

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

**Cicatrizes de Órbitas Periódicas
em Bilhares de Ação**

Im. 12.

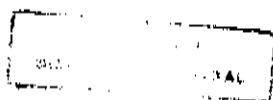
dissertação submetida ao
* Instituto de Física "Gleb Wataghin"
sob orientação do Professor
Dr. Marcus A. M. de Aguiar *
para a obtenção do título de Mestre em Física

* Julio Santiago Espinoza Ortiz ✓

1994

Este exemplar corresponde à redação final
da Tese defendida pelo aluno Julio
Santiago Espinoza Ortiz e aprovada pela
Comissão Julgadora.

22/MARÇO/1995





UNICAMP

FICHA CATALOGRAFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA CENTRAL - UNICAMP

Espinoza Ortiz, Julio Santiago

Es65c Cicatrizes de orbitas periodicas em bilhares de acao /
Julio Santiago Espinoza Ortiz. - - Campinas, SP : [s.n.], 1994.

Orientador: Marcus A. M. de Aguiar.

• Dissertacao (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Fisica Gleb Wataghin.

1. Comportamento caotico nos sistemas. 2. Orbitas.
3.* Bilhar de acao quantica. I. Aguiar, Marcus Aloizio Martinez
de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Fisica
Gleb Wataghin. III. Titulo.

A Cristina y Jorge

Agradecimentos

Ao professor Marcus A.M. de Aguiar pelo tema que me permitiu entrar nesse interessante campo, pela orientação, pela amizade.

Ao professor Alfredo Ozorio de Almeida pelas sugestões.

Ao grupo de Caos.

A FAPESP pelo suporte emprestado para a realização desse trabalho.

Conteúdo

Introdução	4
1 Teoria dos Bilhares de Ação	5
2 Bilhares Compactos	10
2.1 Bilhar Unidimensional	10
2.1.1 Bilhar Unidimensional Clássico	10
2.1.2 Bilhar unidimensional Quântico	12
2.2 Bilhar Bidimensional	14
2.2.1 Bilhar Bidimensional Clássico	14
2.2.2 Bilhar Bidimensional Quântico	15
2.3 O limite Semiclássico	16
2.4 Resultados	17
3 Estatística de níveis	23
3.1 Densidade média de estados	23
3.2 Matrizes Aleatórias	24
3.3 Fórmula do Traço de Gutzwiller	28
3.4 Resultados	29
3.4.1 Densidade de Weyl	29
3.4.2 Distribuição de primeiros vizinhos-NND.	33
3.4.3 Densidade Suavizada de Estados	34
4 Teoria de Cicatrizes	39
4.1 Formalismo	39
4.1.1 Média em energia da Função de Green	42
4.1.2 Média gaussiana nas coordenadas	43
4.2 Resultados	45

5	Autofunções no Espaço de Fase	53
5.1	Distribuição de Husimi	54
5.1.1	Sistema Unidimensional	54
5.1.2	Sistema Bidimensional	55
5.2	Seção de Poincaré Quântica	57
5.3	Resultados	58
5.3.1	Bilhar Unidimensional	58
5.3.2	Bilhar Bidimensional	59
6	Evolução Temporal dos Pacotes de Onda	64
6.1	Dinâmica do Pacote de Onda Gaussiano	65
6.1.1	Sistema de uma Dimensão	65
6.1.2	Sistemas em duas dimensões	66
6.2	Auto-Estados	67
6.3	Resultados	68
6.3.1	Bilhar circular (1-dim), no espaço de fase	68
6.3.2	Bilhar do tipo Estádio (2-dim)	70
6.3.3	espectro de estados	73
	Apêndice	78
	Referências	80

Introdução

A mecânica quântica de sistemas que provêm de hamiltonianos clássicos caóticos tem sido matéria de estudos aprofundados nos últimos anos, num campo conhecido como **caologia quântica**.

Em trabalhos iniciais, Gutzwiller conseguiu um importante resultado denominada **fórmula do traço** [1], nele mostra que as órbitas periódicas tem um papel importante no espectro e autoestados dos referidos sistemas. Usando-se as representações de Wigner[2] e Husimi[3,4] foi possível associar as auto-funções desses sistemas às estruturas no espaço de fase, estabelecendo uma maneira de relacionar as mecânicas quântica e clássica. Trabalhos posteriores mostraram que a natureza estatísticas das flutuações do espectro de energia está associado às matrizes aleatórias[5]. Num dos trabalho pioneiros, Heller[6] reportou que estruturas de órbitas periódicas também se manifestam nas funções de onda desses sistemas, o que chamou de **cicatrizes de órbitas periódicas**.

Numa série de artigos Ozorio de Almeida e Marcus de Aguiar[7], propõem uma nova maneira de encarar o estudo desses sistemas, isto através de sistemas que eles denominaram de **Bilhares de Ação**. Nesse estudo o truncamento das matrizes quânticas não implica no conhecido problema de cálculo aproximado dos auto-valores, fazendo viável um estudo quântico totalmente exato. Nesses trabalhos foram reportados algumas das propriedades desses sistemas, similares com as dos bilhares comuns (bilhares no espaço de configurações), tais como o comportamento tipo G.O.E das flutuações do espectro de energia, além de confirmarem a relação entre as oscilações da densidade de estados em torno da sua média com as órbitas periódicas[8].

Neste trabalho, continuamos com o estudo das 'cicatrices de órbitas periódicas' num bilhar do tipo Estádio. Esse bilhar é definido por dois semi círculos unidos por segmentos de reta. Nele a partícula se movimenta seguindo trajetórias retas e refletindo especularmente com a borda. Como é bem sabido esse bilhar tem um caracter clássico completamente caótico[9].

Com esses fins iniciamos essa tese introduzindo o formalismo da teoria geral dos bilhares de ação no capítulo 1. Em seguida, no Capítulo 2, aplicamos essa teoria e construímos o bilhar de ação quântico em uma dimensão, para depois fazer uma generalização e construir o estádio. Aqui apresentamos as cicatrizes das órbitas periódicas nas auto-funções.

O estudo Estatístico das flutuações no espectro de energia assim como das oscilações da densidade de estados em torno da sua média é feito no capítulo 3. Já no Capítulo 4, fazemos um estudo da teoria de cicatrizes nas funções de onda desenvolvida por Bogomolny a que verificamos correlacionando-a com as suas oscilações da densidade de estados em torno da sua média.

Como uma maneira de relacionar as mecânicas clássica e quântica, estudamos no Capítulo 5 as distribuições de Husimi e construímos as seções de Poincaré quânticas.

Concluimos nosso trabalho com o Capítulo 6, no qual estudamos a evolução temporal dos pacotes de onda gaussianos.

Capítulo 1

Teoria dos Bilhares de Ação

Definiremos uma nova classe de sistemas dinâmicos nos quais as matrizes quânticas são finitas por construção. Para isso adotaremos um procedimento no qual dada uma matriz quântica escrita na base de osciladores harmônicos, só consideraremos um bloco finito dela diagonalizável exatamente. Esse bloco finito será denominado de Hamiltoniana quântica perturbada e será obtido desacoplando-o da Hamiltoniana quântica original.

Do ponto de vista clássico, a base escolhida (base de ações) associada à Hamiltoniana quântica, corresponde a um conjunto de toros no espaço de fase e o truncamento da matriz quântica está associado a um corte na dependência da Hamiltonina clássica sobre os toros fora da região definida. Esse corte abrupto na Hamiltoniana gerará um movimento descontínuo das variáveis angulares conjugadas, resultando num sistema clássico denominado **Bilhar de Ação**.

Nesses termos, o conjunto de toros quantizados que encaixarem no bilhar de ação ficará mais compacto a medida que $\hbar$ seja feito cada vez menor, já que a dimensão N da matriz Hamiltoniana quântica será inversamente proporcional à constante de Planck ($N \propto \hbar^{-L}$, L é o número de graus de liberdade do sistema), portanto é só no limite $\hbar \rightarrow 0$ que $N \rightarrow \infty$, o que nos permitirá conciliar o estudo do sistema Hamiltoniano com seu limite semiclássico.

Começaremos mostrando que uma adequada correspondência clássica dos elementos de matriz pode ser obtida na base de número de ocupação do oscilador harmônico [7], na qual o truncamento da hamiltoniana poderá ser feito de forma simples.

Correspondência clássica na base de número de ocupação de auto-estados do oscilador harmônico

Consideremos a Hamiltoniana clássica, analítica, com L graus de liberdade especificada pela sua série de Taylor:

$$H(p, q) = \sum_{l_1, \dots, l_L; m_1, \dots, m_L} h_{l, m} p_1^{l_1} \dots p_L^{l_L} q_1^{m_1} \dots q_L^{m_L} \quad (1.1)$$

Uma primeira transformação canônica complexa levará $(q, p) \rightarrow (a, a^*)$, onde:

$$\begin{cases} a_j = \frac{(q_j + ip_j)}{\sqrt{2}} \\ a_j^* = \frac{(q_j - ip_j)}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (1.2)$$

obtemos assim a nova Hamiltoniana H' , na forma [10]:

$$H'(a, a^*) = \sum_{l_1, \dots, l_L; m_1, \dots, m_L} h'_{l, m} a_1^{l_1} \dots a_L^{l_L} a_1^{*m_1} \dots a_L^{*m_L} \quad (1.3)$$

ao passo que fazendo uma segunda transformação canônica em coordenadas polares (variáveis de ângulo e ação), levamos $(a, a^*) \rightarrow (j, \phi)$, onde :

$$\begin{cases} a_j = \sqrt{j_j} \exp(i\phi_j) \\ a_j^* = \sqrt{j_j} \exp(-i\phi_j) \end{cases} \quad (1.4)$$

definindo assim outra nova hamiltoniana :

$$H''(j, \phi) = \sum_{k, r} h''_{k, r} j^{r_1/2} \dots j^{r_L/2} \exp(ik \cdot \phi) \quad (1.5)$$

Dessa maneira a Hamiltoniana H'' aparecerá nas variáveis adequadas de ângulo e ação pronta para o truncamento clássico, enquanto que a simetrização da Hamiltoniana H' permite a sua imediata quantização [11]. Os elementos de matriz da hamiltoniana, agora quântica $\hat{H}'$ são obtidos simplesmente na representação base de número de ocupação $|n\rangle$ do oscilador harmônico pela aplicação das bem conhecidas fórmulas [12]:

$$\begin{aligned} \hat{a}_j |n\rangle &= \sqrt{\hbar n_j} |n_1, \dots, n_j - 1, \dots, n_L\rangle \\ \hat{a}_j^\dagger |n\rangle &= \sqrt{\hbar (n_j + 1)} |n_1, \dots, n_j + 1, \dots, n_L\rangle \end{aligned} \quad (1.6)$$

Considerando as eqs. (1.3) e (1.5), uma relação simples entre os expoentes é obtida:

$$\begin{cases} r_j = l_j + m_j \\ k_j = l_j - m_j \end{cases} \quad (1.7)$$

Note-se que todos os elementos de matriz em H'' com um k fixado determinam os elementos numa dada linha paralela à diagonal principal na matriz Hamiltoniana H' .

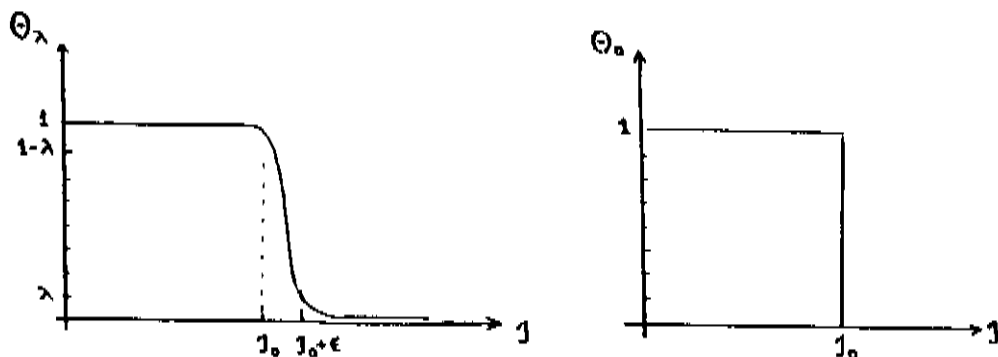


Figura 1.1: A função Θ no espaço de Ações. À esquerda a função suavizada, à direita a mesma função no limite $\lambda \rightarrow 0$.

Nesse formalismo, o truncamento da matriz Hamiltoniana precisa da prévia definição da função analítica $\Theta_\lambda(j)$:
sejam $\epsilon \ll 1$ e $\lambda < 1$

$$\begin{cases} 1 - \lambda < \Theta_\lambda(j) \leq 1 & j \leq j_0 \\ \lambda < \Theta_\lambda(j) < 1 - \lambda & j_0 < j < j_0 + \epsilon \\ \Theta_\lambda(j) < \lambda & j > j_0 + \epsilon \end{cases}$$

sendo que, no limite $\lambda \rightarrow 0$ para todo ϵ pequeno, a função $\Theta_0(j)$ converge para a função escada (fig. 1.1). Identificada $\Theta_\lambda(j)$, expandimo-la em série de Taylor na suas variáveis de ação j :

$$\Theta''_\lambda(j) = \sum_s \theta''_{\lambda s} j_1^{s_1} \dots j_L^{s_L} \quad (1.8)$$

Uma nova representação dela pode ser gerada via transformação canônica complexa (1.4), de onde resulta:

$$\Theta'_\lambda = \sum_s \theta'_{\lambda s} (a_1 a_1^*)^{s_1} \dots (a_L a_L^*)^{s_L} \quad (1.9)$$

assim, podemos definir seu correspondente operador quântico hermitiano

$$\hat{\Theta}'_{\lambda} = \sum_s \theta'_{\lambda s} (\hat{a}_1 \hat{a}_1^{\dagger})^{s_1} \dots (\hat{a}_L \hat{a}_L^{\dagger})^{s_L} \quad (1.10)$$

que resulta ser uma matriz diagonal na representação base de número de ocupação do oscilador harmônico, com elementos de matriz

$$\langle n' | \hat{\Theta}'_{\lambda} | n \rangle = \Theta'_{\lambda} [(n + 1/2)\hbar] \delta_{n'n}$$

Note-se também que, no limite $\lambda \rightarrow 0$ poderemos expressar o dito operador como:

$$\hat{\Theta}_0 = \sum_{n=0}^N |n\rangle \langle n| \quad (1.11)$$

onde $N = [j_0/\hbar]$, sendo j_0 definido como a borda da região escolhida no espaço de ações. Em consequência construímos $\hat{\Theta}_0$ simplesmente como o operador de projeção sobre um número finito de estados cujas ações ficarão dentro do espaço definido como bilhar.

Formalmente este operador quântico perturbado, é obtido a partir do operador quântico original, mediante a transformação

$$\hat{H}_0'' = \hat{\Theta}_0 \hat{H} \hat{\Theta}_0$$

que pode ser considerado como o resultado de tomar o limite $\lambda \rightarrow 0$ do Hamiltoniano quântico suavizado

$$\hat{H}_{\lambda}'' = \hat{\Theta}_{\lambda} \hat{H} \hat{\Theta}_{\lambda}$$

originado pela sua correspondente Hamiltoniana clássica suavizada

$$H_{\lambda}''(j, \phi) = H(j, \phi) \Theta_{\lambda}^2(j)$$

Uma vez identificado o operador $\hat{\Theta}$ como o operador de projeção, vemos que é irrelevante para a mecânica quântica a maneira como definimos nosso Hamiltoniano para os valores ' n ' na região desacoplada; mas vale dizer que para o caso clássico existe a possibilidade da escolha mudar a topologia das órbitas clássicas que colidem com a fronteira. Portanto, nesse caso é melhor considerar uma Hamiltoniana clássica mais geral da forma

$$H_{\lambda}(j, \phi) = H''(j, \phi) \Theta_{\lambda}^2(j) + h''(j, \phi) \Theta_{\lambda}^2(j)$$

onde $h''(j, \phi)$ é uma Hamiltoniana diferente e $\Theta'_\lambda(j)$ é a função degrau complementar no espaço de ações, que no caso quântico lhe corresponde o operador de projeção sobre o conjunto remanescente infinito de estados $|n\rangle$, ou seja:

$$\hat{\Theta}'_\lambda(j) = \hat{1} - \hat{\Theta}_\lambda(j)$$

$$\hat{\Theta}'_{\lambda \rightarrow 0}(j) = \sum_{n=N+1}^{\infty} |n\rangle\langle n|$$

gerando seu correspondente hamiltoniano quântico na forma

$$\hat{H}_\lambda = \hat{\Theta}_\lambda \hat{H}'' \hat{\Theta}_\lambda + \hat{\Theta}'_\lambda \hat{h}'' \hat{\Theta}'_\lambda$$

Note-se que no limite $\lambda \rightarrow 0$, voltamos ao caso de truncamento brusco da matriz no espaço de ações, onde verifica-se que a matriz $\hat{H}_0$ consiste em dois blocos separados e portanto, os autovalores de ambos são independentes.

Como informação adicional, referindo-nos à dinâmica clássica do sistema, podemos dizer que as órbitas clássicas no bilhar não mudarão com respeito ao sistema original (não perturbado), a não ser que as órbitas tenham a energia suficiente para alcançar a fronteira para então serem refletidas. Uma boa discussão destes casos pode ser encontrada na referência[7].

No capítulo seguinte definiremos o análogo truncado dos bilhares comuns, quer dizer, movimento reto no espaço de fases seguido por reflexões especulares na borda. Nossa motivação nesse problema está justificada no fato de que a dinâmica desses bilhares é muito simples. Interessa-nos mais ainda os bilhares de mais de uma dimensão, nos quais o perfil regular ou caótico do movimento clássico dependerá exclusivamente da forma da sua fronteira[9]. A finalidade principal será estudar em particular os efeitos de tais regimes clássicos frente à Mecânica Quântica. Para isso começaremos construindo a Hamiltoniana para uma partícula livre no espaço de fases em um grau de liberdade, fazendo uso da teoria previamente desenvolvida. Em seguida a extensão dessa Hamiltoniana será feita para o caso de dois graus de liberdade, onde consideraremos uma borda do tipo estádio de Bunimovich.

Capítulo 2

Bilhares Compactos

2.1 Bilhar Unidimensional

2.1.1 Bilhar Unidimensional Clássico

Uma partícula numa caixa unidimensional tem por Hamiltoniana:

$$H(q, p) = p^2/2 \quad (2.1)$$

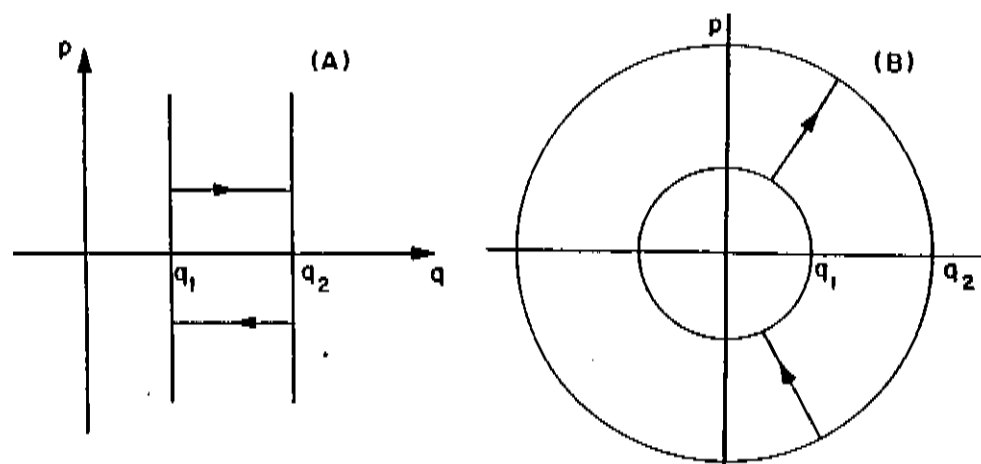


Figura 2.1: (A) Bilhar unidimensional comum com paredes em q_1 e q_2 . (B) Bilhar circular no espaço de fase, gerado por meio da dobra da longa faixa vertical que constitui o bilhar comum em (A)

Já que o movimento permanecerá limitado, fixado o valor de energia,

o momento mudará periodicamente para cada colisão entre seus valores permitidos classicamente $p = \pm\sqrt{2E}$, sendo E o valor da energia do sistema. Como esta energia E pode ser qualquer, a região acessível no espaço de fases gerará uma banda infinita, como se mostra na fig. 2.1(A).

Queremos limitar o espaço de fases com a finalidade de gerar um bilhar compacto. Uma maneira simples de fazer isso consiste em substituir as linhas verticais que definem a caixa no espaço de fases por círculos concêntricos centrados na origem [8]. Mostra-se na fig. 2.1(B) e note-se que quanto mais longes do centro estiverem os pontos q_1, q_2 ; uma melhor semelhança com o problema original (a caixa) será conseguido para pequenos valores de momento. Obviamente que com essa nova visão do problema, o espaço de fase acessível agora resulta ser finito.

Segundo nosso formalismo desenvolvido no capítulo 1, as transformações canônicas dadas pelas equações (1.2) e (1.4), permitem-nos obter as relações:

$$\begin{cases} p^2 + q^2 = 2J \\ \frac{p}{q} = \tan \phi \end{cases} \quad (2.2)$$

com as quais as bordas interior e exterior, no bilhar, poderão ser expressas pelas equações

$$\begin{cases} J_1 = q_1^2/2 \\ J_2 = q_2^2/2 \end{cases} \quad (2.3)$$

Resta agora escolher uma Hamiltoniana para esse bilhar assim construído. Para isso aproveitamos o simples fato de que nas coordenadas de ângulo e ação, o movimento no poço compactificado (2.1B) se assemelha com o poço comum (2.1A), se optamos por uma hamiltoniana como sendo uma função par e independente da ação. Uma escolha muito simples é :

$$H(J, \phi) = -\cos \phi \quad (2.4)$$

Veja-se que assim garantimos o movimento radial entre os círculos concêntricos e a inversão do movimento em cada colisão com a fronteira. Essas órbitas dentro do bilhar serão confinadas à direita ou esquerda do anel, gerando dois ramos. Estes ramos estarão separados pelas órbitas verticais em $\phi = \pi/2$ e $\phi = 3\pi/2$ caracterizados pelo eixo $q = 0$, como se mostra na figura (2.2). Além disso, note-se que para ângulos pequenos, uma aproximação até segunda ordem deixa a Hamiltoniana:

$$H(J, \phi) = -1 + \phi^2/2$$

recobrando-se a dinâmica em analogia ao problema do poço comum (movimento ao longo do eixo horizontal).

