

Tese de Doutorado

Oscilações de sabor e de quiralidade no formalismo com pacotes de ondas de Dirac

AUTOR: Alex Eduardo de Bernardini
ORIENTADOR: Stefano De Leo
CO-ORIENTADOR: Marcelo Moraes Guzzo

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Amir. O. Caldeira
Prof. Dr. Marcelo O. C. Gomes
Prof. Dr. Adriano A. Natale
Prof. Dr. Orlando L. G. Peres
Prof. Dr. Carlos. O. Escobar (Suplente)
Prof. Dr. Juan C. G. Montero (Suplente)

INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil

09 de Março de 2005

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À REDAÇÃO FINAL
DA TESE DE DOUTORADO DEFENDIDA PELO
ALUNO ALEX EDUARDO DE BERNARDINI,
E APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA

Stefano De Leo

BIBLIOTECA IFGW
UNICAMP

UNIDADE	IFGW
Nº CHAMADA	T/UNICAMP
	B456o
V	EX
TOMBO BC/	63901
PROC.	16.P-00086.05
C	☐
D	☒
PREÇO	11,00
DATA	16/05/05
Nº CPD	

AMP

IF/407

lib-id 349353

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

B456o

Bernardini, Alex Eduardo de
Oscilações de sabor e de quiralidade no formalismo
com pacotes de ondas de Dirac / Alex Eduardo de
Bernardini. – Campinas, SP : [s.n.], 2005.

Orientadores: Stefano De Leo, Marcelo Moraes
Guzzo.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Oscilações. 2. Sabor. 3. Quiralidade.
4. Neutrinos. 5. Dirac, Equações de. I. De Leo,
Stefano. II. Guzzo, Marcelo Moraes. III. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb
Wataghin". III. Título.

- Palavras-chave em inglês (Keywords):

1. Oscillations
2. Flavor
3. Chirality
4. Neutrinos
5. Dirac equations

- Área de concentração: Física das partículas elementares e campos

- Titulação: Doutor em física

- Banca examinadora:

- Prof. Stefano De Leo
Prof. Adriano Antonio Natale
Prof. Marcelo Otávio Caminha Gomes
Prof. Orlando Luis Goulart Peres
Prof. Amir Ordacgi Caldeira

- Data da defesa: 09.03.2005





C.P. 6165
CEP: 13083-970
Tel. (19) 3788-5305
e-mail: secpos@ifi.unicamp.br

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE ALEX EDUARDO DE BERNARDINI – RA 950074 APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 09 / 03 / 2005.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Stefano de Leo (Orientador do Candidato) –
IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. Adriano Antonio Natale – IFT/UNESP

Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes – IF/USP

Prof. Dr. Orlando Luis Goulart Peres – DRCC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Amir Ordacgi Caldeira – DFMC/IFGW/UNICAMP

À Nenis,

meu amor que me compreendeu ao longo dos anos,

À memória do meu fantástico avô Neno, sempre presente,

que me fazia desafios de matemática quando eu era criança,

E à minha avó querida, que sempre reza por mim.

Agradecimentos,

Gostaria de agradecer ao professor Stefano De Leo, não só pela orientação e coleguismo durante todo este tempo de trabalho, mas principalmente por ter compreendido todos os meus dilemas e ideais pessoais e profissionais durante o transcorrer desses quatro anos. Tenho certeza de que ele contribuiu severamente para minha formação no campo da física e no campo profissional de maneira geral.

Agradeço à professora Carola, amiga de todas as horas, com quem sempre se aprende muita coisa, por mais informal que seja a conversa.

Agradeço aos meus pais e aos meus irmãos, uma família maravilhosa!!!

Agradeço, também,

Ao meu co-orientador na "Università Degli Studi Di Lecce", Prof. Pietro Rotelli, pelos diversos ensinamentos transmitidos.

Ao meu co-orientador Marcelo Guzzo que sempre se prontificou a auxiliar-me nas diversas vezes em que necessitei do seu auxílio, além de possibilitar que eu desse um novo alento à minha carreira acadêmica.

Aos funcionários da Secretaria de Pós-Graduação do IFGW sempre muito prestativos e atenciosos, especialmente ao Armando e à Maria Ignês, a pessoa mais capacitada no mundo para exercer com perfeição o trabalho que ela exerce.

Aos meus grandes amigos e amigas que me fazem rir e me divertem. Pelas discussões e reflexões, ao Lázaro, Edílson, Júlio Garcia, Fernando Sato, Jefferson e Roldão. Nem tanto pelas discussões e reflexões mas, sem dúvida, pela amizade, a todos os colegas da Pós-Graduação que são muitos para citar nomes.

A tutti miei amici i quali sono stati la mia famiglia in Italia, Matteo, Paolo e Giuseppe.

E por fim, como não poderia deixar de ser, à Nenis Maria, minha companheira e meu amor.

Obviamente, não poderia esquecer o S. C. Corinthians Paulista, pelas fortes emoções, que sempre me asseguraram a alegria nos momentos de depressão!!!

Resumo

Na primeira parte deste trabalho, nós introduzimos um esquema de aproximações para perfazer um estudo do fenômeno quântico de oscilação de sabores de maneira pedagógica e compreensiva. Com a utilização de pacotes de ondas *gaussianos*, nós demonstramos que a probabilidade de oscilação é delimitada por uma função de amortecimento dependente do tempo, a qual caracteriza o fenômeno de *slippage* (escorregamento) entre dois pacotes de ondas associados aos autoestados de massa. Nós também demonstramos que o *spreading* (alargamento) do pacote de ondas representa um efeito secundário o qual tem um papel relevante somente no limite não-relativístico. Em nossa análise, notamos a presença de uma *nova* fase de oscilação dependente do tempo e calculamos como este termo adicional modifica o caráter de oscilação na fórmula de conversão de sabores. Na segunda parte, consideramos que, no tratamento *standard* de oscilações quânticas, assume-se implicitamente que os autoestados de massa são escalares e, conseqüentemente, a forma spinorial das funções de ondas que venham a caracterizar uma partícula fermiônica, como por exemplo um neutrino, não são incluídas nos cálculos efetuados até tal ponto. Para analisar este efeito adicional, nós discutimos a fórmula de oscilação de probabilidades obtida com o uso da equação de Dirac como a equação de movimento para os autoestados de massa de neutrinos. A localização inicial do estado espinorial também faz com que apareça uma interferência entre componentes de energia positiva e negativa dos pacotes de ondas de cada autoestado de massa que leva a descrição de um fenômeno de oscilações ultra-rápidas o qual pode alterar a probabilidade de oscilação *standard*. Finalmente, nós investigamos como a inclusão dos efeitos de oscilação quiral podem modificar a fórmula de conversão de sabores. Nosso estudo leva à conclusão de que a natureza fermiônica das partículas, onde oscilações de quiralidade e a interferência entre componentes de frequência positiva e negativa de pacotes de ondas associados a autoestados de massa são implicitamente consideradas, modifica o perfil das oscilações de sabores. Contudo, para partículas ultra-relativísticas e distribuições de momentos altamente centradas, é possível demonstrar analiticamente que estas modificações introduzem fatores de correção proporcionais a $m_{1,2}^2/p_0^2$, os quais são praticamente indetectáveis por meio de análise experimental.

Abstract

In the first part of this work, we introduce an approximation scheme to perform an analytic study of quantum flavor oscillation phenomena in a pedagogical and comprehensive way. By using *gaussian* wave packets, we show that the oscillation probability is bounded by a time-dependent vanishing function which characterizes the *slippage* between the mass-eigenstate wave packets. We also demonstrate that the wave packet *spreading* represents a secondary effect which play a significant role only in the non-relativistic limit. In our analysis, we note the presence of a *new* time-dependent phase and calculate how this additional term modifies the oscillating character of the flavor conversion formula. At second, we consider that in the *standard* treatment of particle oscillations the mass eigenstates are implicitly assumed to be scalars and, consequently, the spinorial form of a fermionic wave function, like the neutrino one, is not included in the calculations. To analyze this additional effect, we discuss the oscillation probability formula obtained by using the Dirac equation as evolution equation for the neutrino mass eigenstates. The initial localization of the spinor state also implies an interference between positive and negative energy components of mass eigenstate wave packets which modifies the *standard* oscillation probability. Finally, we investigate how the inclusion of chiral oscillation effects can modify the flavor conversion probability formula. Our study leads to the conclusion that the *fermionic* nature of the particles, where chiral oscillations and the interference between positive and negative frequency components of mass-eigenstate wave packets are implicitly assumed, modifies the *standard* oscillation probability. Nevertheless, for ultra-relativistic particles and sharply peaked momentum distributions, we can analytically demonstrate that these modifications introduce correction factors proportional to $m_{1,2}^2/p_0^2$ which are practically un-detectable by any experimental analysis.

Índice

1	Introdução.	1
2	O fenômeno de oscilação quântica de sabores.	5
2.1	Aspectos históricos e tendências recentes no estudo da oscilação quântica de sabores.	6
2.2	Oscilação quântica de sabores no formalismo com ondas planas.	8
2.2.1	Vínculos cinemáticos	10
2.2.2	O tratamento com ondas planas	11
2.3	Um estudo analítico com pacotes de ondas <i>gaussianos</i>	13
2.3.1	Aproximação analítica.	15
2.3.2	A probabilidade de oscilação.	16
2.4	Análise com diferentes formas de pacotes de ondas.	23
2.5	Considerações e prospectivas no estudo de oscilação de sabores para neutrinos	29
3	Oscilação quântica de sabores para partículas soluções da equação de Dirac.	31
3.1	Ondas planas soluções da equação de Dirac.	31
3.2	Pacotes de ondas de Dirac e o efeito de <i>zitterbewegung</i>	34
3.3	Pacotes de ondas de Dirac e as modificações na fórmula de oscilação de sabores.	37
3.3.1	A fórmula de oscilação com <i>spreading</i>	43
3.3.2	A fórmula de oscilação sem <i>spreading</i> - Fenomenologia	44
3.3.3	Considerações sobre construção do pacote de ondas inicial e o efeito de <i>zitterbewegung</i>	48
3.4	Confronto com os resultados de teoria quântica de campos (TQC) no formalismo de pacotes de ondas <i>externos</i>	52
3.5	Considerações Importantes	55

4	Oscilação de quiralidade acoplada à oscilação de sabor.	59
4.1	O conceito de transformação quiral.	60
4.1.1	Helicidade e quiralidade.	62
4.1.2	Calibre acoplado à quiralidade.	62
4.2	Oscilações quirais.	64
4.2.1	O estado inicial em um processo de oscilação quiral.	66
4.3	Oscilação quiral acoplada à oscilação de sabores com pacotes de ondas de Dirac.	67
4.3.1	Modificações na fórmula de oscilação de sabores.	69
4.4	Analogias com processos de rotação de spin.	73
4.5	Considerações importantes.	74
5	Perspectivas de extensão do estudo do oscilações quânticas e eventuais aplicações em física de neutrinos.	77
6	Conclusões.	85

Capítulo 1

Introdução.

Recentemente, um grande interesse no fenômeno quântico de oscilação [1, 2, 3] tem estimulado de maneira crescente a produção de trabalhos, em particular, no contexto da física de neutrinos [4, 5], onde, sob o ponto de vista teórico, procura-se descrever a mistura quântica de sabores [6, 7, 8] e os mecanismos teóricos de oscilações quânticas de sabor [3, 8, 9]. Apesar de bastante explorado e muito discutido nos últimos anos, as dificuldades conceituais que aparecem na interpretação do fenômeno de oscilação quântica, assim como outras características e fenômenos físicos envolvendo as partículas oscilantes, representam, ainda, um intrigante, e as vezes embaraçante, desafio para os físicos .

Considerando a importância prática das oscilações no contexto experimental, acreditamos que os tratamentos teóricos vigentes deveriam se apoiar em fundamentos mais rigorosos. Surpreendentemente, a validade do tratamento *standard* com ondas planas não foi metodicamente questionada até o momento em que os mecanismos de oscilação, com base nos resultados experimentais [10, 11, 12], ganharam credibilidade nos anos 90. O tratamento *standard* com ondas planas [13, 14, 15] consiste na mais elementar aproximação utilizada no estudo do problema de oscilação de sabores. Este tratamento implica em um perfeito conhecimento da energia e do momento e, conseqüentemente, em uma incerteza “infinita” na localização espaço-temporal da partícula oscilante. Oscilações são destruídas sob tais condições [16]. De maneira a superar tais dificuldades, um modelo com pacote de ondas *intermediários* para neutrinos ultra-relativísticos foi introduzido por Kayser [16] e posteriormente aplicado por outros autores [2, 9, 17]. Contudo, uma objeção muito comum a tal formalismo corresponde ao fato de que os autoestados de massa (partículas oscilantes) não são, e não podem ser, “diretamente” observados [18]. Seria mais “convicente” escrever uma probabilidade de transição entre partículas observáveis envolvidas na produção e na detecção das partículas oscilantes em um chamado modelo de pacotes de ondas *externos* [3, 19]. Os pacotes de ondas representariam as partículas externas que estão interagindo

na produção das partículas oscilantes representadas por propagadores relativísticos que se propagam entre a fonte e o detector. A função que representa a intersecção entre os pacotes de ondas que entram e que saem no modelo de pacotes de ondas *externos* corresponde à própria função de onda do autoestado de massa referente à partícula que se propaga no tempo. Notoriamente, pode ser demonstrado que as densidades de probabilidade para partículas oscilantes ultra-relativísticas (e estáveis), seja no modelo de Kayser [16], seja no modelo de pacotes de ondas *externos*, são matematicamente equivalentes [3]. Sendo assim, não temos problemas em considerar um pacote de ondas associado à partícula que se propaga no espaço-tempo.

Nossa proposta neste trabalho é a de, primeiramente, apresentar um esquema condensado do tratamento com pacotes de ondas *intermediários* para estudar analiticamente o fenômeno de oscilação quântica de sabores nos regimes de propagação relativístico e não-relativístico. Procuramos, com isso, tornar mais claro o entendimento deste fenômeno que se apresenta sob as mais diversas prescrições na literatura [3]. Numa etapa subsequente, introduzimos o caráter fermiônico para partículas oscilantes e analisamos como este caráter adicional, que aparece ao utilizarmos a equação de Dirac como a equação de evolução temporal de um autoestado de massa, pode introduzir modificações na fórmula *standard* [15] de conversão de sabores. Nesta etapa, procuramos proceder com o estudo analítico até o momento em que o mesmo se faz conveniente. Por fim, dentro deste formalismo com pacotes de ondas de Dirac, procuramos acoplar ao fenômeno de oscilação quântica de sabores o caráter quiral de partículas fermiônicas. É sabido que neutrinos com quiralidade positiva (*right*) não se acoplam às correntes de carga fraca que “absorvem” neutrinos. Conseqüentemente, essas partículas se tornam estéreis com respeito às interações fracas. Neste contexto, o mecanismo de oscilação quiral para neutrinos proposto por De Leo e Rotelli [20] pode levar a modificações nos resultados previstos pela fórmula *standard* de oscilação de sabores. Em tal modelo, os neutrinos permanecem como autoestados de massa, porém, contêm uma componente de quiralidade (positiva) estéril. Os efeitos de oscilação quiral podem ser explicados em analogia com a descrição do fenômeno de *zitterbewegung* que emerge quando soluções da equação de Dirac são usadas para descrever a evolução espaço-temporal de um pacote de ondas. Evidenciamos nossa contribuição científica quando descrevemos o mecanismo de oscilação quiral proposto em [20] acoplado ao fenômeno de oscilação quântica de sabores e como, de fato, oscilações quirais podem efetivamente introduzir modificações à expressão *standard* para oscilação de sabores.

Enfatizamos que nosso estudo será essencialmente teórico, de modo que, não nos estendamos profundamente aos estudos fenomenológicos, os quais se enquadrarão apenas como aspectos complementares. Além disso, durante o desenrolar dos capítulos, fizemos uso de um certo número de aproximações, dentre as quais, as mais relevantes correspondem ao fato

de descrevermos os principais aspectos do fenômeno de oscilação de sabores considerando apenas dois números quânticos de sabor e, ao mesmo tempo, utilizarmos uma prescrição unidimensional para a dependência espacial das funções de onda. Isto resulta na simplificação matemática dos resultados obtidos de maneira que a interpretação de determinados fenômenos físicos fica mais evidente.

No capítulo 2, sugerimos um esquema de aproximação analítica para estudar os fenômenos de oscilação quântica de sabores de uma maneira pedagógica e compreensiva. Após uma breve descrição do *status* em que se encontra o estudo teórico dos fenômenos de oscilação, com uma discussão introdutória dos resultados obtidos com ondas planas, nós introduzimos o formalismo com pacotes de ondas de modo a estudar algumas características peculiares da oscilação de sabores. Seguimos um estudo analítico com um pacote de ondas *gaussiano* onde mostramos que as oscilações são limitadas por uma função amortecida ao longo do tempo a qual caracteriza o *slippage* (escorregamento) entre dois pacotes de ondas. Demonstramos que o *spreading* (alargamento) de um pacote de ondas é tipicamente um efeito de segunda ordem, de fato, relevante no limite não-relativístico. Ao mesmo tempo, quantificamos uma fase adicional dependente do tempo a qual modifica o caráter *standard* de oscilação da fórmula de conversão de sabores. Finalmente, consideramos uma função *quadrada* e uma função *seno* para descrever a localização das partículas e verificamos como se altera a probabilidade de oscilação de sabores sob tais circunstâncias. O conteúdo apresentado neste capítulo se desenvolve sobre os resultados que apresentamos em [21].

No capítulo 3, quando nos referimos a neutrinos como partículas oscilantes, somos levados a abandonar o tratamento *standard* para o fenômeno de oscilação no qual autoestados de massa são descritos como partículas de caráter escalar. Nos reportamos à equação de Dirac e incluímos a forma espinorial das funções de ondas que descrevem partículas fermiônicas, no caso, neutrinos. Para analisar os efeitos adicionais que aparecem com esta nova prescrição, discutimos a fórmula de oscilação de probabilidades que é obtida ao considerarmos a equação de Dirac como a equação que descreve a evolução temporal de um autoestado de massa representado por um pacote de ondas. Como resultado, quantificamos os efeitos do caráter fermiônico e da interferência entre componentes de frequências positiva e negativa que aparecem ao construirmos os pacotes de ondas de Dirac. Neste ponto, observamos que oscilações ultra-rápidas se acoplam ao processo de oscilação de sabores descrito no capítulo 2. Por fim, calculamos uma fórmula “modificada” para a conversão de sabores. O conteúdo apresentado neste capítulo corresponde a uma extensão dos resultados que apresentamos em [22].

No capítulo 4 apresentamos, como objetivo final deste trabalho, a investigação dos efeitos da inclusão do fenômeno de oscilação de quiralidade, ou da possibilidade de observar

o mesmo, ao calcularmos a fórmula de conversão de sabores segundo o tratamento com pacotes de ondas de Dirac apresentado no capítulo anterior. Basicamente, ao tratarmos a evolução temporal dos pacotes de ondas que descrevem autoestados de massa com caráter espinorial incluso, acrescentamos o vínculo físico dado pela natureza quirial das correntes de interação fraca por meio das quais neutrinos são produzidos ou detectados. Ao calcular a evolução temporal do operador quirial de Dirac, podemos descrever uma nova fórmula de oscilação de probabilidades onde o caráter quântico de sabor e o caráter quirial estão envolvidos. Entretanto, conforme já havíamos notado em [23, 24], observamos que sob determinadas condições físicas, a fórmula *standard* pode ser reproduzida.

Para completar o trabalho, separamos o capítulo 5 para apresentarmos algumas perspectivas de extensão do estudo elaborado nos capítulos anteriores assim como suas eventuais aplicações em física de neutrinos. Em particular, fazemos uma breve análise das potencialidades de desenvolver algum estudo sobre: um tratamento covariante do problema de oscilações quânticas com pacotes de ondas, o tratamento do fenômeno de oscilação quântica de sabores com pacotes de ondas envolvendo interações com a matéria onde, eventualmente, extensões do formalismo de Dirac com efeitos similares ao efeito de *zitterbewegung* [25] podem introduzir novas variáveis que possibilitam algum estudo com relevância fenomenológica.

Encerramos nosso trabalho com as conclusões apresentadas no capítulo 6.

Capítulo 2

O fenômeno de oscilação quântica de sabores.

Neste capítulo, nós fazemos uma pequena revisão dos modelos e conceitos, até o momento, consolidados no estudo do fenômeno de oscilação quântica de sabores, em particular, com aplicação em física de neutrinos. Após uma breve abordagem histórica feita em caráter apenas introdutório, descrevemos a mistura quântica de sabores¹ [13] em uma revisão do formalismo com ondas planas [14, 15] de modo a apresentar o problema de oscilação quântica e verificar as limitações impostas pelo uso do mesmo [16]. Na etapa subsequente, nós introduzimos sistematicamente os pacotes de ondas *gaussianos* [9, 26] a fim de obter uma descrição analítica pormenorizada do fenômeno de oscilação de sabores. A escolha de pacotes de ondas *gaussianos* permite-nos quantificar as correções de primeira e segunda ordem do caráter oscilante das partículas que se propagam no espaço-tempo. Na literatura, não encontramos uma motivação fenomenológica para a escolha específica desta forma analítica. De toda forma, assumimos uma distribuição de momentos altamente centrada para descrever a energia de um autoestado de massa em uma série de potências de maneira a obter as expressões analíticas aproximadas para a evolução temporal do pacote de ondas e, conseqüentemente, para a probabilidade de conversão de sabores. O termo de segunda ordem na expansão da energia é levado em conta de modo a quantificar a influência do mesmo ao computarmos os efeitos de *spreading* (alargamento) e de *slippage* (escorregamento)² dos pacotes de ondas em ambos os regimes de propagação: não-relativístico e ultra-relativístico. Identificamos, também, uma fase adicional dependente do tempo que pode alterar o caráter oscilante na fórmula de conversão de sabores. Os resultados apre-

¹No apêndice A.1 apresentamos o estudo de simetrias que fundamentam a descrição de mistura quântica de sabores e a classificação de neutrinos segundo o modelo padrão.

²A partir deste ponto utilizaremos apenas a nomenclatura “anglicizada” para estes dois termos

sentados neste capítulo contribuem para a complementação do entendimento do fenômeno de oscilação quântica outrora apresentado em [27] e [28]. Por fim, completamos este breve estudo analítico com a introdução de uma função *quadrada* e uma função *seno suavemente amortecida* para descrever a localização da partícula e verificar como a forma de um pacote de ondas pode, em tais casos, alterar a probabilidade de oscilação de sabores.

2.1 Aspectos históricos e tendências recentes no estudo da oscilação quântica de sabores.

A mistura quântica de sabores foi sugerida pela primeira vez em 1955 quando Gell-Mann e Pais [29], ao estudarem o chamado $\tau - \theta$ puzzle, observaram que autoestados de um Hamiltoniano de interação não coincidem necessariamente com os autoestados de massa com tempo de decaimento bem definido, e propuseram a existência de dois káons neutros para explicar os diferentes tempos de decaimento observados experimentalmente. Um pouco antes, em 1953, em um esquema para classificar as novas partículas que vinham sendo descobertas, Gell-Mann representava o káon neutro K^0 e sua antipartícula $\bar{K}^0$ como duas partículas distintas. O decaimento de ambas as partículas em um par píon-antipíon $\pi^+\pi^-$ era já observado. Desde então, como poderíamos saber qual partícula houvera originado tal decaimento: K^0 ou $\bar{K}^0$? Tal problema foi resolvido quando perceberam que aquilo que observavam correspondia à mistura dos estados K^0 e $\bar{K}^0$ que se combinavam para formar ou um estado com paridade par (θ) que decaía em dois píons, ou um estado de paridade ímpar (τ) que decaía em três píons. Desta maneira, historicamente, pela primeira vez a interferência entre dois estados com massas ligeiramente diferentes (τ e θ , posteriormente chamados de K_{Long} e K_{Short} [30]) aparecia no contexto da mecânica quântica.

Em 1955, Pais e Piccioni [31] contribuíram significativamente no estudo de oscilações quânticas quando sugeriram que a propagação de autoestados de sabor, como uma superposição coerente de autoestados de massa, leva à conversão parcial de um estado com um número quântico de sabor inicial em um estado com outro número quântico de sabor. Verificou-se que probabilidade de transição de sabores oscila no espaço com uma fase de oscilação que depende da diferença de massas. Tal construção teórica foi constatada em uma série de experimentos com sistemas kaônicos neste mesmo período [32, 33, 34]. Oscilações similares também foram observadas para os mésons B em 1987 [35].

Já em 1957, Pontecorvo percebeu que a existência de massas para neutrinos poderia representar a possibilidade de oscilações quânticas similares para estas partículas [36, 37]. A mistura de sabores para neutrinos, em linhas gerais, foi sugerida pouco tempo depois [38], e o caso de oscilação para dois sabores, bem como sua aplicação no estudo do problema de neutrinos solares, foi examinado até o final dos anos 60 por Pontecorvo e Gribov [39, 40].

Oscilações de sabores de neutrinos, porém, são muito mais difíceis de serem observadas do que as oscilações de sabores dos mésons, justamente porque neutrinos têm massas muito pequenas e se acoplam somente via interações fracas. É, portanto, de longa data que as propriedades dos neutrinos, em particular, o problema de oscilação quântica, vêm despertando bastante interesse.

As propriedades dos neutrinos e, em particular, a questão das massas dos mesmos, emergem como um tópico de grande interesse na física desde a sua proposição inicial [14]. No laboratório, as massas dos neutrinos têm sido avaliadas em dois tipos de experimentos [41]: (i) medidas cinemáticas diretas de massa, das quais a mais sensível é o estudo do decaimento beta do trítio e (ii) experimentos de decaimento beta duplo sem a emissão de neutrinos (*neutrinoless double beta decay*). Os experimentos adquiriram precisão cada vez mais alta onde que a massa do neutrino eletrônico chegou a ter o limite superior indicado como 10^{-9} vezes a massa do próton, ao invés de 10^{-2} originalmente obtido por Pauli. De qualquer maneira, a questão fundamental sobre as massas dos neutrinos atravessou os anos 90. De fato, nos últimos três anos, experimentos de estudo do fluxo natural de neutrinos têm providenciado as mais fortes evidências de neutrinos massivos e da superposição de estados quânticos do mesmo. Destacamos os resultados do experimento Super-Kamiokande com neutrinos atmosféricos [10], no qual uma significativa assimetria *up-down* em eventos com múons de altas energias é observada. Temos também os resultados do experimento SNO com neutrinos solares [11, 42, 43, 44, 45] no qual foram obtidas evidências diretas da transição de neutrinos eletrônicos (solares) em neutrinos de outros sabores. Temos ainda os resultados do experimento KamLAND [12] que confirmam o desaparecimento de neutrinos eletrônicos principalmente devido ao mecanismo de oscilação de sabores de modo que se descarte, em princípio, outras formas de conversão de sabores recentemente propostas [46, 47, 48]. Além do grande interesse em descrever o mecanismo correto para a conversão de sabores, a dificuldade conceitual no entendimento de alguns aspectos físicos que se “escondem” nas fórmulas de oscilação ainda representam um extenso campo para o desenvolvimento de estudos teóricos.

Apesar de ser fisicamente intuitivo e simples, rigorosamente, o tratamento *standard* com ondas planas [14, 15] não é suficiente para o completo entendimento da física envolvida em oscilações quânticas. O tratamento com ondas planas implica em um perfeito conhecimento da energia e do momento e, conseqüentemente, uma incerteza “infinita” na localização espaço-temporal da partícula oscilante. Oscilações são destruídas sob tais condições [16]. De maneira a superar tais dificuldades, um modelo com pacote de ondas para neutrinos ultra-relativísticos foi introduzido por Kayser [16]. Contudo, uma objeção muito comum a tal formalismo corresponde ao fato de que os autoestados de massa (partículas oscilantes) não são, e não podem ser, “diretamente” observados [18]. No modelo de pacotes de ondas

externos [3, 19] pode se obter uma probabilidade de transição entre partículas observáveis envolvidas na produção e na detecção das partículas oscilantes de modo que estas últimas fossem representadas por propagadores relativísticos que se propagam entre a fonte e o detector. Os pacotes de ondas representariam as partículas externas que estão interagindo na produção das partículas oscilantes (propagadores). A função que representa a intersecção entre os pacotes de ondas que entram e que saem no modelo de pacotes de ondas *externos* corresponde à própria função de onda do autoestado de massa referente à partícula que se propaga no tempo. Notoriamente, pode ser demonstrado que as densidades de probabilidade para partículas oscilantes ultra-relativísticas (e estáveis), seja no modelo de Kayser [16], seja no modelo de pacotes de ondas *externos*, são matematicamente equivalentes [3]. Sendo assim, não temos problemas em considerar um pacote de ondas associado à partícula que se propaga no espaço-tempo. Entretanto, uma observação pertinente deve ser feita: a função de *overlap* não leva em consideração apenas as propriedades da fonte, mas também as do detector. Na interpretação usual de pacotes de ondas, isto pode levar à violação de causalidade [3]. Este ponto foi abordado recentemente por Giunti [26], o qual propôs uma solução onde o pacote de ondas que caracteriza a partícula oscilante é explicitamente calculado com o formalismo de teoria quântica de campos, porém, descrito em termos de pacotes de ondas *externos*. Apesar de não poder ser aplicado de uma maneira totalmente arbitrária, o modelo com pacotes de ondas cuja formulação preliminar foi apresentada por Kayser [16], como veremos ao longo deste capítulo, simplifica consideravelmente a discussão de alguns aspectos físicos que acompanham o fenômeno de oscilação [21, 27, 49, 50].

2.2 Oscilação quântica de sabores no formalismo com ondas planas.

A possibilidade de dois ou mais estados quânticos se combinarem para compor um novo estado vem dos princípios fundamentais da mecânica quântica. A medida de um observável faz com que um estado quântico inicial seja levado a um autoestado quântico do operador associado à grandeza observável. O processo de medida física determina uma base de estados físicos constituída por todos os autoestados do referido operador (ou de um conjunto de operadores se for o caso). Bases diferentes associadas a operadores diferentes podem ser correlacionadas por transformações lineares de modo que um estado físico qualquer possa ser descrito como uma combinação (*mixing*) de autoestados de uma dessas bases. Assim é construído o princípio quântico de superposição.

As propriedades de um estado quântico são descritas em termos de uma função de onda que, dentre outras informações físicas, carrega o significado de uma densidade de probabilidades, fator este, que leva a um conflito com a idéia clássica de “partícula” quando usada

para descrever um estado físico. Essa dificuldade conceitual de interpretação é, por exemplo, freqüentemente apresentada na discussão do experimento de espalhamento quântico em fenda dupla. O mesmo conceito de combinação de estados quânticos aparece quando autoestados de um Hamiltoniano de interação são descritos como uma superposição quântica de autoestados de massa de um mesmo sistema físico. São criadas, assim, condições para a oscilação do número quântico associado ao Hamiltoniano de interação ao longo de uma propagação espaço-temporal. Para sermos mais precisos, no contexto específico do problema de oscilação quântica de sabores, o Hamiltoniano de interação determina uma base de autoestados de sabor ao passo que autoestados de massa compõem a base determinada por um Hamiltoniano (livre) de propagação. Em particular, as oscilações de sabor surgem quando uma fonte cria uma partícula que corresponde à combinação linear de autoestados de massa. Os principais aspectos do fenômeno de oscilação quântica de sabores podem ser compreendidos através do estudo de um problema com apenas dois autoestados de sabor descritos por

$$\begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

onde ν_α e ν_β representam autoestados de sabor ortogonais entre si, ν_1 e ν_2 representam autoestados de massa também ortogonais entre si, θ é o ângulo de mistura e U é a matriz que diagonaliza o Hamiltoniano de propagação se este é inicialmente descrito na base de autoestados de sabor. O cálculo das amplitudes de transição de um autoestado de sabor para outro requer o conhecimento da evolução temporal dos estados quânticos envolvidos e dos produtos escalares entre os autoestados. Ao assumirmos que temos simplificações matemáticas substanciais quando a dependência espacial das funções de onda é unidimensional (eixo z) podemos representar genericamente a evolução espaço-temporal de um autoestado de massa como

$$\nu_i(z, t) = \phi_i(z, t) \nu_i \quad (2.2)$$

e assim poderíamos descrever a evolução espaço-temporal dos autoestados de sabor como

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Psi_\alpha(z, t; \theta) \\ \Psi_\beta(z, t; \theta) \end{pmatrix} &= U \begin{pmatrix} \phi_1(z, t) & 0 \\ 0 & \phi_2(z, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \\ &= U \begin{pmatrix} \phi_1(z, t) & 0 \\ 0 & \phi_2(z, t) \end{pmatrix} U^\dagger \begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

Em particular, para uma partícula produzida inicialmente em um autoestado de sabor α em $t = 0$, a evolução espaço-temporal deste estado físico seria descrita por

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(z, t; \theta) &= \phi_1(z, t) \cos(\theta) \nu_1 + \phi_2(z, t) \sin(\theta) \nu_2 \\ &= [\phi_1(z, t) \cos^2(\theta) + \phi_2(z, t) \sin^2(\theta)] \nu_\alpha + [\phi_1(z, t) - \phi_2(z, t)] \cos(\theta) \sin(\theta) \nu_\beta \\ &= \phi_\alpha(z, t; \theta) \nu_\alpha + \phi_\beta(z, t; \theta) \nu_\beta \end{aligned} \quad (2.4)$$

Desta maneira, fica evidente que uma partícula criada em um autoestado de sabor α , ao longo da evolução espaço-temporal, terá probabilidade não-nula de ser detectada como um

autoestado de sabor β uma vez que a amplitude de transição de sabor $\alpha \rightarrow \beta$ seria dada por

$$A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; z, t, \theta) \equiv \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle \equiv \nu_\beta \cdot \Phi_\alpha(z, t; \theta) = \phi_\beta(z, t; \theta). \quad (2.5)$$

Como veremos mais a frente, com estas propriedades, a obtenção da probabilidade de conversão do número quântico de sabor α em β é imediata.

2.2.1 Vínculos cinemáticos

Antes de prosseguir com o estudo do fenômeno de oscilação quântica de sabores no contexto já elaborado, é importante verificar sob quais condições cinemáticas podemos, eventualmente, encontrar algumas restrições quanto à aplicação do formalismo com ondas planas.

