

"ESTUDO DAS ONDAS GUIADAS EM LASERS DE SEMICONDUTOR"

Marcio Alberto Araujo Pudensi

Tese apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" para a obtenção do Título de Doutor em Ciências.

Dezembro de 1980

AGRADECIMENTOS

Aos Profs. Marcio D'Olne Campos e Luiz Guimarães Ferreira, pela orientação eficaz, segura e paciente na parte experimental e teórica, respectivamente, deste trabalho, além de suas amizades.

Aos Profs. José Ellis Ripper e Navin B. Patel, pelo apoio e sugestões que têm me dado.

À Fapesp, pelo apoio financeiro.

Ao Hans, pela amizade e ajuda no trabalho de programação, e à Ana pela perfuração de cartões.

À Edna, pelo clima sempre amigável que existe em nossa sala, e ao Antonio (Totô) pela ajuda no laboratório.

À Loritilde, Ana, Augusto e Edileuza, pelo trabalho de datilografia, e à Maria Hermínia pelos desenhos desta tese.

A todos aqueles que de alguma forma participaram deste trabalho, e a Deus, por tudo e por todos,

Obrigado.

Ao meu avô Silvío, pelo que ele repre
senta para mim e toda minha família.

À minha esposa Marcia, por seu amor,
apoio e compreensão, e à nossa criança que está vindo.

Aos meus pais, Orlando e Noemia, com ca
rinho e gratidão, e a todos meus irmãos, Heloisa, To-
ninho, Orlandinho, Zé Augusto e Celso, por estes anos
maravilhosos.

Resumo

Neste trabalho estudamos as ondas guiadas em lasers de semicondutor. Na primeira parte realizamos o estudo experimental de lasers com faixa de contato inclinada em relação aos seus espelhos. Na segunda parte, desenvolvemos um método matricial para estudarmos a propagação e reflexão de ondas guiadas em lasers.

Abstract

In this work we studied the guided waves in semiconductor lasers. In the first part we carried on the experimental measurements on lasers with stripe nonorthogonal to the mirrors. In the second part we developed a matrix method for the study of propagation and reflection of guided waves in lasers.

Í N D I C E

<u>INTRODUÇÃO</u>	1
<u>PARTE I - ESTUDO EXPERIMENTAL EM LASERS DE FAIXA DE CONTATO INCLINADA</u>	
1. <u>ASPECTOS GERAIS DA CAVIDADE RESSONANTE</u>	2
2. <u>DESENVOLVIMENTO EXPERIMENTAL E RESULTADOS</u>	8
3. <u>ANÁLISE DOS RESULTADOS</u>	22
4. <u>CONCLUSÃO DA PARTE I</u>	25
<u>PARTE II - MÉTODOS MATRICIAIS NO ESTUDO DA PROPAGA- ÇÃO E REFLEXÃO DE ONDAS GUIADAS</u>	
5. <u>PREÂMBULO</u>	26
6. <u>PROPAGAÇÃO</u>	
6.1 Propagação de ondas eletromagnéticas num meio com $\epsilon(x,y)$.	31
6.2 Formulação variacional da propagação	35
6.3 Fatores de escala e resultados	41
6.4 Confinamento na direção x	48
7. <u>REFLEXÃO</u>	
7.1 Introdução	55
7.2 Fatores de escala e resultados	60
7.3 Campo próximo ("near-field") e longínquo ("far-field")	64

8. <u>MODOS RESSONANTES NO LASER</u>	66
8.1 Cálculo da frequência de um laser com um único modo TE	67
8.2 Laser com vários modos $X^{(0)}$ (y) e uniforme na direção x	71
9. <u>SUMÁRIO DA PARTE II</u>	75
Apêndice A	77
Apêndice B	80
Apêndice C	85
Apêndice D	90
Apêndice E	95
Apêndice F	100
Apêndice G	106
Referências	108

INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento de lasers de semicondutor com faixa de contato não ortogonal aos espelhos [1, 2], o comportamento não-linear da emissão estimulada de radiação em função da corrente elétrica, que foi observada por vários autores [4-8], é evitado nesse tipo de laser. Na verdade, esta não linearidade é deslocada para regiões de correntes muito altas [1-3], permitindo, nas correntes usuais de operação, o uso dos lasers de semicondutor em comunicações óticas.

São de dois tipos as teorias usadas atualmente para calcular os modos ressonantes de um laser de semicondutor. As aproximações mais simples consideram o laser como um guia de onda terminado por espelhos que refletem o mesmo modo incidente apenas atenuado [9-12], utilizando-se de ondas planas para definir o coeficiente de reflexão. As mais elaboradas [13-15] consideram que após a incidência de um modo puro, são excitados, na reflexão, outros modos que ao interagirem geram um campo ótico mais complexo. Neste caso a utilização de um coeficiente de reflexão caracterizado a partir de ondas planas já não é mais válido. Porém, nenhuma delas trata desta nova geometria de laser.

O presente trabalho está dividido em duas partes. Na primeira apresentamos os estudos experimentais que realizamos nesse novo tipo de laser, e na segunda desenvolvemos uma teoria que permita, no futuro, estudar os modos dos lasers de faixa de contato inclinada em relação aos espelhos.

PARTE I - Estudo Experimental em Lasers de Faixa de Contato Inclinada.

CAPÍTULO I

Aspectos Gerais da Cavidade Ressonante

O laser de semiconductor consiste essencialmente de uma junção p-n, que polarizada diretamente favorece a recombinação elétrons-buracos, havendo emissão de fótons. A região onde há esta recombinação é denominada região ativa do diodo-laser (fig. 1.1). O guiamento da luz gerada é feito, principalmente, pelo batente de índice de refração existente na direção perpendicular à junção; a direção preferencial de propagação desta luz é dada pela cavidade ressonante de Fabry-Perot, obtida pela clivagem de dois lados opostos do diodo, formando os espelhos, e nas duas polarizações permitidas na luz desses lasers, a polarização TE tem o vetor campo elétrico paralelo ao plano da junção, enquanto a TM tem o campo magnético neste plano.

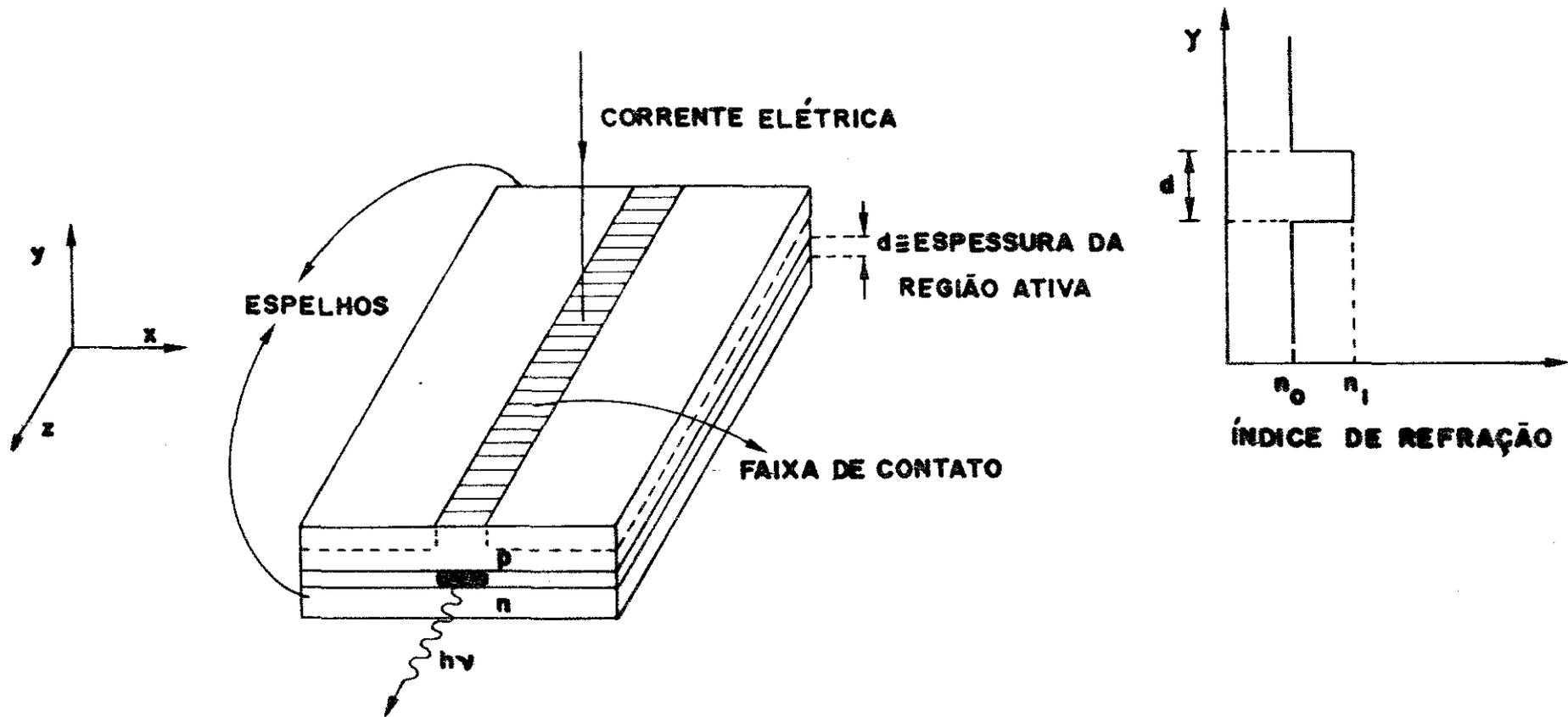
De maneira geral, a expressão para a intensidade luminosa, depois de uma propagação e uma reflexão da radiação dentro da cavidade, é dada por:

$$I = I_0 R e^{(\gamma - \alpha)L} \quad (1.1)$$

onde:

- I_0 e I são, respectivamente as intensidades da radiação inicial e final (depois de percorrer a cavidade do laser, de comprimento L , e sofrer uma reflexão).
- R é a refletividade dos espelhos.
- γ representa o ganho por unidade de comprimento.

FIG. 1.1



- α representa as perdas por unidade de comprimento.

Para que se tenha oscilação do modo em regime estacionário, a intensidade final I deve ser igual a I_0 , supondo-se que o laser seja simétrico. Nesse caso, a eq.(1.1) se torna:

$$I = R e^{(\gamma - \alpha)L}$$

ou

$$\gamma = \alpha + \frac{1}{L} \ln \left(\frac{1}{R} \right) \quad (1.2)$$

isto é, o ganho é igual às perdas por absorção e transmissão.

Experimentalmente, o ganho líquido de um laser em função do comprimento de onda (ganho espectral) pode ser obtido medindo a profundidade de modulação, r_i , introduzida pelas ressonâncias de Fabry-Perot no espectro da emissão espontânea [16], isto é,

$$r_i = \frac{P_i + P_{i+1}}{2 V_i} \quad (1.3)$$

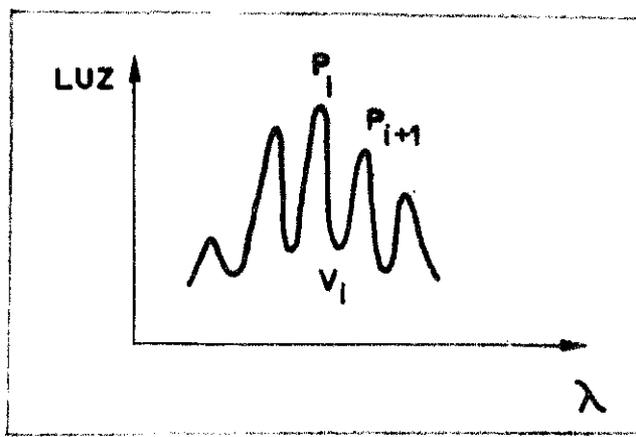
onde P_i e P_{i+1} são dois picos consecutivos do espectro e V_i o vale intermediário (fig. 1.2). O ganho líquido correspondente, G_i , é obtido pela relação [16]

$$\Gamma G_i = \frac{1}{L} \ln \left(\frac{r_i^{1/2} + 1}{r_i^{1/2} - 1} \right) + \frac{1}{L} \ln R \quad (1.4)$$

onde Γ é o fator de confinamento [17], que é a fração dos modos contida dentro da região ativa. Os outros símbolos já foram definidos anteriormente.

A corrente injetada no diodo para a qual a eq. (1.2) é satisfeita, e $G_i = 0$, damos o nome de corrente limiar ("threshold"). Assim, abaixo desta corrente só temos emissão

FIG. 1.2



espontânea de luz, e acima dela emissão estimulada (fig. 1.3.a).

Um problema no uso destes lasers em comunicação ótica é a não-linearidade existente frequentemente no gráfico da emissão estimulada em função da corrente elétrica (fig. 1.3.b) [4-8].

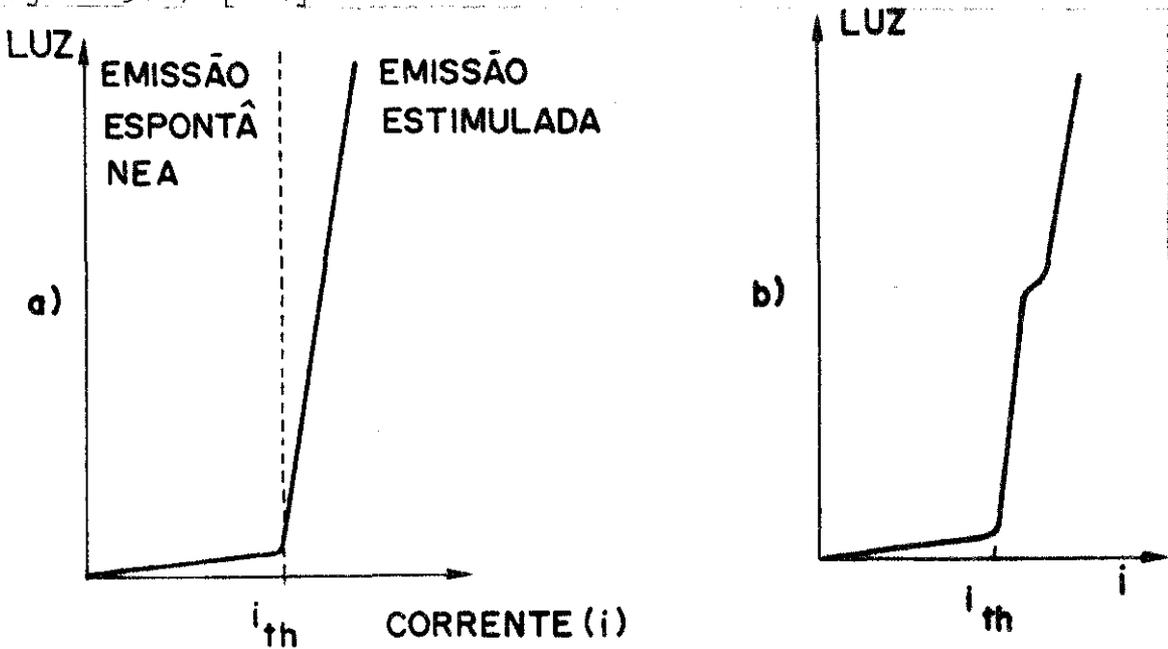


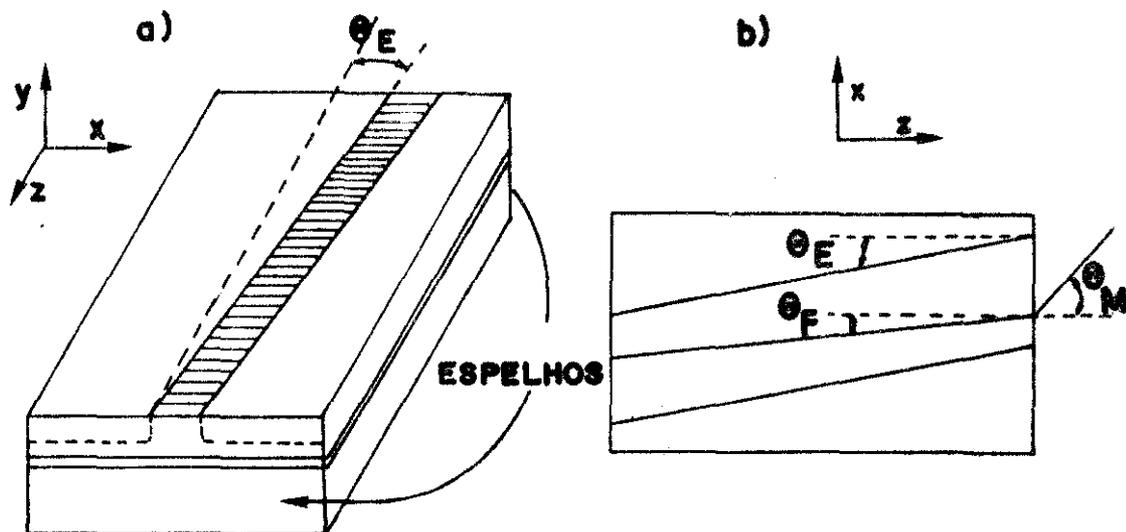
FIG. 1.3

Um dos estudos realizados nestes lasers [6,7] mostrou que, juntamente com esta não-linearidade, há um deslocamento do filamento luminoso dentro da região ativa do laser, podendo ser uma ligeira rotação e/ou uma translação paralela ao plano da junção. Uma provável causa do fenômeno [6,7] é a de que a distribuição espacial não uniforme do ganho ou das perdas é variável com a corrente aplicada. Em consequência, a "cavidade" (região) de oscilação é aquela em que o ganho líquido é maior. Com o aumento da corrente, e consequentemente da in-

tensidade luminosa, a região ativa torna-se mais homogênea, e neste caso, o filamento se desloca para uma região onde as perdas pelos espelhos são menores.

Assim, como é extremamente difícil obter uma região ativa completamente homogênea, a opção foi torná-la suficientemente não homogênea para que o filamento ficasse restrito a uma só "cavidade", o que foi feito construindo-se a faixa de contato não ortogonal aos espelhos do laser (figs. 1.4). Os resultados mostraram [1-3] que o intervalo de não-linearidade da curva $I \times i$ se desloca para regiões de corrente elevada, tendendo a desaparecer com o aumento da inclinação da faixa de contato (θ_E), estabilizando o filamento.

FIG. 1.4



θ_E : Ângulo entre a faixa de contato e a normal aos espelhos

θ_F : Posição angular do filamento dentro da cavidade.

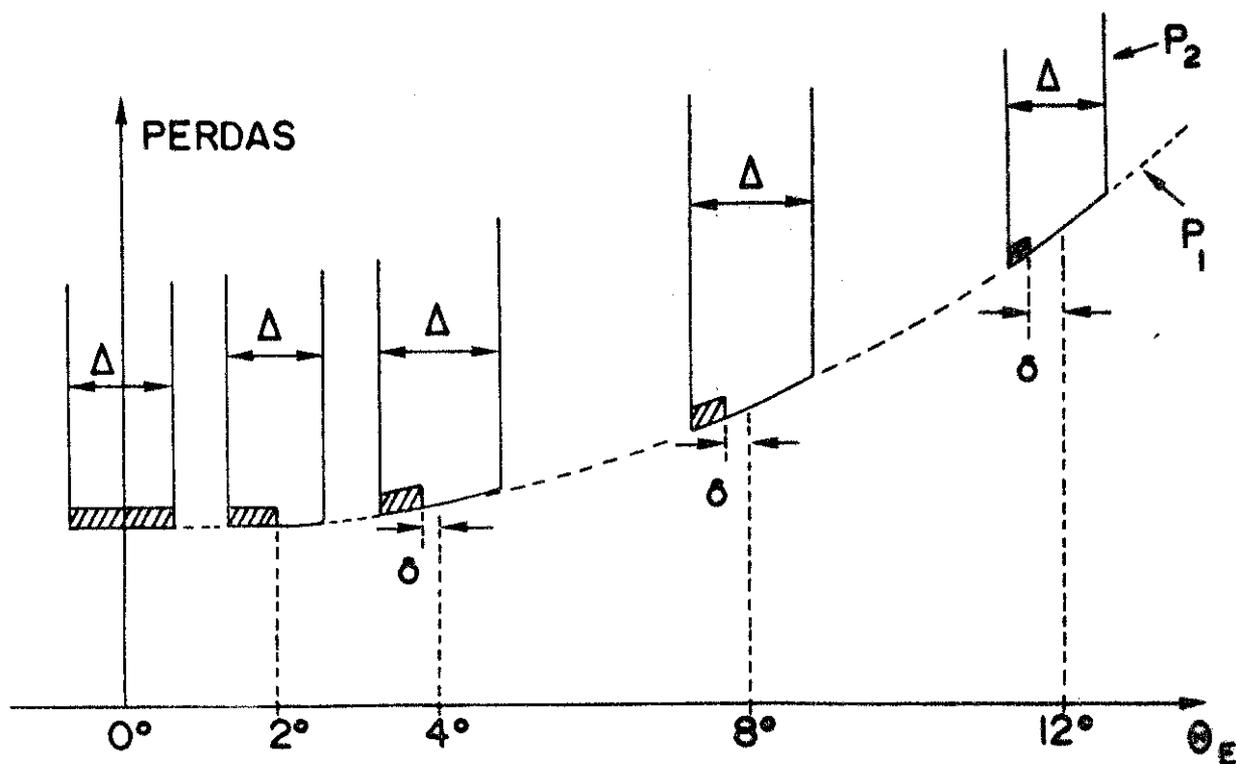
θ_M : Direção da intensidade máxima do feixe emergente.

Baseando-se nos resultados citados nas referências 2 e 6, foi proposto o seguinte modelo de perdas em função de θ_E . Com o aumento da inclinação da faixa de contato, a re-

fletividade dos espelhos diminui. Ocorre também um desvio do feixe refletido para fora da região da faixa de contato, onde não existe injeção de portadores e, portanto, as perdas por absorção são elevadíssimas. Para cada laser com um dado θ_E , o filamento luminoso tende a se localizar na região de menor perda. A fig. 1.5 representa o modelo acima.

Nosso trabalho experimental visou a discussão deste modelo, além do estudo de outras características dos lasers com esta geometria especial, como veremos a seguir.

FIG. 1.5



Δ : Amplitude Angular Máxima da Faixa de Contato

P_1 : Perdas Devido a Inclinação do Contato

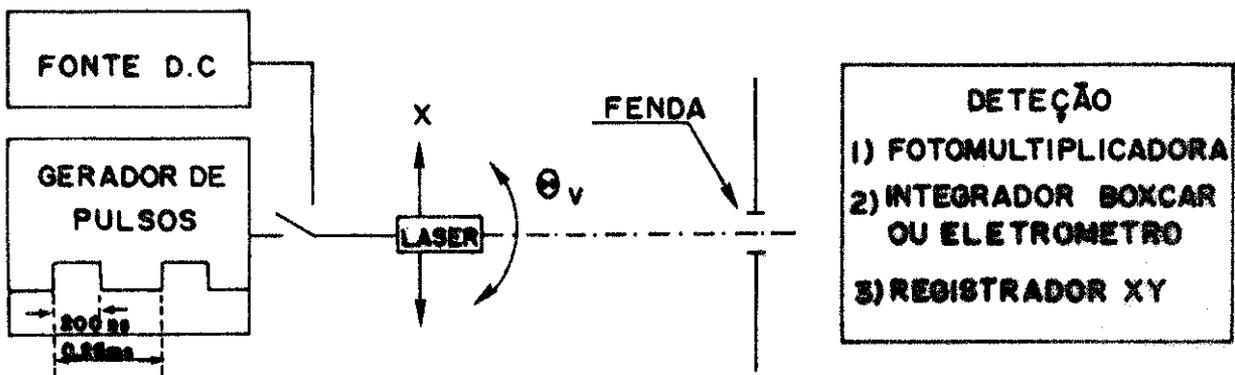
P_2 : Perdas Totais na Região Ativa, Incluindo P_1 .

CAPÍTULO 2

Desenvolvimento Experimental e Resultados

Os lasers que estudamos são de heteroestrutura dupla de GaAs-GaAlAs, com cavidade de comprimento $L = 380\mu\text{m}$. A faixa de contato é inclinada, em relação à normal aos espelhos, de $\theta_E = 2, 4, 8, 12, 15$ e 17.6° e sua largura é $S = 7,5\mu\text{m}$, definida por bombardeamento de prótons, cujo efeito é criar defeitos na estrutura cristalina do material nas laterais da faixa, tornando-o isolante.

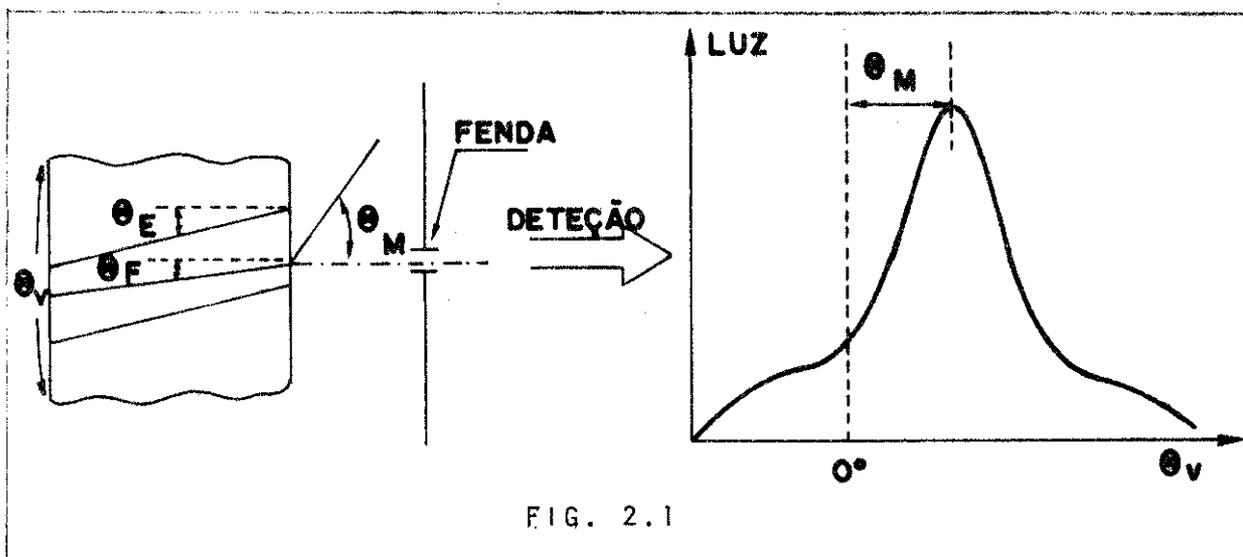
Nossas medidas consistiram em caracterizar: curva da intensidade luminosa versus corrente elétrica aplicada ($I \times i$), configuração angular do campo ótico longe dos espelhos ($I \times \theta_V$ ou "far-field pattern") com e sem polarizador, e espectro da radiação emitida ($I \times k$ onde $k = 1/\lambda$). Para isto, usamos a seguinte montagem experimental:



O laser é montado num suporte que pode se deslocar tanto paralelamente ao plano da junção (direção x), como angularmente neste mesmo plano. Caso ele esteja soldado, pode-

mos realizar medidas tanto em corrente pulsada como em contínua, caso contrário mede-se somente em corrente pulsada. A radiação emitida atravessa uma fenda regulável, atingindo o sistema de detecção.