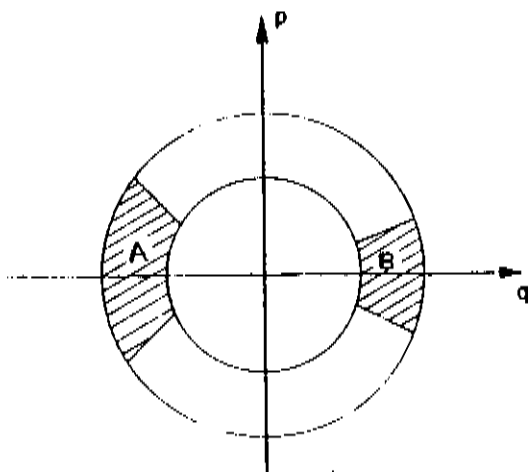


Figura 2.2: Possíveis órbitas para o bilhar unidimensional no espaço de fase. As seções (A) e (B) mostram as órbitas com energia positiva e negativa respectivamente

2.1.2 Bilhar unidimensional Quântico

A maneira de quantizar a Hamiltoniana (2.4) não é única, isso por que a simetrização pode ser feita de maneiras variadas.

A quantização será feita usando as transformações canônicas dadas pelas equações (1.2) e (1.4), com as quais poderemos expressar q e p , como funções de a , a^* , j , ϕ respectivamente, para finalmente, usando a eq. (1.6), expressar a Hamiltoniana em função dos operadores quânticos $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$.

Para o caso do bilhar unidimensional, por exemplo

$$\cos \phi = \frac{q}{\sqrt{q^2 + p^2}} \quad (2.5)$$

Uma vez escolhida a simetrização da Hamiltoniana, neste caso eq. 2.5, expressamos-a em função dos operadores quânticos $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$,

$$\hat{H} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \{ \hat{a} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger)^{-1/2} + (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger)^{-1/2} \hat{a}^\dagger \} \quad (2.6)$$

Note-se que o operador $(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger)^{-1/2}$ não é singular, isso porque, na representação na base do oscilador harmônico

$$(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger)^{-1/2} |n\rangle = \{(n + 1/2)\hbar\}^{-1/2} |n\rangle \quad (2.7)$$

onde $(n + 1/2) > 0$. Dito isso, podemos calcular agora os elementos de matriz de $\hat{H}$:

$$\langle n' | \hat{H} | n \rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\frac{n}{n + 1/2}} \delta_{n', n-1} + \sqrt{\frac{n + 1}{n + 3/2}} \delta_{n', n+1} \right\} \quad (2.8)$$

Veja-se que, esses elementos de matriz correspondem a uma Hamiltoniana tridiagonal com elementos nulos na diagonal fazendo com que seu traço também seja nulo. Além disso, em vista de que o espectro é igual tanto para $\cos \phi$ quanto para $-\cos \phi$, as auto-energias virão dadas em pares simétricos, de maneira que se a dimensão da matriz for ímpar um dos auto-valores deve ser zero.

A limitação do espaço de fase clássico manifesta-se no fato que só os estados j tais que

$$j_1 < j < j_2 \quad (2.9)$$

ficarão dentro do bilhar e portanto serão considerados para efeito de calcular os elementos de matriz. Por outro lado, veja-se que para cada valor discreto de j clássico lhe corresponderá um número inteiro ' n ' na base quântica de número de ocupação do oscilador harmônico. Em particular às bordas lhe corresponderão os valores $j_1 = (n_1 + 1/2)\hbar$ e $j_2 = (n_2 + 1/2)\hbar$, de onde o número total de estados é $N = n_2 - n_1 + 1$, definindo a dimensão do bilhar. Além disso, na medida que $\hbar \rightarrow 0$ o número de estados envolvidos crescerá, aumentando a dimensão do bilhar, mas a matriz Hamiltoniana ficará ainda finita ($N \propto \hbar^{-1}$).

Como uma maneira de verificar que a simetrização da hamiltoniana não é única, outra possibilidade de representar a matriz quântica pode ser citada:

$$\hat{H} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \{ \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger)^{-1/2} + (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger)^{-1/2} \hat{a} \} \quad (2.10)$$

Note-se que uma outra possibilidade de simetrização pode ser feita combinando as equações (2.8) e (2.10). Nesses casos conclusões similares ao caso antes mencionado poderão ser feitas.

Finalmente estamos em condições de fazer a diagonalização numérica da matriz $\hat{H}$ dada pela eq. (2.8).

2.2 Bilhar Bidimensional

2.2.1 Bilhar Bidimensional Clássico

Uma extensão natural da Hamiltonina unidimensional (2.4), para o caso bidimensional é conseguida fazendo:

$$H(\phi_1, \phi_2) = -\cos \phi_1 - \cos \phi_2 \quad (2.11)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 , são as variáveis de ângulo correspondentes as variáveis de ação J_1 e J_2 respectivamente.

Veja-se que a fronteira da região que define o bilhar pode ser escrita como

$$F(J_1, J_2) = \text{constante} \quad (2.12)$$

Como num bilhar unidimensional, a mesma lei clássica de movimento é aplicável nesse bilhar, ou seja que as partículas seguirão também trajetórias retas, de maneira que quando uma partícula seguindo uma dada trajetória bater com a fronteira, ela será refletida especularmente (ângulo de incidência = ângulo de reflexão). Veja fig. (2.3).

Um fato crucial se apresenta nesse último caso. Como num bilhar comum, as características clássicas e quânticas vão depender fortemente da forma da borda no espaço de ações, é por essa razão que estaremos interessados particularmente na borda do tipo estádio de Bunimovich, isso é dois semicírculos de raio R unidos por segmentos de reta de comprimento $2R$, fig. (2.3).

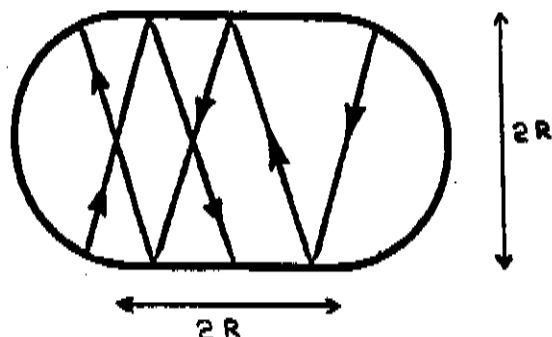


Figura 2.3: Estádio no espaço de ações. A partícula é refletida especularmente ao bater com a fronteira.

2.2.2 Bilhar Bidimensional Quântico

A regra de quantização segue a mesma sequência usada para o caso unidimensional, mas devemos ter em conta o detalhe de expressar o estado $|n\rangle$ pelo novo vetor de estado $|n_1, n_2\rangle$ a quem corresponderão as ações j_1, j_2 . Dito isso faremos uso da expressão quântica do bilhar unidimensional (2.6), de forma que a seguinte expressão é obtida:

$$\hat{H} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \{ \hat{a}_1^\dagger (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger)^{-1/2} + (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger)^{-1/2} \hat{a}_1^\dagger \} + \frac{-1}{\sqrt{2}} \{ \hat{a}_2^\dagger (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger)^{-1/2} + (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger)^{-1/2} \hat{a}_2^\dagger \} \quad (2.13)$$

onde $\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger$, são operadores quânticos no espaço de ações j_1, j_2 respectivamente. De maneira analoga a (2.8), os elementos de matriz são dados pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} \langle n'_2, n'_1 | \hat{H} | n_1, n_2 \rangle &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\frac{n_1}{n_1+1}} \delta_{n'_1, n_1-1} + \sqrt{\frac{n_1+1}{n_1+2}} \delta_{n'_1, n_1+1} \right\} \delta_{n'_2, n_2} + \\ &\quad \frac{-1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\frac{n_2}{n_2+1}} \delta_{n'_2, n_2-1} + \sqrt{\frac{n_2+1}{n_2+2}} \delta_{n'_2, n_2+1} \right\} \delta_{n'_1, n_1} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Da expressão acima se vê que esses elementos de matriz não são mais tri-diagonais, mas os elementos sobre a diagonal principal ainda são nulos, de modo que o traço continuará sendo zero. Além disso, notemos que os elementos de matriz dos diferentes billares, que estão nas regiões do espaço de ações comuns a ele, serão sempre os mesmos.

De maneira similar ao caso unidimensional, a simetrização da matriz Hamiltoniana também não é única. Outra possibilidade de simetrização pode ser obtida seguindo a eq. 2.10 (caso unidimensional).

$$\hat{H} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \{ \hat{a}_1^\dagger (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger)^{-1/2} + (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger)^{-1/2} \hat{a}_1^\dagger \} + \frac{-1}{\sqrt{2}} \{ \hat{a}_2^\dagger (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger)^{-1/2} + (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger)^{-1/2} \hat{a}_2^\dagger \} \quad (2.15)$$

Ou gerando uma combinação delas (eqs. 2.13 e 2.15). De novo as considerações feitas acima com respeito aos elementos de matriz mantêm ainda características similares.

Com a finalidade de evitar correlações entre estados com as mesmas simetrias estudamos o estádio dessimetrizado no espaço de ações (fig. 2.4). É claro que os estados $|n_1, n_2\rangle$, vão ser considerados apenas se eles estiverem no interior da fronteira.

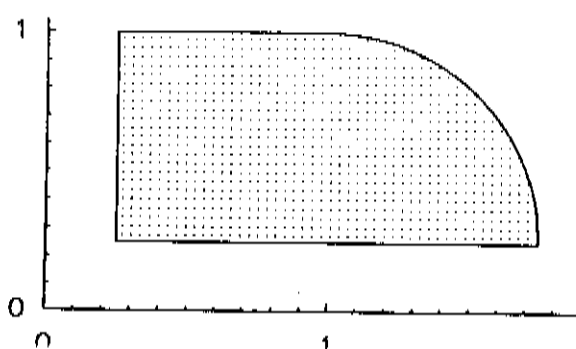


Figura 2.4: Estádio dessimetrizado no espaço de ações

2.3 O limite Semiclássico

A regra de quantização de Bohr-Sommerfeld para um problema unidimensional é:

$$\oint p(q, E) dq = n \times h \quad (2.16)$$

Semiclassicamente a interpretamos de maneira geométrica, dizendo que as energias quânticas correspondentes às órbitas fechadas no espaço de fases subtendem uma área que é múltipla da constante de Planck. Nesse caso o índice de Maslov[12] é nulo, fato que foi feito explícito na expressão acima. Aplicando esta regra ao problema do bilhar unidimensional, temos

$$\oint \phi dj = n \times h \quad (2.17)$$

onde o ângulo ϕ é uma constante de movimento.

Note-se que as possibilidades de mudança no sinal da energia E terá em consideração os seguintes casos:

1.- Se $E \leq 0$ a área no espaço de ações num ciclo é simplesmente

$$A = 2(j_2 - j_1) \phi \quad (2.18)$$

já que as órbitas se encontram à direita do anel.

2.- Se $E \geq 0$, devido ao fato das órbitas estarem todas à esquerda no anel, a área será

$$A = 2(j_2 - j_1)(\pi - \phi) \quad (2.19)$$

Então, o espectro semiclássico é simétrico e terá sempre um número par de auto-estados. Portanto será possível obtermos novos auto-estados só se mudarmos h de maneira que $A/h = 2N$, resultando assim que a metade das órbitas se posicionarão a um e outro lado da linha vertical $q = 0$ (fig. 2.2). Já no caso do bilhar de ação quântico as restrições acima mencionadas não são aqui necessárias, isso porque quânticamente mudar o valor de h possibilita passar de $N \rightarrow N + 1$ estados. O que pode ser entendido considerando o simples fato de termos limitado o Hamiltoniano de forma que os estados possam ser incluídos de um em um.

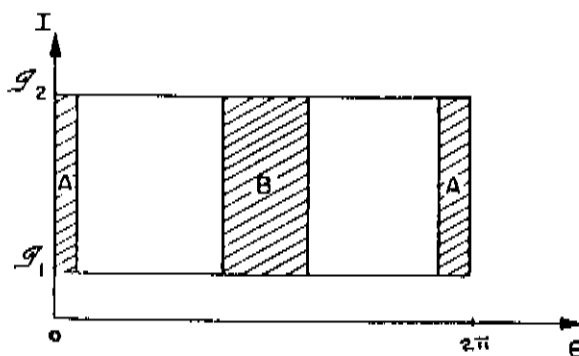


Figura 2.5: Órbitas clássicas no espaço de ações . As seções (A) e (B) representam as órbitas com energia negativa e positiva respectivamente.

2.4 Resultados

Começaremos fazendo certas observações. No caso de um bilhar unidimensional, a consideração da Hamiltoniana clássica dada pela eq. (2.4), permite dizer que a sua correspondente Hamiltoniana quântica eq. (2.6), possuirá auto-valores que ficarão no intervalo $[-1, +1]$. Além disso, da simetria do operador quântico (2.6), estes autovalores aparecerão em pares (dado um auto-valor λ implicará em se obter o seu correspondente $-\lambda$), garantindo-se a nulidade do traço do operador. Similarmente para o caso bidimensional as mesmas conclusões podem ser tiradas, mas deve-se ter em conta que agora o espectro ficará no intervalo $[-2; 2]$, resultado previsto pela consideração da eq. (2.11).

Veja-se também que no caso de se obter um número ímpar de auto-estados, um dos seus auto-valores é necessariamente nulo.

No que concerne as auto-funções do bilhar dessimetrizado (2-dim), é importante ressaltar que, devido as condições de contorno exigidas, $\Psi_{\pi}|_{\text{borda}} = 0$, esses estados correspondem só as auto-funções de paridade ímpar-ímpar do bilhar original. Em seguida, feita a diagonalização numérica das matrizes hamiltonianas, consideramos a distribuição de intensidades das respectivas auto-funções no espaço de ações $j_1 \times j_2$, o que se interpreta como a probabilidade do sistema estar em certa região desse espaço. Esse cálculo foi efetuado da seguinte maneira. Dada a função de onda $|\varphi_m\rangle$, a m -ésima auto-função do Hamiltoniano (2.13), expressa na base de auto-funções do oscilador harmônico $|n_1, n_2\rangle$, ou seja

$$|\varphi_m\rangle = \sum_{n_1, n_2} c_{n_1, n_2}^m |n_1, n_2\rangle$$

Desenhemos as curvas de nível de $|c_{n_1, n_2}|^2$ no plano $j_1 \times j_2$. Como resultado, alguns desenhos mostraram uma grande influencia das órbitas clássicas periódicas (veja figs. a seguir). Em particular descobrimos sete desses tipos de órbitas clássicas. Aqui, vale a pena mencionar que, o fato de escolhermos o extremo inferior $\bar{d}$ do bilhar dessimetrizado perto ou longe da origem $j = \bar{0}$, não influenciou nos resultados obtidos para os auto-valores ou para as auto-funções, ou seja, estruturas periódicas semelhantes, e em geral não periódicas, foram encontradas nas duas situações. Uma análise dos resultados numéricos obtidos mostrou que há grande possibilidade de encontrar cicatrizes de órbitas periódicas para autofunções com auto-energias nos intervalos $[-1.5, -0.5]$, e $[0.5, 1.5]$. Nestes intervalos existem também, situações nas quais as distribuições apresentaram estruturas misturadas. As distribuições geradas pelos auto-estados com auto-energias iguais em valor absoluto resultaram ser indistinguíveis. Além disso, os resultados mostraram que fora desses intervalos foi mais provável encontrar distribuições de intensidade sem estrutura alguma, as que poderíamos denominar de ergódicas. Finalmente, se viu que o aparecimento dessas estruturas em geral teve um caráter completamente aleatório.

Mostramos a seguir algumas estruturas encontradas no estádio dessimetrizado. Nesse caso escolhemos os parâmetros $\hbar = 0.032$, $R = 0.75$, resultando um número de auto-estados $N = 963$. Nas figuras foram desenhadas em total 10 curvas de nível no intervalo de 10 até 100 por cento. O espaçamento entre duas curvas vizinhas foi tomado a ser 10 por cento. Note-se neles o aparecimento dos famosos pontos conjugados[13], onde a intensidade da cicatriz é mais pronunciada.

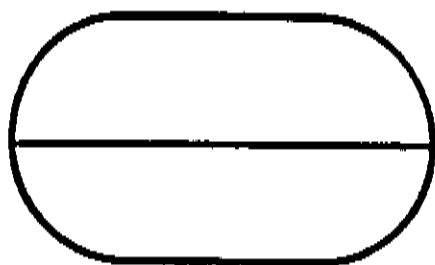
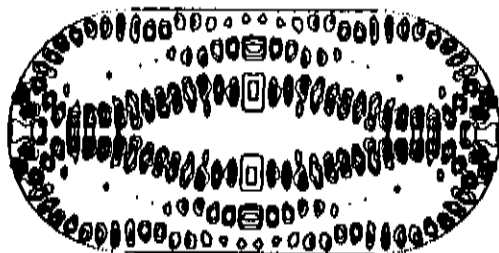


Figura 2.6: Órbita Horizontal. Energia= ± 1.3576

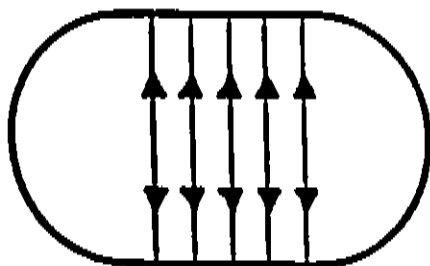
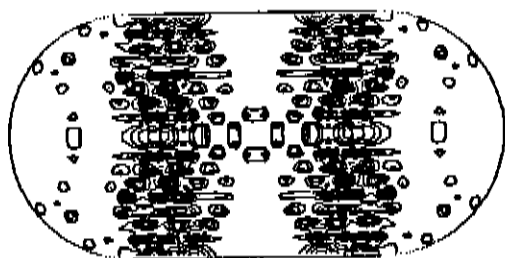


Figura 2.7: Órbita Vertical. Energia= ± 1.3609

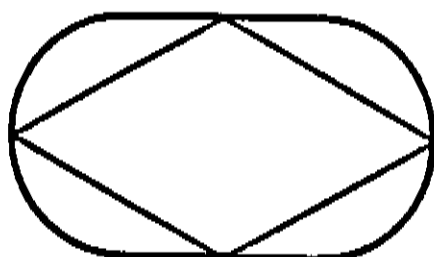
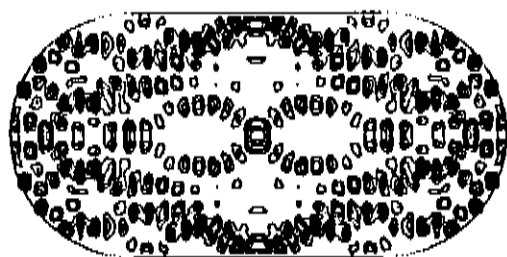


Figura 2.8: Energia= ± 1.2619

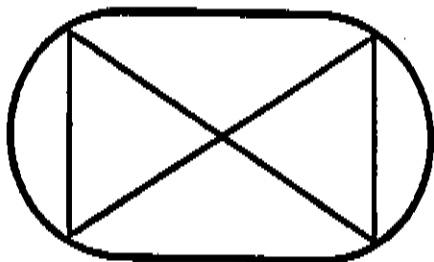
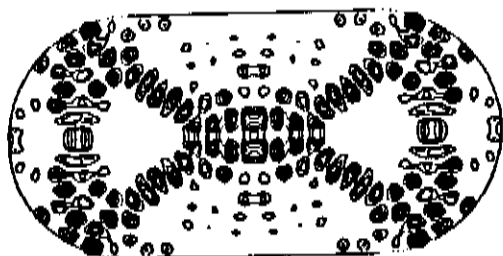


Figura 2.9: Órbita Gravata Borboleta. Energia= ± 1.4142

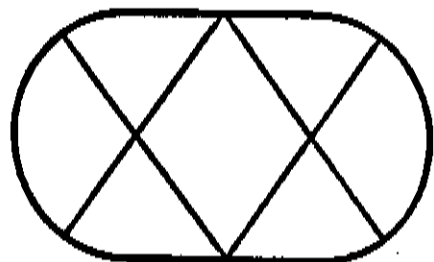
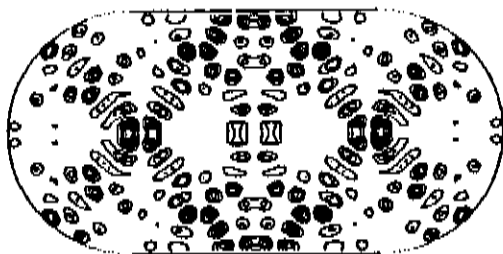


Figura 2.10: Energia= ± 1.4292

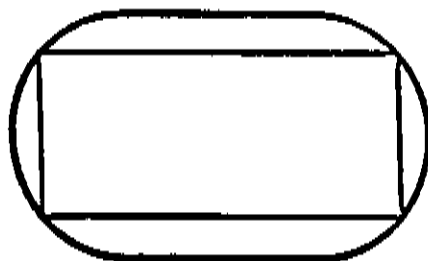
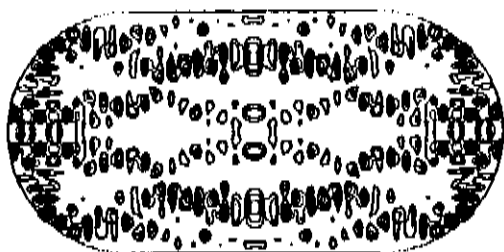


Figura 2.11: Órbita do tipo Retângulo. Energia= ± 1.2186

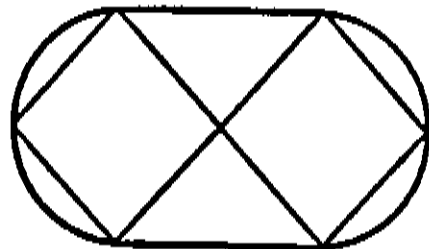
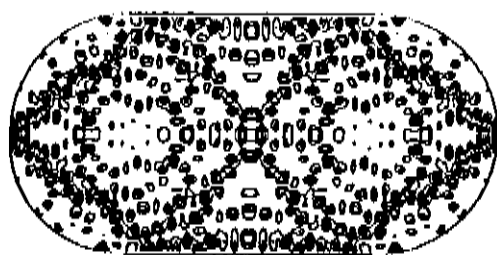


Figura 2.12: Energia= ± 0.9768

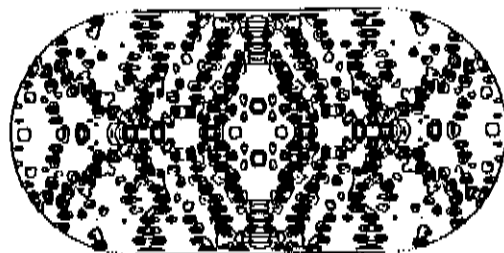
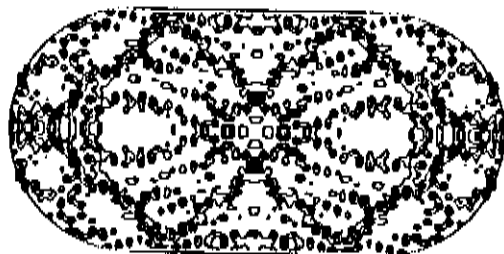


Figura 2.13: Órbitas misturadas com energias = 0.5807 (esquerda) e ± 0.9620 (direita)

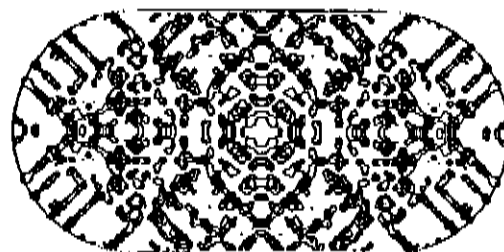


Figura 2.14: Órbita ergódicas com energia = ± 0.2026 (esquerda e = ± 0.0343 (direita)

Os resultados acima, parecidos com os encontrados por Heller[6, 13] no estádio no espaço de configurações, motivamos a continuar o estudo desses bilhares, prosseguindo com o estudo das propriedades estatísticas do espectro.