Durante o processo de criação de um autoestado de sabor, alguns vínculos cinemáticos podem ser importantes na derivação da fórmula de oscilação de sabores [4]. Particularmente, qualquer processo de criação de uma partícula (seja ela um estado oscilante ou não) pode ser considerado, no âmbito cinemático, como um processo de decaimento “efetivo” de dois corpos [27] ilustrado por

$$M \rightarrow m_0 + m_{1,2}$$

onde os subíndices de $m_{1,2}$ se referem aos autoestados de massa. Se o decaimento ocorre em um número maior do que duas partículas, a quantidade m_0 representa a massa efetiva de todas as demais partículas que acompanham os autoestados de massa e, obviamente, tem valor igual à soma dessas massas. Para outros processos de produção que não correspondem a um decaimento, a quantidade M corresponde à energia do centro de massa e não à massa de uma ressonância. No sistema de repouso, a conservação de momento e de energia impõe que

$$M = (p_i^2 + m_0^2)^{\frac{1}{2}} + (p_i^2 + m_i^2)^{\frac{1}{2}} = E_i^0 + E_i, \quad (2.6)$$

onde $i = 1, 2$. Após algumas manipulações algébricas simples, encontramos [51]

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{\Delta m^2}{2M}, \quad \Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\bar{E}_{12} - M}{\bar{p}_{12}} \Delta E, \quad (2.7)$$

e

$$\Delta v = v_1 - v_2 = \frac{\bar{E}_{12}^2 - \bar{p}_{12}^2 - M \bar{E}_{12}}{\bar{E}_{12} \bar{p}_{12} \left[1 - \left(\frac{\Delta E}{2 \bar{E}_{12}} \right)^2 \right]} \Delta E, \quad (2.8)$$

com

$$\bar{E}_{12} = \frac{E_1 + E_2}{2} \quad \text{e} \quad \bar{p}_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2}. \quad (2.9)$$

Se observarmos que a diferença quadrática de massas não é nula, $\Delta m^2 \neq 0$, teríamos como consequência $\bar{E}_{12} - M \neq 0$, de modo que, no sistema de repouso da partícula de massa M (ou, em linhas gerais, no sistema de referência do centro de massa), sob nenhuma hipótese,

as diferenças de momentos, energias e velocidades seriam nulas, ou seja, $\Delta p \neq 0$, $\Delta E \neq 0$ e $\Delta v \neq 0$. Concluimos que não existe nenhum sistema de referência onde $\Delta v = 0$ uma vez que, neste caso, a diferença de velocidades deveria ser nula em qualquer sistema de referência (invariância de Lorentz). Também não existe nenhum sistema de referência onde $\Delta p = 0$. De fato, ao aplicarmos uma transformação de Lorentz com velocidade β a partir do sistema de repouso da partícula M , encontraremos

$$\begin{aligned}\Delta p' &= \gamma(\Delta p - \beta \Delta E), \\ \Delta E' &= \gamma(\Delta E - \beta \Delta p),\end{aligned}\tag{2.10}$$

de modo que, para que a condição $\Delta p' = 0$ seja satisfeita, é necessária a imposição de uma condição fisicamente inconcebível sobre β ,

$$\beta = \left| \frac{\Delta p}{\Delta E} \right| = \frac{(p_1 + m_0)^{\frac{1}{2}} + (p_2 + m_0)^{\frac{1}{2}}}{2\bar{p}_{12}} > 1,\tag{2.11}$$

onde o subíndice M se refere à massa total M . Se desejássemos estender o resultado acima para um sistema que não fosse o sistema de repouso do centro de massas, poderíamos efetuar um *boost* de Lorentz na direção que faz um ângulo α com o momento da partícula oscilante no novo sistema de referência. Neste caso, a conservação de momento e de energia implicaria em

$$\Delta E = \frac{\Delta m^2}{2E_M}\tag{2.12}$$

e

$$\Delta p = \frac{\Delta m^2}{2} \left[\frac{\bar{E}_{12}^o}{\bar{E}_{12} P_M \cos(\alpha) - E_M \bar{p}_{12}} \right]\tag{2.13}$$

Tais vínculos podem ser úteis para identificar quão realísticas são as aproximações que se seguem no estudo do problema de oscilação de sabores. Ou seja, já neste ponto, podemos observar que não é fisicamente correto assumir momentos diferentes e energias iguais para diferentes autoestados de massa, o que freqüentemente ocorre no estudo com ondas planas.

2.2.2 O tratamento com ondas planas

Apesar de apresentar algumas inconsistências (apontadas no final desta seção), o tratamento com ondas planas se apresenta como uma ferramenta teórica conveniente para o estudo fenomenológico do problema de oscilação quântica de sabor. A evolução espaço-temporal em uma dimensão para uma partícula livre é convenientemente descrita por

$$i\partial_t \phi_i(z, t) = H_i \phi_i(z, t)\tag{2.14}$$

cujas soluções $\phi_i(z, t)$ são dadas pelas ondas planas

$$\phi_i(z, t) = N \exp[-i\Phi_i(z, t)]\tag{2.15}$$

onde $\Phi_i(z, t) = E(p_z, m_i) t - p_z z$ é uma fase invariante de Lorentz. Uma vez que o Hamiltoniano H_i é um operador Hermitiano, o produto entre as funções de onda $\phi_i^\dagger(z, t) \phi_i(z, t)$

pode ser definido como uma densidade de probabilidades [54] a qual é uma quantidade positiva definida independente do tempo.

Em um sistema físico no qual o estado inicial de uma partícula seja representado por um autoestado de sabor ν_α , segundo os cálculos com ondas planas, a probabilidade de encontrarmos um autoestado de sabor ν_β é convenientemente expressa [15] em termos do ângulo de mistura θ e da diferença de fases $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ por

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= |\mathcal{A}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; z, t, \theta)|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) |\phi_1(z, t) - \phi_2(z, t)|^2 \\ &= \sin^2(2\theta) \frac{1 - \cos \Delta\Phi}{2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

De fato, conforme observamos na fórmula (2.16), o formalismo com ondas planas [15] ignora qualquer efeito que eventualmente possa aparecer devido à forma analítica das funções de onda envolvidas. Além do mais, por completeza, na expressão para oscilação de probabilidades, os fatores relacionados à instabilidade de uma partícula massiva (no caso de um méson, isto é, uma partícula que possa decair em outras tantas) precisam ser considerados de modo que se descreva de forma completa o processo de oscilação [2]³. A fase $\Delta\Phi$ invariante de Lorentz é usualmente dada em termos de uma distância L (percorrida em um tempo T), de uma diferença de massas Δm^2 , e de um valor médio para o momento $\bar{p}$. Frequentemente assumimos $T \sim L$ e $p_{1,2} \sim E_{1,2}$, isto é,

$$\Delta\Phi = T \Delta E - L \Delta p \approx L(\Delta E - \Delta p). \quad (2.17)$$

No limite não-relativístico teríamos

$$\Delta\Phi \approx \Delta m L, \quad (2.18)$$

e, em uma aproximação ultra-relativística, teríamos

$$\Delta\Phi \approx \frac{\Delta m^2}{2\bar{p}} L, \quad (2.19)$$

que levaria à já bem conhecida expressão [13, 14, 15]

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4\bar{p}} L\right) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\pi L}{L_{osc}}\right), \quad (2.20)$$

onde L_{osc} é a distância na qual $\Delta\Phi$ é igual a 2π .

Neste ponto, poderia ser mais interessante, e até mesmo mais condizente com as condições físicas de observação, procurar um tratamento mais refinado do que a aproximação com ondas planas. De fato, uma condição necessária para observar o fenômeno de oscilação impõe que a fonte e o detector de partículas oscilantes sejam localizados em uma região delimitada por δz muito menor do que o comprimento de oscilação L_{osc} , $L_{osc} \gg \delta z$.

³Não nos estenderemos sobre o estudo dos fenômenos de oscilação para partículas instáveis. Para interesse mais geral do leitor, sugerimos a revisão feita por Beuthe [3].

Isto seria possível somente se o momento (p) e a energia (E) da partícula oscilante apresentassem uma incerteza em seus valores tal que o erro (ou incerteza) na medida de m^2 fosse dado por δm^2 ,

$$\delta m^2 = [(2E \delta E)^2 + (2p \delta p)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.21)$$

com valor maior do que a diferença de massas $|m_1^2 - m_2^2| = \Delta m^2$, $\delta m^2 \geq \Delta m^2$, caso contrário, não seria possível quantificar as oscilações observadas [2]. De fato, devemos ter $\Delta m^2 \geq \delta m^2 \geq 2p \delta p$. Mas a relação de incerteza de Heisenberg, $\delta z \delta p \geq 1$, quando substituída na fase de oscilação da Eq. (2.19), fornece

$$\delta z \geq \frac{2p}{|\delta m^2|} \geq \frac{L_{osc}}{2\pi}, \quad (2.22)$$

a qual é contrária à condição sugerida como necessária para que se observe oscilação, $L_{osc} \gg \delta z$. Este consiste no principal argumento em favor de um tratamento com pacote de ondas [16].

Com um pouco mais de rigor, poderíamos ainda enfatizar outros aspectos controversos que se apresentam na obtenção da expressão correta para o comprimento de oscilação [28, 50, 51, 52, 53]. No formalismo com ondas planas, assume-se implicitamente que a criação de um autoestado de sabor é um evento único, instantâneo, onde uma única fase caracteriza todos os pontos de uma onda no momento da criação. Quando tratamos de pacotes de ondas, em um certo tempo T , para uma certa posição fixa na região onde os pacotes de ondas se interseccionam, é possível haver a interferência entre pontos do pacote de ondas onde que a separação espacial no momento da criação seria dado por $\Delta v T$. É possível observar que esta fase adicional pode ser automaticamente englobada no formalismo com pacotes de ondas [9, 27], o que não ocorre no tratamento com ondas planas.

2.3 Um estudo analítico com pacotes de ondas *gaussianos*.

A evolução temporal de um pacote de ondas que representa um autoestado de sabor pode ser descrita de maneira geral pela expressão (2.4). A probabilidade de encontrarmos um estado de sabor ν_β em um instante de tempo t seria convenientemente escrita como a integral do módulo ao quadrado do coeficiente de ν_β na Eq. (2.4)

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz |\phi_\beta(z, t; \theta)|^2 = \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \{1 - \text{SFO}(t)\}, \quad (2.23)$$

onde $\text{SFO}(t)$ (*scalar flavor oscillation*) representa o termo de interferência entre os autoestados de massa dado por

$$\text{SFO}(t) = \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dz \phi_1^\dagger(z, t) \phi_2(z, t) \right]. \quad (2.24)$$

Se considerarmos os autoestados de massa m_s ($s = 1, 2$) representados por pacotes de ondas dados no instante $t = 0$ por

$$\phi_s(z, 0) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{z^2}{a^2}\right] \exp[ip_s z], \quad (2.25)$$

as funções de onda que descrevem a evolução temporal dos mesmos serão dadas por

$$\phi_s(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi(p_z - p_s) \exp[-i E(p_z, m_s) t + i p_z z], \quad (2.26)$$

onde

$$E(p_z, m_s) = (p_z^2 + m_s^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \varphi(p_z - p_s) = (2\pi a^2)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{(p_z - p_s)^2 a^2}{4}\right]. \quad (2.27)$$

De maneira a obter a probabilidade de oscilações, nós poderíamos calcular o termo de interferência $SFO(t)$ resolvendo a integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi(p_z - p_1) \varphi(p_z - p_2) \exp[-i \Delta E(p_z) t] = \\ \left[-\frac{(a \Delta p)^2}{8}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi^2(p_z - p_0) \exp[-i \Delta E(p_z) t], \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde levamos a integração em z em uma integração em p_z e introduzimos as quantidades $\Delta p = p_1 - p_2$, $p_0 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ e $\Delta E(p_z) = E(p_z, m_1) - E(p_z, m_2)$. Obtemos um termo de oscilação limitado por uma função exponencial de $(a \Delta p)^2$ em qualquer instante de tempo. Sob esta condição, nunca observaríamos um autoestado de sabor *puro*. Além do mais, as oscilações são consideravelmente suprimidas se $a \Delta p > 1$. A condição necessária para que as oscilações sejam mensuráveis corresponde a $a \Delta p \ll 1$. Tal vínculo pode também ser expresso em termos de $\delta p \gg \Delta p$ onde δp é a incerteza do momento da partícula. A intersecção entre as distribuições de momentos é de fato relevante somente quando $\delta p \gg \Delta p$. Conseqüentemente, sem perda de generalidade, podemos assumir

$$SFO(t) = Re \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi^2(p_z - p_0) \exp[-i \Delta E(p_z) t] \right]. \quad (2.29)$$

Na literatura, esta equação é freqüentemente encontrada quando se assume dois autoestados de massa representados por pacotes de ondas descritos pela mesma distribuição *gaussiana* de momentos centrada em torno de um valor médio p_0 . Neste contexto, algumas considerações sobre a criação não-instantânea [27] são apresentadas no apêndice A.2, porém, a hipótese simplificadora apresentada acima também garante a criação *instantânea* de um autoestado *puro* de sabor ν_α em $t = 0$, logo, optamos por utilizar tal simplificação nas seções subseqüentes.

2.3.1 Aproximação analítica.

De maneira a obter $\phi_s(z, t)$ resolvendo analiticamente a integral da Eq. (2.26), nós primeiramente reescrevemos a energia $E(p_z, m_s)$ como

$$E(p_z, m_s) = E_s \left[1 + \frac{p_z^2 - p_0^2}{E_s^2} \right]^{\frac{1}{2}} = E_s [1 + \sigma_s (\sigma_s + 2v_s)]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.30)$$

onde $E_s = (m_s^2 + p_0^2)^{\frac{1}{2}}$, $v_s = \frac{p_0}{E_s}$ e $\sigma_s = \frac{p_z - p_0}{E_s}$ passa a ser uma nova variável de integração. Se assumirmos uma distribuição de momentos altamente centrada, isto é, $(a E_s)^{-1} \sim \sigma_s \ll 1$, a energia $E(p_z, m_s)$ pode ser expandida em uma série de potências de σ_s . Entretanto, a integral na Eq. (2.26) pode ser *analiticamente* calculada somente se considerarmos termos até a ordem σ_s^2 na expansão em série. Neste caso, a energia $E(p_z, m_s)$ se torna

$$\begin{aligned} E(p_z, m_s) &= E_s \left[1 + \sigma_s v_s + \frac{\sigma_s^2}{2} (1 - v_s^2) \right] + \mathcal{O}(\sigma_s^3) \\ &\approx E_s + p_0 \sigma_s + \frac{m_s^2}{2E_s} \sigma_s^2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ao substituírmos (2.31) na Eq. (2.26) e reescrevermos a integração em p_z em uma integração em σ_s , nós obtemos a forma explícita da evolução temporal do pacote de ondas

$$\begin{aligned} \phi_s(z, t) &\approx (2\pi a^2)^{\frac{1}{2}} \exp[-i(E_s t - p_0 z)] \times \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_s}{2\pi} E_s \exp\left[-\frac{a^2 E_s^2 \sigma_s^2}{4}\right] \exp\left[-i(p_0 t - E_s z)\sigma_s - i\frac{m_s^2 t}{2E_s} \sigma_s^2\right] \\ &= \left(\frac{2}{\pi a_s^2(t)}\right)^{\frac{1}{2}} \exp[-i(E_s t - p_0 z)] \exp\left[-\frac{(z - v_s t)^2}{a_s^2(t)} - i\theta_s(t, z)\right], \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde

$$a_s(t) = a \left(1 + \frac{4m_s^4}{a^4 E_s^6} t^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \theta_s(t, z) = \left\{ \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{2m_s^2 t}{a^2 E_s^3} \right] - \frac{2m_s^2 t}{a^2 E_s^3} \frac{(z - v_s t)^2}{a_s^2(t)} \right\}. \quad (2.33)$$

As quantidades dependentes do tempo $a_s(t)$ e $\theta_s(t, z)$ contêm todas as informações fisicamente relevantes que chegam com o termo de segunda ordem na expansão em série de potências (2.31). O *spreading* do pacote de ondas pode ser imediatamente descrito quando interpretamos $a_s(t)$ como uma largura média dependente do tempo, ou seja, a localização espacial da partícula é efetivamente dada por $a_s(t)$ que aumenta durante a evolução temporal. No regime de propagação não-relativístico (NR), $a_s(t)$ é dada por [54]

$$a_s^{NR}(t) = a \left(1 + \frac{4}{a^4 m_s^2} t^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.34)$$

Para tempos $t \gg a^2 m_s$, a largura efetiva do pacote de ondas $a_s^{NR}(t)$ se torna muito maior do que a largura inicial a . De maneira oposta, o *spreading* do pacote de ondas no regime de propagação ultra-relativístico (UR) é expresso em termos de

$$a_s^{UR}(t) = a \left(1 + \frac{4m_s^4}{a^4 p_0^6} t^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx a \quad (2.35)$$

O *spreading* no regime UR é irrelevante se considerarmos a mesma escala de tempo T para ambos os casos NR e UR, isto é, $a_s^{UR}(T) \ll a_s^{NR}(T)$. Para entender melhor tal colocação, na figura 2.1 nós ilustramos a dependência temporal de $a_s(t)$ onde assumimos uma partícula com um valor definido de massa m_s . Ao calcular o quadrado do módulo da função de onda de um autoestado de massa,

$$|\phi_s(z, t)|^2 \approx \left(\frac{2}{\pi a_s^2(t)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{2(z - v_s t)^2}{a_s^2(t)} \right], \quad (2.36)$$

podemos ilustrar o *spreading* do pacote de ondas em ambos os regimes NR e UR na figura 2.2, que está em correspondência com a figura 2.1. Assim, confirmamos que o *spreading* do pacote de ondas é de fato irrelevante para partículas no regime UR.

Retornando a Eq. (2.32), podemos interpretar um outro efeito de segunda ordem através da observação do comportamento temporal da fase $\theta_s(t, z)$. Devido à localização do pacote de ondas, nós assumimos que a amplitude da função de onda é relevante somente no intervalo $|v_s t - z| \leq a_s(t)$. Cada ponto espacial z evolui no tempo de uma maneira diferente. Se, por exemplo, observamos a propagação de um ponto espacial $z = v_s t$, a função crescente $\theta_s(t, v_s t)$ assume valores limitados pelo intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$. Por outro lado, para qualquer ponto espacial dado pela expressão $z = v_s t + K a_s(t)$, $0 < |K| \leq 1$, a fase $\theta_s(t, z)$ não tem um limite inferior. Nós mostraremos na seção seguinte que a presença de uma fase dependente do tempo pode modificar o caráter oscilatório da fórmula de conversão de sabores. De toda forma, a fase $\theta_s(t, z)$ acaba por não influenciar na propagação de um autoestado de massa *livre* como observamos de imediato através da Eq. (2.36).

2.3.2 A probabilidade de oscilação.

Após ter quantificado analiticamente as correções de segunda ordem dos pacotes de ondas que representam autoestados de massa que evoluem no tempo, obteremos, agora, o termo de interferência SFO(t) de modo a escrever de forma explícita uma expressão para a probabilidade de conversão de sabores. Ao resolver a integral (2.29) com a aproximação (2.31) e executar algumas manipulações matemáticas, teremos

$$\text{SFO}(t) = \text{AM}(t) \times \text{Osc}(t), \quad (2.37)$$

onde fatorizamos o comportamento de amortecimento do termo de interferência através de

$$\text{AM}(t) = (1 + \text{SP}^2(t))^{-\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{(\Delta v t)^2}{2a^2 (1 + \text{SP}^2(t))} \right], \quad (2.38)$$

ao mesmo tempo em que isolamos o caráter de oscilação temporal da fórmula de conversão de sabores dado por

$$\text{Osc}(t) = \text{Re} \{ \exp [-i\Delta E t - i\Theta(t)] \} = \cos [\Delta E t + \Theta(t)]. \quad (2.39)$$

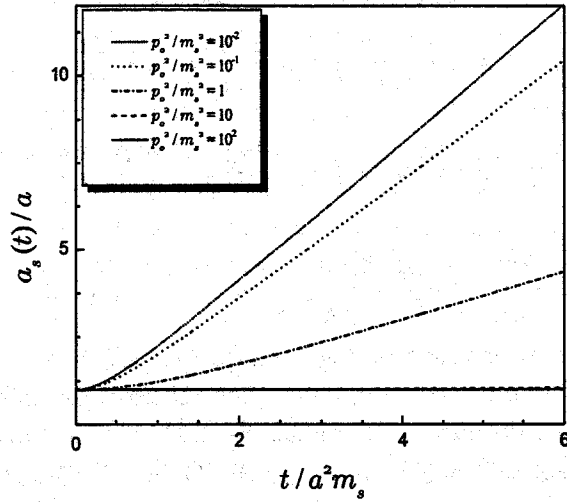


Figura 2.1: A dependência temporal da largura do pacote de ondas para diferentes valores da razão p_0/m_s . Ao considerar uma massa fixa m_s , podemos comparar os regimes de propagação não-relativístico ($p_0 \ll m_s$) e ultra-relativístico ($p_0 \gg m_s$). Observamos que o *spreading* é de fato relevante na primeira situação. No limite ultra-relativístico ($m_s = 0$), a largura do pacote de ondas não se modifica durante a propagação espaço-temporal.

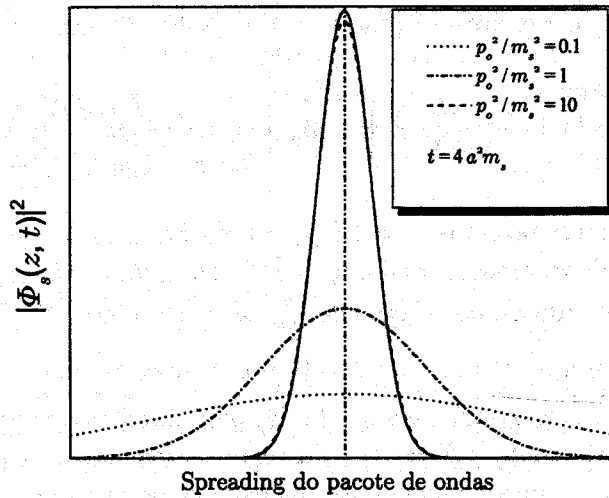


Figura 2.2: *Spreading* do pacote de ondas no caso de regimes não-relativísticos e ultra-relativísticos descrito no tempo $t = 4a^2 m_s$, em correspondência com figura 2.1. A linha sólida representa a forma do pacote de ondas no instante $t = 0$. No caso ultra-relativístico, expresso em termos de $\frac{p_0^2}{m_s^2} = 10$, o *spreading* é de fato irrelevante.

As quantidades dependentes do tempo $SP(t)$ e $\Theta(t)$ são dadas respectivamente por

$$SP(t) = \frac{t}{a^2} \Delta \left(\frac{m^2}{E^3} \right) = \rho \frac{\Delta v t}{a^2 p_0} = -\rho \frac{\Delta E t}{a^2 \bar{E}^2} \quad (2.40)$$

e

$$\Theta(t) = \left\{ \frac{1}{2} \arctan [SP(t)] - \frac{a^2 p_0^2}{2\rho^2} \frac{SP^3(t)}{[1 + SP^2(t)]} \right\}, \quad (2.41)$$

onde

$$\rho = 1 - \left[3 + \left(\frac{\Delta E}{\bar{E}} \right)^2 \right] \frac{p_0^2}{\bar{E}^2} \quad \text{e} \quad \bar{E} = \sqrt{E_1 E_2}. \quad (2.42)$$

Na expressão geral para a probabilidade de oscilação de sabores observamos que $SP(t)$ introduz as correções de segunda ordem e, conseqüentemente, parametriza os efeitos adicionais devidos ao *spreading* do pacote de ondas. Se $\Delta E \ll \bar{E}$, o parâmetro ρ é limitado pelo intervalo $[1, -2]$ e assume o valor zero quando $\frac{p_0^2}{\bar{E}^2} \approx \frac{1}{3}$. Desta forma, ao considerarmos valores continuamente crescentes do momento p_0 , de regimes NR até regimes UR, e ao mesmo tempo fixarmos o valor de $\frac{\Delta E}{a^2 \bar{E}^2}$, as derivadas temporais de $SP(t)$ e de $\Theta(t)$ terão seus sinais invertidos quando $\frac{p_0^2}{\bar{E}^2}$ atinge o valor de $\frac{1}{3}$. Ao mesmo tempo, o *slippage* entre os pacotes de ondas é quantificado pelo comportamento amortecedor de $AM(t)$. Para comparar $AM(t)$ com a função correspondente sem as correções de segunda ordem (ou seja, sem os efeitos de *spreading*),

$$AM_{(SS)}(t) = \exp \left[-\frac{(\Delta v t)^2}{2a^2} \right], \quad (2.43)$$

substituímos $SP(t)$ dado pela expressão (2.40) na Eq. (2.38) e obtemos a razão

$$\frac{AM(t)}{AM_{(SS)}(t)} = \left[1 + \rho^2 \left(\frac{\Delta E t}{a^2 \bar{E}^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{4}} \exp \left[\frac{\rho^2 p_0^2 (\Delta E t)^4}{2 a^6 \bar{E}^8 \left[1 + \rho^2 \left(\frac{\Delta E t}{a^2 \bar{E}^2} \right)^2 \right]} \right]. \quad (2.44)$$

O limite NR é obtido quando fazemos $\rho^2 = 1$ e $p_0 = 0$ na Eq. (2.44). Da mesma maneira, o limite UR é obtido quando fazemos $\rho^2 = 4$ e $p_0 = \bar{E}^4$. De fato, a influência mínima devido às correções de segunda ordem ocorre quando $\frac{p_0^2}{\bar{E}^2} \approx \frac{1}{3}$ ($\rho \approx 0$). De toda maneira, sob condições de *slippage* mínimo, isto é, para $t \approx 0$, nós sempre teremos $\frac{AM(t)}{AM_{(SS)}(t)} \approx 1$. Na figura 2.3 nós graficamos a razão dada pela Eq. (2.44) para diferentes regimes de propagação onde escolhemos arbitrariamente $a \bar{E} = 10$. No regime assintótico, a presença do termo $SP(t)$ estende efetivamente a interferência entre os pacotes de ondas uma vez que

$$\frac{AM(t)}{AM_{(SS)}(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{a \bar{E}}{(\rho \Delta E t)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[\frac{p_0^2 (\Delta E t)^2}{2 a^2 \bar{E}^4} \right] \gg 1, \quad (2.45)$$

⁴Paradoxalmente, as correções de segunda ordem parecem ser mais influentes em uma propagação UR, o que contradiria os resultados obtidos na subseção anterior. Contudo, tal comparação não é conveniente uma vez que não fixamos os valores das massas neste caso. Quando fixamos os valores das massas, as correções de segunda ordem se tornam muito mais relevantes para regimes NR de propagação.

mas, neste caso, as oscilações já foram quase completamente destruídas por $AM(t)$ ⁵.

A função oscilante $OSC(t)$ do termo de interferência $SFO(t)$ difere do termo de oscilação *standard*, $\cos[\Delta E t]$, pela presença de uma fase adicional $\Theta(t)$ a qual é essencialmente uma correção de segunda ordem. As modificações introduzidas pela fase adicional $\Theta(t)$ são apresentadas para diferentes regimes de propagação na figura 2.4 onde comparamos $OSC(t)$ com o termo *standard* de oscilação dado por $\cos[\Delta E t]$. Para estudar a fase $\Theta(t)$ é conveniente definir um tempo $t_0 > 0$ para o qual esta função atinge seu valor de zero, isto é, $\Theta(t_0) = 0$. Se $t \leq t_0$, o módulo da fase $\Theta(t)$ atinge um limite superior quando

$$|\Delta E t| = a^2 \bar{E}^2 \sqrt{\frac{\sqrt{\left(3 - \frac{\rho^2}{a^2 p_0^2}\right)^2 + 4 \frac{\rho^2}{a^2 p_0^2}} - \left(3 - \frac{\rho^2}{a^2 p_0^2}\right)}{2\rho^2}}, \quad (2.46)$$

conseqüentemente, o máximo de $|\Theta(t)|$ depende, não somente do regime de propagação (valor de p_0), mas também da largura a do pacote de ondas. De qualquer maneira, os valores assumidos por $|\Theta(t)|$ estão restritos ao intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$. Se $t > t_0$, a fase $\Theta(t)$ não tem um limite oposto e sua dependência temporal é essencialmente dada pelo segundo termo da Eq. (2.41). Contudo, é importante notar que para $t > t_0$ o caráter oscilante é gradualmente destruído por $AM(t)$. Sendo assim, um novo limite *efetivo* assumido por $\Theta(t)$ é determinado pelo comportamento amortecedor de $AM(t)$. Para ilustrar este ponto, nós graficamos ambas as curvas que representam $AM(t)$ e $\Theta(t)$ na figura 2.5 utilizando os mesmos parâmetros empregados no estudo de $AM(t)$. A fase se modifica lentamente em um regime NR. Em um regime UR, a fase $\Theta(t)$ atinge rapidamente seu limite inferior quando $\frac{p_0^2}{E^2} > \frac{1}{3}$ e, depois de um tempo t_0 , a mesma continua a se modificar de maneira aproximadamente linear no tempo. Entretanto, efetivamente, as oscilações desaparecem rapidamente após t_0 . Ao sobrepormos os efeitos de $AM(t)$ ao caráter de oscilação descrito por $OSC(t)$ expresso na figura 2.5, nós imediatamente obtemos a probabilidade de oscilação de sabores dada explicitamente por

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) \approx \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left\{ 1 - (1 + SP^2(t))^{-\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{(\Delta v t)^2}{2a^2 (1 + SP^2(t))} \right] \cos[\Delta E t + \Theta(t)] \right\}. \quad (2.47)$$

Obviamente, quanto maior é o valor de $a \bar{E}$, menores serão os efeitos devidos à localização do pacote de ondas. Se $a \bar{E}$ assume um valor suficientemente elevado de modo que as correções de segunda ordem da Eq. (2.30) não fossem consideradas, poderíamos calcular a probabilidade de oscilação levando em conta somente o termo dominante de primeira ordem que parametriza o efeito de *slippage*, ou seja, teríamos

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) \approx \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{(\Delta v t)^2}{2a^2} \right] \cos[\Delta E t] \right\}. \quad (2.48)$$

Sob condições de *slippage* mínimo, no caso em que $t \approx 0$, a expressão acima reproduz o

⁵Veja a figura 2.5.

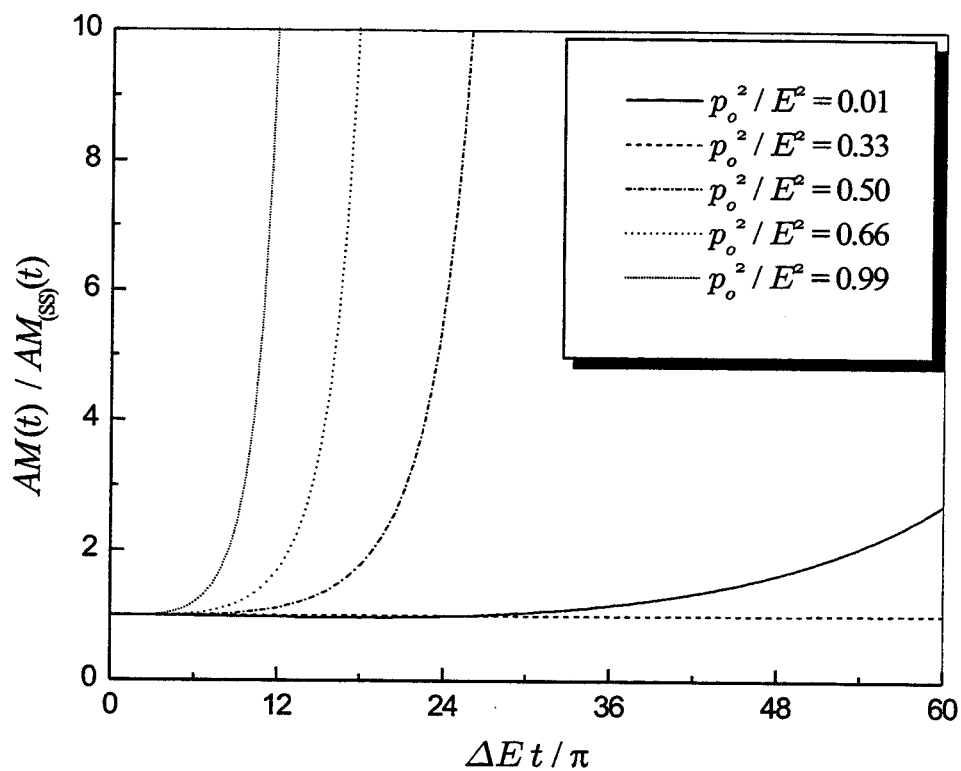


Figura 2.3: Comparação entre os comportamentos de amortecimento da probabilidade de oscilação considerando os casos *com* ($AM(t)$) e *sem* ($AM_{(SS)}(t)$) correções de segunda ordem. As correções de segunda ordem podem ser, de fato, efetivas, tanto em regimes não-relativísticos, como em regimes (ultra)relativísticos de propagação, contudo, são destruídas muito mais rapidamente no último caso. Se $\frac{p_o^2}{E^2} \approx \frac{1}{3}$, as correções de segunda ordem são mínimas.

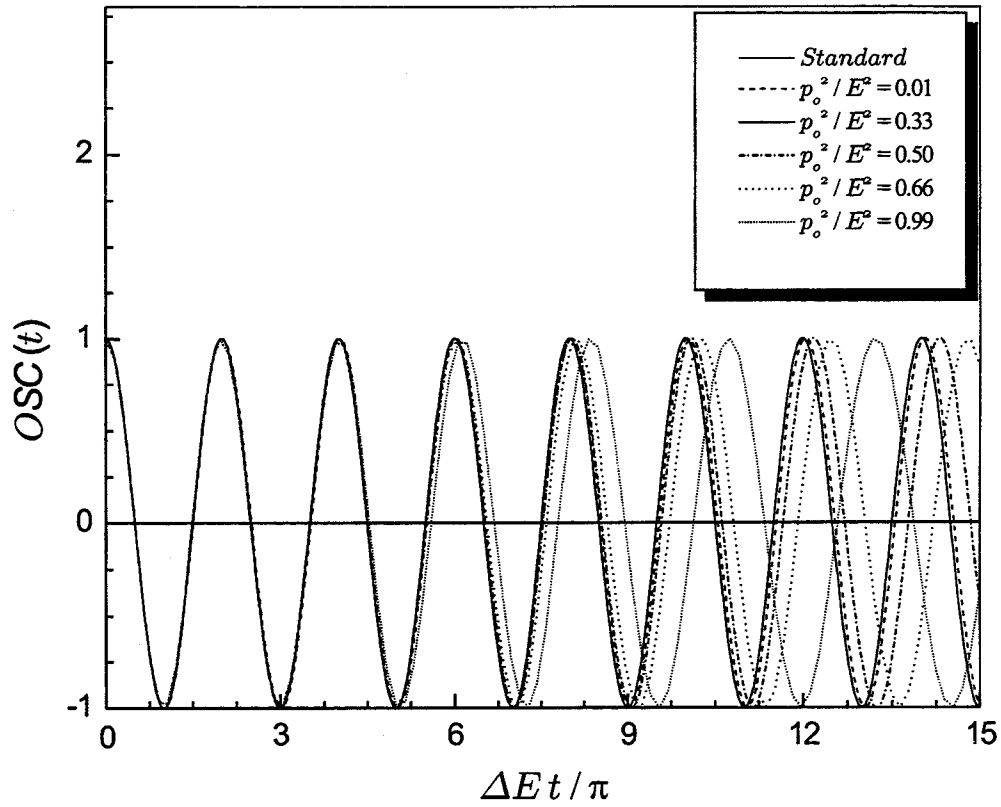


Figura 2.4: O comportamento temporal de $Osc(t)$ comparado com o comportamento de oscilação *standard* obtido com ondas planas, $\cos[\Delta Et]$, para diferentes regimes de propagação. A fase adicional $\Theta(t)$ modifica a característica de oscilação após um certo tempo de propagação. Novamente observamos que as modificações em relação ao comportamento *standard* são mínimas quando $\frac{p_0^2}{E^2} \approx \frac{1}{3}$.

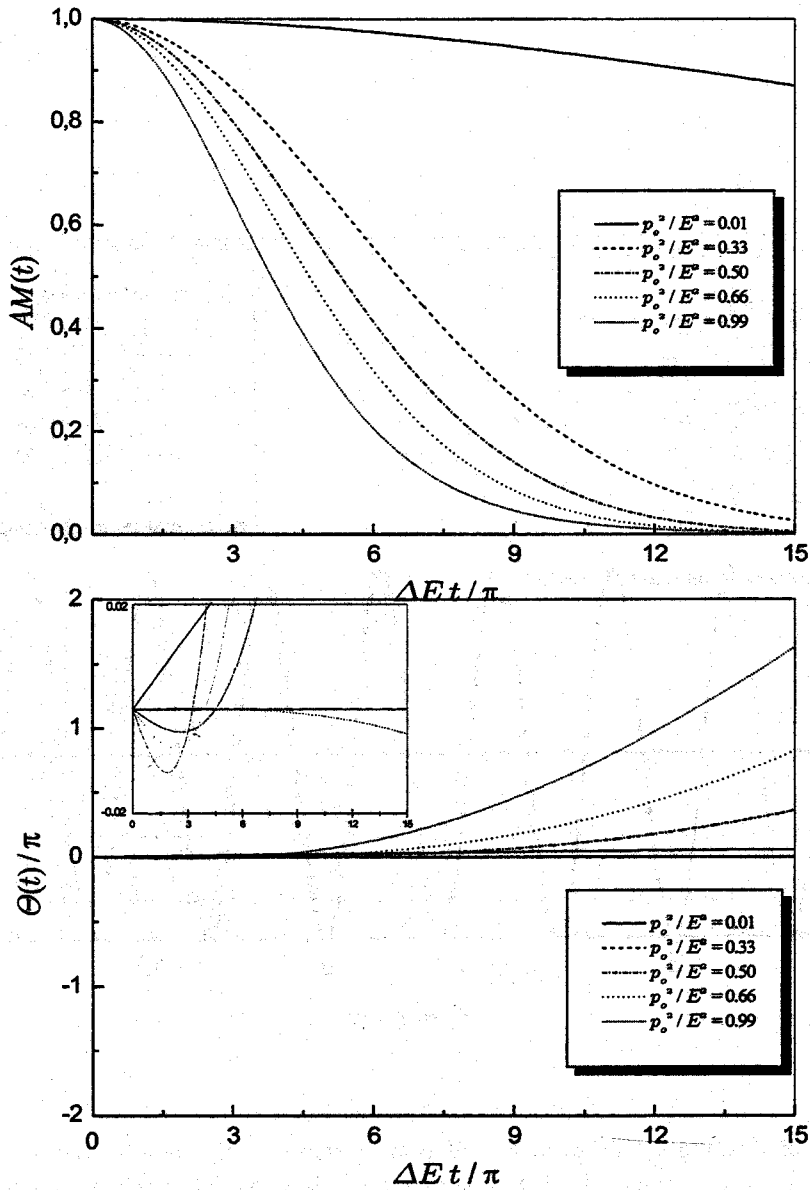


Figura 2.5: O comportamento temporal da fase $\Theta(t)$. Os valores assumidos por $\Theta(t)$ são *efetivos* somente enquanto o termo de interferência não é completamente amortecido. Na figura superior, podemos observar o comportamento de $AM(t)$ o qual determina efetivamente os valores limites assumidos por $\Theta(t)$ em cada um dos regimes de propagação. Para regimes relativísticos com $\frac{p_o^2}{E^2} > \frac{1}{3}$, a função $\Theta(t)$ atinge rapidamente seu limite inferior como podemos observar no pequeno retângulo da figura inferior. Nós utilizamos arbitrariamente $a\bar{E} = 10$ para obter os gráficos acima.

mesmo resultado obtido no formalismo com ondas planas,

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &\approx \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{(\Delta v t)^2}{2a^2} \right] \cos[\Delta E t] \right\} \\ &\approx \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \{ 1 - \cos[\Delta E t] \}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

uma vez que assumimos $a\bar{E} \gg 1$.

