

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Física “Gleb Wataghin”

Dissertação de Mestrado

# O Efeito Greisen-Zatsepin-Kuzmin na Vizinhança de Buracos Negros

Gabriel Bernardi de Freitas

**Comissão Julgadora:**

Prof. Dr. Alberto Saa (Orientador) — IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. Marcelo M. Guzzo — IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Daniel A. T. Vanzella — IFSC/USP

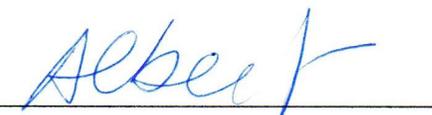
**Coorientador:** Prof. Dr. Marcus A. M. de Aguiar — IFGW/UNICAMP

Dissertação apresentada ao Instituto de Física  
“Gleb Wataghin” para a obtenção do título de  
Mestre em Ciências.

11 de março de 2011

Este exemplar corresponde à redação da versão final da Dissertação de Mestrado defendida pelo aluno Gabriel Bernardi de Freitas e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 28 de abril de 2011



---

Prof. Dr. Alberto Saa

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IFGW – UNICAMP

F884e Freitas, Gabriel Bernardi de  
O Efeito *Greisen-Zatsepin-Kuzmin* na vizinhança de buracos negros / Gabriel Bernardi de Freitas. -- Campinas, SP : [s.n.], 2011.

Orientadores: Alberto Vazquez Saa e Marcus Aloízio Martinez de Aguiar.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Greisen-Zatsepin-Kuzmin, Efeito. 2. Buracos negros (Astronomia). 3. Gravitação. I. Saa, Alberto Vazquez. II. Aguiar, Marcus Aloízio Martinez de. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". IV. Título.  
(vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** The Greisen-Zatsepin-Kuzmin Effect in the vicinity of black holes
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
  1. Greisen-Zatsepin-Kuzmin Effect
  2. Black holes (Astronomy)
  3. Gravitation
- **Área de Concentração:** Relatividade e Gravitação
- **Titulação:** Mestre em Física
- **Banca Examinadora:**

Prof. Alberto Vazquez Saa  
Prof. Daniel Augusto Turolla Vanzella  
Prof. Marcelo Moraes Guzzo
- **Data da Defesa:** 11-03-2011
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **GABRIEL BERNARDI DE FREITAS – RA 043658** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 11 / 03 / 2011.

**COMISSÃO JULGADORA:**

---

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa - Orientador do Candidato  
IMECC/UNICAMP

---

Prof. Dr. Daniel Augusto Turolla Vanzella – IFSC/USP

---

Prof. Dr. Marcelo Moraes Guzzo – DRCC/IFGW/UNICAMP

---

# Agradecimentos

É impossível listar aqui e agradecer a todos que auxiliaram direta ou indiretamente a realização deste trabalho sem cometer injustiças. Gostaria de oferecer meus sinceros agradecimentos a todos eles, embora algumas pessoas devam ser lembradas em especial.

Em primeiro lugar, e certamente o mais importante, gostaria de agradecer a meus pais, Carmen e José Pedro. Sem o total apoio e confiança que depositaram nas minhas escolhas ao longo da vida, bem como a liberdade oferecida para tomá-las, é difícil imaginar que tudo isto teria sido possível.

Também gostaria de agradecer ao meu orientador, o Professor Alberto Saa, pela orientação dedicada, paciência e amizade ao longo de todo esse período no mestrado.

Agradeço ainda aos meus familiares, a todos os professores que tive ao longo desses anos, e a todos os meus amigos, em particular aqueles do meio acadêmico, com os quais tive a oportunidade de ter diversas discussões interessantes.

Finalmente, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro, sob processo 2008/07404-1.

# Resumo

O objetivo deste trabalho é a investigação do efeito Greisen-Zatsepin-Kuzmin (GZK) na presença de buracos negros, contemplando, dessa forma, uma correção de natureza astrofísica à propagação de raios cósmicos de ultra-alta energia. Inicia-se com uma descrição das principais características dos dois elementos cruciais envolvidos no efeito: os raios cósmicos de ultra-alta energia e a radiação cósmica de fundo. Posteriormente, é feita uma revisão sistemática do efeito GZK, mostrando as interações mais relevantes e a abordagem utilizada para o cálculo das perdas de energia. Também é dada especial atenção às correções de natureza cosmológica que devem ser incorporadas ao considerar fontes de raios cósmicos muito distantes. Em seguida, analisa-se o problema na presença de um buraco negro. O estudo é feito considerando a situação mais simples: a radiação cósmica de fundo é tratada como um banho térmico no qual um buraco negro de Schwarzschild está imerso, constituindo um sistema cuja evolução pode ser tratada na aproximação quase estática (mudanças adiabáticas). Uma aproximação para as trajetórias de raios cósmicos nesse espaço-tempo é proposta, e a partir dela são calculadas as perdas de energia de cada partícula em função da distância de máxima aproximação em relação ao buraco negro. Finalmente, são apresentadas as conclusões do autor, e as perspectivas futuras de investigação são discutidas.

# Abstract

The aim of this work is the investigation of the Greisen-Zatsepin-Kuzmin (GZK) effect in the presence of black holes, thereby consisting of an astrophysical correction for the propagation of ultrahigh energy cosmic rays. Firstly, a description of the main features of the two crucial elements involved in the effect, the ultrahigh energy cosmic rays and the cosmic microwave background, is given. Then, a systematic review of the GZK effect is presented, showing the most relevant interactions and the approach used for the calculation of energy losses. Also, special attention is given to the cosmological corrections that must be incorporated when very far cosmic-ray sources are considered. After that, the problem is analysed in the presence of a black hole. The study is based upon the simplest situation: the cosmic microwave background is treated as a thermal bath in which a Schwarzschild black hole is immersed, constituting a system whose evolution can be treated in the quasi-static approximation (adiabatic changes). An approximation for the cosmic-ray particles' trajectories is proposed, and then used to calculate the energy loss for each particle as a function of the maximum approximation distance to the black hole. Finally, the author's conclusions are presented, as well as perspectives for future investigations.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Os raios cósmicos de ultra-alta energia . . . . .	1
1.2	A radiação cósmica de fundo . . . . .	5
<b>2</b>	<b>O efeito Greisen-Zatsepin-Kuzmin</b>	<b>7</b>
2.1	Introdução . . . . .	7
2.2	Propagação através da radiação de fundo – aproximação contínua . . . . .	11
2.3	Correções cosmológicas . . . . .	13
2.4	Resultados teóricos e experimentais . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Efeito GZK na presença de um buraco negro</b>	<b>21</b>
3.1	Descrição do problema . . . . .	21
3.2	Termodinâmica de buracos negros e a radiação de Hawking . . . . .	22
3.3	Buraco negro imerso em um banho térmico . . . . .	24
3.4	Propagação ao redor do buraco negro . . . . .	27
3.5	Resultados numéricos . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Considerações finais e investigações futuras</b>	<b>34</b>
<b>A</b>	<b>Geodésicas nulas no espaço-tempo de Schwarzschild</b>	<b>36</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>41</b>

# Lista de Figuras

1.1	O gráfico, adaptado de [17], mostra o fluxo de raios cósmicos conhecido, sendo $F(E)$ o número de partículas com energia maior que $E$ por unidade de área, por unidade de tempo e por unidade de ângulo sólido. Os dados com símbolos preenchidos referem-se a medidas diretas de raios cósmicos primários, enquanto todos os outros dados são provenientes de medidas de chuueiros atmosféricos. . . . .	3
1.2	Perfil do chuueiro do evento mais energético ( $3 \times 10^{20}$ eV) registrado pelo experimento Fly's Eye [23], adaptado de [22]. . . . .	4
1.3	Comparação entre as medidas da profundidade do máximo do chuueiro, $X_{\max}$ , feitas pelo HiRes e pelo Observatório Pierre Auger, retirado de [22]. . . . .	4
1.4	O céu em micro-ondas. A figura, retirada da página oficial do experimento WMAP [33], mostra as flutuações na temperatura da radiação cósmica de fundo, sendo as regiões vermelhas as mais quentes, e as azuis as mais frias. A temperatura média é $T = 2,725$ K, e a diferença entre as regiões vermelhas e azuis é de cerca de 0,0002 K. . . . .	6
2.1	A figura, retirada de [17], mostra a seção de choque para a produção de píons através da interação próton-fóton, como função da energia $\epsilon'$ do fóton no referencial em que o próton encontra-se em repouso. . . . .	9
2.2	Distribuição de Planck para $T = 2,725$ K, mostrando a energia média $\bar{\epsilon}$ . Apenas 1% dos fótons possui energia maior que $3\bar{\epsilon}$ . . . . .	10
2.3	Esquema mostrando a interação de uma partícula altamente energética (linha sólida) com um fóton (linha ondulada) no referencial do laboratório e no referencial $R$ em que a partícula encontra-se em repouso. . . . .	11
2.4	A figura, retirada de [52], mostra a emissão de um fóton no ponto $P_1$ , sendo recebido por um observador comóvel no ponto $P_2$ . A frequência $\omega_1$ medida por um observador comóvel em $P_1$ difere da frequência $\omega_2$ medida pelo observador em $P_2$ . . . . .	15

- 2.5 O gráfico, retirado de [49], mostra as contribuições em  $z = 0$  para  $(1/E)dE/dt$  da fotoprodução de píons e da produção de pares, bem como a soma das duas contribuições (curva 1). A curva 2 corresponde a resultados anteriores [44] para a mesma soma. É mostrada ainda separadamente a contribuição da expansão do Universo, que é constante e igual a  $H_0$  (constante de Hubble) em  $z = 0$ . Os quadrados azuis são uma comparação com os resultados de [48]. . . . . 18
- 2.6 Gráficos retirados de [49]: (a) fator de modificação para dois valores de  $\gamma$  e (b) espectro integral para dois diferentes valores de  $\gamma$ , ambos calculados supondo uma distribuição homogênea e isotrópica de fontes. A curva  $\eta_{ee}$  em (a) corresponde à contribuição da produção de pares apenas. . . . . 19
- 2.7 Gráficos retirados de [22]: (a) espectro de raios cósmicos de ultra-alta energia determinado antes da nova geração de experimentos (HiRes e Auger) (b) espectro de raios cósmicos de ultra-alta energia medido pelos experimentos mais recentes, HiRes e Auger. . . . . 20
- 3.1 Representação diagramática de um sistema em um campo gravitacional estacionário e não homogêneo, adaptada de [71]. . . . . 26
- 3.2 Uma hipérbole com um dos focos na origem (ponto  $O$ ). O ramo considerado no texto é o direito, percorrido de  $y > 0$  para  $y < 0$ . . . . . 29
- 3.3 Comparação entre as trajetórias hiperbólica ( $u_h$ ) e exata ( $u_{ex}$ ) em termos da variável  $u = 1/r$ . . . . . 31
- 3.4 A figura, retirada de [74], mostra a seção de choque da interação fóton-próton para a produção de píons, bem como a aproximação de dois degraus utilizada. . . . . 32
- 3.5 Perda total de energia  $\Delta E$  em função do periélio  $P$ , para  $E_0 = 10^{20}$  eV. À esquerda, inicia-se em  $P = 6M$ . À direita, mostra-se que, em escalas maiores, a tendência da diminuição de  $\Delta E$  com o aumento do periélio é mantida. . . . . 33
- 3.6 Perda total de energia  $\Delta E$  em função do periélio  $P$ , para  $E_0 = 10^{21}$  eV. À esquerda, inicia-se em  $P = 6M$ . À direita, mostra-se que, em escalas maiores, a tendência da diminuição de  $\Delta E$  com o aumento do periélio é mantida. . . . . 33

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Os raios cósmicos de ultra-alta energia

Atribui-se a descoberta dos raios cósmicos a Victor Hess [1], devido a seus pioneiros experimentos em balões no início do século XX. Nessa época, era detectada uma radiação natural na superfície da Terra, seguindo o recente desenvolvimento de novos instrumentos para essa finalidade. Naquele momento, acreditava-se que essa radiação era originada totalmente a partir do decaimento radioativo de elementos na Terra. Portanto, sua intensidade deveria diminuir com a distância em relação à superfície. Os experimentos de Hess em balões mostraram que, ao contrário do que se esperava, a intensidade da radiação aumentava com a altitude. Logo, a maior contribuição para o fluxo observado deveria vir de fora da Terra. Assim foi cunhado o termo *raios cósmicos*. Essa descoberta lhe rendeu o Prêmio Nobel de Física de 1936 [2]. Posteriormente, observou-se também que o campo magnético terrestre afetava os raios cósmicos, revelando que se tratava de partículas carregadas. O efeito era diferente se as partículas vinham do leste ou do oeste, e assim suas cargas elétricas puderam ser determinadas.

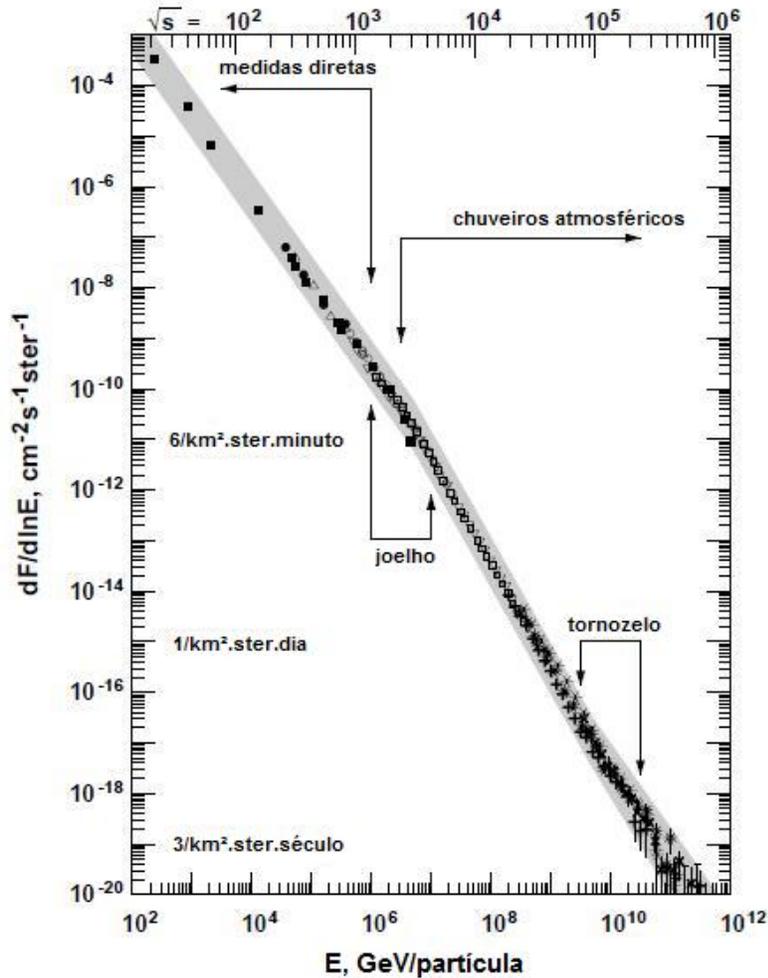
Nas décadas que se seguiram, os raios cósmicos desempenharam papel importante na física de altas energias, proporcionando um fluxo de partículas com energias que não podiam ser atingidas em qualquer laboratório terrestre. Diversas partículas subatômicas foram então descobertas investigando-se a radiação cósmica, como o pósitron [3], o múon [4–6] e o píon [6]. Entretanto, com o desenvolvimento e o aprimoramento dos aceleradores terrestres a partir da década de 1950, essa aplicação perdeu interesse, visto que nos aceleradores é possível ter controle sobre todos os parâmetros envolvidos, enquanto que a radiação cósmica é um fenômeno natural e, portanto, incontrolável. A partir desse momento, o estudo dos raios cósmicos encontrou aplicações principalmente em astrofísica. A pesquisa passou a se concentrar em responder a questões tais como onde os raios cósmicos são produzidos, como são acelerados, qual seu papel na dinâmica da Galáxia e o que sua composição pode revelar sobre a matéria fora do Sistema Solar, por exemplo.

As partículas que incidem sobre a atmosfera terrestre são chamadas de raios cósmicos *primários*. Após penetrar na atmosfera, essas partículas interagem e dão origem a várias partículas secundárias, cujo número e composição dependem da energia da partícula incidente. Essas partículas secundárias sofrem decaimentos e novas interações que, sucessivamente, geram

novas partículas, dando origem aos chamados *chuveiros atmosféricos*, que são observados na superfície da Terra. No final da década de 1930, Pierre Auger e colaboradores [7] estabeleceram que os raios cósmicos (primários) poderiam ter energias tão altas quanto  $10^{15}$  eV, a fim de gerar chuveiros suficientemente extensos. Desde então, partículas cada vez mais energéticas foram sendo detectadas, inclusive com energias maiores que  $10^{19}$  eV. Os primeiros chuveiros gerados por partículas com energias dessa ordem foram observados no detector de Volcano Ranch, no Novo México (EUA) [8]. Logo depois, o primeiro evento com energia incidente de  $10^{20}$  eV foi observado no mesmo detector [9]. A estatística experimental desses *raios cósmicos de ultra-alta energia* (UAE) cresceu ao longo dos anos, graças aos dados obtidos nas últimas gerações de experimentos, como os detectores de Haverah Park (Reino Unido) [10], Yakutsk (Rússia) [11], AGASA (Akeno Giant Air Shower Array - Japão) [12], Fly's Eye (EUA) [13] e, mais recentemente, sua extensão, o HiRes (High Resolution Fly's Eye) [14], bem como o Observatório Pierre Auger [15]. A dificuldade está no baixo fluxo dessas partículas. O fluxo estimado para energias maiores que  $10^{20}$  eV é da ordem de um evento por quilômetro quadrado por século por esferorradiano, portanto são necessários detectores que cubram efetivamente grandes áreas. De fato, o Observatório Pierre Auger, por exemplo, consiste de uma rede de detectores de chuva de partículas dispostos em uma área de  $3000 \text{ km}^2$ .

