Universidade Estadual de Campinas Instituto de Física Gleb Wataghin

# Propriedades Físicas de Operações Gaussianas sobre Estados Gaussianos Emaranhados

Luis Fernando Haruna

Dissertação apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcos Cesar de Oliveira (Orientador)

Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco

Prof. Dr. Viktor Dodonov

Campinas - SP 2007

#### FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

the second se		
H26p	Haruna, Luis Fernando Propriedades físicas de operações Gaussianas sobre Estados Gaussianos emaranhados / Luis Fernando Haruna Campinas, SP: [s.n.], 2007.	
	Orientador: Marcos Cesar de Oliveira. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".	
1 2 3 4 5	<ol> <li>Informação quantica.</li> <li>Emaranhamento quantico.</li> <li>Mecanica quantica.</li> <li>Oliveira, Marcos Cesar de.</li> <li>Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb.</li> <li>Wataghin".</li> <li>III. Título.</li> </ol>	
5	6	

- **Título em inglês:** Physical properties of gaussian operations over entangled gaussian states

- Palavras-chave em inglês (Keywords):
  - 1. Quantum information
  - 2. Quantum entanglement
  - 3. Quantum mechanics
- Área de concentração: Física
- Titulação: Mestre em Física
- Banca examinadora: Prof. Marcos Cesar de Oliveira Prof. Antonio Vidiella Barranco Prof. Viktor Dodonov
- Data da defesa: 16.03.2007
- Programa de Pós-Graduação em: Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **LUIS FERNANDO** HARUNA – RA 011160 APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 16 / 03 / 2007.

COMISSÃO JULGADORA:

- -

Prof. Dr. Marcos César de Oliveira (Orientador do Candidato) - DFMC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Viktor Dodonov – IF/UnB

Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco - DEQ/IFGW/UNICAMP

... amar a vida não era o mesmo que satisfazer a fome sem nada fazer, ou viver longamente sem nenhum objetivo. Significava, isto sim, esforçar-se para dar sentido a essa inestimável vida no momento em que se via obrigado a dela se despedir, dar-lhe o devido valor, riscar no céu da humanidade, até o último suspiro, o luminoso traço de uma vida plena de significado.

Musashi, de Eiji Yoshikawa

# Agradecimentos

Primeiramente, como não poderia ser de outra maneira, gostaria de agradecer e dedicar esta dissertação aos meus pais que me criaram com muito carinho durante todos estes anos: minha mãe Julia Haruna, por todo o apoio, confiança e conversas durante estes dois anos de mestrado, e meu pai Luiz Haruna, que apesar de já ter partido e não estar presente fisicamente, me deixou ensinamentos que sempre me ajudaram nos momentos de maior dificuldade durante estes quatro anos e meio de ausência. Meus *brothers* Celso, Cesar, Sandra e Rosana pelo apoio que me deram em todas as minhas decisões e os momentos "família" que vivenciamos quase todos os finais de semana e feriados. Agradeço também aos meus cunhados Ana, Oscar e Rogério, e claro, ao novo membro da família Haruna, meu sobrinho Rodrigo que trouxe uma nova luz para a nossa família. Um agradecimento especial a minha avó Suzue Shimura que partiu no ano passado, um exemplo de vida.

Ao meu orientador Marcos César de Oliveira, pessoa que aprendi a admirar não apenas como profissional mas também pela grande pessoa que ele mostrou ser, sempre mostrando muita confiança em mim, me ensinando física, além das conversas que tivemos em que pudemos compartilhar experiências que me auxiliaram de uma forma significativa nas minhas decisões ao longo deste projeto. Professores da Unicamp que me propiciaram minha formação, em especial ao prof. Marcus Aloísio Martinez de Aguiar, que ministrou toda a parte de Mecânica Quântica na minha graduação e foi o paraninfo dos formandos em Física em 2004. Ao pós-doutorando Gustavo Garcia Rigolin que me ajudou muito neste projeto.

Aos meus amigos de Mairiporã, São Paulo e Campinas pelas horas de diversão que tivemos em todos estes anos. Pessoal do Liceu, que encontrava nos finais de semana em Sampa e da Unicamp, que sempre estavam presentes nos dias de aula, estudo, festas e "esquentas".

Por fim, agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) por ter financiado, durante estes dois anos, meus estudos.

## Resumo

Estudamos estados Gaussianos quânticos e as propriedades físicas associadas a operações sobre tal classe de estados que preservam a sua natureza Gaussiana. Propriedades gerais de matrizes de covariância globais representando estados Gaussianos bipartidos de dois modos podem ser decompostas em propriedades de matrizes de covariância locais e seus complementos de Schur. Demonstramos que dado um estado Gaussiano de dois modos  $\rho_{12}$  descrito por uma matriz de covariância V 4 × 4, o complemento de Schur de uma submatriz de covariância local  $\mathbf{V}_2$  2 × 2 pode ser interpretado como uma nova matriz de covariância representando um operador Gaussiano do modo 1 condicionado a medições de paridade no modo 2. Como o valor médio da paridade está relacionado com a determinação da função de Wigner de um estado na origem do espaço de fase, que pode ser obtido facilmente através de experimentos de fotocontagem, este resultado nos permite estudar propriedades desta função em termos das probabilidades de medições pares e ímpares no modo local. Também generalizamos este procedimento para um estado Gaussiano de n modos e demonstramos que o operador dos n-1 sistemas condicionado a projeções parciais de paridade está relacionado com uma matriz de covariância tal que seus elementos bloco  $2 \times 2$  são complementos de Schur de matrizes especiais locais.

A determinação da relação entre uma estrutura matemática (o complemento de Schur) com um processo físico permitiram a construção de um protocolo para a identificação de propriedades de emaranhamento de um estado Gaussiano de dois modos via apenas medições/operações locais e um canal de comunicação clássica entre as duas partes. Este protocolo se baseia na obtenção dos quatro invariantes simpléticos locais do grupo Sp(2, R) que determinam as propriedades de emaranhamento e de pureza do sistema Gaussiano de dois modos. Além disso, para uma classe de estados Gaussianos simétricos, que inclui por exemplo o estado comprimido com ruído térmico e o estado EPR, este protocolo também é útil para a reconstrução de sua matriz de covariância.

## Abstract

We study quantum Gaussian states and the physical properties associated to operations over such class of states, which preserve the respective Gaussian nature. General properties of global covariance matrices representing two-mode bipartite Gaussian states can be decomposed into properties of local covariance matrices and their Schur complements. We demonstrate that given a two-mode Gaussian state  $\rho_{12}$  described by a 4 × 4 covariance matrix **V**, the Schur complement of a 2 × 2 local covariance submatrix **V**<sub>2</sub> of it can be interpreted as a new covariance matrix representing a Gaussian operator of party 1 conditioned to local parity measurements on party 2. As the parity mean value is related to the determination of the Wigner function of a state at the origin of the phase-space, which can be achieved straightforwardly by photocounting experiments, this result allow us to study properties of this function in terms of the odd and even measurements probabilities of the local mode. We also generalize this procedure to a *n* partite Gaussian state and we demonstrate that a n - 1 system operator conditioned to a partial projection is given by a covariance matrix such as its 2 × 2 block elements are Schur complements of special local matrices.

The determination of the relation between a mathematical structure (the Schur complement) with a physical process allowed us to construct a protocol to identify the two-mode Gaussian state entanglement properties via only local measurements/operations and a classical communication channel between the two parties. This protocol is established from the achievement of the four local sympletic invariants of the Sp(2, R) group, which determines the entanglement and purity properties of a two-mode Gaussian state. Moreover, for the symmetric Gaussian states class, which include for example the squeezed thermal state and the EPR state, this protocol is also uselfull for the covariance matrix reconstruction.

# Notação e Convenção

A partir do Capítulo 4, as demonstrações e os resultados serão apresentados por uma notação vetorial que será explicada a seguir:

Letras minúsculas em negrito correspondem a vetores:

$$\mathbf{z}^{\dagger} = (z_1^*, z_1, z_2^*, z_2) \ , \ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1^* \\ z_2 \\ z_2^* \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{a}^{\dagger} = (a_1^{\dagger}, a_1, a_2^{\dagger}, a_2) \ , \ \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1^{\dagger} \\ a_2 \\ a_2^{\dagger} \end{pmatrix} ,$$

onde  $z_i$  e  $z_i^*$  são os autovalores dos operadores de bósons  $a_i$  e  $a_i^{\dagger}$  que descrevem o modo *i* de um estado bipartido.

Outros vetores:  $\mathbf{d}_i \in \mathbf{s}_i$ , ambos com elementos correspondentes aos autovalores dos operadores de bósons.

Letras maiúsculas em negrito correspondem a matrizes:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^{\dagger} & \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 + \frac{1}{2} & m_1 & m_s & m_c \\ m_1^* & n_1 + \frac{1}{2} & m_c^* & m_s^* \\ m_s^* & m_c & n_2 + \frac{1}{2} & m_2 \\ m_c^* & m_s & m_2^* & n_2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

 $\mathbf{V}$  é uma matriz 4 × 4 formadas pelas submatrizes 2 × 2  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_2$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbf{C}^{\dagger}$ . Outras matrizes usadas são:

$$\mathbf{T} = \left(\begin{array}{cc} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X} \end{array}\right), \ \mathbf{X} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right),$$

que corresponde a matriz de transposição parcial, <br/>e ${\bf X}$ a matriz de transposição local. Temos também

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \ \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Uma observação importante em relação à matriz  $\mathbf{E}$  é a de que na primeira seção do capítulo 4, onde lidamos apenas com estados Gaussianos de um modo, ela corresponde

a uma matriz  $2 \times 2$  dada por  $\mathbf{E} = diag[1, -1] = \mathbf{Z}$ . A partir da seção 4.2, na generalização para um estado Gaussiano de dois modos,  $\mathbf{E}$  corresponde à matriz  $4 \times 4$  dada acima. Esta escolha foi feita para que a notação das desigualdades obtidas não se alterem ao efetuar a generalização para o caso de estados bipartidos.

As matrizes  $\mathbf{W} \in \mathbf{P}$  correspondem, respectivamente, às matrizes que determinam a função de Wigner e a P-representabilidade de um estado Gaussiano.

Outras matrizes: U (transformação unitária geral sobre a matriz de covariância), Q (matriz representando a representação Gaussiana do operdor densidade) e  $\Gamma_i$  (matriz de um estado condicionado a uma operação física).

Assim, nesta notação, temos, por exemplo:

$$D(\mathbf{z}) = e^{-\mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{E} \mathbf{a}} = e^{-\mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{1}} e^{-\mathbf{z}_{2}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{2}} = e^{z_{1}a_{1}^{\dagger} - z_{1}^{*}a_{1}} e^{z_{2}a_{2}^{\dagger} - z_{2}^{*}a_{2}}$$

operador de deslocamento local nos modos 1 e 2 de um estado bipartido, e nas integrais encontramos

$$d\mathbf{z}_{i} = \frac{1}{\pi}d^{2}z_{i} = \frac{1}{\pi}d(Re\ z_{i})d(Im\ z_{i}) = \frac{dq_{i}dp_{i}}{2\pi}.$$

# Conteúdo

1	Ope	erações	s Gaussianas e a Teoria de Informação Quântica.	1	
	1.1	A Físi	ca da Informação	1	
	1.2	A Teo	ria de Informação Quântica	3	
	1.3	Opera	ções Gaussianas e o Canal Quântico	5	
	1.4	A Est	rutura da Dissertação	8	
<b>2</b>	Cor	nceitos	Fundamentais	9	
	2.1	O Ope	erador Densidade	9	
	2.2	Estad	os da Radiação	13	
		2.2.1	Estados de Fock	13	
		2.2.2	Estados Coerentes	14	
		2.2.3	Estados Comprimidos	17	
	2.3	Funçõ	es Características	18	
	2.4	4 Funções de Quase-probabilidade			
		2.4.1	Função P de Glauber	20	
		2.4.2	Função de Wigner	22	
		2.4.3	Função Q de Husimi $\ldots \ldots \ldots$	24	
	2.5	Emara	anhamento e Separabilidade	24	
3	Estados Gaussianos				
	3.1	Estad	os Gaussianos de um Oscilador Harmônico Unidimensional	27	
		3.1.1	Parametrizações	27	
		3.1.2	Critério de Positividade	33	
		3.1.3	P-representabilidade de Operadores Gaussianos Positivos	36	
	3.2	Estade	os Gaussianos de um Oscilador Harmônico Bidimensional	40	

		3.2.1	Parametrizações	40	
	3.3	Decon	nposição de Positividade em Termos do Complemento de Schur $~$ .	41	
		3.3.1	Critério de Separabilidade para Estados Gaussianos	43	
	3.4	Exem	plos	45	
		3.4.1	Operador de Paridade	45	
		3.4.2	Estado Puro	46	
		3.4.3	Estado Comprimido com Ruído Térmico	47	
		3.4.4	Divisor de feixes ( <i>Beam splitter</i> )	50	
4	Operações Gaussianas				
	4.1	Forma	s Gerais de Operações Gaussianas	53	
	4.2	Propri	iedades Físicas do Complemento de Schur de Matrizes de Co-		
		variân	cia Locais	63	
		4.2.1	Medição de Paridade Local Sobre um Estado Gaussiano Bipar-		
			tido de Dois Modos	63	
		4.2.2	Medição de Paridade em Estado Gaussiano de $n$ Modos. $\ . \ . \ .$	68	
<b>5</b>	Ema	aranha	mento em Estados Gaussianos de Dois Modos	71	
	5.1	Os Inv	variantes Locais Simpléticos	72	
	5.2	Propri	edades Globais de um Estado Gaussiano de Dois Modos $\ .\ .\ .$	74	
	5.3	Protoc	colo para Determinação dos Invariantes	76	
	5.4	O Est	udo de um Caso Particular: Estados Gaussianos Simétricos	79	
6	Con	nclusõe	s	86	
$\mathbf{A}$	Mee	dições	Quânticas em Sistemas de Variáveis Contínuas.	88	
	A.1	Obser	váveis e POVM	89	
	A.2	Teoria	de Detecção Homódina	91	
		A.2.1	Detecção Homódina não Balanceada	92	
		A.2.2	Detecção Homódina Balanceada	93	
		A.2.3	Fotodetecção	94	
	A.3	Tomog	grafia homódina quântica	96	

В	Prova Alternativa do Teorema 1	100				
$\mathbf{C}$	Operação de Paridade 103					
	C.1 Estado de um Modo $\ldots$	103				
	C.2 Estado de Dois Modos	106				
D	Transformações Simpléticas Locais $Sp(2, R)$	108				

# Capítulo 1

# Operações Gaussianas e a Teoria de Informação Quântica.

A proposta deste primeiro capítulo é relacionar o estudo e a importância de estados e operações Gaussianos no âmbito da Teoria de Informação Quântica, com o intuito de ambientar o leitor ao escopo desta dissertação. Na seção 1.1 discutiremos a relação entre a informação e a Física e a importância ao estudo de processos de informação. Na seção 1.2 encontra-se um texto a fim de fornecer uma idéia geral das bases conceituais da teoria de informação quântica. Devo frisar que os conceitos descritos nestas primeiras seções estão diretamente ligados à minha visão e perspectiva deste campo de estudo, que adquiri através de leituras e discussões no período de estudo. Na seção 1.3 há uma discussão sobre a importância no estudo de estados Gaussianos, a relação entre operações Gaussianas com canais quânticos de comunicação e como esta classe de estados e operações foram exploradas nesta dissertação. Por fim, na seção 1.4, discuto a estrutura da dissertação, descrevendo sucintamente os principais pontos dos capítulos e dos resultados que serão apresentados.

## 1.1 A Física da Informação

A informação é física.

(Rolf Landauer)

A frase do físico alemão Rolf Landauer, encontrada em diversas discussões e artigos sobre estudos de informação [1], sintetiza uma relação entre a informação e a Física. Esta relação provém do fato de que a informação pode ser codificada e armazenada em um sistema físico, como, por exemplo, no nosso cérebro, em um computador ou em uma folha de papel. A capacidade de um ser humano de se desenvolver a fim de torná-lo um "animal inteligente", ou melhor dizendo, um animal diferenciado em relação aos outros seres vivos, está provavelmente relacionado não apenas com a sua interação com o meio geográfico em que vive mas, principalmente, devido a sua grande capacidade de transmitir informação para outros seres humanos. Neste caso, não só o armazenamento da informação no nosso cérebro é importante, mas também a nossa capacidade de transmití-la a outros seres. Provavelmente, o desenvolvimento da fala veio da necessidade de se comunicar e transmitir informações através de meios mais eficazes, e a escrita de codificar, armazenar e também transmitir tais informações. Com o decorrer do tempo o ser humano foi se aperfeiçoando e novos meios de transmissão e armazenamento de informações foram desenvolvidos, como a carta, o telefone e a internet. Note que todos os processos que envolvem informação citados acima utilizam meios físicos para serem concretizados. Neste âmbito, provavelmente a capacidade de transmitir e armazenar novos dados foi um dos responsáveis por todo o desenvolvimento da humanidade desde os primórdios até os dias atuais. Logo, pode-se observar a extrema importância do estudo dos processos de transmissão, codificação e armazenamento de informação e todas as vertentes à eles envolvidas.

Claude Shannon em um trabalho de 1948 [2] propôs uma definição matemática do conceito de informação através de duas questões fundamentais: que recursos são necessários para transmitirmos informação através de um canal de comunicação?; e se seria possível enviar a informação de modo que ela estivesse protegida contra os efeitos de ruído no canal de comunicação? A partir de então a teoria clássica de informação começou a tomar forma desenvolvendo estudos embasados nas teorias clássicas da física e na descrição matemática de processos de informação.

Em termos de sistemas quânticos, como veremos nessa dissertação, tais questões podem ser abordadas em aspectos mais gerais, possibilitando, por exemplo, um melhor entendimento de recursos e aspectos da Mecânica Quântica. Nesta abordagem, os canais de comunicação (ou os meios de transmissão) estão relacionados com canais quânticos de comunicação entre sistemas quânticos, que englobam recursos quânticos não locais (como o emaranhamento), operações físicas e interações destes sistemas com o meio externo. Um ponto importante é a caracterização dos sistemas quânticos envolvidos (e a distribuição espacial destes sistemas) e as propriedades físicas dos estados condicionadas a efetivação de operações físicas sobre os sistemas quânticos envolvidos. O interessante é que todos os componentes dentro de um processo quântico de informação podem estar correlacionados, porém tais correlações possuem um caráter intrigante já que estão associados a processos no qual seu entendimento ainda gera muitas discussões e investigações.

## 1.2 A Teoria de Informação Quântica

No decorrer do desenvolvimento e da busca do entendimento da mecânica quântica no século passado e a relação entre sistemas físicos e teorias clássicas de informação, começou-se a questionar quais as implicações decorreriam de processamentos de informação utilizando sistemas quânticos. A partir destes questionamentos surgiu um novo ramo de estudo, conhecido hoje como a *Teoria de Informação Quântica*. Esta teoria pode ser divida basicamente por três grandes frentes: a computação quântica, comunicação quântica e o emaranhamento. Obviamente estas três designações são arbitrárias e estão completamente correlacionadas.

Basicamente, a computação quântica estuda novos processos de computação da informação, embasadas nos postulados da mecânica quântica [3], como: o desenvolvimento de novos algoritmos e ferramentas para a efetivação da computação da informação; o estabelecimento de um sistema físico padrão para a unidade básica de informação (qubit); e a viabilidade de implementação experimental para a efetivação dos processos de computação, regida por exigências básicas para a construção de um computador quântico [4].

A comunicação quântica engloba o estudo de todos os processos de informação utilizando sistemas quânticos, incluindo o estudo de sistemas de transmissão, codificação e armazenagem de informação por meio de canais de comunicação e estados quânticos, visando, por exemplo, o desenvolvimento de novos protocolos para transmissão de dados e identificação de propriedades físicas de sistemas quânticos.

Já o emaranhamento quântico possui um papel importantíssimo na teoria de

informação quântica, já que ele é um recurso físico essencial em certos processos quânticos como a codificação superdensa [5] e o teletransporte quântico [6], e também está diretamente relacionado com a qualidade e a capacidade de um canal quântico.

Podemos então, questionar como abordar as questões de Shannon descritas na seção anterior quando utilizamos sistemas quânticos em processos de informação. Observa-se então que a teoria de informação quântica pode ser proposta na tentativa de responder ambas as questões de Shannon em termos de recursos e canais quânticos, a fim de desenvolver processos de transmissão de estados quânticos de maior eficiência, e extrair destas questões o máximo de informação possível em termos de um maior esclarecimento dos conceitos da Mecânica Quântica. Neste contexto, diversos estudos vem sendo feitos e progressos vem sendo atingidos. Foi estabelecido, por exemplo, um recurso físico para codificação da informação quântica análoga ao bit clássico chamado de bit quântico ou simplesmente qubit [1]. Na abordagem de ruídos em canais, para que haja uma comunicação confiável através de canais quânticos ruidosos, vem se desenvolvendo teorias quânticas de correção de erros [7, 8].

Atualmente, a teoria de informação quântica também é vista como um instrumento para desenvolver ferramentas que auxiliam o entendimento da Mecânica Quântica a fim de torná-la mais intuitiva. Esta teoria também está relacionada com possíveis descobertas de novos fenômenos físicos, e também com o desenvolvimento de métodos de manipulação de sistemas quânticos isolados e complexos [1].

Nesta dissertação, estaremos mais interessados nas vertentes decorrentes da primeira questão de Shannon em termos de recursos quânticos em sistemas descritos por variáveis contínuas, isto é, que tipo de recursos necessitamos para a transmissão da informação via um canal quântico de comunicação e além disso, quais as operações físicas envolvidas durante este processo. Dentro deste contexto se encontram: investigações de propriedades de classes de estados quânticos e de operações quânticas; a relação entre operações físicas e canais quânticos de informação; a identificação de processos físicos envolvidos nestes canais; e o estudo do emaranhamento quântico. Um ponto central é que o estudo de estados e operações quânticas são de extrema importância para construção de protocolos de comunicação, não apenas para a transmissão de dados, mas também para caracterização de sistemas compostos, envolvendo, por exemplo, a identificação e quantificação do emaranhamento. Isto possibilita um maior esclarecimento em termos do condicionamento de estados quânticos sob certas operações ou medições físicas.

### 1.3 Operações Gaussianas e o Canal Quântico

Diversos aspectos da teoria de informação quântica contam com a capacidade de preparar e manipular o estado quântico de um dado sistema físico. Certamente, esta capacidade depende das operações físicas disponíveis sobre um estado particular à ser utilizado. Operações físicas (incluindo medições) podem ser vistas como canais quânticos que levam estados de entrada à estados de saída. Assim, reconhecer o condicionamento de tais estados sob uma operação física conhecida, e da mesma forma, determinar o processo físico que leva a um estado conhecido, são importantes no âmbito de termos controle sobre a preparação e a manipulação de um sistema quântico.

Dentro dos sistemas descritos por variáveis contínuas, na classe de estados Gaussianos<sup>1</sup> operações físicas são dadas por mapas positivos podendo ou não conservar a característica Gaussiana do sistema. Assim, a definição de operações físicas como mapas completamente positivos permite o estudo de tais canais. Neste caso, podemos associar um canal quântico com um mapa completamente positivo, onde denominamos canais Gaussianos aqueles relacionados a operações que mapeiam todo estado Gaussiano de entrada para um estado Gaussiano de saída (operações Gaussianas [9]). Um mapa positivo é completamente descrito por uma transformação simplética (canônica) local Sp(2, R) sobre a matriz de covariância do sistema. Como uma conseqüência do teorema de Stone-von Neumann<sup>2</sup> e a caracterização de um estado Gaussiano pelos momentos de segunda ordem, para cada transformação simplética sobre a matriz de covariância, existe uma operação unitária única agindo sobre o espaço de estados correspondente. Logo, podemos associar a transformações simpléticas sobre uma matriz de covariância canais quânticos reversíveis relacionados a operações unitárias. Tais

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Estados Gaussianos são aqueles que podem ser descritos por uma matriz de covariância contendo apenas os momentos de segunda ordem.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>O teorema de Stone-von Neumann formula a unicidade das relações de comutação entre operadores de posição e momentum.

operações correspondem a transformações induzidas por dispositivos ópticos lineares e não-lineares (divisores de feixe, *phase-shifters*, e compressores de quadraturas). Neste caso, não é de se surpreender que protocolos de informação quântica vem sendo implementados através de estados e operações Gaussianos [10, 11].

Além disso, todo o conjunto de operações unitárias não apenas descrevem todas as evoluções de sistemas quânticos. Um mapa de evolução geral de um sistema quântico incluindo acoplamentos com sistemas auxiliares e medições também são dados por operações quânticas. Neste formalismo o mapa

$$\rho \to \frac{\epsilon(\rho)}{Tr[\epsilon(\rho)]},$$
(1.1)

conecta o estado inicial (de entrada) ao estado final (de saída). A operação quântica  $\epsilon$ é um mapa linear não traço conservativo que preserva a positividade. Uma operação quântica  $\epsilon$  que satisfaz completamente a positividade é escrita como  $\epsilon(\rho) = \sum_j A_j \rho A_j^{\dagger}$ , onde  $A_j$  é um conjunto de operadores do sistema, que deve satisfazer  $\sum_j A_j^{\dagger}A_j \leq 1$ . Em termos gerais, "interações" com estados auxiliares (ou um reservatório) satisfazem a condição traço conservativa  $\sum_j A_j^{\dagger}A_j = 1$ , enquanto medições quânticas satisfazem  $\sum_j A_j^{\dagger}A_j < 1$ . Veja que devido ao caráter de levar um estado de entrada a um estado de saída (1.1), tais operações irreversíveis também podem ser associadas como canais quânticos.

Em protocolos quânticos que utilizam estados que são expandidos em um espaço de Hilbert é necessário conhecer as operações físicas que codificam este espaço de estados. Porém, a eficiência de certos protocolos que utilizam sistemas compostos se baseia em recursos não locais como o emaranhamento quântico. Valendo desta dependência, protocolos de comunicação são embasados em canais associados não apenas a operações, mas também a estes recursos não locais, como ocorre, por exemplo no teletransporte quântico [11]. Desta forma, podemos descrever um canal quântico de uma maneira mais geral, que leva em conta não só as operações físicas (reversíveis ou irreversíveis) mas também as correlações não locais de sistemas compostos. Particularmente, um dos resultados originais descritos nesta dissertação (Capítulo 5) mostra que para estados Gaussianos de dois modos, o estudo de canais Gaussianos em termos de protocolos de comunicação, permite obter um processo de identificação de emaranhamento *ape*- nas por meios locais, necessitando o emprego de canais de comunicação clássica [12]. Processos embasados em operações locais e comunicação clássica (LOCC) são de extrema importância na teoria de informação quântica pois em princípio demandam de menos recursos em relação a processos que utilizam operações globais, já que podem ser feitas localmente não necessitando da interação entre os modos envolvidos, podendo estes estarem distantes um do outro. Um protocolo de identificação das propriedades de emaranhamento para esta classe de sistemas descrito por variáveis contínuas via apenas operações locais e comunicação clássica não tinha sido determinado. Até então, os protocolos propostos necessitavam de operações globais prévias [13] ou a reconstrução total destes estados, que também demandam operações globais [15, 14].

Vários autores descrevem canais e operações Gaussianos [16, 17, 18, 19, 20, 21]. Independente do interesse específico em cada uma destas referências, uma característica em comum observada é que o complemento de Schur [22] de matrizes quadradas representando matrizes de covariância de estados Gaussianos incorporam uma manifestação de uma operação física quando projeções parciais e operações traço sobre estados Gaussianos são considerados [16, 17]. Entretando, o processo que fornece o complemento de Schur da matriz de covariância do estado Gaussiano bipartido de dois modos de entrada não tinha sido discutido até agora. Como mostraremos nesta dissertação (Capítulo 4), isto é possível apenas quando operadores não positivos são permitidos [23]. Torna-se então interessante obter quais os processos físicos efetuados sobre um estado Gaussiano de tal forma que seja fornecida uma matriz de covariância na forma de um complemento de Schur, permitindo assim o desenvolvimento de novos protocolos de comunicação e o estudo das propriedades destes estados como a quantificação do seu emaranhamento [12]. Veremos que tais processos estão relacionados com medições de paridade sobre um dos subsistemas de um estado Gaussiano de dois modos tornando a discussão ainda mais interessante devido à relação entre as probabilidades de obter resultados pares e ímpares e a função de Wigner de um modo na origem do espaço de fase. Pudemos deste modo, relacionar uma entidade matemática (os complementos de Schur) com um processo físico (medições locais de paridade).

### 1.4 A Estrutura da Dissertação

A estrutura dos capítulos é discutida a seguir: No capítulo 2 há uma pequena revisão sobre alguns conceitos fundamentais como o operador densidade, os estados da radiação, a descrição quântica no espaço de fase, definindo assim as chamadas funções de quase-probabilidade e o emaranhamento quântico. No capítulo 3 fazemos a caracterização dos estados Gaussianos em termos de matrizes de covariância, primeiramente para um estado de um modo e em seguida generalizamos para o caso de dois modos. Vemos também como podemos extrair propriedades destes estados a partir destas matrizes, tais como a classicalidade e a separabilidade. No capítulo 4 damos ênfase ao estudo das operações Gaussianas, isto é, operações que levam estados Gaussianos a estados Gaussianos, dando as formas gerais destas operações. Apresentamos então o primeiro resultado original desta dissertação que é apresentar o processo físico correspondente para a obtenção do complemento de Schur de matrizes de covariância locais, conectanto uma estrutura matemática com um processo físico. No capítulo 5 utilizamos os resultados do capítulo 4 e apresentamos um protocolo para a obtenção de propriedades de emaranhamento de um estado Gaussiano bipartido de dois modos via apenas medições/operações locais e um canal de comunicação clássica. Por fim, no capítulo 6 concluímos a dissertação.

O leitor pode começar a leitura da dissertação a partir do capítulo 3 dependendo de sua base teórica em termos dos fundamentos da mecânica quântica. Aqueles que já possuem um conhecimento sobre as propriedades e caracterização de estados Gaussianos em termos de matrizes de covariância, podem começar a leitura no capítulo 4 onde é apresentada o primeiro resultado original desta tese, podendo retornar aos capítulos anteriores caso necessite de uma revisão sobre os fundamentos da mecânica quântica e a parametrização de estados Gaussianos. No apêndice A descrevemos teorias de medições quânticas em sistemas de variáveis contínuas, generalizando processos de medições tanto projetiva como não projetiva, revisando a teoria de detecção homódina de medição de quadratura de campos a partir da contagem de fótons e a tomografia homódina quântica que permite a reconstrução das funções de quaseprobabilidade que descrevem um sistema quântico no espaço de fase.

# Capítulo 2 Conceitos Fundamentais

Neste capítulo descrevemos alguns conceitos teóricos importantes para o desenvolvimento do projeto. O conceito de estados puros e a generalização de estados mistos são estudados introduzindo o formalismo da matriz densidade ou operador densidade [24, 25]. São apresentadas as propriedades que caracterizam este operador, assim como uma condição para a distinção de estados puros e mistos, a equação que rege a dinâmica do operador e uma generalização para a representação de estados bipartidos. Em seguida é feita uma revisão da estados coerentes do oscilador harmônico, estados de Fock e estados comprimidos [25, 26, 27]. Na seção 2.3 definimos as chamadas funções características [25, 26] e apresentamos suas principais propriedades. A partir delas a derivação das chamadas funções de quase-probabilidade são apresentadas na seção 2.4 definindo três delas: a função P de Glauber, a função de Wigner [28] e a função Q de Husimi [26]. Outras abordagens para a obtenção destas funções também são citadas e como algumas peculiaridades destas funções estão relacionados com correlações quânticas de sistemas. Na seção 5 definiremos e discutiremos o emaranhamento quântico.