Apenas um adendo sobre as implicações fenomenológicas destes efeitos, quando os mesmos são questionados, enfatizamos que a observabilidade dos mesmos depende apenas indiretamente dos valores assumidos por Δm^2 , uma vez que a variável que aparece no eixo x das figuras 2.4 e 2.5 acima, $\Delta E t = (\Delta m^2 t)/(2\bar{E})$, são adimensionais, mas diretamente, do regime de propagação, $(p_0^2/\bar{E}^2)$, e, obviamente, de modificações adicionais devidas a largura a do pacote de ondas conforme procuramos ilustrar na figura 2.6.

Para tornar mais clara esta observação, adotamos o valor do ângulo de mistura $\theta = \frac{\pi}{4}$ e do parâmetro $p_0 a^{-1} \bar{E}^{-2} = 0.25$ sugerido em [15]⁶. Mesmo em casos ultra-relativísticos, onde $p_0^2/\bar{E}^2 \approx 1$, para que tal valor seja satisfeito, devemos assumir $a\bar{E} \approx 4$. Neste caso, as correções de segunda ordem⁷ são ainda mais relevantes na execução dos cálculos analíticos, onde, no limite relativístico, a fase de oscilação representada na coordenada x é descrita por $\Delta E t = 1.27 \frac{\Delta m^2}{\bar{E}} L$ onde são dados Δm^2 em (eV^2) , L em (km) e $\bar{E}$ em (GeV) . Dentro de uma análise superficial, para neutrinos de reatores nucleares, segundo os dados de KamLAND [12], teríamos $\Delta m^2 \approx 10^{-5} eV^2$ e $\bar{E} \approx 1 MeV$ (conseqüentemente $a = 1 pm$), de modo que os pequenos desvios em relação a forma *standard*, relativos à fase de oscilação, seriam detectados a $L_{osc} \approx 10 km$ até a amortização das oscilações. Para os dados de neutrinos atmosféricos obtidos no Super-Kamiokande [10] teríamos $\Delta m^2 \approx 10^{-3} eV^2$ e $\bar{E} \approx 1 GeV$ (conseqüentemente $a = 1 fm$), com pequenos desvios observáveis a partir de $L_{osc} \approx 100 km$. Para neutrinos solares, os dados do SNO [11] permitiriam a observação de pequenas modificações somente quando $a\bar{E} \gg 1$, antes do efeito de amortecimento superpor-se ao efeito de oscilação.

2.4 Análise com diferentes formas de pacotes de ondas.

Neste momento, nós verificaremos em quais circunstâncias a forma do pacote de ondas pode alterar a probabilidade de oscilação de sabores. Para descrever a evolução temporal de um pacote de ondas, nós consideramos, agora, uma função *quadrada* e uma função *seno* (*suavemente amortecida*) ao invés de uma função *gaussiana*. Ainda a pouco, notamos que

⁶Na revisão feita por D. E. Groom (LBNL) em “*Understanding two-flavor oscillation parameters and limits*”, pag. 451, são sugeridos como parâmetros de entrada as variáveis fenomenológicas denominadas $\frac{\sigma_h}{\sigma_0} \equiv \frac{1}{a\bar{E}} \frac{p_0}{\bar{E}} = 0.23 - 0.30$.

⁷Erro da ordem de $(a\bar{E})^{-3} \approx 0.016$ em relação à unidade.

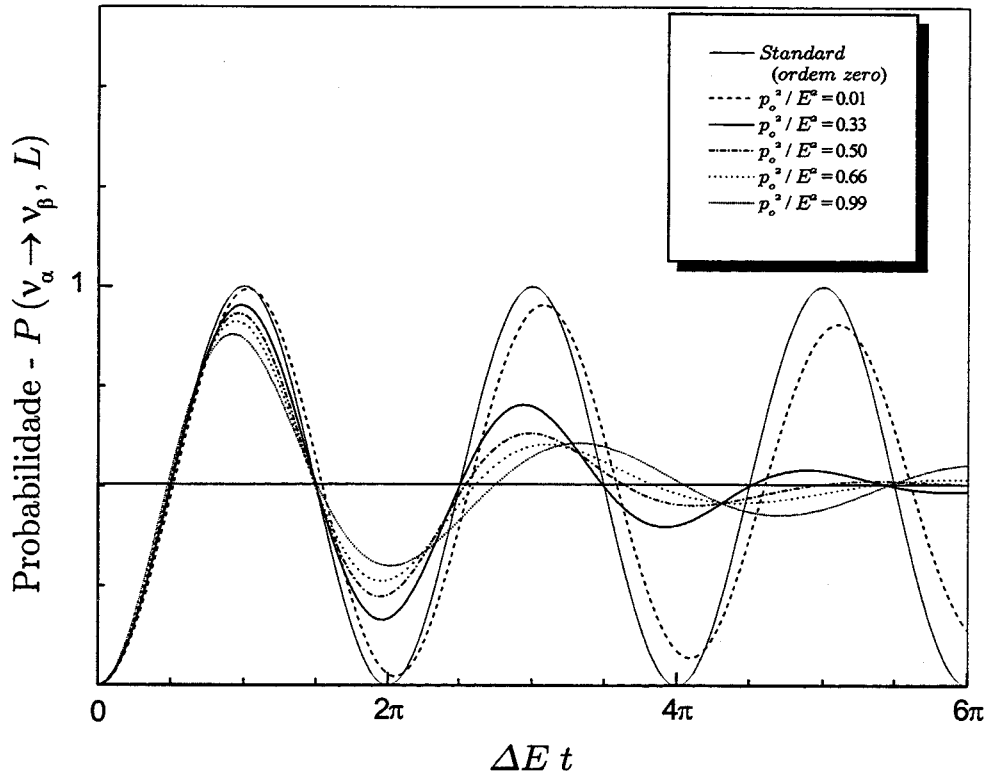


Figura 2.6: Correções de segunda ordem aplicadas ao cálculo da probabilidade de conversão de sabores $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L)$. No limite relativístico, a fase de oscilação representada na coordenada x é descrita por $\Delta E t = 1.27 \frac{\Delta m^2}{E} L$ onde são dados Δm^2 em (eV^2), L em (km) e E em (GeV). Com o valor experimental dos mesmos, eventualmente, podemos determinar a observabilidade das modificações conforme a discussão no final da sessão.

é substancialmente simples desenvolver um estudo analítico com uma função *gaussiana* uma vez que a transformada de Fourier da mesma no espaço de momentos é também uma função *gaussiana*. Ao contrário, o estudo com as funções *quadrada* e *seno* restringe os cálculos à consideração de somente as correções de primeira ordem na Eq. (2.31), ou seja, teremos

$$E(p_z, m_s) \approx E_s + p_0 \sigma_s, \quad (2.50)$$

que permite apenas calcular o termo dominante do efeito de *slippage*. A análise subsequente resulta em uma boa aproximação para o regime de propagação onde $p_0 > m_{1,2}$. Para simplificar esta discussão, nós adotaremos a seguinte definição para o estado inicial,

$$\phi_s^{(i)}(z, 0) = F^{(i)}(z) \exp[ip_0 z], \quad (2.51)$$

onde $i = G, Q, S$ correspondem respectivamente às funções *gaussiana*, *quadrada* e *seno*. A evolução temporal de um pacote de ondas será expressa em termos de $\varphi^{(i)}(p_z - p_0)$, a transformada de Fourier de $\phi_s^{(i)}(z, 0)$, e a probabilidade de oscilações seria imediatamente calculada através da expressão (2.23).

Da maneira como calculamos na seção anterior, no caso de uma função *gaussiana*, teríamos

$$F^{(G)}(z) = \left(\frac{2}{\pi a_G^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{z^2}{a_G^2}\right] \quad \text{e} \quad \varphi^{(G)}(p_z - p_0) = (2\pi a_G^2)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{a_G^2 (p_z - p_0)^2}{4}\right]. \quad (2.52)$$

Neste caso, o pacote de ondas teria a forma

$$\phi_s^{(G)}(z, t) \approx \left(\frac{2}{\pi a_G^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp[-i(E_s t - p_0 z)] \exp\left[\frac{(z - v_s t)^2}{a_G^2}\right] \quad (2.53)$$

e a probabilidade de oscilação seria reproduzida pela Eq. (2.48). De fato, tais resultados poderiam ser imediatamente obtidos se impuséssemos que $a_s(t) = a$ e $\theta_s(t, z) = 0$ na Eq. (2.32).

No caso de uma função *quadrada*, nós teríamos

$$F^{(Q)}(z) = \begin{cases} a_Q^{-\frac{1}{2}} & z \in \left[-\frac{a_Q}{2}, \frac{a_Q}{2}\right] \\ 0 & z \notin \left[-\frac{a_Q}{2}, \frac{a_Q}{2}\right] \end{cases} \quad \text{e} \quad \varphi^{(Q)}(p_z - p_0) = \frac{2 a_Q^{\frac{1}{2}}}{a_Q (p_z - p_0)} \sin\left[\frac{a_Q (p_z - p_0)}{2}\right]. \quad (2.54)$$

Neste caso, o pacote de ondas teria a forma

$$\phi_s^{(Q)}(z, t) \approx \begin{cases} a_Q^{-\frac{1}{2}} \exp[-i(E_s t - p_0 z)] & z \in \left[v_s t - \frac{a_Q}{2}, v_s t + \frac{a_Q}{2}\right] \\ 0 & z \notin \left[v_s t - \frac{a_Q}{2}, v_s t + \frac{a_Q}{2}\right] \end{cases} \quad (2.55)$$

e a probabilidade de oscilação seria dada por

$$P^{(Q)}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) \approx \begin{cases} \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\Delta v t}{a_Q} \right] \cos[\Delta E t] \right\} & t \leq \frac{a_Q}{\Delta v} \\ 0 & t > \frac{a_Q}{\Delta v} \end{cases} \quad (2.56)$$

Finalmente, no caso de uma função *seno*, nós teríamos

$$F^{(s)}(z) = \left(\frac{a_s}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sin[z a_s^{-1}]}{z} \quad \text{e} \quad \varphi^{(s)}(p_z - p_0) = \begin{cases} (a_s \pi)^{\frac{1}{2}} & a_s(p_z - p_0) \in [-1, 1] \\ 0 & a_s(p_z - p_0) \notin [-1, 1] \end{cases} \quad (2.57)$$

Neste caso, o pacote de ondas teria a forma

$$\phi_s^{(s)}(z, t) \approx \left(\frac{a_s}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp[-i(E_s t - p_0 z)] \frac{\sin[a_s^{-1}(z - v_s t)]}{(z - v_s t)} \quad (2.58)$$

e a probabilidade de oscilação seria dada por

$$P^{(s)}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) \approx \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{a_s}{\Delta v t}\right) \sin\left[\frac{\Delta v t}{a_s}\right] \cos[\Delta E t] \right\}. \quad (2.59)$$

Os resultados acima merecem alguns comentários. Primeiramente, nós observamos que todas as três formas dos pacotes de ondas fornecem o mesmo comportamento oscilante. Em uma análise simplificada, independentemente do regime de propagação e sem a introdução de qualquer parâmetro numérico, nós podemos comparar o comportamento de amortecimento de cada uma das probabilidades de oscilação em termos de uma variável em comum $x(t) = \frac{\Delta v t}{a_G}$. Se definimos os coeficientes $\alpha_Q = \frac{a_G}{a_Q}$ e $\alpha_S = \frac{a_G}{a_S}$ e recorremos à definição de $AM(t)$, nós podemos escrever

$$\begin{aligned} AM^{(G)}(t) &= \exp\left[-\frac{x^2(t)}{2}\right], \\ AM^{(Q)}(t) &= \begin{cases} 1 - \alpha_Q x(t) & \alpha_Q x(t) \leq 1 \\ 0 & \alpha_Q x(t) > 1 \end{cases}, \\ AM^{(S)}(t) &= \frac{\sin[\alpha_S x(t)]}{\alpha_S x(t)}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Sob condições de *slippage* mínimo, isto é, quando $x(t) \ll 1$, $AM^{(G)}(t)$ e $AM^{(S)}(t)$ apresentam uma dependência quadrática no tempo. Particularmente, se fizermos $\alpha_S = \sqrt{3}$, nós teremos

$$AM^{(G)}(t) = AM^{(S)}(t) \approx 1 - \frac{x^2(t)}{2}, \quad (2.61)$$

ou seja, sob condições de *slippage* mínimo, as funções *gaussiana* e *seno* reproduzem exatamente a mesma característica de amortecimento da probabilidade de oscilação. Para resumir os resultados acima, nós ilustramos as probabilidades de oscilação para as três diferentes formas dos pacotes de ondas na figura 2.7 onde adotamos $\alpha_Q = 1$ e $\alpha_S = \sqrt{3}$.

Predominantemente para a função *seno*, haverá sempre um caráter oscilante remanescente durante a propagação da partícula. Ao contrário, a função $AM^{(Q)}(t)$ desaparece linearmente e o caráter oscilante correspondente tende a zero muito mais rapidamente. O caráter oscilante cessa subitamente quando $x(t) = \frac{1}{\alpha_B}$. Os pacotes de ondas descritos

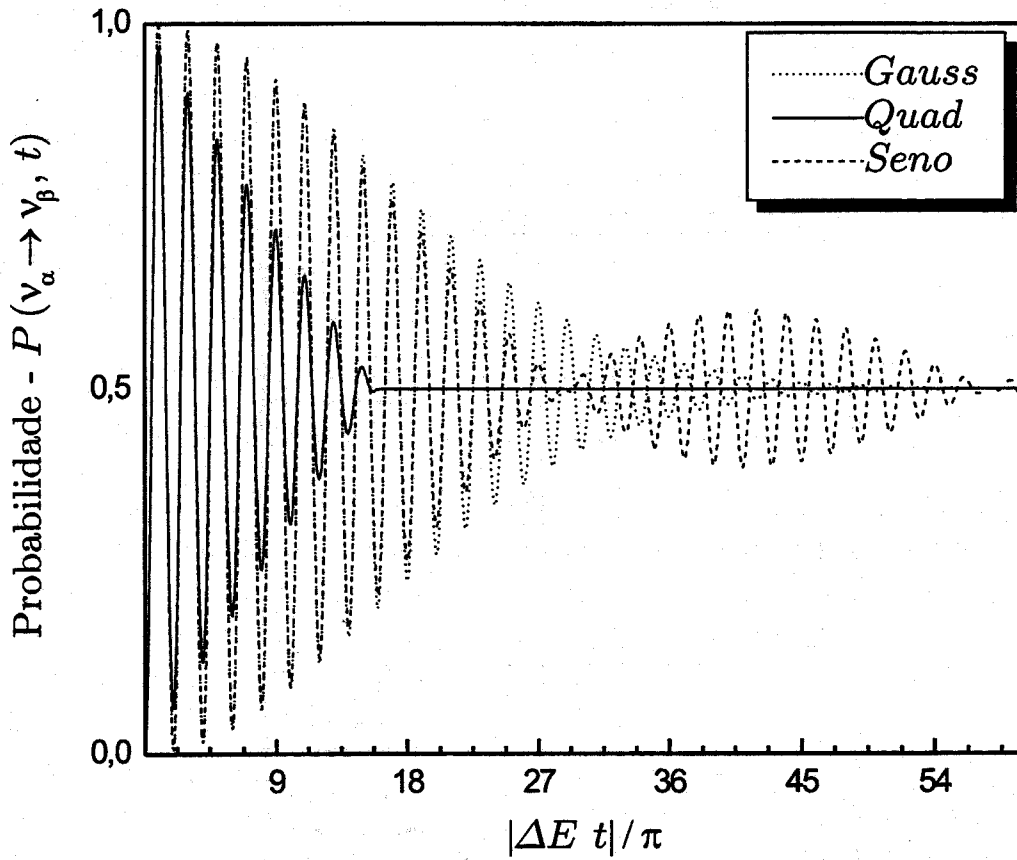


Figura 2.7: As probabilidades de conversão de sabores para pacotes de ondas descritos pelas funções gaussiana, quadrada e seno levando-se em conta as correções de primeira ordem em um cálculo analítico de $SFO(t)$. Ao assumir $a_G = a_Q = \frac{1}{\sqrt{3}}a_S$, a função gaussiana e a função seno delineiam pacotes de ondas com exatamente a mesma dependência quadrática no tempo sob condições de *slippage* mínimo enquanto que a função quadrada leva a um comportamento completamente diferente onde a característica de oscilação da probabilidade desaparece muito mais rapidamente.

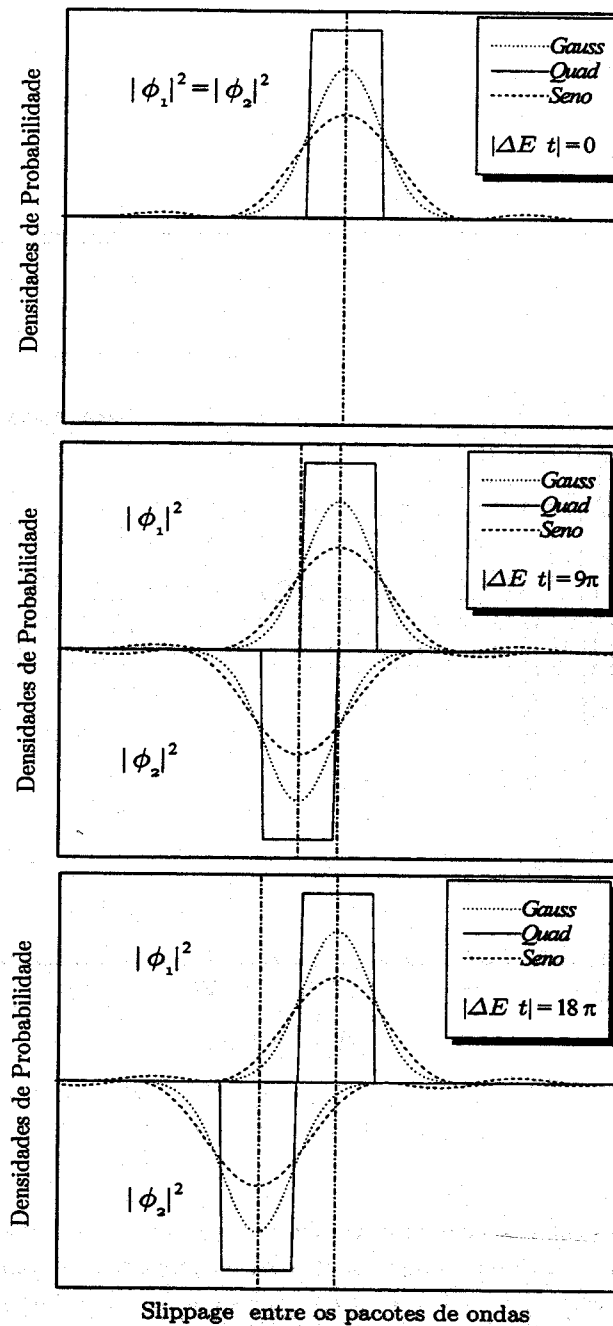


Figura 2.8: O *slippage* entre pacotes de ondas para as três formas de pacotes de ondas: *gaussiana*, *quadrada* e *seno*. Podemos observar que a interferência entre as funções *quadradas* é abruptamente interrompida num determinado instante, enquanto que as outras duas formas de pacotes de ondas prolongam a interferência por um período de tempo maior. Isto complementa a explicação do comportamento oscilante ilustrado na figura 2.7.

por uma função *seno* apresentam ainda um outro caráter peculiar. A probabilidade de oscilação assim produzida tem o comportamento oscilatório completamente suprimido a cada zero da função $\sin[x(t)]$ mas retornam a oscilar após o mesmo. Após cada um desses zeros, função $\sin[x(t)]$ muda o seu próprio sinal e, conseqüentemente, os pontos de máximo se transformam em pontos de mínimo, e vice-versa, conforme é possível observar na figura 2.7. Para finalizar, nós ilustramos as propriedades até aqui discutidas na figura 2.8 onde observamos o efeito de *slippage* correspondente a cada uma das três diferentes formas de pacotes de ondas. Apenas confirmamos que, com uma aproximação analítica de primeira ordem, através de uma simples comparação entre os comportamentos de amortecimento da probabilidade de oscilação, sob as condições de *slippage* mínimo, a função *seno* e a função *gaussiana* proporcionam resultados semelhantes, diferentes do que sugere o comportamento da função *quadrada*.

2.5 Considerações e perspectivas no estudo de oscilação de sabores para neutrinos

Em busca de nos estendermos por uma visão um pouco mais generalizada sobre o tratamento do problema de oscilação de sabores, é possível dizer que, na literatura, temos duas correntes bem definidas: de um lado, o tratamento de mecânica quântica com pacotes de ondas associados aos autoestados de massa que se propagam; de outro, o tratamento com teoria de campos onde a partícula oscilante é tratada como uma linha interna de um diagrama de Feynman.

A primeira possibilidade, como pudemos observar neste capítulo, é rica em considerações físicas. Como exemplo, sob a condição particular de uma distribuição *gaussiana* de momentos altamente centrada, nós obtivemos a expressão explícita para a evolução temporal dos autoestados de massa onde pudemos identificar o *spreading* do pacote de ondas para os regimes (ultra)relativístico e não-relativístico de propagação. Em particular, nós ainda observamos que o *spreading* é de fato um efeito de segunda ordem praticamente irrelevante para partículas se propagando em regime (ultra)relativístico. Além disso, nós verificamos a presença de uma fase dependente do tempo adicional à fase *standard* do termo oscilante da fórmula de conversão de sabores. Esta fase adicional apresenta uma dependência temporal que modifica o caráter oscilante de uma maneira peculiar. Tais modificações são menos relevantes quando $p_0^2 \approx \frac{1}{3}E^2$ e mais relevantes para regimes não-relativísticos de propagação. De toda maneira, as mesmas são completamente irrelevantes para regimes ultra-relativísticos uma vez que o comportamento amortecedor do termo de interferência suprime significativamente o comportamento oscilante da fórmula de probabilidades. Sabemos, porém, que tais resultados são fortemente influenciados pelo uso de pacotes de

ondas *gaussianos* na descrição dos autoestados de massa. De maneira a verificar como a forma do pacote de ondas poderia modificar a característica amortecedente da probabilidade de oscilação de sabores, nós analisamos o *slippage* entre os pacotes de ondas associados a cada autoestado de massa considerando também uma função *quadrada* e uma função *seno*. Encerramos, assim, a exploração do conteúdo físico proporcionada pela aplicação do formalismo com pacotes de ondas.

No que concerne à segunda possibilidade, derivações de uma expressão para a fórmula de conversão de sabores com recorrência aos métodos de teoria de campos não são muito disseminados, principalmente, por serem mais complicados e ainda apresentarem algumas controvérsias. A construção mais bem elaborada para se descrever de maneira generalizada e completa o fenômeno de oscilação segundo o formalismo com teoria de campos foi feita por Beuthe [3]. A particularidade deste tratamento consiste na avaliação dos efeitos de dispersão que podem ocorrer em uma propagação tridimensional e que são bastante significativos quando temos partículas instáveis se propagando. Apesar destas considerações pormenorizadas, o estudo de Beuthe termina por recorrer ao formalismo com pacotes de ondas *externos* aplicados a partículas escalares, sem a generalização do estudo para partículas fermiônicas; o que não é trivial. O formalismo de Blasone e Vitiello [55, 56] corresponde à tentativa mais preeminente neste âmbito. Neste modelo fica evidente a definição de um espaço de Fock para os autoestados de sabor e a derivação de uma fórmula de oscilação sem efeitos perturbativos. Operadores de criação e aniquilação de sabor que satisfazem relações de anticomutação são definidos por meio de transformações de Bogoliubov. Tal operação resulta na obtenção de uma nova fórmula de oscilação, seja para bósons como para férmions. Verificaremos, nos próximos capítulos, que o tratamento com que chamamos de pacotes de ondas de Dirac permite uma reavaliação de tais resultados.

Por fim, salientamos ainda que, apesar de ser mais preciso e, eventualmente, fornecer resultados exatos, um tratamento numérico do problema de oscilações não nos permitiria observar determinados detalhes físicos que aparecem somente com o estudo analítico. Mantendo esta linha, portanto, que pretendemos estudar, nos próximos capítulos, a influência do caráter fermiônico da equação de Dirac no problema de oscilação de sabores.

Capítulo 3

Oscilação quântica de sabores para partículas soluções da equação de Dirac.

Segundo o estudo apresentado no capítulo anterior, o tratamento *standard* do fenômeno de oscilação de sabores envolve autoestados de massa que, implicitamente, são designados segundo uma prescrição para partículas escalares (sem levar em conta o caráter espinorial das partículas fermiônicas). O caráter espinorial das funções de onda que podem descrever uma partícula de Dirac, eventualmente um neutrino, não é considerado no desenvolvimento dos cálculos. A introdução do caráter espinorial por meio de soluções da equação de Dirac pode levar a efeitos adicionais que podem ser observados na expressão para a probabilidade de oscilação. A interferência entre as componentes de frequências positiva e negativa dos pacotes de ondas que caracterizam os autoestados de massa introduz algumas pequenas modificações na fórmula que descreve a oscilação quântica de sabor.

De maneira a estender a discussão sobre o fenômeno de oscilação quântica para o estudo generalizado de partículas de *spin* $\frac{1}{2}$, em particular, para neutrinos, procuramos acoplar o caráter fermiônico das partículas oscilantes ao formalismo de oscilação quântica com pacotes de ondas descrito na seção anterior. Para tanto, iniciamos uma breve discussão sobre as soluções da equação de Dirac na forma mais simples que encontramos para descrever o fenômeno de oscilação de sabores com pacotes de ondas de Dirac.

3.1 Ondas planas soluções da equação de Dirac.

A equação de Dirac para uma partícula livre em sua notação covariante é dada por

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (3.1)$$

ou, na forma conjugada, por

$$i\partial_\mu \bar{\psi}(x)\gamma^\mu + m\bar{\psi}(x) = 0, \quad (3.2)$$

onde sempre utilizaremos a notação padronizada convenientemente adotada na literatura [25, 58, 59, 60]. Podemos estabelecer as soluções de ondas planas para a equação de Dirac que descreve uma partícula livre como $\psi(x) = \psi_+(x) + \psi_-(x)$ com

$$\begin{aligned} \psi_+(x) &= \exp[-i p x] u(p) && \text{para frequências positivas e} \\ \psi_-(x) &= \exp[+i p x] v(p) && \text{para frequências negativas,} \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde p é o quadrimomento da partícula spinorial, $p = (E, \mathbf{p})$ com $E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2$, tal qual possamos escrever

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u(p) = (\gamma^\mu p_\mu + m) v(p) = 0. \quad (3.4)$$

A álgebra das matrizes de Dirac (γ^μ) possibilita que reescrevamos a Eq. (3.4) no referencial de repouso de modo a obter [59]

$$(\gamma^0 - m) u(m, 0) = (\gamma^0 + m) v(m, 0) = 0 \quad (3.5)$$

que implica em

$$u^{1,2}(m, 0) = \begin{pmatrix} \eta^{1,2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v^{1,2}(m, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{1,2} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

onde¹ $\eta^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Com os resultados de (3.5) podemos efetuar um *boost* de Lorentz de modo a obter as seguintes expressões gerais [59]

$$\begin{aligned} u^s(p) &= \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{[2E(m+E)]^{\frac{1}{2}}} u^s(m, 0) = \begin{pmatrix} \left(\frac{E+m}{2E}\right)^{\frac{1}{2}} \xi^s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{[2E(E+m)]^{\frac{1}{2}}} \eta^s \end{pmatrix}, \\ v^s(p) &= \frac{-\gamma^\mu p_\mu + m}{[2E(m+E)]^{\frac{1}{2}}} v^s(m, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{[2E(E+m)]^{\frac{1}{2}}} \eta^s \\ \left(\frac{E+m}{2E}\right)^{\frac{1}{2}} \eta^s \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

e, da mesma maneira, $\bar{u}(x)$ (ou $\bar{v}(x)$) definido conforme a aplicação de $\bar{u}(x) = u^\dagger(x)\gamma^0$ (ou $\bar{v}(x) = v^\dagger(x)\gamma^0$). Com estas propriedades, são verificáveis as seguintes relações,

$$\begin{aligned} \bar{u}^s(p) v^r(p) &= \bar{v}^s(p) v^r(p) = v^{s\dagger}(p) u^r(p) = u^{s\dagger}(p) v^r(p) = 0, \\ \frac{E}{m} \bar{u}^s(p) u^r(p) &= -\frac{E}{m} \bar{v}^s(p) v^r(p) = u^{s\dagger}(p) u^r(p) = v^{s\dagger}(p) v^r(p) = \delta_{sr}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u^s(p) \bar{u}^s(p) &= \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{2E}, \\ \sum_{s=1,2} v^s(p) \bar{v}^s(p) &= \frac{\gamma^\mu p_\mu - m}{2E}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

¹Neste caso, estamos utilizando a representação de Dirac para (γ^μ).

úteis nos cálculos subseqüentes. Podemos, assim, escrever os campos $\psi_{\pm}(x)$ como

$$\begin{aligned}\psi_+(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} a^s(p) u^s(p) \exp[-i p x], \\ \psi_-(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} b^{s*}(p) v^s(p) \exp[+i p x],\end{aligned}\quad (3.10)$$

de modo que seja satisfeita a seguinte condição de normalização

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} [|a^s(p)|^2 + |b^{s*}(p)|^2] = 1, \quad (3.11)$$

quando tratamos de um pacote de ondas planas.

Estabelecidas estas propriedades, cabe ainda uma discussão introdutória sobre o caráter das freqüências positivas e negativas dentro do contexto da densidade de corrente j^μ para uma partícula. Uma vez definida a densidade de corrente² covariante $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$, de onde, diretamente da equação de Dirac, se obtém a conservação da mesma,

$$\partial_\mu(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)) = \partial_\mu j^\mu = 0, \quad (3.12)$$

podemos interpretar $\bar{\psi}_+(x)\gamma^0\psi_+(x)$ como a densidade de cargas de partículas carregadas positivamente, com energia positiva, propagando-se no sentido positivo do tempo (freqüências positivas, $t > 0$, $E > 0$) conforme a fase de $\exp[-i E t]$. Analogamente, teríamos $\bar{\psi}_-(x)\gamma^0\psi_-(x)$ como a densidade de cargas de partículas positivamente carregadas, com energia negativa, propagando-se no sentido positivo do tempo (freqüências negativas, $t > 0$, $E < 0$) conforme a fase de $\exp[+i E t]$. Obviamente esta última afirmação precisa ser reinterpretada de modo que começamos por reavaliar um fluxo de cargas positivas, com energia negativa, propagando-se no sentido positivo do tempo como um fluxo de cargas positivas, agora com energia positiva, porém propagando-se no sentido negativo do tempo ($i E t = i(-E)(-t)$). Novamente temos uma situação fisicamente inconcebível com $t < 0$. Porém, mesmo satisfazendo (3.12), podemos reavaliar o fluxo cargas positivas propagando-se no sentido negativo do tempo como um fluxo de cargas negativas propagando-se no sentido positivo do tempo pela ação do complexo conjugado de $\exp[+i E t] = (\exp[-i E t])^*$ chegando assim a uma situação fisicamente concebível (freqüências positivas, $t > 0$, $E > 0$). Temos então, de maneira generalizada, a interpretação do termo de freqüências negativas de um campo como associado à propagação de antipartículas assim como o termo de freqüências positivas está associado à propagação de partículas.

²Apenas como esclarecimento, quando interpretamos $\psi(x)$ como uma função de onda, falamos em densidade de corrente de probabilidades, e quando o interpretamos como um campo associado a uma partícula, falamos em densidade de corrente de um número quântico associado a uma partícula, por exemplo, como seria a carga elétrica. De fato, as duas interpretações são equivalentes.

3.2 Pacotes de ondas de Dirac e o efeito de *zitterbewegung*.

Uma vez observado que o bilinear covariante $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ é a escolha natural que representa uma densidade de corrente de probabilidades que se conserva diante da relação (3.12), analisamos, então, apenas a componente desta densidade de corrente que contém a superposição de ondas planas somente com frequências positivas,

$$\psi_+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} b^s(p) u^s(p) \exp[-ipx] \quad (3.13)$$

que implica em

$$\begin{aligned} \int d^3x j_+^0 &= \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \sum_{s,s'=1,2} b^{s*}(p) b^{s'}(p') u^{s\dagger}(p) u^{s'}(p') \exp[i(p-p')x] \\ &= \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |b^s(p)|^2 = 1, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde é satisfeita a condição de normalização

$$\int d^3x \psi_+^\dagger(x) \psi_+(x) = 1. \quad (3.15)$$

Se calcularmos a corrente total, obteremos [59, 25]

$$\int d^3x \mathbf{j}_+ = \mathbf{J}_+ = \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}}{E} |b^s(p)|^2 = \left\langle \frac{\mathbf{p}}{E} \right\rangle, \quad (3.16)$$

de modo que podemos interpretar a superposição das soluções de frequências positivas justamente como a velocidade de grupo $\langle \mathbf{v} \rangle_g = \left\langle \frac{\mathbf{p}}{E} \right\rangle$. Isto é análogo ao que acontece na teoria de Schroedinger e inicialmente parece ser satisfatório [58, 59]. Contudo, ao assumirmos a evolução temporal de um pacote de ondas, verificamos uma inconsistência devida a um efeito adicional que aparece quando tratamos simultaneamente as frequências positivas e negativas. Vejamos o que acontece quando estudamos um pacote de ondas construído a partir de uma distribuição *gaussiana* com largura a meia altura da ordem de a ,

$$\varphi(p) = (2\pi a^2)^{\frac{3}{4}} \exp\left[-\frac{\mathbf{p}^2 a^2}{4}\right] w, \quad (3.17)$$

onde, inicialmente, w é um espinor qualquer independente de $\mathbf{p}$. Se a solução normalizável da equação de Dirac tem a forma de

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} \{b^s(p) u^s(p) \exp[-ipx] + d^{s*}(p) v^s(p) \exp[+ipx]\}, \quad (3.18)$$

podemos parametrizar

$$\begin{aligned} b^s(p) &= (2\pi a^2)^{\frac{3}{4}} \exp\left[-\frac{\mathbf{p}^2 a^2}{4}\right] u^{s\dagger}(p) w, \\ d^{s*}(\bar{p}) &= (2\pi a^2)^{\frac{3}{4}} \exp\left[-\frac{\bar{\mathbf{p}}^2 a^2}{4}\right] v^{s\dagger}(\bar{p}) w, \end{aligned} \quad (3.19)$$

de modo que, se aplicarmos (3.8), recuperamos a definição de (3.17) como

$$\varphi(p) = \sum_{s=1,2} [b^s(p) u^s(p) + d^{s*}(\bar{p}) v^s(\bar{p})], \quad (3.20)$$

para $\bar{p} = (E, -\mathbf{p})$.