Para a obtenção das curvas $I \times \theta_V$ e $I \times k$, usamos o seguinte procedimento: inicialmente, alinha-se o laser de semiconductor com o auxílio de um laser de He-Ne, para que seus espelhos fiquem perpendiculares ao eixo óptico do sistema, ou seja, para que $\theta_V = 0$. Em seguida, faz-se a varredura angular dos valores de θ_V , de modo a obter a configuração espacial do campo óptico longe dos espelhos (fig. 2.1). Fixando θ_V , pode-se obter o espectro da radiação emitida.



Na fig. 2.2 temos a curva $I \times i$ para lasers com $\theta_E = 2; 8$ e 15° . Para $\theta_E = 8$ e 15° , procuramos um θ_V próximo ao máximo de intensidade (θ_M) para obter a curva $I \times i$, pois o espalhamento espacial da luz é muito grande nesses lasers onde θ_E é grande. No caso desses dois lasers, todas as medidas foram feitas em corrente contínua, e para $\theta_E = 2^\circ$ em corrente pulsada (neste caso, colocando-se uma lente entre o laser e a fenda).

A fig. 2.3 mostra $i_{th} \times \theta_E$, para vários lasers,

FIG. 2.2

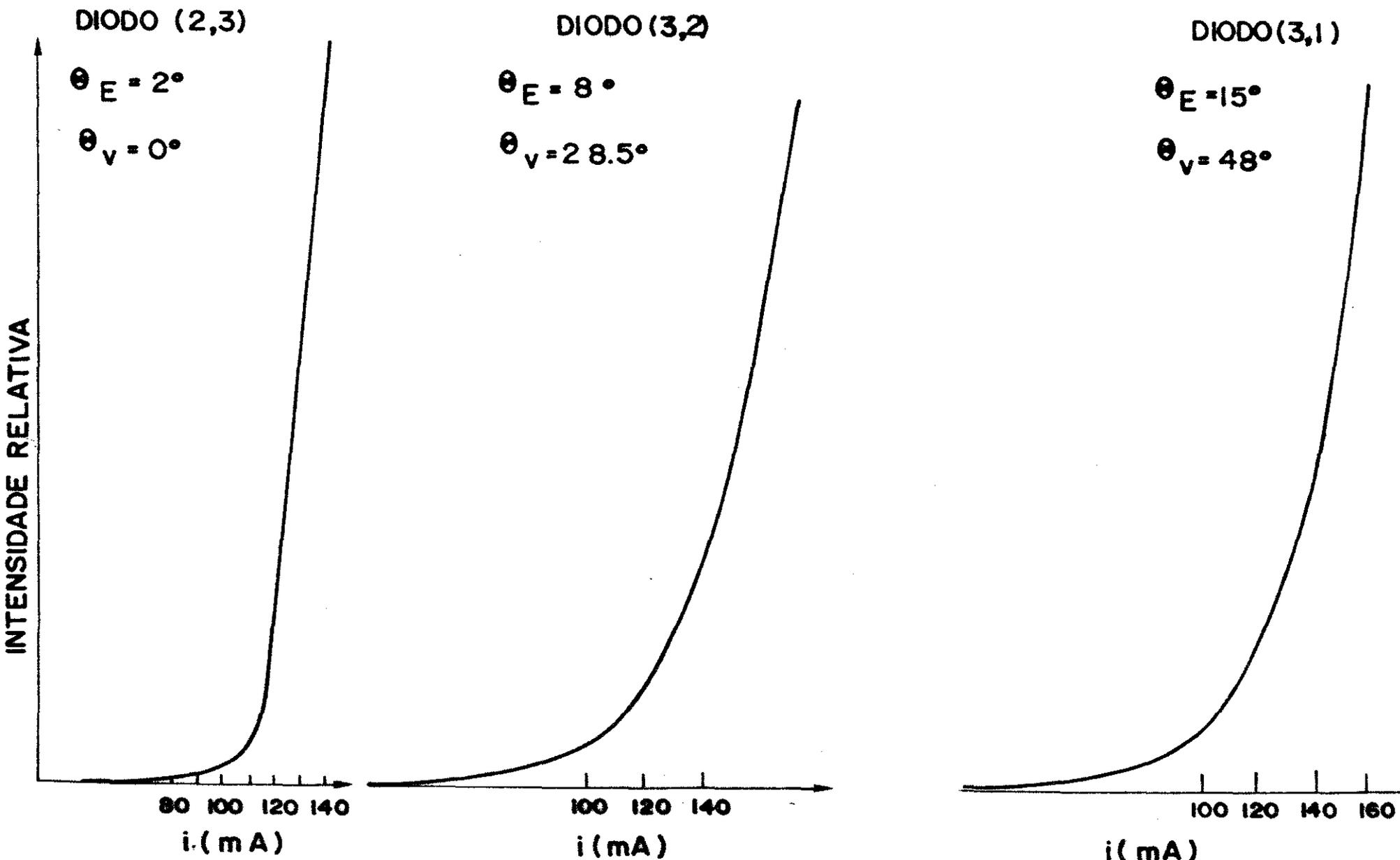


FIG. 2.3

i_{th} (mA)

$i_{th} \times \theta_E$

250

200

150

100

0

0

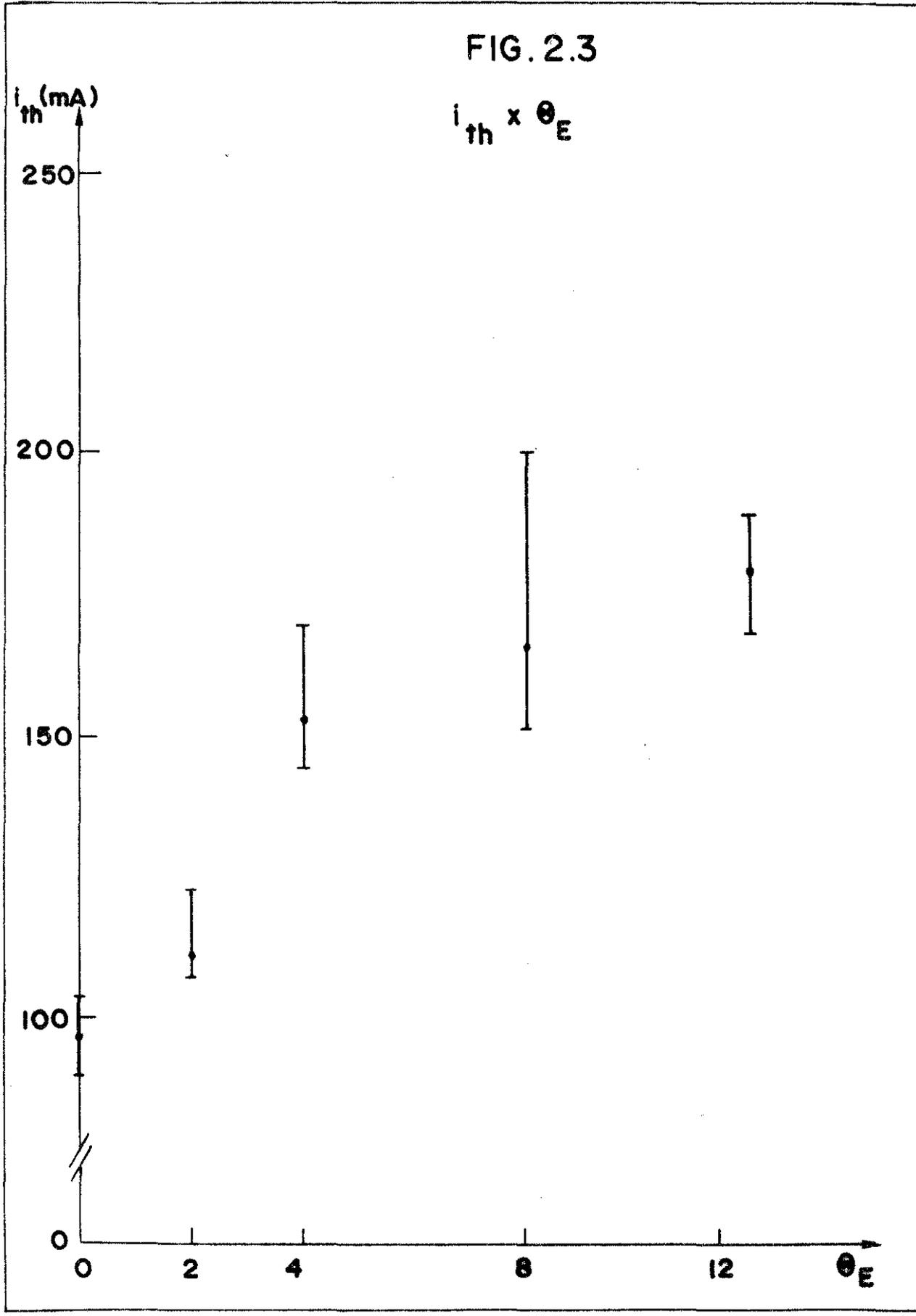
2

4

8

12

θ_E



0

em corrente pulsada.

As figs. 2.4 apresentam configurações angulares do campo ótico longe dos espelhos do laser ("far-field"), e as figs. 2.5 os espectros da luz emitida.

Na fig. 2.6 temos a curva $\frac{1}{n_1} \sin \theta_M \times \sin \theta_E$, onde a reta com inclinação de 45° corresponde à lei de Snell para o caso em que o filamento de luz tenha a mesma direção que a faixa de contato, ou seja, $\theta_F = \theta_E$, e as barras horizontais maiores são os limites, para cada ângulo θ_E , da faixa de contato (Apêndice A).

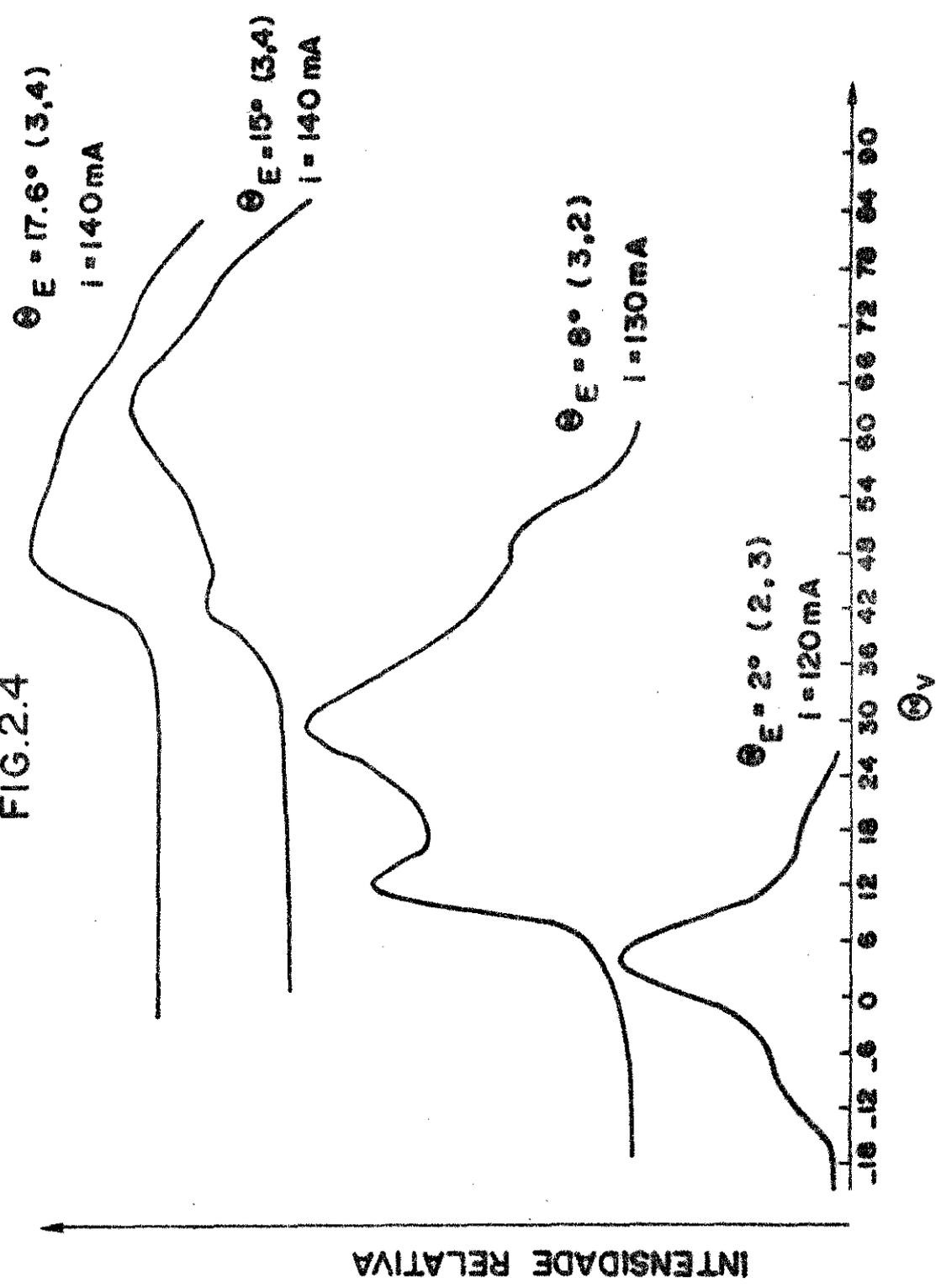
As figs. 2.7 são fotografias do espelho de um laser com $\theta_E = 8^\circ$. No caso, a fig. 2.7.a tomada com $\theta_V = 0^\circ$, mostra a complexidade da configuração do campo próximo. O espalhamento espacial da luz mostrado nesta figura, foi minimizado quando giramos o laser de um ângulo $\theta_V \approx 27.5^\circ$, como podemos ver na fig. 2.7.b.

Nas figs. 2.8 apresentamos a relação entre as intensidades das duas polarizações, I_{TE}/I_{TM} , em função de θ_V . A linha contínua é a relação entre as transmitividades de campos paralelos e perpendiculares ao plano de incidência (plano da junção), incidindo de um meio com índice de refração $n = 3.6$ (GaAs) para outro com $n = 1$, ou seja, para o ar. As transmitividades foram calculadas na aproximação de ondas planas [18], fig. 2.9.

O ângulo θ_B marcado nas figs. 2.8 e 2.9, é o valor de θ_V correspondente, internamente, ao ângulo de Brewster θ_b , isto é,

$$\theta_B = \arcsen(3.6 \sin \theta_b)$$

FIG.2.4



INTENSIDADE RELATIVA

V

FIG. 2.5.a

DIODO H454 TC23 (2,3)

$\Theta_E = 2^\circ$

$i = 120 \text{ mA}$

$K \left(\frac{i}{\lambda} \right)$

11600

11900

12000 cm^{-1}

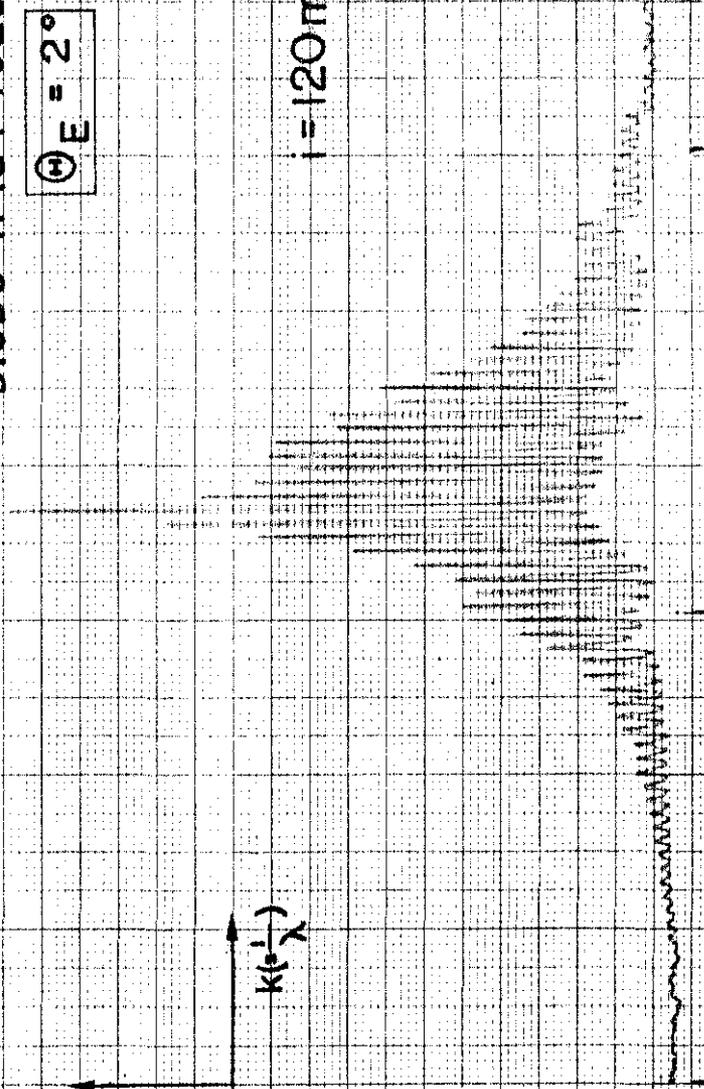


FIG. 2.5b

DIODO D235 CT67 (3,3)

$$\Theta_E = 8^\circ$$

$\Theta_V = 0^\circ$ (c/lente)

$i = 190 \text{ mA}$

$i = 150 \text{ mA}$

$i = 50 \text{ mA}$

$$k \left(\frac{1}{\lambda} \right)$$

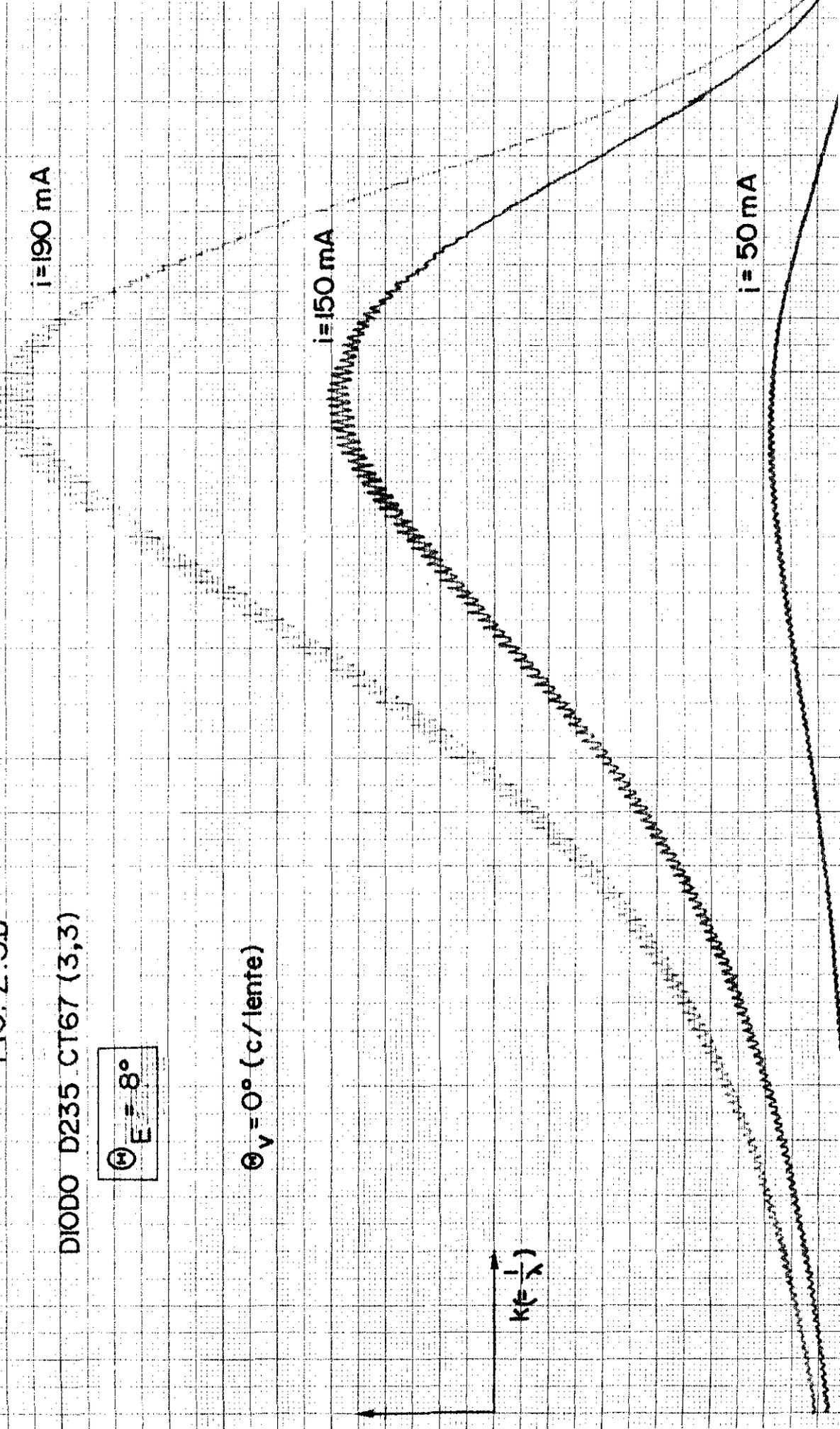


FIG. 2.5.c

DIODO D235 CC67 (3,1)

$\Theta_E = 15^\circ$

$\Theta_V = 49.5^\circ$

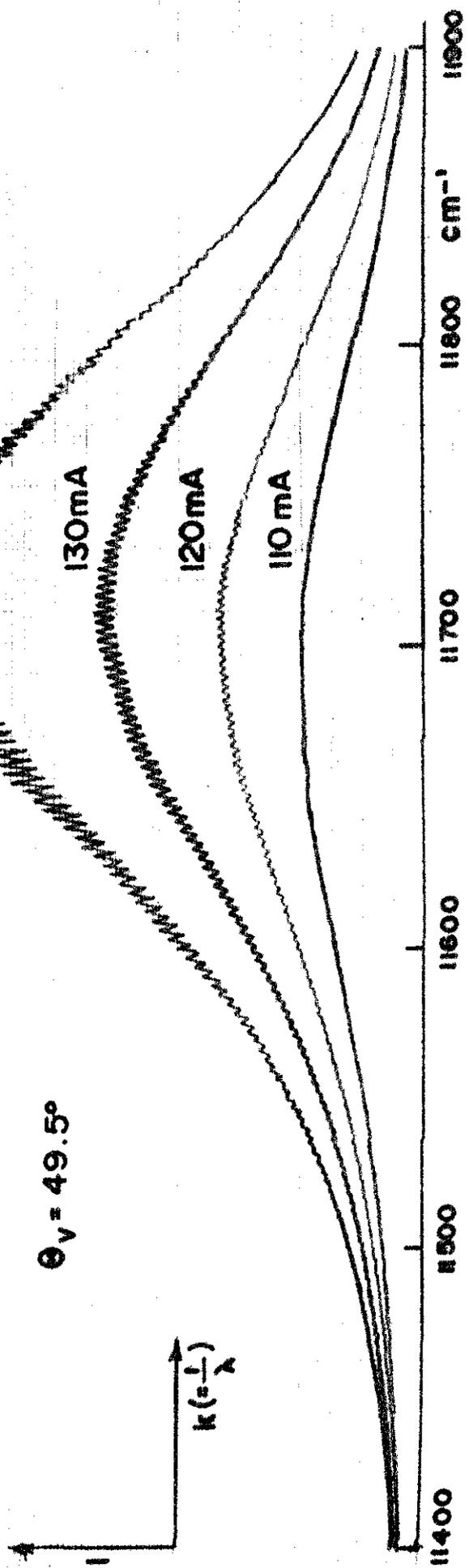


FIG. 2.6

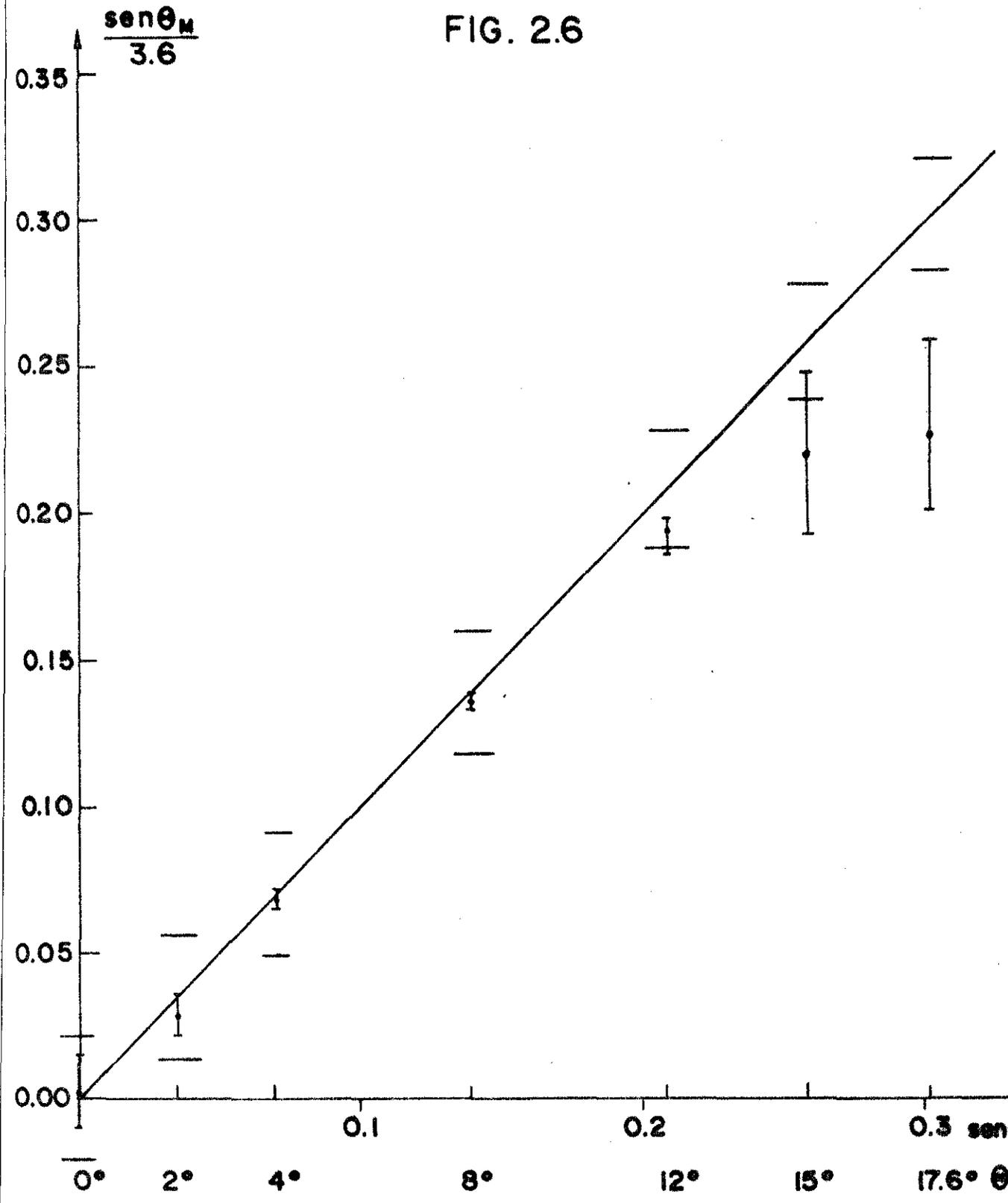


FIG. 2.8.a

$$\frac{\theta_E = 8^\circ}{(3,2)} \rightarrow \theta_V = 285^\circ \begin{cases} + 90 \text{ mA} \\ \square 110 \text{ mA} \\ \times 130 \text{ mA} \end{cases} \Delta \text{em } \theta_V = 0^\circ$$

$$\frac{\theta_E = 15^\circ}{(3,5)} \rightarrow \theta_V = 48^\circ \begin{cases} + 90 \text{ mA} \\ \square 110 \text{ mA} \\ \times 130 \text{ mA} \\ \diamond 150 \text{ mA} \end{cases} \Delta \text{em } \theta_V = 0^\circ$$

$$\frac{\theta_E = 17.6^\circ}{(3,5)} \rightarrow \theta_V = 54^\circ \begin{cases} \bullet 150 \text{ mA} \\ \circ 180 \text{ mA} \end{cases}$$