## 2.1 O Operador Densidade

Normalmente podemos descrever fenômenos na mecânica quântica quando o máximo de informação sobre o sistema em questão é disponível. Toda a informação sobre o estado do sistema dinâmico está contido em um vetor  $|\psi\rangle$  que pode ser expandido em uma superposição de vetores de estado na base  $\{|\psi_k\rangle\}$ :

$$|\psi\rangle = \sum_{k} c_k |\psi_k\rangle, \qquad (2.1)$$

onde  $|c_k|^2$  são interpretados como as probabilidades de obtermos o autovalor de  $|\psi_k\rangle$ em um processo de medição, e  $c_k \in \mathbf{C}$ . A partir desta equação podemos calcular o valor esperado de qualquer observável para o sistema em questão. Estes estados são chamados "estados puros" ou simplesmente "vetores de estados".

SejaMum operador arbitrário, o valor médio deste operador sobre o estado $|\psi\rangle$ é dado por

$$\langle M \rangle = \langle \psi | M | \psi \rangle, \tag{2.2}$$

podendo ser reescrito na forma

$$\langle M \rangle = Tr\{M|\psi\rangle\langle\psi|\}. \tag{2.3}$$

Até agora assumimos que o estado é puro, isto é, que fizemos medições suficientes para determinar que o sistema está no estado  $|\psi\rangle$ . Entretanto em vários casos, como o tratamento de um gás de moléculas por exemplo, não possuimos informação completa do estado do sistema pela impossibilidade de medições suficientes serem feitas. Neste caso descrevemos o sistema como uma mistura incoerente de estados puros, i.e., para calcularmos a probabilidade do resultado de alguma medição de uma quantidade fisica sobre o sistema devemos saber a probabilidade de cada estado puro, atribuindo a cada um deles um peso. Estes estados não puros são chamados de estados mistos. Logo, como descrito anteriormente, atribuindo a cada estado  $|\psi_i\rangle$  um peso  $p_i$  (ou seja, o sistema tem probabilidade  $p_1$  de estar no estado  $|\psi_1\rangle$ ,  $p_2$  de estar em  $|\psi_2\rangle$ , etc), onde  $\sum_i p_i = 1$ , a média estatística de M é dada por

$$\langle M \rangle = \sum_{i} p_{i} Tr\{M|\psi_{i}\rangle\langle\psi_{i}|\}.$$
(2.4)

O conceito de estado misto como uma mistura de estados puros originou-se da conexão entre a mecânica quântica e a mecânica estatística. O formalismo do Operador Densidade é uma ferramenta importante pois descreve apropriadamente as duas situações. Podemos agora definir o operador densidade  $\rho(t)$  como

$$\rho = \sum_{i} p_{i} |\psi_{i}\rangle \langle\psi_{i}|, \qquad (2.5)$$

 $\log (2.4)$  se torna

$$\langle M \rangle = Tr\{M\rho\}. \tag{2.6}$$

No caso em que conhecemos o estado (puro) do sistema evoluído no tempo  $|\psi(t)\rangle$ , definimos o operador densidade como

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|. \tag{2.7}$$

O operador densidade defini-se pelas seguintes propriedades:

1.  $\rho$  é Hermiteano, e pode ser observado diretamente pela a equação (2.5). Neste caso:

$$\rho = \rho^{\dagger}. \tag{2.8}$$

2. Da conservação de probabilidade temos

$$Tr\{\rho\} = 1. \tag{2.9}$$

Esta relação vale tanto para estados mistos ou puros. Ela é unitária pois representa a probabilidade de encontrar o sistema em qualquer um dos componentes de um conjunto completo de estados ortogonais.

3. Todo elemento diagonal de  $\rho$  é positivo semidefinido

$$\langle x|\rho|x\rangle = \sum_{1} p_i \langle x|\psi_i\rangle \langle \psi_i|x\rangle = \sum_{i} p_i |\langle x|\psi_i\rangle|^2 \ge 0, \qquad (2.10)$$

implicando na relação de positividade de  $\rho$ , isto é, todos seus autovalores são positivos ou nulos. Neste caso falamos que  $\rho$  é um operador positivo (semi-definido).

4. Sendo  $\rho$  normalizado e como pode ser diagonalizado por uma transformação unitária, temos que

$$0 \le Tr\{\rho^2\} \le 1,$$
 (2.11)

onde para um estado puro

$$Tr\{\rho^2\} = 1,$$
 (2.12)

pois

$$\rho^{2} = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho, \qquad (2.13)$$

utilizando a condição de normalização  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ .

5. A evolução do operador densidade pode ser obtida a partir da equação de Von-Neumann

$$i\hbar \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [H, \rho(t)].$$
 (2.14)

O formalismo de operador densidade pode ser extendido para o caso de sistemas bipartidos, ou seja, dois sistemas com espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  que formam um sistema global, definindo um espaço total  $\mathcal{H}$  pelo produto tensorial dos subespaços correpondentes

 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 

Sendo  $\rho_{12}$  um operador densidade global correspondente a duas bases,  $\{|\psi_i\rangle\}$  associada ao espaço  $\mathcal{H}_1$   $(i = 1, ..., n_1)$  e  $\{|\psi_k(t)\rangle\}$  associada ao espaço  $\mathcal{H}_2$   $(k = 1, ..., n_2)$ , podemos obter os operadores densidade reduzido, correspondente a cada sistema em questão a partir do traço parcial em  $\rho_{12}$ . Temos assim

$$\rho_1 = Tr_2\{\rho_{12}\} \tag{2.15}$$

analogamente

$$\rho_2 = Tr_1\{\rho_{12}\} \tag{2.16}$$

Estes operadores permitem a descrição total dos subsistemas envolvidos. Quando o estado global  $\rho_{12}$  é puro, a pureza (ou mistura) dos estados reduzidos  $\rho_1$  ou  $\rho_2$ representa o grau de emaranhamento entre os subsistemas 1 e 2.

## 2.2 Estados da Radiação

Em Óptica Quântica (e em Mecânica Quântica em geral) a radiação pode adquirir diferentes estados determinando distintas propriedades físicas. Nesta seção apresentamos três importantes classes de estados (estados número ou de Fock, estado coerente e estado comprimido) e suas principais propriedades.

### 2.2.1 Estados de Fock

Os autoestados de energia do oscilador harmônico, descritos como  $|n\rangle$ , são denominados estados de número ou de Fock [26]. Eles são autoestados do operador número  $N = a^{\dagger}a$  com autovalores  $n \ (= 0, 1, 2, ...)$ :

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \tag{2.17}$$

formando uma base ortonormal completa

$$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m},\tag{2.18}$$

$$\sum_{n} |n\rangle\langle n| = 1. \tag{2.19}$$

A ortonormalidade dos estados de Fock conjuntamente com a ação dos operadores de aniquilação e criação,  $a \in a^{\dagger}$ , sobre estes estados dada por:

$$a|n\rangle = n^{1/2}|n-1\rangle, \qquad (2.20)$$

$$a^{\dagger}|n\rangle = (n+1)^{1/2}|n+1\rangle,$$
 (2.21)

garantem que o valor esperado de qualquer operador formado por produtos de potências de  $a e a^{\dagger}$  em relação ao estado de Fock é zero a menos que o número de ocorrências em a seja a mesma do que  $a^{\dagger}$ . Em particular, os momentos de ordenamento normal (ou normal ordenada) são

$$\langle n|(a^{\dagger})^{l}a^{m}|n\rangle = \frac{n!}{(n-l)!}\delta_{lm}, \qquad (2.22)$$

para  $l \leq n$  e caso contrário vale zero, enquanto os momentos de ordenamento antinormais (ou antinormal ordenada) são

$$\langle n|a^m (a^\dagger)^l |n\rangle = \frac{(n+l)!}{n!} \delta_{lm}.$$
(2.23)

Por fim, devido à atuação do operador de aniquilação a dada por (2.20), podemos obter o estado de Fock a partir do estado de vácuo  $|0\rangle$ :

$$|n\rangle = \frac{(a^{\dagger})^n}{(n!)^{1/2}}|0\rangle.$$
 (2.24)

### 2.2.2 Estados Coerentes

Introduzimos nesta seção os estados coerentes extremamente úteis em problemas de radiação, isto porque estes estados podem representar o campo gerado por um laser e além disso muitos estados de propagação de campos quânticos utilizam técnicas matemáticas provenientes do estudo destes estados. Estes estados são dicutidos de-talhadamente pela primeira vez em [29] por R. J. Glauber<sup>1</sup>. Tais estados são definidos como o autoestado do operador de aniquilação do oscilador harmônico:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle,$$
 (2.25)

onde  $\alpha$  é um número complexo. Veja que  $|\alpha\rangle$  não é autoestado de  $a^{\dagger}$ , já que  $a e a^{\dagger}$ não comutam, pois  $[a, a^{\dagger}] = 1$ . Entretanto, de (2.25) temos  $\langle \alpha | a^{\dagger} = \alpha^* \langle \alpha |$ . Desta relação vemos que qualquer valor esperado sobre um estado coerente  $|\alpha\rangle$  de uma função normalmente ordenada de  $a e a^{\dagger}$  é encontrada simplesmente substituindo na fução os operadores  $a e a^{\dagger}$  pelos seus respectivos autovalores  $\alpha e \alpha^*$ .

 $<sup>^1 \</sup>rm Roy$ J. Glauber, professor da Universidade de Harvard (EUA), ganhou o premio Nobel em 2005 pela sua contribuição para a teoria quântica de coerência óptica

Estes estados também podem ser gerados usando o operador unitário de deslocamento

$$D(\alpha) = exp(\alpha a^{\dagger} - \alpha^* a), \qquad (2.26)$$

quando aplicado sobre o estado de vácuo  $|0\rangle$ . Esta operação consiste em deslocar o estado fundamental até o ponto  $(Re\{\alpha\}, Im\{\alpha\})$ 

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle, \qquad (2.27)$$

ou utilizando a relação de Glauber<sup>2</sup>, podemos reescrever a relação acima como

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^{\dagger}} |0\rangle.$$
(2.28)

Usando a expansão em Taylor da função exponencial, isto é,

$$e^{\alpha a^{\dagger}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^{\dagger})^n}{n!}$$
(2.29)

em (2.28) e aplicando o operador de criação  $a^{\dagger}$  sobre o estado de vácuo, obtemos que o estado coerente pode ser expandido na base dos estados de Fock  $\{|n\rangle\}$  como

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n} \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle.$$
 (2.30)

Assim podemos verificar a consistência da relação (2.25):

$$\begin{aligned} a|\alpha\rangle &= e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} a|n\rangle = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} n^{1/2} |n-1\rangle \\ &= e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+1}}{\sqrt{m!}} a|m\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \end{aligned}$$
(2.31)

O conjunto de estados coerentes formam um conjunto super-completo. Nesse caso a relação de completeza é dada por

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha | \frac{d^2 \alpha}{\pi} = 1, \qquad (2.32)$$

 $<sup>\</sup>boxed{ ^2 \text{Se } A \in B \text{ são dois operadores que não comutam e satisfazem a condição } [A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0, \text{ então } e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} = e^B e^A e^{\frac{1}{2}[A,B]}.$ 

onde a integração é sobre todo o plano complexo. Se  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  são estados coerentes diferentes, eles não são ortogonais pois o produto escalar segue a seguinte relação

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \alpha \beta^*}.$$
(2.33)

Podemos obter a função de transformação do estado coerente para a representação de coordenadas,  $\langle q | \alpha \rangle$  dado por

$$\langle q|\alpha\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} exp\left[-\frac{\omega}{2\hbar}(q'-\langle q\rangle)^2 + i\frac{\langle p\rangle}{\hbar}q' + i\mu\right],\qquad(2.34)$$

onde q' é o autovalor do operador de posição q <br/>e $\mu$  é uma fase real arbitrária.

A partir da equação (2.30) podemos obter a função de distribuição de probabilidade do número de fótons P(n) em relação a um estado coerente  $|\alpha\rangle$ :

$$P(n) = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!},$$
(2.35)

que é uma distribuição de Poisson. Logo, podemos obter alguns resultados interessantes em relação ao estado coerente, tal como o valor esperado do operador número $N=a^{\dagger}a~{\rm dado~por}$ 

$$\langle N \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} nP(n) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |\alpha|^2.$$
 (2.36)

A variância de N neste estado é

$$(\Delta n)^2 = \langle \alpha | N^2 | \alpha \rangle - (\langle \alpha | N | \alpha \rangle)^2 = \langle \alpha | N^2 | \alpha \rangle - |\alpha|^4, \qquad (2.37)$$

mas

$$\langle \alpha | N^2 | \alpha \rangle = \langle \alpha | a^{\dagger} a a^{\dagger} a | \alpha \rangle = \langle \alpha | \alpha^* a a^{\dagger} \alpha | \alpha \rangle$$
  
=  $|\alpha|^2 \langle \alpha | (a^{\dagger} a + 1) \alpha | \alpha \rangle = |\alpha|^2 (1 + |\alpha|^2).$  (2.38)

Logo obtemos que a variância de  $N \in (\Delta n)^2 = |\alpha|^2$ , que é igual ao número médio de fótons como era esperado devido à distribuição ser de Poisson.

### 2.2.3 Estados Comprimidos

Os estados comprimidos surgem de modelos quânticos utilizando processos não lineares, e são gerados a partir de uma amplificação paramétrica via uma interação não linear no cristal [30]. Basicamente uma amplificação paramétrica consiste em dividir um fóton incidente em dois fótons de saída, onde a conservação de energia e momentum linear deve ser satisfeita, por um cristal não linear, que corresponde a um meio onde não há uma relação de linearidade entre a polarização e o campo elétrico da luz. Estes estados são caracterizados pela propriedade de que a variância de um dos operadores de quadratura, por exemplo  $X_1$ , é menor que 1, valor este associado aos estados coerentes e de vácuo, enquanto a variância do outro operador  $X_2$ , devido ao princípio de incerteza de Heisenberg, excede 1. O estado comprimido  $|\alpha, \varepsilon\rangle$  é definido como [26]

$$|\alpha,\varepsilon\rangle = D(\alpha)S(\varepsilon)|0\rangle, \qquad (2.39)$$

onde  $D(\alpha)$  é o operador de deslocamento e  $S(\varepsilon)$  é o operador de compressão definido por

$$S(\varepsilon) = exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon^*a^2 - \frac{1}{2}\varepsilon(a^{\dagger})^2\right), \qquad (2.40)$$

onde  $\varepsilon = re^{i\phi}$ .

A equação (2.39) nos diz que o estado comprimido é obtido primeiramente comprimindo o estado de vácuo e depois fazendo seu deslocamento.

Estes estados formam uma classe de estados de incerteza mínima, mas podem possuir uma incerteza reduzida em uma das quadraturas  $(X_1, X_2)$ , que podem ser vistos como quantidades análogas à posição e momentum para o caso de um estado da radiação, onde  $X_1$  e  $X_2$  são dados em termos dos operadores de bósons

$$X_1 = a^{\dagger} + a, \tag{2.41}$$

$$X_2 = i(a^{\dagger} - a), \tag{2.42}$$

com o custo de aumentar a incerteza na outra ( $\Delta X_1 < 1 < \Delta X_2$ ), não violando assim o princípio de incerteza

$$\Delta X_1 \Delta X_2 = 1. \tag{2.43}$$

O estado coerente é um membro particular desta classe de estados possuindo incertezas iguais em ambas as quadraturas ( $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 1$ ). Ele pode ser representado por um círculo de erro em um plano de amplitude complexa na qual os eixos são  $X_1$  e  $X_2$ . Devido à diferença dos valores da variação das quadraturas, os estados físicos comprimido correspondem a incertezas descritas por uma elipse neste mesmo plano.

### 2.3 Funções Características

Nas próximas duas seções apresentaremos métodos estatísticos para a descrição de estados embasados nas funções características e nas funções de quase-probabilidade. Elas permitem obter o valor esperado de qualquer operador que seja função de  $a e a^{\dagger}$ . Uma função característica ou uma distribuição de quase-probabilidade contém toda informação necessária para a reconstrução do operador densidade de um estado, neste caso, elas representam uma maneira alternativa para uma completa descrição de um estado. Ambas provém de propriedades dos operadores de bósons e dos operadores de deslocamento descrito nas seções anteriores.

Freqüentemente estamos interessados nos momentos de algum operador M. Definimos então o l-ésimo momento de M como

$$[M^l] = Tr\{\rho M^l\}.$$
(2.44)

Estes momentos podem ser obtidos a partir da função geratriz de momento ou função característica do operador M definida como

$$\chi_M(\eta, t) = Tr\{\rho(t)e^{i\eta M}\},\tag{2.45}$$

onde o l-ésimo momento é obtido por

$$\langle M^l \rangle = \frac{\partial^l}{\partial (i\eta)^l} \chi_M(\eta, t) \Big|_{\eta=0}.$$
 (2.46)

Apresentamos três funções características úteis

$$\chi(\eta) = Tr\{\rho e^{\eta a^{\dagger} - \eta^* a}\},\tag{2.47}$$

$$\chi_N(\eta) = Tr\{\rho e^{\eta a^{\dagger}} e^{-\eta^* a}\}, \qquad (2.48)$$

$$\chi_A(\eta, t) = Tr\{\rho e^{-\eta^* a} e^{\eta a^\dagger}\},$$
 (2.49)

que são as funções características simétrica (ou de Wigner), de ordenamento normal e antinormal, respectivamente, levando-se em conta o ordenamento da base dos operadores do oscilador harmônico, formada por  $a^{\dagger}$  e a. Observe que na função característica simétrica o operador localizado ao lado do operaor densidade é o operador de deslocamento que é aplicado no estado de vácuo para a obtenção do estado coerente. As três funções estão relacionadas por

$$\chi(\eta) = e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} \chi_N(\eta) = e^{\frac{1}{2}|\eta|^2} \chi_A(\eta).$$
(2.50)

Uma importante característica destas funções pode ser notada ao expandirmos, por exemplo, a função simétrica  $\chi(\eta)$  em relação aos momentos de  $a \in a^{\dagger}$ 

$$\chi(\eta) = \langle e^{\eta a^{\dagger} - \eta^{*}a} \rangle$$

$$= \left\langle \sum_{n} \frac{1}{n!} (\eta a^{\dagger} - \eta^{*}a)^{n} \right\rangle$$

$$= 1 + (\eta \langle a^{\dagger} \rangle - \eta^{*} \langle a \rangle) + \frac{1}{2} (\eta^{2} \langle a^{\dagger 2} \rangle + \eta^{*2} \langle a \rangle^{2} - 2|\eta|^{2} \langle a^{\dagger}a + aa^{\dagger} \rangle) + \dots \qquad (2.51)$$

Logo obtendo os momentos de  $a e a^{\dagger}$  (valores mensuráveis experimentalmente) podemos obter a função característica, e assim, conseguir reconstruir o estado do sistema. Particularmente, para um estado Gaussiano os termos predominantes da expansão são os de até segunda ordem. De forma inversa, como na equação (2.46), também podemos obter os valores médios dos momentos a partir da função característica normalmente ordenada:

$$\langle (a^{\dagger})^{l} a^{m} \rangle = \frac{\partial^{(l+m)}}{\partial (\eta)^{l} \partial (\eta^{*})^{m}} \chi_{N}(\eta, -\eta^{*}) \Big|_{\eta=0}.$$
(2.52)

## 2.4 Funções de Quase-probabilidade

Devido ao princípio de incerteza de Heinsenberg, na qual a posição e momentum não podem ser simultâneamente medidos, a representação da Mecânica Quântica no espaço de fase é feita por meio de funções de quase-distribuição. Neste caso este espaço é formado por matrizes e não por pontos devido a relação de comutação entre os operadores de posição e momentum. Um fato interessante é que tais funções podem por exemplo assumir valores negativos para determinados sistemas quânticos. Seu uso se extende do estabelecimento de conexões entre a Mecânica Quântica e a Mecânica Clássica no Espaço de fase à reconstrução de alguns estados quânticos a partir destas funções [31].

Em geral podemos definir estas funções como as transformadas de Fourier das funções características normal, simétrica e antinormal, definidas pelas equações (2.48, 2.47, 2.49), obtendo assim três funções de quase-probabilidade denominadas: função P de Glauber, função de Wigner e função Q de Husimi, repectivamente, cujas propriedades discutiremos a seguir.

Estas funções são similares a funções de distribuição de probabilidade sendo normalizadas e os momentos dos produtos de  $a e a^{\dagger}$  são calculados por integrais com peso dado pela distribuição de quase-probabilidade. Entretanto, as distribuições de quase-probabilidade podem apresentar valores negativos, devido a características particulares do sistema, fazendo com que sua interpretação como uma distribuição de probabilidades legítima não seja possível.

### 2.4.1 Função P de Glauber

A função P de Glauber está associada ao ordenamento normal e é obtida a partir da função característica normal ordenada (2.48),

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{\alpha \eta^* - \alpha^* \eta} \chi_N(\eta) d^2 \eta.$$
(2.53)

Ela também é obtida a partir da representação diagonal em termos dos estados coerentes do operador densidade de um certo sistema

$$\rho = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha | d^2 \alpha.$$
(2.54)

A equivalência entre as duas definições abordadas acima pode ser demonstrada se substituirmos a expressão (2.54) na função característica normalmente ordenada (2.48) e calcularmos sua trasformada de Fourrier como em (2.53), neste caso encontramos

$$\frac{1}{\pi^2} \int e^{\alpha \eta^* - \alpha^* \eta} \chi_N(\eta) d^2 \eta = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 \eta e^{\alpha \eta^* - \alpha^* \eta} Tr \left\{ \int d^2 \beta P(\beta) |\beta\rangle \langle \beta| e^{\eta a^\dagger} e^{-\eta^* a} \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int d^2 \eta \int d^2 \beta P(\beta) e^{\eta (\beta^* - \alpha^*) - \eta^* (\beta - \alpha)}$$

$$= P(\alpha), \qquad (2.55)$$

onde a integração sobre  $\eta$  fornece uma distribuição delta de Dirac bidimensional, neste caso  $\delta^{(2)}(\beta - \alpha)$ .

Podemos descrever alguns campos a partir da sua função P. No caso de um estado coerente  $|\alpha_0\rangle$ , a função P é uma função Delta

$$P(\alpha) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0), \qquad (2.56)$$

como pode ser observado diretamente da equação (2.54).

Vemos que esta função  $P(\alpha)$  pode se comportar como uma função de distribuição clássica, assim como pode tomar valores negativos e até mesmo tornar-se altamente singular. Nestes últimos dois casos os campos correspondentes não possuem descrição clássica e conseqüêntemente  $P(\alpha)$  não pode ser interpretada como um distribuição de probabilidade clássica. Dizemos neste casos que os campos são não-clássicos.

### 2.4.2 Função de Wigner

A função de Wigner pode ser definida como a transformada de Fourier da função caracaterística simetricamente ordenada  $\chi(\eta)$ 

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int exp(\eta^* \alpha - \eta \alpha^*) \chi(\eta) d^2 \eta.$$
(2.57)

A distribuição de Wigner sempre existe mas não é necessariamente positiva. A parte negativa está associada à características quânticas pois está relacionado com fenômenos de correlação quânticas descritos na discussão das funções de correlação de segunda ordem. Além disso, ela permite descrever conexões entre a mecânica quântica e a mecanica clássica [31].

A função de Wigner também pode ser obtida a partir de um caso particular onde ela representa um dos elementos constituintes de uma expansão que permite mapear um operador genérico no espaço de fase e cujos coeficientes representam a transformada de Weyl [32]. Neste caso, o operador a ser mapeado é o próprio operador densidade do sistema.

Utilizando as relações de completeza para as bases dos autos estados dos operadores de posição e momentum e a função de transformação entre estes dois operadores, podemos escrever um operador genérico F como

$$F = \int \frac{dpdq}{2\pi\hbar} f(p,q)\Delta(p,q), \qquad (2.58)$$

onde  $f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$  é denominada transformada de Weyl, dado por

$$f(p,q) = \int du \, exp\left(\frac{i}{\hbar}pu\right) \langle q+u/2|F|q-u/2\rangle, \qquad (2.59)$$

por sua vez $\Delta(p,q)$ representa uma base de operadores no espaço de fase cuja expressão é dada por

$$\Delta(p,q) = \int dv \, exp\left(\frac{i}{\hbar}qv\right) |p+v/2\rangle\langle p-v/2|.$$
(2.60)

Podemos interpretar a equação (2.58) como uma decomposição de F em uma base de operadores cujos componentes são  $\Delta(p,q)$ .

No caso particular em que consideramos  $F = \rho$ , obtemos a função de Wigner

$$W(p,q) = \int dv \, exp\left(\frac{i}{\hbar}pv\right) \langle q - v/2|\rho|q + v/2\rangle.$$
(2.61)

Assim para um estado puro  $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  temos

$$\int \frac{dp}{2\pi\hbar} W(p,q) = |\Psi(q)|^2 \ e \ \int \frac{dq}{2\pi\hbar} W(p,q) = |\Phi(p)|^2.$$

Portanto, a partir da função de Wigner, podemos obter as densidades de probabilidade marginais associadas às respectivas funções de onda  $\Psi(q) \in \Phi(p)$ , nas representação posição e momentum, repectivamente.

Podemos também associar a função de Wigner com qualquer operador através da seguinte expansão:

$$\rho = \int d^2 z 2(-1)^{(a^{\dagger} - z^*)(a - z)} W(z).$$
(2.62)

Para o caso em que  $\rho$  representa um estado bipartido descrito pelos operadores de bósons  $a_1(a_1^{\dagger})$  e  $a_2(a_2^{\dagger})$ , onde 1 e 2 são índices que representam cada um dos modos, temos [33]

$$\rho = 2^2 \int d^2 z_1 \int d^2 z_2 : e^{-2(a_1^{\dagger} - z_1^*)(a_1 - z_1)} e^{-2(a_2^{\dagger} - z_2^*)(a_2 - z_2)} : W(z_1, z_2),$$
(2.63)

onde : . : representa o ordenamento normal. Aqui, as integrações são sobre os dois espaços de fase dos modos, parametrizados pelas variáveis complexas  $z_1 e z_2$ , e os operadores normalmente ordenados :  $e^{-2(a_1^{\dagger}-z_1^*)(a_1-z_1)}$  :, :  $e^{-2(a_2^{\dagger}-z_2^*)(a_2-z_2)}$  : são operadores de paridade

$$(-1)^{a_1^{\dagger}a_1} =: e^{-2a_1^{\dagger}a_1}:$$
 (2.64)

е

$$(-1)^{a_2^{\dagger}a_2} =: e^{-2a_2^{\dagger}a_2} :, \qquad (2.65)$$

deslocados no espaço de fase por  $z_1$  e  $z_2$ .

### 2.4.3 Função Q de Husimi

A função Q está associada ao ordenamento antinormal da função característica  $\chi_A(\eta)$ 

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{\alpha \eta^* - \alpha^* \eta} \chi_A(\eta) d^2 \eta.$$
(2.66)

Esta função também pode ser definida considerando-a como os elementos diagonais do operador densidade na representação dos estados coerentes

$$Q(\alpha) = \frac{\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle}{\pi}.$$
(2.67)

Por esta expressão podemos claramente observar que ela é uma função positiva, já que  $\rho$  é um operador positivo. Neste caso esta função está associada com a probabilidade do resultado de uma medição conjunta dos dois componentes de quadratura do campo ( $X_1 \in X_2$ ).

Para um estado de Fock  $|n\rangle$ , por exemplo, a função Q é

$$Q(\alpha) = \frac{|\langle \alpha | n \rangle|^2}{\pi} = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{\pi n!},$$
(2.68)

ou seja, uma distribuição de Poisson. Já para o caso de um estado coerente puro,  $\rho = |\beta\rangle\langle\beta|$ , temos que a função de Husimi possui a forma Gaussiana

$$Q(\alpha) = \frac{|\langle \alpha | \beta \rangle|^2}{\pi} = \frac{e^{-|\alpha - \beta|^2}}{\pi}.$$
(2.69)

## 2.5 Emaranhamento e Separabilidade

O emaranhamento quântico é um recurso essencial para o estabelecimento e estudo da teoria de informação quântica [34, 35]. Ele representa um fenômeno puramente quântico e surge naturalmente ao aplicarmos o princípio de superposição a sistemas físicos compostos [36].

Formalmente, defini-se emaranhamento da seguinte forma:

**Definição 1:** (Separabilidade) Seja um sistema quântico composto de N subsistemas definido no espaço de Hilbert  $\mathcal{H} = \bigotimes_{j=1}^{N} \mathcal{H}_j$ , tal que  $\mathcal{H}_j$  é o espaço de Hilbert associado a cada subsistema e é descrito por um operador densidade  $\rho \in \bigotimes_{j=1}^{N} \mathcal{A}_j$ ,
onde  $\mathcal{A}_j$  é o espaço de Hilbert formado por todos os operadores que atuam em  $\mathcal{H}_j$ . Dizemos que  $\rho$  representa um sistema não emaranhado se, e somente se,  $\rho$  pode ser escrito, para algum k, como uma soma de produtos diretos:

$$\rho = \sum_{i=0}^{k} p_i \bigotimes_{j=1}^{N} \rho_i^j = \sum_{i=0}^{k} p_i \left( \rho_1^1 \otimes \rho_1^2 \otimes \ldots \otimes \rho_1^{N-1} \otimes \rho_1^N \right), \qquad (2.70)$$

onde  $p_i > o$ ,  $\sum_{i=0}^k p_i = 1$ ,  $e \ \rho_i^j \in \mathcal{A}_j$ .

Um estado que pode ser escrito por (2.70) é denominado um estado separável geral e pode ser preparado via operações em cada parte do sistema (local) e comunicação clássica (LOCC). Quando são feitas medições sobre as partes de um estado separado, os resultados possivelmente apresentam correlações que podem ser geradas via LOCC. Porém na teoria quântica podem ser observadas correlações mais fortes chamadas emaranhamento, que representam correlações não locais já que não podem ser obtidas via LOCC, ou seja, as parte emaranhadas possuem não apenas propriedades locais mas também propriedades conjunta (globais).

Veja que a definição acima define apenas um estado separável ou emaranhado, porém quando lidamos com estados separáveis é muito difícil decompor o sistema de tal forma a escrevê-lo como em (2.70), tornando esta definição não operacional. Além disso, como o emaranhamento se tornou um recurso essencial para processos de informação quântica, a sua quantificação se tornou extremamente importante. Porém existem critérios práticos para verificar se um dado sistema é emaranhado ou não, como critério de separabilidade de Simon [37] e também propostas de medidas para quantificação do emaranhamento para certos sistemas bipartidos particulares, como o emaranhamento destilável, a entropia de von Neumann, de formação e de emaranhamento [38, 39, 40, 41, 42].

# Capítulo 3 Estados Gaussianos

Neste capítulo definiremos e discutiremos as principais propriedades dos chamados Estados Gaussianos [9]. Estes estados são importantes de serem estudados pois são relativamente acessíveis experimentalmente, sobretudo em experimentos de geração de estados do campo eletromagnético que apresentam compressão das quadraturas. Similarmente, operações Gaussianas englobam todas as possíveis transformações/manipulações que se efetuam em campos de luz por dispositivos ópticos, incluindo os dispositivos lineares, tais como divisores de feixe e placas de onda, bem como dispositivos não lineares tais como compressores (squeezers). As principais quantidades numéricas que permitem descrever tais estados, e que serão discutidas neste capítulo, são a matriz de covariância que especifica a função característica do estado e as matrizes associadas com as funções de distribuição P de Glauber e de Wigner. Na primeira seção descreveremos os estados Gaussianos de um oscilador harmônico unidimensional, definindo inicialmente propriedades gerais de operadores Gaussianos. Após isso descreveremos alguns critérios de positividade para estas operações obtendo uma classe de transformações que as caracterizam, e os crítérios necessários para que o estado seja P-representável. Na segunda parte desta revisão generalizamos estes estados para o caso bidimensional, agora caracterizada por uma matriz de covariância  $4 \times 4$ . Apresentamos um critério para testar a positividade de uma matriz em termos de decomposição em matrizes blocos e complemento de Schur. Os complementos de Schur serão importantes ao longo desta dissertação. Como estes são estados de sistemas bipartidos, podemos estudar critérios necessários de separabilidade para estados quânticos. Particularmente o critério de Peres-Horodecki [43, 44] ou critério PPT (Transposição

Parcial Positiva), válido para sistemas puros ou mistos, que é uma condição necessária e suficiente de separabilidade para estados pertencentes a espaços de Hilbert de dimensão  $2 \times 2$  e  $2 \times 3$ . Temos também o critério de separabilidade de Simon [37], uma extensão dos critérios de Peres-Horodecki para sistemas descritos por variáveis contínuas, sendo uma condição necessária e suficiente de separabilidade para estados Gaussianos. Por fim damos alguns exemplos como o operador de paridade, estados puros, o estado térmico comprimido e a operação de divisão de feixes (*beam splitter*).

