

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Física “Gleb Wataghin”

Dissertação de Mestrado

Caos Quântico Relativístico

Rafael Soares Pinto

Comissão julgadora:

Prof. Dr. Patrício Anibal Letelier Sotomayor (Orientador) - IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. Alberto Saa - IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. Marcio José Menon – IFGW/UNICAMP

Coorientador: Prof. Dr. Marcus A. M. de Aguiar — IFGW/UNICAMP

Dissertação apresentada ao Instituto de Física
“Gleb Wataghin” para a obtenção do título de
Mestre em Ciências.

5 de maio de 2011

Este exemplar corresponde à redação da versão final da Dissertação de Mestrado defendida
pelo aluno Rafael Soares Pinto e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 13 de maio de 2011



Prof. Dr. Patrício Anibal Letelier Sotomayor

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW – UNICAMP**

P658c Pinto, Rafael Soares
Caos quântico relativístico / Rafael Soares Pinto. –
Campinas, SP : [s.n.], 2011.

Orientadores: Patrício Aníbal Letelier Sotomayor e Marcus
Aloízio Martinez de Aguiar.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Caos quântico. 2. Relatividade especial (Física).
3. Sistemas dinâmicos. I. Sotomayor, Patricio Aníbal Letelier.
II. Aguiar, Marcus Aloizio Martinez de. III. Universidade Estadual
de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". IV. Título.

(vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Relativistic quantum chaos
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 1. Quantum chaos
 2. Special relativity (Physics)
 3. Dynamic systems
- **Área de Concentração:** Física Geral
- **Titulação:** Mestre em Física
- **Banca Examinadora:**
Prof. Patricio Aníbal Letelier Sotomayor
Prof. Alberto Vazquez Saa
Prof. Marcos José Menon
- **Data da Defesa:** 05-05-2011
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE Mestrado DE **RAFAEL SOARES PINTO - RA 035461** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 05 / 05 / 2011.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Patrício Anibal Letelier Sotomayor - Orientador do Candidato
IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa – IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. Marcio José Menon – DRCC/IFGW/UNICAMP

Agradecimentos

Agradeço a todos os envolvidos, direta ou indiretamente, com esse trabalho. Agradeço especialmente ao Patricio Letelier por ter sido meu orientador nesses dois anos.

Agradeço também ao apoio financeiro recebido pelo CNPq e pela FAPESP.

Resumo

Nesta dissertação analisamos bilhares usando a teoria da relatividade especial, tanto classicamente quanto quanticamente. Inicialmente revisamos a teoria de bilhares clássicos, com ênfase em como se dá sua evolução no tempo. Então estudamos a existência (ou não) de aceleração de Fermi em bilhares forçados: bilhares onde a parede se move e, quando a partícula colide, ela pode ganhar ou perder energia. Estudamos alguns exemplos de bilhares, regulares e caóticos, na dinâmica relativística procurando quais condições são necessárias para que exista *aceleração de Fermi relativística*

Concentramos-nos então no estudo de bilhares quânticos. Após uma revisão dos conceitos básicos, estudamos o método da integral de contorno para o cálculo do espectro do bilhar e analisamos suas propriedades estatísticas, tanto para o caso não relativístico (a equação de Schroedinger) quanto para o caso relativístico, o bilhar de Dirac, introduzido por Berry e Mondragon.

Abstract

In this dissertation we analyze billiards using the theory of special relativity, both in the classical and quantum versions. First we review classical billiards, with emphasis in its time evolution. Then we study the existence (or lack of) Fermi acceleration in driven billiards, billiards where the walls are moving and, when the particle collides, it can gain or lose energy. We studied some examples, regular and chaotic ones, in the relativistic dynamics, and analyzed the necessary conditions for the existence of *relativistic Fermi acceleration*.

We focus then on quantum billiards. After a brief review of basic concepts, we study the boundary integral method for numerical evaluation of the billiard spectra and analyze its statistical properties, for the non-relativistic case (the Schroedinger equation) and the relativistic, the Dirac billiards introduced by Berry and Mondragon.

Sumário

1	Introdução	1
2	Bilhares clássicos	5
3	Aceleração de Fermi	9
3.1	Introdução	9
3.2	Dinâmica num bilhar forçado	11
3.3	Transformação de velocidade relativística	11
3.4	Exemplos numéricos	14
4	Caos quântico	20
4.1	Introdução	20
4.2	Simetrias	21
4.3	Propriedades estatísticas dos níveis de energia	22
5	Bilhares quânticos	25
5.1	Introdução	25
5.2	Método da integral de contorno	25
5.3	Resultados numéricos	29
6	Bilhares de neutrinos	35
6.1	Introdução	35
6.2	Equações de onda relativísticas	35
6.3	A equação de Dirac num bilhar 2D	38
6.4	Método da integral de contorno para bilhares de Neutrinos	39
6.5	Sistemas com espaço de fase misturados	40
6.6	Resultados Numéricos	41
7	Considerações Finais	45
A	<i>Script</i> para análise de espectros	46

Capítulo 1

Introdução

Talvez uma das teorias que mais chamaram a atenção do público leigo desde a década de 1970 foi a teoria do caos [2]. Que sistemas tão simples como o mapa logístico gerem comportamento tão complexo e imprevisível é algo que fascina à qualquer um. A impossibilidade de prever o futuro em longo prazo em sistemas caóticos devido a extrema sensibilidade as condições iniciais entrou no imaginário popular através de expressões como *efeito borboleta* [1].

Relativamente não tão conhecida, a teoria do caos quântico (ou, como prefere Berry [3], caologia quântica) estuda que tipo de fenômenos existem em sistemas quânticos cuja contrapartida clássica seja regular ou caótica. Como o princípio da correspondência de Bohr diz que para números quânticos grandes o sistema quântico tende aos resultados clássicos, é de se esperar que caos também apareça *de alguma forma* após a quantização.

O princípio da correspondência pode ser observado de maneira bem simples em sistemas clássicos regulares. Como exemplo usado em quase todo livro de mecânica quântica [4], podemos mostrar que quando o número quântico principal do oscilador harmônico é grande, a distribuição de probabilidade $|\psi|^2$ tende a distribuição esperada clássica.

No entanto, para casos caóticos, temos alguns problemas. A definição de sistema caótico, entre outras coisas, é que dois sistemas idênticos com condições iniciais ligeiramente diferentes acabam tendo órbitas que se distanciam uma da outra exponencialmente no tempo, impedindo a previsão do futuro (visto que sempre sabemos as condições iniciais com uma precisão finita). Mas a relação de incerteza $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ impede a especificação de uma *posição* para a partícula, tornando, no mínimo, imprecisa essa definição. Além do mais, uma das condições para o surgimento de caos é a não linearidade das equações de movimento (a equação de Schroedinger é linear).

Inexistiria uma correspondência entre as propriedades de sistemas classicamente caóticos e sua versão quantizada? Essa pergunta começou a ser respondida a partir da década de 1970, principalmente com o surgimento de computadores mais potentes, permitindo o estudo de sistemas quânticos mais complexos (ou indo além da teoria de perturbação). Embora não vamos discutir tais temas aqui, tivemos também avanços teóricos importantes como a formula do traço de Gutzwiller [3], que relaciona a den-

sidade de níveis de energia do sistema quântico com as órbitas periódicas do sistema clássico.

Percebeu-se que o espectro de energia para sistemas cuja contrapartida clássica é regular ou caótica tinha propriedades estatísticas diferentes. Na verdade, o espectro de sistemas caóticos comporta-se (estatisticamente) do mesmo modo que o de ensembles de matrizes aleatórias. A teoria de matrizes aleatórias foi introduzida nas décadas de 1950 e 1960 por Wigner, Dyson e outros [3] para auxiliar no estudo de núcleos atômicos com muitos constituintes. Esta constatação lembra a relação entre mecânica estatística, que lida com sistemas com inúmeros graus de liberdade e caos clássico, onde existem alguns poucos. Por exemplo, estudando-se uma estatística extremamente popular, a distribuição do espaçamento s de primeiros vizinhos da energia ($s = E_{n+1} - E_n$), temos o resultado de que se o sistema clássico for regular, a distribuição será poissoniana, $p(s) = e^{-s}$. Se o sistema clássico for caótico, ela segue a mesma distribuição de matrizes aleatórias ortogonais gaussianas, a saber, a distribuição de Wigner: $p(s) = \frac{\pi s}{2} e^{-\frac{\pi}{4}s^2}$. Na verdade, como será mostrado no capítulo sobre caos quântico, essa distribuição só ocorre quando há simetria por reversão temporal, caso contrário teremos outro tipo de ensemble (dependente das simetrias do problema).

Podemos citar ainda vários outros resultados interessantes. O mapa padrão [2], exemplo canônico de sistema caótico clássico, é uma mapa 2D com sua dinâmica controlada pelo parâmetro k . Variando k vamos de um sistema regular, $k = 0$, até totalmente caótico, $k \geq 5$. Conforme aumentamos esse parâmetro, rompemos as curvas invariantes que existem para o caso integrável. A partir de certo valor ($k \approx 0.97$), a última curva invariante se rompe e o sistema passa a apresentar difusão no espaço de momento. Foi mostrado, no entanto, que após a quantização desse sistema [5] o momento passa a saturar, não havendo mais difusão. Este fenômeno está intimamente ligado com a localização de Anderson em matéria condensada [3]

O paradigma para o estudo de caos, clássico e quântico, é o bilhar [6]. A partir da observação da dinâmica de bilhares de vários tipos, muitos fenômenos foram observados e posteriormente explicados. O mesmo aconteceu no sentido inverso: muitos fenômenos previstos primeiro teoricamente foram depois observados estudando-se bilhares. A predominância de bilhares sobre outros sistemas é explicada pela simplicidade da sua dinâmica e também por haver métodos numéricos robustos para estudá-los. Nos próximos capítulos desta dissertação, pretendemos nos aprofundar mais no estudo de bilhares.

Uma generalização natural é estudar problemas de caos quântico usando relatividade especial. A equação de onda relativística (para uma partícula de spin $1/2$) é a equação de Dirac [7]. No lugar de uma função $\psi(\vec{r}, t)$ escalar, temos agora um vetor com 4 componentes, um *espinor*.

Um dos primeiros trabalhos publicados em *caos quântico relativístico* foi [8] um artigo Berry e Mondragon de 1987 sobre um bilhar de neutrinos: uma partícula sem massa e spin $1/2$ confinada numa região bidimensional. O interesse nesse tipo de bilhar se deve ao fato dele não possuir simetria por inversão temporal. Isso faz com que a distribuição estatística dos níveis de energia seja dada pelo ensemble de matrizes unitárias gaussianas. Além, como foi percebido algum tempo antes da publicação desse trabalho, os zeros da função zeta de Riemann também obedecem a mesma distribuição

[9]. Isso ressalta uma idéia para se resolver a conjectura de Riemann: os zeros de $\zeta(z)$ seriam os autovalores de algum operador hermitiano [3].

Vale ressaltar que bilhares de neutrinos são passíveis de experimentos usando grafeno [10].

Embora não tão numerosa quanto o caso não relativístico, tivemos um fluxo contínuo de artigos estudando caos quântico relativístico. Citamos alguns trabalhos que nós estudamos mas que, por falta de espaço, não vamos discutir nesse texto. Por exemplo, na referência [11] foi estudado a versão quântica relativística do mapa padrão. Embora esperar-se-ia que esse sistema fosse mais caótico que o caso Newtoniano (devido aos termos não lineares presente nas equações dinâmicas da relatividade especial), o resultado interessante é que conforme o momento cresce, o sistema se torna mais integrável. Portanto, já mesmo no nível clássico o sistema não apresenta difusão no momento (e também não após a quantização).

Outro trabalho que citamos é um estudo sobre grafos quânticos relativísticos [12].

Nosso trabalho nesta dissertação, em ordem cronológica, foi de primeiro estudar a teoria de sistemas dinâmicos [2] e então passar para o estudo de caos quântico não relativístico [3]. Aqui nos focamos no desenvolvimento de um programa que calcula as energias de um bilhar geral para poder estudar as distribuições estatísticas dos níveis de energia. Como método numérico escolhemos o *método da integral de contorno* [13, 14]. Após essa etapa, aplicamos nosso conhecimento no estudo do artigo sobre bilhares de neutrino, [8], onde aplicamos nossos métodos numéricos ao problema.

Em busca de novos resultados, nos voltamos ao estudo de bilhares clássicos, iniciando na análise da dinâmica de uma partícula pontual confinada numa região do plano: um bilhar comum [6]. Procuramos então saber de que modo efeitos relativísticos alterariam o quadro. Foi então que nós passamos a estudar aceleração de Fermi [15] em bilhares forçados [16, 17, 18, 19, 20]. Nesse caso, as paredes do bilhar se movem e durante a colisão da partícula com a parede pode-se ganhar ou perder energia. O principal foco no estudo da aceleração de Fermi em bilhares forçados é saber quais condições o bilhar (através de sua parede) deve apresentar para que a partícula, na média, acelere indefinidamente. Descobrimos que, usando relatividade especial, o comportamento da energia da partícula tem qualitativamente a mesma forma que para o caso Newtoniano. Obviamente não temos mais uma aceleração arbitrária, pois a partícula tende assintoticamente a velocidade da luz c . Nossos resultados nessa área foram submetidos a publicação.

Porém, a divisão desse texto segue o sentido contrário, a qual esperamos que seja mais didática. No primeiro capítulo fazemos uma introdução aos bilhares clássicos não-relativísticos, focando em como calcular sua evolução ao longo do tempo. No segundo capítulo, com a bagagem adquirida sobre bilhares, estudamos a existência (ou não) de aceleração de Fermi em bilhares relativísticos. Mostramos nossos principais resultados e os comparamos. No capítulo 4 apresentamos um breve resumo sobre os principais pontos da teoria do caos quântico, como as distribuições estatísticas dos níveis de energia. O capítulo 5 discutirá bilhares quânticos, iniciando com uma brevíssima discussão sobre experiências com bilhares, passando em seguida a descrição de um método numérico para o cálculo de autoenergias e autofunções. No capítulo 6 estudamos os bilhares de neutrino, [8], onde mostramos alguns resultados para bilhares clássicos com espaço de fase misturado.

Por fim, temos algumas considerações finais. No apêndice está incluso um exemplo de código que desenvolvemos, um script na linguagem de programação Python [37] para análise espectral de bilhares quânticos.

Capítulo 2

Bilhares clássicos

Nesse capítulo vamos estudar bilhares clássicos. Pretendemos introduzir os principais conceitos, tendo em vista sua aplicação no estudo da aceleração de Fermi no próximo capítulo e depois para sua quantização.

Um bilhar é um sistema dinâmico onde uma partícula pontual de massa M é confinada numa região Ω , geralmente pertencente ao plano. A partícula se move livremente no interior de Ω até eventualmente colidir com sua parede $\partial\Omega$. Na colisão a partícula é refletida elasticamente: enquanto a componente normal da velocidade (em relação ao ponto de impacto) muda de sinal, a componente tangencial permanece a mesma. Como consequência o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Se a colisão acontece no ponto $P \in \partial\Omega$, e nesse ponto a parede tem seus vetores normal e tangencial dados por \vec{N} e \vec{T} respectivamente, a velocidade da partícula sofre a transformação:

$$\vec{V}' = \vec{V} - 2 \langle \vec{N}, \vec{V} \rangle \vec{N} \quad (2.1)$$

Onde \vec{V}' é a velocidade após a colisão e ' \langle, \rangle ' indica o produto escalar de dois vetores.

Bilhares são sistemas Hamiltonianos com espaço de fase 4D. Portanto, para serem integráveis, é necessária a existência de uma constante de movimento além da energia. A primeira vista, um bilhar pode parecer um sistema sem graça. Tudo o que temos são movimentos retilíneos ligados por reflexões especulares. Essa simplicidade, no entanto é, em certo sentido, falsa. Projetando a parede $\partial\Omega$ com cuidado, podemos varrer todos os possíveis tipos de dinâmica existentes, indo de sistemas regulares à caóticos passando por sistemas misturados (aqueles com espaço de fase contendo tanto regiões regulares como regiões caóticas). Outra qualidade, que às vezes não é mencionada, é o fato de que não é necessário integrar numericamente equações diferenciais, o que torna a simulação numérica mais rápida e evita o acúmulo de erros de origem numérica.

Na figura 2.1 temos alguns exemplos de bilhares regulares. Para cada um deles existe outra quantidade conservada além da energia, garantindo a integrabilidade. Para o caso circular, 2.1a, temos conservação do momento angular. Para o bilhar elíptico, 2.1b, a quantidade conservada é mais complicada, sendo o produto do momento angular em relação aos focos da elipse [6].

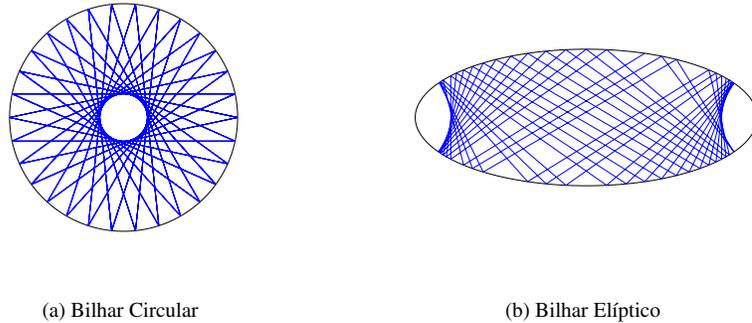


Figura 2.1: Exemplos de bilhares regulares.