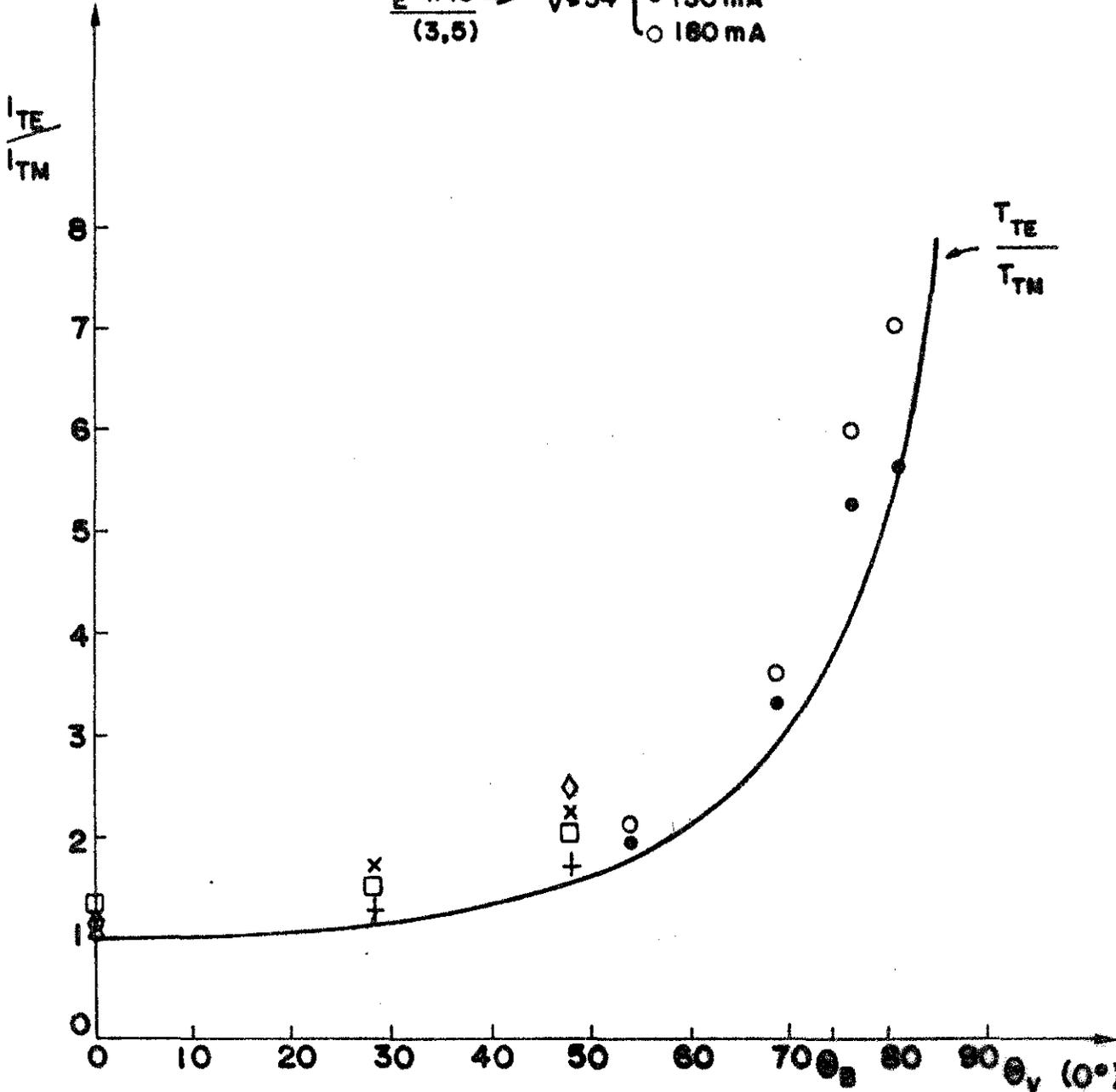
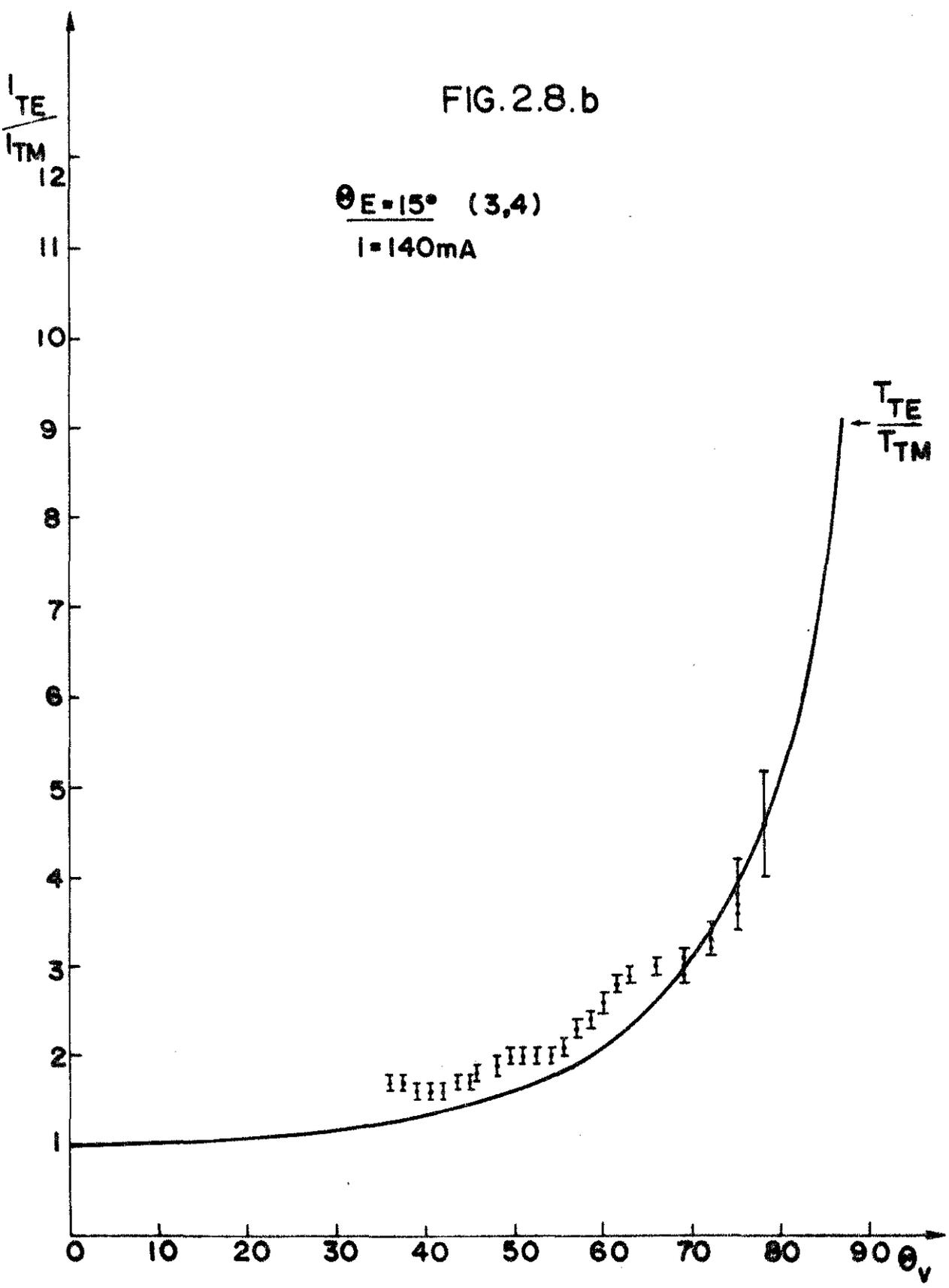


FIG. 2.8.b

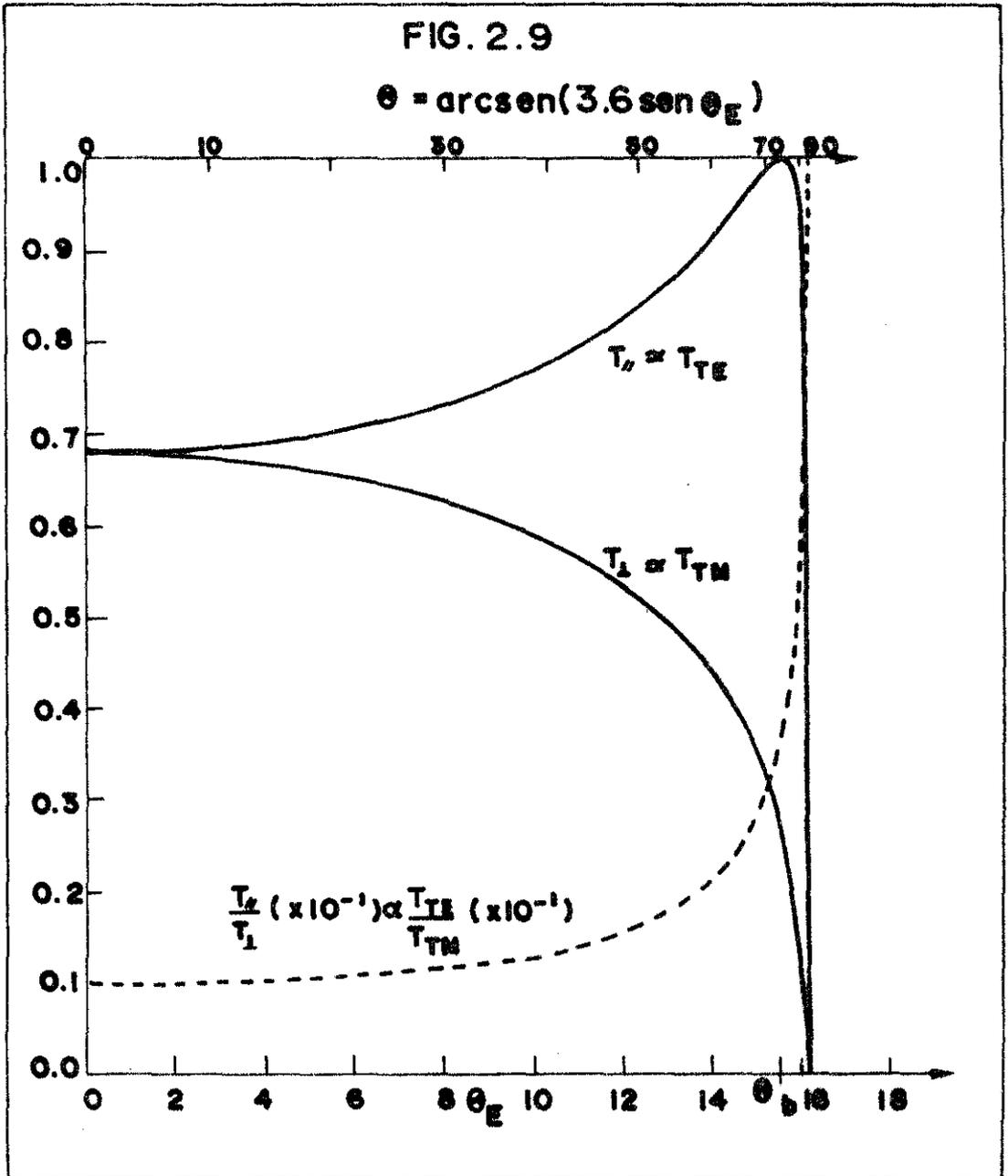
$\theta_E = 15^\circ$ (3,4)
 $I = 140\text{mA}$



onde

$$\theta_b = \arctg\left(\frac{1}{3.6}\right)$$

para o qual, na aproximação de ondas planas, a transmitividade da polarização paralela ao plano de incidência é máxima e igual à unidade (fig. 2.9).



Capítulo 3

Análise dos resultados

Pela fig. 2.2 vemos que a não-linearidade no gráfico $I \times i$ é suprimida para lasers com $\theta_E \geq 2^\circ$ e, pela fig. 2.3, que há um aumento de i_{th} em função de θ_E . Estes resultados concordam com trabalhos anteriores [1-3].

As figuras 2.4 mostram, como era de se esperar, um deslocamento do "far-field" com θ_E assim como um aumento na assimetria da configuração angular. Lembrando-se que para um índice de refração igual a 3,6 o ângulo crítico para o qual há reflexão interna total na interface GaAs-ar, é

$$\theta_{crit} = \arcsen \frac{1}{3,6} \approx 16,1^\circ,$$

podemos atribuir a crescente assimetria, em função de θ_E , nas figs.2.4, a progressiva aproximação entre θ_E e θ_{crit} , fazendo com que parte da distribuição espacial do campo ótico não seja transmitida.

Com os valores de θ_M tirados das curvas $I \times \theta_V$, obtivemos a fig. 2.6, que mostra uma tendência de afastamento angular do filamento, para valores menores do que θ_E , comprovando o modelo de perdas apresentado anteriormente (vide fig. 1.5), de que o filamento procura se localizar em regiões onde as perdas são menos intensas. Outra forma de se verificar o resultado do modelo é analisando a fig. 2.3, onde temos o aumento de i_{th} com θ_E .

Analisando as figuras 2.5 e 2.8, vemos que:

- aparecem multi-modos superpostos a uma super-radiância (amplificação da emissão espontânea), sendo que para lasers com $\theta_E \geq 8^\circ$, a intensidade da super-radiância é bem maior do que a intensidade dos modos da cavidade (figs. 2.5); usando a eq. 1.3, a relação r_i entre pico e vale do espectro é diferente - para diferentes inclinações θ_E da faixa de contato, da seguinte maneira

$$r_i(2^\circ) > r_i(8^\circ) \approx r_i(15^\circ)$$

- predomina, em todos os lasers, a polarização paralela à junção (figs. 2.8).

Como a refletividade e a transmitividade de um espelho dependem do ângulo de incidência e da polarização da luz incidente, os resultados que obtivemos foram analisados levando-se em conta estes fatores. Sendo a distribuição do campo ao longo do plano da junção mais extensa do que os comprimentos de onda envolvidos, relacionamos o modo TE a uma onda plana com o vetor campo elétrico paralelo ao plano de incidência (plano da junção) e o modo TM a uma onda plana com o campo elétrico perpendicular a esse plano. Assim, nas figs 2.8, está superposta aos resultados experimentais a relação entre as transmitividades dessas duas polarizações (T_{TE}/T_{TM}) calculadas na aproximação de ondas planas (fig. 2.9), em função de θ_v .

Destes resultados podemos deduzir que:

a) para grandes ângulos de inclinação da faixa de contato ($\theta_E \geq 8^\circ$), a baixa refletividade dos espelhos não favorece a realimentação, pois a intensidade da super-radiância passa a ser maior do que a intensidade dos modos (figs. 2.5.b.e c).

Além disso, internamente e após a reflexão, o feixe é desviado para fora da região da faixa de contato, onde as perdas são grandes.

b- como o efeito laser é atenuado, o caráter preferencial da polarização da emissão nesses lasers tem como responsável a variação da transmitividade dos espelhos em função do ângulo (figs. 2.8).

A fig. 2.7.a apresenta figuras de difração comuns a esses lasers, conhecidas na ótica por "coma" [19]; estas são devidas a não coincidência do eixo ótico do laser com o eixo ótico da lente. Na fig. 2.7.b, giramos o laser, de modo a coincidir os eixos óticos, eliminando a "coma". Porém, neste caso, o plano focal da objetiva está com uma parte dentro do corpo do laser e outra fora dele, e não sabemos o que realmente estamos medindo. Assim, as medidas de configuração espacial do campo ótico no espelho do laser ("near-field") ficam comprometidas.

Conclusão da Parte I

Estudamos lasers com faixa de contato inclinada, para vários ângulos de inclinação θ_E .

Comprovamos a supressão da não linearidade no gráfico da intensidade luminosa versus corrente aplicada para lasers com $\theta_E \geq 2^\circ$.

Apresentamos um modelo de perdas no laser em função de θ_E , que mostrou-se compatível com os resultados experimentais, isto é, as perdas aumentam com θ_E , e o filamento luminoso procura se localizar na região de menor perda.

Para valores de $\theta_E \geq 8^\circ$, a baixa refletividade dos espelhos não favorece a realimentação dos modos, havendo um aumento da super-radiância. A polarização TE domina nestes lasers, mas este caráter preferencial da polarização da luz emitida, pode ser atribuído à variação da transmitividade dos espelhos em função do ângulo.

Uma análise mais profunda dos resultados experimentais não é possível, devido a ausência de um formalismo teórico que trate desta nova geometria de lasers. Por exemplo, para obtermos valores quantitativos do ganho, é necessário conhecermos a dependência do coeficiente de reflexão nesses lasers, com θ_E .

Isto nos levou ao desenvolvimento de uma teoria, apresentada nos capítulos subsequentes, que possibilite, futuramente, o tratamento destes lasers.

CAPÍTULO 5

Preâmbulo

O objetivo deste trabalho é calcular os modos de oscilação de um laser, conhecido o índice de refração complexo como função da posição.

Vamos considerar o campo elétrico dentro do material como

$$\vec{E} = \left(\sum_i c_i \vec{E}_i(x,y) e^{-ik_i z} + \sum_i d_i \vec{E}_i(x,y) e^{ik_i z} \right) e^{i\omega t} \quad (5.1)$$

isto é, uma superposição de campos viajando em sentidos contrários.

Estando os espelhos do laser localizados nos planos $z = 0$ e $z = -L$, temos em $z = 0$,

$$d_i = \sum_j R_{ij} c_j \quad (5.2)$$

onde R_{ij} é a matriz de reflexão dos modos

Em $z = -L$,

$$c_i e^{ik_i L} = \sum_j R_{ij} e^{-ik_j L} d_j \quad (5.3)$$

Usando a eq.(5.2) obtemos

$$c_i = e^{-ik_i L} \sum_j R_{ij} e^{-ik_j L} \sum_n R_{jn} c_n \quad (5.4)$$

Definindo a matriz de propagação P_{ij} tal que:

$$P_{ij} = \begin{cases} e^{ik_i L} \delta_{ij} & \text{se } i \text{ é um modo guiado} \\ 0 & \text{se } i \text{ é um modo de difração} \end{cases}$$

e k_i é uma função da frequência complexa $\Omega = \omega + i\rho$, isto é

$$k_i = k_i(\omega + i\rho)$$

temos que a solução da eq. (5.4) é dada por

$$\det\{P \quad R \quad P \quad R^{-1}\} = 0 \quad (5.5.a)$$

ou, se o laser for simétrico,

$$\det\{P \quad R \quad \pm 1\} = 0 \quad (5.5.b)$$

Qualquer uma destas duas equações é satisfeita para $\Omega = \omega + i\rho$. Analisando a dependência em ρ da eq. (5.1),

vemos que, se

- $\rho > 0$, o modo decai com o tempo

- $\rho = 0$, o modo é estacionário ("threshold")

- $\rho < 0$, o modo cresce com o tempo até a saturação (laser).

Assim, para resolvermos as eqs. (5.5) precisamos

saber k_i e R_{ij} em função da frequência ω .

1 - Estudo da propagação (matriz P_{ij})

Queremos obter $k_i = k_i(\omega)$.

Sendo a estrutura do laser altamente anisotrópica, primeiro revemos as soluções para campos $\vec{E} = \vec{E}(y)$ (eixo y é perpendicular à junção, fig (1.1)).

Os modos TE são dados por

$$\vec{E}(y) = \begin{bmatrix} X^{(0)}(y) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e os TM por

$$\vec{E}(y) = \begin{bmatrix} 0 \\ Y^{(0)}(y) \\ Z^{(0)}(y) \end{bmatrix}$$

Depois modulamos estes campos com uma função $\psi(x)$ e procuramos a equação para ψ , obtendo a expressão

$$-\frac{1}{m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \Delta \epsilon(x) \psi = (\tilde{k}^2 - k^2) \psi,$$

valida tanto para TE quanto para TM, onde

\tilde{k} = solução aproximada anterior

k = número de onda verdadeiro

e para TE:

$$\Delta \epsilon(x) = \frac{\int X^{(0)}(y) + [\epsilon(x, y) - \tilde{\epsilon}(y)] X^{(0)}(y) dy}{\int X^{(0)}(y) + X^{(0)}(y) dy}$$

com

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} \psi(x) X^{(0)}(y) \\ 0 \\ -\frac{i}{\tilde{k}} \frac{d\psi(x)}{dx} X^{(0)}(y) \end{bmatrix} e^{i\omega t - ikz}$$

e para TM:

$$\Delta \epsilon(x) = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \frac{\int [\epsilon(x, y) - \tilde{\epsilon}(y)] [Y^{(0)}(y) Y^{(0)}(y) + Z^{(0)}(y) Z^{(0)}(y)] dy}{\int Y^{(0)}(y) Y^{(0)}(y) + \tilde{\epsilon}(y) dy}$$

com

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} \frac{d\psi(x)}{dx} z^{(0)}(y) \\ \psi(x) \gamma^{(0)}(y) \\ \psi(x) z^{(0)}(y) \end{bmatrix} \cdot e^{i\omega t - ikz}$$

O "fator de massa", m , é praticamente 1, e $\Delta\epsilon(x)$ contém o fator de confinamento Γ .

2 - Estudo da reflexão (matriz R_{ij})

As somas na eq.(5.1) incluem, também, integrais sobre a parte continua (não guiada) do espectro de \underline{k} . Para tornar o problema da reflexão tratável, evitando o cálculo de integrais duplas, expandimos os campos \vec{E}_i em um conjunto completo de funções integráveis. Desta maneira, as somas da eq.(5.1) se estendem sobre um conjunto discreto.

Assim, calculamos a amplitude e a fase dos elementos da matriz de reflexão

$$R = \begin{bmatrix} R_0 & s_{02} \text{-----} \\ s_{20} & R_2 \text{-----} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

onde R_i é o coeficiente de reflexão do i -ésimo modo, e s_{ij} o coeficiente de conversão do modo i em modo j ($j \neq i$).

3 - Efeito da conversão de modos

Finalmente, na ultima parte de nosso trabalho, a

nalizamos o efeito do coeficiente de conversão nos modos de oscilação.

Por causa do elemento s_{ij} os modos de oscilação do laser não são os modos do guia. Como s_{ij} são pequenos, a solução perturbativa para $(\omega + i\gamma)$ de

$$\det\{P R \pm 1\} = 0$$

é tal que a diferença de frequência entre modos longitudinais, para $i = 0$, fica:

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{L} v_0 + \text{Re} \left\{ \frac{i v_0}{L R_0} \sum_{j \neq 0} \frac{s_{0j} s_{j0} e^{-ik_j L} e^{-i\pi v_0/v_j}}{R_j e^{-ik_j L} e^{-i\pi v_0/v_j} \pm 1} - \frac{i v_0}{L R_0} \sum_{j \neq 0} \frac{s_{0j} s_{j0} e^{-ik_j L}}{R_j e^{-ik_j L} \mp 1} \right\}$$

onde v_j é a velocidade de grupo do j -ésimo modo.