A descrição dos operadores Gaussianos são feitos usando a algebra dos operadores de bósons e a sua representação no espaço de fase pelas funções de distribuição P de Glauber e de Wigner.

## 3.1 Estados Gaussianos de um Oscilador Harmônico Unidimensional

#### 3.1.1 Parametrizações

Um operador qualquer relacionado a um oscilador harmônico, que é uma função dos operadores de bósons  $a \in a^{\dagger}$ , pode ser especificado pela sua função característica  $\chi(\mathbf{z})$  dada por

$$\chi(\mathbf{z}) = Tr\{D(\mathbf{z})G(\mathbf{a})\},\tag{3.1}$$

onde  $D(\mathbf{z}) = e^{-\mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{E} \mathbf{a}} = e^{za^{\dagger} - z^*a}$  é um operador de deslocamento no espaço vetorial bidimensional com a notação compacta:

$$\mathbf{z}^{\dagger} = (z^*, z) , \ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z \\ z^* \end{pmatrix},$$
 (3.2)

$$\mathbf{a}^{\dagger} = (a^{\dagger}, a) , \ \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^{\dagger} \\ a \end{pmatrix},$$
 (3.3)

onde  $a \in a^{\dagger}$  são operadores de destruição e criação para o sistema:

$$z = \frac{q + ip}{\sqrt{2}}, \ z^* = \frac{q - ip}{\sqrt{2}},$$
 (3.4)

$$a = \frac{Q + iP}{\sqrt{2}}, \ a^{\dagger} = \frac{Q - iP}{\sqrt{2}}, \tag{3.5}$$

 $q \in p$ são os repectivos autovalores dos operadores de posição e momentum  $Q \in P.$  E é uma matriz $2 \times 2$  definida como

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Restringiremos nossa discussão para operadores hermiteanos  $G(\mathbf{a}) = [G(\mathbf{a})]^{\dagger}$  na qual suas funções caracteríticas são da forma Gaussiana:

$$\chi(\mathbf{z}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{V}\mathbf{z}},\tag{3.7}$$

sendo V denominada matriz de covariância de G dada por

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} n + \frac{1}{2} & m \\ m^* & n + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{V}^{\dagger}.$$
 (3.8)

Expandindo em potências de  $\eta \in \eta^*$  as equações (3.1) e (3.7) podemos verificar o significado físico dos parâmetros  $n \in m$  pela igualdade dos seus respectivos termos quadráticos obtendo

$$n = Tr\{a^{\dagger}aG\},\tag{3.9}$$

$$m = -Tr\{a^2G\}, \ m^* = -Tr\{(a^{\dagger})^2G\},$$
 (3.10)

que podem ser escritos em uma forma compacta como

$$Tr\{\mathbf{aa}^{\dagger}G\} = \mathbf{EVE} + \frac{1}{2}\mathbf{E}.$$
 (3.11)

Igualando os termos lineares, obtemos que  $Tr\{aG\} = 0$  e  $Tr\{a^{\dagger}G\} = 0$ , e para  $\mathbf{z} = 0$  obtemos que  $Tr\{G(\mathbf{a})\} = 1$ . A anulação dos termos de primeira ordem ocorre ao desconsiderarmos os termos de deslocamento em (3.7). Isso pode ser feito pois deslocamentos não afetam o caráter Gaussiano do sistema [9].

A matriz de covariância V de um operador Gaussiano deve ser positiva semidefinida ( $\mathbf{V} \ge 0$ ). Para que um operador Gaussiano represente um estado físico, sua matriz de covariância deve satisfazer a seguinte desigualdade

$$\mathbf{V} + \frac{1}{2}\mathbf{E} \ge 0. \tag{3.12}$$

Esta desigualdade é obtida a partir da relação de incerteza de Heisenberg em termos dos operadores de bósons

$$\langle a^{\dagger}a\rangle\langle aa^{\dagger}\rangle \ge \langle a^{\dagger 2}\rangle\langle a^{2}\rangle,$$
 (3.13)

podendo ser escrito em relação aos parâmetros  $n \in m$  como

$$n(n+1) \ge m^* m \tag{3.14}$$

ou

$$n \ge \sqrt{m^*m + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}.$$
(3.15)

Prova das equações (3.12),(3.14) e (3.15):

Substituindo as relações entre os elementos da matriz de covariância com os operadores de bósons (3.9) e (3.10) na relação de incerteza de Heisenberg (3.13), obtemos diretamente a desigualdade (3.14). Desta relação resolvendo a inequação de segundo grau em n, obtemos a outra desigualdade correspondente (3.15). Veremos agora que a partir da desigualdade entre as matrizes dada por (3.12), obtemos (3.14) e (3.15).

$$\mathbf{V} + \frac{1}{2}\mathbf{E} = \begin{pmatrix} n+1 & m \\ m^* & n \end{pmatrix}.$$
 (3.16)

Devemos encontrar os auto valores desta matriz, a partir de sua equação secular

$$\begin{vmatrix} n+1-\lambda & m\\ m^* & n-\lambda \end{vmatrix} = (n+1-\lambda)(n-\lambda) - m^*m = 0,$$
(3.17)

cuja solução é

$$\lambda_{\pm} = n + \frac{1}{2} \pm \sqrt{m^* m + \frac{1}{4}}.$$
(3.18)

Tomando o menor valor entre as duas soluções, isto é<br/>, $\lambda_-$ e impondo que ele seja positivo, temos

$$\lambda_{-} = n + \frac{1}{2} - \sqrt{m^* m + \frac{1}{4}} \ge 0, \qquad (3.19)$$

obtendo (3.15). cqd

Uma das maneiras de se obter o operador  $G(\mathbf{a})$  a partir de sua função característica é expandindo o operador na base do espaço de fase de Weyl [45] que consiste em operadores unitários  $e^{\mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{E} \mathbf{a}}$ :

$$G(\mathbf{a}) = \int (d\mathbf{z}) e^{\mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{E} \mathbf{a}} \chi(\mathbf{z}), \qquad (3.20)$$

onde  $(d\mathbf{z}) = \frac{1}{\pi}d(Re\ z)d(Im\ z) = \frac{1}{\pi}d^2z.$ 

Da mesma forma podemos expandir o mesmo  $G(\mathbf{a})$  na base hermiteana de Wigner [46], que consiste nos seguintes operadores

$$2(-1)^{(a^{\dagger}-z^{*})(a-z)} = e^{-\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{a}} 2(-1)^{a^{\dagger}a} e^{\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{a}} = e^{-\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{a}} 2e^{i\pi a^{\dagger}a} e^{\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{a}}.$$
 (3.21)

Temos assim que o operador é dado por

$$G(\mathbf{a}) = \int (d\mathbf{z}) 2(-1)^{(a^{\dagger} - z^{*})(a - z)} W(\mathbf{z}), \qquad (3.22)$$

onde

$$W(\mathbf{z}) = 2 Tr\{D(\mathbf{z})e^{i\pi a^{\dagger}a}D^{\dagger}(\mathbf{z})G(\mathbf{a})\} = 2 Tr\{e^{i\pi a^{\dagger}a}G(\mathbf{a}+\mathbf{z})\}$$
(3.23)

é a função de Wigner de  $G(\mathbf{a})^1$ . Como a equação (3.1) é simetricamente ordenada, neste caso sabemos que ela está relacionada com a função de Wigner por uma transformada de Fourier

$$W(\mathbf{z}) = \int (d\mathbf{z}')e^{-\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{z}'}\chi(\mathbf{z}'), \qquad (3.24)$$

$$\chi(\mathbf{z}) = \int (d\mathbf{z}') e^{-\mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{E} \mathbf{z}'} W(\mathbf{z}'). \qquad (3.25)$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>O nome função de Wigner deve ser reservado apenas quando  $G(\mathbf{a})$  representar um estado físico.  $W(\mathbf{z})$  na verdade é a transformada de Weyl de  $G(\mathbf{a})$ . No entanto para facilitar a notação vamos utilizar  $W(\mathbf{z})$  como a função de Wigner de um estado físico.

Sabendo as formas normalmente ordenada dos operadores [16]

$$e^{\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{a}} =: e^{-\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{a} - \frac{1}{4}\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{z}} : \qquad (3.26)$$

е

$$e^{\mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{z}}2(-1)^{a^{\dagger}a}e^{\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{a}} =: 2e^{-(a^{\dagger}-z^{\dagger})(a-z)}:,$$
 (3.27)

com a integral de Fourier-Gauss

$$\int (d\mathbf{z}) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{z}} e^{\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{A}}} e^{\frac{1}{2}\mathbf{x}^{T}T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}},$$
(3.28)

válido para todas as matrizes  $\mathbf{A} > 0$  e todos os vetores coluna  $\mathbf{x}$ , onde

$$T = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{array}\right) \ . \tag{3.29}$$

A partir da equação Gaussiana para a função característica (3.7) obtemos que tanto a função de Wigner como o operador  $G(\mathbf{a})$  na forma normal ordenada também possuem característica gaussiana

$$W(\mathbf{z}) = \sqrt{\det \mathbf{W}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{W}\mathbf{z}},\tag{3.30}$$

$$G(\mathbf{a}) = \sqrt{\det \mathbf{Q}} : e^{-\frac{1}{2}\mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{Q}\mathbf{a}} : .$$
(3.31)

As matrizes  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbf{W}$ , associadas ao operador  $G(\mathbf{a})$ , e as funções características e de Wigner respectivamente, estão relacionadas como

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} \left( \mathbf{V} + \frac{1}{2} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{E} = \left( \mathbf{W}^{-1} + \frac{1}{2} \mathbf{I} \right)^{-1}, \qquad (3.32)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{E}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{I},$$
(3.33)

$$\mathbf{W} = \mathbf{E}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{E} = \left(\mathbf{Q} - \frac{1}{2}\mathbf{I}\right)^{-1},\tag{3.34}$$

onde I é uma matriz unitária  $2\times 2.$ 

Prova das equações (3.30) e (3.31):

(i) Aplicando a transformada de Fourrier (3.24) na função característica Gaussiana (3.7), temos

$$W(\mathbf{z}) = \int (d\mathbf{z}) e^{-\mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{E} \mathbf{z}'} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}'^{\dagger} \mathbf{V} \mathbf{z}'} = \int (d\mathbf{z}) e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}'^{\dagger} \mathbf{V} \mathbf{z}'} e^{\mathbf{z}'^{\dagger} (\mathbf{E} \mathbf{z})}$$

usando (3.28), temos

$$W(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{V}}} e^{\frac{1}{2} (\mathbf{E}\mathbf{z})^T \mathbf{T} \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{E}\mathbf{z})} = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{V}}} e^{\frac{1}{2} (\mathbf{z} \mathbf{E}\mathbf{T}) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{E}\mathbf{z}},$$

mas

$$\mathbf{z}\mathbf{E}\mathbf{T} = -\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{E},\tag{3.35}$$

então

$$W(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{V}}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{z}},$$
(3.36)

definindo  $\mathbf{W} = \mathbf{E}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{E}$  como em (3.34), e verificando que

$$\det \mathbf{W} = \det \mathbf{E} \det \mathbf{V}^{-1} \det \mathbf{E} = \det \mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{V}},$$
(3.37)

obtemos (3.30). cqd

(ii) Substituindo (3.26) e a forma Gaussiana da função característica (3.7) em (3.20), e lembrando que os parâmetros do vetor  $\mathbf{z}$  não são afetados pelo ordenamento normal, temos

$$G(\mathbf{a}) = \int (d\mathbf{z}) : e^{\mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{E} \mathbf{a} - \frac{1}{4} \mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{z}} : e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{V} \mathbf{z}} =: \int (d\mathbf{z}) e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^{\dagger} (\frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{V}) \mathbf{z}} e^{\mathbf{z}^{\dagger} (\mathbf{E} \mathbf{a})} :$$

utilizando a integral de Fourier-Gauss (3.28) e usando um igualdade análoga a (3.35), obtemos

$$G(\mathbf{a}) =: \frac{1}{\sqrt{\det(\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{V})}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{a}^{\dagger}\mathbf{E}(\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{V})^{-1}\mathbf{E}\mathbf{a}} : .$$

Definindo  $\mathbf{Q} = \mathbf{E} \left( \mathbf{V} + \frac{1}{2} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{E}$  e verificando a relação dos determinantes obtemos (3.31). cqd

A partir da relação  $\mathbf{EVE} = \mathbf{V}^{-1} det \mathbf{V}$  podemos obter um resultado simplificado para as matrizes  $\mathbf{W} \in \mathbf{Q}$ , respectivamente

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{V}}{\det \mathbf{V}},\tag{3.38}$$

$$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{V} + \frac{1}{2}\mathbf{I}}{\det\left(\mathbf{V} + \frac{1}{2}\mathbf{I}\right)}.$$
(3.39)

Escrevendo essas matrizes em termos das variáveis  $n \in m$  da matriz de covariância, temos

$$\mathbf{W} = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2 - m^* m} \begin{pmatrix} n+\frac{1}{2} & m \\ m^* & n+\frac{1}{2} \end{pmatrix} , \qquad (3.40)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{(n+1)^2 - m^* m} \begin{pmatrix} n+1 & m \\ m^* & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1-\nu & \mu \\ \mu^* & 1-\nu \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

tais que estas matrizes obedecem à relação  $(2\mathbf{I}+\mathbf{W})(2\mathbf{I}-\mathbf{Q})=4\mathbf{I}.$ 

Note que as transições de  $\mathbf{V}$  para  $\mathbf{W} \in \mathbf{Q}$  só são possíveis se as integrais de Fourier (3.28) não forem singulares, fazendo com que a matriz de covariância deva ser positiva. Neste caso temos uma relação de desigualdade entre os valores dos elementos de  $\mathbf{V}$ 

$$n + \frac{1}{2} > \sqrt{m^* m} = |m|,$$
 (3.42)

logo não serão considerados valores de m e n que não satisfaçam a relação acima. Comparando com a relação (3.15), vemos que se a matriz de covariância representa um estado físico possível, necessariamente ela é positiva. Outra conseqüência é que os valores das determinantes de  $\mathbf{W} \in \mathbf{Q}$  também são positivas.

#### 3.1.2 Critério de Positividade

Podemos obter o operador gaussiano G a partir de uma forma Gaussiana simples  $G_0$ 

$$G_0 = (1-g)g^{a^{\dagger}a} = (1-g): e^{-(1-g)a^{\dagger}a}:, \qquad (3.43)$$

onde  $-1 \leq g < 1$ . Podemos então obter G a partir de uma transformação unitária linear U em  $a^{\dagger}$  e a, denominada tranformação de compressão:

$$G = U^{\dagger} G_0 U, \tag{3.44}$$

$$U^{\dagger}aU = ae^{i\phi}\cosh\theta + a^{\dagger}e^{i\varphi}\sinh\theta, \qquad (3.45)$$

$$U^{\dagger}a^{\dagger}U = a^{\dagger}e^{-i\phi}\cosh\theta + ae^{-i\varphi}\sinh\theta.$$
(3.46)

Definimos então uma matriz **U** caracterizada pelos três parâmetros reais  $\theta$ ,  $\phi \in \varphi$ :

$$U^{\dagger}\mathbf{a}U = \mathbf{U}\mathbf{a},\tag{3.47}$$

$$U^{\dagger} \mathbf{a}^{\dagger} U = \mathbf{a}^{\dagger} \mathbf{U}^{\dagger}, \qquad (3.48)$$

 $\operatorname{com}$ 

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} e^{i\phi}\cosh\theta & e^{i\varphi}\sinh\theta\\ e^{-i\varphi}\sinh\theta & e^{-i\phi}\cosh\theta \end{pmatrix}, \qquad (3.49)$$

onde os parâmetros  $\theta$ ,  $\phi - \varphi$  e g, podem ser descritos pelas variáveis n e m da matriz de covariância.

A relação (3.44) entre  $G \in G_0$  equivale a

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}^{\dagger} \mathbf{V}_0 \mathbf{U} \tag{3.50}$$

e conseqüentemente a partir das respectivas relações (3.32) e (3.34), temos

$$\mathbf{Q} = \left[ (\mathbf{U}^{\dagger} \mathbf{Q}_0 \mathbf{U})^{-1} + \frac{1}{2} \mathbf{E} (\mathbf{I} - \mathbf{U}^{\dagger} \mathbf{U}) \mathbf{E} \right]^{-1}$$
(3.51)

е

$$\mathbf{W} = \mathbf{U}^{\dagger} \mathbf{W}_0 \mathbf{U}. \tag{3.52}$$

Veja que  $\mathbf{Q} \neq \mathbf{U}^{\dagger} \mathbf{Q}_0 \mathbf{U}$ , o termo extra da expressão se deve a não comutação entre  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{E}$ . Como  $\mathbf{E} \mathbf{U} \mathbf{E} \neq \mathbf{U}$  faz com que *a* seja substituída por uma combinação linear

de  $a \in a^{\dagger}$ , alterando o ordenamento normal, obtida na expressão para o operador G (3.31).

A partir das matrizes  $\mathbf{V} \in \mathbf{V}_0$  dado como

$$\mathbf{V}_0 = \frac{1}{2} \frac{1+g}{1-g} \mathbf{I},\tag{3.53}$$

e utilizando as equações (3.8) e (3.50), temos

$$n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1+g}{1-g} \cosh(2\theta), \qquad (3.54)$$

$$m = \frac{1}{2} \frac{1+g}{1-g} e^{-i(\phi-\varphi)} \sinh(2\theta), \qquad (3.55)$$

e a partir destas podemos escrever g em função de  $n \in m$ ,

$$g = \frac{\left[(n+\frac{1}{2})^2 - m^*m\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}}{\left[(n+\frac{1}{2})^2 - m^*m\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}}.$$
(3.56)

Para que G seja positivo devemos ter que  $g \ge 0$ , neste caso o argumento da raiz quadrada da equação anterior deve ser pelo menos 1/4, obtendo as relações (3.14) e (3.15), fazendo com que a relação (3.12) seja necessária e suficiente para a positividade de G.

Em relação à função de Wigner, ou mais propriamente dito, de sua matriz  $\mathbf{W}$  associada, temos que

$$\sqrt{\det \mathbf{W}} \le 2$$
 (3.57)

é uma condição suficiente e necessária para a positividade de  $G(\mathbf{a})$  apenas em uma dimensão (quando generalizamos para o caso bidimensional esta relação não é válida), obtido a partir das propriedades do traço do quadrado do operador densidade variar entre 0 e 1, e a sua relação com a raiz da determinante da matriz  $\mathbf{W}$ .

Outra relação de positividade é dada por

$$\mathbf{I} - \stackrel{\sim}{\mathbf{Q}} \ge 0 \tag{3.58}$$

 $\operatorname{com}$ 

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 1-\nu & 0\\ 0 & 1-\nu \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q} + \mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{E}), \qquad (3.59)$$

que é obtida a partir de uma transformação do operador G do tipo  $G = U \overset{\sim}{G} U$ , onde U é uma operação unitária [9].

Vemos, portanto, que não precisamos calcular os autovalores de G para verificar sua positividade. Além disso, obtivemos relações para avaliar a positividade a partir da matriz associada a função de Wigner **W** e a matriz **Q**, a partir de (3.57) e (3.58) respectivamente.

## 3.1.3 P-representabilidade de Operadores Gaussianos Positivos

Um estado Gaussiano positivo é P-representável se podemos escrevê-lo expandindo em uma base de estados coerentes,

$$G = \int (d\mathbf{z}) : e^{-(a^{\dagger} - z^{*})(a - z)} : \sqrt{\det \mathbf{P}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{P}\mathbf{z}} = \int (d\mathbf{z})P(\mathbf{z})|\mathbf{z}\rangle\langle\mathbf{z}|$$
(3.60)

com a condição de que a matriz  $\mathbf{P} > 0$ . Desta expressão temos que :  $e^{-(a^{\dagger}-z^{*})(a-z)}$ : é o projetor para os estados coerentes. No caso, por exemplo, em que  $G =: e^{-a^{\dagger}a}$ :, ou seja, em que é um projetor na base dos estados de vácuo, temos

$$\sqrt{\det \mathbf{P}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{P}\mathbf{z}} \to \delta(\mathbf{z}).$$
(3.61)

Da expressão (3.60) é fácil verificar que se G for P representável significa que  $P(\mathbf{z})$  é uma distribuição de probabilidades legítma e G é dado como uma mistura de estados coerentes. Assim é determinado que todo estado G que for P-representável é um estado clássico. Neste caso, não-classicalidade implica em não P-representabilidade.

Verificamos que podemos associar a P-representação do operador a partir de uma matriz  $\mathbf{P}$ . Da mesma forma anteriormente, esta matriz  $\mathbf{P}$  está relacionada com as matrizes de covariância  $\mathbf{V}$ , a de Wigner  $\mathbf{W}$  e a  $\mathbf{Q}$  como

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \left( \mathbf{V} - \frac{1}{2} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{E} = \left( \mathbf{W}^{-1} - \frac{1}{2} \mathbf{I} \right)^{-1} = \left( \mathbf{Q}^{-1} - \mathbf{I} \right)^{-1}.$$
 (3.62)

Prova das igualdades (3.62):

Como descrito anteriormente, a função P de Glauber pode ser obtida a partir da transformada de Fourier da função característica de ordenamento normal do operador, isto é

$$P(\mathbf{z}) = \int (d\mathbf{z}') e^{-\mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{E} \mathbf{z}'} \chi_N(\mathbf{z}'), \qquad (3.63)$$

onde

$$\chi_N(\mathbf{z}) = Tr\{e^{za^{\dagger}}e^{-z^*a}G(\mathbf{a})\}$$
(3.64)

e

$$\chi_N(\mathbf{z}) = e^{\frac{1}{4}\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{z}}C(\mathbf{z}).$$
(3.65)

Substituindo a forma Gaussiana do função característica simétrica (3.7)na relação acima, temos

$$\chi_N(\mathbf{z}) = e^{\frac{1}{4}\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{z}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{V}\mathbf{z}} = e^{\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\dagger}\left(\frac{1}{2}\mathbf{I}-\mathbf{V}\right)\mathbf{z}}.$$
(3.66)

Agora, substituindo a equação (3.66) em (3.63) e sabendo que  $-\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{z}' = \mathbf{z}'^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{z}$ , temos

$$P(\mathbf{z}) = \int (d\mathbf{z}') e^{\mathbf{z}'^{\dagger} \mathbf{E} \mathbf{z}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}'^{\dagger} (\mathbf{V} - \frac{1}{2}\mathbf{I})\mathbf{z}'}.$$
(3.67)

Utilizando a integral de Fourier-Gauss (3.28), temos

$$P(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{V} - \frac{1}{2}\mathbf{I})}} e^{\frac{1}{2}(\mathbf{E}\mathbf{z})^T \mathbf{T} \left(\mathbf{V} - \frac{1}{2}\mathbf{I}\right)^{-1}(\mathbf{E}\mathbf{z})}$$
(3.68)

e então com as relações  $(\mathbf{E}\mathbf{z})^T = \mathbf{z}\mathbf{E} \ \mathbf{e} \ \mathbf{z}\mathbf{E}\mathbf{T} = -\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{E}$ , obtemos

$$P(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{V} - \frac{1}{2}\mathbf{I})}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{E}\left(\mathbf{V} - \frac{1}{2}\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{E}\mathbf{z}} \equiv \sqrt{\det\mathbf{P}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{P}\mathbf{z}},$$
(3.69)

ou seja, a primeira igualdade da relação (3.62):  $\mathbf{P} = \mathbf{E}(\mathbf{V} - \frac{1}{2}\mathbf{I})^{-1}\mathbf{E}$  e invertendo-a, temos a matriz de covariância

$$\mathbf{V} = \mathbf{E}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathbf{I}.$$
 (3.70)

Vemos também a equivalência entre as constantes multiplicativas da exponencial:

$$\det \mathbf{P} = \det \left[ \mathbf{E} \left( \mathbf{V} - \frac{1}{2} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{E} \right] = \det \left( \mathbf{V} - \frac{1}{2} \mathbf{I} \right)^{-1} = \frac{1}{\det \left( \mathbf{V} - \frac{1}{2} \mathbf{I} \right)}.$$
 (3.71)

As relações entre as matrizes  $\mathbf{Q} \in \mathbf{W} \operatorname{com} \mathbf{P} \operatorname{de} (3.62)$ , são obtidas utilizando (3.32) e (3.34), respectivamente

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} \left( \mathbf{E} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{E} = \left( \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{I} \right)^{-1}$$
(3.72)

е

$$\mathbf{W} = \left(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{I}\right)^{-1} = \left(\mathbf{P}^{-1} + \frac{1}{2}\mathbf{I}\right)^{-1}, \qquad (3.73)$$

lembrando que  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{-1}$ . cqd

Logo se G for P-representável, isto é<br/>, $\mathbf{P}>0,$ temos

$$\mathbf{V} - \frac{1}{2}\mathbf{I} > 0, \tag{3.74}$$

$$\mathbf{W}^{-1} - \frac{1}{2}\mathbf{I} > 0, \tag{3.75}$$

$$\mathbf{Q}^{-1} - \mathbf{I} > 0, \tag{3.76}$$

que em termos de  $n \in m$  pode ser descrito como

$$n > |m|. \tag{3.77}$$

Vemos então que o operador Gaussian<br/>o $G_0$ da equação (3.43) é P-representável s<br/>e $g>0 \mbox{ pois}$ 

$$(1-g)g^{a^{\dagger}a} = \int (d\mathbf{z}) : e^{-(a^{\dagger}-z^*)(a-z)} : (g^{-1}-1)e^{-(g^{-1}-1)z^*z}.$$
 (3.78)

Temos então que a transformação unitária para  ${\bf P}$  é dada por

$$\mathbf{P} = \left[ (\mathbf{U}^{\dagger} \mathbf{P}_0 \mathbf{U})^{-1} - \frac{1}{2} \mathbf{E} (\mathbf{I} - \mathbf{U}^{\dagger} \mathbf{U}) \mathbf{E} \right]^{-1}.$$
 (3.79)

Podemos obter uma condição para um dos parâmetros da matriz de transformação  $\mathbf{U}$  de (3.49), tal que esta leve a um operador P-representável a partir de  $G_0$  (3.78), neste caso devemos aplicar a condição de P-representabilidade (3.77) nos parâmetros da matriz de covariância  $\mathbf{V}_0$  (3.50):

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{U}^{\dagger - 1} \mathbf{V} \mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} N + \frac{1}{2} & M \\ M^* & N + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
(3.80)

 $\operatorname{com}$ 

$$N > |M|. \tag{3.81}$$

No caso, por exemplo, em que  $|m| = Re(me^{i\phi-i\varphi})$  e escolhendo  $\phi$  e  $\varphi$  tal que  $tg(\varphi - \phi) = \frac{Im(m)}{Re(m)}$  obtemos as seguintes expressões para  $N \in M$ 

$$N + \frac{1}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\cosh(2\theta) - |m|\sinh(2\theta), \qquad (3.82)$$

$$M = e^{i\phi + i\varphi} \left[ |m| \cosh(2\theta) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \sinh(2\theta) \right]$$
(3.83)

e utilizando (3.81), a condição de P-representabilidade, temos um intervalo de valores possíveis para  $e^{2\theta}$ 

$$\frac{1}{2n+1-2|m|} \le e^{2\theta} \le 2n+1+2|m|. \tag{3.84}$$

Neste caso, qualquer  $\theta$  na qual a condição acima seja válida, o operador de transformação U relaciona um dado estado G a um outro que seja P-representável.

# 3.2 Estados Gaussianos de um Oscilador Harmônico Bidimensional

#### 3.2.1 Parametrizações

As parametrizações são análogas ao caso unidimensional, onde o estado gaussiano é definido pela função característica dada por (3.7), sendo que neste caso o número de variáveis dobram. Teremos então que

$$\mathbf{z}^{\dagger} = (z_1^*, z_1, z_2^*, z_2) , \ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1^* \\ z_2 \\ z_2^* \end{pmatrix},$$
 (3.85)

$$\mathbf{a}^{\dagger} = (a_1^{\dagger}, a_1, a_2^{\dagger}, a_2) , \ \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1^{\dagger} \\ a_2 \\ a_2^{\dagger} \end{pmatrix}, \qquad (3.86)$$

onde  $a_1, a_1^{\dagger}, a_2$  e  $a_2^{\dagger}$  são os operadores de criação e aniquilação para os subsistemas 1 e 2 respectivamente. E agora é uma matriz  $4 \times 4$  definida como

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \ \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.87}$$

assim como a matriz de covariância **V** que descreve todos os momentos de segunda ordem  $V_{ij} = (-1)^{i+j} \langle \{v_i, v_j^{\dagger}\} \rangle / 2$ , onde  $(v_1, v_2, v_3, v_4) = (a_1, a_1^{\dagger}, a_2, a_2^{\dagger})$ , que pode ser descomposta em quatro submatrizes de dimensão  $2 \times 2$ :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^{\dagger} & \mathbf{V}_2 \end{pmatrix}, \tag{3.88}$$

onde  $\mathbf{V}_1 \in \mathbf{V}_2$  são matrizes Hermiteanas contendo somente elementos locais, enquanto  $\mathbf{C}$  contém toda correlação entre os dois subsistemas. Explicitamente temos:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} n_1 + \frac{1}{2} & m_1 & m_s & m_c \\ m_1^* & n_1 + \frac{1}{2} & m_c^* & m_s^* \\ m_s^* & m_c & n_2 + \frac{1}{2} & m_2 \\ m_c^* & m_s & m_2^* & n_2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$
(3.89)

onde

$$n_{1} = Tr\{a_{1}^{\dagger}a_{1}G\}, \quad m_{1} = -Tr\{a_{1}^{2}G\}$$

$$n_{2} = Tr\{a_{2}^{\dagger}a_{2}G\}, \quad m_{2} = -Tr\{a_{2}^{2}G\}$$

$$m_{s} = Tr\{a_{1}a_{2}^{\dagger}G\}, \quad m_{c} = -Tr\{a_{1}a_{2}G\}.$$
(3.90)

Com estas substituições, as matrizes  $4 \times 4$  V, W, Q e P estão relacionadas de acordo com (3.32), (3.33), (3.34) e (3.62), respectivamente.

Segue também, como no caso unidimensional, que a matriz de covariância deve ser postiva semidefinida ( $\mathbf{V} \ge 0$ ), além disso o principio de incerteza generalizado (3.12) deve ser satisfeito.