Neste ponto, podemos fazer uma análise qualitativa sem necessariamente desenvolver os cálculos. Observamos que as soluções da equação de Dirac expressas em (3.7) levam a escrevermos

$$\frac{b^s(p)}{d^{s*}(\bar{p})} \sim \frac{\mathbf{p}}{E + m}, \quad (3.21)$$

ou mesmo

$$\left(\frac{b^s(p)}{d^{s*}(\bar{p})} \right)^{-1} \sim \frac{\mathbf{p}}{E - m}, \quad (3.22)$$

de modo que teremos efeitos significativos quando os módulos de $b^s(p)$ e $d^{s*}(\bar{p})$ são simultaneamente apreciáveis, por exemplo, em situações relativísticas. Nesta situação, parece natural o questionamento sobre o emprego das componentes de frequências negativas na construção de um pacote de ondas. Se, num dado instante de tempo, definimos um pacote de ondas contendo somente ondas planas de frequências positivas para uma partícula que se propaga numa região do espaço livre de interações, na evolução temporal do sistema não teremos o desenvolvimento de qualquer componente de frequência negativa. Então, por que utilizá-las na descrição de um pacote de ondas? De fato, como podemos observar em (3.21) e (3.22), as componentes de frequências negativas são comparáveis às componentes de frequências positivas sempre que o campo em questão tem uma componente de Fourier com momento comparável à massa: $|\mathbf{p}| \sim m$. Por outro lado, a transformada de Fourier do campo é apreciável em uma região do espaço de momentos dada por

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - 0 \approx \frac{1}{a} \quad (3.23)$$

se o pacote de ondas se espalha sobre uma distância a . Observamos que, se $ma \gg 1$, a contribuição de momento $|\mathbf{p}| \sim m \gg \frac{1}{a}$ é altamente suprimida de maneira que a contribuição das frequências negativas se torna insignificante e temos um modelo consistente quando tomamos apenas as componentes de frequências positivas. Entretanto, se localizarmos o pacote de ondas em uma região do espaço tal que ma é da ordem de grandeza de 1, observamos que a contribuição das soluções de frequência negativa se torna apreciável.

Ao desenvolvermos explicitamente os cálculos na obtenção das componentes i da corrente $\mathbf{J}$, teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_i = & \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ \sum_{s=1,2} [|b^s(p)|^2 + |d^s(p)|^2] \frac{\mathbf{p}_i}{E} \right. \\ & + i \sum_{s,s'=1,2} [b^{s*}(\bar{p}) d^{s'*}(p) \bar{u}^s(\bar{p}) \sigma^{i0} v^{s'}(p) \exp[2iEt] \\ & \left. - b^s(\bar{p}) d^{s'}(p) \bar{v}^s(p) \sigma^{i0} u^{s'}(\bar{p}) \exp[-2iEt]] \right\}, \quad (3.24) \end{aligned}$$

onde notamos o acoplamento entre os coeficientes $b^s(\vec{p})$ de frequências positivas e os coeficientes $d^{s'}(\vec{p})$ de frequências negativas.

Verificamos que, além do termo que determina a velocidade de grupo $\langle \frac{\vec{p}}{E} \rangle$ que delinea o movimento retilíneo do pacote de ondas, temos um termo de superposição de violentas oscilações cuja frequência é dada por

$$\nu = 2m \frac{c^2}{\hbar} \approx 2 \times 10^{21} s^{-1}, \quad (3.25)$$

caracterizando o que chamamos de efeito de *zitterbewegung* que pode introduzir características adicionais no estudo de fenômenos que envolvem propagação de uma partícula [25].

No caso de um elétron em um átomo de Hidrogênio, essas oscilações correspondem a uma flutuação na coordenada de posição da partícula da ordem de $\frac{\hbar}{mc} = 3.9 \times 10^{-13} m$. A função de onda do estado fundamental de um elétron em um estado ligado do átomo de Hidrogênio, se expandida em componentes de ondas planas de partículas livres, apresentará componentes não nulas para frequências negativas [25]. Imediatamente o efeito de *zitterbewegung* se faz presente. A consequência direta do fenômeno é a de que o elétron sente a presença de um potencial não mais descrito por $V(\mathbf{x})$ mas sim por

$$V(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) + \delta\mathbf{x} \cdot \nabla V(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \delta x_i \delta x_j \frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (3.26)$$

Desta maneira, com $\delta\mathbf{x} \approx a \approx \frac{1}{m}$ obtemos

$$\Delta V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} a^2 \nabla^2 V(\mathbf{x}) \approx \frac{\alpha}{6m^2} \delta^3(\mathbf{x}). \quad (3.27)$$

que, a menos de um fator numérico $\frac{3}{4}$, segundo a referência [25], justifica o termo de Darwin da teoria perturbativa do átomo de Hidrogênio. Entretanto, esta não corresponde à única maneira de se quantificar teoricamente o termo de Darwin no átomo de Hidrogênio.

As consequências do efeito de *zitterbewegung* ainda despertam um certo interesse na literatura. Alguns trabalhos [61] propõem a dedução do campo Coulombiano de um elétron a partir do valor médio de um campo que oscila com o período de *zitterbewegung* onde tal campo seria obtido a partir de uma quebra local da invariância do calibre eletromagnético. Modelos matemáticos são ainda capazes de descrever o *spin* do elétron a partir deste movimento [62]. Temos ainda alguns modelos aplicados ao estudo de partículas fermiônicas se movendo em campos eletromagnéticos externos onde uma aproximação semiclássica é utilizada em uma analogia com o efeito de *zitterbewegung* para variáveis observáveis em geral [63].

3.3 Pacotes de ondas de Dirac e as modificações na fórmula de oscilação de sabores.

A contribuição científica mais relevante deste trabalho começa a ser introduzida nesta seção. Procuramos descrever um fenômeno semelhante ao efeito de *zitterbewegung* conjugado ao fenômeno de oscilação quântica que emerge naturalmente da descrição dos autoestados de massa como espiniores soluções da equação de Dirac. Assim como no capítulo anterior, é conveniente observar que temos simplificações matemáticas e visuais substanciais quando assumimos um tratamento de funções de onda com dependência espacial unidimensional. Desta forma, utilizaremos deste mesmo pretexto neste capítulo. Basicamente, o que faremos é manter a correspondência $\mathbf{p} \rightarrow p_z$, $\mathbf{x} \rightarrow z$ de modo que $p = (E, \mathbf{p})$ passa a ser escrito como $p = (E(p_z, m), p_z)$. Assim, uma componente de onda plana solução da equação de Dirac passa a ser representada por

$$\exp[-i p x] \Rightarrow \exp[-i(E(p, m_n)t - p_z z)], \quad (3.28)$$

e, de fato, para introduzir o caráter fermiônico das partículas envolvidas no fenômeno de oscilação quântica de sabores, passamos a utilizar a equação de Dirac para descrever a evolução temporal dos autoestados de massa. Para uniformizar a notação, a expressão (2.4) passa ser escrita como

$$\begin{aligned} \Psi(z, t) &= \psi_1(z, t) \cos(\theta) \nu_1 + \psi_2(z, t) \sin(\theta) \nu_2 \\ &= [\psi_1(z, t) \cos^2(\theta) + \psi_2(z, t) \sin^2(\theta)] \nu_\alpha + [\psi_1(z, t) - \psi_2(z, t)] \cos(\theta) \sin(\theta) \nu_\beta \\ &= \psi_\alpha(z, t; \theta) \nu_\alpha + \psi_\beta(z, t; \theta) \nu_\beta \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde $\psi_i(z, t)$ satisfaz a equação de Dirac (3.1) para uma massa m_i . A extensão natural da Eq. (2.4), como veremos mais a frente, leva a escrevermos

$$\psi_\alpha(z, 0, \theta) = \phi_\alpha(z, 0, \theta) w \quad (3.30)$$

onde w é um espinor constante que satisfaz a condição de normalização $w^\dagger w = 1$. A forma explícita de $\psi_i(z, t)$ é dada, então, por

$$\begin{aligned} \psi_i(z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \sum_{s=1,2} \{b^s(p_z, m_i) u^s(p_z, m_i) \exp[-i(E(p_z, m_i)t - p_z z)] \\ &\quad + d^{s*}(p_z, m_i) v^s(p_z, m_i) \exp[+i(E(p_z, m_i)t - p_z z)]\}, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \exp[ip_z z] \sum_{s=1,2} \{b^s(p_z, m_i) u^s(p_z, m_i) \exp[-iE(p_z, m_i)t] \\ &\quad + d^{s*}(-p_z, m_i) v^s(-p_z, m_i) \exp[+iE(p_z, m_i)t]\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Novamente, com $\psi_i(z, t)$ convenientemente definida, podemos calcular a probabilidade de observar um autoestado de sabor ν_β num instante t simplesmente integrando o quadrado do módulo do coeficiente de ν_β em (3.29),

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz |(\psi_1(z, t) - \psi_2(z, t)) \cos \theta \sin \theta|^2$$

$$= \frac{\sin^2(2\theta)}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} dz [\psi_1^\dagger(z, t) \psi_1(z, t) + \psi_2^\dagger(z, t) \psi_2(z, t) - \psi_2^\dagger(z, t) \psi_1(z, t) - \psi_1^\dagger(z, t) \psi_2(z, t)] \quad (3.32)$$

Notamos na própria expressão (3.31) que, ao utilizarmos as propriedades de ortogonalidade (3.8) dos espinores de Dirac, podemos verificar imediatamente que

$$\int dz \psi_1^\dagger(z, t) \psi_1(z, t) = \int dz \psi_2^\dagger(z, t) \psi_2(z, t) = 1, \quad (3.33)$$

e, da mesma maneira, encontrar a expressão geral para

$$\begin{aligned} \int dz \psi_1^\dagger(z, t) \psi_2(z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \exp[-i(p_z - k_z)z] \\ &\times \sum_{s=1,2} [b^{s*}(p_z, m_1) u^{s\dagger}(p_z, m_1) \exp[iE(p_z, m_1)t] + d^s(-p_z, m_1) v^{s\dagger}(-p_z, m_1) \exp[-iE(p_z, m_1)t]] \\ &\times \sum_{s'=1,2} [b^{s'}(k_z, m_2) u^{s'\dagger}(k_z, m_2) \exp[-iE(k_z, m_2)t] + d^{s'*}(-k_z, m_2) v^{s'\dagger}(-k_z, m_2) \exp[iE(k_z, m_2)t]] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \exp[-i(p_z - k_z)z] \\ &\times \sum_{s,s'=1,2} [b^{s*}(p_z, m_1) u^{s\dagger}(p_z, m_1) b^{s'}(k_z, m_2) u^{s'\dagger}(k_z, m_2) \exp[i(E(p_z, m_1) - E(k_z, m_2))t] \\ &\quad + d^s(-p_z, m_1) v^{s\dagger}(-p_z, m_1) d^{s'*}(-k_z, m_2) v^{s'\dagger}(-k_z, m_2) \exp[-i(E(p_z, m_1) - E(k_z, m_2))t] \\ &\quad + b^{s*}(p_z, m_1) u^{s\dagger}(p_z, m_1) d^{s'*}(-k_z, m_2) v^{s'\dagger}(-k_z, m_2) \exp[i(E(p_z, m_1) + E(k_z, m_2))t] \\ &\quad + d^s(-p_z, m_1) v^{s\dagger}(-p_z, m_1) b^{s'}(k_z, m_2) u^{s'\dagger}(k_z, m_2) \exp[-i(E(p_z, m_1) + E(k_z, m_2))t]], \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \sum_{s,s'=1,2} [b^{s*}(p_z, m_1) u^{s\dagger}(p_z, m_1) b^{s'}(p_z, m_2) u^{s'\dagger}(p_z, m_2) \exp[i(E(p_z, m_1) - E(p_z, m_2))t] \\ &\quad + d^s(-p_z, m_1) v^{s\dagger}(-p_z, m_1) d^{s'*}(-p_z, m_2) v^{s'\dagger}(-p_z, m_2) \exp[-i(E(p_z, m_1) - E(p_z, m_2))t] \\ &\quad + b^{s*}(p_z, m_1) u^{s\dagger}(p_z, m_1) d^{s'*}(-p_z, m_2) v^{s'\dagger}(-p_z, m_2) \exp[i(E(p_z, m_1) + E(p_z, m_2))t] \\ &\quad + d^s(-p_z, m_1) v^{s\dagger}(-p_z, m_1) b^{s'}(p_z, m_2) u^{s'\dagger}(p_z, m_2) \exp[-i(E(p_z, m_1) + E(p_z, m_2))t]], \end{aligned} \quad (3.34)$$

de onde observamos, nos dois primeiros termos da somatória em (3.34), a presença da característica de oscilação já presente no modelo *standard* com frequência proporcional à diferença de energia entre os objetos de massa m_1 e m_2 e, nos dois últimos termos, novamente encontramos um acoplamento entre objetos de massas diferentes cuja amplitude de oscilação no tempo apresenta um comportamento muito semelhante àquele decorrente do efeito de *zitterbewegung* no que concerne a oscilações ultra-rápidas, caracterizando um fenômeno ainda não descrito nos modelos que tratam o fenômeno de oscilação quântica de sabores.

Para quantificar este novo fenômeno cuja origem pode ser identificada na expressão (3.34) acima, retornaremos à expressão (3.32) e à forma explícita de $\psi_i(z, t)$ em (3.31). No

instante de tempo $t = 0$, as funções de onda dos autoestados de massa satisfazem $\psi_1(z, 0) = \psi_2(z, 0)$, de modo que esta condição garante a criação instantânea de um autoestado puro de sabor ν_α da mesma maneira como foi considerado no tratamento de partículas escalares no capítulo 2. A transformada de Fourier de $\psi_i(z, 0)$ é dada, então, por

$$\sum_{s=1,2} [b^s(p_z, m_i) u^s(p_z, m_i) + d^{s*}(-p_z, m_i) v^s(-p_z, m_i)] \quad (3.35)$$

e, ao mesmo tempo, se observarmos que a transformada de Fourier de $\phi_\alpha(z, 0, \theta)$ é dada por³

$$\varphi(p_z - p_s) = (2\pi a^2)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{(p_z - p_s)^2 a^2}{4} \right], \quad (3.36)$$

nós obteremos, sem maiores esforços, a transformada de Fourier de $\psi_\alpha(z, 0, \theta)$,

$$\varphi(p_z - p_0)w = \sum_{s=1,2} [b^s(p_z, m_i) u^s(p_z, m_i) + d^{s*}(-p_z, m_i) v^s(-p_z, m_i)]. \quad (3.37)$$

Quando utilizamos as propriedades de ortogonalidade (3.8) dos espinores de Dirac, obtemos

$$\begin{aligned} b^s(p_z, m_i) &= \varphi(p_z - p_0) u^{s\dagger}(p_z, m_i) w, \\ d^{s*}(-p_z, m_i) &= \varphi(p_z - p_0) v^{s\dagger}(-p_z, m_i) w, \end{aligned} \quad (3.38)$$

e são estes os coeficientes que carregam algumas informações físicas bastante importantes. Para todo e qualquer estado inicial com a forma analítica dada pela Eq. (3.30), ou seja, com a forma espinorial fatorizada independente das coordenadas (z, p_z) , o coeficiente da solução de frequência negativa $d^{s*}(-p_z, m_i)$ necessariamente introduz uma contribuição não nula durante a evolução temporal do pacote de ondas. Este fato nos obriga a tomar o conjunto completo de soluções da equação de Dirac para construir um pacote de ondas, da maneira como observamos na seção anterior. Somente no caso em que consideramos uma distribuição de momentos dada pela função delta de Dirac (limite para tratamento com ondas planas) e supomos um espinor inicial w caracterizando um autoestado de massa de frequência positiva com momento p_0 , a contribuição devida às soluções de frequência negativa $d^{s*}(-p_z, m_i)$ serão nulas.

Ressalvadas estas condições para que sejam construídos os pacotes de ondas de Dirac, nos encontramos na posição cômoda de calcular a fórmula para a conversão de sabores segundo esta nova prescrição. Ressaltamos que os cálculos subsequentes não dependem da representação das matrizes γ^μ de Dirac. Ao substituírmos os resultados da Eq. (3.38) na Eq. (3.31) e utilizarmos as já bem conhecidas propriedades dos espinores de Dirac [59],

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u^s(p_z, m_i) \bar{u}^s(p_z, m_i) &= \frac{\gamma^0 E(p_z, m_i) - \gamma^3 p_z + m_i}{2E(p_z, m_i)}, \\ \sum_{s=1,2} v^s(-p_z, m_i) \bar{v}^s(-p_z, m_i) &= \frac{\gamma^0 E(p_z, m_i) + \gamma^3 p_z - m_i}{2E(p_z, m_i)}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

³Segundo o mesmo procedimento utilizado para partículas escalares no capítulo 2.

obtemos

$$\begin{aligned}
 \psi_i(z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi(p_z - p_0) \exp[ip_z z] \left\{ \left[\sum_{s=1,2} u^s(p_z, m_i) u^{s\dagger}(p_z, m_i) \gamma^0 \right] \exp[-iE(p_z, m_i)t] \right. \\
 &\quad \left. + \left[\sum_{s=1,2} v^s(p_z, m_i) v^{s\dagger}(p_z, m_i) \gamma^0 \right] \exp[+iE(p_z, m_i)t] \right\} \gamma^0 w \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi(p_z - p_0) \exp[ip_z z] \left\{ \frac{\gamma^0 E(p_z, m_i) - \gamma^3 p_z + m_i}{2E(p_z, m_i)} \exp[-iE(p_z, m_i)t] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\gamma^0 E(p_z, m_i) + \gamma^3 p_z - m_i}{2E(p_z, m_i)} \exp[+iE(p_z, m_i)t] \right\} \gamma^0 w \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi(p_z - p_0) \exp[ip_z z] \left\{ \cos[E(p_z, m_i)t] - \frac{i\gamma^0 (\gamma^3 p_z + m_i)}{E(p_z, m_i)} \sin[E(p_z, m_i)t] \right\} w.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Com a forma geral para (3.41), adicionamos ao resultado dado pela expressão (3.33), o resultado do produto

$$\begin{aligned}
 \int dz \psi_1^\dagger(z, t) \psi_2(z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi(p_z - p_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi(p_z - p_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dz \exp[-i(p_z - p_z)z] \\
 &\quad \times w^\dagger \left\{ \frac{E(p_z, m_1) \cos[E(p_z, m_1)t] + i\gamma^0 [\gamma^3 p_z + m_1] \sin[E(p_z, m_1)t]}{E(p_z, m_1)} \right\} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{E(p_z, m_2) \cos[E(p_z, m_2)t] - i\gamma^0 [\gamma^3 p_z + m_2] \sin[E(p_z, m_2)t]}{E(p_z, m_2)} \right\} w \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi^2(p_z - p_0) \frac{1}{E(p_z, m_1)E(p_z, m_2)} \\
 &\quad \times w^\dagger \{ E(p_z, m_1)E(p_z, m_2) \cos[E(p_z, m_1)t] \cos[E(p_z, m_2)t] \\
 &\quad + i\gamma^0 [\gamma^3 p_z + m_1] E(p_z, m_2) \cos[E(p_z, m_2)t] \sin[E(p_z, m_1)t] \\
 &\quad - i\gamma^0 [\gamma^3 p_z + m_2] E(p_z, m_1) \cos[E(p_z, m_1)t] \sin[E(p_z, m_2)t] \\
 &\quad + [p_z^2 + m_1 m_2 + \gamma^3 p_z (m_1 - m_2)] \sin[E(p_z, m_1)t] \sin[E(p_z, m_2)t] \} w, \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

que nos permite calcular a forma explícita da probabilidade de conversão de sabores $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t)$. Neste caso, teremos a probabilidade de encontrar um estado de sabor ν_β em um instante de tempo t , dada anteriormente para partículas escalares pela Eq. (2.23), reescrita como

$$P_{\text{Dirac}}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \{ 1 - \text{DFO}(t) \}, \tag{3.42}$$

onde $\text{DFO}(t)$ (*Dirac flavor oscillation*), substitui $\text{SFO}(t)$ (*scalar flavor oscillation*) e passa a representar o novo termo de interferência entre os autoestados de massa,

$$\text{DFO}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left(\psi_1^\dagger(z, t) \psi_2(z, t) + \psi_2^\dagger(z, t) \psi_1(z, t) \right), \tag{3.43}$$

que carrega a informação de oscilação de sabor para partículas descritas por pacotes de ondas de Dirac. De modo a simplificar a interpretação da forma analítica do termo de

interferência DFO(t), podemos reescrevê-lo como

$$\begin{aligned} \text{DFO}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi^2(p_z - p_0) \{ [1 - f(p_z, m_1, m_2)] \cos[\epsilon_-(p_z, m_1, m_2) t] \\ + f(p_z, m_1, m_2) \cos[\epsilon_+(p_z, m_1, m_2) t] \} \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde

$$f(p_z, m_1, m_2) = \frac{E(p_z, m_1)E(p_z, m_2) - p_z^2 - m_1 m_2}{2 E(p_z, m_1)E(p_z, m_2)}$$

e

$$\epsilon_{\pm}(p_z, m_1, m_2) = E(p_z, m_1) \pm E(p_z, m_2) .$$

O termo independente do tempo $f(p_z, m_1, m_2)$ ainda merece alguns comentários. Podemos facilmente observar que $f(p_z, m_1, m_2)$ tende rapidamente a zero quando $p_z \gg m_{1,2}$ e apresenta um mínimo em $p_z = 0$ e dois máximos em $p_z = \pm \sqrt{m_1 m_2}$. O valor máximo de $f(p_z, m_1, m_2)$ é

$$f_{\max}(p_z, m_1, m_2) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2}, \quad (3.45)$$

o qual desaparece no limite $m_1 = m_2$. Como observamos na figura 3.1, os novos efeitos introduzidos por $f(p_z, m_1, m_2)$ são relevantes somente quando $\Delta m \approx m_1 \gg m_2$. Entretanto, aquilo que de fato é relevante no resultado da equação (3.44) é o fato de que a mesma é obtida sem qualquer asserção sobre a forma do espinor inicial w . Por outro lado, sabemos que o espinor inicial carrega algumas informações físicas fundamentais sobre o estado de criação da partícula. De certa forma, como veremos no próximo capítulo, isto poderia ser relevante no estudo de oscilações quirais [20] onde a escolha do estado inicial tem uma certa influência sobre a observabilidade das oscilações. Em comparação com o tratamento *standard* de oscilações de sabores para neutrinos, feito com o uso de pacotes de ondas escalares, onde o termo de interferência SFO(t) é dado pela Eq. (2.29) com $\Delta E(p_z) \equiv \epsilon_-(p_z, m_1, m_2)$, nós observamos dois termos adicionais em DFO(t). Com respeito ao primeiro deles, o termo de oscilação *standard* $\cos[\epsilon_-(p_z, m_1, m_2) t]$, o qual surge da interferência entre as componentes dos autoestados de massa com frequência de mesmo sinal, é multiplicado por um *novo fator* obtido a partir dos produtos $u^\dagger(p_z, m_1) u(p_z, m_2)$, $v^\dagger(-p_z, m_1) v(-p_z, m_2)$ e seus harmônicos conjugados. O segundo termo trata-se de um *novo termo de oscilação*, $\cos[\epsilon_+(p_z, m_1, m_2) t]$, o qual surge da interferência entre as componentes dos autoestados de massa com frequência positiva e negativa, aparece multiplicado por um outro fator que é obtido a partir dos produtos $u^\dagger(p_z, m_1) v(-p_z, m_2)$, $v^\dagger(-p_z, m_1) u(p_z, m_2)$ e seus harmônicos conjugados. Estas novas oscilações representadas por este termo têm frequências muito altas e um comportamento oscilatório bastante peculiar. Veremos logo mais a seguir que, apenas no instante da criação, tais oscilações rápidas introduzem uma pequena modificação na fórmula de conversão de sabores para neutrinos.

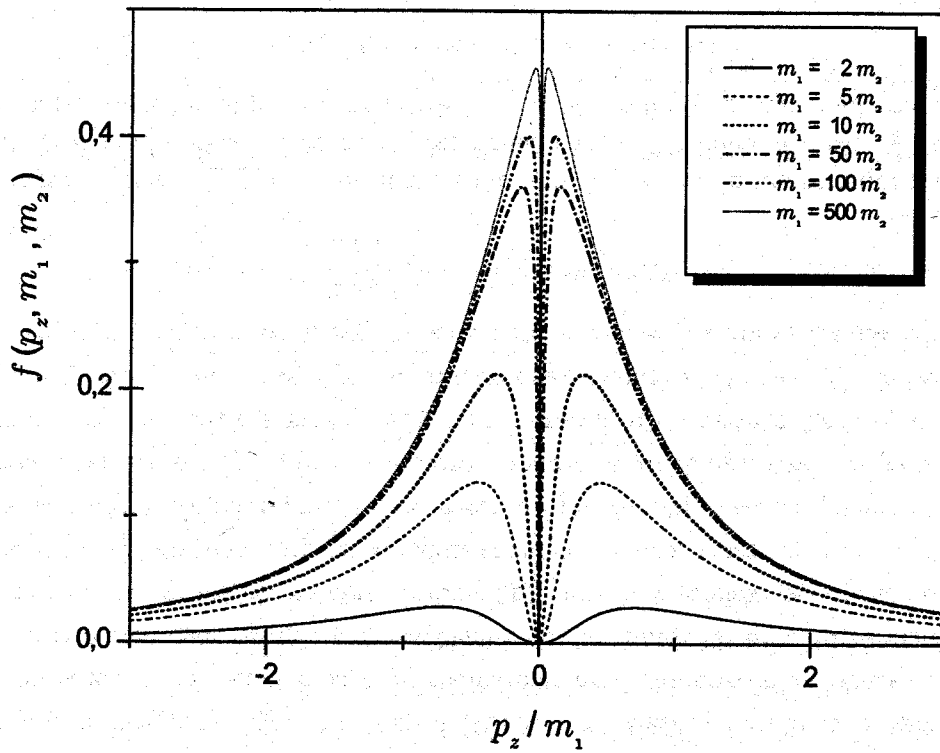


Figura 3.1: A função $f(p_z, m_1, m_2)$ é grafada para diferentes valores da razão entre m_1 e m_2 . Para uma distribuição de momentos altamente centrada em torno de $p_0 \gg m_{1,2}$ (limite ultra-relativístico), $f(p_z, m_1, m_2)$ não tem um papel significante na fórmula de oscilação “modificada”. Quando o valor de m_1 tende ao valor de m_2 , independentemente do valor de p_0 e da largura da distribuição de momentos, o valor máximo assumido por $f(p_z, m_1, m_2)$ tende a ser negligenciável.

Retornando ao ponto de partida, se tivéssemos postulado que os pacotes de ondas fossem constituídos única e exclusivamente de soluções de ondas planas com frequências positivas, o termo de oscilação $\cos[\epsilon_+(p_z, m_1, m_2)t]$ nem se quer existiria. Isto reforça o argumento de que, ao construirmos um pacote de ondas com soluções da equação de Dirac, não podemos simplesmente descartar as contribuições de frequências negativas.

3.3.1 A fórmula de oscilação com *spreading*

Para quantificar analiticamente os novos efeitos exibidos pela fórmula de oscilação de probabilidades, precisamos calcular a integral da Eq. (3.44) quando consideramos uma partícula em regime ultra-relativístico de propagação e, ao mesmo tempo, assumimos uma condição de localização representada por uma distribuição de momentos altamente centrada, assim como fizemos no capítulo 2.

Desta maneira, uma aproximação que leve em conta os termos até segunda ordem em uma série de potências de $\left(\frac{p_z - p_0}{p_0}\right)$ possibilita que escrevamos os termos que dependem da energia como

$$f^{[2]}(p_z, m_1, m_2) \approx \left(\frac{\Delta m}{2p_0}\right)^2 \left[1 - 2 \frac{p_z - p_0}{p_0} + 3 \left(\frac{p_z - p_0}{p_0}\right)^2 \right], \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_+^{[2]}(p_z, m_1, m_2) \approx & 2p_0 \left[1 + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4p_0^2} + \frac{p_z - p_0}{p_0} \left(1 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{4p_0^2} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{p_z - p_0}{p_0}\right)^2 \frac{m_1^2 + m_2^2}{2p_0^2} \right], \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\epsilon_-^{[2]}(p_z, m_1, m_2) \approx \frac{\Delta m^2}{2p_0} \left[1 - \frac{p_z - p_0}{p_0} + \left(\frac{p_z - p_0}{p_0}\right)^2 \right]. \quad (3.48)$$

Ao substituírmos as aproximações acima na Eq. (3.44) e, ao mesmo tempo, considerarmos uma distribuição *gaussiana* de momentos $\varphi(p_z - p_0)$ dada por (3.36), poderemos obter uma fórmula analítica para DFO(t). Por conveniência matemática, ao definirmos a variável de integração $\sigma = \frac{a(p_z - p_0)}{\sqrt{2}}$ juntamente com os coeficientes

$$\begin{aligned} S_-(t) &= \frac{\Delta m^2}{2p_0} t, & Q_-(t) &= -\frac{\Delta m^2}{\sqrt{2}ap_0^2} t, & R_-(t) &= \frac{\Delta m^2}{a^2 p_0^3} t, \\ S_+(t) &= p_0 t \left(2 + \frac{m_1^2 + m_2^2}{2p_0^2} \right), & Q_+(t) &= \frac{\sqrt{2}p_0 t}{ap_0} \left(2 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{2p_0^2} \right), & R_+(t) &= p_0 t \left(\frac{m_1^2 + m_2^2}{a^2 p_0^4} \right), \end{aligned} \quad (3.49)$$

podemos reescrever a Eq. (3.43) na forma de

$$\begin{aligned} \text{DFO}(t) \approx & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\sqrt{\pi}} \exp[-\sigma^2] \times \\ & \text{Re} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\Delta m}{2p_0}\right)^2 \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{ap_0} \sigma + \frac{6}{(ap_0)^2} \sigma^2 \right) \right] \exp[-iS_-(t) - iQ_-(t)\sigma - iR_-(t)\sigma^2] \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\Delta m}{2p_0} \right)^2 \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{ap_0} \sigma + \frac{6}{(ap_0)^2} \sigma^2 \right) \exp \left[-iS_+(t) - iQ_+(t)\sigma - iR_+(t)\sigma^2 \right] \Big\} \\ = \text{Re} [H_-(t)G_-(t) + H_+(t)G_+(t)] \quad (3.50)$$

onde

$$G_{\pm}(t) = \left(\frac{1}{1+iR_{\pm}(t)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{Q_{\pm}^2(t)}{4(1+iR_{\pm}(t))} - iS_{\pm}(t) \right] \quad (3.51)$$

são obtidos após uma série de integrações *gaussianas* e

$$H_{\pm}(t) = \frac{1}{2} \mp \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{\Delta m}{2p_0} \right)^2 \left[1 + i \frac{\sqrt{2}}{ap_0} \frac{Q_{\pm}(t)}{1+iR_{\pm}(t)} + \frac{3}{(ap_0)^2} \left(\frac{1}{1+iR_{\pm}(t)} - \frac{Q_{\pm}^2(t)}{2(1+iR_{\pm}(t))^2} \right) \right] \right\} \quad (3.52)$$

surgem como resultados da aproximação sobre os novos coeficientes que dependem de $f(p_z, m_1, m_2)$. Obviamente, como se pode observar, a consideração das correções de segunda ordem nos termos da Eq. (3.48) não corresponde ao procedimento mais adequado à interpretação dos fenômenos físicos introduzidos pela função $f(p_z, m_1, m_2)$, principalmente quando estamos no limite ultra-relativístico. Na verdade, uma interpretação mais satisfatória das modificações introduzidas pelo formalismo de Dirac é dada quando restringimos a expansão em série de potências da energia $E(p_z, m_i)$ às correções de primeira ordem, conforme veremos a seguir.