Capítulo 3

Estatística de níveis

Nesse capítulo nosso maior interesse é descrever as propriedades estatísticas do espectro de energias do sistema Hamiltoniano independentemente da sua natureza clássica integrável ou não integrável. Nessa procura uma das maneiras mais simples de proceder se baseia no formalismo de Weyl e Wigner.

3.1 Densidade média de estados

Dado um operador $\hat{A}$, ele pode ser expresso no espaço de fases, usando para isso a seguinte regra de transformação

$$\overline{A}(p, q) = \int dQ \langle q + Q/2 | \hat{A} | q - Q/2 \rangle \exp\left(-\frac{ipQ}{\hbar}\right) \quad (3.1)$$

após de integrar a expressão acima verifica-se que para todo operador $\hat{A}$, seu traço (regra de Weyl) vêm dado por

$$\text{Tr} \hat{A} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^L} \int dq dp \overline{A}(p, q) \quad (3.2)$$

A seguir, consideremos a expressão da densidade de estado:

$$\eta(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta(E - E_j) = \text{Tr} \delta(E - \hat{H}) \quad (3.3)$$

e sua integral, que será denominada densidade cumulativa de estados:

$$N(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \Theta(E - E_j) = \text{Tr} \Theta(E - \hat{H}) \quad (3.4)$$

na qual Θ é a função degrau unitária.

No limite semiclássico, a representação de Weyl de um operador coincide com seu valor clássico [15]. Fazendo uso desse argumento substituímos

$$\overline{\Theta}(E - \hat{H}) \approx \Theta(E - H(p, q)) \quad (3.5)$$

na eq.(3.2), obtemos assim a regra de Weyl para a densidade cumulativa de estados:

$$\overline{N}(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^L} \int dq dp \Theta(E - H(p, q)) \quad (3.6)$$

É importante fazer notar a generalidade dessa fórmula, que vale tanto no caso de sistemas integráveis como caóticos ou sistemas a meio caminho entre eles. Essa regra estabelece que o número aproximado de estados com energia menor que E é dado pelo volume dentro da hiper-superfície $H(p, q) = E$, medido em unidades de $(2\pi\hbar)^L$. Nesse caso observamos que, já que a transformação canônica $(p, q) \rightarrow (j, \phi)$ preserva o volume, essa mesma regra pode também ser usada para calcular a densidade de estados de Weyl no espaço de ações, e é o que faremos no caso do bilhar de ação.

Vale ressaltar que a verificação da regra de Weyl no caso de sistemas não integráveis só pode em geral ser feita numericamente.

Vejamos agora como as flutuações da densidade de estados em torno da sua média, são as que poderão caracterizar quânticamente a natureza do sistema clássico.

3.2 Matrizes Aleatórias

Neste ítem seguiremos de perto a exposição do livro de Ozorio de Almeida [16].

No limite semiclássico a densidade média de estados $\overline{\eta}(E)$ aumenta proporcionalmente com $\hbar^{-L}$ (num sistema com L graus de liberdade). O conhecimento de $\overline{\eta}(E)$ e da média sobre algumas funções de flutuação podem ser suficientes para determinar todas as suas propriedades físicas significativas. Essas médias são fáceis de definir localmente para qualquer sistema, sobre um intervalo de energia $\delta E \propto \hbar$ contendo um número de estados $\delta N \propto \hbar^{-(L-1)}$, o que justifica um tratamento estatístico.

As propriedades estatísticas podem ser calculadas a partir dos ensembles de matrizes aleatórias [17]. Nele a matriz Hamiltoniana H é tomada como uma matriz estocástica, na qual seus $k \times k$ elementos são variáveis

aleatórias. Tais matrizes serão chamadas de ergódicas só se as suas propriedades médias coincidirem com as médias do ensemble. O problema consistirá em especificar a densidade de probabilidade $P(H)$, para o qual usa-se o mesmo método da mecânica estatística. Observe-se que nessa teoria acontece que a matriz Hamiltoniana H do sistema é conhecida exatamente mas ela é complicada e grande demais para ser diagonalizada na prática.

As ideias básicas da teoria são as seguintes. Dentro do conjunto de matrizes simétricas (reais), ou hermitianas (complexas) define-se uma métrica, uma medida de volume e uma entropia dada em termos de $P(H) dH$, probabilidade de encontrar uma matriz do conjunto no intervalo H e $H + dH$. Além disso, são definidos os seguintes ensembles:

Ensemble G.O.E.-Gaussian Orthogonal Ensemble, está constituído pelas matrizes simétricas de ordem $N \times N$. Esse grupo é definido impondo-se invariância das matrizes por transformações ortogonais.

Ensemble G.U.E.-Gaussian Unitary Ensemble, constituído pelas matrizes hermitianas complexas. Desta vez elas são definidas invariantes às transformações unitárias.

Em ambos casos é exigida a invariância da distribuição de probabilidade frente aos respectivos grupos de transformações.

Apresentamos a seguir um resumo simplificado do cálculo de $P(E)$. A distribuição de probabilidades é obtida maximizando a entropia, definida como

$$h\{P(H)\} = - \int dH P(H) \log(P(H)) \quad (3.7)$$

que impõe a equiprobabilidade de todos os estados acessíveis.

Supondo conhecida alguma propriedade média do ensemble de matrizes como

$$\langle f_i \rangle = \int dH P(H) f_i(H) = \text{Constante}; \quad (3.8)$$

a maximização da entropia (3.7), é sujeita a esses vínculos (3.8), isso acarreta em que qualquer variação $\delta P(h)$ satisfaça a equação

$$\int dH \delta\{P(H)\} \{\log P(H) - \sum_i \lambda_i f_i(H)\} = 0 \quad (3.9)$$

onde usamos o fato de que a integral sobre $\delta\{P(H)\}$ é nula.

Os multiplicadores de Lagrange λ_i são determinados a partir de (3.8), portanto a densidade de probabilidade é simplesmente

$$P(H) = \exp \sum_i \lambda_i f_i(H) \quad (3.10)$$

A entropia assim definida também será sujeita ao vínculo

$$\langle \text{Tr}(H H^\dagger) \rangle = \text{constante} \quad (3.11)$$

que será necessário quando se faz a consideração de que a matriz H é finita, em consequência, a norma é finita. Um último vínculo λ_0 vem da condição de normalização nas probabilidades. Obtemos assim o ensemble Gaussiano:

$$P(H) = \exp \{ \lambda_0 + \lambda_1 \text{Tr} H H^\dagger \} \quad (3.12)$$

No limite semiclássico lidamos não com uma matriz finita de norma conhecida, mas com uma matriz infinita com uma dada densidade média de estados (Densidade de Weyl). Esse vínculo pode ser representado como

$$\langle \eta(E) \rangle = \langle \text{Tr} \delta(E - H) \rangle = \bar{\eta}(E) \quad (3.13)$$

Isto significa que o ensemble de matrizes deverá ter a mesma densidade média de Weyl que o sistema estudado para cada energia, e portanto um número infinito de vínculos. A densidade de probabilidade resultante conforme com (3.10) é,

$$\begin{aligned} P(H) &= \exp \int dE \lambda(E) \text{Tr} \delta(E - H) \\ &= \exp \{ \text{Tr} \lambda(H) \} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Veja-se que, as densidades de probabilidades (3.12) e (3.14) dependem apenas dos valores próprios da matriz H . Entretanto para chegar numa distribuição conjunta, como sendo uma função só dos autovalores, precisamos conhecer a medida dH , em termos tanto dos seus autovalores quanto dos seus autovetores. Sejam E_i os auto-valores de H e α_i os parâmetros que especificam a direção dos autovetores, pode-se mostrar[18]

$$dH = \Pi_{i < j} |E_i - E_j|^\beta dE d\alpha \quad (3.15)$$

Integrando agora sobre as direções possíveis dos auto-vetores chegamos aos seguintes resultados :

Ensemble Gaussiano

$$P(E) = \Pi_{i > j} |E_i - E_j|^\beta \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma^2} \sum_i E_i^2 \right\} \quad (3.16)$$

Ensemble de Weyl

$$P(E) = \Pi_{i < j} |E_i - E_j|^\beta \exp \left\{ \sum_k \lambda(E_k) \right\} \quad (3.17)$$

Nos quais o parâmetro β será igual a 1 ou 2, no caso de considerarmos as matrizes simétricas ou hermitianas respectivamente.

Com relação a função $\lambda(E)$ em (3.17), ela pode ser calculada usando o método de aproximação de Wigner[19], para o qual substituímos $P(E) \rightarrow P[f(E)]$. Onde interpreta-se o termo $f(E) dE$, como o número de autovaleores no intervalo dE , e presume-se que $\bar{\eta}(E)$ é a distribuição que maximiza

$$\begin{aligned} \log \{P(f)\} &\simeq \int dE f(E) \lambda(E) + \beta/2 \\ &\times \int dE dE' f(E) f(E') \log |E - E'| \end{aligned} \quad (3.18)$$

Diferenciando com relação a f temos que:

$$\lambda(E) \simeq -\beta/2 \int dE' \bar{\eta}(E') \log |E - E'| \quad (3.19)$$

Analisando as eq.(3.16) e (3.17), a primeira informação extraída sobre $P(E)$ mostra que a possibilidade de degenerescência dos auto-estados do sistema Hamiltonino é quase nula, fenômeno conhecido como repulsão de níveis. Além disso, observa-se que estas distribuições geram densidades médias diferentes, sendo que no caso do ensemble seja gaussiano a densidade média toma a forma semicircular [16]. A pesar disso, no limite semiclássico, as propriedades estatísticas do espectro ergódico dadas pela distribuição de Weyl podem ser calculadas a partir de um ensemble Gaussiano adequado [20]. Nesse caminho a distribuição Gaussiana dispendo de dois parâmetros livres, a largura σ e a média $\bar{E}$ a qual foi tomada como zero em (3.16), podem ser escolhidos de maneira que

$$\begin{aligned} \lambda(E) &= -\left\{ \frac{(E - \bar{E})}{2\sigma} \right\}^2 \\ \bar{E} &= E - \frac{2\lambda}{\lambda'} \\ \sigma^2 &= \frac{-\lambda}{\lambda'^2} \end{aligned}$$

(onde $\lambda' = \frac{d\lambda}{dE}$) recaindo-se no caso do ensemble G.O.E. Isso significa que podemos fitar os vínculos $\lambda(E)$ por gaussianas e aplicar a previsão G.O.E. no intervalo δE de interesse.

Por outro lado podemos dizer que no caso do espectro não ter nenhuma correlação, caso de sistemas integráveis, ele obedece a uma distribuição do tipo Poisson, não existindo nesse caso repulsão de níveis.

Feitas essas salvaguardas estamos na posição de determinar se um sistema classicamente ergódico tem seu espectro de energia quântico também ergódico, o que será feito computando a estatística de vizinhos próximos para um dado intervalo de energia. Aqui vale dizer que, o fato dos sistemas caóticos terem seus espectros com as mesmas propriedades estatísticas do ensemble de matrizes aleatorias é ainda pouco compreendido, do ponto de vista de uma teoria formal.

3.3 Fórmula do Traço de Gutzwiller

Em 1971 Gutzwiller[1], derivou a sua importante fórmula para as oscilações da densidade de estados, aqui representada por η_{osc} . A sua idéia foi procurar os auto-valores quânticos E_n no traço da função de Green em energia. Nessa representação se têm que a função de Green apresenta singularidades (polos simples) nas energias quânticas. Obteve assim uma versão semiclássica do traço, que conseguiu expressar como uma soma sobre todas as órbitas periódicas clássicas compatíveis com o sistema clássico estudado. Essa fórmula conhecida como fórmula do traço de Gutzwiller é expressa assim

$$\eta(E) = \bar{\eta}(E) + \eta_{osc}(E) \quad (3.20)$$

Onde $\bar{\eta}(E)$ representa a chamada densidade de Weyl (seção 3.1). O termo η_{osc} , para um sistema com dois graus de liberdade; pode ser expresso como:

$$\eta_{osc}(E) = \frac{1}{\pi \hbar} \sum_{o,p} \frac{T_0}{\sqrt{T r(M) - 2}} \cos\left(\frac{S}{\hbar} - \frac{\pi}{2} \mu_m\right) \quad (3.21)$$

Nela, o termo T_0 representa o período da órbita periódica primitiva, ao passo que S é a ação clássica calculada ao longo da mesma.

$$\bar{S}(E) = \oint p(E) dq \quad (3.22)$$

e o índice μ_m é o chamado índice de Maslov [21]. A propagação das órbitas na imediata vizinhança das órbitas periódicas é descrita pela matriz M de 4×4 chamada de matriz de monodromia. Por tanto, nessa formulação,

a densidade de estados é expressa totalmente em termos de quantidades puramente clássicas.

Veja-se que, no caso particular de sistemas integráveis, mostra-se que a regra de quantização E.B.K. [13,22], é recuperada a partir dessa formulação, dando confiabilidade à mesma.

Tenha-se em consideração que a soma de todas as órbitas periódicas na eq.(3.21) inclui ainda as suas repetições. Aqui vale mencionar que certo problema surge no caso que o sistema seja caótico. O número de órbitas periódicas aumenta exponencialmente como função do período, logo a soma não é absolutamente convergente. Uma tentativa de resolver esse problema, faz introduzir a densidade suavizada de estados η_λ . Nela as contribuições importantes são originadas pelas órbitas de período curto. Essa regularização ordena a soma sobre as órbitas periódicas em termos dos períodos em ordem crescente, possibilitando escrever

$$\eta_\lambda(E) = \frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}} \sum_n \exp \{ -(E - E_n)^2 / 2\lambda^2 \} \quad (3.23)$$

Nela as principais contribuições provêm das órbitas com períodos tais que $\tau \leq \frac{h}{\lambda}$, sendo λ a largura da função gaussiana suavizante num dado intervalo de energia, e centrada na energia E .

3.4 Resultados

3.4.1 Densidade de Weyl

Podemos calcular exatamente o termo densidade de Weyl $\bar{\eta}$, no espaço de ações, tanto para bilhares unidimensionais quanto para bilhares bidimensionais, com ajuda da eq.(3.6).

Vejamos que, no caso unidimensional um resultado simples é obtido, mas para o caso de duas dimensões o resultado é complicado mas ainda fechado.

Bilhar Unidimensional[8]

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(E) &= \int \delta(H(J, \phi) - E) dJ d\phi \\ &= \int \int \delta(\cos \phi - E) dJ d\phi \\ &= \frac{J_2 - J_1}{h\sqrt{1 - E^2}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

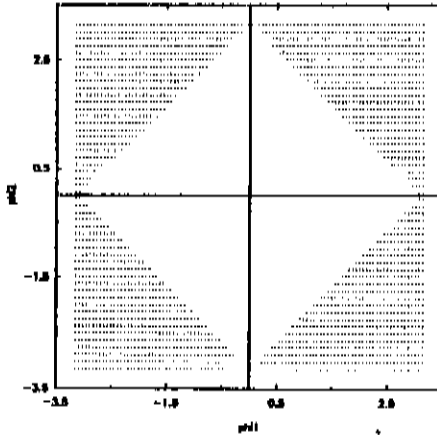


Figura 3.1: Desenho $\phi_2 \times \phi_1$. As seções interior e exterior(pontilhada) do losângulo definem a regiões com energia negativa e positiva respectivamente

Na fig. 3.1, apresenta-se o desenho de $\phi_2 \times \phi_1$, sujeitos à condição $E = -\cos \phi_1 - \cos \phi_2$. Note-se que o valor de energia onde ($E = 0$), que denominaremos de crítica, dividirá as regiões em que E muda no sinal.

$$\overline{N}(E) = \frac{A}{h^2} \int d\phi_1 d\phi_2 \quad (3.25)$$

Na figura, a parte exterior ao losângulo definirá a região de energia positiva, ao passo que o interior a ele definirá a região de energia negativa.

O cálculo da densidade de Weyl é mais simples de fazer calculando primeiro a densidade cumulativa de estados definida segudo a eq.(3.6):

$$\overline{N}(E) = \frac{1}{h^2} \int \Theta(H - E) dv = \frac{1}{h^2} \int_{H \leq E} dv \quad (3.26)$$

onde $dv = d\phi_1 d\phi_2 dJ_1 dJ_2$.

a partir dela, a densidade de Weyl é obtida diferenciando essa mesma densidade cumulativa de estados com respeito à energia:

$$\overline{\eta}(E) = \frac{d\overline{N}}{dE} \quad (3.27)$$

Assim obtemos a expressão para $\overline{N}(E)$, será

$$\overline{N}(E) = \frac{A}{h^2} \int d\phi_1 d\phi_2 \quad (3.28)$$

onde A é a área contida pelo bilhar. A continuação consideremos os casos a seguir:

Energia negativa

$$\begin{aligned}\bar{N}(E) &= \frac{4A}{h^2} \int_0^{\phi(E)} \phi_2 d\phi_1 \\ &= \frac{4A}{h^2} \int_0^{\phi(E)} \arccos \{-E - \cos \phi_1\} d\phi_1\end{aligned}\quad (3.29)$$

onde $\cos \phi(E) = -E - 1$.

Diferenciando agora a expressão com respeito à energia, obtemos

$$\bar{\eta} = \frac{4A}{h^2} \int_0^{\phi(E)} \frac{d\phi_1}{\sqrt{1 - \{-E - \cos \phi_1\}^2}}$$

Fazendo agora a mudança de variáveis $y = -\frac{E}{2} - \cos \phi_1$, obtemos:

$$\bar{\eta} = \frac{4A}{h^2} \int_{-1-\frac{E}{2}}^{1+\frac{E}{2}} \frac{dy}{\sqrt{\{1 - (y + \frac{E}{2})^2\} \{1 - (y - \frac{E}{2})^2\}}}$$

Veja-se que o integrando é uma função par, então a integral pode ser colocada como

$$\bar{\eta} = \frac{8A}{h^2} \int_0^{1+E/2} \frac{dy}{\sqrt{\{(1 - \frac{E}{2}) - y^2\} \{(1 + \frac{E}{2}) - y^2\}}}$$

Requeremos ainda uma última mudança de variáveis dada por:

$y = (1 + E/2) \sin \varphi$, onde $k^2 = (\frac{1+\frac{E}{2}}{1-\frac{E}{2}})^2$.

$$\bar{\eta} = \frac{8A}{(1 + \frac{E}{2})h^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\quad (3.30)$$

Assim, $\bar{\eta}(E)|_{E<0}$, corresponde a uma integral elíptica de primeira espécie, não simples mas ainda fechada.

Energia positiva

O cálculo é realizado de maneira similar ao previamente feito. Dessa vez consideramos o triângulo inferior, na fig.(3.1). Os limites de integração são: $\phi = -\pi \rightarrow \arccos -E + 1$. Diferenciando a densidade cumulativa de estados com respeito à energia obtemos:

$$\bar{\eta} = \frac{4A}{h^2} \int_{\phi}^{-\pi} \frac{d\phi_1}{\sqrt{1 - (-E - \cos \phi_1)^2}}$$

A primeira mudança de variáveis $y = -\frac{E}{2} - \cos \phi$, junto ao fato do integrando ser par, deixa

$$\bar{\eta} = \frac{8A}{h^2} \int_0^{1-\frac{E}{2}} \frac{dy}{\sqrt{\{(1-\frac{E}{2})^2 - y^2\} \{(1+\frac{E}{2})^2 - y^2\}}}$$

A segunda mudança de variáveis dada por $y = (1 - \frac{E}{2}) \sin \varphi$, resulta na integral

$$\bar{\eta} = \frac{8A}{(1 + \frac{E}{2})h^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \bar{k}^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.31)$$

sendo $\bar{k}^2 = (\frac{1-\frac{E}{2}}{1+\frac{E}{2}})^2$.

Comparando os resultados (3.30) e (3.31), se vê que $\bar{\eta}(-E) = \bar{\eta}(E)$. Por outro lado, veja-se que $\bar{\eta}(E = 0) \rightarrow \infty$. Por tanto, as expressões acima mostram que, pelo fato de termos considerado a particular Hamiltoniana bidimensional, obtivemos uma expressão fechada mas ainda complicada para o termo densidade de Weyl $\bar{\eta}$, que para o caso do bilhar bidimensional comum resulta ser constante. Na fig. 3.2, mostramos os desenhos para o termo Densidade de Weyl nos dois casos discutidos.

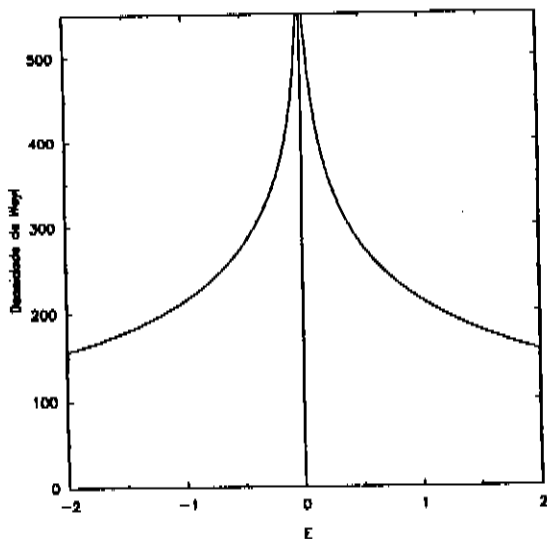


Figura 3.2: Densidade de Weyl como função da energia. São mostradas as duas situações nas quais a energia é positiva ou negativa

3.4.2 Distribuição de primeiros vizinhos-NND.

A distribuição de primeiros vizinhos NND (Nearst Neighbors Distribution) é definida considerando um dado conjunto finito e ordenado de N níveis de energia, $E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_N$. Com eles são definidas as $N - 1$ distâncias entre vizinhos

$$X_1 = E_2 - E_1$$

$$X_2 = E_3 - E_2$$

$$X_{N-1} = E_N - E_{N-1}$$

e a sua distância média

$$\bar{X} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} X_n$$

O conjunto escalonado de níveis, definido como tendo espaçamento médio igual a um, é obtido por $\epsilon_n = E_n/\bar{X}$.

Define-se a distribuição NND como sendo a probabilidade $P(X) dX$ que a distância entre dois níveis vizinhos esteja entre X e $X + dX$. Então, dado um conjunto de níveis ϵ_n , a distribuição $P(X)$ é obtida pela construção de um histograma para o qual dividimos o eixo X em intervalos de comprimento fixo ΔX de forma que teremos um conjunto de intervalos $0, \Delta X, 2\Delta X, \dots$; onde $P(X_k)$ é o número de valores de X que cai no intervalo $(k-1)\Delta X$ e $k\Delta X$ devidamente normalizados. Veja-se que no limite $N \rightarrow \infty$ podemos fazer $\Delta X \rightarrow 0$, obteremos assim uma curva suave quase contínua.