Um dos desafios apresentados pelos raios cósmicos de ultra-alta energia é sua origem, que vem motivando discussões até os dias de hoje. A Figura 1.1 mostra o fluxo de raios cósmicos conhecido a partir de  $10^{11}$  eV por partícula. O fluxo  $F(E)$ , que representa o número de partículas com energia maior que  $E$  por unidade de área, por unidade de tempo e por unidade de ângulo sólido, é bem descrito por uma função da forma  $F(E) = \kappa E^{-\alpha}$ , sendo  $\kappa$  uma constante numérica. Duas características são evidentes a partir do gráfico. Em cerca de  $10^{15}$  eV por partícula, o chamado *joelho*, o espectro muda de inclinação, passando de  $\alpha = 2,7$  a  $\alpha = 3,1$ . Em cerca de  $10^{18}$  eV, conhecido como *tornozelo*, o fluxo volta a ter  $\alpha \approx 2,7$ . Até o joelho, existe uma teoria padrão para a origem dos raios cósmicos, segundo a qual eles são produzidos e acelerados em explosões de supernovas galácticas [16, 17]. Entre o joelho e o tornozelo, também se acredita que os raios cósmicos tenham origem galáctica, embora suas fontes ainda não sejam um consenso [17]. Acima do tornozelo, acredita-se que os raios cósmicos tenham origem extragaláctica. De fato, ainda na década de 1950, Cocconi [18] notou que o campo magnético da Galáxia não é suficiente para confinar partículas com energias maiores que cerca de  $10^{18}$  eV. Além disso, a dificuldade em se imaginar processos que possam acelerar partículas a energias tão altas levou ao surgimento de diversos modelos de natureza exótica, como o decaimento de partículas altamente massivas denominadas partículas  $X$  [19, 20].

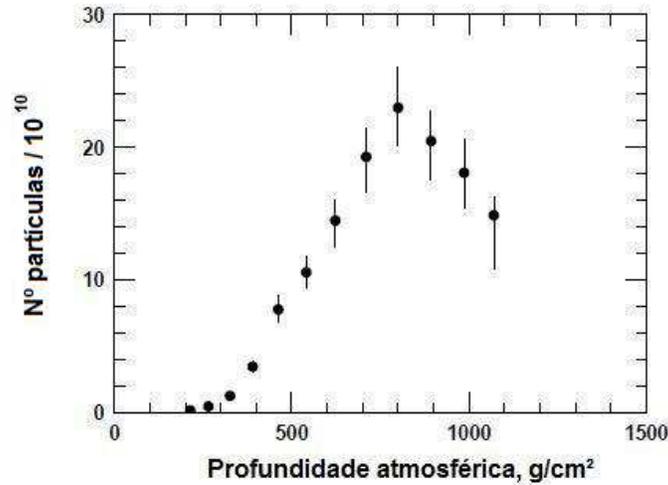
Outra questão a ser respondida refere-se à composição dos raios cósmicos de ultra-alta energia, que ainda não é uma unanimidade. A medida da composição mais utilizada nessa faixa de energia está relacionada à profundidade  $X_{\text{max}}$  do máximo do perfil do chuva [21], o último sendo simplesmente o número de partículas produzidas no chuva em função da profundidade atmosférica (medida a partir de sua densidade). Um exemplo é a Figura 1.2, adaptada de [22], que mostra o perfil do evento mais energético ( $3 \times 10^{20}$  eV) registrado pelo experimento Fly's Eye [23]. O máximo encontra-se em torno de  $X = 800 \text{ g/cm}^2$ . Diferentes modelos de interação levam a previsões diferentes para  $X_{\text{max}}$ . Entretanto, em todos os modelos,  $X_{\text{max}}$  é maior quanto mais leve for a partícula incidente [21]. A Figura 1.3 mostra os resultados do HiRes de 2005 [24] e 2010 [25] e do Observatório Auger [26] para  $X_{\text{max}}$ , bem como os valores previstos por diferentes modelos de interação. Há uma leve contradição entre os dois conjuntos



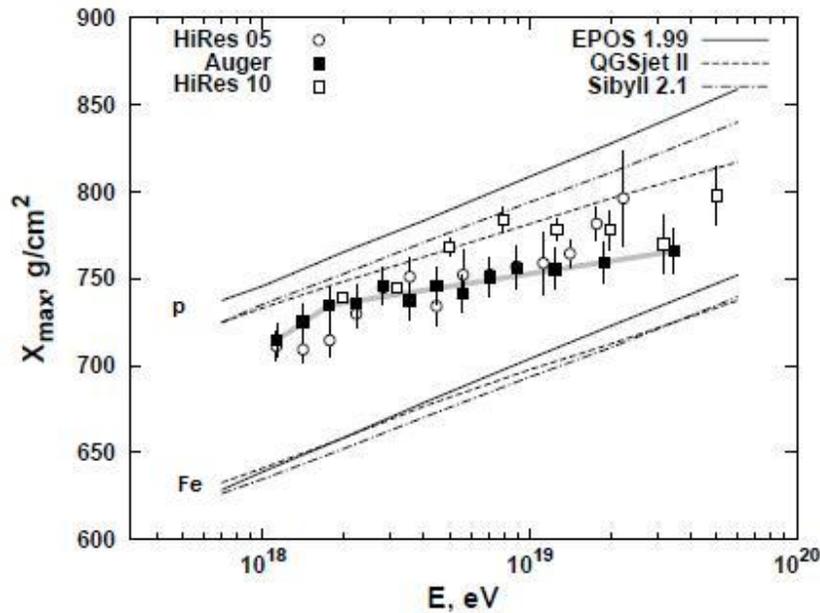
**Figura 1.1:** O gráfico, adaptado de [17], mostra o fluxo de raios cósmicos conhecido, sendo  $F(E)$  o número de partículas com energia maior que  $E$  por unidade de área, por unidade de tempo e por unidade de ângulo sólido. Os dados com símbolos preenchidos referem-se a medidas diretas de raios cósmicos primários, enquanto todos os outros dados são provenientes de medidas de chuveiros atmosféricos.

de dados: os resultados do HiRes mostram uma composição que se torna mais leve (dominada por prótons) com o aumento da energia. Os dados do Observatório Auger, por outro lado, indicam uma tendência para a dominância de núcleos mais pesados, sistematicamente abaixo dos dados mais recentes do HiRes: o evento mais energético desse conjunto, de cerca de  $4 \times 10^{19}$  eV, é mais próximo das previsões para o ferro que para prótons segundo os três modelos de interação mostrados. Esse é um importante ponto que ainda deveria ser resolvido no futuro para uma melhor compreensão do assunto.

A detecção de partículas de ultra-alta energia em Volcano Ranch no início da década de 1960 não foi exatamente uma grande surpresa. Apesar de essas energias serem enormes para os padrões da física de partículas da época ( $10^{20}$  eV corresponde, aproximadamente, à energia cinética de uma bola de tênis a uma velocidade de 80 km/h), e apesar de elas representarem



**Figura 1.2:** Perfil do chuveiro do evento mais energético ( $3 \times 10^{20}$  eV) registrado pelo experimento Fly's Eye [23], adaptado de [22].



**Figura 1.3:** Comparação entre as medidas da profundidade do máximo do chuveiro,  $X_{\max}$ , feitas pelo HiRes e pelo Observatório Pierre Auger, retirado de [22].

um desafio no que diz respeito aos mecanismos de produção de partículas tão energéticas, o resultado parecia bastante natural. Não havia motivos para acreditar que o espectro de raios cósmicos tivesse algum fim. A falta de um número significativo de eventos nessa faixa de energia parecia ser uma simples consequência do baixo fluxo correspondente. Entretanto, esse

pensamento iria mudar após a descoberta da radiação cósmica de fundo.

## 1.2 A radiação cósmica de fundo

Em 1965, Arno Penzias e Robert Wilson [27] observaram um ruído na região de micro-ondas em uma antena nos laboratórios Bell. O ruído parecia impossível de ser eliminado, estando presente independente da direção para a qual a antena era apontada. A origem desse então surpreendente ruído motivou diversas discussões, até que se percebeu que ele estava associado a um fenômeno físico interessante.

De fato, no Universo primordial, houve um estado em que os elétrons eram livres, pois a alta temperatura nesse estágio impedia a formação de átomos. A radiação eletromagnética então interagiu continuamente com esses elétrons através do espalhamento Compton. À medida que o Universo foi se expandindo, porém, a temperatura foi diminuindo gradativamente até que atingiu cerca de 4000 K, quando se tornou possível a recombinação do hidrogênio, o átomo mais simples [28]. Nesse momento, os fótons desacoplaram-se da matéria e puderam se propagar quase livremente, isto é, praticamente sem interagir com o meio. Essa radiação, que pode ser considerada, portanto, uma relíquia do Universo primordial, chega até a Terra nos dias de hoje, e é denominada *radiação cósmica de fundo* (RCF). Ela corresponde exatamente ao ruído detectado por Penzias e Wilson em sua antena em 1965. Essa importante descoberta lhes rendeu o Prêmio Nobel de Física de 1978 [29].

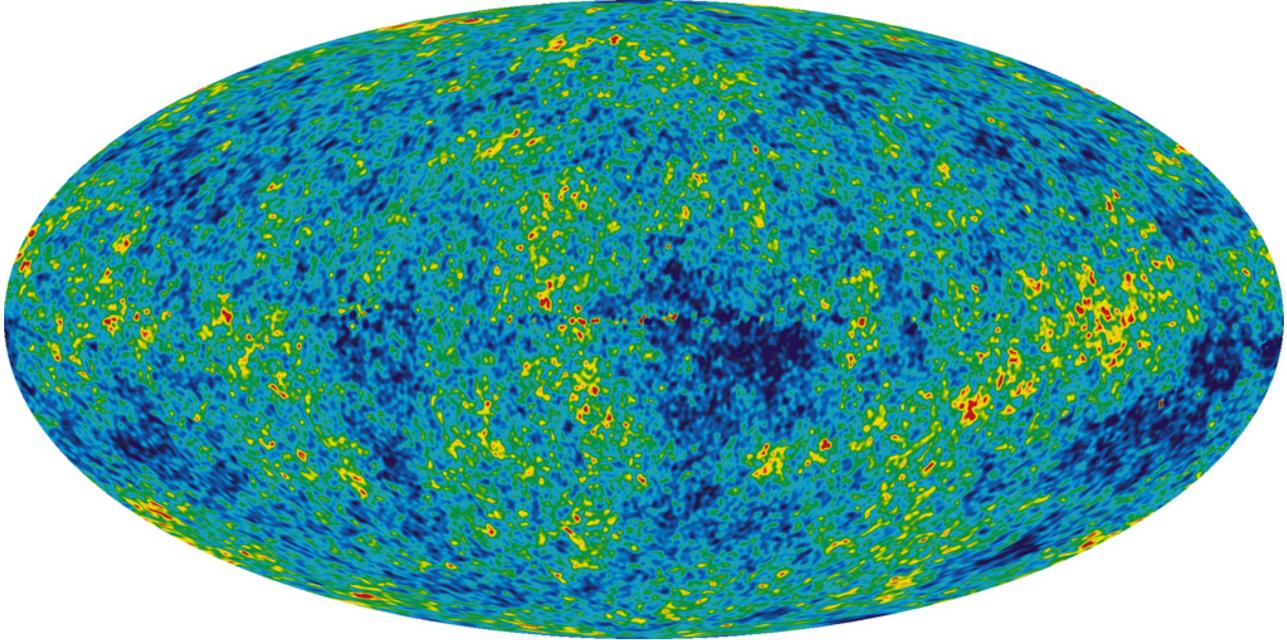
Ainda em 1966, as primeiras medidas experimentais [30] indicaram que se tratava de uma radiação de natureza térmica, isto é, que seguia um espectro de corpo negro. Desde então, diversos experimentos analisaram a RCF, sendo os mais conhecidos o COBE (Cosmic Background Explorer) [31] e, mais recentemente, o WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) [32]. Tais experimentos comprovaram a natureza térmica da radiação de fundo: dados recentes do experimento WMAP [33] mostram que a RCF é bastante homogênea e isotrópica, seguindo um espectro de corpo negro com temperatura média de 2,725 K. De fato, ela possui o espectro de corpo negro mais preciso conhecido atualmente: apenas flutuações da ordem de  $10^{-4}$  são observadas, mostradas na Figura 1.4. Apesar de essas flutuações terem importância cosmológica, fornecendo informações sobre a formação de estruturas no Universo primordial [34], elas são pequenas o suficiente para poderem ser ignoradas no caso deste trabalho.

Vamos considerar, portanto, a radiação cósmica de fundo como um gás de fótons à temperatura  $T = 2,725$  K, seguindo a distribuição de Planck (corpo negro)

$$n(\epsilon) = \frac{1}{\pi^2 (c\hbar)^3} \frac{\epsilon^2}{e^{\epsilon/kT} - 1}, \quad (1.1)$$

que fornece o número  $n(\epsilon)$  de fótons por unidade de volume e por unidade de energia. Na expressão acima,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $\hbar$  é a constante de Planck (dividida por  $2\pi$ ) e  $k$  é a constante de Boltzmann. Pelas relações estatísticas usuais, temos que

$$E = V \int_0^\infty \epsilon n(\epsilon) d\epsilon \quad (1.2)$$



**Figura 1.4:** O céu em micro-ondas. A figura, retirada da página oficial do experimento WMAP [33], mostra as flutuações na temperatura da radiação cósmica de fundo, sendo as regiões vermelhas as mais quentes, e as azuis as mais frias. A temperatura média é  $T = 2,725$  K, e a diferença entre as regiões vermelhas e azuis é de cerca de 0,0002 K.

é a energia total do gás, e

$$N = V \int_0^{\infty} n(\epsilon) d\epsilon \quad (1.3)$$

o número total de fótons, sendo  $V$  o volume ocupado<sup>1</sup>. A energia média de cada fóton é então dada simplesmente por

$$\bar{\epsilon} = \frac{E}{N} = \frac{\pi^4 kT}{30\zeta(3)} \approx 6,3 \times 10^{-4} \text{ eV}, \quad (1.4)$$

sendo  $\zeta$  a função zeta de Riemann [35],

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}. \quad (1.5)$$

---

<sup>1</sup> $E$ ,  $N$  e  $V$  são grandezas macroscópicas.

# Capítulo 2

## O efeito Greisen-Zatsepin-Kuzmin

### 2.1 Introdução

A existência da radiação cósmica de fundo tem diversas consequências sobre a propagação de partículas no Universo, as quais foram rapidamente notadas logo após a descoberta de Penzias e Wilson. Uma delas é tornar o Universo opaco a fótons com energias maiores que  $4 \times 10^{14}$  eV, pois esse é justamente o limiar para a produção de pares elétron-pósitron através da interação com um fóton da radiação de fundo possuindo energia média  $\bar{\epsilon} = 6,3 \times 10^{-4}$  eV [36,37]. Outra consequência é a supressão de elétrons energéticos da radiação cósmica<sup>1</sup> devido às perdas de energia sofridas nas interações inelásticas (espalhamento Compton inverso) com os fótons da radiação de fundo [38,39]. Em 1966, Greisen [40] e, de maneira independente, Zatsepin e Kuzmin [41], propuseram um efeito análogo aos anteriores no caso dos raios cósmicos de ultra-alta energia. O espectro deveria sofrer uma supressão abrupta em torno de  $10^{20}$  eV, efeito que ficou conhecido como *corte GZK*, em referência a seus autores. A razão para a supressão é simples, e de fato é essencialmente a mesma dos efeitos anteriores. Uma partícula da radiação cósmica de ultra-alta energia interage com a radiação cósmica de fundo, perdendo energia. Se a partícula se propagar ao longo de uma distância suficientemente grande, ela chegará à Terra com uma energia apreciavelmente menor que a inicial, visto que interagiu um grande número de vezes.

No capítulo anterior, foi notado que a composição dos raios cósmicos de ultra-alta energia ainda não é uma unanimidade. Os dados mais recentes do experimento HiRes indicam uma composição dominada por prótons, enquanto que os dados do Observatório Pierre Auger sugerem composição mista dominada por núcleos de ferro. Neste trabalho, a análise será feita levando em conta exclusivamente prótons. A extensão do tratamento para núcleos não apresenta nenhuma dificuldade do ponto de vista conceitual, como será comentado brevemente a seguir.

Como mostra a equação (1.4), a energia típica de um fóton da radiação de fundo é da ordem de  $10^{-4}$  eV, muito pequena se comparada com as energias acima mencionadas para um próton

---

<sup>1</sup>É importante ressaltar que o termo *radiação cósmica* será sempre empregado no sentido genérico (raios cósmicos), em geral se referindo a partículas carregadas. Não deve ser confundido com a radiação cósmica de fundo (RCF), que será muitas vezes abreviada como *radiação de fundo* apenas.

de ultra-alta energia. Entretanto, se a energia do próton é assim tão alta (o que corresponde a uma velocidade muito próxima de  $c$ ), uma fração apreciável dos fótons é vista, a partir do referencial de repouso do próton, como raios gama de alta energia. A energia desses fótons pode então ser suficiente para que ocorra *fotoprodução de píons*,

$$p + \gamma \rightarrow N + \text{píons},$$

em que  $N$  denota um *nucleon* (um próton ou um nêutron). Em geral, estamos interessados no caso em que há um próton no estado final, quando então podemos dizer que o próton perdeu energia no processo. No referencial de repouso do próton, que será denotado por  $R$ , e no qual as quantidades serão denotadas com uma linha, a energia mínima do fóton para a produção de um pión é

$$\epsilon'_{\min} = \frac{2m_p + m_\pi}{2m_p} m_\pi c^2 \approx 145 \text{ MeV}, \quad (2.1)$$

em que os valores de massas utilizados são os mais recentes disponíveis em [42], o que será utilizado em todo o trabalho. No referencial de observação, que será chamado de *referencial do laboratório*, essa energia se traduz para uma energia mínima  $E_{\min}$  para o próton incidente. Ao interagir com um fóton de energia  $\epsilon$ , a fotoprodução de um pión só ocorre para energias maiores que

$$E_{\min} \approx \frac{2m_p + m_\pi}{4\epsilon} m_\pi c^4 \approx 6,8 \times 10^{16} \left( \frac{\epsilon}{1 \text{ eV}} \right)^{-1} \text{ eV}. \quad (2.2)$$

Portanto, para energias típicas de um fóton da radiação de micro-ondas,  $\epsilon \approx 6,3 \times 10^{-4} \text{ eV}$ , essa energia mínima é da ordem de  $10^{20} \text{ eV}$ . Mais ainda, a *inelasticidade*  $f$  (fração média de energia perdida por interação) desse processo é, nesse caso limite,

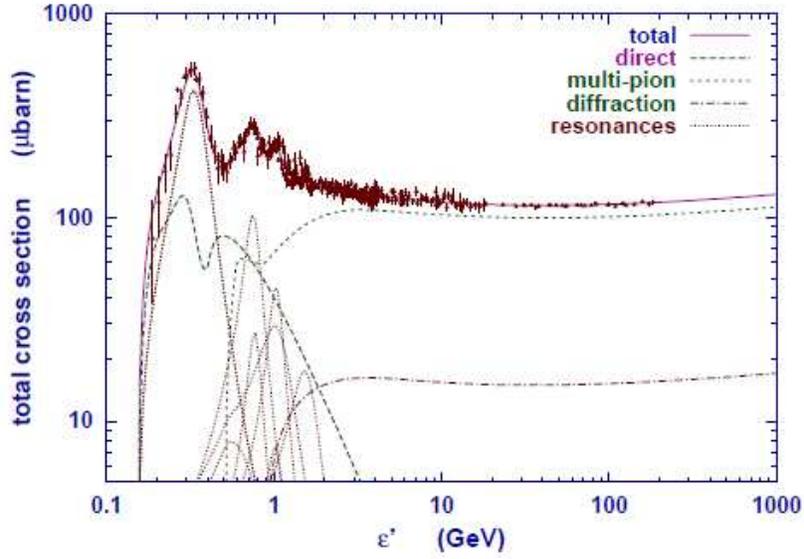
$$f = \frac{m_\pi}{m_\pi + m_p} \approx 0,13. \quad (2.3)$$

Esse valor aumenta à medida que mais energia cinética é dada ao pión, ficando em torno de  $f \approx 0,2$ , ou à medida que mais píons são produzidos, chegando a  $f \approx 0,6$  no limite de altas energias.