## 3.3 Decomposição de Positividade em Termos do Complemento de Schur

Um critério de positividade de uma matriz muito útil é feito decompondo a matriz em blocos e usando propriedades de positividade é a chamada Decomposição de Schur [22]: Qualquer matriz hermiteana é positiva se e somente se qualquer matriz bloco principal também for positiva, ou de forma mais apropriada, se a matriz bloco principal superior e seu complemento de Schur também forem positivos. Assim, para a matriz de covariância (3.88),  $\mathbf{V} \geq 0$  se e somente se

$$\mathbf{V}_1 \ge 0 \tag{3.91}$$

e o complemento de Schur de  $V_1$ , dado por

$$S(\mathbf{V}_1) = \mathbf{V}_2 - \mathbf{C}^{\dagger}(\mathbf{V}_1)^{-1}\mathbf{C} \ge 0.$$
(3.92)

Prova: Decomposição de Positividade em termos do Complemento de Schur

Antes de começar a prova, façamos a seguinte operação:

$$(x^*, y^*) \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^{\dagger} & \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^* \mathbf{V}_1 x + y^* \mathbf{C}^{\dagger} x + x^* \mathbf{C} y + y^* \mathbf{V}_2 y$$
  
$$= x^* \mathbf{V}_1 x + y^* [\mathbf{V}_2 - \mathbf{C}^{\dagger} (\mathbf{V}_1)^{-1} \mathbf{C}] y + y^* \mathbf{C}^{\dagger} (\mathbf{V}_1)^{-1} \mathbf{C} y + y^* \mathbf{C}^{\dagger} (\mathbf{V}_1)^{-1} \mathbf{V}_1 x + x^* \mathbf{V}_1 (\mathbf{V}_1)^{-1} \mathbf{C} y$$
  
$$= y^* [\mathbf{V}_2 - \mathbf{C}^{\dagger} (\mathbf{V}_1)^{-1} \mathbf{C}] y + [(\mathbf{V}_1)^{-1} \mathbf{C} y + x]^{\dagger} \mathbf{V}_2 [x + (\mathbf{V}_1)^{-1} \mathbf{C} y].$$
(3.93)

(i) Se  $\mathbf{V} \ge 0$  então  $\mathbf{V}_2 - \mathbf{C}^{\dagger} (\mathbf{V}_1)^{-1} \mathbf{C} \ge 0$ .

Quando $\mathbf{V} \geq 0$ temos que

$$(x^*, y^*) \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^{\dagger} & \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ge 0, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
(3.94)

Assim voltando a expressão (3.93), temos

$$y^{*}[\mathbf{V}_{2} - \mathbf{C}^{\dagger}(\mathbf{V}_{1})^{-1}\mathbf{C}]y + [(\mathbf{V}_{1})^{-1}\mathbf{C}y + x]^{\dagger}\mathbf{V}_{2}[x + (\mathbf{V}_{1})^{-1}\mathbf{C}y] \ge 0$$
(3.95)

Como a expressão acima é válida quaisquer que sejam x e y diferentes de zero, então, em particular, ela também é válida no caso em que

$$x = -(\mathbf{V}_1)^{-1} \mathbf{C} y \tag{3.96}$$

Substituindo este valor de x em (3.95), obtemos

$$y^* [\mathbf{V}_2 - \mathbf{C}^{\dagger} (\mathbf{V}_1)^{-1} \mathbf{C}] y \ge 0.$$
(3.97)

Logo concluimos que  $[\mathbf{V}_2 - \mathbf{C}^{\dagger}(\mathbf{V}_1)^{-1}\mathbf{C}] \ge 0.$  cqd

(ii) Se 
$$[\mathbf{V}_2 - \mathbf{C}^{\dagger}(\mathbf{V}_1)^{-1}\mathbf{C}] \ge 0$$
 então  $\mathbf{V} \ge 0$ .

Substituindo (3.96) em (3.93) temos que

$$(x^*, y^*) \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^{\dagger} & \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y^* [\mathbf{V}_2 - \mathbf{C}^{\dagger} (\mathbf{V}_1)^{-1} \mathbf{C}] y.$$
(3.98)

Mas

$$[\mathbf{V}_2 - \mathbf{C}^{\dagger}(\mathbf{V}_1)^{-1}\mathbf{C}] \ge 0, \qquad (3.99)$$

logo

$$(x^*, y^*) \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^{\dagger} & \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ge 0,$$
 (3.100)

então

$$\mathbf{V} \ge 0. \tag{3.101}$$

#### 3.3.1 Critério de Separabilidade para Estados Gaussianos

Um estado é separável se seu operador densidade  $\rho$  pode ser escrito como uma soma de produtos diretos da forma

$$\rho = \sum_{k} p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B, \qquad (3.102)$$

onde  $p_k \ge 0$ :  $\sum_k p_k = 1$ , e  $\rho_k^A$  e  $\rho_k^B$  são matrizes densidade dos subsistemas  $A \in B$ .

Uma condição necessária e suficiente de separabilidade para estados gaussianos é o critério de separabilidade de Simon [37]. Este critério é uma generalização para sistemas descritos por variáveis contínuas do critério de Transposição Parcial Positiva de Peres-Horodecki [43, 44].

O critério de separabilidade de Peres-Horodecki pode ser estendido para o caso de sistemas descritos por variáveis contínuas e possui uma interpretação geométrica no espaço de fases em termos de sua representação pela função de Wigner desenvolvida por R. Simon [37]: se um operador densidade é separável, então sua função de distribuição de Wigner é mapeada necessariamente em outra distribuição de Wigner sob a operação de reflexão temporal local no espaço de fase [20]. Isto quer dizer que quando uma transposição parcial é feita no sistema, temos em termos da função de Wigner

$$W(\mathbf{z}) \to W(\mathbf{T}\mathbf{z}),$$
 (3.103)

onde

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X} \end{pmatrix}, \ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.104}$$

é a operação de transposição parcial sobre o subsistema 2. Temos então que

$$\mathbf{Tv} = \begin{pmatrix} a_1\\ a_1^{\dagger}\\ a_2^{\dagger}\\ a_2 \end{pmatrix}.$$
 (3.105)

Simom ainda mostra que no caso em que o sistema é Gaussiano, uma condição necessária e suficiente para que este seja separável, caso em que o operador densidade pode ser escrito na forma (3.102), é que sua matriz de covariância deva satisfazer

$$\widetilde{\mathbf{V}} + \frac{1}{2}\mathbf{E} \ge 0, \tag{3.106}$$

sob reflexão temporal local, isto é,  $\stackrel{\sim}{\mathbf{V}} = \mathbf{TVT}$ .

Esta desigualdade, necessária e suficiente para a separabilidade de estados gaussianos, é obtida se impormos que a condição (3.106) seja invariante por transformações locais  $S_{local} \in Sp(2, R) \otimes Sp(2, R)$ , que não afetam o grau de emaranhamento do sistema, e notarmos que o operador obtido pela transposição parcial de  $\rho$  também é um operador densidade se e somente se o estado for separável, garantindo sua positividade e fazendo com que sua matriz de covariância, dada por  $\widetilde{\mathbf{V}}$ , deva satisfazer a condição para que seja um estado físico possível (3.12). A prova detalhada em termos da representação de posição e momentum dos critérios de separabilidade de Peres-Horodecki e Simon podem ser encontrados em [36].

Utilizando o critério de positividade em termos da decomposição de Schur descrito na seção anterior, temos que a condição de separabilidade (3.106) é satisfeita se ambas desigualdades

$$\mathbf{V}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{Z} \ge 0 \tag{3.107}$$

$$\left(\mathbf{X}\mathbf{V}_{2}\mathbf{X} + \frac{1}{2}\mathbf{Z}\right) - \mathbf{X}\mathbf{C}^{\dagger}\left(\mathbf{V}_{1} + \frac{1}{2}\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X} \ge 0, \qquad (3.108)$$

forem satisfeitas.

## 3.4 Exemplos

## 3.4.1 Operador de Paridade

Observamos anteriormente que a transição de  $\mathbf{V}$  para  $\mathbf{W} \in \mathbf{Q}$  é não singular para  $\mathbf{V} > 0$ . O limite  $\mathbf{V} = 0$  pode ser incluído e este caso é necessário para a construção da representação de Wigner do operador Gaussiano. Para esta escolha de  $\mathbf{V}$  a função de Wigner correspondente a tal operador é dada por uma expressão singular e que pode ser normalizada:

$$W(\mathbf{z}) = \delta^{(2)}(\mathbf{z}) \tag{3.109}$$

 $\operatorname{com}$ 

$$\int d\mathbf{z} \ W(\mathbf{z}) = 1, \tag{3.110}$$

onde

$$\int d\mathbf{z} \ \delta^{(2)}(\mathbf{z}) f(\mathbf{z}) = f\left(\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0\\0 \end{bmatrix}\right). \tag{3.111}$$

Usando esta relação obtemos de (3.22) o operador Gaussiano resultante

$$G = 2: e^{-2a^{\dagger}a} := 2(-1)^{a^{\dagger}a} = 2 e^{i\pi a^{\dagger}a}, \qquad (3.112)$$

onde  $e^{i\pi a^{\dagger}a}$  é o operador de paridade.

O operador de paridade tem a propriedade de induzir reflexões especulares no sistema. Ele também pode ser definido como uma integral sobre o operador de deslocamento:

$$e^{i\pi a^{\dagger}a} = \int d\mathbf{z} e^{-\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{a}}.$$
(3.113)

Neste caso, o operador de paridade pode ser visto como um operador Gaussiano com matriz de covariância com todos seus elementos nulos, ou seja,  $\mathbf{V} = 0$ .

## 3.4.2 Estado Puro

O segundo exemplo é um operador Gaussiano representando um estado puro. Sabese que para um estado ser puro seu respectivo operador deve satisfazer a seguinte condição

$$Tr\{G^2\} = 1.$$
 (3.114)

Para o caso de um estado de um modo, temos que para um estado ser puro

$$\det \mathbf{V} = \frac{1}{4}.\tag{3.115}$$

Essa expressão é obtida obsevando que

$$Tr\{G^2\} = \frac{1}{2\sqrt{\det \mathbf{V}}},\tag{3.116}$$

e impondo a relação (3.114).

Prova da relação (3.114):

Escrevendo o operador  ${\cal G}$ na forma Gaussiana e calculando o traço do seu quadrado, temos:

$$Tr\{G^{2}\} = Tr\left\{\int d\mathbf{z}e^{\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{Z}\mathbf{a}}e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{V}\mathbf{z}}\int d\mathbf{s}e^{\mathbf{s}^{\dagger}\mathbf{Z}\mathbf{a}}e^{-\frac{1}{2}\mathbf{s}^{\dagger}\mathbf{V}\mathbf{s}}\right\}$$
$$= \int d\mathbf{z}d\mathbf{s} \ Tr\{e^{(\mathbf{z}+\mathbf{s})\mathbf{Z}\mathbf{a}}\} \ e^{-\frac{1}{2}\mathbf{s}^{\dagger}\mathbf{V}\mathbf{s}}e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{V}\mathbf{z}}$$
$$= \int d\mathbf{z}d\mathbf{s} \ \delta^{(2)}(\mathbf{z}+\mathbf{s}) \ e^{-\frac{1}{2}\mathbf{s}^{\dagger}\mathbf{V}\mathbf{s}}e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{V}\mathbf{z}}$$
$$= \int d\mathbf{z} \ e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{V}\mathbf{z}} = \frac{1}{2\sqrt{\det \mathbf{V}}}$$
(3.117)

cqd

Para o caso de dois modos a condição sobre a sua matriz de covariância é dada por

$$\det \mathbf{V} = \frac{1}{16},\tag{3.118}$$

onde agora a relação entre  $Tr\{G^2\}$  e a matriz de covariância V é dada por

$$Tr\{G^2\} = \frac{1}{4\sqrt{\det \mathbf{V}}}.$$
 (3.119)

A prova desta relação é análoga ao caso unidimensional.

Para este caso temos um critério de separabilidade interessante, simples e suficiente, pois é necessário estudar apenas propriedades de  $\mathbf{V}_1$  ou  $\mathbf{V}_2$ , que correspondem as partes reduzidas do estado Gaussiano bipartido puro. Se tanto  $\mathbf{V}_1$  ou  $\mathbf{V}_2$  descreverem estados puros, então o estado conjunto não é emaranhado. Neste caso devemos analisar se

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{4} \ ou \ \mathbf{V}_2 = \frac{1}{4}. \tag{3.120}$$

Se por outro lado  $\mathbf{V}_1$  ou  $\mathbf{V}_2 > 1/4$  nada se pode dizer.

### 3.4.3 Estado Comprimido com Ruído Térmico

O estado comprimido com ruído térmico pode ser obtido acoplando cada modo do estado comprimido de vácuo em reservatórios térmicos externos independentes. Alternativamente, isto pode ser interpretado como a transmissão dos dois modos através de um canal quântico ruidoso.

Neste exemplo a matriz de covariância de um estado comprimido com ruído térmicoé simétrica [47]:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} n + \frac{1}{2} & 0 & 0 & m \\ 0 & n + \frac{1}{2} & m & 0 \\ 0 & m & n + \frac{1}{2} & 0 \\ m & 0 & 0 & n + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$
(3.121)  
onde  $n + 1/2 = 2hc_1/(c_1^2 - c_2^2)$  e  $m = 2hc_2/(c_1^2 - c_2^2)$  com

$$c_1 = 2(e^{-p_2} + e^{-p_1}) + (2\bar{n} + 1)(p_1 + p_2)\left(\frac{1 - e^{-p_1}}{p_1} + \frac{1 - e^{-p_2}}{p_2}\right),$$
 (3.122)

$$c_2 = -2(e^{-p_2} - e^{-p_1}) + (2\bar{n} + 1)(p_1 + p_2) \left(\frac{1 - e^{-p_1}}{p_1} - \frac{1 - e^{-p_2}}{p_2}\right), \quad (3.123)$$

е

$$h = \left[ e^{-p_1} + (2\bar{n} + 1) \left( \frac{p_1 + p_2}{2} \right) \left( \frac{1 - e^{p_1}}{p_1} \right) \right] \\ \times \left[ e^{-p_2} + (2\bar{n} + 1) \left( \frac{p_1 + p_2}{2} \right) \left( \frac{1 - e^{p_2}}{p_2} \right) \right],$$
(3.124)

onde os parâmetros  $p_1 = d + 2r$  e  $p_2 = d - 2r$  são usados. Chamamos  $d = \gamma t$  parâmetro de difusão e  $r = \kappa t$  o parâmetro de compressão.  $\bar{n}$  é o valor médio de fótons térmicos inseridos no ruído quântico. O tipo de estado associado a **V** da forma (3.121) é dito ser simétrico (det  $\mathbf{V}_1 = \det \mathbf{V}_2$ ).

Em termos da representação de Wigner, podemos obter sua matriz associada  $\mathbf{W}$  pela relação matricial (3.34), obtendo

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & c_2 & c_1 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}.$$
 (3.125)

Quando o termo de difusão d é nulo, obtendo o caso do estado comprimido sem a interação térmica obtemos a seguinte matriz de covariância dependente apenas do parâmetro de compressão r, que é justamente o vácuo comprimido,

$$\mathbf{V} = \frac{e^{-4r}}{2} \begin{pmatrix} \cosh 2r & 0 & 0 & \sinh 2r \\ 0 & \cosh 2r & \sinh 2r & 0 \\ 0 & \sinh 2r & \cosh 2r & 0 \\ \sinh 2r & 0 & 0 & \cosh 2r \end{pmatrix}.$$
 (3.126)

Foi mostrado que para estados Gaussianos simétricos, e somente para estes tipos de estados, as condições de separabilidade (3.106) e P-representabilidade (3.74) são equivalentes [20]. Lembrando que a condição de separabilidade (P-representabilidade)



Fig.3.1 Este gráfico mostra os estados que são separáveis. Estados sobre ou acima da linha sólida são estados separáveis. A linha tracejada-pontilhada é para d = 5 enquanto a linha tracejada é para d = 2, 5. Os dois pontos correspondem a  $\bar{n} = 0$ , isto é, vácuo comprimido. O valor médio do número de fótons aumenta de 0 a 10 em amabas as linhas. O parâmetro de compressão está fixado em r = 1, 5. Todas as quantidades são adimensionais [47].

para esta classe de estados é dada por  $\mathbf{V} - 1/2\mathbf{I} \ge \mathbf{0}$ , em termos dos elementos da matriz de covariância  $\mathbf{V}$ , ela é equivalente a  $n \ge m$ . O estado térmico comprimido será separável se e somente se os autovalores da eq. (3.74) forem não negativos. Existem neste caso quatro autovalores duplamente degenerados. Eles são

$$e_{1,2} = \frac{(1 - e^{-p_2})(d\bar{n} + r)}{p_2},$$
(3.127)

$$e_{3,4} = \frac{(1 - e^{-p_2})(d\bar{n} - r)}{p_1}.$$
(3.128)

O primeiro autovalor possui a propriedade de que seu sinal é positivo para todos o espaço de parâmetros, não sendo assim importante para o estabelecimento da não separabilidade do estado. O segundo autovalor determinará a não separabilidade do estado. Para certas regiões do espaço de parâmetros estes são negativos, enquanto em outras regiões são positivos. A negatividade de  $e_{3,4}$  está diretamente relacionada com o sinal de  $(d\bar{n} - r)$ . Logo o estado é não separável se e somente se

$$r > d\bar{n}.\tag{3.129}$$

Esta desigualdade nos diz que para o estado ser não separável o parâmetro de com-



Fig.3.2 Esquema de um divisor de feixes. Dois feixes, descritos pelos operadores de bósons  $a_1$   $(a_1^{\dagger})$  e  $a_2$   $(a_2^{\dagger})$ , incidem sobre um espelho e se misturam, a fim de obtermos dois feixes resultantes, um de transmissão e outro de reflexão, descritos pelos operadores  $a'_1$   $(a'_1^{\dagger})$  e  $a'_2$   $(a'_2^{\dagger})$ .

pressão deve ser maior que o produto da taxa de perda de um fóton, descrita pelo parâmetro de difusão interno, e a média do número de fótons do reservatório. A figura  $3.1 \text{ mostra um gráfico da variação dos parâmetros } n \in m$ . Estados que estão sobre ou acima da linha sólida são estados separáveis.

#### 3.4.4 Divisor de feixes (*Beam splitter*)

O divisor de feixes consiste em misturar dois feixes incidentes em um espelho a fim de se obter outros dois feixes de saída, sendo, respectivamente, os feixes de transmissão e reflexão providos do espelho.

A álgebra envolvida no tratamento de espelhos divisores de feixe pode ser encontrada na referência [48].

Seja  $a_1$  e  $a_2$  operadores de destruição representando dois estados de entrada de um divisor de feixes (veja figura 3.2).

A transformação do estado de entrada  $\rho_{in}$  é dada por uma operação B:

$$\rho_{out} = B\rho_{in}B^{\dagger}, \qquad (3.130)$$

$$\mathbf{a}' = B\mathbf{a}B^{\dagger} = \mathbf{B}\mathbf{a},\tag{3.131}$$

onde  $\mathbf{B}$  é a matriz associada a esta operação:

$$\begin{pmatrix} a_1'\\a_1'\\a_2'\\a_2'\\a_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta\\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0\\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1\\a_1'\\a_2\\a_2'\\a_2' \end{pmatrix}.$$
 (3.132)

Em termos da função característica do estado final, temos

$$\chi_{out}(\mathbf{z}) = Tr\{D(\mathbf{z})\rho_{out}\} = Tr\{D(\mathbf{z})B\rho_{in}B^{\dagger}\} = Tr\{B^{\dagger}D(\mathbf{z})B\rho_{in}\} = Tr\{D(\mathbf{B}\mathbf{z})\rho_{in}\}$$
(3.133)

Logo a forma Gaussiana resultante função característica do estado final, será:

$$\chi_{out}(\mathbf{z}) = \chi_{in}(\mathbf{B}\mathbf{z}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{V}\mathbf{B}\mathbf{z}}.$$
(3.134)

Vemos então que a operação de divisão de feixes é efetuada através de uma transformação por produto matriciais da matriz de covariância do estado de entrada e da matriz  $\mathbf{B}$  que caracteriza a operação de divisão de feixe:

$$\mathbf{V}_{out} = \mathbf{B}^{\dagger} \mathbf{V} \mathbf{B}. \tag{3.135}$$

# Capítulo 4 Operações Gaussianas

Neste capítulo damos ênfase ao estudo de operações Gaussianas e à interpretação física dos procedimentos matemáticos envolvidos na decomposição de propriedades de positividade de matrizes em termos de propriedades de submatrizes bloco. Basicamente, uma operação Gaussiana é aquela que preserva o caráter Gaussiano do estado de entrada. Desta forma podemos falar de uma operação Gaussiana como um mapa completamente positivo que leva estados Gaussianos de entrada a outros estados Gaussianos [17, 18, 16]. Isto é feito usando o isomorfismo entre mapas completamente positivos, que caracterizam ações físicas, e operadores positivos.

Observou-se que certo tipos de operações Gaussianas que envolviam projeções em estados puros em um dos modos de um estado Gaussiano bipartido de entrada e traço parcial, faziam com que o estado reduzido de saída fosse Gaussiano com sua matriz de covariância na forma de um complemento de Schur de uma matriz especial [17, 18, 19]. Porém, a operação física relacionada à obtenção do complemento de Schur da matriz de covariância do estado bipartido de entrada não tinha sido identificada. Após o estudo deste problema, obtivemos que esta operação está relacionada com um conjunto de medições da paridade em um dos modos do sistema, definindo um operador Gaussiano no qual a sua matriz de covariância possui a forma do complemento de Schur. Como medições de paridade são necessárias para obter o valor médio da paridade que está relacionada com a função de Wigner do sistema [49, 50, 51, 52], observa-se uma ligação entre o complemento de Schur e a obtenção desta função. Por fim, generalizamos este procedimento para um estado Gaussiano de n modos e demonstramos que um operador relacionado aos estados dos n - 1 sistemas resultantes de cada medida de paridade em um dos modos, a fim de obter seu valor médio, é dado por uma matriz de covariância tal que seus elementos blocos  $2 \times 2$  são complementos de Schur de submatrizes especiais da matriz de covariância global.

## 4.1 Formas Gerais de Operações Gaussianas.

Definição 1: Dado um mapa completamente positivo (CP)  $\varepsilon$  atuando em um operador limitado com espaço de Hilbert  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , definimos o operador positivo  $E_{12} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$  como

$$E_{12} = (\varepsilon \otimes \mathbf{I}) |\Phi_{12}\rangle \langle \Phi_{12}|, \qquad (4.1)$$

onde  $|\Phi_{12}\rangle \propto \sum_{k\geq 0} |k\rangle_1 |k\rangle_2$  corresponde ao estado de Bell generalizado. Dizemos então que  $E_{12}$  é o operador correspondente ao mapa  $\varepsilon$ . Fisicamente a equação (4.1) nos diz que dado um mapa  $\varepsilon$ , o seu operador  $E_{12}$  é obtido a partir da atuação do mapa sobre um dos subsitemas de um estado bipartido puro máximamente emaranhado  $|\Phi_{12}\rangle\langle\Phi_{12}|$ .

Estudaremos agora o caso de uma projeção conjunta no estado de Bell generalizado  $|\Phi_{23}\rangle\langle\Phi_{23}|$  entre um estado de entrada  $\rho_3$  com o modo 2 de um estado Gaussiano bipartido  $\rho_{12}$ , isto é

$$\varepsilon(\rho) \propto Tr_{23} \left(\rho_{12}\rho_3 |\Phi_{23}\rangle \langle \Phi_{23}|\right) = Tr_3 \left(\rho_{13}^{T_3}\rho_3\right), \qquad (4.2)$$

onde  $T_3$  indica uma transposição local no modo do estado bipartido que está sendo projetado conjuntamente com o estado de entrada  $\rho_3$ .

#### Prova da equação (4.2):

O estado resultante da projeção conjunta no estado  $\rho_3$  com o subsistema 2 de  $\rho_{12}$  será

$$\varepsilon(\rho) \propto Tr_{23} \left\{ \rho_{12} \otimes \rho_3 | \Phi_{23} \rangle \langle \Phi_{23} | \right\} = \langle \Phi_{23} | \rho_{12} \otimes \rho_3 | \Phi_{23} \rangle \tag{4.3}$$

Escrevendo  $\rho_{12}$  na forma (4.1), temos

$$\varepsilon(\rho) \propto \langle \Phi_{23} | \varepsilon \otimes \mathbf{I} | \Phi_{12} \rangle \langle \Phi_{12} | \rho_3 | \Phi_{23} \rangle = \langle \Phi_{23} | \rho_3 \varepsilon \otimes \mathbf{I} | \Phi_{12} \rangle \langle \Phi_{12} | \Phi_{23} \rangle.$$
(4.4)

Mas, utilizando a ortogonalidade da base de estados de Fock $\{|k\rangle\},$ temos

$$\langle \Phi_{12} | \Phi_{23} \rangle \propto \left( \sum_{k \ge 0} \langle k |_2 \langle k | \right) \left( \sum_{j \ge 0} |j\rangle_2 |j\rangle_3 \right) = \sum_{k \ge 0} \langle k | k \rangle_3.$$
(4.5)

Substituindo em (4.4), temos

$$\begin{split} \varepsilon(\rho) &\propto \langle \Phi_{23} | \rho_3 \varepsilon \otimes \mathbf{I} | \Phi_{12} \rangle \sum_{k \ge 0} {}_1 \langle k | k \rangle_3 \\ &= \left( \sum_{l \ge 0} {}_2 \langle i |_3 \langle k | \right) \rho_3(\varepsilon \otimes \mathbf{I}) \left( \sum_{j \ge 0} {}_1 j \rangle_1 | l \rangle_2 \right) \left( \sum_{k \ge 0} {}_1 \langle k | k \rangle_3 \right) \\ &= \sum_{i,j} {}_2 {}_2 \langle 1 | \left[ {}_3 \langle i | \rho_3(\varepsilon \otimes \mathbf{I}) | j \rangle_1 \right] | j \rangle_2 } \left( \sum_{k \ge 0} {}_1 \langle k | k \rangle_3 \right) \\ &= \sum_{j \ge 0} {}_3 \langle j | \rho_3(\varepsilon \otimes \mathbf{I}) | j \rangle_1 \sum_{k \ge 0} {}_1 \langle k | k \rangle_3 \\ &= \sum_{j,k} {}_3 \langle j | \rho_3(\varepsilon \otimes \mathbf{I}) | j \rangle_1 \sum_{k \ge 0} {}_1 \langle k | k \rangle_3 \\ &= Tr_3 \left\{ \sum_{j,k} {}_1 k \rangle_3 {}_3 \langle j | \rho_3(\varepsilon \otimes \mathbf{I}) | j \rangle_1 {}_1 \langle k | \right\} \\ &= Tr_3 \left\{ \rho_3(\varepsilon \otimes \mathbf{I}) \sum_{j,k} {}_j j \rangle_1 | k \rangle_3 {}_1 \langle k | 3 \langle j | \right\} \\ &= Tr_3 \left\{ \rho_3(\varepsilon \otimes \mathbf{I}) \mathbf{T}_3 \left( \sum_{j,k} {}_j j \rangle_1 | j \rangle_3 {}_1 \langle k | 3 \langle k | \right) \mathbf{T}_3^{\dagger} \right\} \\ &= Tr_3 \left\{ \rho_3 \mathbf{T}_3 (\varepsilon \otimes \mathbf{I}) | \Phi_{13} \rangle \langle \Phi_{13} | \rangle \mathbf{T}_3^{\dagger} \right\} \\ &= Tr_3 \left\{ \rho_3 \rho_{13}^{T_3} \right\}, \end{split}$$

onde

$$\mathbf{T}_{3} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{pmatrix}, \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0, \end{pmatrix},$$
(4.6)

obtendo assim a relação (4.2). cqd

*Definição 2*:  $\mathcal{G}$  é um Mapa Gaussiano Completamente Positivo (GCP) se ambos  $\mathcal{G} \in \mathbf{I} \otimes \mathcal{G}$  mapeiam estados Gaussianos para outros estados Gaussianos.

Podemos caracterizar o mapa GCP pelo isomorfismo entre o mapa e um operador positivo. Para isso usa-se o fato de que o estado  $|\Phi_{12}\rangle$  da equação (4.1) seja Gaussiano. Neste caso o operador G correspondente ao mapa GCP também deve ser Gaussiano. Um operador Gaussiano G é definido como aquele que pode ser escrito na seguinte forma:

$$G = \int (d\mathbf{z}) e^{\mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{E} \mathbf{a}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{V} \mathbf{z} + \mathbf{d}^{\dagger} \mathbf{E} \mathbf{z}}, \qquad (4.7)$$

onde  $\mathbf{V}$  é a matriz de covariância dada por (3.88) e

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a_1 \rangle \\ \langle a_1^{\dagger} \rangle \\ \langle a_2 \rangle \\ \langle a_2^{\dagger} \rangle \end{pmatrix}.$$
(4.8)

Isto quer dizer que  $\mathcal{G}$  é um mapa GCP se o seu operador Gaussiano isomórfico correspondente é descrito por uma matriz de covariância **V**, que satisfaz o princípio de incerteza generalizado, isto é,  $\mathbf{V} + \frac{1}{2}\mathbf{E} \ge \mathbf{0}$ .

Em relação à ação do mapa  $\mathcal{G}$  em termos de seu operador correspondente no estado Gaussiano de entrada  $\rho_3$  caracterizado pela matriz de covariância  $\Gamma_{in}$ , um vetor de deslocamento  $\mathbf{d}_{in}$  e descrito na forma Gaussiana (4.7):

$$\mathcal{G}: \rho_{\Gamma_{\mathrm{in}},\mathbf{d}_{\mathrm{in}}} \to \rho_{\Gamma_{\mathrm{out}},\mathbf{d}_{\mathrm{out}}},\tag{4.9}$$

ou seja, o mapa atua em um estado de entrada levando-o a um estado de saída, estes caracterizados pelos índices *in* e *out* respectivamente. Assim, obtemos que a matriz de covariância  $\Gamma_{out}$  e o vetor deslocamento  $\mathbf{d}_{out}$  do estado resultante são dados por

$$\Gamma_{\text{out}} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{C} \left( \mathbf{V}_2 + \mathbf{T} \Gamma_{\text{in}} \mathbf{T} \right)^{-1} \mathbf{C}^{\dagger}$$
(4.10)

е

$$\mathbf{d}_{out} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{Z}\mathbf{C}^{\dagger} \left(\mathbf{T}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{in}}\mathbf{T} + \mathbf{V}_2\right)^{-1} \mathbf{Z}\mathbf{T}(\mathbf{d}_{in} + \mathbf{d}_2), \qquad (4.11)$$

ambos obtidos a partir da equação (4.2).

## Prova das equações (4.10) e (4.11):

Para facilitar a leitura da demonstração vamos mudar os índices fazendo com que a equação (4.2) seja escrita como

$$\rho_{\Gamma_{out},\mathbf{d}_{out}} \propto Tr_2 \left\{ \rho_{12}^{T_2} \rho_2 \right\},\tag{4.12}$$

onde agora  $\rho_{\Gamma_{in},\mathbf{d}_{in}} \equiv \rho_2$ .