Na figura 2.2, apresentamos alguns bilhares caóticos. O primeiro 2.2a, conhecido como estádio, foi introduzido por Bunimovich em 1974 [21] e se tornou, praticamente, o exemplo canônico de bilhar caótico. Ele consiste em dois semicírculos ligados por duas semi-retas. É interessante notar que, enquanto o bilhar retangular ou o circular são regulares (as *peças* que formam o estádio), o estádio é caótico para qualquer valor do comprimento dos setores retos.

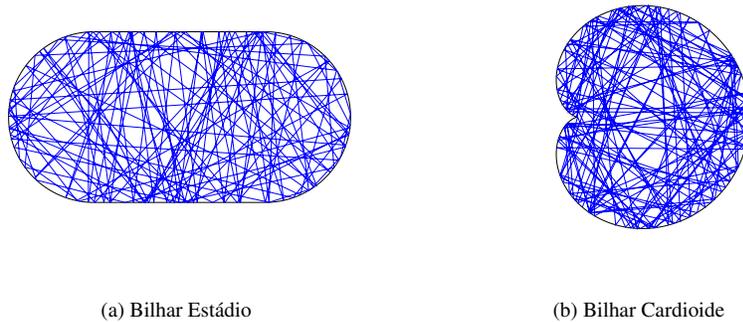


Figura 2.2: Exemplos de bilhares caóticos.

O outro exemplo é o bilhar em formato de cardioide 2.2b. Esse bilhar é um membro de uma família de bilhares cuja geometria da parede é controlada por um parâmetro ϵ , interpolando entre o bilhar circular ($\epsilon = 0$) até o cardioide ($\epsilon = 1$). Para valores intermediários, o bilhar apresenta espaço de fase misturado, o que será facilmente observado quando introduzirmos, mais adiante, seções de Poincaré.

Vamos discutir agora como calcular a evolução de um bilhar [14]. Devido a conservação da energia cinética, vamos tomar $M = 1$ e $|\vec{v}| = 1$.

Suponha que a parede do bilhar seja especificada pela curva $F(x, y) = 0$ e que a partícula esteja inicialmente no ponto $P_0 \in \partial\Omega$ com coordenadas (x_0, y_0) satisfazendo $F(x_0, y_0) = 0$. No ponto P_0 usamos o sistema cartesiano formado pelos vetores normal \vec{N} (para dentro) e tangencial \vec{T} . Nesse sistema, podemos especificar a velocidade como sendo $\vec{v} = (\sin(\beta), \cos(\beta))$ onde β , variando entre $(-\pi/2, \pi/2)$, é o ângulo que a velocidade faz com \vec{N} . É necessário então converter a velocidade do sistema (\vec{T}, \vec{N}) de volta para o sistema de coordenadas do bilhar.

Como a partícula se move em linha reta, a colisão será no ponto $P_1 \in \partial\Omega$ com coordenadas $(x_0 + v_x t, y_0 + v_y t)$ onde o tempo t é a menor raiz (real) da equação:

$$F(x_0 + v_x t, y_0 + v_y t) = 0. \quad (2.2)$$

Calculamos então os vetores normal e tangencial em P_1 , aplicamos a equação (2.1) para transformar a velocidade e repetimos os passos.

Esse método de calcular a evolução do bilhar nos mostra naturalmente uma maneira mais simples de estudar a dinâmica do bilhar. Não há nada de especial no deslocamento da partícula entre colisões. Existe um conjunto menor de variáveis necessárias para reconstruir toda a história do bilhar. A saber, a posição (na parede do bilhar) e o ângulo β (com a normal) da partícula na n -ésima colisão. Definimos assim uma seção de Poincaré do bilhar, usando as coordenadas de Birkhoff $(s, \sin(\beta))$, onde parametrizamos a parede em função do comprimento e s indica o ponto onde ocorreu a colisão (a partir de uma origem arbitrária). O motivo para escolher essas variáveis é que então o mapa definido pela seção de Poincaré preserva áreas [22].

Como exemplo, vamos computar algumas seções de Poincaré para a família de bilhares conhecida como bilhares de Robnik [22], cuja parede tem equação polar:

$$r(\theta) = 1 + \epsilon \cos(\theta), \quad (2.3)$$

onde ϵ varia entre 0, o bilhar circular, até 1, o bilhar cardioide, figura 2.2b. Os resultados estão dispostos na figura 2.3.

Vemos que para $\epsilon = 0.3$, figura 2.3a, um valor que gera uma pequena deformação na parede circular, já é suficiente para alterar significativamente a seção de Poincaré. Ela apresenta agora uma predominante região caótica onde existem ilhas regulares (portanto temos um sistema misturado). Já para o valor $\epsilon = 0.8$, figura 2.3b, toda a seção de Poincaré é preenchida por uma única órbita. Seções de Poincaré são especialmente úteis para uma rápida análise da dinâmica do bilhar.

Existe uma rica literatura matemática sobre bilhares. De fato, eles são uns dos poucos sistemas onde é possível provar rigorosamente certas propriedades, como ergodicidade (para o estádio, [23]).

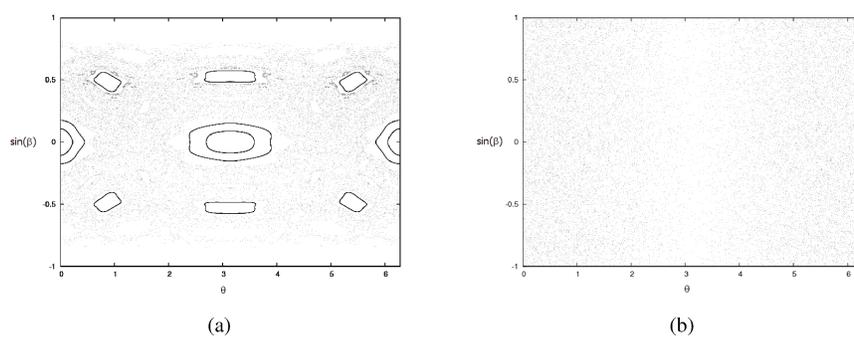


Figura 2.3: Seções de Poincaré para alguns bilhares de Robnik com diferentes valores de ϵ . O eixo das ordenadas corresponde à $\sin(\beta)$ e o eixo das abscissas ao comprimento (aqui parametrizado pela variável θ com $0 \leq \theta < 2\pi$). Na figura 2.3a, $\epsilon = 0.3$ e na figura 2.3b, $\epsilon = 0.8$.

Capítulo 3

Aceleração de Fermi

3.1 Introdução

No final da década de 1940, Fermi [15], tentando explicar a origem dos raios cósmicos, criou um modelo onde uma partícula confinada numa certa região do espaço sofre sucessivas colisões com campos magnéticos dependentes do tempo antes de eventualmente escapar. A idéia era que enquanto numa colisão isolada com a parede magnética a partícula pode perder ou ganhar energia, na média, ao longo do tempo, o resultado seria um ganho contínuo (dependente do tempo em que ela ficou confinada). A aceleração arbitrária de uma partícula num potencial dependente do tempo recebeu o nome de aceleração de Fermi (AF).

Esse modelo foi estendido posteriormente por Ulam num contexto mecânico [24]: Agora temos uma partícula de massa m em um movimento 1D entre duas paredes rígidas, uma em repouso e outra movendo-se. A troca de momento ocorre durante as colisões com a parede móvel. A idéia era descobrir se a partícula poderia ser acelerada a velocidades arbitrárias (dependendo apenas do número de colisões sofridas).

Acontece que, para grandes valores do momento, o espaço de fase é populado por curvas invariantes que impedem a partícula de visitar regiões de maior momento e, conseqüentemente, a energia é limitada [24].

Uma generalização natural ao modelo de Ulam é substituir o movimento 1D da partícula por um 2D, confinando-a numa região do espaço por paredes rígidas e móveis. Temos um bilhar forçado.

Bilhares forçados são sistemas Hamiltonianos dependentes do tempo, governados por um mapa 4D. A dimensão do espaço de fase não permite o uso de ferramentas bem estabelecidas para estudar órbitas como em outros sistemas, como seções de Poincaré. Entretanto, bilhares forçados são um dos poucos sistemas quadridimensionais que permitem seu estudo dentro de um tempo computacional não muito elevado.

A idéia básica para a existência de AF em bilhares é que, enquanto numa colisão isolada, energia pode ser ganha ou perdida, para certos tipos de geometrias (dependentes do tempo), o valor médio da evolução temporal da energia é um crescimento contínuo.

Experimentos numéricos iniciais sugeriram que uma condição suficiente para a presença de AF é que o bilhar original (com paredes estáticas) deveria ser caótico (ou com espaço de fase misturado) [18], enquanto bilhares estáticos integráveis não apresentariam AF. Muitos exemplos confirmaram essa conjectura. Podemos mencionar o bilhar estádio [19] e o bilhar anular excêntrico [16], ambos caóticos com paredes estáticas, apresentam AF, enquanto que não há AF no bilhar anular concêntrico, que possui uma dinâmica regular (quando estático). Para o bilhar circular, sob condições gerais em relação a suavidade do movimento da parede, é possível mostrar que não há aceleração de Fermi [20]. Recentemente, esse quadro se mostrou incompleto, pois foi mostrado que o bilhar elíptico, com contrapartida estática integrável, apresenta AF. Até onde sabemos, as condições necessárias e suficientes para um bilhar apresentar aceleração de Fermi permanecem uma questão em aberto.

Nossa contribuição a esse assunto consiste em estudar a dinâmica de uma partícula confinada num bilhar forçado usando relatividade especial no lugar da dinâmica Newtoniana, empregada em todos os trabalhos citados. Isto nos parece interessante visto as diferenças intrínsecas entre os dois casos: Na relatividade especial temos um limite natural da velocidade da partícula e, além do mais, as leis transformação do momento para uma colisão com a parede rígida móvel são bem mais complicadas do que no caso Newtoniano. Esses fatores tornam o conceito usual de AF não muito claro nesse contexto.

Algumas generalizações relativísticas desses sistemas já foram estudadas. O modelo de Fermi-Ulam relativístico, [25] e [26], ao contrário do caso Newtoniano, apresenta, sob algumas condições, aceleração de Fermi. Voltaremos a esse assunto mais adiante.

Um sistema que é relacionado aos bilhares aqui estudados são os *bilhares relativísticos generalizados*, introduzidos por Deryabin e Pustyl'nikov [27]-[29]. Um bilhar relativístico generalizado consiste em uma região Γ com contorno $\partial\Gamma$ e uma função $f(\gamma, t)$, onde γ é um ponto de $\partial\Gamma$ e t é o tempo. Quando a partícula atinge a parede no ponto γ^* no tempo t^* , ela é refletida como se fosse atingida por uma parede rígida com velocidade $\frac{\partial f(\gamma, t)}{\partial t}$ movendo-se na direção da normal (para dentro) do bilhar em γ^* . A colisão é tratada usando relatividade especial. Caso f não dependa do tempo, temos um bilhar comum.

Os bilhares estudados por Deryabin e Pustyl'nikov são diferentes dos nossos por duas razões. Primeiro, eles consideram que as paredes permanecem estáticas. Durante a colisão, o momento é transferido *como se* as paredes se movessem. Segundo, os autores analisam o caso monotônico, onde $\frac{\partial f(\gamma, t)}{\partial t} > 0$. Em nossas simulações, as paredes dos bilhares movem-se e sua velocidade pode ser negativa ou positiva (dependendo do instante da colisão).

Em particular, estudamos uma versão relativística do bilhar forçado circular (integrável), do bilhar anular concêntrico (integrável) e do bilhar anular excêntrico (caótico). Encontramos que para o bilhar circular, existe AF dependendo das condições iniciais, o caso anular concêntrico não apresenta AF e o bilhar relativístico anular excêntrico possui AF.

Neste capítulo, dividimos as seções da seguinte maneira. A primeira seção discutirá a dinâmica num bilhar forçado, mostrando quais variáveis (a mais que no caso estático)

são necessárias para descrever completamente a evolução no tempo. A segunda seção discutirá a transformação relativística de momento para a colisão de uma partícula com uma parede rígida. Por fim, discutiremos os resultados para os bilhares escolhidos.

3.2 Dinâmica num bilhar forçado

Como já foi discutido no capítulo anterior, bilhares clássicos (com parede estática) consistem numa região Ω do plano, delimitado pela curva $\partial\Omega$, e uma partícula livre em Ω , sendo refletida elasticamente ao colidir com $\partial\Omega$: a componente da velocidade paralela a normal do bilhar no ponto de impacto muda de sinal, enquanto a componente paralela a tangente não é alterada. Depois da colisão a partícula continua seu caminho em linha reta até colidir novamente em algum ponto com $\partial\Omega$.

Para descrever a dinâmica de um bilhar estático usamos um mapa que vai de colisão a colisão. Vimos a utilidade em utilizar coordenadas de Birkhoff ($s, p = \sin(\theta)$).

Num bilhar forçado, o contorno $\partial\Omega$ é uma função oscilatória do tempo, sendo descrito pela função $F(x, y, t) = 0$. Se a partícula no tempo t_0 está no ponto $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ com velocidade (v_x, v_y) , o próximo ponto de colisão será a menor raiz real da equação:

$$F(x_0 + v_x t, y_0 + v_y t, t) = 0. \quad (3.1)$$

Porém, é muito mais complicado resolver a equação (3.1) do que a mesma equação para o caso estático, (2.2), visto que agora, necessitaremos de um método sofisticado de encontrar raízes, além de nos preocuparmos com os diferentes tipos de colisão possível [16]. Como consequência, essa tarefa consome muito tempo computacional.

Existem mais duas variáveis necessárias para especificar completamente a dinâmica do bilhar forçado. Precisamos da velocidade pós colisão, \vec{v}_n , já que a energia não é mais conservada, e o tempo entre colisões t_n . Para ilustrar a situação, mostramos as variáveis para o caso circular na figura 3.1.

A partícula começa no ponto A no tempo t_{n-1} com velocidade \vec{v}_{n-1} fazendo um ângulo α_{n-1} com a normal para dentro. Ela se move em linha reta até colidir novamente com a parede, que nesse exemplo está encolhendo, no ponto B no tempo t_n . Após a colisão, a partícula tem velocidade \vec{v}_n que faz um ângulo α_n com a normal (para dentro). Ela se move em linha reta até colidir novamente com a parede, e então os passos descritos se repetem.

3.3 Transformação de velocidade relativística

Vamos calcular nesta seção a equação relativística da transformação de momento para uma colisão bidimensional envolvendo uma partícula de massa m e uma parede rígida. Começamos com a transferência de momento numa colisão unidimensional. Para esse caso, podemos calcular o momento final usando transformações de Lorentz [30, 31]. Estenderemos então esse método para o caso bidimensional.

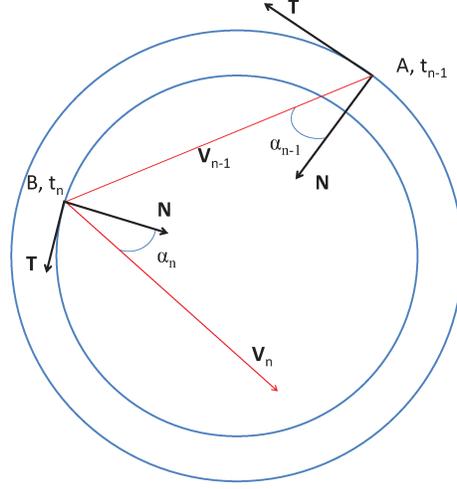


Figura 3.1: Descrição das diferentes variáveis usadas na dinâmica de um bilhar circular forçado.

Depois de uma colisão 1D entre uma partícula de massa m_1 e velocidade inicial u com outra partícula de massa m_2 em repouso, a velocidade final do primeiro corpo, u' , será [30]:

$$u' = \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2/\gamma(u)}u, \quad (3.2)$$

onde $\gamma(u) = 1/\sqrt{1 - (u/c)^2}$ é o fator de Lorentz para o corpo m_1 , e c é a velocidade da luz. A partir da equação (3.2) vemos que, no limite $m_2 \gg m_1$, os resultados relativístico e Newtoniano convergem para o mesmo valor, $u' = -u$. A partícula simplesmente quica de volta.

O caso mais geral, onde m_2 também se move (com velocidade inicial w) pode ser obtido a partir de (3.2) usando transformações de Lorentz. Temos inicialmente o referencial S_0 onde ambas as massas estão se movendo e no qual queremos saber a velocidade de m_1 após a colisão. Mudamos então para o referencial S onde m_2 está em repouso (S move-se com velocidade w em relação a S_0).

Em S , a velocidade inicial do corpo m_1 é:

$$u_S = \frac{u - w}{1 - uw/c^2}. \quad (3.3)$$

Usando as equações (3.2) e (3.3), a velocidade final (de m_1) no referencial S é:

$$u'_S = \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2/\gamma(u_S)}u_S. \quad (3.4)$$

No limite $m_2 \gg m_1$ obtemos $u'_S = -u_S$. Transformando essa expressão de volta ao referencial S_0 (e mantendo o limite):

$$u' = \frac{-u + 2w - u(w/c)^2}{1 - 2uw/c^2 - (w/c)^2}, \quad (3.5)$$

que, no limite $w/c \ll 1$, recupera o resultado Newtoniano.