A seguir, na fig.(3.3) mostra-se o histograma para o estádio desimetrizado. Veja-se que nesse caso, ela apresenta uma distribuição parecida com as de matrizes aleatórias, do tipo GOE [5, 8]. O caso do bilhar circular, em oposição, mostra uma distribuição do tipo Poisson [8], como deve ser para o caso de sistemas integráveis.

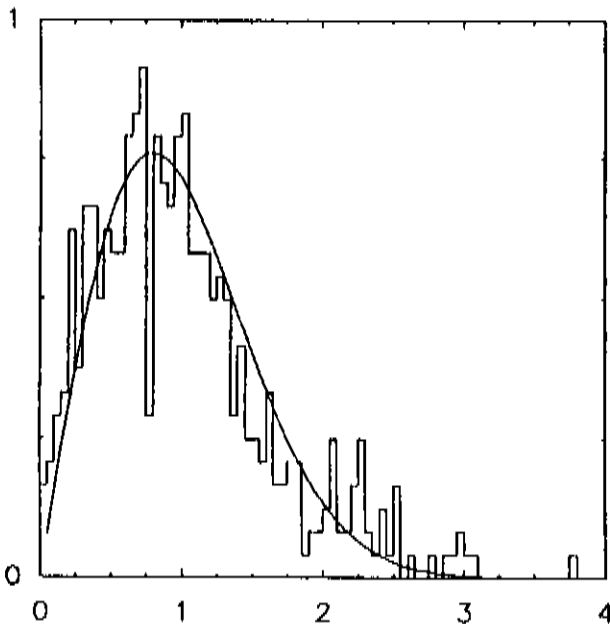


Figura 3.3: Distribuição de primeiros vizinhos para o Estádio Dessimetrizado, sendo $\hbar = 0.032$, o número de estados $N = 963$. A curva contínua corresponde à distribuição do tipo G.O.E. Note-se o excelente parecido entre ambos desenhos.

3.4.3 Densidade Suavizada de Estados

Conforme com a fórmula do traço de Gutzwiller eq.(3.21), no limite semiclássico, a parte oscilante da densidade de estados é gerada pela soma sobre todas as órbitas periódicas com energia E e as suas repetições. A suavização dessa densidade de estados mediante gaussianas de largura λ , eq.(3.23), trunca as contribuições das órbitas periódicas de período maior que $\tau = \hbar/\lambda$. Portanto, λ ajuda-nos a selecionar as órbitas com período curto. Nesse ponto, discutiremos a solução numérica para o cálculo do termo de Weyl que se torna de vital importancia para o calculo de η_{osc} .

A priori seria natural pensar que o termo suavizado de Weyl $\bar{\eta}_\lambda$ poderia ser obtido nos limites onde a largura λ for muito grande ($\lambda \rightarrow \infty$). Não obstante, veja-se que o espectro quântico é limitado e que toda suavização gaussiana faz com que $\bar{\eta}_\lambda \rightarrow 0$ nas bordas ($E = \pm 2$). Mas, o cálculo exato de $\bar{\eta}$ (fig. 3.2), dá contribuições finitas em tais extremos, logo o procedimento numérico introduz erros perto da borda numa região de

largura λ , ou seja, grandes valores de λ farão os resultados piorarem. Aqui temos que esclarecer que isso não é uma contradição, já que no estrito limite semiclássico onde o número de níveis vai para infinito, nenhum valor de λ pode ser considerado grande e portanto, também nessas regiões, o cálculo do termo de Weyl vai para zero.

Ante essa situação onde o número de níveis de energia é finito, o termo de Weyl pode ainda ser calculado usando para isso dois ingredientes: repetições periódicas do espectro e auto-consistência. Ou seja que para nosso caso, o espectro contido no intervalo $[-2:2]$ é periodicamente repetido de extremo a extremo no eixo de energia para assim evitar a tendência da densidade se anular nas bordas. Aqui, bons resultados nas bordas são obtidos às custas de um estreito máximo em $E = 0$, em vez da divergência do resultado exato. A auto-consistência se torna necessária em razão dos diferentes valores assumidos pela densidade local de estados. Um certo valor de λ pode resultar muito grande em $E = 0$, mas muito pequeno nas bordas. Então, uma vez calculada $\bar{\eta}(E)$, uma largura local é calculada. Isso é $\Delta E = 1/\bar{\eta}(E)$, e o cálculo é re-estabelecido. Dessa maneira, o processo de iterar a densidade suavizada de Weyl tenderá ao cálculo exato [8].

Antes de mostrar os resultados para $\bar{\eta}_{osc}$, estudaremos primeiro o comportamento do período com a energia, para as famílias de órbitas periódicas mais simples, no estádio:

Órbita Bouncing Ball e Órbita Horizontal

As órbitas de período mais curto são chamadas de bouncing ball. Elas são dadas por:

$$J_1 = J_{10} = \text{constante}$$

$$J_2 = \tau \sin \phi$$

$$\phi_1 = 0 \text{ ou } \phi_1 = \pi$$

$$\phi_2 = \pm \phi_{20}$$

$$E = -1 - \cos \phi_{20} \text{ ou } E = 1 - \cos \phi_{20}$$

O período de tais órbitas τ_{bb} , pode ser facilmente calculado em termos de E e R , a energia e o raio do semicírculo respectivamente. Tendo-se que no caso da energia seja positiva ou negativa, ϕ_1 é 0 ou π respectivamente

$$\tau_{bb} = 2 \frac{J_2}{\sin \phi_{20}} = \frac{2R}{\sqrt{2E - E^2}}$$

De maneira similar, o período para a trajetória periódica horizontal τ_h , pode ser calculado:

$$\tau_h = \frac{4R}{\sqrt{2E - E^2}} = 2\tau_{bb}$$

onde, no caso que a energia seja positiva ou negativa, ϕ_2 toma agora os valores 0 ou π respectivamente ($j_2 = 0$).

Na fig. 3.4 apresentamos o desenho $E \times \tau_{bb}$. Vale dizer que outras trajetórias também apresentarão comportamentos similares, de forma que o período dependerá fortemente da energia e de maneira que $\frac{\partial \tau}{\partial E}|_{E=0} = \infty$. Por tanto, o melhor lugar para procurar as cicatrizes de tais órbitas periódicas será a vizinhança de $E = \pm 1$ (veja novamente a fig. 3.4). Em seguida apresenta-se os desenhos para η_λ , η_{osc} , e a transformada de Fourier de η_{osc} , mostrando-se os diferentes picos nos seus correspondentes períodos para as órbitas periódicas. Note-se que neles já se podem observar os picos das duas órbitas. Vertical em 1.5 e Horizontal em 3.0, valores de τ_{bb} e τ_h na vizinhança de $E = \pm 1$.

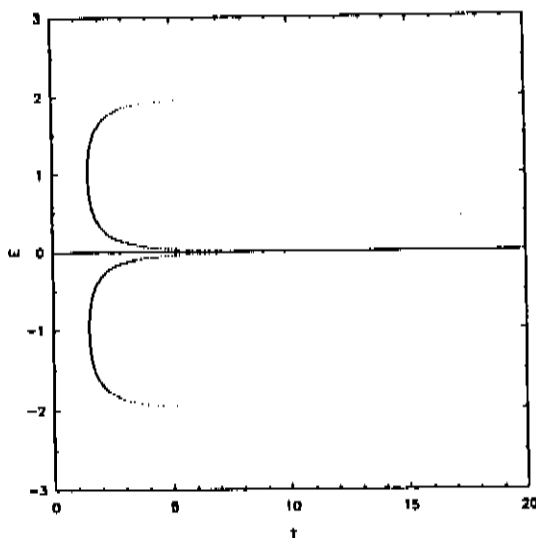


Figura 3.4: Energia versus período para a órbita vertical τ_{bb} .

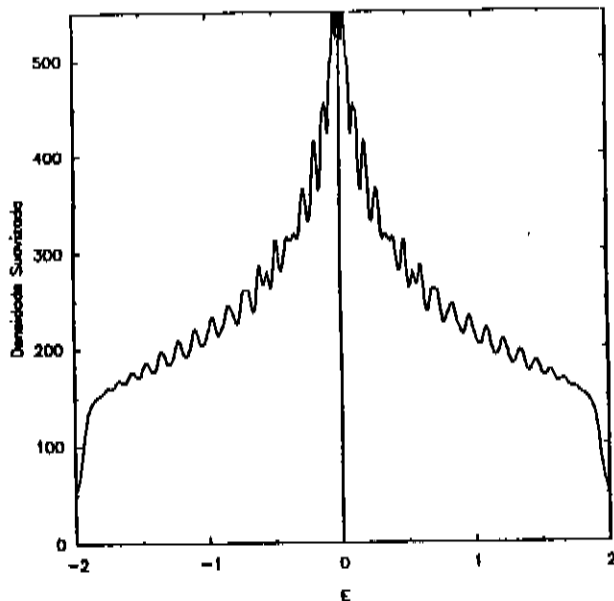


Figura 3.5: Densidade Suavizada de estados, com $\lambda = 0.021 \approx 5$ espaçamentos médios, para a órbita vertical τ_{bb} , $\hbar=0.032$.

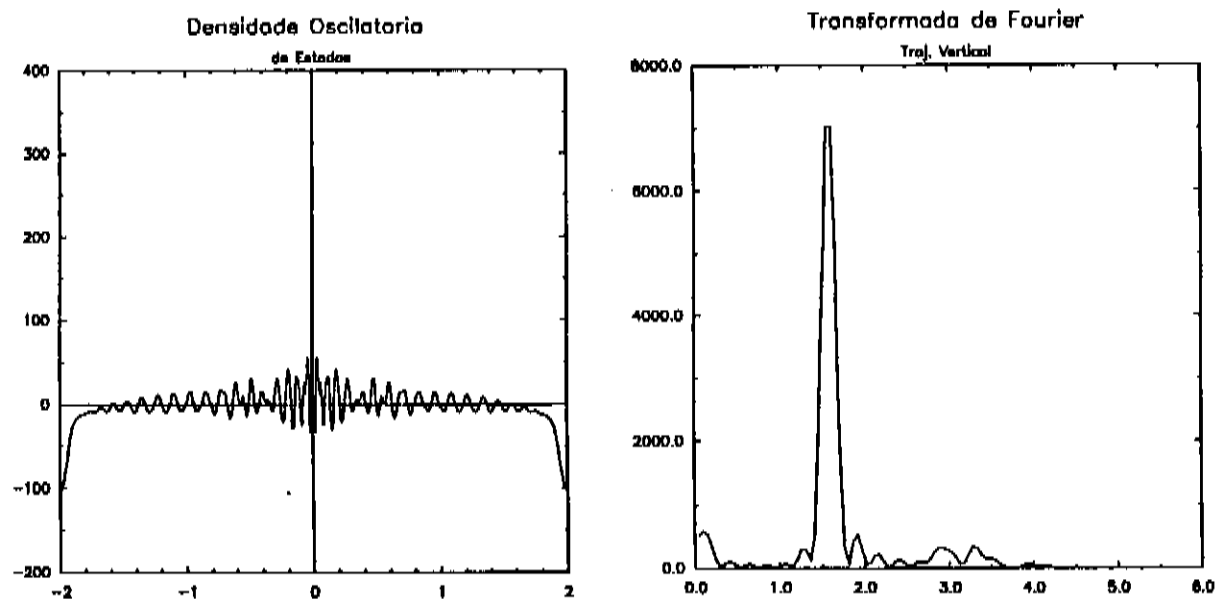
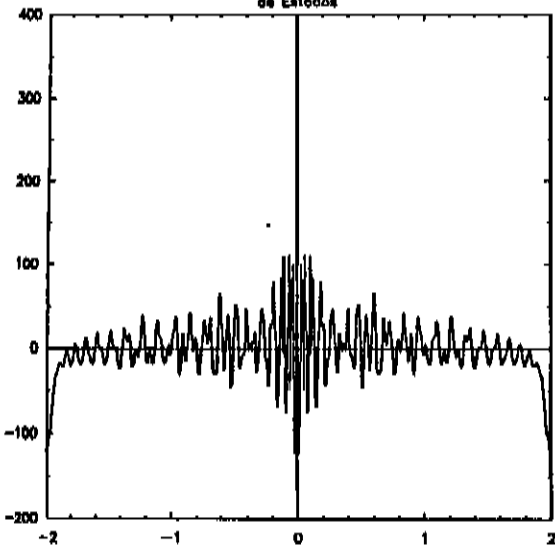


Figura 3.6: Órbita Vertical. A esquerda a Densidade Oscilante de Estados, a direita a sua Transformada de Fourier. Note-se o pico ubiquado em $\tau=1.5$, sendo $\lambda = 0.021 \approx 5$ espaçamentos médios.

Densidade Oscilatoria

de Estados



Transformada de Fourier

Traj. Horizontal

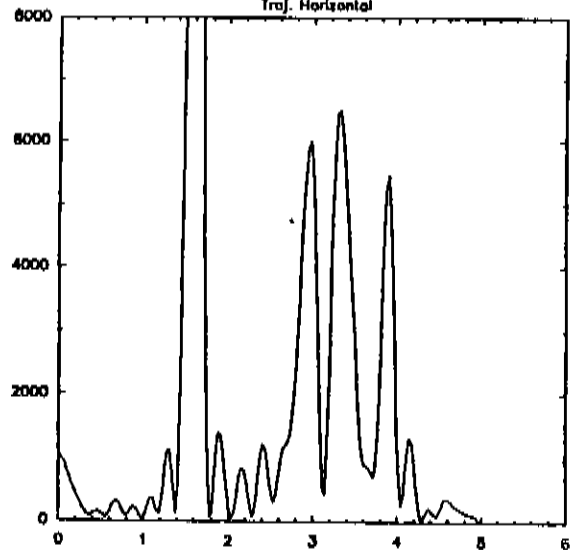


Figura 3.7: Órbita Horizontal. A esquerda a Densidade Oscilante de Estados, a direita a sua Transformada de Fourier. Note-se os picos desta vez ubiquados em τ 1.5 e 3.0, sendo $\lambda = 0.01 \approx 2$ espaçamentos médios.

Aqui ressaltamos que esses resultados serão de grande importância no estudo semiclássico das cicatrizes de órbitas periódicas. Para isso estudaremos o ‘método de Bogomolny’, que será matéria de discussão do capítulo seguinte.

Capítulo 4

Teoria de Cicatrizes

Os trabalhos feitos por Heller [6, 14], mostraram que um grande número de funções de onda de estados altamente excitados no problema do estádio tinham uma alta probabilidade na vizinhança das órbitas periódicas clássicas. Resultado que não era esperado, isso pelo fato de que em problemas caóticos todas as trajetórias periódicas são instáveis.

Nesse capítulo a nossa finalidade é mostrar que as trajetórias periódicas instáveis dão uma contribuição definida à amplitude da função de onda, que pode ser máxima na vizinhança ou sobre as mesmas trajetórias. Para isso, vamos expor uma rápida discussão da teoria de Bogomolny [23, 24], a qual é baseada em argumentos semiclássicos, de maneira similar que a formulação feita por Gutzwiller para a derivação da sua fórmula do traço. Mas neste ponto, a diferença do formalismo original do Bogomolny, na técnica de truncamento das contribuições das órbitas periódicas por nos feita vale-se do auxílio de uma função gaussiana. Aqui ressaltamos que as idéias básicas da teoria de Bogomolny foram apresentadas de forma independente e simultânea por Ozorio de Almeida [16].

4.1 Formalismo

Dados E_n , e φ_n , as auto-energias e auto-funções do Hamiltoniano $\hat{H}$

$$\hat{H}\varphi_n = E_n\varphi_n \quad (4.1)$$

Consideremos um dado intervalo de energia ΔE , centrado em E_0 , de maneira tal que $\Delta E \ll E_0$, e definamos

$$\begin{aligned}\varphi(q, E) &= \sum_{\{n\}} |\varphi_n|^2 \delta(E - E_n) \\ \langle f(q, E) \rangle &= \frac{1}{\Delta E} \sum_{\{n\}} |\varphi_n|^2\end{aligned}\quad (4.2)$$

Onde $\{n\}$ é o conjunto de autofunções com auto-energias no intervalo de energia $[E_0 - \frac{\Delta E}{2}, E_0 + \frac{\Delta E}{2}]$ e $\langle \varphi(q, E) \rangle$ representa uma média feita em energia que terá diferentes interpretações nos casos em que o problema seja integrável ou não integrável.

No caso de Sistemas Integráveis n -dimensionais existe uma alta probabilidade de degenerescência dos níveis de energia [24]; logo no limite $\Delta E \rightarrow 0$ a média terá em conta um grande número de estados degenerados. Já no caso de Sistemas Não integráveis n -dimensionais são possíveis apenas degenerescências do tipo acidental para os estados de diferentes simetrias, fenômeno conhecido como repulsão de níveis [24].

Num sistema clássico de dois graus de liberdade a função de Green $G(q'', q', E)$ unindo os pontos q' , e q'' pode ser obtida a partir do propagador semiclássico, como uma soma sobre todas as trajetórias clássicas possíveis com energia E fixa. Os trabalhos feitos por Gutzwiller [1] assim como os de Berry e Mount [21], discutem esses resultados:

$$\begin{aligned}G(q, q, E) &= \frac{1}{\hbar^2} G_0(q, E) + \frac{1}{\hbar^{3/2}} G_{osc}(q, E) + O\left(\frac{1}{\hbar}\right) \\ \Im G_0 &= -\pi \int \delta(E - H) \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \\ G_{osc}(q, E) &= \frac{1}{i\sqrt{2i\pi}} \sum_{orb} \sqrt{\Delta} \exp\left(\frac{iS(q, E)}{\hbar}\right)\end{aligned}\quad (4.3)$$

sendo que, nessas expressões:

$S(q, E)$ representa a ação clássica, calculada ao longo de uma órbita fechada. G_0 considera os caminhos clássicos nos quais os pontos são unidos de maneira direta, ou seja o caminho clássico para o qual ao fazer-se $q' \rightarrow q$ se torna de comprimento zero. Note-se que integrando G_0 , no espaço de posições, recuperamos o argumento clássico pelo qual é interpretado que cada estado quântico ocupa um certo volume $(2\pi \hbar)^2$ (isso para 2-dim) no espaço de fase clássico e que é conhecido como Densidade de Weyl.

G_{osc} considera todas as trajetórias clássicas fechadas que contribuíram com ação clássica não nula e representa flutuações em torno da média G_0 .

$\Delta(\mathbf{x})$ é o determinante da matriz construída como função das segundas derivadas da ação clássica e está associada à estabilidade das órbitas.

Veja-se que os pontos onde $\Delta(x)$ se anula, são os denominados pontos conjugados, e que na expressão G_{osc} estão sendo considerados implicitamente dentro do fator $\sqrt{\Delta(x)}$.

Tendo-se em consideração a função de Green em termos das suas autofunções é fácil mostrar que nessa representação podemos escrever:

$$-\frac{1}{\pi} \Im G(q, E) = \sum_{\{n\}} |\varphi_n(q)|^2 \delta(E - E_n) \quad (4.4)$$

Se comparamos essa expressão com a eq.(4.2), vê-se que nela podemos substituir $\varphi(q, E) \rightarrow G(q, E)$. Integrando a eq.(4.2) nas coordenadas obtemos que $\Delta E = N / \int < \varphi(q, E) > d^2q$, que substituída novamente na mesma, resulta

$$\begin{aligned} < |\varphi(q)|^2 > &= \frac{< G(q, E) >}{\int < G(q, E) > d^2q} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\{n\}} |\varphi_n(q)|^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Substituindo a eq.(4.3), na expressão acima, a mesma que ao ser expandida em série de Taylor em torno de $\frac{< \Im G_{osc} >}{< \Im G_0 >} < 1$, resulta:

$$< |\varphi(q)|^2 > = \frac{< \Im G_0 >}{\int < \Im G_0 > d^2q} \left\{ 1 + \hbar^{1/2} \frac{< \Im G_{osc} >}{< \Im G_0 >} \right\} \quad (4.6)$$

Definindo $\rho_0 = \frac{< \Im G_0 >}{\int < \Im G_0 > d^2q}$ como a projeção da distribuição de probabilidade clássica microcanônica no espaço de configurações, se obtém

$$< |\varphi(q)|^2 > = \rho_0(q) + \hbar^{1/2} \frac{< \Im G_{osc} >}{\int < \Im G_0 > d^2q}$$

Veja-se que para Hamiltonianas da forma $H = p^2/2 + V(q)$, pode-se mostrar que

$$\int \delta(E - H) d^2p = 1/2\pi, \quad V(q) < E$$

e zero de outra forma. Dessa maneira temos que

$$\int d^2q \int \delta(E - H) d^2p = A/2\pi$$

onde A é a área no espaço de configurações na energia fixa E . Chegamos assim na expressão:

$$\langle |\varphi(q)|^2 \rangle = \rho_0(q) - \frac{2\hbar^{1/2}}{A} \langle \Im G_{osc} \rangle, \quad V(q) < E \quad (4.7)$$

onde $\rho_0(q) = \frac{1}{A}$. Assim a expressão (4.7), nos dá uma representação formal do valor médio da função de onda para um sistema não integrável em termos de observáveis puramente clássicos.

Veja-se que, se bem é certo que no caso de sistemas não integráveis a soma sobre todas as trajetórias clássicas pode ser quase impossível, vejamos que certas considerações podem ser favoráveis para a aplicabilidade do método proposto.

4.1.1 Média em energia da Função de Green

À diferença do trabalho original de Bogomolny [23, 24], usaremos aqui uma função suavizadora gaussiana, fazendo com que as principais contribuições sejam dadas pelas trajetórias clássicas de período curto:

$$\langle G_{osc} \rangle = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \sum \frac{\sqrt{\Delta(x)}}{2\pi \Delta E} \int \exp\left(\frac{iS(E)}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{(E - E_0)^2}{2\Delta E}\right) dE \quad (4.8)$$

O termo de suavização gaussiano permite-nos expandir a ação clássica em série de Taylor em torno de E_0 :

$$S(E_0 + \epsilon) \simeq S(E_0) + T_0 \epsilon$$

onde T_0 é o período da trajetória considerada: $T_0 = \frac{\partial S}{\partial E}|_{E_0}$. Feita a integração, o resultado final é:

$$\langle G_{osc} \rangle = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \sum \sqrt{\Delta(x)} \exp\left\{\frac{iS(E_0)}{\hbar} - \left(\frac{\Delta E T_0}{\hbar}\right)^2\right\} \quad (4.9)$$

Olhando o último termo na exponencial se vê que as contribuições principais para $\langle G_{osc} \rangle$ são proporcionadas pelas órbitas com energias no intervalo $[E_0 - \frac{\Delta E}{2}, E_0 + \frac{\Delta E}{2}]$, que saem de q e voltam a q , para tempos tais que $\frac{T_0 \Delta E}{\hbar} \leq 1$. Esse resultado muito importante nos servirá para prever o intervalo de energia ΔE , escolhido o período das órbitas que desejamos 'encontrar'. É Por esta razão que esperamos ver cicatrizes dessas órbitas periódicas fazendo uma 'média' sobre o conjunto de auto-funções com auto-energias nesse intervalo ΔE , tal e como for definido na formulação do Bogomolny, segundo a eq.(4.2).