Seja

$$\rho_{12}^{T_2} = \int d\mathbf{z} e^{\mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{T}_2 \mathbf{E} \mathbf{T}_2 \mathbf{a}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{T}_2 \mathbf{V} \mathbf{T}_2 \mathbf{a} + \mathbf{d}^{\dagger} \mathbf{E} \mathbf{z}}$$
(4.13)

е

$$\rho_2 = \int d\mathbf{x}_2 e^{\mathbf{x}_2^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_2} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}_2^{\dagger} \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{in}} \mathbf{a}_2 + \mathbf{d}_{\mathbf{in}}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{x}_2}, \qquad (4.14)$$

onde

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}.$$
 (4.15)

Escrevendo a relação (4.13) em termos das componentes dos vetores  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{a}$ , temos

$$\rho_{12}^{T_2} = \int d\mathbf{z} e^{\mathbf{z}_1^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_1 - \mathbf{z}_1^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_2} e^{-\frac{1}{2} \left( \mathbf{z}_1^{\dagger} \mathbf{V}_1 \mathbf{z}_1 + 2\mathbf{z}_2^{\dagger} \mathbf{T} \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2^{\dagger} \mathbf{T} \mathbf{V}_2 \mathbf{T} \mathbf{z}_2 \right) + \mathbf{d}_1^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{z}_1 + \mathbf{d}_2^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{z}_2}.$$
(4.16)

Substituindo (4.16) e (4.14) em (4.12), temos

$$\rho_{out} \propto Tr_{2} \left\{ \int d\mathbf{z} \int d\mathbf{x}_{2} e^{\mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}} e^{-\frac{1}{2} \left( \mathbf{x}_{2}^{\dagger} \mathbf{\Gamma}_{in} - 2\mathbf{d}_{in}^{\dagger} \mathbf{Z} \right)} e^{(\mathbf{x}_{2} - \mathbf{z})^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{2}} \\
\times e^{-\frac{1}{2} \left( \mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{V}_{1} \mathbf{z}_{1} + 2\mathbf{z}_{2}^{\dagger} \mathbf{T} \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{z}_{1} + \mathbf{z}_{2}^{\dagger} \mathbf{T} \mathbf{V}_{2} \mathbf{T} \mathbf{z}_{2} \right) + \mathbf{d}_{1}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{z}_{1} + \mathbf{d}_{2}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{z}_{2}} \right\} \\
= \int d\mathbf{z} \int d\mathbf{x}_{2} e^{\mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}} e^{-\frac{1}{2} \left( \mathbf{x}_{2}^{\dagger} \mathbf{\Gamma}_{in} - 2\mathbf{d}_{in}^{\dagger} \mathbf{Z} \right)} Tr_{2} \left\{ e^{(\mathbf{x}_{2} - \mathbf{z})^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{2}} \right\} \\
\times e^{-\frac{1}{2} \left( \mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{V}_{1} \mathbf{z}_{1} + 2\mathbf{z}_{2}^{\dagger} \mathbf{T} \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{z}_{1} + \mathbf{z}_{2}^{\dagger} \mathbf{T} \mathbf{V}_{2} \mathbf{T} \mathbf{z}_{2} \right) + \mathbf{d}_{1}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{z}_{1} + \mathbf{d}_{2}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{z}_{2}}. \tag{4.17}$$

Mas 
$$Tr_2 \left\{ e^{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{z})^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_2} \right\} = e^{-\frac{1}{2} |\mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2|^2} \delta^{(2)} (\mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2)$$
, temos então que  
 $\rho_{out} \propto \int d\mathbf{z}_1 e^{\mathbf{z}_1^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{z}_1^{\dagger} \mathbf{V}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{d}_1^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{z}_1} \int d\mathbf{z}_2 e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_2^{\dagger} \mathbf{\Gamma}_{in} - 2\mathbf{d}_{in}^{\dagger} \mathbf{Z}) \mathbf{z}_2} \times e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}_2^{\dagger} \mathbf{T} \mathbf{V}_2 \mathbf{T} \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_2^{\dagger} \mathbf{T} \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{z}_1 + \mathbf{d}_2^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{z}_2}$ (4.18)

Calculando a integral em  $\mathbf{z}_2$  da equação acima com o auxílio da integral de Fourier-Gauss [9], temos

$$I(\mathbf{z}_{1}) \equiv \int d\mathbf{z}_{2} e^{-\frac{1}{2} \left( \mathbf{z}_{2}^{\dagger} \Gamma_{in} \mathbf{z}_{2} - 2\mathbf{d}_{in}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{z}_{2} + \mathbf{z}_{2}^{\dagger} \mathbf{T} \mathbf{V}_{2} \mathbf{T} \mathbf{z}_{2} + 2\mathbf{z}_{2}^{\dagger} \mathbf{T} \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{z}_{1} - 2\mathbf{d}_{2}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{z}_{2} \right)}$$

$$= \int d\mathbf{z}_{2} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}_{2}^{\dagger} (\Gamma_{in} + \mathbf{T} \mathbf{V}_{2} \mathbf{T}) \mathbf{z}_{2}} e^{\mathbf{z}_{2}^{\dagger} \left\{ -\left[ \mathbf{Z}(\mathbf{d}_{in} + \mathbf{d}_{2}) + \mathbf{T} \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{z}_{1} \right] \right\}}$$

$$\propto e^{\frac{1}{2} \left[ \mathbf{Z}(\mathbf{d}_{in} + \mathbf{d}_{2}) + \mathbf{T} \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{z}_{1} \right]^{T} \mathbf{T} (\Gamma_{in} + \mathbf{T} \mathbf{V}_{2} \mathbf{T})^{-1} \left[ \mathbf{Z}(\mathbf{d}_{in} + \mathbf{d}_{2}) + \mathbf{T} \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{z}_{1} \right]}$$

$$= e^{\frac{1}{2} \left[ (\mathbf{d}_{in} + \mathbf{d}_{2})^{T} \mathbf{Z} (\mathbf{T} \Gamma_{in} \mathbf{T} + \mathbf{V}_{2})^{-1} \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{z}_{1} + \mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{C} (\mathbf{T} \Gamma_{in} \mathbf{T} + \mathbf{V}_{2})^{-1} \mathbf{T} \mathbf{Z}(\mathbf{d}_{in} + \mathbf{d}_{2}) \right]}$$

$$\times e^{\mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{C} (\mathbf{T} \Gamma_{in} \mathbf{T} + \mathbf{V}_{2})^{-1} \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{z}_{1}}.$$

$$(4.19)$$

Mas

$$\left(\mathbf{d}_{in}+\mathbf{d}_{2}\right)^{T}\mathbf{Z}\left(\mathbf{T}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{in}}\mathbf{T}+\mathbf{V}_{2}\right)^{-1}\mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{z}_{1}=\mathbf{z}_{1}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{T}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{in}}\mathbf{T}+\mathbf{V}_{2}\right)^{-1}\mathbf{T}\mathbf{Z}\left(\mathbf{d}_{in}+\mathbf{d}_{2}\right), \quad (4.20)$$

logo

$$I(\mathbf{z}_1) \propto e^{\frac{1}{2}\mathbf{z}_1^{\dagger} \mathbf{C} (\mathbf{T} \Gamma_{in} \mathbf{T} + \mathbf{V}_2)^{-1} \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{z}_1 + (\mathbf{d}_{in} + \mathbf{d}_2)^T \mathbf{Z} (\mathbf{T} \Gamma_{in} \mathbf{T} + \mathbf{V}_2)^{-1} \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{z}_1}.$$

Substituindo em (4.18), temos

$$\rho_{out} \propto \int d\mathbf{z}_{1} e^{\mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{1}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}_{1}^{\dagger} \left[ \mathbf{V}_{1} - \mathbf{C} (\mathbf{T} \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{in}} \mathbf{T} + \mathbf{V}_{2})^{-1} \mathbf{C}^{\dagger} \right] \mathbf{z}_{1}} \\ \times e^{\left[ \mathbf{d}_{1}^{\dagger} + (\mathbf{d}_{in} + \mathbf{d}_{2})^{T} \mathbf{Z} (\mathbf{T} \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{in}} \mathbf{T} + \mathbf{V}_{2})^{-1} \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{Z} \right] \mathbf{Z} \mathbf{z}_{1}} \\ \equiv A \int dz_{1} e^{\mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{1}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{out}} \mathbf{z}_{1} + \mathbf{d}_{\mathbf{out}} \mathbf{Z} \mathbf{z}_{1}}, \qquad (4.21)$$

onde A é uma constante de proporcionalidade dada em termos dos determinantes das matrizes envolvidas. Vemos então que o estado resultante possui uma forma

Gaussiana análoga a (4.7), caracterizado por uma matriz de covariância e um vetor de deslocamento dados por

$$\Gamma_{\text{out}} = \mathbf{V_1} - \mathbf{C} \left( \mathbf{V_2} + \mathbf{T} \Gamma_{\text{in}} \mathbf{T} \right)^{-1} \mathbf{C}^{\dagger},$$

que é a equação (4.10) e

$$\mathbf{d}_{out}^{\dagger} = \mathbf{d}_{1}^{\dagger} + (\mathbf{d}_{in} + \mathbf{d}_{2})^{T} \mathbf{Z} (\mathbf{T} \boldsymbol{\Gamma}_{in} \mathbf{T} + \mathbf{V}_{2})^{-1} \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{Z} = \mathbf{d}_{out} \mathbf{T}, \qquad (4.22)$$

respectivamente. Temos então que

$$\mathbf{d}_{out} = \mathbf{d}_{1} + \left[ (\mathbf{d}_{in} + \mathbf{d}_{2})^{T} \mathbf{Z} (\mathbf{T} \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{in}} \mathbf{T} + \mathbf{V}_{2})^{-1} \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{Z} \right]^{T}$$

$$= \mathbf{d}_{1} + \left[ \mathbf{Z} (\mathbf{T} \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{in}} \mathbf{T} + \mathbf{V}_{2})^{-1} \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{T} \right]^{T} (\mathbf{d}_{in} + \mathbf{d}_{2})$$

$$= \mathbf{d}_{1} + \left( \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{T} \right)^{T} \left[ \mathbf{Z} (\mathbf{T} \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{in}} \mathbf{T} + \mathbf{V}_{2})^{-1} \right]^{T} (\mathbf{d}_{in} + \mathbf{d}_{2})$$

$$= \mathbf{d}_{1} + \mathbf{Z} \mathbf{C}^{\dagger} (\mathbf{T} \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{in}} \mathbf{T} + \mathbf{V}_{2})^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{T} (\mathbf{d}_{in} + \mathbf{d}_{2}), \qquad (4.23)$$

obtendo a equação (4.11). cqd

Observa-se que há uma relação desta matriz com um processo matemático de verificação de positividade de matrizes por meio de decomposição em blocos e complementos de Schur [22]. Neste caso temos que (4.11) é o complemento de Schur da matriz

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^{\dagger} & \mathbf{V}_2 + \mathbf{T} \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{in}} \mathbf{T} \end{pmatrix}, \qquad (4.24)$$

em relação a submatriz  $\mathbf{V}_1$  (veja Apêndice A).

Em relação ao vetor deslocamento  $\mathbf{d}_{in}$  do estado de entrada, podemos considerá-lo como o vetor que contém os resultados das medições projetivas em um estado puro entre um dos modos de um estado Gaussiano bipartido e o estado de entrada.

Nos cálculos acima consideramos apenas uma projeção de um conjunto de projeções, estendendo o estado  $|\Phi\rangle\langle\Phi|$  por um POVM (*positive-operator-valued measure*) considerando todos os deslocamentos possíveis no estado de Bell, isto é,  $D(\mathbf{z})|\Phi\rangle$ . Observando as transformações na matriz de covariância e no vetor de deslocamento pelas equações (4.10) e (4.11), respectivamente, vemos que a matriz de covariância do estado resultante não depende nem de  $\mathbf{d}_{in}$  e  $\mathbf{D}$ . Logo se conhecemos a matriz de covariância do estado de entrada e do estado bipartido, podemos calcular  $\mathbf{d}_{out}$  correspondente às medições  $\mathbf{d}_{in}$  e por aplicações de deslocamentos podemos obter o estado de saída deterministicamente, com sua respectiva matriz de covariância dada por (4.10).

Vamos agora mostrar outros dois exemplos envolvendo um estado Gaussiano bipartido de entrada com modos 1 e 2. Verificaremos o condicionamento do modo 1 a partir de medições ou operações no segundo modo de acordo com a forma resultante de sua matriz de covariância:

(i) A operação de traço no modo dois de um estado Gaussiano bipartido  $\rho_{12}$ :

$$\rho_1 = Tr_2\{\rho_{12}\},\tag{4.25}$$

resulta em um estado reduzido com matriz de covariância dada por  $V_1$ . Analogamente, ao reduzir o estado ao modo dois a matriz de covariância resultante será  $V_2$ .

(*ii*) Aplicando uma projeção do estado de vácuo sobre o modo 2 de um estado Gaussiano bipartido  $\rho_{12}$ :

$$\sigma_1^{(0)} = Tr_2\{|0\rangle_2 \langle 0|\rho_{12}\},\tag{4.26}$$

o modo 1 estará condicionado a esta projeção local de tal forma que sua matriz de covariância será dada por

$$\Gamma_{1}^{(0)} = \mathbf{V}_{1} - \mathbf{C} \left( \mathbf{V}_{2} + \frac{1}{2} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{C}^{\dagger}, \qquad (4.27)$$

onde I é uma matriz unitária  $2 \times 2$ .

Prova:

Expandindo  $\rho_{12}$  em termos de estados coerentes, isto é

$$\rho_{12} = \int d^2 \beta_1 d^2 \beta_2 P(\beta_1, \beta_2) |\beta_1, \beta_2\rangle \langle \beta_1, \beta_2|, \qquad (4.28)$$

onde  $P(\beta_1, \beta_2)$  é a função P de Glauber do sistema [71], substituindo esta forma em (4.26), temos

$$\sigma_{1}^{(0)} = Tr_{2} \left\{ |0\rangle_{2} \langle 0| \int d^{2}\beta_{1} d^{2}\beta_{2} P(\beta_{1}, \beta_{2}) |\beta_{1}, \beta_{2} \rangle \langle \beta_{1}\beta_{2}| \right\}$$

$$= \int d^{2}\beta_{1} d^{2}\beta_{2} d^{2}\alpha_{2} \langle \alpha_{2}|0\rangle \langle 0|\beta_{2} \rangle \langle \beta_{2}|\alpha_{2} \rangle P(\beta_{1}, \beta_{2}) |\beta_{1} \rangle \langle \beta_{1}|$$

$$= \int d^{2}\beta_{1} |\beta_{1} \rangle \langle \beta_{1}| \int d^{2}\beta_{2} |\langle 0|\beta_{2} \rangle|^{2} P(\beta_{1}, \beta_{2})$$

$$= \int d^{2}\beta_{1} |\beta_{1} \rangle \langle \beta_{1}| \int d^{2}\beta_{2} e^{-|\beta_{2}|^{2}} P(\beta_{1}, \beta_{2}). \quad (4.29)$$

Mas

$$e^{-|\beta_2|^2} = \int d^2 z_2 \ e^{-|z_2|^2 - z_2^* \beta_2 + z_2 \beta_2^*},\tag{4.30}$$

então temos

$$\begin{aligned}
\sigma_{1}^{(0)} &= \int d^{2}\beta_{1}d^{2}\beta_{2}|\beta_{1}\rangle\langle\beta_{1}| \int d^{2}z_{2} \ e^{-|z_{2}|^{2}-z_{2}^{*}\beta_{2}+z_{2}\beta_{2}^{*}}P(\beta_{1},\beta_{2}) \\
&= \int d^{2}\alpha_{2}\langle\alpha_{2}| \int d^{2}\beta_{1}d^{2}\beta_{2}P(\beta_{1},\beta_{2}) \int d^{2}z_{2} \ e^{-|z_{2}|^{2}}e^{-z_{2}^{*}a_{2}}|\beta_{1},\beta_{2}\rangle\langle\beta_{1},\beta_{2}| \ e^{z_{2}a_{2}^{\dagger}}|\alpha_{2}\rangle \\
&= Tr_{2}\left\{\int d^{2}z_{2} \ e^{-|z_{2}|^{2}}e^{z_{2}a_{2}^{\dagger}}e^{-z_{2}^{*}a_{2}} \int d^{2}\beta_{1}d^{2}\beta_{2}P(\beta_{1},\beta_{2})|\beta_{1},\beta_{2}\rangle\langle\beta_{1},\beta_{2}|\right\} \\
&= Tr_{2}\left\{\int d^{2}z_{2} \ e^{-\frac{1}{2}|z_{2}|^{2}}e^{-z_{2}^{*}a_{2}+z_{2}a_{2}^{\dagger}}\rho_{12}\right\} \\
&= Tr_{2}\left\{\int d\mathbf{z}_{2} \ e^{-\frac{1}{4}\mathbf{z}_{2}^{\dagger}\mathbf{z}_{2}}e^{-\mathbf{z}_{2}^{\dagger}\mathbf{z}_{2}}\rho_{12}\right\},
\end{aligned}$$
(4.31)

Substituindo agora a forma Gaussiana para  $\rho_{12}$ , desconsiderando o termo de deslocamento, já que este não afeta o caráter Gaussiano do sistema:

$$\rho_{12} = \int d\mathbf{z} \ e^{\mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{E} \mathbf{a}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{V} \mathbf{z}}, \tag{4.32}$$

podemos fazer um cálculo análogo à prova de (4.10) substituíndo a matriz  $\mathbf{T}_2\Gamma_{in}\mathbf{T}_2$ por  $\frac{1}{2}\mathbf{I}$ , temos então

$$\sigma_{1}^{(0)} = \int d\mathbf{z}_{1} \ e^{-\mathbf{z}_{1}^{\dagger}\mathbf{Z}\mathbf{a}_{1}} \int d\mathbf{z}_{2} \ e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{V}^{(0)}\mathbf{z}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{V}_{2}+1/2\mathbf{I})}} \int d\mathbf{z}_{1} \ e^{-\mathbf{z}_{1}^{\dagger}\mathbf{Z}\mathbf{a}_{1}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}_{1}^{\dagger}\left[\mathbf{V}_{1}-\mathbf{C}\left(\mathbf{V}_{2}+\frac{1}{2}\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{C}^{\dagger}\right]\mathbf{z}_{1}}, \quad (4.33)$$
ou seja a matriz de covariância do estado resultante será o complemento de Schur da matriz

$$\mathbf{V}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^{\dagger} & \mathbf{V}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{I} \end{pmatrix}$$
(4.34)

em relação a  $\mathbf{V}_1.$  cqd

Note que  $\frac{1}{2}\mathbf{I}$  representa a matriz de covariância do estado de vácuo.

(*ii*) Projetando no estado  $\rho_c$ , dado por

$$\rho_c = \int d^2 \epsilon \ e^{-f(c)|\epsilon|^2} |\epsilon\rangle \langle \epsilon|, \qquad (4.35)$$

onde

$$f(c) = \sqrt{\frac{2c+1}{2c-1}} - 1 \in \Re^+_* \tag{4.36}$$

е

$$c > \frac{1}{2},\tag{4.37}$$

no modo 2 de  $\rho_{12}$ e traçando neste mesmo modo, isto é

$$\sigma_1^{(c)} = Tr_2\{\rho_c \rho_{12}\},\tag{4.38}$$

o estado resultante também será Gaussiano e possuirá uma matriz de covariância dada por

$$\Gamma_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{c})} = \mathbf{V}_{\mathbf{1}} - \mathbf{C} \left( \mathbf{V}_{\mathbf{2}} + \mathbf{c} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{C}^{\dagger}.$$
(4.39)

Veja que o estado  $\rho_c$  é um estado Gaussiano P-representável, onde sua função P de Glauber é dada por (4.36).

Prova:

A prova é análoga ao caso anterior. Subsitituindo as equações (4.35) e (4.28) em (4.38), sabendo que para estados coerentes temos que  $\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \alpha \beta^*}$  e calculando as respectivas integrais nas variáveis  $\epsilon$  de  $\rho_c$  [53], temos

$$\sigma_1^{(c)} = \frac{1}{(1+f(c))^2} \int d^2\beta_1 |\beta_1\rangle \langle\beta_1| \int d^2\beta_2 \ e^{-\left[1 - \frac{1}{(1+f(c))^2}\right]|\beta_2|^2} P(\beta_1, \beta_2), \tag{4.40}$$

onde a condição de convergência é que f(c) > 0. Podemos escrever a exponencial em (4.40) como

$$e^{-\left[1-\frac{1}{(1+f(c))^2}\right]|\beta_2|^2} = (1+f(c))^2 \int d^2\alpha_2 \ e^{-f(c)(2+f(c))|\alpha_2|^2} |\langle \alpha_2|\beta_2\rangle|^2.$$
(4.41)

Substituindo em (4.40) e rearranjando os termos, temos

$$\begin{aligned}
\sigma_{1}^{(c)} &= \int d^{2} \alpha_{2} \ e^{-f(c)(2+f(c))|\alpha_{2}|^{2}} \langle \alpha_{2}| \left( \int d^{2} \beta_{1} d^{2} \beta_{2} P(\beta_{1},\beta_{2}) |\beta_{1},\beta_{2}\rangle \langle \beta_{1},\beta_{2}| \right) |\alpha_{2}\rangle \\
&= \int d^{2} \alpha_{2} \ e^{-f(c)(2+f(c))|\alpha_{2}|^{2}} \langle \alpha_{2}|\rho_{12}|\alpha_{2}\rangle \\
&= \frac{1}{f(c)(2+f(c))} \int d^{2} \alpha_{2} d^{2} z_{2} e^{-\frac{1}{f(c)(2+f(c))}|z_{2}|^{2}+z_{2}\alpha_{2}^{*}-z_{2}^{*}\alpha_{2}} \langle \alpha_{2}|\rho_{12}|\alpha_{2}\rangle \\
&\propto Tr_{2} \left\{ \int d^{2} z_{2} e^{-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{f(c)(2+f(c))}\right]|z_{2}|^{2}} e^{-z_{2}^{*}a_{2}+z_{2}a_{2}^{\dagger}}\rho_{12} \right\}.
\end{aligned}$$
(4.42)

Quando f(c) é dada por (4.36), onde implica diretamente que c > 1/2, temos

$$\sigma_{1}^{(c)} \propto Tr_{2} \left\{ \int d^{2}z_{2}e^{-c|z_{2}|^{2}}e^{-z_{2}^{*}a_{2}+z_{2}a_{2}^{\dagger}}\rho_{12} \right\}$$

$$= Tr_{2} \left\{ e^{-\frac{1}{2}c\mathbf{z}_{2}^{\dagger}\mathbf{z}_{2}}e^{-\mathbf{z}_{2}^{\dagger}\mathbf{Z}\mathbf{a}_{2}}\rho_{12} \right\}$$

$$= \int d\mathbf{z}_{2} \ e^{-\mathbf{z}_{1}^{\dagger}\mathbf{Z}\mathbf{a}_{1}} \int d\mathbf{z}_{2} \ e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{V}^{(c)}\mathbf{z}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{V}_{2}+c\mathbf{I})}} \int d\mathbf{z}_{2} \ e^{-\mathbf{z}_{1}^{\dagger}\mathbf{Z}\mathbf{a}_{1}}e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}_{1}^{\dagger}[\mathbf{V}_{1}-\mathbf{C}(\mathbf{V}_{2}+c\mathbf{I})^{-1}\mathbf{C}^{\dagger}]\mathbf{z}_{1}}, \quad (4.43)$$

ou seja, a matriz de covariância do estado resultante  $\sigma_1^{(c)}$ é dada pelo complemento de Schur da matriz

$$\mathbf{V}^{(c)} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^{\dagger} & \mathbf{V}_2 + c\mathbf{I} \end{pmatrix}, \qquad (4.44)$$

em relação a  $V_1$ , lembrando que a constante c deve satisfazer (4.37). cqd

Vimos então alguns exemplos em que num sistema Gaussiano bipartido o estado do modo 1 estará condicionado a medições e/ou projeções no segundo modo, de tal forma que sua matriz de covariância reduza a uma expressão na forma de um complemento de Schur de alguma matriz  $4 \times 4$  [16].

## 4.2 Propriedades Físicas do Complemento de Schur de Matrizes de Covariância Locais

Nesta seção apresentaremos os primeiros resultados originais da dissertação que envolvem a obtenção do complemento de Schur de uma matriz de covariância que caracteriza um estado Gaussiano bipartido [23]. Primeiramente, apresentamos o processo que envolve a obtenção deste complemento para um estado bipartido de dois modos inicial e depois generalizamos o resultado para o caso em que temos um estado Gaussiano inicial de n modos.

### 4.2.1 Medição de Paridade Local Sobre um Estado Gaussiano Bipartido de Dois Modos

Como notamos nos exemplos da seção anterior, projeções sobre estados e operações de traço parcial fornecem complementos de Schur de matrizes  $4 \times 4$ . Entretanto estas matrizes não são a matriz de covariância do estado Gaussiano bipartido, já que matrizes de covariância de estados Gaussianos auxiliares são inseridos. Logo, necessitamos um processo que possibilita determinar o complemento de Schur da matriz de covariância do estado Gaussiano bipartido  $\mathbf{V}$  em relação a uma das matrizes de covariância local,  $\mathbf{V}_1$  ou  $\mathbf{V}_2$ . Veremos no capítulo 6 que a identificação deste processo permite a construção de um novo protocolo de informação para a determinação das propriedades de emaranhamento de um sistema Gaussiano bipartido de dois modos [12]. Nesta seção descreveremos a operação matemática que possibilita a realização desta tarefa, além de sua interpretação em termos de operações físicas.

Para um estado Gaussiano bipartido de dois modos temos que:

**Teorema 1:** Dado um estado Gaussiano bipartido  $\rho_{12}$ , a matriz de covariância  $\Gamma_1$  descrevendo o operador Gaussiano  $\sigma_1$  do modo 1 condicionado a uma projeção de paridade sobre o modo 2,

$$\sigma_1 = Tr_2 \{ e^{i\pi a_2^{\dagger} a_2} \rho_{12} \}, \tag{4.45}$$

é dada pelo complemento de Schur da matriz de covariância V do estado bipartido de entrada  $\rho_{12}$  em relação a  $V_2$ :

$$\Gamma_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}\mathbf{V}_2^{-1}\mathbf{C}^{\dagger}. \tag{4.46}$$

**Prova:** Podemos escrever o operador de paridade como uma integral sobre o operador de deslocamento [51, 52]:

$$2e^{i\pi a_2^{\dagger}a_2} = \int d\mathbf{s}_2 e^{-\mathbf{s}_2^{\dagger}\mathbf{Z}\mathbf{a}_2}.$$
(4.47)

Neste caso, a equação (4.45) pode ser reescrita como

$$\sigma_1 = Tr_2 \left\{ \frac{1}{2} \int d\mathbf{s}_2 e^{-\mathbf{s}_2^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_2} \rho_{12} \right\}.$$
(4.48)

Como  $\rho_{12}$  é Gaussiano podemos escrever seu operador densidade correspondente na forma (4.32) e substituir em (4.48), obtendo

$$\sigma_{1} = Tr_{2} \left\{ \frac{1}{2} \int d\mathbf{s}_{2} e^{-\mathbf{s}_{2}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{2}} \int d\mathbf{z} e^{\mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{E} \mathbf{a}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{V} \mathbf{z}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} Tr_{2} \left\{ \int d\mathbf{s}_{2} e^{-\mathbf{s}_{2}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{2}} \int d\mathbf{z}_{1} \int d\mathbf{z}_{2} e^{\mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{1}} e^{\mathbf{z}_{2}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{2}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{V} \mathbf{z}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \int d\mathbf{s}_{2} \int d\mathbf{z}_{1} \int d\mathbf{z}_{2} Tr_{2} \left\{ e^{(\mathbf{z}_{2} - \mathbf{s}_{2})^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{2}} \right\} e^{\mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{1}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{V} \mathbf{z}}.$$
(4.49)

Mas

$$Tr_{2}\left\{e^{(\mathbf{z}_{2}-\mathbf{s}_{2})^{\dagger}\mathbf{Z}\mathbf{a}_{2}}\right\} = e^{-\frac{1}{2}|z_{2}-s_{2}|^{2}}\delta^{(2)}(\mathbf{z}_{2}-\mathbf{s}_{2}), \qquad (4.50)$$

logo

$$\sigma_{1} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{z}_{2} \int d\mathbf{z}_{1} \int d\mathbf{z}_{2} e^{-\frac{1}{2}|z_{2}-s_{2}|^{2}} \delta^{(2)}(\mathbf{z}_{2}-\mathbf{s}_{2}) e^{\mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{1}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{V} \mathbf{z}}$$

$$= \frac{1}{2} \int d\mathbf{z}_{1} e^{\mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{1}} \int d\mathbf{z}_{2} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^{\dagger} \mathbf{V} \mathbf{z}}$$

$$= \frac{1}{2} \int d\mathbf{z}_{1} e^{\mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{1}} \int d\mathbf{z}_{2} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{V}_{1} \mathbf{z}_{1} + \mathbf{z}_{2}^{\dagger} \mathbf{C} \mathbf{z}_{1} + \mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{z}_{2} + \mathbf{z}_{2}^{\dagger} \mathbf{V}_{2} \mathbf{z}_{2})}. \quad (4.51)$$

Mas

$$\mathbf{z}_2^{\dagger} \mathbf{C} \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_1^{\dagger} \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{z}_2, \qquad (4.52)$$

então

$$\sigma_{1} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{z}_{1} e^{\mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{1}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{V}_{1} \mathbf{z}_{1}} \int d\mathbf{z}_{2} e^{-\mathbf{z}_{2}^{\dagger} \mathbf{C} \mathbf{z}_{1}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}_{2}^{\dagger} \mathbf{V}_{2} \mathbf{z}_{2}} \qquad (4.53)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\det \mathbf{V}_{2}}} \int d\mathbf{z}_{1} e^{\mathbf{z}_{1}^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{1}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}_{1}^{\dagger} (\mathbf{V}_{1} - \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{V}_{2}^{-1} \mathbf{C}) \mathbf{z}_{1}},$$

onde para a derivação do último passo usamos a integral de Fourier-Gauss (3.28), sendo neste caso

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{z}_1,\tag{4.54}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}_2,\tag{4.55}$$

resultando

$$\int d\mathbf{z}_2 e^{-\mathbf{z}_2^{\dagger} \mathbf{C} \mathbf{z}_1} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}_2^{\dagger} \mathbf{V}_2 \mathbf{z}_2} = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{V}_2}} e^{\frac{1}{2} (\mathbf{C} \mathbf{z}_1)^T \mathbf{T} \mathbf{V}_2^{-1} \mathbf{C} \mathbf{z}_1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{V}_2}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}_1^{\dagger} (\mathbf{V}_1 - \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{V}_2^{-1} \mathbf{C}) \mathbf{z}_1}$$

$$(4.56)$$

onde usamos

$$(\mathbf{C}\mathbf{z}_1)^T \mathbf{T} = \mathbf{z}_1^{\dagger} \mathbf{C}^{\dagger}, \qquad (4.57)$$

e a positividade da matriz  $\mathbf{V}_2 > \mathbf{0}$ .

Agora temos que normalizar o operador  $\sigma_1$  calculando  $\sigma_1/Tr_1\{\sigma_1\}$ . O traço possui o seguinte valor

$$Tr_1\{\sigma_1\} = \frac{1}{2\sqrt{\det \mathbf{V}_2}}.$$
(4.58)

Logo o operador normalizado $\overline{\sigma}_1$ é dado por

$$\overline{\sigma}_1 = \int d\mathbf{z}_1 e^{\mathbf{z}_1^{\dagger} \mathbf{Z} \mathbf{a}_1} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}_1^{\dagger} (\mathbf{V}_1 - \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{V}_2^{-1} \mathbf{C}) \mathbf{z}_1}$$
(4.59)

Novamente, como na projeção de vácuo, o operador resultante também possui uma forma Gaussiana com matriz de covariância dada por (4.46). cqd

Uma demonstração alternativa do teorema 1 em termos da expansão do estado Gaussiano bipartido  $\rho_{12}$  em funções de quase-probabilidade pode ser encontrada no Apêndice B desta dissertação.

O valor médio da paridade foi identificado independentemente por Grossmann [50] e por Royer [49] como sendo proporcional à função de distribuição de Wigner na origem do espaço de fase:

$$W(\mathbf{0}) = 2 \ \bar{p}.\tag{4.60}$$

Os valores desta função em outros pontos do espaço de fase podem ser obtidos realizando deslocamentos sobre o estado de entrada [71, 49, 50, 51], tal que

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \langle n | D(\alpha) \rho D^{\dagger}(\alpha) | n \rangle.$$
(4.61)

Podemos estender esta relação para o caso de sistemas bipartidos descritos por um operador densidade  $\rho_{12}$ . Neste caso, a média da paridade do modo 2 está relacionada com sua função de Wigner como

$$W_2(\mathbf{0}) = 2 \ \bar{p}_2 = 2 \ Tr_{12} \{ e^{i\pi a_2^{\dagger} a_2} \rho_{12} \}.$$
(4.62)

Isso faz com que o operador  $\sigma_1$  seja claramente identificado como a diferença entre os estados do modo 1 condicionados à projeções em um subespaço de Fock par e em um subespaço de Fock ímpar no modo 2 (um estudo mais detalhado da operação de paridade pode ser encontrada no Apêndice C):

$$\sigma_1 = \sum_{n_{par}} \langle n_2 | \rho_{12} | n_2 \rangle - \sum_{n_{impar}} \langle n_2 | \rho_{12} | n_2 \rangle.$$
(4.63)

Finalmente, podemos imediatamente identificar que a função de Wigner no modo 2 é obtida por

$$W_2(\mathbf{0}) = 2 \ Tr_1\{\sigma_1\}. \tag{4.64}$$

Neste caso, este resultado se torna muito interessante, pois significa que em um estado Gaussiano bipartido, a obtenção da função de Wigner do subsistema 2, é o traço do operador Gaussiano do subsistema 1  $\sigma_1$ , como em (4.64), e vice versa, onde a matriz de covariância representando  $\sigma_1$  é dada pelo complemento de Schur (4.46).