Agora vamos considerar o caso 2D. Suponha que a partícula m_1 é um disco que colide com uma parede rígida. Durante a colisão, existe transferência de momento apenas na direção da linha definida entre o centro do disco com o ponto de contato junto a parede. Decompondo a velocidade inicial \vec{u} em componentes paralela, u_{\parallel} , e ortogonal, u_{\perp} , à essa linha, podemos utilizar o resultado 1D para tratar esse caso:

$$\begin{aligned} u'_{\parallel} &= \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2/\gamma(u)} u_{\parallel}, \\ u'_{\perp} &= u_{\perp}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

No limite $m_2 \gg m_1$ obtemos o mesmo resultado do caso newtoniano. Portanto, temos que para partículas com velocidade $v < c$ a dinâmica de um disco colidindo com uma parede estática rígida é a mesma que para o caso Newtoniano.

Finalmente, vamos considerar o caso onde ambas, parede e partícula, estão se movendo. A partícula de massa m_1 com velocidade $\vec{u} = (u_x, u_y)$, e a parede, inicialmente com massa m_2 , com velocidade $\vec{w} = (w_x, w_y)$.

Primeiro, fazemos uma rotação de tal modo que \vec{w} seja paralelo ao eixo \hat{x} . Deste jeito, as componentes de \vec{u} são $(u_{\parallel}, u_{\perp})$, como definido acima. Então, fazemos uma transformação de Lorentz para o referencial S onde $\vec{w} = 0$. Portanto, as componentes de \vec{u} transformam como:

$$\begin{aligned} u_{\parallel S} &= \frac{u_{\parallel} - w}{1 - wu_{\parallel}/c^2}, \\ u_{\perp S} &= \frac{\sqrt{1 - (w/c)^2}}{1 - wu_{\parallel}/c^2} u_{\perp}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

As velocidades após a colisão são obtidas a partir da equação (3.6).

$$\begin{aligned} u'_{\parallel S} &= \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2/\gamma(u)} u_{\parallel S}, \\ u'_{\perp S} &= u_{\perp S}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Tomando o limite $m_2 \gg m_1$ e voltando ao referencial inicial, temos que:

$$\begin{aligned} u'_{\parallel} &= \frac{-u_{\parallel} + 2w_{\parallel} - u_{\parallel}(w_{\parallel}/c)^2}{1 - 2wu_{\parallel}/c^2 - (w_{\parallel}/c)^2}, \\ u'_{\perp} &= \frac{u_{\perp}(1 - (w_{\parallel}/c)^2)}{1 - 2wu_{\parallel}/c^2 - (w_{\parallel}/c)^2}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde w_{\parallel} é a componente paralela da velocidade da parede à normal ao ponto de colisão. Essas duas equações determinam a transferência de momento para uma colisão relativística e serão usadas no desenvolvimento a seguir. Para simplificar as equações, a partir daqui, usaremos $c = 1$.

3.4 Exemplos numéricos

Antes de apresentar os resultados numéricos, gostaríamos de comentar o modelo de Fermi-Ulam relativístico (FUR), [25] e [26]. O FUR consiste em uma partícula de massa m confinada entre duas paredes rígidas, a de cima com posição $f_2(t)$ e a de baixo com posição $f_1(t)$, ambas movendo-se com velocidades menores que 1 (a velocidade da luz), $\dot{f}_i(t) < 1$ para $i = 1, 2$. A partícula é livre entre as paredes, sendo refletida elasticamente nas colisões. A lei de reflexão é obtida da relatividade especial. Contrário ao caso Newtoniano, para o FUR, a energia pode crescer ilimitadamente. Para isso, suponha que exista t_0 tal que [26]:

$$\begin{aligned} f_2(t_0) - f_1(t_0) &= q, \\ k_0 &= E \frac{(1 + \dot{f}_1(t_0))(1 - \dot{f}_2(t_0))}{(1 - \dot{f}_1(t_0))(1 + \dot{f}_2(t_0))} > 1, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde q é um inteiro e E é a energia inicial. Então existem ϵ_0 e E_0 tais que se $E > E_0$ e $|t - t_0| < \epsilon_0$, t o tempo inicial, então a trajetória é tal que $E_n \rightarrow \infty$ para n tendendo ao infinito. Também $E_n > CEk_0^n$, com C sendo uma constante, independente de t , E or n .

Considerando apenas órbitas diametraes ($\alpha = 0$), as condições (3.10) se aplicam apenas para o bilhar circular, já que não podemos ter $f_2(t_0) - f_1(t_0)$ um inteiro para o bilhar anular. Também, para o bilhar circular que estudaremos, com seu raio com função do tempo dado por (3.11), a segunda condição de (3.10) é satisfeita para qualquer combinação de parâmetros. Isso implica que no mínimo existe uma família de órbitas com ganho ilimitado de energia para o bilhar circular relativístico.

Como primeiro exemplo, vamos estudar o bilhar circular relativístico forçado, já mostrado na figura 3.1. Tomamos o seu raio como sendo função do tempo da seguinte maneira:

$$R(t) = R_0 + \epsilon_R \cos(\omega t + \phi). \quad (3.11)$$

Ou seja, o raio oscila em torno do valor médio R_0 com frequência ω e amplitude ϵ_R . Para calcular a evolução, fazemos uma média sobre um ensemble de partículas. Para o caso circular, tomamos 10^3 partículas com valores de ϕ espaçados uniformemente em $[0, 2\pi)$.

Na figura 3.2 temos os valores médio do bilhar circular para $R_0 = \omega = 1$, $\epsilon_R = v_0 = 0.01$ e $R_0 = \omega = 1$, $\epsilon_R = v_0 = 0.05$, onde v_0 é a velocidade inicial da partícula e a figura foi computada até o número máximo de 5×10^3 colisões. Os resultados mostram que a velocidade satura rapidamente, indicando a não existência da aceleração de Fermi para esse caso.

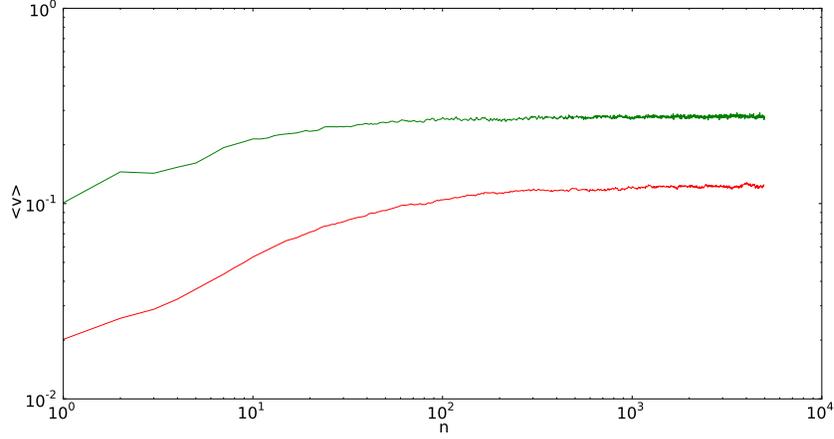


Figura 3.2: Velocidade média do ensemble em função do número de colisões para um bilhar circular relativístico forçado com $R = \omega = 1$. Os parâmetros para as curva de cima (verde) e de baixo (vermelho) são: $\epsilon = \nu_0 = 0.05$ e $\epsilon = \nu_0 = 0.01$ respectivamente.

A figura 3.3 mostra o resultado para uma única partícula (não um ensemble) para o bilhar circular com parâmetros $R_0 = 1$, $\omega = 3$, $v_0 = 0.01$, $\theta_0 = \alpha_0 = 0$, $t_0 = 0$ e $\theta_0 = 0$, $\alpha_0 = 0.3$, $t_0 = 0$. A situação é bem diferente daquela da figura 3.2. Rapidamente a velocidade atinge assintoticamente 1.

Podemos entender as diferenças entre as figuras 3.2 e 3.3 olhando as condições (3.10). Elas dizem que se as condições forem satisfeitas, existem constantes E_0 e ϵ_0 tais que se a energia inicial $E > E_0$ e o tempo inicial t satisfizer $|t - t_0| < \epsilon_0$, para as órbitas diametraes, existirá ganho ilimitado de energia. Mas não se sabe de antemão os valores de E_0 ou ϵ . Acreditamos que para certas combinações de parâmetros (como as usadas na figura 3.2), o bilhar forçado circular relativístico não apresenta AF pois o valor de E_0 é muito alto. Já para o caso mostrado na figura 3.3, E_0 é baixo o suficiente para quase todas as condições iniciais apresentarem AF. Temos o fato interessante de órbitas não diametraes também apresentarem AF, como é exibido na figura 3.3 para $\alpha_0 = 0.3$. A velocidade se aproxima de 1 muito rápido, em menos de 10 colisões. Também se deve notar que a velocidade do contorno para o caso da figura 3.3 é de 30% da velocidade da luz (comparado à 5% ou 1% da figura 3.2).

O bilhar anular forçado é composto de dois círculos, o exterior com raio dado pela equação (3.11) e o interior, com raio médio $r_0 < R_0$ e deslocado pela distância d do centro do círculo exterior. Seu raio em função do tempo é dado pela equação:

$$r(t) = r_0 + \epsilon_r \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.12)$$

Temos a condição $r_0 > \epsilon_r$ e $R_0 - \epsilon_R > r_0 + \epsilon_r$ para evitar que os dois círculos se sobreponham. Dependendo do valor de d , temos um bilhar (estático) regular ($d = 0$) ou

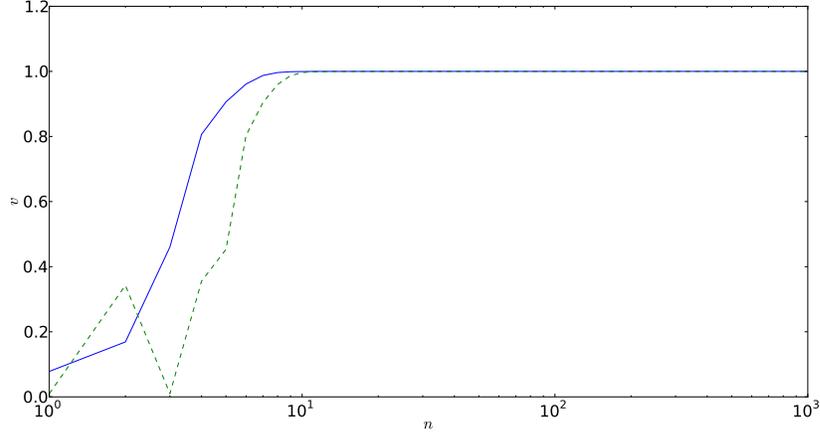


Figura 3.3: A velocidade em função do número de colisões para uma única partícula no bilhar circular forçado relativístico com $R_0 = 1$, $\omega = 3$, $v_0 = 0.01$ e $\epsilon = 0.1$. As condições iniciais são $\theta_0 = \alpha_0 = 0$, $t_0 = 0$ (linha cheia) e $\theta_0 = 0$, $\alpha_0 = 0.3$, $t_0 = 0$ (linha tracejada).

caótico ($d \neq 0$).

Evoluir numericamente o bilhar anular forçado não é tão simples quanto o caso circular. Temos que determinar que tipo de colisão aconteça. Por exemplo, começando da parede externa, a partícula tem três tipos de colisão possível: colidir novamente com a parede externa sem deixar a *zona colisão*, definida pela região anular com raio $R - \epsilon_R < r < R + \epsilon_R$. Ou então ela pode escapar da zona colisão, passar pelo interior do bilhar e atingir a parede interna ou externa. Todas essas possibilidades dependem da existência de raízes de equações não polinomiais, (3.1), satisfazendo certos critérios. Para nosso cálculo envolvendo bilhares anulares, usamos o algoritmo desenvolvido em [16] para o caso Newtoniano. Ele pode ser transposto para o caso relativístico, já que em ambos o movimento da partícula dentro do bilhar se dá em linha reta com constante velocidade, a única diferença sendo a transformação de velocidade nas colisões.

Na figura 3.4 temos o resultado para o bilhar anular concêntrico ($d = 0$, portanto regular para paredes estáticas). Foi utilizado um ensemble de 500 partículas e número máximo de colisões de 5×10^4 , com os valores de φ e ϕ distribuídos uniformemente entre $[0, 2\pi)$. Temos os valores $r_0 = 0.5$, e $R_0 = \omega = 1$.

Para as curvas de cima (azul), do meio (verde) e de baixo (vermelho), usamos os parâmetros $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.1$, $v_0 = 0.1$; $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.02$, $v_0 = 0.01$ e $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.005$, $v_0 = 0.001$ respectivamente. O aspecto de todas as curvas é o mesmo do caso circular, indicando também a inexistência de aceleração de Fermi (concordando com o caso Newtoniano).

As figuras 3.5a e 3.5b mostram a evolução da velocidade média de um ensemble de partículas para bilhares anulares relativísticos não concêntricos até o número máximo de 5×10^4 colisões. Os parâmetros para a figura 3.5a são $r_0 = 0.15$, $d = 0.65$ e

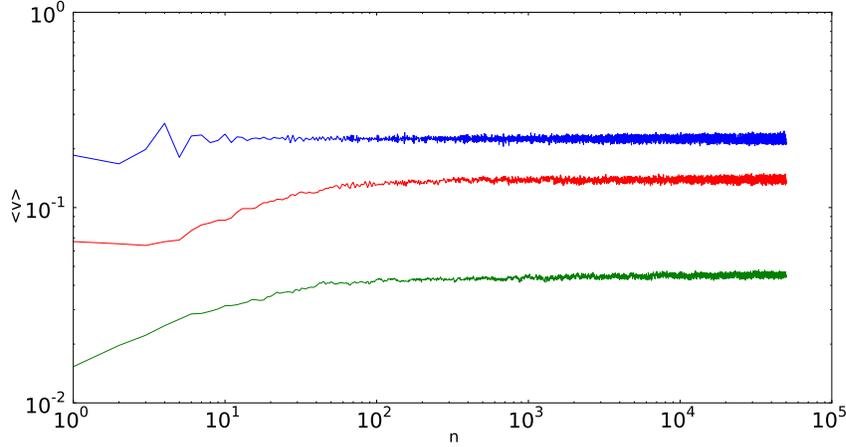


Figura 3.4: Velocidade média do ensemble em função do número de colisões para um bilhar anular concêntrico ($d = 0$) relativístico forçado com $R_0 = 1$, $r_0 = 0.5$ e $\omega = 1$. Os parâmetros para as curva de cima (azul), meio (verde) e de baixo (vermelho) são: $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.1$, $\nu_0 = 0.1$; $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.02$, $\nu_0 = 0.01$ e $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.005$, $\nu_0 = 0.001$ respectivamente.

$R_0 = \omega = 1$, para a figura 3.5b, $r_0 = d = 0.4$ e $R_0 = \omega = 1$ (mantivemos a relação $r + d = 0.8$ como em [16] e a velocidade inicial $v_0 = 0.02$). Para esses valores de r e d , o espaço de fase do bilhar estático é predominantemente preenchido por uma região caótica.

Na figura 3.5a, as curvas de cima, do meio e de baixo correspondem aos parâmetros $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.1$; $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.05$ e $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.025$, respectivamente. Para a figura 3.5b, as curvas de cima, do meio e de baixo aos parâmetros $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.1$, $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.05$ e $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.025$, respectivamente. Foi tirada a média da velocidade a partir de um ensemble de 500 partículas, com φ e ϕ espaçados uniformemente entre $[0, 2\pi)$.

O comportamento para o bilhar anular não excêntrico é muito diferente do caso circular 3.2 e anular concêntrico 3.4. Agora, a velocidade média do ensemble cresce monotonicamente por um tempo muito maior, até atingir assintoticamente 1, a velocidade da luz. Este fenômeno seria o equivalente relativístico a aceleração de Fermi Newtoniana.

Para quantificar a evolução da velocidade com o número de colisões, testamos a função (3.13):

$$\bar{v}(n) = 1 - \alpha \exp(-\beta n^\gamma), \quad (3.13)$$

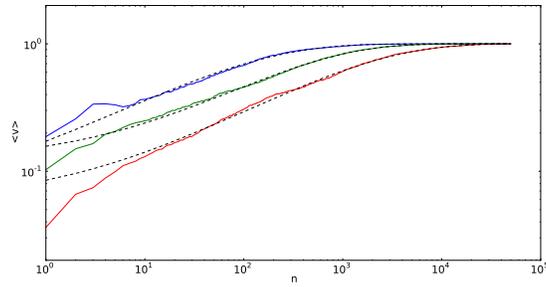
onde os parâmetros α , β e γ foram encontrados usando mínimos quadrados. Os resultados para as figuras 3.5a e 3.5b estão mostrados na tabela 3.1.