4.1.2 Média gaussiana nas coordenadas

Na aproximação semiclássica $\hbar \rightarrow 0$, pequenas variações de q farão com que as variações no fator de fase $\exp(iS/\hbar)$ sejam muito rápidas. Tais variações são dadas por: $\frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial S}{\partial q''} + \frac{\partial S}{\partial q'} = |\Delta p|$.

A seguir mostraremos que as trajetórias que saem e retornam a um mesmo ponto com uma pequena variação de momento são as que contribuirão significativamente na média de G_{osc} . Como essa classe de órbitas sempre existirá perto das órbitas periódicas, esperamos observar cicatrizes dessas órbitas nas funções de onda.

Com esses fins, consideremos uma dada trajetória fechada, um sistema de coordenadas no qual o eixo x vai ao longo da própria trajetória e o eixo y na direção perpendicular a ela. Veja-se que existirá um sistema particular de coordenadas para cada trajetória considerada [22], fig.(4.1). De novo, a suavização é feita usando a função $\frac{1}{2\sqrt{\pi}\Delta y} \exp -(\frac{y}{2\Delta y})^2$, que

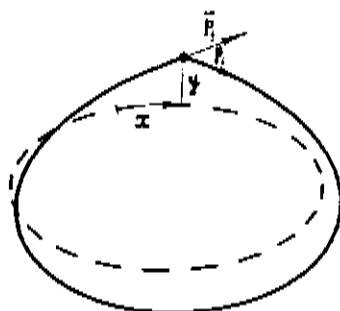


Figura 4.1: A curva sólida mostra uma trajetória clássica fechada na vizinhança de uma trajetória periódica (curva tracejada). Os eixos $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são escolhidos ao longo e perpendicularmente à trajetória periódica, respectivamente. Os vetores de momento inicial e final são representados por $\vec{p}_i$ e $\vec{p}_f$.

nos permite expandir a ação clássica em torno de $y = 0$. Definindo $W = \frac{\partial S}{\partial q^2} + \frac{\partial S}{\partial q'^2} + 2\frac{\partial S}{\partial q'} + \frac{\partial S}{\partial q''}|_{y=0}$, se obtém

$$S(x, y) \simeq S(x) + \Delta p y + W y^2$$

após integrar sobre y obtemos a seguinte expressão

$$\langle G_{osc}(E_0) \rangle = \frac{1}{i\sqrt{2i\pi}} \sum \frac{1}{|\dot{q}|} \sqrt{\frac{\Delta(x)}{W}} \exp \left\{ -\frac{(\frac{\Delta p \Delta y}{\hbar})^2 + \frac{iS_0 \overline{W}}{\hbar}}{W} \right\} \quad (4.10)$$

onde $W = 1 - \frac{iW}{\hbar}(2\Delta y)^2$.

Note-se que, nessa expressão final (eq.4.10), as contribuições para $\langle G_{osc} \rangle$, serão importantes só quando $\frac{\Delta p \Delta y}{\hbar} \leq 1$, ou seja, para pequenas variações de momento. Isso significa que as maiores contribuições são feitas pelas órbitas vizinhas às órbitas periódicas. No que concerne ao termo complexo, ele é modulado pela gaussiana de largura $\sqrt{\frac{\hbar}{\Delta p}}$, de forma que duas possibilidades poderão atingi-lo. Isso é, as contribuições oscilarão perto ou sobre a própria órbita periódica. Com esses argumentos nos permitimos fazer um esboço dessas contribuições, fig.(4.2).

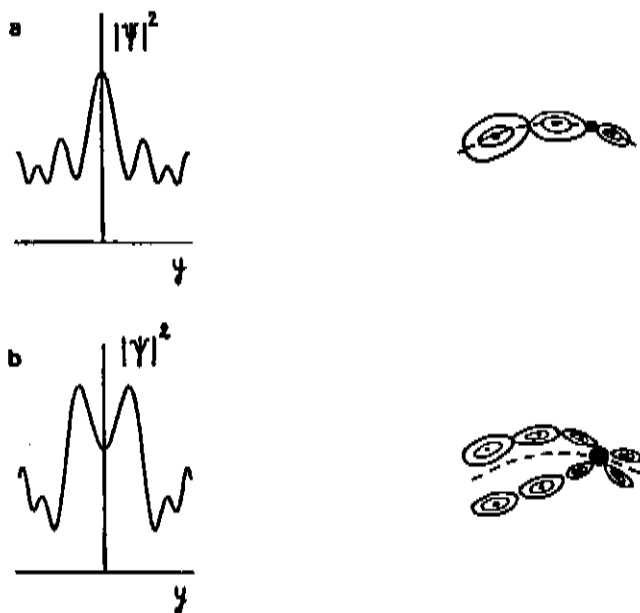


Figura 4.2: Forma aproximada de $\langle |\varphi|^2 \rangle$ na vizinhança da trajetória instável. Na esquerda mostra-se um corte através da trajetória. A direita o relêvo da função de onda ao longo da mesma trajetória (curva tracejada). O círculo escuro é denominado ponto auto-conjugado

Finalmente, a expressão para a média da amplitude de probabilidade incluirá além das órbitas, as suas p -repetições, de maneira similar que com a fórmula do traço:

$$\langle |\varphi|^2 \rangle = \frac{1}{V} \{ 1 - 2\sqrt{\hbar} \sum_p \Im \langle G_{osc} \rangle_p \}$$

Veja-se que, segundo a eq(4.10), espera-se que as médias das amplitudes de probabilidades $\langle |\varphi|^2 \rangle$ sejam máximas para os casos nos quais os valores das suas ações sejam proporcionais a inteiros vezes $2\pi\hbar$.

4.2 Resultados

É importante interpretar a eq(4.5). Ela nos diz que podemos encontrar cicatrizes de órbitas periódicas considerando um certo conjunto de funções $\{n\}$ e estabelecendo uma média do quadrado de suas amplitudes

$$\langle |\varphi(q)|^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\varphi_n(q)|^2$$

O que segui é saber qual conjunto $\{n\}$ está associado à estrutura periódica considerada. Uma média em energia responderá nossa pergunta.

Como já foi dito no análise da eq(4.10), as maiores contribuições são geradas pelas órbitas periódicas tais que dado seu período T e a largura ΔE satisfazem a relação $T\Delta E \leq \hbar$. Então conhecido o período da órbita T_0 que desejamos filtrar, a largura ΔE pode ser posta como sendo um número de vezes o espaçamento médio dos níveis de energia $\Delta\bar{E}$, portanto

$$N = \frac{\hbar}{T_0 \Delta\bar{E}}$$

Note-se aqui que N nos diz que quantidade de auto-funções teremos que considerar. Estes mesmos argumentos, foram aplicados na predição das órbitas transversais (bouncing ball) e das órbitas horizontais, para o conjunto de auto-funções com auto-energia na vizinhança do valor de energia $E = \pm 1$. Aqui é importante assinalar que nos desenhos feitos só consideramos o valor da amplitude correspondente ao termo oscilante. Isso é

$$|\varphi|_{osc}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\varphi_n|^2 - |\varphi|_{weyl}^2$$

Onde o termo de Weyl $|\varphi|_{weyl}^2$, foi calculado fazendo uma média local sobre um conjunto $\{m\}$ de auto-funções, tais que $m > N$. Estudamos em particular, só dois tipos de órbitas. As contas foram feitas usando os dados comuns $\hbar = 0.032$, $\Delta E \simeq 0.004$. Feitas as contas correspondentes, verifica-se que para

Órbita vertical, $T_0=1.5$, $N = 5$, $m=26$

Órbita Horizontal, $T_0=3.0$, $N \simeq 2$, $m=23$

Os resultados que seguem mostram a validade da formulação de Bogomolny. Aqui é importante dizer que tomado o conjunto de N -funções nos intervalos de energia $[-1.5, -0.5]$ e $[0.5, 1.5]$, a cicatriz desejada foi encontrada para o conjunto tal que a sua ação clássica correspondeu aproximadamente a inteiros vezes $2\pi\hbar$ (discussão na seção 4.1.2). Por outro lado, lembrando-nos que os desenhos da transformada de Fourier para a densidade oscilante de estados (fig. 2.7) dão conta da coexistência das órbitas horizontal ($2T=3.0$) e vertical ($T=1.5$). Os desenhos aqui corroboram tais fatos. Mas note-se que a possibilidade de se obter órbitas isoladas com período $2T$ (horizontal) foi factível na medida de que dado o conjunto $\{2n\}$ de inteiros vezes a ação clássica para essa órbita, há um conjunto de só $\{n\}$ inteiros para a órbita de período T (veja apêndice). Aqui vale dizer que esse conjunto de números quânticos foram calculados usando a regra de quantização semiclássica de Bohr-Sommerfeld já discutida no capítulo 2. Nos desenhos plotamos em total 5 curvas de nível no intervalo de 50 até 100 por cento. Sendo 10 por cento, o espaçamento entre curvas vizinhas. Mostrados os desenhos, no capítulo

seguinte estudaremos a possibilidade de representar as funções de onda no espaço de fase usando a representação de estados coerentes (Distribuição de Husimi).

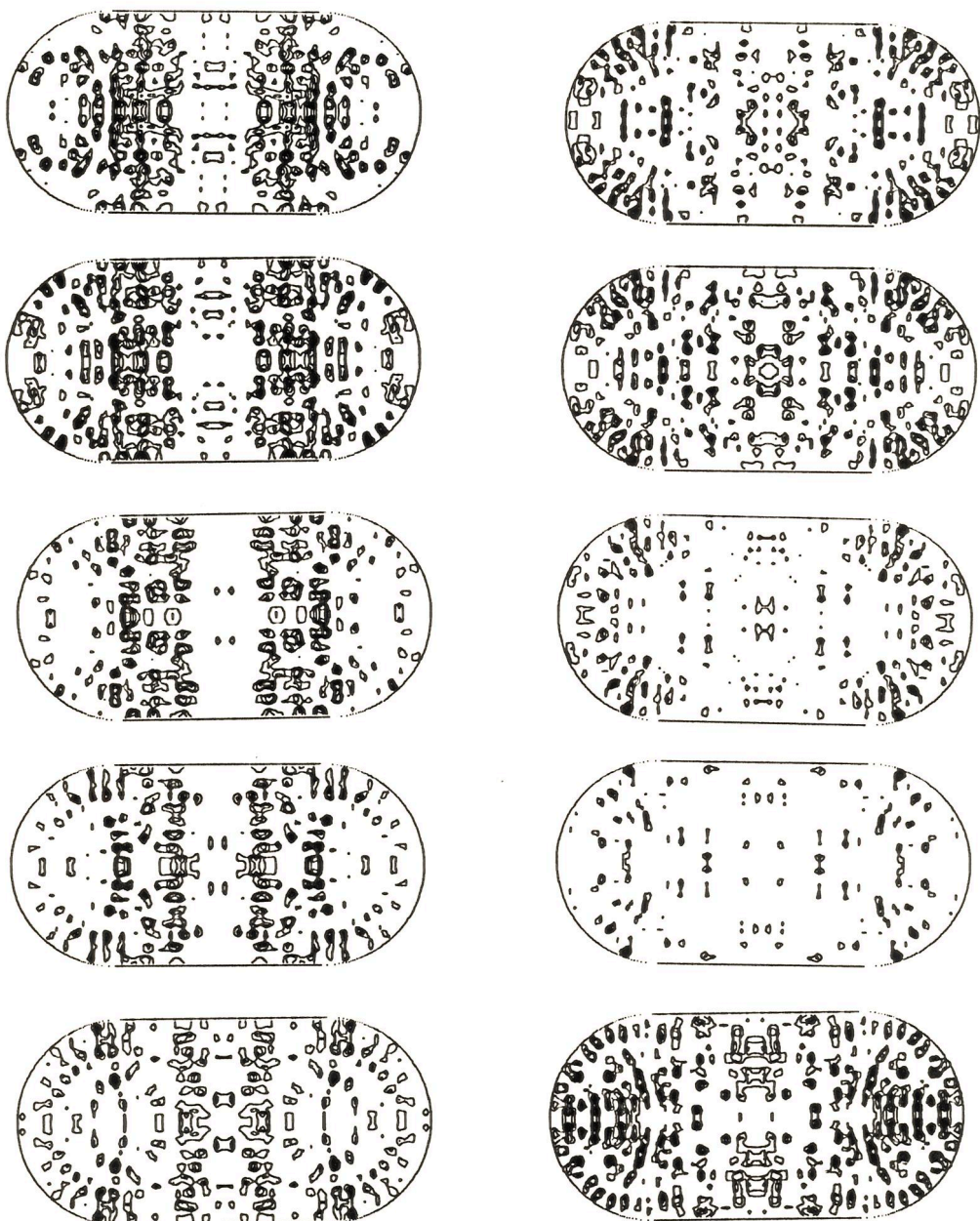


Figura 4.3: Média sobre 5 espaçamentos médios. A coluna, à esquerda mostra uma sequência de médias vizinhas dos estados 75 ao 83; a figura no meio já mostra a cicatriz vertical $< 77,81 >$. À direita a sequência de médias vizinhas dessa vez sobre os estados 86 ao 94; nesse caso não aparecem cicatrizes.

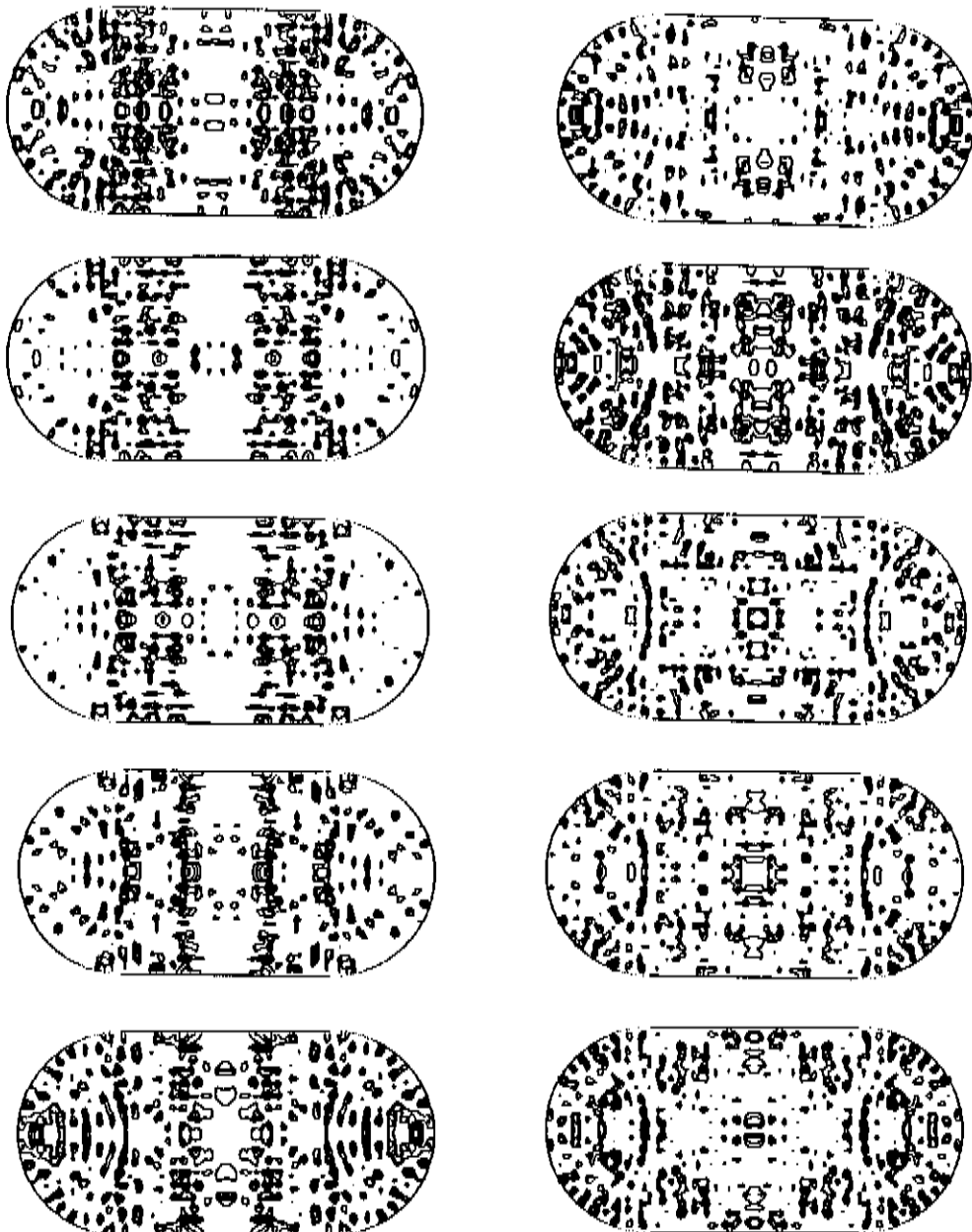


Figura 4.4: Média sobre 5 espaçamentos médios. A coluna, à esquerda mostra uma sequência de médias vizinhas dos estados 96 ao 100; a figura no meio já mostra a cicatriz vertical $< 98, 102 >$. À direita a sequência de médias vizinhas dessa vez sobre os estados 110 ao 118; nesse caso não aparecem cicatrizes.

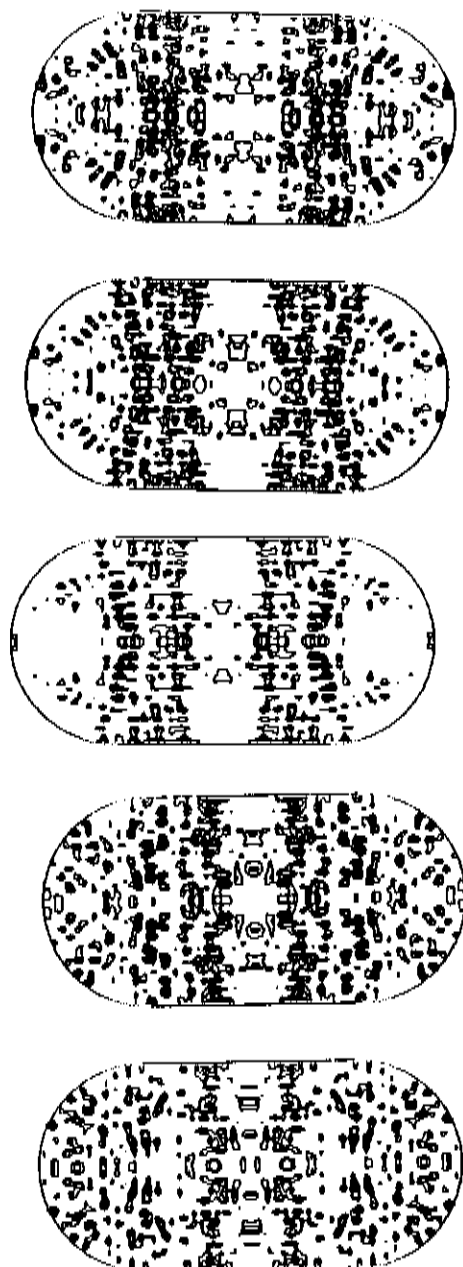


Figura 4.5: Média sobre 5 espaçamentos médios. Mostramos uma sequência de médias vizinhas dos estados 119 ao 127; a figura no meio já mostra a cicatriz vertical $\langle 121, 125 \rangle$

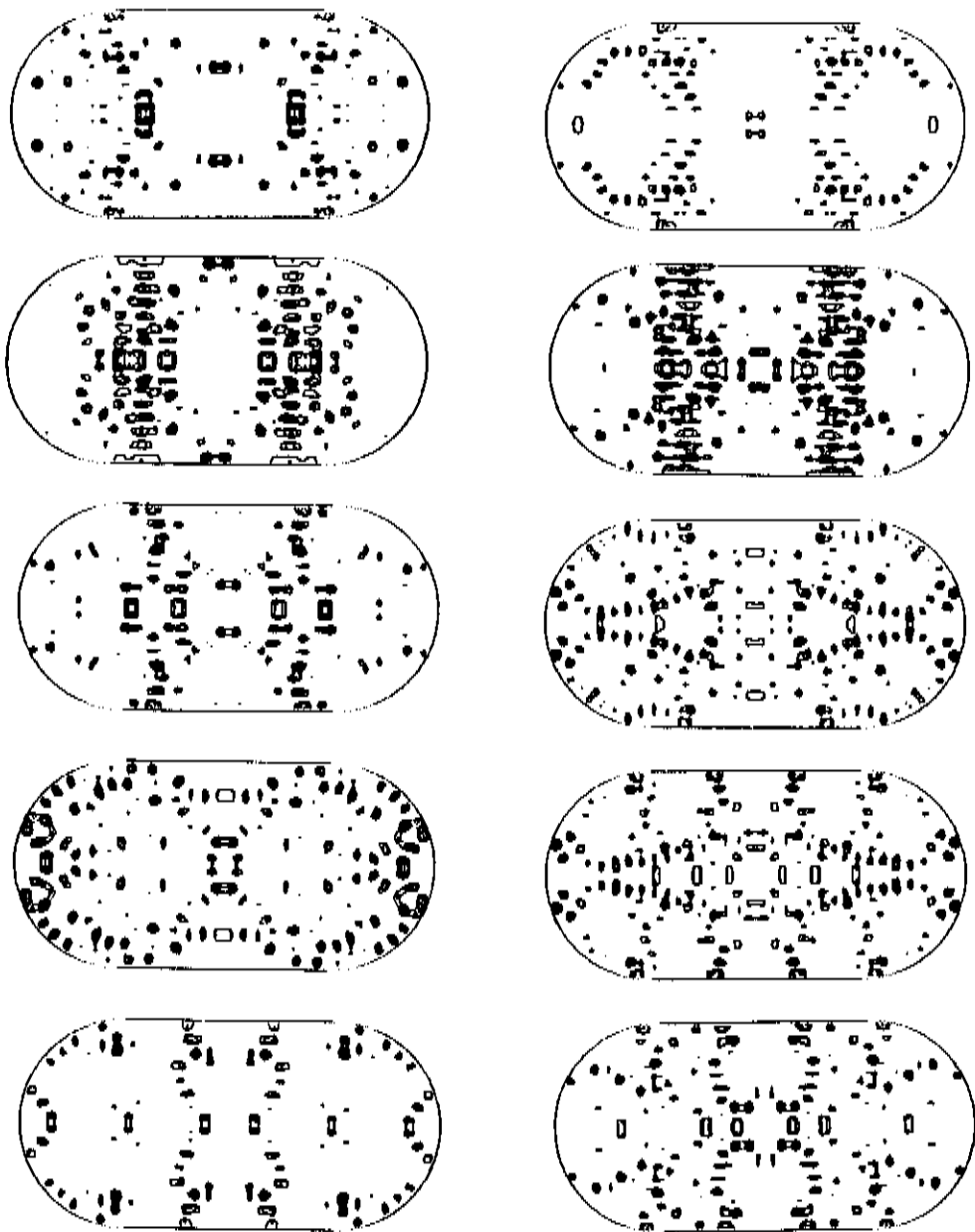


Figura 4.6: Média sobre 2 espaçamentos médios. A coluna, à esquerda mostra uma sequência de médias vizinhas dos estados 76 ao 81; a figura no meio já mostra a cicatriz vertical e horizontal $< 78, 79 >$. À direita a sequência de médias vizinhas dessa vez sobre os estados 97 ao 102; nesse caso as cicatrizes aparecem na média $< 100, 101 >$.

