração é a existência de soluções de multi-instantons, o que permitiria criar sistemas análogos aos daqueles de problemas de mais de dois corpos.

Apêndice A

Modelo $O(N)$ Não-Linear

Consideremos N campos escalares $\phi^a(x)$ num espaço-tempo plano em que não há potenciais externos e submetidos ao seguinte vínculo:

$$\phi^a \phi^a = 1. \quad (\text{A.1})$$

Um modelo como esse recebe o nome de $O(N)$ *não linear*. Neste apêndice, vamos nos ater ao caso em que $N = 3$ e o espaço-tempo tem três dimensões (duas de espaço, x e y , e uma de tempo, t). Usaremos a seguinte convenção de índices: letras gregas minúsculas correspondem às coordenadas do espaço-tempo, letras latinas minúsculas do meio do alfabeto (i, j, k, \dots) referem-se a coordenadas espaciais do espaço-tempo e letras latinas minúsculas do começo do alfabeto (a, b, c, \dots) correspondem às coordenadas do espaço interno. Para essas últimas, relaxaremos a convenção da soma de Einstein, considerando somados índices repetidos em quaisquer posições.

No modelo $O(3)$, observa-se claramente que a teoria deve ser invariante por $SU(2)$, de modo que esse é o espaço interno que consideraremos. Como queremos um modelo que trate apenas de campos escalares, não aplicaremos o Princípio de Gauge, o qual originaria três novos campos vetoriais.

Como não há potenciais externos, podemos escrever a Lagrangeana do sistema como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^a) (\partial^\mu \phi^a). \quad (\text{A.2})$$

Para obter as equações de movimento, devemos usar o método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \right] + \lambda \frac{\partial f}{\partial \phi^a} = 0. \quad (\text{A.3})$$

No nosso caso, temos que $f = \phi^a \phi^a - 1$. Assim, substituindo isso nas equações acima e usando (A.2), obtemos as seguintes equações de movimento, em forma vetorial ¹:

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{\phi} + \sigma \vec{\phi} = 0, \quad (\text{A.4})$$

em que definimos $\sigma = -2\lambda$. Aplicando $\vec{\phi} \cdot$ a (A.4) e usando o vínculo (A.1), obtemos:

$$\sigma = -\vec{\phi} \cdot \partial_\mu \partial^\mu \vec{\phi}, \quad (\text{A.5})$$

de modo que as equações de movimento ficam:

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu - \vec{\phi} \cdot \partial_\mu \partial^\mu \vec{\phi} \right) \vec{\phi} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Queremos encontrar uma solução não singular para a equação de movimento, que é não linear; em particular, vamos procurar uma configuração do tipo sóliton, que, nesse contexto, entenderemos como uma solução cuja densidade de energia seja localizada, finita e não-dispersiva. Uma maneira de se encontrá-la é tomando soluções estáticas e impondo que a energia seja finita (já que, como ela é estática, ela é não-dispersiva). Nesse caso, as equações (A.6) ficam:

$$\nabla^2 \vec{\phi} - \left(\vec{\phi} \cdot \nabla^2 \vec{\phi} \right) \vec{\phi} = 0, \quad (\text{A.7})$$

e a energia do sistema assume a forma:

$$E = \frac{1}{2} \int \left(\partial_j \vec{\phi} \right) \cdot \left(\partial^j \vec{\phi} \right) d^2x. \quad (\text{A.8})$$

Assim, para que a energia da solução seja finita, é necessário que, assintoticamente, ela caia a zero. Mas energia nula só é alcançada se $\partial_j \vec{\phi} = 0$, ou seja, só é alcançada por uma configuração tal que $\vec{\phi}(x, y) = \vec{\phi}^{(0)}$, em que $\vec{\phi}^{(0)}$ é um vetor unitário constante (igual para todo (x, y) , portanto), que pode apontar, no espaço interno, para qualquer direção. Desse modo, para que assintoticamente a energia seja nula, é preciso que a solução estática tenda a essa configuração de energia nula, isto é ²:

$$r \|\text{grad} \vec{\phi}\| \rightarrow 0 \text{ para } r \rightarrow \infty \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{\phi}(x, y) = \vec{\phi}^{(0)}. \quad (\text{A.9})$$

Agora, a condição de que, no infinito do espaço externo, em todas as direções o campo $\vec{\phi}(x, y)$ tenda a $\vec{\phi}^{(0)}$ implica que podemos compactar o plano (x, y) numa superfície esférica S_2^{fis} , de modo que seu pólo norte seja exatamente o círculo no infinito. Além disso, o campo $\vec{\phi}^{(0)}$

¹Os vetores usados nesse apêndice referem-se ao *espaço interno*.