Embora o ajuste seja de baixa qualidade para o número n de colisões abaixo de

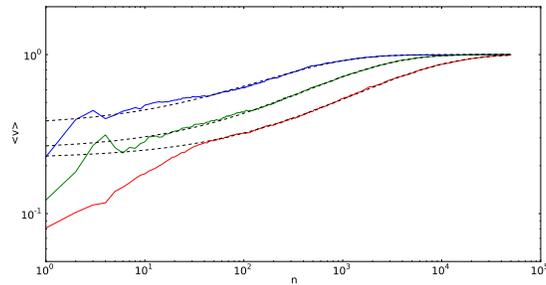
r_0	d	$\epsilon_R = \epsilon_r$	α	β	γ
0.15	0.65	0.025	0.9396	0.0299	0.4916
0.15	0.65	0.05	0.8710	0.0418	0.5315
0.15	0.65	0.1	0.9566	0.1380	0.4596
0.4	0.4	0.025	0.7770	0.0103	0.5599
0.4	0.4	0.05	0.7448	0.0186	0.5769
0.4	0.4	0.1	0.6378	0.0426	0.5589

Tabela 3.1: As primeiras três colunas são os parâmetros usados no cálculo das seis curvas numéricas apresentadas na figura 3.5. As outras três colunas contêm os valores encontrados por ajuste de curvas para a equação (3.13).

≈ 100 , a curva 3.13 captura bem o comportamento para tempos longos.



(a)



(b)

Figura 3.5: 3.5a Velocidade média do ensemble em função do número de colisões para um bilhar anular forçado relativístico com raio interior $r_0 = 0.15$, deslocamento $d = 0.65$ e velocidade inicial $v_0 = 0.02$. As curvas de cima (azul), meio (verde) e baixo (vermelho) correspondem ao valores dos parâmetros $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.1$, $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.05$ e $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.025$, respectivamente. A curva tracejada é o melhor ajuste. 3.5b Velocidade média do ensemble em função do número de colisões para um bilhar forçado relativístico com raio interno $r_0 = 0.4$, deslocamento $d = 0.4$ e velocidade inicial $v_0 = 0.02$. As curvas de cima (azul), meio (verde) e baixo (vermelho) correspondem ao valores dos parâmetros $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.1$, $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.05$ e $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.025$, respectivamente. A curva tracejada é o melhor ajuste. Para todas as curvas mantivemos $R_0 = \omega = 1$

Capítulo 4

Caos quântico

4.1 Introdução

A mecânica clássica, particularmente no formalismo Hamiltoniano, pode ser vista como uma aproximação de uma teoria mais elementar, a mecânica quântica. Geralmente quando os comprimentos de onda envolvidos são muito menores que as escalas de comprimento do problema em questão, a mecânica clássica reproduz com precisão os resultados empíricos. Isso é a mesma aproximação que se faz em óptica geométrica com relação a solução das equações de Maxwell. Desse modo, podemos ver as órbitas na figura 2.2 como a aproximação (para altas energias) do caso quântico.

O princípio da correspondência de Bohr afirma que, dentro de certos limites, os resultados da mecânica quântica convergem para a mecânica clássica. Podemos aplicá-lo sem problemas para casos clássicos integráveis, por exemplo, para o oscilador harmônico [4]. Entretanto, quando o caso clássico é caótico, o problema é mais complicado.

Sistemas clássicos caóticos, entre outras propriedades, são conhecidos por apresentar extrema sensibilidade às condições iniciais: duas soluções muito próximas inicialmente uma da outra se separam exponencialmente no tempo (o *efeito borboleta*). Esta propriedade está ligada à não linearidade da equação diferencial do sistema em estudo. Seguindo a risca o princípio da correspondência, esperaríamos observar algum resquício de caos após a quantização.

Porém, a relação de incerteza $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ impede a determinação precisa de condições iniciais, o que torna questionável a definição de caos quântico como separação exponencial de trajetórias. Mesmo que mudássemos a definição, por exemplo, se começássemos com dois pacotes de onda (uma superposição de auto estados da Hamiltoniana) diferindo infinitesimalmente em seus coeficientes, devido à linearidade da equação de Schrödinger, a evolução no tempo divergiria no máximo linearmente.

O estudo de sistemas quânticos cuja contrapartida clássica é caótica é chamado de caos quântico (embora Berry prefira caologia, [3]), e apresenta vários resultados interessantes.

Por exemplo, o caso quântico apresenta sim propriedades que estão relacionadas

ao tipo de dinâmica clássica [3]. Podemos citar as propriedades estatísticas do espectro que são diferentes para casos clássicos regulares, caóticos e misturados. Temos também *cicatrices*: as regiões de maior amplitude da densidade de probabilidade estão localizadas próximas as órbitas periódicas.

Nosso sistema escolhido para estudar tais propriedades são bilhares, com os quais já viemos trabalhando. Mantemos eles como nossa 'cobaia' experimental, pois temos um entendimento razoável de suas propriedades clássicas e também podemos aplicar métodos numéricos robustos para encontrar suas energias. Como será descrito mais adiante, bilhares também são passíveis de serem realizados experimentalmente [3].

Inicialmente vamos tratar o caso não relativístico. Fazemos isso por dois motivos: Mostrar a técnica numérica e para aprofundar o nosso entendimento na área. Após, estudaremos o caso relativístico, utilizando o conhecimento já aplicado no caso não relativístico.

Na próxima seção vamos revisar o conceito de simetrias, que será importante mais tarde quando pretendemos discutir as propriedades estatísticas dos níveis de energia.

Nos próximos capítulos mostraremos um método numérico para resolver as equações de Schroedinger e Dirac em um bilhar (de geometria arbitrária), juntamente com os resultados obtidos.

4.2 Simetrias

Nas décadas de 1950 e 1960, os pesquisadores começaram a estudar núcleos atômicos contendo cada vez mais constituintes. O espectro desses núcleos é tão complicado que estimulou o interesse (pela primeira vez em física) de aplicar a teoria de matrizes aleatórias no estudo de um sistema quântico. A idéia principal era que esses núcleos possuem matrizes muito complicadas, porém, satisfazendo certas simetrias. Ao invés de estudar uma única matriz descrevendo tal sistema, toma-se um ensemble de matrizes, todas obedecendo a mesma simetria e então calcula-se propriedades estatísticas, por exemplo, a distribuição dos autovalores. Na década de 1980 foi feita a conjectura de que matrizes aleatórias também descreveriam o espectro de sistemas quânticos com contrapartida clássica caótica [3].

Acontece que as previsões da teoria de matrizes aleatórias reproduzem muito bem as propriedades dos espectros.

Antes de calcular algumas previsões, vamos fazer um pequeno resumo sobre simetrias em mecânica (clássica e quântica): Em mecânica clássica, simetrias estão relacionadas à constantes de movimento. Por exemplo, simetria rotacional implica conservação do momento angular. Em mecânica quântica, cada simetria do problema da origem a um número quântico.

Se a Hamiltoniana do sistema é invariante à uma translação no tempo, temos o número quântico principal n e a energia é conservada. Se o sistema for caótico, essa é a única constante de movimento. Para entender melhor a existência de outras simetrias, vamos trabalhar com a representação matricial.

A equação de Schroedinger independente do tempo é:

$$H\psi_n = E_n\psi_n. \quad (4.1)$$

Expandindo a função de onda ψ_n na base ortonormal ϕ_i (e abandonando o índice n por simplicidade):

$$\psi = \sum_m a_m \phi_m. \quad (4.2)$$

Usando a expansão (4.2) na equação (4.1), multiplicando por ϕ_n e usando a relação de ortonormalidade, obtemos a equação matricial de autovalores:

$$\sum_m H_{nm} a_m = E_n a_n, \quad (4.3)$$

onde os elementos da matriz H_{nm} são:

$$H_{nm} = \int \phi_n^* H \phi_m dx. \quad (4.4)$$

Suponha que H seja invariante pela transformação R (ou seja, R é uma simetria de H), representada pelo operador R que comuta com H :

$$[R, H] = 0. \quad (4.5)$$

Escolhendo a base ϕ_n como sendo os autovalores de R , é possível mostrar que a matriz H se torna diagonal por blocos [4, 3]. Uma aplicação bem simples de simetria acontece na resolução do átomo de hidrogênio: A hamiltoniana comuta com dois operadores, L^2 e L_z . Expandindo a função de onda usando os autovalores desses operadores, diagonalizamos automaticamente o problema.

É importante que, quando analisarmos os espectros, apenas utilizemos aqueles com o mesmo conjunto de números quânticos (cada 'bloco' da Hamiltoniana).

4.3 Propriedades estatísticas dos níveis de energia

Uma simetria importante é a reversão temporal, realizada pelo operador T , que satisfaz:

$$Tf(t) = f(-t). \quad (4.6)$$

Quando aplicamos o operador T na equação de Schroedinger dependente do tempo, o termo contendo $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ inverte o sinal. Para compensar, aplicamos o operador de conjugação complexa C . Agora, a Hamiltoniana H pode ou não comutar com o operador CT . Aqui vamos estudar apenas dois casos [3].

Suponha que a Hamiltoniana não comute com CT (como acontece para o caso de uma partícula imersa num vetor potencial \vec{A}). Os elementos 4.4 satisfazem a relação:

$$H_{nm} = H_{mn}^*, \quad (4.7)$$

e essa relação é preservada por transformações unitárias, $H' = UH U^\dagger$, com $UU^\dagger = 1$.

Se H comutar com o operador CT , como de fato ocorre para uma partícula imersa numa região onde $\vec{A} = 0$, então a matriz de H é real e simétrica:

$$H_{nm} = H_{mn}, \quad (4.8)$$

e essa condição é preservada por sua vez por transformações ortogonais, $H' = OHO^T$, com $OO^T = 1$.

Com essas informações, podemos definir os ensembles de matrizes gaussianas. Por exemplo, o ensemble de matrizes aleatórias gaussianas ortogonais (GOE) é o conjunto de matrizes com elementos aleatórios reais e simétrica. A probabilidade de obter a matriz H ou OHO^T , com O ortogonal, deve ser a mesma, já que ambas estão ligadas por uma transformação de base, mas os resultados físicos devem ser independentes da base escolhida. Os elementos da matriz não estão correlacionados entre si, e a probabilidade de cada um é dada por uma distribuição gaussiana (dai o nome do ensemble). Definimos do mesmo modo o ensemble de matrizes aleatórias unitárias (GUE).

É possível (embora trabalhoso) calcular distribuições de probabilidade para várias características (como os autovalores) para esses ensembles [3]. Vamos discutir apenas uma estatística extremamente popular que é a distribuição $p(s)$ da distância entre primeiros vizinhos da energia ($s = E_{i+1} - E_i$).

Essa estatística depende do tipo de ensemble usado. Para o ensemble GOE:

$$p(s) = \frac{\pi s}{2} e^{-\frac{\pi}{4}s^2}, \quad (4.9)$$

e para o ensemble GUE:

$$p(s) = \frac{32s^2}{\pi^2} e^{-\frac{4}{\pi}s^2}. \quad (4.10)$$

Na figura 4.1 plotamos o gráfico das distribuições 4.9 e 4.10, bem como a distribuição para o caso do sistema ser integrável, a saber, a distribuição de Poisson:

$$p(s) = e^{-s}. \quad (4.11)$$

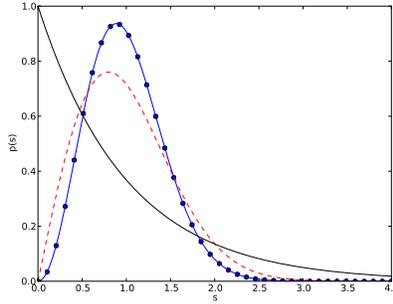


Figura 4.1: Exemplos de distribuições do espaçamento entre primeiros vizinhos. Em vermelho (tracejado) temos a distribuição para o ensemble GOE, em azul (linha cheia com círculos para) GUE e em preto (linha cheia) a distribuição de Poisson para o caso integrável.

A principal diferença entre as distribuições ocorre na região $0 < s < 1$. Enquanto que para o caso integrável (distribuição de Poisson), o máximo ocorre para $s = 0$,

para as distribuições GOE e GUE, elas se anulam. Pode-se dizer que *os autovalores se repelem* para sistemas caóticos.

Antes de calcularmos a distribuição $p(s)$ para o espectro de algum sistema, é necessário primeiro normalizá-lo, já que sem isso, ele seria uma propriedade dependente do sistema em questão. A fim de computar essa normalização vamos usar a função $N(E)$, que informa o número de energias existentes até o valor E .

A densidade de estados $d(E)$ é:

$$d(E) = \sum_i \delta(E - E_i), \quad (4.12)$$

portanto $N(E) = \int_{-\infty}^E d(E)dE$ é uma função 'degrau' que aumenta de uma unidade toda vez que passa sobre uma energia E_i . Mas nós estamos interessados em obter uma versão *suavizada*, onde tomamos a média de $d(E)$ (e, consecutivamente $N(E)$) dentro de uma faixa de valores. Podemos calcular essas propriedades computando o volume do espaço de fase e atribuindo para cada estado quântico o volume $(2\pi\hbar)^N$ (em N dimensões), obtendo assim a equação de Weyl [2, 3]:

$$N(E) = \frac{A}{4\pi}E - \frac{L}{4\pi}\sqrt{E} + C, \quad (4.13)$$

onde A é a área do bilhar, L seu perímetro e C uma constante (que depende do tipo de bilhar). De posse da equação (4.13), podemos normalizar as energias, definindo os novos valores e_i :

$$e_i = N(E_i), \quad (4.14)$$

e então aplicar as distribuições $p(s)$ de modo independente do sistema.

Capítulo 5

Bilhares quânticos

5.1 Introdução

O sistema que nós vamos utilizar para estudar algumas propriedades de caos quântico são bilhares. Bilhares são escolhidos por sua simplicidade e existência de métodos numéricos robustos que permitem o cálculo do espectro para geometrias arbitrárias. Isto é importante, visto que poucos casos são integráveis, como os bilhares circular, elíptico e retangular (geralmente pode-se resolver apenas potenciais com simetria suficiente em coordenadas apropriadas, [4]). Aqui, inicialmente vamos tratar bilhares onde uma partícula, sem spin e não relativística, está confinada em uma região Ω , 2D, simples e conectada, com contorno $\partial\Omega$. É possível introduzir outros efeitos, como campos magnéticos [32, 33], entretanto, não iremos discutir isso aqui. Adiante, vamos discutir os bilhares de neutrino, onde uma partícula relativística de spin 1/2 e sem massa é confinada em um bilhar.

Como método numérico, escolhemos o *método da integral de contorno*, conhecido pela sua sigla em inglês BIM. Este método é bem popular entre os pesquisadores na área de caos quântico.

Por fim, gostaríamos de ressaltar que bilhares são estudados experimentalmente também. A principal técnica de pesquisa utiliza ressonadores de microondas em cavidades. Na verdade, esse é um experimento análogo, já que em ambas as situações (quântica e eletromagnética) são governadas pela equação de Helmholtz com os mesmos tipos de condições de contorno. Existem também outras técnicas, como ondas estacionárias de água em vasos ou sistemas mesoscópicos como pontos quânticos. A referência [3] oferece um bom resumo sobre técnicas experimentais.

5.2 Método da integral de contorno

Nesta seção vamos demonstrar o método da integral de contorno (*Boundary integral method*, BIM) para o caso de bilhares quânticos. Esse método reduz a solução da equação (diferencial) de Schroedinger em uma certa região do espaço à uma equação integral calculada no contorno dessa região.

Esta seção é baseada nos artigos de revisão [13, 14]. Pretendemos desenvolver as equações necessárias para a aplicação do método, bem como os passos algorítmicos para sua execução.

Nosso problema consiste em resolver a equação de Schroedinger, (5.1):

$$\hat{H}\psi_n(\vec{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]\psi_n(\vec{r}) = E_n\psi_n(\vec{r}), \quad (5.1)$$

na região D , delimitada pela curva simples $\Gamma = \partial D$ e com condições de contorno para ψ especificadas em Γ :

$$F[\psi_n(\vec{r}), \partial\psi_n(\vec{r})] = 0, r \in \Gamma. \quad (5.2)$$

Para isso, vamos transformar a equação diferencial (5.1) em uma equação integral. Com esse objetivo em vista, introduzimos a função de Green $G_{E_n}(\vec{r}, \vec{r}')$ que satisfaz a equação (5.3):

$$[E - \hat{H}]G_{E_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (5.3)$$

Onde o operador \hat{H} atua na coordenada \vec{r} de $G_{E_n}(\vec{r}, \vec{r}')$. Multiplicamos as equações (5.1) por $G_{E_n}(\vec{r}, \vec{r}')$ e (5.3) por $\psi_n(\vec{r})$ e somamos ambas, obtendo:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}')\psi_n(\vec{r}) = \frac{\hbar^2}{2m}[\psi_n(\vec{r})\nabla^2 G_{E_n}(\vec{r}, \vec{r}') - G_{E_n}(\vec{r}, \vec{r}')\nabla^2\psi_n(\vec{r})]. \quad (5.4)$$

Usando a segunda identidade de Green, podemos escrever o lado direito da equação (5.4) como um divergente. Pelo fato de existir uma função delta de Dirac do lado esquerdo de (5.4), podemos calcular a integral na região D (na variável \vec{r}), obtendo a forma integral da equação de Schroedinger:

$$\psi_n(\vec{r}') = \frac{\hbar^2}{2m} \oint_{\Gamma} ds [\psi_n(\vec{r})\partial_{\nu}G_{E_n}(\vec{r}, \vec{r}') - G_{E_n}(\vec{r}, \vec{r}')\partial_{\nu}\psi_n(\vec{r})], \quad (5.5)$$

onde ds é um elemento infinitesimal de Γ e ∂_{ν} indica a derivada normal exterior (tudo calculado no ponto \vec{r}). A equação (5.5) contém as mesmas informações que a equação (5.1). Entretanto, ela é mais prática para desenvolver métodos numéricos.