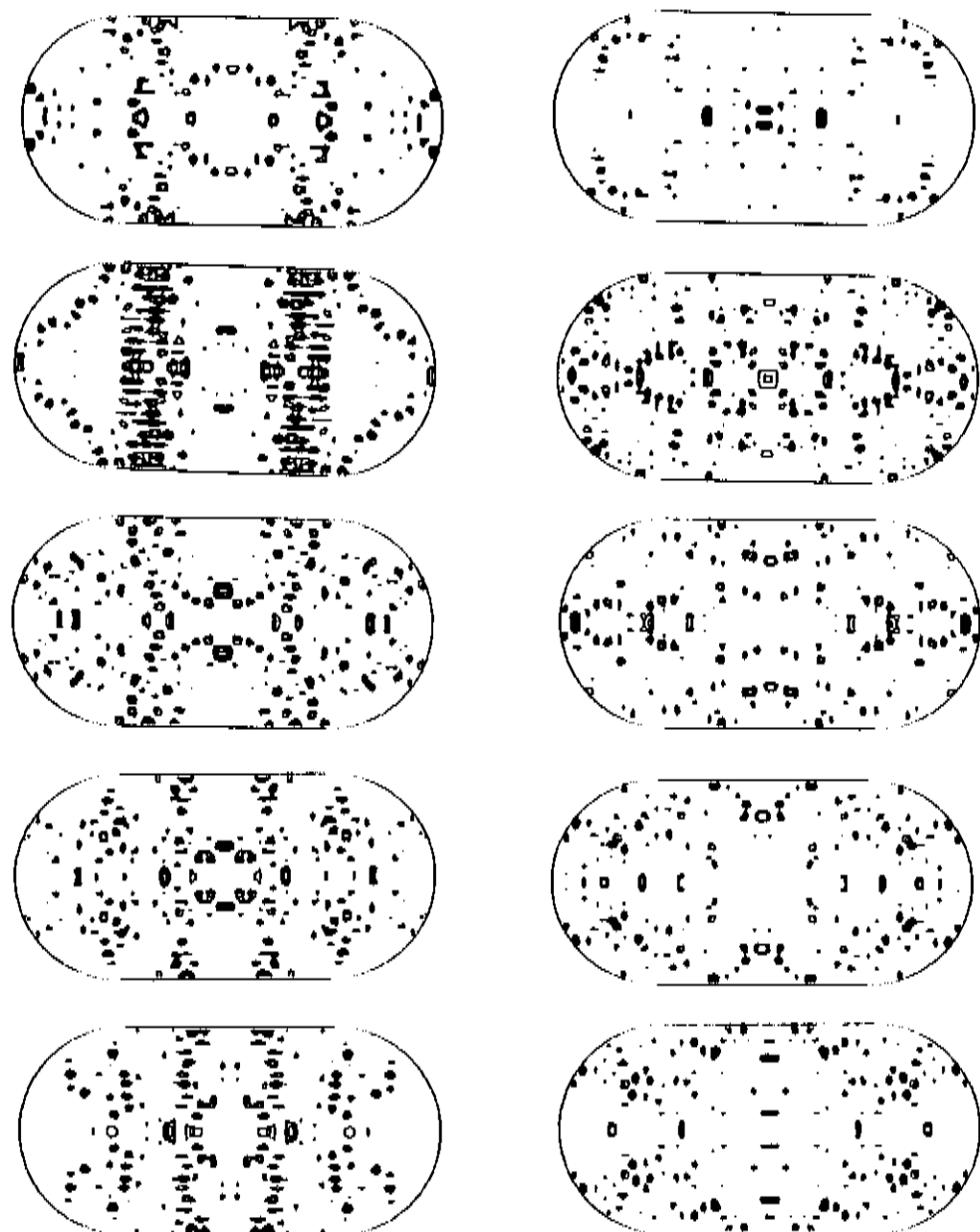


Figura 4.7: Média sobre 2 espaçamentos médios. A coluna, à esquerda mostra uma sequência de médias vizinhas dos estados 120 ao 125; a figura no meio já mostra a cicatriz vertical e horizontal $< 123, 124 >$. À direita a sequência de médias vizinhas dessa vez sobre os estados 135 ao 140; nesse caso só aparece a cicatriz horizontal na média $< 137, 138 >$.

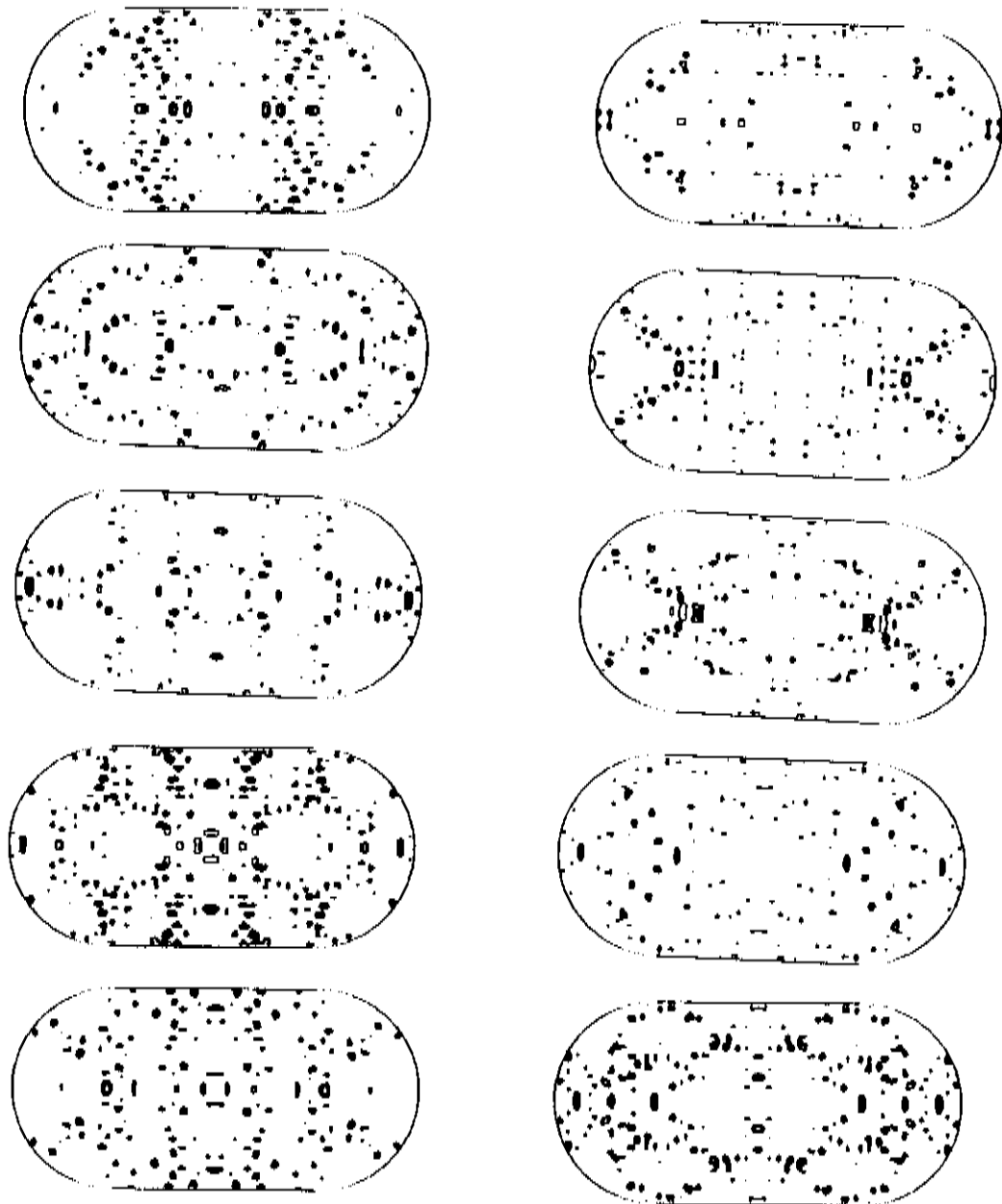


Figura 4.8: Média sobre 2 espaçamentos médios. A coluna, à esquerda mostra uma sequência de médias vizinhas dos estados 147 ao 152; a figura no meio já mostra a cicatriz vertical e horizontal $\langle 149, 150 \rangle$. À direita a sequência de médias vizinhas dessa vez sobre os estados 163 ao 168; nesse caso só aparece a cicatriz horizontal na média $\langle 165, 166 \rangle$.

Capítulo 5

Autofunções no Espaço de Fase

Pelo fato de esperarmos que as estruturas invariantes da mecânica clássica sejam refletidas nos estados estacionários da mecânica quântica, as funções de onda propõem um bom argumento para o estudo do princípio de correspondência. No caso de sistemas integráveis sabe-se que as autofunções estão associadas aos toros invariantes quantizados, onde a ação desses toros proporciona um conjunto de números quânticos através da regra de quantização E.B.K. Para sistemas não integráveis a situação é mais complexa, já que o espaço de fases contém uma mistura de trajetórias periódicas estáveis e instáveis, toros e regiões caóticas, não existindo uma associação simples entre essas estruturas e os estados estacionários. Por outro lado, sabemos que para essas regiões caóticas a presença das trajetórias periódicas instáveis [25], quebra a hipótese de uma distribuição uniforme. Tais estruturas, classicamente de medida zero, tem uma influência dominante sobre as funções de onda (fato discutido no capítulo anterior).

O propósito deste capítulo é apresentar um método que permita o estudo das funções de onda no espaço de fase. Para isso, faremos uso dos estados coerentes dos grupos de Lie [3,4], uma vez que as autofunções foram expressas na base número de ocupação do oscilador harmônico para obtermos uma distribuição definida positiva. Com esta importante ferramenta faremos um estudo numérico das seções de Poincaré.

5.1 Distribuição de Husimi

5.1.1 Sistema Unidimensional

Para sistemas com um grau de liberdade, definimos

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} \left\{ \hat{q} - ib_0\hat{p} \right\}$$

$$|z\rangle = \exp \bar{z}\hat{a}^\dagger |0\rangle \quad (5.1)$$

sendo que $\hat{a}|0\rangle = 0$, z é um número complexo relacionado com os valores médios (q , p) dos operadores $\hat{q}$, $\hat{p}$ por $z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{q}{b_0} - ib_0p \right\}$, $\bar{z}$ é o seu complexo conjugado, e $|z\rangle$ é o estado coerente. Assim as coordenadas (z , $\bar{z}$) gerarão o espaço de fase canônico.

Define-se a distribuição de Husimi [3], para um certo estado $|\psi\rangle$ como sendo

$$W_\psi(p, q) = \frac{|\langle z|\psi\rangle|^2}{\langle z|z\rangle} \quad (5.2)$$

onde a constante de normalização é dada por $\langle z|z\rangle = \exp \frac{z\bar{z}}{\hbar}$. Veja-se que, o estado coerente $|z\rangle$ é um pacote de onda Gaussiano centrado no ponto (p, q) no espaço de fase com largura b_0 e com parâmetros de dispersão $\Delta^2 q = \frac{b_0^2 \hbar}{2}$ e $\Delta^2 p = \frac{\hbar}{2b_0^2}$, por tanto a eq.(5.2) dá a probabilidade da função de onda $|\psi\rangle$ estar numa célula (Δq , Δp) centrada em (p, q) no espaço de fase; compatibilizando assim com os requerimentos do princípio de incerteza.

Existe também, uma outra maneira de representar um estado $|\psi\rangle$ no espaço de fases, a qual é dada pela distribuição de Wigner [2,4,26] que é definida como

$$\varpi_\psi(p, q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx \left\langle x - \frac{q}{2} \right| \psi \rangle \langle \psi | x + \frac{q}{2} \rangle \exp\left(\frac{ixp}{\hbar}\right) \quad (5.3)$$

e que contém toda a informação quântica associada com a matriz de densidade $\rho(q, q')$.

Uma relação direta entre ambos tipos de distribuições, eqs. (5.2) e (5.3), pode ser estabelecida :

$$W_\psi(p, q) = \int dp' dq' Z_{p', q'}(p, q) \varpi_\psi(p, q) \quad (5.4)$$

onde

$$Z_{p',q'}(p,q) = \frac{1}{\pi\hbar} \exp \left\{ -\frac{(q-q')^2}{\hbar b_0^2} - \frac{b_0^2(p-p')^2}{\hbar} \right\} \quad (5.5)$$

Essa expressão diz que, a distribuição de Husimi de um estado $|\psi\rangle$, é obtido pela suavização da distribuição de Wigner por uma Gaussiana. Além disso, nela vemos que mudando o parâmetro b_0 podemos mudar a largura de suavização nas direções (p, q) , ao passo que o produto $\Delta p \times \Delta q$ é mantido constante, mas pelo contrário, fazendo $\hbar \rightarrow 0$ estreitamos as larguras nas duas escalas.

Note-se que, a distribuição de Husimi segundo a eq. (5.2) é uma distribuição definida positiva, a diferença da distribuição de Wigner (eq. 5.3) que pode as vezes ser negativa.

5.1.2 Sistema Bidimensional

Uma extensão natural da distribuição de Husimi unidimensional permitirá tratar sistemas com mais de um grau de liberdade. Para isso consideramos os operadores canônicas com as operações

$$\{\hat{q}_i, \hat{p}_j\} = i\hbar \delta_{ij} \hat{j}$$

$$\{\hat{q}_i, \hat{q}_j\} = \{\hat{p}_i, \hat{p}_j\} = 0 \quad (5.6)$$

para $i, j = 1, 2$. Seguindo a sequência do tópico anterior, definimos

$$\hat{a}_i^\dagger = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} \left\{ \frac{\hat{q}_i}{b_i} - ib_i \hat{p}_i \right\}$$

$$|z_1, z_2\rangle = \exp \{ \bar{z}_1 \hat{a}_1^\dagger + \bar{z}_2 \hat{a}_2^\dagger \} |0\rangle \quad (5.7)$$

Onde $\hat{a}_i|0\rangle = 0$, e $|z_1, z_2\rangle$ é o estado coerente com o parâmetro b_i definindo a largura da gaussiana.

As coordenadas (p, q) , se relacionam com as coordenadas $(z_i, \bar{z}_i)$, pela equação

$$z_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{q_i}{b_i} - ib_i p_i \right) \quad (5.8)$$

Agora a distribuição de Husimi se define como:

$$W_{\psi}(p, q) = \frac{\langle z_1 z_2 | \hat{H} | z_1 z_2 \rangle}{\langle z_1 z_2 | z_1 z_2 \rangle} \quad (5.9)$$

onde a norma da função que determina a estrutura no espaço de fase é

$$\langle z_1 z_2 | z_1 z_2 \rangle = \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} (z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2) \right\} \quad (5.10)$$

Note-se que no limite semiclássico $\hbar \rightarrow 0$, $W_{\psi} \rightarrow H_{cl}$.

Veja-se que o cálculo de $\langle z_1 z_2 | \psi \rangle$ será simples, só no caso que a auto-função $|\psi\rangle$ seja conhecida na base do oscilador harmônico, de forma que para esses auto-estados a seguinte expressão será útil

$$|n_1 n_2\rangle = \sqrt{\frac{\hbar^{n_1} \hbar^{n_2}}{n_1! n_2!}} (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} |0\rangle \quad (5.11)$$

Com ajuda das relações (5.7) e (5.11), é fácil verificar que

$$|z_1 z_2\rangle = \sum_{n_1 n_2=0}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{\hbar^{n_1} n_1! \hbar^{n_2} n_2!}} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} |n_1 n_2\rangle \quad (5.12)$$

por meio das quais a distribuição de Husimi pode ser expressa como

$$\begin{aligned} W_{\psi}(z_1 \bar{z}_1, z_2 \bar{z}_2) &= \frac{|\langle z_1 z_2 | \psi \rangle|^2}{\langle z_1 z_2 | z_1 z_2 \rangle} \\ &= \frac{|\sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \langle z_1 z_2 | n_1 n_2 \rangle \langle n_1 n_2 | \psi \rangle|^2}{\langle z_1 z_2 | z_1 z_2 \rangle} \\ &= \left| \sum_{n_1 n_2}^{\infty} \sqrt{\frac{\exp(-\frac{z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2}{\hbar})}{\hbar^{n_1} n_1! \hbar^{n_2} n_2!}} \right. \\ &\quad \times \left. z_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} \langle n_1 n_2 | \psi \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Nesse contexto é as vezes, também conveniente introduzir as variáveis angulares e de ação mediante a substituição $z_j = \sqrt{j_j} \exp i\phi_j$, permitindo escrever (5.13) na forma:

$$\begin{aligned} W_{\psi}(j_1 \phi_1, j_2 \phi_2) &= \left| \sum_{n_1 n_2=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\exp(-\frac{j_1}{\hbar}) j_1^{n_1}}{\hbar^{n_1} n_1!}} \sqrt{\frac{\exp(-\frac{j_2}{\hbar}) j_2^{n_2}}{\hbar^{n_2} n_2!}} \right. \\ &\quad \times \exp i(n_1 \phi_1 + n_2 \phi_2) \langle n_1 n_2 | \psi \rangle \left. \right|^2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

5.2 Seção de Poincaré Quântica

No caso de sistemas de dois graus de liberdade as distribuições de Husimi para auto-estados de Hamiltonianas independentes do tempo podem ser facilmente calculadas como se viu na seção anterior (eq. 513). Mas acontece que por elas serem objetos de quatro dimensões, a sua visualização fica um tanto difícil. Na contrapartida clássica essa dificuldade é superada definindo as chamadas Projeções e Seções de Poincaré Quânticas.

Classicamente um Mapa de Poincaré para um sistema conservativo é definido eliminando uma das variáveis, para o qual usamos o argumento de conservação da energia junto à fixação da sua variável conjugada canônica [27]. Dessa maneira a dimensão do espaço de fases se reduz em dois. Também o tempo é eliminado completamente, ao passo que a seção será rotulada pela energia. Quânticamente, obtemos uma construção comparável com esse procedimento, integrando a distribuição estacionária sobre uma das variáveis e fixando a sua correspondente variável conjugada, o que definirá uma seção plana. Por exemplo podemos definir a distribuição de probabilidade nas variáveis (p_1, q_1) , obtida na seção plana q_2 , fazendo:

$$S_{q_2}(p_1, q_1) = \int dp_2 W_\psi(p_1 q_1, p_2 q_2) \quad (5.15)$$

Uma maneira alternativa de conseguir uma distribuição parecida com a mencionada acima, consiste em restringir a distribuição à superfície de energia:

$$S'_{q_2}(p_1, q_1) = W_{\psi_m}(p_1, q_1, p_2(E_m, p_1, q_1, q_2), q_2) \quad (5.16)$$

onde ψ_m é um auto-estado com auto-energia E_m , e $p_2(E, p_1, q_1, q_2)$, é obtido a partir da Hamiltoniana clássica [28, 29]. Já que as distribuições dos auto-estados no limite semiclássico são intensas sobre a energia quântica, a integral na expressão (5.15) recolherá contribuições efetivas só para pontos com $E \approx E_m$, portanto os resultados acima (5.15), e (5.16) serão muito similares.

Por outro lado, as projeções são obtidas integrando sobre duas das variáveis:

$$\bar{P}(q_1, q_2) = \int dp_1 dp_2 W_\psi(p_1, q_1, p_2, q_2) \quad (5.17)$$

Note-se que, essa expressão pode ser vista como uma versão suavizada da distribuição de probabilidades para a função de onda $|\psi(q_1, q_2)|^2$.

5.3 Resultados

Nessa parte estudamos tanto o sistema unidimensional como bidimensional no espaço de fases correspondente aos bilhares de ação antes definidos.

5.3.1 Biliar Unidimensional

A nossa previsão do sistema se movimentando segundo trajetórias retas e refletindo especularmente para o caso da Hamiltoniana $H = -\cos \phi$, foi excelentemente corroborada.

A seguir, apresentamos a distribuição de Husimi para duas autofunções. O cálculo foi baseado na eq.(5.2), sendo o valor da variável $\hbar=0.001$; foram assim gerados 400 auto-estados.

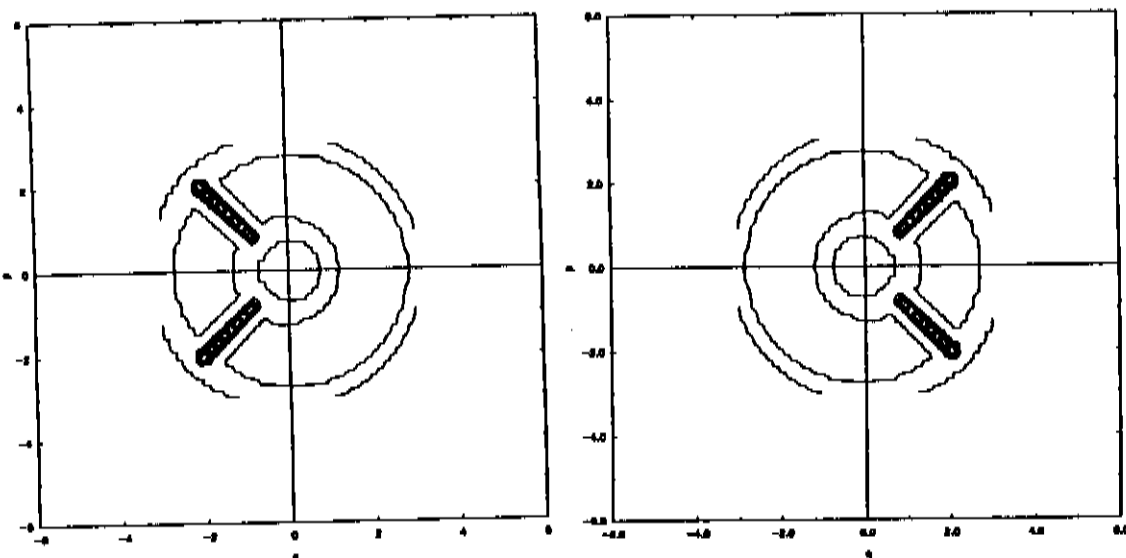


Figura 5.1: Auto-funções no espaço de fase $p \times q$ para o biliar unidimensional. A figura à esquerda mostra uma autofunção com energia $E_m = 0.7071$. À direita, uma outra autofunção dessa vez com autoenergia $E_m = -0.7071$.