Outra característica importante desse processo é a sua seção de choque, mostrada na Figura 2.1. A seção de choque passa por uma ressonância logo acima do limiar, ultrapassando  $500 \mu\text{b}$ . Essa ressonância é denominada ressonância delta, devido ao fato de que a partícula  $\Delta^+$  é produzida como um estado intermediário, que decai logo em seguida e origina um pión:

$$p + \gamma \rightarrow \Delta^+ \rightarrow \begin{cases} p + \pi^0 \\ n + \pi^+ \end{cases}.$$

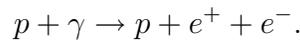
Considerando um fóton no laboratório com energia em torno do valor médio  $\bar{\epsilon}$ , a energia do próton correspondente nessa região é de cerca de  $2 \times 10^{20} \text{ eV}$ . À esquerda da ressonância, à medida que o limiar é aproximado, a seção de choque cai abruptamente. Considere, portanto, um próton com energia ligeiramente maior que  $10^{20} \text{ eV}$  propagando-se através de uma distância suficientemente grande (que deve ser da ordem de dezenas de megaparsecs, como será mostrado mais adiante). O próton irá interagir um número relativamente grande de vezes, pois a ressonância delta na seção de choque corresponde a uma alta probabilidade de interação nessa faixa de energia. Como consequência desse fator, combinado com a alta inelasticidade da interação, sua



**Figura 2.1:** A figura, retirada de [17], mostra a seção de choque para a produção de píons através da interação próton-fóton, como função da energia  $\epsilon'$  do fóton no referencial em que o próton encontra-se em repouso.

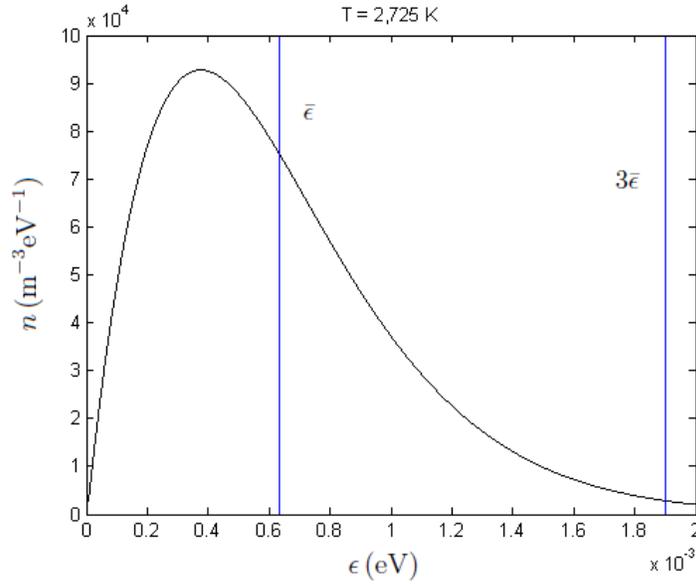
energia cairá rapidamente para um valor abaixo de  $10^{20}$  eV. À medida que a energia do próton diminui, ele deve interagir com fótons cada vez mais energéticos para que ocorra fotoprodução de píons, como mostra a equação (2.2). De fato, como mostra a Figura 2.2, esses fótons mais energéticos estão presentes na radiação de fundo, porém seu número cai rapidamente com a energia à direita de seu valor máximo. Por exemplo, apenas 1% dos fótons possui energia maior que  $3\bar{\epsilon}$ . Além disso, como observado na Figura 2.1, a seção de choque é bem menor próxima ao limiar de ocorrência da interação. Dessa forma, quando a energia do próton cai para um valor menor que  $10^{20}$  eV, as interações tornam-se cada vez mais raras e as perdas de energia diminuem consideravelmente. Isso deve provocar, portanto, uma supressão abrupta do espectro de raios cósmicos de ultra-alta energia em torno de  $10^{20}$  eV, que é exatamente o corte GZK.

Uma análise quantitativa da propagação de uma partícula altamente energética através da radiação de fundo será dada na próxima seção. Posteriormente, será possível verificar que a fotoprodução de píons é o processo realmente responsável pela supressão do espectro no caso de prótons. Entretanto, este não é o único processo pelo qual um próton perde energia. Abaixo da região do corte GZK, o processo dominante de perda de energia no intervalo entre  $10^{18}$  e  $10^{20}$  eV é a *produção de pares elétron-pósitron*:



A energia mínima do próton para que esse processo ocorra através da interação com um fóton de energia  $\epsilon$  é dada por

$$E_{\min} \approx \frac{m_p + m_e}{\epsilon} m_e c^4 \approx 4,8 \times 10^{14} \left( \frac{\epsilon}{1 \text{ eV}} \right)^{-1} \text{ eV}. \quad (2.4)$$



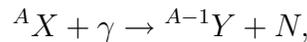
**Figura 2.2:** Distribuição de Planck para  $T = 2,725 \text{ K}$ , mostrando a energia média  $\bar{\epsilon}$ . Apenas 1% dos fótons possui energia maior que  $3\bar{\epsilon}$ .

Portanto, o processo começa a ficar importante no caso da radiação de fundo quando  $E \approx 7,6 \times 10^{17} \text{ eV}$ , que corresponde a  $\epsilon \approx 6,3 \times 10^{-4} \text{ eV}$ . No entanto, a inelasticidade desse processo é sempre da ordem de  $10^{-3}$ , sendo, no limiar,

$$f = \frac{2m_e}{2m_e + m_p} = 1,1 \times 10^{-3}. \quad (2.5)$$

Abaixo desses valores de energia, o processo dominante de perda de energia não está relacionado à radiação de fundo. Trata-se do deslocamento para o vermelho (*redshift*) gravitacional sofrido devido à expansão do Universo. Por outro lado, tal expansão influencia também a distribuição de fótons em cada ponto da trajetória do próton, pois a radiação de fundo era mais quente no passado do que na era atual. Os efeitos da expansão do Universo serão analisados cuidadosamente mais adiante.

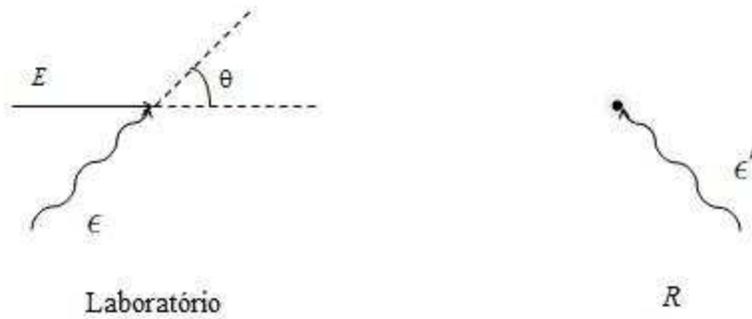
Por fim, no caso de núcleos pesados, os dois processos acima mencionados são relevantes. Além disso, os núcleos também podem sofrer *fotodesintegração*, a retirada de um nucleon devido à interação com um fóton. Esse processo pode ser esquematizado na forma



sendo  $X$  o núcleo com  $A$  nucleons, e  $Y$  o correspondente com  $A - 1$  nucleons. Esse processo tem grande importância para energias acima de  $10^{19} \text{ eV}$ . Essencialmente, portanto, a extensão da análise para o caso de núcleos é bastante imediata, bastando incluir na discussão a fotodesintegração.

## 2.2 Propagação através da radiação de fundo – aproximação contínua

Uma vez introduzidas as interações relevantes entre os raios cósmicos de ultra-alta energia e a radiação cósmica de fundo, o objetivo agora é descrever quantitativamente as perdas de energia correspondentes. Desde a proposta do efeito em 1966, foram feitos diversos cálculos da modificação do espectro devido à propagação, por exemplo [43–49], utilizando diferentes tipos de abordagem. Como consequência, as características essenciais do espectro estão bastante bem estabelecidas. Neste trabalho, será utilizada a *aproximação contínua*, já utilizada por diversos autores [44, 49, 50].



**Figura 2.3:** Esquema mostrando a interação de uma partícula altamente energética (linha sólida) com um fóton (linha ondulada) no referencial do laboratório e no referencial  $R$  em que a partícula encontra-se em repouso.

Considere a situação mostrada na Figura 2.3. A partícula incidente tem energia  $E \gg mc^2$ , sendo  $m$  sua massa. A energia do fóton é denotada por  $\epsilon$ , e seu momento forma um ângulo  $\theta$  com a direção de propagação da partícula, a qual chamaremos de  $x$ . É interessante analisar a mesma interação no referencial de repouso da partícula, que será denotado por  $R$ , e no qual, como na seção anterior, as quantidades serão denotadas com uma linha. A transformação de Lorentz para a nova componente 0 do momento do fóton,

$$p^{0'} = \gamma(p^0 - \beta p^1),$$

fornece

$$\epsilon' = \gamma\epsilon(1 - \beta \cos \theta). \quad (2.6)$$

Nessas equações,  $\beta = v/c$ ,  $v$  é a velocidade da partícula e

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E}{mc^2} \quad (2.7)$$

é o seu fator de Lorentz. Foram também utilizadas as relações usuais  $p^0 = \epsilon/c$  e  $p^i = (\vec{p})_i$ , a  $i$ -ésima componente do momento tridimensional usual  $\vec{p}$ .

Considere agora a quantidade invariante

$$s = -p_\mu p^\mu, \quad (2.8)$$

que corresponde à energia total ao quadrado (dividida por  $c^2$ ) no referencial de momento total nulo (comumente chamado *centro de massa*, CM). Quando calculada em termos das quantidades no referencial  $R$ , temos

$$s = m^2 c^2 + 2m\epsilon'. \quad (2.9)$$

A quantidade  $s$  é importante porque a seção de choque e a inelasticidade do processo em questão são determinadas unicamente apenas por  $s$  [50]. Por sua vez, a equação acima mostra que  $s$  é completamente determinada uma vez conhecida a energia  $\epsilon'$  do fóton no referencial  $R$ . Por outro lado, é preciso conhecer  $\epsilon$  e  $\theta$  para determinar  $\epsilon'$ .

Vamos agora supor que as perdas de energia são *contínuas*, no sentido em que a partícula interage continuamente com o meio e, portanto, perde energia continuamente ao longo de sua trajetória. Essa aproximação é bem justificada no caso da produção de pares, devido à sua baixa inelasticidade. No caso da fotoprodução de píons, aparentemente a aproximação não é tão boa, já que um próton perde uma fração considerável de sua energia em cada interação. Entretanto, a aproximação revela-se ser bastante razoável e, para este trabalho, será suficiente. Dessa forma, a fração de energia perdida,  $-dE/E$ , em um intervalo de tempo próprio  $d\tau$  de propagação da partícula, ao interagir com um fóton de energia  $\epsilon'$  em  $R$  através de um processo qualquer, pode ser calculada multiplicando-se a probabilidade por unidade de tempo de ocorrência dessa interação pela sua inelasticidade. Lembrando que a seção de choque de um processo é definida como a razão entre a probabilidade por unidade de tempo de sua ocorrência e a densidade de corrente incidente, e que esta, por sua vez, é dada pela densidade de partículas incidentes multiplicada pela sua velocidade, podemos escrever a expressão

$$-\frac{1}{E} \frac{dE}{d\tau}(\epsilon') = [c n'(\epsilon') d\epsilon'] \sigma(\epsilon') f(\epsilon'), \quad (2.10)$$

em que  $n'(\epsilon') d\epsilon'$  denota a densidade de fótons no referencial  $R$  com energia entre  $\epsilon'$  e  $\epsilon' + d\epsilon'$ ,  $\sigma(\epsilon')$  é a seção de choque total do processo considerado e  $f(\epsilon')$  sua inelasticidade. O termo entre colchetes é, portanto, a densidade de corrente das partículas incidentes (que são os fótons no referencial  $R$ ).

Agora, utilizamos o fato de que, para uma distribuição isotrópica de fótons no referencial do laboratório, vale a relação [51]

$$\frac{n'(\epsilon') d\epsilon'}{\epsilon'} = \frac{n(\epsilon) d\epsilon d(\cos \theta)}{2\epsilon}, \quad (2.11)$$

sendo  $n(\epsilon) d\epsilon d(\cos \theta)$  a densidade de fótons no laboratório com energia entre  $\epsilon$  e  $\epsilon + d\epsilon$  e com momento formando um ângulo com a direção  $x$  cujo cosseno está entre  $\cos \theta$  e  $\cos \theta + d(\cos \theta)$ . No caso de um corpo negro a uma temperatura  $T$ , a distribuição  $n(\epsilon)$  no referencial do laboratório é dada pela equação (1.1). A expressão (2.10) pode então ser reescrita em termos de  $n(\epsilon)$ ,

$$-\frac{1}{E} \frac{dE}{d\tau}(\epsilon, \theta) = \gamma c n(\epsilon) \frac{1 - \beta \cos \theta}{2} \sigma(\epsilon') f(\epsilon') d\epsilon d(\cos \theta). \quad (2.12)$$

A equação acima representa a fração de energia perdida pela partícula incidente por unidade de tempo próprio através da interação com um fóton de energia entre  $\epsilon$  e  $\epsilon + d\epsilon$  e momento formando um ângulo com a direção  $x$  cujo cosseno está entre  $\cos\theta$  e  $\cos\theta + d(\cos\theta)$ . A fração média *total* de energia perdida por unidade de tempo é a integral da expressão acima sobre todos os possíveis valores de  $\epsilon$  e  $\theta$ :

$$-\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \frac{c}{2} \iint d\epsilon d(\cos\theta) n(\epsilon)(1 - \beta \cos\theta)\sigma(\epsilon')f(\epsilon'), \quad (2.13)$$

em que foi utilizado ainda que o tempo  $t$  no referencial do laboratório relaciona-se com o tempo próprio  $\tau$  segundo a relação  $dt = \gamma d\tau$ . Para  $\epsilon$  fixo, a integral em  $\theta$  pode ser transformada em uma integral em  $\epsilon'$  através da equação (2.6):

$$-\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \frac{c}{2\gamma^2\beta} \int d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon^2} \int d\epsilon' \epsilon' \sigma(\epsilon') f(\epsilon'). \quad (2.14)$$

Vamos agora considerar os limites de integração. Como  $\gamma = E/mc^2 \gg 1$ , vamos considerar  $\beta \approx 1$ . Para  $\epsilon$  fixo, a equação (2.6) mostra então que  $\epsilon'$  varia entre zero e  $2\gamma\epsilon$ , para  $\theta$  variando entre zero e  $\pi$ . Entretanto, o processo em questão geralmente só ocorre a partir de uma energia mínima do fóton denotada por  $\epsilon'_{\min}$ , como foi visto no caso da fotoprodução de píons, por exemplo — vide equação (2.1). Portanto, a integração em  $\epsilon'$  deve ser feita de  $\epsilon'_{\min}$  a  $2\gamma\epsilon$ . Por outro lado, dada a energia mínima do fóton no referencial  $R$ , a equação (2.6) também permite concluir, para  $\beta \approx 1$ , que a energia mínima do fóton no referencial do laboratório é  $\epsilon = \epsilon'_{\min}/2\gamma$ . Logo,

$$-\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \frac{c}{2\gamma^2} \int_{\epsilon'_{\min}/2\gamma}^{\infty} d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon^2} \int_{\epsilon'_{\min}}^{2\gamma\epsilon} d\epsilon' \epsilon' \sigma(\epsilon') f(\epsilon'). \quad (2.15)$$

Invertendo a ordem das integrais, a expressão torna-se

$$-\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \frac{c}{2\gamma^2} \int_{\epsilon'_{\min}}^{\infty} d\epsilon' \epsilon' \sigma(\epsilon') f(\epsilon') \int_{\epsilon'/2\gamma}^{\infty} d\epsilon \frac{n(\epsilon)}{\epsilon^2}. \quad (2.16)$$

Para  $n(\epsilon)$  dada pela distribuição de Planck, equação (1.1), a integral em  $\epsilon$  pode ser calculada explicitamente, e obtemos finalmente

$$-\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \frac{ckT}{2\pi^2\gamma^2(c\hbar)^3} \int_{\epsilon'_{\min}}^{\infty} d\epsilon' \epsilon' \sigma(\epsilon') f(\epsilon') \left[ -\ln \left( 1 - e^{-\epsilon'/2\gamma kT} \right) \right]. \quad (2.17)$$

Esta será a equação fundamental para descrever as perdas de energia neste trabalho. Note que a derivada do lado esquerdo é com respeito a  $t$ , que é o tempo marcado pelo *observador* no referencial do laboratório. Essa observação será importante no próximo capítulo, quando for tratado o caso de um buraco negro.

## 2.3 Correções cosmológicas

Conforme já mencionado anteriormente, e como será mais bem discutido na próxima seção, a distância mínima de propagação dos raios cósmicos de ultra-alta energia para que se observe

o corte GZK deve ser de algumas dezenas de Mpc. Apesar de não se tratar de distâncias cosmológicamente muito grandes, podemos estender a discussão para fontes de raios cósmicos muito distantes e, portanto, muito antigas. Nesse caso, não deve ser possível ignorar a expansão do Universo ao longo de toda a trajetória de uma partícula. Como já comentado, a expansão do Universo influencia a propagação da radiação cósmica de duas formas: diretamente, através do *redshift* sofrido; e modificando a distribuição dos fótons da radiação de fundo em cada ponto da trajetória, devido ao resfriamento que se seguiu à medida que o Universo se expandiu.

A expressão (2.16) deduzida na seção anterior para a fração de energia perdida por unidade de tempo por uma partícula de altíssima energia durante a propagação através da radiação cósmica de fundo deve ser válida, portanto, na vizinhança da Terra. De fato, sua dedução envolve apenas conceitos da relatividade especial. Definimos, então, a fração média de perda de energia por unidade de tempo,  $\beta_0(E)$ , *no instante atual*  $t_0$  (de observação), como sendo a equação (2.16):

$$\beta_0(E) \equiv - \left. \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{c}{2\gamma^2} \int_{\epsilon'_{\min}}^{\infty} d\epsilon' \epsilon' \sigma(\epsilon') f(\epsilon') \int_{\epsilon'/2\gamma}^{\infty} d\epsilon \frac{n_0(\epsilon)}{\epsilon^2}, \quad (2.18)$$

sendo  $n_0(\epsilon)$  a distribuição de fótons no mesmo instante. No caso, essa distribuição é dada pela fórmula de Planck, equação (1.1), com  $T = T_0 = 2,725$  K:

$$n_0(\epsilon) = n_{T_0}(\epsilon) = \frac{1}{\pi^2 (c\hbar)^3} \frac{\epsilon^2}{e^{\epsilon/kT_0} - 1}, \quad (2.19)$$

e, portanto, a expressão resultante em  $t = t_0$  é a equação (2.17).

