

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Física "Gleb Wataghin"

Perturbação não-linear de alguns kinks em 1+1 dimensões

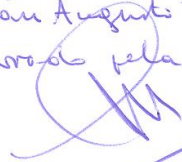
Autor: Hernán Augusto Piragua Ariza

Orientador: Prof. Dr. Patricio Anibal Letelier Sotomayor

Dissertação de Mestrado

Agosto 2010

Este exemplar corresponde à
redação final da dissertação
de mestrado defendida pelo
aluno Hernán Augusto Piragua
Ariza e aprovada pela Comissão
Julgadora.


19-08-2010

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

P664p Piragua Ariza, Hernán Augusto
Perturbação não-linear de alguns *kinks* em 1+1 dimensões /
Hernán Augusto Piragua Ariza. -- Campinas, SP : [s.n.], 2010.

Orientador: Patricio Anibal Letelier Sotomayor.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1 1. Kinks. 2. Galerkin, Métodos de. 3. Diferenças finitas.
2 4. Estabilidade. 5. Defeitos topológicos. I. Letelier Sotomayor,
3 Patricio Anibal. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto
4 de Física "Gleb Wataghin". III. Título.
5

6 (vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Nonlinear perturbation of som kinks in 1+1 dimensions
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 - 1. Kinks
 - 2. Galerkin methods
 - 3. Finite differences
 - 4. Stability
 - 5. Topological defects
- **Área de Concentração:** Física Clássica e Física Quântica: Mecânica e Campos
- **Titulação:** Mestre em Física
- **Banca Examinadora:**
 - Prof. Patricio Anibal Letelier Sotomayor
 - Prof. Marcus Aloizio Martinez de Aguiar
 - Prof. Maximiliano Ujevic Tonino
- **Data da Defesa:** 16-08-2010
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **HERNÁN AUGUSTO PIRAGUA ARIZA 087201** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 16 / 08 / 2010.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Patrício Anibal Letelier Sotomayor- Orientador do Candidato
IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. Maximiliano Ujevic Tonino – CCNH - UFABC

Prof. Dr. Marcus Aloizio Martinez de Aguiar – DFMG/IFGW/UNICAMP

Agradecimentos

A meus pais, a quem eu devo tudo.

A meu orientador Prof. Letelier, que me guiou.

A meus amigos, que me suportaram.

A CNPq e FAPESP pelo apoio financeiro.

A Prof. Carola Dobrigkeit Chinellato que corrigiu este documento.

Resumo

Neste trabalho foram realizadas duas tarefas. Na primeira delas, comparamos a estratégia de Linhares e Oliveira para a evolução temporal do kink $\lambda\phi^4$, que usa o método de Galerkin e um mapeamento, com o método de diferenças finitas em um intervalo finito. Achamos que a dinâmica é diferente nos dois casos. Encontramos que o método com mapeamento não é apropriado para a evolução do sistema. A segunda consistiu em utilizar o método de diferenças finitas para perturbar alguns kinks de um, dois e três campos, em uma dimensão espacial. Foi mostrada a estabilidade ou instabilidade dos kinks. Para o caso em que os kinks foram instáveis, achamos o produto de decaimento deles.

Abstract

In this dissertation we did two things. First, we compared the Linhares and Oliveira approach for the temporal evolution of the $\lambda\phi^4$ kink, which uses the Galerkin method and a domain mapping, with the method of finite differences in a finite interval. It was found that the dynamics in these two cases were different. We found that the mapping method was not appropriated for the evolution of these kind of systems. The second part was the use of the finite difference method to perturb some kinks of one, two and three scalar fields in one spacial dimension. It was shown the (in)stability of the kinks. When they were unstable, it was found their decay products.

Sumário

1	Sobre Kinks e alguns modelos	2
1.1	Definição	2
1.2	Como obter em ondas solitárias 1+1 dimensões	4
1.3	Dois ou mais campos	8
1.3.1	Equivalente Mecânico integrável	8
1.3.2	Método de superpotencial	8
1.4	Estabilidade linear	10
1.4.1	Para um campo	10
1.4.2	Estabilidade linear de $\lambda\phi^4$	10
1.4.3	Para dois campos	11
1.4.4	Estabilidade linear com superpotencial	11
1.5	Índices topológicos	12
1.5.1	Setores topológicos de $\lambda\phi^4$	13
1.6	Sobre Breathers e Oscillons	13
1.6.1	Modelo Seno-Gordon	13
1.6.2	Breathers em $\lambda\phi^4$ - Oscillons	16
1.7	Modelo MSTB	16
1.8	Modelo BNRT	19
1.9	Modelo Sigma massivo não linear	21
2	Métodos Numéricos	26
2.1	Métodos em séries	26
2.2	Galerkin	27
2.3	Diferenças Finitas	27
2.3.1	Explícito e implícito	29

2.3.2	Da consistência, convergência e estabilidade	30
2.3.3	Outras propriedades de esquemas numéricos	31
2.3.4	Alguns esquemas	32
3	Comparação entre métodos	34
3.1	Repetindo o artigo de Linhares e Oliveira	34
3.1.1	Trabalho de Linhares e Oliveira	34
3.1.2	Repetindo	36
3.2	Comparando com diferenças finitas	37
3.3	Exemplo da onda	41
3.4	Métodos Espectrais e Mapeamentos	44
3.4.1	Mapeamento hiperbólico	45
3.4.2	Mapeamento Racional	46
4	Estabilidade de alguns kinks	48
4.1	$\lambda\phi^4$	49
4.2	MSTB	52
4.3	BNRT	55
4.4	Modelo Sigma massivo não linear	60
5	Conclusões	68

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de potenciais.	6
1.2	Potencial, kink e densidade de energia de ϕ^4	7
1.3	Potencial e kink de potencial Seno-Gordon.	14
1.4	$\bar{\phi}_{SA}$ para os tempos, a) -10 , b) -0.5 e c) 5	15
1.5	$\bar{\phi}_{SS}$ para os tempos, a) -10 , b) -0.5 e c) 5	15
1.6	A solução do Breather para os tempos, a) -5 , b) -0.5 e c) 5	16
1.7	O kink TK1 em a) e o TK2 em b).	17
1.8	Kinks of MSTB.	18
1.9	Kinks BNRT.	21
1.10	Kinks K1 linha cruza o eixo ϕ_2 , K2 é a linha que cruza o eixo ϕ_1 . Figura tomada do artigo [1].	24
1.11	Kinks NTK, quando temos $\sigma = 0.7$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$, $\gamma_1 = 0$ e $\gamma_2 = 0$ na esquerda, $\gamma_2 = 5$ no centro e vários valores de γ_2 na mesma figura, que mostra que todas as trajetórias passam pelo mesmo ponto. Figura tomada de [2].	25
2.1	Esquema de 5 pontos.	30
2.2	Exemplo de um esquema implícito.	30
3.1	Em a) temos o kink mais a perturbação na coordenada x . Em b) temos a perturbação gaussiana na coordenada ξ , e as aproximações dela com $N=4$, $N=7$ e $N=11$, usando os parâmetros $A_0 = 0.4$, $\sigma = 0.2$, $\xi_0 = -0.562$ e $b = 1.5$ nos dois casos.	36
3.2	Em a) e b) temos a evolução temporal do coeficiente $a_0(t)$, até $T = 100$ e $T = 2000$ respectivamente. Em c) mostra-se a evolução temporal de $a_3(t)$ até $T = 150$. Todos elas são calculadas com parâmetros $A_0 = 0.4$, $\sigma = 0.2$, $\xi_0 = -0.562$ e $b = 1.5$	36

3.3	Espectro de potência para perturbação media, para amplitudes $A_0 = 0.08, 0.2$ e 0.7 nas figuras a), b) e c) respectivamente.	37
3.4	Evolução temporal do kink e a perturbação para vários tempos.	38
3.5	Energia total até $t=10$	38
3.6	Evolução temporal usando o esquema de 5 pontos.	40
3.7	Energia total fazendo a evolução com o esquema de 5 pontos.	40
3.8	Evolução temporal usando o esquema de 9 pontos implícito.	42
3.9	Energia total fazendo a evolução com o esquema de 9 pontos implícito.	42
3.10	Evolução temporal usando o esquema de Strauss.	43
3.11	E e G fazendo a evolução com o esquema de Strauss.	43
3.12	Evolução temporal da equação de onda com um perfil gaussiano inicial.	43
3.13	Evolução temporal depois de tempo $t = 2$	44
3.14	Mapeamento tanh.	45
3.15	Distância máxima vs N_x	46
3.16	Vários s.	46
3.17	Para o mapeamento racional.	47
4.1	Energia da perturbação dissipada em radiação.	49
4.2	Temos um oscillon e um kink quando a perturbação é maior, $A \sim 1$	50
4.3	Se a energia é maior do que quatro vezes a energia do kink, podemos ter kinks e anti-kinks.	50
4.4	Nesta figura temos energias da ordem de 70 vezes a energia do kink. Quando estamos nos primeiros tempos, a oscilação do campo é em torno de $\phi = 0$. Isto mostra que o potencial duplo é ignorado.	51
4.5	Quando a amplitude das oscilações é da ordem da unidade, temos criação de estruturas.	51
4.6	Quando a perturbação é estreita, a energia é dissipada em radiação que viaja quase à velocidade c	52
4.7	Dependendo dos parâmetros da perturbação temos diferentes cenários na evolução.	53
4.8	Decaimento do kink TK1 quando é perturbado no campo ϕ_2 . Na figura da esquerda temos o campo ϕ_2 nos tempos $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ de baixo para cima. Na direita, temos o desenho paramétrico. A perturbação inicial tem $A = 0.05$ e $\Omega^2 = 0.5$	54

4.9	Decaimento do kink NTK2, quando perturbamos no campo ϕ_1 com $A = 0.01$, $b = 0.1$, de baixo para cima para os tempos $t = 0$, $t = 10$, $t = 20$ e $t = 30$. Na figura da direita o círculo cresce para tempos posteriores. Parâmetros $\Omega^2 = 0.25$, $\gamma = 0$	55
4.10	Alguns cenários ao perturbar o kink TK2 do MSTB. Na esquerda temos a inversão do campo ϕ_2 , e no centro e direita temos o campo ϕ_1 e a densidade de energia, o que parece ser um oscillon. $\Omega^2 = 0.5$	56
4.11	Quando perturbamos com muita energia a TK2 temos criação de kinks e antikinks. $\Omega^2 = 0.5$	56
4.12	Se perturbamos o kink TK1AA com uma amplitude “menor” o kink decai a um kink TKAA(c). Nesta figura mostram-se os campos de baixo para cima para os tempos $t = 0$, $t = 10$, $t = 20$ e $t = 30$	57
4.13	Evolução da perturbação para o mesmo cenário da figura 4.12 mostrando parametricamente os campos para os tempos $t = 0$, $t = 10$, $t = 40$ e $t = 80$	57
4.14	Se perturbamos o kink TK1AA com uma amplitude “maior”, o kink decai a um kink TKAB e um TKBA. Nesta figura mostram-se os campos de baixo para cima para para os tempos $t = 0$, $t = 10$, $t = 20$ e $t = 30$	58
4.15	Evolução da perturbação para o mesmo cenário da figura 4.14 mostrando parametricamente os campos para os tempos $t = 0$, $t = 10$, $t = 20$ e $t = 30$	58
4.16	Os dois cenários, decaimento e não decaimento ao perturbar o kink TK1. Os círculos mostram quando temos decaimento em TKAB e TKBA. Os triângulos indicam quando temos decaimento em um kink TK2(c) e os quadrados laranjas são cenários em que pelo tempo simulado ainda não sabemos se decai ou não. As linhas são de energia constante com valores $\overline{1.01}$, 1.02 , 1.05 , $\overline{1.1}$, 1.2 , 1.3 , 1.4 e $\overline{1.5}$, onde os valores com linhas acima são aqueles de linhas contínuas. Tempo total em cada um deles, $t_f = 300$	59
4.17	Evolução em $t = 95$ do kink TK2AA. Temos criação de kinks TKAB, TKBA e seus anti-kinks.	61
4.18	Se a perturbação é maior temos criação de kinks TKAB, TKBA e seus anti-kinks é mais provável que os campos liguem os quatro vácuos.	61
4.19	Projeção estereográfica.	62
4.20	Inestabilidade numérica para dois tempos, $t = 52$ (direita) e $t = 53$ (esquerda) do decaimento do kink K2. As pequenas instabilidades crescem muito em uma unidade de tempo.	65

- 4.21 Figura paramétrica do decaimento do kink $K2^*$ quando é perturbado levemente ($A = 0.01$) na direção $\hat{\phi}$. Na parte de cima temos as primeiras 5 unidades de tempo, e na de baixo, depois de 35 unidades de tempo. 66
- 4.22 Campo ϕ_3 em decaimento do kink NTK quando temos $\gamma_2 = 0$ de baixo para acima nos tempos $t = 0$, $t = 5$, $t = 10$ e $t = 15$, lembrando que os vácuos do sistema são $\phi_3 = 1$ (pólo Norte) e $\phi_3 = -1$ (pólo Sul). 67
- 4.23 Decaimento de NTK em kinks $K1$ e $K1^*$. Na esquerda mostra-se o campo ϕ_3 para tempos de baixo para cima para $t = 0$, $t = 5$, $t = 10$ e $t = 15$. Na direita temos oscilações em torno do kink $K1$ e do antikink $K1^*$ 67

Notação

Usamos a notação de soma de Einstein: índices repetidos indicam soma. Os índices gregos incluem o zero e os índices latinos começam em um. Adotamos notação de números americana, isto é, os números usam o ponto (.) em vez da vírgula(,) . Finalmente, derivadas parciais foram notadas pelo símbolo ∂ e algumas vezes pelo subíndice, por exemplo ϕ_x é igual a $\partial_x \phi$. A métrica usada é a Minkowskiana: $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Se não é especificado, $c = 1$.

Introdução

Desde a descoberta de um sólon na hidrodinâmica por Scott-Russell, em 1834, quando foi observada uma onda solitária que aparentemente mantinha a sua forma, altura e velocidade de deslocamento por vários quilômetros, têm aparecido configurações sólon em um amplo espectro da física. A definição exata do sólon depende do autor. Podemos definir um sólon como uma solução de uma equação não linear, que satisfaz duas condições: 1) mantém a sua forma durante a viagem e 2) quando se choca com outro sólon, os dois recuperam sua forma após a colisão. Se apenas a primeira condição é satisfeita, a solução é chamada de “onda solitária” ou “kink”.

Uma vez encontrado um kink, é preciso estudar sua estabilidade ante perturbações. Usualmente perturba-se o sistema somando ao kink uma perturbação exponencial oscilatória. Se a perturbação é muito pequena, todos os termos não lineares são ignorados e temos o regime linear, para o qual é possível obter resultados. Se a exponencial oscilatória não se torna exponencial crescente, temos estabilidade linear. Matematicamente, este problema é equivalente a resolver a equação de Schrödinger, e os autovalores são as frequências com as quais oscilam as perturbações.

Encontrar a estabilidade além do regime linear é uma tarefa mais difícil, até mesmo analiticamente impossível, na maioria dos casos. Por tanto, é necessário usar métodos numéricos. Muitos métodos existem para fazer este tipo de contas. Numericamente, o problema é resolver uma equação diferencial parcial hiperbólica, ou um sistema de equações quando temos dois ou mais campos.

Além do bem conhecido kink da teoria $\lambda\phi^4$ e do sistema Seno-Gordon, novos kinks são encontrados a cada ano. Neste trabalho foram estudados os modelos de dois campos escalares de Montonen-Trullinger-Sarker-Bishop (MSTB), o modelo de Bazeia-Nascimento-Ribeiro-Toledo (BNRT) e o modelo sigma massivo não linear de três campos.

O conteúdo desta dissertação é o seguinte: no capítulo um falamos sobre os campos, kinks e estabilidade. O capítulo dois é sobre métodos numéricos. No capítulo três, fazemos a comparação entre dois métodos numéricos na evolução do kink de $\lambda\phi^4$. No capítulo quatro perturbamos outros kinks. Finalmente, no capítulo cinco temos as conclusões.

Capítulo 1

Sobre Kinks e alguns modelos

1.1 Definição

Nesta primeira subseção reproduziremos algumas partes do capítulo um de Drazin e Johnson, [3]. Neste capítulo do livro citado, temos uma excelente introdução ao tema. Para começar, é importante reconhecer algumas propriedades simples da equação de onda,

$$\square\phi = \partial^\mu\partial_\mu\phi = 0. \quad (1.1)$$

Em uma dimensão espacial e uma temporal, ou seja $(1+1)$ dimensões, a equação de onda se escreve como

$$\square\phi = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi(x, t) = 0 \quad (1.2)$$

A equação (1.2), pode ser rearranjada na forma

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\phi(x, t) = 0. \quad (1.3)$$

Esta equação tem duas soluções, $f(x - ct)$ e $f(x + ct)$. A primeira delas é toda função viajando com velocidade constante c para a direita. A segunda solução consiste das funções viajando para a esquerda. O importante é notar que, quando as soluções viajam, mantêm suas formas.

Outro modo de observar esta propriedade é escrever a solução em termos de ondas planas:

$$f(x \pm ct) = \int dk [a(k) \cos(kx \pm \omega t) + b(k) \sin(kx \pm \omega t)]. \quad (1.4)$$

Cada onda plana viaja à mesma velocidade, $\omega/k = c$, e assim, o pacote de ondas viaja sem distorção.

Outra propriedade importante da equação de onda é a linearidade. Dadas duas soluções de (1.2), $f_1(x - ct)$ e $f_2(x + ct)$, a soma $f_3(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$ é solução. Se essas duas soluções são dois pacotes separados, indo um ao encontro do outro, depois de “colidir”, manterão sua forma. Estas duas propriedades são devidas ao fato de que a equação (1.1) é linear e sem dispersão.

Um exemplo de uma equação de onda com dispersão, e a mais simples, é

$$\frac{1}{c}\phi_t + \phi_x + \phi_{xxx} = 0. \quad (1.5)$$

Neste caso ainda temos linearidade. Supondo uma solução de onda plana, $\phi(x, t) = \exp(i(kx - \omega t))$, inserindo ela na equação anterior temos a relação de dispersão, $\omega = c(k - k^3)$. Cada onda plana tem velocidade

$$v = \frac{\omega}{k} = c(1 - k^2).$$

Assim, ondas com diferentes números de onda k propagam-se com velocidades diferentes. Temos dispersão também se somamos outros termos com derivadas espaciais ímpares na equação (1.5).

Se temos termos com derivadas espaciais pares,

$$\frac{1}{c}\phi_t + \phi_x - \phi_{xx} = 0, \quad (1.6)$$

obtemos $\omega = c(k - ik^2)$. Neste caso, temos a solução exponencial

$$\phi(x, t) = e^{-ck^2t + ik(x - ct)},$$

que se torna cada vez menor, tendendo a zero quanto $t \rightarrow \infty$. Este fenômeno é conhecido como dissipação e é obtido quando temos derivadas espaciais pares.

Outro fenômeno é a não-linearidade. Neste caso, temos multiplicação de componentes de Fourier, por tanto teremos mistura de todas as frequências. Por exemplo, se temos ϕ^2 e usamos a onda plana, $e^{i(kx - \omega t)}$, teremos uma componente com o dobro da frequência inicial, $e^{2i(kx - \omega t)}$. Isto é, estamos injetando energia em harmônicos mais altos em cada tempo. Com este efeito, ter a propriedade de manter a forma é mais difícil.

Existem alguns casos em que temos dispersão e não linearidade ao mesmo tempo, e os dois efeitos se misturam de um jeito tal que é possível ter soluções que mantenham sua forma quando viajam. Este tipo de soluções recebem nomes diferentes dependendo do autor. Nesta dissertação

usaremos as definições de Rajaraman[4]. Neste livro, o autor faz definições em termos de energia e não em termos da função de onda. Para isso, é preciso definir uma densidade de energia que usualmente é a componente T_{00} do tensor momentum-energia. Mas a definição não é restrita a este caso. Além disso, o autor define o valor mínimo de energia como zero.