5.3.2 Bilhar Bidimensional

A extensão natural da Hamiltoniana unidimensional a duas dimensões junto ao fato de se ter escolhido uma fronteira do tipo estádio, no espaço de ações, fez com que o sistema apresente situações que não são tão simples. Lembre-se dos resultados obtidos no Capítulo 2, onde apresentamos um conjunto de desenhos refletindo o comportamento tanto caóticos como não caóticos das auto-funções no espaço de ações.

Nosso interesse agora é saber qual é o comportamento de tais auto-funções no espaço de fases. Com esse objetivo, fizemos uso dos resultados (5.7), (5.9) e (5.15) (seção 5.1.2), junto ao importante resultado (5.16) (seção 5.2), que define a seção de Poincaré Quântica. Nesse ponto é importante dizer como foram fixadas as órbitas:

Escolhida a auto-função com sua auto-energia, o primeiro passo foi fixar um certo valor do momento, por exemplo p_1 ; a sua correspondente variável conjugada q_1 foi obtida a partir da hamiltoniana clássica de forma que

$$q_1 = q_1(E_m, p_1, q_2, p_2)$$

feitas essas considerações, a seção ficou determinada assim

$$S_{p_1}(p_2, q_2) = W_{\psi_m}(q_1(E, p_1, q_2, p_2), p_1, q_2, p_2)$$

Pois bem, nos casos de auto-estados com cicatrizes de órbitas periódicas, os resultados mostram trajetórias muito parecidas com as apresentadas no caso em que o sistema é unidimensional, isso é trajetórias radiais (figs. 5.2, 5.3, 5.4, 5.5). Já no caso de auto-estados com estruturas mais aleatórias o espaço de fase é preenchido quase uniformemente numa certa região (figs. 5.7, 5.8, 5.9). Por outro lado, um autoestado apresentando trajetórias misturadas mostrará estruturas ainda bem comportadas no espaço de fase. Mostramos a seguir exemplos desses comportamentos.

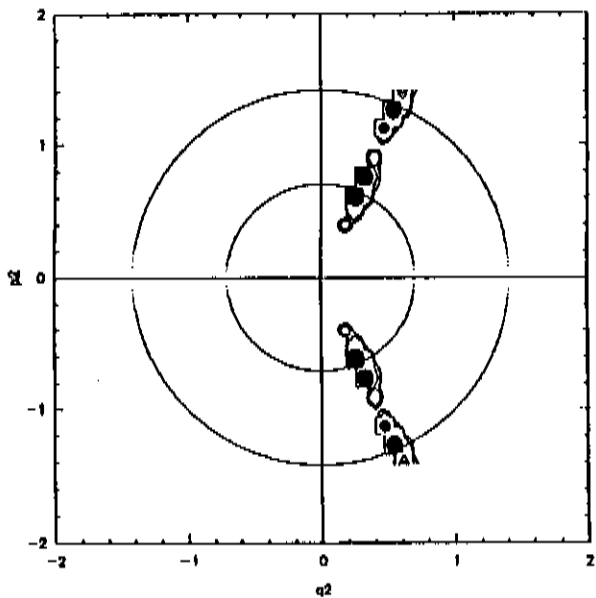


Figura 5.2: Cicatriz Vertical(fig. 2.7). Energia=-1.3609, $p_1 = 0.75$.

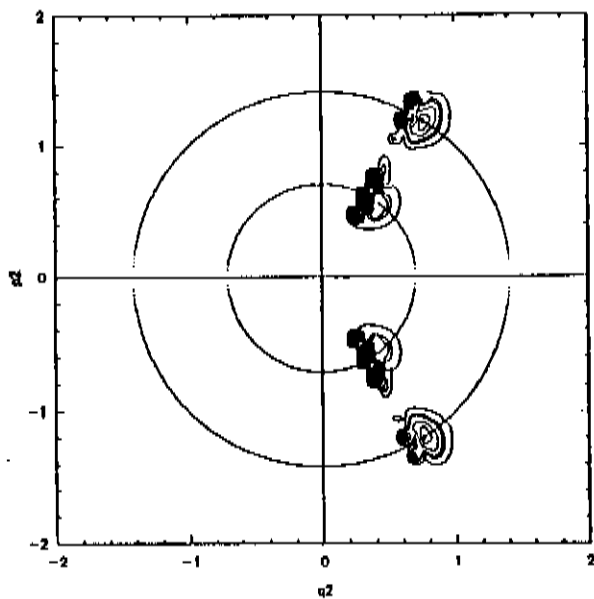


Figura 5.3: Cicatriz Gravata Borboleta(fig. 2.9). Energia=-1.414, $p_1 = 1.35$.

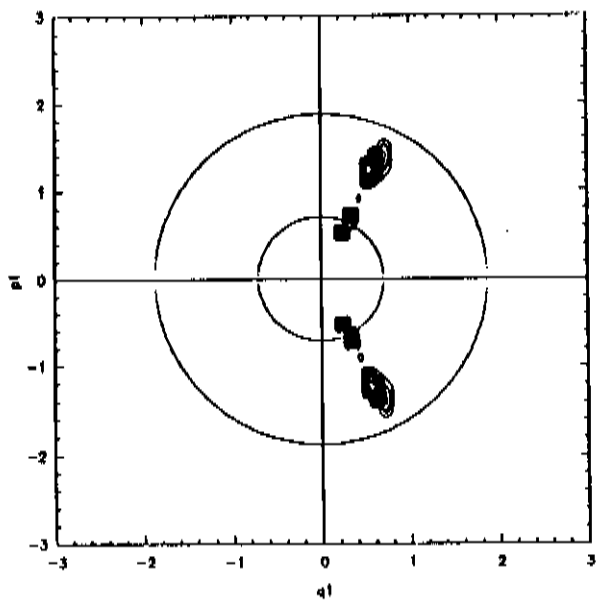


Figura 5.4: Cicatriz Horizontal(fig. 2.6). Energia=-1.3576, $p_2 = 0.50$.

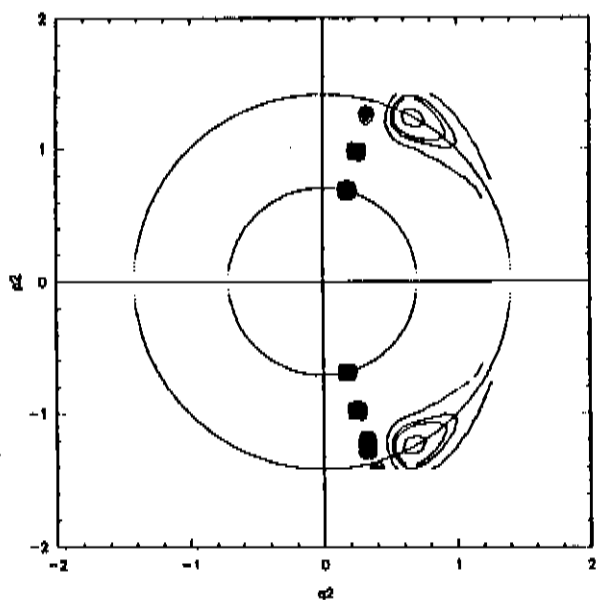


Figura 5.5: Cicatriz Retângulo(fig. 2.11). Energia=-1.2186, $p_1 = 1.5$.

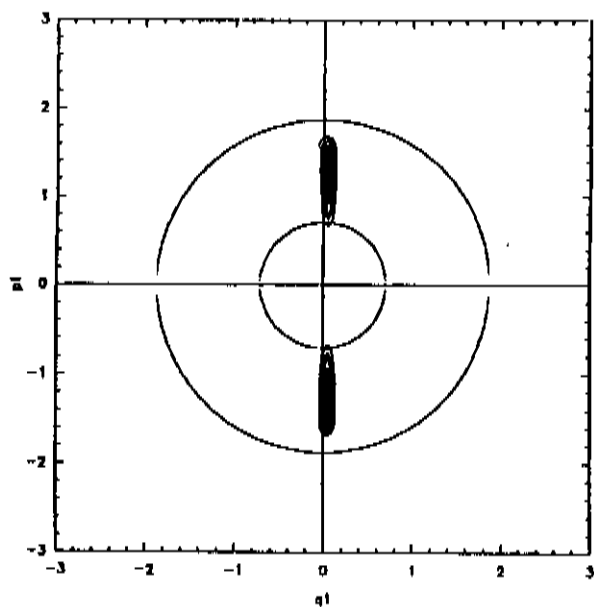


Figura 5.6: Cicatriz misturada(fig.2.13, direita). Energia=-0.9619, $p_2 = 0.75$.

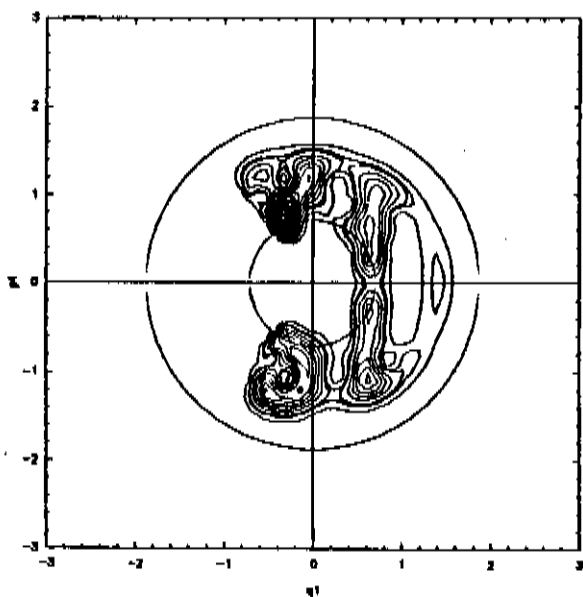


Figura 5.7: Órbita Caótica(fig. 2.14, esquerda). Energia=-0.2026, $p_2 = 0.61$.

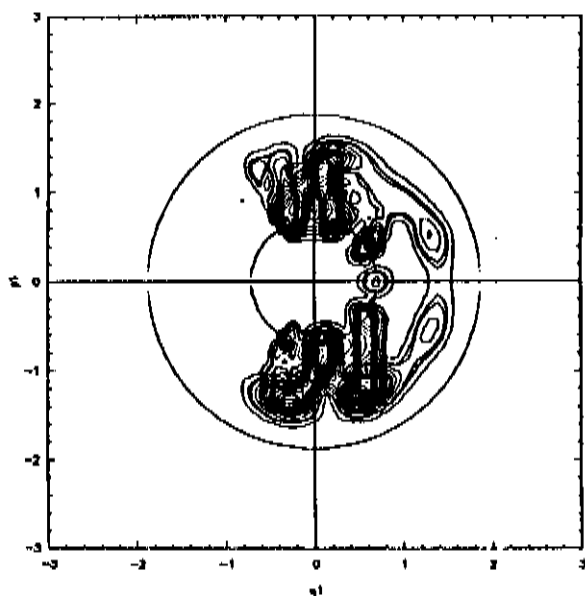


Figura 5.8: Órbita Caótica(fig. 2.14, esquerda). Energia=-0.2026, $p_2 = 0.86$.

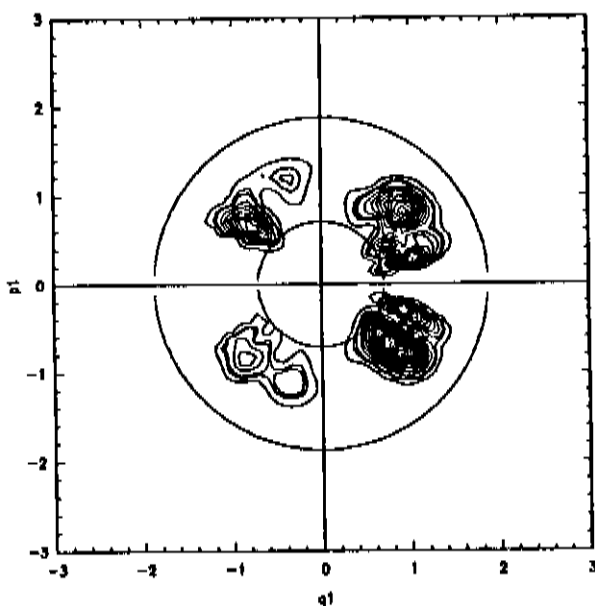


Figura 5.9: Órbita Caótica(fig. 2.14, direita). Energia=-0.0343, $p_2 = 0.612$.

Capítulo 6

Evolução Temporal dos Pacotes de Onda

Na pesquisa semiclássica é muito natural pensar em pacotes de onda localizados para frequentemente dizer que eles são o análogo quântico dos pontos clássicos. Em outras palavras, tais pacotes de onda quando evoluídos temporalmente representam, no limite semiclássico ($\hbar \rightarrow 0$), uma trajetória e sua imediata vizinhança no espaço de fase; fornecendo assim uma visão dinâmica.

Uma representação no espaço de coordenadas projeta a função de onda em um estado cuja posição é perfeitamente definida mas, com momento infinitamente incerto (princípio de incerteza). Esse argumento nos induz a calcular todos os momentos possíveis simultaneamente. Vejamos por exemplo, o propagador atuando sobre certo estado no espaço de posições $|x\rangle$: $|\mathbf{x}(t)\rangle = \exp(-i \hat{H} t/\hbar)|\mathbf{x}\rangle$ que corresponde às partículas que saíram do ponto x no instante $t = 0$ com diferentes momentos p_x . Se no entanto, em vez dessa representação usarmos pacotes de onda Gaussianos $|\gamma\rangle$, onde:

$$p_\gamma = \langle \gamma | P | \gamma \rangle$$

$$x_\gamma = \langle \gamma | X | \gamma \rangle$$

a dinâmica do pacote seria descrita por: $|\gamma(t)\rangle = \exp(-i \hat{H} t/\hbar)|\gamma\rangle$ atingindo as trajetórias que estão justamente na vizinhança do ponto (p_x, x_x) , no limite $\hbar \rightarrow 0$. Este fato importante faz da representação de pacotes de onda Gaussianos uma poderosa e intuitiva ferramenta semiclássica.

6.1 Dinâmica do Pacote de Onda Gaussiano

6.1.1 Sistema de uma Dimensão

Seja H certo Hamiltoniano independente do tempo e $\{ |\psi_l\rangle \}$ e $\{ E_l \}$ os seus conjunto de auto-funções e auto-valores, respectivamente, tal que

$$H|\psi_l\rangle = E_l|\psi_l\rangle \quad (6.1)$$

Seja também $|\zeta\rangle$ um pacote de onda construído sobre esse conjunto de auto-funções $\{ |\psi_l\rangle \}$

$$|\zeta\rangle = \sum_l c_l |\psi_l\rangle \quad (6.2)$$

A evolução temporal do pacote de onda é dada pela aplicação do propagador sobre o vetor $|\zeta\rangle$ de modo que

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \exp(-i \hat{H} t/\hbar) |\zeta\rangle \\ &= \sum_l c_l \exp(-i E_l t/\hbar) |\psi_l\rangle \end{aligned} \quad (6.3)$$

Dado que nosso interesse está apontando ao estudo dos pacotes de onda na representação de estados coerentes, elegemos a função $|\Psi(t)\rangle$ de maneira que no instante inicial ($t = 0$) tenhamos

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_k \frac{\bar{z}_0^k}{\sqrt{\hbar^k k!}} \exp(-\bar{z}_0 z_0/2\hbar) |k\rangle \quad (6.4)$$

sendo $\{|k\rangle\}$ o conjunto de auto-funções na base de número de ocupação do oscilador harmônico.

Fazendo uso das relações (6.2) e (6.4) teremos

$$\sum_l c_l |\psi_l\rangle = \sum_k \frac{\bar{z}_0^k}{\sqrt{\hbar^k k!}} \exp(-\bar{z}_0 z_0/2\hbar) |k\rangle$$

de onde é simples mostrar que

$$c_{l'} = \sum_k \frac{\bar{z}_0^k}{\sqrt{\hbar^k k!}} \exp(-\bar{z}_0 z_0/2\hbar) \langle \psi_{l'} | k \rangle \quad (6.5)$$

Substituindo essa expressão em (6.3), obtemos a expressão para a evolução temporal do pacote de onda gaussiano unidimensional:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_k \frac{\bar{z}_0^k}{\sqrt{h^k k!}} \exp(-\bar{z}_0 z_0/2\hbar) \langle \psi_l | k \rangle \times \exp(-i E_l t/\hbar) |\psi_l\rangle \quad (6.6)$$

Veja-se que temos liberdade de expressar esse pacote de ondas gaussiano em duas diferentes representações (Cap. 5), conforme explicitamos a seguir

Espaço de Ações

Seja $\{|n\rangle\}$ o conjunto de auto-funções do oscilador harmônico então,

$$\langle n | \Psi(t) \rangle = \sum_{l,k,n} \frac{\bar{z}_0^k}{\sqrt{h^k k!}} \exp(-\bar{z}_0 z_0/2\hbar) \langle \psi_l | k \rangle \times \exp(i E_l t/\hbar) \langle n | \psi_l \rangle \quad (6.7)$$

Espaço de Fase

Segundo o Cap.5, uma representação adequada no espaço de fases pode ser feita fazendo uso do vetor de estado coerente normalizado

$$|z\rangle = \sum_m \frac{\bar{z}^m}{\sqrt{h^m m!}} \exp(-\bar{z} z/2\hbar) |m\rangle$$

com o qual a projeção da função $|\Psi(t)\rangle$ sobre o vetor $|z\rangle$ fica,

$$\langle z | \Psi(t) \rangle = \sum_{l,k,m} \frac{\bar{z}_0^k}{\sqrt{h^k k!}} \exp(-\bar{z}_0 z_0/2\hbar) \langle \psi_l | k \rangle \times \exp(i E_l t/\hbar) \frac{\bar{z}^m}{\sqrt{h^m m!}} \exp(-\bar{z} z/2\hbar) \langle m | \psi_l \rangle \quad (6.8)$$

6.1.2 Sistemas em duas dimensões

De maneira similar ao caso unidimensional, dada a Hamiltoniana H , com auto-funções $|\psi_l\rangle$ e auto-valores E_l , a evolução temporal do pacote de ondas será regido pela eq.(6.3):

$$|\zeta(t)\rangle = \sum_l c_l \exp(i E_l t/\hbar) |\psi_l\rangle \quad (6.9)$$

Escolhendo em $t = 0$, um pacote de onda da forma gaussiano em duas dimensões

$$\begin{aligned}
 |\Psi(0)\rangle &= \sum_{k,k'} \frac{\bar{z}_{10}^k}{\sqrt{\hbar^k k!}} \exp(-\bar{z}_{10} z_{10}/2\hbar) \\
 &\times \frac{\bar{z}_{20}^{k'}}{\sqrt{\hbar^{k'} k'!}} \exp(-\bar{z}_{20} z_{20}/2\hbar) |k, k'\rangle
 \end{aligned} \quad (6.10)$$

De maneira similar ao caso unidimensional, temos que

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle &= \sum_{l,k,k'} \frac{\bar{z}_{10}^k \bar{z}_{20}^{k'}}{\sqrt{\hbar^k k! \hbar^{k'} k'!}} \exp(-(\bar{z}_{10} z_{10} + \bar{z}_{20} z_{20})/2\hbar) \\
 &\times \exp(-i E_l t/\hbar) \langle \psi_l | k, k' \rangle |\psi_l\rangle
 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Nesse ponto, nosso interesse está na dinâmica no espaço de ações. Logo escolhemos

$$\begin{aligned}
 \langle s s' | \Psi(t) \rangle &= \sum_{l,k,k'} \frac{\bar{z}_{10}^k \bar{z}_{20}^{k'}}{\sqrt{\hbar^k k! \hbar^{k'} k'!}} \exp(-(\bar{z}_{10} z_{10} + \bar{z}_{20} z_{20})/2\hbar) \\
 &\times \exp(-i E_l t/\hbar) \langle \psi_l | k, k' \rangle \langle s s' | \psi_l \rangle
 \end{aligned} \quad (6.12)$$

onde $|s s'\rangle$ é um vetor no espaço de ações representado na base de número de ocupação do oscilador harmônico.

6.2 Auto-Estados

Desenvolvida a dinâmica dos pacotes de onda, um método para a obtenção de auto-estados pode ser extraída pelo método da transformada de Fourier. Assim, dados os auto-estados $|\psi_n\rangle$, e os auto-valores E_n , do Hamiltoniano $\hat{H}$, a dinâmica para um estado inicial $|\zeta(0)\rangle$, é obtida por

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle &= \exp(-i\hat{H}t/\hbar) |\zeta(0)\rangle \\
 &= \sum_n \exp(-iE_n t/\hbar) |\psi_n\rangle \langle \psi_n | \zeta(0) \rangle
 \end{aligned} \quad (6.13)$$

onde o estado inicial $|\zeta(0)\rangle$ é expresso como uma soma sobre auto-estados $|\psi_n\rangle$.

Tomando a transformada de Fourier de $\langle \zeta(0) | \Psi(t) \rangle$

$$S(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i E t/\hbar) \langle \zeta(0) | \Psi(t) \rangle dt$$

resulta que:

$$-\frac{1}{\pi} \Im S(E) = \sum_n |c_n|^2 \delta(E_n - E) \quad (6.14)$$

onde c_n é a projeção do estado inicial sobre os auto-estados ($\langle \psi_n | \zeta(0) \rangle$).

Veja-se que os auto-valores são obtidos nos picos de $S(E)$, cujo conjunto é chamado de Espectro de Estados de $|\Psi(t)\rangle$ (E.J.Heller [30]). Note-se que esses picos tem um peso proporcional a $|c_n|^2$. Assim, além de uma conexão entre a dinâmica e a sua respectiva complexidade espectral temos informação sobre as regiões que a partícula poderá explorar no espaço de fase.

Em um sistema integrável a complexidade da dinâmica e o espaço de fase explorado dependerão fortemente da condição inicial para $|\Psi\rangle$ e isso será refletido no espectro de estados. Por outro lado, no caso de um sistema caótico, pelo fato de se esperar que a superfície de energia seja preenchida completamente independente das condições iniciais, espera-se que o espectro de estados seja também independente das mesmas.

Destaca-se que, não obstante (6.14) ter sido obtida integrando sobre um intervalo infinito de tempo, na prática a integração é feita num intervalo de tempo finito.

6.3 Resultados

6.3.1 Bilhar circular (1-dim), no espaço de fase

A evolução temporal do pacote de onda unidimensional foi avaliada usando a relação (6.8). Nos desenhos mostramos os resultados para um conjunto de 400 estados, sendo $\hbar=0.001$. Veja-se que em $t=10.15$ (fig. 6.2), que corresponde a uma segunda colisão com a fronteira o pacote inevitavelmente começará a espalhar-se. Nenhum efeito de reformação do pacote foi encontrado, mesmo para tempos longos.