Assim, a presença dos elementos s_{ij} faz com que $\Delta\omega$ não seja constante.

CAPÍTULO 6

Propagação

1- Propagação de Ondas Eletromagnéticas num Meio com $\epsilon(x,y)$.

No estudo da propagação de ondas eletromagnéticas vamos considerar inicialmente, um meio qualquer caracterizado por uma constante dielétrica ϵ , que é uma função das posições x e y , isto é, $\epsilon = \epsilon(x,y)$.

O campo elétrico da onda que se propaga nesse meio é escrito como:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} X(x,y) \\ Y(x,y) \\ Z(x,y) \end{pmatrix} \cdot e^{i\omega t - ikz} \quad (6.1)$$

e satisfaz a seguinte equação:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \vec{E} = 0 \quad (6.2)$$

$$\text{O campo magnético } \vec{H} = i \frac{c}{\omega} \nabla \times \vec{E} \quad (6.3)$$

As três componentes de \vec{E} podem ser expandidas num conjunto completo de funções ortonormais e teremos:

$$X(x,y) = a_{jJ} h_j(x) H_J(y) \quad (6.4.a)$$

$$Y(x,y) = b_{jJ} h_j(x) H_J(y) \quad (6.4.b)$$

$$Z(x,y) = c_{jJ} h_j(x) H_J(y) \quad (6.4.c)$$

estando implícito uma soma nos índices repetidos. Como as funções $h(x)$ e $H(y)$ são funções absolutamente integráveis, pa

ra cada direção x e y , respectivamente, está associada uma largura das funções.

Assim, assumimos que as expansões acima convergião rapidamente se as funções $h_j(x)$ e $H_j(y)$ tiveram larguras escolhidas convenientemente.

Fazendo os produtos escalares da equação (6.2) com os vetores

$$\begin{pmatrix} h_i(x) & H_l(y) \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \\ h_i(x) & H_l(y) \\ 0 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & \\ h_i(x) & H_l(y) \end{pmatrix}$$

e integrando no plano xy , obtemos o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{bmatrix} (P^2)_{IJ} \delta_{ij} \\ + k^2 \delta_{IJ} \delta_{ij} \\ - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{il,jJ} \\ \hline - P_{IJ} p_{ij} \\ \hline k \delta_{IJ} p_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - P_{IJ} p_{ij} \\ \hline \delta_{IJ} (p^2)_{ij} \\ + k^2 \delta_{IJ} \delta_{ij} \\ - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{il,jJ} \\ \hline k P_{IJ} \delta_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \delta_{IJ} p_{ij} \\ \hline \delta_{IJ} (p^2)_{ij} \\ + (P^2)_{IJ} \delta_{ij} \\ - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{il,jJ} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{jJ} \\ \hline b_{jJ} \\ \hline c_{jJ} \end{bmatrix} = 0 \quad (6.5)$$

onde

$$p_{ij} = -i \int h_i(x) \frac{d}{dx} h_j(x) dx \quad (6.6)$$

$$P_{IJ} = -i \int H_I(y) \frac{d}{dy} H_J(y) dy \quad (6.7)$$

$$\epsilon_{II,JJ} = \iint h_i(x) H_I(y) \epsilon(x,y) h_j(x) H_J(y) dx dy \quad (6.8)$$

Na equação (6.5) temos uma multiplicação de matriz seguida por somas nos índices repetidos. Para qualquer guia de onda dielétrica, dado ω , podemos determinar k resolvendo esta equação, isto é, fazendo o determinante da matriz secular igual a zero.

Num laser de semiconductor, o guiamento da luz é feito, principalmente, pelo batente de índice de refração existente na direção perpendicular à junção (direção y , Fig. 1.1). Na direção paralela à junção (direção x) e varia pouco e lentamente (1 - 6) (vários mecanismos de confinamento da luz nesta direção têm sido propostos (1 - 5), mas ele ainda não é completamente compreendido).

Sendo pequena e lenta a variação de ϵ na direção x , podemos resolver a equação de onda (6.5) em duas etapas: primeiramente, consideramos uma onda sem variação ao longo de x , e depois aplicamos os métodos tradicionais de perturbação para incluir os efeitos destas variações.

Considerando um guia cuja constante dielétrica $\tilde{\epsilon}(y)$, não depende de x , teremos, para uma onda sem variação ao longo de x ,

$$P_{ij} = 0 \quad (6.9.a)$$

$$k \rightarrow \tilde{k} \quad (6.9.b)$$

$$\epsilon_{II,JJ} \rightarrow \tilde{\epsilon}_{IJ} \delta_{ij} \quad (6.9.c)$$

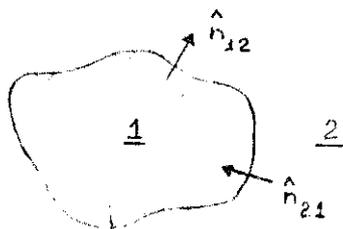
$$\vec{H} = \begin{pmatrix} -\frac{\vec{k}}{\omega/c} \gamma^{(0)}(y) + i \frac{1}{\omega/c} \frac{\partial}{\partial y} z^{(0)}(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\vec{k}z + i\omega t} \quad (6.13)$$

isto é, o campo magnético só tem componente na direção \underline{x} , portanto, um modo TM.

Para qualquer uma destas duas soluções, o número de k 's que satisfazem determinada equação será proporcional ao número de funções que usarmos na expansão do campo. Precisaremos então, distinguir entre os valores de \vec{k} obtidos, aqueles relacionados aos modos guiados e aos não guiados (modos de difração). Para isto usaremos uma formulação variacional para a propagação.

2- Formulação Variacional da Propagação

Consideremos duas regiões vizinhas



e o seguinte funcional

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\int_1 \nabla \times \vec{E}_1 \cdot \nabla \times \vec{E}_1 dv_1 + \int_2 \nabla \times \vec{E}_2 \cdot \nabla \times \vec{E}_2 dv_2 - 2 \int dS (\hat{n}_{12} \times \vec{E}_1) \cdot \nabla \times \vec{E}_2 - 2 \int dS (\hat{n}_{21} \times \vec{E}_2) \cdot \nabla \times \vec{E}_1}{\int_1 \epsilon_1 \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1 dv_1 + \int_2 \epsilon_2 \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_2 dv_2}$$

(6.14)

onde $\vec{E}_1 \equiv$ campo elétrico na região 1

$\vec{E}_2 \equiv$ campo elétrico na região 2

$\hat{n}_{12} =$ vetor normal de 1 para 2

$\hat{n}_{21} =$ vetor normal de 2 para 1

$\epsilon_1 =$ constante dielétrica em 1

$\epsilon_2 =$ constante dielétrica em 2

Consideremos agora uma variação do campo na região 1

$$\vec{E}_1 \rightarrow \vec{E}_1 + \delta \vec{E}_1$$

Impondo que a variação resultante em $\frac{\omega^2}{c^2}$ seja nula em 1ª. ordem de $\delta \vec{E}_1$ chegamos a (ver Apêndice B)

$$\int \delta \vec{E}_1 \cdot \nabla \times (\nabla \times \vec{E}_1) dv_1 - \frac{\omega^2}{c^2} \int \epsilon_1 \delta \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1 dv_1 +$$

$$+ \int dS (\hat{n}_{12} \times \delta \vec{E}_1) \cdot (\nabla \times \vec{E}_1) - \int dS (\hat{n}_{12} \times \delta \vec{E}_1) \cdot (\nabla \times \vec{E}_2) = 0 \quad (6.15.a)$$

Como $\delta \vec{E}_1$ é arbitrário, então

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}_1) - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 \vec{E}_1 = 0 \quad (6.15.b)$$

$$(\nabla \times \vec{E}_1) \times \hat{n}_{12} \Big|_S = (\nabla \times \vec{E}_2) \times \hat{n}_{12} \Big|_S \quad (6.15.c)$$

Fazendo agora a variação no campo \vec{E}_2 obtemos

$$\int \delta E_2 \cdot \nabla \times (\nabla \times \vec{E}_2) dv_2 - \frac{\omega^2}{c^2} \int \epsilon_2 \delta \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_2 dv_2 -$$

$$- \int dS (\nabla \times \delta \vec{E}_2) \cdot (\hat{n}_{12} \times \vec{E}_1) + \int dS (\nabla \times \delta \vec{E}_2) \cdot (\hat{n}_{12} \times \vec{E}_2) = 0 \quad (6.16.a)$$

donde

$$\nabla \times (\nabla \times E_2) - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2 E_2 = 0 \quad (6.16.b)$$

$$(\hat{n}_{12} \times \vec{E}_1)|_S = (\hat{n}_{12} \times \vec{E}_2)|_S \quad (6.16.c)$$

Assim, a solução do problema variacional é:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \vec{E} \quad (6.17)$$

em todas regiões; pelas eqs. (6.15.c) e (6.3) temos a continuidade da componente tangencial do campo magnético na superfície e pela eq. (6.16.c) a continuidade da componente tangencial do campo elétrico.

Usando a eq. (6.3) em (6.17) temos:

$$\nabla \times \vec{H} = i \frac{\omega}{c} \epsilon \vec{E}$$

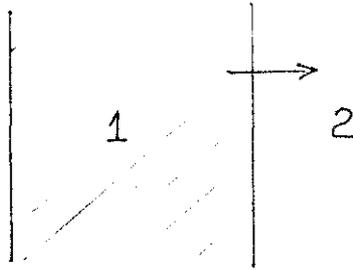
$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0$$

Assim, todas as equações de Maxwell são satisfeitas.

Consideremos agora um pedaço do material per-

pendicular a direção \underline{z} .



Fazendo a variação do campo interno e supondo o campo externo casado com o interno, isto é, que as equações (6.15.c) e (6.16.c) estejam satisfeitas, temos a equação:

$$\int \delta \vec{E} \cdot \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) - \frac{\omega^2}{c^2} \int \epsilon \delta \vec{E} \cdot \vec{E} = 0 \quad (6.18)$$

Consideremos \vec{E} dado por (6.1) e (6.4). Como $\frac{\omega^2}{c^2}$ é estacionária para qualquer variação nos campos

$$\frac{\partial \left(\frac{\omega^2}{c^2} \right)}{\partial A} = 0 \quad (6.19)$$

onde \underline{A} é qualquer um dos parâmetros envolvidos.

Lembrando que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}, \quad (6.20)$$

tomaremos \underline{A} igual aos coeficientes a_{iI} , b_{iI} e c_{iI} , e pelas eqs. (6.19), (6.18) e (6.20) obteremos, então, uma equação secular idêntica a eq. (6.5). Com as mesmas considerações feitas anteriormente para um guia de onda com $\tilde{\epsilon}(y)$ (eqs. (6.9)), chegamos à eq. (6.10) porém, podemos agora definir um critério para distinguir os modos guiados dos não guiados.

Se ω é uma função de k e dos parâmetros envolvidos, isto é,

$$\omega = \omega(k, \underline{A})$$

e temos

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial A} \right|_{\bar{k}} = 0 = - \left. \frac{\partial f}{\partial A} \right|_{\bar{k}},$$

então

$$d\omega = \left. \frac{\partial f}{\partial k} \right|_A dk + \left. \frac{\partial f}{\partial A} \right|_{\bar{k}} dA$$

Logo:

$$d\tilde{k} = \frac{1}{\left. \frac{\partial f}{\partial \tilde{k}} \right|_A} d\omega - \frac{\left. \frac{\partial f}{\partial A} \right|_{\tilde{k}}}{\left. \frac{\partial f}{\partial k} \right|_A} dA = \left. \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \omega} \right|_A d\omega + \left. \frac{\partial \tilde{k}}{\partial A} \right|_{\omega} dA$$

Como ω é extremo para dado \bar{k} , então \bar{k} é extremo para dado ω ,

ou

$$\left. \frac{\partial \tilde{k}}{\partial A} \right|_{\omega} = 0$$

Então, se α é a largura associada às funções $H_j(y)$, podemos definir

Critério de confinamento: "Um modo é confinado se existir α tal que:

$$\left. \frac{\partial \tilde{k}^2}{\partial \alpha} \right|_{\omega^2 \text{ fixo}} = 0$$

É sabido que, dado um guia de onda formado por constantes dielétricas reais ϵ_0 e ϵ_1 , tal que $\epsilon_0 < \epsilon_1$, a frequência de corte deste guia é dado por:

$$\tilde{k}^2 = \epsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2}$$

O critério definido anteriormente é mais geral do que este último pois o primeiro também considera guias com constante dielétrica complexa, que é o caso de lasers de semiconductor.

Assim, resumindo, dados $\frac{\omega^2}{c^2}$, a forma de $\tilde{\epsilon}(y)$, as funções $H_1(y)$ e o número de funções usadas na expansão do(s) campo(s), a resolução das equações (6.10) é feita:

- escolhendo uma polarização e seu respectivo conjunto de matrizes, com as derivadas e integrais já calculadas,
- fazendo o determinante deste conjunto igual a zero, determinando-se assim k^2 ,
- procurando, se existe, α tal que $\frac{\partial k_i^2}{\partial \alpha} = 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), isto é, se o i-ésimo k^2 corresponde a um modo guiado.

Com o valor de k_i^2 em (6.10) podemos determinar os coeficientes $a_J^{(0)}$ ou $b_J^{(0)}$ e $c_J^{(0)}$, determinando-se assim o campo $\vec{E}_i(y)$ correspondente.

Em nosso trabalho a constante dielétrica é real e dada por:

$$\tilde{\epsilon}(y) = \begin{cases} n_1^2 = \epsilon_1 & p/|y| \leq \sigma \\ n_0^2 = \epsilon_0 & p/|y| > \sigma \end{cases}$$

onde $2\sigma = d \equiv$ espessura da região ativa.

$n_1 \equiv$ índice de refração na região ativa

$n_0 \equiv$ índice de refração fora da região ativa

Escolhemos $n_1 = 3.6$ (GaAs) e n_0 com valores tais que:

$$\frac{n_1 - n_0}{n_1} = 5;8 \text{ e } 11\%$$

Como funções $H_n(y)$ escolhemos as funções de Hermite-Gauss:

$$H_n(y) = \frac{1}{\sqrt{\alpha \cdot 2^n n! \pi^{1/2}}} H_n\left(\frac{y}{\alpha}\right) e^{-y^2/2\alpha^2}$$

onde $H_n\left(\frac{y}{\alpha}\right)$ são os polinômios de Hermite (7).

Apesar de não serem próximas às funções próprias do perfil retangular acima (que são as funções cosseno_idais com exponenciais decrescentes), estas funções são convenientes para se calcular as derivadas e integrais que aparecem em (6.10) (Apêndice C).

O número de funções usadas foi maximizado de tal modo, porém, que não tornasse moroso o processo de cálculo pelo computador. Assim, usamos 11 (onze) funções, isto é, para os modos pares, por exemplo, tivemos funções de ordem zero até vinte.

Nossos cálculos foram feitos considerando a polarização TE, já que é a polarização predominante em lasers de hetero-estrutura dupla (8 - 10), e $\frac{\omega^2}{c^2} = 49.0 \mu\text{m}^{-2}$ ($\lambda \approx 0.898 \mu\text{m}$), concentrando-nos no modo guiado de mais baixa ordem (ordem zero).

3- Fatores de Escala e Resultados

Consideraremos um parâmetro θ , tal que as funções $H_l(y)$ são:

$$H_l(y) = \sqrt{\theta} f_l(\theta y)$$

e

$$\int H_l(y) H_j(y) dy = \int f_l(\xi) f_j(\xi) d\xi = \delta_{lj}$$

onde

$$\xi = \theta y$$

Os elementos de matriz da eq. (6.10) dependem de θ da seguinte maneira:

$$P_{IJ} = \theta \left[-i \int f_I(\xi) \frac{d}{d\xi} f_J(\xi) d\xi \right] = \theta Q_{IJ}$$

onde Q_{IJ} não depende de θ e,

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{IJ} &= \epsilon_0 \delta_{IJ} + B \int_{-\theta\sigma}^{\theta\sigma} f_I(\theta y) f_J(\theta y) dy = \\ &= \epsilon_0 \delta_{IJ} + B \int_{-\theta\sigma}^{\theta\sigma} f_I(\xi) f_J(\xi) d\xi \end{aligned}$$

onde $B = \epsilon_1 - \epsilon_0$

Dividindo por θ^2 a matriz \underline{TE} , temos

$$\{ (Q^2)_{IJ} + \frac{1}{\theta^2} (\tilde{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0) \delta_{IJ} - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{B}{\theta^2} \int_{-\theta\sigma}^{\theta\sigma} f_I(\xi) f_J(\xi) d\xi \} = 0$$

Igualando a zero o determinante D:

$$D = D \left[\frac{1}{\theta^2} (\tilde{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0), \frac{\omega^2}{c^2} \frac{B}{\theta^2}, \theta\sigma \right] = 0 \quad (6.21.a)$$

temos

$$\tilde{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 = \theta^2 F \left(\frac{\omega^2 B}{c^2 \theta^2}, \theta\sigma \right) \quad (6.21.b)$$

Escolhendo θ tal que

$$\frac{\omega^2 B}{c^2 \theta^2} = 1 \rightarrow \theta = \frac{\omega}{c} \sqrt{B}$$

Assim

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 = \frac{\omega^2}{c^2} B F \left(1, \frac{\omega\sigma}{c} \sqrt{B} \right)$$

Chamando

$$p = \frac{\omega}{c} \sigma \sqrt{B} \tag{6.22}$$

temos

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 = \frac{\omega^2}{c^2} B f(p)$$

Definindo um Índice de refração efetivo n_{ef} por

$$n_{ef}^2 = \frac{k^2}{\omega^2/c^2} \tag{6.23}$$

temos

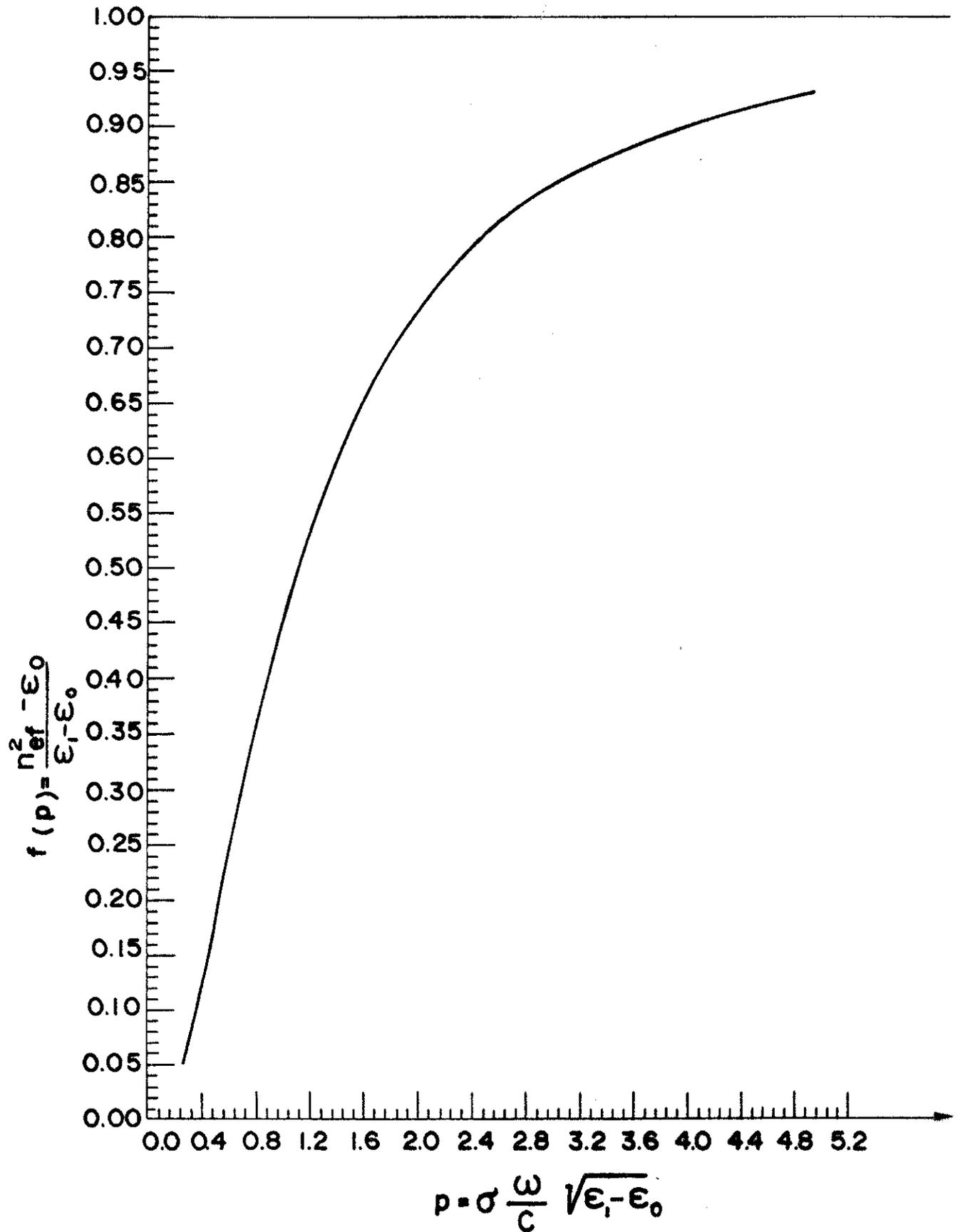
$$f(p) = \frac{n_{ef}^2 - \epsilon_0}{B} \tag{6.24}$$

Com os dados citados no final da seção anterior obtivemos a figura P.1, onde temos $f(p)$ x_p , que nos permite calcular k^2 para qualquer valor de ω , σ , ϵ_0 e B .

O fator de confinamento Γ_{TE} (10 - 12), que é a fração de energia de modo dentro da região ativa, é definida por:

$$\Gamma_{TE} = \frac{\int_{-\sigma}^{\sigma} x^{(0)}(y) + x^{(0)}(y) dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} x^{(0)}(y) + x^{(0)}(y) dy} \tag{6.25.a}$$

FIG. P.1



Podemos escrever (ver Apêndice D)

$$\Gamma_{TE} = - \frac{\sum_{IJ} [(TE)^{-1}]_{JI} (\tilde{\epsilon}_{IJ} - \epsilon_0 \delta_{IJ}) / B}{\sum_I (TE)^{-1}_{II}} \quad (6.25.b)$$

ou

$$\Gamma_{TE} = f(p) + \frac{p}{2} \frac{df(p)}{dp} \quad (6.25.c)$$

A figura P.2 mostra $\Gamma_{TE} \times p$, calculado usando a expressão (6.25.b).

Conhecendo Γ podemos calcular a velocidade de grupo, o ganho espacial e o ganho temporal do modo:

- velocidade de grupo: $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$. Da equação (6.25.b), para

ϵ_1 , σ e ϵ_0 fixos, obtemos

$$\Gamma = \left. \frac{c^2}{B} \frac{\partial k^2}{\partial \omega^2} \right|_{\epsilon_1} - \frac{\epsilon_0}{B} = \frac{c}{B} \frac{n_{ef}}{v_g} - \frac{\epsilon_0}{B}$$

logo

$$v_g = \frac{c n_{ef}}{\epsilon_0 + B \Gamma}$$

- ganho espacial: G_e . Suponhamos que

$$\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_1 + i\Delta \quad (\Delta \ll \epsilon_1)$$

$$k \rightarrow k + \left. \frac{\partial k}{\partial \epsilon_1} \right|_{\omega} d\epsilon_1 = k + \left. \frac{\partial k}{\partial \epsilon_1} \right|_{\omega} i\Delta$$

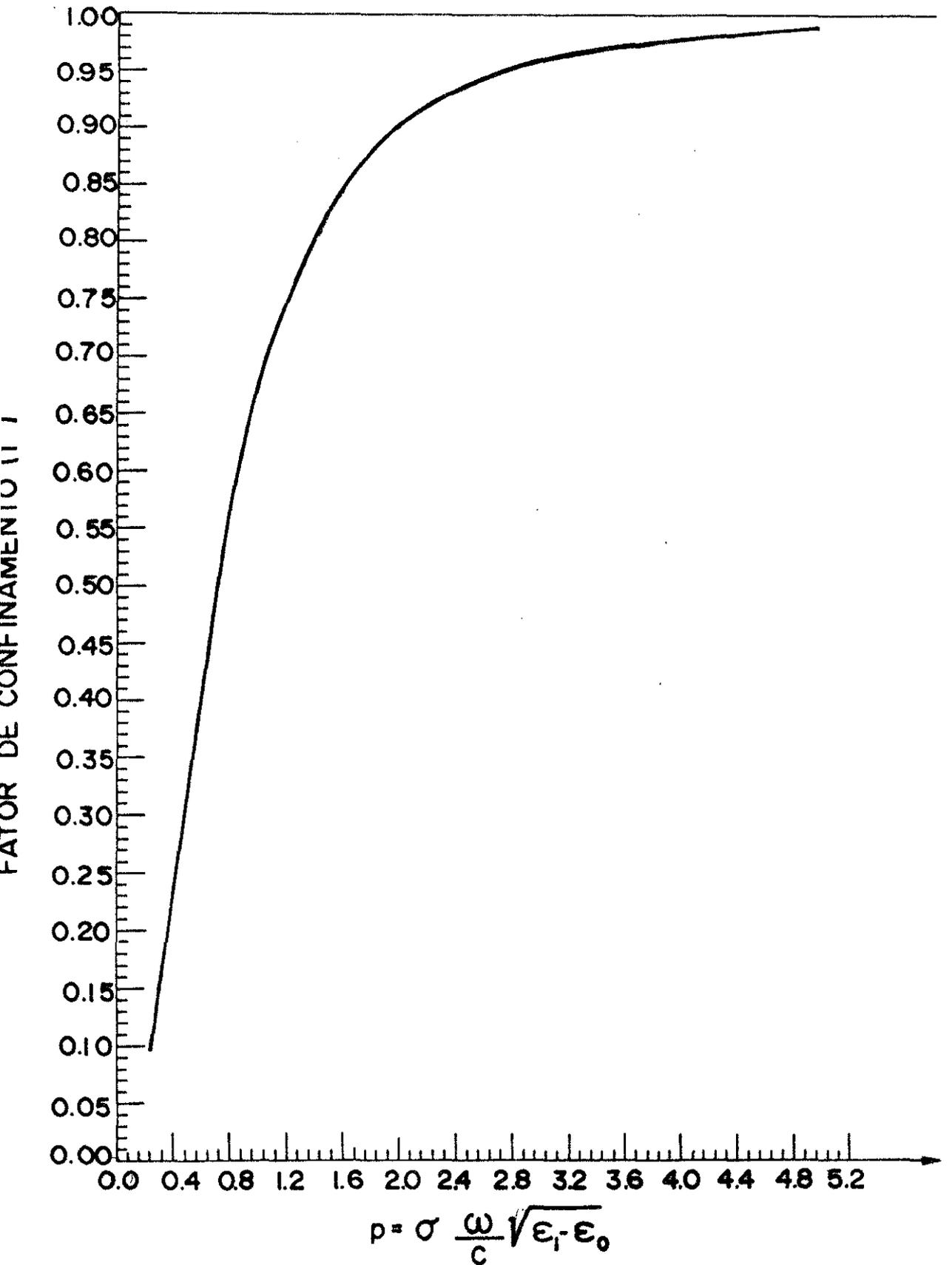
Então

$$e^{-ikz} \rightarrow e^{-ikz} e^{\left. \frac{\partial k}{\partial \epsilon_1} \right|_{\omega} \Delta \cdot z} = e^{-ikz} e^{G_e z}$$

onde $G_e = \left. \frac{\partial k}{\partial \epsilon_1} \right|_{\omega} \Delta$

Para ω , σ e ϵ_0 fixos, (6.25.b) temos

FIG. P.2



$$\Gamma = \frac{c^2}{\omega^2} \left. \frac{\partial \bar{k}^2}{\partial \epsilon_1} \right|_{\omega} = \frac{c^2}{\omega^2} 2\bar{k} \left. \frac{\partial \bar{k}}{\partial \epsilon_1} \right|_{\omega}$$

$$\Gamma = \frac{c^2}{\omega^2} \frac{2\bar{k}}{\Delta} G_e$$

ou

$$\underline{G_e = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\Delta}{2\bar{k}} \Gamma}$$

que é o ganho de um modo que se propaga num guia de comprimento infinito.