Quando substituímos (4.63) em (4.64), vemos que a função de Wigner do modo 2 na origem é proporcional à diferença da probabilidade  $P_{2_{par}}$  de obtermos um resultado par neste modo e da probabilidade  $P_{2_{impar}}$  do resultado ser ímpar:

$$W_2(\mathbf{0}) = 2(P_{2_{par}} - P_{2_{impar}}). \tag{4.65}$$

Como  $P_{2_{par}}$  e  $P_{2_{impar}}$  são quantidades positivas, pode-se observar a possibilidade da função de Wigner possuir valores negativos. Isto ocorre, por exemplo, quando é mais provável que o modo 2 seja um estado ímpar.

Da equação (4.62), também podemos derivar uma relação entre a função de Wigner  $W_2$  do estado Gaussiano do modo 2, a matriz de covariância local dada por  $V_2$  e o complemento de Schur  $S(n_2)$  desta matriz, que neste caso é um valor escalar. Temos então que

$$W_2(0) = \frac{1}{\sqrt{\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)S(n_2)}},\tag{4.66}$$

sendo

$$S(n_2) = \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{|m_2|^2}{\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)}.$$
(4.67)

Além disso, observa-se que a função de Wigner de um modo na origem está diretamente relacionada com o elemento  $I_2 = (n_2 + 1/2)^2 - |m_2|^2$  do conjunto dos quatro invariantes do grupo  $Sp(2, R) \otimes Sp(2, R)$  correspondente à matriz de covariância global [20]:  $I_1 = \det \mathbf{V}_1, I_2 = \det \mathbf{V}_2, I_3 = \det \mathbf{C} \in I_4 = Tr[\mathbf{V}_1 \mathbf{Z} \mathbf{C} \mathbf{Z} \mathbf{V}_2 \mathbf{Z} \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{Z}]$  (veja a seção 6.1).

Expandindo  $\rho_{12}$  em uma base de estados coerentes (4.28) e substituindo em (4.45),  $\sigma_1$  pode ser escrito como

$$\sigma_1 = \int d^2 \beta_1 |\beta_1\rangle \langle \beta_1| \int d^2 \beta_2 W_c(0) P(\beta_1, \beta_2), \qquad (4.68)$$

onde  $W_c(0) = 2e^{-2|\beta_2|^2}$ , é a função de Wigner do estado coerente na origem.

Quando temos apenas a redução do sistema sem associá-la com uma medição em um dos subsistemas, a função  $P(\beta_1)$  de Glauber do estado reduzido pode ser obtida integrando a função  $P(\beta_1, \beta_2)$  de Glauber do estado bipartido sobre a variável correspondente ao modo traçado ( $\beta_2$ ). Mas em (4.28), a função P está associada com um peso na forma de uma função Gaussiana, onde mostra que os valores da função P de  $\sigma_1$  nas variáveis mais próximas a origem são mais relevantes.

Devemos destacar o fato de que na prova do teorema 1, vimos que  $\sigma_1$  é um operador Gaussiano, e neste caso sua matriz de covariância  $\Gamma_1$  é positiva. Porém, esta matriz não necessariamente satisfará a relação de incerteza ( $\Gamma_1 + (1/2)\mathbf{Z} \ge \mathbf{0}$ ), pois é formada pela diferença de dois operadores densidade que representam estados físicos (4.63).

A influência no modo 1 por medições de paridade no modo 2 também pode ser observada se compararmos a matriz de covariância  $\Gamma_1$  (4.46) com a respectiva matriz  $\mathbf{V}_1$  do operador densidade reduzido  $\rho_1 = Tr_2\{\rho_{12}\}$ , indicando que a influência da medição de paridade insere propriedades globais nos termos locais do modo 1, que são utilizados para a construção de  $\Gamma_1$ .

### 4.2.2 Medição de Paridade em Estado Gaussiano de *n* Modos.

Agora generalizamos nosso resultado no caso de um estado Gaussiano de n modos.

**Teorema 2:** Medições de paridade no modo m de um estado Gaussiano de nmodos com matriz de covariância  $2n \times 2n$  dado por

$$\mathbf{V}_{2n\times 2n} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} & \dots & \mathbf{C}_{1n} \\ \mathbf{C}_{12}^{\dagger} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{C}_{23} & & \vdots \\ \mathbf{C}_{13}^{\dagger} & \mathbf{C}_{23}^{\dagger} & \mathbf{V}_{33} & & \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{C}_{(n-1)n} \\ \mathbf{C}_{1n}^{\dagger} & \dots & \mathbf{C}_{(n-1)n}^{\dagger} & \mathbf{V}_{nn} \end{pmatrix},$$
(4.69)

associa o estado dos n - 1 modos resultantes, de tal maneira que a matriz de covariância resultante  $2(n-1) \times 2(n-1)$  é formada por matrizes blocos  $2 \times 2$ , localizadas na linha i e coluna j, dada por

$$\Gamma_{ij} = \mathbf{M}_{ij} - \mathbf{M}_{im} \mathbf{M}_{mm}^{-1} \mathbf{M}_{im}^{\dagger}, \qquad (4.70)$$

tal que para i = j,  $\mathbf{M}_{ii} = \mathbf{V}_i$  é a matriz de covariância do operador reduzido do subsistema i, e para  $i \neq j$ ,  $\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{C}_{ij}$  são as matrizes representado as correlações entre os n modos do sistema global, note que neste caso temos que  $\mathbf{M}_{ji} = \mathbf{M}_{ij}^{\dagger}$ .

**Prova:** Esta demostração é feita por indução. Como já derivamos como uma medição de paridade em um modo de um estado Gaussiano bipartido afeta o outro modo em termos da matriz de covariância (4.46), podemos obter derivações para estados com 3 e 4 modos e verificar que existe uma forma padrão em relação a influência desta medição com as matrizes de covariância resultantes, permitindo realizar uma generalização para o caso de um estado com n modos.

Para um estado Gaussiano tripartido com matriz de covariância dada por

$$\mathbf{V}_{123} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{12}^{\dagger} & \mathbf{V}_2 & \mathbf{C}_{23} \\ \mathbf{C}_{13}^{\dagger} & \mathbf{C}_{23}^{\dagger} & \mathbf{V}_3 \end{pmatrix}, \qquad (4.71)$$

o operador Gaussiano bipartido resultante estará condicionado com a medição de paridade no modo 3 do sistema global tal que sua respectiva matriz de covariância é dada por

$$\Gamma_{12} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}_{13}\mathbf{V}_3^{-1}\mathbf{C}_{13}^{\dagger} & \mathbf{C}_{12} - \mathbf{C}_{13}\mathbf{V}_3^{-1}\mathbf{C}_{23}^{\dagger} \\ \mathbf{C}_{12}^{\dagger} - \mathbf{C}_{23}\mathbf{V}_3^{-1}\mathbf{C}_{13}^{\dagger} & \mathbf{V}_2 - \mathbf{C}_{23}\mathbf{V}_3^{-1}\mathbf{C}_{23}^{\dagger} \end{pmatrix}.$$
(4.72)

Observe que cada elemento bloco da matriz de covariância é uma decomposição de Schur de uma outra matriz  $4 \times 4$  e pode ser obtida pela relação (4.70).

Com um cálculo análogo para o caso de um estado com 4 modos, obtemos uma matriz reduzida condicionada por uma medição de paridade no modo 4 como

$$\Gamma_{123} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}_{14} \mathbf{V}_4^{-1} \mathbf{C}_{14}^{\dagger} & \mathbf{C}_{12} - \mathbf{C}_{14} \mathbf{V}_4^{-1} \mathbf{C}_{24}^{\dagger} & \mathbf{C}_{13} - \mathbf{C}_{14} \mathbf{V}_4^{-1} \mathbf{C}_{34}^{\dagger} \\ \mathbf{C}_{12}^{\dagger} - \mathbf{C}_{24} \mathbf{V}_4^{-1} \mathbf{C}_{14}^{\dagger} & \mathbf{V}_2 - \mathbf{C}_{24} \mathbf{V}_4^{-1} \mathbf{C}_{24}^{\dagger} & \mathbf{C}_{23} - \mathbf{C}_{24} \mathbf{V}_4^{-1} \mathbf{C}_{34}^{\dagger} \\ \mathbf{C}_{13}^{\dagger} - \mathbf{C}_{34} \mathbf{V}_4^{-1} \mathbf{C}_{14}^{\dagger} & \mathbf{C}_{23} - \mathbf{C}_{34} \mathbf{V}_4^{-1} \mathbf{C}_{24}^{\dagger} & \mathbf{V}_3 - \mathbf{C}_{34} \mathbf{V}_4^{-1} \mathbf{C}_{34}^{\dagger} \end{pmatrix}, \quad (4.73)$$

da mesma forma para o caso de uma medição sobre estados com 2 e 3 modos, observase que os elementos blocos da matriz dada por (4.73) também podem ser descritas por (4.70). cqd

# Capítulo 5

# Emaranhamento em Estados Gaussianos de Dois Modos

Neste capítulo abordaremos a questão de como inferir sobre a qualidade de um canal quântico, isto é, quantificar o emaranhamento entre dois subsistemas de um estado Gaussiano bipartido de dois modos, além de obter sua pureza, a partir de operações locais e um canal de comunicação clássica (LOCC). Para um estado Gaussiano de dois modos, é possível acessar diretamente as propriedades de emaranhamento por medições locais, após uma manipulação nos dois modos do estado bipartido [13, 21]. Porém, estes procedimentos requerem que os dois modos sejam recombinados por um divisor de feixe, isto é, a efetivação de uma operação não local, em que as propriedades de emaranhamento do estado sejam transferidos a termos locais do modo de saída. Outra maneira possível é reconstruir completamente o sistema quântico bipartido: um procedimento que também demanda operações globais [14, 15].

Demonstraremos a existência de um conjunto mínimo de operações locais e comunicação clássica para quantificar completamente o emaranhamento de um estado Gaussiano bipartido. Dizemos que o conjunto de operações necessárias são mínimas pois estão relacionadas com apenas dois tipos de medições locais: a primeira para caracterizar as matrizes de covariância locais e o segundo para acessar localmente a paridade de um dos modos do sistema. Além disso, a partir do mesmo procedimento, podemos obter a pureza do estado Gaussiano e para certas classes particulares de estados reconstruir a matriz de covariância. Estes resultados só se tornam possíveis devido à existência de uma operação física que corresponde ao complemento de Schur das matrizes de covariância locais desenvolvida no capítulo anterior. Na seção 5.1 fazemos uma discussão das propriedades dos invariantes simpléticos locais de um estado Gaussiano bipartido que estão relacionados diretamente com a mistura dos estados reduzidos e do estado global. Na seção 5.2 discutimos estes invariantes em termos das propriedades de emaranhamento e de mistura deste sistema. Na seção 5.3, apresentaremos o protocolo, que consiste basicamente na determinação, via apenas operações locais, de todos os invariantes simpléticos que nos permite, por exemplo, testar a separabilidade do sistema, saber suas propriedades clássicas (Prepresentabilidade), e/ou quantificar o conteúdo de emaranhamento presente. Por fim, na seção 5.4, mostramos que para uma classe especial de estados Gaussianos pertencentes ao conjunto de estados Gaussianos simétricos, como por exemplo, os estados Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) e o estado de vácuo comprimido de dois modos, o protocolo se torna útil para a reconstrução da matriz de covariância devido à relativa facilidade em obter os elementos da matriz de correlação a partir dos resultados de medições realizadas localmente. Além disso, como a P-representabilidade e a separabilidade para estes tipos de estado são equivalentes, mostramos que para um estado comprimido de dois modos com ruído interno [47] é possivel verificar se há ou não emaranhamento via medições locais de contagem de fótons e quantificado via emaranhamento de formação.

### 5.1 Os Invariantes Locais Simpléticos

Vimos no capítulo 4 que um estado Gaussiano bipartido de dois modos é caracterizado por uma matriz de covariância V dada por (3.88). Esta matriz incorpora quatro quantidades importantes definidas como:  $I_1 = \det V_1$ ,  $I_2 = \det V_2$ ,  $I_3 = \det C \in I_4 =$  $Tr[V_1 ZCZV_2 ZC^{\dagger}Z]$ , conhecidos como invariantes locais simpléticos, pertencentes ao grupo  $Sp(2, R) \otimes Sp(2, R)$  [37]. Estas quantidades fornecem tanto propriedades locais quanto globais do sistema bipartido. Em relação à quantidade  $I_3$ , veremos na seção seguinte que as propriedades de emaranhamento são obtidas sabendo apenas o seu valor absoluto  $|I_3|$  [37]. Assim, exploraremos nesta seção as relações entre  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $|I_3|$ e  $I_4$ .

Estes quatro invariantes estão relacionados matematicamente. Neste caso, podemos

mostrar que a partir dos valores de  $I_1$ ,  $I_2$  e  $|I_3|$  é possível obter a quarta quantidade  $I_4$  [13], pois

$$I_4 = 2|I_3|\sqrt{I_1I_2},\tag{5.1}$$

que pode ser verificada a partir do seu cálculo direto. Esta relação se torna muito importante pois possibilita a redução da quantidade de informação que necessitamos para caracterizar as propriedades de emaranhamento do sistema bipartido, já que podemos obter as propriedades globais do sistema em termos de apenas três quantidades ao invés de quatro.

Uma segunda relação matemática importante é a que relaciona  $|I_3|$ , que contém as informações referentes as correlações globais entre os dois modos, com uma outra quantidade  $I_V = \det \mathbf{V}$ , isto é, o determinante da matriz de covariância do estado Gaussiano de dois modos. Para isso, a partir de um cálculo direto temos que

$$I_V = I_1 I_2 - I_4 + I_3^2. (5.2)$$

Substituindo a equação (5.1) em (5.2) podemos notar que  $|I_3|$  é dada pela seguinte relação

$$|I_3|^2 - 2|I_3|\sqrt{I_1I_2} + I_1I_2 - I_V = 0, (5.3)$$

que é um equação polinomial de segundo grau em  $|I_3|$ . Das duas soluções, uma delas não é aceitável pois neste caso  $\mathbf{V} < \mathbf{0}$ . Para o caso particular de estados simétricos temos

$$|I_3| = \sqrt{I_1 I_2} - \sqrt{I_V}.$$
 (5.4)

Logo, pelas equações (5.1) e (5.4), vemos que para esta classe de estados as quantidades  $|I_3|$  ou  $I_4$  estão contidas em  $I_V$ , fazendo com que os quatro invariantes sejam totalmente determinados por três quantidades  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_V$ . Note que estes três valores são equivalentes à determinação das purezas dos modos locais  $\mathcal{P}_i$  (i = 1, 2) e a pureza global  $\mathcal{P}$ :

$$\mathcal{P}_i = \frac{1}{2\sqrt{I_i}}, \ \mathcal{P} = \frac{1}{4\sqrt{I_V}}.$$
(5.5)

Um ponto importante, é que  $I_V$  se relaciona matematicamente com o complemento de Schur da matriz de covariância V [22]:

$$I_V = \det \mathbf{V} = \det \mathbf{V}_1 \det(\mathbf{V}_2 - \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{V}_1^{-1} \mathbf{C})$$
$$= \det \mathbf{V}_2 \det(\mathbf{V}_1 - \mathbf{C} \mathbf{V}_2^{-1} \mathbf{C}^{\dagger}).$$
(5.6)

Note que esta relação já nos mostra uma conexão direta entre o complemento de Schur e os componentes de correlação dos invariantes simpléticos completamente determinados por  $I_V$ .

## 5.2 Propriedades Globais de um Estado Gaussiano de Dois Modos

As propriedades de emaranhamento de um estado Gaussiano bipartido de dois modos são obtidas a partir dos invariantes locais simpléticos  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $|I_3| \in I_4$ . Porém, vimos na seção anterior que podemos reduzir a quantidade de informação para três valores  $I_1$ ,  $I_2 \in I_V$  e assim obter as quantidades  $|I_3| \in I_4$ . Conseqüentemente, devido as relações de pureza (5.5), vemos que as propriedades de emaranhamento deste sistema são determinadas pela mistura dos estados reduzidos e do estado global.

Um estado bipartido Gaussiano é separável se sua matriz de covariância satisfaz o critério de separabilidade de Simon [37], que pode ser escrito em função dos invariantes como

$$I_1 I_2 + \left(\frac{1}{4} - |I_3|\right)^2 - I_4 \ge \frac{I_1 + I_2}{4}.$$
(5.7)

Além disso, se um estado Gaussiano é emaranhado então  $I_3 < 0$  [37] e, para um estado simétrico ( $I_1 = I_2$ ), podemos quantificar o emaranhamento via o emaranhamento de formação ( $E_F$ ) [55, 58]:

$$E_F(\rho_{12}) = f\left(2\sqrt{I_1 + |I_3| - \sqrt{I_4 + 2I_1|I_3|}}\right),\tag{5.8}$$

onde  $f(x) = c_{\pm}(x) \log_2(c_{\pm}(x)) - c_{-}(x) \log_2(c_{-}(x)) = c_{\pm}(x) = (x^{-1/2} \pm x^{1/2})^2/4.$ 

Para estados Gaussianos bipartidos arbitrários  $(I_1 \neq I_2)$  Alice pode trabalhar com limites inferiores para  $E_F$  [58] ou calcular a negatividade ou a negatividade logaritmica [59]. Estas duas últimas quantidades são os melhores quantificadores de emaranhamento de estados Gaussianos bipartidos não-simétricos propostos até agora [60, 61]. Neste caso, uma boa medida de emaranhamento é a negatividade logaritmica média  $\bar{E}_N(\mathcal{P}_{1,2}, \mathcal{P})$  que é dada como uma função analítica dos quatro invariantes ou equivalentemente às purezas locais,  $\mathcal{P}_1 \in \mathcal{P}_2$ , e a pureza do estado global  $\mathcal{P}$ :

$$\bar{E}_{\mathcal{N}}(\mathcal{P}_{1,2},\mathcal{P}) = \frac{E_{\mathcal{N}}^{max}(\mathcal{P}_{1,2},\mathcal{P}) - E_{\mathcal{N}}^{min}(\mathcal{P}_{1,2},\mathcal{P})}{2},$$
(5.9)

onde

$$E_{\mathcal{N}}^{max}(\mathcal{P}_{1,2},\mathcal{P}) = -\frac{1}{2}\log\left[-\frac{1}{\mathcal{P}} + \left(\frac{\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2}{2\mathcal{P}_1^2\mathcal{P}_2^2}\right) \times \left(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 - \sqrt{(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)^2 - \frac{4\mathcal{P}_1^2\mathcal{P}_2^2}{\mathcal{P}}}\right)\right]$$
(5.10)

e

$$E_{\mathcal{N}}^{min}(\mathcal{P}_{1,2},\mathcal{P}) = -\frac{1}{2}\log\left[\frac{1}{\mathcal{P}_{1}^{2}} + \frac{1}{\mathcal{P}_{2}^{2}} - \frac{1}{2\mathcal{P}^{2}} - \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{\mathcal{P}_{1}^{2}} + \frac{1}{\mathcal{P}_{2}^{2}} - \frac{1}{2\mathcal{P}^{2}} - \frac{1}{2}\right)^{2} - \frac{1}{\mathcal{P}^{2}}}\right].$$
(5.11)

Podemos também definir o erro relativo  $\delta \bar{E}_{\mathcal{N}}$ sobre  $\bar{E}_{\mathcal{N}}$  como

$$\delta \bar{E}_{\mathcal{N}}(\mathcal{P}_{1,2},\mathcal{P}) = \frac{E_{\mathcal{N}}^{max}(\mathcal{P}_{1,2},\mathcal{P}) - E_{\mathcal{N}}^{min}(\mathcal{P}_{1,2},\mathcal{P})}{E_{\mathcal{N}}^{max}(\mathcal{P}_{1,2},\mathcal{P}) + E_{\mathcal{N}}^{min}(\mathcal{P}_{1,2},\mathcal{P})}.$$
(5.12)

Desta expressão, pode-se inferir que o erro diminui quando a pureza global aumenta e as purezas locais diminuem, ou seja, com o aumento do emaranhamento (veja fig. 5.1).

Note que a negatividade logaritmica média é uma quantificação do emaranhamento baseada na mistura dos estados reduzidos e do estado global. Ela é obtida a partir da existência de limites de estados Gaussianos emaranhados máximos e mínimos em função das purezas locais e global, permitindo uma classificação dos estados Gaussianos físicos [60].



Fig.5.1 Erro relativo  $\delta \bar{E}_{\mathcal{N}}$  Eq.(5.12) em relação a negatividade logaritmica média em função da razão  $\mathcal{P}/\mathcal{P}_i$  para um estado Gaussiano simétrico ( $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ ), plotado para  $\mathcal{P} = 0.5$  [60].

### 5.3 Protocolo para Determinação dos Invariantes

O protocolo para determinação das propriedades de emaranhamento de um estado Gaussiano de dois modos, visa basicamente obter via operações locais e um canal de comunicação clássica os valores dos quatro invariantes simpléticos  $(I_1, I_2, |I_3| \in I_V)$ relacionados ao sistema bipartido em questão.

Basicamente,  $I_1$  e  $I_2$  podem ser facilmente determinados pela recontrução das submatrizes  $\mathbf{V}_1$  e  $\mathbf{V}_2$  ou por medições de pureza (função de Wigner na origem do espaço de fase) do modo 1 e 2 [52, 57], sendo a segunda menos exigente do que aquela necessária para reconstruir as submatrizes [13].  $|I_3|$  e  $I_4$  são determinados utilizando o teorema 1 (Capítulo 4), onde essencialmente devemos reconstruir a matriz de covariância  $\Gamma_1$  (4.46) a partir da diferença entre as matrizes de correlação de subconjuntos do modo 1 condicionados à projeções em estados pares e ímpares nos subsistemas do modo 2, e a equação (5.6) (veja figura 5.2). Como medições globais, obtidas através da recombinação das duas partes em um divisor de feixes seguida por detecções homódina locais, não são permitidas, teremos que lidar apenas com medições locais, nas quais os resultados possam ser enviadas através de canais de comunicação clássica para a outra parte.

Suponha que Alice e Bob compartilham várias cópias de um estado Gaussiano



Fig.5.2 Esquema geral para determinação de  $I_1$ ,  $I_2 \in I_V$ . A partir de um conjunto de estados Gaussianos bipartidos (amarelo), obtem-se os invariantes  $I_1$ e  $I_2$  referentes a cada modo do estado. Com um outro conjunto de estados, os sistemas do modo 2 (azul) são projetados em estados pares e ímpares separando os sistemas do modo 1 em dois subgrupos (verde). Cada subgrupo é formado, respectivamente, pelos estados do modo 1 condicionados a projeções em estados pares e ímpares no modo 2.  $I_V$  é determinado pela diferença das correlações destes dois subgrupos.

bipartido, onde os subsistemas referentes ao modo 1 são fornecidos para Alice e os referentes ao modo 2 para Bob. O protocolo pode ser divido em seis etapas, as duas primeiras relacionadas a medições dos termos locais de cada modo, e as restantes a medições dos elementos globais do estado bipartido (veja figura 5.3):

(*i*) Primeiramente, em um subconjunto das cópias, cada parte realiza um conjunto de medições locais de tal maneira a obter as matrizes de covariância  $\mathbf{V}_1 \in \mathbf{V}_2$ , associadas aos estados reduzidos  $\rho_1 = Tr_2\{\rho_{12}\} \in \rho_2 = Tr_1\{\rho_{12}\}$ , respectivamente;

(*ii*) Então Bob informa a Alice, através de um canal de comunicação clássica, os elementos da matriz  $\mathbf{V}_2$  (importante apenas para a reconstrução da matriz de co-variância, caso constrário para a determinação de emaranhamento apenas a obtenção das purezas de cada modo é necessária);

(iii) Após isso, na cópias restantes, Bob realiza medições de paridade em seu

modo, informando a Alice quais das suas cópias correspondem as tais operações e seus respectivos resultados, isto é, paridade par (auto-valor 1) ou paridade ímpar (auto-valor -1);

(iv) Então, Alice separa suas cópias em dois grupos, o par (p) e o ímpar (i). O primeiro grupo (p) contém todos os modos condicionados a uma paridade par nos modos de Bob. O outro (i) contém os modos restantes, ou seja, aqueles condicionados a uma medida ímpar dos modos de Bob.

(v) Para cada grupo, Alice mede as respectivas matrizes de correlação  $\mathbf{V}_{1_p} \in \mathbf{V}_{1_i}$ que contém os momentos de segunda ordem para cada subsistema;

(vi) Finalmente, utilizando o teorema 1, Alice obtém a matriz de covariância  $\Gamma_1$ , subtraindo a matriz de correlação ímpar da par:  $\Gamma_1 = \mathbf{V}_{1_p} - \mathbf{V}_{1_i}$ .



Fig.5.3 Esquema para obtenção da matriz  $\Gamma_1$  (etapas *(iii)* a *(vi)*). A partir de um subconjunto de estados Gaussianos bipartidos, Bob realiza operações de paridade sobre cada modo e comunica Alice os respectivos resultados e os modos correspondentes. Após Bob completar todas as medidas, Alice separa seus modos em dois grupos a fim de obter as correlações que permitirão a construção da matriz  $\Gamma_1$ .

Com estas 3 matrizes ( $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_2$  e  $\Gamma_1$ ) em mãos, Alice é capaz de caracterizar completamente o emaranhamento do estado Gaussiano assim como sua pureza. Os

dois primeiros invariantes são  $I_1 = \det \mathbf{V}_1 \in I_2 = \det \mathbf{V}_2$ . A terceira  $|I_3|$  é calculada lembrando que  $\mathbf{\Gamma}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}\mathbf{V}_2^{-1}\mathbf{C}^{\dagger}$ . A partir de uma álgebra simples na expressão anterior temos

$$\det(\mathbf{V}_1 - \boldsymbol{\Gamma}_1) = \det(\mathbf{C}) \det(\mathbf{V}_2^{-1}) \det(\mathbf{C}^{\dagger}).$$
(5.13)

Mas  $\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}^{\dagger}) = I_3 \in \det(\mathbf{V}_2^{-1}) = 1/\det(\mathbf{V}_2) = 1/I_2$ . Logo

$$|I_3| = \sqrt{I_2 \det(\mathbf{V}_1 - \boldsymbol{\Gamma}_1)}.$$
(5.14)

Além disso, a matriz  $\Gamma_1$  satisfaz

$$I_V = I_2 \det \Gamma_1. \tag{5.15}$$

Logo, como obtivemos  $\Gamma_1$  e  $\mathbf{V}_2$ , podemos encontrar o valor de  $I_V$ . Lembrando que  $I_V$ está relacionado com os outros quatro invariantes pela equação (5.2), temos que  $I_4$  é obtido pela expressão

$$I_4 = I_1 I_2 + I_3^2 - I_2 \det \Gamma_1.$$
(5.16)

Observe que todas estas matrizes foram obtidas sem qualquer tipo de medições globais, o que torna o protocolo muito interessante pois desta forma é possível determinarmos propriedades globais de um estado Gaussiano de dois modos a partir de processos físicos locais. Vale ressaltar que  $I_1$  e  $I_2$  podem ser determinados por medidas de pureza (função de Wigner na origem do espaço de fase) dos modos de Alice e Bob [57, 62]. Esta medida requer menos recursos do que aqueles para reconstruir  $V_1$  e  $V_2$ [13].

## 5.4 O Estudo de um Caso Particular: Estados Gaussianos Simétricos

Além de fornecer todas as propriedades de emaranhamento de um estado Gaussiano bipartido de dois modos arbitrário, o protocolo local descrito anteriormente também pode ser usado para a reconstrução da matriz de covariância de certas classes de estados Gaussianos. Basicamente o protocolo deve fornecer os elementos da submatriz  ${\bf C}$  que contém os termos de correlação entre os dois modos. Para isso, escrevemos a matriz  $\Gamma_1$  como

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \eta_1 + \frac{1}{2} & \mu_1 \\ \mu_1^* & \eta_1 + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$
 (5.17)

onde

$$\eta_1 = \langle a_1^{\dagger} a_1 \rangle_p - \langle a_1^{\dagger} a_1 \rangle_i, \qquad (5.18)$$

$$\mu_1 = \langle a_1^2 \rangle_p - \langle a_1^2 \rangle_i, \ \mu_1^* = \langle (a_1^{\dagger})^2 \rangle_p - \langle (a_1^{\dagger})^2 \rangle_i, \tag{5.19}$$

sendo  $\langle . \rangle_p$  e  $\langle . \rangle_i$  os valores médios dos grupos par e ímpar de Alice, respectivamente. As relações dos momentos de segunda ordem (5.18) e (5.19) podem ser obtidas a partir da função característica normalmente ordenada do operador Gaussiano  $\sigma_1$ :

$$\chi_{\sigma_{1}}^{(n)}(z_{1}, z_{1}^{*}) = Tr_{1}\{e^{-z_{1}a_{1}^{\dagger}}e^{z_{1}^{*}a_{1}}\sigma_{1}\}$$

$$= Tr_{1}\{e^{-z_{1}a_{1}^{\dagger}}e^{z_{1}^{*}a_{1}}(\sigma_{1_{par}} - \sigma_{1_{impar}})\}$$

$$= Tr_{1}\{e^{-z_{1}a_{1}^{\dagger}}e^{z_{1}^{*}a_{1}}\sigma_{1_{par}}\} - Tr_{1}\{e^{-z_{1}a_{1}^{\dagger}}e^{z_{1}^{*}a_{1}}\sigma_{1_{impar}}\}$$

$$= \chi_{1_{par}}^{(n)}(z_{1}, z_{1}^{*}) - \chi_{1_{impar}}^{(n)}(z_{1}, z_{1}^{*}).$$
(5.20)

Efetuando a derivada em  $z_1$  e  $z_1^\ast$ nesta função obtemos

$$\eta_{1} \equiv \langle a_{1}^{\dagger} a_{1} \rangle_{\sigma_{1}} = \frac{\partial^{2}}{\partial z_{1} \partial z_{1}^{*}} \chi_{\sigma_{1}}^{(n)}(z_{1}, z_{1}^{*}) \Big|_{z_{1}=0}$$

$$= \frac{\partial^{2}}{\partial z_{1} \partial z_{1}^{*}} \left\{ \chi_{1_{par}}^{(n)}(z_{1}, z_{1}^{*}) - \chi_{1_{impar}}^{(n)}(z_{1}, z_{1}^{*}) \right\}_{z_{1}=0}$$

$$= \langle a_{1}^{\dagger} a_{1} \rangle_{par} - \langle a_{1}^{\dagger} a_{1} \rangle_{impar}. \qquad (5.21)$$

As relações em (5.19) podem ser obtidas em uma forma similar, onde

$$\mu_{1} = -\frac{\partial^{2}}{\partial z_{1}^{*2}} \chi_{\sigma_{1}}^{(n)}(z_{1}, z_{1}^{*}) \Big|_{z_{1}^{*}=0}, \ \mu_{1}^{*} = -\frac{\partial^{2}}{\partial z_{1}^{2}} \chi_{\sigma_{1}}^{(n)}(z_{1}, z_{1}^{*}) \Big|_{z_{1}=0}.$$
 (5.22)

Vale lembrar que embora  $\Gamma_1$  seja positivo semi-definido, não satisfaz necessariamente a relação física, podendo resultar em um valor negativo para  $\eta_1$ . A partir da relação do complemento de Schur,  $\Gamma_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{C}\mathbf{V}_2^{-1}\mathbf{C}^{\dagger}$ , abrindo em termos dos elementos da matriz  $\mathbf{V}$  (3.89), obtemos as seguintes relações

$$n_1 - \eta_1 = \frac{1}{\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)^2 - |m_2|^2} \left\{ \left(|m_c|^2 + |m_s|^2\right) \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) - 2\Re e(m_2 m_s m_c^*) \right\}, \quad (5.23)$$

$$m_1 - \mu_1 = \frac{1}{\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)^2 - |m_2|^2} \left\{ 2m_s m_c \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) - m_2^* m_c^2 - m_2 m_s^2 \right\}.$$
 (5.24)

onde as equações (5.23) e (5.24) fornecem os elementos da matriz  $\Gamma_1$  como função dos elementos da matriz V. Note que se  $m_c$  e  $m_s$  são reais as equações (5.23) e (5.24) podem ser invertidas fornecendo  $m_c$  e  $m_s$ . Além disso, elas também podem ser resolvidas facilmente para uma classe importante de estados, na qual suas respectivas submatrizes de correlação podem ser escritas de uma forma tal que C satisfaça  $\mathbf{CC}^{\dagger} \propto$ I, onde I é a matriz identidade. Os estados que integram esta classe são aqueles em que a matriz C possui elementos diagonais ou não diagonais nulos, ou seja,  $m_s = 0$ e  $m_c \neq 0$  ou  $m_c = 0$  e  $m_s \neq 0$ , reduzindo para um problema de duas incógnitas reais. Nestes casos temos que  $\mathbf{CC}^{\dagger} = |m_i|^2 \mathbf{I}$ , onde i = c ou s. Veja que dentro desta classe de estados, se i = s o sistema é separável, pois det  $\mathbf{C} = |m_s|^2 \geq 0$ , ou seja, a correlação entre os dois modos é estritamente de origem clássica. Caso contrário, se i = c o estado não é necessariamente separável, podendo estar emaranhado, já que neste caso det  $\mathbf{C} = -|m_c|^2 \leq 0$ . Este último caso é mais interessante de ser estudado pois pertence a uma classe de sistemas em que podem apresentar características não locais [37].