Note que não aparece explicitamente a dependência do potencial $V(\vec{r})$ na equação integral (5.5). Porém, o efeito de V está implícito na função de Green G , já que essa satisfaz (5.3). Vale destacar aqui uma das limitações desse método: É necessário conhecer analiticamente G (particularmente, isso torna o problema de bilhares em campos magnéticos muito mais complicados [32, 33]).

Para o caso da partícula livre, a equação de Schroedinger tem a mesma forma da equação de Helmholtz:

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0, \quad (5.6)$$

com $k^2 = 2mE/\hbar^2$. Em 2 dimensões, a função de Green para a equação de Helmholtz [13, 34] é:

$$G_{E_n}(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{im}{2\hbar^2} H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}'|), \quad (5.7)$$

sendo $H_0^{(1)}$ a função de Hankel do primeiro tipo de ordem 0 [34].

A fim de obter uma equação *secular* para as energias e funções de onda, vamos tomar o limite \vec{r}' pertencendo a Γ . Esse limite no entanto é um pouco complicado [13, 14], visto que a função de Green é singular para $\vec{r}' = \vec{r}$ ($H_0^{(1)}(z) \propto \ln(z)$ para $z \rightarrow 0$). Fazendo os cálculos e tomando o valor principal de Cauchy [13]:

$$\psi_n(\vec{r}') = \frac{\hbar^2}{m} \oint_{\Gamma} ds [\psi_n(\vec{r}) \partial_{\nu'} G_{E_n}(\vec{r}, \vec{r}') - G_{E_n}(\vec{r}, \vec{r}') \partial_{\nu} \psi_n(\vec{r})], \quad (5.8)$$

onde \oint indica que deve ser tomado o valor principal de Cauchy. É a partir desta equação que o método numérico é derivado.

A fim de resolver numericamente o problema, fazemos o seguinte: Vamos aplicar a derivada normal $\partial_{\nu'}$ (note que agora ela age na variável \vec{r}') em ambos os lados da equação (5.8) e vamos especificar condições de contorno, equação (5.2), do tipo Dirichlet, $\psi(r) = 0, r \in \Gamma$:

$$u(\vec{r}') = -\frac{\hbar^2}{m} \oint ds [\partial_{\nu'} G(\vec{r}, \vec{r}') u(\vec{r})], \quad (5.9)$$

com $u(\vec{r})$ sendo a derivada normal de ψ no ponto $\vec{r} \in \Gamma$. Para ser preciso, (5.9) é uma equação de Fredholm do segundo tipo, [34]. A vantagem em se trabalhar com a equação integral na forma de (5.9) é que ela não apresenta mais singularidades: $\partial_{\nu'} G(\vec{r}, \vec{r}')$ se anula para $\vec{r} = \vec{r}'$.

Parametrizamos Γ através do comprimento de arco l , variando entre $0 < l \leq L$, sendo L o perímetro do bilhar. Aproximamos Γ por um polígono de N lados, com o segmento entre os vértices i e $i + 1$ chamado de Γ_i (com comprimento L/N). As coordenadas dos vértices i são dadas por \vec{s}_i e vamos definir o ponto do meio do segmento Γ_i como $\vec{r}_i = (\vec{s}_i + \vec{s}_{i+1})/2$.

Com essa discretização de Γ e aproximando a integral sobre Γ como uma soma de Riemann (sobre os elementos Γ_i) obtemos um sistema de equações lineares [13, 14]:

$$\sum_{j=1}^N C_{ij}(k) u_j = 0, \quad (5.10)$$

onde os elementos C_{ij} são dados por:

$$C_{ij} = \delta_{ij} + \frac{ik}{2} \Delta s_j \cos(\vec{\nu}_i \cdot \hat{r}_{ij}) H_1^{(1)}(kr_{ij}), \quad (5.11)$$

com δ_{ij} sendo a função delta de Kronecker, $\Delta s_j = |\vec{s}_{j+1} - \vec{s}_j|$, $\vec{\nu}_i$ a normal (exterior) no ponto \vec{r}_i e $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$.

Concluimos então que as energias do bilhar em questão são aquelas tais que a matriz C é singular:

$$\det[C_{ij}(k)] = 0. \quad (5.12)$$

Por fim, há a necessidade de determinar o valor N da discretização do contorno do bilhar, visto que ele determina o tamanho da matriz C e a *qualidade* das energias obtidas. Uma regra empírica [13, 14] diz que o valor de N para que calcular energias com $k < K_m$ deve ser

$$N \approx K_M L. \quad (5.13)$$

De posse da condição (5.12) para que k seja uma energia válida (a partir de agora vamos utilizar unidades tais que $\hbar = 1 = 2m$, assim $E = k^2$ e tomamos k como sinônimo de E), nos resta encontrar uma algoritimo que permita encontrar todas as energia dentro de uma faixa de interesse. Podemos ver (5.12) como os zeros (reais) de uma função complexa. Se quiséssemos calcular todas as energias dentro do intervalo ΔE centrada em E_0 , podemos dividir a região em M pontos, calcular em cada um o valor de $\det[C]$ e encontrar os pontos onde ela se anula (parte real e imaginária). Obviamente, devido a discretização e outros tipos de erros, esses valores serão apenas próximos de zero.

Como C é uma matriz densa, complexa e não Hermitiana, o cálculo do seu determinante é demorado e, além do mais, se seguirmos os passos descritos no parágrafo anterior, para melhorar a precisão das energias encontradas devemos aumentar o número de pontos M , o que torna o processo ainda mais lento.

Uma saída [14] é calcular a decomposição em valores singulares da matriz C . Com isso, podemos escrever:

$$C = USV^\dagger, \quad (5.14)$$

onde U e V são matrizes unitárias e S é uma matriz diagonal, com suas entradas sendo os valores singulares de C , e portanto $\det(C) = \prod_i V_i S_i$. As energias do bilhar são aquelas para as quais o menor valor singular de C se anula (ou se torna muito próximo de zero).

As vantagens de se calcular a decomposição em valores singulares são [14]: Utilização de um passo muito maior do que se utilizássemos diretamente o determinante (5.12), e também a decomposição permite encontrar quase-degenerências, visto que o segundo menor valor singular também se torna pequeno quando existem duas energias próximas uma da outra.

Como exemplo, na figura 5.1a temos os dois menores valores singulares para o bilhar estádio em função da energia E dentro da faixa $1 < E < 50$, computado com um passo $\delta E = 0.3$. O menor valor está em preto e o segundo menor em vermelho. As energias válidas são os mínimos do menor valor singular. Vemos que para $E \approx 24$ o segundo menor valor singular também apresenta um mínimo, indicando a existência de uma quase-degenerência. Na figura 5.1b foi calculado então os valores singulares na região $23 < E < 25$ com um passo menor, indicando claramente a existência de duas energias próximas uma da outra.

Por fim, para melhorar os valores já encontrados das energias, usamos o método de encontrar raízes de Brent [13, 35].

O último tópico a comentar, é que é possível calcular a função de onda ψ . Dado um valor válido de k_n do bilhar, podemos calcular o respectivo autovalor u_n (a derivada normal de ψ no contorno do bilhar) da matriz C . Usando a equação (5.5), junto com a condição de contorno do tipo Dirichlet e mais o valor de u_n já calculado, podemos encontrar ψ em qualquer ponto dentro do bilhar.

Escrevemos então um programa em linguagem C, implementando esses passos, podendo assim calcular todos os valores da energia dentro de um faixa especificada. Incluímos inclusive a verificação de quase-degenerescências a partir de uma análise do segundo menor valor singular.

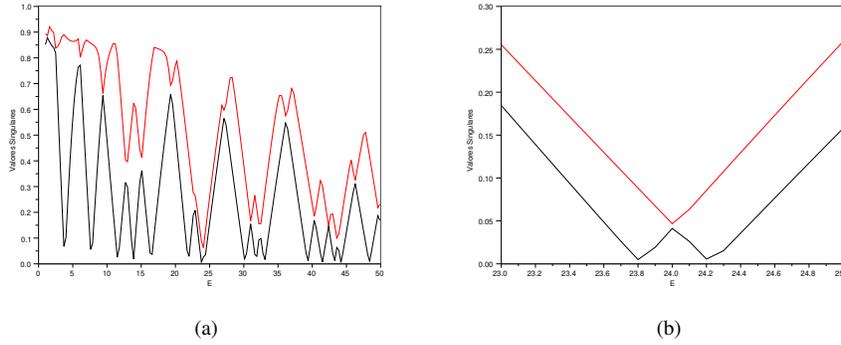


Figura 5.1: Os dois menores valores singulares da matriz (5.11) em função da energia $E = k^2$. O menor valor singular está desenhado em preto (curva de baixo, ambas as figuras) e o segundo menor em vermelho. Na figura 5.1a os valores de E foram varridos com um passo $\Delta E = 0.3$. Como os dois valores singulares possuem um mínimo próxima à $E \approx 24$, temos um indicativo de uma quase-degenerescência. Na figura 5.1b temos os valores singulares calculados com menor passo apenas em torno da região $23 < E < 25$, evidenciando as duas energias existentes.

5.3 Resultados numéricos

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados numéricos que comprovam a teoria.

Começamos com o caso mais simples de um bilhar retangular. Este tipo de bilhar pode ser resolvido facilmente [4], com suas energias sendo:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} \right). \quad (5.15)$$

Temos que os números quânticos $n_x = 1, 2, 3, \dots$ e $n_y = 1, 2, 3, \dots$. Os valores de a e b são respectivamente $\sqrt{2}$ e π . Escolhemos tais valores a fim de minimizar quase

degenerescências no problema [3]. A simplicidade da formula (5.15) permite computar um número muito grande de energias. No nosso caso, calculados 1.3×10^4 energias.

A primeira estatística que calculamos é a diferença entre a formula de Weyl (4.13) e o resultado numérico. Essa estatística indica a qualidade do espectro, pois caso tenhamos perdido uma energia, ela aparece como um salto da função. O resultado está graficado na figura 5.2. Podemos observar que o resultado oscila ao redor de 0, indicando que todo o espectro foi calculado.

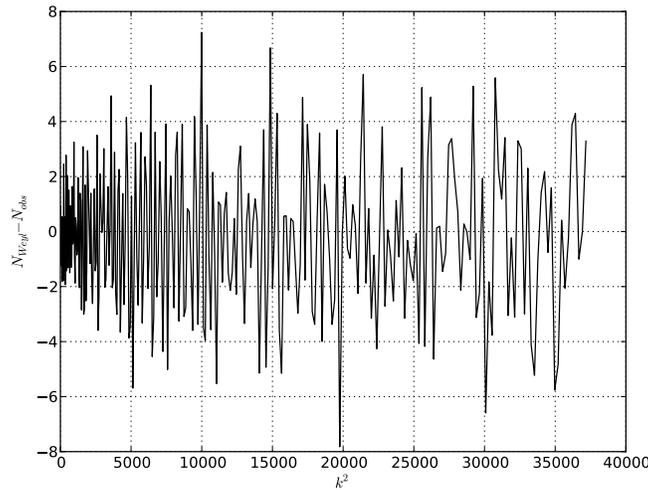


Figura 5.2: Diferença entre o valor teórico de $N(E)$ e o valor encontrado numericamente para o bilhar retangular. Ele oscila em torno de 0, indicando que todos os autovalores foram calculados.

Na figura 5.3 temos o histograma da distribuição do espaçamento entre primeiros vizinhos de energia. Como foi dito anteriormente, como temos um sistema integrável, o resultado deve ser uma distribuição de Poisson. Podemos observar claramente um perfeito ajuste dos dados com o modelo teórico.

Para reduzir as flutuações, também calculamos a distribuição integrada do espaçamento, figura 5.4a. Novamente, o resultado é excelente. Na figura 5.4b temos a diferença entre os valores numérico e teórico.

Outro exemplo é o bilhar estádio. Escolhemos como parâmetros $R = 1$ e $a = 1/2$. Para o calculo dos seus autovalores utilizamos o método da integral de contorno descrito anteriormente. Computamos 986 níveis de energia.

Seguindo o princípio de utilizar apenas autovalores com as mesmas simetrias no problema, tomamos um bilhar estádio desimetrizado: O bilhar estádio possui dois eixos de simetria, um vertical e outro horizontal. Para evitar a mistura de estados com simetria par-par, impar-impar, etc, utilizou-se apenas um quarto do bilhar, impondo condições de Dirichlet nas linhas de corte.

Para testar a qualidade dos dados, plotamos na figura 5.5 (como no caso retângular)

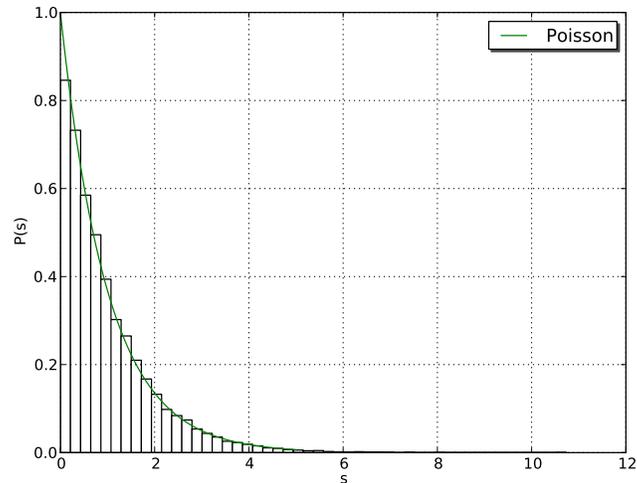


Figura 5.3: Histograma da distribuição de espaçamento entre primeiros vizinhos da energia para o bilhar retangular. Foram computados 1.3×10^4 níveis de energia.

a diferença entre o valor teórico da fórmula de Weyl, (4.13), e o resultado numérico. Vemos que para a faixa de valores $E < 6000$, essa quantidade oscila em torno de 0, indicando que não foi perdida nenhuma energia. Entretanto, após esse valor, os resultados começam a oscilar em torno de valores mais altos. Isso mostra que em todo o espectro, perdemos aproximadamente 5 autovalores.

Na figura 5.6 temos o histograma do espaçamento de energias para o estádio. Como o caso clássico é caótico, esperamos que a distribuição fosse dada pelo ensemble gaussiano ortogonal. Embora a concordância não seja tão boa quanto para o bilhar retangular, o resultado é satisfatório (é bom lembrar que aqui temos um número de autovalores bem menor, portanto a estatística não é tão boa).

Para suavizar as flutuações estatísticas, na figura 5.7a temos a distribuição integrada. Na figura 5.7b mostramos a diferença entre o valor obtido e o valor teórico.

Por fim, gostaríamos de mostrar algumas densidades de probabilidade calculadas com o método da integral de contorno. Na figura 5.8 temos várias densidades de probabilidade para valores crescentes de energia. De modo geral, conforme a energia aumenta, mais complicada é a distribuição. Exceções são as figuras 5.8c e 5.8e. Esses estados são conhecidos como estados *bola quicando* (ou bouncing ball em inglês).

Um tipo de órbita periódica possível no bilhar estádio é aquela que fica quicando entre as duas seções retas do bilhar. Os estados *bola quicando* são cicatrizes [3], a amplitude da densidade de probabilidade é maior próximo a órbitas periódicas do sistema clássico.

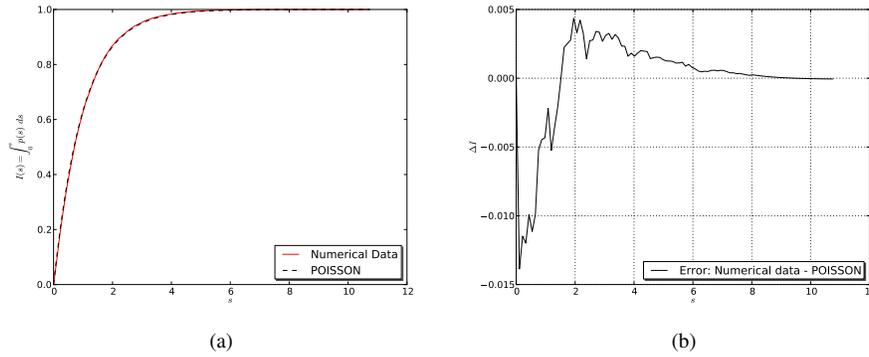


Figura 5.4: Distribuição integrada (com os mesmos dados da figura 5.3) do espaçamento de níveis de energia, 5.4a. Em vermelho (linha cheia) o resultado obtido para o bilhar retangular. Em preto (linha tracejada) o resultado teórico. Diferença entre o valor encontrado e a teoria, 5.4b.