Definimos uma *onda solitária* como uma solução localizada não singular de qualquer equação não linear (ou equações acopladas se temos vários campos) cuja densidade de energia, além de ser bem localizada, tem uma dependência da forma:

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{u}t), \quad (1.7)$$

onde $\mathbf{u}$ é um vetor velocidade. Esta equação é equivalente a ter uma solução que viaja mantendo sua forma.

Dois detalhes podem ser observados. O primeiro é que toda solução estática, que não depende do tempo, é uma onda solitária com velocidade nula. O segundo é que quando temos invariância relativística, uma solução estática pode-se transformar em uma solução com qualquer velocidade (menor que c), fazendo um *boost*, ou seja, fazendo uma transformação para um sistema de referência em movimento.

Outra propriedade interessante é que as soluções mantenham suas formas depois de colisão, um equivalente de linearidade. Matematicamente, temos N ondas solitárias isoladas, cuja densidade de energia é da forma

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) \rightarrow \sum_{i=1}^N \varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{a}_i - \mathbf{u}_i t), \quad (1.8)$$

no $t = -\infty$, onde os $\mathbf{a}_i$ são vetores constantes. Posteriormente, elas evoluem e colidem. Se no futuro distante, $t \rightarrow \infty$, a densidade de energia tem a forma funcional

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) \rightarrow \sum_{i=1}^N \varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{a}_i - \mathbf{u}_i t + \delta_i), \quad (1.9)$$

onde δ_i são outros vetores constantes, chamamos estas ondas solitárias de *sólitons*.

1.2 Como obter em ondas solitárias 1+1 dimensões

Um dos casos mais simples é quando temos uma dimensão espacial e uma temporal. Suporemos que a equação de movimento possa ser obtida de uma densidade lagrangiana, aplicando o princípio variacional.

Assim, se temos um campo escalar $\phi(x, t)$, temos a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, t) = \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}(\phi')^2 - U(\phi), \quad (1.10)$$

onde o ponto e a linha representam diferenciação com respeito ao tempo e ao espaço, respectivamente. U é uma função do campo escalar e representa o potencial.

Toda a não-linearidade do problema fica no potencial U . Suporemos, sem perda de generalidade, que U é sempre positivo, exceto nos mínimos, onde é zero. Além disto, esta densidade lagrangiana tem a propriedade de ser invariante de Lorentz.

A equação de movimento obtida pelo princípio variacional de Euler-Lagrange é

$$\square\phi = \ddot{\phi} - \phi'' = -\frac{\partial U}{\partial \phi}(x, t). \quad (1.11)$$

Uma solução desta equação, conserva a energia dada por,

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}(\phi')^2 + U(\phi) \right], \quad (1.12)$$

quando t varia.

Os mínimos de $U(\phi)$, que são seus zeros, ocorrem em M pontos, $M \geq 1$. Isso é,

$$U(\phi) = 0 \quad \text{para} \quad \phi = g^{(i)}; \quad i = 1, \dots, M. \quad (1.13)$$

Assim, a energia total é zero quando o campo é constante e toma algum desses valores, $E[\phi = g^{(i)}] = 0$.

Agora, usando o observado na seção anterior, procuraremos soluções estáticas. Neste caso, a equação de movimento fica

$$\phi''(x) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = +\frac{\partial U}{\partial \phi}(x). \quad (1.14)$$

Como queremos soluções com energia finita, é necessário que o campo escalar tome algum valor dos $g^{(i)}$ quando $x \rightarrow \pm\infty$. Também precisamos que $(\partial\phi/\partial x) \rightarrow 0$. Assim, as soluções são trajetórias que ligam mínimos de potencial. Por isso, geralmente, elas têm uma forma de S e são chamadas de *kinks*.

É interessante observar que a equação (1.14) é a mesma equação de Newton, se fizermos as seguintes trocas: ϕ seja a posição por unidade de massa, a variável x seja o tempo, e a força seja dada pela derivada do potencial $[-U(\phi)]$. Neste problema mecânico associado, a energia mecânica

é,

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - U(\phi). \quad (1.15)$$

Dadas nossas condições, $U(\phi) \rightarrow 0$ e $(\partial\phi/\partial x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$, e temos $W = 0$.

Procedendo como na mecânica, multiplicando a equação (1.14) por ϕ' e integrando uma vez, temos,

$$\int \phi' \phi'' dx = \int \frac{dU}{d\phi} \phi' dx \quad (1.16)$$

que fica,

$$\frac{1}{2} (\phi')^2 = U(\phi). \quad (1.17)$$

Agora, usamos o problema associado para resolver nosso problema. Nele, a posição da partícula representa o valor de nosso campo ϕ . Então podemos usar nosso conhecimento da mecânica em uma dimensão lembrando que o potencial é $[-U(\phi)]$. Se o potencial $U(\phi)$ tem só um mínimo, ou seja, um máximo no problema associado, veja na figura 1.1(a), a partícula neste potencial vai cair sempre, então não teremos ondas solitárias, porque elas não têm energia finita.

Quando temos dois ou mais mínimos no potencial $U(\phi)$, ou seja máximos no problema mecânico associado, veja na figura 1.1(b), teremos soluções de interesse. Pensando no problema associado, são todas aquelas que saem de um máximo e vão até algum outro máximo próximo. Uma vez que a partícula chega a outro máximo, todas as derivadas, velocidade, aceleração, etc. são nulas, portanto não é possível que a partícula volte ou continue até outro máximo. Por exemplo na figura 1.1(b), uma vez que a partícula deixa ϕ_1 dificilmente chega ao ϕ_2 quando $x \rightarrow \infty$.

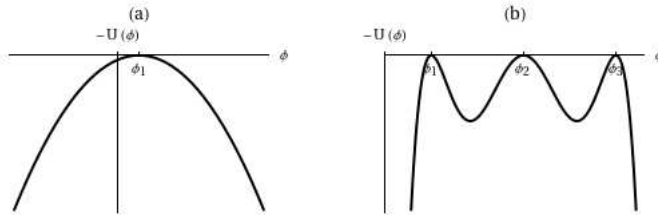


Figura 1.1: Exemplo de potenciais.

Resumindo, se $U(\phi)$ tem só um mínimo, não podemos ter uma onda solitária. Se temos n mínimos, podemos ter $2(n-1)$ tipos de soluções que unem dois mínimos vizinhos, quando o “tempo” associado x varia de $-\infty$ até $+\infty$. O fator dois é devido às duas direções possíveis para ligar os vácuos.

Conhecidos os limites da nossa solução, então agora podemos integrar a equação (1.17),

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\bar{\phi}}{[2U(\bar{\phi})]^{1/2}}. \quad (1.18)$$

Aqui x_0 é um valor arbitrário (invariância translacional) e $\phi(x_0)$ é um valor intermediário entre os dois mínimos de potencial. As duas soluções $\pm$ representam os dois sentidos em que se podem unir os mínimos.

Agora mostraremos o famoso kink de ϕ^4 . O potencial é

$$U(\phi) = \frac{1}{4}\lambda \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2. \quad (1.19)$$

Ele tem dois mínimos, $\phi = \pm m/\sqrt{\lambda}$, veja Figura 1.2(a). Fazendo a integração de (1.18) com este potencial,

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\bar{\phi}}{\sqrt{\lambda/2} [\bar{\phi}^2 - m^2/\lambda]^{1/2}}, \quad (1.20)$$

e supondo $\phi(x_0) = 0$, obtemos

$$\phi(x) = \pm \left(m/\sqrt{\lambda} \right) \tanh \left[\left(m/\sqrt{2} \right) (x - x_0) \right]. \quad (1.21)$$

Veja na figura 1.2(b) a solução com sinal positivo.

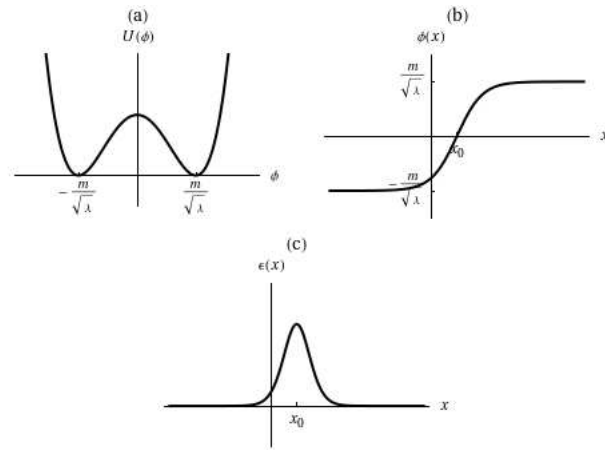


Figura 1.2: Potencial, kink e densidade de energia de ϕ^4

Com ajuda da equação (1.17), a densidade de energia fica

$$\epsilon(x) = \frac{1}{2}(\phi')^2 + U(\phi) = 2U(\phi) = \frac{m^4}{2\lambda} \operatorname{sech}^4 \left[m(x - x_0)/\sqrt{2} \right], \quad (1.22)$$

conforme mostrado na figura (1.2)(c). Observamos uma densidade de energia bem localizada, como era de se esperar.

1.3 Dois ou mais campos

É de nosso interesse trabalhar com dois e três campos em 1+1 dimensões. De uma maneira similar à seção anterior, suporemos que nosso sistema possa ser descrito pela Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \left[(\dot{\phi}_i)^2 - (\phi'_i)^2 \right] - U(\{\phi_i\}), \quad (1.23)$$

e que as equações de movimento sejam

$$\square \phi_i = \ddot{\phi}_i - \phi''_i = -\frac{\partial U}{\partial \phi_i}(x, t). \quad (1.24)$$

Para procurar ondas solitárias, o método anterior já não é aplicável. Mesmo quando o equivalente mecânico existe, não conhecemos soluções das equações de Newton em forma geral para mais de uma dimensão. Alguns métodos têm sido propostos como o de Rajaraman, [5]. Neste, uma órbita é proposta, que tem alguns parâmetros livres. Esta deve ter início e fim nos vácuos da teoria. Os parâmetros são ajustados obrigando que as equações de movimento sejam satisfeitas.

1.3.1 Equivalente Mecânico integrável

Em certos casos acontece que o análogo mecânico tem a mesmo número de quantidades conservadas que de graus de liberdade, por tanto é integrável, e pode ser descrito em termos de quadraturas. Temos sempre que o equivalente mecânico conserva a energia, assim, só precisamos de mais uma quantidade conservada no caso de ter dois campos. Depois de ter as quantidades conservadas, só temos que achar a solução do sistema que ligue dois máximos do potencial mecânico V (mínimos do potencial U). Se não conhecemos a outra quantidade conservada, podemos procurar trocas de variáveis que deixem a lagrangiana separável, e depois usar todo o conhecido do formalismo de Hamilton-Jacobi.

1.3.2 Método de superpotencial

Bazeia, et. al. [6] propõem um método muito econômico para achar soluções de ondas solitárias. Para isso, supomos que nosso potencial pode ser escrito do seguinte modo

$$U(\phi, \chi) = \frac{1}{2}H_\phi^2 + \frac{1}{2}H_\chi^2, \quad (1.25)$$

onde os campos escalares são ϕ e χ , $H(\phi, \chi)$ é uma função suave que chamamos de superpotencial e $H_\phi = \partial H / \partial \phi$, $H_\chi = \partial H / \partial \chi$. Neste caso, as equações de movimento ficam

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + H_\phi H_{\phi\phi} + H_\chi H_{\chi\phi} = 0, \quad (1.26)$$

e

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + H_\phi H_{\phi\chi} + H_\chi H_{\chi\chi} = 0. \quad (1.27)$$

A energia desse sistema, para soluções estáticas é

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + H_\phi^2 + H_\chi^2 \right\} dx \quad (1.28)$$

que pode ser escrito como

$$E = E' + E'' = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{d\phi}{dx} - H_\phi \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} - H_\chi \right)^2 \right\} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ H_\phi \frac{d\phi}{dx} + H_\chi \frac{d\chi}{dx} \right\} dx, \quad (1.29)$$

conhecido como a forma de Bogolmon'yi, Prasad e Sommerfield,[7, 8]. O segundo termo desta energia, E'' , pode ser escrito como,

$$E'' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dH}{dx} dx = H(\phi(\infty), \chi(\infty)) - H(\phi(-\infty), \chi(-\infty)). \quad (1.30)$$

Logo, temos a energia total como a soma de duas energias. O segundo termo depende só das condições de contorno, e o primeiro é sempre positivo. Assim, temos um mínimo, que acontece quando

$$\frac{d\phi}{dx} = H_\phi, \quad (1.31)$$

e

$$\frac{d\chi}{dx} = H_\chi. \quad (1.32)$$

Casualmente, as soluções destas equações satisfazem as equações de ondas solitárias. Por tanto, nosso problema de achar ondas solitárias de segunda ordem consiste agora em achar as soluções de (1.31) e (1.32), que é um sistema diferencial de primeira ordem.

1.4 Estabilidade linear

1.4.1 Para um campo

A estabilidade linear acontece quando perturbamos nosso sistema de forma infinitesimal. Desse jeito, todas as ordens são desprezíveis exceto a linear. A idéia é, seguindo os passos de [9], supor a solução kink e somar uma solução exponencial,

$$\phi(x, t) = \phi_0(x) + \psi_k(x) \exp(i\omega_k t), \quad (1.33)$$

onde ϕ_0 é nossa onda solitária e o outro termo é a perturbação dependente do tempo. Inserindo esta solução na equação dependente do tempo (1.11), obtemos uma equação do tipo Schrödinger,

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + U''(\phi_0(x)) \right] \psi_k = \omega_k^2 \psi_k(x). \quad (1.34)$$

Se todos os autovalores ω_k^2 de (1.34) são não negativos, temos estabilidade linear, o que implica que as pequenas perturbações de ϕ_0 não crescem exponencialmente.

Uma coisa interessante é que sempre obteremos o auto-valor $\omega_k^2 = 0$. Isso é devido a invariância translacional. Lembrando que o potencial $U(\phi)$ não depende das coordenadas espaciais, podemos derivar a equação (1.14) uma vez, para obter

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + U''(\phi_0(x)) \right] \phi'_0(x) = 0. \quad (1.35)$$

Esta é a equação (1.34) com a derivada do kink como auto-função e com auto-valor zero. Além da invariância translacional, todas simetrias contínuas, têm autovalores associados nulos.

1.4.2 Estabilidade linear de $\lambda\phi^4$

Queremos agora achar os autovalores da equação de Schrödinger para nosso modelo $\lambda\phi^4$, e saber se o kink é estável linearmente. Inserindo a solução de kink, equação (1.21), na equação (1.34), temos

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \left(2m^2 - 3m^2 \operatorname{sech}^2 \frac{mx}{\sqrt{2}} \right) \right] \psi_k = \omega_k^2 \psi_k(x). \quad (1.36)$$

Este potencial é conhecido como potencial de Pöschl-Teller e tem solução analítica. Ademais, tem autovalores discretos, $\omega_k^2 = 2m^2 - \frac{m^2}{2}(2-n)^2$ com $n = 0, 1, 2$. Também tem um espectro contínuo que começa em $\omega_k^2 = 2m^2$. O importante para a estabilidade é que $\omega_k^2 \geq 0$.

1.4.3 Para dois campos

O procedimento para dois campos é muito similar ao anterior. Supomos uma solução,

$$\phi(x, t) = \phi_0(x) + \psi_k(x) \exp(i\omega_k t) \quad (1.37)$$

e

$$\chi(x, t) = \chi_0(x) + \eta_k(x) \exp(i\omega_k t), \quad (1.38)$$

onde ϕ_0 e χ_0 são os campos da onda solitária, e ψ_k e η_k são as partes espaciais das perturbações.

Inserindo este *Ansatz* nas equações de movimento, equação (1.24), temos

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V \right] \begin{pmatrix} \psi_k(x) \\ \eta_k(x) \end{pmatrix} = \left[-\frac{d^2}{dx^2} + \begin{pmatrix} U_{\phi\phi} & U_{\phi\chi} \\ U_{\chi\phi} & U_{\chi\chi} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_k(x) \\ \eta_k(x) \end{pmatrix} = \omega_k^2 \begin{pmatrix} \psi_k(x) \\ \eta_k(x) \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Novamente, se temos que todos os ω_k^2 são não negativos, temos estabilidade linear.

1.4.4 Estabilidade linear com superpotencial

Quando temos um superpotencial, acontece algo interessante. Seguindo [6, 10], obtemos os potenciais da equação (1.39),

$$U_{\phi\phi} = \bar{H}_{\phi\phi}^2 + \bar{H}_{\chi\phi}^2 + \bar{H}_{\phi}\bar{H}_{\phi\phi\phi} + \bar{H}_{\chi}\bar{H}_{\phi\phi\chi}, \quad (1.40)$$

e

$$U_{\phi\chi} = U_{\chi\phi} = \bar{H}_{\phi\chi}\bar{H}_{\phi\phi} + \bar{H}_{\phi}\bar{H}_{\phi\phi\chi} + \bar{H}_{\chi}\bar{H}_{\phi\chi\chi}, \quad (1.41)$$

e

$$U_{\chi\chi} = \bar{H}_{\phi\phi}^2 + \bar{H}_{\phi\chi}^2 + \bar{H}_{\phi}\bar{H}_{\phi\chi\chi} + \bar{H}_{\chi}\bar{H}_{\chi\chi\chi} \quad (1.42)$$

onde as linhas acima de H querem dizer que as derivadas são calculadas nas ondas solitárias. O importante para a estabilidade é que o operador

$$S_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + \begin{pmatrix} U_{\phi\phi} & U_{\phi\chi} \\ U_{\chi\phi} & U_{\chi\chi} \end{pmatrix}, \quad (1.43)$$

pode ser escrito como

$$S_2 = S_1^+ S_1^-, \quad (1.44)$$

fazendo a definição

$$S_1^\pm \equiv \pm \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} H_{\phi\phi} & H_{\phi\chi} \\ H_{\chi\phi} & H_{\chi\chi} \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

Assim, $S_1^\pm$ são operadores adjuntos um de outro e S_2 é auto-adjunto e definido semi-positivo. Isto é, os autovalores destes operadores são não negativos. Com isso temos que todo sistema que aceite um superpotencial é linearmente estável.

1.5 Índices topológicos

Outro conceito importante é dos índices topológicos e carga topológica. A idéia é usar alguma quantidade conservada das soluções, que nos permita classificá-las. Nossos problemas são de uma dimensão espacial, e para ter soluções de energia finita, precisamos que o campo assuma os valores do vácuo no $+\infty$ e no $-\infty$, onde pode ser o mesmo. Algumas vezes os mínimos do potencial, ou seja, o vácuo, é discreto, como em nossos casos de interesse. Assim, em algum instante de tempo, t_0 , temos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x, t_0) \equiv \phi(\infty, t_0) = \phi_1, \quad (1.46)$$

onde ϕ_1 é um mínimo de $U(\phi)$. Quando o tempo evolui, o campo muda continuamente com t , em cada ponto de x . Assim, $\phi(\infty, t)$ vai ser uma função contínua de t . Por tanto, para que a energia seja finita, é necessário que $\phi(\infty, t)$ seja algum dos mínimos discretos do potencial. Como não pode pular de ϕ_1 a outro mínimo se tem que mudar continuamente, então $\phi(\infty, t)$ tem que ser estacionário e ter o valor constante ϕ_1 . O mesmo acontece com $\phi(-\infty, t) = \phi_2$. Logo, todas as soluções de energia finita terão suas condições de contorno fixas. Isto nos serve para dividir todo o espaço de soluções de energia finita em setores, caracterizados por dois índices, os valores de $\phi(x = \infty)$ e $\phi(x = -\infty)$. Estes setores são topologicamente desligados, no sentido de que os campos de um setor não podem ser deformados continuamente até outro setor, sem violar a condição de energia finita.