- ganho temporal: G_t . Numa cavidade ressonante, o valor de \bar{k} é fixado pelo comprimento da cavidade. Então

$$d\bar{k} = \left. \frac{\partial \bar{k}}{\partial \omega} \right|_{\epsilon_1} d\omega + \left. \frac{\partial \bar{k}}{\partial \epsilon_1} \right|_{\omega} d\epsilon_1 = 0$$

Logo

$$d\omega = - \frac{\left. \frac{\partial \bar{k}}{\partial \epsilon_1} \right|_{\omega}}{\left. \frac{\partial \bar{k}}{\partial \omega} \right|_{\epsilon_1}} d\epsilon_1 = - \left. \frac{\partial \omega}{\partial \epsilon_1} \right|_{\bar{k}} d\epsilon_1$$

Para \bar{k} , σ e ϵ_0 fixos e

$$\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_1 + i\Delta$$

$$\omega \rightarrow \omega + d\omega = \omega - i \left. \frac{\partial \omega}{\partial \epsilon_1} \right|_{\bar{k}} \Delta$$

temos

$$e^{-i\bar{k}z + i\omega t} \rightarrow e^{-i\bar{k}z + i\omega t} e^{G_t t}$$

$$\text{onde } G_t = \Delta \left. \frac{\partial \omega}{\partial \epsilon_1} \right|_{\bar{k}}$$

Usando resultados anteriores temos

$$G_t = \Delta \cdot \frac{G_e / \Delta}{1/v_g} \rightarrow G_t = G_e v_g$$

ou

$$G_t = \frac{\omega \Gamma}{2(\epsilon_0 + B\Gamma)} \cdot \Delta$$

que $\tilde{\epsilon}$ é o ganho de um modo de uma cavidade ressonante.

4- Confinamento na Direção x

Consideremos agora a perturbação na constante dielétrica devido à diferença

$$\epsilon(x,y) - \tilde{\epsilon}(y) \quad (6.26)$$

entre a constante dielétrica real $\epsilon(x,y)$ e a aproximada $\tilde{\epsilon}(y)$. Desta perturbação resulta uma diferença

$$k^2 - \tilde{k}^2 \quad (6.27)$$

entre os números de ondas, e os elementos de matriz

$$p_{ij} \quad (6.28)$$

deixam de ser nulos. Comparemos então, eqs. (6.5) e (6.10) e usemos a seguinte receita de teoria de perturbação:

- As perturbações das eqs. (6.26), (6.27) e (6.28) são tomadas em segunda ordem nos elementos de matriz TE-TE (superior à esquerda)
- As perturbações são consideradas de ordem zero nos elementos de matriz TM-TM (inferior à direita).

c. As perturbações são tomadas em primeira ordem nos elementos de matriz TE-TM (fora da diagonal).

Temos, então:

$$\left[\begin{array}{c|c}
 \begin{array}{l}
 (TE)_{IJ} \delta_{ij} \\
 + (k^2 - \bar{k}^2) \delta_{IJ} \delta_{ij} \\
 - \frac{\omega^2}{c^2} \left(\epsilon_{iI, jJ} - \bar{\epsilon}_{IJ} \delta_{ij} \right) \\
 \hline
 - P_{IJ} p_{ij} \\
 \hline
 \bar{k} \delta_{IJ} p_{ij}
 \end{array} & \begin{array}{l}
 - P_{IJ} p_{ij} \quad \bar{k} \delta_{IJ} p_{ij} \\
 \hline
 \\
 \\
 [TM]_{IJ} \delta_{ij}
 \end{array}
 \end{array} \right] \times \begin{bmatrix} a_{jJ} \\ \dots \\ b_{jJ} \\ \dots \\ c_{jJ} \end{bmatrix} = 0 \quad (6.29)$$

onde $(TE)_{IJ}$ e $[TM]_{IJ}$ significam as submatrizes na eq. (6.10). Usando a 2a. e a 3a. filas da eq. (6.29) para eliminar b_{jJ} e c_{jJ} chegamos a

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (TE)_{IJ} \delta_{ij} + (k^2 - \bar{k}^2) \delta_{IJ} \delta_{ij} - \frac{\omega^2}{c^2} \left(\epsilon_{iI, jJ} - \bar{\epsilon}_{IJ} \delta_{ij} \right) \\
 - P_{iK} p_{Kj} \left[- P_{IK} \bar{k} \delta_{IK} \right] [TM]_{KL}^{-1} \left[\begin{array}{l} - P_{LJ} \\ \bar{k} \delta_{LJ} \end{array} \right] \end{array} \right\} a_{jJ} = 0 \quad (6.3)$$

Convém notar, quando fizermos a inversão da matriz $[TM]$, que ela não é uma matriz 2×2 , mas bem maior devido aos índices K e L .

Consideremos um campo cuja componente x é

$$x(x, y) = x^{(0)}(y) \psi(x) = \sum_J a_J^{(0)} H_J(y) \sum_j \xi_j h_j(x) \quad (6.31)$$

isto é, a componente não perturbada $X^{(0)}(y)$ vezes uma função modulante $\psi(x)$.

Assim

$$a_{jJ} = a_J^{(0)} \xi_j \quad (6.32)$$

onde $a_J^{(0)}$ satisfaz a eq. (6.10)

$$\sum_J (TE)_{IJ} a_J^{(0)} = 0 \quad (6.33)$$

É conveniente definir os coeficientes conjugados $a_I^{(0)+}$ por

$$\sum_I a_I^{(0)+} (TE)_{IJ} = 0 \quad (6.34)$$

Quando $\tilde{\epsilon}$ é real $a_I^{(0)+}$ é o complexo conjugado de $a_I^{(0)}$. Definimos então

$$X^{(0)}(y)^+ = \sum_I a_I^{(0)+} H_I(y)$$

e a constante de normalização

$$S^{(a)} = \int X^{(0)}(y)^+ X^{(0)}(y) dy = \sum_I a_I^{(0)+} a_I^{(0)} \quad (6.35)$$

Multiplicando a eq. (6.30) por $a_I^{(0)+}$ e somando, chegamos a

$$\sum_J \left\{ (k^2 - \bar{k}^2) \delta_{ij} - \frac{\omega^2}{c^2} \int \Delta\epsilon(x) h_i(x) h_j(x) dx - \frac{1}{m} \int h_i(x) \frac{d^2}{dx^2} h_j(x) dx \right\} \xi_j = 0 \quad (6.36)$$

que é equivalente à seguinte equação diferencial para a função modulante

$$-\frac{1}{m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \Delta\epsilon(x) \psi = (\bar{k}^2 - k^2) \psi \quad (6.37)$$

Nas eqs. (6.36) e (6.37) usamos as seguintes definições

$$\Delta \epsilon(x) = \frac{\int x^{(0)}(y) + [\epsilon(x,y) - \bar{\epsilon}(y)] x^{(0)}(y) dy}{\int x^{(0)}(y) + x^{(0)}(y) dy} \quad (6.38)$$

$$\frac{1}{m} = - \frac{1}{S(a)} a_I^{(0)+} \left[-P_{IK} \bar{k} \delta_{IK} \right] [TM]_{KL}^{-1} \begin{bmatrix} -P_{LJ} \\ \bar{k} \delta_{LJ} \end{bmatrix} a_J^{(0)} \quad (6.39)$$

Na última equação temos multiplicação de matrizes e somas nos índices repetidos. Convém notar que a eq. (6.38) contém o fator de confinamento (eq. (6.25.a)). O fator de massa m (assim chamado devido a sua analogia com a teoria da massa efetiva para perturbações não periódicas em cristais [14]) que aparece na eq. (6.37), e cuja expressão é dada pela eq. (6.39), é realmente unitário

$$m = 1 \quad (6.40)$$

como podemos ver do seguinte desenvolvimento. Definimos $B_k^{(0)}$ e $C_k^{(0)}$ da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} B_K^{(0)} \\ C_K^{(0)} \end{bmatrix} = - [TM]_{KL}^{-1} \begin{bmatrix} -P_{LJ} a_J^{(0)} \\ \bar{k} a_L^{(0)} \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

Assim

$$[TM]_{LK} \begin{bmatrix} B_k^{(0)} \\ C_k^{(0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -P_{LJ} a_J^{(0)} \\ \bar{k} a_L^{(0)} \end{bmatrix}$$

Então

$$P_{LJ} a_J^{(0)} = \bar{k}^2 B_L^{(0)} - \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\epsilon}_{LJ} B_J^{(0)} + \bar{k} P_{LJ} C_J^{(0)} \quad (6.42.a)$$

$$-\bar{k} a_L^{(0)} = \bar{k} P_{LJ} B_J^{(0)} + (P^2)_{LJ} C_J^{(0)} - \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\epsilon}_{LJ} C_J^{(0)}$$

Estas equações são satisfeitas se

$$B_J^{(0)} = 0 \quad (6.43.a)$$

e

$$C_J^{(0)} = \frac{1}{\bar{k}} a_J^{(0)} \quad (6.43.b)$$

concordando com a eq. (6.33). Então, da eq. (6.39) obtemos

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{S(a)} a_I^{(0)+} \left[-P_{IK} \bar{k} \delta_{IK} \right] \begin{bmatrix} B_K^{(0)} \\ C_K^{(0)} \end{bmatrix} = 1 \quad (6.44)$$

Das equações (6.29), (6.32), (6.41) e (6.43) obtemos

$$b_{JJ} = 0 \quad (6.45.a)$$

$$c_{JJ} = \frac{1}{\bar{k}} a_J^{(0)} p_{J\ell} \zeta_\ell \quad (6.45.b)$$

Assim, o campo TE fracamente confinado ao longo da direção x

é

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \psi(x) \chi^{(0)}(y) \\ 0 \\ -\frac{i}{\bar{k}} \frac{d\psi(x)}{dx} \chi^{(0)}(y) \end{pmatrix} e^{i\omega t - ikz} \quad (6.46)$$

que tem divergência aproximadamente nula.

Quando a diferença $k^2 - \bar{k}^2$, na eq. (6.37), não é desprezível, podemos considerar a dependência em k do "fator de massa". Para isto usamos a equação (6.39) com k ao invés de \bar{k} no seu lado direito

$$\frac{1}{m} = -\frac{1}{S(a)} a_I^{(0)+} \left[-P_{IK} k \delta_{IK} \right] [TM]_{KL}^{-1} \begin{bmatrix} -P_{LJ} \\ k \delta_{LJ} \end{bmatrix} a_J^{(0)} \quad (6.47)$$

Seja $K = \frac{\bar{k}^2}{k}$, então

$$\frac{1}{m} = - \frac{a_i^{(0)+} a_j^{(0)}}{S} \left\{ \begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc} -P_{IK} & K \delta_{IK} \end{array} \right] \left[TM \right]_{KL}^{-1} \left[\begin{array}{c} -P_{LJ} \\ K \delta_{LJ} \end{array} \right] + \\ & + \left[\begin{array}{cc} 0 & (k-K) \delta_{IK} \end{array} \right] \left[TM \right]_{KL}^{-1} \left[\begin{array}{c} -P_{LJ} \\ K \delta_{LJ} \end{array} \right] + \\ & + \left[\begin{array}{cc} -P_{IK} & K \delta_{IK} \end{array} \right] \left[TM \right]_{KL}^{-1} \left[\begin{array}{c} 0 \\ (k-K) \delta_{LJ} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 0 & (k-K) \delta_{IK} \end{array} \right] \left[TM \right]_{KL}^{-1} \left[\begin{array}{c} 0 \\ (k-K) \delta_{LJ} \end{array} \right] \end{aligned} \right\}$$

mas

$$\left[TM \right]_{KL}^{-1} \left[\begin{array}{c} -P_{LJ} \\ K \delta_{LJ} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{1}{k} \delta_{kJ} \end{array} \right]$$

Então, até termos lineares em $k-K$, temos

$$\frac{1}{m} = \frac{K}{k} + 2 \cdot \frac{k-K}{k} = 2 - \frac{\bar{k}^2}{k^2}$$

ou

$$\frac{1}{m} = 1 + \frac{k^2 - \bar{k}^2}{\bar{k}^2} = \frac{k^2}{\bar{k}^2} \quad (6.48)$$

Em geral, a correção dada pela eq. (6.48) é desprezível.

No apêndice E apresentamos os resultados para o confinamento, na direção x , dos modos TM.

Assim, em qualquer uma das duas polarizações, a função modulante $\psi(x)$, que confina o modo ao longo da direção x , é calculada resolvendo a equação

$$-\frac{d^2 \psi}{dx^2} - \left[\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \Delta \epsilon(x) \right] \psi = (\bar{k}^2 - k^2) \psi \quad (6.49)$$

onde consideramos $m = 1$, e $\Delta\epsilon(x)$ é definido na eq. (6.38) para os modos TE e na eq. (E.22) para os modos TM. Conhecendo-se $\Delta\epsilon$ a eq. (6.49) é simples de se resolver.

Como vimos anteriormente, o ganho de um modo está relacionado ao fator de confinamento deste modo. Se na eq. (6.49) desprezarmos o termo da derivada e assumirmos que

$$\epsilon(x, y) = \tilde{\epsilon}(y)$$

é um imaginário puro, que é constante na região ativa e zero fora dela, então das eqs. (6.38) e (E.22) temos, respectivamente, a eq. (6.25.a) e a equação

$$\Gamma_{TM} = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \frac{\int_{-\sigma}^{\sigma} [Y^{(0)}(y) + Y^{(0)\dagger}(y) + Z^{(0)\dagger}(y)Z^{(0)}(y)] dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y^{(0)\dagger}(y) \cdot Y^{(0)}(y) \tilde{\epsilon}(y) dy} \quad (6.50)$$

Para lasers DH com regiões ativas muito estreitas, isto é,

$$\frac{\omega}{c} \sigma \sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_0} \ll 1$$

obtemos (Apêndice F)

$$\Gamma_{TE} = 2 \frac{\omega^2 \sigma^2}{c^2} (\epsilon_1 - \epsilon_0)$$

$$\Gamma_{TM} = \left[\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \right]^3 \Gamma_{TE} \quad (6.51)$$

Como ϵ_1 é maior do que ϵ_0 , a eq. (6.51) mostra que o ganho dos modos TM é bem menor do que o dos modos TE, fazendo com que nesse lasers a polarização TE seja preferencial.

CAPÍTULO 7

Reflexão

1- Introdução

No capítulo precedente consideramos que as equações (6.15.c) e (6.16.c) eram satisfeitas. Passaremos agora à resolução destas equações.

Dado ω , achamos os modos de propagação no material e no vácuo.

No material temos:

$$\vec{E}(x,y,z) = \sum_i c_i^{(I)} \vec{E}_i(x,y) e^{-ik_i z} + \sum_i c_i^{(R)} \vec{E}_i(x,y) e^{ik_i z} \quad (7.1)$$

isto é, a superposição de campos incidentes (I) e refletidos (R) viajando em sentidos contrários. Na expressão acima, os campos \vec{E}_i são as soluções da equação (6.5). Algumas destas soluções correspondem a modos guiados. Outras correspondem a modos de difração. Entre estas, e no caso de constante dielétrica real, podemos ter k_i^2 negativo, e o modo será evanescente.

No vácuo

$$\vec{F}(x,y,z) = \sum_{\beta} c_{\beta}^{(T)} \vec{F}_{\beta}(x,y) e^{-ik_{\beta} z} \quad (7.2)$$

onde k_{β} é a solução da equação (6.5) quando se faz $\epsilon = 1$. Portanto, os modos obtidos são modos não confinados, podendo alguns dos mesmos serem evanescentes. Devemos notar que se k_{β} é imaginário devemos fazer $k_{\beta} = -ik_{\beta}^{\prime}$ ($k_{\beta}^{\prime} > 0$), pois assim $e^{-ik_{\beta} z} = e^{-k_{\beta}^{\prime} z}$, que decresce com o aumento de z .

Sendo o plano xy , em $z = 0$, a separação entre o material e o vácuo teremos:

$$\nabla \times \vec{E} \Big|_{z=0} = \sum_i c_i^{(I)} \left[\nabla \times \vec{E}_i - ik_i \hat{z} \times \vec{E}_i \right] + \sum_i c_i^{(R)} \left[\nabla \times \vec{E}_i + ik_i \hat{z} \times \vec{E}_i \right]$$

e

$$\nabla \times \vec{F} \Big|_{z=0} = \sum_{\beta} c_{\beta}^{(T)} \left[\nabla \times \vec{F}_{\beta} - ik_{\beta} \hat{z} \times \vec{F}_{\beta} \right]$$

Fazendo $\hat{n}_{12} \equiv \hat{z}$, variações em $c_i^{(R)}$ levam as integrais de superfície da equação (6.15.a) a

$$\int dS (\hat{z} \times \vec{E}_i) \cdot \left\{ \sum_j c_j^{(I)} \left[\nabla \times \vec{E}_j - ik_j \hat{z} \times \vec{E}_j \right] + \sum_j c_j^{(R)} \left[\nabla \times \vec{E}_j + ik_j \hat{z} \times \vec{E}_j \right] - \sum_{\beta} c_{\beta}^{(T)} \left[\nabla \times \vec{F}_{\beta} - ik_{\beta} \hat{z} \times \vec{F}_{\beta} \right] \right\} = 0 \quad (7.3)$$

Variações em $c_{\beta}^{(T)}$, levam as integrais de superfície da equação (6.16.a) a

$$\int dS \left[\nabla \times \vec{F}_{\eta} - ik_{\eta} \hat{z} \times \vec{F}_{\eta} \right] \cdot \left\{ \sum_j c_j^{(I)} \hat{z} \times \vec{E}_j + \sum_j c_j^{(R)} \hat{z} \times \vec{E}_j - \sum_{\beta} c_{\beta}^{(T)} \hat{z} \times \vec{F}_{\beta} \right\} = 0 \quad (7.4)$$

Definindo os símbolos

$$(m|n) = \int dS (\hat{z} \times \vec{E}_m) \cdot (\hat{z} \times \vec{E}_n)$$

$$(m|\nabla n) = \int dS (\hat{z} \times \vec{E}_m) \cdot (\nabla \times \vec{E}_n)$$

e lembrando que letras romanas estão relacionadas com os campos no material (eq.(7.1)), letras gregas com os do vácuo (eq. (7.2)), a eq. (7.3) fica:

$$\sum_j \left[(i|\nabla j) - ik_j(i|j) \right] c_j^{(I)} + \sum_j \left[(i|\nabla J) + ik_j(i|j) \right] c_j^{(R)} - \sum_\beta \left[(i|\nabla\beta) - ik_\beta(i|\beta) \right] c_\beta^{(T)} = 0 \quad (7.5)$$

e a (7.4) fica:

$$\sum_j \left[(\nabla\eta|j) - ik_\eta(\eta|j) \right] c_j^{(I)} + \sum_j \left[(\nabla\eta|j) - ik_\eta(\eta|j) \right] c_j^{(R)} - \sum_\beta \left[(\nabla\eta|\beta) - ik_\eta(\eta|\beta) \right] c_\beta^{(T)} = 0 \quad (7.6)$$

A eq. (7.5), ou a eq. (7.6), consiste essencialmente na soma de três matrizes geradas pelo produto de uma determinada matriz pelo vetor constituído pelos coeficientes c_j (ou c_β).

Com estas equações é possível determinar $c_j^{(R)}$ e $c_\beta^{(T)}$ em função de $c_j^{(I)}$. Convém notar que no cálculo destes coeficientes são incluídos os modos confinados e os de difração.

No caso em que $\epsilon = \tilde{\epsilon}(y)$ sabemos que os modos de propagação admitem duas polarizações; TE e TM. Discutiremos somente a reflexão dos modos TE, pelos motivos expostos anteriormente.

Assim $k_i \rightarrow \tilde{k}_i$ e

$$\tilde{\mathbf{E}}_i = \begin{pmatrix} X_i^{(0)}(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

As eq. (7.5) e (7.6) ficam, respectivamente,
(ver Apêndice G)

$$\tilde{k}_i c_i^{(I)} - \tilde{k}_i c_i^{(R)} = \sum_{\beta} k_{\beta} A_{i\beta} c_{\beta}^{(T)} \quad (7.8.a)$$

e

$$\sum_j A_{j\beta} c_j^{(I)} + \sum_j A_{j\beta} c_j^{(R)} = c_{\beta}^{(T)} \quad (7.8.b)$$

onde

$$A_{i\beta} = \sum_j (a_{ij}^{(0)} a_{\beta j}^{(0)})$$

e $a_{ij}^{(0)}$ são as soluções da equação secular (6.10) para o i -ésimo modo TE no material, e $a_{\beta j}^{(0)}$ as do β -ésimo modo do no vácuo.

Colocando o valor de $c_{\beta}^{(T)}$ da eq. (7.8.b) em (7.8.a)

temos

$$\tilde{k}_i c_i^{(I)} - \tilde{k}_i c_i^{(R)} = \sum_{\beta} k_{\beta} A_{i\beta} \sum_j A_{j\beta} (c_j^{(I)} + c_j^{(R)}) \quad (7.9)$$

Esta equação é semelhante à eq. (1) da referência 15, com as seguintes modificações:

- consideramos vários modos incidentes em vez de apenas um.
- os campos elétricos no trabalho do Ikegami [15] têm normalização diferente dos nossos.
- tratamos como discretos os modos refletidos do contínuo.

Por exemplo, o termo

$$\sum_j A_{j\beta} c_j^{(R)}$$

da eq. (7.9) é equivalente aos dois últimos termos da eq. (1) na referência 15.

Voltando à eq. (7.9), podemos reescrevê-la como

$$K_{ij} c_j^{(L)} - K_{ij} c_j^{(R)} = 0_{i\beta} A_{j\beta} (c_j^{(L)} + c_j^{(R)}) \quad (7.10)$$

onde

$$K_{ij} = \tilde{k}_i \delta_{ij}$$

$$0_{i\beta} = k_\beta A_{i\beta}$$

e na eq. (7.10) está implícito uma soma nos índices repetidos.

Assim

$$(K_{ij} + 0_{i\beta} A_{j\beta}) c_j^{(R)} = (K_{ij} - 0_{i\beta} A_{j\beta}) c_j^{(L)}$$

Chamando

$$K_{ij} \pm 0_{i\beta} A_{j\beta} = (N_\pm)_{ij}$$

temos

$$(N_+)_{ij} c_j^{(R)} = (N_-)_{ij} c_j^{(L)}$$

Logo

$$c_k^{(R)} = (N_+)_{ki}^{-1} (N_-)_{ij} c_j^{(L)}$$

ou

$$c_k^{(R)} = \left[R \right]_{kj} c_j^{(L)} \quad (7.11)$$

A matriz $[R]_{kj}$ é a matriz de reflexão, onde o elemento R_{kk} é o coeficiente de reflexão do k -ésimo modo, e R_{kj} ($k \neq j$) é o coeficiente de conversão do modo j no modo k , conversão esta que ocorre devido à reflexão nos espelhos [16]

A matriz $[R]_{kj}$ pode ser complexa, isto é,

$$[R]_{kj} = [re^{i\phi}]_{kj}$$

Nesta matriz sô nos interessarão os elementos re lacionados aos modos guiados.

2- Fatores de escala e Resultados

Das eqs. (7.8.a) e (7.8.b) podemos ver que uma transformação que preserve os $a_{iJ}^{(o)}$ e os $a_{\beta J}^{(o)}$ e mude todos os \tilde{k}_i e k_β por um fator multiplicativo, não altera a ma triz de reflexão.