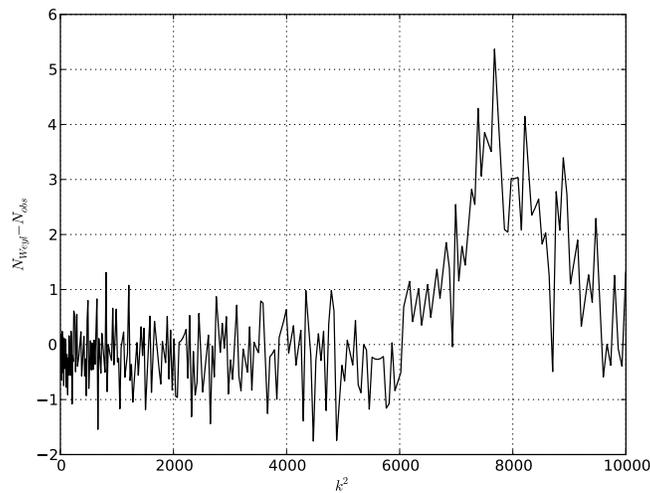


Figura 5.5: Diferença entre o valor teórico de $N(E)$ e o valor encontrado numericamente. Enquanto esse valor oscila em torno de 0 para $E < 6000$, ele indica que perdemos alguns (em torno de 4) níveis de energia após esse valor.

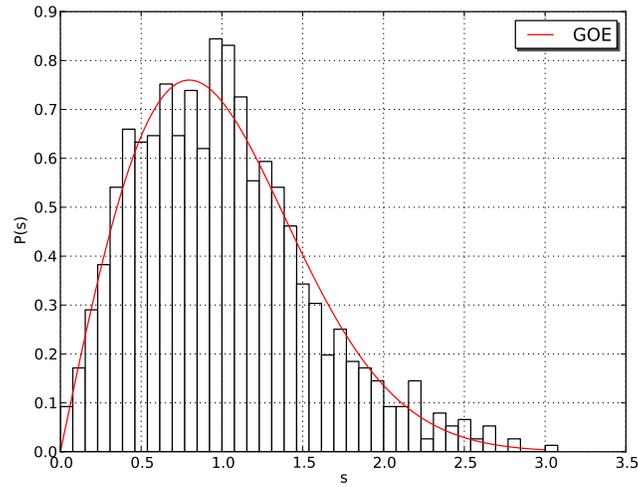
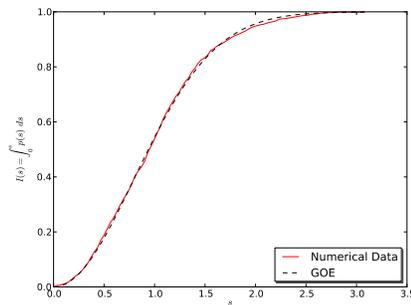
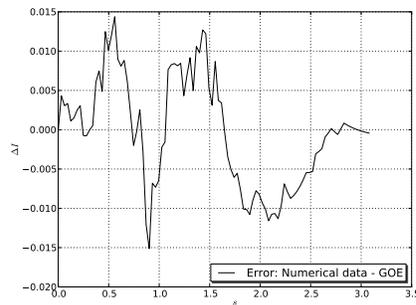


Figura 5.6: Histograma da distribuição de espaçamento entre primeiros vizinhos da energia para o bilhar estádio desimetrizado. Foram computados 986 níveis de energia.



(a)



(b)

Figura 5.7: Distribuição integrada (com os mesmos dados da figura 5.6) do espaçamento de níveis de energia, 5.7a. Em vermelho (linha cheia) o resultado obtido para o bilhar estádio desimetrizado e em preto (linha tracejada) o resultado teórico. Diferença entre o valor encontrado e a teoria, 5.7b.

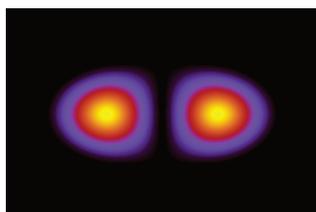
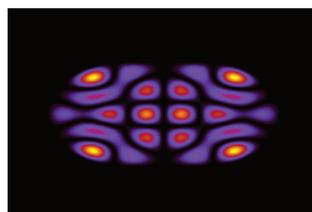
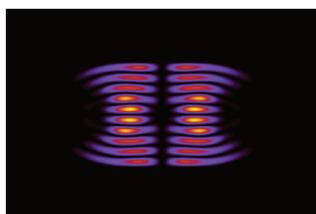
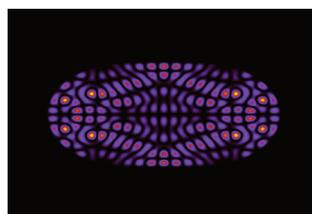
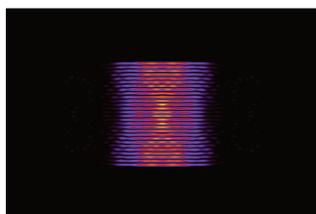
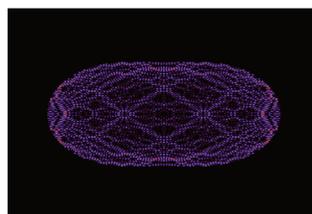
(a) $k = 2.7785$ (b) $k = 9.8280$ (c) $k = 16.1649$ (d) $k = 27.5863$ (e) $k = 44.0382$ (f) $k = 99.8037$

Figura 5.8: Densidade de probabilidade, $|\psi|^2$, para o bilhar estádio para diferentes valores de k .

Capítulo 6

Bilhares de neutrinos

6.1 Introdução

Nesta seção vamos estudar um problema de caos quântico relativístico. Nosso sistema em questão é um bilhar onde confinamos uma partícula sem massa de spin $1/2$, que recebeu o nome (hoje em dia não muito preciso) de bilhar de neutrinos [8]. A principal característica que diferencia um bilhar de neutrino dos bilhares quânticos não relativísticos com partículas sem spin é o fato de não haver simetria por inversão temporal, o que indica que a estatística dos níveis de energia para tais sistemas é dada pelo ensemble gaussiano unitário (GUE).

Embora 'bilhar de neutrino' soe como algo de interesse puramente teórico, com o advento do grafeno, é possível estudar tais tipos de bilhares experimentalmente [10].

Lembramos que podemos quebrar a simetria por inversão temporal no caso não relativístico aplicando um campo magnético (já que invertendo o sentido do tempo, as órbitas giram no sentido contrário). Mas no caso do bilhar de neutrinos não é necessário aplicar campos externos.

Na próxima seção vamos resumir alguns resultados sobre equações de onda relativísticas necessárias para nosso caso. Depois discutiremos o bilhar de neutrino, indicando como transpor o método da integral de contorno para o caso relativístico. Por fim mostraremos alguns resultados.

6.2 Equações de onda relativísticas

A equação de Schroedinger pode ser obtida a partir de relação de energia não relativística:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(r), \quad (6.1)$$

trocando os elementos da equações por operadores: $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ e $p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$. Isso nos sugere que para encontrar uma equações de onda relativística, podemos aplicar a

mesma *operacionalização* na relação de energia relativística, $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$, obtendo a equação de Klein-Gordon:

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi = 0. \quad (6.2)$$

Essa equação, quando vista como uma função para uma única partícula, apresenta vários problemas [7]. A começar, ela é uma equação de segundo grau na variável tempo, indicando que devemos especificar como condições iniciais $\psi(t=0)$ e também $\partial_t \psi(t=0)$. Temos soluções que aparentemente possuem energia negativa, e por fim, não é possível definir uma densidade de probabilidade positiva definida em todo o espaço. Todos esses *defeitos* citados somem quando percebemos que a equações de Klein-Gordon (6.2) deve ser tratada como um campo.

Históricamente, tentando *consertar* esses problemas (que na verdade indicavam a existência de uma teoria de muitas partículas, como se percebeu no decorrer do tempo), Dirac tentou encontrar uma equação de onda relativística em primeira ordem no tempo. Ele supôs a forma [7]:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{\hbar c}{i} (\hat{\alpha}_1 \partial_x + \hat{\alpha}_2 \partial_y + \hat{\alpha}_3 \partial_z) + mc^2 \hat{\beta} \right] \psi. \quad (6.3)$$

Aqui, $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3$ e $\hat{\beta}$ devem ser matrizes, caso contrário não poderíamos exigir que (6.3) fosse invariante a transformações de Lorentz.

Na verdade, ao impor que a equação (6.3) seja invariante por transformações de Lorentz, satisfaça a relação de energia momento relativística para a partícula livre e tenha uma equação de continuidade livre de problemas, vemos que as matrizes $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ devem satisfazer a álgebra:

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_i = 2\delta_{ij} \\ \hat{\alpha}_i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_i = 0 \\ \hat{\alpha}_i^2 = \hat{\beta}^2 = 1 \end{cases}$$

Podemos encontrar uma representação para essas matrizes [7]:

$$\hat{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Analogamente, a função de onda é dada pelo 4-vetor

$$\psi(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{x}, t) \\ \psi_2(\vec{x}, t) \\ \psi_3(\vec{x}, t) \\ \psi_4(\vec{x}, t) \end{pmatrix}.$$

A densidade de probabilidade $\rho(\vec{x}, t)$, definida como:

$$\rho(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}, t)^\dagger \psi(\vec{x}, t), \quad (6.4)$$

é positiva definida e a equação da corrente de probabilidade é:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0, \quad (6.5)$$

onde a corrente \vec{j} é dada por:

$$\vec{j} = c\psi^\dagger \hat{\alpha} \psi. \quad (6.6)$$

Embora a equação de Dirac, (6.3), seja mais 'comportada' do que a equação de Klein-Gordon, (6.2), ela ainda apresenta comportamento não físico. Essas incongruências são sinais da necessidade de uma teoria de campos [7].

Uma simplificação que usaremos mais adiante é em relação a dimensão das matrizes $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$. Num espaço tridimensional, a fim de que a equação de Dirac, (6.3), seja invariante por transformações de Lorentz, é necessária a utilização de matrizes de dimensão 4×4 . Entretanto, se estivermos num espaço 2D, precisamos apenas de três matrizes satisfazendo as relações de anticomutação. Com isso, podemos usar as matrizes de Pauli 2×2 , e escrever a Hamiltoniana da equação de Dirac como:

$$H = c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} + mc^2\sigma_z, \quad (6.7)$$

com $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$ e as matrizes de Pauli são:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\sigma}_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\sigma}_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obviamente a função de onda agora tem apenas dois componentes e a corrente de probabilidade é dada por:

$$\vec{j} = c\psi^\dagger \vec{\sigma} \psi \quad (6.8)$$

6.3 A equação de Dirac num bilhar 2D

Nesta seção, vamos discutir a equação de Dirac num bilhar. Como mencionado acima, vamos utilizar a Hamiltoniana (6.7). Devemos acoplar um potencial de modo a confinar a partícula numa região. A maneira mais fácil seria introduzir um potencial escalar eletromagnético ϕ . Porém, introduzindo esse tipo de potencial, acabamos tendo problemas com criação de pares [8, 7], e o sistema teria simetria por inversão temporal. Ao invés disso, vamos introduzir o potencial escalar através do acoplamento: $mc^2 \rightarrow mc^2 + V(r)$, e tomar o limite $m = 0$, sem perda de generalidade [8].

No interior do bilhar $V(\vec{r}) = 0$ e a equação de Dirac é:

$$\begin{bmatrix} 0 & \partial_x - i\partial_y \\ \partial_x + i\partial_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1(\vec{r}) \\ \psi_2(\vec{r}) \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \psi_1(\vec{r}) \\ \psi_2(\vec{r}) \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

onde introduzimos o número de onda $k = E/\hbar c$. Devemos ainda impor condições de contorno tais que (6.9) seja um operador hermitiano. Para isso, o valor esperado da Hamiltoniana deve ser real para qualquer estado. Sendo D o interior do bilhar e ∂D a parede do bilhar, temos:

$$E = \langle H \rangle = -i\hbar c \int \int_D dx dy \psi^* \hat{\sigma} \cdot \nabla \psi. \quad (6.10)$$

Usando a relação:

$$\nabla \cdot (\psi^* \hat{\sigma} \psi) = \nabla \psi^* \cdot \hat{\sigma} \psi + \psi^* \hat{\sigma} \cdot \nabla \psi \quad (6.11)$$

e o teorema de Gauss, podemos escrever a relação 6.10 como:

$$\Im(E) = -\frac{1}{2}\hbar c \oint_{\partial D} \hat{n} \cdot \vec{j}(s). \quad (6.12)$$

∂D foi parametrizado pelo comprimento de arco s , \hat{n} é a normal (para fora) e \vec{j} é a corrente de probabilidade (6.8). A partir da relação (6.12) podemos mostrar, por um processo algébrico longo, [8] que a condição de contorno para um bilhar de neutrinos é:

$$\frac{\psi_2}{\psi_1} = ie^{i\alpha(s)}, \quad (6.13)$$

onde ψ_i são as componentes do espinor de dois componentes e $\alpha(s)$ é o ângulo que a normal no ponto parametrizado por s faz com o eixo \hat{x} .

Devemos agora obter expressões para a densidade de estados do bilhar de neutrinos. Para o caso não relativístico, a densidade integrada até o valor E , $N(E)$ é dada pela formula de Weyl (4.13), que depende da área e do perímetro do bilhar.

Para computar $N(E)$ para o bilhar de neutrinos, começamos escrevendo a densidade como o traço do operador de Green [8, 3]:

$$d(k) = -\frac{1}{\pi} \Im \text{Tr} \hat{G}. \quad (6.14)$$

O operador \hat{G} é dado por:

$$\hat{G} = \frac{1}{k + i\epsilon^+ - \hat{\sigma} \cdot \vec{p}/\hbar}, \quad (6.15)$$

com $\epsilon^+ \rightarrow 0+$, e estamos usando o número de onda k . \hat{G} atua sobre espinores de 2 componentes, portanto é um operador matricial (função de \vec{r} e \vec{r}') de tamanho 2×2 . Assim, (6.14) pode ser escrito como:

$$d(k) = -\frac{1}{\pi} \int \int_D \Im [G_{11}(\vec{r}, \vec{r}') + G_{22}(\vec{r}, \vec{r}')] \quad (6.16)$$

No limite semiclássico, podemos adotar o operador de Green para a partícula livre [8]. Com isso, podemos fatorizar a função de Green numa forma muito simpática:

$$\langle \vec{r} | \hat{G} | \vec{r}' \rangle = (k + i\epsilon^+ - i\hat{\sigma} \cdot \nabla_r) \langle \vec{r} | (k + i\epsilon^+)^2 - \hat{p}^2/\hbar^2 | \vec{r}' \rangle. \quad (6.17)$$

Reconhecemos o termo $\langle \vec{r} | (k + i\epsilon^+)^2 - \hat{p}^2/\hbar^2 | \vec{r}' \rangle$ como a função de Green para a partícula não relativística (5.7). Substituindo (6.17) em (6.16) e tomando o limite $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$, obtemos, em primeira aproximação:

$$d(k) = \frac{Ak}{2\pi}, \quad (6.18)$$

com A sendo a área do bilhar. Em segunda aproximação temos que levar em conta a parede do bilhar. Para o caso não relativístico, teríamos o termo envolvendo o perímetro do bilhar em (4.13), [3]. Para o caso relativístico, é possível mostrar que esse termo é nulo [8]. Portanto, temos o resultado interessante que a densidade de estados depende apenas da área do bilhar, e não do seu perímetro.

6.4 Método da integral de contorno para bilhares de Neutrinos

Nesta seção vamos mostrar como adaptar o método da integral de contorno para o caso de bilhares de neutrino [8]. Isso pode ser facilmente conseguido, mostrando mais um ponto positivo do método.

Tomando a adjunta da equação de Dirac, (6.9), obtemos a equação:

$$k\psi^*(\vec{r}) - i\nabla_r \psi^*(\vec{r}) \cdot \hat{\sigma} = 0, \quad (6.19)$$

e $\psi^*(\vec{r}) = (\psi_1^*, \psi_2^*)$. A equação para a função de Green da partícula livre é:

$$kG^0(\vec{r}, \vec{r}') + i\hat{\sigma} \cdot \nabla_r G^0(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r}, \vec{r}') \quad (6.20)$$

Multiplicando (6.19) pela direita por G^0 e a equação (6.20) pela esquerda com ψ^* , somando ambas e integrando (em \vec{r}) na região D , e fazendo \vec{r}' na parede do bilhar, temos:

$$2i \int \int_D dx dy \nabla_r \cdot (\psi^* \hat{\sigma} G^0) = \psi^*(\vec{r}'), \quad (6.21)$$

A equação (6.21) é composta por duas equações, uma para cada componente ψ_i do espinor. Obviamente, elas são equivalentes uma à outra. Entretanto, tomando apenas uma, encontramos termos singulares devido a função de Hankel. Para contornar isso, podemos somar ambas, obtendo:

$$\begin{aligned} \psi_1^*(s') = \frac{ik}{4} \oint ds \psi_1^*(s) [(e^{i(\alpha' - \alpha)} - 1)(H_0^{(1)}(k\rho) + \\ [(\partial_n + i\partial_s)\rho + e^{i(\alpha' - \alpha)}(\partial_n + i\partial_s)\rho])H_1^{(1)}(k\rho)] \end{aligned} \quad (6.22)$$

com $\rho = |\vec{r}(s) - \vec{r}(s')|$ e (∂_n, ∂_s) as derivadas na direção normal e tangencial respectivamente. A partir da equação (6.23) podemos aplicar as mesmas técnica desenvolvidas para o caso não relativístico, discretização da parede do bilhar, obtenção do sistema numérico, etc.