Além dos índices, existe outra quantidade usada na literatura conhecida como carga topológica. Esta pode ser definida como

$$Q = (\sqrt{\lambda}/m) [\phi(x = \infty) - \phi(x = -\infty)]. \quad (1.47)$$

Ela tem uma corrente conservada associada,

$$k^\mu = (\sqrt{\lambda}/m)\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi, \quad (1.48)$$

onde ε é o tensor completamente anti-simétrico (Levi-Civita) e temos a lei de conservação,

$$\partial_\mu k^\mu = 0 \quad \text{e} \quad Q = \int_{-\infty}^{\infty} k_0 dx. \quad (1.49)$$

Usualmente o adjetivo “topológico” para ondas solitárias é usado só quando temos $Q \neq 0$, ou seja, quando a solução une dois pontos do vácuo diferentes. Ondas solitárias com $Q = 0$ são chamadas “não-topológicas”.

1.5.1 Setores topológicos de $\lambda\phi^4$

Lembrando o potencial (1.19), que tem dois vácuos, $\phi = (\pm m/\sqrt{\lambda})$, podemos dividir todas as soluções de energia finita, sejam estáticas ou dependentes do tempo, em quatro setores topológicos. Estes setores são caracterizados pelos pares de índices $(-m/\sqrt{\lambda}, m/\sqrt{\lambda})$, $(m/\sqrt{\lambda}, -m/\sqrt{\lambda})$, $(m/\sqrt{\lambda}, m/\sqrt{\lambda})$ e $(-m/\sqrt{\lambda}, -m/\sqrt{\lambda})$, que representam os valores de $(\phi(x = -\infty), \phi(x = +\infty))$. Então o kink, o anti-kink e as soluções constantes $\phi = (\pm m/\sqrt{\lambda})$ são membros desses setores, respectivamente. O kink e o anti-kink são soluções topológicas e as constantes são não-topológicas.

1.6 Sobre Breathers e Oscillons

1.6.1 Modelo Seno-Gordon

Existe um modelo conhecido como Seno-Gordon (tem até polêmica pelo nome), em 1 + 1 dimensões que tem a particularidade de ser integrável. Isto é, pode ser resolvido usando espalhamento inverso. Além disso, o modelo tem outras propriedades interessantes, como infinitas quantidades conservadas e as soluções satisfazem transformações de Bäcklund, entre outras [3]. O potencial é

$$U(\phi) = \frac{m^4}{\lambda} \left\{ 1 - \cos(\sqrt{\lambda}/m\phi) \right\}, \quad (1.50)$$

onde o termo constante é somado para deixar os mínimos do potencial em zero. Fazendo a troca de variáveis,

$$\bar{x} = mx, \quad \bar{t} = mt \quad \text{e} \quad \bar{\phi} = (\sqrt{\lambda}/m)\phi,$$

obtemos a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, t) = (m^4/\lambda) \left[\frac{1}{2} (\bar{\partial}_\mu \bar{\phi}) (\bar{\partial}^\mu \bar{\phi}) + (\cos \bar{\phi} - 1) \right], \quad (1.51)$$

que leva à equação de movimento,

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{t}^2} - \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2} + \sin \bar{\phi}(\bar{x}, \bar{t}) = 0. \quad (1.52)$$

É por esta equação que o modelo é conhecido como Seno-Gordon. O modelo tem infinitos mínimos, que são encontrados quando o campo toma os valores,

$$\bar{\phi} = 2N\pi, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

veja a figura 1.3(a).

Assim, temos infinitos setores topológicos caracterizados pelos índices inteiros (N_1, N_2) e pela carga topológica $Q \equiv N_1 - N_2$. Novamente, as soluções localizadas só podem ligar dois mínimos vizinhos. Repetindo o procedimento já conhecido para o potencial Seno-Gordon, as soluções para o kink e o anti-kink são

$$\bar{\phi}(x) = \pm 4 \tan^{-1}(\exp(x - x_0)). \quad (1.53)$$

Estas soluções têm cargas topológicas $Q = \pm 1$ e vão desde $\bar{\phi} = 0$ a $\bar{\phi} = 2\pi$, ou, equivalentemente, de 2π a 4π , 4π a 6π , etc. Veja a figura 1.3(b).

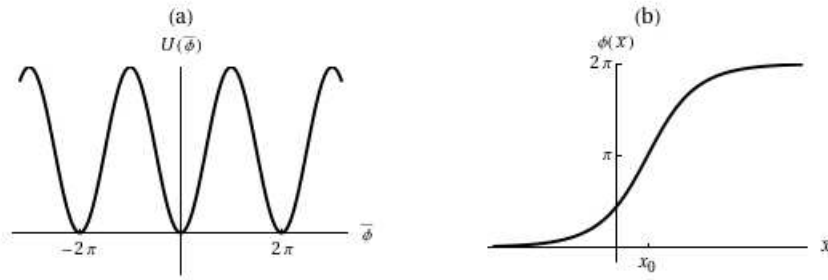


Figura 1.3: Potencial e kink de potencial Seno-Gordon.

Além destas soluções, temos outras que podem ser obtidas pelas transformações de Bäcklund. Uma delas é

$$\bar{\phi}_{SA}(\bar{x}, \bar{t}) = 4 \tan^{-1} \left(\frac{\sinh(u\bar{t}/\sqrt{1-u^2})}{u \cosh(\bar{x}/\sqrt{1-u^2})} \right). \quad (1.54)$$

Esta representa a colisão de um kink e um anti-kink, aproximando-se a uma velocidade relativa de

$2u$. Nos limites $t \rightarrow -\infty$ e $t \rightarrow \infty$, observamos que são o kink e o anti-kink antes e depois da colisão. Na figura 1.4, mostra-se $\bar{\phi}_{SA}$ em diferentes tempos. Devido a que no tempo futuro as formas dos kinks e antikink são recuperadas, temos então não só kinks, mas também sólitons. É por isso que a solução tem as letras *SA*, de soliton-antisoliton.

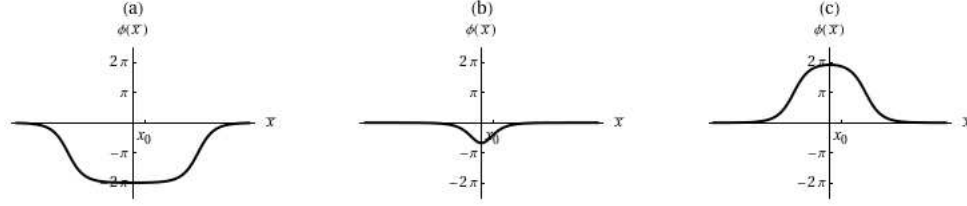


Figura 1.4: $\bar{\phi}_{SA}$ para os tempos, a) -10 , b) -0.5 e c) 5 .

Outra solução que dá conta da colisão entre dois sólitons aproximando-se com velocidade relativa $2u$ é

$$\bar{\phi}_{SS}(\bar{x}, \bar{t}) = 4 \tan^{-1} \left(\frac{u \sinh(\bar{x}/\sqrt{1-u^2})}{\cosh(u\bar{t}/\sqrt{1-u^2})} \right). \quad (1.55)$$

Veja a figura 1.5.

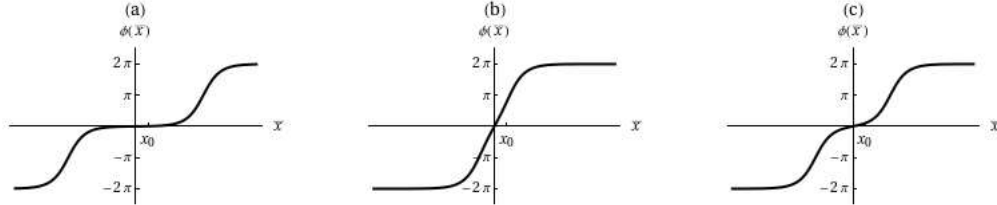


Figura 1.5: $\bar{\phi}_{SS}$ para os tempos, a) -10 , b) -0.5 e c) 5 .

Além dessas soluções, temos outra, a chamada solução de *Breather*,

$$\bar{\phi}_v(\bar{x}, \bar{t}) = 4 \tan^{-1} \left(\frac{\sin(v\bar{t}/\sqrt{1+v^2})}{v \cosh(\bar{x}/\sqrt{1+v^2})} \right). \quad (1.56)$$

O interessante desta solução é que ela é periódica, com período

$$\bar{\tau} = (2\pi\sqrt{1+v^2})/v.$$

Pode-se interpretar esta solução como um estado ligado do sistema soliton-antisoliton. Como ela é periódica, a solução vai ficar na mesma locação para sempre, veja a figura 1.6, e mesmo quando não satisfaz nossas condições de onda solitária, tem a propriedade de ter a energia localizada em

uma zona finita do espaço.

A existência do *breather* é devida a que a interação sólton-antisólton é de atração. Por tanto esta solução pode ser interpretada como um estado ligado. Para o caso de dois sólitons ou antisólitons, isso não acontece. O parâmetro v não é uma velocidade, é só um parâmetro.

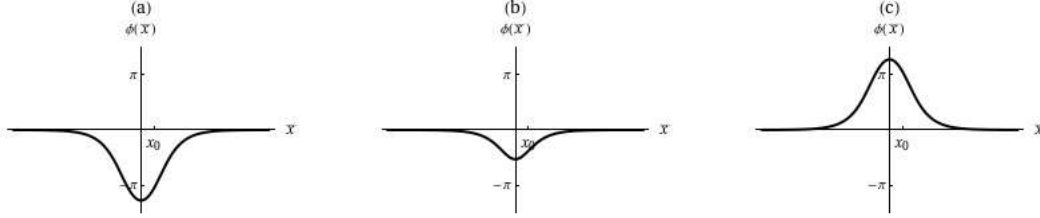


Figura 1.6: A solução do Breather para os tempos, a) -5 , b) -0.5 e c) 5 .

1.6.2 Breathers em $\lambda\phi^4$ - Oscillons

Foi comprovado numericamente que a interação entre o kink e o antikink da teoria $\lambda\phi^4$ também é de atração. Colisões entre estas duas soluções foram estudadas numericamente nas décadas de 1970 e 1980, veja por exemplo [11], e as referências nesta. Só em 1987, com o trabalho de Segur e Kruskal [12], os autores mostraram que é impossível ter uma estrutura de tipo *breather* na $\lambda\phi^4$. Eles conseguiram mostrar isto, ilustrando que é impossível ter uma solução periódica para este potencial. Ademais no mesmo trabalho mostraram que a solução é quase periódica e tem um tempo de vida muito grande, $\tau \approx 10^6$ oscilações, mas ao final vai decair. Embora seja conhecido que a solução é não estável e seu tempo de vida é tão longo, é importante considerá-la. Esta solução é conhecida agora como *oscillon*. Depois do trabalho seminal de Segur e Kruskal, foi achado que muitos sistemas, em uma ou várias dimensões espaciais, têm este tipo de estruturas de vida longa não estáveis.

1.7 Modelo MSTB

Um dos modelos mais simples de dois campos é o modelo MSTB, [13, 14], (Montonen, Sarker, Trullinger e Bishop). Neste sistema não temos um superpotencial que nos ajude a achar soluções solitônicas. Mas, seu análogo mecânico é do tipo I de Liouville e por tanto completamente integrável. Seguindo a notação do artigo de Alonso e Guilarte, [15, 16], temos o potencial

$$U(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1)^2 + \frac{\Omega^2}{2} \phi_2^2. \quad (1.57)$$

Este potencial é de ordem quatro em cada campo com assimetria. Observa-se que, quando temos $\phi_2 = 0$, obtemos um potencial de tipo $\lambda\phi^4$. O vácuo do sistema é

$$M = \{(\phi_1^+ = 1, \phi_2^+ = 0); (\phi_1^- = -1, \phi_2^- = 0)\}. \quad (1.58)$$

No artigo original [13], o autor encontrou dois kinks que ligam os dois vácuos, quando usamos o parâmetro $\Omega^2 \in (0, 1)$. São estes:

1. TK1, chamado assim pelo fato de que só temos um campo não nulo, ϕ_1 ,

$$\phi_1^{\text{TK1}}(x) = \tanh x, \quad \phi_2^{\text{TK1}}(x) = 0, \quad (1.59)$$

veja a figura 1.7a).

2. TK2, em inglês, kink topológico de dois campos,

$$\phi_1^{\text{TK2}} = \tanh \Omega x, \quad \phi_2^{\text{TK2}} = \bar{\Omega} \text{sech} \Omega x, \quad (1.60)$$

onde $\bar{\Omega}^2 = 1 - \Omega^2$. Na figura 1.7b) ilustra-se este kink.

Os dois vácuos estão ligados pela semi-elipse,

$$\phi_1^2 + \frac{\phi_2^2}{\bar{\Omega}^2} = 1. \quad (1.61)$$

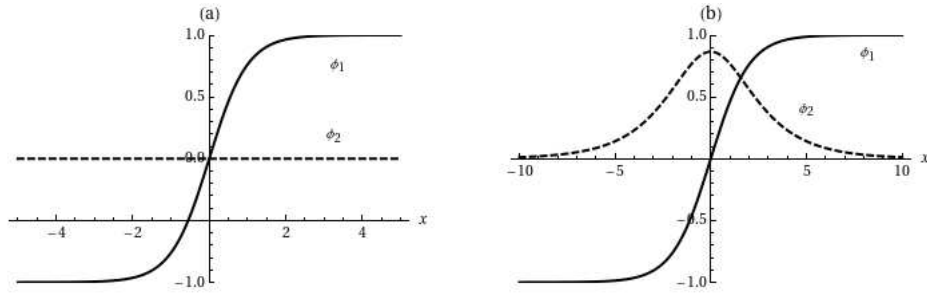


Figura 1.7: O kink TK1 em a) e o TK2 em b).

Lembremos que este potencial tem simetria de paridade nos dois campos, assim cada uma destas soluções tem, associadas, outras soluções. O TK1 é em verdade duas soluções (kink e antikink) e o TK2 são quatro (kink e antikink e elipse acima e abaixo do eixo).

Além destas duas soluções topológicas, foi encontrada por Rajaraman [5] outra solução não topológica. Esta solução faz um círculo para ligar um vácuo com ele mesmo. Ele achou essa solução no caso particular $\Omega = 1/2$. Investigações numéricas [17] acharam: i) que este kink chamado de NTK2 é linearmente não estável, ii) que não é só um kink, mas uma família contínua de kinks que passam pelo ponto $(\phi_1 = -0.5, \phi_2 = 0)$, que têm a mesma energia, e podem ser parametrizados por uma variável contínua, $\gamma 1$, veja figura 1.8 e iii) a propriedade conhecida como a regra de soma das energias,

$$E^{\text{NTK2}} = E^{\text{TK1}} + E^{\text{TK2}}. \quad (1.62)$$

A forma funcional do kink NTK2 foi encontrada por Alonso et. al. [15] depois de solucionar o sistema mecânico análogo e invertendo as duas equações, a de órbita e a “temporal”. Eles obtiveram:

$$\phi_1^{\text{NTK2}}(x : \gamma 1) = \frac{(\Omega - 1) (1 + e^{2(1+\Omega)(x+\Omega\gamma 1)}) + (\Omega + 1) (e^{2\Omega(x+\gamma 1)} + e^{2(x+\gamma 1\Omega^2)})}{(\Omega - 1) (1 + e^{2(1+\Omega)(x+\Omega\gamma 1)}) - (\Omega + 1) (e^{2\Omega(x+\gamma 1)} + e^{2(x+\gamma 1\Omega^2)})} \quad (1.63)$$

$$\phi_2^{\text{NTK2}}(x : \gamma 1) = \frac{2(\Omega^2 - 1) e^{\Omega(x+\gamma 1)} (e^{2(x+\gamma 1\Omega^2)} - 1)}{(\Omega - 1) (1 + e^{2(1+\Omega)(x+\Omega\gamma 1)}) - (\Omega + 1) (e^{2\Omega(x+\gamma 1)} + e^{2(x+\gamma 1\Omega^2)})}. \quad (1.64)$$

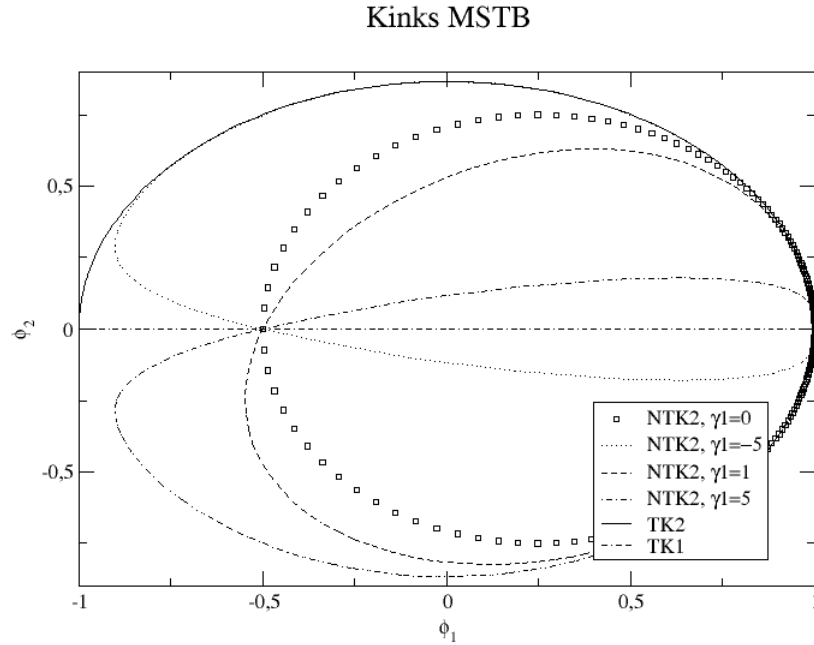


Figura 1.8: Kinks of MSTB.

Alguns anos mais tarde (nos 80's), Ito conseguiu achar uma explicação para a regra de soma [18].

Usando o fato de que o sistema mecânico associado é completamente integrável usando coordenadas elípticas, ou seja, é de tipo I de Liouville, Ito conseguiu achar uma relação analítica para os kinks e mostrou analiticamente a regra de soma. Nesse mesmo ano, junto com Tasaki, [19], os autores mostraram que as soluções TK1 e NTK2 são não estáveis, mas que o TK2 é estável, usando o teorema do índice de Morse.

1.8 Modelo BNRT

Descreveremos o modelo BNRT (Bazeia, Nascimento, Ribeiro e Toledo) seguindo o artigo de Alonso, et. al. [20]. O modelo consiste de dois campos escalares acoplados por um potencial. Nosso modelo de interesse, depois de mudar variáveis, tem o potencial

$$U(\phi_1, \phi_2) = (4\phi_1^2 + 2\sigma\phi_2^2 - 1)^2 + 16\sigma\phi_1^2\phi_2^2. \quad (1.65)$$

Dá para notar que, quando temos $\phi_1 = 0$, temos um modelo parecido a $\lambda\phi^4$. O mesmo acontece quando $\phi_2 = 0$. As equações de Euler-Lagrange, supondo soluções estáticas, são

$$\frac{d^2\phi_1}{dx^2} = 16\phi_1 [4\phi_1^2 + 2\sigma(1 + \sigma)\phi_2^2 - 1] \quad (1.66)$$

e

$$\frac{d^2\phi_2}{dx^2} = 8\sigma\phi_2 [4(\sigma + 1)\phi_1^2 + 2\sigma\phi_2^2 - 1]. \quad (1.67)$$

Este modelo tem paridade espacial, invariância translacional e invariância sob $\pi_1 : (\phi_1, \phi_2) \rightarrow (-\phi_1, \phi_2)$ e $\pi_2 : (\phi_1, \phi_2) \rightarrow (\phi_1, -\phi_2)$. O vácuo do sistema é

$$M = \left\{ A_1 = \left(\frac{1}{2}, 0 \right); A_2 = \left(-\frac{1}{2}, 0 \right); B_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \right); B_2 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \right) \right\}. \quad (1.68)$$

Novamente, as soluções de nosso interesse, as ondas solitárias, são trajetórias que ligam dois destes vácuos. Usando o método de trajetória de prova, [5], foram encontradas as seguintes soluções:

1. O kink TK1^{AA} : chamado assim por ser o kink topológico de um campo não nulo, do setor AA . Os campos são

$$\phi_1^{\text{TK1}^{AA}}(x) = \pm \frac{1}{2} \tanh 2\sqrt{2}(x + a), \quad \phi_2^{\text{TK1}^{AA}}(x) = 0. \quad (1.69)$$

Devido a que o campo dois é nulo, este kink é muito similar ao kink da teoria $\lambda\phi^4$.