3.3.2 A fórmula de oscilação sem *spreading* - Fenomenologia

Neste caso, para a obtenção da forma explícita de $DFO(t)$ não levaremos em conta o efeito de *spreading* dos pacotes de ondas, nem tampouco a presença de uma fase de oscilação adicional, os quais, conforme analisamos no capítulo 2, surgem dos termos de segunda ordem em uma expansão em série de potências da energia. Desta maneira, a expressão para a energia ficaria restrita a

$$E(p_z, m_i) \approx E_i + v_i (p_z - p_0) . \quad (3.53)$$

e, conseqüentemente, poderíamos escrever

$$f(p_z, m_1, m_2) \approx \frac{1}{2} \left\{ 1 - v_1 v_2 \left(1 + \frac{m_1 m_2}{p_0^2} \right) + v_1 v_2 \left[(v_1^2 + v_2^2) \left(1 + \frac{m_1 m_2}{p_0^2} \right) - 2 \right] \frac{p_z - p_0}{p_0} \right\} , \quad (3.54)$$

bem como

$$\epsilon_{\pm}(p_z, m_1, m_2) \approx E_1 \pm E_2 + (v_1 \pm v_2) (p_z - p_0) . \quad (3.55)$$

Para partículas ultra-relativísticas ($m_i \ll p_0$), poderíamos também utilizar a expressão para as energias e velocidades de grupo dos autoestados de massa, centradas respectivamente em E_i e v_i ,

$$E_i \approx p_0 + \frac{m_i^2}{2p_0} \quad \text{e} \quad v_i \approx 1 - \frac{m_i^2}{2p_0^2} .$$

Isto implica em

$$\begin{aligned} f^{[1]}(p_z, m_1, m_2) &\approx \left(\frac{\Delta m}{2p_0} \right)^2 \left(1 - 2 \frac{p_z - p_0}{p_0} \right), \\ \epsilon_+^{[1]}(p_z, m_1, m_2) &\approx 2p_0 \left[1 + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4p_0^2} + \frac{p_z - p_0}{p_0} \left(1 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{4p_0^2} \right) \right], \\ \epsilon_-^{[1]}(p_z, m_1, m_2) &\approx \frac{\Delta m^2}{2p_0} \left[1 - \frac{p_z - p_0}{p_0} \right]. \end{aligned}$$

onde $(\Delta m)^2 = (m_1 - m_2)^2$. Finalmente, após algumas manipulações matemáticas simples seguidas de integrações *gaussianas*, encontramos

$$\begin{aligned} \text{DFO}(t) &\approx \exp \left[- \left(\frac{\Delta m^2 t}{2\sqrt{2}ap_0^2} \right)^2 \right] \left\{ \left[1 - \left(\frac{\Delta m}{2p_0} \right)^2 \right] \cos \left[\frac{\Delta m^2}{2p_0} t \right] + \left(\frac{\Delta m}{2p_0} \right)^2 \frac{\Delta m^2}{a^2 p_0^3} t \sin \left[\frac{\Delta m^2}{2p_0} t \right] \right\} \\ &+ \exp \left[- \frac{t^2}{2a^2} \left(2 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{2p_0^2} \right)^2 \right] \left(\frac{\Delta m}{2p_0} \right)^2 \left\{ \cos \left[p_0 t \left(2 + \frac{m_1^2 + m_2^2}{2p_0^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2p_0 t}{(ap_0)^2} \left(2 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{2p_0^2} \right) \sin \left[p_0 t \left(2 + \frac{m_1^2 + m_2^2}{2p_0^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Da mesma maneira como observamos anteriormente, as funções oscilantes que multiplicam a segunda função exponencial na Eq. (3.56) surgem devido à interferência entre as soluções de frequências positiva e negativa da equação de Dirac. Isto produz oscilações com frequências muito altas e leva a um comportamento muito semelhante ao produzido pelo efeito de *zitterbewegung* [25]. Para fins de ilustração, apesar de um pouco distante da fenomenologia, porém, privilegiando a visualização dos novos efeitos, escolhemos diferentes valores para o parâmetro adimensional ap_0 que caracteriza a largura do pacote de ondas bem com diferentes valores para o parâmetro $\frac{\Delta m^2}{4p_0^2}$ que caracteriza o regime de propagação e o caráter *standard* de oscilação e, na figura 3.2 graficamos a probabilidade de oscilação de sabores $P_{\text{Dirac}}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L)$ para $ap_0 = 10, 20, 50$ e $\frac{\Delta m^2}{4p_0^2} = 0.1, 0.05, 0.01$ além de fixarmos o parâmetro $\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0.99$ que equivale à afirmação de que $m_1 \gg m_2$. O comprimento de oscilação que caracteriza essas frequências muito altas (*very high frequency*) é parametrizado como $L_{\text{osc}}^{\text{VHF}} \approx \frac{2\pi}{p_0}$. Obviamente, $L_{\text{osc}}^{\text{VHF}}$ é muito menor do que o comprimento de oscilação *standard* que é descrito como $L_{\text{osc}}^{\text{Std}} = \frac{4\pi p_0}{\Delta m^2}$. Isto significa que a partícula em propagação exibe uma violenta flutuação quântica no valor do seu número quântico de sabor cujo valor médio também oscila conforme $L_{\text{osc}}^{\text{Std}}$. Em regimes relativísticos, exceto para intervalos de tempos muito próximos do momento da criação do autoestado de sabor, $t \sim 0$, a contribuição destas oscilações ultra-rápidas sobre a probabilidade de oscilação *standard* é praticamente nula. Para entender melhor tal suposição devemos considerar que uma medida experimental ocorre somente após um intervalo de tempo $t \approx L$ para partículas ultra-relativísticas. As condições de observabilidade impõem que a distância de propagação L precisa ser bem maior do que a localização a do pacote de ondas. Uma vez que a segunda exponencial desaparece quando $L \gg a$, para distâncias mensuráveis, a fórmula efetiva para conversão de sabores não apresentará tais termos de oscilações com

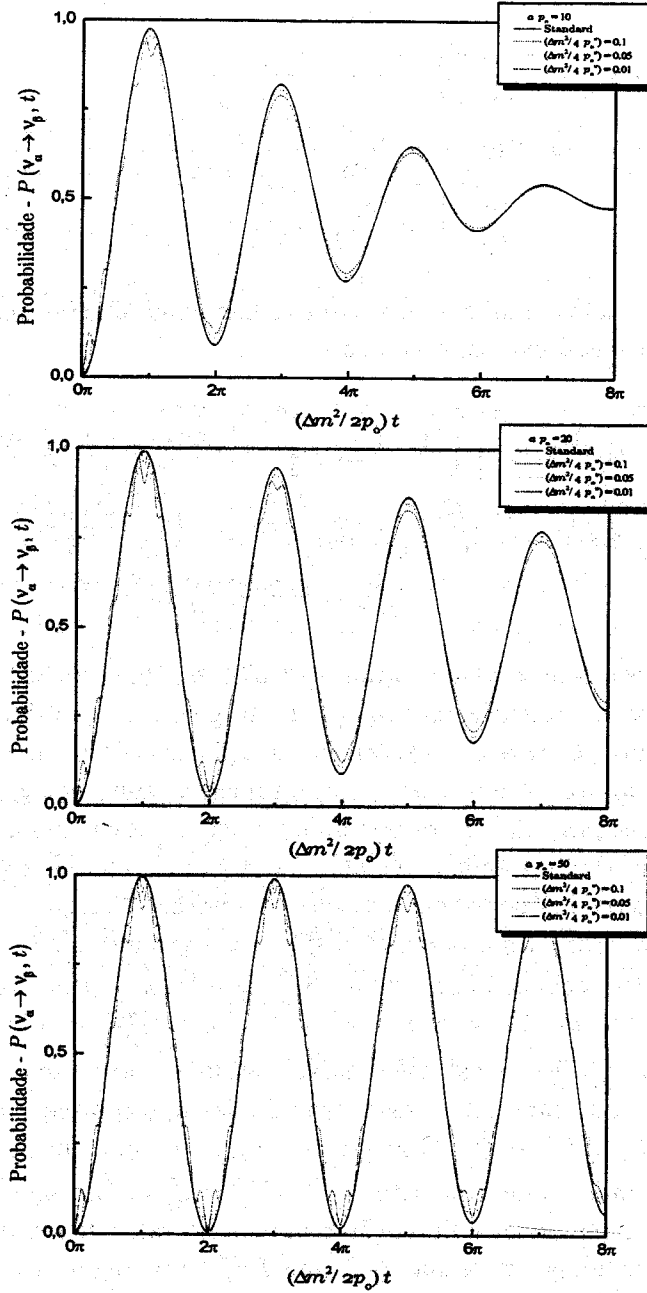


Figura 3.2: A probabilidade de oscilação de sabores permeada pelo fenômeno de oscilações ultra-rápidas decorrente da interferência entre frequências positivas e negativas soluções da equação de Dirac. Observamos que para intervalos de tempo muito próximos do instante da criação do autoestado de sabor, $t \sim 0$, a modificação causada por estas oscilações ultra-rápidas sobre a probabilidade de oscilação *standard* é mais significativa. Em regimes ultra-relativísticos, conforme observamos pelos valores decrescentes de $\frac{\Delta m^2}{4 p_0^2}$, o efeito tende a desaparecer. Nesta figura fixamos a relação entre as massas como sendo $\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0.99$.

freqüências muito altas e poderá ser escrita como

$$P_{Dirac}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L) \approx \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{\Delta m^2 L}{2\sqrt{2}ap_0^2} \right)^2 \right] \left\{ \left[1 - \left(\frac{\Delta m}{2p_0} \right)^2 \right] \cos \left[\frac{\Delta m^2}{2p_0} L \right] + \left(\frac{\Delta m}{2p_0} \right)^2 \frac{\Delta m^2}{a^2 p_0^3} L \sin \left[\frac{\Delta m^2}{2p_0} L \right] \right\} \right\} \quad (3.57)$$

Para distâncias que estão restritas ao intervalo $a \ll L \ll a \frac{2\sqrt{2}p_0^2}{\Delta m^2}$, nós observamos o *slippage* mínimo entre os pacotes de ondas. Neste caso, nós podemos seguramente aproximar a probabilidade de oscilação por

$$P_{Dirac}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L) \approx \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{\Delta m^2 L}{2\sqrt{2}ap_0^2} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{\Delta m}{2p_0} \right)^2 \right] \cos \left[\frac{\Delta m^2}{2p_0} L \right] \right\}, \quad (3.58)$$

contudo, nós reenfatizamos que esta expressão *não* é válida para $T \approx L \sim 0$ quando as oscilações muito rápidas são ainda relevantes ($L < a$). Se compararmos o resultado da Eq. (3.58) com a probabilidade de oscilação para partículas escalares dada pela Eq. (2.37), notaremos um desvio da ordem de $\left(\frac{\Delta m}{2p_0} \right)^2$ que aparece como um coeficiente adicional multiplicando a função co-seno. Para verificar o que ocorre sob circunstâncias fenomenológicas mais comuns, quando se trata de oscilações no vácuo, ao introduzirmos os dados referentes às diferenças de massas para neutrinos solares e neutrinos atmosféricos, podemos retornar a expressão de $f(p_z, m_1, m_2)$ que aparece no termo de interferência (3.44) e reescrevê-la como

$$f(p_z, m_1, m_2) = \frac{E(p_z, m_1)E(p_z, m_2) - p_z^2 - m_1 m_2}{2 E(p_z, m_1)E(p_z, m_2)} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{p_z \Delta m}{p_z^2 + m_1 m_2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \quad (3.59)$$

e assim analisá-la com valores de $\Delta m^2 \approx 10^{-3} \text{ eV}^2$ para neutrinos atmosféricos [10] e de $\Delta m^2 \approx 10^{-5} \text{ eV}^2$ para neutrinos solares [11] ou de reatores [12]. Se o valor médio do momento do pacote de ondas, p_0 , for da ordem de 1 keV e para massas da ordem ou menor que 1 eV , obtidos das observações experimentais [8], teremos

$$f(p_0, m_1, m_2) \approx \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{\Delta m^2}{2p_0 \tilde{m}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \approx \left(\frac{\Delta m^2}{4p_0 \tilde{m}} \right)^2 \quad (3.60)$$

ou seja, para o caso em que $\Delta m^2 \approx 10^{-3} \text{ eV}^2$, temos $f(p_0, m_1, m_2) \approx 10^{-13}$, e para o caso em que $\Delta m^2 \approx 10^{-5} \text{ eV}^2$, temos $f(p_0, m_1, m_2) \approx 10^{-17}$ ou seja, conforme já havíamos considerado no início desta seção, estas correções assumem valores irrelevantes. Somente para neutrinos com energias extremamente baixas, como o que possivelmente ocorre para o *background* cosmológico de neutrinos (*neutrino cosmological background*), as correções decorrentes da aplicação do formalismo segundo a equação de Dirac podem introduzir aspectos fenomenológicos interessantes. Alguns autores apontam que estas correções não-perturbativas da fórmula de oscilação podem contribuir de maneira bastante específica e crucial em novos contextos de outras propriedades físicas como, por exemplo, na determinação do valor exato da constante cosmológica do universo [101]. Além disso, não está

descartada a hipótese de podermos evidenciar fenomenologicamente estes efeitos em modelos para o fenômeno de oscilação quântica de sabores onde interações com a matéria são devidamente consideradas.

3.3.3 Considerações sobre construção do pacote de ondas inicial e o efeito de *zitterbewegung*.

O movimento de pacotes de ondas *gaussianos*, de acordo com a equação de Schroedinger unidimensional para uma partícula livre, mostra o já conhecido fenômeno de *spreading* conforme observamos na Fig. 2.1. De acordo com a equação de Schroedinger, o valor médio da posição $\langle z \rangle$ e o valor médio do momento $\langle p_z \rangle$ do pacote de ondas obedecem as regras da mecânica clássica. Além disso, uma importante característica corresponde ao fato de que o *spreading* não depende da velocidade média do pacote de ondas. Ao longo deste capítulo, discutimos o fenômeno de oscilação quântica de sabores segundo a prescrição com pacotes de ondas de Dirac sem, no entanto, observar o comportamento analítico da evolução espaço-temporal de um único autoestado de massa descrito por um pacote de ondas solução da equação de Dirac. De fato, mesmo com uma distribuição *gaussiana* inicial, pela forma apresentada na Eq. (3.41), teríamos que recorrer a algum método numérico para observarmos que a evolução temporal segundo a equação de Dirac desse pacote de ondas apresentaria um comportamento discrepante com relação ao fenômeno usual de *spreading*. Como não pretendemos nos distanciar da proposta principal deste trabalho, que envolve o fenômeno de oscilação quântica de sabores e, além do mais, motivados por uma análise teórica mais cuidadosa, procuraremos entender a origem desta distorções e qual a sua relação com o efeito de *zitterbewegung*.

Para a Hamiltoniana de Dirac de uma partícula (livre) relativística descrita em uma dimensão espacial (z) por

$$H_0 = -i \gamma_0 \gamma_3 \partial_z + \gamma_0 m, \quad (3.61)$$

com $c = \hbar = 1$, o efeito de *zitterbewegung* pode ser observado quando computamos o valor esperado de um observável z ,

$$\begin{aligned} z(t) &= \exp[i H_0 t] z \exp[-i H_0 t] \\ &= z(0) + v_z^{cl} t + Z(t) \end{aligned} \quad (3.62)$$

onde o operador

$$v_z^{cl} = p_z H_0^{-1} \quad (3.63)$$

determina o valor da velocidade descrita classicamente e

$$Z(t) = (2i H_0)^{-1} (\exp[2i H_0 t] - 1) (\gamma_0 \gamma_3 - v_z^{cl}) \quad (3.64)$$

descreve o movimento de *zitterbewegung*. Ao considerarmos o operador posição, segundo a prescrição de Heisenberg, a velocidade instantânea seria dada por

$$\frac{d}{dt}(z(t)) = -i[H_0, z] = \gamma_0 \gamma_3 \quad (3.65)$$

onde, no caso em que o espinor inicial w corresponda a um autoestado de γ_3 , com autovalores ± 1 , a velocidade instantânea seria dada por $\pm 1 (\equiv \pm c)$.

O operador $Z(t)$ acima descrito anticomuta com H_0 . Isto significa que $Z(t)$ “mapeia” estados com energia positiva em estados com energia negativa. Além disso, a quantidade $\langle \psi | Z(t) | \psi \rangle$ assume valores não nulos somente quando estados descritos por $\psi(z, t)$ contêm componentes de frequências positiva e negativa, ou seja, pacotes de ondas localizados em diferentes regiões de momento ou de posição são ortogonais. Este operador $Z(t)$ corresponde a um operador de multiplicação no espaço de momentos, de modo que o mesmo não modifica as propriedades de localização da distribuição de momentos, isto é, o efeito de *zitterbewegung* será relevante somente enquanto a intersecção entre componentes de frequências com sinais opostos, $\psi^+(t)$ e $\psi^-(t)$, permanecer ocorrendo ao longo do tempo. No espaço de posições, o operador $Z(t)$ é não local, porém, o mesmo não altera significativamente a localização de um pacote de ondas $\psi(z, t)$ e faz com que $Z(t) \psi(z, t)$ esteja localizado na vizinhança onde o valor de $\psi(z, t)$ é relevante.

De modo a ilustrar estas características, imaginamos primeiramente a situação onde assumimos as distribuições de momento $b^1(p_z, m_i)$ e $d^{1*}(-p_z, m_i)$ descritas respectivamente pelas duas expressões de (3.38), no caso em que $p_0 = 0$ e $s = 1$. Neste caso, o valor esperado do momento assim como o da velocidade do pacote de ondas, calculados para cada instante de tempo t , assumiriam valores que representam uma pequena flutuação em torno da origem $p_z (= v_z) = 0$. Estas flutuações são características do efeito de *zitterbewegung* e são as responsáveis pela distorção do pacote de ondas (em repouso). Se, para esta situação, analisamos separadamente cada uma das distribuições de momentos $b^1(p_z, m_i)$ e $d^{1*}(-p_z, m_i)$, conforme apresentamos na Fig. 3.3, no caso particular em que $w = (10 - 10)$, notamos algo bastante elucidativo sobre este comportamento: a parte que corresponde à distribuição $b^1(p_z, m_i)$, que apresenta um deslocamento positivo em relação à origem $p_z = 0$ e acompanha as componentes de ondas planas com energia positiva, $E(p_z, m_i)$, leva à obtenção de uma velocidade média correspondente positiva; a parte que corresponde à distribuição $d^{1*}(-p_z, m_i)$, que apresenta um deslocamento negativo em relação à origem $p_z = 0$ e acompanha as componentes de ondas planas com energia negativa, $-E(p_z, m_i)$, também leva à obtenção de uma velocidade média correspondente positiva uma vez que

$$\langle v_z \rangle = \left\langle \frac{p_z}{E(p_z, m_i)} \right\rangle = \left\langle \frac{-p_z}{-E(p_z, m_i)} \right\rangle. \quad (3.66)$$

Isto faz com que o comportamento de oscilações rápidas se perpetue para intervalos de tempo bastante longos. Ao prosseguirmos com a mesma análise para o caso em que $p_0 \neq 0$, o qual de fato nos interessa, ao assumirmos as mesmas condições anteriores sobre o spinor

w , as distribuições de momentos $|b^1(p_z, m_i)|$ e $|d^{1*}(-p_z, m_i)|$ teriam uma intersecção completa conforme ilustramos na Fig. 3.4. Neste caso, tanto para a distribuição de momentos que acompanha as componentes de energia positiva, como para aquela que acompanha as componentes de energia negativa, o valor médio do momento será positivo, com pequenas flutuações em torno de p_0 . Imediatamente podemos notar, a partir de uma analogia à expressão (3.66), que isto implicaria em pacotes de ondas com velocidades opostas. Sob tais condições, o efeito de *zitterbewegung* poderá ser observado somente enquanto, no espaço de posições, continuar havendo a intersecção entre os pacotes de ondas $\psi^+(t)$ e $\psi^-(t)$. Desta forma, os pacotes de ondas desacoplados, associados a frequências de sinais opostos, têm velocidades opostas, e isto faz com que as oscilações do tipo *zitterbewegung* desapareça, as vezes muito rapidamente, com o passar do tempo.

Apenas por completeza, não deixaremos de analisar o caso em que, ao construirmos as funções $b^1(p_z, m_i)$ e $d^{1*}(-p_z, m_i)$, assumimos distribuições de momentos centradas em valores "diametralmente" opostos, p_0 e $-p_0$. Neste caso, porém, não seria possível descrever o estado inicial na forma de $\psi_i(z, 0)$ como a transformada de Fourier de $\varphi(p_z - p_0)w$ da expressão (3.37). Além do mais, o efeito de *zitterbewegung* não pode ser observado uma vez que não temos intersecção entre distribuições de momento.

Antes de finalizarmos, ainda é pertinente um comentário sobre a forma do espinor constante inicial w . Da análise anterior, é possível inferir que, ao mudarmos a configuração de w e, conseqüentemente, de $b^1(p_z, m_i)$ e $d^{1*}(-p_z, m_i)$, estaremos alterando o caráter de oscilação de *zitterbewegung* característicos dos pacotes de ondas de Dirac. Quando nos voltamos para o problema de oscilações devido a interferências entre autoestados de massa, nos deparamos com termos não nulos do tipo $\psi_1^{+\dagger}(z, t) \psi_2^-(z, t)$ e $\psi_1^{-\dagger}(z, t) \psi_2^+(z, t)$ (e seus harmônicos conjugados), os quais caracterizam oscilações rápidas similares àquelas decorrentes do efeito de *zitterbewegung*. Destes termos, a escolha relevante do vínculo aparece na entrada dos valores de w_1 (associado a $\psi_1(z, t)$) e w_2 (associado a $\psi_2(z, t)$) quando calculamos $w_1^\dagger w_2$ (ou seu harmônico conjugado).

Ocorre que, novamente, ao assumirmos a criação instantânea de um autoestado *puro* de sabor ν_α em um tempo $t = 0$, em uma região localizada em torno da coordenada espacial $z = 0$, se observarmos a expressão (3.32), devemos estabelecer a seguinte condição de contorno,

$$\psi_1(z, 0) = \psi_2(z, 0), \quad (3.67)$$

de maneira que, a partir da expressão (3.31), obteremos

$$\exp[-i p_1 z] w_1 = \exp[-i p_2 z] w_2 \quad (3.68)$$

que, na prática, se traduz nas condições

$$p_{z1} = p_{z2} = p_0 \quad \text{e} \quad w_1 = w_2 = w. \quad (3.69)$$

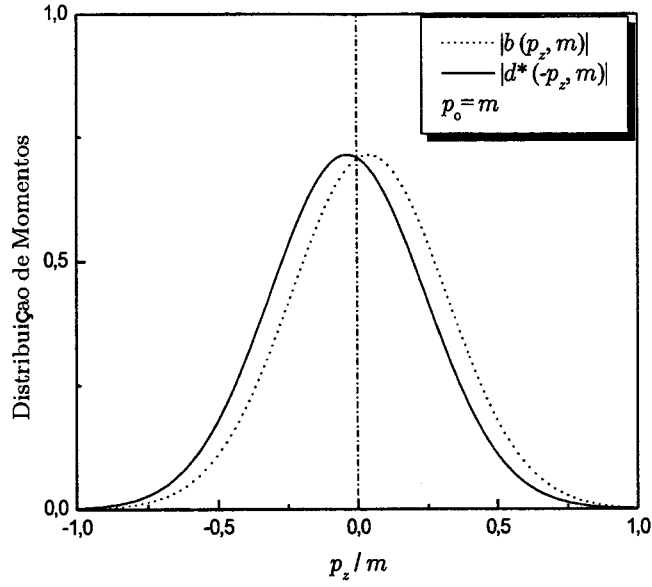


Figura 3.3: Distribuições de momentos para as partes correspondentes de energia positiva, $|b^1(p_z, m_i)|$, e de energia negativa, $|d^{1*}(-p_z, m_i)|$, no caso em que $p_0 = 0$, $s = 1$, $w = (10 - 10)$ e $m_i a = 1$.

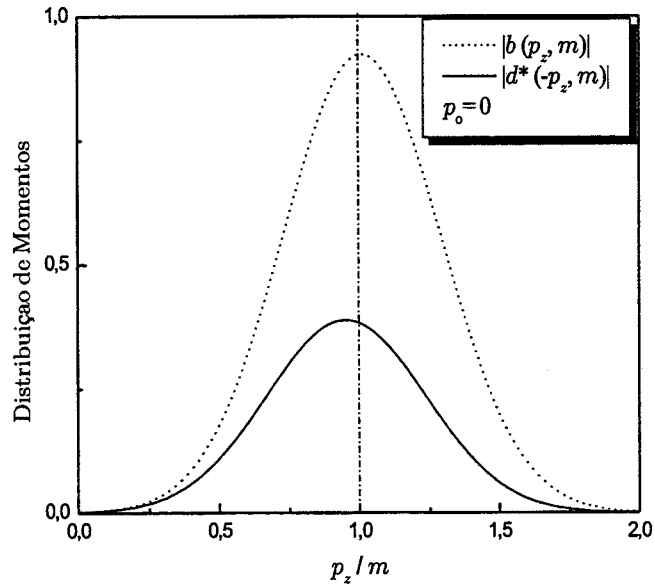


Figura 3.4: Distribuições de momento para as partes correspondentes de energia positiva, $b^1(p_z, m_i)$, e de energia negativa, $d^{1*}(-p_z, m_i)$, no caso em que $p_0 \neq 0$, $s = 1$, $w = (10 - 10)$ e $m_i a = 1$.

qualquer que seja a configuração de w , de modo a termos prontamente estabelecida a condição sobre o estado inicial como um autoestado de sabor ν_α

$$\Psi(z, 0) = \psi_1(z, 0) \nu_\alpha. \quad (3.70)$$

Trata-se de um resultado que, de fato, como outrora observamos, não depende de uma escolha específica da configuração do espinor inicial w , escolha esta que, entretanto, passa a ser relevante no estudo de oscilações quirais abordadas no capítulo 4.

3.4 Confronto com os resultados de teoria quântica de campos (TQC) no formalismo de pacotes de ondas *externos*.

Nesta seção, pretendemos estabelecer uma correspondência tênue entre os resultados apresentados na seção anterior e os resultados proporcionados por um tratamento com TQC propriamente desenvolvido segundo o formalismo com pacotes de ondas *externos*. De fato, na literatura, já foi extensivamente demonstrado que uma partícula em oscilação não pode ser tratada isoladamente [18, 19, 26]. O processo de oscilação precisa ser tratado globalmente, isto é: estados oscilantes se tornam estados *intermediários* que não são observados diretamente mas que se propagam entre uma fonte e um detector. A idéia passa a ser implementada em uma TQC quando estes estados *intermediários* oscilantes são representados por linhas internas de um diagrama de Feynman [64] ao mesmo tempo em que se acoplam com as partículas interagentes que representam a fonte/detector e são, neste caso, descritas como pacotes de ondas *externos* [3, 19]. Sob esta prescrição, um processo de interação fraca com conversão de sabor que ocorre com uma partícula intermediária, eventualmente um neutrino, pode ser ilustrado por

$$p_I \rightarrow p_F + \alpha + \nu_\alpha \text{ (oscilação)} \quad \nu_\beta + D_I \rightarrow \beta + D_F \quad (3.71)$$

onde p_I e p_F (D_I e D_F) são, respectivamente, os estados iniciais e finais na produção (detecção) das partículas envolvidas. A amplitude da função de onda que representa este processo é descrita por

$$\mathcal{A} = \langle p_F, D_F | \mathbf{T} (\exp [-i \int dx^4 \mathcal{H}_I]) - 1 | p_I, D_I \rangle \quad (3.72)$$

onde $\mathcal{H}_I$ é o Hamiltoniano de interação para a partícula intermediária e $\mathbf{T}$ é o operador de ordenamento temporal [64]. Após algumas manipulações matemáticas [3], tal amplitude pode ser representada pela integral

$$\mathcal{A} = \int \frac{dE d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^4} F(E, \mathbf{p}) G(E, \mathbf{p}, t_D, t_P) \exp[i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_P)] \quad (3.73)$$

onde a função $F(E, \mathbf{p})$ representa a intersecção entre os pacotes de ondas que entram e os pacotes de ondas que saem, ambos na posição da fonte e na posição do detector, e a função de Green no espaço de momentos, $G(E, \mathbf{p}, t_D, t_P)$, representa o propagador fermiônico que

carrega a informação do processo de oscilação. A função de *overlap* é independente dos tempos e posições de produção e detecção mas depende dos vetores de momento de entrada e saída.

De certa maneira, as condições físicas da fonte e do detector, em termos dos intervalos espaço-temporais, são melhores definidas nesta forma com pacotes de ondas *externos* do que com pacotes de ondas *intermediários*. Por outro lado, para entender o processo de oscilação, é necessário recuperar a definição de combinação de estados quânticos (*mixing*). Na verdade, o conceito é similar quando tratamos de uma TQC, exceto pelo fato de que é aplicado a campos e não a estados físicos. Esta diferença nos permite superar o problema que aparece quando definimos uma base de autoestados de sabores diferente de uma base de autoestados de massas [3]. Em coordenadas espaciais de uma dimensão, a combinação de estados quânticos é ilustrada por meio de uma transformação unitária

$$\psi_\sigma(z, t; \theta) = \mathcal{G}^{-1}(\theta; t) \psi_i(z, t) \mathcal{G}(\theta; t) \quad (3.74)$$

que resulta da não coincidência entre a base de sabores ($\sigma = \alpha, \beta$) e a base de massas ($i = 1, 2$). A Eq. (3.74) resulta na equação Eq. (2.4) quando o gerador $\mathcal{G}(\theta; t)$ das transformações de simetria em questão é descrito por [55]

$$\mathcal{G}(\theta; t) = \exp \left[\theta \int dz (\psi_1(z, t) \psi_2(z, t) - \psi_2(z, t) \psi_1(z, t)) \right]. \quad (3.75)$$

Ao tomarmos a representação unidimensional da Eq. (3.73), o propagador $G(E, p_z, t_D, t_P)$ pode também ser escrito em uma base de autoestados de sabor

$$G^{\alpha\beta}(\theta; E, p_z, T) = \mathcal{G}^{-1}(\theta; t) G(E, p_z, T) \mathcal{G}(\theta; t) = \mathcal{G}^{-1}(\theta; t) G(E, p_z, t_D, t_P) \mathcal{G}(\theta; t) \quad (3.76)$$

com $T = t_D - t_P$.

Em particular, segundo o modelo de Blasone e Vitiello (BV) [55, 57], a definição de um espaço de Fock para autoestados de sabor se torna possível e uma amplitude não-perturbativa de oscilação de sabor pode ser obtida. Neste caso, a (densidade) Lagrangiana completa é dividida em uma Lagrangiana de propagação,

$$\mathcal{L}_p(z, t) = \bar{\psi}_1(z, t) (i \not{\partial} - m_1) \psi_1(z, t) + \bar{\psi}_2(z, t) (i \not{\partial} - m_2) \psi_2(z, t), \quad (3.77)$$

e uma Lagrangiana de interação,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i(z, t) = & \bar{\psi}_\alpha(z, t; \theta) (i \not{\partial} - m_\alpha) \psi_\alpha(z, t; \theta) + \bar{\psi}_\beta(z, t; \theta) (i \not{\partial} - m_\beta) \psi_\beta(z, t; \theta) \\ & - m_{\alpha\beta} (\bar{\psi}_\alpha(z, t; \theta) \psi_\beta(z, t; \theta) + \bar{\psi}_\beta(z, t; \theta) \psi_\alpha(z, t; \theta)), \end{aligned} \quad (3.78)$$

onde

$$m_{\alpha(\beta)} = m_{1(2)} \cos^2 \theta + m_{2(1)} \sin^2 \theta \quad \text{e} \quad m_{\alpha\beta} = (m_1 - m_2) \cos \theta \sin \theta.$$

Em geral, estes dois subconjuntos de Lagrangianas podem ser distinguidos se a transformação de sabor representa uma operação de simetria de $\mathcal{L}_i(z, t)$ mas não representa uma

operação de simetria de $\mathcal{L}_p(z, t)$. A mistura de estados ocorre se o propagador construído a partir de $\mathcal{L}_p(z, t)$, ao mesmo tempo em que se representa a criação de uma partícula de sabor α no ponto z e a aniquilação de uma partícula de sabor β no ponto z' , é diagonal, ou seja, é não nulo, para $\beta = \alpha$. Os campos livres $\psi_i(z, t)$ podem ser quantizados da maneira usual; para tanto, basta escrevermos as distribuições de momento $b^s(p_z, m_i)$ e $d^{s*}(-p_z, m_i)$ na Eq. (2.44) como os operadores de criação e aniquilação, respectivamente, $B^s(p_z, m_i)$ e $D^{s\dagger}(-p_z, m_i)$. Os campos interagentes (sabor) passam, então, a ser escritos como

$$\psi_\sigma(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \exp[ip_z z] \sum_{s=1,2} \{B_\sigma^s(p_z; t) u_\sigma^s(p_z; t) + D_\sigma^{s*}(-p_z; t) v_\sigma^s(-p_z; t)\}, \quad (3.79)$$

onde os novos operadores de criação e aniquilação satisfazem as relações canônicas de anti-comutação definidas por meio das transformações de Bogoliubov [57] dadas explicitamente por

$$B_\sigma^s(p_z; t) = \mathcal{G}^{-1}(\theta; t) B^s(p_z, m_i) \mathcal{G}(\theta; t) \quad \text{e} \quad D_\sigma^s(-p_z; t) = \mathcal{G}^{-1}(\theta; t) D^s(-p_z, m_i) \mathcal{G}(\theta; t). \quad (3.80)$$

Segundo a prescrição do modelo BV [55], que leva em consideração as definições até aqui apresentadas, foi demonstrado [56] que a fórmula de conversão de sabor pode ser escrita como

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = |\{B_\beta^s(p_0; t), B_\alpha^s(p_0; t)\}|^2 + |\{D_\beta^s(-p_0; t), B_\alpha^s(p_0; t)\}|^2 \quad (3.81)$$

que é calculada sem a consideração das condições de localização impostas pelos pacotes de ondas, ou seja, é obtida quando assumimos $p_z \approx p_0$.

Quando a forma explícita dos operadores de criação e aniquilação de sabores são substituídas na Eq. (3.81), pode ser demonstrado que a fórmula de oscilação de sabores passa a ser escrita como [57]

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \{ [1 - f(p_0, m_1, m_2)] \cos[\epsilon_-(p_0, m_1, m_2) t] \\ &\quad + f(p_0, m_1, m_2) \cos[\epsilon_+(p_0, m_1, m_2) t] \} \\ &\approx \sin^2(2\theta) \left\{ \left[1 - \left(\frac{\Delta m}{2p_0} \right)^2 \right] \sin^2 \left[\frac{\Delta m^2}{4p_0} t \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\Delta m}{2p_0} \right)^2 \sin^2 \left[p_0 t \left(1 + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4p_0^2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.82)$$

onde a última aproximação aparece quando tomamos o limite ultra-relativístico, $p_0 \gg \sqrt{m_1 m_2}$. Após algumas manipulações matemáticas simples, a Eq. (3.82) leva exatamente à probabilidade de oscilação $P_{Dirac}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L)$ calculada a partir da Eq. (3.56) quando assumimos que a largura a do pacote de ondas tende para infinito e $t \approx L$. Esta nova fórmula de oscilação tende à fórmula *standard* (2.49) no limite ultra-relativístico. Se os autoestados de massa fossem aproximadamente degenerados, poderíamos nos focar no caso em que partículas oscilantes em um regime não-relativístico de propagação correspondessem a autoestados de massa muito distintos. Sob tais condições, a teoria quântica nos diz que as condições para a observação de interferência desaparecem.

Sendo assim, como já apontamos anteriormente, os efeitos estão, sob condições reais de medida, muito longe da observabilidade. Além do mais, apesar do tratamento com TQC, tal falta de observabilidade precisa ser superada com a implementação de pacotes de ondas *externos*; em outras palavras, por meio da forma explícita da Eq. (3.73) para férmions. Tal procedimento foi já aplicado por Beuthe para partículas escalares [3] e, em uma análise muito particular, com base nos cálculos do modelo BV e nos resultados de nosso modelo com pacotes de ondas *intermediários*, poderia ser estendido para partículas fermiônicas, entretanto, foge completamente do escopo deste trabalho.

3.5 Considerações Importantes

Neste capítulo, nós determinamos as modificações que aparecem na fórmula de conversão de sabores que surgem devido à introdução da forma espinorial das funções de onda que descrevem uma partícula fermiônica, no caso, um neutrino. Para descrever a evolução temporal de um autoestado de massa, nós introduzimos pacotes de ondas construídos por meio da superposição de soluções da equação de Dirac.

Através de um estudo analítico envolvendo pacotes de ondas *gaussianos*, nós calculamos os novos efeitos que aparecem explicitamente na fórmula de conversão de sabores. Este estudo levou à conclusão de que a natureza fermiônica das partículas juntamente com a interferência entre as componentes de frequência positiva e negativa de um pacote de ondas que caracteriza um autoestado de massa modificam a expressão *standard* para a probabilidade de oscilação de sabores que, em princípio, é obtida quando implicitamente se assume uma natureza escalar das partículas envolvidas no processo. De toda maneira, sob certas condições particulares, isto é, sob um regime ultra-relativístico de propagação e com um pacote de ondas descrito a partir de uma distribuição de momentos altamente centrada, estas modificações introduzem fatores de correção proporcionais a $\left(\frac{\Delta m}{2p}\right)^2$ que, de fato, são muito pequenas no regime ultra-relativístico.

Sabemos, contudo, que um tratamento mais rigoroso do mecanismo de oscilação precisa ser feito sob o formalismo de uma TQC. No entanto, a literatura aponta uma não uniformidade nos tratamentos com TQC. Os mesmos se apresentam segmentados em quatro categorias [3]:

i) Os modelos com pacotes de ondas *externos*, o qual abordamos na seção anterior, são apresentados sob diferentes contextos [66, 67] e, em particular, sob o contexto de um deles [19], fora demonstrado que é impossível a construção de um espaço de Fock [58] para autoestados de sabor pois não existiria uma correspondência entre operadores de criação e aniquilação satisfazendo concomitantemente as relações canônicas de (anti)comutação. Conceitualmente, isto arruinaria o tratamento com pacotes de ondas *intermediários*, porém,

não acarretaria problemas em um tratamento com pacotes de ondas *externos* [19].

ii) Os modelos com condições de contorno estacionárias compreendem uma classe menor de modelos onde as condições estacionárias levam a um valor único para a energia da partícula que se propaga [68].

iii) Os modelos do tipo fonte-propagador consistem na utilização de um propagador no espaço de configurações para a fonte mas não para o detector. Como os pacotes de ondas *externos* não aparecem, problemas de conversão espaço-temporal não podem ser evitados no estudo de oscilações de neutrinos [69]

Observamos que, em todas essas prescrições, a descrição das partículas oscilantes como espinores soluções da equação de Dirac não foi ainda elaborada de maneira completa e precisa no formalismo com TQC.

iv) O modelo de Blasone e Vitiello (BV) [55, 65] para oscilações quânticas de neutrinos (e outras partículas) corresponde à tentativa mais bem sucedida dentro deste escopo. Em tal modelo, preocupa-se em definir um espaço de Fock para autoestados de um Hamiltoniano de interação fraca, ou seja, autoestados de sabor, e obter uma fórmula de oscilação não perturbativa. Os operadores de criação e aniquilação de sabor, que satisfazem as relações de (anti)comutação, são definidos por meio de transformações de Bogoliubov. Como resultado, novas fórmulas de oscilação são obtidas para férmions e bósons com frequência de oscilação dependendo não somente da diferença mas também da soma das energias dos diferentes autoestados de massa.

Ao utilizarmos pacotes de ondas de Dirac, nós reproduzimos uma fórmula de oscilação de probabilidades com a mesma estrutura matemática daquela obtida no modelo BV [55, 65]. O estudo com pacotes de ondas de Dirac nos habilita a quantificar separadamente cada novo efeito que aparece analiticamente descrito na fórmula de oscilação. Ao impormos uma condição de contorno inicial que determina um autoestado puro de sabor no instante da criação $t = 0$ para qualquer espinor w , nós podemos calcular a contribuição destes novos efeitos sobre o processo de conversão de sabores.

Em particular, notamos que há um termo com uma frequência de oscilação muito alta que depende da soma das energias e introduz uma modificação muito pequena na característica do fenômeno de oscilação. Além disso, a forma espinorial das funções de onda modifica, de uma forma bastante sutil, os coeficientes dos termos de oscilação da fórmula de conversão de sabores.