6.5 Sistemas com espaço de fase misturados

Como na próxima seção pretendemos mostrar alguns resultados para bilhares de neutrino com espaço de fase clássico misturado, fazemos aqui uma pequena revisão sobre distribuições do espaçamento das energias para o caso misturado.

A maioria dos sistemas físicos não é totalmente regular, nem totalmente caótico. Geralmente coexistem no espaço de fases regiões regulares e caóticas. Vimos que para sistemas regulares, a distribuição $p(s)$ do espaçamento das energias segue a distribuição de Poisson e caso o sistema seja totalmente caótico será dado pelo distribuição de Wigner para os ensembles GOE ou GUE.

Esperamos que a distribuição da energia para um caso misturado seja algo entre as distribuições de Poisson e Wigner. Existem alguns *approaches* que lidam com esses casos. Aqui vamos nos ater a dois: As teorias de Brody e Berry Robnik [3].

Brody, de maneira fenomenológica [3], postulou que a densidade de probabilidade $r(s)$ para encontrar uma energia num intervalo de largura s é:

$$r(s) = As^\nu, \quad (6.23)$$

com os parâmetros A e ν sendo, respectivamente, uma constante de normalização da distribuição e o parâmetro a ser ajustado a partir da distribuição experimental. Com isso, pode-se mostrar que $p(s)$ é dada por:

$$p_B(s) = as^\nu e^{-\beta s^{\nu+1}}. \quad (6.24)$$

A distribuição (6.24) interpola entre Poisson, para $\nu = 0$ e Wigner GOE, para $\nu = 1$.

Entretanto, temos alguns problemas em relação a distribuição de Brody [3]: Primeiro, na dedução da equação (6.24), há uma falha lógica, que, no máximo, justifica qualitativamente seu resultado. Segundo, a distribuição falha para certos casos, como o ensemble GUE, onde a distribuição de Brody resultante não reproduz a queda da função no limite $s \gg 1$. Terceiro, podemos apontar a falta de um significado físico para o parâmetro ν .

A outra teoria que pretendemos discutir é a de Berry Robnik [3, 36], que tenta explicar as distribuições obtidas experimentalmente a partir de propriedades clássicas do sistema.

Berry e Robnik postularam que as contribuições de diferentes regiões (regulares ou caóticas) do espaço de fase não estão correlacionadas. Com isso, podemos calcular uma superposição de distribuições, cada uma com um peso estatístico dependente da fração ocupada pelo espaço de fase clássico. Por exemplo, suponha que o espaço de fase clássico contenha apenas uma região regular e uma região caótica, com densidades ρ_1 e ρ_2 . Segundo Berry e Robnik, a distribuição $p(s)$ para esse sistema é:

$$p(s) = [\rho_1^2 \operatorname{erfc}(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \rho_2 s) + (2\rho_1 \rho_2 + \frac{\pi}{2} \rho_2^3 s) e^{-\frac{\pi}{4} \rho_2^2 s^2}] e^{-\rho_1 s}, \quad (6.25)$$

com $\operatorname{erfc}(x)$ sendo a função erro complementar. É fácil observar que no limite $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$, obtemos a distribuição de Poisson, e para $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1$, a distribuição de Wigner para o ensemble GOE. Este método pode ser estendido para sistemas com espaço de fase dividido em várias regiões, com diferentes distribuições para cada sub-espectro correspondente.

Vale salientar que a hipótese de que o espectro de cada região se superpõe sem estar correlacionado não é verdade, pois o princípio da incerteza impede uma separação entre as regiões. Essa afirmação é, no máximo, aproximada.

Também lembramos que, a princípio, fazendo um ajuste da equação (6.25) com os dados experimentais, os valores de ρ_1 e ρ_2 deveriam coincidir com os valores medidos do espaço de fase. Entretanto, na literatura, os valores encontrados são apenas da mesma ordem de grandeza. É preciso ir a regiões extremamente semiclássicas no espectro para haver concordância entre os resultados [3, 36].

6.6 Resultados Numéricos

Nesta seção vamos mostrar alguns resultados numéricos para o bilhar de neutrinos. Escolhemos o bilhar formato África [8, 36]. Este bilhar tem sua parede dada pela equação

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \cos(\theta) + \lambda \cos(2\theta) + \lambda \cos(3\theta + \frac{\pi}{3}) \\ y(\theta) &= \sin(\theta) + \lambda \sin(2\theta) + \lambda \sin(3\theta + \frac{\pi}{3}), \end{aligned} \quad (6.26)$$

onde λ é um parâmetro que determina a forma do bilhar, indo desde um círculo (regular), para $\lambda = 0$, até o bilhar África (totalmente caótico) propriamente dito, para $\lambda = 0.2$. Para valores intermediários, temos um bilhar com espaço de fase misturado. Na figura 6.1 temos diferentes figuras do bilhar para diferentes valores de λ .

Outro fator em escolher esse formato de bilhar é poder estudar como as distribuições de Brody e Berry-Robnik se comportam para o caso relativístico. Em [36] foi estudado como se dá a distribuição $p(s)$ para bilhares tipo África com diferentes valores de λ (portanto, apresentando espaço de fase misturado), onde uma linha de fluxo magnético

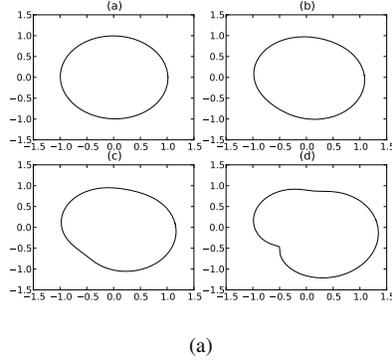


Figura 6.1: O bilhar tipo Africa para diferentes valores de λ . (a), $\lambda = 0.01$; (b), $\lambda = 0.055$; (c), $\lambda = 0.1$ e (d), $\lambda = 0.2$.

cuta o bilhar, quebrando a simetria por inversão temporal e gerando estatística do tipo GUE. Os autores chamam esse tipo de bilhar de *Aharonov-Bohm*. A dinâmica clássica (exceto por um conjunto de órbitas com medida zero) não é alterada. Eles calcularam as proporções ρ_1 e ρ_2 e testaram as distribuições de Brody e Berry-Robnik, obtendo o resultado de que, embora haja concordância qualitativa entre o resultado experimental e a distribuição de BR, teremos concordância quantitativa apenas para energias extremamente altas (um limite extremamente semiclássico).

Nossa proposta então é calcular, para diferentes valores de λ , o espectro desses bilhares utilizando o método da integral de contorno desenvolvido para os bilhares de neutrino. De posse do espectro, computamos a distribuição integrada $p(s)$ e comparamos o resultado com as distribuições de Brody e Berry-Robnik através de um ajuste por mínimos quadrados.

Para a distribuição de Brody, como mencionado acima, é impossível obter o comportamento assintótico da distribuição do ensemble GUE para $s \gg 1$. Por causa disso, o ajuste por mínimos quadrados foi feito dentro da faixa $0 \leq s \leq 0.5$, como na referência [36] (entretanto, analisamos o ajuste em toda a faixa de valores de s).

Para a distribuição de Berry-Robnik, comparamos os valores obtidos pelo ajuste de ρ_1 e ρ_2 com os calculados em [36], já que a dinâmica clássica é a mesma. De modo análogo a equação (6.25), que contém a superposição das distribuições de Poisson e Wigner-GOE, utilizamos uma distribuição contendo Poisson e Wigner-GUE, [36]

Na figura 6.2 temos o resultados para quatro valores de λ : Na figura 6.2a temos $\lambda = 0.01$, em 6.2c $\lambda = 0.055$, em 6.2e, $\lambda = 0.1$, e em 6.2g, $\lambda = 0.2$. Temos, além da distribuição experimental, as distribuições de Brody, Berry-Robnik, e Poisson ou Wigner-GUE, dependendo do caso. As figuras 6.2b, 6.2d, 6.2f e 6.2h mostram as diferenças entre os resultados teóricos e o resultado experimental.

Iniciamos nossa análise pela figura 6.2g, com $\lambda = 0.2$. Foram calculados 1386 níveis de energia. Para esse valor, temos um sistema clássico caótico, portanto a distribuição $p(s)$ deve ser do tipo Wigner-GUE. Vemos que, 6.2h, a distribuição é mesmo Wigner-GUE, e que BR consegue reproduzir fielmente o resultado. Já a distribuição de

λ	ρ_2^{cl}	ρ_2^{AB}	ν^{AB}	ρ_2 (Neutrino)	ν (Neutrino)
0.01	0.05	0.26	0.02	0.4272	0.1215
0.055	0.99	0.78	0.69	0.5804	0.3733
0.1	1.0	0.97	1.58	0.9516	1.3353
0.2	1.0	0.99	1.93	0.9973	1.7480

Tabela 6.1: Valores obtidos de ρ_2^{cl} , ρ_2^{AB} e ν^{AB} na referência [36] para o bilhar de Aharonov-Bohm e os valores de ρ_2 e ν que obtivemos para o bilhar de neutrinos África.

Brody, exceto no intervalo onde foi feito o ajuste, apresenta erros muito maiores.

Na figura 6.2e, temos $\lambda = 0.1$, e 1088 níveis de energia. Para esse valor, temos um sistema clássico misturado, portanto a distribuição $p(s)$ deve ser entre Poisson e Wigner-GUE. Vemos em 6.2f, que, exceto no intervalo $0 \leq s \leq 0.5$, ambas as distribuições, Brody e BR, são praticamente idênticas (e melhores que a distribuição GUE).

Na figura 6.2c, temos $\lambda = 0.055$, e 662 níveis de energia. Como antes, temos um sistema clássico misturado, portanto a distribuição $p(s)$ deve ser entre Poisson e Wigner-GUE. Vemos em 6.2d, que, até o valor de $s \approx 2$, os erros das distribuições de Brody e BR são aproximadamente iguais em módulo, sendo que para $s \geq 2$, BR apresenta melhores resultados do que Brody. E no geral, essas distribuições representam melhor os dados que a distribuição de Poisson.

Finalmente, na figura 6.2a, temos nosso último caso, com $\lambda = 0.01$, e 964 níveis de energia. Para este caso, estamos muito mais próximos de um sistema integrável, portanto a distribuição resultante deve ser próxima da distribuição de Poisson. Vemos em 6.2b, que, novamente, até o valor de $s \approx 2$, os erros das distribuições de Brody e BR são aproximadamente iguais em módulo, e que para $s \geq 2$, BR apresenta melhores resultados do que Brody. E no geral, essas distribuições representam melhor os dados que a distribuição de Poisson.

No geral, temos que o comportamento é qualitativamente o mesmo para o caso estudado em [36]. Enquanto que geralmente BR é melhor que Brody, para alguns casos, como 6.2e, para $\lambda = 0.1$, as duas distribuições tem resultados semelhantes.

Na tabela 6.1 temos os valores de ρ_2^{AB} e ν^{AB} , obtidos por um ajuste de curvas, para o bilhar de Aharonov-Bohm na referência [36] e os valores que nós obtivemos para o bilhar de neutrinos (ρ_2 e ν), bem como o valor medido do volume da região caótica (no espaço de fase clássico) ρ_2^{cl} , também calculado em [36].

Podemos ver que, em ambos os casos, não há uma concordância qualitativa entre ρ_2^{AB} e ρ_2 com o valor esperado ρ_2^{cl} (exceto quando $\rho_2^{cl} \rightarrow 1$). Embora, para os valores usados, o bilhar torna-se completamente caótico muito cedo (variando λ).

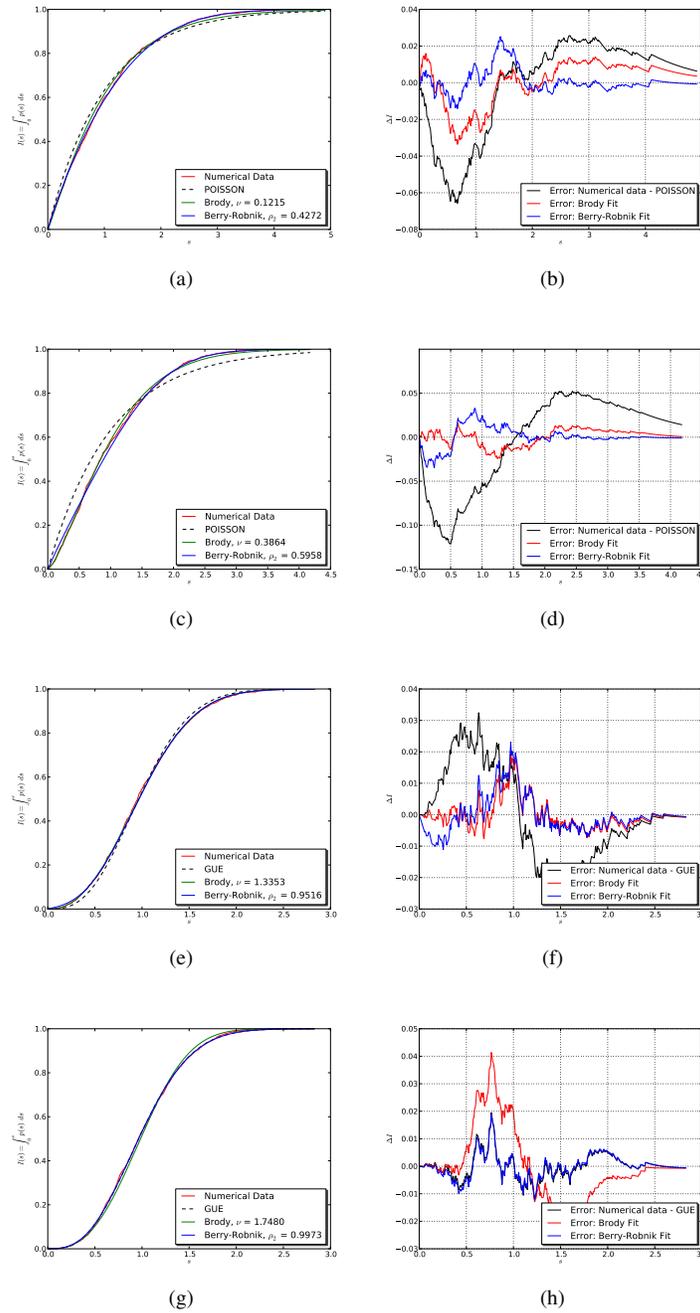


Figura 6.2: Distribuição integrada de $p(s)$ para o bilhar África (com diferentes valores de λ) e respectivos erros com as distribuições teóricas. Os valores escolhidos foram: $\lambda = 0.01$, 6.2a e 6.2b, $\lambda = 0.055$, 6.2c e 6.2d, $\lambda = 0.1$, 6.2e e 6.2f e $\lambda = 0.2$, 6.2g e 6.2h.

Capítulo 7

Considerações Finais

Neste trabalho, analisamos alguns tipos de bilhares usando relatividade especial. Para o caso clássico, de uma única partícula confinada numa região por paredes rígidas (e de massa muito maior que a da partícula), mostramos que diferenças entre a dinâmica Newtoniana e a dinâmica da relatividade especial surgem apenas quando a parede não é estática, sugerindo o estudo da aceleração de Fermi em tais sistemas. Analisamos alguns tipos de bilhares, regulares e caóticos, procurando se existe ou não aceleração de Fermi para tais tipos.

Acreditamos que nossos resultados em relação a aceleração de Fermi relativística sejam novos e interessantes.

Estudamos também o bilhar de neutrino, introduzido na década de 1980 por Berry e Mondragon. Para poder compreender esse trabalho, estudamos a teoria de caos quântico e o método numérico da integral de contorno para calcular as energias de bilhares. Calculamos então o espectro para alguns bilhares com espaço de fase misturado e verificamos a validade das distribuições de Brody e Berry Robnik.

Seria interessante estudar alguns outros *setups* onde efeitos relativísticos se apresentariam. Como um exemplo, no caso de mais de uma partícula confinada num bilhar, a colisão entre elas se comporta de maneira diferente quando tratada usando relatividade especial (comparada à dinâmica Newtoniana). Também citamos como interessante, estudar a versão quântica desses tipos de bilhares.