O objetivo agora é encontrar a expressão correspondente a (2.18),  $\beta(E)$ , para qualquer<sup>2</sup>  $t < t_0$ . É natural encontrar essa expressão mais geral fazendo as modificações necessárias na própria expressão para  $\beta_0(E)$ . Nesse caso, vemos que apenas a integral interna deve ser modificada, pois ela depende da distribuição dos fótons, que não deve ser a mesma ao longo de toda a história do Universo, conforme já adiantado. Os outros termos tratam essencialmente da própria interação considerada, portanto não devem apresentar nenhuma modificação. Ou seja, basta encontrar a distribuição  $n(\epsilon)$  de fótons para  $t < t_0$ .

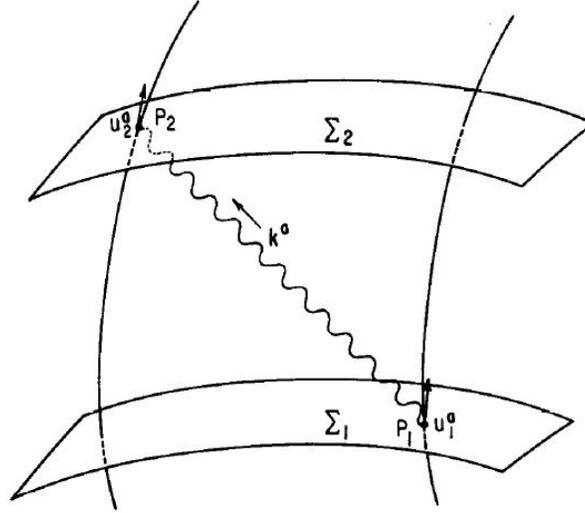
Para essa finalidade, vamos assumir um modelo cosmológico *homogêneo e isotrópico* para o Universo em expansão, com *seções espaciais planas* (isto é, sem curvatura). A métrica para tal modelo é dada por [52]

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.20)$$

em que a função  $a(t)$  é denominada *fator de escala*. O nome se deve à propriedade de que, dados dois observadores *comóveis*, isto é, com coordenadas espaciais fixas, em uma mesma seção espacial  $t = \text{constante}$ , a distância espacial entre eles cresce proporcionalmente a  $a(t)$ .

Esse espaço-tempo possui um efeito bastante conhecido, o *deslocamento para o vermelho* (ou *redshift*) gravitacional. Considere a situação mostrada na Figura 2.4, em que um sinal de luz é emitido em um ponto  $P_1$  do espaço-tempo, sendo recebido por um observador comóvel no

<sup>2</sup>Aqui deve ficar claro que, a rigor, nem todo o domínio de  $t < t_0$  nos interessa neste trabalho. Não estamos interessados no Universo primordial, por exemplo, e essa situação não estará contemplada na análise a seguir.



**Figura 2.4:** A figura, retirada de [52], mostra a emissão de um fóton no ponto  $P_1$ , sendo recebido por um observador comóvel no ponto  $P_2$ . A frequência  $\omega_1$  medida por um observador comóvel em  $P_1$  difere da frequência  $\omega_2$  medida pelo observador em  $P_2$ .

ponto  $P_2$ . É possível mostrar [52] que a frequência  $\omega_2$  medida pelo observador no ponto  $P_2$  não é, em geral, a mesma que a frequência de emissão  $\omega_1$  (definida como a frequência medida por um observador comóvel no ponto de emissão  $P_1$ ), mas estão relacionadas através de

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)}. \quad (2.21)$$

O *redshift*  $z$  do processo é definido em termos dos comprimentos de onda  $\lambda_1$  (na emissão) e  $\lambda_2$  (na recepção) como  $z = (\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1$ , podendo ser escrito em termos das frequências e, portanto, dos fatores de escala correspondentes:

$$z = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 = \frac{a(t_2)}{a(t_1)} - 1. \quad (2.22)$$

A definição é consistente, já que  $z$  é positivo quando ocorre diminuição de frequência (deslocamento para o vermelho). Como a energia dos fótons é dada por  $\epsilon = \hbar\omega$ , ela segue a mesma relação (2.21) que a frequência. Ou, em termos do *redshift*:

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{a(t_2)}{a(t_1)} = 1 + z. \quad (2.23)$$

É comum ainda utilizar o *redshift*  $z$  como uma medida de “distância” em relação à própria Terra. Nesse caso, fixa-se o instante de observação  $t_2$  como sendo o instante  $t_0$  e, utilizando a equação (2.22), obtém-se

$$1 + z(t) = \frac{a(t_0)}{a(t)} \quad (t < t_0). \quad (2.24)$$

Ou seja, conhecendo-se a relação entre  $z$  e  $t$ , podemos determinar a distância sabendo que a luz viaja sempre à velocidade  $c$ .

Os resultados e propriedades mencionados acima são suficientes para encontrar a distribuição de fótons em cada instante  $t$  ou, equivalentemente, em cada *redshift*  $z$ , devido à equação (2.24). Isso é uma consequência das bem conhecidas relações de densidade e energia em cada seção espacial  $t = \text{constante}$  [28, 52]. Como mostra a equação (2.23), a energia dos fótons decresce proporcionalmente a  $a^{-1}$  ou, em termos de  $z$ :

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{a_0}{a} = 1 + z, \quad (2.25)$$

em que o índice 0 significa que a quantidade corresponde ao instante  $t = t_0$ . Por outro lado, se as distâncias em seções espaciais aumentam proporcionalmente a  $a$ , os volumes aumentam proporcionalmente a  $a^3$ . A densidade de fótons deve então diminuir proporcionalmente a  $a^{-3}$ , já que seu número permanece constante. Ou seja, para a densidade teremos

$$\frac{N/V}{(N/V)_0} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 = (1 + z)^3. \quad (2.26)$$

A densidade de fótons com energia entre  $\epsilon_0$  e  $\epsilon_0 + d\epsilon_0$  para  $z = 0$  é dada por  $n_0(\epsilon_0)d\epsilon_0$ . Queremos encontrar a distribuição  $n(\epsilon)$  tal que, quando  $\epsilon = (1 + z)\epsilon_0$ , a densidade de fótons correspondente aumente segundo (2.26):

$$n(\epsilon)d\epsilon = (1 + z)^3 n_0(\epsilon_0)d\epsilon_0. \quad (2.27)$$

Ou seja, para  $d\epsilon = (1 + z)d\epsilon_0$ ,

$$n((1 + z)\epsilon_0) = (1 + z)^2 n_0(\epsilon_0), \quad (2.28)$$

ou ainda,

$$n(\epsilon) = (1 + z)^2 n_0(\epsilon/(1 + z)). \quad (2.29)$$

Se  $n_0(\epsilon) = n_{T_0}(\epsilon)$  é a distribuição de Planck (2.19) para a temperatura atual  $T_0$ , a equação acima permite concluir que

$$n(\epsilon) = n_{(1+z)T_0}(\epsilon), \quad (2.30)$$

isto é, o espectro de corpo negro para uma temperatura  $T(z) = (1 + z)T_0$ . Portanto, a expressão para  $\beta(E)$  é exatamente a equação (2.17), porém com temperatura dependendo de  $z$  segundo a relação acima:

$$\beta(E) = -\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \frac{ckT(z)}{2\pi^2\gamma^2(c\hbar)^3} \int_{\epsilon'_{\min}}^{\infty} d\epsilon' \epsilon' \sigma(\epsilon') f(\epsilon') \left[ -\ln \left( 1 - e^{-\epsilon'/2\gamma kT(z)} \right) \right]. \quad (2.31)$$

A expressão para  $\beta(E)$  pode ainda ser convenientemente escrita em uma forma mais geral, válida para uma distribuição genérica  $n(\epsilon)$  (não necessariamente de corpo negro). Quando  $n_0(\epsilon)$  é substituído na equação (2.18) por  $n(\epsilon)$  dado pela equação (2.29), uma mudança de variáveis  $\epsilon/(1 + z) \rightarrow \epsilon$  na última integral permite mostrar que a equação correspondente para  $z > 0$  se relaciona com aquela para  $z = 0$  segundo a expressão

$$\beta(E) = (1 + z)^3 \beta_0((1 + z)E). \quad (2.32)$$

É claro, essa equação é completamente equivalente à (2.31) quando a distribuição de fótons é a distribuição de Planck, com a temperatura variando de acordo com  $T = (1 + z)T_0$ .

É preciso ainda considerar a influência direta da expansão do Universo na perda de energia da partícula da radiação cósmica. Como a partícula é ultrarrelativística ( $\gamma \gg 1$ ), podemos aproximar sua trajetória no espaço-tempo por uma trajetória nula. Portanto, sua energia também deve obedecer à relação (2.25) válida para fótons,

$$E = (1 + z)E_0 = \frac{a_0}{a}E_0, \quad (2.33)$$

em que  $E_0$ , nesse caso, é a energia que a partícula teria no instante  $t_0$  caso não sofresse perdas devido à radiação de fundo. A partir dessa relação, segue que

$$\frac{dE}{dt} = -E \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.34)$$

sendo  $\dot{a} = da/dt$ . A razão  $\dot{a}/a$  é frequentemente denominada *parâmetro de Hubble*  $H(z)$ . A expressão para a perda de energia devido ao *redshift* sofrido durante a expansão do Universo é, portanto,

$$-\frac{1}{E} \frac{dE}{dt}(z) = H(z). \quad (2.35)$$

Finalmente, a expressão completa para a fração média de energia perdida por unidade de tempo por uma partícula de ultra-alta energia propagando-se através da radiação cósmica de fundo é então dada por

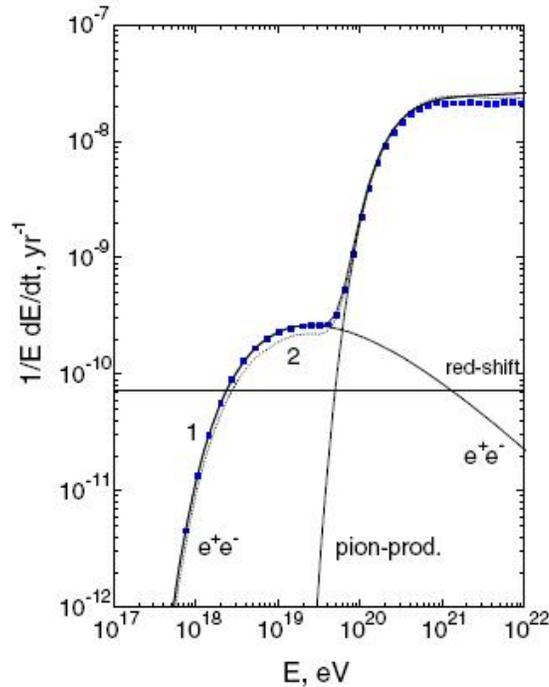
$$-\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = H(z) + \sum \beta(E), \quad (2.36)$$

em que a soma deve ser feita sobre todas as interações levadas em conta. Para cada interação,  $\beta(E)$  é dado pela equação (2.31) com a seção de choque, inelasticidade e energia mínima correspondentes.

## 2.4 Resultados teóricos e experimentais

De posse de uma equação diferencial para a energia em função do tempo — a equação (2.36) obtida na seção anterior — é possível, ao menos em princípio, evoluir um determinado espectro de raios cósmicos altamente energéticos de uma fonte em um instante  $t_1$  até o instante de observação  $t_0$ , predizendo assim o espectro observado na chegada. É possível, no entanto, entender alguns aspectos da propagação de partículas de ultra-alta energia analisando apenas a própria equação (2.36). A ideia é que o inverso dessa expressão fornece um *tempo característico* para as perdas de energia.

A Figura 2.5 mostra os cálculos recentes de Berezhinsky e colaboradores [49] para  $(1/E)dE/dt$  em  $z = 0$ . São separadas as contribuições da fotoprodução de píons, da produção de pares e da expansão do Universo. A última é constante pois, em  $z = 0$ ,  $H = H_0 = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  é a conhecida constante de Hubble. Observa-se que a produção de píons é, de fato, o processo realmente responsável pelo corte GZK no caso de prótons. Acima de  $10^{20} \text{ eV}$ , o tempo característico para perdas de energia é cerca de  $3 \times 10^7$  anos, correspondendo a uma



**Figura 2.5:** O gráfico, retirado de [49], mostra as contribuições em  $z = 0$  para  $(1/E)dE/dt$  da fotoprodução de píons e da produção de pares, bem como a soma das duas contribuições (curva 1). A curva 2 corresponde a resultados anteriores [44] para a mesma soma. É mostrada ainda separadamente a contribuição da expansão do Universo, que é constante e igual a  $H_0$  (constante de Hubble) em  $z = 0$ . Os quadrados azuis são uma comparação com os resultados de [48].

distância de propagação da ordem de 10 Mpc. À medida que a energia do próton se aproxima de  $10^{19}$  eV, porém, a contribuição da produção de píons cai abruptamente e a produção de pares passa a dominar as perdas de energia. No entanto, o tempo característico aumenta de cerca de duas ordens de grandeza, ultrapassando  $10^9$  anos e ficando próximo da idade estimada do Universo. As perdas de energia passam a ser muito menos significativas, portanto, conforme já adiantado. Finalmente, abaixo de cerca de  $10^{18}$  eV, as perdas de energia devido ao *redshift* gravitacional passam a ser dominantes. O gráfico mostra ainda a comparação com os cálculos feitos por Stanev e colaboradores [48] (quadrados azuis). A comparação é interessante pois, nesse trabalho, utiliza-se a abordagem oposta à aproximação contínua. As interações são tratadas pontualmente, distribuídas estatisticamente no espaço e no tempo. Observa-se que a concordância entre as duas abordagens é muito boa, portanto a aproximação contínua é, de fato, bastante razoável, mesmo no caso da produção de píons.

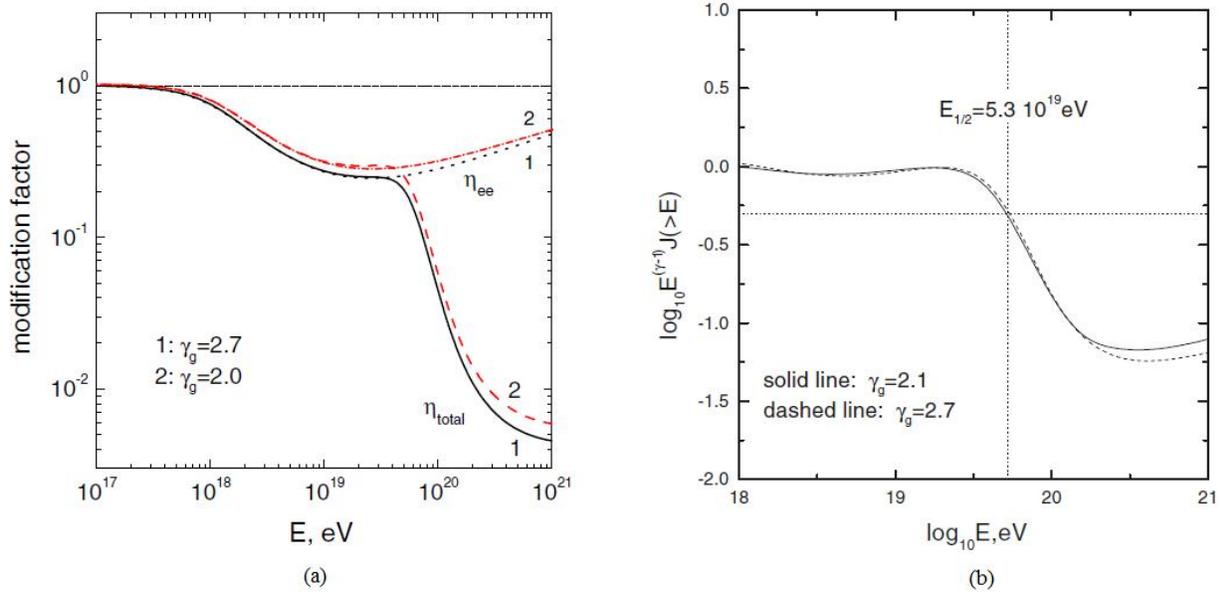
Conforme já discutido, muitos cálculos do espectro de raios cósmicos de ultra-alta energia, modificado pela propagação através da radiação cósmica de fundo, foram efetuados utilizando diferentes métodos [43–49]. Qualitativamente, os diversos cálculos apresentam boa concordância e, como consequência, as características essenciais do espectro estão bem estabelecidas. A seguir são mostrados alguns exemplos obtidos utilizando a aproximação contínua [49] — Figura 2.6. Em geral, a análise baseia-se no *espectro diferencial*  $J(E)$ , que é o número de partículas por unidade de tempo e por unidade de energia. Como visto no capítulo anterior, um modelo que descreve muito bem o fluxo *observado* é uma lei de potência na forma  $F(E) = \kappa E^{-\alpha}$ . Embora

o espectro gerado e o espectro observado sejam certamente diferentes, o primeiro também é frequentemente modelado na forma de uma lei de potência [43–49], e assim a taxa de produção de partículas na fonte é descrita por uma função da forma  $E^{-\gamma}$ . Esse modelo é baseado no *mecanismo de Fermi*, proposto pela primeira vez em 1949 [53] como um processo estocástico pelo qual as partículas podem ser aceleradas a altas energias através de colisões com nuvens no meio interestelar. Como consequência, o espectro na forma  $E^{-\gamma}$  decorre naturalmente [53, 54]. O modelo mais atual de *choques astrofísicos* é baseado no modelo de Fermi e também prevê um espectro na forma de uma lei de potência (os detalhes podem ser encontrados em [54]). Berezhinsky e Grigorieva [44] introduziram o *fator de modificação*  $\eta(E)$ , definido como a razão entre o espectro  $J_p(E)$  modificado pela propagação, isto é, com todas as perdas de energia devido à radiação de fundo levadas em conta, e o espectro não modificado  $J(E)$ , em que apenas as perdas adiabáticas (*redshift*) são levadas em conta:

$$\eta(E) = \frac{J_p(E)}{J(E)}. \quad (2.37)$$

O fator de modificação revelou-se ser uma ferramenta muito interessante para analisar os efeitos da propagação de raios cósmicos de ultra-alta energia, tendo sido frequentemente utilizado desde então [48, 49]. A vantagem do fator de modificação reside no fato de ele ser menos dependente de modelos que o espectro em si [49].