Os elementos diagonais (não diagonais) de  $\mathbf{C}$ ,  $m_i = |m_i|e^{i\phi_i} \operatorname{com} i = s(c)$  são dados a partir de (5.23) e (5.24):

(i) i = c, neste caso  $m_s = 0$ :

$$|m_c|^2 = \frac{(n_1 - \eta_1)}{n_2 + \frac{1}{2}} \left[ \left( n_2 + \frac{1}{2} \right)^2 - |m_2|^2 \right], \qquad (5.25)$$

$$e^{2i\phi_c} = \left(\frac{\mu_1 - m_1}{n_1 - \eta_1}\right) \frac{n_2 + \frac{1}{2}}{m_2^*} ; \qquad (5.26)$$

(ii) i = s, neste caso  $m_c = 0$ :

$$|m_s|^2 = \frac{(n_1 - \eta_1)}{n_2 + \frac{1}{2}} \left[ \left( n_2 + \frac{1}{2} \right)^2 - |m_2|^2 \right], \qquad (5.27)$$

$$e^{2i\phi_s} = \left(\frac{\mu_1 - m_1}{n_1 - \eta_1}\right) \frac{n_2 + \frac{1}{2}}{m_2}.$$
(5.28)

Observe que quando  $m_2 = 0$  a fase  $\phi_i$  (i = s ou c) fica indeterminada. Este problema pode ser resolvido por transformações unitárias locais fazendo com que tenhamos uma nova matriz  $\mathbf{V}'_2$  com  $m_2 \neq 0$ , onde um novo valor  $\phi'_i$  pode ser determinado. E então, fazendo a transformada inversa obter  $\phi_i$ . Felizmente, existem diversos estados Gaussianos bipartidos experimentalmente acessíveis no qual todos os parâmetros da matriz de covariância são reais e  $m_s(m_c) = m_1 = m_2 = 0$  e  $m_c(m_s) \neq 0$ . Para tais estados, apenas necessitamos resolver as equações (5.25) e (5.27) para obter  $\mathbf{C}$ .

Um exemplo natural e importante pertencente a esta classe de estados é o estado térmico comprimido de dois modos [47], já descrito na seção 3.3, que pode ser gerado por um cristal não linear com ruído interno, onde sua matriz de covariância  $\mathbf{V}$  está na forma simétrica e é dada por (3.121). Um outro exemplo é o estado EPR.

Neste caso o protocolo compreende apenas medições locais simples, isto é, aquelas para obter n,  $\langle a_1^{\dagger}a_1 \rangle_p \in \langle a_1^{\dagger}a_1 \rangle_i$  (ou equivalentemente  $\eta_1$ ) por Alice e as medições de paridade feita por Bob. A comunicação clássica ocorre nos momentos em que Bob informa a Alice os instantes em que ele efetua as medições de paridade em seu subconjunto de estados e os respectivos resultados obtidos. Logo, a equação (5.25) é simplesmente

$$m_c^2 = (n - \eta_1) \left( n + \frac{1}{2} \right).$$
 (5.29)

Experimentalmente,  $n \in \eta_1$  são obtidos diretamente por fotocontagem, equanto a medição de paridade esta relacionada com a determinação da função de Wigner do modo de Bob na origem do espaço de fase [51], ou alternativamente à pureza do seu modo, ambos podendo ser medidos por experimentos de fotocontagem [49, 52].

Se estudamos o limite físico e a P-representabilidade deste estado simétrico, podemos verificar que os estados físicos emaranhados são aqueles em que  $\eta_1$  deve satisfazer (veja figura 6.4 e 6.5):

$$-\frac{n/2}{n+1/2} \le \eta_1 \le \frac{n/2}{n+1/2}.$$
(5.30)

Para uma classe de estados Gaussianos caracterizados pela matriz  $\mathbf{V}$  simétrica dada por (3.121), o critério de separabilidade de Simon [37] é equivalente à condição de P-representabilidade para um estado quântico [20]. Em termos das matrizes de covariância um estado Gaussiano é P-representável se sua matriz satisfaz a desigualdade  $\mathbf{V} - (1/2)\mathbf{I} \ge 0$ . O limite superior em (5.30) é obtido escrevendo o critério de separabilidade em termos dos elementos de matriz de (3.121) obtendo  $n \ge |m_c|$ , e aplicando a relação (5.29). O limite inferior, que corresponde a todos os estados puros, é obtido da mesma maneira, usando agora a relação física ( $\mathbf{V} + (1/2)\mathbf{E} \ge 0$ ) ao invés da relação de separabilidade. Este limite delimita o conjunto de todos os estados Gaussianos simétricos emaranhados.

A figura 5.4 possibilita verificarmos uma característica interessante dos estados Gaussianos simétricos. Na região em que  $\eta_1 = 0$ , que delimita dois subgrupos (par e ímpar), estão contidos todos os estados em que Bob tem a mesma probabilidade de obter resultados pares e ímpares em suas medidas de paridade. O subconjunto par  $\eta_1 > 0$  contém todos os estados onde Bob possui probabilidade maior de obter resultados pares enquanto o subconjunto ímpar  $\eta_1 < 0$  contém todos os estados onde ele possui maior probabilidade de obter resultados ímpares.

O emaranhamento para sistemas pertencentes ao grupo dos estados Gaussianos simétricos pode ser quantificado pelo emaranhamento de formação  $E_F$  (5.8) como representado pela escala de cor na figura 5.4. Note que os estados mais emaranhados estão concentrados no subconjunto ímpar ( $\eta_1 < 0$ ).

A figura 5.5 ilustra as propriedades de emaranhamento de um estado Gaussiano bipartido simétrico no espaço das quantidades medidas  $n \in \eta_1$ , e delimita o espaço que descreve a classe de estados Gaussianos simétricos em três regiões: não físicos, emaranhados e separáveis. Com o aumento do número médio de fótons (n) e da pureza do estado global, o emaranhamento tende a crescer, já que o emaranhamento de formação  $E_F$  não possui um limitante superior. Os estados puros correspondem àqueles que satisfazem o limite inferior de (5.30) e estão na fronteira entre a região dos estados emaranhados e a região que não possui estados físicos. Aproximando



Fig.5.4 Acima da linha preta sólida (superior) estão situados os estados separáveis. Abaixo desta linha, o emaranhamento é quantificado via emaranhamento de formação (Eq. (5.8)). Os parâmetros  $n \in \eta_1$  estão relacionados, respectivamente, com o número médio de fótons do modo de Alice antes e após a medição de paridade realizada por Bob. Abaixo da curva sólida (inferior) situa-se a região em que os pontos não representam estados físicos.

da classe de estados separáveis, o emaranhamento decresce chegando a zero no limite superior de (5.30) que corresponde a fronteira do grupo dos estados emaranhados com os separados.

Logo, para esta classe de estados, tudo o que Alice precisa saber para verificar se seu modo esta ou não esta emaranhado com o de Bob assim como a quantidade de emaranhamento presente são medições do número de fótons antes e depois das medições de paridade de Bob.



Fig.5.5 Propriedades de emaranhamento do estado Gaussiano bipartido simétrico. Podemos observar claramente as fronteiras que separam as classes de estados emaranhados e separados, e a região em que estados físicos não são permitidos. A quantidade de emaranhamento é quantificada pelo emaranhamento de formação e corresponde ao eixo vertical da figura.

# Capítulo 6 Conclusões

O estudo de estados e operações Gaussianos é motivado não só pela possibilidade de produzir, manipular e detectar tais estados (operações) experimentalmente, mas também pela sua descrição peculiar em termos de matrizes, possibilitando uma análise analítica, além de gerar interessantes estruturas matriciais freqüentemente utilizadas em aplicações matemáticas.

Nesta dissertação estudamos o condicionamento de estados Gaussianos sob operações Gaussianas. O ponto central foi a investigação do processo físico que fornece o complemento de Schur de uma submatriz da matriz de covariância de um estado Gaussiano bipartido de dois modos de entrada (Capítulo 4). Descobrimos que a medição de paridade em um dos modos do sistema bipartido permite definirmos um operador Gaussiano relacionado ao outro modo, caracterizado por uma matriz de covariância dada pelo complemento de Schur da matriz de covariância reduzida do modo medido. O fato de que o valor médio da paridade de um estado e a sua função de Wigner na origem são proporcionais, permitiu uma associação do complemento de Schur da matriz de covariância global com a função de Wigner de um modo na origem e, devido a invariância das propriedades Gaussianas por deslocamentos locais, com qualquer ponto desta função. Isto provém do fato de que esta função é obtida pelo traço do operador Gaussiano caracterizado pelo complemento de Schur. Este operador está relacionado com a diferença de dois estados do modo condicionado à projeções em estados pares e ímpares no outro modo. Isto possibilita verificarmos a estrutura da função de Wigner de um estado na origem como a diferença de probabilidades de obtermos resultados pares e ímpares em medições de paridade sobre este sistema.

Neste caso, a possibilidade da função de Wigner possuir valores negativos na origem ocorre quando a probabilidade de projetarmos o sistema em um estado ímpar é maior. Quando o sistema é Gaussiano, a sua função de Wigner está relacionada com um dos elementos do conjunto dos quatro invariantes do grupo  $Sp(2, R) \otimes Sp(2, R)$  e com a pureza do estado. Além disso, generalizamos este resultado para um estado Gaussiano *n*-partido de entrada, verificando que após a medição de paridade em um dos modos, o estado dos n - 1 modos restantes está relacionado com um operador Gaussiano descrito por uma matriz de covariância com elementos bloco  $2 \times 2$  em forma de complementos de Schur de matrizes especiais.

A identificação do processo físico que nos fornece o complemento de Schur, proporcionou importantes avanços em termos da identificação da relação de uma estrutura matemática com operações físicas e principalmente na determinação de propriedades de emaranhamento de estados Gaussianos bipartidos de dois modos. Estudamos o problema de como determinar localmente se um estado Gaussiano bipartido de dois modos esta emaranhado e também como quantificar o conteúdo de emaranhamento localmente (Capítulo 5). Desenvolvemos um protocolo para a identificação e quantificação do emaranhamento de um estado Gaussiano bipartido de dois modos arbitrário, através de apenas medições/operações locais e um canal de comunicação clássica (LOCC). Vimos que para o caso particular de estados Gaussianos simétricos, o protocolo também permite a reconstrução das matrizes de covariância dos elementos desta classe de estados quânticos. Este é um processo de informação quântica extremamente importante pois uma caracterização local do grau de emaranhamento a princípio requer menos recursos de medida e mais comunicação clássica do que operações globais. Além disso, na maioria das situações práticas não é possível implementar operações globais ou medidas conjuntas em ambos os modos de um estado bipartido a fim de caracterizar seu emaranhamento. O que pode ser feito são operações locais e comunicação clássica (LOCC), que é o ponto central do protocolo apresentado.

# Apêndice A

# Medições Quânticas em Sistemas de Variáveis Contínuas.

Ao longo deste projeto foram estudadas situações em que ocorrem medições em sistemas quânticos definidos em um espaço de Hilbert infinito, isto é, descritos por variáveis contínuas, como medições de quadraturas e número médio de fótons. Neste resumo revisaremos alguns conceitos relevantes em relação a medições em sistemas de variáveis contínuas. Primeiramente descreveremos o conceito de medida valorada por operadores positivos (POVM) que leva em consideração a interação entre o sistema a ser medido e o instrumento de medição utilizado [63], e processos de medições não projetivas [1]. Na segunda seção o processo de detecção homódina é apresentada, processo este que permite obter, a partir de experimentos de contagem direta de fótons, o valor médio das quadraturas de um campo de luz. Na terceira seção apresentamos o processo de obtenção de funções de quase-probabilidade a partir de deteção homódina denominada tomografia quântica.

Primeiramente, faremos uma pequena discussão em relação as teorias que descrevem o processo de medição quântica. Os processos de evolução de sistemas sujeitos a medições foram durante um longo período descritos pela teoria quântica de medição de von Neumann [64], denominada *medição do primeiro tipo*, que estabelece duas evoluções distintas do sistema: primeiramente existe uma evolução unitária que obedece as leis da dinâmica quântica na ausência de medições seguida de uma transformação instantânea e irreversível, regida pelo postulado de projeção, resultando em uma redução ou colapso da função de onda do sistema em um dos autoestados relacionados ao observável medido. Porém esta é uma teoria idealizada que parte do princípio de ocorrência de uma transformação instantânea. Em geral, um aparato de medida faz medições continuamente, durante um intervalo de tempo, de um observável através de várias corridas do experimento a fim de obter uma média de alguma quantidade relacionada ao observável em questão. Este tipo de processo de medição é denominado *processo de medição contínua*, ou *medição de segundo tipo*. A fotodetecção é um exemplo deste tipo de medição. Como veremos nas próximas seções, por intermédio da fotodetecção podemos realizar diversos experimentos para a determinação de propriedades estatísticas do campo assim como sua completa descrição.

### A.1 Observáveis e POVM

Para ganhar informação sobre um estado quântico temos que medir alguns observáveis. O processo de medição inevitavelmente envolve algum tipo de interação, que acopla o modo sob exame (o sinal) e um ou mais modos do campo (a sonda). Conseqüentemente, os observáveis medidos não estão definidos apenas no espaço de Hilbert do sinal. Em vez disso, esta medição reflete propriedades globais do estado que resulta da interação entre o modo do sinal e o conjunto de modos da sonda. Em alguns casos é possível que a estatística dos resultados possa ser descrita em termos de um observável definido apenas no espaço de Hilbert do modo do sinal. Em geral, eliminado os modos da sonda por traço parcial, ficamos com um objeto mais geral, isto é, um conjunto de observáveis, a fim de obter uma descrição estatística em termos do operador densidade do sinal [63].

Seja  $\mathcal{H}$  o espaço de Hilbert do sinal,  $\mathcal{K}$  o dos modos da sonda, e X os observáveis medidos em  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ . O espectro de medições de X é dado por  $x \to E(x) = |x\rangle\langle x|$  com  $x \in \mathcal{X} \subset \Re$  (o espectro de X) e  $\langle x'|x \rangle = \delta(x - x')$  no caso de variáveis contínuas. A densidade de probabilidade do resultado de uma medição ocorrer é dada por

$$p(x) = Tr[\rho \otimes \sigma E(x)], \tag{A.1}$$

onde  $\rho \in \sigma$  são os estados iniciais do sinal e da sonda respectivamente, assumindos como separados, e o traço é efetuado sobre o espaço de Hilbert total. A equação (A.1)

pode ser escrita como

$$p(x) = Tr_{\mathcal{H}} \{ \rho \ Tr_{\mathcal{K}}[\sigma E(x)] \} = Tr_{\mathcal{H}}[\rho \ \Pi(x)], \tag{A.2}$$

onde referimos a função  $\Pi(x) = Tr_{\mathcal{K}}[\sigma E(x)]$  como a medida valorada por operadores positivos (POVM) do esquema de medições. Da definição temos que um POVM é um conjunto  $\{\Pi(x)\}_{x\in\mathcal{X}}$  de operadores positivos,  $\Pi(x) \ge 0$ , e normalizados,  $\int_{\mathcal{X}} dx \Pi(x) =$ I, que, geralmente, não formam um conjunto de projeções ortogonais.

O modo como as medições sobre sistemas quânticos devem ser descritas pode ser apresentado através do seguinte postulado [1]:

As medições quânticas são descritas por um conjunto de operadores de medição  $\{M_m\}$ , que atuam no espaço de Hilbert do sistema observado. O índice m se refere aos possíveis resultados da medição. A probabilidade de um resultado m ocorrer para um estado descrito por  $\rho$ , imediatamente antes da medição, é dada por:

$$p(m) = Tr\{\mathbf{M}_m^{\dagger}\mathbf{M}_m\rho\},\tag{A.3}$$

onde o estado pós medição será

$$\frac{\mathbf{M}_m \rho \mathbf{M}_m^{\dagger}}{Tr\{\mathbf{M}_m^{\dagger} \mathbf{M}_m \rho\}}.$$
(A.4)

Estes operadores devem satisfazer a relação de completeza

$$\sum_{m} \mathbf{M}_{m}^{\dagger} \mathbf{M}_{m} = \mathbf{I}, \tag{A.5}$$

e de positividade:

$$\mathbf{M}_m^{\dagger} \mathbf{M}_m \ge \mathbf{0},\tag{A.6}$$

para que p(m) seja interpretado como uma probabilidade.

Veja que para uma medição projetiva de von Neumann temos que  $\mathbf{M}_m^{\dagger} \mathbf{M}_{m'} = \delta_{m,m'}$ e representa apenas um caso particular de uma gama de medições quânticas possíveis. Logo, podemos considerar um POVM como um conjunto de medições com elementos dados pelo operador  $E_m = \mathbf{M}_m \mathbf{M}_m^{\dagger}$ , possibilitando a construção dos operadores de medição  $\mathbf{M}_m$  satisfazendo todas as propriedades necessárias.

Em termos gerais, um processo de deteção geralmente corresponde a medição de um observável definido em um espaço de Hilbert global do sinal e da sonda. Se restringirmos nossa atenção ao sistema do sinal apenas, a estatística das medições é descrita por um POVM que correspondem a descrições em termos de medições não projetivas. O inverso também é verdade, isto é, a determinação de um conjunto de operadores que satisfaça as condições para formarem um POVM, pode ser entendido como uma medição de um observável em um espaço de Hilbert global.

### A.2 Teoria de Detecção Homódina

A teoria de detecção homódina proposta por Yuen e Shapiro [65] é a de maior implicação na Óptica Quântica quando há a necessidade da detecção de quadraturas de campos eletromagnéticos. Ela consiste em misturar, a partir de um divisor de feixes ideal, o campo de entrada com um oscilador local (campo de referência) antes da fotodetecção. Esta mistura permite acessar a fase a fim de calcular as variâncias das quadraturas do campo.

Supomos um campo monomodal em uma cavidade, descrito pelos operadores de criação e aniquilação  $a^{\dagger}$  e a. De acordo com a teoria de input-output [26], o campo de saída da cavidade de largura de linha  $\lambda$  é dado por

$$a_s = \sqrt{\lambda}a,$$
 (A.7)

mais flutuações, as quais iremos desprezar. O oscilador local é descrito por um estado coerente, onde o fluxo de fótons é dado por  $\lambda |\beta|^2$ , tal que  $\beta = |\beta|e^{i\theta}$ , com  $\theta$  sendo a fase do oscilador local. Os dois modos de saída do divisor de feixes são dados por

$$c = \sqrt{\lambda} \left( \sqrt{\eta} a + i \sqrt{1 - \eta} \beta \right), \tag{A.8}$$

$$d = \sqrt{\lambda} \left( i\sqrt{1-\eta}a + \sqrt{\eta} \beta \right), \tag{A.9}$$

onde  $\sqrt{\eta}$  é a transmitância e  $\sqrt{1-\eta}$  é a reflectância. A mudança de fase de  $\pi/2$  entre as ondas refletidas e transmitidas para um divisor de feixes simétrico foi incluída no número complexo *i*.

#### A.2.1 Detecção Homódina não Balanceada

A figura A1 ilustra o esquema para este tipo de detecção homódina simples. Neste caso, consideramos a transmitividade do divisor de feixes próxima a meio e é feita uma medição apenas em um detector. Considera-se também que o modo do oscilador local é intenso. A partir da equação (A.8) temos que o número médio de fótons incidentes no fotodetector é dado por

$$\langle c^{\dagger}c \rangle = \lambda \left[ \beta \langle a^{\dagger}a \rangle + (1-\eta)|\beta|^2 - i|\beta|\sqrt{\eta(1-\eta)}(\langle a \rangle e^{-i\theta} - \langle a^{\dagger} \rangle e^{i\theta}) \right].$$
(A.10)

Veja que esta expressão apresenta termos do sinal de entrada, do oscilador local e um termo de interferência entre os dois modos. Assumindo um divisor de feixe 50 : 50  $(\eta = 1/2)$  e considerando um oscilador local forte em comparação com a entrada, isto é,  $|\beta|^2 >> \langle a^{\dagger}a \rangle$ , o primeiro termo da equação acima pode ser desprezado e o número médio de partículas no modo c pode ser escrito como

$$\langle c^{\dagger}c \rangle \approx \frac{\lambda|\beta|}{2} \langle X_{\theta+\pi/2} \rangle + \frac{\lambda|\beta|^2}{2},$$
 (A.11)

onde

$$X_{\theta} = a \ e^{-i\theta} + a^{\dagger} \ e^{i\theta} \tag{A.12}$$

é a quadratura generalizada do campo da cavidade.

A contribuição do oscilador local pode ser subtraída do número de fótons incidentes no detector, fazendo com que este seja proporcional ao valor esperado da quadratura de fase do campo na cavidade. Como o oscilador local é um campo que pode ser controlado, podemos medir os valores médios das quadraturas para diferentes valores de fase, a partir da variação do parâmetro  $\theta$ .

Podemos também calcular a variância do número de fótons incidentes no detector:



oscilador local

Fig.A1 Esquema de detecção homódina não balanceada da quadratura do campo da cavidade.

$$\langle \Delta n^2 \rangle \equiv \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \frac{\lambda^2 |\beta|^2}{4} \langle \Delta X^2_{\theta+\pi/2} \rangle + \frac{\lambda^2 |\beta|^2}{4}, \qquad (A.13)$$

sendo  $\langle n \rangle = \langle c^{\dagger} c \rangle \equiv \sum_{n=0}^{\infty} n p_n$ , tal que  $p_n$  é a probabilidade de obtermos un número n de fótons, e

$$\langle \Delta X_{\theta+\pi/2}^2 \rangle = \langle X_{\theta+\pi/2}^2 \rangle - \langle X_{\theta+\pi/2} \rangle^2, \tag{A.14}$$

a variância da quadratura  $X_{\theta+\pi/2}$ .

### A.2.2 Detecção Homódina Balanceada

Na dedução da média das quadraturas na detecção homódina não balanceada, consideramos que o modo do oscilador local era bem mais intenso do que o campo de entrada. Descreveremos nesta seção o processo de detecção homódina balanceada ilustrado esquematicamente na figura A2. Este processo se baseia na detecção em dois braços do divisor, balanceando as saídas do divisor de feixes, a fim de que os termos de não interferência possam ser eliminados completamente na média dos fótons do campo. Utilizando novamente um divisor de feixes 50 : 50, fazendo a diferença na medida dos dois detectores, defiminos o operador

$$n_{cd} \equiv c^{\dagger}c - d^{\dagger}d, \tag{A.15}$$

e calculando sua média obtemos a partir das equações (A.9) e (A.10)

$$\langle n_{cd} \rangle = 2|\beta| \langle X_{\theta+\pi/2}^2 \rangle, \tag{A.16}$$



oscilador local

Fig.A2 Esquema de detecção homódina balanceada da quadratura do campo da cavidade.

que representa o número médio de fótons obtido da diferença dos resultados entre os dois detectores. Veja que agora os termos do oscilador local foram eliminados restando apenas os termos de interferência entre o modo do oscilador local e o campo de entrada proveniente da cavidade. Da mesma forma o termo relacionado ao oscilador desaparecerá na expressão da variância

$$\langle \Delta n^2 \rangle = 4|\beta|^2 \langle \Delta X^2_{\theta+\pi/2} \rangle. \tag{A.17}$$

### A.2.3 Fotodetecção

As teorias de fotodetecção de Srnivas e Davies (SD) [66] e a dos operadores de fase exponenciais [67, 68] consideram a conversão dos fótons detectados de um campo em fotoelétrons. A quantidade mensurável nestes casos é o número de fotoelétrons ativados pelo feixe incidente. Consideraremos a teoria de fotocontagem contínua de SD, que basicamente se baseia na realização de várias corridas do experimento de fotocontagem a fim de obter uma média para a determinação de alguma quantidade observável, onde a probabilidade elementar P(k,t) que k contagens ocorram em um intervalo de tempo t é dado por

$$P(k,t) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} (1 - e^{-\gamma t})^k (e^{-\gamma t})^{n-k} p_n,$$
(A.18)

sendo n o número de fótons incidentes por segundo no detector,  $\gamma$  a fração de fótons que excitam fotoelétrons (eficiência do detector),  $\rho$  é o operador densidade do campo

e  $p_n = \langle n | \rho | n \rangle$  é a probabilidade de ter n fótons no modo do campo.

Para este caso, o número médio de fótons contados no período t é dado por

$$\langle k \rangle = \sum_{k} k P(k,t) = (1 - e^{-\gamma t}) \langle n \rangle,$$
 (A.19)

enquanto que a variância do número de fotocontagens é

$$\langle \Delta k^2 \rangle = \langle \Delta n^2 \rangle (1 - e^{-\gamma t})^2. \tag{A.20}$$

Veja que tomando o limite de um período longo de contagem, isto é,  $\lim_{t\to\infty} \langle k \rangle = \langle n \rangle$ , ou alternativamente, quando a eficiência do detector é alta, o número de fotoelétrons contados pelo detector tende a ser o número médio de fótons do campo medido. Primeiramente para o caso da detecção homódina não balanceada, podemos reescrever a expressão (A.19) como

$$\langle k \rangle = (1 - e^{-\gamma t}) \frac{\lambda |\beta|}{2} (\langle X_{\theta + \pi/2} \rangle + |\beta|), \qquad (A.21)$$

e a variância

$$\langle \Delta k^2 \rangle = \frac{\lambda |\beta|}{2} (\langle \Delta X^2_{\theta + \pi/2} \rangle + 1)(1 - e^{-\gamma t})^2.$$
 (A.22)

Neste caso, para tempos longos de medição ou alta efeciência de detecção

$$\lim_{\gamma t \to \infty} \langle \Delta k^2 \rangle = \frac{\lambda^2 |\beta|^2}{4} (\langle \Delta X_{\theta + \pi/2}^2 \rangle + 1).$$
 (A.23)

Agora, para o caso do processo de detecção homódina balanceada, o número médio de fótons é dado por

$$\langle k \rangle = (1 - e^{-\gamma t})\lambda |\beta| \langle X_{\theta + \pi/2} \rangle, \qquad (A.24)$$

e variância

$$\langle \Delta k^2 \rangle = 4\lambda^2 |\beta|^2 \langle \Delta X^2_{\theta+\pi/2} \rangle (1 - e^{-\gamma t})^2.$$
 (A.25)

Obtendo para tempos longos de medição ou alta eficiência de detecção

$$\lim_{\gamma t \to \infty} \langle \Delta k^2 \rangle = 4\lambda^2 |\beta|^2 \langle \Delta X^2_{\theta + \pi/2} \rangle.$$
 (A.26)

Destes resultados podemos observar que as variâncias do número de fotocontagens reais permitem a obtenção da variância na quadratura do campo no interior da cavidade. Além disso, observe que a variância das quadraturas do campo na cavidade é limitada inferiormente pela variância do número de contagens, devido a influência contínua do processo de contagem no campo na cavidade.

### A.3 Tomografia homódina quântica

Vimos no capítulo 2 que as funções de quasi-probabilidade (Glauber, Wigner e Husimi) podem descrever o estado quântico de um sistema, fornecendo uma completa descrição de suas propriedades físicas. Nesta seção, apresentaremos o conceito de tomografia homódina quântica usualmente utilizado em experimentos para obtenção da função de Wigner e a matriz densidade de sistemas quânticos como o estado de vácuo, comprimido e de Fock [56, 69]. Basicamente a tomografia homódina quântica, desenvolvida por Vogel e Risken [70], mostra que podemos obter qualquer uma das três funções de quasi-probabilidade a partir da distribuição de probabilidade das quadraturas rotacionadas do campo.

Utilizaremos a distribuição de quasi-probabilidade parametrizada por um parâmetro s introduzido por Cahill e Glauber [71]. Estas distribuições podem ser definidas como transformadas de Fourier das funções características

$$\chi(\eta, s) = Tr[\exp(\eta a^{\dagger} - \eta^* a + s|\eta|^2/2)\rho],$$
(A.27)

isto é

$$F(\alpha, s) = \frac{1}{\pi^2} \int \chi(\eta, s) \exp(\alpha \eta^* - \alpha^* \eta) d^2 \eta, \qquad (A.28)$$

onde  $\rho$  é o operador densidade. Temos que para s = 1 (A.28) será a função P de Glauber, s = 0 a função de Wigner e s = -1 a função Q de Husimi.

Podemos adicionar uma fase no ângulo  $\theta$  nos operadores de quadratura (A.12) fazendo com que ela possa ser reescrita como
$$X_{\theta} = (a^{\dagger}e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2 = a_r \cos\theta - a_i \sin\theta, \qquad (A.29)$$

onde  $a_r$  e  $a_i$  são as duas quadraturas de fase definidos como

$$a_r = (a + a^{\dagger})/2 = X_0$$
 (A.30)

е

$$a_i = i(a^{\dagger} - a)/2 = X_{\pi/2}.$$
 (A.31)

A função de distribuição de probabilidade  $f(x, \theta)$  definida como a transformada de Fourier da função característica

$$\chi_x(\xi,\theta) = Tr[\exp(i\xi X_\theta)\rho],\tag{A.32}$$

isto é,

$$f(x,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int \chi_x(\xi,\theta) e^{-i\xi x} d\xi, \qquad (A.33)$$

nos permite calcular qualquer valor esperado da quadratura de fase  $x = \langle X_{\theta} \rangle$  para um dado valor de  $\theta$ , sendo  $\xi$  uma variável real. Observe que como  $X_{\theta}$  é um operador Hermiteano, sua função de distribuição de probabilidade (A.33) é sempre bem comportada e positiva.