2. TK2^{AA} : tentando uma trajetória elíptica foi encontrada a seguinte solução:

$$\begin{aligned}\phi_1^{\text{TK2}^{AA}}(x) &= \pm \frac{1}{2} \tanh 2\sqrt{2}\sigma(x+a) \\ \phi_2^{\text{TK2}^{AA}}(x) &= \pm \sqrt{\frac{1-\sigma}{2\sigma}} \text{sech } 2\sqrt{2}\sigma(x+a).\end{aligned}\tag{1.70}$$

3. TK1^{BB} : se procuramos um kink deixando o ϕ_1 nulo, temos

$$\phi_1^{\text{TK1}^{BB}}(x) = 0, \quad \phi_2^{\text{TK1}^{BB}}(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \tanh 2\sqrt{\sigma}(x+a).\tag{1.71}$$

Este é novamente um kink tipo $\lambda\phi^4$.

O interessante deste sistema é que ele pode ser escrito a partir de um superpotencial. Temos

$$U(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial \phi_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial \phi_2} \right)^2\tag{1.72}$$

$$H(\phi_1, \phi_2) = 4\sqrt{2} \left(\frac{1}{3} \phi_1^2 - \frac{1}{4} \phi_1 + \frac{\sigma}{2} \phi_1 \phi_2^2 \right).\tag{1.73}$$

As equações (1.31) e (1.32) são as soluções de primeira ordem para achar soluções estacionárias

$$\frac{d\phi_1}{dx} = \frac{\partial H}{\partial \phi_1} = \sqrt{2} (4\phi_1^2 + 2\sigma\phi_2^2 - 1)\tag{1.74}$$

$$\frac{d\phi_2}{dx} = \frac{\partial H}{\partial \phi_2} = 4\sqrt{2}\sigma\phi_1\phi_2.\tag{1.75}$$

A energia,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{a=1}^2 \left(\frac{d\phi_a}{dx} - \frac{\partial H}{\partial \phi_a} \right)^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial H}{\partial \phi_a} \frac{d\phi_a}{dx} dx\tag{1.76}$$

fica dependendo só dos valores do campo no infinito, isto é, dos seus índices topológicos,

$$E[\phi] = T[\phi] = H(\phi_1(\infty), \phi_2(\infty)) - H(\phi_1(-\infty), \phi_2(-\infty)).\tag{1.77}$$

Os kinks do setor AA têm energia $E_{\text{TK2}^{AA}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$. Os kinks do setor AB têm energia $E_{\text{TK2}^{AB}} = \frac{1}{3}\sqrt{2} = \frac{1}{2}E_{\text{TK2}^{AA}}$. Para obter a solução do sistema, achamos a razão entre a equação (1.74) e a equação (1.75) e obtemos

$$\frac{d\phi_1}{d\phi_2} = \frac{4\phi_1^2 + 2\sigma\phi_2^2 - 1}{4\sigma\phi_1\phi_2}.\tag{1.78}$$

Esta equação admite o fator integrante $|\phi_2|^{-2/\sigma}\phi_2^{-1}$ quando $\sigma \neq 1$ e $\sigma \neq 0$. Resolvendo,

$$\phi_1^2 + \frac{\sigma}{2(1-\sigma)}\phi_2^2 = \frac{1}{4} + \frac{c}{2\sigma}|\phi_2|^{2/\sigma} \quad (1.79)$$

onde c é uma constante de integração. Temos uma família contínua de soluções, parametrizadas por $c \in (-\infty, c^s)$, que denominaremos $\text{TK2}^{AA}(c)$. O valor c^s

$$c^s = \frac{1}{4} \frac{\sigma}{1-\sigma} (2\sigma)^{(\sigma+1)/\sigma}, \quad (1.80)$$

divide o conjunto de soluções. Para c acima de c_s , as trajetórias não ligam os vácuos. Quando temos c_s , a solução é o kink TK2^{AB} que é o limite entre as duas regiões. Desse jeito, temos os kinks que já conhecíamos,

$$\text{TK2}^{AA} \equiv \text{TK2}^{AA}(0), \text{TK1} \equiv \lim_{c \rightarrow -\infty} \text{TK2}^{AA}(c). \quad (1.81)$$

Veja a figura 1.9 onde são ilustrados os casos anteriores.

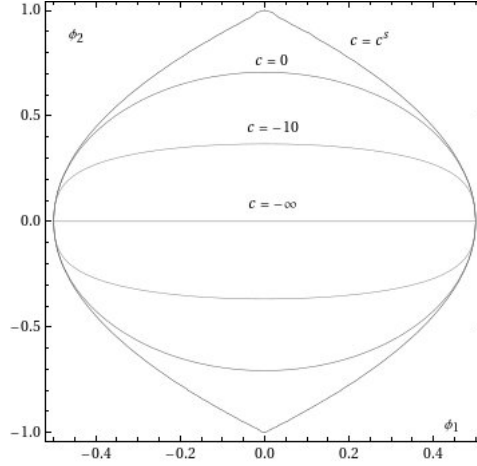


Figura 1.9: Kinks BNRT.

1.9 Modelo Sigma massivo não linear

Este modelo foi descoberto por Alonso et. al. em [1]. Foi descrito com detalhe em [21, 2]. Este é um modelo de três campos escalares sujeitos à restrição

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = R^2, \quad (1.82)$$

isto é, estão na esfera $\mathbb{S}^2$. Por tanto, temos só dois graus de liberdade. Temos o potencial

$$U(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{1}{2} (\alpha_1^2 \phi_1^2 + \alpha_2^2 \phi_2^2 + \alpha_3^2 \phi_3^2), \quad (1.83)$$

com as restrições, $\alpha_1^2 \geq \alpha_2^2 > \alpha_3^2 \geq 0$. O potencial tem simetria sob inversão de sinal nos três campos. Temos dois mínimos do potencial, o vácuo, os dois polos,

$$M = \{N = (0, 0, R); S = (0, 0, -R)\}. \quad (1.84)$$

As soluções de ondas solitárias satisfazem as condições

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{d\phi_\alpha}{dx} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi_\alpha = N \text{ ou } S. \quad (1.85)$$

Temos quatro setores topológicos, $C = C_{NN} \cup C_{NS} \cup C_{SN} \cup C_{SS}$. Podemos fazer a troca de variáveis esféricas: $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= R \sin \theta \cos \varphi \\ \phi_2 &= R \sin \theta \sin \varphi \\ \phi_3 &= R \cos \theta, \end{aligned}$$

e o potencial pode ser escrito como

$$U(\theta, \phi) = \frac{R^2}{2} \sin^2 \theta (\sigma^2 + \bar{\sigma}^2 \cos^2 \varphi + \text{cte}), \quad (1.86)$$

fazendo as definições

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}{\alpha_1^2 - \alpha_3^2} = \frac{\gamma^2}{\lambda^2}, \quad \bar{\sigma} = \sqrt{1 - \sigma^2}. \quad (1.87)$$

A constante no potencial é desprezível. A ação nestas variáveis é

$$S = \int dt dx \left\{ \frac{R^2}{2} [\partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + \sin^2 \theta \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi] + R^2 \sin^2 \theta (\sigma^2 + \bar{\sigma}^2 \cos^2 \varphi) \right\}. \quad (1.88)$$

As equações de movimento são

$$\square\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta (\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \cos^2 \varphi - \sigma^2 \sin^2 \varphi) = 0 \quad (1.89)$$

$$\partial^\mu (\sin^2 \theta \partial_\mu \varphi) - \frac{1}{2} \bar{\sigma} \sin^2 \theta \sin 2\varphi = 0. \quad (1.90)$$

- Quando temos $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, as equações ficam

$$\square\theta + \frac{\sigma^2}{2} \sin 2\theta = 0. \quad (1.91)$$

Este é o modelo Seno-Gordon, cujas soluções de onda solitária são

$$\theta_{K_1/K_1^*}(x) = 2 \tan^{-1} e^{\pm\sigma(x-x_0)}. \quad (1.92)$$

Quando temos $\varphi_{K_1}(x) = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi_{K_1^*}(x) = \frac{3\pi}{2}$, as soluções são chamadas K_1/K_1^* , respectivamente. O sinal $\pm$ da exponencial são a solução kink e anti-kink. Os kinks pertencem ao setor C_{NS} e os antikinks, ao setor C_{SN} . As quatro soluções têm energia $E_{K_1/K_1^*} = 2\lambda R^2 \sigma$. Veja figura 1.10.

- Quando temos $\varphi_{K_2} = 0$ ou $\varphi_{K_2^*} = \pi$, temos

$$\square\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta = 0, \quad (1.93)$$

que tem soluções

$$\theta_{K_2/K_2^*}(x) = 2 \tan^{-1} e^{\pm(x-x_0)}, \quad (1.94)$$

e são chamadas K_2/K_2^* . Veja figura 1.10. Elas têm energia $E_{K_2/K_2^*} = 2\lambda R^2$, que é maior que a energia dos kinks K_1/K_1^* .

A estabilidade linear destes kinks foi mostrada em [1, 21] por um método similar ao introduzido na seção de estabilidade linear, só que neste caso temos uma equação que não é de tipo Schrödinger. Os kinks K_1/K_1^* são estáveis linearmente, mas os K_2/K_2^* não.

Além destas duas famílias de soluções, Alonso et. al. acharam outra família de soluções de ondas solitárias. Fazendo a troca de variáveis para coordenadas esfero-elípticas, é possível obter um análogo mecânico separável, no sentido de Hamilton-Jacobi. Assim, foi obtida a equação da órbita e a equação em função do “tempo” x . Estas soluções encontradas são não-topológicas porque unem o mesmo vácuo. São chamadas NTK. Em [2], Alonso et. al. resolvem este sistema para $\mathbb{S}^N$ usando

coordenadas esfero-cônicas. Eles obtiveram as expressões dos campos ϕ 's em termos da posição como

$$\phi_1^{\text{NTK}} = (-1)^{\epsilon_1} R\bar{\sigma} \frac{\text{sech}(x + \gamma_1)}{1 - \sigma \tanh(x + \gamma_1) \tanh \sigma(x + \gamma_2)}, \quad \epsilon_1 = 0, 1 \quad (1.95)$$

$$\phi_2^{\text{NTK}} = (-1)^{\epsilon_2} R\bar{\sigma} \frac{\tanh(x + \gamma_1) \text{sech} \sigma(x + \gamma_2)}{1 - \sigma \tanh(x + \gamma_1) \tanh \sigma(x + \gamma_2)}, \quad \epsilon_2 = 0, 1 \quad (1.96)$$

$$\phi_2^{\text{NTK}} = (-1)^{\epsilon_3} R \frac{\sigma - \tanh(x + \gamma_1) \tanh \sigma(x + \gamma_2)}{1 - \sigma \tanh(x + \gamma_1) \tanh \sigma(x + \gamma_2)}, \quad \epsilon_3 = 0, 1. \quad (1.97)$$

Quando $\epsilon_3 = 0$, temos soluções que ligam o pólo sul com ele mesmo, e pertencem ao setor C_{SS} . Temos soluções no setor C_{NN} quando temos $\epsilon_3 = 1$. Todas as soluções desta família de kinks têm a mesma energia e satisfazem uma regra de soma

$$E_{\text{NTK}} = 2\lambda R^2 (1 + \sigma) = E_{K_2} + E_{K_1}. \quad (1.98)$$

Todas as soluções da família de kinks do setor C_{SS} , sem importar γ_2 , têm cruzamentos com $\phi_2 = 0$ no mesmo ponto, $F = (R\bar{\sigma}, 0, R\sigma)$. Veja figura 1.11. Algo similar acontece com a família do setor C_{NN} .

Em [1, 21], Alonso et. al. mostram que estas famílias não topológicas são instáveis pelo teorema de índice de Morse.

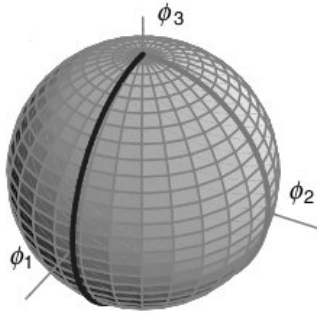


Figura 1.10: Kinks K1 linha cruza o eixo ϕ_2 , K2 é a linha que cruza o eixo ϕ_1 . Figura tomada do artigo [1].

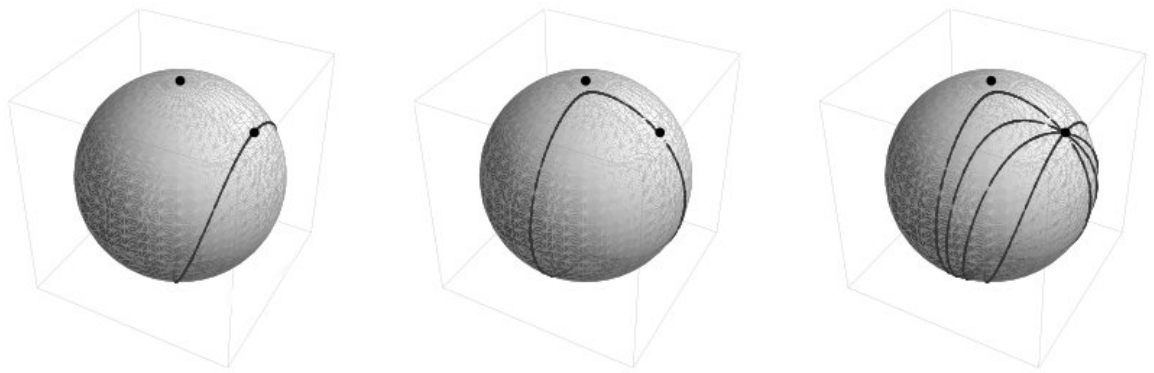


Figura 1.11: Kinks NTK, quando temos $\sigma = 0.7$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$, $\gamma_1 = 0$ e $\gamma_2 = 0$ na esquerda, $\gamma_2 = 5$ no centro e vários valores de γ_2 na mesma figura, que mostra que todas as trajetórias passam pelo mesmo ponto. Figura tomada de [2].

Capítulo 2

Métodos Numéricos

Nosso problema é achar a evolução temporal dos campos. As equações são não lineares e acopladas (se temos dois ou mais campos), então, para achar a solução deste problema temos que usar métodos numéricos. Linhares e de Oliveira [22] usam o método de Galerkin para achar a evolução temporal do kink $\lambda\phi^4$. Neste trabalho também usam um mapeamento para ter toda a reta real no intervalo finito $(-1, 1)$. Galerkin é um método espectral. Além dos métodos espectrais, existem também muitos outros métodos numéricos para resolver o problema. Provavelmente, o mais simples é o método das diferenças finitas. Por isso, decidimos trabalhar com elas.

2.1 Métodos em séries

Nos métodos de séries, com uma variável independente, supomos que a solução pode ser aproximada por uma soma de $N + 1$ funções base, ϕ_n ,

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(x). \quad (2.1)$$

Nossa equação de interesse é

$$Lu = 0, \quad (2.2)$$

onde L é um operador diferencial ou integral. Quando inserimos u_N na equação, temos uma função residual,

$$R(x, a_0, \dots, a_N) = Lu_N. \quad (2.3)$$

Na solução exata da equação, o resíduo é zero. Nosso problema agora é achar os coeficientes a_n que minimizem a função residual.

2.2 Galerkin

Além das funções base, temos o produto interno

$$(f, g) = \int_D f g dx. \quad (2.4)$$

O método de Galerkin consiste em achar os coeficientes que satisfazem

$$(R, \phi_k) = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (2.5)$$

onde as ϕ_k são as mesmas funções usadas na série, equação (2.1). Se nosso operador L é linear, o sistema de equações (2.5) é um sistema linear. Se o operador é não-linear, o sistema também é.

Se o problema depende de duas variáveis independentes, $u(x, t)$, supomos a solução da forma

$$u(x, t) \approx u_N(x, t) = \sum_{n=0}^N a_n(t) \phi_n(x). \quad (2.6)$$

Quando fazemos o produto interno temos um sistema que agora é um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas nas variáveis $a_n(t)$. Para resolver este sistema, temos bons algoritmos, como o Runge-Kutta de ordem quatro.

2.3 Diferenças Finitas

Existem referências muito boas sobre diferenças finitas, entre elas [23, 24], por tanto aqui só resumiremos o necessário. Primeiro, nossas equações de interesse são equações hiperbólicas, lembrando que quando temos uma equação da forma

$$Au_{tt} + Bu_{tx} + Cu_{xx} + \text{termos de ordem inferior} = 0 \quad (2.7)$$

temos os tipos de equação

$$B^2 - 4AC \begin{cases} > 0, & \text{hiperbólica} \\ = 0, & \text{parabólica} \\ < 0, & \text{elíptica} \end{cases} \quad (2.8)$$

A equação hiperbólica mais familiar é a equação de onda. Além disso, as equações hiperbólicas são as que podem apresentar mais problemas de estabilidade numérica.

A maior parte da teoria é feita para equações diferenciais lineares e temos poucas referências sobre não-linearidade. Primeiramente, discretizamos o domínio de interesse. Assim, supomos que o espaço e o tempo podem ser representadas por uma rede retangular uniforme. Cada valor de uma quantidade em um ponto representa o valor dessa quantidade nessa posição e suas vizinhanças. Depois da discretização, o ponto (m, n) representa o ponto $(x = mh, t = nk)$, onde h e k são os espaçamentos da rede na direção espacial e temporal.

Uma vez discretizado o domínio, temos que discretizar a equação de movimento, ou seja, obter uma equação para os pontos discretos de modo que, quando a resolvemos, sua solução seja parecida com a solução da equação contínua, que é nosso objetivo.

Para discretizar a equação, lembramos as definições de derivada parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u(x, t + \epsilon) - u(x, t)}{\epsilon} \quad (2.9)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u(x, t + \epsilon) - u(x, t - \epsilon)}{2\epsilon} \quad (2.10)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u(x, t) - u(x, t - \epsilon)}{\epsilon}. \quad (2.11)$$

Então, temos não só uma, mas três definições da derivada parcial. Assim, podemos ter três aproximações finitas das derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial t}(mh, nk) \approx \frac{u(mh, (n+1)k) - u(mh, nk)}{k} \quad (2.12)$$

$$\approx \frac{u(mh, (n+1)k) - u(mh, (n-1)k)}{2k} \quad (2.13)$$

$$\approx \frac{u(mh, nk) - u(mh, (n-1)k)}{k}. \quad (2.14)$$

Estas aproximações são chamadas diferenças progressivas, centrais e regressivas. Cada uma delas

tende à derivada parcial no limite $k \rightarrow 0$. Se precisamos de derivadas parciais de ordem dois, temos

$$\frac{\partial^2 u(mh, nk)}{\partial t^2} \approx \frac{u(mh, (n+2)k) - 2u(mh, (n+1)k) + u(mh, nk)}{k^2} \quad (2.15)$$

$$\approx \frac{u(mh, (n+1)k) - 2u(mh, nk) + u(mh, (n-1)k)}{k^2} \quad (2.16)$$

$$\approx \frac{u(mh, nk) - 2u(mh, (n-1)k) + u(mh, (n-2)k)}{k^2}, \quad (2.17)$$

que são chamadas também progressiva, central e regressiva. Para a parte espacial temos algo similar, só temos que trocar k por h e fazer as diferenças na parte espacial. Nosso sistema de equações de interesse é hiperbólico, sua parte das derivadas parciais é igual à equação da onda, portanto encontremos um esquema de diferenças finitas para ela. A equação de onda, com $c = 1$ é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (2.18)$$

e uma equação em diferenças finitas usando as derivadas centrais no tempo e no espaço é

$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0, \quad (2.19)$$

onde estamos usando a notação $u_m^n \equiv u(mh, nk)$.