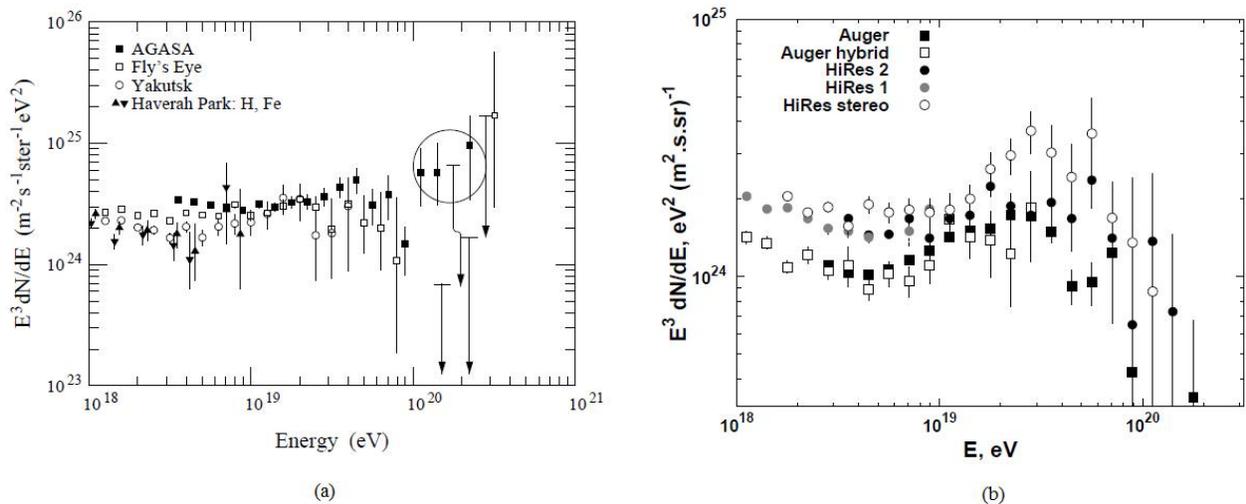
A Figura 2.6 mostra os resultados obtidos por Berezhinsky e colaboradores [49] para o fator de modificação e o espectro observado, utilizando a aproximação contínua para as perdas de energia e supondo uma distribuição homogênea e isotrópica de fontes com espectro de emissão proporcional a  $E^{-\gamma}$ . A supressão abrupta próxima de  $10^{20}$  eV é vista nos dois gráficos,



**Figura 2.6:** Gráficos retirados de [49]: (a) fator de modificação para dois valores de  $\gamma$  e (b) espectro integral para dois diferentes valores de  $\gamma$ , ambos calculados supondo uma distribuição homogênea e isotrópica de fontes. A curva  $\eta_{ee}$  em (a) corresponde à contribuição da produção de pares apenas.

caracterizando o corte GZK. Uma outra característica interessante observada no espectro da Figura 2.6(b) é um aumento em torno de  $10^{19}$  eV, logo antes do corte. Esse aumento é uma consequência do fato de que as partículas perdem energia, porém não desaparecem. De fato, após um próton com energia originalmente maior que  $10^{20}$  eV ter sua energia reduzida para um valor abaixo deste, as perdas de energia começam a se tornar bem menos significativas, como já discutido anteriormente. A energia não diminui muito depois disso e, dessa forma, as partículas começam a se acumular na região próxima a  $10^{19}$  eV. Essa característica não é tão visível no caso de fontes distribuídas homoganeamente, mas é muito evidente quando se considera uma única fonte (ver [44] para alguns exemplos).

Apenas recentemente o efeito GZK adquiriu respaldo experimental [55]. A Figura 2.7(a), retirada de [22], mostra o espectro de raios cósmicos de ultra-alta energia conhecido antes dos experimentos mais recentes, HiRes e Auger, entrarem em funcionamento. Não se observava o corte GZK como esperado. Em particular, os dados do experimento AGASA chamavam a atenção, por apresentarem mais de 10 eventos com energia maior ou igual a  $10^{20}$  eV [56]. Os dados mais recentes dos experimentos HiRes e Auger, por outro lado, não contradizem o efeito GZK. De fato, os dados do HiRes são completamente consistentes com o modelo de Berezhinsky e colaboradores [49], assumindo um espectro da forma  $E^{-2.7}$  e composto apenas por prótons. Os resultados do Observatório Auger, por outro lado, admitem outros modelos, inclusive de espectro com composição mista (prótons e núcleos) [22]. As discrepâncias do experimento AGASA para  $E > 10^{20}$  eV provavelmente têm origem estatística combinada com um problema na calibragem da energia [49, 57].



**Figura 2.7:** Gráficos retirados de [22]: (a) espectro de raios cósmicos de ultra-alta energia determinado antes da nova geração de experimentos (HiRes e Auger) (b) espectro de raios cósmicos de ultra-alta energia medido pelos experimentos mais recentes, HiRes e Auger.

# Capítulo 3

## Efeito GZK na presença de um buraco negro

### 3.1 Descrição do problema

No capítulo anterior, foi feita uma revisão do efeito GZK como é usualmente apresentado, considerando a propagação de partículas de ultra-alta energia (prótons) em um universo em expansão, sujeitas a perdas de energia devido às interações com a radiação cósmica de fundo e ao *redshift* gravitacional. Conforme discutido naquele capítulo, o efeito nesse caso é muito bem entendido, tendo sido extensivamente estudado e discutido desde sua proposta em 1966.

Uma situação ainda não contemplada, porém, é a seguinte. Considere uma fonte de raios cósmicos de ultra-alta energia e suponha que exista, entre a fonte e a Terra, um buraco negro. Nesse caso, pode-se perguntar quais são as influências da presença do buraco negro na propagação dos raios cósmicos e, conseqüentemente, no espectro observado. Em oposição ao caso tratado no capítulo anterior, em que a expansão do Universo induz correções de natureza cosmológica à propagação dos raios cósmicos, a presença de um buraco negro tem natureza astrofísica. É possível considerar um buraco negro suficientemente próximo de modo que as correções induzidas pelo *redshift* sejam desprezíveis, mas a influência do buraco negro não. Neste capítulo, essa nova situação será investigada, buscando responder às questões levantadas.

No capítulo anterior, foi visto que a expansão do Universo afeta a distribuição dos fótons em cada instante de sua evolução, e mostrou-se que ela é dada pela distribuição de Planck (corpo negro) com temperatura dependente de *redshift*. Dessa forma, a equação (2.17) deduzida para o caso estático pôde ser aplicada substituindo a temperatura fixa  $T_0$  por uma temperatura dependente do *redshift* na forma  $T(z) = (1+z)T_0$ . No caso de um buraco negro, veremos que a distribuição de fótons ao redor do mesmo também deve ser modificada, devido a uma temperatura novamente dependente do espaço-tempo: segundo observadores em repouso em relação ao buraco negro, a radiação é tanto mais quente quanto menor a distância ao mesmo. Isso permitirá aplicar mais uma vez a equação (2.17) para analisar o problema, utilizando a nova forma funcional para a temperatura. Para tanto, devemos considerar um buraco negro imerso em um banho térmico, o qual será identificado com a radiação cósmica de fundo.

## 3.2 Termodinâmica de buracos negros e a radiação de Hawking

Quando se considera um buraco negro imerso em um banho térmico, uma questão legítima que poderia ser levantada é se este constitui um sistema em equilíbrio termodinâmico, como geralmente é o caso em problemas de termodinâmica clássica. O conceito de um buraco negro em equilíbrio térmico deve então primeiramente ser esclarecido através da *termodinâmica de buracos negros* [58, 59].

A teoria de buracos negros foi amplamente desenvolvida durante as décadas de 1960 e 1970, tendo sido obtidos diversos resultados notáveis. Em particular, foi observada uma analogia matemática entre algumas leis da mecânica de buracos negros e as leis da termodinâmica [60]. Tomando o caso mais simples, o de um buraco negro de Schwarzschild de massa  $M$ , que é esféricamente simétrico, a área de seu horizonte de eventos é dada por

$$A = 4\pi(R_S)^2 = 16\pi M^2, \quad (3.1)$$

dado que o horizonte encontra-se sempre em  $r = R_S = 2M$ , o chamado *raio de Schwarzschild*. Essas relações estão escritas no sistema de unidades em que  $G = c = 1$  ( $G$  é a constante de gravitação universal), que será adotado em todo o texto de agora em diante, além de  $\hbar = 1$ . Um teorema devido a Hawking [61, 62] mostra que a área do horizonte de eventos não pode decrescer, desde que não estejam envolvidas densidades de energia negativas. Portanto,

$$dA = 32\pi M dM \geq 0. \quad (3.2)$$

Essa relação é formalmente idêntica à segunda lei da termodinâmica

$$dS = \frac{1}{T} dU \geq 0, \quad (3.3)$$

em que a área do buraco negro faz o papel de entropia, sua massa faz o papel de energia interna, e a *gravidade superficial*

$$\kappa = \frac{1}{4M} \quad (3.4)$$

faz o papel da temperatura. De fato, é possível estabelecer a analogia com as quatro leis da termodinâmica no caso mais geral de um buraco negro estacionário cujo espaço-tempo possua a propriedade de ser assintoticamente plano [58–60]. Nesse caso, uma série de teoremas de unicidade (conhecidos como teoremas *no-hair*) [62, 63] garante que um buraco negro é completa e unicamente caracterizado por três parâmetros (supondo que não haja campos de matéria presentes exceto campos eletromagnéticos sem fontes): massa, carga elétrica e momento angular. A lei zero estabelece que existe uma quantidade constante em todo o horizonte, a própria gravidade superficial  $\kappa$ , em analogia à temperatura constante de um corpo em equilíbrio térmico. A primeira lei no caso do buraco negro de Schwarzschild (que não possui carga elétrica nem momento angular) é a relação já vista

$$dA = \frac{8\pi}{\kappa} dM, \quad (3.5)$$

enquanto que a segunda lei é exatamente  $dA \geq 0$ , como também visto acima. A terceira lei está associada à *conjectura da censura cósmica* [62, 64], que afirma que toda singularidade deve

estar envolvida por um horizonte de eventos, não sendo acessível a observadores distantes. A gravidade superficial do buraco negro estacionário mais geral cujo espaço-tempo é assintoticamente plano, o buraco negro de *Kerr-Newman*, possuindo massa  $M$ , momento angular  $J$  e carga elétrica  $Q$ , é dada por [62]

$$\kappa = \frac{r_+ - M}{r_+^2 + a^2}, \quad (3.6)$$

em que  $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$  é o raio do horizonte de eventos e  $a = J/M$ . Se  $\kappa$  se aproxima de zero, temos

$$\frac{J^2}{M^4} + \frac{Q^2}{M^2} = 1. \quad (3.7)$$

Este é exatamente o último conjunto de parâmetros para os quais o buraco negro possui um horizonte de eventos, chamado, por essa razão, de *buraco negro extremo*. Se o lado esquerdo for, na verdade, maior que 1,  $r_+$  se torna complexo, isto é, o horizonte de eventos deixa de existir, dando origem a um estado conhecido como *singularidade nua*. Se o buraco negro atingisse esse estado extremo, que corresponde a um estado de temperatura nula, então uma pequena perturbação poderia destruir o horizonte de eventos e expor a singularidade a observadores distantes, violando assim a conjectura da censura cósmica. A terceira lei pode então ser formulada como a impossibilidade de executar processos que eliminem o horizonte de eventos de um buraco negro, transformando-o em uma singularidade nua, o que é análogo a uma formulação comum da terceira lei da termodinâmica como a impossibilidade de se atingir o zero absoluto.

Entretanto, todas essas analogias são meramente formais na teoria clássica de buracos negros, à exceção da relação entre massa e energia interna. Estas últimas realmente são fisicamente análogas, pois, na teoria da relatividade geral, a massa de um buraco negro corresponde à sua energia total. Por outro lado, a temperatura de um buraco negro clássico é claramente igual a *zero*, não tendo nenhuma relação física, nesse contexto, com a gravidade superficial.

O colapso gravitacional de matéria formando um buraco negro é um processo extremo. Logo, pode-se esperar que, quando levada em conta a mecânica quântica, ocorra produção de partículas na fase do colapso, devido ao seu campo gravitacional altamente não estacionário. Além disso, não deve ser surpreendente que, em tempos posteriores ao colapso, após ser atingido um estado estacionário, possa haver produção de partículas no caso de um buraco negro em rotação ou carregado. Afinal, mesmo classicamente, é possível encontrar processos que permitem extrair energia de tais buracos negros [62]. De fato, em 1974, Hawking [65] anunciou o célebre resultado de que buracos negros emitem radiação devido a efeitos quânticos. Entretanto, o resultado torna-se surpreendente pois a produção de partículas ocorre mesmo no caso de um buraco negro de Schwarzschild. Mais ainda, a natureza da radiação mostra-se ser bastante simples. A análise de campos quantizados sobre o espaço-tempo correspondente revela que um observador distante, em tempos muito posteriores ao colapso, detecta um fluxo de partículas de natureza térmica, com temperatura dada por

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi k}. \quad (3.8)$$

Essa radiação, que para o observador distante é emitida a partir do buraco negro, é conhecida como *radiação de Hawking*. Restaurando as unidades, a temperatura de Hawking é dada por

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k}. \quad (3.9)$$

Na dedução original da radiação de Hawking [66, 67], considera-se inicialmente um espaço-tempo com uma distribuição rarefeita de matéria, descrito com boa aproximação pelo espaço-tempo de Minkowski. A matéria então sofre um colapso gravitacional e origina um buraco negro esfericamente simétrico (Schwarzschild). Os detalhes do colapso revelam-se não afetar as características da radiação de Hawking. Contudo, o processo não preserva os observáveis em geral, em particular o número de partículas. Considere que, inicialmente, os campos quânticos estão em seu estado de vácuo, o qual tem a propriedade de ser aniquilado por todos os operadores de aniquilação. Utilizando a representação de Heisenberg (em que apenas os operadores evoluem no tempo), após a fase do colapso, os operadores de aniquilação e criação aparecem como combinações lineares (dadas pelas chamadas *transformações de Bogolubov* [67]) dos operadores iniciais. Como consequência, o estado de vácuo associado aos novos operadores difere do estado de vácuo original. De fato, o estado de vácuo original (que não evolui no tempo) corresponde, em relação aos novos operadores, a um estado contendo uma distribuição térmica de partículas à temperatura (3.9). Ou seja, um observador distante, que inicialmente não detectava nenhuma excitação dos campos, passa a detectar, depois de atingida a fase estacionária que segue ao colapso, um fluxo de partículas proveniente, segundo ele, do buraco negro.

O resultado de Hawking, além de ter provado ser crucial no desenvolvimento da *teoria quântica de campos em espaços curvos* [67–69], permitiu que a analogia entre as leis da mecânica de buracos negros e as leis da termodinâmica fosse estabelecida muito além de uma mera similaridade matemática. A gravidade superficial agora é vista como sendo, de fato, proporcional à temperatura física do buraco negro. Além disso, torna-se viável a definição da entropia de um buraco negro como sendo proporcional à área de seu horizonte de eventos,

$$S = \frac{1}{4}kA, \quad (3.10)$$

vide equação (3.5). Torna-se viável, portanto, a *segunda lei da termodinâmica generalizada*, que estabelece que a entropia de toda a matéria exterior a buracos negros somada à entropia de cada um dos buracos negros presentes, como definida acima, nunca decresce. Isso permite considerar, portanto, que as quatro leis da mecânica de buracos negros são literalmente as quatro leis usuais da termodinâmica aplicadas a sistemas que contenham buracos negros. Em particular, pode-se falar em equilíbrio termodinâmico para tal sistema [58, 59], como um buraco negro em contato com um banho térmico, por exemplo.

### 3.3 Buraco negro imerso em um banho térmico

Para encontrar a distribuição de fótons ao redor do buraco negro, ou seja, a nova forma funcional para a temperatura, vamos considerar um buraco negro de Schwarzschild de massa  $M$  em contato com um banho térmico, o qual será identificado com a radiação cósmica de fundo.

Considere primeiramente um sistema termodinâmico genérico em equilíbrio, na presença de um campo gravitacional estacionário. Esse campo gravitacional é descrito pelo tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  do espaço-tempo. A condição de ser estacionário implica que pode ser encontrado um sistema de coordenadas em que as componentes de  $g_{\mu\nu}$  não dependem da coordenada tipo tempo  $t$ . Nessa situação, a temperatura do sistema satisfaz a seguinte condição de equilíbrio,

conhecida como *relação de Tolman* [70, 71]:

$$T\sqrt{-g_{00}} = \text{constante}, \quad (3.11)$$

sendo  $g_{00}$  a componente 00 do tensor métrico nessas coordenadas. Essa relação é uma consequência natural do fato de que a energia não é uma quantidade escalar, ou seja, sua medida depende do observador. Logo, a temperatura, que intrinsecamente está ligada à energia, também deve ser uma quantidade dependente de observador. Em um sistema gravitacionalmente não homogêneo (porém estacionário), em que a não homogeneidade é refletida na dependência espacial da métrica, observadores em diferentes posições espaciais medem energia e, portanto, temperatura, de maneira diferente, levando à relação escrita na forma (3.11).

Uma dedução particularmente simples da relação de Tolman para a temperatura foi dada por Balazs [71], a qual será esboçada brevemente aqui. Considere um sistema termodinâmico em uma região onde o campo gravitacional é estacionário, porém não homogêneo, como esquematizado na Figura 3.1. Nesse caso, o potencial gravitacional, que está associado à métrica, não é constante em todo o sistema. Introduzem-se então duas câmaras no sistema, mostradas na Figura 3.1, pequenas o suficiente de modo que o potencial gravitacional  $\phi$  seja aproximadamente constante em cada uma delas. As câmaras estão inicialmente em contato com o sistema e, portanto, em equilíbrio com o mesmo e entre si. No referencial localmente inercial de cada câmara, a situação é então muito bem descrita em termos das leis da relatividade especial, entre elas o princípio de máxima entropia. Se as câmaras estão em repouso em relação ao sistema, as condições de equilíbrio são então as mesmas da termodinâmica clássica: a variação da entropia deve se anular se a energia interna, o volume e o número de partículas são mantidos constantes. Localmente, portanto, a temperatura pode ser definida a partir de

$$\frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V,N}, \quad (3.12)$$

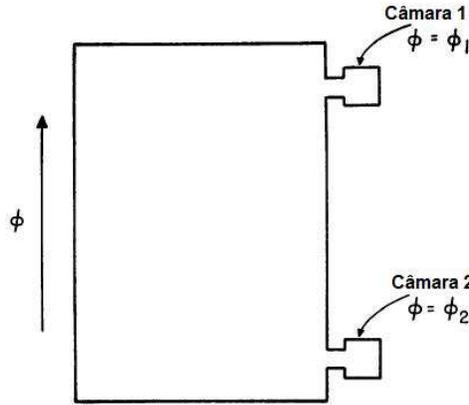
em que a energia interna  $U$  e o volume  $V$  são medidos localmente. Define-se a entropia como a constante de Boltzmann multiplicada pelo logaritmo natural do número de estados acessíveis compatíveis com os vínculos envolvidos. Dessa forma, portanto, ela possui o mesmo valor se medida em unidades locais ou globais, sendo essencialmente o logaritmo de um número puro.