Assim, como fizemos anteriormente para a propagação, dentro do material, do determinante D da eq. (6.21.a), - pudemos escrever

$$\left(\frac{k_i}{\theta}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon_0}{\theta^2} = F_i \left(\frac{\omega^2}{c^2} \frac{B}{\theta^2}, \theta \sigma\right)$$

Fazendo $\epsilon = 1$ e procedendo de maneira análoga à que la feita para o determinante D , fora do material temos o deter_{minante}:

$$G = G \left[\frac{1}{\theta^2} \left(k_\beta^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right), 0, 0 \right] = 0$$

ou

$$\left(\frac{k_\beta}{\theta}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2 \theta^2} = g_\beta$$

onde g_β é uma constante que depende da ordem do modo (β)

Para $\theta = \frac{\omega}{c} \sqrt{B}$ temos

$$\left(\frac{c\tilde{k}_i}{\omega\sqrt{B}} \right)^2 - \frac{\epsilon_0}{B} = f_i(p) \quad (7.12)$$

onde p é dado pela eq. (6.22), e

$$\left(\frac{ck_\beta}{\omega\sqrt{B}} \right)^2 - \frac{1}{B} = g_\beta \quad (7.13)$$

Na eq. (7.12), se fixamos p e ϵ_0/B , temos que $\left(\frac{c\tilde{k}}{\omega\sqrt{B}} \right)$ é fixado, e na eq. (7.13) se fixarmos B , $\left(\frac{ck}{\omega\sqrt{B}} \right)^2$ é fixado. Como o coeficiente de reflexão R é tal que

$$R = R \left(\frac{\tilde{k}_i}{k_\beta} \right) = R \left(\begin{array}{c} \frac{c\tilde{k}_i}{\omega\sqrt{B}} \\ \frac{ck_\beta}{\omega\sqrt{B}} \end{array} \right)$$

temos

$$R = R(p, B, \epsilon_0/B)$$

Na fig. R.1 temos os gráficos da parte real do coeficiente de reflexão do modo TE de ordem zero, r_{00} , e na figura R.2, a fase ϕ_{00} correspondente, em função do parâmetro p , para vários Δn , onde

$$\Delta n = \frac{n_1 - n_0}{n_1}$$

As curvas são para um índice de refração $n_1 = 3.6$ e $\Delta n = 5; 8$ e 11% .

Os valores r_{00} concordam razoavelmente bem com os resultados obtidos por Ikegami [15] e Lewin [17] porém, o presente método apresenta as seguintes vantagens em relação

FIG. R.1

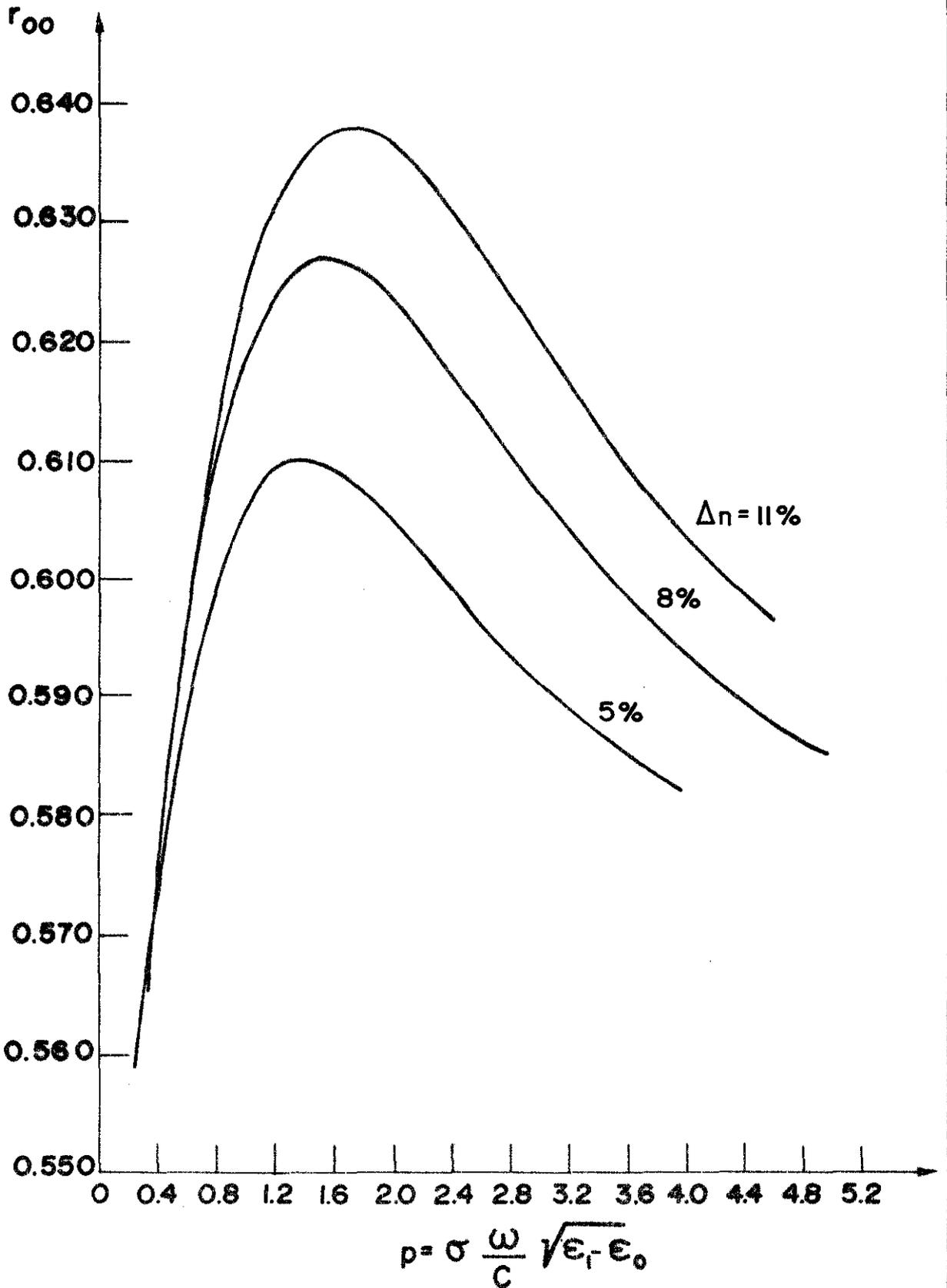
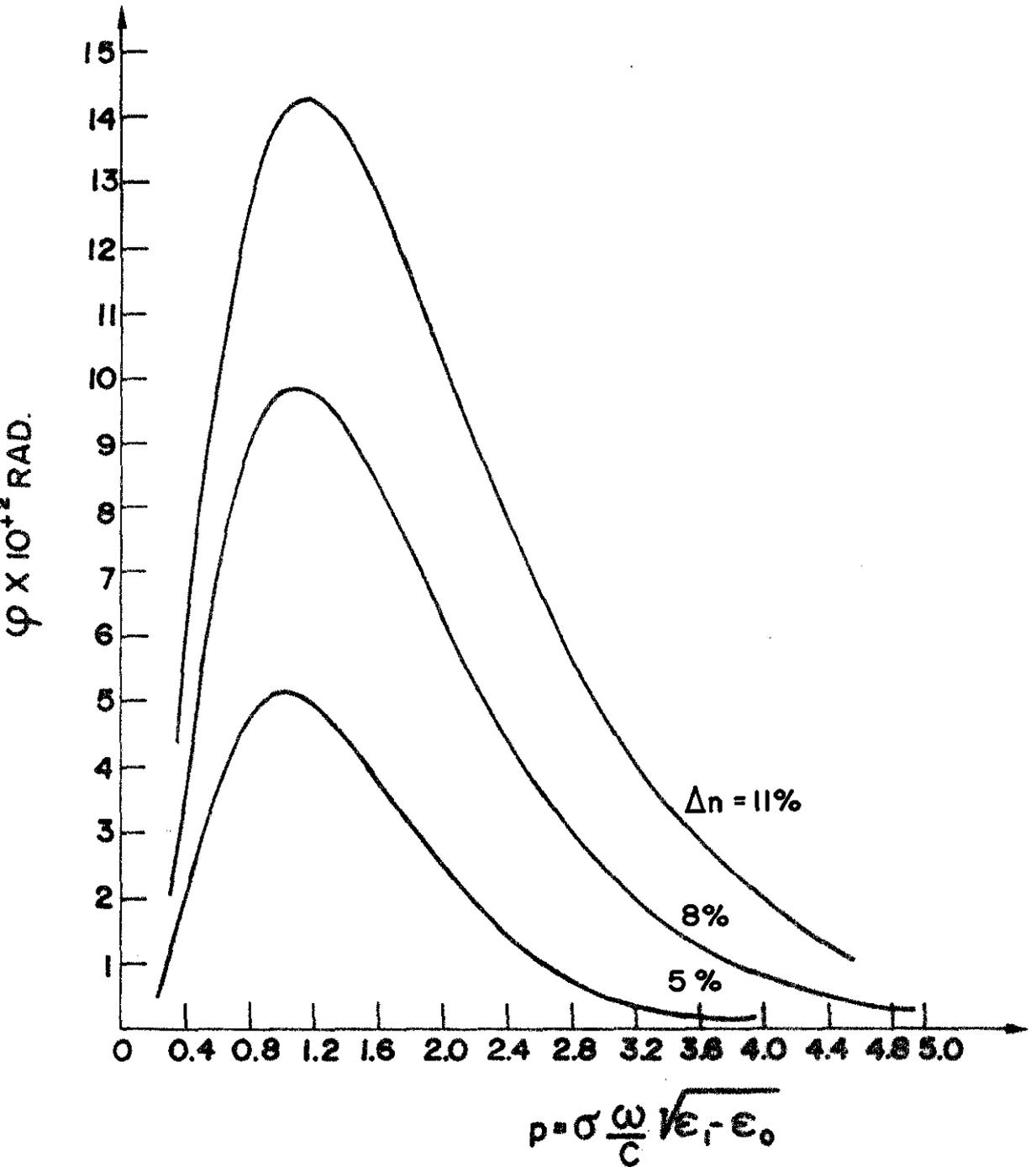


FIG. R.2



a outros anteriores [15,17,18].

- não está limitado a somente um modo incidente.
- inclui modos de difração (Davies e Walpole [18] incluiu-os de maneira aproximada).
- calcula o ganho de fase na reflexão.
- a precisão no valor de $(r e^{i\phi})_{kj}$ pode ser tão grande quanto se queira, bastando para isto aumentar o número de funções na expansão dos campos internos e externos.
- o coeficiente de conversão dos modos não é desprezado. Por exemplo, para $\Delta n = 11\%$ e $p \approx 3.45$, obtivemos $r_{o2} \approx 0.08$ e $\phi_{o2} \approx 0.48$ rad, que não são desprezíveis comparados aos respectivos $r_{oo} (\approx 0.61)$ e $\phi_{oo} (\approx 0.03$ rad) (na referência [18] estes coeficientes são calculados, mas para lasers de $Pb_{1-x}Sn_xTe$).

3- Campo próximo ("near-field") e longínquo ("far-field").

O campo próximo, isto é, o campo na vizinhança dos espelhos, é dado pela eq. (7.2), fazendo $z = 0$, onde $c_{\beta}^{(T)}$ é calculado usando as eqs. (7.8.b) e (7.11) e

$$\vec{F}_{i\beta}(x,y) = \begin{bmatrix} \psi_i(x) \chi_{\beta}^{(o)}(y) \\ 0 \\ -\frac{i}{k_{\beta}} \frac{\partial \psi_i(x)}{\partial x} \chi_{\beta}^{(o)}(y) \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

Nesta expressão $\chi_{\beta}^{(o)}(y)$ é a componente do campo não perturbado, no vácuo, e $\psi_i(x)$ é a função modulante

calculada pela eq. (6.49). Como as larguras associadas às funções na direção \underline{x} são maiores do que os comprimentos de onda no material, consideramos as funções $\psi_i(x)$ idênticas, dentro e fora do material.

O campo longínquo é calculado usando a equação [19]:

$$\vec{E} = \frac{ie^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{2\pi r} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} \vec{k} \times (\hat{z} \times \vec{E}(\vec{r}')) da'$$

onde

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \frac{\vec{r}}{r}$$

$r' \equiv$ coordenada do elemento de superfície da'

e

$$\vec{E}(\vec{r}') = \sum_{i,\beta} c_{\beta}^{(T)} \vec{F}_{i\beta}(x,y)$$

como

$$\vec{k} \times (\hat{z} \times \vec{E}(\vec{r}')) = (k_x \hat{z} - k_z \hat{x}) E_x(\vec{r}')$$

temos

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{ie^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{2\pi r} (k_x \hat{z} - k_z \hat{x}) \sum_{i,\beta} \left[c_{\beta}^{(T)} \right] \psi_i(x) e^{-ik_x x} dx \cdot \left[\chi^{(o)}(y) e^{-ik_y y} dy \right]$$

que é o campo a uma distância r ($\gg r'$) do espelho do laser.

CAPÍTULO 8

Modos Ressonantes no Laser

Os modos de propagação dentro da cavidade do laser podem ser guiados ou não guiados. Interessam-nos apenas os guiados, e há um número finito destes modos. Seja

$$\vec{E}_i(x, y) e^{-ik_i z}$$

a distribuição espacial do modo i e k_i complexo e dependente do modo.

O campo guiado é escrito como

$$\vec{E}(x, y, z) = \sum_i c_i^{(I)} \vec{E}_i(x, y) e^{-ik_i z} + \sum_i c_i^{(R)} \vec{E}_i(x, y) e^{ik_i z}$$

e tem uma dependência no tempo do tipo $e^{i\omega t}$, isto é,

$$\vec{E}(x, y, z; t) = \vec{E}(x, y, z) e^{i\omega t}$$

Localizando os espelhos do laser nos planos $z=0$ e $z=-L$, temos em $z=0$

$$c_i^{(R)} = \sum_j R_{ij} c_j^{(I)} \quad (8.1)$$

onde R_{ij} é a matriz de reflexão dos modos guiados.

Então, no plano $z=-L$ escrevemos

$$c_i^{(I)} e^{ik_i L} = \sum_j R_{ij} e^{-ik_j L} c_j^{(R)}$$

Usando a equação (8.1) temos

$$c_i^{(I)} = e^{-ik_i L} \sum_j R_{ij} e^{-ik_j L} \sum_n R_{jn} c_n^{(I)} \quad (8.2)$$

Definindo uma matriz de propagação P_{ij} tal que

$$P_{ij} = e^{-ik_i L} \delta_{ij} \quad (\text{se } i \text{ é guiado})$$
$$= 0 \quad (\text{se } i \text{ é o modo de difração})$$

a solução da equação (8.2) é dada por:

$$\det \{ P R P R - 1 \} = 0 \quad (8.3)$$

Esta equação será satisfeita para $\Omega = \omega + i\rho$. Se tivermos:

$\rho > 0$, então o modo decai com o tempo

$\rho = 0$, o modo é estacionário ("threshold")

$\rho < 0$, o modo cresce com o tempo até a saturação (laser)

Desta maneira, determinados os números de onda k_i dos modos de propagação e a matriz de reflexão R_{ij} , em função de ω , podemos calcular os modos do laser. Consideraremos, a seguir, dois casos relativamente simples.

1- Cálculo da frequência de um laser com um único modo TE

Consideraremos um campo com dependência em y , somente. A matriz de reflexão se reduz a um único elemento:

$$R = r e^{i\phi}$$

Se o laser é simétrico, podemos escrever a equação (8.3) como

$$\det \{ P R \pm 1 \} = 0$$

e no presente caso simplesmente,

$$e^{-ikL} + i\phi_r = e^{-in\pi}$$

ou

$$\text{Re}(k) = \frac{1}{L}(\phi + n\pi) \quad (8.4.a)$$

e

$$\text{Im}(k) = \frac{1}{L} \ln r \quad (8.4.b)$$

onde $\text{Re}(k)$ e $\text{Im}(k)$ significam a parte real e a parte imaginária de k .

Seja a constante dielétrica

$$\epsilon(\omega, y) = \epsilon_0(\omega) + B(\omega) f(y) + i [\epsilon'_0(\omega) + B'(\omega) f(y)] \quad (8.5)$$

onde

$$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } |y| \leq \sigma \\ 0 & \text{se } |y| > \sigma \end{cases}$$

e

$$\text{Re}(\epsilon(\omega, y)) \gg \text{Im}(\epsilon(\omega, y))$$

A matriz $(TE)_{IJ}$ é (ver eq. (6.10))

$$(TE)_{IJ} = (P^2)_{IJ} + k^2 \delta_{IJ} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{IJ}$$

Colocando a eq. (8.5) nesta equação, e trabalhando na vizinhança da frequência ω_0 , temos

$$(TE)_{IJ} = (TE^{(0)})_{IJ} - i \frac{\omega_0^2}{c^2} \left[\epsilon'_0(\omega_0) \delta_{IJ} + B'(\omega_0) f_{IJ} \right] + 2\kappa \Delta k \delta_{IJ} - \frac{2\omega_0 \Delta \omega}{c^2} \times \\ \times \left[\epsilon_0(\omega_0) \delta_{IJ} + B(\omega_0) f_{IJ} \right] - \frac{\omega_0^2}{c^2} \Delta \omega \left[\frac{d\epsilon_0}{d\omega} \Big|_{\omega_0} \delta_{IJ} + \frac{dB}{d\omega} \Big|_{\omega_0} f_{IJ} \right] \quad (8.6)$$

onde

$(TE^{(0)})_{IJ}$ é a matriz da eq. (6.10), com $\omega = \omega_0$

e

$$f_{IJ} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) H_I(y) H_J(y) dy = \int_{-\sigma}^{\sigma} H_I(y) H_J(y) dy$$

Assim

$$(TE)_{IJ} = (TE^{(0)})_{IJ} + \Delta(TE)_{IJ}$$

Devemos fazer

$$\begin{aligned} \det \{ (TE)_{IJ} \} = 0 &= \det \{ (TE^{(0)})_{IJ} + \Delta(TE)_{IJ} \} = \\ &= \det \{ (TE^{(0)})_{IJ} \} + \sum_{I,J} M_{JI} \Delta(TE)_{IJ} \end{aligned}$$

onde M_{JI} é a matriz dos menores de $(TE^{(0)})_{IJ}$

Porém, $(TE^{(0)})_{IJ}$ é solução da eq. (6.10) então

$$\det \{ (TE^{(0)})_{IJ} \} = 0 ,$$

logo

$$\sum_{IJ} M_{JI} \Delta(TE)_{IJ} = 0$$

ou

$$\begin{aligned} -i \frac{\omega_0^2}{c^2} \left[\epsilon_0'(\omega_0) + \Gamma B'(\omega_0) \right] + 2\tilde{k} \Delta k - 2 \frac{\omega_0 \Delta \omega}{c^2} \left[\epsilon_0(\omega_0) + \Gamma B(\omega_0) \right] - \\ - \frac{\omega_0^2}{c^2} \Delta \omega \left[\left. \frac{d\epsilon_0}{d\omega} \right|_{\omega_0} + \Gamma \left. \frac{dB}{d\omega} \right|_{\omega_0} \right] = 0 \end{aligned}$$

onde Γ é o fator de confinamento (eq. (6.25.a))

Assim

$$\Delta k = \left[\frac{1}{n_{ef} c} (\epsilon_0 + \Gamma B) + \frac{\omega_0}{2n_{ef} c} \left(\frac{d\epsilon_0}{d\omega_0} + \Gamma \frac{dB}{d\omega_0} \right) \right] \Delta \omega + i \frac{\omega_0}{2n_{ef} c} (\epsilon_0' + \Gamma B') \quad (8.7)$$

onde os valores de $\epsilon_0, \epsilon_0', B$ e B' são dados para a frequência ω_0 ,

$$\frac{d\epsilon_0}{d\omega_0} = \left. \frac{d\epsilon_0(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_0} ,$$

$$\frac{dB}{d\omega_0} = \left. \frac{dB}{d\omega} \right|_{\omega_0}$$

$$n_{ef} = kc/\omega_0$$

A eq. (8.7) pode ser usada em diversas situações. Como exemplo, vejamos a diferença de frequência entre dois mo dos longitudinais consecutivos $Re(\Delta\omega)$. De acordo com a equação (8.4.a), os números de onda destes modos diferem de

$$Re(\Delta k) = \frac{\pi}{L}$$

onde consideramos que $|\Delta\phi| \ll \pi$.

Portanto, da eq. (8.7) temos

$$Re(\Delta\omega) = \frac{n_{ef} \pi/L}{\frac{1}{c}(\epsilon_0 + \Gamma B) + \frac{\omega_0}{2c} \left(\frac{d\epsilon_0}{d\omega_0} + \frac{\Gamma dB}{d\omega_0} \right)} \quad (8.8)$$

Vejamos agora o balanço entre perdas e ganhos do modo, isto é, vejamos a parte imaginária ρ da frequência com plexa.

Como ω_0 e k_0 são reais, de acordo com a equação (8.4.b) o modo será estabelecido para frequências complexas - tais que

$$Im(k) = Im(\Delta k) = -\frac{1}{L} \ln r$$

Então, da equação (8.7) tiramos

$$Im(\omega) = Im(\Delta\omega) = \rho = \frac{-L}{\pi} \left[\frac{1}{L} \ln r + \frac{\omega_0}{2n_{ef}c} (\epsilon_0 + \Gamma B)' \right] \times \left(\begin{array}{l} \text{diferença de freq. de} \\ \text{modos longitudinais} \end{array} \right) \quad (8.9)$$

Assim, dada $\epsilon(\omega, y)$, para determinada frequência ω_0 na região de interesse, calculamos k (ou n_{ef}) e Γ . Das eqs. (8.8) e (8.9) tiramos a diferença de frequência entre dois mo dos longitudinais consecutivos e ρ , sendo que o valor de ρ

nos dirã como se comporta o modo na cavidade.

2- Laser com vários modos $X^{(a)}(y)$ e uniforme na direção x.

Novamente, a equação a resolver é

$$\det [P R \pm 1] = 0$$

$$\text{onde } P_{ij} = e^{-ik_i L} \delta_{ij}$$

$$\text{e } R_{ij} = R_i \delta_{ij} + s_{ij},$$

isto é, s_{ij} são os elementos fora da diagonal da matriz R_{ij} , que suporemos pequenos.

Assim

$$\det \{ (R_i e^{-ik_i L} \pm 1) \delta_{ij} + e^{-ik_i L} s_{ij} \} = 0 \quad (8.10)$$

Procuraremos soluções em série de potência de s_{ij} até a 2ª ordem em s_{ij} . Para isto, vejamos a teoria de perturbação conveniente.

De um modo geral, queremos soluções de

$$\det \{ H_i \delta_{ij} + V_{ij} \} = 0 \quad (8.11)$$

$$\text{onde } V_{ii} = 0$$

Sendo os elementos V_{ij} pequenos, as soluções serão aproximadamente

$$H_i \approx 0$$

Escolhamos uma solução próxima de $H_i = 0$. Expandimos o determinante da eq. (8.11) em termos dos elementos da linha i :

$$\det = H_i M_{ii} + \sum_{j \neq i} V_{ij} M_{ij} = 0$$

onde M_{ij} são os cofatores. Como os elementos não-diagonais são todos pequenos, então, na ordem mais baixa de V temos

$$M_{ii} = \prod_{j \neq i} H_j$$

$$M_{ij} = -V_{ji} \prod_{k \neq j, i} H_k$$

Assim

$$H_i - \sum_{j \neq i} \frac{V_{ij} V_{ji}}{H_j} = 0 \quad (8.12)$$

Comparando as eqs. (8.10) e (8.11), a equação (8.12) fica:

$$R_i e^{-ik_i L} \pm 1 \approx \sum_{j \neq i} \left(\frac{s_{ij} s_{ji} e^{-i(k_i + k_j)L}}{R_j e^{-ik_j L} \pm 1} \right)$$

mas

$$e^{-ik_i L} \approx \mp \frac{1}{R_i} \quad \text{Assim}$$

$$R_i e^{-ik_i L} \pm 1 \approx \mp \frac{1}{R_i} \sum_{j \neq i} \left(\frac{s_{ij} e^{-ik_j L} s_{ji}}{R_j e^{-ik_j L} \pm 1} \right)$$

$$e^{-ik_i L} = \mp \frac{1}{R_i} \mp \frac{1}{R_i^2} \sum_{j \neq i} \left(\frac{s_{ij} e^{-ik_j L} s_{ji}}{R_j e^{-ik_j L} \pm 1} \right)$$

$$-ik_i L = -i n \pi - \ln R_i + \ln \left[1 + \frac{1}{R_i} \sum_{j \neq i} \left(\frac{s_{ij} e^{-ik_j L} s_{ji}}{R_j e^{-ik_j L} - (-1)^n} \right) \right] \quad (8.13)$$

ou

$$k_i = \frac{n\pi}{L} - \frac{i}{L} \ln R_i + \frac{i}{LR_i} \sum_{j \neq i} \left(\frac{s_{ij} e^{-ik_j L} s_{ji}}{R_j e^{-ik_j L} - (-1)^n} \right) \quad (8.14)$$

Esta é uma equação para a frequência angular complexa

$$\Omega = \omega + i\rho$$

pois k_i , s_{ij} , R_i e k_j são funções de ω . Suponhamos que a solução aconteça para $\rho \ll \omega$.

Num laser real, o termo $\frac{n\pi}{L}$ é muito maior que os outros, assim

$$\text{Re}(k_i) \gg \text{Im}(k_i)$$

Seja

$$v_i = \frac{\partial \omega}{\partial k_i}$$

a velocidade de grupo. Suponhamos que ela seja aproximadamente real. Então, a diferença de frequência entre dois modos longitudinais consecutivos é, na aproximação de ordem zero,

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{L} v_i$$

Supondo que R_i e s_{ij} variem pouco com a frequência, na aproximação seguinte temos

$$\Delta\omega = \frac{\pi v_i}{L} + \text{Re} \left\{ \frac{i v_i}{L R_i} \sum_{j \neq i} \left(\frac{s_{ij} s_{ji} e^{-i k_j L} e^{-i \pi v_i / v_j}}{R_j e^{-i k_j L} e^{-i \pi v_i / v_j \pm 1}} \right) - \frac{-i v_i \sum_{j \neq i} \frac{s_{ij} s_{ji} e^{-i k_j L}}{R_j e^{-i k_j L \pm 1}} \right\} \quad (8.15)$$

ou seja, o espaçamento entre modos longitudinais não é exatamente constante.