2.3.1 Explícito e implícito

Se conhecemos u_m^n para todo m , para um tempo, n e um tempo anterior, $n-1$, é possível achar u_m^{n+1} em termos de quantidades já conhecidas

$$u_m^{n+1} = \frac{k^2}{h^2} (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + 2u_m^n - u_m^{n-1}. \quad (2.20)$$

Assim estamos achando a quantidade do passo seguinte de tempo em termos de quantidades do tempo atual e o anterior. Quando podemos escrever o esquema assim, chamamos o esquema de explícito. O esquema anterior é chamada de 5 pontos e pode ser representado graficamente, veja figura 2.1.

Se não é possível deixar uma só quantidade desconhecida em termos de quantidades conhecidas então temos um esquema implícito, veja por exemplo a figura 2.2. Eles são resolvidos solucionando um sistema de equações para cada passo de tempo, onde as variáveis são as quantidades no tempo $n+1$. Estes sistemas implícitos têm a desvantagem então de ter que resolver um sistema algébrico,

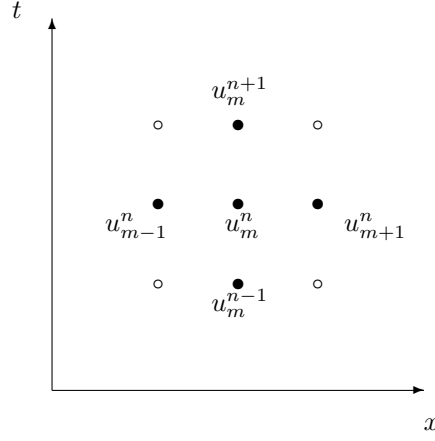


Figura 2.1: Esquema de 5 pontos.

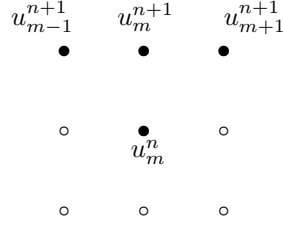


Figura 2.2: Exemplo de um esquema implícito.

linear ou não linear dependendo da equação contínua, para cada passo e algumas vezes apresentam oscilações não desejadas. Mas têm a vantagem de serem mais estáveis numericamente.

2.3.2 Da consistência, convergência e estabilidade

As definições seguintes, copiadas de [25], são importantes. Se temos que a equação diferencial parcial $Pu = f$ tem um esquema de diferenças finitas $P_{k,h}v = R_{k,h}f$, fazemos as seguintes definições:

Definição: Seja $u(x, t)$ uma solução da equação diferencial parcial e $v_{m,n}$ uma solução ao esquema de diferenças finitas. O esquema é *convergente* se para toda $v_{m,n}$ solução, quando $v_{m,0}$ converge a $u(x, 0)$ quando mh converge a x , então $v_{m,n}$ converge a $u(x, t)$ quando (mh, nk) converge a (t, x) e h, k tendem a zero.

Definição: O esquema $P_{k,h}v = R_{k,h}f$ é *consistente* com a equação $Pu = f$ se, para toda função $\phi(x, t)$,

$$P\phi - P_{k,h}\phi \rightarrow 0 \text{ quando } h, k \rightarrow 0.$$

Definição: A norma $L2$ de uma função discreta w escrita como $||w||_h$ é definida como

$$||w||_h = \left(h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |w|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.21)$$

Definição: O esquema de diferenças finitas $P_{k,h}v_{m,n} = 0$ é *estável* na região Λ se existe um inteiro J tal que, para todo tempo T , existe uma constante C_T tal que

$$||v^n||_h = C_T \sum_{j=0}^J ||v_j||_h$$

para $0 \leq nk \leq T$, com $(h, k) \in \Lambda$.

Definição: O esquema $P_{k,h}v = R_{k,h}f$ que é consistente com a equação $Pu = f$ é precisa da ordem p no tempo e ordem q no espaço se para toda função suave $\phi(x, t)$

$$P_{k,h}\phi - R_{k,h}P\phi = O(k^p) + O(h^q).$$

Este esquema é preciso de ordem (p, q) .

Teorema de Lax-Richtmyer: Um esquema é estável e consistente com uma equação diferencial parcial linear se e somente se é convergente.

2.3.3 Outras propriedades de esquemas numéricos

Quando temos sistemas que têm quantidades conservadas, é importante ter que o esquema conserve a versão discreta destas quantidades. Entre as quantidades que são desejáveis que sejam conservadas temos a energia, o momento linear, o momento angular e a simplecticidade. Em geral, os esquemas de diferenças finitas não conservam estas quantidades.

Conservação de energia: Esquemas que têm esta qualidade existem desde 1928 com Courant, et. al. Mas o interesse dos esquemas era para provar estabilidade e não a conservação. Depois dos anos 70, ocorreu um interesse pelos esquemas e a conservação da energia, e alguns trabalhos são Strauss e Vazquez[26], Greenspan[27], Li e Vu-Quoc[28], e Fla[29]. Mais recentemente, aparecem os trabalhos de Furihata [30] e Matsuo [31].

Conservação de Simplecticidade: Desde os 60 tem-se trabalhado em esquemas numéricos que conservem a simplecticidade, ou seja, a estrutura geométrica do espaço de fase de sistemas hamiltonianos. Mais precisamente, a quantidade conservada é a 2-forma $\omega = dp \wedge dq$, e queremos que seja conservada $d\omega/dt = 0$. Os algoritmos simpléticos foram introduzidos por De Vogelaere em

1956. Para sistemas contínuos, nos anos 90s, esquemas multi-simpléticos foram descobertos, com os trabalhos de Marsden et. al. [32] e Bridges [33], .

2.3.4 Alguns esquemas

Os esquemas usados nesta dissertação, escolhidos pela simplicidade e por suas propriedades, são os seguintes:

- 5-pontos: Algoritmo explícito de ordem $O(h^2) + O(k^2)$. Além disso, tem a propriedade de ser multisimplético. Para a equação de Klein Gordon não linear, $u_{tt} - u_{xx} + f(u) = 0$, o esquema é

$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} + f(u_{m,n}) = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}. \quad (2.22)$$

- 9-pontos: Algoritmo implícito de ordem $O(h^2) + O(k^2)$, multisimplético,

$$\partial_t^2(u_{m-1}^n + 2u_m^n + u_{m+1}^n) - \partial_x^2(u_m^n + 2u_m^n + u_m^{n-1}) + \sum f = 0, \quad (2.23)$$

em que

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u_m^n &= \frac{1}{k^2} (u_m^n - 2u_m^n + u_m^{n-1}) \\ \partial_x^2 u_{m,n} &= \frac{1}{h^2} (u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) \\ \sum f &= f(u_{m-1/2}^{n-1/2}) + f(u_{m-1/2}^{n+1/2}) + f(u_{m+1/2}^{n-1/2}) + f(u_{m+1/2}^{n+1/2}) \\ u_{j+1/2}^{i+1/2} &= \frac{1}{4} (u_j^i + 2u_{j+1}^i + u_j^{i+1} + u_{j+1}^{i+1}) \end{aligned}$$

- Strauss: O esquema de Strauss é, provavelmente, o esquema mais simples que conserva uma quantidade discreta da energia. É de ordem $O(h^2) + O(k^2)$. Se temos uma equação não-linear de Klein-Gordon, $u_{tt} - u_{xx} + F'(u) = 0$, o esquema é

$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} + \frac{F(u_m^{n+1}) - F(u_m^{n-1})}{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}. \quad (2.24)$$

Para este esquema, definimos a versão discreta da quantidade de energia

$$G(u_m^n) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} \right)^2 + \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} \right) \left(\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} \right) + F(u_m^{n+1}) + F(u_m^n) \right], \quad (2.25)$$

a qual, somada sobre todo espaço, é conservada exatamente:

$$E(u^n) = \sum_m hG(u_m^n). \quad (2.26)$$

Este esquema é implícito como se pode ver de (2.24).

Capítulo 3

Comparação entre métodos

A motivação desta dissertação vem, em parte, do método usado num artigo de Linhares e Oliveira [22], pois ele parece muito econômico computacionalmente quando trabalhamos na reta real. Portanto, a primeira parte desta dissertação visou reproduzir os cálculos e gráficos do artigo citado.

3.1 Repetindo o artigo de Linhares e Oliveira

O objetivo é perturbar o kink $\lambda\phi^4$ e observar o que acontece com as perturbações. Esse método permite ter perturbações além do regime linear.

3.1.1 Trabalho de Linhares e Oliveira

Linhares e Oliveira [22] usam o método de Galerkin para obter a evolução temporal do kink perturbado $\lambda\phi^4$. Para isso, temos que resolver a seguinte equação diferencial:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi(x, t) + (\phi^2 - b^2)\phi(x, t) = 0, \quad (3.1)$$

onde foi usado o potencial $V(\phi) = \frac{1}{4}(\phi^2 - b^2)^2$, e cuja solução kink é $\phi_0 = b \tanh \frac{b}{\sqrt{2}}x$. Então, supondo uma solução total para $\phi(x, t)$ da forma

$$\phi(x, t) = \phi_0(x) + \delta\phi(x, t), \quad (3.2)$$

obtemos a equação diferencial parcial para a perturbação. O domínio do problema é $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$. Em geral, existem funções de base apropriadas para espaços não limitados, como funções

sinc, hermite e chebyshev mapeados e também temos funções de base para espaços semi-limitados, como funções de Laguerre, veja por exemplo [34] capítulo 17.

O método usado por Linhares e Oliveira é diferente. Consiste em fazer um mapeamento da reta real no intervalo aberto $(-1, 1)$ usando uma transformação de variáveis $\xi = \tanh bx/\sqrt{2}$. O mapeamento de um intervalo infinito a um intervalo finito foi proposto por Grosch e Orszag em 1977 [35]. Neste artigo seminal, obtiveram resultados interessantes quando as soluções caem exponencialmente no infinito.

A solução kink agora é $\phi_0(\xi) = b\xi$ e a equação de movimento para a perturbação $\delta\phi(\xi, t)$ é

$$(\delta\phi)'' - \frac{b^2}{2}(1 - \xi^2) [(1 - \xi^2)(\delta\phi)'' - 2\xi(\delta\phi)'] + (3\xi^2 - 1)b^2\delta\phi + (3b\xi^2 + \delta\phi)(\delta\phi)^2 = 0, \quad (3.3)$$

com as condições de contorno, $\delta\phi(\xi = \pm 1, t) = 0$. Pelo método de Galerkin se usa uma expansão em série para $\delta\phi$

$$\delta\phi(\xi, t) = \sum_{n=0}^N a(t)\Psi(\xi). \quad (3.4)$$

Para satisfazer as condições de contorno, os autores usam como funções de base

$$\Psi(\xi) = T_{k+2}(\xi) - T_k(\xi), \quad (3.5)$$

onde $T_k(\xi)$ é o polinômio de Chebyshev de ordem k . Inserindo esta série em (3.3), obtemos R . Em seguida, fazendo o produto ponto com cada um dos Ψ_k e igualando a zero, obtemos $N + 1$ equações diferenciais ordinárias acopladas para os $N + 1$ coeficientes $a(t)$,

$$\begin{aligned} \ddot{a}_0 + \frac{5}{2}a_0 + \frac{b^2}{2}a_2 + \dots &= 0 \\ \ddot{a}_1 + \frac{3b^2}{2}a_1 + \frac{44987}{63365}a_{11} + \dots &= 0 \\ \vdots & \\ \ddot{a}_{11} - \frac{63b^2}{4}a_9 + \frac{3701b^2}{58}a_{11} + \dots &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

É interessante notar que as equações só contêm coeficientes pares ou ímpares. Assim, o sistema de equações pode ser dividido em dois sistemas independentes.

A condição inicial do sistema é uma perturbação gaussiana

$$\delta\phi(\xi, 0) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x(\xi) - x(\xi_0))^2}, \quad (3.7)$$

onde A_0 é a amplitude, σ é o desvio padrão e $x(\xi_0)$ é o centro da perturbação.

3.1.2 Repetindo

Para os cálculos, usamos o software Mathematica, versão 6 e 7, para windows e linux. Este permite a manipulação algébrica de expressões grandes com mais facilidade. Além disso, o Mathematica possui um pacote numérico para resolver sistemas de equações diferenciais, e também tem funções implementadas para achar espectros em frequências usando a *Fast Fourier Transform* (FFT).

Na figura 3.1a), mostra-se o kink mais a perturbação na coordenada x , em b) a perturbação na coordenada ξ usando $N=4, 7$ e 11 termos na série com os parâmetros $A_0 = 0.4$, $\sigma = 0.2$, $\xi_0 = -0.562$ e $b = 1.5$. Este gráfico corresponde à figura 1 do artigo de Linhares.

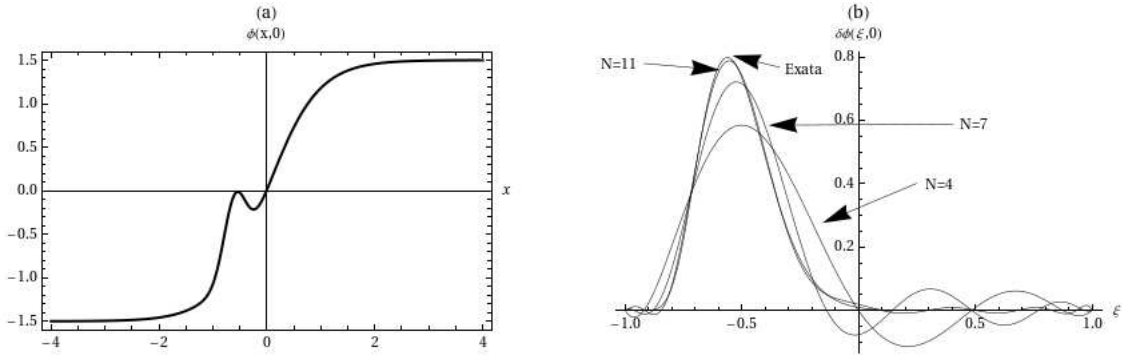


Figura 3.1: Em a) temos o kink mais a perturbação na coordenada x . Em b) temos a perturbação gaussiana na coordenada ξ , e as aproximações dela com $N=4$, $N=7$ e $N=11$, usando os parâmetros $A_0 = 0.4$, $\sigma = 0.2$, $\xi_0 = -0.562$ e $b = 1.5$ nos dois casos.

Na figura 3.2, mostra-se em a) a evolução temporal do coeficiente $a_0(t)$ para tempos até $T = 100$ e em b) até $T = 2000$. Em c) mostra-se a evolução do coeficiente $a_3(t)$ até $T = 150$, usando nos três casos a amplitude $A_0 = 0.01$. Esta corresponde à figura 2 do artigo de Linhares.

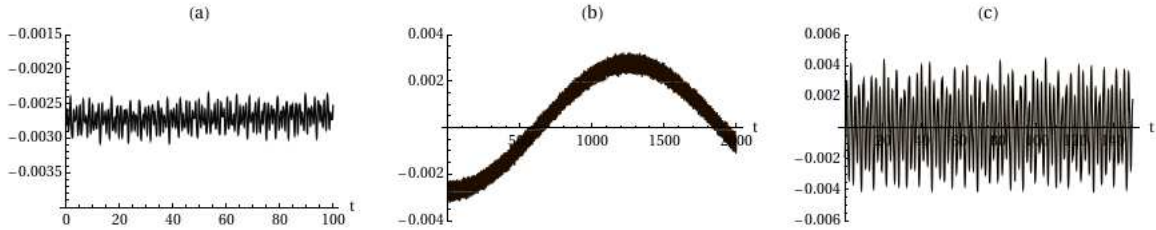


Figura 3.2: Em a) e b) temos a evolução temporal do coeficiente $a_0(t)$, até $T = 100$ e $T = 2000$ respectivamente. Em c) mostra-se a evolução temporal de $a_3(t)$ até $T = 150$. Todas elas são calculadas com parâmetros $A_0 = 0.4$, $\sigma = 0.2$, $\xi_0 = -0.562$ e $b = 1.5$.

Na figura 3.3, mostra-se o espectro de potência do campo escalar médio

$$\langle \phi(x, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta \phi(x, t) dx = -4 \sum_{k=0}^N \frac{a_{2k}}{2k+1}, \quad (3.8)$$

para as amplitudes $A_0 = 0.08, 0.2$ e 0.7 . A figura 3 do artigo de Linhares é similar a esta, mais não exatamente igual. Isso se deve, talvez, ao método usado para integrar as equações ou ao método para achar o espectro de potências. O importante é notar que os gráficos mostram comportamentos similares. Para perturbações pequenas, temos um comportamento linear com alguns picos nas frequências lineares e quando acrescentamos a amplitude, o espectro tem forma de ruído, devido à não-linearidade.

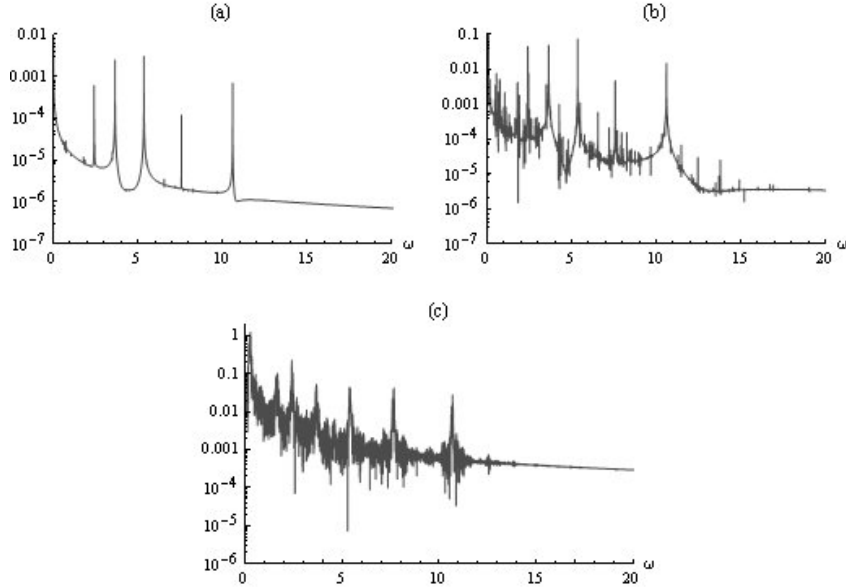


Figura 3.3: Espectro de potência para perturbação media, para amplitudes $A_0 = 0.08, 0.2$ e 0.7 nas figuras a), b) e c) respectivamente.

Na figura 3.4, mostra-se o kink mais a perturbação para tempos diferentes. Na figura 3.5 temos o gráfico da energia do kink em função do tempo. Um detalhe interessante da energia é sua variação. É de se esperar que haja uma variação, pois o esquema não possui a propriedade de conservação de energia, mas a figura 3.5 mostra variações de energia em torno de 20 por cento.