Considere então as duas câmaras mostradas na Figura 3.1, que inicialmente estão em equilíbrio entre si, e suponha que estejam relativamente em repouso, o que é sempre possível na situação estacionária. Introduzem-se paredes adiabáticas isolando as duas câmaras do sistema global, e considera-se que as câmaras formam um sistema composto e fechado. Impedindo a variação de volume e de número de partículas, a condição de equilíbrio para o sistema composto requer que a variação de entropia se anule para uma pequena redistribuição de energia. Isto é, considere que uma pequena quantidade de energia interna  $\delta U_1$  seja transferida da câmara 1 para a câmara 2. No referencial local da última, essa quantidade de energia é medida como sendo  $\delta U_2$ . A condição de equilíbrio é então

$$\delta S = \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_1 \delta U_1 + \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_2 \delta U_2 = 0. \quad (3.13)$$

De acordo com a definição local da temperatura, equação (3.12), temos  $(\partial S/\partial U)_1 = 1/T_1$  na câmara 1, enquanto que, na câmara 2,  $(\partial S/\partial U)_2 = 1/T_2$ . Isso leva à relação

$$\frac{\delta U_1}{T_1} + \frac{\delta U_2}{T_2} = 0. \quad (3.14)$$



**Figura 3.1:** Representação diagramática de um sistema em um campo gravitacional estacionário e não homogêneo, adaptada de [71].

Na termodinâmica clássica,  $\delta U_1 = -\delta U_2$  para que a energia total se conserve, e nesse caso teríamos  $T_1 = T_2$ . No entanto, localmente, as quantidades de energia  $\delta U_1$  e  $\delta U_2$  são medidas de maneira diferente, devido ao campo gravitacional não homogêneo, dando origem ao conhecido *redshift* gravitacional. De fato, no que diz respeito ao equilíbrio térmico, basta considerar um processo particular de transferência de energia para encontrar a relação de equilíbrio. Suponha, então, que um fóton de frequência  $\nu_1$ , como medido localmente na câmara 1, tenha sido emitido desta e recebido na câmara 2, onde localmente a frequência observada é  $\nu_2$ . Então,  $\delta U_1 = -h\nu_1$ , enquanto que  $\delta U_2 = h\nu_2$ , sendo  $h$  a constante de Planck. A condição de equilíbrio então se torna

$$\frac{h\nu_1}{T_1} = \frac{h\nu_2}{T_2}. \quad (3.15)$$

No caso de um espaço-tempo estacionário, a relação entre as frequências emitida e recebida, quando tanto o emissor quanto o receptor estão em repouso, é bem conhecida<sup>1</sup> [72]:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{g_{00}(1)}{g_{00}(2)}}. \quad (3.16)$$

Utilizando esse resultado, obtemos também

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g_{00}(2)}{g_{00}(1)}}, \quad (3.17)$$

ou  $T\sqrt{-g_{00}} = \text{constante}$ . A descrição local na câmara 1 deve ser a mesma que a descrição local em uma região do sistema global da Figura 3.1 onde o potencial gravitacional seja igual ao dela, e analogamente para a câmara 2. Assim, podemos concluir que a relação de Tolman (3.11) deve ser satisfeita em todo o sistema.

<sup>1</sup>Note a diferença com a situação considerada no capítulo anterior. A relação do *redshift* para o Universo em expansão não é dada por (3.16), pois não se trata de uma situação estacionária — ver equação (2.21).

A métrica do espaço-tempo exterior a um buraco negro de Schwarzschild de massa  $M$ , escrita em coordenadas de Schwarzschild  $(t, r, \theta, \varphi)$ , é dada pela equação (A.1),

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{1 - 2M/r} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.18)$$

O espaço-tempo nessa região exterior é, de fato, estacionário, como fica evidente a partir desse sistema de coordenadas, em que  $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$ . O sistema é ainda adaptado a observadores em repouso em relação ao buraco negro, em particular os infinitamente distantes, pois a coordenada  $t$  corresponde ao tempo próprio de um observador em repouso no infinito. Para essa classe de observadores, portanto, a temperatura do banho térmico em equilíbrio varia de acordo com a relação (3.11), ou seja,

$$T = T(r) = \frac{T_0}{\sqrt{1 - 2M/r}}, \quad (3.19)$$

em que a constante  $T_0$  é a temperatura no infinito. Ao identificarmos o banho térmico com a radiação cósmica de fundo, teremos, portanto,  $T_0 = 2,725$  K. Restaurando as unidades,

$$T(r) = \frac{T_0}{\sqrt{1 - 2GM/rc^2}}. \quad (3.20)$$

No entanto, a temperatura de Hawking do buraco negro é dada pela equação (3.9), que pode ser reescrita na forma

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk} \approx 6 \times 10^{-8} \left( \frac{M_\odot}{M} \right) \text{ K}, \quad (3.21)$$

em que  $M_\odot$  é a massa do Sol. Logo, no caso de um buraco negro *astrofísico*, cuja massa é, no mínimo, da ordem da massa solar,  $T_H \ll T_0$ , caracterizando uma situação claramente fora do equilíbrio. Também não é possível pensar em um eventual estado estacionário quando o equilíbrio termodinâmico é atingido. Devido às propriedades termodinâmicas não-convencionais de buracos negros (calor específico *negativo* no caso de Schwarzschild) [58, 59], o equilíbrio só pode ser estabelecido quando a temperatura do banho e a temperatura do buraco negro são iguais. Se forem diferentes, duas situações são possíveis: (1) no caso de a temperatura do buraco negro ser maior que a do banho térmico, será emitida radiação continuamente, e o buraco negro diminuirá até eventualmente desaparecer; (2) no caso de a temperatura do buraco negro ser menor que a do banho, ele absorverá radiação e aumentará de tamanho indefinidamente (a não ser que a quantidade de radiação seja finita, isto é, ocupe inicialmente um volume finito). Contudo, assumiremos aqui a hipótese de *mudanças adiabáticas*: a evolução do sistema deve ser suficientemente lenta, de modo que, durante os tempos de interesse, podemos considerá-la aproximadamente quase estática. Nesse caso, a temperatura da radiação pode ser aproximadamente descrita pela relação de equilíbrio (3.20), mesmo que o sistema em si não esteja rigorosamente em equilíbrio.

### 3.4 Propagação ao redor do buraco negro

Seguindo a hipótese de mudanças adiabáticas, vamos então utilizar a expressão (3.20) para a temperatura da radiação cósmica de fundo ao redor do buraco negro. Nessa situação, a perda de

energia de um próton interagindo com a radiação de fundo é governada novamente pela equação (2.17), com a temperatura dependente da coordenada radial  $T(r)$  de acordo com (3.20):

$$-\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \frac{ckT(r)}{2\pi^2\gamma^2(c\hbar)^3} \int_{\epsilon'_{\min}}^{\infty} d\epsilon' \epsilon' \sigma(\epsilon') f(\epsilon') \left[ -\ln \left( 1 - e^{-\epsilon'/2\gamma kT(r)} \right) \right]. \quad (3.22)$$

Lembrando que a equação (2.17) é resultado da substituição da distribuição de Planck na equação (2.16), a utilização da expressão acima para as perdas de energia envolve um passo intermediário mais sutil. A temperatura (3.20) não é homogênea, de modo que, a rigor, o banho térmico é percebido como um verdadeiro corpo negro apenas por um observador em repouso no infinito, segundo o qual a distribuição de fótons é dada pela equação (2.19). No caso de um observador mais próximo do buraco negro, quando restrito a um volume espacial suficientemente pequeno, de modo que a temperatura (3.20) não apresente variações significativas nessa região, ele ainda deve observar o gás de fótons como um corpo negro correspondendo a essa temperatura média. A distribuição

$$n(\epsilon) = \frac{1}{\pi^2(c\hbar)^3} \frac{\epsilon^2}{e^{\epsilon/kT(r)} - 1}, \quad (3.23)$$

com  $T(r)$  dado por (3.20), resulta então de tomar o limite em que o volume espacial tende a zero. Vale ainda ressaltar que a equação (3.22) é a fração média de energia perdida por unidade de tempo de acordo com o observador infinitamente distante, dado que a coordenada  $t$  é a medida de seu tempo próprio.

De posse da equação (3.22) para as perdas de energia, novamente o caminho a ser seguido é evoluir prótons com determinada energia inicial até o ponto de observação, integrando  $dE/dt$  ao longo de sua trajetória. Novamente, por se tratar de partículas ultrarrelativísticas, podemos aproximar a trajetória de cada próton por uma trajetória nula. Será utilizada, no entanto, uma aproximação adicional, considerando que os prótons se propagam ao longo de *geodésicas* nulas fixas.

A equação radial de uma geodésica nula não limitada no espaço-tempo de Schwarzschild pode ser escrita na forma (A.12),

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^2 \left[ 1 - \frac{D^2}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \right], \quad (3.24)$$

sendo  $D$  o parâmetro de impacto da partícula no infinito. Uma discussão detalhada de tais geodésicas pode ser encontrada no Apêndice, ao qual será feita referência constantemente. Em princípio, essa equação permite escrever  $r$  em função de  $t$ . Quando o resultado é substituído no lado direito da equação (3.22), a equação resultante permite então encontrar  $E(t)$  e, portanto, conhecer a perda total de energia de cada próton propagado. Entretanto, a equação da geodésica acima é bastante complicada e não possui solução escrita em termos de funções elementares. Uma estratégia para eliminar esse problema é aproximar a trajetória na forma

$$\begin{aligned} x &= a \cosh \rho t - c, \\ y &= -b \sinh \rho t. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Trata-se de uma hipérbole com um dos focos na origem do sistema de coordenadas, com a escolha de ser percorrida de  $y > 0$  para  $y < 0$ , supondo  $\rho > 0$ . Os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$

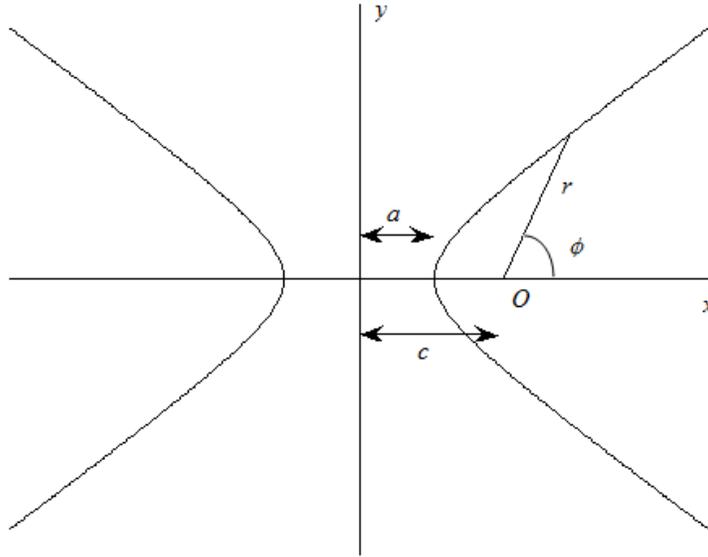
são os parâmetros usuais de uma hipérbole ( $a$  e  $c$  esquematizados na Figura 3.2), que estão relacionados através de [73]

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 \varepsilon^2, \quad (3.26)$$

em que  $\varepsilon > 1$  é a *excentricidade* da hipérbole. Um cálculo simples leva então à expressão

$$r(t) = a(\varepsilon \cosh \rho t - 1) \quad (3.27)$$

a ser utilizada em (3.22).



**Figura 3.2:** Uma hipérbole com um dos focos na origem (ponto  $O$ ). O ramo considerado no texto é o direito, percorrido de  $y > 0$  para  $y < 0$ .

A aproximação hiperbólica deve ser uma boa aproximação se a partícula não passa muito perto do buraco negro. Para verificar essa afirmação, é preciso fixar os parâmetros da hipérbole e compará-la com a trajetória exata. Fica claro pela equação (3.26) que apenas dois dos quatro parâmetros são independentes. Por exemplo, podemos escolher como independentes  $a$  e  $\varepsilon$ , obtendo os outros dois parâmetros através de  $c = a\varepsilon$  e  $b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ . Uma possível estratégia para fixar os parâmetros restantes é a seguinte. Considere as direções assintóticas da hipérbole, que podem ser obtidas tomando o limite  $r \rightarrow \infty$  em

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} = -\frac{b \sinh \rho t}{a \cosh \rho t - c}, \quad (3.28)$$

ou, equivalentemente,  $|t| \rightarrow \infty$ . Dessa forma, obtemos

$$\tan \varphi = \pm \frac{b}{a} = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \quad (r \rightarrow \infty). \quad (3.29)$$

As direções assintóticas correspondentes no caso de uma geodésica nula também são conhecidas exatamente. A direção assintótica no primeiro quadrante é dada pela equação (A.35),

$$\varphi_\infty = \pi - 2\sqrt{\frac{P}{Q}} [K(k) - F(\chi_\infty/2, k)], \quad (3.30)$$

em que  $P$  é a distância de máxima aproximação (“periélio”),  $Q$  é dado pela equação (A.20),  $\chi_\infty$  é dado por (A.28),  $k$  é definido em (A.30),  $F(\psi, k)$  é a integral elíptica do primeiro tipo — equação (A.33), e  $K(k)$  é a integral elíptica completa do primeiro tipo — equação (A.34). A dedução da expressão de  $\varphi_\infty$  e a definição de todos esses parâmetros é mostrada cuidadosamente no Apêndice. Pode-se escolher, portanto, a excentricidade da hipérbole de modo que suas direções assintóticas coincidam com as correspondentes para a trajetória exata. Utilizando o primeiro quadrante (sinal positivo na equação (3.29)), obtemos assim

$$\varepsilon = \sqrt{\tan^2 \varphi_\infty + 1}, \quad (3.31)$$

sendo  $\varphi_\infty$  dado pela equação (3.30). Por outro lado, já foi adiantado que a distância de máxima aproximação  $P$  com relação ao buraco negro é um parâmetro conhecido na trajetória exata. Conforme discutido no Apêndice — vide equação (A.22), escolher  $P$  equivale a escolher o parâmetro de impacto no infinito  $D$ . No caso da hipérbole, a distância de máxima aproximação com relação à origem também é conhecida e vale simplesmente  $r(t = 0) = c - a = a(\varepsilon - 1)$ , como mostra a Figura 3.2. Logo, uma vez que a excentricidade já foi determinada, pode-se fixar o parâmetro  $a$  de modo que essas duas distâncias coincidam:

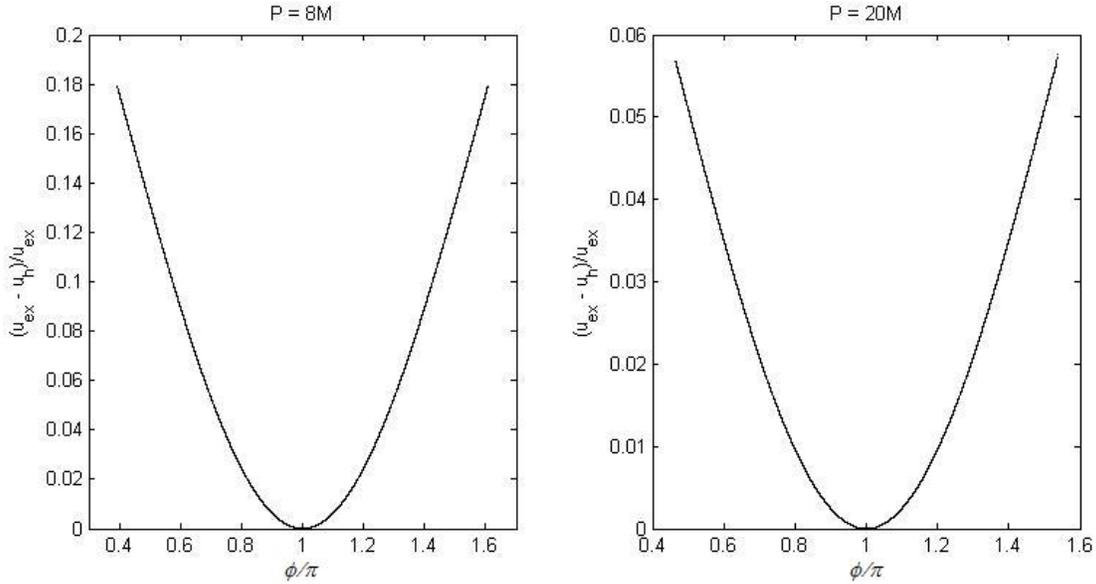
$$a = \frac{P}{\varepsilon - 1}. \quad (3.32)$$

Uma vez determinados os parâmetros da trajetória hiperbólica, podemos compará-la com a trajetória exata e verificar a plausibilidade da aproximação. É conveniente fazer a comparação em termos da variável  $u = 1/r$ , que assume um intervalo finito de valores,  $0 \leq u \leq 1/P$ . A expressão de  $u$  no caso da hipérbole é dada por

$$u(\varphi) = \frac{1 - \varepsilon \cos \varphi}{a(\varepsilon^2 - 1)}. \quad (3.33)$$

No caso da geodésica,  $u(\varphi)$  é dado parametricamente através das expressões (A.26) e (A.32). Os gráficos da Figura 3.3 mostram o comportamento observado. Para  $P > 8M$ , a diferença entre as duas trajetórias é sempre menor que 20%, e foi considerada aceitável. Essa diferença diminui cada vez mais, à medida que  $P$  aumenta, ficando menor que 6% para  $P > 20M$ . Para  $P < 8M$ , a aproximação revelou-se não ser tão confiável devido aos erros cometidos. Além disso, outra característica das geodésicas nulas no espaço-tempo de Schwarzschild impede que uma trajetória hiperbólica possa ser uma boa aproximação na vizinhança imediata de um buraco negro. Abaixo de  $P = 6M$ , e à medida que  $P$  se aproxima do valor crítico  $3M$ , os ângulos de espalhamento crescem rapidamente, inclusive ultrapassando o valor de  $\pi$ . Isto é, a partícula pode dar voltas em torno do buraco negro antes de finalmente escapar para o infinito. Claramente, essa situação não é contemplada com a descrição das trajetórias por hipérbol.