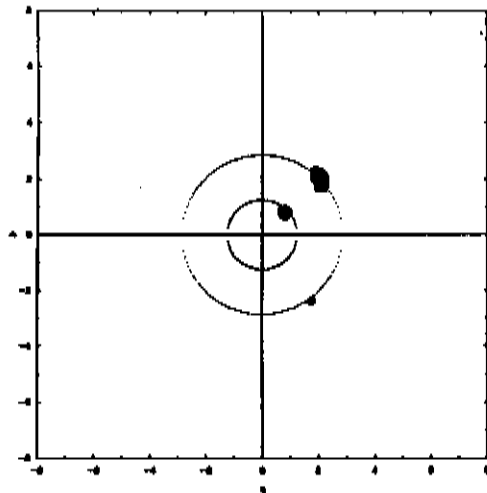


Figura 6.1: Evolução temporal do pacote gaussiano 1-dim, num bilhar circular no espaço de fase. No instante inicial $t=0$ a partícula se encontra no círculo interno, transcorridos $t=5.05$ a partícula bate com o círculo exterior

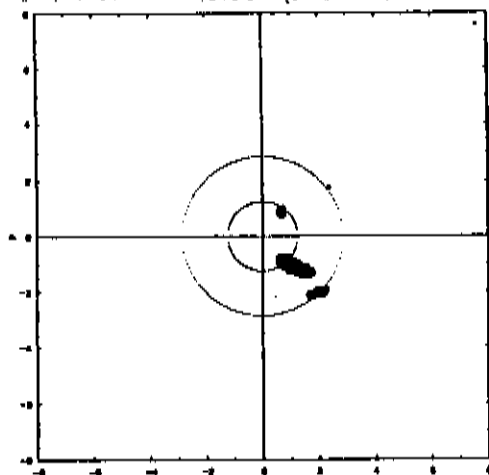


Figura 6.2: Evolução temporal do pacote gaussiano 1-dim, num bilhar circular no espaço de fase. No instante $t=6.0$ a partícula se encontra no círculo externo, transcorridos $t=10.15$ a partícula bate com o círculo interior

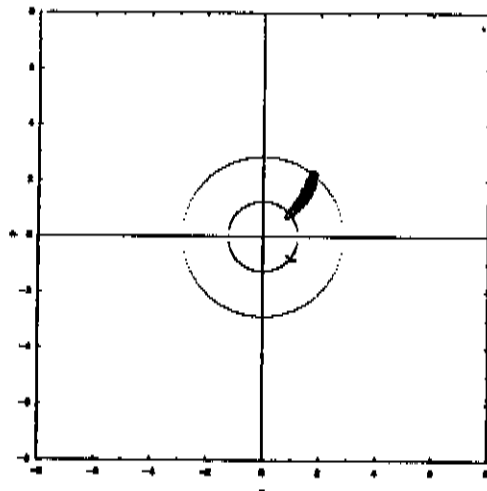


Figura 6.3: Evolução temporal do pacote gaussiano 1-dim, num bilhar circular no espaço de fase, transcorrido o instante $t=25.0$. Veja-se o pacote espalhado totalmente

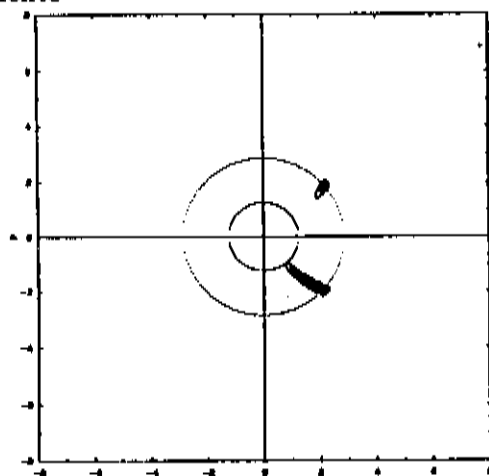


Figura 6.4: Evolução temporal do pacote gaussiano 1-dim, num bilhar circular no espaço de fase, transcorrido o instante $t=30.0$. Veja-se o pacote espalhado totalmente

6.3.2 Bilhar do tipo Estádio (2-dim)

Em duas dimensões a dinâmica do pacote para o caso do estádio encontra certas limitações. De acordo com a expressão (6.12) a largura do pacote é proporcional a $\hbar$; os resultados mostraram que é necessário abaixar mais o valor de $\hbar$, e portanto incluir, mais estados, já que o limite semiclássico não foi bem atingido.

Nas figuras, mostramos a evolução temporal quântica do pacote gaussiano bidimensional para o bilhar dessimetrizado no espaço de ações ao longo de uma trajetória quase vertical. Veja-se que para o tempo igual a 3.15 o espalhamento é inevitável.

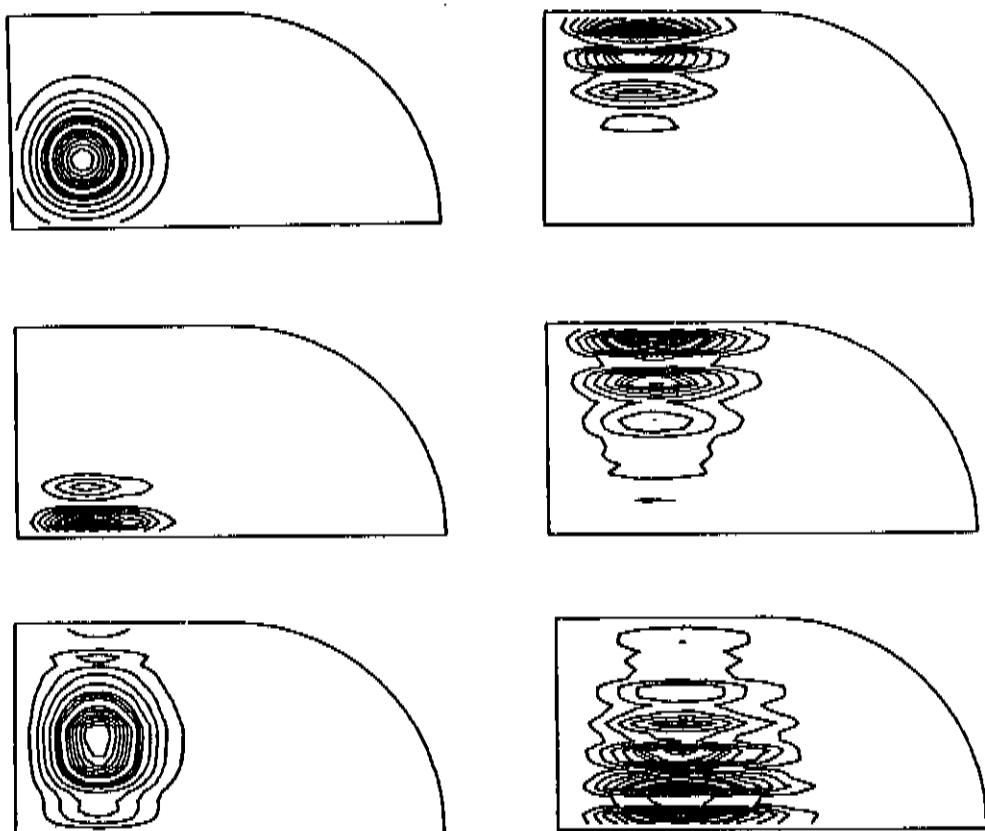


Figura 6.5: Evolução temporal do pacote gaussiano para uma trajetória quase vertical no estádio dessimetrizado. Na coluna esquerda de acima para abaixo a partícula nos instantes 0.0, 0.45, 0.9. A direita os mesmos desenhos, dessa vez nos instantes 1.35, 1.8, 2.25

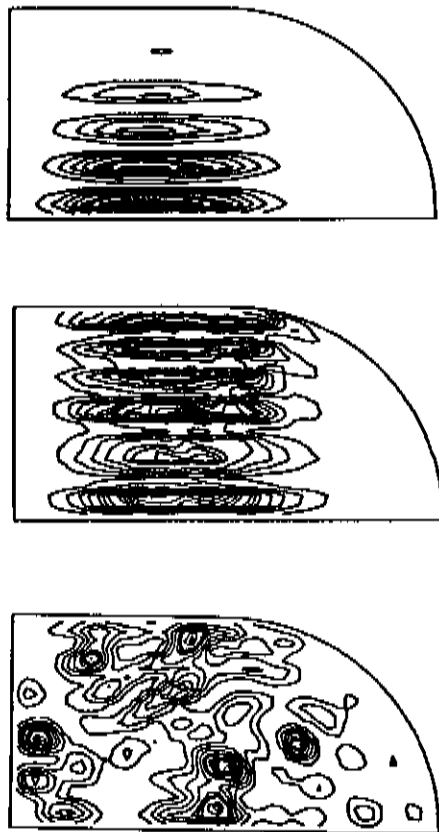


Figura 6.6: Evolução temporal do pacote gaussiano para uma trajetória quase vertical no estádio dessimetrizado. Na coluna de acima para abaixo a partícula nos instantes 2.7, 3.15, 9.0. Nelas já se aprecia o espalhamento do pacote

Com relação ao processo de reformação do pacote espera-se que tenha efeito na vizinhança dos estados com energia $\approx \pm 1.0$, isso devido ao fato que nessa vizinhança a densidade de estados é bem comportada.

6.3.3 espectro de estados

A expressão (6.14) tem a vantagem de nos permitir localizar cicatrizes. Veja-se que a evolução do pacote dependerá só das condições inicialmente impostas. As trajetórias mais simples de estudar são a trajetória horizontal e a trajetória vertical (bouncing ball). Para que elas sejam estabelecidas bastará fazer uma das variáveis angulares nula ($j_i = -t \times \sin \phi_i$) com o que se assegura que o pacote viajará só numa direção, vertical ou horizontal, segundo seja escolhido $\phi_2 = 0$ ou $\phi_1 = 0$ respectivamente.

Antes de mostrar os resultados, devemos dizer como foram escolhidas as condições iniciais:

Trajectoria Vertical

$$j_1 = 0.75$$

$$j_2 = 0.45$$

$$\phi_2 = 15^\circ$$

Trajectoria Horizontal

$$j_1 = 0.75$$

$$j_2 = 0.45$$

$$\phi_1 = 30^\circ$$

As figuras 6.7 e 6.8, mostram desenhos das intensidades $\langle \psi_n | \zeta(0) \rangle$ como função das auto-funções ψ_n . Note-se neles os picos em torno da auto-função 235. Pois bem, cicatrizes apresentando ambas estruturas são encontradas para as auto-funções 233 e 234. No caso da cicatriz vertical, a fig. 6.7 mostra possíveis cicatrizes em torno dos estados no intervalo $[270 - 280]$. Nesse caso uma cicatriz vertical é encontrada para a auto-função 274. Já no caso da cicatriz horizontal um pico pode ser encontrada na vizinhança da auto-função 260 (fig. 6.8) e, de fato, os resultados mostram uma cicatriz para a auto-função 258. Por tanto, o método resulta ser um bom caminho para a previsão aproximada de cicatrizes. É claro que, dependendo das condições impostas, o número de picos pode preencher quase todo o espectro de autofunções. Esses casos foram descartados, pois nessas condições a particular escolha do estado inicial não resulta ser seletiva. Apresentamos em seguida os resultados obtidos.

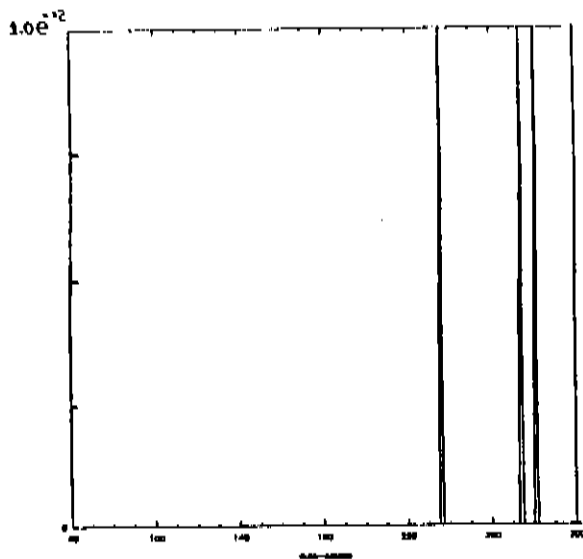


Figura 6.7: Cicatriz Vertical. Desenho $\langle \psi_n | \zeta(0) \rangle \times |\psi_n \rangle$

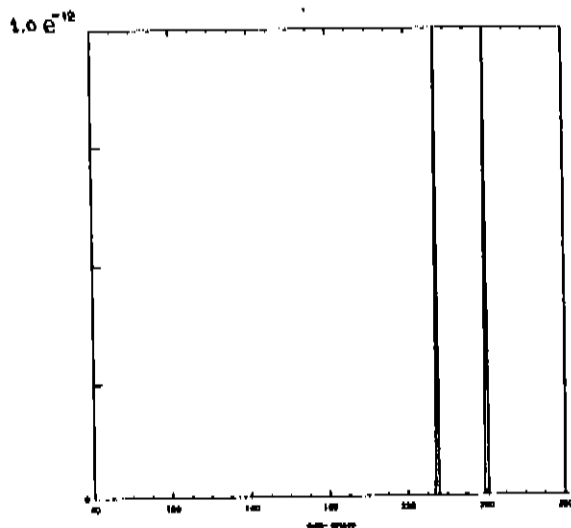


Figura 6.8: Cicatriz Horizontal. Desenho $\langle \psi_n | \zeta(0) \rangle \times |\psi_n \rangle$

Conclusões

Como vimos ao longo desta tese, existem varias diferenças entre o nosso bilhar de ação e um bilhar comum (no espaço de configurações). Em primeiro lugar a peculiar hamiltoniana escolhida definindo a dinâmica clássica do sistema, depois a técnica de quantização. Além disso, já nos referindo ao estádio (no espaço de ações), o comportamento incomum da sua densidade média de estados diferente da densidade média constante como é no caso do estádio comum. Apesar desses fatos, mostramos que estes bilhares apresentam comportamentos similares com respeito às flutuações do espectro de energia e as suas funções de onda.

Nos trabalhos pioneiros nesses tipos de sistemas, Ozório de Almeida e Marcus de Aguiar[8], mostraram que as flutuações locais do espectro de energia seguem um padrão universal de matrizes aleatórias e que as oscilações da densidade de estados em torno da sua média estão associadas às órbitas periódicas, o que sugeriu o aparecimento das cicatrizes dessas órbitas.

Em particular num bilhar de ação do tipo estádio as flutuações do espectro de energia seguem o padrão das matrizes do tipo G.O.E, como foi corroborado.

Nosso principal resultado foi a verificação de mais uma importante propriedade desses sistemas em relação aos bilhares comuns. Conseguimos prever o surgimento de cicatrizes de órbitas periódicas fazendo médias sobre um conjunto de estados com energias num dado intervalo de energia, verificando a validade da teoria proposta por Bogomolny. A relação direta entre o dado intervalo de energia e o período da órbita periódica foi feita, tomando a transformada de fourier da densidade suavizada de estados. Isso mostrou a perfeita correlação das predições. Aqui vale a pena mencionar o aparecimento quantizado das cicatrizes das órbitas verticais e horizontais, fato que tem justificativa pela própria teoria.

Além disso, reportamos o aparecimento aleatório de cicatrizes de órbitas periódicas das auto-funções no bilhar de ação, e verificamos o princípio de correspondência entre as mecânicas, quântica e clássica pela distribuição de Husimi dessas auto-funções.

No entanto nosso estudo da dinâmica no estádio não foi tão completo, um estudo futuro é factível. O problema do tempo de validade do propagador semiclássico está em aberto e é a principal motivação. Nesse estudo, sugerimos a inclusão no bilhar de ainda mais estados quânticos.

Conclusivamente, os resultados acima, qualificam a Teoria dos Bilhares de Ação como um bom modelo para estudar o Caos Quântico.

Apêndice

Calculamos os quase números quânticos para as órbitas verticais ou horizontais usando a relação de Bohr-Sommerfeld dada no cap.2, eq.(2.18). Tomando para isso os autovalores menores que zero. Como já foi discutido, nesse caso um dos ϕ_i tem que ser nulo. Logo, para o k -ésimo estado seu número quântico é calculado da seguinte maneira

$$N_{ver} = \frac{2}{\pi\hbar} \times \phi_2$$

$$N_{hor} = 2 \times \frac{2}{\pi\hbar} \times \phi_1$$

onde $ek = E(K) + 1$, sendo que consideramos:

$$ek < 0 \quad \phi = \arccos(-ek)$$

$$ek > 0 \quad \phi = \pi - \arccos(-ek)$$

Na tabela mostra os resultados obtidos:

	T=1.5	T=3.0
Estado	Número	Número
74	7.87026642	15.74053283
75	7.90533805	15.81067611
76	7.95467537	15.90935074
77	7.99675665	15.99351331
78	8.02625016	16.05250032
79	8.10536372	16.21072743
80	8.11236007	16.22472014
81	8.14032201	16.28064403
82	8.16640629	16.33281258
83	8.29463774	16.58927549
84	8.30413554	16.60827107
85	8.33811619	16.67623237
86	8.38443783	16.76887565
87	8.40886830	16.81773660
88	8.49701863	16.99403726
89	8.53222644	17.06445288
90	8.55296097	17.10592194
91	8.60682776	17.21365553
92	8.70500544	17.41001088
93	8.72708012	17.45416025
94	8.78270713	17.56541426
95	8.82036666	17.64073332
96	8.88197728	17.76395456
97	8.91296431	17.82592862
98	8.96389635	17.92779270
99	8.97116183	17.94232367
100	8.99059711	17.98119423
101	9.07054695	18.14109391
102	9.11003601	18.22007202
103	9.11645970	18.23291940

	T=1.5	T=3.0
Estado	Número	Número
104	9.19566114	18.39132228
105	9.23855055	18.47710111
106	9.25030629	18.50061259
107	9.30070416	18.60140833
108	9.32298685	18.64597371
109	9.35164877	18.70329754
110	9.41802322	18.83604644
111	9.48818388	18.97636775
112	9.51972581	19.03945161
113	9.55879820	19.11759640
114	9.63099666	19.26199332
115	9.66006081	19.32012163
116	9.67995786	19.35991572
117	9.71989236	19.43978472
118	9.74194677	19.48389354
119	9.83312954	19.66625909
120	9.85533682	19.71067363
121	9.91322335	19.82644670
122	9.92997833	19.85995666
123	9.96024793	19.92049586
124	10.02688208	20.05376416
125	10.05990526	20.11981052
126	10.07460584	20.14921167
127	10.10175124	20.20350248
128	10.13355939	20.26711877
129	10.16880335	20.33760671
130	10.20200699	20.40401398
131	10.26425598	20.52851196
132	10.27447658	20.54895317
133	10.32280058	20.64560115

	T=1.5	T=3.0
Estado	Número	Número
134	10.37691138	20.75382276
135	10.43250038	20.86500077
136	10.46568754	20.93137508
137	10.49876991	20.99753983
138	10.52937270	21.05874540
139	10.55584874	21.11169747
140	10.61860178	21.23720356
141	10.63658457	21.27316915
142	10.71110840	21.42221681
143	10.71849171	21.43698342
144	10.78920254	21.57840507
145	10.81126797	21.62253594
146	10.86774919	21.73549838
147	10.87830048	21.75660095
148	10.91474877	21.82949755
149	10.95329820	21.90659640
150	10.98613697	21.97227393
151	11.00365047	22.00730093
152	11.03149049	22.06298097
153	11.07551524	22.15103047
154	11.10979142	22.21958284
155	11.15943246	22.31886491
156	11.18301714	22.36603428
157	11.21405678	22.42811357
158	11.22975460	22.45950919
159	11.27330119	22.54660238
160	11.32896048	22.65792097
161	11.37794152	22.75588304
162	11.40852146	22.81704291
163	11.42706644	22.85413287
164	11.47046685	22.94093370
165	11.53088855	23.06177709
166	11.56987173	23.13974347
167	11.59685333	23.19370665
168	11.62164136	23.24328271
169	11.64635833	23.29271666
170	11.67972834	23.35945667
171	11.71116099	23.42232199
172	11.65793679	23.31587359
173	11.62015191	23.24030382

Referências

- [1] Gutzwiller, M.C.
J. Math. Phys. 12 (1971) 343.
- [2] Hillery M. O'Connell R. F. F.W. Wly M. O. and Wigner E.P.
Phy. Rep. 106 N_o3 (1984) 121-167.
- [3] Husimi. K.
Proc. Phys. Math. Soc. Japan 22 (1940) 264.
- [4] P. Leboeuf and M. Saraceno.
J. Phys. A Math. Gen. 23 (1990) 1745-1764.
- [5] Steven W Mc Donald and Alan N Kaufman
Phys. Rev. Lett. 18 (1979) 1189-1191.
- [6] E.J. Heller.
Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 1515-1518.
- [7] M.A.M. de Aguiar e A.M. Ozorio de Almeida.
Nonlinearity 5 (1992) 523-539.
- [8] A.M. Ozorio de Almeida e M.A.M. de Aguiar.
Chaos, Solitons and Fractals, vol.2 N_o4 (1992) 377-392.
- [9] M.V. Berry.
Eur. J. Phys. 2 (1981) 91-102
- [10] Arnold V.I.
1978 Mathematical Methods of Classical Mechanics. NY.
- [11] Sprinborg M.
J. phys. A Math. Gen. 16 (1983) 535-542.
- [12] Messiah A.
1980 Quantum Mechanics (North Holland).
- [13] M.V. Berry and M. Tabor.
Proc. Roy. Soc. Lond. A 349 (1977) 101.
- [14] E.J. Heller.
Lecture Notes in Physics 263 (1986) 162.
- [15] Alfredo Ozorio de Almeida.

- Rev. Bras. Fis. vol.14 (1984) 62.
- [16] Alfredo M. Ozorio de Almeida.
1991 Sistemas Hamiltonianos: Caos e Quantização.
Editora Unicamp-SP.Brasil.
- [17] R. Balian.
Nuov. Cim. 57 (1968) 183.
- [18] C.E.Porter.
1985 Statistical Theories of Spectral Fluctuations
Academic Press, NY.
- [19] E.P. Wigner.
1957 Can. Math. Congr. Proc. 174.
- [20] O. Bohigas e M.J. Giannoni
1984 Mathematical and Computational Methods in Nuclear Physics
Lecture Notes in Physics (Springer, Berlin) 201.
- [21] M.V. Berry and M.E. Mount.
Rep. Progr. Phys. 35 (1972) 315-397.
- [22] M.V. Berry and M. Tabor.
J. Phys. A 10 (1977) 371.
- [23] E.B.Bogomolny.
J.E.T.P Lett. vol.44 N^o9 (1986) 561-565.
- [24] E.B.Bogomolny.
Physica 31D (1988) 169-186.
- [25] Berry M. V.
1983 Chaotic Behaviour of Deterministic Systems.
(Amsterdam North Holland) 171.
- [26] Balazs N. L. and Jennings B. K.
Phys. Rep. 104 (1984) 347
- [27] Lichtenberg A. T. and Lieberman M. A.
1984 Regular and Stochastic Motion (N.Y. Springer).
- [28] Hutchinson J. S. and Wyatt R.E.
Chem. Phy. Lett. 72 (1980) 278.
- [29] Weissman Y. and Jortner J.
Phy. Lett. A 83 (1981) 55.
- [30] E. J. Heller
1989 Chaos and Quantum Mechanics- Les Houches.