Apêndice A

Script para análise de espectros

Incluimos neste apêndice um *script* na linguagem Python [37] para análise do espectro de bilhares quânticos. Todas as figuras nessa dissertação foram feitas com ele. Ele pode ser usado tanto para bilhares não relativísticos quanto para o caso relativístico. O código também analisa sistemas com espaço de fase misturado, sendo possível utilizar tanto as distribuições de Brody quanto Berry Robnik.

```
#
#
# SpecStat: A collection of spectral's statistical functions for
# relativistic and non-relativistic quantum billiards.
#
# For a review, see:
# 1) A. Baecker: Numerical Aspects of Eigenvalue and Eigenfunction
#    Computations for Chaotic Quantum Systems
#
# 2) M. V. Berry & R. J. Mondragon: Neutrino Billiards
#
# For mixed phase space billiards, see:
# 3) H. J. Stoeckmann: An introduction to quantum chaos
#
from numpy import *
from math import pi

from scipy.integrate import quad

from scipy import optimize

import scipy.special
from scipy.special import exp
from scipy.special import erf

from pylab import *
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.mlab as mlab

from matplotlib import legend

def poisson(s):
    """Define poisson nnd distribution.
    """
    return exp(-s)

def goe(s):
    """Defines goe nnd distribution.
    """
    return 0.5*math.pi*s*exp(-0.25*math.pi*s*s)

def gue(s):
    """Defines gue nnd distribution.
    """
    return (32/(math.pi**2))*s*s*exp(-(4/math.pi)*s*s)
```

```

def gse(s):
    """Defines gse nnd distribution.
    """
    PI = math.pi
    return ((2**18)/((3**6)*(PI**3)))*(s**4)*exp(-(64/(9*PI))*(s**2))

def brody(s, v):
    """Defines the Brody distribution.
    """
    a_v = scipy.special.gamma((v + 2.0)/(v + 1.0))
    a_v = a_v*(v + 1.0)

    res = (1.0 + v)*a_v*(s**v)*exp(-a_v*(s**(v + 1.0)))
    return res

def berry_robnik(s, r2):
    """Defines the Berry Robnik distribution
    for a superposition of a Poisson and a GUE dist.
    """
    PI = math.pi
    r1 = 1 - r2

    res = (32.0/(PI**2))*(r2**4)*(s**2) + (8/PI)*r1*r2*r2*s + r1**2
    res = res*exp(-(4.0/PI)*(r2*s)**2)
    res = res + (2*r1*r2 - r1*r1*r2*s)*(1 - erf(2*r2*s*(PI**-0.5)))
    return res*exp(-r1*s)

def test_brody(v):
    """Plots the Brody nnd with gaussian ensembles.
    """

    s = linspace(0, 5, 200)

    plt.figure(1)
    plt.plot(s, brody(s,v), 'r.-', label="Brody, v = " + str(v))
    plt.plot(s, goe(s), 'b', label = 'GOE')
    plt.plot(s, gue(s), 'k', label = 'GUE')
    plt.plot(s, gse(s), 'g', label = 'GSE')

    plt.legend(loc=4, ncol=1, shadow=False)
    plt.xlabel('s')
    plt.ylabel('P(s)')

    plt.show()

def test_br(r2):
    """Plots the Brody nnd with gaussian ensembles.
    """

    s = linspace(0, 5, 200)

    plt.figure(1)
    plt.plot(s, berry_robnik(s,r2), 'r.-', label="Berry-Robnik, v = " + str(r2))
    plt.plot(s, poisson(s), 'y', label = 'Poisson')
    plt.plot(s, goe(s), 'b', label = 'GOE')
    plt.plot(s, gue(s), 'k', label = 'GUE')
    plt.plot(s, gse(s), 'g', label = 'GSE')

    plt.legend(loc=4, ncol=1, shadow=False)
    plt.xlabel('s')
    plt.ylabel('P(s)')

    plt.show()

def weyl_law(A, L, C, data, spacing = 100):
    """Plots the experimental spectral staircase with
    the expected Weyl formula.
    """

    # Loads data from a file.
    k = loadtxt(data)
    k = sqrt(sort(k))

    temp = 1.0/(4*math.pi)

    points = linspace(0, max(k), spacing)
    counts = zeros(points.shape[0])

    weyl = (A*temp)*points*points - (L*temp)*points + C

    for i in range(0, len(counts)):

```

```

        for j in range(0, len(k)):
            if k[j] < points[i]:
                counts[i] = counts[i] + 1

plt.figure(1)
plt.plot(points*points, counts, 'ro', label="Numerical Data")
plt.plot(points*points, weyl, 'b', linewidth = 2.0, label="Theoretical")
plt.xlabel('$k^2$')
plt.ylabel('$N(k)$')
plt.legend(loc=4, ncol=2, shadow=True)

plt.figure(2)
plt.plot(points*points, weyl-counts, 'k')
plt.xlabel('$k^2$')
plt.ylabel('$N_{Weyl} - N_{obs}$')
plt.grid(True)

plt.show()

print 'Mean value of N_fluc: ', mean(weyl-counts)

return None

def spacing(A, L, C, k):
    """Computes the nearest neighbour spacing distribution.

    First, we normalize the k's using Weyl law in order to obtain
    a spectra with mean nnd equal to 1 (setting hbar = 1 = 2m).
    After that we compute the neighbor distances. It can be
    utilized for relativistic and non-relativistic billiards,
    the latter with vanishing perimeter contribution, and C = -1/12.
    """

    # Prefactor Weyl Law.
    temp = 1.0/(4*math.pi)

    # First, normalize the eigenvalues using Weyl Law.
    # for relativistic billiards, the perimeter correction
    # vanishes, L = 0.
    normalized = zeros(k.shape[0])
    normalized = (A*temp)*k*k - (L*temp)*k + C

    ps = zeros(k.shape[0]-1)

    for i in range(0, k.shape[0] - 1):
        ps[i] = normalized[i+1] - normalized[i]

    return ps

def plot_histogram(ensemble, data, A, L, C, start = 0, end = 5, bins = 50, v = 0, r2 = 0):
    """Plots the histogram of the nearest neighbor spacing distribution.

    Add a description here.
    """

    s = linspace(start, end, 100)

    if 'goe' in ensemble:
        ps = goe(s)
        plt.plot(s, ps, 'r', label = 'GOE')
    if 'gue' in ensemble:
        ps = gue(s)
        plt.plot(s, ps, 'b', label = 'GUE')
    if 'gse' in ensemble:
        ps = gse(s)
        plt.plot(s, ps, 'k', label = 'GSE')
    if 'poisson' in ensemble:
        ps = poisson(s)
        plt.plot(s, ps, 'g', label = 'Poisson')
    if 'brody' in ensemble:
        ps = brody(s, v)
        plt.plot(s, ps, 'c', label = r'Brody, $ \nu $ = ' + str(v)[0:6])
    if 'br' in ensemble:
        ps = berry_robniak(s, r2)
        plt.plot(s, ps, 'm', label = r'Berry-Robnik, $ \rho_2 $ = ' + str(r2)[0:6] )

    plt.legend(loc = 1, ncol=1, shadow = True)

    # Loads data from a file.
    k = loadtxt(data)
    k = sqrt(sort(k))

    plt.hist(spacing(A, L, C, k), bins, facecolor='white', normed = 1)

```

```

print "Mean spacing: ", spacing(A, L, C, k).mean()

plt.xlabel('s')
plt.ylabel('P(s)')

plt.grid(True)
plt.show()

return None

def trap(a, b, N, v):
    """
    Trapezoidal integration rule for the Brody
    distribution.
    """
    res = 0.0
    s = 0.0
    h = (b-a)/float(N)

    for i in range(1, N, 2):
        s = s + 4.0*brody(a + i*h, v)

    for i in range(2, N, 2):
        s = s + 2.0*brody(a + i*h, v)

    res = (h/3.0)*( brody(a, v) + brody(b, v) + s )

    return res

def trap2(a, b, N, r2):
    res = 0.0
    s = 0.0
    h = (b-a)/float(N)

    for i in range(1, N, 2):
        s = s + 4.0*berry_robnik(a + i*h, r2)

    for i in range(2, N, 2):
        s = s + 2.0*berry_robnik(a + i*h, r2)

    res = (h/3.0)*( berry_robnik(a, r2) + berry_robnik(b, r2) + s )

    return res

def inte_nnd(ensemble, data, A, L, C, brody = 0, br = 0, endfit = 0, dist = 100):
    """
    Computes the integrated nearest neighbour distribution.
    """

    # Loads data from a file.
    k = loadtxt(data)
    k = sqrt(sort(k))

    ps = spacing(A, L, C, k)

    points = linspace(0, max(ps), dist)
    counts = zeros(points.shape[0])
    i_ps = zeros(points.shape[0])

    # Computes the cumulative distribution from data.
    for i in range(0, len(counts)):
        for j in range(0, len(ps)):
            if ps[j] < points[i]:
                counts[i] = counts[i] + 1

    # Computes the expected integrated nnd.
    if ensemble == 'goe':
        for i in range(0, len(points)):
            i_ps[i] = quad(goe, 0, points[i])[0]
    elif ensemble == 'gue':
        for i in range(0, len(points)):
            i_ps[i] = quad(gue, 0, points[i])[0]
    elif ensemble == 'gse':
        for i in range(0, len(points)):
            i_ps[i] = quad(gse, 0, points[i])[0]
    elif ensemble == 'poisson':
        for i in range(0, len(points)):
            i_ps[i] = quad(poisson, 0, points[i])[0]
    else:
        print 'Error, unknow ensemble'

```

```

# Brody distribution optimization.
if brody == 1 :
    brody_cum = lambda v, s: trap(0, s, 400, v)
    errfunc = lambda v, s, y: brody_cum(v, s) - y

    # The initial guess is the parameter from the gaussian ensemble.
    if ensemble == 'poisson':
        v_init = 0
    elif ensemble == 'goe':
        v_init = 1
    elif ensemble == 'gue':
        v_init = 2
    elif ensemble == 'gse':
        v_init = 4

    # Select the range to do the fit
    if endfit != 0:
        fim = 0
        while points[fim] <= endfit:
            fim = fim + 1
    else:
        fim = len(ps)

    v_opt, success = optimize.leastsq(errfunc, v_init, args=(points[0:fim], counts[0:fim]/len(ps)))
    print 'The optimized v is: ', v_opt, success

# Berry-Robnik distribution optimization.
if br == 1:
    br_cum = lambda r2, s: trap2(0, s, 400, r2)
    errfunc = lambda r2, s, y: br_cum(r2, s) - y

    r2_opt, success = optimize.leastsq(errfunc, 0.5, args=(points, counts/len(ps)))
    print 'The optimized rho_2 is: ', r2_opt, success

# Plots figures with resulting integrated nnd.
plt.figure(1)
p1, = plt.plot(points, counts/len(ps), 'r-', label = "Numerical Data")
p2, = plt.plot(points, i_ps, 'k--', label = ensemble.upper())

if brody == 1 and br == 0:
    p3, = plt.plot(points, trap(0, points, 600, v_opt), 'g-', label = r'Brody, $ \nu $ = ' + str(v_opt)[0:6] )
elif br == 1 and brody == 0:
    p3, = plt.plot(points, trap2(0, points, 600, r2_opt), 'g-', label = r'Berry-Robnik, $ \rho_2 $ = ' + str(r2_opt)[0:6] )
elif br == 1 and brody == 1:
    p3, = plt.plot(points, trap(0, points, 600, v_opt), 'g-', label = r'Brody, $ \nu $ = ' + str(v_opt)[0:6] )
    p4, = plt.plot(points, trap2(0, points, 600, r2_opt), 'b-', label = r'Berry-Robnik, $ \rho_2 $ = ' + str(r2_opt)[0:6] )

plt.xlabel('$s$')
plt.ylabel('$I(s) = \int_0^s \! p(s) \, ds$')
plt.legend(loc = 4, ncol=1, shadow = True)

# Plots figures with errors.
plt.figure(2)
p1, = plt.plot(points, counts/len(ps) - i_ps, 'k', label = 'Error: Numerical data - ' + ensemble.upper() )

if brody == 1 and br == 0:
    p2, = plt.plot(points, counts/len(ps) - trap(0, points, 600, v_opt), 'r', label = 'Error: Brody Fit')
elif br == 1 and brody == 0:
    p2, = plt.plot(points, counts/len(ps) - trap2(0, points, 600, r2_opt), 'r', label = 'Error: Berry-Robnik Fit')
elif br == 1 and brody == 1:
    p2, = plt.plot(points, counts/len(ps) - trap(0, points, 600, v_opt), 'r', label = 'Error: Brody Fit')
    p3, = plt.plot(points, counts/len(ps) - trap2(0, points, 600, r2_opt), 'b', label = 'Error: Berry-Robnik Fit')

plt.xlabel('$s$')
plt.ylabel('$\Delta I$')
plt.legend(loc = 4, ncol=1, shadow = True)
plt.grid(True)

plt.show()

return None

```

Referências Bibliográficas

- [1] J. Gleick, *Chaos: Making a New Science*, Penguin, (1988).
- [2] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, (2002).
- [3] H. J. Stoeckman, *Quantum chaos, an introduction*, Cambridge University Press, (1999).
- [4] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, Wiley, (1998).
- [5] G. Casati, B. V. Chirikov, F. M. Izraelev, J. Ford, Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation, *Lecture Notes in Physics*, Springer 93, 334 (1979).
- [6] M. V. Berry, Regularity and Chaos in Classical Mechanics, Illustrated by Three Deformations of a circular Billiard, *Eur. J. Phys.* 2, 91-102 (1981).
- [7] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics Wave Equations*, Springer-Verlag, (2000).
- [8] M. V. Berry, R. J. Mondragon, Neutrino billiards: time-reversal symmetry-breaking without magnetic field, *Proc. R. Soc. Lond. A* 412, 53-74 (1987).
- [9] A. M. Odlyzko, On the distribution of spacings between zeros of the zeta function, *Math. Comp.* 48, (1987).
- [10] L. A. Ponomarenko, F. Schedin, M. I. Katsnelson, R. Yang, E. W. Hill, K. S. Novoselov, A. K. Geim, Chaotic Dirac Billiard in Graphene Quantum Dots, *Science* 320, 5874 (2008).
- [11] D. U. Matrasulov, G. M. Milibaeva, U. R. Salomov, B. Sundaram, Relativistic kicked rotor, *Phys. Rev. E* 72, 016213, (2005).
- [12] J. Bolte and J. Harrison, Spectral Statistics for the Dirac Operator on Graphs, *J. Phys. A* 36, 2747 (2003).
- [13] I. Kosztin, K. Schulten, Boundary Integral Method for Stationary States of Two-Dimensional Quantum Systems, *Int. J. Mod. Phys. C* 8, 2 (1997).
- [14] A. Bäcker, Numerical aspects of eigenvalue and eigenfunction computation for chaotic quantum systems.

- [15] E. Fermi, On the Origin of the Cosmic Radiation, *Phys. Rev.* 75, 1169 (1949).
- [16] R. E. de Carvalho, F. C. Souza, E. D. Leonel, Fermi acceleration on the annular billiard, *Phys. Rev. E* 73, 066229 (2006).
- [17] F. Lenz, F. K. Diakonov, P. Schmelcher, Tunable Fermi Acceleration in the Driven Elliptical Billiard, *Phys. Rev. Lett.* 100, 014103 (2008).
- [18] A. Loskutov, A. B. Ryabov, L. G. Akinshin, Properties of some chaotic billiards with time-dependent boundaries, *J. Phys. A: Math. Gen.* 33, 7973 (2000).
- [19] A. Loskutov, A. Ryabov, Particle Dynamics in Time-Dependent Stadium-Like Billiards, *J. Stat. Phys.* 108 (2002).
- [20] S. O. Kamphorst, S. P. de Carvalho, Bounded gain of energy on the breathing circle billiard, *Nonlinearity* 12, 1363 (1999).
- [21] L. A. Bunimovich, The ergodic properties of certain billiards. *Funct. Anal. Appl.* 8, 73-74 (1974).
- [22] A. Bäcker, H. R. Dullin, Symbolic dynamics and periodic orbits for the cardioid billiard, *J. of Phys. A: Math. Gen.* 30, 6 (1997).
- [23] L. A. Bunimovich, On ergodic properties of nowhere dispersing billiards, *Commun. Math. Phys.* 65, 295-312 (1979).
- [24] A. J. Lichtenberg, M. A. Leiberman, Regular and chaotic dynamics, Springer-Verlag, New York, (1994).
- [25] L. D. Pustynnikov, *Theoret. Math. Phys.* 77 (1), 1110-1115 (1988).
- [26] L. D. Pustynnikov, *Russ. Math. Surv.* 50, 145 (1995).
- [27] M. V. Deryabin, L. D. Pustynnikov, *Reg. Chaot. Dyn.* 8, 283-296 (2003).
- [28] M. V. Deryabin, L. D. Pustynnikov, *Lett. Math. Phys.* 63(3), 195-207 (2003).
- [29] M. V. Deryabin, L. D. Pustynnikov, *Commun. Math. Phys.* 248, 527-552 (2004).
- [30] H. Essen, Note on the relativistic elastic head-on collision, *Eur. J. Phys* 23, 565 (2002).
- [31] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, London, (1975).
- [32] M. L. Tiago, T. O. Carvalho, M. A. M. de Aguiar, Boundary Integral method for quantum billiards in a constant magnetic field, *Phys. Rev. E* 55, 1 (1997).
- [33] K. Hornberger, U. Smilansky, The Boundary integral method for magnetic billiards, *J. Phys. A: Math. Gen.* 33, 14, (2000).
- [34] G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier, (2005).

- [35] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. Vetterling, Numerical Recipes in C, Cambridge University Press, (1992).
- [36] M. Robnik, J. Dobnikar, T. Prosen, Energy level statistics in the transition regime between integrability and chaos for systems with broken antiunitary symmetry, J. Phys. A: Math. Gen. 32, 8, (1997).
- [37] www.python.org