Para resumir de maneira conclusiva, enfatizamos mais um aspecto conceitual que aparece com o formalismo de Dirac. Os pacotes de ondas de Dirac permitem o desenvolvimento do estudo de oscilações quirais [20]. No modelo *standard* para oscilação de sabores, neutrinos com quiralidade positiva não se acoplam com as correntes de interação fraca. No limite ultra-relativístico, um estado com helicidade *left-handed* é praticamente

um estado com quiralidade negativa. Se as interações que ocorrem na fonte e no detector são quirais, somente a componente com quiralidade negativa contribui com a propagação. Portanto, oscilações quirais podem modificar a fórmula de oscilação. É justamente neste contexto que introduzimos o próximo capítulo onde procuramos acoplar a possibilidade de oscilações quirais ao mecanismo quântico de oscilação de sabores em um estudo bastante particularizado.

Capítulo 4

Oscilação de quiralidade acoplada à oscilação de sabor.

No contexto dos fenômenos de oscilações envolvendo neutrinos, as evidências experimentais vindas do LSND [70] requerem a existência de um quarto neutrino o qual deveria ser inerte (não interagente). De fato, as transições de estados mistos, onde o estado final de um neutrino corresponde a uma mistura quântica de uma componente ativa e uma componente (muito pequena) estéril, são ainda aceitáveis de acordo com os dados experimentais mais recentes [71].

A hipótese de mistura entre as já conhecidas espécies de neutrinos (eletrônico, muônico e tauônico) e neutrinos com uma massa mais elevada não é recente na literatura científica [13, 72]. Ao mesmo tempo, o *spin-flipping* atribuído a alguns mecanismos dinâmicos de inversão de spin [73, 74, 75] chegou a ser englobado no estudo do deficit observacional envolvendo neutrinos solares. Em particular, como consequência de um momento magnético não nulo que interage com um campo eletromagnético externo, neutrinos com helicidade *left-handed* teriam o número quântico correspondente modificado (para *right-handed*). Para partículas ultra-relativísticas que satisfazem a dinâmica da equação de Dirac, a mudança de helicidade é equivalente à mudança de quiralidade. Os neutrinos com quiralidade positiva (*right*) não se acoplam às correntes de carga fraca que “absorvem”¹ neutrinos. Consequentemente, essas partículas se tornam estéreis com respeito às interações fracas. Os efeitos sobre oscilações de sabor devidos a interações com campos magnéticos externos, em um tipo de fenômeno onde a quiralidade tenha sido preservada, também já foram introduzidos na literatura [75], porém, carecem de um estudo teórico pormenorizado. Independentemente da existência de campos externos, como os neutrinos são detectados essencialmente via correntes de carga fraca do tipo V-A (interação vetorial menos pseudo-vetorial (axial)), a oscilação

¹Como em um vértice de interação fraca.

quiral poderia, em princípio, ocupar um espaço significativo na explicação do referido deficit observacional dos neutrinos. Desta maneira, a motivação para o desenvolvimento deste capítulo foi, especificamente, o interesse em oscilações quirais como uma possível complementação da explicação para o deficit observacional de neutrinos solares [71]. Ou seja, para sermos mais objetivos, pretendemos entender como, de fato, oscilações quirais podem efetivamente modificar a fórmula *standard* de oscilação de sabores.

Dentre as discussões propostas neste capítulo, descreveremos o mecanismo de oscilação quiral para neutrinos proposto por De Leo e Rotelli [20]. Neste modelo, os neutrinos permanecem como autoestados de massa, porém, contêm uma componente de quiralidade (positiva) estéril. Os efeitos de oscilação podem ser explicados como uma implicação da interferência entre componentes de frequência positiva e negativa soluções da equação de Dirac em um fenômeno semelhante ao *zitterbewegung* da posição, que emerge nos moldes apresentados no capítulo anterior, isto é, quando soluções da equação de Dirac são usadas para descrever a evolução espaço-temporal de um pacote de ondas. Evidenciamos nossa contribuição científica quando procuramos descrever o mecanismo de oscilação quiral proposto em [20] acoplado ao fenômeno de oscilação quântica de sabores com pacotes de ondas de Dirac apresentado no capítulo anterior.

Como proposta introdutória, apenas ampliamos um pouco a discussão do conceito de quiralidade, descrevemos as analogias no confronto entre os conceitos de quiralidade e helicidade e, por fim, recapitulamos de forma bastante simplificada o quadro geral de modelos de calibre com simetria *left-right* [76].

Para concretizar nosso estudo, após rediscutir o caráter físico da escolha e mesmo da construção do estado inicial envolvido no fenômeno de oscilação, obtemos as modificações na fórmula de conversão de sabores causadas pela consideração efetiva de oscilações quirais no formalismo com pacotes de ondas. Finalizamos o capítulo com uma breve discussão do fenômeno de inversão de spin em comparação ao processo de oscilação quiral. Em particular, procuramos identificar as hipóteses sobre as quais um estudo fenomenológico pode ser elaborado.

4.1 O conceito de transformação quiral.

Para uniformizar a notação na discussão das propriedades quirais dos espinores de Dirac, utilizaremos a representação de Dirac das matrizes *gamma* (γ^μ) descritas por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

de modo que as soluções da equação de Dirac sejam dadas pela expressão (3.7).

A matriz γ^5 de Dirac tem as seguintes propriedades

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\gamma^5)^2 = 1 \quad \text{e} \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (4.2)$$

sendo que a última delas implica na relação de comutação $[\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0$, onde $S^{\mu\nu}$ são os geradores das transformações contínuas de Lorentz. Para estender o estudo das propriedades que envolvem a matriz γ^5 , consideraremos os campos bilineares de Dirac através dos quais podemos definir as densidades de corrente (de simetria) *vetoriais* e *pseudo-vetoriais* dadas respectivamente por

$$j^\mu(z, t) = \bar{\psi}(z, t)\gamma^\mu\psi(z, t) \quad \text{e} \quad j^{\mu 5}(z, t) = \bar{\psi}(z, t)\gamma^\mu\gamma^5\psi(z, t). \quad (4.3)$$

Se assumimos que $\psi(z, t)$ satisfaz a equação de Dirac, podemos calcular o divergente dessas densidades de corrente,

$$\partial_\mu j^\mu(z, t) = (\partial_\mu \bar{\psi}(z, t))\gamma^\mu(\partial_\mu \psi(z, t)) = (i m \bar{\psi}(z, t))\psi + \bar{\psi}(-i m \psi(z, t)) = 0. \quad (4.4)$$

que implica na imediata conservação de $j^\mu(z, t)$. Ao acoplarmos um campo $\psi(z, t)$ de Dirac a um campo eletromagnético, $j_\mu(z, t)$ passa a descrever uma densidade de corrente elétrica.

De maneira similar, podemos calcular

$$\partial_\mu j^{\mu 5}(z, t) = 2 i m \bar{\psi}(z, t)\gamma^5\psi(z, t). \quad (4.5)$$

Se $m = 0$, esta uma, também chamada de densidade de corrente *axial*, também é conservada. Em geral, é comum definir os termos de densidades de corrente *left-L* e *right-R* por meio de combinações lineares com o operador γ^5 ,

$$j_L^\mu(z, t) = \bar{\psi}(z, t)\gamma^\mu\frac{1-\gamma^5}{2}\psi(z, t) \quad \text{e} \quad j_R^\mu(z, t) = \bar{\psi}(z, t)\gamma^\mu\frac{1+\gamma^5}{2}\psi(z, t). \quad (4.6)$$

Somente se $m = 0$, estas seriam densidades de corrente de partículas com caráter de helicidade *left-handed* e *right-handed* e seriam separadamente conservadas. As duas correntes $j^\mu(z, t)$ e $j^{\mu 5}(z, t)$ são as correntes de Noether que correspondem às duas transformações de calibre representadas respectivamente por

$$\psi(z, t) \rightarrow \exp[i\alpha]\psi(z, t) \quad (4.7)$$

e

$$\psi(z, t) \rightarrow \exp[i\alpha\gamma^5]\psi(z, t). \quad (4.8)$$

A primeira delas descreve uma simetria global da Lagrangiana de Dirac. A segunda, chamada de *transformação quiral*, representa uma simetria apenas da parte cinética da Lagrangiana de Dirac. O teorema de Noether ratifica que uma densidade de corrente *axial* relacionada a uma *transformação quiral* se conserva somente se $m = 0$.

4.1.1 Helicidade e quiralidade.

Vejamos, agora, o que acontece quando escolhemos convenientemente os espinores de duas componentes η^s como autoestados de σ^z , ou seja, como na Eq.(3.6),

$$\eta^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Ao escolhermos o eixo- z como o eixo diretor do vetor momento $\mathbf{p}$, tal que $p_x = p_y = 0$, podemos definir um operador h que, para esta escolha específica, será dado por

$$h = \Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^z & 0 \\ 0 & \sigma^z \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Observamos, então, que $u^s(p_z, m)$ e $v^s(p_z, m)$ com $s = 1, 2$ são autovetores de h com autovalores $h = +\frac{1}{2}$ para $s = 1$ e $h = -\frac{1}{2}$ para $s = 2$. Em geral, apesar de soluções de ondas planas para partículas livres poderem sempre ser escolhidas como as autofunções de h , não é possível escolher uma solução tal que a mesma seja uma autofunção de $\Sigma \cdot \hat{\mathbf{n}}$ com um vetor diretor unitário $\hat{\mathbf{n}}$ arbitrário. Isto ocorre porque o operador $\Sigma \cdot \hat{\mathbf{n}}$ não comuta com o Hamiltoniano de uma partícula livre, a menos que $\hat{\mathbf{n}} = \pm \hat{\mathbf{p}}$ ou $\mathbf{p} = 0$.

O operador h que pode ser diagonalizado simultaneamente com o Hamiltoniano de uma partícula livre é chamado de operador de *helicidade* [25]. Este operador corresponde exatamente à projeção do *spin* da partícula em questão na direção do vetor momento $\mathbf{p}$. Uma partícula com $h = +\frac{1}{2}$ é chamada de *right-handed*, enquanto uma outra com $h = -\frac{1}{2}$ é chamada de *left-handed*. A helicidade de uma partícula com massa não-nula depende do sistema espaço-temporal de referência, ou seja, a qualquer momento, um *boost* pode ser feito para um outro sistema de referência onde o momento da partícula pode ser obtido com o sentido oposto àquele inicial. Com o *spin* inalterado, a helicidade da partícula muda. Para partículas sem massa, contudo, as quais viajam com velocidade da luz, tal *boost* não é possível.

De certa maneira, helicidade e quiralidade, como números quânticos, carregam informações complementares. A quiralidade é invariante diante de uma transformação de Lorentz contínua, porém, não é constante no tempo se a partícula é massiva. A helicidade de uma partícula livre, por outro lado, é uma constante no tempo mas não corresponde a um invariante de Lorentz. De fato, um autoestado quiral pode sempre ser escrito como uma combinação linear de dois autoestados de helicidade.

4.1.2 Calibre acoplado à quiralidade.

Para observar como o conceito de quiralidade se apresenta em uma teoria de calibre, propomos a construção de uma Lagrangiana invariante de calibre em uma teoria, inicialmente, com férmions sem massa. Podemos acoplar um campo de Dirac a um campo

de calibre atribuindo uma representação de um grupo de calibre G aos campos quirais- L , $\psi_{i_L}(z, t)$, com quiralidade negativa, e uma outra representação aos campos quirais- R , $\psi_{i_R}(z, t)$, com quiralidade positiva. Com isto, podemos escrever

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(z, t) \left[\partial_\mu - ig A_\mu^a T^a \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \right] \psi(z, t) \quad (4.11)$$

onde observamos que somente os campos quirais- L se acoplam com os campos A_μ^a de bósons de calibre.

Em um passo imediato, é possível verificar que a Lagrangiana (4.11) é um objeto invariante diante de uma transformação local de calibre [64],

$$\begin{aligned} \psi(z, t) &\rightarrow \left[1 + i\alpha_\mu^a T^a \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \right] \psi(z, t), \\ A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a + g^{-1} \partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A^b \alpha^c. \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde as propriedades da álgebra em questão são descritas pelas relações de comutação entre os operadores T^a dadas por

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c. \quad (4.13)$$

Dado que os campos quirais- R são campos livres, podemos eliminar estes campos de uma vez por todas e escrever a Lagrangiana invariante de calibre para férmions puramente quirais- L . A idéia de campos de calibre que se acoplam com férmions quirais- L tem um papel central na construção de uma teoria para interações fracas.

Para exibirmos as propriedades dos férmions que se acoplam por meio de interações com quiralidade definida, é conveniente reescrevermos a Lagrangiana com simetria diante da operação de conjugação de carga $C = i\gamma^2\gamma^0$. Um campo de carga conjugada seria descrito por ψ^c como

$$\psi^c = C\bar{\psi}^T = i\gamma^2\psi^* \quad (4.14)$$

de modo que o conjugado de uma componente quiral- R de um campo ψ , sob as transformações de Lorentz, se transforma como uma quantidade quiral- L que seria definida por ψ_L^c , isto é

$$\psi_L^c = (\psi^c)_L = i \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \gamma^2 \gamma^0 \gamma^0 \psi^* = i\gamma^2 \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \psi^* = i\gamma^2 \gamma^0 \psi_R^* \equiv (\psi_R)^c, \quad (4.15)$$

e, da mesma maneira, o conjugado de componente quiral- L de um campo ψ se transforma como uma quantidade quiral- R que seria definida por ψ_R^c

$$\psi_R^c = i\gamma^2 \gamma^0 \psi_L^* \equiv (\psi_L)^c, \quad (4.16)$$

Tal propriedade é importante para observarmos o que ocorre em um modelo de calibre com simetria L - R . Primeiramente, é possível definir os multipletos que caracterizam as partículas envolvidas nas interações com os bósons de calibre e suas propriedades de transformação descritas pelos geradores do grupo que rege as interações características do modelo. Dentre

tentativas consolidadas, ou ainda promissoras, temos o modelo $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-l}$ de Mohapatra e Pati² [76] e os modelos com simetria $SU(3)_{cor} \otimes SU(4)_L (SU(3)_L) \otimes U(1)_Y$ de Pleitez e outros [77, 78], além de uma série de extensões [79, 80] onde sucessivas quebras espontâneas de simetria (QES) resultam na “recuperação” do modelo GWS [81] para interações eletrofracas [82, 83]. Em todos esses modelos, os neutrinos de caráter quirai- R aparecem como partículas interagentes em multipletos que se acoplam com bósons de calibre descritos pelos geradores dos grupos em questão (antes da QES). Entretanto, pela própria característica vetorial das interações mediadas pelos bósons de calibre, a possibilidade de conversão de quiralidade $L - R$ mediante um acoplamento de calibre é impossível uma vez que o acoplamento vetorial entre campos de caracteres quirais opostos tem amplitude de probabilidade nula³,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L A_\mu \gamma^\mu \psi_L &\equiv \bar{\psi}_R A_\mu \gamma^\mu \psi_L \propto ((1 + \gamma^5)\psi)^\dagger \gamma^0 A_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma^5)\psi \\ &= \psi^\dagger (1 + \gamma^5) \gamma^0 A_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma^5)\psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 A_\mu \gamma^\mu (1 + \gamma^5)(1 - \gamma^5)\psi = 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dada esta impossibilidade, na próxima seção descrevemos a maneira através da qual oscilações quirais podem ser efetivamente descritas.

4.2 Oscilações quirais.

Se uma partícula sem massa representada por um espinor de Dirac é produzida em um autoestado quiral (do operador γ^5), então, a sua quiralidade será uma constante do movimento, além de representar uma quantidade invariante de Lorentz. Esta propriedade não se mantém, de modo algum, para partículas massivas. Para elucidar este ponto temos o Hamiltoniano para partícula livre dado por

$$H_0 = -i\gamma^0 \gamma \cdot \partial + m\gamma^0 \quad (4.18)$$

o qual representa o operador de evolução temporal para tempos subseqüentes ao tempo ($t = 0$) de criação de um spinor, e não comuta com o operador quiral γ^5 devido ao termo de massa em H_0 . De modo a sermos mais precisos, observamos que

$$-i\partial_t \langle \gamma^5 \rangle = \langle [H_0, \gamma^5] \rangle = 2m \langle \gamma^0 \gamma^5 \rangle, \quad (4.19)$$

onde m é a massa relativa a um espinor o qual assumimos que seja um autoestado de massa. O valor médio do lado direito da equação acima é dado explicitamente por

$$\langle \gamma^0 \gamma^5 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \psi^\dagger(z, t) \gamma^0 \gamma^5 \psi(z, t) \quad (4.20)$$

²O subíndice $B - l$ designa número bariônico menos número leptônico

³Observe que segundo a notação adotada aqui, a qual é diferente de alguns livros textos, $\bar{\psi}_R \psi_L = \bar{\psi}_L \psi_L = 0$ onde $\bar{\psi}_{R(L)}$ é um objeto de quiralidade- $R(L)$.

onde $\psi(z, t)$ pode ser descrita pela expansão em termos de soluções de ondas planas descrita pela Eq. (3.29) que satisfaz a equação de Dirac. Entretanto, da mesma maneira que para o efeito de *zitterbewegung*, a fórmula (4.19) não implica em um efeito físico necessariamente observável. É fácil observar que, para um pacote de ondas construído somente com soluções de ondas planas com frequências positivas, a equação de Dirac para espinores $u(p_z, m)$ e, separadamente, para espinores $v(p_z, m)$ leva a um valor médio nulo para a expressão (4.19),

$$\begin{aligned} (\gamma^0 E(p_z, m) - \gamma^3 p_z - m)u(p_z, m) &= \bar{u}(p_z, m)(\gamma^0 E(p_z, m) - \gamma^3 p_z - m) = 0, \\ (\gamma^0 E(p_z, m) - \gamma^3 p_z + m)v(p_z, m) &= \bar{v}(p_z, m)(\gamma^0 E(p_z, m) - \gamma^3 p_z + m) = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Para ilustrar este ponto, calculamos explicitamente

$$\begin{aligned} \langle \gamma^0 \gamma^5 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \sum_{s, s'=1, 2} b^{s*}(p_z, m) b^{s'}(k_z, m) \bar{u}^s(p_z, m) \gamma^5 u^{s'}(k_z, m) \\ &\quad \times \exp[i(E(p_z, m) - E(k_z, m))t] \exp[-i(p_z - k_z)z] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \sum_{s, s'=1, 2} b^{s*}(p_z, m) b^{s'}(p_z, m) \bar{u}^s(p_z, m) \gamma^5 u^{s'}(p_z, m), \end{aligned} \quad (4.22)$$

assim, como consequência da identidade (unidimensional) de Gordon “quiral”, temos

$$\begin{aligned} u^{s\dagger}(k_z, m) \gamma^0 \gamma^5 u^{s'}(p_z, m) &= \frac{1}{2m} u^{s\dagger}(k_z, m) \gamma^0 [(E(k_z, m) \gamma^0 \gamma^5 - k_z \gamma^3 \gamma^5) \\ &\quad + (\gamma^5 \gamma^0 E(p_z, m) - \gamma^5 \gamma^3 p_z)] u^{s'}(p_z, m), \end{aligned} \quad (4.23)$$

de onde observamos que

$$u^{s\dagger}(p_z, m) \gamma^0 \gamma^5 u^{s'}(p_z, m) = 0, \quad (4.24)$$

o qual leva a um valor nulo para a média calculada de $\gamma^0 \gamma^5$. Uma prova similar é obtida quando trabalhamos com soluções de frequência negativa.

Por outro lado, ao trabalharmos simultaneamente com frequências positivas e negativas, o termo de interferência entre soluções de frequências com sinais opostos leva a uma componente de oscilação quiral.

$$\begin{aligned} \langle \gamma^0 \gamma^5 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \sum_{s, s'=1, 2} \left\{ d^s(k_z, m) b^{s'}(p_z, m) \bar{v}^s(k_z, m) \gamma^5 u^{s'}(p_z, m) \right. \\ &\quad \times \exp[-i(E(p_z, m) + E(k_z, m))t] \exp[i(p_z + k_z)z] - \text{h.c.} \left. \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \sum_{s, s'=1, 2} \left\{ d^s(-p_z, m) b^{s'}(p_z, m) \bar{v}^s(-p_z, m) \gamma^5 u^{s'}(p_z, m) \exp[-2iE(p_z, m)t] - \text{h.c.} \right\}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

A identidade de Gordon “quiral”, para termos cruzados (interferência), levaria a

$$\begin{aligned} v^{s\dagger}(k_z, m) \gamma^0 \gamma^5 u^{s'}(p_z, m) &= -\frac{1}{2m} v^{s\dagger}(k_z, m) \gamma^0 [(E(k_z, m) \gamma^0 \gamma^5 - k_z \gamma^3 \gamma^5) \\ &\quad - (\gamma^5 \gamma^0 E(p_z, m) - \gamma^5 \gamma^3 p_z)] u^{s'}(p_z, m), \end{aligned} \quad (4.26)$$

o qual leva a

$$v^{s\dagger}(-p_z, m)\gamma^0\gamma^5 u^{s'}(p_z, m) = -\frac{E(p_z, m)}{m} v^{s\dagger}(-p_z, m)\gamma^5 u^{s'}(p_z, m), \quad (4.27)$$

logo, ao substituírmos os espinores de Dirac por suas formas explícitas no último resultado, obtemos

$$v^{s\dagger}(-p_z, m)\gamma^0\gamma^5 u^{s'}(p_z, m) = -\delta_{ss'}. \quad (4.28)$$

Desta forma, a expressão (4.19) passa a ser escrita como

$$\partial_t \langle \gamma^5 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \sum_{s=1,2} \{ -(2im) d^s(-p_z, m) b^s(p_z, m) \exp[-2iE(p_z, m)t] + \text{h.c.} \}, \quad (4.29)$$

de onde, após perfazermos a integral temporal, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \gamma^5 \rangle(t) &= \langle \gamma^5 \rangle(0) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \frac{m}{E(p_z, m)} \\ &\quad \times \sum_{s=1,2} \{ d^s(-p_z, m) b^s(p_z, m) \{ \exp[-2iE(p_z, m)t] - 1 \} + \text{h.c.} \}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

De uma maneira muito particular, De Leo e Rotelli [20] discutem o real significado físico da oscilação quiral calculada a partir dos resultados apresentados até aqui. Demonstra-se que, para uma função de onda representada inicialmente por uma *gaussiana*, a qual tem um valor médio de quiralidade nulo, as oscilações de quiralidade $L \leftrightarrow R$ (*left* $\leftrightarrow$ *right*) se cancelam de modo que não se observa o caráter oscilante de maneira efetiva. Em princípio, isto poderia originar um aparente paradoxo. De fato, este é o ponto inicial de uma discussão da influência do caráter quiral do estado inicial no fenômeno de oscilação quântica.

4.2.1 O estado inicial em um processo de oscilação quiral.

Para reproduzir as idéias contidas em [20], consideramos que para qualquer autoestado de massa representado por uma onda plana solução da equação de Dirac, a função de onda no sistema de repouso representa sempre uma mistura igual de componentes de quiralidade $L - R$. Isto é facilmente verificado quando

$$\psi = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi + \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi = \psi_L + \psi_R, \quad (4.31)$$

onde $\psi_{L,R}$ correspondem respectivamente à quiralidade ∓ 1 . Pode ser demonstrado que, no sistema de repouso de uma partícula, teríamos

$$|\psi_L|^2 = |\psi_R|^2. \quad (4.32)$$

Note que este resultado não é invariante diante de uma transformação de Lorentz pois esta não é unitária. Desta maneira, enquanto temos uma seção de choque invariante de Lorentz, temos, também, probabilidades quirais que não são invariantes. Isto vem a sugerir que as

medidas de probabilidade não dependem da quiralidade do objeto oscilante, ou seja, temos aparentemente um argumento contrário à relevância física que as oscilações quirais poderiam apresentar. A resposta a esta objeção construída com base na invariância de Lorentz da seção de choque é que, para qualquer sistema de referência, as oscilações quirais são efetivamente importantes devido a projeção na forma “vetorial menos axial” (V-A) das correntes de interação fraca. Mais especificamente, as variações de probabilidades quirais produzidas por estas transformações de Lorentz (mesmo se γ^5 comuta com os geradores de Lorentz) são automaticamente compensadas pelas condições de normalização da função de onda e da forma transformada (de Lorentz) dos bósons vetoriais intermediários e outras partículas que compõem a determinação da seção de choque em questão. Esta situação é semelhante à aparente contradição entre os seguintes fatos. Em todos os processos (conhecidos) através dos quais neutrinos são produzidos como autoestados quase puros de helicidade *left-handed*, dado que são criados predominantemente com estados ultra-relativísticos (onde quiralidade é quase equivalente à helicidade) por meio de uma interação V-A, o valor médio da quiralidade é muito próximo de -1 (ou L). Mas no sistema de repouso do neutrino (onda plana) este valor médio seria nulo. Visto do referencial (de repouso) do neutrino, não há preferência entre os valores de quiralidade -1 ou $+1$. Não há, então, uma contradição com o fato de haver uma dominância de neutrinos com quiralidade- L na natureza? Não. Enquanto existem sistemas de referência comuns a quase todos os neutrinos que se apresentam como autoestados quase puros de quiralidade- L , existem muitos outros sistemas de referência, não coincidentes aos anteriores, para os quais a quiralidade- R é dominante para cada neutrino.

Uma outra questão é pertinente: em qual sistema de referência a forma da localização do pacote de ondas deve ser levada em conta. Um pacote de ondas *gaussiano*, sugerido principalmente pela simplicidade de suas características de integração, certamente não independe do sistema de referência considerado. Desta maneira, se escolhermos, por exemplo, o Sol como um sistema de referência, poderemos estabelecer que os neutrinos são criados como autoestados quase puros de quiralidade- L . Isto abre espaço para oscilações quirais que, possivelmente, como veremos na próxima seção, poderiam implicar em uma diminuição do fluxo efetivo, isto é, detectados mediante interação fraca, dos neutrinos que chegam até a Terra.

4.3 Oscilação quiral acoplada à oscilação de sabores com pacotes de ondas de Dirac.

No capítulo anterior, quando tratamos da evolução temporal dos autoestados de massa em sua forma espinorial, desconsideramos completamente o caráter e a natureza quiral das

partículas envolvidas, conseqüentemente, a evolução temporal do operador quiral. Até este ponto, constatamos que a quiralidade de uma partícula fermiônica não é uma constante do movimento. Agora, no entanto, pretendemos investigar como a fórmula de conversão de sabores pode ser modificada quando os efeitos de oscilação quiral e de sabor são considerados concomitantemente. Uma vez que pretendemos observar alguns efeitos distintos, com caráter semelhante ao efeito de *zitterbewegung*, e que se originam de diferentes termos de interferência, recorreremos à mesma análise qualitativa no confronto entre a superposição de somente soluções da equação de Dirac com componentes frequência positiva *versus* a superposição de soluções com componentes de frequência positiva e negativa feita na seção 3.2. Já observamos que a interferência entre dois autoestados de massa devida às soluções da equação de Dirac somente com componente de frequência positiva já produz um efeito adicional devido à oscilação temporal do valor médio do operador γ^5 . Contudo, na implementação de um regime de propagação com pacotes de ondas, por exemplo, com um pacote de ondas *gaussiano*, conforme as condições analisadas na seção 3.2, impõem-se que também levemos em conta as soluções com componentes de frequência negativa. Logo, de maneira a calcular a probabilidade $P(\nu_{\alpha L} \rightarrow \nu_{\beta L}; t)$, devemos calcular o valor esperado do operador γ^5 que introduz uma nova contribuição para esta probabilidade. Desta maneira, a partir da forma geral (3.29) do pacote de ondas de Dirac, podemos calcular

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} dz \psi_i^\dagger(z, t) \gamma^5 \psi_j(z, t) = \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi(p_z - p_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \varphi(k_z - p_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dz \exp[-i(p_z - k_z)z] \\
& \quad \times w^\dagger \left\{ \frac{E(p_z, m_i) \cos[E(p_z, m_i)t] + i\gamma^0 [\gamma^3 p_z + m_i] \sin[E(p_z, m_i)t]}{E(p_z, m_i)} \right\} \gamma^5 \\
& \quad \left\{ \frac{E(k_z, m_j) \cos[E(k_z, m_j)t] - i\gamma^0 [\gamma^3 k_z + m_j] \sin[E(k_z, m_j)t]}{E(k_z, m_j)} \right\} w \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi(p_z - p_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \varphi(k_z - p_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dz \exp[-i(p_z - k_z)z] \\
& \quad \times w^\dagger \left\{ \frac{E(p_z, m_i) \cos[E(p_z, m_i)t] + i\gamma^0 [\gamma^3 p_z + m_i] \sin[E(p_z, m_i)t]}{E(p_z, m_i)} \right\} \\
& \quad \left\{ \frac{E(k_z, m_j) \cos[E(k_z, m_j)t] - i\gamma^0 [\gamma^3 k_z - m_j] \sin[E(k_z, m_j)t]}{E(k_z, m_j)} \right\} \gamma^5 w \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi^2(p_z - p_0) \frac{1}{E(p_z, m_i) E(p_z, m_j)} \\
& \quad \times w^\dagger \{ E(p_z, m_i) E(p_z, m_j) \cos[E(p_z, m_i)t] \cos[E(p_z, m_j)t] \\
& \quad + i\gamma^0 [\gamma^3 p_z + m_i] E(p_z, m_j) \cos[E(p_z, m_j)t] \sin[E(p_z, m_i)t] \\
& \quad - i\gamma^0 [\gamma^3 p_z - m_j] E(p_z, m_i) \cos[E(p_z, m_i)t] \sin[E(p_z, m_j)t] \\
& \quad + [p_z^2 - m_i m_j + \gamma^3 p_z (m_i + m_j)] \sin[E(p_z, m_i)t] \sin[E(p_z, m_j)t] \} \gamma^5 w, \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Mas se consideramos o estado w como um autoestado quiral- L , como já fora assumido inicialmente, encontramos que

$$w^\dagger \gamma^0 \gamma^5 w = w^\dagger \gamma^3 \gamma^5 w = 0 \quad (4.34)$$

tal que possamos reescrever (4.33) como

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \psi_i^\dagger(z, t) \gamma^5 \psi_j(z, t) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi^2(p_z - p_0) \frac{1}{E(p_z, m_i) E(p_z, m_j)} \\ &\quad \times w^\dagger \{ E(p_z, m_i) E(p_z, m_j) \cos[E(p_z, m_i)t] \cos[E(p_z, m_j)t] \\ &\quad + i\gamma^0 \gamma^3 p_z E(p_z, m_j) \cos[E(p_z, m_j)t] \sin[E(p_z, m_i)t] \\ &\quad - i\gamma^0 \gamma^3 p_z E(p_z, m_i) \cos[E(p_z, m_i)t] \sin[E(p_z, m_j)t] \\ &\quad + [p_z^2 - m_i m_j] \sin[E(p_z, m_i)t] \sin[E(p_z, m_j)t] \} \gamma^5 w, \end{aligned} \quad (4.35)$$

Se considerarmos separadamente as contribuições de cada termo, no caso em que $i = j = 1, 2$, e com o uso das condições de normalização que permitem que escrevamos $w^\dagger \gamma^5 w = -1$, encontraremos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \psi_{1,2}^\dagger(z, t) \gamma^5 \psi_{1,2}(z, t) &= (-1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi^2(p_z - p_0) \\ &\quad \times \frac{1}{E^2(p_z, m_{1,2})} [E^2(p_z, m_{1,2}) \cos^2[E(p_z, m_{1,2})t] + (p_z^2 - m_{1,2}^2) \sin^2[E(p_z, m_{1,2})t]] \\ &= (-1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi^2(p_z - p_0) \left[1 - \frac{2m_{1,2}^2}{E^2(p_z, m_{1,2})} \sin^2[E(p_z, m_{1,2})t] \right] \\ &= (-1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi^2(p_z - p_0) \left[1 - \frac{m_{1,2}^2}{E^2(p_z, m_{1,2})} + \frac{m_{1,2}^2}{E^2(p_z, m_{1,2})} \cos[2E(p_z, m_{1,2})t] \right], \end{aligned} \quad (4.36)$$

e para os termos cruzados:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dz (\psi_1^\dagger(z, t) \gamma^5 \psi_2(z, t) + \psi_2^\dagger(z, t) \gamma^5 \psi_1(z, t)) &= \\ &= (-2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi^2(p_z - p_0) \left\{ \cos[E(p_z, m_1)t] \cos[E(p_z, m_2)t] \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_z^2 - m_1 m_2}{E(p_z, m_1) E(p_z, m_2)} \sin[E(p_z, m_1)t] \sin[E(p_z, m_2)t] \right\} \\ &= (-1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi^2(p_z - p_0) \left\{ \left[1 + \frac{p_z^2 - m_1 m_2}{E(p_z, m_1) E(p_z, m_2)} \right] \cos[(E(p_z, m_1) - E(p_z, m_2))t] \right. \\ &\quad \left. + \left[1 - \frac{p_z^2 - m_1 m_2}{E(p_z, m_1) E(p_z, m_2)} \right] \cos[(E(p_z, m_1) + E(p_z, m_2))t] \right\}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

4.3.1 Modificações na fórmula de oscilação de sabores.

A fórmula de conversão de sabores acoplada à conversão de quiralidade segundo a prescrição com soluções da equação de Dirac pode ser obtida do mesmo modo como ob-

tivemos a Eq. (3.57). Ao assumirmos que as funções de onda normalizáveis dos autoestados de massa $\psi_{1,2}(z, t)$ são criadas em um tempo $t = 0$ como um autoestado quiral- L , podemos escrever

$$\begin{aligned} \text{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dz \psi_i^\dagger(z, t) \gamma^5 \psi_j(z, t) \right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi^2(p_z - p_0) \\ &\times \left\{ \left[1 - f(p_z, m_i, m_j) - \frac{m_i m_j}{E(p_z, m_i) E(p_z, m_j)} \right] \cos[\epsilon_-(p_z, m_i, m_j) t] \right. \\ &\quad \left. + \left[f(p_z, m_i, m_j) + \frac{m_i m_j}{E(p_z, m_i) E(p_z, m_j)} \right] \cos[\epsilon_+(p_z, m_i, m_j) t] \right\} \quad (4.38) \end{aligned}$$

com $i, j = 1, 2$. A partir desta integral fica fácil observar que um autoestado de massa com quiralidade inicial igual a -1 apresenta uma evolução espaço-temporal onde a quiralidade se modifica. Como já determinamos a evolução temporal do operador quiral, torna-se possível a construção de uma fórmula efetiva de probabilidade de conversão de sabores que acopla os efeitos de oscilação quiral e de oscilação de sabor,

$$\begin{aligned} P(\nu_{\alpha, L} \rightarrow \nu_{\beta, L}; t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz |\psi_{\beta, L}(z, t; \theta)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \psi'_{\beta}(z, t; \theta)^{\frac{1-\gamma^5}{2}} \psi_{\beta}(z, t; \theta) \\ &= \frac{\sin^2[2\theta]}{2} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dz |\psi_{i, L}(z, t)|^2 \right] - \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dz \psi'_{1, L}(z, t) \psi_{2, L}(z, t) \right] \right\} \\ &= \frac{\sin^2[2\theta]}{2} [\text{DCO}(t) - \text{DFCO}(t)]. \quad (4.39) \end{aligned}$$

Assim como com os cálculos desenvolvidos no capítulo anterior, os termos $\text{DCO}(t)$ e $\text{DFCO}(t)$ podem ser reescritos por meio de uma integração em p_z ,

$$\begin{aligned} \text{DCO}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi^2(p_z - p_0) \{ 1 - c(p_z, m_i, m_i) + c(p_z, m_i, m_i) \cos[2 E(p_z, m_i) t] \} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi^2(p_z - p_0) \left\{ \frac{m_i^2}{2 E^2(p_z, m_i)} - \frac{m_i^2}{2 E^2(p_z, m_i)} \cos[2 E(p_z, m_i) t] \right\} \quad (4.40) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{DFCO}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \varphi^2(p_z - p_0) \{ [1 - c(p_z, m_1, m_2)] \cos[\epsilon_-(p_z, m_1, m_2) t] \\ &\quad + c(p_z, m_1, m_2) \cos[\epsilon_+(p_z, m_1, m_2) t] \} , \quad (4.41) \end{aligned}$$

onde

$$c(p_z, m_i, m_j) = f(p_z, m_i, m_j) + \frac{m_i m_j}{2 E(p_z, m_i) E(p_z, m_j)} .$$