Por fim, lembramos que foi introduzido um parâmetro  $\rho$  nas equações (3.25), que essencialmente controla a taxa de variação temporal. Uma escolha para  $\rho$  pode ser feita se identificarmos



**Figura 3.3:** Comparação entre as trajetórias hiperbólica ( $u_h$ ) e exata ( $u_{ex}$ ) em termos da variável  $u = 1/r$ .

$\rho t$  com o tempo próprio  $\tau$  da partícula no infinito. Mas nessa região valem as relações da relatividade especial e, em particular, a relação entre  $t$  e  $\tau$  dada por  $t = \gamma\tau$ , sendo  $\gamma$  o fator de Lorentz da partícula. Considerando, portanto, o início do movimento, fixa-se  $\rho$  segundo a relação

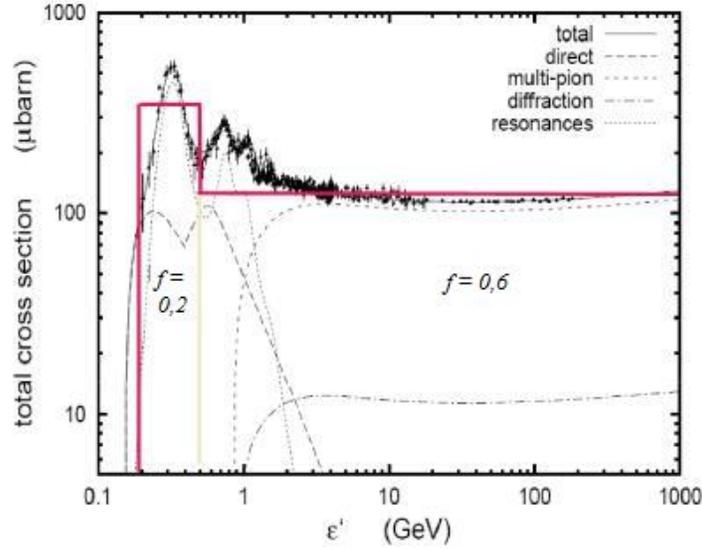
$$\rho = \frac{1}{\gamma_0}, \quad (3.34)$$

sendo  $\gamma_0$  o fator de Lorentz inicial (no infinito) da partícula incidente.

### 3.5 Resultados numéricos

Conhecendo a trajetória  $r(t)$  do próton, podemos agora substituí-la na equação (3.22), que governa as perdas de energia que ocorrem devido a uma determinada interação. A partir de agora, vamos nos restringir à fotoprodução de píons, que é a interação mais relevante para o corte GZK. Apesar da simplificação obtida com a aproximação hiperbólica, a expressão resultante ainda é suficientemente complicada para ser tratada analiticamente, e portanto uma solução numérica será utilizada.

A integral que deve ser resolvida na equação (3.22) envolve ainda a seção de choque  $\sigma(\epsilon')$  e a inelasticidade  $f(\epsilon')$  da interação considerada. No caso da fotoprodução de píons, uma primeira aproximação para  $\sigma$  e  $f$  é a chamada *aproximação de dois degraus* [74]. No limite de altas energias, a seção de choque para esse processo é aproximadamente constante,  $\sigma \approx 120 \mu\text{b}$ . Nesse mesmo limite, devido à produção de diversos píons, a inelasticidade atinge  $f \approx 0,6$ . À medida que a energia se aproxima da situação de limiar, a seção de choque passa por uma



**Figura 3.4:** A figura, retirada de [74], mostra a seção de choque da interação fóton-próton para a produção de píons, bem como a aproximação de dois degraus utilizada.

ressonância, como já comentado no capítulo anterior (Figura 2.1), e como mostra novamente a Figura 3.4. Além disso, nessa situação, só há energia suficiente para produzir um pión, e a inelasticidade fica em torno de 0,2. A proposta da aproximação de dois degraus é introduzir uma descrição média para a região da ressonância em que  $\sigma$  e  $f$  sejam constantes. Ou seja, temos duas seções constantes para a seção de choque e a inelasticidade, dadas por

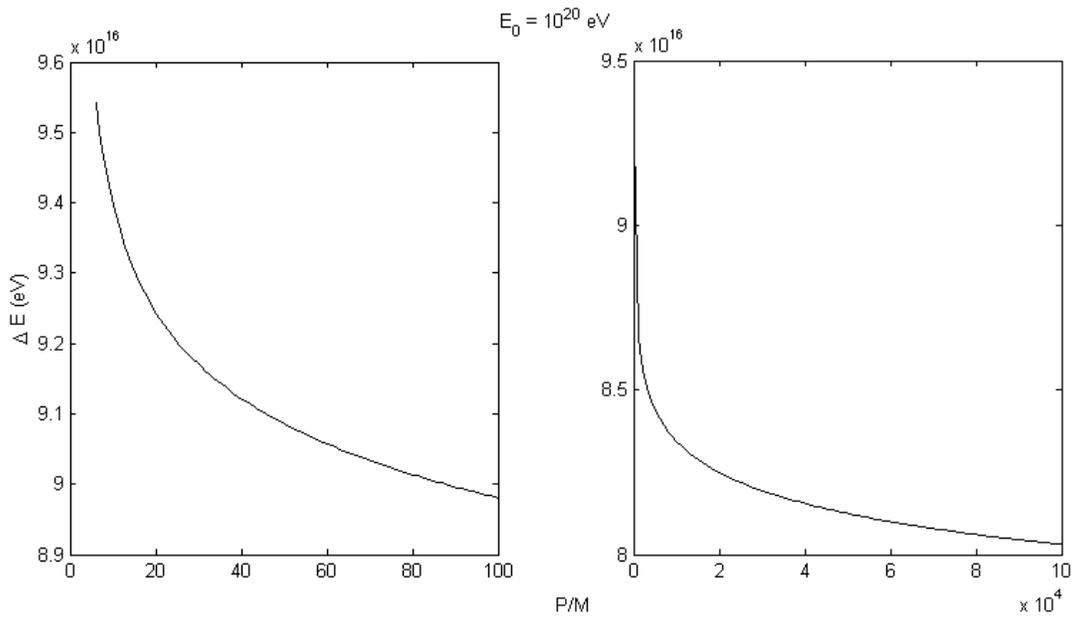
$$\sigma(\epsilon') = \begin{cases} 340\mu\text{b} & \text{para } 200 \text{ MeV} \leq \epsilon' \leq 500 \text{ MeV} \\ 120\mu\text{b} & \text{para } \epsilon' > 500 \text{ MeV} \end{cases} \quad (3.35)$$

e

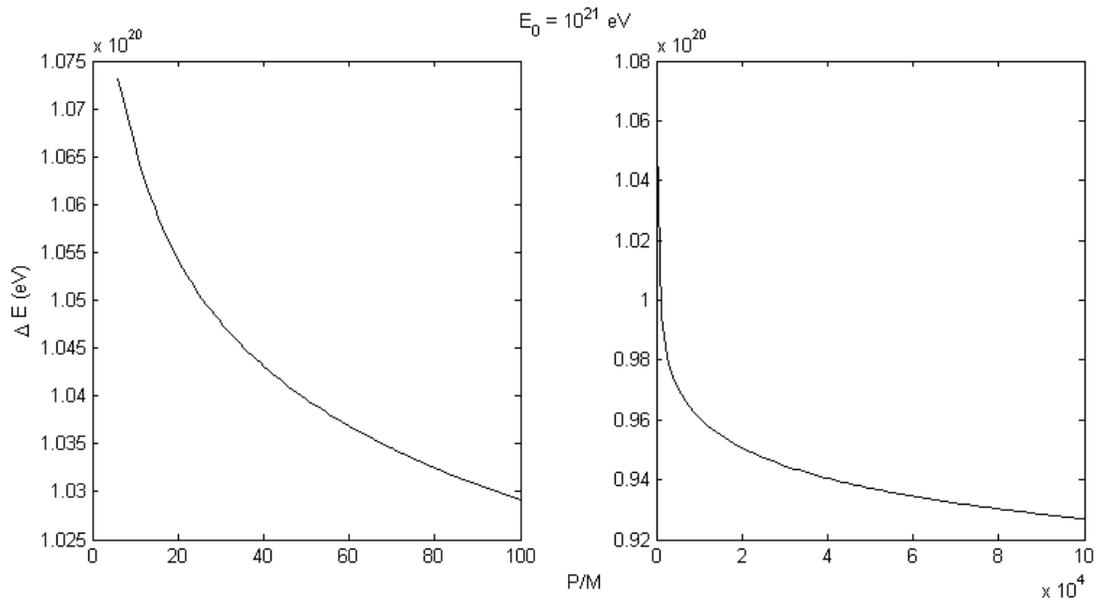
$$f(\epsilon') = \begin{cases} 0,2 & \text{para } 200 \text{ MeV} \leq \epsilon' \leq 500 \text{ MeV} \\ 0,6 & \text{para } \epsilon' > 500 \text{ MeV} \end{cases}, \quad (3.36)$$

como mostrado também na Figura 3.4.

A partir disso, a integral na equação (3.22) pode ser calculada, e então a equação diferencial resultante pode ser resolvida numericamente. Para cada condição inicial definida pela energia inicial  $E_0$  e pelo periélio  $P$ , a equação diferencial foi integrada ao longo de um tempo de propagação  $t \sim 10^{13}$  s. As Figuras 3.5 e 3.6 exemplificam o comportamento característico observado para a perda total de energia  $\Delta E$  em função do periélio, para dois diferentes valores de  $E_0$ . Os diagramas iniciam-se em  $P = 6M$ , pois a aproximação hiperbólica começa a não fazer muito sentido abaixo desse valor, independente do erro cometido, conforme já discutido anteriormente (é claro, os erros cometidos são aceitáveis apenas para  $P \gtrsim 8M$  — ver discussão sobre a Figura 3.3). Como esperado, na região em que a aproximação hiperbólica é confiável, as perdas de energia são maiores quanto mais próximo o próton passa do buraco negro, já que ele experimenta temperaturas maiores nessa região. À medida que o periélio aumenta,  $\Delta E$  continua diminuindo, como mostram os diagramas da direita nas Figuras 3.5 e 3.6 em escalas maiores.



**Figura 3.5:** Perda total de energia  $\Delta E$  em função do periélio  $P$ , para  $E_0 = 10^{20}$  eV. À esquerda, inicia-se em  $P = 6M$ . À direita, mostra-se que, em escalas maiores, a tendência da diminuição de  $\Delta E$  com o aumento do periélio é mantida.



**Figura 3.6:** Perda total de energia  $\Delta E$  em função do periélio  $P$ , para  $E_0 = 10^{21}$  eV. À esquerda, inicia-se em  $P = 6M$ . À direita, mostra-se que, em escalas maiores, a tendência da diminuição de  $\Delta E$  com o aumento do periélio é mantida.

## Capítulo 4

# Considerações finais e investigações futuras

Ao longo deste trabalho, procuramos abordar o problema da propagação de raios cósmicos de ultra-alta energia na vizinhança de um buraco negro da forma mais simples possível. Considerando um buraco negro de Schwarzschild imerso em um banho térmico, constituindo um sistema sujeito a mudanças adiabáticas, a radiação cósmica de fundo pôde ser tratada pontualmente como um corpo negro, de forma que a relação fundamental deduzida no Capítulo 2 — equação (2.17) — pôde então ser utilizada na nova situação com as mudanças convenientes — equação (3.22). Utilizando uma aproximação hiperbólica para as trajetórias das partículas da radiação cósmica na vizinhança do buraco negro, e considerando apenas a fotoprodução de píons na aproximação de dois degraus, a equação diferencial (3.22) pôde finalmente ser resolvida, como explicado no Capítulo 3.

Os gráficos das Figuras 3.5 e 3.6 exemplificam bem o comportamento observado. Como já comentado no Capítulo 3, o comportamento qualitativo é o esperado: como os prótons experimentam temperaturas mais altas na região mais próxima do buraco negro, as perdas de energia ali são mais intensas, de modo que as maiores perdas de energia ocorrem para valores menores do periélio. Embora os resultados obtidos sejam bastante promissores, numericamente as diferenças entre as perdas de energia observadas para diferentes valores do periélio não são muito acentuadas, como mostram as Figuras 3.5 e 3.6. Ao menos com as aproximações utilizadas, portanto, a análise apresentada não permite, neste estágio, uma conclusão definitiva do ponto de vista observacional.

É preciso lembrar que, neste trabalho, a análise foi feita próton a próton. Isto é, dado um único próton com energia inicial conhecida, e fixando seu periélio, a equação diferencial (3.22) foi resolvida para encontrar sua energia final no ponto de observação. Uma extensão imediata a ser feita é considerar o espectro de raios cósmicos produzido na fonte, e então propagar todo o espectro até o ponto de observação, predizendo assim o espectro na chegada. É claro, como comentado no Capítulo 1, a produção de raios cósmicos de ultra-alta energia ainda não é bem entendida, de forma que faz-se necessário utilizar algum modelo para o espectro produzido. Como visto no Capítulo 2, o modelo mais comum é o de uma lei de potência. Ainda assim, apenas essa análise do espectro pode permitir uma conclusão mais definitiva acerca

---

da possibilidade de se observar, na prática, o fenômeno. Como as perdas de energia de cada próton dependem do periélio, pode-se especular que o espectro observado deve apresentar um alargamento do corte GZK em relação ao que é previsto no tratamento padrão (Capítulo 2), se imaginarmos uma fonte emitindo isotropicamente. Outra questão que poderia ser levantada é se, através da observação do espectro de raios cósmicos na região de ultra-altas energias, seria possível acusar a presença de um buraco negro entre uma fonte e a Terra, devido à sua influência na propagação da radiação cósmica. Novamente, no entanto, essas últimas afirmações ainda são bastante especulativas, e somente uma análise mais detalhada que faça a previsão do espectro observado permitirá uma conclusão definitiva.

Outras extensões deste trabalho em direção a uma análise mais detalhada podem envolver uma descrição mais precisa que a aproximação de dois degraus para a seção de choque e a inelasticidade no caso da fotoprodução de píons, bem como incorporar a produção de pares. Esta se torna importante quando se consideram tempos longos de propagação ou energias baixas (abaixo de  $10^{19}$  eV), conforme visto no Capítulo 2. Também seria interessante fazer uma descrição mais precisa das trajetórias, o que parece ser possível apenas numericamente. Embora as trajetórias hiperbólicas representem uma boa descrição longe do buraco negro, isso deixa de ser verdade na região mais próxima do mesmo, como comentado no Capítulo 3. Uma descrição mais realista talvez introduza então diferenças significativas nos cálculos. Finalmente, a análise poderia ser estendida ainda ao espaço-tempo de Kerr, que representa um buraco negro com momento angular. Esse caso teria interesse astrofísico, visto que se considera muito mais provável que o colapso gravitacional origine um buraco negro em rotação, pois o objeto inicial também deve estar em rotação. A análise nesse caso, porém, certamente seria muito mais complicada, pois a estrutura do espaço de Kerr é conhecidamente mais complexa que a do espaço de Schwarzschild.

# Apêndice A

## Geodésicas nulas no espaço-tempo de Schwarzschild

Este apêndice trata das geodésicas nulas no espaço-tempo de Schwarzschild, dando especial ênfase para a obtenção de resultados fundamentais utilizados neste trabalho no caso de geodésicas *não limitadas*. Todo o tratamento está basicamente contido em [75], com pequenas diferenças em algumas convenções adotadas. Assim como no texto principal, será utilizado o sistema de unidades em que  $G = c = 1$ .

A métrica do espaço-tempo de Schwarzschild com parâmetro de massa  $M$  pode ser escrita na forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - 2M/r} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (\text{A.1})$$

As equações da geodésica, parametrizada em termos de um parâmetro afim  $\lambda$ , são dadas por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0, \quad (\text{A.2})$$

em que

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}) \quad (\text{A.3})$$

são os coeficientes da conexão de Levi-Civita (símbolos de Christoffel) [52]. No caso de geodésicas do tipo tempo, escolhe-se  $\lambda$  como sendo o tempo próprio  $\tau$ . Quando aplicadas à métrica

(A.1), essas equações resultam em

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{2M}{r(r-2M)} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} &= 0, \\
\frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{M}{r^3} (r-2M) \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \frac{M}{r(r-2M)} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 \\
-(r-2M) \left[ \left( \frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 \right] &= 0, \\
\frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 &= 0, \\
\frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} &= 0.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Sendo estático e esfericamente simétrico, o espaço-tempo de Schwarzschild possui diversas simetrias que permitem simplificar drasticamente as equações acima. Essas simetrias são descritas por *vetores de Killing* [52], que satisfazem uma propriedade importante. Se  $K^\mu$  é um vetor de Killing, a quantidade

$$K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = g_{\mu\nu} K^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

é conservada ao longo da geodésica [76]. Além disso, existe outra quantidade conservada:

$$\alpha = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}. \tag{A.5}$$

No caso de geodésicas do tipo tempo, escolhendo  $\lambda = \tau$ , temos simplesmente  $\alpha = 1$ , correspondendo à normalização usual da quadrivelocidade, enquanto que, para geodésicas nulas, temos sempre  $\alpha = 0$ .

Duas simetrias do espaço-tempo de Schwarzschild são imediatamente visíveis a partir da métrica (A.1), que não depende de  $t$  nem de  $\varphi$ . A primeira simetria está relacionada com o fato de o espaço-tempo ser, em particular, invariante sob translação temporal, e o vetor de Killing correspondente é  $\partial_t$ . A segunda está relacionada com a simetria esférica, em particular com a invariância sob rotação na direção  $\varphi$ , e o vetor de Killing associado é  $\partial_\varphi$ . Entretanto, a simetria esférica envolve ainda mais dois vetores de Killing, que estabelecem que o movimento está restrito a um plano. É sempre possível, através de uma mudança de coordenadas conveniente, escolher esse plano como sendo o plano equatorial definido por

$$\theta = \frac{\pi}{2}. \tag{A.6}$$

As grandezas conservadas associadas aos outros dois vetores de Killing são, portanto,

$$g_{\mu\nu} (\partial_t)^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \equiv -E \tag{A.7}$$

e

$$g_{\mu\nu} (\partial_\varphi)^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} = r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} \equiv L. \tag{A.8}$$

As constantes foram convenientemente denominadas  $E$  e  $L$  por razões claras. A grandeza conservada associada à invariância sob translação temporal é a energia, enquanto que a grandeza associada à invariância sob rotação é o momento angular.

A equação (A.5) escrita explicitamente para  $\theta = \pi/2$  é

$$\alpha = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{1}{1 - 2M/r} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2. \quad (\text{A.9})$$

Utilizando as definições de  $E$  e  $L$ , ela se reduz a

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{L^2}{r^2} + \alpha\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = E^2. \quad (\text{A.10})$$

A equação (A.10), juntamente com as relações que definem as constantes  $E$  e  $L$ ,

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} = E \quad \text{e} \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2}, \quad (\text{A.11})$$

é completamente equivalente ao conjunto de equações (A.4) no plano  $\theta = \pi/2$ .