A equação (8.13) pode ser escrita como

$$-i k_i L = -i n \pi - \ln R_i (*)$$

onde R_i^* =
$$\frac{R_i}{1 + \frac{1}{R_i} \sum_{j \neq i} \left(\frac{s_{ij} s_{ji} e^{-ik_j L}}{R_j e^{-ik_j L} - (-1)^n} \right)}$$

isto é, o efeito da perturbação pode ser pensado como uma alteração do coeficiente de reflexão.

CAPÍTULO 9

Sumário da Parte II

Desenvolvemos um método teórico que permite calcular os modos que oscilam num laser de semiconductor.

Para isto calculamos os modos guiados pelo bante de índice de refração na direção perpendicular à junção, e o efeito, nestes modos, de uma variação lenta e suave no índice de refração na direção paralela à junção. Obtivemos uma equação para a função modulante devido a esta variação, e uma expressão para o fator de confinamento dos modos TM.

Em seguida calculamos a matriz de reflexão destes modos, obtendo, inclusive, a fase e os coeficientes de conversão de modos.

Com os resultados da propagação e reflexão, calculamos quais dentre os modos guiados podem oscilar, analisando a influência da conversão de modos.

calculamos quais dentre os modos guiados podem oscilar, analisando a influência da conversão de modos.

calculamos quais dentre os modos guiados podem oscilar, analisando a influência da conversão de modos.

calculamos quais dentre os modos guiados podem oscilar, analisando a influência da conversão de modos.

calculamos quais dentre os modos guiados podem oscilar, analisando a influência da conversão de modos.

calculamos quais dentre os modos guiados podem oscilar, analisando a influência da conversão de modos.

calculamos quais dentre os modos guiados podem oscilar, analisando a influência da conversão de modos.

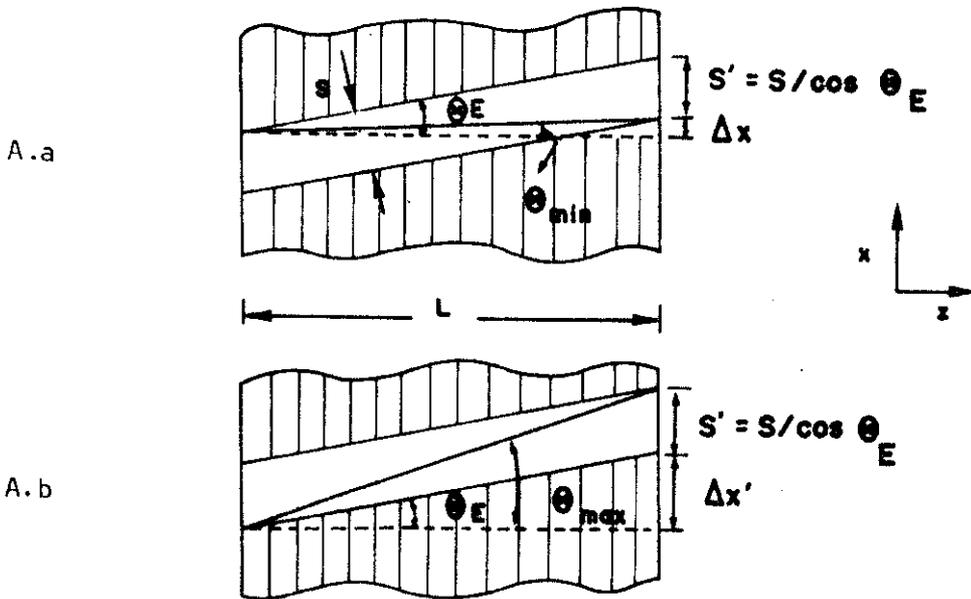
reflexão. Provavelmente está aqui o principal mérito de nossa tese. O coeficiente de reflexão pode ser alterado: mudando-se as condições nos espelhos, juntando-se um laser a um material com índice de refração semelhante, lasers com inhomogeneidade axial, etc ... E em qualquer situação podemos calcular a matriz de reflexão.

- o efeito da conversão dos modos nas frequências do laser, também será de difícil detecção. Acreditamos que, para valores razoáveis dos parâmetros da equação (8.15), o efeito da conversão será bem menor que o efeito da dispersão do material.

APÊNDICE A

Limites Angulares da Faixa de Contato

Consideremos um laser de comprimento L , largura de faixa de contato S , inclinada de um ângulo θ_E em relação à normal aos espelhos. O posicionamento angular que o filamento luminoso pode tomar, θ_F , sem que exceda os limites da faixa de contato, é dado por $\theta_{\min} \leq \theta_F \leq \theta_{\max}$; onde θ_{\min} e θ_{\max} estão mostrados nas figuras abaixo.



Vamos, agora, calcular os valores de θ_{\min} e θ_{\max} , em função de θ_E , L e S .

Da figura A.a temos:

$$\frac{\Delta x}{L} = \operatorname{tg} \theta_{\min}$$

e

$$\frac{S' + \Delta x}{L} = \operatorname{tg} \theta_E$$

ou

$$\operatorname{tg} \theta_E = \frac{S}{L \cos \theta_E} + \operatorname{tg} \theta_{\min}$$

Logo,

$$\theta_{\min} = \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \theta_E - \frac{S}{L \cos \theta_E} \right] \quad (\text{A.1})$$

Da fig. A.b

$$\frac{\Delta x'}{L} = \operatorname{tg} \theta_E$$

e

$$\frac{S' + \Delta x'}{L} = \operatorname{tg} \theta_{\max}$$

ou

$$\operatorname{tg} \theta_{\max} = \frac{S}{L \cos \theta_E} + \operatorname{tg} \theta_E$$

Logo,

$$\theta_{\max} = \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \theta_E + \frac{S}{L \cos \theta_E} \right] \quad (\text{A.2})$$

Assim, para um dado θ_E , conhecidos S e L , determinamos θ_{\min} pela eq.(A.1), e θ_{\max} pela eq.(A.2), e usando a lei de Snell representamos estes valores pelas barras horizontais na fig. 2.6.

As eqs.(A.1) e (A.2) podem ser simplificadas fazendo as aproximações

$$\operatorname{tg} \theta_E \approx \theta_E \quad (\text{em radianos})$$

e

$$\cos \theta_E \approx 1$$

pois, no presente caso, os ângulos são pequenos.

Assim, as eqs. (A.1) e (A.2) ficam

$$\theta \approx \arctg (\theta_E \mp S/L)$$

Como $S = 7,5\mu\text{m}$ e $L = 380\mu\text{m}$, isto é, $S/L \approx 0,02$,
podemos escrever

$$\theta \approx (\theta_E \mp 0,02) \text{ (radianos)}$$

ou

$$\theta \approx (\theta_E \mp 1,1) \text{ (graus)}$$

APÊNDICE B

Consideremos o funcional

$$\lambda = \frac{f(E_1, E_2)}{g(E_1, E_2)} \quad (\text{B.1})$$

onde

$$\lambda = \omega^2/c^2$$

$$f(E_1, E_2) = \int_1 \nabla \times E_1 \cdot \nabla \times E_1 dv_1 + \int_2 \nabla \times E_2 \cdot \nabla \times E_2 dv_2 - 2 \int dS \left[n_{12} \times (E_1 + E_2) \right] \cdot \nabla \times E_2$$

e

$$g(E_1, E_2) = \int_1 \epsilon_1 E_1 \cdot E_2 dv_1 + \int_2 \epsilon_2 E_2 \cdot E_2 dv_2$$

estando subentendido, nestas expressões, o caráter vetorial dos campos E_1 e E_2 .

- Variações em E_1

Passando os campos E_1 para $E_1 + \delta E_1$, onde

$\delta E_1 \ll 1$, a eq. (B.1) fica:

$$\lambda(E_1 + \delta E_1, E_2) = \frac{f(E_1 + \delta E_1, E_2)}{g(E_1 + \delta E_1, E_2)} \quad (\text{B.2})$$

onde

$$f(E_1 + \delta E_1, E_2) = \int_1 \nabla \times (E_1 + \delta E_1) \cdot \nabla \times (E_1 + \delta E_1) dv_1 + \int_2 \nabla \times E_2 \cdot \nabla \times E_2 dv_2 - 2 \int dS \left[n_{12} \times (E_1 + \delta E_1 + E_2) \right] \cdot \nabla \times E_2$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1 \nabla \times E_1 \cdot \nabla \times E_1 dv_1 + \int_2 \nabla \times E_2 \cdot \nabla \times E_2 dv_2 - 2 \int dS \left[n_{12} \times (E_1 + E_2) \right] \nabla \times E_2 + \\
&+ 2 \int_1 \nabla \times (\delta E_1) \cdot \nabla \times E_1 dv_1 - 2 \int dS n_{12} \times \delta E_1 \cdot \nabla \times E_2 \\
&= f(E_1, E_2) + 2 \int_1 \nabla \times (\delta E_1) \cdot \nabla \times E_1 dv_1 - 2 \int dS n_{12} \times \delta E_1 \cdot \nabla \times E_2 \quad (B.3)
\end{aligned}$$

onde desprezamos termos quadraticos em δE_1 , e

$$\begin{aligned}
g(E_1 + \delta E_1, E_2) &= \int_1 \epsilon_1 (E_1 + \delta E_1) \cdot (E_1 + \delta E_1) dv_1 + \int_2 \epsilon_2 E_2 \cdot E_2 dv_2 \\
&\approx \int_1 \epsilon_1 E_1 \cdot E_1 dv_1 + \int_2 \epsilon_2 E_2 \cdot E_2 dv_2 + 2 \int_1 \epsilon_1 \delta E_1 \cdot E_1 dv_1 \\
&= g(E_1, E_2) + 2 \int_1 \epsilon_1 \delta E_1 \cdot E_1 dv_1 \quad (B.4)
\end{aligned}$$

Colocando (B.3) e (B.4) em (B.2), temos

$$\lambda(E_1 + \delta E_1) = \frac{f(E_1, E_2) + 2 \int_1 \nabla \times \delta E_1 \cdot \nabla \times E_1 dv_1 - 2 \int dS n_{12} \times \delta E_1 \cdot \nabla \times E_2}{g(E_1, E_2) \left[1 + \frac{2 \int_1 \epsilon_1 \delta E_1 \cdot E_1 dv_1}{g(E_1, E_2)} \right]} \quad (B.5)$$

Como

$$\frac{2 \int_1 \epsilon_1 \delta E_1 \cdot E_1 dv_1}{g(E_1, E_2)} \ll 1$$

e

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \quad \text{para } x \ll 1$$

a eq. (B.5) fica

$$\lambda(E_1 + \delta E_1) = \frac{f(E_1, E_2) + 2 \int_1 \nabla \times \delta E_1 \cdot \nabla \times E_1 dv_1 - 2 \int dS n_{12} \times \delta E_1 \cdot \nabla \times E_2}{g(E_1, E_2)} \quad \times$$

$$\times \left(1 - \frac{2 \int_1 \epsilon_1 \delta E_1 \cdot E_1 dv_1}{g(E_1, E_2)} \right)$$

$$= \lambda + 2 \times \frac{\int_1 \nabla \times \delta E_1 \cdot \nabla \times E_1 dv_1 - \int dS n_{12} \times \delta E_1 \cdot \nabla \times E_2 - \lambda \int_1 \epsilon_1 \delta E_1 \cdot E_1 dv_1}{g(E_1, E_2)}$$

$$= \lambda + \delta \lambda$$

Para que a variação em λ devido a variação em E_1 seja zero, isto é,

$$\delta \lambda = 0$$

devemos ter

$$\int_1 \nabla \times \delta E_1 \cdot \nabla \times E_1 dv_1 - \int dS n_{12} \times \delta E_1 \cdot \nabla \times E_2 - \lambda \int_1 \epsilon_1 \delta E_1 \cdot E_1 dv_1 = 0 \quad (B.6)$$

Usando as relações

$$\int (\nabla \times \vec{A}) \cdot (\nabla \times \vec{B}) dv = \int \vec{A} \cdot \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) dv + \int dS (\hat{n} \times \vec{A}) \cdot (\nabla \times \vec{B}) \quad (B.7)$$

e

$$(\hat{n} \times \vec{A}) \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \times \hat{n} \quad (B.8)$$

para $\vec{A} = \delta \vec{E}_1$, $\vec{B} = \vec{E}_1$ ou \vec{E}_2 e $\lambda = \omega^2/c^2$, a eq. (B.6) fica

$$\int_1 \delta E_1 \cdot \left[\nabla \times (\nabla \times E_1) - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 E_1 \right] dv_1 +$$

$$+ \int dS \delta E_1 \cdot \left[(\nabla \times E_1) \times n_{12} - (\nabla \times E_2) \times n_{12} \right] = 0$$

que é a eq. (6.15.a).

- Variações em E_2

Passando os campos E_2 para $E_2 + \delta E_2$, ($\delta E_2 \ll 1$), a eq. (B.1) fica

$$\lambda(E_2 + E_2) = \frac{f(E_1, E_2 + \delta E_2)}{g(E_1, E_2 + \delta E_2)}$$

Procedendo de maneira análoga a usada para δE_1 , e usando as eqs. (B.7) e (B.8), temos,

$$\begin{aligned} \lambda(E_2 + \delta E_2) &= \frac{f(E_1, E_2) + 2 \int \delta E_2 \cdot \nabla \times (\nabla \times E_2) dv_2 - 2 \int dS (\nabla \times \delta E_2) \cdot [n_{12} \times (E_1 - E_2)]}{g(E_1, E_2)} \\ &\quad \times \left[1 - \frac{2 \int \epsilon_2 \delta E_2 \cdot E_2 dv_2}{g(E_1, E_2)} \right] \\ &\cong \lambda + 2 \times \frac{\int \delta E_2 \cdot \nabla \times (\nabla \times E_2) dv_2 - \int dS (\nabla \times \delta E_2) \cdot [n_{12} \times (E_1 - E_2)] - \lambda \int \epsilon_2 \delta E_2 \cdot E_2 dv_2}{g(E_1, E_2)} \\ &= \lambda + \delta \lambda \end{aligned}$$

Para que

$$\delta \lambda = 0,$$

$$\int \delta E_2 \cdot \left[\nabla \times (\nabla \times E_2) - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2 E_2 \right] dv_2 -$$

$$- \int dS (\nabla \times \delta E_2) \cdot \left[n_{12} \times (E_1 - E_2) \right] = 0$$

que é a eq. (6.16.a).

APÊNDICE C

As integrais que devem ser resolvidas na eq.(6.10) são, essencialmente, de dois tipos:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(y) \frac{d}{dy} H_m(y) dy \quad (C.1)$$

e

$$I_2 = \int_{-\sigma}^{\sigma} H_n(y) H_m(y) dy \quad (C.2)$$

Sendo, porém, a função $H_n(y)$ a função de Hermite-Gauss de ordem n , e largura α , ela obedece aos operadores \underline{a} e \underline{a}^+ (ref.1.c), onde

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\zeta + \frac{d}{d\zeta} \right) , \quad (C.3.a)$$

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\zeta - \frac{d}{d\zeta} \right) \quad (C.3.b)$$

para $\zeta = y/\alpha$,

e

$$a H_n = \sqrt{n} H_{n-1} \quad (C.4.a)$$

$$a^+ H_n = \sqrt{n+1} H_{n+1} \quad (C.4.b)$$

Das eqs. (C.3) tiramos

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger) \quad (C.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a - a^\dagger) \quad (C.6)$$

Então, usando as eqs. (C.6) e (C.4), a eq. (C.1)

fica

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\zeta) \frac{d}{d\zeta} H_m(\zeta) d\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(a - a^\dagger) H_m d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\zeta) \left[\sqrt{m} H_{m-1}(\zeta) - \sqrt{m+1} H_{m+1}(\zeta) \right] d\zeta$$

Como as funções H_n e H_m são ortnormalizadas - em y , isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\zeta) H_m(\zeta) d\zeta = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(y) H_m(y) dy = \frac{1}{\alpha} \delta_{n,m}$$

temos

$$I_1 = \frac{1}{\alpha \sqrt{2}} \left(\sqrt{m} \delta_{n,m-1} - \sqrt{m+1} \delta_{n,m+1} \right)$$

que é uma expressão facilmente programável.

Passaremos agora para o cálculo de I_2 .

Reescrevendo a eq. (C.2) como

$$I_2 = \alpha (n|m)$$

(C.7)

onde

$$(n|m) = \int_{-D}^D H_n(\zeta) H_m(\zeta) d\zeta,$$

$$\zeta = \gamma/\alpha$$

e

$$D = \sigma/\alpha$$

Assim,

$$\begin{aligned} (n|m) &= \int_{-D}^D H_n H_m d\zeta = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-D}^D a^+ H_{n-1} H_m d\zeta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\int_{-D}^D \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{d\zeta} H_{n-1} \right) H_m d\zeta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-D}^D H_{n-1} \frac{\zeta}{\sqrt{2}} H_m d\zeta \right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-D}^D \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{d\zeta} H_{n-1} \right) H_m d\zeta - \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-D}^D \frac{1}{\sqrt{2}} H_{n-1} \frac{d}{d\zeta} H_m d\zeta + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-D}^D \frac{1}{\sqrt{2}} H_{n-1} \frac{d}{d\zeta} H_m d\zeta + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-D}^D H_{n-1} \frac{\zeta}{\sqrt{2}} H_m d\zeta \end{aligned}$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{2n}} [H_{n-1}(\zeta) H_m(\zeta)]_{-D}^D + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-D}^D H_{n-1} a H_m d\zeta$$

Então

$$(n|m) = \sqrt{\frac{m}{n}} (n-1|m-1) - \sqrt{\frac{2}{n}} H_{n-1}(D) H_m(D) \quad (C.8)$$

Esta relação permite determinar $(n+M|M)$ a partir de $(n|0)$.

Por outro lado, para $n \neq 0$

$$\begin{aligned} (n|0) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-D}^D a^+ H_{n-1} H_0 d\zeta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_{-D}^D H_{n-1} \zeta H_0 d\zeta - \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_{-D}^D \left(\frac{d}{d\zeta} H_{n-1} \right) H_0 d\zeta = \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2n}} [H_{n-1}(\zeta) H_0(\zeta)]_{-D}^D + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-D}^D H_{n-1} a H_0 d\zeta \end{aligned}$$

ou

$$(n|0) = - \sqrt{\frac{2}{n}} H_{n-1}(D) H_0(D) \quad (C.9)$$

para \underline{n} par e diferente de zero.

Finalmente

$$(0|0) = \text{erf}(D) \quad (C.10)$$

O valor da função $\text{erf}(D)$ foi calculada usando a expressão |ref.2.C|:

$$\text{erf}(D) = 1 - (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5) e^{-D^2}$$

onde

$$t = \frac{1}{1 + p D}$$

$$p = 0.3275911$$

$$a_3 = 1.421413741$$

$$a_1 = 0.254829592$$

$$a_4 = -1.453152027$$

$$a_2 = -0.284496736$$

$$a_5 = 1.061405429$$

Usando as eqs.(C.5) e (C.4) temos

$$\sqrt{2} \zeta H_n(\zeta) = \sqrt{n} H_{n-1}(\zeta) + \sqrt{n+1} H_{n+1}(\zeta)$$

ou, trocando n por $n-1$,

$$H_n(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{n}} \zeta H_{n-1}(\zeta) - \sqrt{\frac{n-1}{n}} H_{n-2}(\zeta) \quad (C.11)$$

Sabendo que

$$H_0(\zeta) = \pi^{-1/4} \alpha^{-1/2} e^{-\zeta^2/2}$$

e

$$H_1(\zeta) = \sqrt{2} \pi^{-1/4} \alpha^{-1/2} \zeta e^{-\zeta^2/2},$$

podemos calcular H_n ($n > 1$) usando a eq.(C.11) e, através das eqs.(C.10) e C.9), determinamos $(n|m)$ através da fórmula de recorrência (C.8), calculando I_2 pela eq.(C.7).

APÊNDICE D

A matriz dos modos TE é dada por:

$$(TE)_{IJ} = (P^2)_{IJ} + k^2 \delta_{IJ} - \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\epsilon}_{IJ} \quad (D.1)$$

onde

$$\det \{ (TE)_{IJ} \} = 0 \quad (D.2)$$

e, pela eq. (6.10)

$$\sum_J (TE)_{IJ} a_J^{(0)} = 0 \quad (D.3)$$

Consideremos uma matriz D e as seguintes condições:

$$\sum_j D_{ij} V_j = 0 \quad (D.4.a)$$

$$\sum_j V_i^+ D_{ij} = 0 \quad (D.4.b)$$

e

$$\det \{ D_{ij} \} = 0$$

sendo C_{ij} o cofator de D_{ij} .

Porém,

$$\det \{ D_{ij} \} = \sum_j D_{ij} C_{ij} = \sum_i D_{ij} C_{ij} = 0 \quad (D.5)$$

e

$$\sum_j D_{ij} C_{kj} = 0 \quad \text{para } k \neq i \quad (D.6.a)$$

$$\sum_i D_{ij} C_{ik} = 0 \quad \text{para } k \neq j \quad (D.6.b)$$

Seja uma matriz M igual a transposta de C, isto é,

$$M_{ij} = C_{ji}$$

Então, das eqs. (D.5) e (D.6), temos:

$$\sum_j D_{ij} M_{ji} = 0$$

e

$$\sum_j D_{ij} M_{jk} = 0, \text{ para } k \neq i.$$

Logo:

$$\sum_j D_{ij} M_{jk} = 0, \text{ para qualquer } k \text{ e } i.$$

Comparando esta equação com a eq.(D.4.a) temos:

$$M_{jk} = A_k V_j \quad (D.7)$$

isto é, o elemento M_{ij} é proporcional a V_j , sendo A_k a constante de proporcionalidade.

De maneira análoga podemos ter:

$$\sum_i M_{ji} D_{ij} = 0$$

e

$$\sum_i M_{ki} D_{ij} = 0, \text{ para } k \neq j$$

Logo

$$\sum_i M_{ki} D_{ij} = 0, \text{ para qualquer } k \text{ e } j,$$

que comparada a eq.(D.4.b) leva a

$$M_{ki} = B_k V_i^+ \quad (D.8)$$

Das eqs.(D.7) e (D.8) tiramos:

$$M_{jk} = A_k V_j = B_j V_k^+ \quad (D.9)$$

isto é,

$$B_j = c' V_j \text{ e } A_k = c'' V_k^+$$

onde c' e c'' são duas constantes, e a eq.(D.9) pode ser escrita

$$M_{jk} = c V_j V_k^+$$

Fazendo D_{ij} igual a $(TE)_{ij}$ e $V_j = a_j^{(0)}$, esta última equação fica:

$$M_{JK} = c a_J^{(0)} a_K^{(0)+} \quad (D.10)$$

Usando a definição do fator Γ_{TE} (eq.6.25.a) e lembrando que

$$\chi^{(0)}(y) = \sum_J a_J^{(0)} H_J(y)$$

temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{TE} &= \frac{\sum_{I,J} a_I^{(0)+} a_J^{(0)} \int_{-\sigma}^{\sigma} H_I(y) H_J(y) dy}{\sum_{I,J} a_I^{(0)+} a_J^{(0)} \int_{-\infty}^{\infty} H_I(y) H_J(y) dy} = \\ &= \frac{\sum_{I,J} M_{JI} \int_{-\sigma}^{\sigma} H_I(y) H_J(y) dy}{\sum_{I,J} M_{JI} \int_{-\infty}^{\infty} H_I(y) H_J(y) dy} \quad (D.11) \end{aligned}$$

onde usamos a eq.(D.10).

Como na eq.(D.1),

$$\tilde{\epsilon}_{IJ} = \epsilon_0 \delta_{IJ} + B \int_{-\sigma}^{\sigma} H_I(y) H_J(y) dy, \quad (D.12)$$

podemos escrever a eq.(D.11) como:

$$\Gamma_{TE} = - \frac{\sum_{I,J} M_{JI} \left[\frac{\partial (TE)_{IJ}}{\partial (\omega^2 B/c^2)} + \frac{\partial (\omega^2 \epsilon_0/c^2)}{\partial (\omega^2 B/c^2)} \delta_{IJ} \right]}{\sum_{I,J} M_{JI} \frac{\partial (TE)_{IJ}}{\partial k^2}} \quad (D.13)$$

Pelas eqs.(D.1) e (D.12), vemos que a matriz TE é uma função de k^2 e $\omega^2 B/c^2$. Assim

$$\det \{ (TE)(k^2, \omega^2 B/c^2) \} = 0$$

Consideremos uma variação em k^2 devido a uma va-

riação em $\omega^2 B/c^2$, isto é,

$$\omega^2 B/c^2 \rightarrow \omega^2 B/c^2 + \delta(\omega^2 B/c^2)$$

e

$$k^2 \rightarrow k^2 + \delta k^2$$

Devemos ter

$$\begin{aligned} \det \{ (TE)(k^2 + \delta k^2, \omega^2 B/c^2 + \delta(\omega^2 B/c^2)) \} &= 0 = \\ &= \det \left\{ (TE) + \delta k^2 \frac{\partial (TE)}{\partial k^2} + \delta(\omega^2 B/c^2) \frac{\partial (TE)}{\partial (\omega^2 B/c^2)} \right\} = \\ &= \det \{ (TE)_{IJ} \} + \sum_{I,J} M_{JI} \left[\frac{\partial (TE)_{IJ}}{\partial k^2} \delta k^2 + \frac{\partial (TE)_{IJ}}{\partial (\omega^2 B/c^2)} \delta(\omega^2 B/c^2) \right] = 0 \end{aligned}$$

Usando a eq.(D.2) temos

$$\frac{\partial k^2}{\partial (\omega^2 B/c^2)} = - \frac{\sum_{I,J} M_{JI} \frac{\partial (TE)_{IJ}}{\partial (\omega^2 B/c^2)}}{\sum_{I,J} M_{JI} \frac{\partial (TE)_{IJ}}{\partial k^2}} \quad (D.14)$$

e a eq.(D.13) fica, usando as eqs.(D.14) e (D.1),

$$\Gamma_{TE} = \frac{d(k^2 - \omega^2 \epsilon_0/c^2)}{d(\omega^2 B/c^2)} = \frac{d(p^2 f(p))}{d(p^2)}$$

onde $p^2 = \sigma^2 \frac{\omega^2}{c^2} B$

e $f(p) = \frac{k^2 c^2}{\omega^2 B} - \frac{\epsilon_0}{B}$

Assim,

$$\Gamma_{TE} = f(p) + \frac{p}{2} \frac{df(p)}{dp}$$

que é a eq.(6.25.c)

Como na resolução da eq.(6.10) utilizamos métodos computacionais, a eq.(D.2) não é exatamente zero e, nestas condições, é possível calcularmos a inversa da matriz TE:

$$(TE)_{IJ}^{-1} = \frac{C_{JI}}{\Delta} = \frac{M_{IJ}}{\Delta} \quad (D.15)$$

onde Δ é o determinante da matriz TE ($\Delta \rightarrow$ zero).