Agora estabeleceremos uma correspondência um para um entre a função de quasiprobabilidade  $F(\alpha, s)$  e a função de distribuição de probabilidade  $f(x, \theta)$  para as quadraturas. Usando a definição (A.29) obtemos imediatamente uma relação entre as funções características (A.27) e (A.32):

$$\chi_x(\xi,\theta) = \chi(i\xi e^{i\theta}, s) \exp(-s\xi^2/8).$$
(A.34)

Escrevendo na notação real

$$\eta = \eta_r + i\eta_i, \ \chi(\eta, s) = \chi(\eta_r, \eta_i, s), \tag{A.35}$$

temos

$$\chi_x(\xi,\theta) = \chi\left(-\frac{1}{2}\xi\sin\theta, \frac{1}{2}\xi\cos\theta, s\right)\exp(-s\xi^2/8).$$
(A.36)

Se a função característica  $\chi_x(\xi, \theta)$  é conhecida para todos os valores de  $\xi$  no intervalo  $-\infty < \xi < \infty$  e para todo  $\theta$  no intervalo  $0 \le \theta < \pi$ , a função característica  $\chi(\eta_r, \eta_i, s)$ é conhecida em todo plano complexo  $\eta$ , isto é, para  $\eta_r$  e  $\eta_i \in (-\infty, \infty)$ . Portanto vemos que há uma correspondência um para um entre as funções características (A.27) e (A.32), e conseqüêntemente também há uma correspondência um para um entre a função de quasi-probabilidade (A.28) e a função de distribuição de probabilidade (A.33). Usando a transformada de Fourier de (A.36), inserindo a transformada de Fourier inversa de (A.28), mudando as variáveis de integração para

$$\alpha_r = u\cos\theta - v\sin\theta, \ \alpha_i = u\sin\theta + v\cos\theta, \tag{A.37}$$

e lembrando que agora

$$\eta_r = -\frac{1}{2}\xi\sin\theta, \ \eta_i = \frac{1}{2}\xi\cos\theta, \tag{A.38}$$

temos

$$f(x,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int \int \int F(u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta, s) \ e^{-\frac{s\xi^2}{8} - i(u-x)\xi} du \ dv \ d\xi.$$
(A.39)

Para $s \geq 0$ podemos efetuar a integração  $\xi$ obtendo a seguinte expressão

$$f(x,\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \int \int F(u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta, s) \ e^{-\frac{2(u-x)^2}{s}} du \ dv.$$
 (A.40)

Para s = 0, isto é, para a função de Wigner, (A.39) se reduz a

$$f(x,\theta) = \int F(x\cos\theta - v\sin\theta, x\sin\theta + v\cos\theta, 0)dv.$$
(A.41)

A partir de passos similares, podemos obter a inversa de (A.39) a partir de (A.36)

$$F(\alpha_r, \alpha_i, s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\pi} f(x, \theta) \ e^{\frac{s\xi^2}{8} + i\xi(x - \alpha_r \cos\theta - \alpha_i \sin\theta)} |\xi| \ dx \ d\xi \ d\theta.$$
(A.42)

Logo, as distribuições de quasi-probabilidade  $F(\alpha, s)$  são determinadas unicamente pela função distribuição de probabilidade  $f(x, \theta)$  das quadraturas em uma detecção homódina e vice versa, como se pode observar pelas relações (A.39) e (A.42). Isto quer dizer que a partir de uma detecção homódina e a conseqüente obtenção da função de distribuição de probabilidades das quadraturas do campo, podemos reconstruir a função de quasi-probabilidade a partir da correspondência entre estas duas funções.

# Apêndice B Prova Alternativa do Teorema 1

Neste apêndice fornecemos uma prova alternativa do teorema 1, obtida a partir da representação do estado Gaussiano bipartido  $\rho_{12}$  em termos de funções de quaseprobabilidade. Descreveremos detalhadamente a prova pela função P de Glauber. Como a função de Wigner é obtida da função P a partir de uma transformada de Fourier, a prova em termos da representação do estado  $\rho_{12}$  na função de Wigner é análoga à apresentada abaixo.

Partindo da equação (4.45) e substituindo a forma de  $\rho_{12}$  expandida em estados coerentes (4.28), temos

$$\sigma_{1} = Tr_{2} \{ e^{i\pi a_{2}^{\dagger}a_{2}} \rho_{12} \}$$

$$= Tr_{2} \left\{ e^{i\pi a_{2}^{\dagger}a_{2}} \int d\mathbf{z}_{1} d\mathbf{z}_{2} P(z_{1}, z_{2}) |z_{1}, z_{2}\rangle \langle z_{1}, z_{2}| \right\}$$

$$= \int d^{2}\alpha_{2} \langle \alpha_{2} | \left( e^{i\pi a_{2}^{\dagger}a_{2}} \int d\mathbf{z}_{1} d\mathbf{z}_{2} P(z_{1}, z_{2}) |z_{1}, z_{2}\rangle \langle z_{1}, z_{2}| \right) |\alpha_{2}\rangle$$

$$= \int d^{2}\alpha_{2} \int d\mathbf{z}_{1} d\mathbf{z}_{2} P(z_{1}, z_{2}) |z_{1}\rangle \langle z_{1}| \langle z_{2}|\alpha_{2}\rangle \langle \alpha_{2}| e^{i\pi a_{2}^{\dagger}a_{2}} |z_{2}\rangle$$

$$= \int d\mathbf{z}_{1} d\mathbf{z}_{2} P(z_{1}, z_{2}) |z_{1}\rangle \langle z_{1}| \langle z_{2}| e^{i\pi a_{2}^{\dagger}a_{2}} |z_{2}\rangle, \qquad (B.1)$$

onde o último passo foi obtido usando a relação de completeza para estados coerentes (2.32). Faremos agora o cálculo do termo  $\langle z_2 | e^{i\pi a_2^{\dagger} a_2} | z_2 \rangle$ . Expandindo o estado coerente em estados de Fock como na equação (2.30), temos

$$\langle z_{2} | e^{i\pi a_{2}^{\dagger}a_{2}} | z_{2} \rangle = \langle z_{2} | e^{i\pi a_{2}^{\dagger}a_{2}} e^{-|z_{2}|^{2}/2} \sum_{n} \frac{z_{2}^{n}}{(n!)^{1/2}} | n \rangle$$

$$= \langle z_{2} | e^{-|z_{2}|^{2}/2} \sum_{n} \frac{z_{2}^{n}}{(n!)^{1/2}} e^{i\pi n} | n \rangle$$

$$= \langle z_{2} | e^{-|z_{2}|^{2}/2} \sum_{n} \frac{(-z_{2})^{n}}{(n!)^{1/2}} | n \rangle$$

$$= \langle z_{2} | -z_{2} \rangle$$

$$= e^{-2|z_{2}|^{2}},$$
(B.2)

onde a exponencial foi obtida aplicando a relação de não ortogonalidade para estados coerentes (2.33). Escrevendo a função  $P(z_1, z_2)$  em termos da função característica simétrica, usando (2.53), temos

$$P(z_1, z_2) = \int d\mathbf{s} \ e^{-\mathbf{z}\mathbf{E}\mathbf{s}} e^{\frac{1}{2}(|s_1|^2 + |s_2|^2)} \chi(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2).$$
(B.3)

Substituindo (B.2) e (B.3) em (B.1), e lembrando que para o estado Gaussiano  $\rho_{12}$  a sua função característica simétrica é dada por  $\chi(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = e^{-1/2\mathbf{s}^{\dagger}\mathbf{V}\mathbf{s}}$ , temos

$$\sigma_{1} = \int d\mathbf{z} \int d\mathbf{s} \ e^{-\mathbf{z}\mathbf{E}\mathbf{s}} e^{\frac{1}{2}(|s_{1}|^{2}+|s_{2}|^{2})} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{s}^{\dagger}\mathbf{V}\mathbf{s}} e^{-2|z_{2}|^{2}} |z_{1}\rangle\langle z_{1}|$$

$$= \int d\mathbf{z} \int d\mathbf{s} \ e^{-\mathbf{z}\mathbf{E}\mathbf{s}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{s}^{\dagger}(\mathbf{V}-\frac{1}{2}\mathbf{I})\mathbf{s}} e^{-2|z_{2}|^{2}} |z_{1}\rangle\langle z_{1}|$$

$$= \int d\mathbf{s} \ e^{-\frac{1}{2}\mathbf{s}^{\dagger}(\mathbf{V}-\frac{1}{2}\mathbf{I})\mathbf{s}} \int d\mathbf{z}_{1} e^{-\mathbf{z}_{1}\mathbf{Z}\mathbf{s}_{1}} |z_{1}\rangle\langle z_{1}| \int d\mathbf{z}_{2} e^{-\mathbf{z}_{2}\mathbf{Z}\mathbf{s}_{2}} e^{-2|z_{2}|^{2}}.$$
 (B.4)

Calculando a integral em  $\mathbf{z}_1$  e  $\mathbf{z}_2,$  temos, respectivamente

$$\int d\mathbf{z}_{1} e^{-\mathbf{z}_{1} \mathbf{Z}_{\mathbf{s}_{1}}} |z_{1}\rangle \langle z_{1}| = \int d\mathbf{z}_{1} e^{z_{1} s_{1}^{*}} |z_{1}\rangle \langle z_{1}| e^{-z_{1}^{*} s_{1}}$$
$$= \int d\mathbf{z}_{1} e^{a_{1} s_{1}^{*}} |z_{1}\rangle \langle z_{1}| e^{-a_{1}^{\dagger} s_{1}}$$
$$= e^{a_{1} s_{1}^{*}} e^{-a_{1}^{\dagger} s_{1}} = e^{\mathbf{s}_{1} \mathbf{Z}_{\mathbf{a}_{1}}} e^{-\frac{1}{2}|s_{1}|^{2}}$$
(B.5)

е

$$\int d\mathbf{z}_2 e^{-\mathbf{z}_2 \mathbf{Z} \mathbf{s}_2} e^{-2|z_2|^2} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}|s_2|^2},\tag{B.6}$$

onde a segunda integral foi obtida com o auxílio de [53]. Substituindo as integrais em (B.4), temos

$$\sigma_{1} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{s} \ e^{\mathbf{s}_{1} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{1}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{s}^{\dagger} \left( \mathbf{V} - \frac{1}{2} \mathbf{I} \right) \mathbf{s}} e^{-\frac{1}{2} \left( |s_{1}|^{2} - |s_{2}|^{2} \right)}$$

$$= \frac{1}{2} \int d\mathbf{s} \ e^{\mathbf{s}_{1} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{1}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{s}^{\dagger} \mathbf{V} \mathbf{s}}$$

$$= \frac{1}{2} \int d\mathbf{s}_{1} \ e^{\mathbf{s}_{1} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{1}} \int d\mathbf{s}_{2} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{s}^{\dagger} \mathbf{V} \mathbf{s}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\det \mathbf{V}_{2}}} \int d\mathbf{s} \ e^{\mathbf{s}_{1} \mathbf{Z} \mathbf{a}_{1}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{s}^{\dagger} \left( \mathbf{V}_{1} - \mathbf{C}^{\dagger} \mathbf{V}_{2}^{-1} \mathbf{C} \right) \mathbf{s}}.$$
(B.7)

Normalizando analogamente como feito no capítulo 5, temos que  $\sigma_1$  será um operador Gaussiano caracterizado por uma matriz de covariância dada pelo complemento de Schur de V (4.46). cqd

## Apêndice C Operação de Paridade

Neste apêndice começamos estudando a operação de paridade sobre um estado de um modo. Em seguida, a partir de um estado bipartido, vemos como o condicionamento do estado de um dos modos em relação à aplicação desta operação no outro modo do sistema deve ser interpretado.

#### C.1 Estado de um Modo

Temos que função de Wigner na origem do espaço de fase é dada pela média da paridade de um estado  $\rho$ . Sabendo que os resultados possíveis de uma medida de paridade é 1 (par) ou -1 (ímpar) com probabilidade dada por  $P_{\nu}$ , onde  $\nu = 1$  ou -1, temos

$$W(0) = 2\sum_{\nu=-1}^{1} \nu P_{\nu} = 2 Tr\{e^{i\pi a^{\dagger}a}\rho\}.$$
 (C.1)

Quando efetuamos uma operação de paridade, representada pelo super-operador  $\mathcal{N}_{\nu}$ , sobre  $\rho$ , resultando em um estado de saída  $\rho_{\nu}$  condicionado ao resultado da medida  $\nu$ , temos

$$\rho_{\nu} = \frac{\mathcal{N}_{\nu}\rho}{Tr\{\mathcal{N}_{\nu}\rho\}},\tag{C.2}$$

onde

$$P_{\nu} = Tr\{\mathcal{N}_{\nu}\rho\}.\tag{C.3}$$

Substituindo a expressão  $P_{\nu}$  na primeira igualdade de (C.1), temos

$$W(0) = 2 \sum_{\nu=-1}^{1} \nu Tr \{\mathcal{N}_{\nu}\rho\}$$
  
=  $2 Tr \left\{ \sum_{\nu=-1}^{1} \nu \mathcal{N}_{\nu}\rho \right\}$   
=  $2 Tr \{\mathcal{N}_{1}\rho - \mathcal{N}_{-1}\rho\}.$  (C.4)

Da segunda igualdade de (C.1), inserindo a relação de completeza dos estados de Fock, temos

$$W(0) = 2 Tr \left\{ e^{i\pi a^{\dagger}a} \left( \sum_{n} |n\rangle \langle n| \right) \rho \right\}$$
  
$$= 2 Tr \left\{ \sum_{n} (-1)^{n} |n\rangle \langle n| \rho \right\}$$
  
$$= 2 \sum_{m} \sum_{n} (-1)^{n} \langle m| n\rangle \langle n| \rho |m\rangle$$
  
$$= 2 \sum_{n} (-1)^{n} \langle n| \rho |n\rangle.$$
(C.5)

Neste caso, podemos escrever

$$e^{i\pi a^{\dagger}a}\rho = \sum_{n} (-1)^{n} |n\rangle \langle n|\rho|n\rangle \langle n|$$
  
$$= \sum_{n_{par}} |n\rangle \langle n|\rho|n\rangle \langle n| - \sum_{n_{impar}} |n\rangle \langle n|\rho|n\rangle \langle n|.$$
(C.6)

Comparando a relação acima com (C.4), temos

$$e^{i\pi a^{\dagger}a}\rho = \sum_{\nu=-1}^{1} \nu \mathcal{N}_{\nu}\rho = \mathcal{N}_{1}\rho - \mathcal{N}_{-1}\rho, \qquad (C.7)$$

logo, podemos obter a representação de soma de operadores de paridade par e ímpar:

$$\mathcal{N}_1 . = \sum_{n_{par}} |n\rangle \langle n|.|n\rangle \langle n|$$
 (C.8)

$$\mathcal{N}_{-1} = \sum_{n_{impar}} |n\rangle \langle n|.|n\rangle \langle n|, \qquad (C.9)$$

com seus operadores sobre o espaço de estados  $E_n$ sendo iguais ao projetor no espaço de Fock $E_n=|n\rangle\langle n|,$ onde

$$\sum_{n_{par}} E_n E_n^{\dagger} = \sum_{n_{par}} |n\rangle \langle n| = 1_{par}, \qquad (C.10)$$

$$\sum_{n_{impar}} E_n E_n^{\dagger} = \sum_{n_{impar}} |n\rangle \langle n| = 1_{impar}, \qquad (C.11)$$

tal que:

$$1_{par} \oplus 1_{impar} = 1_{Fock} \tag{C.12}$$

ou:

$$\mathcal{E}_{par} \perp \mathcal{E}_{impar} \iff \mathcal{E}_{par} \oplus \mathcal{E}_{impar} = \mathcal{E}_{Fock}.$$
 (C.13)

Assim, as probabilidade  $P_\nu$ são dadas por

$$P_1 = Tr \{\mathcal{N}_1\rho\} = \sum_{n_{par}} \langle n|\rho|n\rangle, \qquad (C.14)$$

$$P_{-1} = Tr\left\{\mathcal{N}_{-1}\rho\right\} = \sum_{n_{impar}} \langle n|\rho|n\rangle, \qquad (C.15)$$

tal que:

$$P_{1} + P_{-1} = \sum_{n_{par}} \langle n|\rho|n\rangle + \sum_{n_{impar}} \langle n|\rho|n\rangle$$
$$= \sum_{n} \langle n|\rho|n\rangle$$
$$= Tr\left\{\sum_{n} |n\rangle\langle n|\rho\right\}$$
$$= Tr\{\rho\} = 1, \qquad (C.16)$$

como deve ser.

O estado pós-selecionado pode ser escrito como

$$\rho_{\nu} = \frac{\sum_{n_{\nu}} |n\rangle \langle n|\rho|n\rangle \langle n|}{\sum_{n_{\nu}} \langle n|\rho|n\rangle},\tag{C.17}$$

e o valor médio da paridade $\bar{p}$ é dado por

$$\bar{p} = \frac{1}{2}W(0) = \sum_{n_{par}} \langle n|\rho|n\rangle - \sum_{n_{impar}} \langle n|\rho|n\rangle.$$
(C.18)

#### C.2 Estado de Dois Modos

Estenderemos o estudo para sistemas bipartidos com operador densidade  $\rho_{12}$ . O estado pós selecionado  $\rho_{12}^{(\nu)}$  condicionado a uma medida de paridade ( $\nu = 1, -1$ ) sobre o modo 2 é dado por

$$\rho_{12}^{(\nu)} = \frac{\mathcal{N}_{\nu}\rho_{12}}{Tr\{\mathcal{N}_{\nu}\rho_{12}\}},\tag{C.19}$$

com probabilidade  $P_{\nu} = Tr_{12} \{ \mathcal{N}_{\nu} \rho_{12} \}$ e o super-operador  $\mathcal{N}_{\nu}$  atuará apenas no modo 2:

$$\mathcal{N}_{\nu} . = \mathbf{I}_1 \otimes \sum_{n_{2\nu}} |n_2\rangle \langle n_2|.|n_2\rangle \langle n_2|.$$
 (C.20)

Neste caso temos o seguinte operador:

$$\sigma_{1} = Tr_{2} \left\{ e^{i\pi a_{2}^{\dagger}a_{2}}\rho_{12} \right\}$$

$$= Tr_{2} \left\{ \sum_{\nu} \nu \mathcal{N}_{\nu}\rho_{12} \right\}$$

$$= Tr_{2} \left\{ \sum_{\nu} \nu \mathbf{I}_{1} \otimes \sum_{n_{2\nu}} |n_{2}\rangle \langle n_{2}|\rho_{12}|n_{2}\rangle \langle n_{2}| \right\}$$

$$= \sum_{\nu} \nu \sum_{n_{2\nu}} \langle n_{2}|\rho_{12}|n_{2}\rangle$$

$$= \sum_{n_{par}} \langle n_{2}|\rho_{12}|n_{2}\rangle - \sum_{n_{impar}} \langle n_{2}|\rho_{12}|n_{2}\rangle$$

$$\equiv \sigma_{1_{par}} - \sigma_{1_{impar}}. \quad (C.21)$$

Observe que se os elementos da matriz densidade do modo 1 relacionado aos modos ímpares do subsistema 2 for maior que os elementos relacionados ao modo par,  $\sigma_1$  não representará um estado físico, neste caso dizemos que a operação de paridade não é um mapa completamente positivo. Este resultado foi obtido a partir da obtenção da média da paridade do modo 2 de um estado bipartido, porém para cada medição da paridade, o estado do modo 1 condicionado ao resultado da medida, isto é,  $\sigma_{1_{par}}$  ou  $\sigma_{1_{impar}}$ , é físico.

## Apêndice D

# Transformações Simpléticas Locais Sp(2, R)

A teoria de representação de grupos são ferramentas efetivas para a investigação de diversos problemas em Física. Os grupos gerais de transfomarções lineares homogêneas que preserva a estrutura de Hamiltonianas da Mecânica clássica e de sistemas de Hamiltonianas canonicamente quantizadas são os grupos simpléticos Sp(2n, R) [72]. Particularmente, neste apêndice fazemos uma discussão sobre a trasnformação simplética local Sp(2, R) em estados Gaussianos [20]. Basicamente mostraremos que qualquer matrix de covariância V de um estado Gaussiano bipartido pode ser transformada em uma das formas invariantes I e II, dadas respectivamente por

$$\mathbf{V}_{i} = \left(n_{i} + \frac{1}{2}\right)\mathbf{I}, \ i = 1, 2; \ e \ \mathbf{C} = \left(\begin{array}{cc} 0 & m_{c} \\ m_{c}^{*} & 0 \end{array}\right), \tag{D.1}$$

e

$$\mathbf{V}_{i} = \left(n_{i} + \frac{1}{2}\right)\mathbf{I}, \ i = 1, 2; \ e \ \mathbf{C} = \left(\begin{array}{cc}m_{s} & 0\\0 & m_{s}^{*}\end{array}\right), \tag{D.2}$$

a partir de trasformações locais  $Sp(2, R) \times Sp(2, R)$ .

Podemos aplicar uma transformação local  $\mathbf{S}_L$  sobre  $\mathbf{V}:$ 

$$\mathbf{V}_{Sp} = \mathbf{S}_L^{\dagger} \mathbf{V} \mathbf{S}_L, \tag{D.3}$$

tal que

$$\mathbf{S}_L = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2 \end{pmatrix},\tag{D.4}$$

onde em termos das matrizes bloco de  $\mathbf{V}$ , temos

$$\mathbf{V}_{i}^{\prime} = \mathbf{S}_{i}^{\dagger} \mathbf{V}_{i} \mathbf{S}_{i}, \ \mathbf{C}^{\prime} = \mathbf{S}_{1}^{\dagger} \mathbf{C} \mathbf{S}_{2}.$$
(D.5)

Assumindo uma trasformação local Sp(2, R) como

$$\mathbf{S}_{i} = \begin{pmatrix} e^{i\phi_{i}}\cosh\theta_{i} & e^{i\varphi_{i}}\sinh\theta_{i} \\ e^{-i\varphi_{i}}\sinh\theta_{i} & e^{-i\phi_{i}}\cosh\theta_{i} \end{pmatrix},$$
(D.6)

a condição que leva **V** a forma invariante I, com elementos não nulos  $(V'_i)_{1,1} = (V'_i)_{2,2} = \nu_i$ , e  $C'_{1,2} = (C'_{1,2})^* = \mu_c$ , é obtida definindo  $\phi_i + \varphi_i = -\mu_i + \pi$  e tanh  $2\theta_i = |m_i|/(n_i + 1/2) = |m_c|/|m_s|$ , para i = 1, 2, respectivamente, onde  $e^{-i\mu_i} = m_i/|m_i|$ , para  $|m_c| \ge |m_s|$  (estado separável).

Agora a condição que leva **V** a forma invariante II, com elementos não nulos  $(V'_i)_{1,1} = (V'_i)_{2,2} = \nu_i$ , e  $C'_{1,2} = (C'_{1,2})^* = \mu_s$ , é obtida novamente se  $\phi_i + \varphi_i = -\mu_i + \pi$ , mas agora  $\tanh 2\theta_i = |m_i|/(n_i + 1/2) = |m_s|/|m_c|$ , onde agora  $|m_c| \leq |m_s|$ .

Os novos elementos trasnformados são

$$\nu_i = \sqrt{\left(n_i + \frac{1}{2}\right)^2 - |m_i|^2}, \ \mu_s = e^{-i\Phi_s} \frac{m_s}{|m_s|} \sqrt{|m_s|^2 - |m_c|^2}$$
(D.7)

para  $|m_c| \geq |m_s|,$  com  $\Phi_s = (\phi_1 - \phi_2)$  e

$$\mu_c = e^{-i\Phi_c} \frac{m_c}{|m_c|} \sqrt{|m_c|^2 - |m_s|^2}$$
(D.8)

para  $|m_c| \leq |m_s|$ , com  $\Phi_c = (\phi_1 + \phi_2)$ , tornando agora explícito os quatro invariantes do grupo  $Sp(2, R) \otimes Sp(2, R)$ :  $I_1 = \det \mathbf{V}_1$ ,  $I_2 = \det \mathbf{V}_2$ ,  $I_3 = \det \mathbf{C}$  and  $I_4 = Tr[\mathbf{V}_1\mathbf{Z}\mathbf{C}\mathbf{Z}\mathbf{V}_2\mathbf{Z}\mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{Z}]$ .

A transformação geral  $Sp(2, R) \times Sp(2, R)$  (D.3) na forma (D.6) é obtida através da operação de compressão  $U_L = U_1 \otimes U_2$ ,

$$U_i = e^{\frac{i\hbar t}{2} [\kappa_i (a_i^{\dagger})^2 e^{i\varphi_i} - \kappa_i^* a_i^2 e^{-i\varphi_i}]}, \tag{D.9}$$

sobre o estado Gaussiano bipartido caracterizado por V, com  $|\kappa_i|t = \theta \equiv 2r_i$ , que é o parâmetro de compressão associado com a transformação sobre o modo  $i \in e^{i\phi_i} = \kappa_i/|\kappa_i|$ .

Artigos submetidos para publicação originados por esta dissertação.

- L. F. Haruna e M. C. de Oliveira, *Physical Properties of the Schur Complement of Local Covariance Matrices*, quant-ph/0701196.
- L. F. Haruna, M. C. de Oliveira e G. Rigolin, Minimal Set of Local Measurements and Classical Communication for Two-Mode Gaussian State Entanglement Quantification, Phys. Rev. Lett. 98, 150501 (2007).

## Bibliografia

- M.A. Nielsen e I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, (Cambridge University Press, UK, 2000).
- C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. Bell System Tech. J., 27:379-423, 623-656, (1948).
- [3] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison Wesley, Los Angeles, 1994).
- [4] D. P. Di Vicenzo, *Science* **270**, 255 (1995).
- [5] C. H. Bennett e S. J. Wiesner, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2881 (1992).
- [6] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres e W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).
- [7] P. W. Shor, *Phys. Rev. A* **52**, 2493 (1995).
- [8] A. M. Steane, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 793 (1996).
- [9] B. G. Englert and K. Wodkiewicz, Int. J. Quant. Inf. 1, 153 (2003).
- [10] A. Furusawa et al., Science **282**, 706 (1998).
- [11] S.L. Braunstein and H.J. Kimble, *Phys. Rev. Lett* **80**, 869 (1998).
- [12] L. F. Haruna, M. C. de Oliveira e G. Rigolin, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 150501 (2007).
- [13] G. Rigolin e M. C. de Oliveira, quant-ph/0608184.
- [14] J. Laurat et. al., J. Opt. B 7, S577 (2005).
- [15] V. D'Auria et. al., J. Opt. B 7, S750 (2005).

- [16] J. Eisert and M. B. Plenio, Int. J. Quant. Inf. 1, 479 (2003).
- [17] J. Eisert, S. Scheel, and M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* 89, 137903 (2002)
- [18] J. Fiurásek, Phys. Rev. Lett. 89, 137904 (2002)
- [19] G. Giedke and J.J. Cirac, *Phys. Rev. A* 66, 032316 (2002).
- [20] M. C. de Oliveira, *Phys. Rev. A* **70**, 034303 (2004)
- [21] M. C. de Oliveira, *Phys. Rev. A* **72**, 012317 (2005).
- [22] R. A. Horn e C. R. Johnson, *Matrix Analysis* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [23] L. F. Haruna e M. C. de Oliveira, quant-ph/0701196.
- [24] U. Fano, Rev. Mod. Phys. 29, 74 (1957).
- [25] W. H. Louisell, Quantum Statistical Proprieties of Radiation, (Wiley-Interscience; Reprint edition (January, 1990)).
- [26] D. F. Walls e G.J. Milburn, *Quantum Optics*, (Springer-Verlag, Berlin, 1995).
- [27] S. M. Barnett e P. M. Radmore, Methods in Theoretical Quantum Optics, (Clarendon Press, Oxford, 1997).
- [28] E. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).
- [29] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **131**, 2766 (1963).
- [30] A. Yariv, *Quantum eletronics*, (J. Wiley, New York, 1975).
- [31] M. A. Marchiolli, *Rev. Bras. Ens. Física* **24**, 421 (2002).
- [32] H. Weyl, Z. Phys. 46, 1 (1927).
- [33] B. G. Englert e K. Wodkiewicz, *Phys. Rev. A* **65**, 054303 (2002).
- [34] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, *Phys. Rev.* 47, 777 (1935).

- [35] E. Schrödinger, Proc. Camb. Phil. Soc. **31**, 555 (1935).
- [36] G. Rigolin, Tese de Doutoramento, Universidade Estadual de Campinas, 2005.
- [37] R. Simon, *Phys. Rev. Lett.* 84, 2726 (2000).
- [38] C. H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, R. Schumacher, J. Smolin e W.K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 76, 722 (1996).
- [39] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu e B. Schumacher, *Phys. Rev. A* 53, 2046 (1996).
- [40] C. H. Bennett, D. P. DiVicenzo, J. Smolin e W.K. Wootters, Phys. Rev. A 54, 3824 (1996).
- [41] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin e P. L. Knight, *Phys. Rev. Lett.* 78, 2275 (1997).
- [42] V. Vedral, M. B. Plenio, K. Jacobs e P. L. Knight, *Phys. Rev. A* 56, 4452 (1997).
- [43] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413 (1996)
- [44] P. Horodecki, *Phys. Lett. A* **232**, 333 (1997)
- [45] T. Schwinger, Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. 46, 570 (1960).
- [46] T. E. Mogal, Proc. Camb. Phil. Soc. 45, 99 (1949)
- [47] S. Daffer, K. Wódkiewicz and J. K. McIver, *Phys. Rev. A* 68, 012104 (2003).
- [48] R. A. Campos, B. E. A. Saleh e M. C. Teich, *Phys. Rev. A* 40, 1371 (1989).
- [49] A. Royer, *Phys. Rev. Lett.* 55, 2745 (1985); *Phys. Rev. A* 15, 449 (1977).
- [50] A. Grossmann, Commun. Math. Phys. 48, 191 (1976).
- [51] L. G. Lutterbach and L. Davidovich, Phys. Rev. Lett. 78, 2547 (1997)
- [52] K. Banaszek and K. Wódkiewicz, Phys. Rev. Lett. 76, 4344 (1996)

[53] A integral

$$I \equiv \int d^2 \lambda \, \exp\left[-K|\lambda|^2 - \frac{1}{2}L(\lambda^*)^2 - \frac{1}{2}L'\lambda^2 - M\lambda^* - M'\lambda\right]$$

converge se

$$\Re eK > \frac{1}{2}|L + L'^*|,$$

obtendo

$$I = (K^2 - L'L)^{1/2} \exp\left[\frac{KMM' - \frac{1}{2}[L(M')^2 + L'M^2]}{K^2 - LL'}\right]$$

Uma discussão sobre esta integral pode ser encontrada em P. Marian e T. A. Marian, *Phys. Rev. A* 47, 4474 (1993)

- [54] W.K. Wootters, *Phys. Rev. Lett* **80**, 2245 (1998).
- [55] G. Giedke, M. M. Wolf, O. Krüger, R. F. Werner e J. I. Cirac, *Phys. Rev. Lett* 91, 107901 (2003).
- [56] A. Ourjoumtsev, R. Tualle-Brouri e P. Grangier, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 213601 (2006).
- [57] J. Fiurásek e N. J. Cerf, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 063601 (2004).
- [58] G. Rigolin e C. O. Escobar, *Phys. Rev. A* **69**, 012307 (2004).
- [59] G. Vidal e R. F. Werner, *Phys. Rev. A* **65**, 32314 (2002).
- [60] G. Adesso, A. Serafini e F. Illuminati, *Phys. Rev. Lett* **92**, 087901 (2004).
- [61] G. Adesso, A. Serafini e F. Illuminati, *Phys. Rev. A* 70, 022318 (2004).
- [62] K. Banaszek e K. Wódkiewicz, *Phys. Rev. Lett* **76**, 4344 (1996).
- [63] A. Ferraro, S. Olivares e M. G. A. Paris, quant-ph/0503237.
- [64] J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (Springer, Berlin, 1932).

- [65] H. P. Yuen e J. H. Shapiro, *IEEE Trans, Inf. Theory* 24, 657 (1978).
- [66] M. D. Srinivas e E. B. Davies, Opt. Acta 28, 981 (1981).
- [67] V. Perinov et al, Phase in Optics, World Scientific, ISBN 981-02-3208-X.
- [68] M. C. de Oliveira, S. S. Mizrahi e V. V. Dodonov, J. Opt. B 5, S271 (2003).
- [69] D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer e A. Faridani, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1244 (1993)
- [70] K. Vogel e H. Risken, *Phys. Rev. A* 40, 2847 (1989)
- [71] K.E. Cahill and R.J. Glauber, *Phys. Rev.* 177, 1882 (1969).
- [72] Arvind, B. Dutta, N. Mukunda, and R. Simon, *Pranama J. Phys.* 45, 471 (1995).