Vamos agora restringir a discussão às geodésicas nulas, fazendo  $\alpha = 0$ . Essas equações permitem obter diversas representações equivalentes. Por exemplo, se considerarmos  $r$  e  $\varphi$  como funções de  $t$ , obtemos

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \left[1 - \frac{D^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right] \quad (\text{A.12})$$

e

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{D}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad (\text{A.13})$$

em que  $D = L/E$  é o parâmetro de impacto da partícula no infinito. No entanto, a forma que se mostra ser mais conveniente é a chamada *equação da órbita*, escrevendo  $r$  em função de  $\varphi$ . Mais ainda, fazemos a mudança para a variável  $u = 1/r$ , e obtemos a equação

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 2Mu^3 - u^2 + \frac{1}{D^2} = f(u). \quad (\text{A.14})$$

A partir dessa equação, podemos obter (formalmente)  $\varphi(u)$ :

$$\varphi = \pm \int \frac{1}{\sqrt{2Mu^3 - u^2 + 1/D^2}} du. \quad (\text{A.15})$$

Antes de resolver a equação diferencial (A.14), no entanto, é possível extrair dela algumas informações relevantes. A primeira análise envolve o estudo das raízes do polinômio de terceiro grau

$$f(u) = 2Mu^3 - u^2 + \frac{1}{D^2}. \quad (\text{A.16})$$

Afinal, quando  $f(u) = 0$ , obtemos um ponto de retorno da trajetória, onde  $du/d\varphi = dr/d\varphi = 0$ . Um estudo cuidadoso [75] revela que esse polinômio admite sempre uma raiz real negativa. As

outras duas raízes podem ser reais positivas, idênticas ou distintas, ou um par de números complexos conjugados. A situação que corresponde a órbitas não limitadas é aquela em que as duas outras raízes de  $f(u)$  são reais, positivas e distintas, e portanto vamos nos restringir a esse caso de agora em diante.

Para o caso considerado, as três raízes de  $f(u)$ ,  $u_1 < u_2 < u_3$ , podem ser escritas na forma [75]

$$u_1 = \frac{P - 2M - Q}{4MP} (< 0), \quad u_2 = \frac{1}{P} \quad \text{e} \quad u_3 = \frac{P - 2M + Q}{4MP}, \quad (\text{A.17})$$

em que  $Q$  é uma constante a ser determinada a seguir. A constante  $P$  é a *distância de máxima aproximação*, que será chamada de *periélio*<sup>1</sup>. De fato,  $u_1 < 0$  não é um ponto de retorno físico, e  $u_3 > u_2$  está associado a um ponto de retorno  $r_3 < r_2 = P$ , que não é atingido se a partícula retorna para o infinito. O ordenamento  $u_1 < u_2 < u_3$  implica que

$$Q + P - 6M > 0. \quad (\text{A.18})$$

Calculando agora

$$f(u) = 2M(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \quad (\text{A.19})$$

e comparando com (A.16), obtemos

$$Q^2 = (P - 2M)(P + 6M) \quad (\text{A.20})$$

e

$$\frac{1}{D^2} = \frac{1}{8MP^3} [Q^2 - (P - 2M)^2]. \quad (\text{A.21})$$

A segunda pode ser simplificada utilizando a primeira:

$$D^2 = \frac{P^3}{P - 2M}. \quad (\text{A.22})$$

Essa equação mostra que, ao invés de escolher inicialmente o parâmetro de impacto  $D$  da órbita, podemos escolher equivalentemente o periélio  $P$  para parametrizá-la. Utilizando a expressão de  $Q$  na desigualdade (A.18),

$$(P - 2M)(P + 6M) > (P - 6M)^2, \quad (\text{A.23})$$

obtemos ainda a condição fundamental

$$P > 3M. \quad (\text{A.24})$$

Ou seja, mesmo que o horizonte de eventos esteja em  $r = 2M$ , a partícula não escapa para o infinito se passar mais próxima ao buraco negro do que  $3M$ . Essa condição, juntamente com a expressão (A.22) para o parâmetro de impacto, leva à condição

$$D > 3\sqrt{3}M = D_c. \quad (\text{A.25})$$

A órbita com parâmetro de impacto crítico  $D_c$  é um caso especial bastante conhecido. A partícula não escapa para o infinito nesse caso, mas espirala ao redor do buraco negro, aproximando-se assintoticamente da superfície  $r = 3M$  [75]. Ela corresponde ao caso em que as raízes positivas  $u_1$  e  $u_2$  são idênticas e iguais a  $1/P = 1/3M$ .

<sup>1</sup>Muito embora, a rigor, o nome *periélio* se refira à distância de máxima aproximação em relação ao *Sol*.

Agora fazemos a seguinte mudança de variáveis  $u \rightarrow \chi$ :

$$u = \frac{1}{P} - \frac{(Q - P + 6M)}{8MP} (1 + \cos \chi). \quad (\text{A.26})$$

Dessa forma,

$$u = \frac{1}{P} \quad \text{quando} \quad \chi = \pi. \quad (\text{A.27})$$

Além disso, é preciso encontrar o valor  $\chi_\infty$  de  $\chi$  para o qual  $u = 0$  (ou seja,  $r \rightarrow \infty$ ). Fazendo  $u = 0$  em (A.26), obtemos a relação

$$\sin^2 \frac{\chi_\infty}{2} = \frac{Q - P + 2M}{Q - P + 6M}. \quad (\text{A.28})$$

A partir da mudança de variáveis (A.26), a integral na equação (A.15) pode ser reescrita na forma

$$\varphi = \sqrt{\frac{P}{Q}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\chi/2)}} d\chi, \quad (\text{A.29})$$

em que

$$k^2 = \frac{Q - P + 6M}{2Q}. \quad (\text{A.30})$$

Agora, impomos a seguinte condição inicial. Escolhemos que a trajetória seja percorrida de  $y$  positivo para  $y$  negativo com  $\varphi$  sempre aumentando, e que seja simétrica em relação ao eixo  $x$ , de forma que, para  $\varphi = \pi$ , tenhamos  $u = 1/P$  (isto é,  $\chi = \pi$ ). Portanto,

$$\varphi - \pi = 2\sqrt{\frac{P}{Q}} \int_{\pi/2}^{\chi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} d\gamma, \quad (\text{A.31})$$

em que uma última mudança de variáveis  $\gamma = \chi/2$  foi feita na integral. Essa expressão pode ser reescrita em termos das integrais elípticas do primeiro tipo [77]:

$$\varphi = \pi - 2\sqrt{\frac{P}{Q}} [K(k) - F(\chi/2, k)], \quad (\text{A.32})$$

em que  $F(\psi, k)$  é a integral elíptica do primeiro tipo,

$$F(\psi, k) = \int_0^\psi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} d\gamma, \quad (\text{A.33})$$

e  $K(k)$  é a integral elíptica *completa* do primeiro tipo:

$$K(k) = F(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} d\gamma. \quad (\text{A.34})$$

A partir da expressão (A.32), podemos obter então o valor de  $\varphi$  para o qual  $u = 0$  ( $r \rightarrow \infty$ ):

$$\varphi_\infty = \varphi(\chi_\infty) = \pi - 2\sqrt{\frac{P}{Q}} [K(k) - F(\chi_\infty/2, k)]. \quad (\text{A.35})$$

Juntas, as equações (A.26) e (A.32) constituem a solução da equação da órbita de forma paramétrica.

# Referências Bibliográficas

- [1] V. F. Hess, *Über Beobachtungen der durchdringenden Strahlung bei sieben Freiballonfahrten*, Phys. Zeitschr. **13**, 1084 (1912).
- [2] [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1936/](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1936/)
- [3] C. D. Anderson, *The Apparent Existence of Easily Deflectable Positives*, Science **76**, 238 (1932); *The Positive Electron*, Phys. Rev. **43**, 491 (1933).
- [4] S. H. Neddermeyer and C. D. Anderson, *Note on the Nature of Cosmic-Ray Particles*, Phys. Rev. **51**, 884 (1937).
- [5] J. C. Street and E. C. Stevenson, *New Evidence for the Existence of a Particle of Mass Intermediate Between the Proton and Electron*, Phys. Rev. **52**, 1003 (1937).
- [6] C. M. G. Lattes *et al.*, *Processes involving charged mesons*, Nature **159**, 694 (1947); *Observations on the Tracks of Slow Mesons in Photographic Emulsions*, Nature **160**, 453, 486 (1947).
- [7] P. Auger, P. Ehrenfest, R. Maze, J. Daudin and R. A. Fréon, *Extensive Cosmic-Ray Showers*, Rev. Mod. Phys. **11**, 288 (1939).
- [8] J. Linsley, L. Scarsi and B. Rossi, *Extremely Energetic Cosmic-Ray Event*, Phys. Rev. Lett. **6**, 485 (1961).
- [9] J. Linsley, *Evidence for a Primary Cosmic-Ray Particle with energy  $10^{20}$  eV*, Phys. Rev. Lett **10**, 146 (1963).
- [10] M. Ave *et al.* (The Haverah Park Collaboration), *The energy spectrum of cosmic rays in the range  $3 \times 10^{17}$ - $4 \times 10^{18}$  eV as measured with the Haverah Park array*, Astropart. Phys. **19**, 47 (2003).
- [11] V. P. Egorova *et al.*, *The spectrum features of UHECRs below and surrounding GZK*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **136**, 3 (2004).
- [12] K. Shinozaki *et al.* (The AGASA Collaboration), *AGASA results*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **136**, 18 (2004).  
<http://www-akeno.icrr.u-tokyo.ac.jp/AGASA/papers.html>
- [13] D. J. Bird *et al.* (The Fly's Eye Collaboration), *The Cosmic-Ray Energy Spectrum Observed by the Fly's Eye*, Atrophys. J. **424**, 491 (1994).

- [14] <http://www.cosmic-ray.org/>  
<http://www.cosmic-ray.org/resall.html>
- [15] <http://www.auger.org/>  
[http://www.auger.org/technical\\_info/](http://www.auger.org/technical_info/)
- [16] V. L. Ginzburg and S. I. Syrovatskii, *The Origin of Cosmic Rays*. Pergamon Press (1964).
- [17] T. Stanev, *Ultra High Energy Cosmic Rays*, SLAC Summer Institute on Particle Physics (SSI04), Aug. 2-13 (2004).
- [18] G. Cocconi, *Nuovo Cimento* **3**, 1422 (1956).
- [19] P. Bhattacharjee and G. Sigl, *Origin and propagation of extremely high-energy cosmic rays*, *Phys. Reports* **327**, 109 (2000).
- [20] D. F. Torres and L. A. Anchodorqui, *Astrophysical origins of ultrahigh energy cosmic rays*, *Rep. Prog. Phys.* **67**, 1663 (2004).
- [21] A. A. Watson, *The mass composition of cosmic rays above  $10^{17}$  eV*, *Nucl. Physics B (Proc. Suppl.)* **136**, 290 (2004).
- [22] T. Stanev, *Ultra high energy cosmic rays: A review*, arXiv:1011.1872 (2010).
- [23] D. J. Bird *et al.* (The Fly's Eye Collaboration), *Detection of a Cosmic Ray with Measured Energy Well Beyond the Expected Spectral Cutoff due to Cosmic Microwave Radiation*, *Astrophys. J.* **441**, 144 (1995).
- [24] R. U. Abbasi *et al.* (The HiRes Collaboration), *A Study of the Composition of Ultra-High-Energy Cosmic Rays Using the High-Resolution Fly's Eye*, *Astrophys. J.* **622**, 910 (2005).
- [25] R. U. Abbasi *et al.* (The HiRes Collaboration), *Indications of Proton-Dominated Cosmic-Ray Composition above 1.6 EeV*, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 161101 (2010).
- [26] J. Abraham *et al.* (The Pierre Auger Collaboration), *Measurement of the Depth of Maximum of Extensive Air Showers Above  $10^{18}$  eV*, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 091101 (2010).
- [27] A. A. Penzias and R. W. Wilson, *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s*, *Astrophys. J.* **142**, 419 (1965).
- [28] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons (1972).
- [29] [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1978/](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1978/)
- [30] P. G. Roll and D. T. Wilkinson, *Cosmic Background Radiation at 3.2 cm – Support for Cosmic Black-Body Radiation*, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 405 (1966).
- [31] <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/>
- [32] <http://map.gsfc.nasa.gov/>

- [33] [http://map.gsfc.nasa.gov/news/5yr\\_release.html](http://map.gsfc.nasa.gov/news/5yr_release.html)
- [34] S. Dodelson, *Modern Cosmology*. Academic Press (2003).
- [35] E. V. Haynsworth and K. Goldberg, “Bernoulli and Euler Polynomials”; in Milton Abramowitz and Irene A. Stegun (eds.), *Handbook of Mathematical Functions* 10th edition. National Bureau of Standards (1972).
- [36] R. J. Gould and G. Schröder, *Opacity of the Universe to High-Energy Photons*, Phys. Rev. Lett. **16**, 252 (1966).
- [37] J. V. Jelley, *High-Energy  $\gamma$ -ray Absorption in Space by a 3.5°K Microwave Field*, Phys. Rev. Lett. **16**, 479 (1966).
- [38] J. E. Felten, *Inverse Compton Radiation From Intergalactic Electrons and Cosmic Blackbody Photons*, Phys. Rev. Lett. **15**, 1003 (1965).
- [39] F. Hoyle, *Origin of Cosmic X Rays*, Phys. Rev. Lett. **15**, 131 (1965).
- [40] K. Greisen, *End to the Cosmic-Ray Spectrum?*, Phys. Rev. Lett. **16**, 748 (1966).
- [41] G. T. Zatsepin and V. A. Kuzmin, *Upper Limit of the Spectrum of Cosmic Rays*, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **4**, 114 (1966) [JETP Lett. **4**, 78 (1966)].
- [42] K. Nakamura *et al* (Particle Data Group), *Review of Particle Physics*, J. of Phys. G **37**, 075021 (2010) [Disponível online no endereço [http://pdg.lbl.gov/2010/html/computer\\_read.html](http://pdg.lbl.gov/2010/html/computer_read.html)]
- [43] C. T. Hill and D. N. Schramm, *Ultra-high-Energy Cosmic-Ray Spectrum*, Phys. Rev. D **31**, 564 (1985).
- [44] V.S. Berezhinsky and S.I. Grigor'eva, *A Bump in the Ultra-High Energy Cosmic Ray Spectrum*, Astron. Astrophys. **199**, 1 (1988).
- [45] J. P. Rachen and P. L. Biermann, *Extragalactic Ultra-High Energy Cosmic Rays I. Contribution from hot spots in FR-II radio galaxies*, Astron. Astrophys. **272**, 161 (1993).
- [46] F. A. Aharonian and J. W. Cronin, *Influence of the Universal Microwave Background Radiation on the Extragalactic Cosmic-Ray Spectrum*, Phys. Rev. D **50**, 1892 (1994).
- [47] R. J. Protheroe and P. A. Johnson, *Propagation of ultra high energy protons and gamma rays over cosmological distances and implications for topological defect models*, Astropart. Phys. **4**, 253 (1996); Errata: **5**, 215 (1996).
- [48] T. Stanev, R. Engel, A. Mücke, R. J. Protheroe and J. P. Rachen, *Propagation of Ultra-high Energy Protons in the Nearby Universe*, Phys. Rev. D **62**, 093005 (2000).
- [49] V. Berezhinsky, A. Gazizov and S. Grigorieva, *On Astrophysical Solution to Ultra-high Energy Cosmic Rays*, Phys. Rev. D **74**, 043005 (2006).
- [50] F.W. Stecker, *Effect of Photomeson Production by the Universal Radiation Field on High-Energy Cosmic Rays*, Phys. Rev. Lett. **21**, 1016 (1968).

- [51] G.R. Blumenthal, *Energy Loss of High-Energy Cosmic Rays in Pair Producing Collisions with Ambient Photons*, Phys. Rev. D **1**, 1596 (1970).
- [52] R.M. Wald, *General Relativity*. Chicago University Press (1984).
- [53] E. Fermi, *On the Origin of the Cosmic Radiation*, Phys. Rev. **75**, 1169 (1949).
- [54] M.S. Longair, *High Energy Astrophysics*, 3rd edition. Cambridge University Press (2011).
- [55] P. Sokolsky, *Observation of the GZK cutoff by the HiRes Experiment*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **196**, 67 (2009).
- [56] M. Takeda *et al.* (The AGASA Collaboration), *Extension of the Cosmic-Ray Energy Spectrum beyond the Predicted Greisen-Zatsepin-Kuz'min Cutoff*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1163 (1998).
- [57] D. De Marco, P. Blasi and A. V. Olinto, *On the statistical significance of the GZK feature in the spectrum of ultra-high energy cosmic rays*, Astropart. Phys. **20**, 53 (2003).
- [58] P. C. W. Davies, *The Thermodynamic Theory of Black Holes*, Proc. R. Soc. Lond. A **353**, 499 (1977).
- [59] P. C. W. Davies, *Thermodynamics of Black Holes*, Rep. Prog. Phys. **41**, 1313 (1978).
- [60] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, *The Four Laws of Black Hole Mechanics*, Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973).
- [61] S. W. Hawking, *Black Holes in General Relativity*, Comm. Math. Phys. **25**, 152 (1972).
- [62] V. P. Frolov and I. D. Novikov, *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*. Kluwer Academic Press (1998).
- [63] M. Heusler, *Black Hole Uniqueness Theorems*. Cambridge University Press (1996).
- [64] R. Penrose, Rev. Nuovo Cim. **1**, 252 (1969).
- [65] S. W. Hawking, *Black Hole Explosions?*, Nature **248**, 30 (1974).
- [66] S. W. Hawking, *Particle Creation by Black Holes*, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [67] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press (1982).
- [68] S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*. Cambridge University Press (1987).
- [69] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. University of Chicago Press (1994).
- [70] R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. Oxford University Press (1934).

- 
- [71] N. L. Balazs, *On relativistic thermodynamics*, *Astrophys. J.* **128**, 398 (1958).
- [72] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby, *General Relativity: An Introduction to Physicists*. Cambridge University Press (2005).
- [73] C. Wexler, *Analytic Geometry: A Vector Approach*. Addison-Wesley (1961).
- [74] C. D. Dermer and A. Atoyan, *Ultra-High Energy Cosmic Rays, Cascade Gamma Rays, and High-Energy Neutrinos from Gamma Ray Bursts*, *New Journal of Physics* **8**, 122 (2006).
- [75] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press (1983).
- [76] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison-Wesley (2005).
- [77] L. M. Mile-Thomson, “Elliptic Integrals”; in Milton Abramowitz and Irene A. Stegun (eds.), *Handbook of Mathematical Functions* 10th edition. National Bureau of Standards (1972).