As funções $c(p_z, m_i, m_j)$ têm um máximo comum em $p_z = 0$ e, ao contrário do que acontece com $f(p_z, m_1, m_2)$, estes máximos não dependem dos valores das massas envolvidas,

$$c_{\max}(0, m_i, m_j) = \frac{1}{2} ,$$

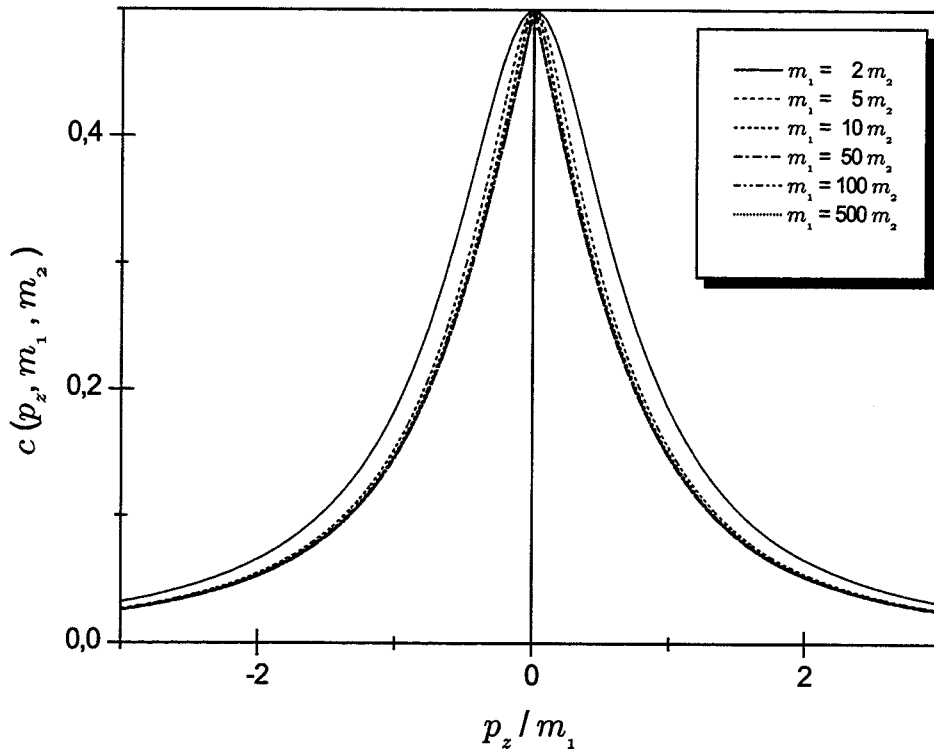


Figura 4.1: A função $c(p_z, m_1, m_2)$ é graficada para diferentes valores da razão entre m_1 e m_2 . Para uma distribuição de momentos altamente centrada em torno de $p_0 \gg m_{1,2}$ (limite ultra-relativístico), $c(p_z, m_1, m_2)$ não tem sua relevância reduzida na fórmula de oscilação “modificada”. No referencial de repouso, o processo de conversão quiral é maximizado.

e, por apresentarem o mesmo comportamento assintótico de $f(p_z, m_1, m_2)$, conforme observamos na Fig. 4.1, tendem rapidamente a zero quando $p_z \gg m_{1,2}$. Como consequência de uma aproximação em primeira ordem, obtemos

$$c(p_z, m_i, m_j) \approx \frac{1}{2} \left[1 - v_i v_j + v_i v_j (v_i^2 + v_j^2 - 2) \frac{p_z - p_0}{p_0} \right].$$

que pode ser reescrito como

$$c(p_z, m_1, m_2) \approx \frac{m_1^2 + m_2^2}{4 p_0^2} \left(1 - 2 \frac{p_z - p_0}{p_0} \right)$$

em uma aproximação ultra-relativística. Ao substituírmos $c(p_z, m_i, m_j)$ nas integrações (4.40-4.41) acima, podemos, após algumas manipulações algébricas, calcular explicitamente os termos DCO(t) e DFCO(t),

$$\begin{aligned} \text{DCO}(t) \approx & 1 - \frac{m_1^2}{4 p_0^2} + \exp \left[- \left(\frac{2 p_0^2 - m_1^2}{\sqrt{2} a p_0^2} t \right)^2 \right] \frac{m_1^2}{4 p_0^2} \\ & \times \left\{ \cos \left[\frac{2 p_0^2 + m_1^2}{p_0} t \right] + \frac{4 p_0^2 - 2 m_1^2}{a^2 p_0^3} t \sin \left[\frac{2 p_0^2 + m_1^2}{p_0} t \right] \right\} \\ & - \frac{m_2^2}{4 p_0^2} + \exp \left[- \left(\frac{2 p_0^2 - m_2^2}{\sqrt{2} a p_0^2} t \right)^2 \right] \frac{m_2^2}{4 p_0^2} \\ & \times \left\{ \cos \left[\frac{2 p_0^2 + m_2^2}{p_0} t \right] + \frac{4 p_0^2 - 2 m_2^2}{a^2 p_0^3} t \sin \left[\frac{2 p_0^2 + m_2^2}{p_0} t \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \text{DFCO}(t) \approx & \exp \left[- \left(\frac{\Delta m^2}{2 \sqrt{2} a p_0^2} t \right)^2 \right] \\ & \times \left\{ \left[1 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{4 p_0^2} \right] \cos \left[\frac{\Delta m^2}{2 p_0} t \right] + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4 p_0^2} \frac{\Delta m^2}{a^2 p_0^3} t \sin \left[\frac{\Delta m^2}{2 p_0} t \right] \right\} \\ & + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4 p_0^2} \exp \left[- \left(\frac{4 p_0^2 - m_1^2 - m_2^2}{2 \sqrt{2} a p_0^2} t \right)^2 \right] \\ & \times \left\{ \cos \left[\frac{4 p_0^2 + m_1^2 + m_2^2}{2 p_0} t \right] + \frac{4 p_0^2 - m_1^2 - m_2^2}{a^2 p_0^3} t \sin \left[\frac{4 p_0^2 + m_1^2 + m_2^2}{2 p_0} t \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Novamente, na hipótese de *slippage* mínimo entre os pacotes de ondas dos autoestados de massa ($\Delta v L \ll a$), e para distâncias muito longas entre a fonte e o detector ($L \gg a$), isto é,

$$1 \ll \frac{L}{a} \ll \frac{p_0^2}{\Delta m^2},$$

conseguimos reproduzir a fórmula *standard* para a conversão de sabores. De fato,

$$\begin{aligned} P(\nu_{\alpha L} \rightarrow \nu_{\beta L}; t) & \approx \frac{\sin^2[2\theta]}{2} \left[1 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{4 p_0^2} \right] \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{\Delta m^2}{2 \sqrt{2} a p_0^2} L \right)^2 \right] \cos \left[\frac{\Delta m^2}{2 p_0} L \right] \right\} \\ & \approx \frac{\sin^2[2\theta]}{2} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{\Delta m^2}{2 p_0} L \right] \right\} \\ & = \sin^2[2\theta] \sin^2 \left[\frac{\Delta m^2}{4 p_0} L \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Da mesma maneira como verificamos no capítulo anterior, dentro das circunstâncias fenomenológicas mais comuns que envolvam oscilações no vácuo, quando introduzimos os

dados referentes às diferenças de massa para neutrinos solares, $\Delta m^2 \approx 10^{-5} \text{ eV}^2$, ou para neutrinos atmosféricos, $\Delta m^2 \approx 10^{-3} \text{ eV}^2$, a contribuição devida aos termos $c(p_i, m_i, m_j)$ são muito pequenas para regimes ultra-relativísticos de propagação. Deste modo, a mesma argumentação sobre observabilidade e aplicabilidade apresentada no capítulo anterior, sobre a qual não nos reportaremos uma segunda vez, pode ser utilizada nesta situação.

4.4 Analogias com processos de rotação de spin.

A interação de partículas fermiônicas representadas por $\psi(\mathbf{x}, t)$ em coordenadas espaciais tridimensionais com campos vetoriais externos pode ser representada por um termo de Lagrangiana de interação descrito por

$$-G \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t) \gamma_\mu V^\mu(\mathbf{x}) \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (4.45)$$

onde G representa a constante de acoplamento da interação correspondente. No caso de interações fracas cujos férmions envolvidos são neutrinos que se acoplam a um campo bosônico vetorial $Z^\mu(\mathbf{x})$, a expressão (4.45), onde esquecemos por um momento as oscilações de sabores, seria corretamente descrita por

$$-\frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} \bar{\nu}_\alpha(\mathbf{x}, t) \gamma_\mu Z^\mu(\mathbf{x}) \nu_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (4.46)$$

onde g é a constante de acoplamento relativa a simetria $SU(2)_L$ e g' é a constante de acoplamento relativa a simetria $U(1)_Y$ da teoria GWS ($SU(2)_L \times U(1)_Y$) [81]. Com o termo de interação adicionado à Lagrangiana de uma partícula livre, o operador Hamiltoniano seria escrito como

$$H = -i \gamma_0 \gamma_i \partial^i - \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} \gamma_0 \gamma_\mu Z^\mu(\mathbf{x}) + \gamma_0 m \quad (4.47)$$

Neste caso, a operação de comutação com o operador de quiralidade γ_5 resulta novamente, como na expressão (4.19), em um termo não nulo advindo somente do termo de massa $\gamma_0 m$,

$$[\gamma_5, H] = [\gamma_5, H_0] = 2m \langle \gamma_0 \gamma_5 \rangle, \quad (4.48)$$

onde, neste caso, porém, o valor médio $\langle \gamma_0 \gamma_5 \rangle$ deve se alterar devido à nova forma assumida pelas novas soluções da equação de Dirac com os termos de interação que aparecem. Contudo, o motivo pelo qual introduzimos esta seção, não é o de prosseguirmos com estes cálculos, mas sim, de observarmos que a presença de um novo termo de interação no Hamiltoniano (4.47) determina o caráter da evolução temporal do operador helicidade descrito na expressão (4.10) do início deste capítulo como a projeção do operador de *spin* na direção e sentido de propagação da partícula fermiônica,

$$h = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

Em outras palavras, ao interagir com um campo vetorial externo, uma partícula fermiônica deve estar sujeita ao fenômeno de rotação de *spin* (*spin flipping*) onde seu estado de polarização se altera. De modo a esclarecer esta suposição, consideramos o Hamiltoniano no espaço de momentos para uma partícula que se propaga na direção z ,

$$H(\mathbf{x}, p_z) = -i \gamma_0 \gamma_3 \partial_z - \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} \gamma_0 \gamma_\mu Z^\mu(\mathbf{x}) + \gamma_0 m \quad (4.50)$$

e indicamos a dependência temporal de h como

$$-i \partial_t \langle h \rangle = \langle [H, h] \rangle = -\frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} \langle \gamma_5 \gamma_3 (\gamma_1 Z_1(\mathbf{x}) + \gamma_2 Z_2(\mathbf{x})) \rangle. \quad (4.51)$$

Também é importante notar que $[\gamma_5, h] = 0$, isto é, a medida do comportamento temporal de uma dessas variáveis não influencia no valor da outra. De maneira mais objetiva, para uma Hamiltoniana descrita como (4.50), a oscilação de quiralidade jamais podem alterar o estado de polarização de uma partícula fermiônica.

Apesar de, envolvendo algumas manipulações matemáticas um pouco mais extensas, ser possível determinar a evolução temporal do operador h da mesma maneira como fizemos para γ_5 , a helicidade não é um invariante de Lorentz ⁴. Além disso, interações fracas têm como característica a quiralidade -1 definida, sendo que o mesmo não é válido para a helicidade. A importância do estudo envolvendo estas variáveis, sob o ponto de vista fenomenológico, está relacionada ao fato de que efeitos dinâmicos como oscilação de quiralidade e de helicidade (rotação de *spin*) alteram, respectivamente, cada qual a sua maneira, a probabilidade de conversão de sabores e os estados de polarização de um neutrino.

4.5 Considerações importantes.

Observamos que o uso da equação de Dirac como a equação de movimento para partículas fermiônicas descritas por pacotes de ondas que representam os autoestados de massa que produzem o fenômeno de interferência durante a propagação espaço-temporal levam a uma fórmula de oscilação que contém, além do caráter de “aparição de sabor”, isto é, férmions (neutrinos) com sabor que não se apresentavam no momento da criação em uma certa fonte, também o caráter de “desaparição de quiralidade”, isto é, férmions com caráter quiral- R que resultam da conversão $L \rightarrow R$ de um estado inicial L .

De modo a quantificar as pequenas modificações devidas à oscilação do caráter quiral acoplado ao mecanismo de conversão de sabores na fórmula de oscilação originalmente obtida por Kayser [15], nós nos reportamos ao formalismo com pacotes de ondas de Dirac estudado no capítulo 3. Novamente, o efeito de *zitterbewegung* assume um papel relevante

⁴Um *boost* de Lorentz pode levar um estado de helicidade definida a um estado representado pela combinação linear entre dois estados de helicidades diversas.

neste estudo. Em particular, o caráter de oscilação quiral introduz modificações um pouco diferentes daquelas obtidas sem a consideração do mesmo. Ainda assim, com pacotes de ondas *gaussianos* obtidos a partir de distribuições de momentos altamente centradas em torno de um valor de p_0 ultra-relativístico, a expressão analítica para oscilações quirais acopladas às oscilações de sabor sofre pequenas alterações. De forma mais abrangente, verificamos que dentre os novos aspectos físicos cuja análise é propiciada pelo tratamento em mecânica quântica com pacotes de ondas de Dirac, está a possibilidade de oscilações quirais. Uma vez que assumimos que as interações entre a fonte e o detector são quirais- L , somente a componente com quiralidade negativa contribui no cálculo da amplitude de probabilidade (criação/propagação/detecção) através da qual obtemos a expressão para a conversão de sabor/quiralidade. De fato, quando oscilações quirais são levadas em conta, essas modificações introduzem fatores de correção proporcionais a $m_{1,2}^2/p_0^2$ os quais são praticamente indetectáveis, nas circunstâncias experimentais em que nos encontramos. Isto nos leva a conclusão de que, apesar de ser constantemente criticada, a fórmula de conversão de sabores que reporta ao formalismo com ondas planas, quando propriamente interpretada, isto é, sob determinadas condições restritivas, proporciona uma descrição satisfatória do processo de oscilação para partículas fermiônicas em propagação no vácuo. Por fim, complementamos este capítulo ao observamos que o processo de oscilação quiral tem características dinâmicas semelhantes ao de um processo de rotação de *spin* em um caso restrito de interação com o meio externo, porém, resultam em efeitos físicos completamente diversos: a rotação de *spin* não influencia no processo de conversão de sabores, enquanto que oscilações quirais jamais alteram o estado de polarização de um neutrino.

Capítulo 5

Perspectivas de extensão do estudo do oscilações quânticas e eventuais aplicações em física de neutrinos.

Neste capítulo, enumeramos alguns parágrafos onde procuramos descrever de maneira resumida alguns tópicos sobre os quais o estudo apresentado neste trabalho possa ser estendido ou mesmo aplicado. Acreditamos que tais estudos podem, eventualmente, permitir que vislumbremos com maior clareza algumas possibilidades de extensões fenomenológicas e escolhamos aqueles sobre os quais, de fato, pretendemos nos estender em projetos futuros.

O tratamento covariante do problema de oscilações quânticas com pacotes de ondas.

Já observamos que a descrição do problema de oscilação de sabores no espaço-tempo envolve situações diferentes para neutrinos, em regimes de altas energias, e para káons, em regimes não-relativísticos. Um problema ainda em aberto seria o da derivação de uma forma covariante, para qualquer regime de propagação, da fórmula de conversão de sabores envolvendo pacotes de ondas. Kayser e Stodolsky [84] sugeriram uma generalização de um fator de fase não-relativístico, $\exp[-i m t]$, pela substituição da variável tempo t por um invariante de Lorentz descrito pelo tempo próprio $s = (t^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$. No referencial de laboratório, este fator de fase de um autoestado de massa seria descrito por

$$\exp[-i m_i s_i] = \exp\left[-i \frac{m_i^2 t}{E(p, m_i)}\right], \quad (5.1)$$

de modo que a diferença de fase entre dois autoestados de massa seria de $\Delta\left(\frac{m^2}{E}\right) = \frac{\Delta m^2}{E}$, a qual corresponde a duas vezes o valor determinado na fórmula *standard*. Vários autores sugerem que esta não seria a maneira correta de calcular a diferença de fases [85, 86]. Em

particular, Grimus e Stockinger [87] propuseram uma derivação covariante da fórmula de oscilação onde todos os processos envolvendo o neutrino oscilante: produção, propagação e detecção, poderiam ser descritos por Diagramas de Feynman. Demonstra-se que, no limite para grandes distâncias tomado sobre o propagador de neutrinos, a seção de choque de espalhamento apresenta um comportamento oscilatório idêntico ao descrito pela fórmula *standard* [15]. Na derivação do fator de fase de Kayser e Stodolsky, segundo teoria de campos, a forma assintótica dos propagadores de um autoestado de posição seria descrita por

$$K(x, m_i) = \left(\frac{m_i}{2\pi i s_i} \right)^{\frac{3}{2}} \exp[-i m_i s_i], \quad (5.2)$$

onde s_i representa o intervalo espaço-temporal percorrido por um autoestado de massa m_i .

As funções de ondas iniciais são estritamente funções delta de Dirac, que levariam a uma situação de não interferência entre os autoestados de massa. A solução imediata seria a de uma generalização de propagadores representados por tais funções para propagadores representados por pacotes de ondas *gaussianos*. De modo a sermos um pouco mais claros, consideremos a amplitude de oscilação de um estado de sabor α para um estado de sabor β ,

$$A((\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t)) \equiv \sum_i \langle \beta | i \rangle \langle i | U(t) | i \rangle \langle i | \alpha \rangle, \quad (5.3)$$

onde a amplitude de propagação dos autoestados de massa, $\langle i | U(t) | i \rangle$ pode ser identificada como um propagador de Feynman no espaço de posições,

$$K(x, m_i) = -i \int \frac{d^4 p}{2\pi} \frac{i\gamma^\mu \partial_\mu + m_i}{p^2 - m_i^2 - i\epsilon} \exp[-i p x] \quad (5.4)$$

que após algumas manipulações matemáticas poderia ser escrito como

$$K(x, m_i) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m_i) \left(\frac{i m_i}{4\pi^2 s_i} \right) K_1(i m_i s_i) \quad (5.5)$$

com

$$K_1(i m_i s_i) = \left(\frac{2}{\pi i m_i s_i} \right)^{\frac{1}{2}} \exp[-i m_i s_i]. \quad (5.6)$$

Um autoestado de sabor de um neutrino ou de um káon poderia ser observado em um ponto do espaço-tempo de modo a tornar possível o cálculo da diferença de fase no ponto de intersecção entre dois autoestados de massa representados por pacotes de ondas. Ao considerarmos autoestados de massa que percorrem distâncias muito longas, segundo a descrição de uma teoria de campos, o diagrama de Feynman com propagadores entre vértices localizados em diferentes pontos do espaço-tempo, x_1 e x_2 , teriam suas amplitudes proporcionais a

$$\int d^4 x_1 d^4 x_2 \exp[-i \sum_i q_i x_i] K(x_1, x_2) \exp[-i \sum_f q_f x_f] \quad (5.7)$$

onde q_i (q_f) são os quadrimomentos das partículas externas que se acoplam nos vértices em x_1 (x_2) e

$$K(x_1, x_2) = \int d^4 p \frac{\exp[-i p(x_1 - x_2)]}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (5.8)$$

descreve o propagador.

O procedimento subsequente corresponde à releitura do propagador $K(x_F, x_I)$ que descreve a propagação de uma partícula posicionada em x_I , descrita como uma função delta de Dirac, a ser detectada em x_F , de modo que as informações do pacote de ondas inicial sejam dadas, segundo o princípio de superposição, por

$$\tilde{K}(x_F - x_I) = \int d^4x K(x_F, x_I) \rho(x - x_I), \quad (5.9)$$

onde $\rho(x - x_I)$ traz a forma analítica do pacote de ondas. Justamente nesta passagem da descrição segundo teoria de campos para uma análise com pacotes de ondas, é que o tratamento covariante perde seu significado. A relação entre teoria de campos e o tratamento com pacotes de ondas corresponde a uma discussão ainda incompleta, a qual nos referimos no início do texto, para a qual deve-se reservar um estudo pormenorizado.

Oscilação de neutrinos na matéria.

O fenômeno de oscilação tem sua origem na diferença de fase entre as componentes coerentes de autoestados de sabor de neutrinos descritos pela Eq. (2.4). Quando neutrinos se propagam na matéria, algumas contribuições adicionais para a fase de oscilação acabam por serem incluídas juntamente com a fase *standard*. A importância crucial dos efeitos do meio sobre o comportamento das oscilações foi demonstrada nos estudos de Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein [89] onde se constatou a amplificação da ressonância das oscilações de sabores na presença de matéria.

Na matéria, neutrinos ativos interagem com quarks e elétrons por meio de correntes de interação fraca neutras (Z^0), porém, somente neutrinos e antineutrinos eletrônicos interagem com elétrons por meio de correntes carregadas ($W^\pm$). Os potenciais efetivos correspondentes para neutrinos e antineutrinos são dados por

$$V_C(\nu_e) = \sqrt{2} G_F N_e \quad \text{e} \quad V_C(\bar{\nu}_e) = -\sqrt{2} G_F N_e \quad (5.10)$$

para correntes carregadas, e

$$V_N(\nu_e) = -\frac{1}{\sqrt{2}} G_F N_n \quad (5.11)$$

para correntes neutras, onde G_F é a constante de acoplamento efetivo e N_e a densidade do número de elétrons. Para neutrinos “estéreis” não deve existir um potencial de interação.

Para um potencial dado pela Eq. (5.10), os neutrinos que se propagam por uma distância L em meios com densidade N_e constante adquirem uma fase adicional dada por

$$\nu(L) = \nu(0) \exp[-i\sqrt{2} G_F N_e L] \quad (5.12)$$

de modo que o comprimento de oscilação na matéria corresponda a $L_{osc}^{mat} = 2\pi/(\sqrt{2} G_F N_e)$.

A evolução temporal dos autoestados de massa segundo a equação de Schroedinger [8] seria, então, descrita por

$$\left[\frac{d}{dt} - \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{2E(p_z, m_1)} + V_C \cos^2(\theta) & V_C \cos(\theta) \sin(\theta) \\ V_C \cos(\theta) \sin(\theta) & \frac{m_2^2}{2E(p_z, m_2)} + V_C \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Psi_2(z, t; \theta) \\ \Psi_1(z, t; \theta) \end{pmatrix} = 0, \quad (5.13)$$

Ao introduzirmos a operação de rotação para diagonalizarmos a matriz de transformação acima, podemos escrever os autoestados de sabor como

$$\begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_m) & \sin(\theta_m) \\ -\sin(\theta_m) & \cos(\theta_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

com um novo ângulo de mistura θ_m descrito em função de

$$\tan(2\theta_m) = \tan(2\theta) \left(1 - \frac{L_{osc}}{L_{osc}^{mat} \cos(\theta)} \right)^{-1} \quad (5.15)$$

onde um comprimento de oscilação efetivo é descrito por

$$L_m = L_{osc} \frac{\sin(2\theta_m)}{\sin(2\theta)} = L_{osc} \left[1 + \left(\frac{L_{osc}}{L_{osc}^{mat}} \right)^2 - \frac{2L_{osc}}{L_{osc}^{mat}} \cos(2\theta) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.16)$$

de modo que seja possível representar a probabilidade de conversão de sabores como

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L) = \sin^2(2\theta_m) \sin^2\left(\frac{\pi L}{L_m}\right) \quad (5.17)$$

Da mesma maneira como em (5.13), é possível escrever as equações de movimento na base de autoestados de sabor, entretanto, não pretendemos nos estender sobre esta discussão teórica já consolidada neste formalismo com a equação de Schroedinger [89].

Quando neutrinos se propagam na matéria com densidade variável a equação de movimento (5.13) (ou na base de autoestados de sabores) precisa ser resolvida. Existe uma vasta literatura sobre este assunto, em particular com aplicação em neutrinos solares [88]. De maneira um pouco mais geral, as interações de neutrinos com a matéria podem fazer evidenciar novos fenômenos que não apareciam com a ausência de matéria. Em particular, existem modelos alternativos [90, 91, 92] que neutrinos massivos que se propagam em interação com a matéria ou com campos eletromagnéticos externos podem produzir um novo tipo de radiação eletromagnética.

Neste contexto, uma aproximação quântica para a descrição de um neutrino que se propaga em uma região permeada por efeitos de matéria seria mais adequada quando se introduz a equação de Dirac como equação de movimento. É possível obter soluções exatas para a equação de Dirac com um termo de interação no caso em que o mesmo é construído com o parâmetro de densidade constante do número de partículas interagentes. Os efeitos de interações por meio de correntes neutras e/ou carregadas com a matéria, bem como

problemas de localização do potencial, ou mesmo efeitos de polarização precisariam ser levados em conta. Alguns trabalhos descrevem a distribuição de energia dos neutrinos sujeitos a interações com a matéria bem como a dependência da energia como função da helicidade. A captura de neutrinos em estados ligados, reflexões por barreiras de potencial e o processo de criação e aniquilação de pares são outros fenômenos que podem merecer atenção [93]. Por fim, sob o ponto de vista fenomenológico, a inclusão desses efeitos pode ter algum impacto sobre os diferentes estudos de processos de neutrinos que se propagam em meios astrofísicos e cosmológicos [94].

O efeito de *zitterbewegung* em termos de observáveis semiclássicos e possibilidades de interações com a matéria.

Ao longo deste texto, procuramos demonstrar que a teoria quântica relativística para partículas de *spin* $\frac{1}{2}$ introduzida por Dirac encontra-se permeada de fenômenos, no mínimo, curiosos. Em particular, o efeito de *zitterbewegung* identificado primeiramente por Schroedinger [95] traz a coexistência entre partículas e antipartículas na teoria de Dirac, sem qualquer análogo clássico. Somente uma prescrição com TQC, que prediz os processos de criação e aniquilação de pares, seria capaz de descrever o fenômeno de maneira completamente satisfatória.

Entretanto, dentro do contexto de uma teoria com termos efetivos de interação, o efeito de *zitterbewegung* de uma partícula livre pode ser “removido” por meio da introdução de operadores de posição associados a partículas e, separadamente e independentemente, a antipartículas. Estes operadores estariam livres da interferência entre frequências de sinais opostos que caracterizam o efeito. No caso de interações com potenciais externos, como veremos a seguir, o efeito de *zitterbewegung* não pode ser exatamente eliminado. Na verdade, por meio de uma transformação de Foldy-Whouthuysen envolvendo uma expansão não-relativística, quando aplicada à equação de Dirac, reproduz os termos dominantes da equação de Pauli. O desacoplamento entre partículas e antipartículas prossegue assintoticamente dentro da teoria perturbativa (com potências de $\hbar$). Torna-se possível, então, a construção de operadores de projeção que permitem, semiclassicamente, a separação entre estados de partículas e antipartículas diante da presença de interações com potenciais externos. Deste modo, observáveis quânticos com significado semiclássico podem ser introduzidos e virem a se tornar objetos de um novo estudo que envolva a evolução temporal dos mesmos.

De modo a tornar um pouco mais clara esta discussão, e o modo como o efeito de *zitterbewegung* se apresenta em situações de interação com campos externos, retornamos a construção do operador $Z(t)$ na subseção 3.3.3, ou o seu análogo em três dimensões que definiremos como $\mathbf{Z}(t)$, onde notamos que o efeito de proporcionado pelo mesmo pode

ser removido quando projetamos o operador sobre o qual calculamos o comportamento temporal nos subespaços de estados de partículas (frequências positivas) e de estados de antipartículas (frequências negativas). Se definimos o operador projeção como

$$P_0^\pm = \frac{1}{2} \left(1_{4 \times 4} \pm \frac{H_0}{E_0} \right) \quad (5.18)$$

onde $E_0 = (H_0^* H_0)^{\frac{1}{2}}$, $P_0^+ P_0^- = 0$ e $P_0^+ + P_0^- = 1_{4 \times 4}$. A evolução temporal de um operador posição (em três dimensões) projetado,

$$\mathbf{x}_0^\pm = P_0^\pm \mathbf{x}_0 P_0^\pm, \quad (5.19)$$

seria dada por

$$\mathbf{x}^\pm(t) = \mathbf{x}_0^\pm + \mathbf{p} H_0^{-1} t P_0^\pm \quad (5.20)$$

que corresponde à expectativa prevista pela mecânica clássica, tanto para partículas (+), como para antipartículas (-). A interpretação desta observação é óbvia: partículas e antipartículas se apresentam com evolução temporal em formas diferentes ao mesmo tempo que o efeito de *zitterbewegung* é caracterizado pelo termo de interferência

$$P_0^- \mathbf{x} P_0^+ + P_0^+ \mathbf{x} P_0^- = \mathbf{Z}(t) \quad (5.21)$$

que não aparece na descrição clássica.

Com as informações acima, que correspondem à situação descrita por um operador Hamiltoniano H_0 de uma partícula livre, passaremos a observar o que ocorre quando partículas interagem com campos externos. Vejamos o que acontece quando introduzimos campos eletromagnéticos externos,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \rho(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (5.22)$$

sempre em coordenadas tridimensionais. O operador Hamiltoniano de Dirac passa a ser escrito como

$$H = \gamma_0 \gamma (-i \nabla - e \mathbf{A}(\mathbf{x})) + \gamma_0 m + e \rho(\mathbf{x}) \quad (5.23)$$

ou, na representação do espaço de momentos,

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \gamma_0 \gamma (\mathbf{p} - e \mathbf{A}(\mathbf{x})) + \gamma_0 m + e \rho(\mathbf{x}). \quad (5.24)$$

O operador unitário de evolução temporal passa a ser descrito como

$$U(t) = \exp [-i H t], \quad (5.25)$$

e os autovalores $h(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ da expressão (5.24), calculados para cada ponto $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ do espaço de fases, seriam dados por

$$h^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = e \rho(\mathbf{x}) \pm \sqrt{(\mathbf{p} - e \mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 + m^2} \quad (5.26)$$

Estas últimas funções poderiam ser imediatamente identificadas como Hamiltonianas clássicas de partículas (+) e antipartículas (−), ambas sem spin. As matrizes de projeção associadas aos autovalores seriam descritas exatamente por

$$\mathcal{P}^{\pm} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{1}_{4 \times 4} \pm \frac{H^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{h^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{p})} \right) \quad (5.27)$$

que, no entanto, estão condicionadas ao vínculo

$$(\mathcal{P}^{\pm})^2 - \mathcal{P}^{\pm} = \mathcal{O}(\hbar) \quad (5.28)$$

além de não comutarem com o Hamiltoniano H .

Contudo, é possível estabelecer algumas condições particulares sobre os campos externos (5.22) [63] de modo que tenhamos $\mathcal{O}(\hbar) \rightarrow \mathcal{O}(\hbar^{\infty})$ e recuperemos a condição de *nulidade* do operador de projeção $\mathcal{P}^{\pm}$.

O exemplo do operador posição para uma partícula livre que exibe o efeito de *zitterbewegung* demonstra que nem todos os observáveis quânticos possuem uma interpretação semiclássica imediata. Somente os blocos diagonais com respeito aos operadores projeção $\mathcal{P}^{\pm}$ permitem que se estabeleça uma correspondência clássica e quântica pois somente após a operação de projeção é possível definir uma Hamiltoniana em correspondência com a mecânica clássica. Com este procedimento, torna-se possível a identificação de uma grande classe de observáveis físicos cujo significado clássico correspondente pode ser determinado e, da mesma maneira, daqueles cujo análogo clássico não existe. A extensão deste formalismo [96, 97, 98] para o problema de oscilação de sabores descrito segundo o formalismo com pacotes de ondas de Dirac, em casos que envolvam interações da partícula oscilante com campos e potenciais externos, corresponde a um aspecto que merece um estudo mais cuidadoso, cujos resultados de uma análise teórica podem providenciar resultados ou variáveis que permitam um estudo fenomenológico subsequente.

Em conjunto com os conteúdos sugeridos acima, poderíamos apresentar outros tópicos de igual relevância que podem envolver a descrição teórica apresentada neste trabalho, dentre os quais: a possibilidade de desenvolver um tratamento segundo TQC para partículas fermiônicas (nos moldes apresentados por Beuthe [3] para partículas escalares) o estudo da fase de oscilação adicional dependente do tempo [21, 28] em situações de interação com a matéria, extensões do modelamento de Dirac para outros problemas (espalhamento, tunelamento e estados ligados, etc), ou mesmo a adaptação de processos de oscilação quântica para neutrinos descritos segundo a prescrição de Majorana¹ [100] utilizando algumas idéias apresentadas por Blasone e Palmer [101].

¹No último exemplo, em particular, quando neutrinos são partículas de Majorana, o número leptônico total pode não ser conservado. De fato, tal processo onde um neutrino ν se converte em um antineutrino $\bar{\nu}$ não caracteriza muito bem um processo de oscilação. O fenômeno passível de observação seria o decaimento beta duplo sem neutrinos *neutrinoless double beta decay*. Entretanto, neutrinos de Majorana podem ainda se apresentar em processos onde rotações de *spin* podem ser observadas [99].

Capítulo 6

Conclusões.

Na primeira etapa deste trabalho, no contexto do problema de oscilação quântica de sabores, e suportados pelo formalismo com pacotes de ondas *intermediários*, nós calculamos analiticamente as correções de primeira e segunda ordem para a fórmula de conversão de sabores no caso em que autoestados de massa são descritos por pacotes de ondas *gaussianos*. Sob a condição particular de uma distribuição de momentos altamente centrada, nós obtivemos a expressão explícita para a evolução temporal dos autoestados de massa onde pudemos identificar o *spreading* do pacote de ondas para os regimes (ultra)relativístico e não-relativístico de propagação. Em particular, nós ainda observamos que o *spreading* é de fato um efeito de segunda ordem praticamente irrelevante para partículas se propagando em regime (ultra)relativístico. Além disso, nós verificamos a presença de uma fase dependente do tempo adicional à fase *standard* do termo oscilante da fórmula de conversão de sabores. Esta fase adicional apresenta uma dependência temporal que modifica o caráter oscilante de uma maneira peculiar. Tais modificações são menos relevantes quando $p_0^2 \approx \frac{1}{3}\bar{E}^2$ e mais relevantes para regimes não-relativísticos de propagação. De toda maneira, as mesmas são completamente irrelevantes para regimes ultra-relativísticos uma vez que o comportamento amortecedor do termo de interferência suprime significativamente o comportamento oscilante da fórmula de probabilidades.

Observamos, porém, que tais resultados são fortemente influenciados pelo uso de pacotes de ondas *gaussianos* na descrição dos autoestados de massa. De maneira a verificar como a forma do pacote de ondas poderia modificar a característica amortecedora da probabilidade de oscilação de sabores, nós analisamos o *slippage* entre os pacotes de ondas associados a cada autoestado de massa considerando também uma função *quadrada* e uma função *seno amortecida*. Com o uso de uma aproximação analítica de primeira ordem, através de uma simples comparação entre os comportamentos de amortecimento da probabilidade de oscilação, nós ilustramos que, sob as condições de *slippage* mínimo, a função

seno e a função *gaussiana* proporcionam resultados semelhantes, já a função *quadrada* faz com que as oscilações desapareçam mais rapidamente. Uma alternativa ao tratamento com pacotes de ondas *intermediários* seria o tratamento segundo os preceitos de TQC sobre o qual não nos estendemos neste trabalho por tratar-se de uma ferramenta ainda não consolidada para este estudo. Além disso, é pertinente apontar o fato de que a descrição das partículas oscilantes como espinores soluções da equação de Dirac também não foi ainda elaborada de maneira completa e precisa no formalismo com TQC. Conforme já salientamos, o modelo de Blasone e Vitiello (BV) [55, 65] para oscilações quânticas de férmions corresponde à tentativa mais bem sucedida dentro deste escopo.