Usando as eqs.(D.15) e (D.12), a eq.(D.11) fica:

$$\Gamma_{TE} = \frac{\sum_{I,J} [(TE)_{JI}^{-1} (\tilde{\epsilon}_{IJ} - \epsilon_0 \delta_{IJ}) / B]}{\sum_I (TE)_{II}^{-1}}$$

que é a eq.(6.25.b).

APÊNDICE E

Em lasers de heteroestrutura dupla com região ativa larga, o modo dominante pode ser TM ao invés de TE (13). Para estudar o confinamento dos modos TM procedemos de maneira análoga a feita para os modos TE. O campo não perturbado tem componentes y e z .

$$Y^{(0)}(y) = \sum_J b_J^{(0)} H_J(y) \quad (\text{E.1.a})$$

$$Z^{(0)}(y) = \sum_J c_J^{(0)} H_J(y) \quad (\text{E.1.b})$$

onde $b_J^{(0)}$ e $c_J^{(0)}$ satisfazem a eq.(6.10), ou

$$\sum_J [\text{TM}]_{IJ} \begin{bmatrix} b_J^{(0)} \\ c_J^{(0)} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{E.2})$$

Definimos as soluções conjugadas por

$$\sum_J \begin{bmatrix} b_J^{(0)+} & c_J^{(0)+} \end{bmatrix} [\text{TM}]_{JI} = 0 \quad (\text{E.3})$$

e procuramos soluções para o confinamento x da forma

$$Y(x,y) = \psi(x) Y^{(0)}(y) = \sum_{jJ} \xi_j b_J^{(0)} h_j(x) H_J(y) \quad (\text{E.4.a})$$

$$Z(x,y) = \psi(x) Z^{(0)}(y) = \sum_{jJ} \xi_j c_J^{(0)} h_j(x) H_J(y) \quad (\text{E.4.b})$$

onde a função modulante $\psi(x)$ tem coeficientes de expansão ξ_j .

Assim,

$$b_{jJ} = \xi_j b_J^{(0)} \quad (\text{E.5.a})$$

$$c_{jJ} = \xi_j c_J^{(0)} \quad (\text{E.5.b})$$

Aplicando a receita de teoria da perturbação, a

eq. (6.5) fica:

$$\begin{bmatrix}
 (TE)_{IJ} \delta_{ij} & - P_{IJ} p_{ij} & \bar{k} \delta_{IJ} p_{ij} \\
 \hline
 - P_{IJ} p_{ij} & [TM]_{IJ} \delta_{ij} + \begin{bmatrix} \delta_{IJ} (p^2)_{ij} \\ + (k^2 - \bar{k}^2) \delta_{IJ} \delta_{ij} \\ - \frac{\omega^2}{c^2} \Delta \epsilon_{iI, jJ} \end{bmatrix} & (k - \bar{k}) P_{IJ} \delta_{ij} \\
 \hline
 \bar{k} \delta_{IJ} p_{ij} & (k - \bar{k}) P_{IJ} \delta_{ij} & \begin{bmatrix} \delta_{IJ} (p^2)_{ij} \\ - \frac{\omega^2}{c^2} \Delta \epsilon_{iI, jJ} \end{bmatrix}
 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{jJ} \\ \dots \\ b_{jJ} \\ \dots \\ c_{jJ} \end{bmatrix} = \dots$$

(E.6)

A primeira linha desta equação é usada para calcular a_{jJ} ,

$$a_{jJ} = - p_{j\ell} \xi_\ell (TE)_{JK}^{-1} \left[- P_{KL} b_L^{(0)} + \bar{k} c_K^{(0)} \right] \quad (E.7)$$

onde usamos as eqs. (E.5). Colocando a eq. (E.7) na segunda e terceira linhas da eq. (E.6) e multiplicando pela matriz coluna

$$\begin{bmatrix} b_l^{(0)+} \\ c_l^{(0)+} \end{bmatrix}$$

e somando em l , obtemos

$$\left\{ s^{(b)} + s^{(c)} - \left(- b_l^{(0)+} P_{IJ} + \bar{k} c_J^{(0)+} \right) (TE)_{JK}^{-1} \left(- P_{KL} b_L^{(0)} + \bar{k} c_K^{(0)} \right) \right\} (p^2)_{ij} \xi_j$$

$$+ \left[s^{(b)} + \frac{Q + Q^+}{2 \bar{k}} \right] (k^2 - \bar{k}^2) \xi_i$$

$$- \frac{\omega^2}{c^2} \left[\Delta \epsilon_{ij}^{(b)} + \Delta \epsilon_{ij}^{(c)} \right] \xi_j = 0 \quad (E.8)$$

que forma um conjunto de equações lineares e homogêneas para ξ_i . Na eq.(E.8) usamos os seguintes símbolos

$$S^{(b)} = \sum_I b_I^{(0)+} b_I^{(0)} = \int \gamma^{(0)}(y) + \gamma^{(0)*}(y) dy \quad (E.9.a)$$

$$S^{(c)} = \sum_I c_I^{(0)+} c_I^{(0)} = \int z^{(0)}(y) + z^{(0)*}(y) dy \quad (E.9.b)$$

$$\Delta\epsilon_{ij}^{(b)} = \sum_{I,J} b_I^{(0)+} \Delta\epsilon_{iI,jJ} b_J^{(0)} = \int h_i(x) \Delta\epsilon^{(b)}(x) h_j(x) dx \quad (E.10.a)$$

$$\Delta\epsilon_{ij}^{(c)} = \sum_{I,J} c_I^{(0)+} \Delta\epsilon_{iI,jJ} c_J^{(0)} = \int h_i(x) \Delta\epsilon^{(c)}(x) h_j(x) dx \quad (E.10.b)$$

onde

$$\Delta\epsilon^{(b)}(x) = \int \gamma^{(0)}(y) + \left[\epsilon(x,y) - \bar{\epsilon}(y) \right] \gamma^{(0)*}(y) dy \quad (E.11.a)$$

$$\Delta\epsilon^{(c)}(x) = \int z^{(0)}(y) + \left[\epsilon(x,y) - \bar{\epsilon}(y) \right] z^{(0)*}(y) dy \quad (E.11.b)$$

$$Q = \sum_{IJ} b_I^{(0)+} P_{IJ} c_J^{(0)} = -i \int \gamma^{(0)}(y) + \frac{d}{dy} z^{(0)}(y) dy \quad (E.12.a)$$

$$Q^+ = \sum_{IJ} c_I^{(0)+} P_{IJ} b_J^{(0)} = -i \int z^{(0)}(y) + \frac{d}{dy} \gamma^{(0)}(y) dy \quad (E.12.b)$$

Definamos

$$A_J^{(0)} = (TE)_{JK}^{-1} \left(-P_{KL} b_L^{(0)} + \bar{k} c_K^{(0)} \right) \quad (E.13)$$

Assim, da eq.(E.7)

$$a_{jJ} = -p_{j\ell} \xi_\ell A_J^{(0)} \quad (E.14)$$

Colocando a expressão para a matriz TE da eq.(6.10) na eq.(E.13) obtemos

$$(P^2)_{IJ} A_J^{(0)} + \bar{k}^2 A_I^{(0)} - \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\epsilon}_{IJ} A_J^{(0)} = -P_{IJ} b_J^{(0)} + \bar{k} c_I^{(0)} \quad (E.15)$$

Porém, do bloco TM da eq.(6.10) temos

$$\bar{k} P_{IJ} b_J^{(0)} + (P^2)_{IJ} c_J^{(0)} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{IJ} c_J^{(0)} = 0 \quad (\text{E.16})$$

Comparando as eqs.(E.15) e (E.16) chegamos a

$$A_J^{(0)} = \frac{1}{\bar{k}} c_J^{(0)} \quad (\text{E.17})$$

Assim, colocando as eqs.(E.13) e (E.17) na eq.(E.8) obtemos

$$\left(s^{(b)} + \frac{Q}{\bar{k}} \right) (P^2)_{ij} \xi_j + \left[s^{(b)} + \frac{Q + Q^+}{2\bar{k}} \right] (k^2 - \bar{k}^2) \xi_i - \frac{\omega^2}{c^2} \left(\Delta\epsilon_{ij}^{(b)} + \Delta\epsilon_{ij}^{(c)} \right) \xi_j = 0 \quad (\text{E.18})$$

Por outro lado, se $\tilde{\epsilon}$ é real, então

$$Q^+ = Q^*$$

Mas se $\gamma^{(0)}(y)$ é real, $z^{(0)}(y)$ é um imaginário puro e

$$Q^+ = Q = \text{real}$$

Assim, a eq.(E.18) fica equivalente a

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \Delta\epsilon(x) \psi = (\bar{k}^2 - k^2) \psi \quad (\text{E.19})$$

onde o "fator de massa" é outra vez a unidade, e

$$\Delta\epsilon(x) = \frac{\Delta\epsilon^{(b)}(x) + \Delta\epsilon^{(c)}(x)}{s^{(b)} + \frac{Q}{\bar{k}}} \quad (\text{E.20})$$

O denominador na equação acima pode ser escrito como

$$s^{(b)} + \frac{Q}{\bar{k}} = \frac{\omega^2}{c^2 \bar{k}^2} \int \gamma^{(0)}(y)^+ \tilde{\epsilon}(y) \gamma^{(0)}(y) dy \quad (\text{E.21})$$

Assim

$$\Delta \epsilon(x) = \frac{c^2 \bar{k}^2}{\omega^2} \frac{\int \left[\epsilon(x, y) - \bar{\epsilon}(y) \right] \left[\gamma^{(0)}(y) + \gamma^{(0)}(y) + z^{(0)}(y) + z^{(0)}(y) \right]}{\int \gamma^{(0)}(y) + \gamma^{(0)}(y) \bar{\epsilon}(y) dy} \quad (E.22)$$

A componente x do campo TM confinado pode ser obtido das eqs. (E.14) e (E.17). Assim,

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{i}{\bar{k}} \frac{d\psi(x)}{dx} z^{(0)}(y) \\ \psi(x) \gamma^{(0)}(y) \\ \psi(x) z^{(0)}(y) \end{pmatrix} e^{i\omega t - ikz} \quad (E.23)$$

O campo magnético é o rotacional de (E.23). Podemos rapidamente ver que, devido ao confinamento na direção x, o campo magnético deixa de ser exatamente transversal.

APÊNDICE F

Para calcular o fator de confinamento dos modos TE e TM quando $\omega\sigma$ tende a zero, vamos resolver exatamente a propagação de modos num guia de constante dielétrica, dando por:

$$\epsilon(y) = \begin{cases} \epsilon_0 + B & p/ |y| \leq \sigma \\ \epsilon_0 & p/ |y| > \sigma \end{cases}$$

I- Modos TE

A matriz TE corresponde à equação

$$-\frac{d^2 X}{dy^2} + k^2 X - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(y) X = 0$$

a- Para $|y| > \sigma$

$$X(y) = ae^{-Ky}$$

e

$$-K^2 + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 = 0 \tag{F.1}$$

b- Para $|y| \leq \sigma$

$$X(y) = a' \begin{cases} \cos \\ \text{sen} \end{cases} (\gamma y)$$

e

$$\gamma^2 + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 - \frac{\omega^2}{c^2} B = 0 \tag{F.2}$$

A continuidade de X e de $\frac{dX}{dy}$ levam a

$$-K = \gamma \cdot \begin{cases} -\text{tg} \\ 1/\text{tg} \end{cases} (\gamma\sigma)$$

Para o modo de ordem zero, para $\omega \sigma$ tendendo a zero, temos

$$K = \gamma \text{tg} (\gamma\sigma) \approx \gamma^2 \sigma \quad (\text{F.3})$$

Assim, $K \ll \gamma$

Da eq. (F.2), $\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} B$, que na eq. (F.3) leva a

$$K = \frac{\omega^2}{c^2} B \sigma \quad (\text{F.4})$$

Usando a eq. (6.25.a), temos

$$\Gamma_{\text{TE}} = \frac{\int_0^\sigma X^+(y) X(y) dy}{\int_0^\infty X^+(y) X(y) dy} \approx \frac{\int_0^\sigma dy}{\int_0^\infty e^{-2ky} dy} = 2K\sigma$$

ou

$$\Gamma_{\text{TE}} = 2 \frac{\omega^2}{c^2} B \sigma^2 \quad (\text{F.5})$$

onde usamos a eq. (F.4)

11- Modos TM

Da eq. (6.10) temos:

$$k^2 Y - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon Y - ik \frac{dZ}{dy} = 0 \quad (\text{F.6.a})$$

$$-ik \frac{dY}{dy} - \frac{d^2 Z}{dy^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon Z = 0 \quad (\text{F.6.b})$$

Como ϵ é descontínuo, $\frac{dZ}{dy}$ é descontínuo. Derivando a eq.

(F.6.a) obtem-se:

$$- ik \frac{dY}{dy} + i \frac{\omega^2}{c^2 k} \frac{d(\epsilon Y)}{dy} - \frac{d^2 Z}{dy^2} = 0$$

Comparando esta equação com a eq. (F.6.b), vê-se que ϵY é contínuo. Assim, procuramos soluções contínuas em Z (componente tangencial) e contínuas em ϵY (componente normal).

Da eq. (F.6.a) temos, em cada região onde ϵ é constante,

$$Y = \frac{ik}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon} \frac{dZ}{dy} \quad (F.7)$$

que, colocando em (F.6.b), dá

$$\frac{d^2 Z}{dy^2} - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon\right) Z = 0$$

que derivando e usando a eq. (F.7), dá

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon\right) Y = 0$$

a- Para $|y| > \sigma$

$$Y = b e^{-Ky}$$

e

$$\underline{K^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0} \quad (F.8)$$

e

$$Z = c e^{-Ky}$$

$$\left(K^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0\right) Z = -ik \frac{dY}{dy} = ikKY$$

ou

$$Z = i \frac{K}{k} Y = i \frac{K}{k} b e^{-Ky} \quad (F.9)$$

b- Para $|y| \leq \sigma$

$$Y = b' \cdot \begin{cases} \cos \\ \text{sen} \end{cases} (\gamma y)$$

$$-\gamma^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 + \frac{\omega^2}{c^2} B = 0$$

ou

$$\underline{\underline{\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} B - k^2}} \quad (F.10)$$

e

$$Z = c' \cdot \begin{cases} -\text{sen} \\ \cos \end{cases} (\gamma y)$$

$$\left(\gamma^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 - \frac{\omega^2}{c^2} B\right) Z = ik \frac{dY}{dy}$$

ou

$$Z = -\frac{i}{k} \frac{dY}{dy} = -i \frac{\gamma}{k} b' \cdot \begin{cases} -\text{sen} \\ \cos \end{cases} (\gamma y)$$

Continuidade de Z:

$$i \frac{Kb}{k} e^{-K\sigma} = -i \frac{\gamma}{k} b' \cdot \begin{cases} -\text{sen} \\ \cos \end{cases} (\gamma\sigma)$$

Continuidade de ϵY

$$\epsilon_0 b e^{-k\sigma} = (\epsilon_0 + B) b' \cdot \begin{cases} \cos \\ \text{sen} \end{cases} (\gamma\sigma)$$

ou

$$\frac{K}{\epsilon_0} = - \frac{\gamma}{\epsilon_0 + B} \times \begin{cases} -\text{tg} \\ 1/\text{tg} \end{cases} (\gamma\sigma)$$

Para o modo de ordem zero, para $\omega\sigma$ tendendo a zero, temos:

$$\frac{K}{\epsilon_0} = \frac{\gamma^2 \sigma}{\epsilon_0 + B}$$

onde usamos $\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \epsilon_0$, $Y_{\text{ext}}^{(0)} = 1$ e as eqs. (F.12) e (F.13)

Resolvendo as integrais

$$\Gamma_{\text{TM}} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + B} \right)^2 2K\sigma$$

Usando a equação (F.11)

$$\Gamma_{\text{TM}} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + B} \right)^3 2 \frac{\omega^2}{c^2} B\sigma^2$$

ou, comparando com a eq. (F.5),

$$\Gamma_{\text{TM}} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + B} \right)^3 \Gamma_{\text{TE}} \quad (\text{F.14})$$

APÊNDICE G

Para o modo TE temos

$$\vec{E}_i(y) = X_i^{(0)}(y) \hat{x}$$

e

$$\nabla \times \vec{E}_i(y) = - \hat{z} \frac{\partial X_i^{(0)}(y)}{\partial y}$$

Assim, os primeiros termos da eq.(7.5) ficam

$$\begin{aligned} (i|\nabla j) \mp ik_j (i|j) &= - \int dy (\hat{z} \times \hat{x}) \cdot \hat{z} X_i^{(0)}(y) \frac{\partial X_i^{(0)}(y)}{\partial y} \mp \\ &\mp ik_j \int dy (\hat{z} \times \hat{x}) \cdot (\hat{z} \times \hat{x}) X_i^{(0)} X_j^{(0)}(y) \end{aligned}$$

Como $(\hat{z} \times \hat{x}) \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0$, $\hat{y} \cdot \hat{y} = 1$ e

$$\int X_i^{(0)}(y) X_j^{(0)}(y) dy = \delta_{ij}$$

temos

$$(i|\nabla j) \mp ik_j (i|j) = \mp ik_j \delta_{ij} \tag{G.1}$$

O último termo da eq.(7.5) fica

$$\begin{aligned} (i|\nabla\beta) - ik_\beta (i|\beta) &= - ik_\beta \int X_i^{(0)}(y) X_\beta^{(0)}(y) dy \\ &= - ik_\beta \int dy \sum_J a_{iJ}^{(0)} H_J(y) \sum_N a_{\beta N}^{(0)} H_N(y) \\ &= - ik_\beta \sum_{J,N} a_{iJ}^{(0)} a_{\beta N}^{(0)} \delta_{JN} = \\ &= - ik_\beta A_{i\beta} \end{aligned} \tag{G.2}$$

onde

$$A_{i\beta} = \sum_J a_{iJ}^{(0)} a_{\beta J}^{(0)}$$

Assim, usando as eqs.(G.1) e (G.2), a eq.(7.5)

fica

$$\sum_J (-k_j \delta_{ij} c_j^{(I)}) + \sum_J k_j \delta_{ij} c_j^{(R)} + \sum_{\beta} k_{\beta} A_{i\beta} c_{\beta}^{(T)} = 0 \quad (G.3)$$

De maneira análoga, obtemos para a eq.(7.6)

$$\sum_J A_{j\beta} c_j^{(I)} + \sum_J A_{j\beta} c_j^{(R)} - \sum_{\beta} \delta_{n\beta} c_{\beta}^{(T)} = 0 \quad (G.4)$$

As eqs.(G.3) e (G.4) são, respectivamente, as eqs.(7.8.a) e (7.8.b).

REFERÊNCIAS

Introdução e Capítulos de 1 a 4

- (1) P.J. De Waard, "Stripe geometry D.H. lasers with linear output/current characteristics", Electron. Lett., vol 13, p.400, 1977.
- (2) B.L. Frescura, C.J. Hwang, H. Luechinger, and J.E. Ripper, "Suppression of output non-linearities in double heterostructure lasers by use of misaligned mirrors", Appl. Phys. Lett., vol. 31, p. 770, 1977.
- (3) D.R. Scifres, W. Streifer, and R.D. Burnham, "GaAs/GaAlAs diode lasers with angled pumping stripes", IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-14, p. 223, 1978.
- (4) R.W. Dixon, F.R. Nash, R.L. Hartman, and R.T. Hepplewhite, "Improved light output linearity in stripe-geometry double heterostructure (AlGa)As lasers", Appl. Phys. Lett., vol. 29, p. 372, 1976.
- (5) T.L. Paoli, "Nonlinearities in the emission characteristics of stripe-geometry (AlGa)As double heterostructure junction lasers", IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-12, p. 770, 1976.
- (6) R.I. Bossi, "Estudo de anomalias na potência radiada por lasers de junção semicondutora em função da excitação", Tese de Mestrado, Unicamp, 1977.
- (7) M.D. Campos, C.J. Hwang, R.I. Bossi, and J.E. Ripper, "Cavity competition in anomalous emission intensity in double-heterostructure (DH) lasers", IEEE J. Quantum

Electron., vol. QE-13, p. 687, 1977.

- (8) K. Kobayashi, R. Lang, H. Yonezu, I. Sakuma, and I. Hayashi, "Horizontal mode deformation and anomalous lasing properties of stripe geometry injection lasers-Experiment", Japan. J. Appl. Phys., p.207, 1977.
- (9) T.H. Zachos and J.E. Ripper, "Resonant modes of GaAs Junction lasers", IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-5, p. 29, 1969.
- (10) F.K. Reinhart, I. Hayashi, and M.B. Panish, "Mode reflectivity and waveguide properties of double-heterostructure injection lasers", J. Appl. Phys., vol.42, p. 4466, 1971.
- (11) F.R. Nash, "Mode guidance parallel to the junction plane of double-heterostructure GaAs lasers", J. Appl. Phys., vol. 44, p. 4696, 1973.
- (12) J. Buus, "Detailed field model for DH stripe lasers", Opt. Quant. Elect., vol. 10, p. 459, 1978.
- (13) T. Ikegami, "Reflectivity of mode at facet and oscillation mode in double-heterostructure injection lasers", IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-8, p. 470, 1972.
- (14) L. Lewin, "A method for the calculation of the radiation-pattern and mode-conversion properties of a solid-state heterojunction laser", IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, MTT-23, p. 576, 1975.
- (15) R.W. Davies and J.N. Walpole, "Output coupling for closely confined $Pb_{1-x}Sn_xTe$ double heterostructure lasers", IEEE J. Quantum Electron., vol QE-12, p. 291, 1976.

- (16) B. W. Hakki and T.L. Paoli, "Gain spectra in GaAs double-heterostructure injection lasers", J, Appl. Phys., vol.46, p. 1299, 1975.
- (17) F. Stern, "Semiconductors and Semimetals", Academic Press, New York, vol. 2, p. 396, 1966.
- (18) G.R. Fowles, "Introduction to Modern Optics", Holt, Rinehart and Winston, 1968.
- (19) M.V. Klein, "Optics", John Wiley and Sons, Inc.

Capítulos de 5 a 9

- (1) G.H.B Thompson, "A Theory for filamentation in semiconductor lasers including the dependence of dielectric constant on injected carrier density", Opt. Electronics, vol.4, p.257, 1972.
- (2) F.R. Nash, "Mode guidance parallel to the junction plane of double-heterostructure GaAs lasers", J. Appl. Phys., vol 44, p. 4696, 1973.
- (3) D.D. Cook and F.R. Nash, "Gain induced guiding and astigmatic output beam of GaAs lasers", J. Appl. Phys., vol. 46, p.1660, 1975.
- (4) T.L. Paoli, "Waveguiding in a stripe-geometry junction laser", IEEE J. Quantum Electron., vol.QE-13, p. 662, 1977.
- (5) J. Buus, "Detailed field model for DH. stripe lasers", Opt. Quant. Elect., vol. 10, p. 459, 1978.
- (6) T.H. Zachos and J.E. Ripper, "Resonant modes of GaAs junction lasers", IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-5, p.29, 1969.
- (7) M. Abramowitz and I.A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, Inc., New York.
- (8) I. Hayashi, M. B. Panish and F.K. Reinhart, "GaAs-Al_xGa_{1-x}As double heterostructure injection lasers", J. Appl. Phys., vol.42, p.1929, 1971

- (9) F.K. Reinhardt, I. Hayashi and M.B. Panish, "Mode reflectivity and waveguide properties of double-heterostructure injection lasers", J. Appl. Phys. vol. 42, p. 4466, 1971.
- (10) B. W. Hakki and T.L. Paoli, "Gain spectra in GaAs double-heterostructure injection lasers", J. Appl. Phys., vol. 46, p.1299, 1975.
- (11) F. Stern, "Semiconductor and Semimetals", Academic Press, New York, vol. 2, p. 396, 1966.
- (12) J.K. Butler and H. Kressel, " Design curves for double-heterojunction laser diodes", RCA Review, vol.38, p. 542, 1977.
- (13) N.B.Patel, J.E. Ripper, P. Brosson, " Behavior of threshold current and polarization of stimulated emission of GaAs injection lasers under uniaxial stress", IEEE J. Quantum Electron., vol.QE-9, p. 338, 1973.
- (14) J.M. Luttinger and W. Kohn," Motion of electrons and holes in perturbed periodic fields", Phys.Rev., vol. 97, p. 869, 1955.
- (15) T. Ikegami, "Reflectivity of mode at facet and oscillation mode in double-heterostructure injection lasers", IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-8, p.470, 1972.
- (16) J. McKenna, " The excitation of planar dielectric waveguides at p-n junctions, I", Bell System Tech. J., vol. 46, p. 1491, 1967.

- (17) L. Lewin, " A method for the calculation of the radiation - pattern and mode-conversion properties of a solid-state heterojunction laser", IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, MTT-23, p. 576, 1975.
- (18) R.W. Davies and J.N. Walpole, "Output coupling for closely confined $Pb_{1-x}Sn_xTe$ double-heterostructure lasers", IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-12, p. 291, 1976.
- (19) J.D. Jackson, "Classical Electrodynamics", John Wiley and Sons, Inc.

Apêndice C

- (1.C) A.S. Davydov, "Quantum Mechanics", Pergamon Press, 1968.
- (2.C) M. Abramowitz and I. A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, Inc., New York.