3.2 Comparando com diferenças finitas

Depois de obter os gráficos do artigo, comparamos a evolução temporal obtida pelo método de Galerkin com o método de diferenças finitas. Para esse último simulamos o kink mais a perturbação,

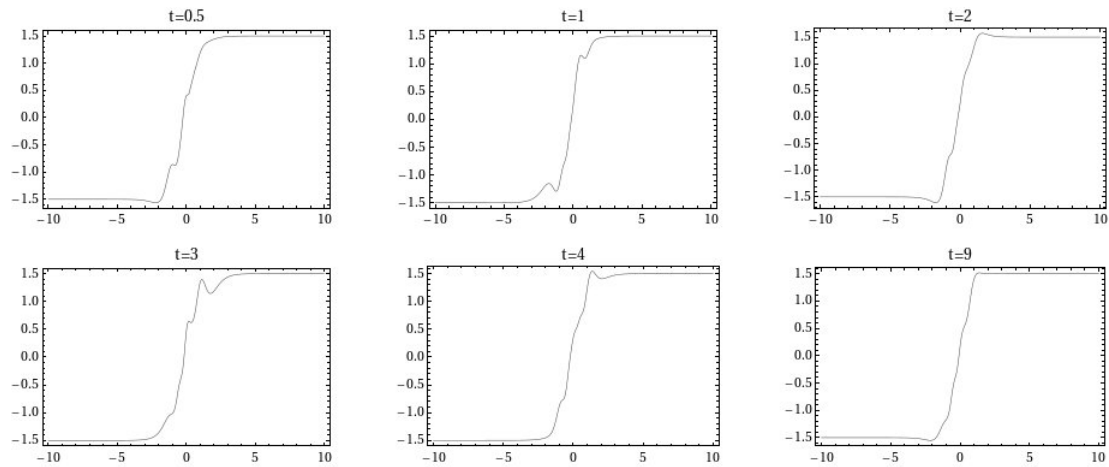
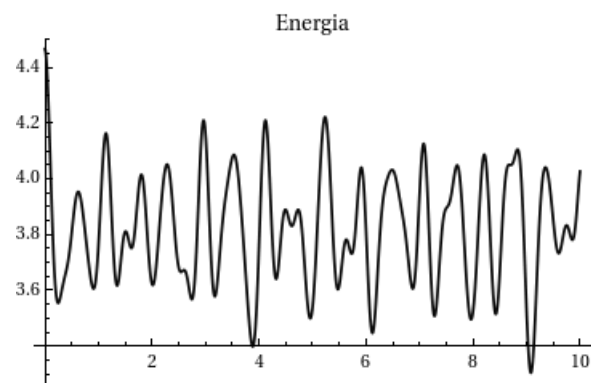


Figura 3.4: Evolução temporal do kink e a perturbação para vários tempos.

Figura 3.5: Energia total até $t=10$.

deixando o sistema todo evoluir. Nós usamos os três métodos de diferenças finitas explicados no capítulo anterior. Eles foram programados na linguagem C.

Para a simulação com diferenças finitas, simulamos só uma “janela” do domínio infinito, deixando as condições de contorno neste intervalo fixas. Assim, a simulação é só válida até que a perturbação chegue próximo dessas condições. Para ter uma noção do tempo, se nosso intervalo de programação abrange o intervalo do espaço físico $[-L, L]$, o tempo que vai tomar uma perturbação para chegar ao contorno é $t_m = L/c$, supondo que ela iniciou na posição $x = 0$. Pelo fato de que a velocidade da luz é um, temos assim um tempo $t_m = L$.

O método de 5-pontos explícito não teve nenhum detalhe de programação. Ao ser explícito, cada ponto novo calculado é obtido da expressão (2.22). Na figura 3.6, apresentamos a evolução temporal do kink mais a perturbação, usando $N = 8192$, para os mesmos tempos da figura 3.4 e com os mesmos parâmetros, a fim de fazer uma comparação. A figura 3.7, mostra a quantidade

$$E^n = h \sum_{m=2}^N \left[\frac{1}{2} \left(\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} \right)^2 + F(u_m^n) \right], \quad (3.9)$$

que é um equivalente discreto da energia.

Para método de 9-pontos implícito, temos que resolver o seguinte sistema implícito em cada passo de tempo:

$$\begin{aligned} & (1 - r^2) u_{m-1}^{n+1} + (2 + 2r^2) u_m^{n+1} + (1 - r^2) u_{m+1}^{n+1} \\ & + (-2 - 2r^2) u_{m-1}^n + (-4 + 4r^2) u_m^n + (-2 - 2r^2) u_{m+1}^n \\ & + (1 - r^2) u_{m-1}^{n-1} + (2 + 2r^2) u_m^{n-1} + (1 - r^2) u_{m+1}^{n-1} \\ & + k^2 \left[F(u_{m-1/2}^{n+1/2}) + F(u_{m+1/2}^{n+1/2}) + F(u_{m-1/2}^{n-1/2}) + F(u_{m+1/2}^{n-1/2}) \right] = 0, \end{aligned}$$

onde $m = 2, 3, \dots, N - 1$, e as condições de contorno são

$$u_1^{n+1} = -b \quad (3.10)$$

$$u_N^{n+1} = b. \quad (3.11)$$

Assim, temos N equações e N incógnitas. Usamos o pacote GSL [36] para resolver este sistema. Este pacote tem várias funções implementadas para resolver sistemas de equações lineares e não-lineares, que tenham Jacobiano analítico ou não.

Na figura 3.8, temos novamente a evolução temporal do kink perturbado para os mesmos tempos

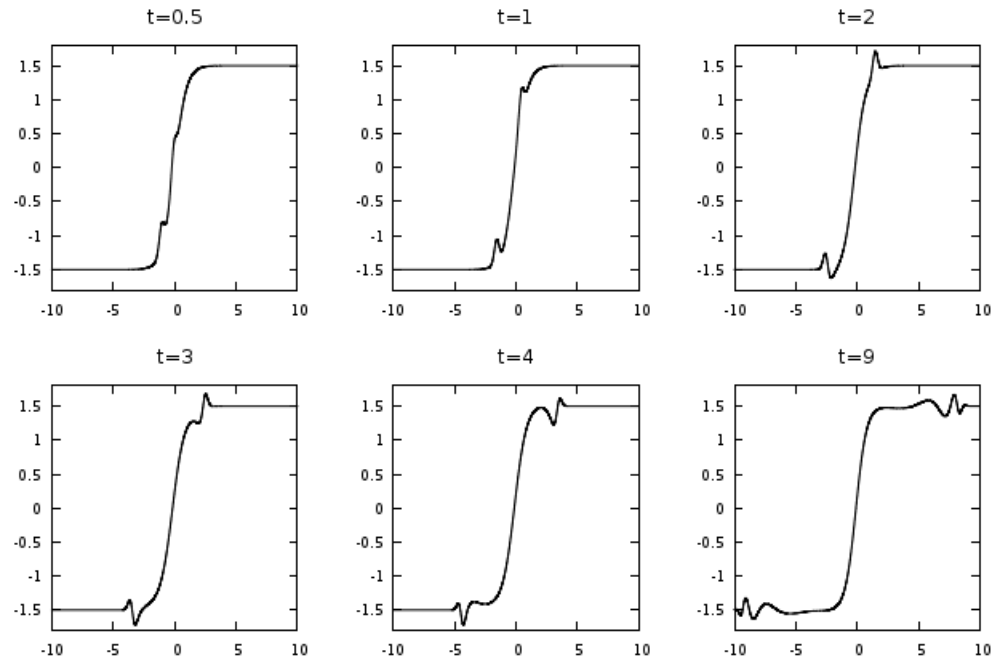


Figura 3.6: Evolução temporal usando o esquema de 5 pontos.

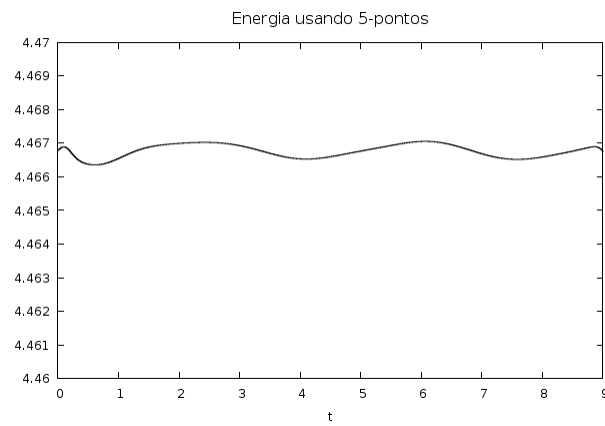


Figura 3.7: Energia total fazendo a evolução com o esquema de 5 pontos.

e para os mesmos parâmetros do sistema. Usou-se $N = 512$. A evolução por longos períodos usando este esquema tem oscilações não físicas devidas ao fato de que ele é implícito. Este problema é bem conhecido na literatura e existem técnicas numéricas para removê-las. Nós não programamos estas técnicas, porque o tempo de evolução de nosso interesse é curto e os resultados não mostraram essas oscilações não desejadas. Na figura 3.9 temos a energia em função do tempo.

Depois disso, programamos o esquema de Strauss. Como ele é implícito, usamos novamente a GSL. Este esquema tem a propriedade de conservar energia, ou melhor, uma versão discreta dela:

$$G(u_m^n) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} \right)^2 + \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} \right) \left(\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} \right) + F(u_m^{n+1}) + F(u_m^n) \right], \quad (2.25)$$

Na figura 3.10, ilustramos a evolução temporal e na figura 3.11 mostramos as duas versões discretas da energia, (3.9) e (2.25).

O importante desta sub-seção é notar que a evolução temporal do kink perturbado usando o método de Linhares e Oliveira não coincide com a evolução obtida usando os esquemas de diferenças finitas. Mas os diferentes esquemas de diferenças finitas mostram resultados parecidos. Outra coisa notável é que a variação da energia com os métodos de diferenças é muito menor ou nula comparado com a variação da energia do método de Linhares.

3.3 Exemplo da onda

Devido às diferenças entre os métodos usados na seção anterior, decidimos fazer uma evolução temporal de um sistema mais simples e cuja solução é conhecida, a equação de onda unidimensional. Para a condição inicial, usamos um perfil gaussiano (que é suave) movendo-se para a direita com uma velocidade inicial c . Sabemos então que a evolução do sistema é o perfil movendo-se com a mesma velocidade na mesma direção. Usamos a mesma transformação de coordenadas usada por Linhares e Oliveira e as mesmas funções de base.

Na figura 3.12, obtemos a evolução temporal com $N = 11$, para os tempos $t = 0, 1$ e 2 . Como se pode observar, a evolução acontece relativamente bem, coincide com o comportamento esperado, quando temos tempos pequenos. No entanto, quando a simulação chega a $t = 2$, observamos que a amplitude do perfil fica menor e observamos outros efeitos pequenos, que possivelmente sejam devidos a dispersão.

Na figura 3.13 mostra-se a evolução temporal depois de $t = 2$. Nesta figura o perfil é refletido mudando de sentido, como se tivéssemos um contorno fixo, o que é muito inesperado, porque a

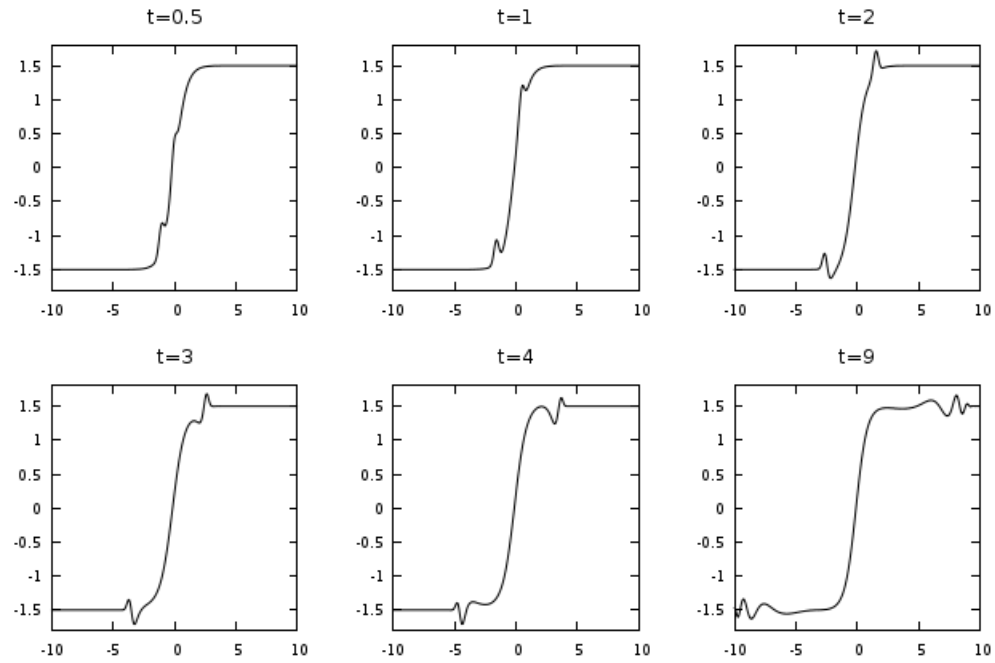


Figura 3.8: Evolução temporal usando o esquema de 9 pontos implícito.

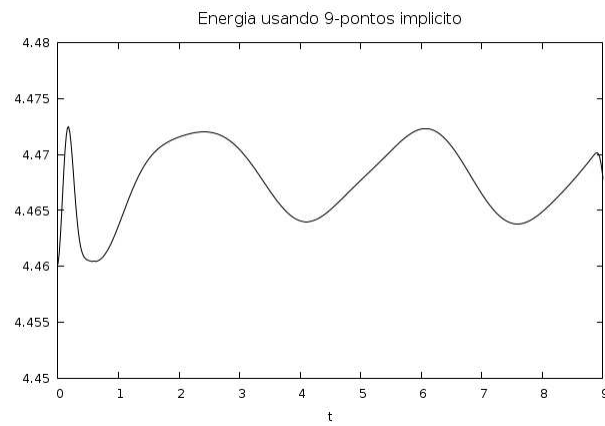


Figura 3.9: Energia total fazendo a evolução com o esquema de 9 pontos implícito.

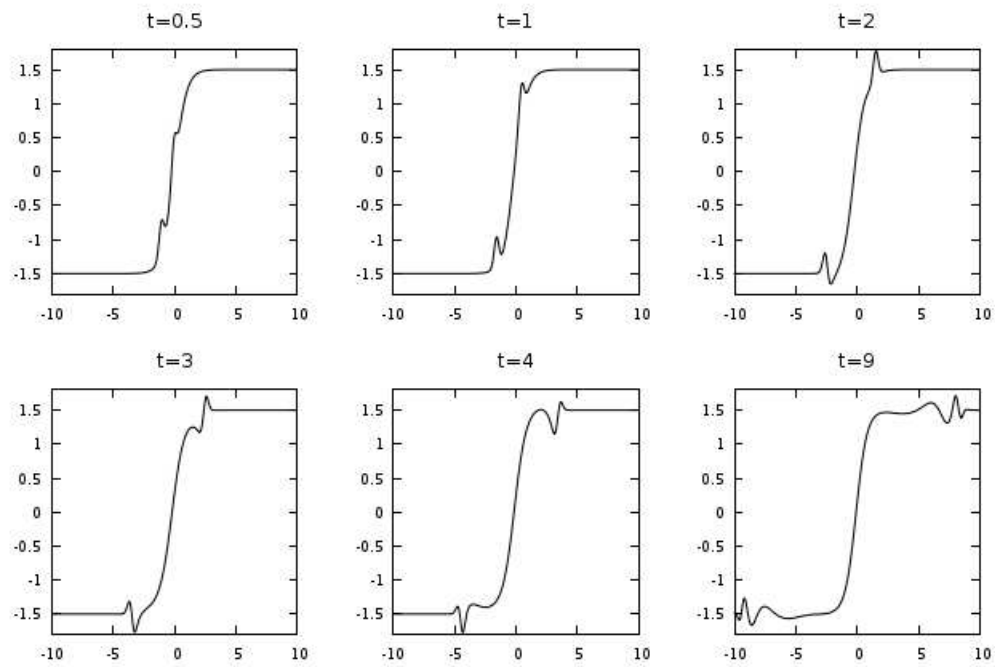


Figura 3.10: Evolução temporal usando o esquema de Strauss.

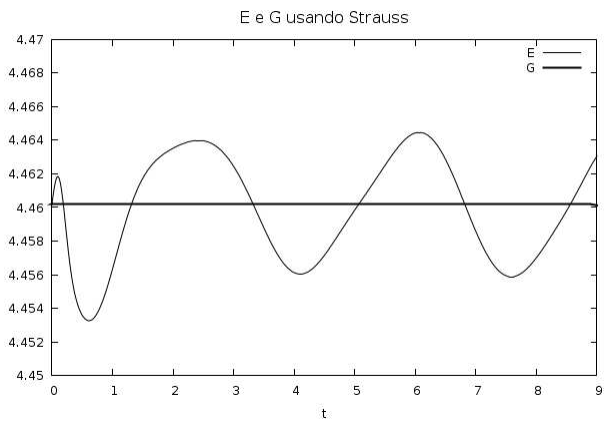


Figura 3.11: E e G fazendo a evolução com o esquema de Strauss.

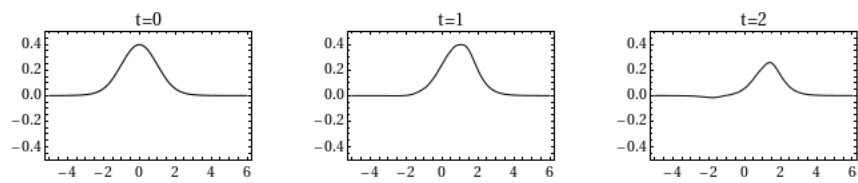


Figura 3.12: Evolução temporal da equação de onda com um perfil gaussiano inicial.

mudança de variáveis é feita para simular toda a reta real.

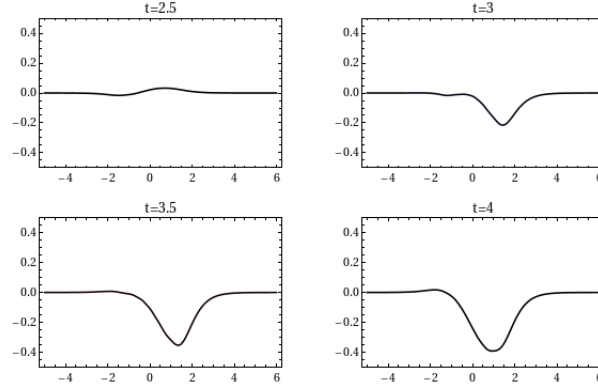


Figura 3.13: Evolução temporal depois de tempo $t = 2$.

Se isso acontecer para uma equação linear simples, então algo está errado no método usado por Linhares e Oliveira. Na seção seguinte tentaremos entender o que está acontecendo.

3.4 Métodos Espectrais e Mapeamentos

Sabemos que o método de Galerkin é bom para resolver equações diferenciais, então, por que os resultados obtidos não são os esperados para nosso problema de interesse?

Supomos que precisamos resolver uma equação diferencial, ou um sistema de equações diferenciais, no intervalo $(-\infty, +\infty)$, e que queremos resolvê-lo usando algum método espectral. Temos as seguintes escolhas:

1. Podemos truncar o intervalo $(-\infty, +\infty)$ a um intervalo finito $(-L, +L)$ a fim de usar métodos espectrais que se ajustem a esse problema. Uma dificuldade ocorre porque estamos ignorando tudo o que aconteça no intervalo $(-\infty, -L) \cup (+L, +\infty)$. Estamos supondo que nesses intervalos a solução é nula ou que assuma os valores do infinito. Quando isso deixa de acontecer, a solução aproximada é considerada errada.
2. Outra opção é usar bases que têm como domínio a reta real, entre elas, os polinômios racionais de Chebyshev ou Hermite. Veja [34].
3. Existe também outra possibilidade. Dada uma função suave, bijetora e inversível $f(x) : (-\infty, +\infty) \rightarrow (-a, +a)$, fazemos um mapeamento de nosso domínio de interesse a um intervalo finito. Desse modo podemos usar métodos espectrais de intervalos finitos.