Na segunda etapa deste trabalho, o tratamento com o que chamamos de pacotes de ondas de Dirac permitiu uma reavaliação dos resultados obtidos em [22]. Através do tratamento aqui apresentado, tornou-se possível a determinação das modificações que aparecem na fórmula de conversão de sabores que surgem devido à introdução da forma spinorial das funções de onda que descrevem uma partícula fermiônica, no caso, um neutrino. Para descrever a evolução temporal de um autoestado de massa, nós introduzimos pacotes de ondas construídos por meio da superposição de soluções da equação de Dirac. Com um estudo analítico envolvendo pacotes de ondas *gaussianos* nós calculamos os novos efeitos que aparecem explicitamente na fórmula de conversão de sabores. Este estudo levou à conclusão de que a natureza fermiônica das partículas juntamente com a interferência entre as componentes de frequência positiva e negativa de um pacote de ondas que caracteriza um autoestado de massa modificam a expressão *standard* para a probabilidade de oscilação de sabores que, em princípio, é obtida quando, implicitamente, se assume uma natureza escalar das partículas envolvidas no processo. De toda maneira, sob certas condições particulares, isto é, sob um regime ultra-relativístico de propagação e com um pacote de ondas descrito a partir de uma distribuição de momentos altamente centrada, estas modificações introduzem fatores de correção proporcionais a $\left(\frac{\Delta m}{2p}\right)^2$ que de fato são pequenas no regime ultra-relativístico [22]. Isto leva à conclusão de que, apesar de ser frequentemente criticado, o formalismo *standard* que utiliza a prescrição com ondas planas para o cálculo da fórmula de conversão de sabores pode ser reconsiderado quando o mesmo é interpretado de maneira apropriada, porém, a descrição mais satisfatória do fenômeno de oscilação de sabores para partículas fermiônicas ocorre quando recorremos ao formalismo com pacotes de ondas de Dirac onde todos os fenômenos inerentes a um estudo com pacotes de ondas continuam em evidência em conjunto com outros fenômenos típicos de uma evolução temporal regida pela equação de Dirac. De fato, este tratamento em mecânica quântica é repleto de informações que podem descrever diversos efeitos físicos os quais foram interpretados neste texto. Em particular, nos referimos ao efeito de *zitterbewegung* e à possibilidade de oscilações quirais acopladas à conversão de sabores. Ao assumirmos que as interações na fonte e no detec-

tor são quirais, somente a componente com quiralidade negativa contribui de fato para a propagação de um pacote de ondas de Dirac. Neste caso, fomos obrigados a considerar oscilações quirais acopladas a oscilações de sabor e, assim, quantificar as modificações que aparecem em relação a fórmula *standard* de oscilação de sabores. Observamos que estas modificações introduziram fatores de correção proporcionais a $m_{1,2}^2/p_0^2$, os quais, contudo, são praticamente indetectáveis do ponto de vista experimental corrente.

Sobre a metodologia utilizada no desenvolvimento deste trabalho, nós apenas enfatizamos que, apesar de ser mais preciso e, eventualmente, fornecer resultados exatos, um tratamento numérico do problema de oscilações não nos permitiria observar determinados efeitos físicos ou analisar informações que permeiam o processo de oscilação quântica, as quais aparecem somente com o estudo analítico.

Para finalizarmos, procuramos sumarizar as diversas possibilidades de extensão do estudo desenvolvido e apresentado neste trabalho que, eventualmente, podem ser exploradas em trabalhos subseqüentes:

- Estender do estudo feito em [21] onde, em um estudo analítico do fenômeno de oscilação quântica de sabores no vácuo, foram quantificadas as correções de primeira e segunda ordem do caráter oscilante das partículas descritas por pacotes de ondas que se propagam no espaço-tempo. Dentro de um estudo analítico semelhante, pretendemos analisar como a interação com a matéria no processo de propagação/oscilação pode alterar a descrição do processo de conversão de sabores segundo o formalismo com pacotes de ondas para partículas no vácuo que, por si só, já permite a quantificação de fenômenos interessantes como o *spreading* e o *slippage* [27, 21] além da introdução de uma fase adicional dependente do tempo [21, 28] que pode alterar o caráter oscilante na fórmula de conversão de sabores. A interação com a matéria seria descrita segundo os preceitos do modelo MSW e, em situações particulares, investigaríamos os efeitos do mecanismo de precessão ressonante spin-sabor [102] induzido por momento magnético de neutrinos (para neutrinos solares e supernovas [103, 104]).

- Investigar como o caráter fermiônico em um formalismo com pacote de ondas de Dirac [22] pode levar a novos efeitos decorrentes da interação com a matéria no tratamento do fenômeno de oscilação quântica de sabores. A descrição de neutrinos como partículas fermiônicas, soluções spinoriais da equação de Dirac, permite a quantificação de efeitos adicionais que ocorrem simultaneamente ao fenômeno de conversão sabores [22] e que introduzem pequenas modificações na fórmula de oscilação. A interferência entre soluções de frequência positiva e negativa da equação de Dirac lança base para a observação do efeito de *zitterbewegung*. Como consequência, novos efeitos, alguns deles muito particulares, como o de oscilação quiral [23, 20], podem ser quantificados. A presença de um mecanismo de interação do tipo MSW, ou mesmo interações com campos magnéticos externos, pode

conduzir a pequenas modificações efetivas no processo de conversão de sabores, as quais pretendemos quantificar, novamente, com um estudo analítico. Pretendemos estabelecer uma correlação entre processos de oscilação quiral [23] e processos de inversão de spin em campos magnéticos.

- Verificar as possibilidades de extensão do formalismo com pacotes de ondas *intermediários*, utilizado na execução dos itens acima, para o formalismo com teoria quântica de campos para partículas fermiônicas.

- Em algumas áreas correlatas podemos também nos estender a tópicos paralelos que envolvam o estudo de estados ligados em situações de interação com a matéria segundo o formalismo de Dirac, ou mesmo estudos que envolvam a invariância de Lorentz no estudo do fenômeno de oscilação. Em particular, para este último tópico, acreditamos que o desenrolar dos estudos teóricos deverá se desenvolver em conformidade com um formalismo de teoria quântica de campos, o qual se apresenta como o paradigma atual na literatura [3, 66] mas que, porém, ainda não apresenta uma formulação consistente que permita descrever partículas oscilantes como propagadores fermiônicos [3, 22].

Por fim, esperamos que este trabalho teórico tenha contribuído para esclarecer diversos aspectos que de longa data foram introduzidos no estudo dos fenômenos quânticos de oscilação e, além disso, possa se apresentar como mais uma ferramenta para o estudo de fenômenos de oscilação quântica em geral e, em particular, nos casos envolvendo a física de neutrinos.

Suporte Financeiro.

Este trabalho foi realizado graças ao suporte financeiro do Programa de Doutorado da CAPES bem como do Programa de Doutorado com Estágio no Exterior-PDEE desta mesma agência.

Apêndices

A.1 Simetrias envolvidas no estudo de neutrinos e misturas de sabor.

Dentre os aspectos mais belos das modernas teorias em física de partículas, destacamos a relação observada entre as forças mediadas por partículas de *spin* 1 e as simetrias de calibre locais. Dentro do modelo padrão, as interações fortes e eletrofracas são descritas em termos do acoplamento de simetrias [105] $G_{MP} \equiv SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ onde c se refere ao número quântico de cor, L é usado para designar ao caráter quirial positivo (*left*) das interações eletrofracas e Y corresponde ao número quântico de hipercarga. Muitos fenômenos são então explicados por propriedades destas simetrias. Em particular, o modo pelo qual vários férmions são afetados por diferentes tipos de interações é determinado por suas representações (ou simplesmente pelas respectivas cargas em grupos de calibre Abelianos) sob os grupos de simetria a que correspondem.

Neutrinos são férmions que não interagem mediante acoplamentos forte e eletromagnético. Na linguagem acima referida, os neutrinos são descritos por singletos do grupo $SU(3)_c$ bem como do grupo $U(1)_{EM}$ das interações eletromagnéticas que resulta da quebra espontânea de simetria do acoplamento eletrofraco $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ da teoria GWS [81]. Dentro de uma descrição um pouco mais ampla, o modelo padrão é baseado no grupo de calibre G_{MP} , com três gerações de férmions, onde cada geração é descrita em termos de cinco representações distintas de $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$,

$$\begin{aligned}
 L_\ell &= \begin{pmatrix} \nu_{L\ell} \\ \ell_L \end{pmatrix} \equiv (1, 2, -\frac{1}{2})_{G_{MP}} \\
 Q_L &= \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \equiv (3, 2, +\frac{1}{6})_{G_{MP}} \\
 \ell_R &\equiv (1, 1, -1)_{G_{MP}} \\
 u_R &\equiv (3, 1, +\frac{2}{3})_{G_{MP}} \\
 d_R &\equiv (3, 1, -\frac{1}{3})_{G_{MP}}.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

além de, simbolicamente, uma componente $\nu_R \equiv (0, 0, 0)_{G_{MP}}$ completamente “estéril”. Segundo esta classificação, os neutrinos $\nu_{L\ell}$ interagem unicamente segundo interações fracas

de caráter *left* e são, portanto, representados por multipletos (não-singlete) do $SU(2)_L$. De forma mais específica, estes neutrinos são descritos como uma componente de dubletos leptônicos L_ℓ onde $\ell = e, \mu, \tau$ correspondem aos autoestados de massa dos léptons (elétron, múon e táuon) carregados e ν_e, ν_μ e ν_τ correspondem aos autoestados da Hamiltoniana de interação dos neutrinos com sabor correspondente a cada geração ℓ . Todas as interações envolvendo neutrinos dentro do modelo padrão são descritas segundo as correntes leptônicas de interação via bósons de calibre carregados $W_\mu^\pm$ (CC) que são observadas na Lagrangiana de interação descrita por

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_\ell \bar{\nu}_{L\ell} \gamma^\mu \ell_L^- W_\mu^+, \quad (6.2)$$

assim como as correntes leptônicas de interação via bósons de calibre neutros Z_μ^0 (CN) são observadas na Lagrangiana de interação descrita por

$$\mathcal{L}_{CN} = \frac{g}{2 \cos \theta_W} \sum_\ell \bar{\nu}_{L\ell} \gamma^\mu \nu_{L\ell} Z_\mu^0, \quad (6.3)$$

onde g é a constante de acoplamento do $SU(2)_L$ e θ_W é o ângulo eletrofraco de mistura [64]. Esta última expressão é importante na medida em que podemos determinar a largura de decaimento do bóson vetorial neutro Z^0 em neutrinos (interagentes). Em confronto com dados experimentais já consolidados [106], é possível determinar com extrema precisão que o número de gerações englobadas pelo modelo padrão é de fato menor do que três.

Termos de massa dos férmions.

Neste ponto, uma vez que os férmions residem em representações quirais do grupo de calibre em questão, a construção dos termos de massa para férmions se torna um problema sério pois todos os termos correspondentes a esta propriedade são proibidos por invariância de calibre global. De fato, as massas dos férmions são obtidas a partir de interações do tipo Yukawa com o chamado bóson de Higgs onde, por meio do mecanismo de quebra espontânea de simetria, esta nova partícula introduzida segundo uma representação de um dubleto $\phi \equiv (1, 2, +\frac{1}{2})_{G_{MP}}$ permite a descrição dos termos de massa a partir da Lagrangiana de Yukawa descrita por

$$\mathcal{L}_{Yuk} = -Y_{ij}^d \bar{Q}_{Li} \phi d_{Rj} - Y_{ij}^u \bar{Q}_{Li} \tilde{\phi} u_{Rj} - Y_{ij}^\ell \bar{Q}_{Li} \phi \ell_{Rj} + h.c.. \quad (6.4)$$

onde $\tilde{\phi} = i \tau_2 \phi^*$. O valor esperado de vácuo não nulo de ϕ ,

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

que garante a quebra da simetria $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ em $U(1)_{EM}$, permite-nos descrever a massa dos férmions em termos do parâmetro v e dos elementos de matriz $Y_{ij}^{u,d,\ell}$. É também fácil observar que tal formulação prevê massa nula para os neutrinos.

Conceber massa a neutrinos dentro do próprio modelo padrão envolve a restrição de algumas propriedades fenomenológicas nem sempre muito interessantes. A primeira possibilidade corresponde a um acoplamento de neutrinos ν_L e ν_R em um termo do tipo Dirac,

como é feito para férmions carregados. Entretanto, neste caso, o termo de massa $m_D \propto Y_\nu v$ para neutrinos com massa da ordem de eV levaria a $Y_\nu \approx 10^{-11}$ de modo que não se encontra um motivo para um valor tão pequeno. A segunda possibilidade corresponde ao acoplamento de neutrinos $\nu_{L\ell}$ do dubleto L_ℓ com Higgs do dubleto Φ_L em um termo de massa de dimensão 5 [107]:

$$\mathcal{L}_\Lambda = \frac{f_{ij}}{\Lambda} L_i \Phi_L L_j \Phi_L + h.c., \quad (6.6)$$

onde i e j são índices de sabores e as massas para neutrinos seriam dadas por

$$(\mathcal{M}^\nu)_{ij} = \frac{f_{ij} v^2}{\Lambda}. \quad (6.7)$$

Existe ainda uma terceira hipótese, porém, já descartada experimentalmente, em que se considera um tripleto de Higgs Δ_L envolvido em uma eventual quebra de simetria *left-right* do modelo $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-l}$ de Mohapatra e Pati [76]. Ainda com relação à massa expressa implicitamente em (6.6), a escala de massas para neutrinos ficaria suprimida em comparação com a escala de massas para férmions carregados por um fator v/Λ . O acoplamento da forma (6.6) expressa não somente a violação da conservação de número leptônico total como também a quebra da simetria de sabores para léptons. Isso possibilita a violação CP bem como a mistura de sabores para léptons.

De toda forma, o cenário mais adequado para descrever a massa dos neutrinos corresponde àquele descrito pelo mecanismo *see-saw* [108, 109]. Segundo este mecanismo, onde supõe-se a existência de um neutrino estéril N_ℓ pesado, o termo de massa para férmions viria de acoplamentos de massa “nua” (*bare mass*) e de interações do tipo Yukawa,

$$\mathcal{L}_N = -\frac{1}{2} M_{N_{ij}} \overline{N_i^C} N_j - Y_{ij}^\nu \overline{L_{\ell i}} \tilde{\phi} N_j + h.c. \quad (6.8)$$

Neste caso, para neutrinos descritos em uma base (ν_{L_i}, N_j) podemos representar a matriz de massa como

$$\mathcal{M}^\nu = \begin{bmatrix} 0 & Y^\nu \frac{v}{\sqrt{2}} \\ Y^{\nu T} \frac{v}{\sqrt{2}} & M_N \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

onde, se $M_N \gg v$, a diagonalização de $\mathcal{M}^\nu$ resultaria em três autoestados de massas com forma analítica semelhante à representada na Eq. (6.7). Contudo, novas possibilidades podem ser abertas ao se adicionar novos campos leptônicos. A extensão mais relevante do mecanismo *see saw* corresponde àquela onde um número arbitrário de neutrinos estéreis ν_{si} , com representação $(1, 1, 0)_{G_{MP}}$, permite a construção de dois tipos de termos de massa provenientes de termos renormalizáveis de modo que a Lagrangiana de massa possa ser representada por

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}^\nu} = -M_{D_{ij}} \overline{\nu_{L_i}} \nu_{sj} - \frac{1}{2} M_{N_{ij}} \overline{\nu_{L_i}^C} \nu_{sj} + h.c., \quad (6.10)$$

onde $\nu^C = C \bar{\nu}^T$ representa o campo de carga conjugada para C correspondendo à matriz de conjugação de carga. O primeiro termo de (6.10) corresponde a um termo de massa de Dirac proveniente da quebra espontânea de simetria do termo de Yukawa $Y_{ij}^\nu \overline{L_{\ell i}} \tilde{\phi} \nu_{sj}$,

semelhante ao que ocorre para férmions carregados. Neste tipo de interação, o número leptônico é conservado. O segundo termo de (6.10) corresponde a um termo do tipo Majorana. Trata-se de um invariante (singleto) do grupo G_{MP} onde, porém, a conservação de número leptônico é violada, razão pela qual tais termos não são permitidos para férmions carregados, os quais, por definição, carregam os números quânticos da simetria $U(1)_{EM}$. Como neutrinos não carregam cargas de $U(1)_{EM}$, é comum representarmos a condição de Majorana como $\nu_k^C = \nu_k$.

De maneira geral, poderíamos representar $\mathcal{L}_{\mathcal{M}^\nu}$ como

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}^\nu} = -\frac{1}{2} \bar{\nu}^C \mathcal{M}^\nu \nu + h.c., \quad (6.11)$$

com $\bar{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_{Li} \\ \nu_{sj} \end{pmatrix}$ e $\mathcal{M}^\nu = \begin{pmatrix} 0 & M_D \\ M_D^T & M_N \end{pmatrix}$, com M_D determinado em termos da escala de energia eletrofraca v . Por meio desta matriz de massas, podemos observar três casos interessantes em que se difere a hierarquia de escalas entre M_N e M_D ,

(i) No caso em que $M_N \gg v$, o modelo padrão poderia ser considerado uma boa teoria efetiva em escalas de energia abaixo da escala de quebra espontânea de simetria (v). A diagonalização de $\mathcal{M}^\nu$ resultaria em três autoestados de massa com forma analítica semelhante à representada na Eq. (6.7). Estes autoestados representariam neutrinos com massa muito pequena que se acoplam como neutrinos de Majorana.

(ii) No caso em que $M_N \approx v$, o modelo padrão passa a não ser mais uma boa teoria efetiva para interações eletrofracas uma vez que haveriam mais do que três autoestados de massa muito pequena que são descritos como combinações de dubletos e singletos. Novamente, estes estados corresponderiam a neutrinos de Majorana.

(iii) No caso em que o termo de massa de Majorana M_N é nulo, recupera-se a simetria de número leptônico. Os termos de massa seriam, aqui, do tipo Dirac, gerados pelo mecanismo de Higgs. Neste caso, os neutrinos estéreis, em seus respectivos sabores, seriam identificados como a componente *right-handed* de um campo espinorial de quatro componentes.

Do ponto de vista fenomenológico, há pouca diferença no confronto entre termos de massa de Dirac e de Majorana no estudo de oscilações de sabor. A questão é, no entanto, relevante no estudo do decaimento beta duplo sem neutrinos [41]. Do ponto de vista teórico, entretanto, o confronto é pertinente. Somente para neutrinos do tipo Majorana que, através do mecanismo *see-saw*, é possível a construção de uma justificativa para a existência de massas muito pequenas para estes férmions.

A.2 Considerações sobre a criação não-instantânea.

É fácil observar que, para dois pacotes de ondas que se propagam em uma região comum do espaço (*overlap*), em um certo tempo T e para uma certa posição x_f , haverá certamente a interferência entre pontos do pacote de ondas que estavam distantes entre si no momento da criação por $\Delta x_{in} = -\Delta v T$. Isto implicaria na presença de uma fase inicial adicional

$$\Delta\Phi_{in} = -p_0 \Delta x_{in} = p_0 \Delta v T \quad (6.12)$$

automaticamente incluída no cálculo com pacote de ondas de modo que a fase total resultante seria dada por

$$\Delta\Phi_{tot} = \Delta\Phi_{in} + T \Delta E - p_0 \Delta L = T \Delta E \quad (6.13)$$

Neste cenário, os autoestados de sabor *não podem* ser únicos em todos os pontos de criação. Cada ponto do pacote de ondas é associado à uma dependência apropriada da fase que depende de x_{in} .

Entretanto, estudamos o fenômeno de oscilação de sabores, até este ponto, segundo uma aproximação por pacotes de ondas *intermediários* em um cenário onde $\Delta p \approx 0$. Para o caso em que $\Delta p \neq 0$, nós identificaríamos uma diferença de fase inicial entre os autoestados de massa dada por $-\Delta p x_c$, onde x_c é um ponto espacial onde a criação ponto a ponto de um pacote de ondas ocorre. Este efeito indesejado pode ser evitado quando consideramos, para cada ponto x_c , um tempo de criação t_c de modo a satisfazer a relação

$$\Delta E t_c - \Delta p x_c = 0, \quad (6.14)$$

permitindo a criação de um autoestado de sabor “ao longo” do processo de criação (*pure flavor creation event-wise*) [27]. Neste caso, segundo o formalismo com ondas planas, encontraríamos,

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= E_1 (T - t_{1,c}) - p_1 v_1 (T - t_{1,c}), \\ \Phi_2 &= E_2 (T - t_{2,c}) - p_2 v_2 (T - t_{2,c}) \\ \Rightarrow \Delta\Phi &= T [\Delta E - \Delta(pv)] - \Delta(E t_c) + \Delta(p v t) \end{aligned} \quad (6.15)$$

que representa a generalização do processo de criação não-instantânea [27]. Contudo, como já observamos, no formalismo com pacotes de ondas, as fases iniciais adicionais são automaticamente incluídas na expressão para a fase total. Assim, para criação não-instantânea, a contribuição destas fases adicionais seria de

$$\begin{aligned} \Phi_{1,in} &= E_1 t_{1,c} - p_1 [x_f - v_1 (T - t_{1,c})], \\ \Phi_{2,in} &= E_2 t_{2,c} - p_2 [x_f - v_2 (T - t_{2,c})] \end{aligned}$$

Teríamos, então,

$$\Delta\Phi_{in} = -\Delta p x_f + T \Delta(pv) + \Delta(E t_c) - \Delta(p v t_c), \quad (6.16)$$

Neste caso, após a integração ($x_f \rightarrow L$), a diferença de fase total segundo a expressão (6.13) seria

$$\Delta\Phi = -T \Delta E + L \Delta p \quad (6.17)$$

de modo que a contaminação por sabores diferentes seja eliminada no momento da criação. No entanto, como o processo de criação não deve, de fato, ocorrer em um único instante de tempo, não é possível obter um autoestado de sabor puro em um tempo fixo, exceto em um instante muito próximo a $t = 0$, quando, sob um procedimento de medida, a função de onda é colapsada, na maioria dos casos, para zero.

Referências Bibliográficas

- [1] H. J. Lipkin, Phys. Lett. **B 348**, 604 (1995).
- [2] M. Zralek, Acta Phys. Polon. **B 29**, 3925 (1998).
- [3] M. Beuthe, Phys. Rep. **375**, 105 (2003).
- [4] K. Zuber, Phys. Rep. **305**, 295 (1998).
- [5] K. Scholberg, hep-ex/0308011
- [6] W. M. Alberico and S. M. Bilenky, Prog. Part. Nucl. **35**, 297 (2004).
- [7] M. C. Gonzalez-Garcia and Y. Nir, Rev. Mod. Phys. **75**, 245 (2003).
- [8] R. D. McKeown and P. Vogel, Phys. Rep. **395**, 315 (2004).
- [9] C. Giunti and C. W. Kim, Phys. Rev. **D 58**, 017301 (1998).
- [10] A series of papers on Super-Kamiokande data about atmospheric neutrino fluxes, "*Superkamiokande Collaboration*",
S. Fukuda *et al.*, Phys. Lett. **B 537**, 179 (2002),
S. Fukuda *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86**, 5651 (2001),
S. Fukuda *et al.*, Phys. Rev. Lett. **85**, 3999 (2000).
- [11] A series of papers on SNO data about solar neutrino oscillation, "*SNO Collaboration*",
Q. R. Ahmad *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 011302 (2002),
Q. R. Ahmad *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 011301 (2002),
Q. R. Ahmad *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 071301 (2001).
- [12] K. Egushi *et al.*, "*KamLAND Collaboration*", *First results from KamLAND: Evidence for reactor anti-neutrino disappearance*, Phys. Rev. Lett. **90**, 021802 (2003).
- [13] C. W. Kim and A. Pevsner, *Neutrinos in Physics and Astrophysics*, (Harwood Academic Publishers, Chur, 1993).

- [14] B. Kayser, F. Gibrat-Debu and F. Perrier, *The Physics of Massive Neutrinos*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [15] L. Alvarez-Gaumé *et al.*, Phys. Lett. **B 592**, 145 (2004), in [PDG Collaboration] Review of Particle Physics in *Neutrino mass, mixing and flavor change* by B. Kayser.
- [16] B. Kayser, Phys. Rev. **D 24**, 110 (1981).
- [17] C. Giunti C. W. Kim and U. W. Lee, Phys. Rev. **D 44**, 3635 (1991).
- [18] J. Rich, Phys. Rev. **D 48**, 4318 (1993).
- [19] C. Giunti, C. W. Kim, J. W. Lee and U. W. Lee, Phys. Rev. **D 48**, 4310 (1993).
- [20] S. De Leo and P. Rotelli, Int. J. Mod. Phys. **37**, 2193 (1998).
- [21] A. E. Bernardini and S. De Leo, Phys. Rev. **D 70**, 053010 (2004).
- [22] A. E. Bernardini and S. De Leo, Eur. Phys. J. **C 37**, 471 (2004).
- [23] A. E. Bernardini and S. De Leo, Mod. Phys. Lett. **A xx**, xxxx (2005)
- [24] A. E. Bernardini and S. De Leo, submetido para publicação em Nucl. Phys. **B** , (2005)
- [25] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1987).
- [26] C. Giunti, *JHEP* **0211**, 017 (2002).
- [27] S. De Leo, C. C. Nishi and P. Rotelli, Int. J. Mod. Phys. **A 19**, 677 (2004).
- [28] J. Field, Eur. Phys. J. **C 30**, 305 (2003).
- [29] M. Gell-Mann and A. Pais, Phys. Rev. **97**, 1387 (1955).
- [30] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, (John Wiley & Sons, New York, 1987)
- [31] A. Pais and O. Piccioni, Phys. Rev. **100**, 1487 (1955).
- [32] V. L. Fitch, P. A. Piroué and R. B. Perkins, Nuovo Cimento **22**, 1160 (1961).
- [33] R. H. Good *et al.*, Phys. Rev. **124**, 1223 (1961).
- [34] P. K. Kabir, *The CP Puzzle*, (Academic Press, New York, 1968), and references therein.

- [35] H. Albrecht *et al.*, Phys. Lett. **B 192**, 245 (1987).
- [36] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP **B 6**, 429 (1957).
- [37] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP **B 7**, 172 (1958).
- [38] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1972).
- [39] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP **B 26**, 984 (1968).
- [40] V. N. Gribov and B. Pontecorvo, Phys. Lett. **B 28**, 493 (1969).
- [41] F. Boehm and P. Vogel, *Physics of Massive Neutrinos*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [42] J. N. Bahcall, M. C. Gonzalez-Garcia and C. Pena-Garay, JHEP. **0207**, 054, 2002.
- [43] A. Bandyopadhyay, S. Choubey, S. Goswami and D. P. Roy, Phys. Lett. **B 540**, 014, 2002.
- [44] V. Barger *et al.*, Phys. Lett. **B 537**, 179, 2002.
- [45] K. Hagiwara *et al.*, Phys. Rev. **D 66**, 010001 (2002), in [PDG Collaboration] Review of Particle Physics in *Solar Neutrinos* by K. Nakamura.
- [46] M. Guzzo *et al.*, Nucl. Phys. **B 629**, 479 (2002).
- [47] J. Barranco *et al.*, Phys. Rev. **D 66**, 093009 (2002).
- [48] D. V. Ahluwalia-Khalilova and Irina Dymnikova, *hep-ph/0305158*.
- [49] Y. Takeuchi, Y. Tazaki, S. Tsai and T. Yamazaki, Mod. Phys. Lett. **A 14**, 2319 (1999).
- [50] Y. Takeuchi, Y. Tazaki, S. Tsai and T. Yamazaki, Prog. Theor. Phys. **105**, 471 (2001).
- [51] C. Giunti, Mod. Phys. Lett. **A 16**, 2363 (2001).
- [52] S. De Leo, G. Ducati and P. Rotelli, Mod. Phys. Lett. **A 15**, 2057 (2000).
- [53] C. Giunti, *hep-ph/0202063*.
- [54] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe, *Quantum Mechanics Vol.I*, (John Wiley & Sons, Paris, 1977).
- [55] M. Blasone and G. Vitiello, Annals Phys. **244**, 283 (1995).

- [56] M. Blasone, A. Capolupo and G. Vitiello, *Phys. Rev. D* **66**, 025033 (2002).
- [57] M. Blasone, P. Jizba and G. Vitiello, *hep-ph/0308009*.
- [58] M. O. C. Gomes, *Teoria Quântica de Campos*, (EdUsp, São Paulo, 2002).
- [59] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (Mc Graw-Hill Inc., New York, 1980).
- [60] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, (Cambridge University Press, New York, 1995).
- [61] J. Vaz Jr. and W. A. Rodriguez Jr., *Phys. Lett. B* **319**, 203 (1993).
- [62] W. A. Rodriguez Jr. *et al.*, *Phys. Lett. B* **318**, 623 (1993).
- [63] J. Bolte and R. Glaser, *quant-ph/0402154*
- [64] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, (Addison - Wesley Publishing Company, New York, 1995).
- [65] M. Blasone, P. P. Pacheco and H. W. Tseung, *Phys. Rev. D* **67**, 073011, (2003).
- [66] C. Giunti, C. W. Kim and U. W. Lee, *Phys. Rev. D* **45**, 2414 (1992).
- [67] K. Kiers and N. Weiss, *Phys. Rev. D* **57**, 3091 (1998).
- [68] I. Yu. Kobzarev, B. V. Martemyanov, L. B. Okun and M. G. Shchepkin, *Sov. J. Nucl. Phys.* **35**, 708 (1982).
- [69] Y. Srivastava, A. Widom and E. Sassaroli, *Eur. Phys. J. C* **2**, 769 (1998).
- [70] C. Athanassopoulos *et al.*, "*LSND Collaboration*", *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1774 (1998).
- [71] A. Bandyopadhyay *et al.*, *hep-ph/0309174*.
- [72] T. Yanagida, *Proc. of the Workshop on Unified Theory and the Baryon Number of the Universe*, (KEK, Japan, 1979).
- [73] J. C. D'Olive, J. F. Nieves and P. B. Pal, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1088 (1990).
- [74] G. Barenboim, J. Bernabéu and O. Vives, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3299 (1996).
- [75] J. C. D'Olive and J. F. Nieves, *hep-ph/9512428*.
- [76] R. N. Mohapatra and J. C. Pati, *Phys. Rev. D* **11**, 566 (1975).

- [77] F. Pisano and V. Pleitez, *Phys. Rev. D* **46**, 410 (1992).
- [78] V. Pleitez and M. D. Tonasse, *Phys. Rev. D* **48**, 2353 (1993).
- [79] F. Pisano and V. Pleitez, *Phys. Rev. D* **51**, 3855 (1995).
- [80] H. N. Long and P. B. Pal, *Mod. Phys. Lett. A* **13**, 2355 (1998).
- [81] S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **20**, 579 (1961),
A. Salam, *Elementary Particle Theory*, (N. Svartholm, Stocholm, 1968), p.367,
S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967).
- [82] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967).
- [83] H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 438 (1974).
- [84] B. Kayser and Stodolsky, *Phys. Lett. B* **359**, 333 (1995).
- [85] J. Lowe and *et al.*, *Phys. Lett. B* **384**, 228 (1996).
- [86] Yu. Grossmann and H. J. Lipkin, *Phys. Rev. D* **55**, 2760 (1996).
- [87] W. Grimus and P. Stockinger, *Phys. Rev. D* **54**, 3414 (1996).
- [88] J. Bahcall, M. Gonzalez-Garcia, C. Pena-Garay, hep-ph/0406294.
- [89] L. Wolfenstein, *Phys. Rev. D* **17**, 2369 (1978); *ibid* **20**, 2634 (1979),
S. P. Mikheyev and A. Yu. Smirnov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **42**, 913 (1986); *Nuovo Cimento C9*, 17 (1986).
- [90] I. Ternov, *Sov. Phys. Usp.* **28**, 405 (1995).
- [91] A. Borisov, V. Zhukovsky and A. Ternov, *Sov. Phys. J.* **31**, 228 (1988).
- [92] A. Egorov, A. Lobanov and A. Studenikin, *Phys. Lett. B* **491**, 137 (2000).
- [93] L. N. Chang and R. K. Zia, *Phys. Rev. D* **38** 1669 (1988); *idem* *Phys. Rev. Lett.* **64**, 115 (1990),
J. Pantaleone, *Phys. Lett. B* **268**, 227 (1991); *idem* *Phys. Rev. D* **46**, 510 (1992),
K. Kiers and N. Weiss, *Phys. Rev. D* **56** 5776 (1997),
A. Loeb, *Phys. Rev. D* **64**, 115 (1990).
- [94] G. Fuller, R. Mayle, J. Wilson and D. Schramm, *ApJ* **322**, 795 (1987).
- [95] E. Schroedinger, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. Physik.-Math* **24**, 418 (1930).

- [96] J. Bolte and S. Keppeler, Phys. Rev. Lett. **81**, 1987 (1998).
- [97] J. Bolte and S. Keppeler, Annals Phys. **274**, 175 (1999).
- [98] J. Bolte and R. Glaser, Annals Phys. **293**, 1 (2003).
- [99] P. Langacker and J. Wang, Phys. Rev. **D 58**, 093004 (1998).
- [100] E. Majorana, Nuovo Cimento **14**, 171 (1937).
- [101] M. Blasone and J. S. Palmer, Phys. Rev. **D 69**, 057301, (2004).
- [102] C. S. Lim and W. J. Marciano, Phys. Rev. **D 37**, 1368 (1988),
E. Kh. Akhmedov, Phys. Lett. **B 213**, 64 (1988).
- [103] H. Minakata and H. Nunokawa, Phys. Rev. Lett. **63**, 121 (1989), *idem* Phys. Lett.
B 245, 197 (1990), *idem* Phys. Rev. **D 43**, 297 (1991).
- [104] H. Nunokawa, Y.-Z. Qian and G. M. Fuller, Phys. Rev. **D 55**, 3265 (1997), H.
Nunokawa, R. Tomàs and J. W. F. Valle, *Astropart. Phys.* **11**, 317 (1999).
- [105] C. Quigg, *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*
in Frontiers of Physics, Vol. 56, (Addison - Wesley Publishing Company, New York,
1983).
- [106] L. Alvarez-Gaumé *et al.*, Phys. Lett. **B 592**, 451 (2004), in [PDG Collaboration] Re-
view of Particle Physics in *Understanding two-flavor oscillation parameters and limits*
by D. E. Groom
- [107] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **43**, 1566 (1979).
- [108] M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, in *Complex Spinors And Unified Theories*
in Supergravity, (North Holland, Amsterdam, 1979).
- [109] R. N. Mohapatra, *Unification and Supersymmetry* (Springer - Verlag, Berlin, 1986).

Publicações no Período do Doutorado - 03/2001 a 03/2005.

- 1) A. E. Bernardini and C. Dobrigkeit, *Meson masses with WKB approximation and soft QCD*, Proceedings of the International Workshop on Hadron Physics 2000, Eds. F.S. Navarra, M.R. Robilotta and G. Krein, World Scientific Pub. Co., 465 (2001),
- 2) A. E. Bernardini and C. Dobrigkeit, *The charmonium and bottomonium mass spectroscopy with a simple approximation of the kinetic term*, J. Phys. G **29**, 1439 (2003),
- 3) A. E. Bernardini, *Um modelo para interações entre quarks: a redução não-relativística em modelos de potenciais*, Revista Brasileira de Ensino de Física **25**, 305 (2003),
correspondentes aos trabalhos desenvolvidos no mestrado.
- 4) A. E. Bernardini, *Uma discussão sobre quiralidade: Números quânticos para modelos de oscilação quiral "left $\bar{U}$ right" com simetria de gauge $SU(4)$* , Revista Physicae **03**, 05 (2002),
- 5) A. E. Bernardini e S. De Leo, *Oscilação quântica de sabores com pacotes de ondas*, Revista Brasileira de Ensino de Física **26**, 335 (2004),
- 6) A. E. Bernardini and S. De Leo, *Analytic approach to the wave packet formalism in oscillation phenomena*, Phys. Rev. D **70**, 053010 (2004),
- 7) A. E. Bernardini and S. De Leo, *Dirac spinors and flavor oscillations*, Eur. Phys. J. C **37**, 471 (2004),
- 8) A. E. Bernardini, S. De Leo and P. P. Rotelli, *Above barrier potential diffusion*, Mod. Phys. Lett. A **19**, 2717 (2004),
- 9) A. E. Bernardini and S. De Leo, *Flavor and chiral oscillations*, Mod. Phys. Lett. A **xx**, xxxx (2005),
- 10) A. E. Bernardini and S. De Leo, *Flavor and chiral oscillations with Dirac wave packets*, aceito para publicação em Phys. Rev. D **xx**, xxxx (2005),
- 11) A. E. Bernardini and S. De Leo, *Flavor and chiral oscillations with Dirac spinors*, to be published at Proceedings of Lake Louise Winter Institute 2005, World Scientific, University of Alberta, Canada (2005).
correspondentes aos trabalhos desenvolvidos no doutorado.