²O fato de haver um gradiente de um vetor na equação que segue não deve causar espanto, pois o gradiente é em relação ao espaço externo e o vetor $\vec{\phi}$ é um escalar nesse espaço, uma vez que ele se comporta como vetor apenas no espaço interno.

pode apontar em qualquer direção do espaço interno, o qual é, devido ao vínculo (A.1), uma outra superfície esférica, a qual denominaremos de S_2^{int} . Assim, a condição de a energia ser finita implica que a solução estática $\vec{\phi}(x, y)$ deve ser um mapa $S_2^{fis} \rightarrow S_2^{int}$.

Nesse ponto, podemos usar o resultado da Topologia que diz que todos os mapas não-singulares que vão de uma superfície esférica a outra são divididos em setores de homotopia comunicáveis, ou seja, um mapa de um certo setor não pode ser continuamente deformado até um mapa de outra seção. Além disso, esses setores formam um grupo isomórfico aos inteiros, o que é denotado por:

$$\pi_2(S_2) = \mathbb{Z}, \quad (\text{A.10})$$

em que $\pi_2(S_2)$ significa o grupo de homotopia dos mapas $S_2 \rightarrow S_2$. Os inteiros associados a cada setor, que denominaremos daqui por diante de Q , indicam basicamente o número de voltas que se dá em uma das esferas quando da aplicação do mapa a uma volta completa na outra esfera.

Voltando ao nosso problema, as soluções estáticas de energia finita têm a elas associado um número inteiro característico Q , o qual também é conhecido como *carga topológica*. Pode-se mostrar que essa carga pode ser escrita como uma integração no espaço externo ³:

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int \epsilon_{\mu\nu} \vec{\phi} \cdot (\partial_\mu \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi}) d^2x, \quad (\text{A.11})$$

já que, através de uma mudança de variáveis para os ângulos polar e azimutal que descrevem a superfície esférica interna, obtém-se que Q é o número de vezes que se percorre S_2^{int} a cada volta percorrida em S_2^{fis} , segundo o mapa $\phi^a(x, y)$.

Toda essa análise de grupos de homotopia foi feita impondo que ϕ^a tivesse energia finita. Porém, nada garante, pelo menos até agora, que essa configuração seja também solução da equação de movimento (A.7). Para fazer isso, pode-se usar um procedimento interessante para simplificar as contas [27]; consideremos a seguinte desigualdade:

$$\int d^2x [(\partial_\mu \vec{\phi} \pm \epsilon_{\mu\nu} \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi}) \cdot (\partial_\mu \vec{\phi} \pm \epsilon_{\mu\sigma} \vec{\phi} \times \partial_\sigma \vec{\phi})] \geq 0, \quad (\text{A.12})$$

que segue das propriedades de produto escalar no espaço Euclidiano. Usando o vínculo (A.1) e fazendo algumas manipulações, obtemos que a expressão anterior é equivalente a:

$$\int d^2x (\partial_\mu \vec{\phi}) \cdot (\partial_\mu \vec{\phi}) \geq \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \vec{\phi} \cdot (\partial_\mu \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi}) \Rightarrow E \geq 4\pi|Q|. \quad (\text{A.13})$$

Agora, sabemos que soluções estáticas da equação de movimento (A.7) extremizam não só a ação do sistema, mas também a sua energia, pela própria definição de Hamiltoniana. Assim, as

³A partir de agora, estaremos relaxando a convenção da soma de Einstein para os índices referentes ao espaço-tempo de Minkowski também.

soluções podem ser obtidas tomando a igualdade na expressão anterior, já que ela é um limite inferior para a energia do sistema. Assim, como cada setor de homotopia é incomunicável, a extremização da energia pode ser feita independentemente para cada setor Q , de modo que a nova equação que os campos devem satisfazer fica:

$$\partial_\mu \vec{\phi} = \pm \epsilon_{\mu\nu} \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi}, \quad (\text{A.14})$$

que resulta da igualdade na expressão inicial (A.12). Assim, soluções estáticas das equações de movimento (A.7) que possuem energia finita satisfazem (A.14), a qual é bem mais simples que a original, por se tratar de uma equação de primeira ordem. Para resolvê-la, mudamos de coordenadas através de uma projeção estereográfica da esfera interna S_2^{int} num plano paralelo a (ϕ_1, ϕ_2) que contém o pólo sul e descrito por coordenadas cartesianas (ω_1, ω_2) :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{2\phi_1}{1 - \phi_3}, \\ \omega_2 &= \frac{2\phi_2}{1 - \phi_3}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Definindo:

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2$$

e usando (A.15) em (A.14), obtém-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} &= \pm \frac{\partial \omega_2}{\partial y}, \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial y} &= \mp \frac{\partial \omega_2}{\partial x}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

As equações acima são diretamente reconhecidas como as relações de Cauchy-Riemann para que ω seja analítica em $z = x + iy$ (sinais inferiores) ou z^* (sinais superiores). Assim, qualquer função analítica de z ou z^* é solução da equação (A.14); salientamos que a função não precisa ser inteira, ou seja, pode ter pólos isolados, mas não pode ter cortes, já que $\vec{\phi}$ deve ser uma função de valor único. Desse modo, uma solução padrão possível é:

$$\omega(z) = \left(\frac{z - z_0}{\alpha} \right)^n. \quad (\text{A.17})$$

em que z_0 e α são constantes arbitrárias e n é um número inteiro qualquer. Calculando o valor de Q através de (A.11), obtemos que $Q = n$, ou seja, o expoente é a carga topológica. Isso poderia ter sido inferido diretamente de (A.17), já que, para um valor fixo de ω , existem n

valores possíveis de z . Vale ainda dizer que as outras duas constantes que aparecem, z_0 e α , são reflexos da invariância translacional e de escala da Lagrangeana original do modelo.

Para obtermos uma solução explícita, escolhemos $z_0 = 0$ e $\alpha = 1$ e passamos para coordenadas polares (r, θ) , ou seja, $z = re^{i\theta}$. Voltando para as variáveis originais ϕ^a , temos que ($n = Q$):

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{4r^Q \cos(Q\theta)}{r^{2Q} + 4}, \\ \phi_2 &= \frac{4r^Q \sin(Q\theta)}{r^{2Q} + 4}, \\ \phi_3 &= \frac{r^{2Q} - 4}{r^{2Q} + 4}\end{aligned}\tag{A.18}$$

é uma solução com carga topológica Q e energia finita $E = 4\pi|Q|$. O fato de o ponto $\phi^3 = 1$ só ser alcançado para $r \rightarrow \infty$ resulta da escolha do tipo de projeção estereográfica feita anteriormente. Por fim, salientamos que essa solução é estática, mas pode gerar uma solução dependente do tempo que se move sem distorcer sua forma através de uma transformação de Lorentz (já que a Lagrangeana original é invariante por transformações de Lorentz).

Bibliografia

- [1] C. N. Yang and R. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954)
- [2] R. M. Fernandes and P. S. Letelier, in proceedings of "*Fourth International Winter Conference on Mathematical Methods in Physics*", PoS(WC2004)042 (2004)
- [3] A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles* (Dover, New York, 1980)
- [4] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1999)
- [5] B. Schutz, *Geometrical Methods of Mathematical Physics* (Cambridge, 1980)
- [6] R. Utiyama, *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956)
- [7] M. Göckeler and T. Schücker, *Differential Geometry, Gauge Theories and Gravity* (Cambridge, 1987)
- [8] B. G. Wybourne, *Classical Groups for Physicists* (Wiley-Interscience, New York, 1974)
- [9] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons* (North-Holland, Amsterdam, 1982)
- [10] G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B* **79**, 276 (1974)
- [11] A. M. Polyakov, *JETP Lett.* **20**, 194 (1974)
- [12] A. Actor, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 461 (1979)
- [13] E. B. Bogomol'nyi, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 449 (1976)
- [14] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 760 (1975)
- [15] B. Julia and A. Zee, *Phys. Rev. D* **11**, 2227 (1975)
- [16] S. K. Wong, *Nuovo Cimento A* **65**, 689 (1970)

- [17] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloë, *Quantum Mechanics - Volume 1* (Wiley-Interscience, New York, 1977)
- [18] L. Gy. Fehér, *Acta Phys. Pol. B* **15**, 919 (1984)
- [19] A. Azizi, *J. Math. Phys.* **43**, 1136 (2002)
- [20] V. I. Arnold, A. Weinstein and K. Vogtmann, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer Verlag, 1989)
- [21] J. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint* (Princeton, 1967)
- [22] M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics* (Wiley-Interscience, 1989)
- [23] L. F. Shampine and M. K. Gordon, *Computer Solution of Ordinary Differential Equations: The Initial Value Problem* (W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1975)
- [24] P. Hasenfratz and G. t'Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1119 (1976)
- [25] A. S. Goldhaber, *Phys. Rev.* **140**, B1407 (1965)
- [26] J. Schechter, *Phys. Rev. D* **14**, 524 (1976)
- [27] A. A. Belavin and A. M. Polyakov, *JETP Lett.* **22**, 245 (1975)