Estamos interessados na opção 3. Seja z a variável no intervalo finito, x a variável na reta real

e a transformação $z = f(x)$. Assim, um intervalo Δx pequeno é mapeado aproximadamente no intervalo

$$\Delta z = f'(x)\Delta x. \quad (3.12)$$

Em geral, os métodos espectrais têm uma resolução de ordem $1/N$, onde N é o índice da função usada. Nós desejamos que as funções de base tenham uma resolução de Δz no nosso domínio de interesse, então precisamos de $N_z = 1/\Delta z$ funções base. Usando a equação (3.12), podemos obter uma relação entre o número de funções de base nos dois domínios:

$$N_z = g'(z)N_x = \frac{1}{f'(x)}N_x, \quad (3.13)$$

onde $x = g(z)$ é a inversa de $f(x)$. Assim, observamos então que o número de funções de base depende da posição que estamos observando. Além disso, devido à forma funcional de f' , quando nos afastamos da origem, precisamos de um número cada vez maior de funções de base no intervalo compacto.

Ou ainda, se temos um número fixo de funções de base no intervalo finito N_z , e uma função na reta real que pode ser representada por N_x , então só podemos dar conta até uma distância $x_M(N_z; N_x)$, isso é, uma condição de contorno fixa não física.

3.4.1 Mapeamento hiperbólico

Este é o mapeamento usado por Linhares e Oliveira. Seja a transformação $z = \tanh sx$, que mapeia a reta real ao intervalo $(-1, 1)$, e s é um parâmetro da transformação que dá conta da inclinação da curva. Veja na figura 3.14.

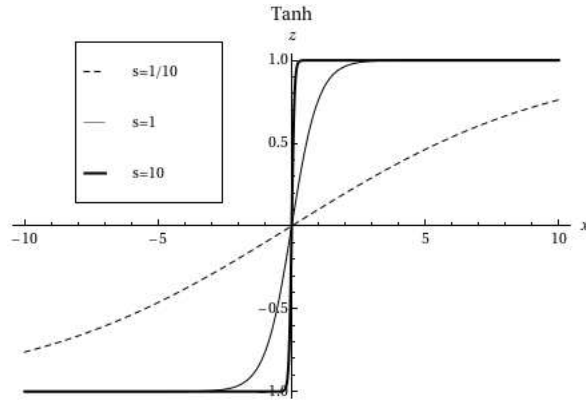


Figura 3.14: Mapeamento tanh.

Para este caso,

$$x_M = \frac{1}{s} \cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{sN_z}{N_x}} \right), \quad (3.14)$$

como mostra a figura 3.15. O mais importante aqui, é notar que temos diferentes x_M para diferentes N_x . Se temos uma função que é construída de várias funções de base, não todas elas irão ser representadas depois de certa distância. As funções de base de maior índice serão representadas até distâncias menores que aquelas que têm um índice N_x menor. Como efeito total, diferentes componentes serão refletidas em diferentes posições, um efeito dispersivo.

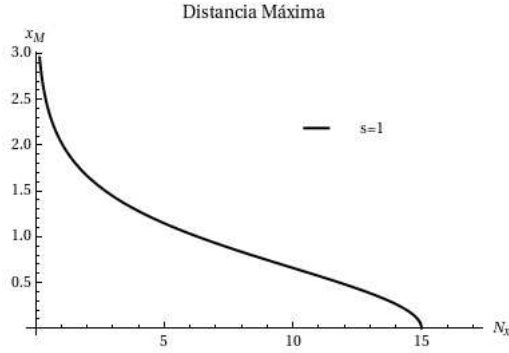


Figura 3.15: Distância máxima vs N_x .

Na figura 3.16, temos a figura anterior para diferentes parâmetros s . Quando s é pequeno, a distância máxima é maior, mas o número de funções de base representadas é menor. Isso é devido ao maior alongamento da transformação. O inverso ocorre quando s é grande.

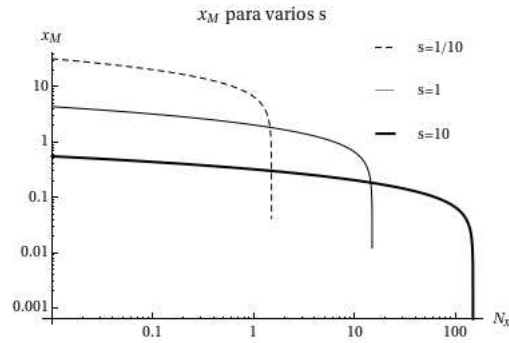


Figura 3.16: Vários s .

3.4.2 Mapeamento Racional

Seja o mapeamento

$$z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + L^2}} \quad (3.15)$$

onde L é um número real que leva em conta novamente a inclinação ou largura do mapeamento. A figura 3.17, mostra os mapeamentos e o x_M .

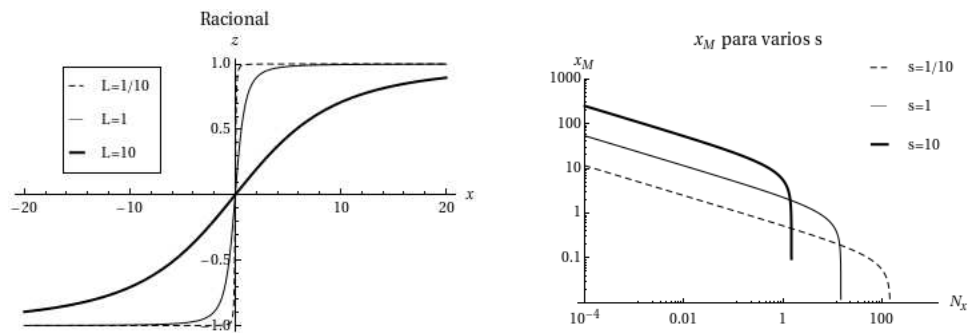


Figura 3.17: Para o mapeamento racional.

Capítulo 4

Estabilidade de alguns kinks

Do capítulo anterior, sabemos que os métodos espectrais com mapeamentos não são adequados para estudar kinks perturbados na reta real. Por tanto, usaremos um método de diferenças finitas, o método de 5 pontos explícito, para estudar a evolução destes kinks. Este método é simples e computacionalmente econômico por ser explícito. Além disso, não possui restrições no tamanho da perturbação, por tanto podemos achar a evolução temporal além do regime linear.

A perturbação que usamos é de perfil gaussiano. Este tem entre suas propriedades a de ser suave e localizado. A forma funcional da perturbação é

$$\delta\phi = A \exp\left(-b(x - x_0)^2\right), \quad (4.1)$$

onde A é a amplitude, $1/\sqrt{b}$ é a largura e x_0 é a posição do centro do perfil. Mudando a amplitude e sua largura, mudamos a energia total de configuração do sistema.

A estabilidade linear dos kinks foi mostrada no capítulo um. Além disso, sabemos que todas as soluções das equações, estáticas e dinâmicas, estão classificadas em setores topológicos. Se a condição inicial é um kink mais a perturbação descrita anteriormente, a evolução temporal $\phi(x, t)$ tem que ficar no mesmo setor topológico do kink não perturbado. Nosso interesse é observar como o sistema total evolui. Entre os possíveis cenários temos o decaimento do kink a outro kink de menor energia pertencente ao mesmo setor, a emissão de radiação, e a criação de mais kinks e antikinks.

A quantidade de energia da perturbação é da forma que, quando aumentamos a amplitude da perturbação, deixando fixa a largura, temos sempre mais energia. Se b é grande, temos perturbações estreitas, que têm energias grandes devido à rápida variação espacial do campo. Se b é pequeno, a perturbação é larga, e também tem energia grande. Veja as linhas da figura 4.7, que são curvas

de energia constante e mostram o comportamento. Para este trabalho variamos só a amplitude e a largura do perfil, ou seja, nosso espaço de parâmetros é o plano $A - b$.

4.1 $\lambda\phi^4$

Para nossa simulação, por simplicidade, supomos que o parâmetro b do potencial $\lambda\phi^4$ é igual a um. Assim, o potencial é da forma

$$U(\phi) = \frac{1}{4} (\phi^2 - 1)^2. \quad (4.2)$$

Lembrando o que foi visto no capítulo 1, temos um kink, um anti-kink e algo parecido com um *breather*, que é conhecido como *oscillon*. Perturbamos o kink com a perturbação descrita na introdução deste capítulo.

Quando a perturbação é muito pequena, estamos no regime linear e a perturbação é dissipada em forma de radiação. Quando temos b da ordem de 0.1 e a amplitude A menor que um, praticamente temos que toda a perturbação é transformada em radiação. Na figura 4.1 observamos este comportamento.

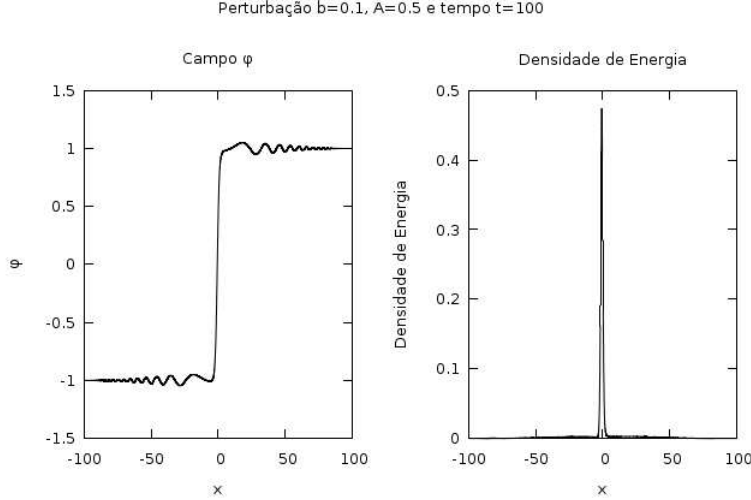


Figura 4.1: Energia da perturbação dissipada em radiação.

Se aumentamos mais a amplitude, quando temos uma energia total perto a três vezes a energia do kink, é criado um *oscillon*, veja na figura 4.2. Se aumentamos ainda mais a amplitude, quando temos uma energia total acima de quatro vezes a energia do kink, temos criação de um kink e um anti-kink e um *oscillon*, veja figura 4.3.

Se aumentamos a amplitude mais ainda, temos oscilações em torno de zero. Isso quer dizer que a energia é tão grande que é como se o potencial não tivesse os dois mínimos, mas como se tivesse

só um em zero. Veja por exemplo na figura 4.4, onde a energia é mais de 70 vezes a energia do kink. Nestes casos, depois de algum tempo, a energia vai se distribuindo no cone de luz e o tamanho das oscilações é cada vez menor. Quando a amplitude dessas oscilações é da ordem da unidade, temos criação de estruturas, veja figura 4.5.

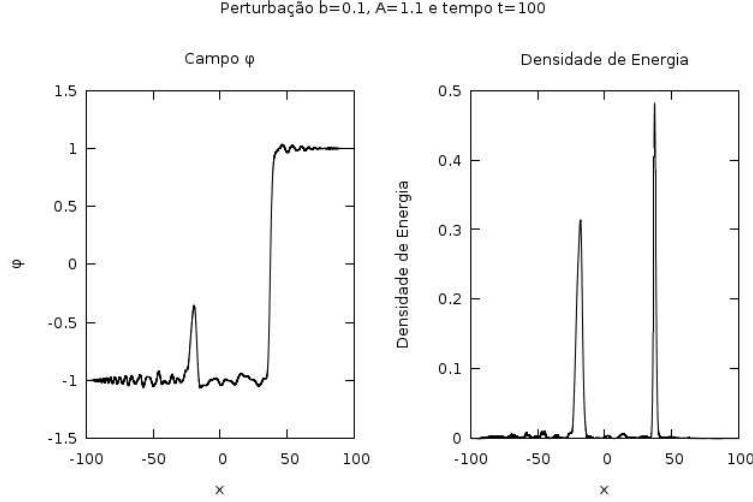


Figura 4.2: Temos um oscillon e um kink quando a perturbação é maior, $A \sim 1$.

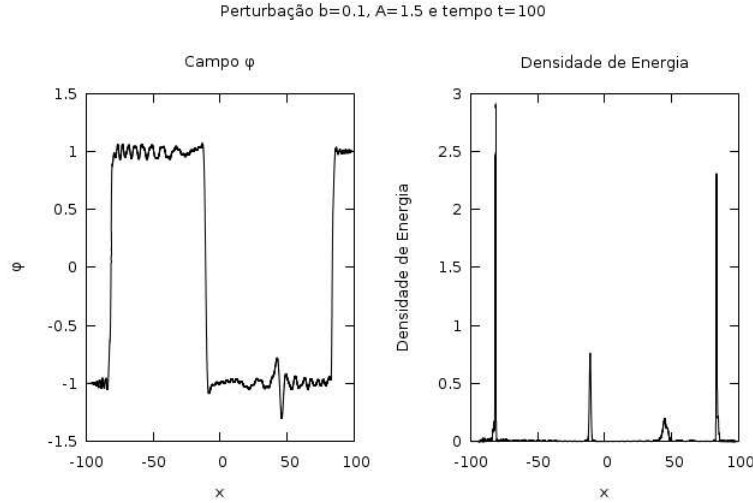


Figura 4.3: Se a energia é maior do que quatro vezes a energia do kink, podemos ter kinks e anti-kinks.

Se temos b menor, a perturbação é mais larga, e temos a criação de *oscillons* com maior facilidade. Se temos b maior do que 100, a perturbação é muito estreita e quase toda a energia é dissipada em ondas que viajam quase à velocidade c , veja figura 4.6, e desse jeito a energia fica no contorno do cone de luz.

O comportamento geral da perturbação para diferentes parâmetros pode ser observado na figura

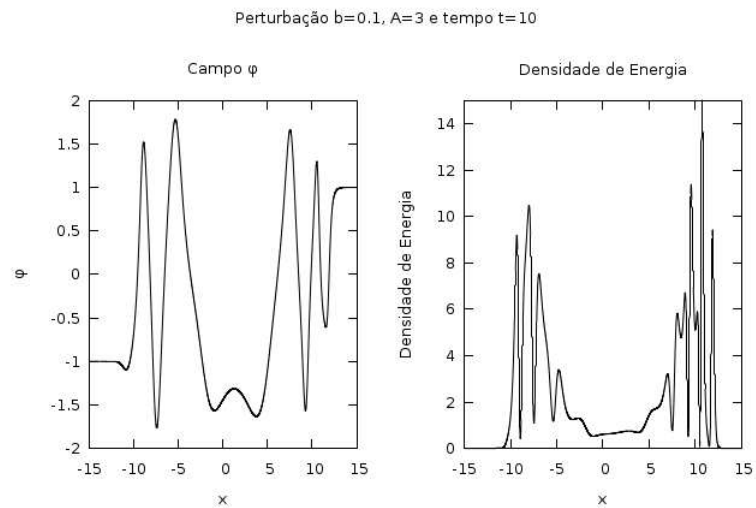


Figura 4.4: Nesta figura temos energias da ordem de 70 vezes a energia do kink. Quando estamos nos primeiros tempos, a oscilação do campo é em torno de $\phi = 0$. Isto mostra que o potencial duplo é ignorado.

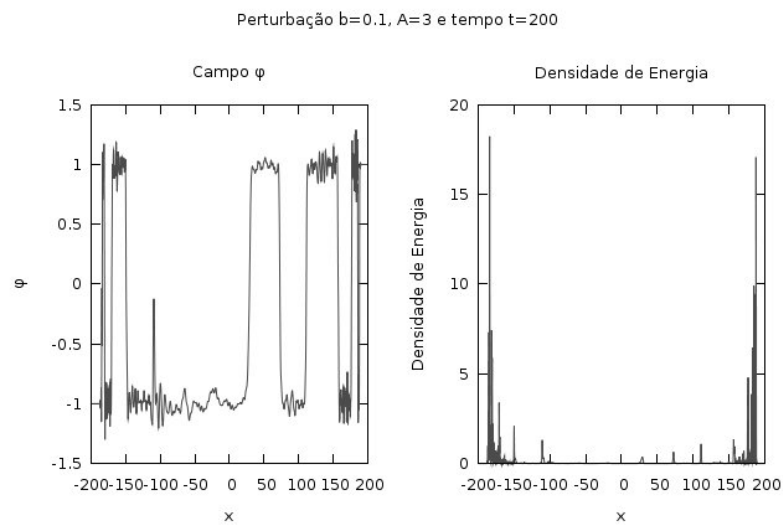


Figura 4.5: Quando a amplitude das oscilações é da ordem da unidade, temos criação de estruturas.

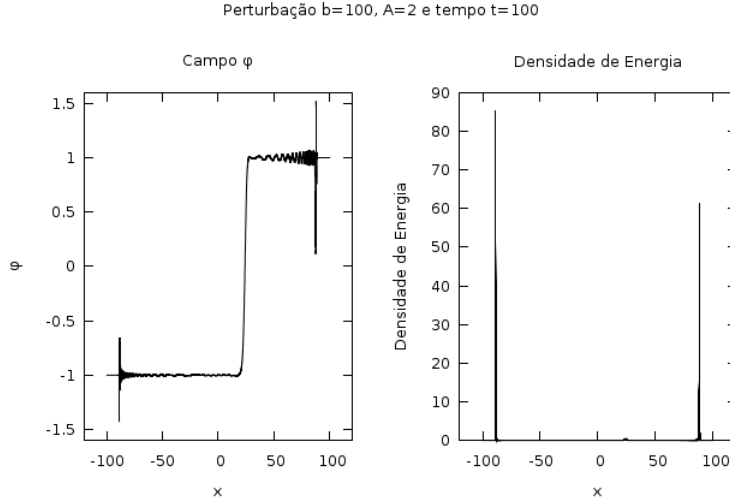


Figura 4.6: Quando a perturbação é estreita, a energia é dissipada em radiação que viaja quase à velocidade c .

4.7. As linhas de cores são curvas de energia total constante. Elas estão medidas em termos do número de vezes da energia do kink, para os valores 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000 e 5000. Os valores com linhas baixo são as linhas contínuas na gráfica. Os diferentes símbolos representam diferentes cenários. Os círculos pretos indicam que a energia da perturbação foi dissipada em radiação. Os triângulos para acima indicam que temos um *oscillon*. As caixas representam um kink e um antikink. Os círculos com pontos indicam que temos um kink mais um anti-kink e um ou dois *oscillons*. Asteriscos pretos querem dizer que as perturbações são tão grandes que o potencial duplo não é visto. O triângulo preto de lado é o cenário mostrado na figura 4.6, em que toda a energia fica no contorno.

4.2 MSTB

Os demais kinks perturbados foram defeitos de dois campos. A estratégia para simular eles é igual da um só campo. Usando o algoritmo de 5 pontos explícito, podemos calcular cada campo do seguinte tempo com os campos conhecidos do tempo atual.

Neste modelo temos mais estruturas, lembrando do capítulo 1, temos os kinks TK1, TK2 e NTK2. Sabemos também, que o kink TK2 é o único estável. Então o primeiro que faremos nesta seção é mostrar que os kink TK1 e NTK2 são instáveis.

A função do kink TK1 foi mostrada no capítulo 1. Neste kink, o campo ϕ_2 é nulo, por tanto temos que o potencial total para ϕ_1 é como o da teoria $\lambda\phi^4$. Então se perturbamos este campo, deixando o campo ϕ_2 em zero sempre, temos os resultados da seção anterior. O kink TK1 é estável

Figura 4.7: Dependendo dos parâmetros da perturbação temos diferentes cenários na evolução.

se é perturbado na componente ϕ_1 .

Se perturbamos o kink TK1 no campo ϕ_2 , observamos a instabilidade do kink. Uma pequena perturbação no campo dois, cresce e cresce até ter a amplitude do kink TK2. Veja figura 4.8.

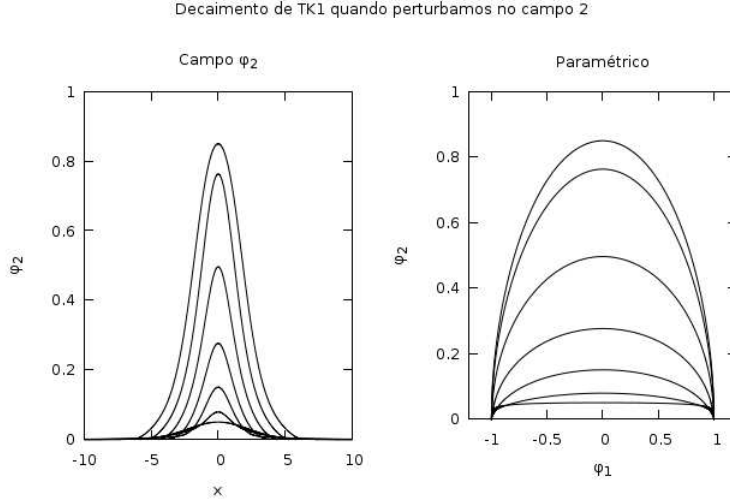


Figura 4.8: Decaimento do kink TK1 quando é perturbado no campo ϕ_2 . Na figura da esquerda temos o campo ϕ_2 nos tempos $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ de baixo para cima. Na direita, temos o desenho paramétrico. A perturbação inicial tem $A = 0.05$ e $\Omega^2 = 0.5$.

A forma funcional do kink NTK2 está no capítulo 1 e sabemos que o kink é instável. Quando simulamos este kink, ele decai depois de um tempo, ainda quando não perturbamos. Isso se deve talvez, ao arredondamento numérico no cálculo das funções matemáticas usadas na expressão. O kink NTK2 decai a um kink mais um antikink TK2 que ficam se afastando um do outro, veja figura 4.9. Isso é possível olhando a regra de soma de energias

$$E^{\text{NTK2}} = E^{\text{TK1}} + E^{\text{TK2}} \geq 2E^{\text{TK2}}. \quad (4.3)$$

Logo, o TK1 e o NTK2 decaem a um kink ou um kink e um antikink TK2 respectivamente. Agora, nosso interesse consiste em perturbar o kink TK2 e observar o que obtemos. Podemos perturbá-lo no ϕ_1 ou no ϕ_2 , mas os cenários são similares.

Temos o cenário da energia dissipada em radiação se a perturbação é pequena e larga. Se a perturbação é estreita e pequena, temos o cenário onde a energia vai ficar no cone de luz. Algumas vezes encontramos que o kink se inverte no campo ϕ_2 , veja figura 4.10 a esquerda. Em certos casos esquisitos, até parece existir um *oscillon*, veja figura 4.10 centro e direita. Se aumentamos a energia muito, temos a criação de kinks e antikinks. Embora o campo ϕ_2 tenha muitas variações, o campo ϕ_1 não oscila tanto, e nele observamos quando temos criação de estruturas, veja figura 4.11. A

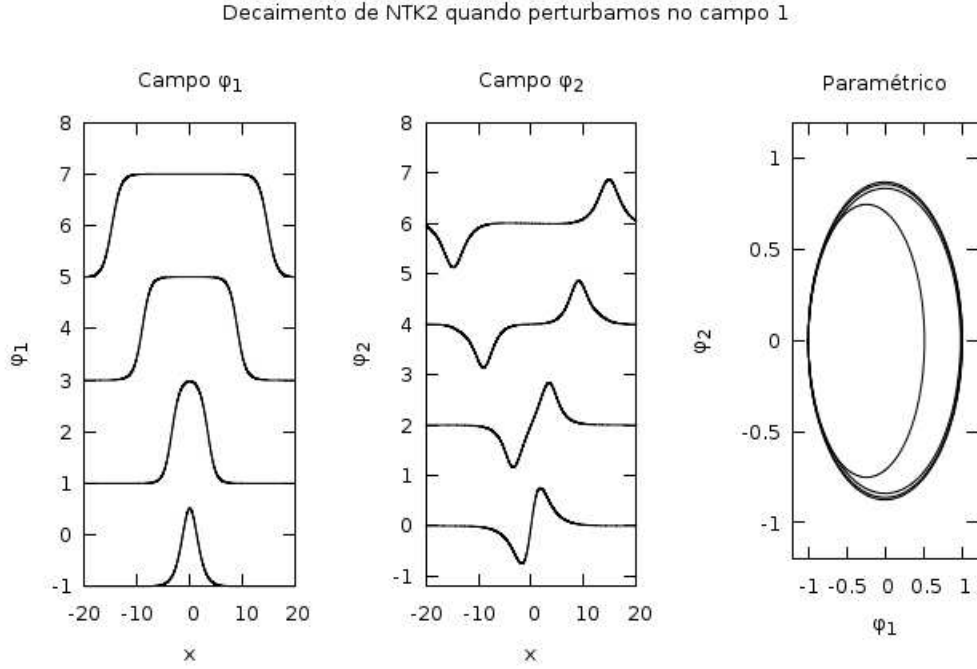


Figura 4.9: Decaimento do kink NTK2, quando perturbamos no campo ϕ_1 com $A = 0.01$, $b = 0.1$, de baixo para acima para os tempos $t = 0$, $t = 10$, $t = 20$ e $t = 30$. Na figura da direita o círculo cresce para tempos posteriores. Parâmetros $\Omega^2 = 0.25$, $\gamma = 0$.

ocorrência destes cenários não parece ser uma função clara dos parâmetros, A e b , da perturbação.

Por isso, uma figura como a 4.7 para este caso não mostra informação útil.

Como um detalhe final, todas as simulações desta seção foram feitas com $\Omega^2 = 0.5$.

4.3 BNRT

Este sistema tem dois campos independentes. Tem novamente a particularidade de que se deixamos o campo $\phi_2 = 0$, obtemos o sistema $\lambda\phi^4$. Lembrando do capítulo 1, temos uma família contínua de kinks, todos estáveis linearmente pela existência de um super-potencial. Usamos neste modelo $\sigma = 0.2$.

De novo, se temos o kink TK1AA perturbado no campo ϕ_1 e deixamos o campo $\phi_2 = 0$, obtemos os mesmos resultados da seção 5.1. Agora, se perturbamos o kink no campo dois, obtemos dois cenários possíveis. Se a perturbação é pequena, temos que o kink muda até tomar a forma de um kink TK2(c), com amplitude máxima no campo ϕ_2 menor que a amplitude inicial da perturbação, veja figura 4.12 e 4.13. Se a amplitude da perturbação é maior do que certo valor, temos que o kink muda continuamente até obter dois kinks, TKAB e TKBA, veja figura 4.14 e 4.15. Veja na figura 4.16 os dois cenários para diferentes parâmetros da perturbação.

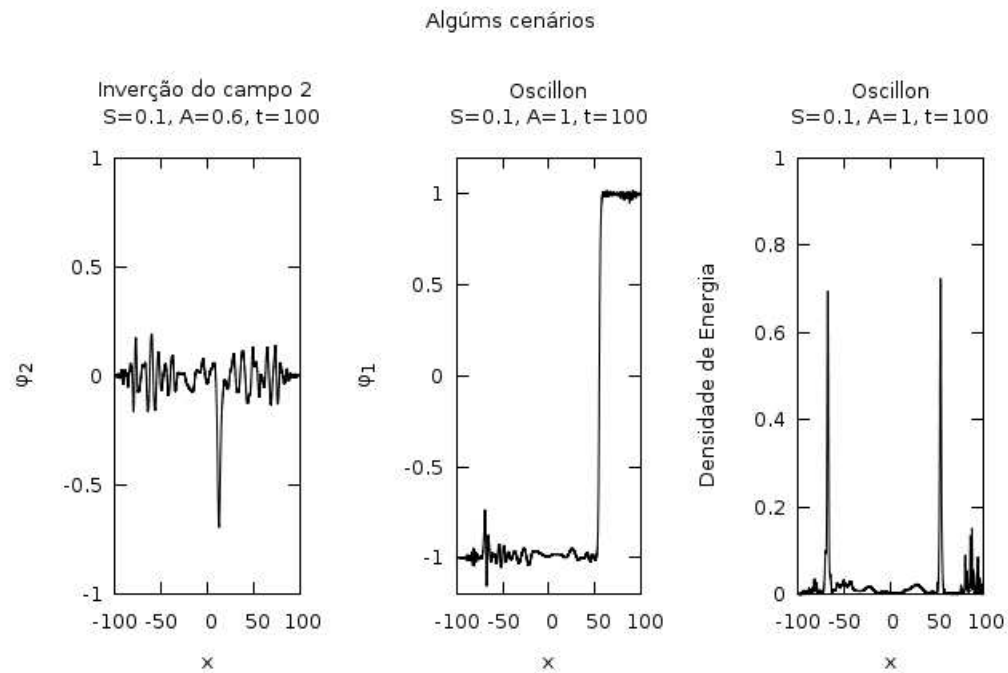


Figura 4.10: Alguns cenários ao perturbar o kink TK2 do MSTB. Na esquerda temos a inversão do campo ϕ_2 , e no centro e direita temos o campo ϕ_1 e a densidade de energia, o que parece ser um oscillon. $\Omega^2 = 0.5$.

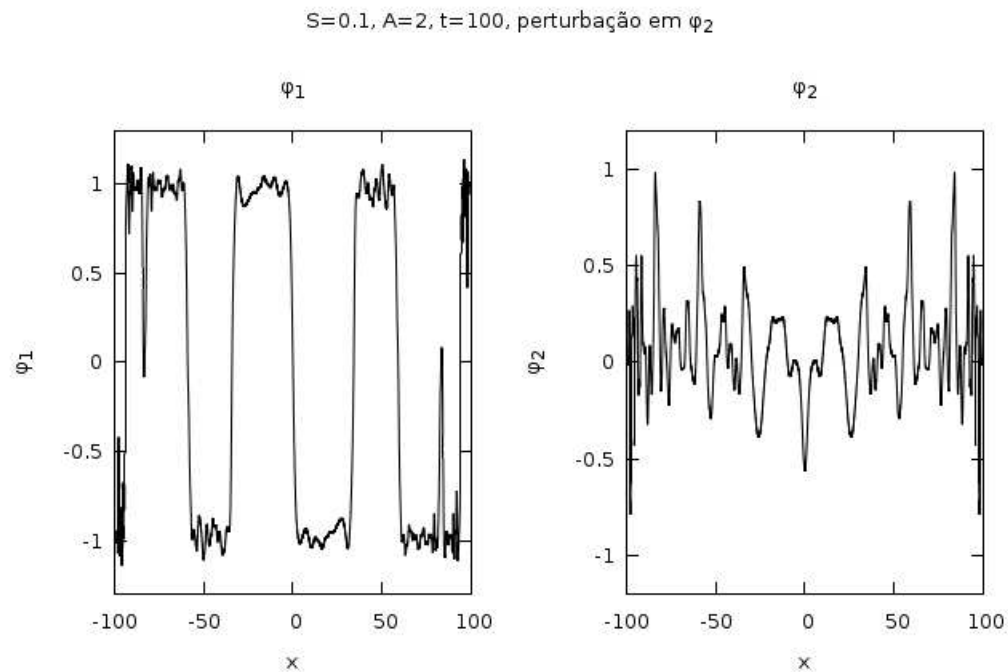


Figura 4.11: Quando perturbamos com muita energia a TK2 temos criação de kinks e antikinks. $\Omega^2 = 0.5$.

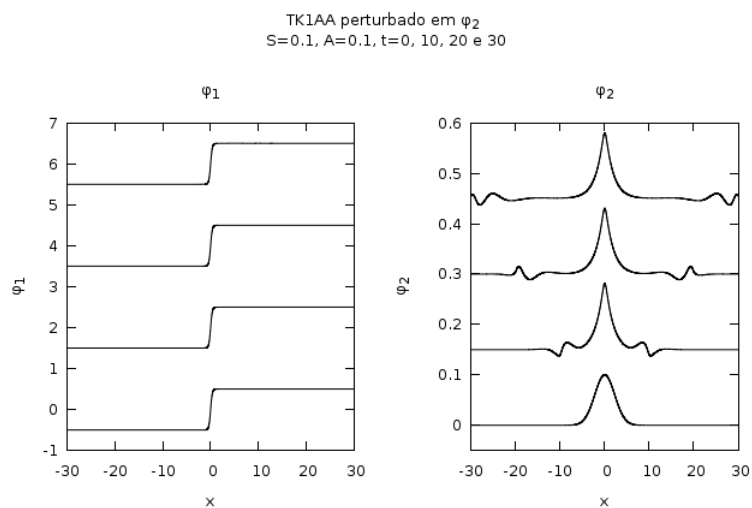


Figura 4.12: Se perturbamos o kink TK1AA com uma amplitude “menor” o kink decai a um kink TKAA(c). Nesta figura mostram-se os campos de baixo para cima para os tempos $t = 0$, $t = 10$, $t = 20$ e $t = 30$.

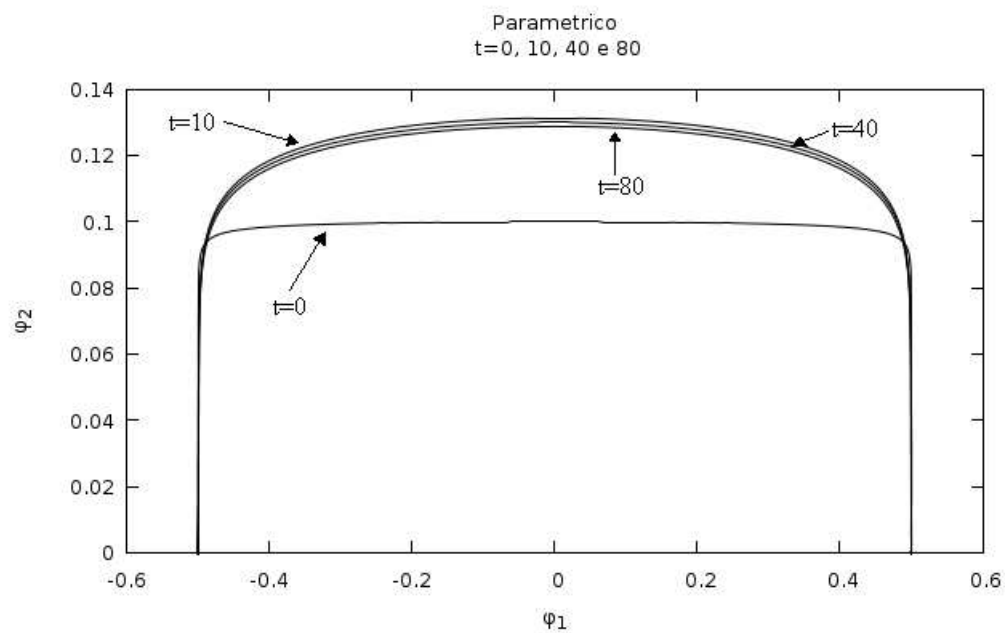


Figura 4.13: Evolução da perturbação para o mesmo cenário da figura 4.12 mostrando parametricamente os campos para os tempos $t = 0$, $t = 10$, $t = 40$ e $t = 80$.

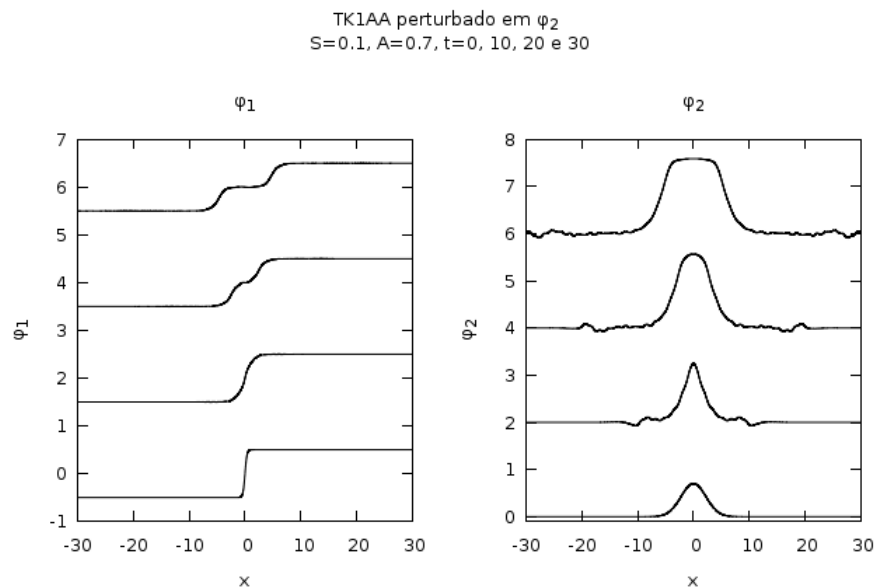


Figura 4.14: Se perturbamos o kink TK1AA com uma amplitude “maior”, o kink decai a um kink TKAB e um TKBA. Nesta figura mostram-se os campos de baixo para cima para os tempos $t = 0, t = 10, t = 20$ e $t = 30$

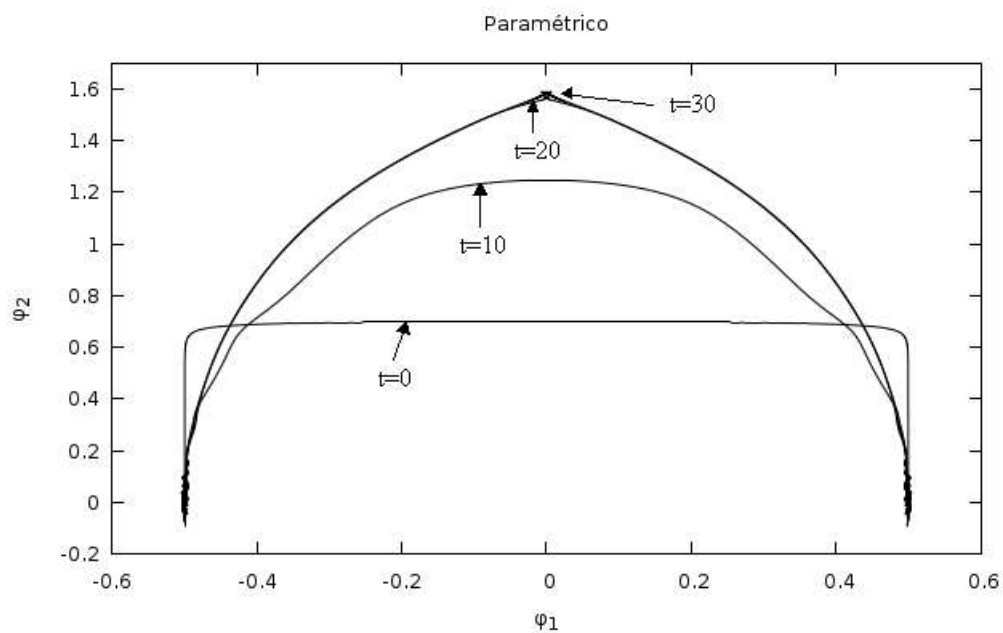


Figura 4.15: Evolução da perturbação para o mesmo cenário da figura 4.14 mostrando parametricamente os campos para os tempos $t = 0, t = 10, t = 20$ e $t = 30$.